

N° d'ordre : /2009/DM

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

## MÉMOIRE

Présenté

AU DEPARTEMENT DE MECANIQUE  
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
UNIVERSITE DE BATNA

Pour obtenir le titre de

**MAGISTER EN GENIE MECANIQUE**  
*Option : Construction Mécanique*

Par

**Mr BELHADJ Mourad**

---

ETUDE PAR ÉLÉMENTS FINIS DES ARBRES CANNELÉS ET  
PARTIELLEMENT CANNELÉS SOUS CHARGEMENT DE  
FLEXION, TORSION ET COMBINÉES.

---

Présenté et soutenu publiquement

Le : 18 / 06 / 2009

**Devant le jury :**

- |                       |                      |            |
|-----------------------|----------------------|------------|
| ➤ Mekki ASSAS         | M.Conf, Univ. Batna  | Président  |
| ➤ Toufik OUTTAS       | Prof, Univ. Batna    | Rapporteur |
| ➤ B.BENMOHAMED        | M.Conf, Univ. Batna  | Examineur  |
| ➤ A.Aziz BOUCHELAGHEM | M.Conf, Univ. Annaba | Examineur  |

## REMERCIEMENT

*Tout d'abord je remercie le bon Dieu puissant de la bonne santé, la volonté, et la patience qu'il ma donné tout au long de mes études.*

*Je présente mes remerciements avec mon profond respect à mon rapporteur*

*Pro. T. OUTTAS*

*Pour son suivi, sa patience, ses conseils et son aide, tout le long de la réalisation de ce modeste travail.*

*Mes remerciements s'adressent également au président de jury Dr Mekki ASSAS et membres de jury Dr A.Aziz BOUCHELAGHEM et Dr B.BENMOHAMED qui m'ont fait l'honneur d'accepter de juger mon travail à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.*

*Je tiens à remercier tous les enseignants du département de mécanique et particulièrement Dr D. BATACHE pour son aide.*

*Je termine par un grand remerciement à mes parents ainsi qu'à toute ma famille.*

## DÉDICACE

*Je dédie ce modeste travail à :*

*Ma chère mère qui n'a vécu que pour me voir  
réussir dans ma vie et avoir un bon statut social ,*

*Mon cher père qui m'a tout donné sans réserve,*

*Mes chers frères et Mes chères sœurs.*

*Tous les enseignants du département de mécanique et  
A tous mes amis.*

## Nomenclature

$\{F\}$	Le champ vectoriel de force ( $N$ )
$\{M\}$	Le champ vectoriel de moment ( $N.m$ )
$G$	Le centre de gravité
$p$	La pression de contact à la position $x$ ( $Mpa$ )
$p_0$	La pression moyenne pour une surface de contact d'une dent ( $Mpa$ )
$p_i$	Pression de contact au nœud $i$ du modèle EF de la cannelure ( $Mpa$ )
$F_{th}$	Force appliquée sur le punch ( $N$ )
$u, v, w$	Le champ de déplacement ( $mm$ )
$ \varepsilon $	Le champ de déformations
$ \Sigma $	Le champ de contrainte ( $Mpa$ )
$\vec{R}_G$	La résultante des efforts
$N$	L'effort normal ( $N$ )
$T_y$ et $T_z$	Les efforts tranchants ( $N$ )
$M_t$	Le moment de torsion ( $N.m$ )
$M_y$ et $M_z$	Les moments fléchissant ( $N.m$ )
$I_y$ et $I_z$	Les moments d'inertie de la section ( $N.m$ )
$J_\rho$	L'inertie polaire de la section
$\rho$	La masse volumique ( $kg/m^3$ )
$R_r$	La résistance à la rupture ( $Mpa$ )
$Re$	La limite élastique ( $Mpa$ )
$E$	Module d'élasticité longitudinal ( $N : mm$ )
$A\%$	L'allongement
$\pi$	3.14159 radians.

### Normalisation française

$Z$	Nombre de dents
$m$	Module
$\alpha$	Angle de pression ( <i>Degré</i> ( $^\circ$ ))
$g_w$	Longueur cannelée utile ( $mm$ )
$D_{II}$	Diamètre mineur maximal du moyeu ( $mm$ )
$D_{EE}$	Diamètre majeur minimal de l'arbre ( $mm$ )
$D$	Diamètre primitif ( $mm$ )
$D_b$	Diamètre de base ( $mm$ )
$S_{min}$	Epaisseur circulaire minimale ( $mm$ )

$E_{max}$	Intervalle circulaire maximal ( <i>mm</i> )
$C$	Couple à transmettre ( <i>N.mm</i> )
$\tau_m$	Cisaillement dans le moyeu ( <i>Mpa</i> )
$\tau_a$	Cisaillement de l'arbre ( <i>Mpa</i> )
$\sigma_a$	Contrainte de compression ( <i>Mpa</i> )
$n$	Nombre de tours par minute ( <i>tr/min</i> )

**Normalisation américaine**

$D$	Diamètre primitif ( <i>inch</i> )
$D_{re}$	Diamètre de pied de dent cannelure extérieure ( <i>inch</i> )
$D_{ri}$	Diamètre de pied de dent cannelure intérieure ( <i>inch</i> )
$D_{oi}$	Diamètre extérieur du moyeu ( <i>inch</i> )
$L$	Longueur de cannelure ( <i>inch</i> )
$L_e$	Longueur effective maximale ( <i>inch</i> )
$N$	Nombre de dents
$P$	Nombre de dents par unité de diamètre ( <i>inch<sup>-1</sup></i> )
$t$	Épaisseur circulaire réelle ( <i>inch</i> )
$T_w$	Épaisseur du moyeu ( <i>inch</i> )
$\phi$	Angle de pression ( <i>Degré (°)</i> )
$D_h$	Diamètre interne d'un arbre creux ( <i>inch</i> )
$K_a$	Facteur d'application de charge
$K$	Facteur de distribution de charge
$K_f$	Facteur de fatigue
$K_w$	Facteur d'usure
$T$	Couple transmis ( <i>lb.inches</i> )
$S_s$	Contrainte de cisaillement ( <i>psi</i> )
$S_c$	Contrainte de compression ( <i>psi</i> )
$S_1$	Contrainte de traction radiale ( <i>psi</i> )
$S_2$	Contrainte de traction centrifuge ( <i>psi</i> )
$S_3$	Contrainte de traction due à la force tangentielle ( <i>psi</i> )
$S_t$	Contrainte de traction totale ( <i>psi</i> )
$N_{rot}$	La fréquence de rotation ( <i>tour / minute</i> )
$h$	Profondeur d'engagement de la dent ( <i>inch</i> )
$Y$	Facteur de forme de Lewis

## Sommaire

INTRODUCTION GENERALE.....	04
----------------------------	----

### *GÉNÉRALITÉS*

1- Introduction.....	05
2- Présentation des types de cannelures et de leurs utilisations.....	05

### *Chapitre I. RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE*

I-1. Introduction .....	10
I-2. Description Des Phénomènes.....	10
I-3. Comportement des dents.....	17
I-3.1. Approche expérimentale.....	18
I-3.2. Modèle analytique.....	18
I-3.3. Conclusion sur le comportement des dents.....	18
I-4. Normalisations.....	19
I-4.1. Normalisation française.....	19
I-4.2. Normalisation américaine.....	20
I-4.3. Types des cannelures dans la norme américaine.....	20

### *Chapitre II. MODELISATION ET MISE EN EQUATION*

II-1. Rappels d'élasticité continue isotrope et notations.....	21
II-2. Etude des sollicitations appliquées sur un arbre cannelé.....	22
II.2.1- Etude du moment fléchissant (Flexion).....	24
II.2.2- Etude du moment de torsion (Torsion libre).....	25
II.2.3- Etude des sollicitations combinées (Flexion et Torsion).....	26
II-3. Sollicitation d'un arbre cannelé.....	27
II-3.1. Contrainte de cisaillement en pied de dent.....	27
II-3.2. Contrainte de cisaillement des dents au diamètre primitif.....	27
II-3.3. Contrainte de compression sur les flancs des dents.....	28
II-3.4. Les contraintes de traction des dents d'arbre cannelé.....	28
II-3.5. Les efforts de torsion sur les arbres cannelés.....	29

### **Chapitre III. D.A.O & C.A.O EN UTILISANT LE LOGICIEL**

#### **SOLIDWORKS**

III -1. Description et caractéristiques du modèle d'arbre cannelé objet de l'étude.....	31
III-2. Présentation du logiciel SolidWorks.....	31
III-3. Dimensionnement les arbres étudiés .....	34
III-3.1. Arbres avec épaulements.....	35
III-3.2. Arbres partiellement cannelés.....	36
III-3.2. Caractéristiques fondamentales des Arbres cannelés.....	37
III-4. La géométrie des arbres dans l'espace (3D).....	39

### **Chapitre IV. ETUDE DU COMPORTEMENT STATIQUE**

#### **& DYNAMIQUE**

IV-1. Modélisation par la méthode des éléments finis.....	42
IV-2. Maillage et choix des éléments.....	42
IV-3. Conditions aux limites .....	44
IV-4. Les charges appliquées sur les arbres.....	45
IV-5. Etude du comportement statique.....	48
IV-5.1. Calcul théorique des efforts résultants.....	48
IV-5.2. Etude par logiciel CosmosWorks.....	54
IV-5.2.1. Vérifications des efforts des Arbres avec épaulements.....	54
IV-5.2.2. Vérifications des efforts de l'Arbre Partiellement cannelé.....	71
IV-6. Etude du comportement dynamique.....	88
IV-6.1. Etude des vibrations libres.....	89
IV-6.2. Etude des vibrations forcées.....	91
IV-6.2.1. Arbre avec épaulement du rapport $d/D = 0.50$ .....	91
IV-6.2.2. Arbre partiellement cannelé $R_{\text{fraise1}} = 50\text{mm}$ .....	94

### **Chapitre V. INTERPRÉTATION, COMPARAISON & VALIDATION**

#### **DES RÉSULTATS**

V-1. Interprétation et comparaison des résultats.....	98
V-1.1. Modèles d'efforts sur l'arbre avec épaulement.....	98
V-1.2. Modèles d'efforts dans un arbre partiellement cannelé.....	102
V-2. Validation des résultats.....	107
V-2.1. Arbres avec épaulements.....	107

V-2.2. Arbres partiellement cannelés.....	109
CONCLUSION GENERALE.....	111

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ANNEX

NORME FRANÇAISE

NORME AMERICAINE

*Généralité sur la norme américaine*

*Tables des différents facteurs et valeurs admissibles*

---

### **Introduction Générale**

Les pièces cannelées sont souvent utilisées comme un mécanisme d'accouplement dans les machines tournantes, et les arbres cannelés transmettent des couples de rotation importants d'un organe tournant à un autre.

Le but de ce travail est d'étudier par éléments finis le comportement des arbres cannelés sous sollicitations de flexion, torsion et combinées. L'étude concerne deux types d'arbres cannelés largement rencontrés en industrie, le premier étant un arbre avec épaulement cannelé et le second partiellement cannelé, c'est-à-dire avec des dents inachevées. L'effet des forces axiales sur l'arbre n'est pas considérable et peut être omis. Typiquement, les études d'arbres cannelés se sont concentrés seulement sur les chargements de flexion, de torsion et combinées provoquées essentiellement par le non alignement de l'arbre. Les déformations dues à la flexion ne peuvent être ignorés, d'autant plus que leurs valeurs sont souvent plus grandes de 25% de celle causée par le moment de torsion.

Ces cannelures objets de l'étude sont semblables, qu'il s'agit de cannelures externes ou internes et, en pratique générale, les cannelures externes sont formées par fraisage, et ceux internes par le brochage. Les cannelures internes sont obtenues conformément à des dimensions de base normalisées, et ceux externes sont conçus pour commander l'ajustement et le régler. Les cannelures offrent une résistance maximale au niveau de la base et peuvent être espacées exactement, ce qui permet un auto-centrage des organes, et une équitable dispersion des efforts pendant le roulement.

## 1- Introduction

Pour introduire le travail qui est développé dans ce mémoire, nous consacrons quelques pages à la description des différents types de cannelures existants et de leurs utilisations. Chaque type présente des particularités au niveau de son comportement mécanique.

## 2- Présentation des types de cannelures et de leurs utilisations

Dans un grand nombre d'assemblages mécaniques, l'emploi de simples clavettes permettent de lier en rotation un arbre avec un moyeu (exemples : poulies, roues dentées) et, ainsi transmettre un couple. Toutefois, l'usinage d'une ou de plusieurs rainures dans l'arbre et l'ajustage de la ou des clavettes dans celles-ci constituent un travail toujours délicat. De plus, l'endommagement des clavettes se traduit par l'augmentation du jeu dans les rainures de l'assemblage, ce qui crée en dynamique des efforts parasites, souvent à l'origine de la destruction de la liaison. C'est pourquoi les clavettes sont utilisées lorsque le couple à transmettre reste faible. Pour des couples plus importants l'utilisation de cannelures est plus appropriée. Leurs avantages sont multiples. L'usinage est plus facile à réaliser en utilisant par exemple le brochage. La précision de l'usinage permet aussi de diminuer nettement le risque de jeu dans la liaison et enfin il y a une augmentation significative de la section utile de l'arbre.

Il existe deux types de cannelures différentes présentées en figure 1 ; les cannelures à flancs parallèles et à flancs en développante de cercle. Il est aussi d'usage d'associer à ce type de liaison les cannelures rectilignes et les arbres cannelés pour petites commandes.

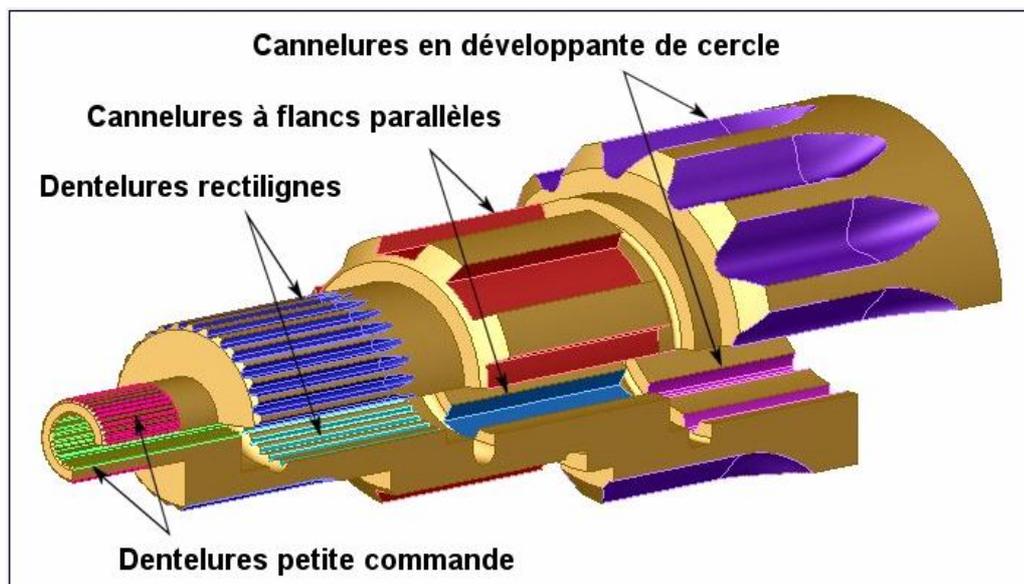


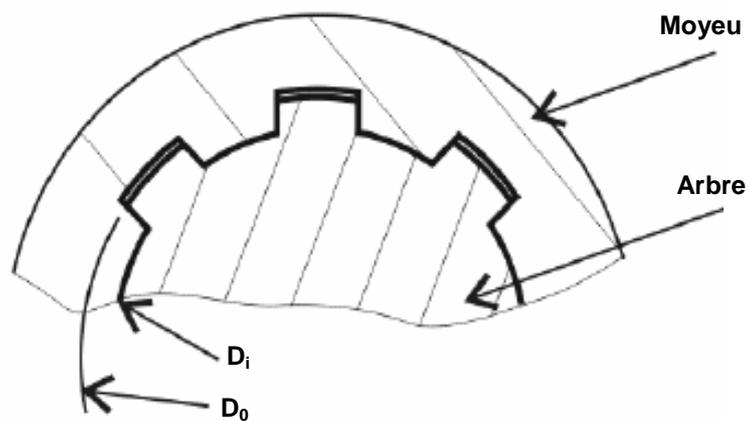
Figure 1. Les différents types de cannelures et dentelures

La cannelure à flancs parallèles est essentiellement employée lors de transmission de puissance de faibles vitesses pour des systèmes développés en petites séries comme la montre la figure 2 pour une boîte de transmission de marque « BERT ».



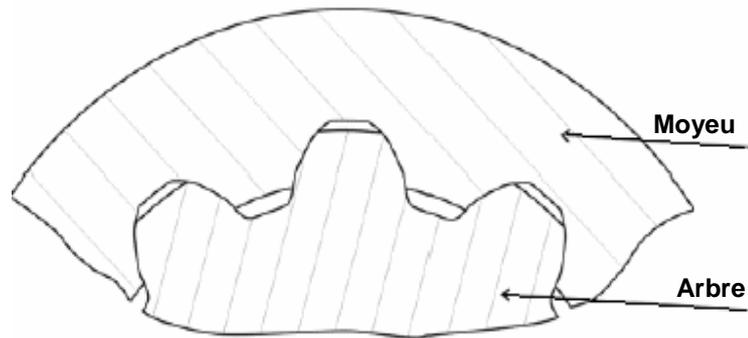
**Figure 2.** Boîte de transmission « BERT »

En effet de par sa géométrie figure 3, elle se révèle être moins résistante et plus bruyante qu'une cannelure à flancs en développante de cercle.



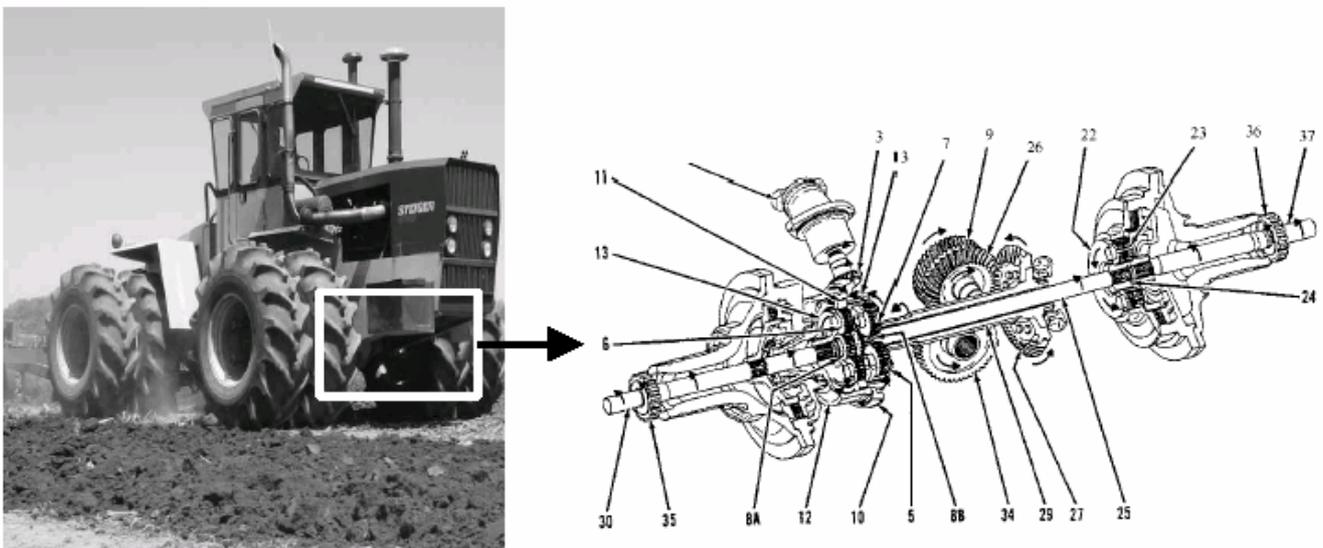
**Figure 3.** Géométrie de la cannelure à flancs parallèles

La désignation employée pour ce type de cannelure est  $N$  le nombre de dents,  $D_i$  et  $D_0$  sont des diamètres de fondation et de tête de l'arbre, visible sur la figure 3. La cannelure à flancs en développante de cercle est une application indirecte des engrenages à flancs en développante de cercle. La figure 4 est une illustration représentant sa géométrie.



**Figure 4.** Géométrie de la cannelure à flancs en développante de cercle

Elle permet des vitesses de rotation et des couples importants, comme dans les boîtes de transfert d'hélicoptère ou d'engins de chantier. La figure 5 en est une illustration.



**Figure 5.** Système de direction d'un tracteur

Les dents rectilignes sont employées pour la réalisation d'assemblages fixes ou bloqués pour lesquels la précision du centrage et de l'ajustement peut sans inconvénient être inférieure à

celle obtenu par l'emploi de cannelures à flancs en développante de cercle. Ainsi les dentelures rectilignes sont utilisées essentiellement pour des petites transmissions de puissance, comme la transmission du couple en sortie de boîte de vitesse de voiture vers les roues. Leurs géométries sont représentées par la figure 6 et figure 7.

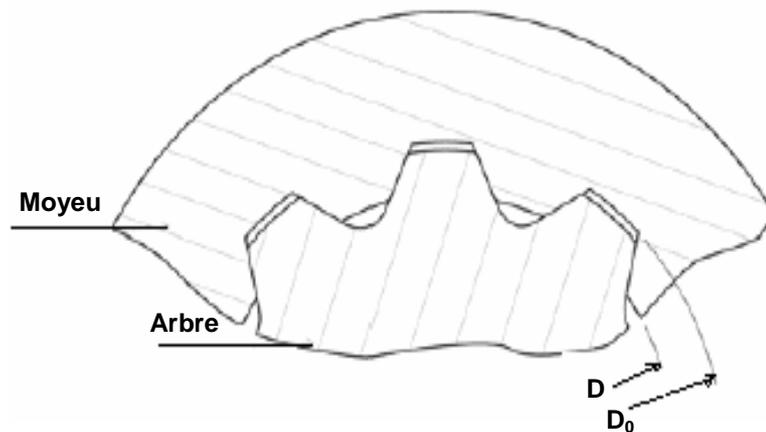


Figure 6. Géométrie de dentelures rectilignes

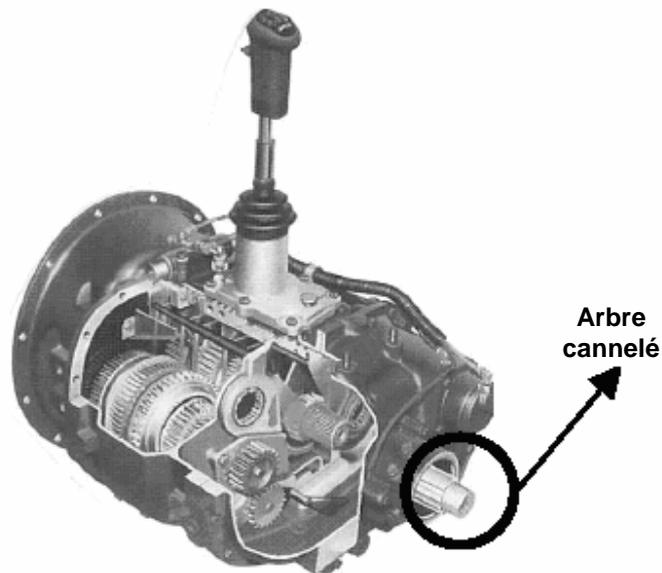


Figure 7. Boîte de vitesse de voiture

Le mémoire est structuré en cinq chapitres après une introduction sur les différents types des cannelures

- Le premier chapitre propose une étude bibliographique traitant uniquement les arbres cannelés. A travers la littérature nous présentons les divers comportements d'un arbre cannelé.
- Dans le deuxième chapitre, est présentée la modélisation et mise en équation, Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu continu sont représentés par des lois de comportement.
- Le troisième chapitre est consacré au dessin et à la conception des ces modèles d'axes cannelés en utilisant le logiciel Solidworks.
- Dans Le quatrième chapitre, et après un bref exposé sur la méthode des éléments finis, la modélisation numérique du comportement statique des arbres cannelés étudiés est présentée, illustrant le maillage, le choix des éléments, les conditions aux limites et de chargement.
- Le cinquième et dernier chapitre est consacré aux applications numériques, la représentation des résultats en contraintes et déformations et leurs interprétations. Le travail est contrôlé par une conclusion générale et des recommandations.

En annexe, il est possible de retrouver des tableaux décrivant des coefficients utilisés dans la normalisation américaine.

## I-1. Introduction

Ce chapitre présente les connaissances relatives aux arbres cannelés que nous avons pu capitaliser en menant une étude bibliographique. Nous analysons tout d'abord les phénomènes existant au sein d'une liaison arbre cannelé/moyeu sous un chargement de flexion, torsion et combinés. Pour cela des modèles éléments finis sont détaillés. Enfin nous décrivons brièvement les normalisations française et américaine.

## I-2. Description des phénomènes

Au regard de la littérature, le comportement d'un assemblage cannelé apparaît complexe. La plupart des écrits signalent de fortes variations au sein de la liaison pour de nombreuses caractéristiques mécaniques : transfert de couple, contraintes, pression de contact sur les dentelures..., Cette non uniformité se retrouve à travers l'étude du comportement suivant les directions. Ensuite il s'agit du comportement radial de la cannelure qui permet, dans cette direction, l'analyse des distributions de contraintes et de déformations de contact.

Enfin pour pouvoir modéliser le comportement d'une cannelure, par exemple au sein d'un ensemble dynamique, il est important de connaître la raideur de l'arbre. Une modélisation de cette raideur globale est proposée par Blanc dans les Techniques de l'Ingénieurs [Blanc, 2000] [04].

Notons que dans la littérature, et donc dans ce qui suit, la charge considérée rentre par le coté lisse de l'arbre et sort par l'autre, comme le montre la figure I-1.

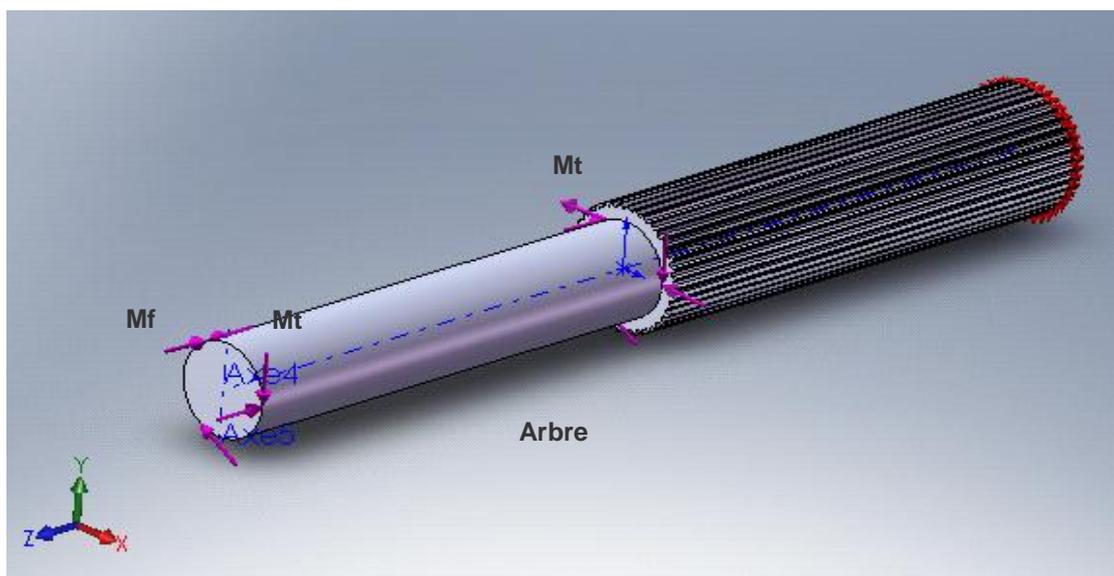


Figure I-1. Schéma sous chargement montrant les conditions de transversal

Une étude par éléments finis met assez facilement en évidence le phénomène de non uniformité au sein d'une cannelure et plus particulièrement celle de la répartition de contraintes de contact le long des dents. La suite de ce paragraphe présente quelques résultats significatifs relatifs à la répartition de la pression de contact et de la distribution de contraintes et déformations.

En 1982, afin de développer un modèle analytique, Volfson [13] opte pour une distribution parabolique de la pression dans la direction radiale, mais n'a pas pu valider son hypothèse. Avec les avancées modernes des techniques numériques notamment les calculs par éléments finis, il est possible de prévoir la distribution des contraintes de façon plus appropriée.

Pour étudier la répartition des contraintes de contact d'un assemblage cannelé suivant la direction radiale, Leen et son équipe [2000] [08] ont développé un modèle par éléments finis. La géométrie est visible sur la figure I-1. Comme pour la répartition axiale, une comparaison des résultats issus de 4 maillages différents a été menée pour la répartition radiale de des contraintes de contact. La figure I-2 correspond à la répartition radiale de la contraintes à la position axiale  $z = 0,94a_1$ .

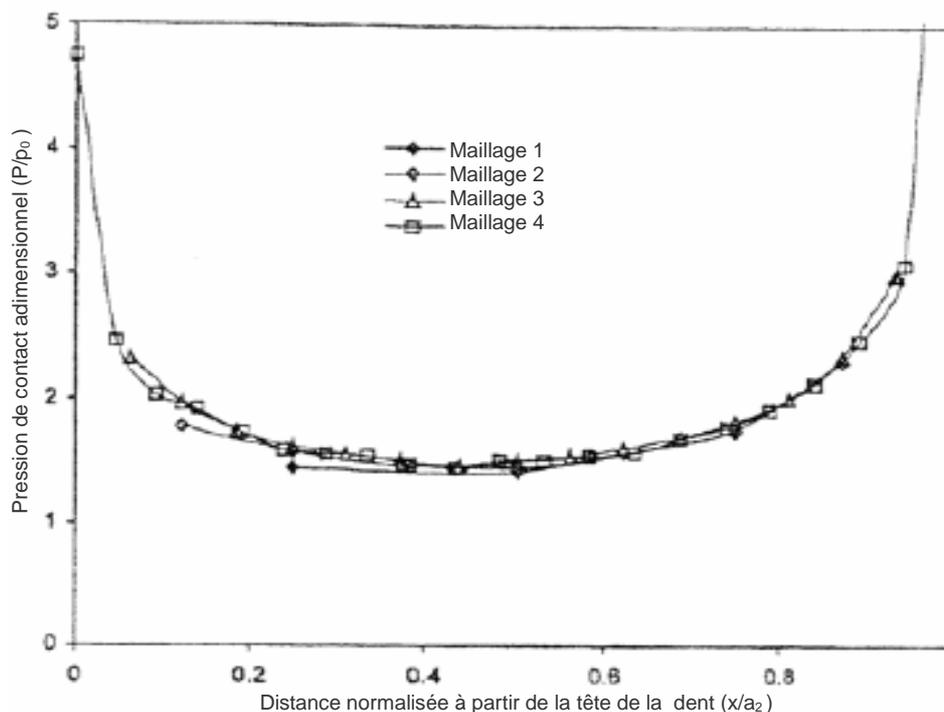
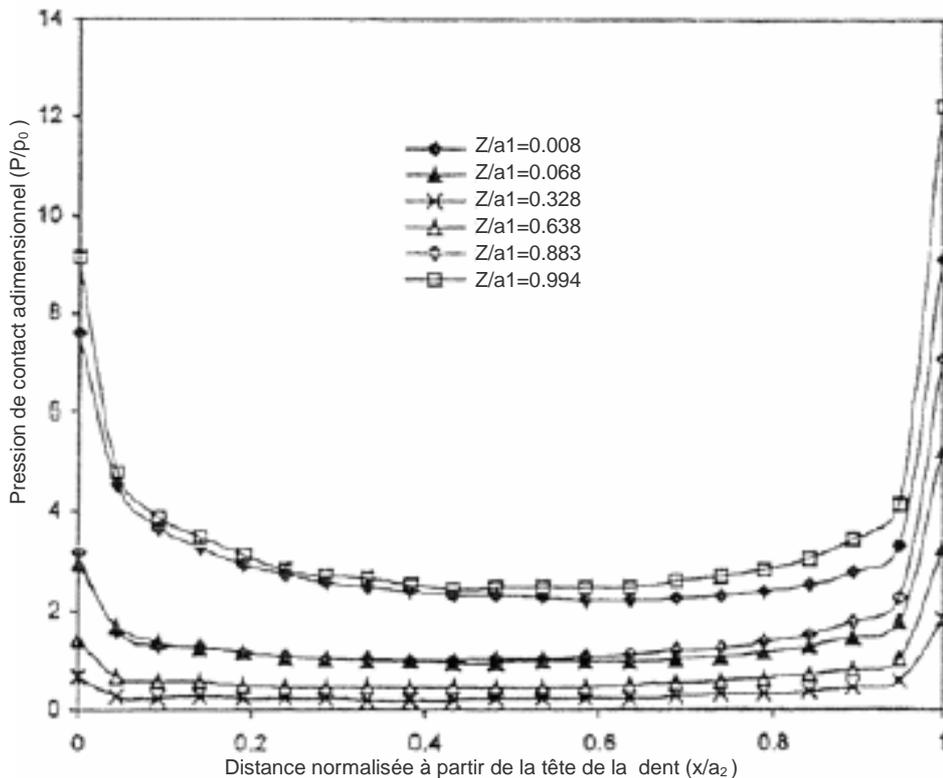


Figure 1-2. Répartition radiale des contraintes de contact [Leen, 2000]

Les résultats convergent pour les maillages 3 et 4, sauf aux pics en tête et pied de dent (extrémités du contact :  $x = 0$  et  $x = a_2$ ), dus aux singularités. La répartition adimensionnée de la pression de contact sur le flanc d'une dent (suivant  $x$ , voir figure 1-5) en différentes positions axiales, calculée avec le maillage 4 a été tracée sur la figure 1-3.



**Figure 1-3.** Répartition radiale de la pression de contact en différentes Positions axiales [Leen, 2000]

Ces résultats confirment, non seulement la non uniformité de la pression de contact suivant l'axe de l'accouplement (le long des dents), mais mettent également en évidence sa non uniformité suivant la direction radiale. La valeur de  $p/p_0$  est de 3 en milieu de flanc contre 12 en pied de dent (position axiale  $z/a_1 = 0,994$ ).

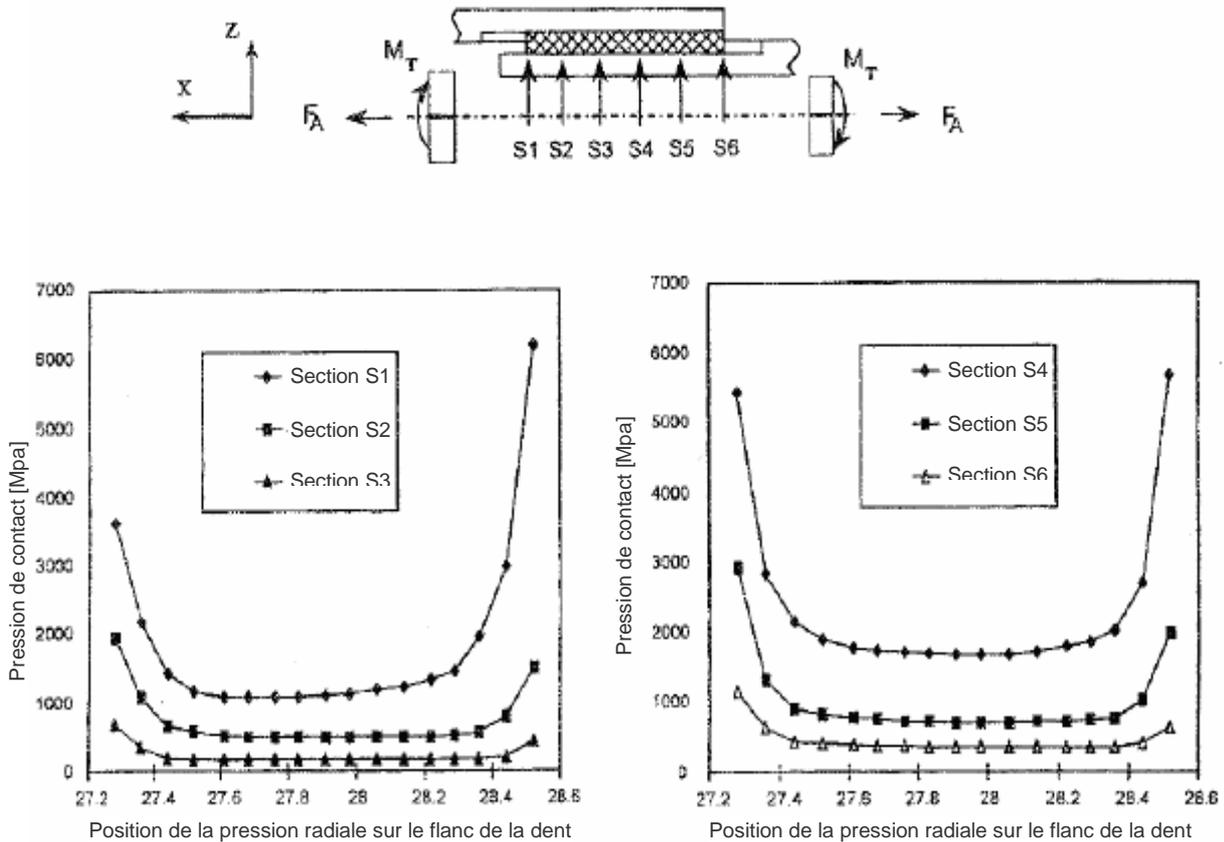
Avec :

$p$  : la pression de contact a la position à  $x$

$p_0$  : la pression moyenne pour une surface de contact d'une dent de cannelure.

Cette « non uniformité radiale » semble d'autant plus pertinente qu'une autre équipe aboutit aux mêmes conclusions [Limmer, 2001] [09].

Leurs résultats issus d'un modèle EF d'assemblage cannelé sont présentés figure 1-4. La distribution radiale de la pression est tracée pour six sections différentes.



**Figure 1-4.** Distribution radiale de la pression de contact suivant 6 sections  
D'un accouplement cannelé [Limmer, 2001]

Une étude paramétrique de Sum et Leen [Sum, 2003] [12] met en place différentes comparaisons de répartition de pression radiale à l'aide de modèles éléments finis 2D et 3D pour une cannelure à flancs en développante de cercle. Les modèles employés sont représentés à la figure 1-5.

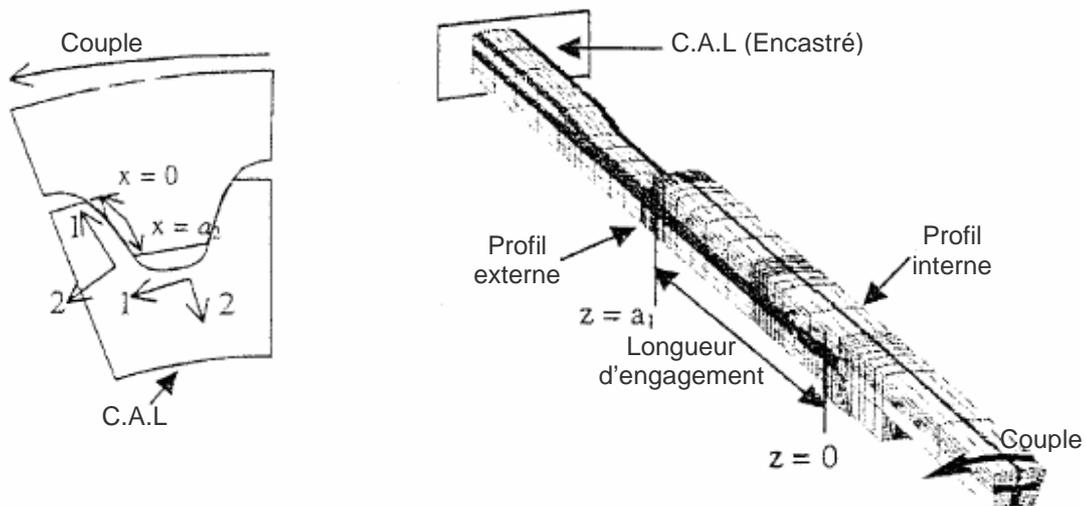


Figure 1-5. Modèles EF 2D et 3D selon Sum [2003]

Cette étude est réalisée dans le but de mettre en évidence les paramètres géométriques qui influent sur la répartition de la pression radiale. Un autre objectif consiste à voir si un modèle EF 2D donne les mêmes résultats qu'un modèle EF 3D, beaucoup plus long à développer. Ainsi Sum choisit d'observer l'influence :

- du nombre de dents, en modélisant des cannelures comportant 18 et 26 dents,
- du diamètre extérieur du moyeu, en considérant deux diamètres exprimés en fonction du diamètre primitif : 0.56 diamètre primitif et 0.72 diamètre primitif. A travers ce paramètre c'est le rapport des moments quadratiques polaires arbre – moyeu qui joue un rôle important.

L'étude de la variation du diamètre du moyeu révèle du point de vue répartition de la pression que dans le cas du modèle 3D, la distribution du transfert de couple de l'arbre au moyeu change le long du contact pour deux modèles 3D ayant des moments quadratiques polaires différents.

Le nombre de dents apparaît comme un paramètre inversement proportionnel à la pression. Si l'on cherche à obtenir la répartition de pression radiale pour une cannelure ayant 18 dents à partir d'un modèle ayant 26 dents, il suffit de multiplier la répartition par un facteur de 26/18. La figure 1-6 est une représentation de ce résultat. La courbe en pointillés révèle que ce système permet uniquement d'avoir une estimation de la répartition de la pression de contact.

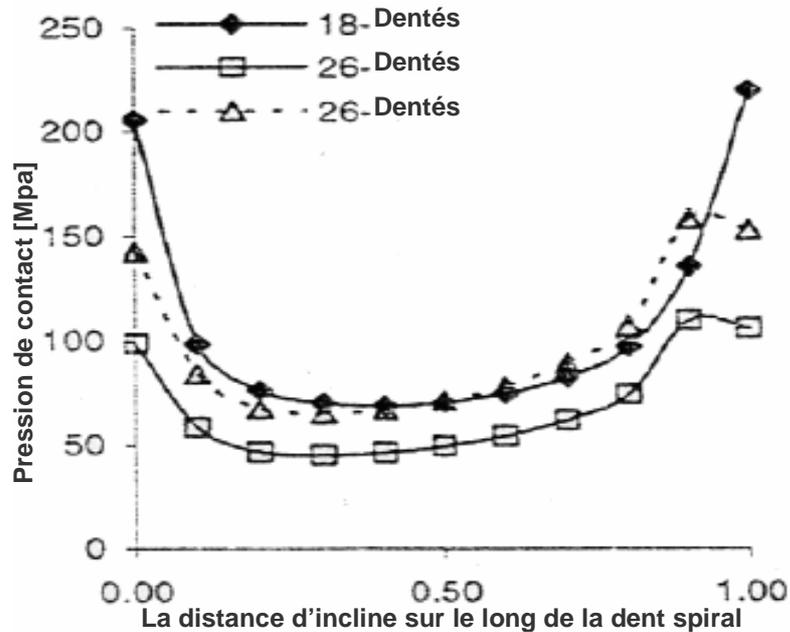


Figure 1-6 Répartition de la pression radiale pour 2 nombres de dents différents [Sum, 2003]

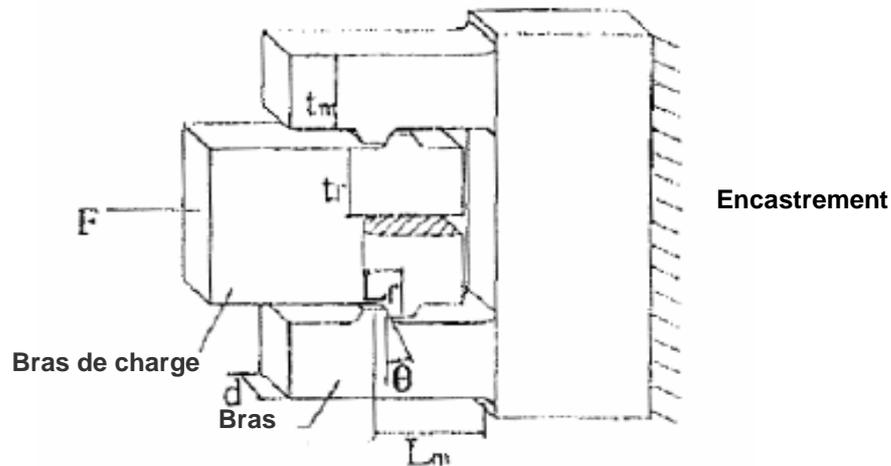


Figure 1-7 Banc d'essai de l'expérience [Hyde, 2000], [Leen, 2000]

Enfin, un concept d'expérience simulant le comportement des dents d'une cannelure est présenté par Hyde [2000] et Leen [2000] [08]. Cette expérience a pour but d'étudier le comportement local d'une paire de dents. Afin de calibrer le banc d'essai, visible à la figure 1-7, ces chercheurs l'ont modélisé et ont paramétré l'entaille centrale pour retrouver la répartition radiale de la pression de contact obtenue avec le modèle 3D EF, comme le montre la figure 1-9.

Aucune description de la procédure de la mesure de la pression dans le cas de l'étude expérimentale n'est faite.

De plus lors de cette étude, les répartitions obtenues sont comparées à celle issues des résultats classiques d'un punch à embout plat sur un plan, dont une représentation est visible figure 1-8. L'équation de la répartition de pression  $p(x)$  d'un tel punch est de la forme :

$$p(x) = \frac{F_{th}}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (I.01)$$

Avec :

$F_{th}$  : force appliquée sur le punch,  
 $a$  : demi-longueur de contact.

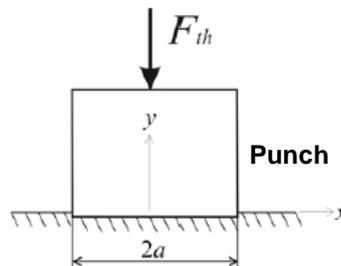


Figure 1-8 Illustration du punch utilisé par Leen [Leen, 2000]

En assimilant les dents du moyeu au punch et le plat aux dents de l'arbre ou inversement, il est possible selon Leen de décrire la répartition radiale si l'on connaît la répartition axiale de la pression. L'effort appliqué au punch correspond à l'effort normal au contact par unité de longueur issu du modèle EF. Il a alors pour expression :

$$F_{th} = x_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_i + p_{i+1}}{2} \quad (I.02)$$

Avec :

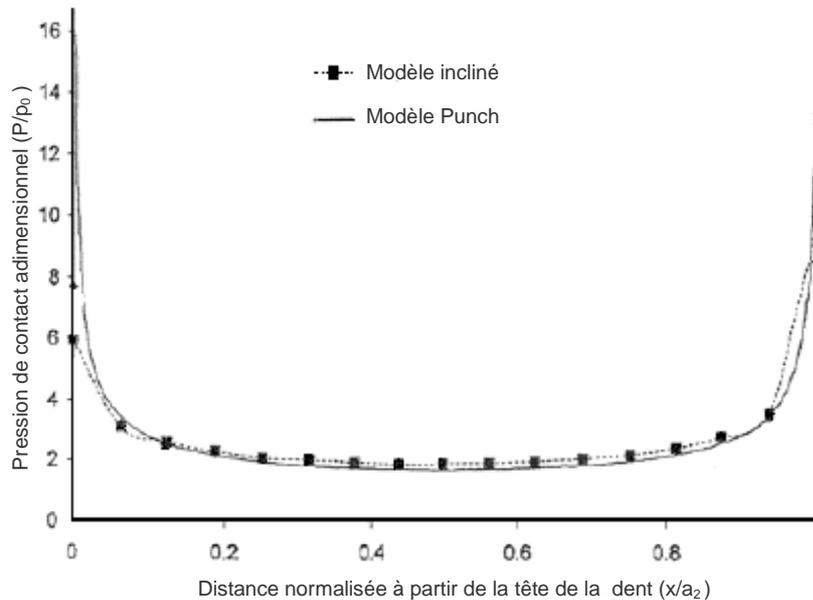
$x_1$  : longueur du flanc de dent en contact dans le modèle EF de la cannelure,

$p_i$  : pression de contact au nœud  $i$  du modèle EF de la cannelure.

Comme la figure 1-9 le révèle, les modèles donnent des résultats similaires loin des extrémités du contact. En effet alors que la pression de contact déterminée analytiquement pousse à l'infini en  $-a$  et  $+a$ , les modèles EF, eux, connaissent une limite.

Finalement à travers cette étude, Leen met en évidence deux points importants. Le premier porte sur la partie expérimentale. En effet nous verrons plus tard qu'il est difficile d'observer en condition réelle la répartition de la pression radiale au sein d'une cannelure. Un tel système

permettrait alors de valider les résultats des calculs EF facilement. Le second est la similarité du comportement des dents du point de vue répartition de la pression radiale avec un modèle punch, qui offre une possibilité de créer une méthode analytique décrivant la répartition de la pression.



**Figure 1-9** Distribution radiale de la pression de contact pour les 2 modèles  
Présentés par Leen [Leen, 2000]

Finalement nous avons vu dans cette partie que peu d'études ont été menées sur la détermination de la répartition radiale de la pression de contact. Il apparaît pourtant que cette répartition n'est pas uniforme et qu'elle peut être décrite analytiquement par un modèle de punch. Il n'existe cependant pas de travaux explicitant une méthode analytique permettant d'obtenir la pression sans l'aide d'expériences ou de modèles EF.

### I-3. Comportement des dents

Le banc d'essai, présenté lors de l'étude de Leen sur la répartition radiale de la pression, met en évidence l'importance du comportement des dents. En effet pour caler ce système avec le modèle EF, Leen *et* AL [08]. Ont joué sur la souplesse des composants le constituant. De plus lors de l'étude du comportement axial, Blanc a cherché à décrire les déformations que subissait une cannelure [03]. C'est pourquoi, nous avons cherché à travers la littérature à savoir quelles sont les sollicitations des dents et comment elles réagissent.

Un certain nombre d'études sont consacrées à l'analyse du comportement d'une paire de dents en évaluant la rigidité de cannelures à flancs en développante de cercle. Elles sont soit expérimentales soit analytiques.

### **I-3.1. Approche expérimentale**

Ku et AL. [1994] [05] ont développé une méthode expérimentale concernant un accouplement cannelé de machine rotative à grande vitesse. L'objectif de ces travaux est de trouver les coefficients dynamiques qui influent dans une telle machine.

Un banc d'essais permettant de connaître les différents moments de flexion et les angles de déflexion est mis en place. Cette solution permet de connaître la raideur globale d'un accouplement cannelé, mais n'offre pas la possibilité de connaître plus en détail le comportement d'une paire de dents.

### **I-3.2. Modèle analytique**

Une méthode analytique a été développée par Marmol [1980] [10] pour examiner des vibrations de rotor. Pour obtenir la raideur d'une paire de dent, Marmol prend en compte différents phénomènes au niveau des dents comme :

- la flexion,
- le cisaillement,
- la torsion des dents.

Il a considéré que les dents de l'arbre et du moyeu se comportaient comme des poutres en porte-à-faux. Mais la solution proposée s'écarte de la réalité car les contacts entre l'arbre et le moyeu ont été considérés comme simplement ponctuels par similitude aux engrenages.

Blanc [1999] [03] a aussi modélisé le comportement des dents en ne prenant en compte que la flexion de la dent.

Une autre méthode analytique simplifiée a été développée par Hayashi [1985] [13] où les dents des cannelures de l'arbre et du moyeu ont été considérées comme étant de forme rectangulaire et seule la flexion des dents a été prise en compte.

### **I-3.3. Conclusion sur le comportement des dents**

Des études expérimentales existent mais n'ont pour objectif que de connaître globalement le comportement d'une cannelure.

Une étude analytique a identifié des phénomènes permettant de décrire le comportement des dents, cependant en considérant le contact entre les dents comme ponctuel, elle est éloignée de la réalité et ne permet donc pas actuellement de connaître avec précision le comportement des dents d'une cannelure.

#### I-4. Normalisations

Avant tout travail, il est important de connaître les notions abordées et phénomènes prédits par les normalisations courantes. Nous examinons donc dans cette partie la normalisation française mais aussi la normalisation américaine qui est la base de certaines études rencontrées.

##### I-4.1. Normalisation française

Les règles de dimensionnement données par cette norme s'appliquent aux cannelures cylindriques en développante de cercle sont présentées dans la norme NF E 22-144.

Les calculs prennent en compte trois paramètres seulement :  $\sigma_a$  (contrainte de compression),  $\sigma_a$  et  $\tau_m$  (contraintes de cisaillement de l'arbre et du moyeu). Ces contraintes ont été choisies en fonction des types de détérioration des cannelures les plus courants : corrosion de contact, matage et rupture en fatigue.

La notation employée est décrite dans le Tableau I-1. La figure I-2 présente la géométrie retenue par la normalisation française.

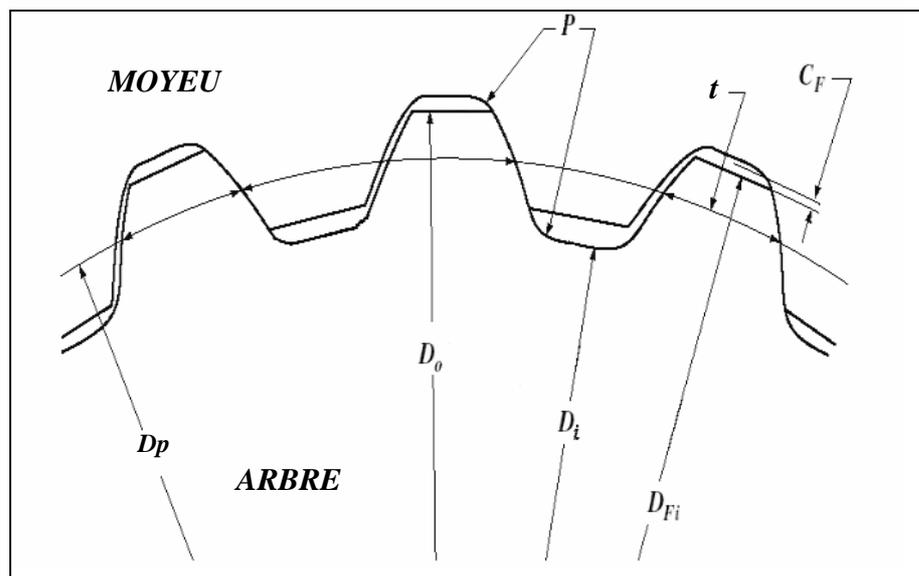


Figure I-10. Géométrie des dentures en développante de cercle

Les contraintes calculées d'après cette norme sont à comparer avec les valeurs des contraintes admissibles par le matériau utilisé et ne doivent pas les dépasser. En pratique, il est difficile d'estimer ces contraintes admissibles et la norme française propose d'utiliser les valeurs données par les tables tirées de la norme E 23-015 concernant les engrenages.

#### **I-4.2. Normalisation américaine ANSI B92.1-1970 [02]**

En ce qui concerne la définition géométrique des cannelures, on retrouve les mêmes formulations que celles des normes françaises. La particularité intéressante du point de vue de la conception est la prise en compte dans ces normes des principaux défauts et phénomènes pouvant altérer le bon fonctionnement des cannelures à travers plusieurs coefficients. Ces coefficients donnent des formules de capacité de charge sûrement mieux adaptées que celles proposées par les normes françaises mais encore surdimensionnées. Toutefois ceci montre à nouveau que le comportement des cannelures reste un domaine peu approfondi par les instituts de normalisation. Nous présentons ci-après quelques précisions concernant les calculs donnés par cette norme.

#### **I-4.3. Types des cannelures dans la norme américaine**

- les cannelures "*fixes*" : ce sont des cannelures ajustées serré ou libre avec un guidage empêchant l'oscillation des cannelures qui engendre des petits mouvements axiaux.

- les cannelures "*flexibles*" : ce sont des cannelures qui permettent des oscillations pour des arbres mal alignés par exemple. On observe alors des mouvements axiaux.

Dans le chapitre suivant, est présentés le calcul des contraintes en fonction du couple à transmettre, des coefficients de correction et des paramètres des cannelures. L'obtention des facteurs intervenant dans ces calculs est explicitée dans les tableaux en annexe.

## II-1. Rappels d'élasticité continue isotrope et notations

Une structure mécanique est considérée comme un solide occupant un volume  $V$  ; la frontière de  $V$  est notée  $\partial V$  . Si le solide est à trois dimensions, cette frontière est une surface  $S$  . Une courbe  $\Gamma$  s'il est à deux dimensions .sous l'action d'un champ vectoriel de force  $\{F\}$  et ou de moment  $\{M\}$ , de composantes respectives  $f_x, f_y, f_z$  .et ou  $m_x, m_y, m_z$ , le solide se déforme. Il est toujours supposé que ces déformations sont assez petites pour que la géométrie initiale soit considérée comme invariante : c'est ce qu'il est convenu d'appeler l'hypothèse des petites déformations.

Au cours de cette déformation du solide, un point de coordonnées  $x, y, z$ , ou  $(x_1, x_2, x_3)$  Se déplace des quantités  $u, v, w$  ou  $(u_1, u_2, u_3)$ , composantes d'un vecteur de déplacement  $\{u\}$ . Deux points, même voisins, peuvent se déplacer de quantités différentes, c'est ce qui génère la déformation .il peut exister des déplacements sans déformation. Appelés déplacement de corps solide ou modes rigides, qui sont des translations ou des rotations. Quand le corps se déforme, il le fait sous l'action de tensions internes, ou forces internes, ou contraintes, qui peuvent à la limite entraîner la décohésion de la matière, ou encore la ruine de la structure.

L'ingénieur mécanicien qui veut étudier le comportement statique ou dynamique d'une structure est essentiellement intéressé par trois champs qui sont :

- Le champ de déplacement à trois ou six composantes déjà partiellement défini par les trois déplacements  $u, v, w$  ou  $(u_1, u_2, u_3)$  selon  $Ox, Oy, Oz$ , ou  $(Ox_1, Ox_2, Ox_3)$ , et les trois rotations  $\beta_x, \beta_y, \beta_z$  ou  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  autour de ces mêmes trois axes.
- Le champ de déformations à six composantes :  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$  explicité plus loin et noté  $|\xi|$ .
- Le champ de contrainte à six composantes également :  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  noté  $|\Sigma|$ .

Ces trois champs ne sont pas indépendants les uns des autres : le déplacement et les déformations sont en dépendance dite géométrique, tandis que les déformations et les contraintes sont liées au matériau considéré. Il existe par ailleurs une dépendance de la structure avec le milieu ambiant qui s'exprime sous la forme de conditions aux limites, et qui se traduit par des conditions sur les déplacements ou sur les contraintes à la frontière  $\partial V$  .

## II.2- Etude des sollicitations appliquées sur un arbre cannelé

Un arbre cannelé considéré comme une poutre est défini par le déplacement d'une aire de centre de gravité  $G$  le long d'une fibre moyenne, orientée (voire figure II.1). cette section reste perpendiculaire à la fibre moyenne.

On note  $s$  l'abscisse curviligne le long de la poutre.

Par rapport à une section donnée, on distingue une partie droite et une partie gauche.

Soit  $G(s)$  un point de la fibre moyenne.

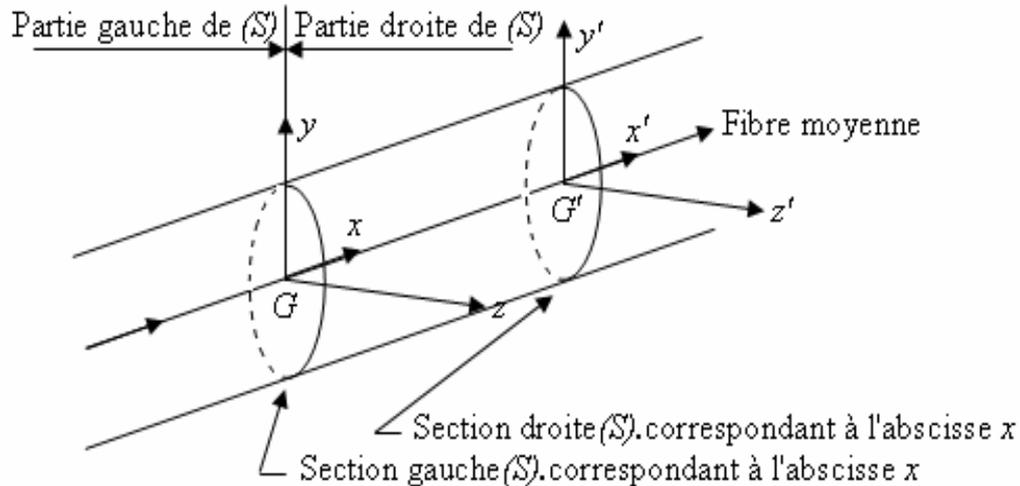


Figure II.1. Sections d'une poutre

On définit maintenant le repère local de la résistance des matériaux  $(G, x, y, z)$  en tout point de la fibre moyenne :

- $x$  est tangent à la fibre moyenne ;
- $y$  et  $z$  sont les axes principaux (et orthogonaux) de la section droite ;
- Le repère  $(x, y, z)$  est orthonormé direct ;

Notons  $(u_x, u_y, u_z)$  les trois vecteurs orthonormés directs et liés aux trois axes  $(x, y, z)$  précédemment définis.

On définit le tenseur de la résistance des matériaux pour une section  $S$  comme le tenseur des forces exercées par la partie droite sur la partie gauche ; ce tenseur est défini par sa résultante  $\vec{R}_G$ , appliquée en  $G$  et son moment  $\vec{M}_G$ , par rapport au point  $G$ .

Les six projections de  $\vec{R}_G$  et de  $\vec{M}_G$  définissent les efforts de la résistance des matériaux. Comme il est illustré dans la figure II.2.

On note ainsi :

$$\vec{R}_G = N u_x + T_y u_y + T_z u_z \quad (II.01)$$

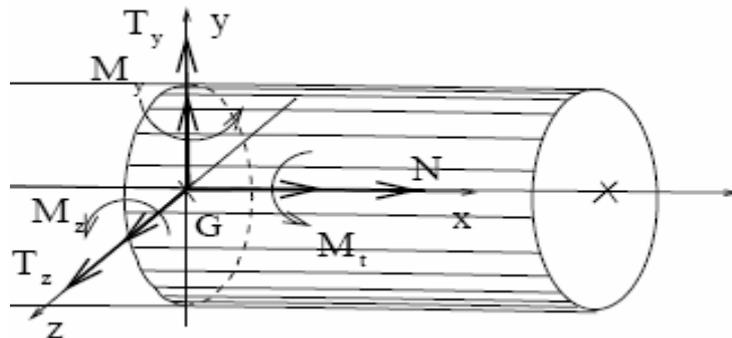
Où ;  $N$  est l'effort normal,

$T_y$  et  $T_z$  Sont les efforts tranchants,

$$\vec{M}_G = M_t u_x + M_y u_y + M_z u_z \quad (II.02)$$

Où ;  $M_t$  est le moment de torsion,

$M_y$  et  $M_z$  Sont les moments fléchissant.



**Figure II.2-** les Sollicitations d'une poutre

Ces six grandeurs sont définies pour une section droite. La convention adoptée est très importante pour toute la suite; on rappelle que l'on a défini le tenseur des efforts de la résistance des matériaux comme l'action de partie droite de la poutre sur la partie gauche (ou de la partie aval sur la partie amont) et que le repère orthonormé  $(x, y, z)$  est choisi direct.

Les caractéristiques géométriques de la poutre doivent respecter certaines conditions:

- L'élanement (le rapport de la longueur de la poutre sur la hauteur de la section) ne doit pas être ni trop petit, ni trop grand (entre 5 et 40).
- Le rayon de courbure des poutres ne doit pas être trop petit.
- Les variations des caractéristiques des sections droites (aire, moments, inerties,...) Doivent être lentes.

En vertu du principe des superpositions, une sollicitation composée est la somme de sollicitations simples, c'est-à-dire une combinaison des sollicitations de traction-compression, flexion, torsion etc.

**Tableau II.1** : Les différentes sollicitations

Type de sollicitation	Efforts non nuls de la RDM
Traction/ Compression simple	Effort Normal ( $N$ )
Flexion	Moment Fléchissant ( $M_y$ et $M_z$ )
Cisaillement	Effort Tranchant et Moment de Flexion ( $T_y, T_z, M_y$ et $M_z$ )
Torsion libre	Moment de Torsion ( $M_t$ )

### II.2.1- Etude du moment fléchissant (Flexion)

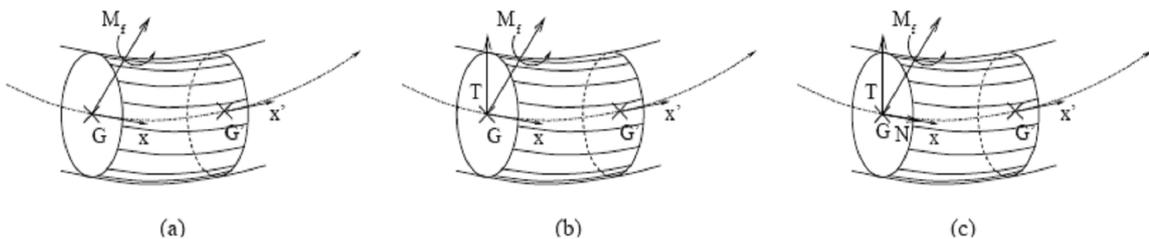
Il y a flexion pure lorsque le système des forces appliquées à gauche se réduit à une composante de moment située dans la section.

$$\begin{aligned} M_f &= M_y \vec{y} + M_z \vec{z} \\ N &= T_y = T_z = 0 \\ M_t &= 0 \end{aligned} \quad (II.03)$$

Si le plus, l'effort tranchant est non nul, la flexion est simple.

Lorsque la flexion est aussi soumise à un effort normal ( $N \neq 0$ ), la flexion est dite composée.

Si le moment fléchissant est dirigé parallèlement à un axe central d'inertie de la section, la flexion est dite droite, sinon elle est déviée ou gauche.



**Figure II.9.** Les différents cas de flexion : flexion pure (a), flexion simple (b), flexion composée (c)

Si l'effort tranchant est nul, l'état des contraintes au point de la section de coordonnées  $(y, z)$  est caractérisé par la matrice :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (II.04)$$

$$n_1 = \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (II.05)$$

Où  $N$  est l'effort normal et  $S$  l'aire de la section,  $M_y$  et  $M_z$  sont les moments fléchissant et  $I_y$  et  $I_z$  les moments d'inertie de la section par rapport aux axes  $y$  et  $z$ .

Est parfois présentée dans le cas de la flexion pure, mais reste valable dans le cas d'une flexion composée (mais sans effort tranchant).

La déformation est caractérisé par :

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \frac{n_1}{ES} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu n_1}{ES} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu n_1}{ES} \end{pmatrix} \quad (II.06)$$

$$n_1 = \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (II.07)$$

On appelle l'axe neutre de la section, le lieu des points de contrainte (normale) nulle, d'équation

$$\frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0 \quad (II.08)$$

### II.2.2- Etude du moment de torsion (Torsion libre)

La section droite d'une poutre est soumise à une torsion libre lorsque, parmi les efforts de la résistance des matériaux, seul le moment de torsion  $M_t$  est non nul.

Le problème de torsion est complexe et la théorie élémentaire de la résistance des matériaux ne conduit à des solutions assez précises que dans le cas des poutres droites à section circulaires, massives ou creuses ou à sections droites tubulaires minces fermées.

La seule contrainte non nulle qui s'exerce sur une facette de section droite est une contrainte tangentielle  $t$  dirigée la normale au rayon vecteur (figure II .03).

Ainsi, avec les notations de Lamé, seules les composantes  $t_2$  et  $t_3$  du tenseur de contraintes sont non nulles.

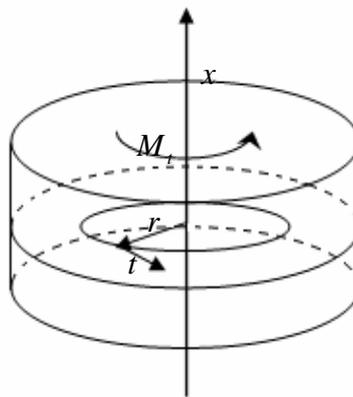


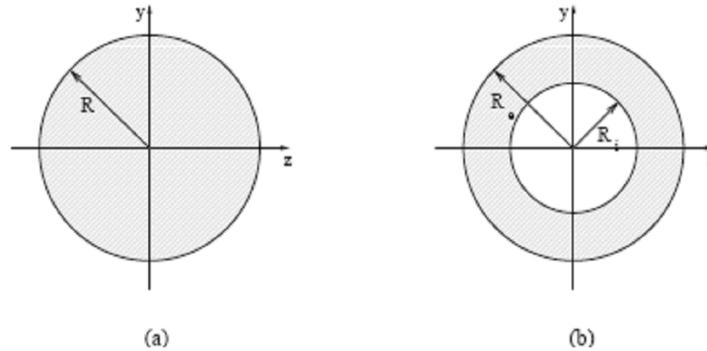
Figure II.03. Les contraintes tangentielles en torsion libre

Elle ne dépend que de la distance au centre  $r$  et vaut :

$$\tau(r) = \frac{r M_t}{J_\rho} \quad (II.09)$$

Où  $J_\rho$  est l'inertie polaire de la section, définie par :

$$J_\rho = \int_s r^2 dS \quad (II.10)$$



**Figure II.04.** les deux types de sections circulaires, section circulaire pleine (a) et creuse (b)

Dans le cas de section pleine (figure II.04a), elle vaut :

$$J_\rho = \frac{\pi R^4}{2} \quad (II.11)$$

Et pour le cas creuse (figure II.04b), elle vaut :

$$J_\rho = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4) \quad (II.12)$$

### II.2.3- Etude des sollicitations combinées (Flexion et Torsion)

Une sollicitation quelconque peut toujours se décomposer en la somme d'un effort normal, d'un moment fléchissant, d'un effort tranchant de torsion. Pour obtenir les contraintes et le potentiel dans le cas général, on additionne, d'après le principe de superposition, les résultats des torseurs dans le cas le plus général, on a, pour la contrainte normale

$$\sigma = \frac{N}{S} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{r M_t}{J_\rho} \quad (II.13)$$

Selon le rapport de la flexion à la torsion, la contrainte de Von Mises est calculée en combinant les équations de vecteur de déplacement et le vecteur de contrainte exercée sur un élément de surface. La contrainte de Von Mises est un équivalent qui représente la magnitude totale de contrainte en un point, sans se soucier de l'orientation de celle-ci. La contrainte de Von Mises est définie par l'équation (II.14) [5]:

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{1/2} \quad (II.14)$$

Il est considéré que le comportement est linéaire élastique, et le matériau est isotrope et homogène. La contrainte de cisaillement est considérée variable uniquement sur l'axe radial de l'arbre. Donc, l'équation (II.14) se réduit à:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{xz}^2} \quad (II.15)$$

Où  $\sigma'$  représente la contrainte de Von Mises,  $\sigma_z$  la contrainte axiale à développer, et le  $\tau_{xz}$  est la contrainte de cisaillement sur l'arbre due du couple de rotation appliqué. De la même façon, on utilise l'équation (II.16) pour calculer la contrainte de Von Mises accentué [6]:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{I}{2} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (II.16)$$

### II-3. Sollicitation d'un arbre cannelé [2]

#### II-3.1. Contrainte de cisaillement en pied de dent

Pour des cannelures externes soumises à un couple  $T$  :

- Pour un arbre plein

$$S_s = \frac{16 TK_a}{\pi D_{re}^3 K_f} \quad (II.17)$$

- Pour un arbre creux

$$S_s = \frac{16 TD_{re} K_a}{\pi (D_{re}^4 - D_h^4) K_f} \quad (II.18)$$

#### II-3.2. Contrainte de cisaillement des dents au diamètre primitif

$$S_s = \frac{4TK_a K_m}{DNL_e t K_f} \quad (II.19)$$

Avec :

$K_a$  : facteur d'application de charge,

$K_f$  : facteur de fatigue,

$K_m$  : facteur de distribution de charge,

$L_e$ : longueurs effectives maximales.

Les différents facteurs sont détaillés dans la norme, ainsi que les contraintes maximales qui ne doivent pas être dépassées par les valeurs calculées.

### II-3.3. Contrainte de compression sur les flancs des dents

- Pour les cannelures flexibles.

$$S_c = \frac{2TK_m K_a}{DNL_e hK_w} \quad (II.20)$$

- Pour les cannelures fixes.

$$S_c = \frac{2TK_m K_a}{9 DNL_e hK_f} \quad (II.21)$$

Avec  $h$  la profondeur d'engagement de la dent. Elle vaut  $0.9/P$  pour des cannelures à fond plat et  $1/P$  pour des cannelures à plein. La valeur de la contrainte calculée ne doit pas dépasser les valeurs données dans la norme.

La norme américaine considère aussi le phénomène d'éclatement de la cannelure. Les cannelures internes (sur le moyeu) peuvent se rompre (ou « éclater ») sous l'action de trois contraintes de traction :

### II-3.4. Les contraintes de traction des dents d'arbre cannelé

- une due à la composante radiale du chargement transmis :

$$S_1 = \frac{T \tan \phi}{\pi D t_w L} \quad (II.22)$$

- une due à la force centrifuge :

$$S_2 = \frac{1.656 (N_{rot})^2 (D_{oi}^2 + 0.212 D_{ri}^2)}{10^6} \quad (II.23)$$

Avec :

$N_{rot}$  la fréquence de rotation en tour par minute.

- une due à la force tangentielle sur le cercle primitif causant la flexion des dents :

$$S_3 = \frac{4T}{D^2 L_e Y} \quad (II.24)$$

Dans cette équation,  $Y$  est le facteur de forme de Lewis obtenu à partir de la configuration des dents. Pour des cannelures internes à angle de pression de  $30^\circ$ ,  $Y = 1,5$  est une bonne estimation. Le facteur 4 traduit le fait que seule la moitié de la dent supporte le chargement.

La contrainte de traction totale qui tend à rompre le moyeu s'exprime par l'équation suivante et doit être inférieure aux valeurs données dans la norme:

$$S_t = \frac{K_a K_m (S_1 + S_3) + S_2}{K_f} \quad (II.25)$$

### II-3.5. Les efforts de torsion sur d'arbres cannelés

Considérer un arbre rond et circulaire de coupe sous la torsion pure. L'angulaire le débattement éprouvé à une extrémité de l'arbre, relativement à l'autre est :

$$\phi = \frac{TL}{LG} \quad (II.26)$$

La contrainte angulaire alors, est définie par ce qui suit :

$$\gamma = \frac{r\phi}{L} \quad (II.27)$$

La contrainte de cisaillement de torsion de l'arbre éprouvé par :

$$\tau_{xy} = G \frac{T}{k_r} \frac{D_t}{2} \quad (II.28)$$

Où  $k_r = JG$  peuvent être considérés une constante de torsion de rigidité, analogue à l' $EI$  constante généralement utilisée dans l'analyse de la flexion de la poutre. Aussi, laisser

$$k_r = k_{t,r} + k_{r,r} \quad (II.29)$$

Où :

$k_{t,r}$  : est la rigidité de torsion de toutes les 40 dents de cannelure ,

$k_{r,r}$  : est la rigidité de torsion de l'arbre circulaire sans les dents.

Pour Trouver  $k_{t,r}$ , l'équation suivante est utilisé ;

$$k_{t,r} = \frac{8ab^3 + 32a^3b}{3} G \quad (II.30)$$

Où ;  $a$  : est la hauteur de la dent de cannelure,

$b$  : est la largeur de la dent de cannelure,

$G$  : est le module de rigidité de la matière de l'arbre.

Pour Trouver  $k_{r,r}$  l'équation suivante est utilisée :

$$k_{r,r} = \frac{\pi D_i^4}{32} G \quad (II.31)$$

Noter que  $k_{r,r}$  est calculé en utilisant *des*  $D_i$  le diamètre minimal de l'arbre cannelé.

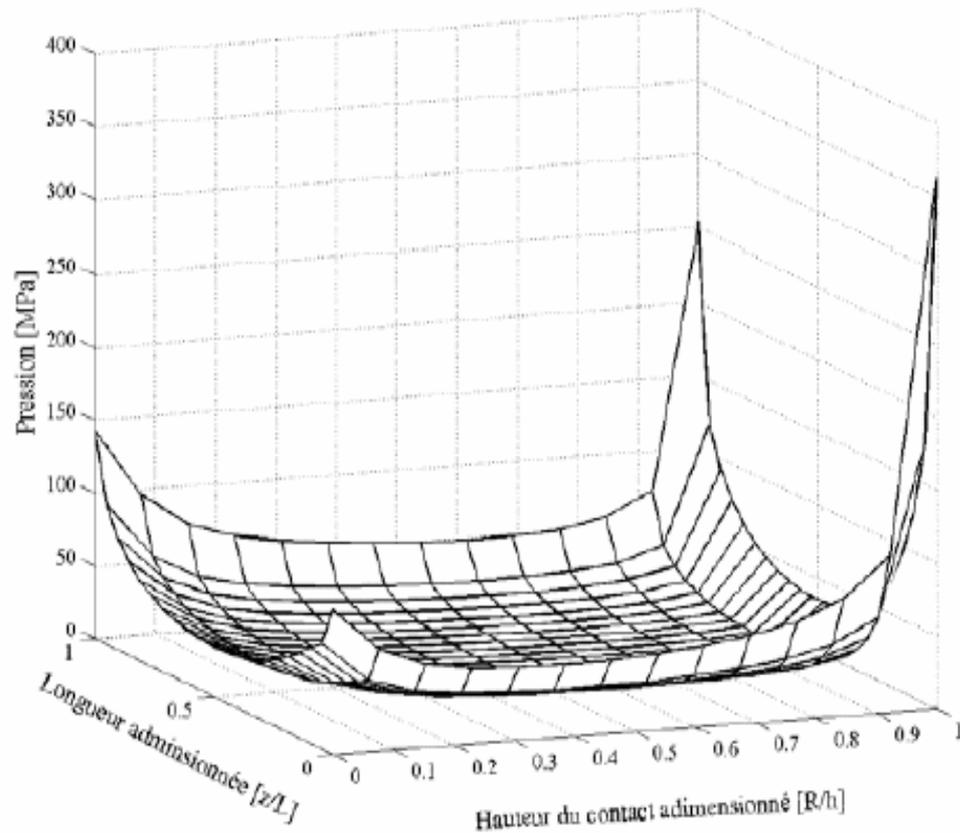
Combinant les équations (II.28), et (II.29) :

$$k_r = \left[ \frac{8ab^3 + 32a^3b}{3} + \frac{\pi D_i^4}{32} \right] G \quad (II.32)$$

Finalement, d'après la combinaison les équations on à :

$$\tau_{xy} = \frac{TD_i}{2} \left[ \frac{8ab^3 + 32a^3b}{3} + \frac{\pi D_i^4}{32} \right]^{-1} \quad (II.33)$$

Nous avons vu dans cette première partie que plusieurs études qu'elles soient analytiques, expérimentales (jauge de contrainte) ou par calculs éléments finis aboutissent aux moins en mêmes résultats : les répartitions de contraintes et de pression de contact dans les cannelures ne sont uniformes ni axialement ni suivant la hauteur du flanc des dents. La figure II-05 est un graphique issu d'une modélisation Eléments Finis tridimensionnelle permettant de voir dans sa globalité le champ de pression qui s'applique sur le flanc d'une dent dans le cas d'un arbre cannelé.



**Figure II.05.** Distribution de la pression de contact sur un flanc d'une dent d'une cannelure en 3D

En plus, de ce non uniformité de la distribution de la pression sur les flancs, le phénomène complexe d'usure prépondérant dans les cannelures, vient à son tour compliquer l'étude. Des tentatives de simulations par éléments finis on pu modéliser le problème de glissement au niveau du contact et de prédire la répartition des contraintes et des déformations.

### III -1. Description et caractéristiques du modèle d'arbre cannelé objet de l'étude

Un domaine  $\Omega$  de forme complexe est parfois mal modélisé dans les préprocesseurs de logiciels d'éléments finis. Il est quelquefois judicieux de le faire dans un autre logiciel plus adapté. On utilise alors un logiciel de CAO. Le problème est que chaque logiciel d'éléments finis a sa propre méthode pour décrire la géométrie d'un domaine. Il existe cependant des formats standard normalisés de description de géométries. Si on a la chance que le logiciel de CAO et le logiciel d'éléments finis soient capables tous les deux de lire et écrire dans l'un de ces formats standard, on peut communiquer une géométrie de l'un à l'autre.

Les normes de ces formats standard évoluent en fonction des versions et les logiciels dont on dispose ne sont pas toujours à la même version. D'autre part, beaucoup de logiciels prennent des libertés avec les normes ou ne reconnaissent qu'une partie des entités normalisées. Le résultat est que le transfert d'une géométrie d'un logiciel de CAO vers un logiciel d'éléments finis se fait rarement sans pertes ! Il faut généralement retoucher la géométrie reçue avec les outils du préprocesseur du logiciel d'éléments finis. Le logiciel utilisé pour cette étude est le progiciel Solidworks.

### III-2. Présentation de logiciel Solidworks

Solidworks est un outil de modélisation puissants permettant de concevoir de façon dynamique tous types d'éléments, depuis les dessins du styliste à la surface finale, prête pour les processus de fabrication. Ce logiciel nous permet de générer des courbes 3D, et les déformer, et d'analyser de façon statique et dynamique tous les éléments générés.

Dans le cadre de notre étude sur les arbres cannelés, on a deux types de forme des cannelures ; les cannelures a flancs parallèles qui présente des difficultés d'usinage pour obtenir un centrage précis, ne conviennent pas également pour les grands vitesses de rotation .et les cannelures a flancs en développante de cercle. Ces cannelures autorisent de grandes vitesses de rotation et un très bon centrage. Elles sont conçues et réalisées suivant la même technique et au moyen des mêmes machines outils que les dentures d'engrenages. Les dents de la fraise façonnent les cannelures comme il est illustré dans la figure III-1 et III-2.

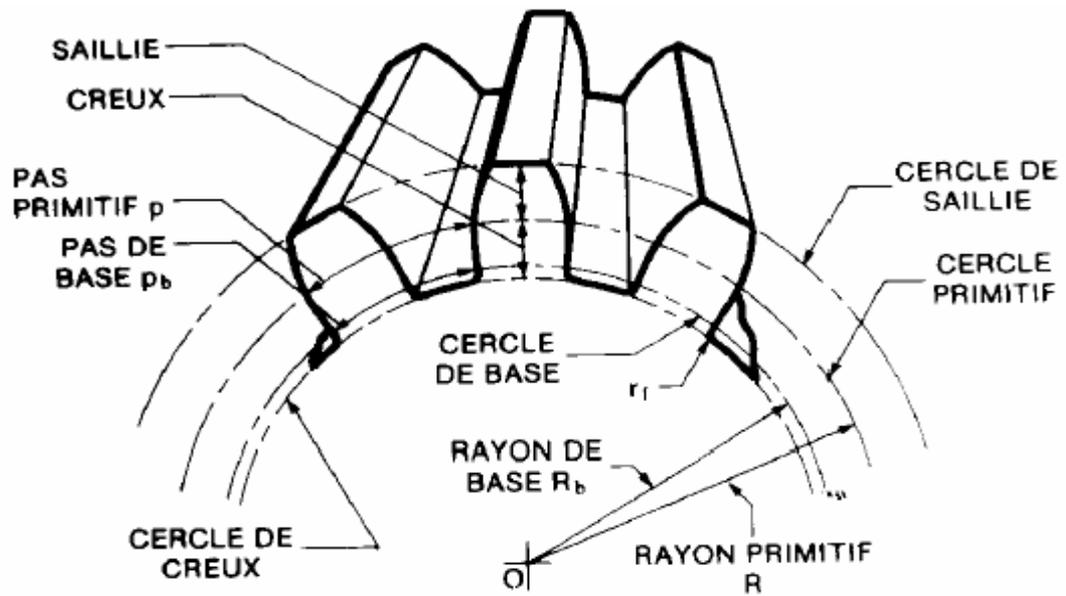


Figure III-1. Illustration d'un arbre cannelé

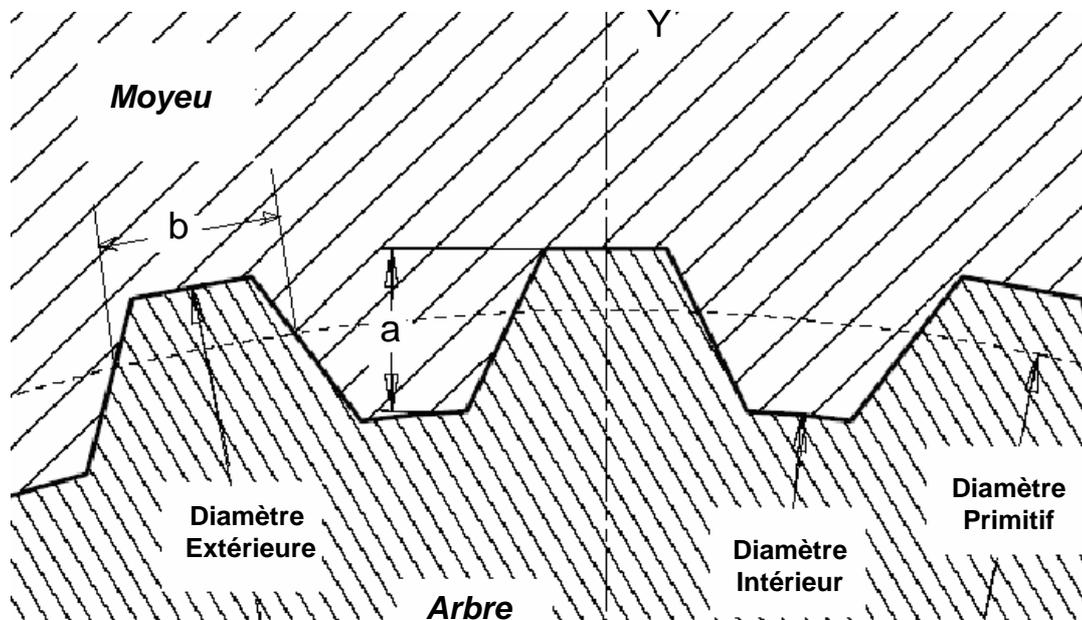


Figure III-2. Illustration d'une paire de cannelure interne et extérieure

Les cannelures externes sont fabriquées grâce à une technique appelée brochage. L'outil tournant est appelé fraise, et est utilisé pour couper les rainures dans l'arbre plein.

- Afin de faciliter le brochage, éviter de rainurer le moyeu sur une longueur  $L$  dépassant  $2,5d$ .
- Le diamètre maximal  $D_1$  des épaulements dépend du diamètre  $S$  de la fraise utilisée pour le taillage.
- Si le fraisage est suivi d'une rectification, compté pour le diamètre de la meule 150mm environs.

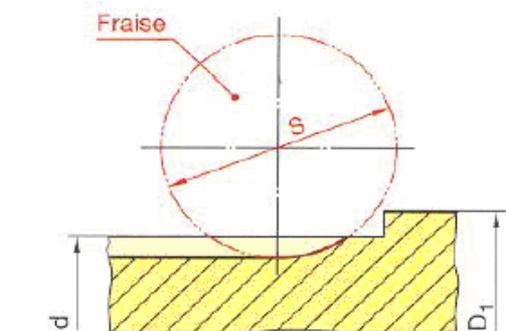


Figure III-3. Position d'une fraise sur un arbre avec épaulement

Typiquement, un ingénieur consulte la norme ANSI B92.1 1970[02] pour s'orienter dans la conception d'accouplements cannelés. Selon cette norme, deux paramètres principaux sont utilisés pour définir la cannelure ; l'élanement et le nombre de dents. Les cannelures et les engrenages sont similaires en termes de techniques de fabrication. Cependant, là où les engrenages ont seulement un nombre pour décrire l'élanement, les cannelures ont deux. Par exemple, dans une cannelure avec un rapport primitif d'élanement de 16/32, le numérateur est connu comme diamètre de flanc ( $P$ ) et commande le diamètre d'élanement. Le dénominateur, qui est toujours le double le numérateur ( $P_s$ ). La profondeur ou l'épaisseur de dent et le nombre de lancement avec le nombre de dents ( $N$ ) définit le diamètre primitif ( $D_p$ ) est défini comme :

$$D_p = \frac{N}{P} \quad (III .1)$$

Les autres paramètres dont on a besoin pour construire la cannelure sont : l'angle de pression ( $\phi$ ), le diamètre du cercle de base ( $D_{cos}$ ), le Diamètre de flanc ( $p$ ), le diamètre intérieur ( $D_i$ ), et le diamètre extérieure ( $D_o$ ). L'épaisseur (sur le cercle d'élanement) d'une dent de cannelure est calculée grâce l'équation (III.1):

$$t_p = \frac{\pi}{N} \frac{D_p}{2} \quad (III . 2)$$

Utiliser la relation approximative suivante pour évaluer rapidement une valeur du pas diamétral  $P$  (normalisation AGMA) ou du module  $M$  (système SI).

$$M \geq 2.34 \sqrt{\frac{T}{k \cdot \sigma}} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{25.4}{p} \quad (III .3)$$

Le module  $M$  est exprimé en mm, tandis que l'unité du pas diamétral est le po-1. Noter que la contrainte pratique admissible sur les dents est  $\sigma$ , constante dans l'inégalité ci-dessus est évaluée pour  $\sigma = 80$  MPa, La force tangentielle au cercle primitif est  $T$ . Le constant  $k$  est fonction du procédé de fabrication, de la finition et des efforts transmis dans l'application. Des valeurs typiques de  $k$  sont données dans le tableau III-1 suivant [02]:

**Tableau III-1.** Spécifications du constant  $k$

$k$	Qualité de la Surface	Vitesse linéaire au Cercle Primitif	Effort Tangentiel $T$ (N)
De 4 à 6	Moulé	Faible, < 0.5 m/s	Faible
De 8 à 16	Taillé, Non rectifié	Moyenne	Moyen
Plus de 16	Taillé, Rectifié	Grande, >10 m/s	Grand

### III-3. Dimensionnement les arbres étudiés

Les équations précédentes ne considèrent pas les effets dans un arbre avec épaulement cannelé ou sur un arbre partiellement cannelé.

Le premier arbre considéré est un arbre avec épaulement cannelé, voir la figure III-4. Dû prendre en compte les factures de concentrations des contraintes, tel que celui de la concentration d'effort de Peterson [11] agissant sur le rayon du filet. L'effet de la cannelure sur la transmission d'efforts à travers le diamètre de l'arbre est un facteur important.

Tableau III-2. Spécifications géométriques des Arbre étudiés			En (inch)	En (mm)
Nombre de dents	$N$	/	40	
Rapport Primitif		$P/2P_s$	16/32	
Pas diamétral	$P$	$N/D_p$	16	
Angle de pression	$\phi$	/	30°	
Diamètre de base	$D_b$	$D_p \cos\phi$	2,165	54,991
Diamètre primitif	$D_p$	$N P/\pi$	2,500	63,500
Diamètre extérieur	$D_o$	$(N + 1,35) / P$	2,584	65,643
Diamètre intérieur	$D_i$	$(N - 1,35) / P$	2,416	61,357
Diamètre de la section non cannelée	$d$	/	2,290	58,160
Epaisseur de la dent (Diamètre d'élanement)	$t$	$\pi D_p/N$	0,196	4,985
Hauteur de la dent	$a$	$D_o - D_i$	0,169	4,286

### III-3.1. Arbres avec épaulements

Ce sont des arbres avec une partie cannelée à deux sections ( $D_i$  et  $D_o$ ). Plusieurs modèles ont été étudiés avec plusieurs rapports de  $d/D_o$  (0.500, 0.750 et 0.886)[15], et des études ont été faites sur les effets de ces rapports sur la variation des contraintes sur la longueur de l'arbre.

		En inch	En mm
$d/D_o=0.500$	$d =$	1,292	32,822
$d/D_o=0.750$	$d =$	1,938	49,232
$d/D_o=0.886$	$d =$	2,290	58,160

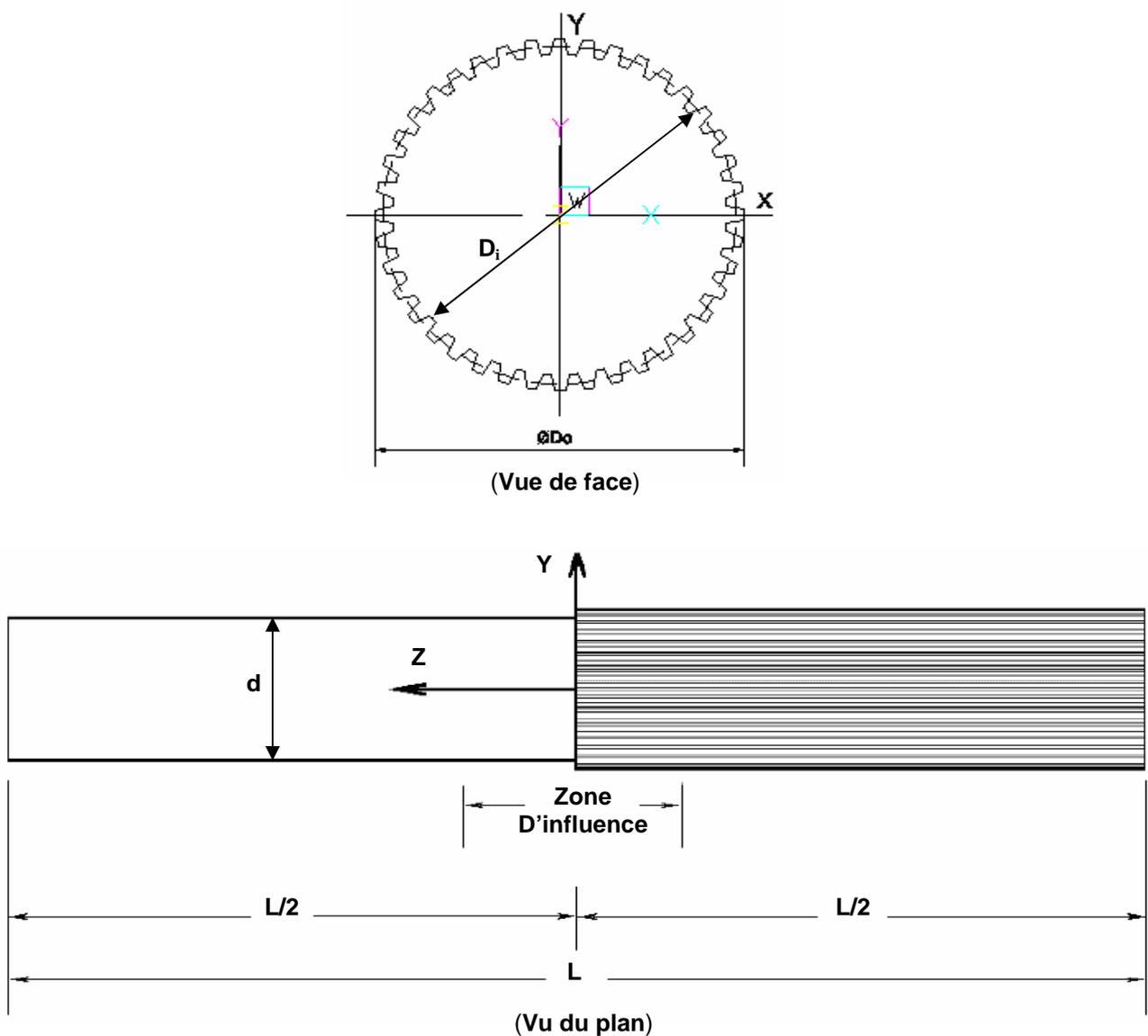


Figure III-4. Vue Schématique d'un arbre avec épaulement

### III-3.2. Arbres partiellement cannelés

Le deuxième type d'arbres étudiés dans cette recherche, est l'arbre partiellement cannelé (figure III-5). L'arbre partiellement cannelé consiste une partie lisse de section circulaire avec une section cannelée de diamètre majeur ( $D_o$ ).

Plusieurs modèles d'arbres partiellement cannelés ont été étudiés en utilisant plusieurs rayons de fraise mère,  $R_1=1.00''(25,4mm)$ ,  $R_2=1.50''(38,1mm)$ , et  $R_3=2.0''(50,8mm)$  pour créer des dents de cannelure inachevée [15].

		En inch	En mm
$d = D_o$		2,584	65,643
Fraise mère	$R=$	1,000	25,400
Fraise mère	$R=$	1,500	38,100
Fraise mère	$R=$	2,000	50,800

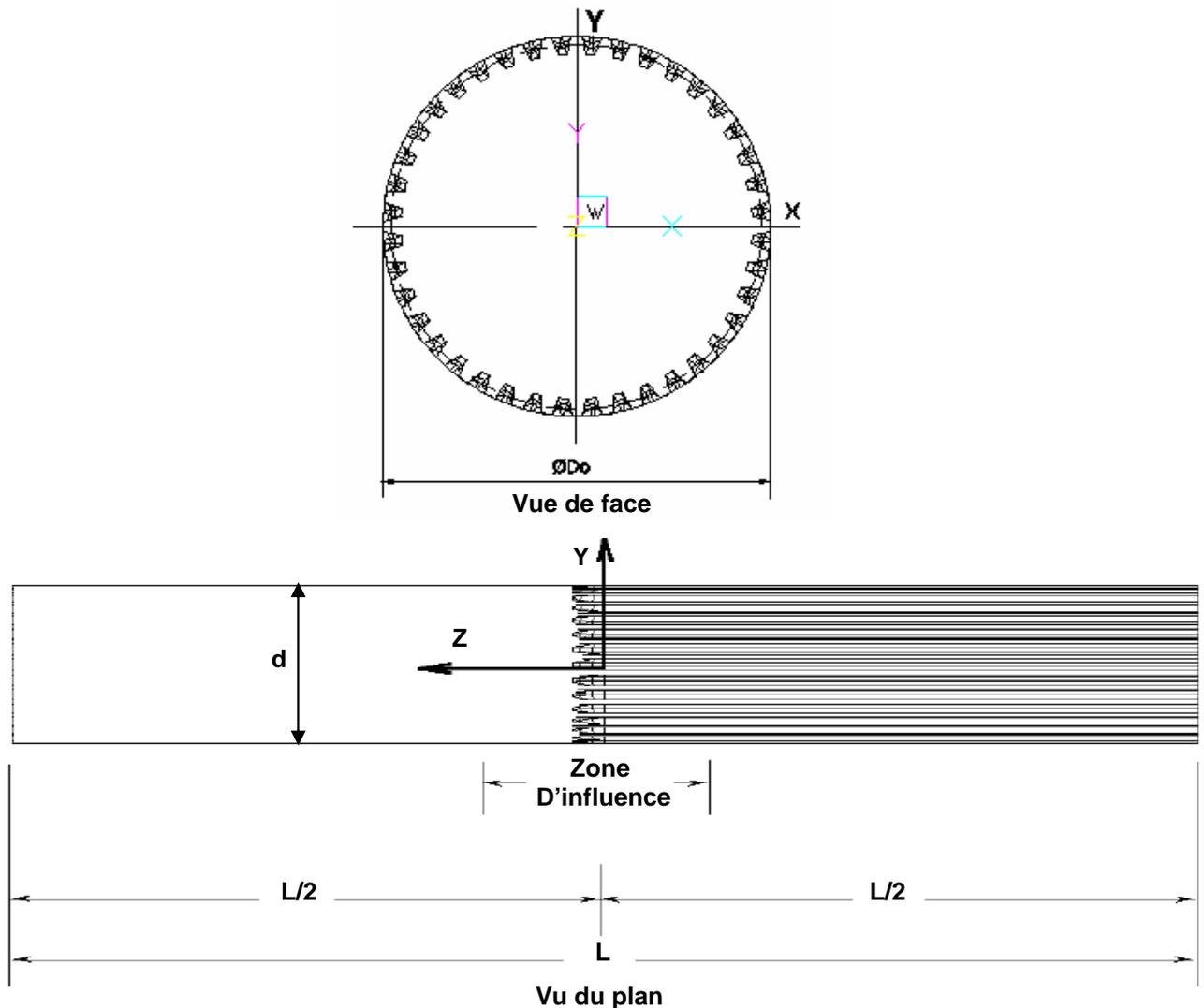
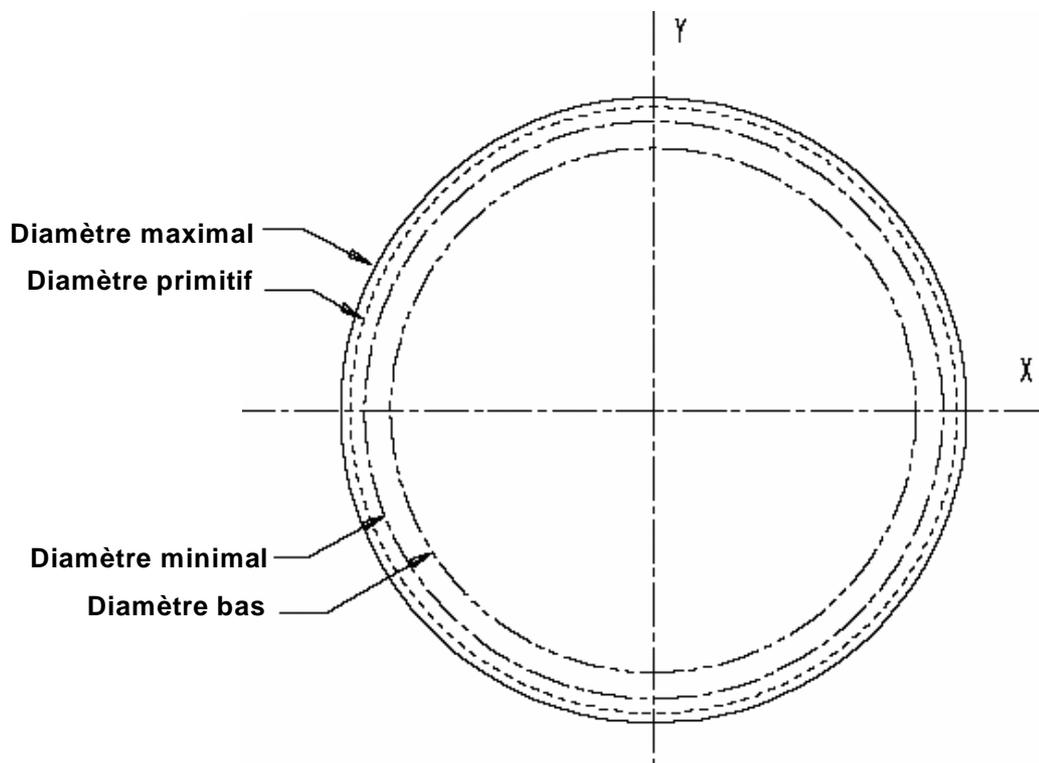


Figure III-5. Vue Schématique d'un arbre partiellement cannelé

### III-3.2. Caractéristiques fondamentales des Arbres cannelés

On a utilisé le logiciel Solidworks pour créer le profil des dents de cannelure, la géométrie des structures d'arbres cannelés, ainsi que les modèles d'arbres pleins. Le modèle final de cannelure de 40 dents a été produit par le premier profil d'élancement qui est le cercle bas de la dent. La ligne d'action de la force de pression ( $30^\circ$ ), est portée par la tangente au cercle de base et l'intersection de la largeur de la dent avec ce cercle (voir figure III.7). La construction de profil de cannelure est illustrée sur la figure III-5. Une fois les dimensions de base de la cannelure en coupe ont été déterminées, la géométrie des dents a été développée.



**Figure III-6.** Les courbes circulaires utilisées pour construire le profil  
De cannelure fondamentale

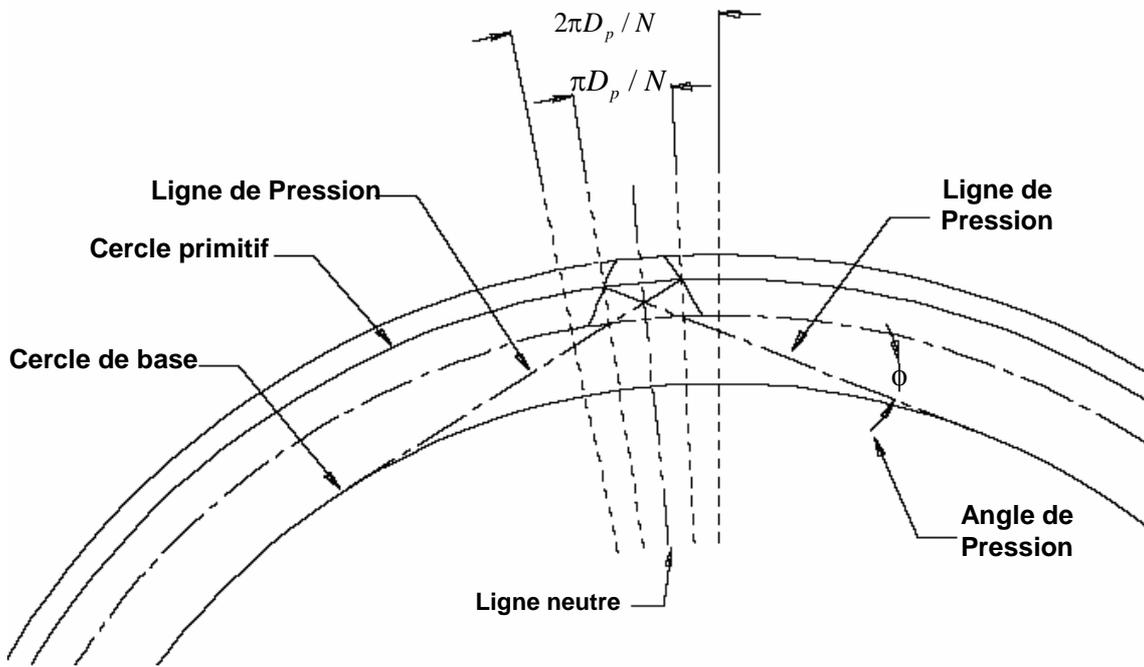


Figure III-7. Le profil de la dent de cannelure à flancs plats

Une fois que la ligne de pression était construite, le profil de dent a été généré par le dessin des cercles dont les centres se trouvent aux points de tangence de la ligne de pression et le cercle de base. Ces cercles entrecroisent la largeur de la dent sur le cercle primitif, comme illustré sur la figure III-8.

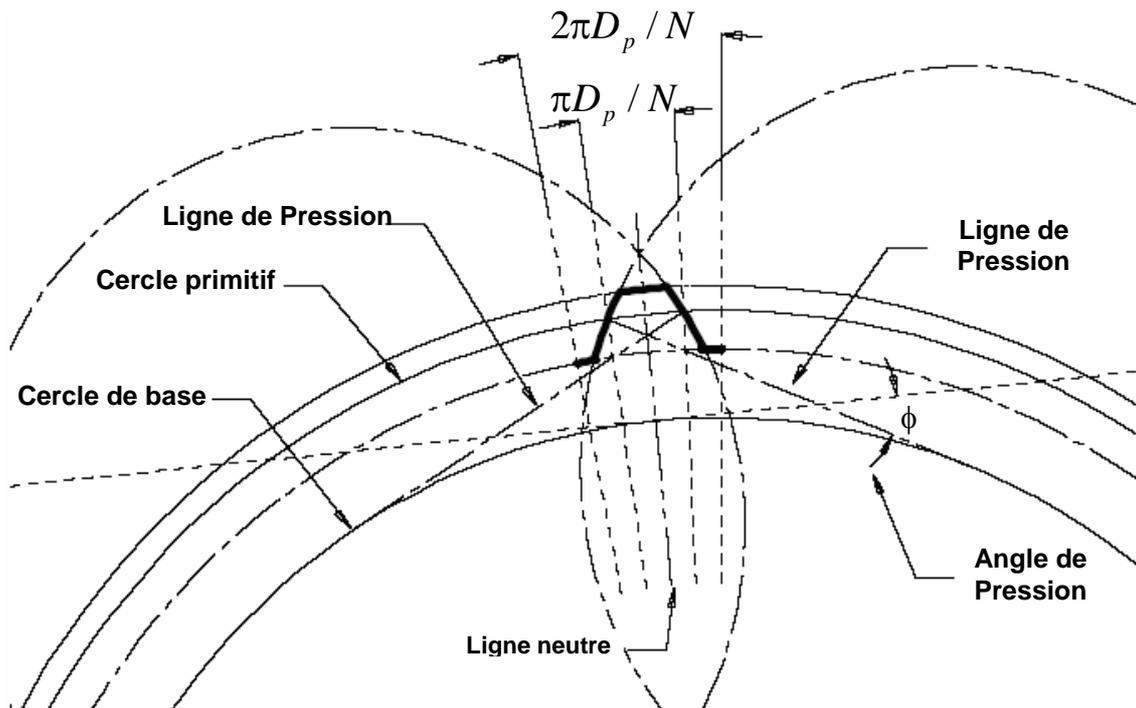
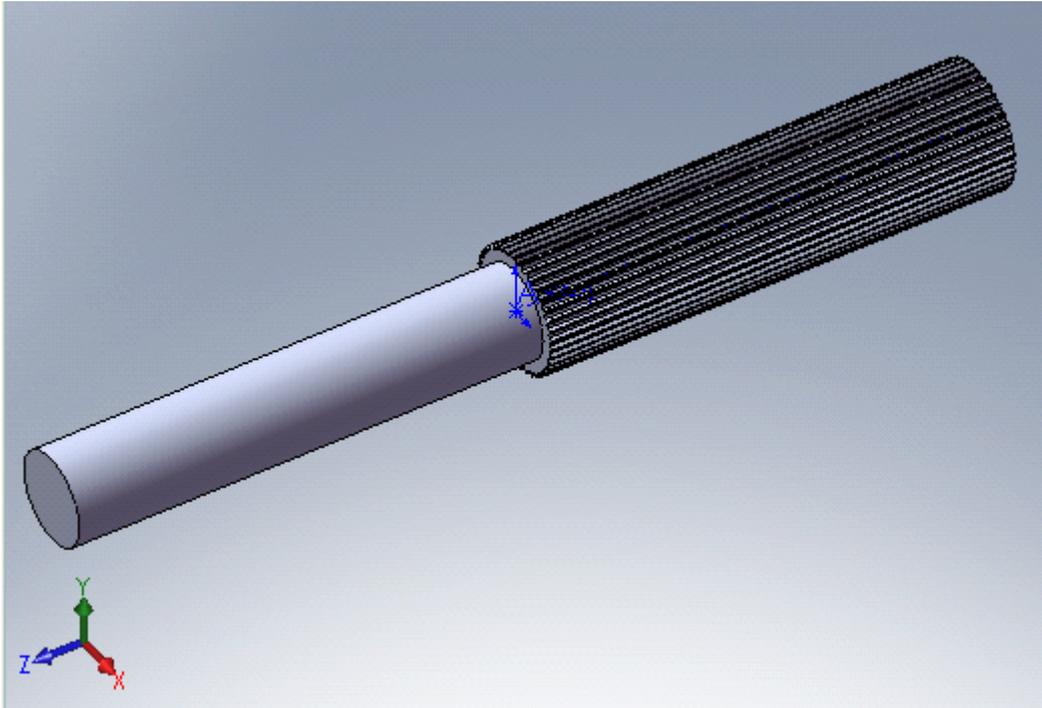


Figure III-8. Le profil de la dent de cannelure à flancs en développante

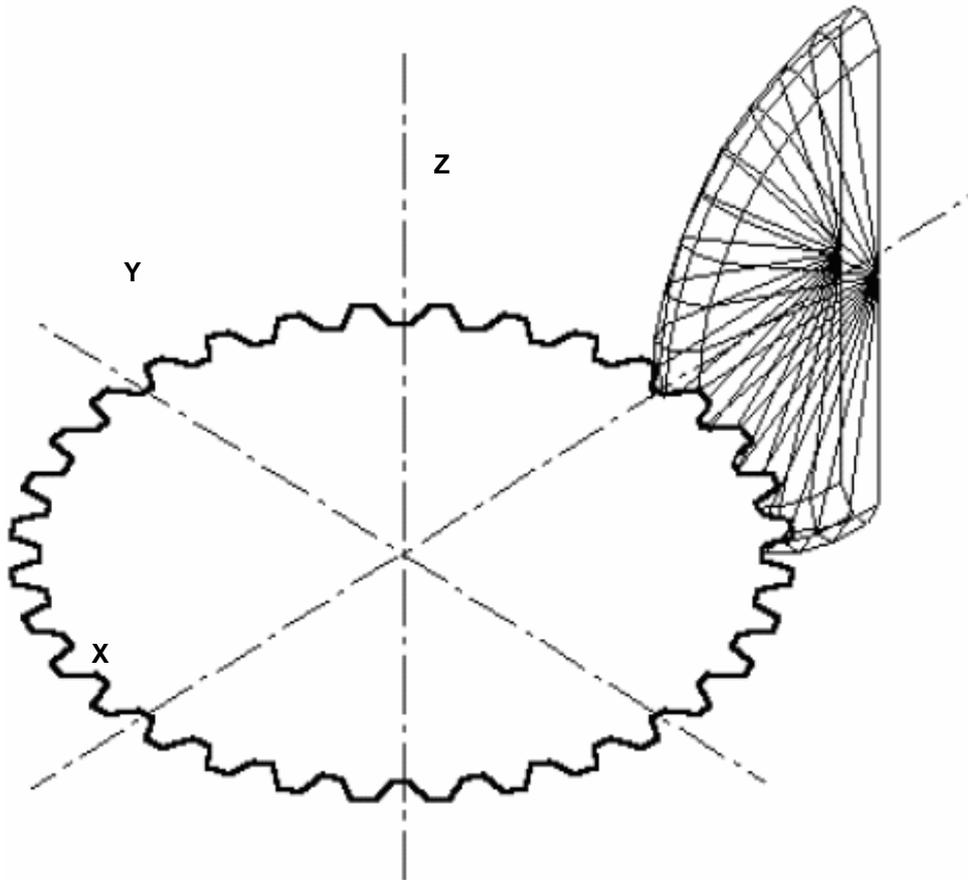
### III-4. La géométrie des arbres dans l'espace (3D)

Avant que les structures réelles de cannelure ne soient représentées en 3D sur le logiciel "SOLIDWORKS", on part d'une structure cylindrique lisse. Par la suite il y'a création des deux cercles de base et primitif, le profil en développante de cercle de la cannelure est obtenu en tenant compte de la largeur de la cannelure au niveau primitif pour avoir le nombre de 40 dents. Le milieu géométrique de la dent étant l'intersection de deux lignes de pression.



**Figure III-9.** Arbre avec épaulement cannelé en 3D

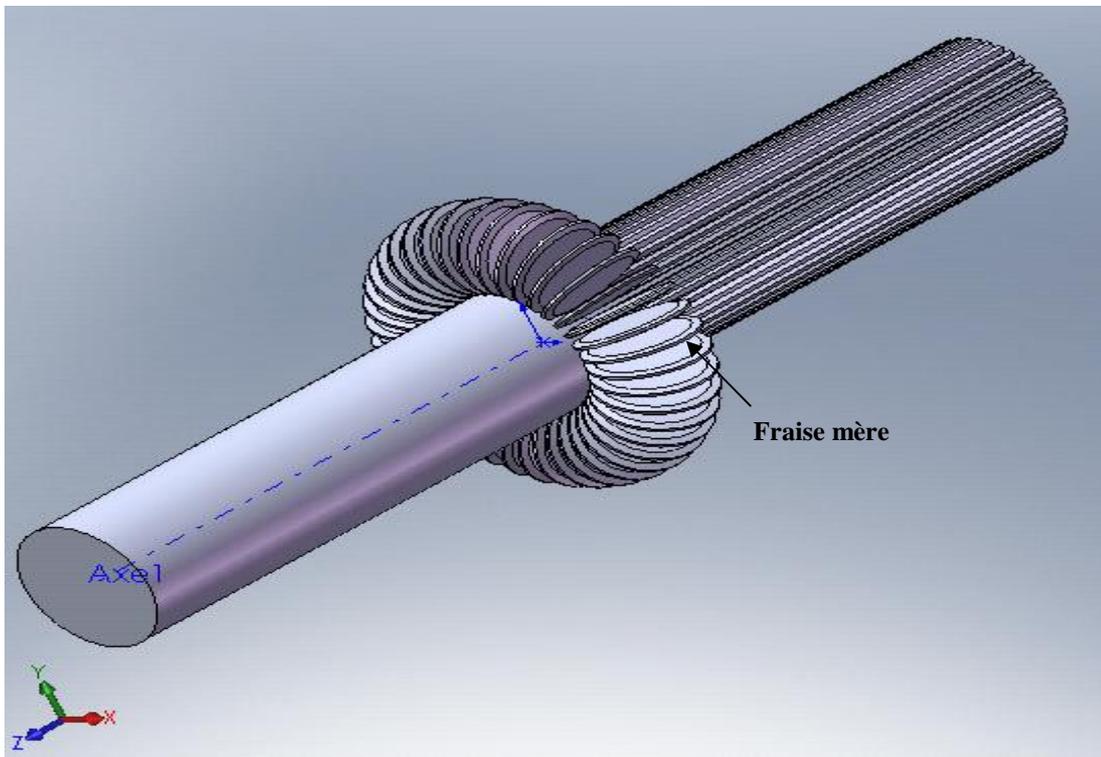
Le même profil de cannelure déjà généré de la construction de l'arbre avec épaulement a été utilisé pour la construction de l'arbre partiellement cannelé. On a créé une ligne qui s'étend de la racine d'une dent de cannelure jusqu'à la distance correspondant au rayon désiré de fraise mère. Pour cela, 3 diamètres de fraise mère ont été choisis, à savoir les diamètres de 50 mm, 70mm et 100mm. La coupe de la fraise mère a été alors tournée de  $90^\circ$  par rapport à la section transversale de l'arbre, comme représenté sur la figure III-10. L'outil de fraise mère sera également utilisé pour créer les dents inachevées dans l'arbre partiellement cannelé.



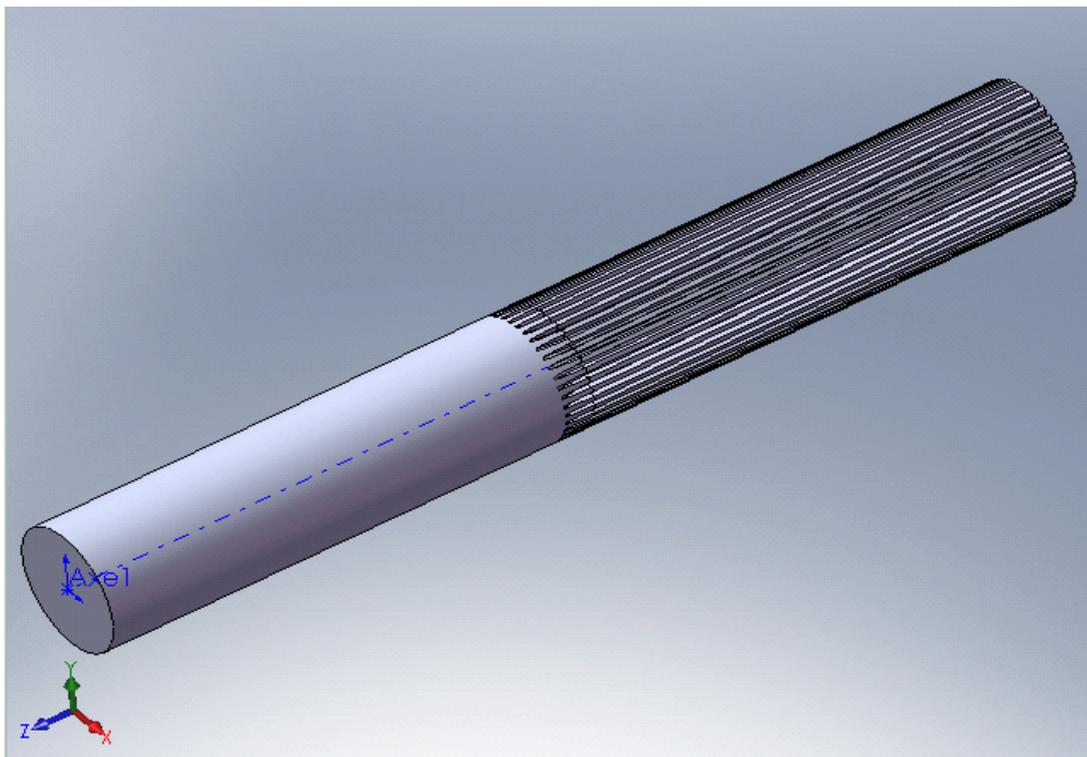
**Figure III-10.** Le profil de cannelure et la position Latérale de la fraise mère En 3D

On utilise le balayage de la section transversale de fraise mère par un chemin latérale de  $180^\circ$  autour de l'axe des abscisses, comme représenté sur la figure III-10. Cependant, un total de 40 fraises outils a été placé entre les cannelures pour créer la forme inachevée des dents.

Pour finir la géométrie, la pièce de fraise mère a été copiée entre chaque dent, la figure III-11, expose les différentes positions de la fraise mère autour le la partie à usiner de l'arbre en question. Le modèle plein final de la géométrie de l'arbre partiellement cannelé est montré sur la figure III-12.



**Figure III-11.** Positon de la fraise pour crée les dents sur l'arbre partiellement cannelé



**Figure III-12.** Arbre partiellement cannelé fini

### IV-1. Modélisation par la méthode des éléments finis

Pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis, on procède donc par étapes successives :

1. On se pose un problème physique sous la forme d'une équation différentielle ou aux dérivés partielles à satisfaire en tout point d'un domaine  $\Omega$ , avec des conditions aux limites sur le bord  $\partial\Omega$  nécessaires et suffisantes pour que la solution soit unique.
2. On construit une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : C'est la *formulation variationnelle du problème*.
3. On divise  $\Omega$  en sous domaines : C'est le *maillage*. Les sous domaines sont appelés *mailles*.
4. On choisit la famille de champs locaux, c'est à dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds (et éventuellement des dérivées). La maille complétée par ces informations est alors appelée *élément*.
5. On ramène le problème à un problème discret : C'est la *discrétisation*. En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments. Il suffit donc de trouver les valeurs à attribuer aux nœuds pour décrire une solution approchée. Le problème fondamental de la méthode des éléments finis peut se résumer en deux questions.
6. On résout le problème discret: C'est la *résolution*.
7. On peut alors construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et en déduire d'autres grandeurs ; C'est le *post-traitement*.
8. On visualise et on exploite la solution pour juger de sa qualité numérique et jugée si elle satisfait les critères du cahier des charges ; C'est *l'exploitation des résultats*.

Les étapes 1, 2, 3,4 et 5 sont souvent rassemblées sous le nom de *prétraitement*.

Le travail de ces différentes étapes est assisté par les logiciels. Il reste que pour maîtriser leur utilisation, il est indispensable de comprendre les fondements de la méthode, notamment les phases 3 et 4, ne serait-ce que pour comprendre et choisir intelligemment parmi les options qu'ils proposent.

### IV-2. Maillage et choix des éléments

Dans les logiciels, on dispose d'une bibliothèque d'éléments prédéterminés. Les polynômes de base des interpolations de référence sont calculés à l'avance et préprogrammés. L'utilisateur ordinaire n'a donc plus à s'en préoccuper. On trouve des mailles linéiques, des mailles

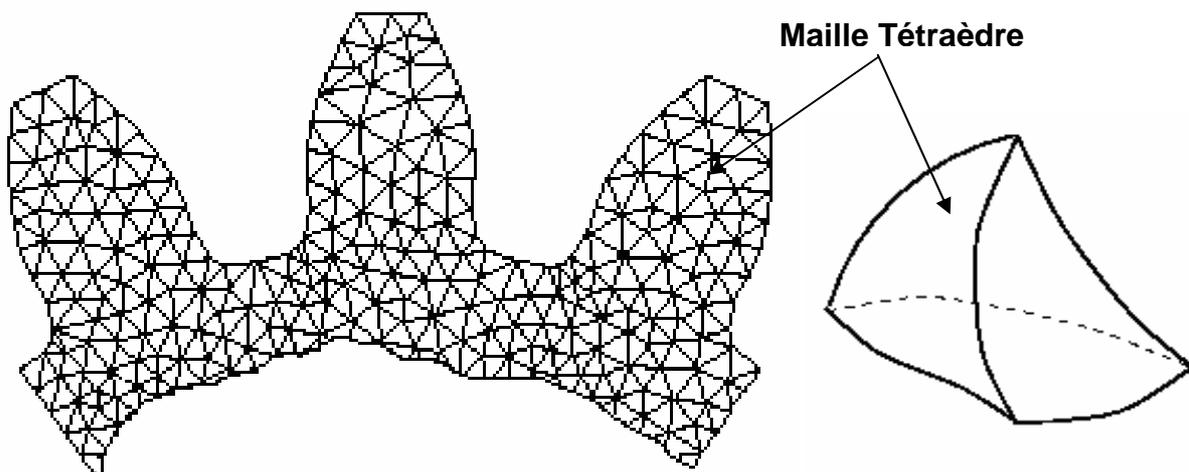
surfaciqes et des mailles volumiques de toutes formes et de toutes tailles. Comme on le verra plus loin, la résolution d'un problème par la méthode des éléments finis se ramène à calculer les valeurs de la solution approchée aux nœuds du maillage.

Pour cette étude nous avons choisie un maillage volumique tétraèdre comme il est illustré dans le tableau VI.1.

**Tableau VI.1** : Propriété de maillage avec le logiciel SOLIDWorks

<b>Type de maillage:</b>	Maillage volumique
<b>Maillage lissé:</b>	Tétraèdres
<b>Vérification du Jacobien:</b>	4 Points
<b>Taille de l'élément:</b>	6 mm
<b>Tolérance:</b>	0.3 mm
<b>Nombre d'éléments:</b>	113743
<b>Nombre de noeuds:</b>	167319

Le nombre de nœuds augmente avec le degré d'interpolation et le nombre de mailles. La taille du système d'équations à résoudre (et donc le temps de résolution) peut devenir très grande. La figure IV-1 représente le maillage d'une dent.



**Figure IV -1.** Maillage par des éléments Tétraédriques de l'arbre Cannelé

Dans le modèle EF 3D des cannelures, La contrainte agit en réalité non pas en un point mais sur une surface. Ainsi la contrainte d'un nœud agit sur une surface autour de celui-ci appelée zone d'influence (voir Figure IV-2).

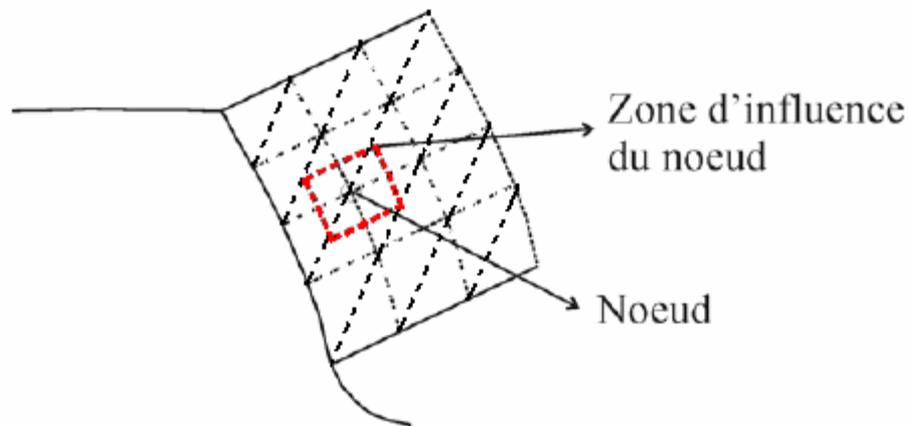


Figure IV -2. Zone d'influence d'un nœud

### IV-3. Les Conditions aux limites

Après l'achèvement de la génération du maillage, une représentation géométrique des nœuds et des éléments que comprend le modèle est affichée par le logiciel SOLIDWorks. Les conditions aux limites et les charges sont alors appliquées au modèle. Les déplacements imposés ont été appliqués aux modèles pour prévenir le mouvement du corps rigide quand les conditions de force sont appliquées. Un tel mouvement produirait une matrice de rigidité singulière, invalidant ainsi la solution optimale. Le modèle de l'arbre étudié est encasté sur une extrémité, et libre dans l'autre. Cela a pour résultat, un arbre de configuration en porte-à-faux. Comme représenté sur les figures IV-3 et IV-4[15].

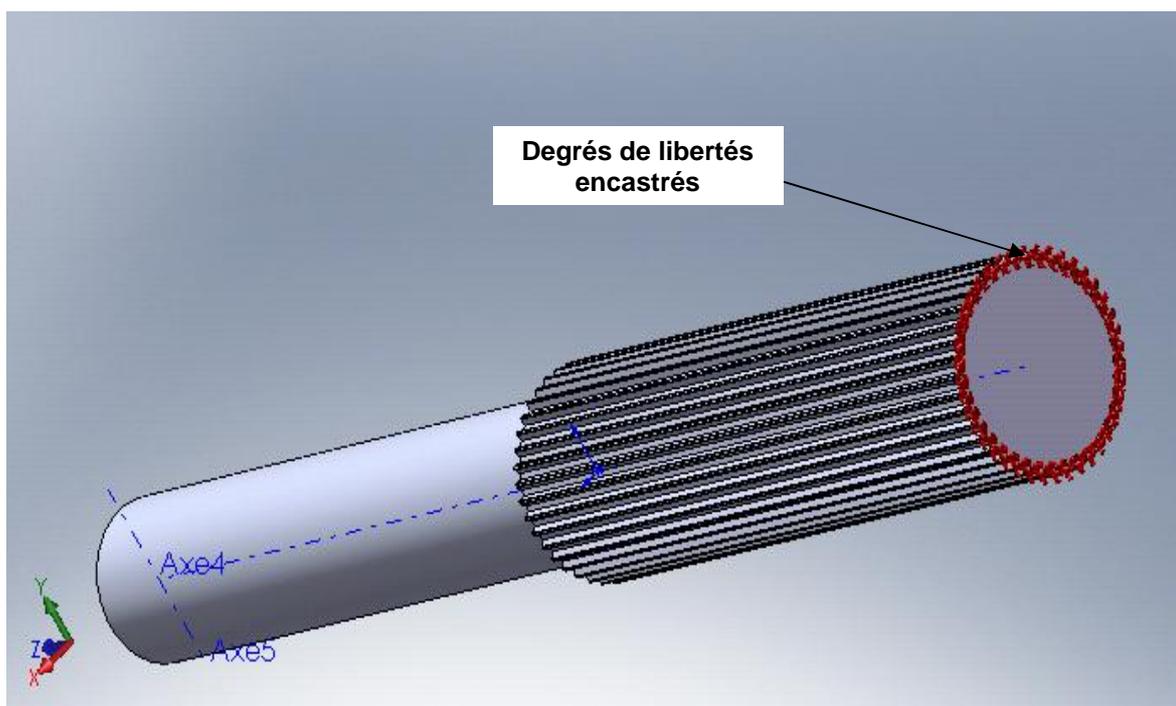


Figure IV -3. Les conditions aux limites sur l'arbre étudié

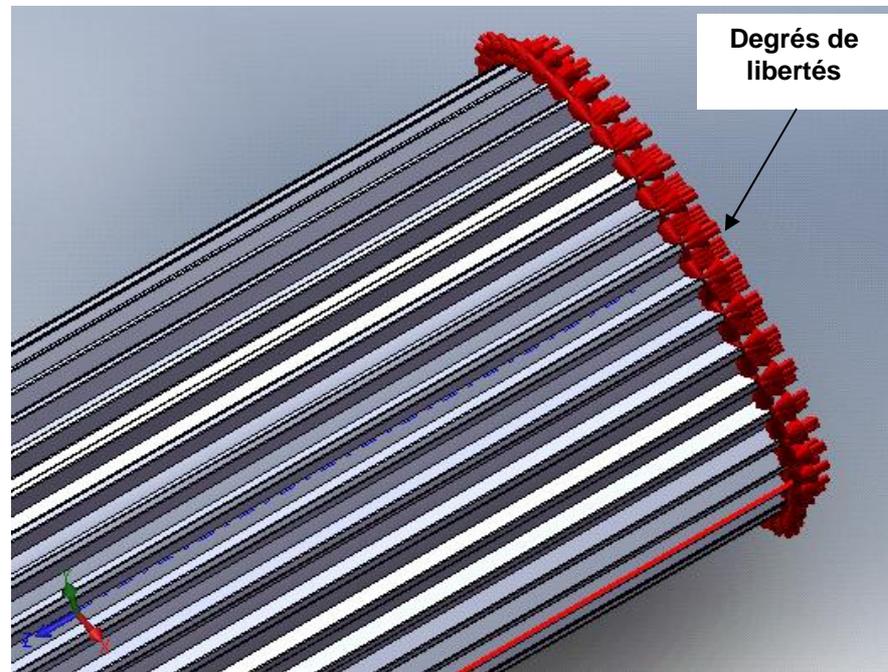


Figure IV -4. Les DDL d'un arbre cannelé

#### IV-4. Les charges appliquées sur les arbres

Les figures IV-5, IV-6 et IV-7 illustrent la torsion et la flexion causée par les forces appliquées à l'arbre avec épaulement et l'arbre partiellement cannelé. Respectivement, deux types de charges ont été appliqués au modèle pour créer les conditions désirées. La charge de flexion consistant en un couple de force. Ces forces sont égales en magnitude, mais opposées dans la direction. Les forces ont été appliquées parallèlement à l'axe de l'arbre, et perpendiculairement à la section libre. Cela crée un moment de flexion constant sur la longueur de l'arbre. Le couple de torsion a été appliqué perpendiculairement à l'axe de l'arbre et parallèlement à la section libre de l'arbre [15].

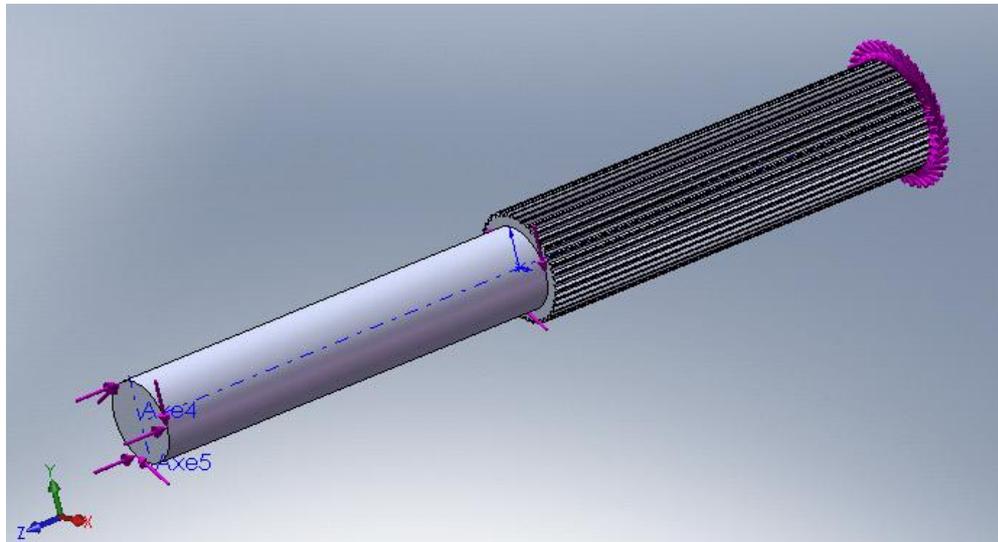


Figure IV -5. Représentation des charges sur un arbre cannelé sur la surface non cannelé

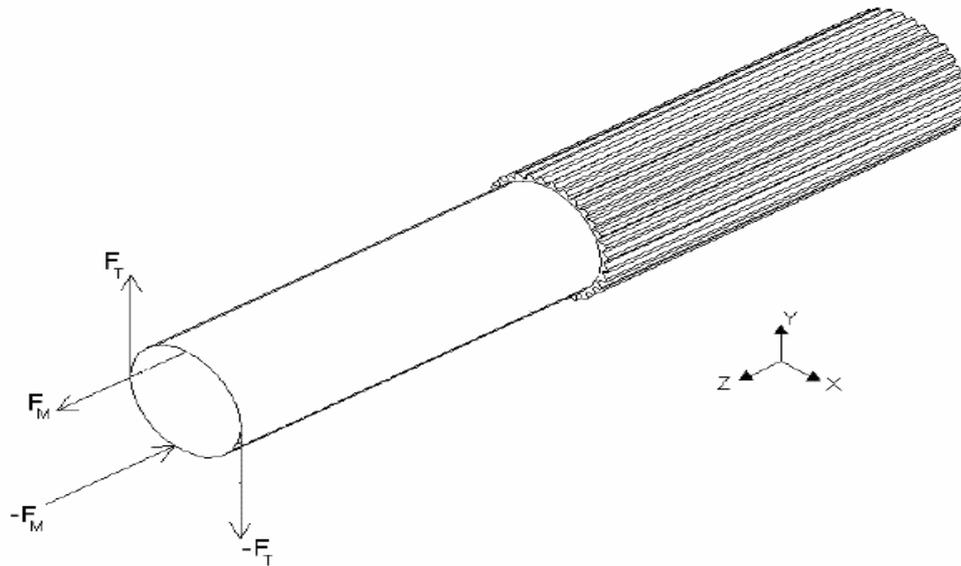


Figure IV -6. Application des forces sur l'arbre avec épaulement

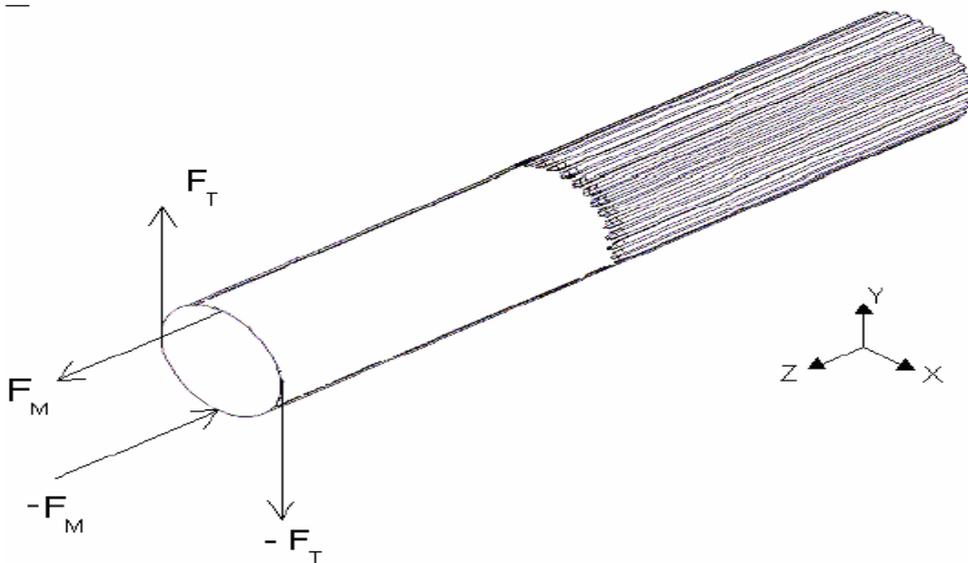
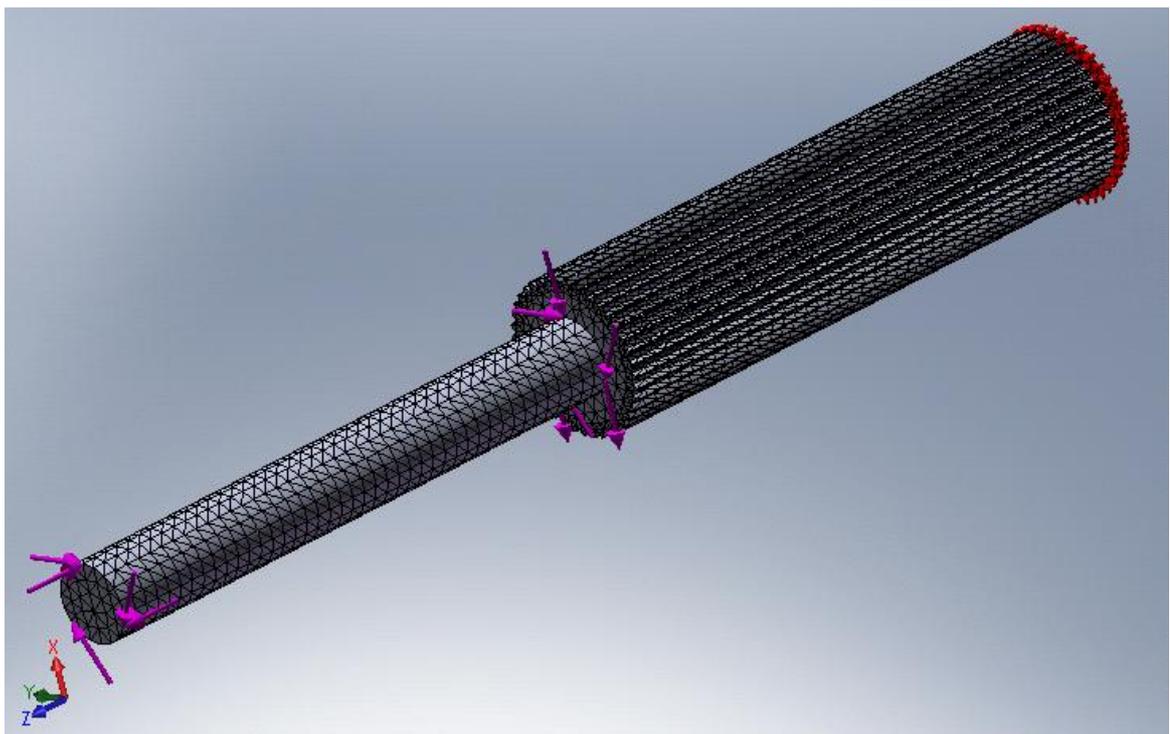


Figure IV-7. Application des forces sur l'arbre partiellement cannelé

**Tableau IV-2.** Les Caractéristique de matériau choisi dans cette étude

	Description Géométrique	Matière	Masse (Kg)	Masse Vol $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	Rr	Re	A%
01	Arbre avec épaulement cannelé De rapport : $d/D=0.5$	AISI 1020 (XC 18)	7,85	0.000993446	410 ÷ 980 (Mpa)	255 ÷ 600 (Mpa)	≥ 24
02	Arbre avec épaulement cannelé De rapport : $d/D=0.75$		9,94	0.00125783			
03	Arbre avec épaulement cannelé De rapport : $d/D=0.886$		11,42	0.00144609			
04	Arbre partiellement cannelé De fraise $R=25\text{ mm}$		13,21	0.00167219			
05	Arbre partiellement cannelé De fraise $R=38\text{ mm}$		12,76	0.00161536			
06	Arbre partiellement cannelé De fraise $R=50\text{ mm}$		12,12	0.00153357			

La matière *IASI 1020* c'est un acier doux (XC18) de cimentation pour pièces fortement sollicitation. Également utilisé pour traitement dans la masse. (Trempe direct d'eau)[15].



**Figure IV -8.** Représentation d'arbre Maillé avec les conditions aux limites  
Et de chargement

Ce chapitre a pour but de présenter les études du comportement statique et dynamique d'un arbre cannelé sous l'effet d'une sollicitation combinée "flexion/torsion" sur les dents. En effet pour pouvoir créer un modèle théorique relatif à la répartition des contraintes, il est important d'établir tout d'abord une référence, servant de base au développement. Pour cela deux voies ont été recensées, la voie théorique et la voie numérique.

Selon l'étude bibliographique du chapitre II, la connaissance du comportement d'une liaison cannelée passe par celle du champ de contraintes sur l'arbre. Or, comme nous l'avons précisé lors du chapitre introductif de ce mémoire, nous cherchons à décrire le comportement de cannelure à l'aide de modèle théorique. Ces modèles doivent donc être aptes, que ce soit de manière directe ou indirecte, à décrire le champ de contrainte et de déformations. Pour atteindre cet objectif, il est nécessaire de disposer de données de référence, donc de pouvoir mesurer ou évaluer les différentes répartitions des efforts selon les types des arbres cannelés.

#### **IV-5. Etude du comportement statique**

L'analyse statique, calcule les contraintes et déformations dans arbres cannelés fabriqués par un matériau donné, sous l'action de chargement et de déplacements imposés, un matériau cède lorsque les contraintes atteignent un certain niveau. Le module de calcul "COSMOS Works" directement intégré sous l'environnement "SOLIDWORKS" utilise l'analyse statique linéaire, basée sur la méthode des éléments finis pour calculer ces contraintes et déformations.

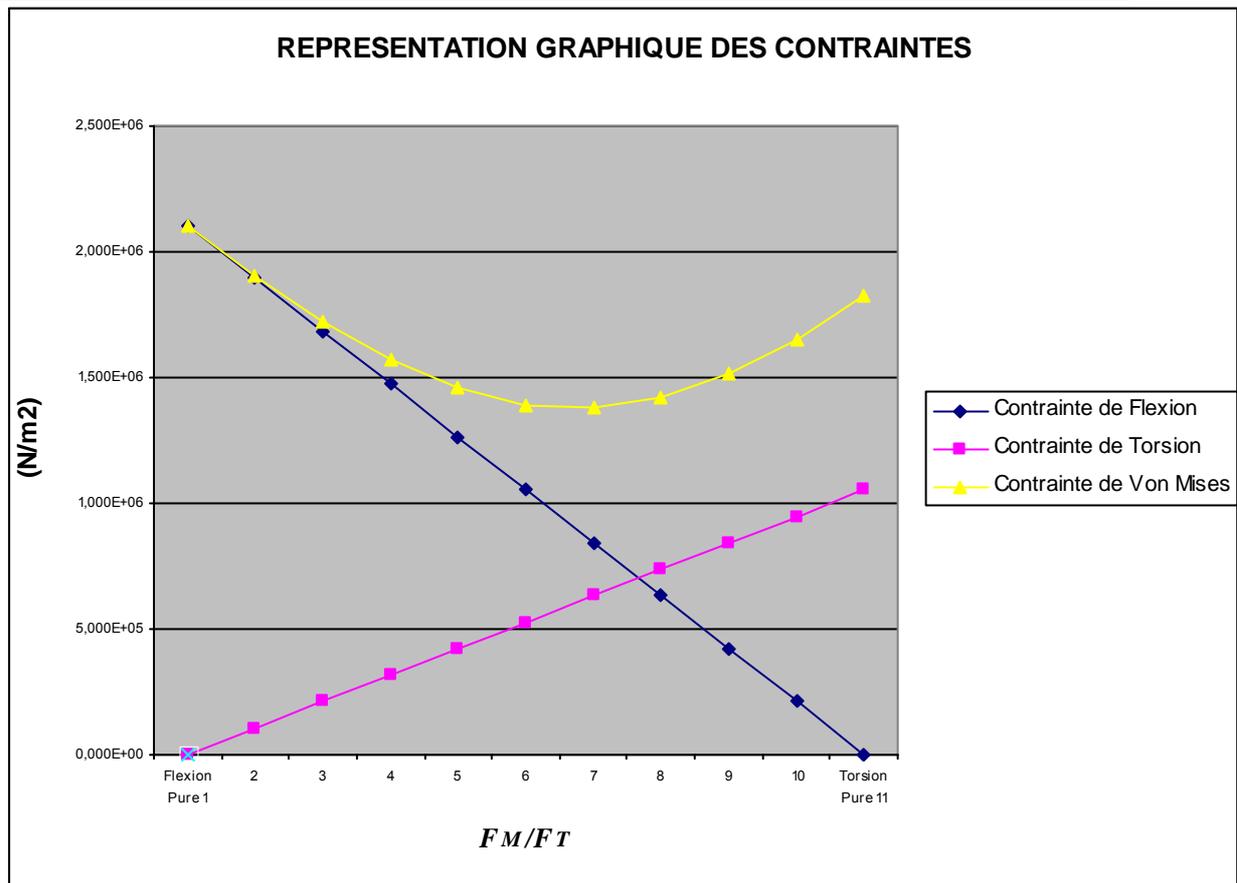
##### **IV-5.1. Calcul théorique des efforts résultants**

Onze cas de charge ont été appliqués à chaque modèle. Chaque cas de charge contient une combinaison de flexion et torsion. Les détails sur les cas de charges qui ont été appliqués à chacun des modèles sont montrés dans les Tableaux de IV-3 à IV-6 conformément à l'étude effectuée en [15]. Notons que les caractéristiques des cas des charges particulières sont données dans le rapport ( $F_M/F_T$ ), ou le rapport du moment de flexion au moment de torsion. Le nombre du numérateur  $F_M$  donne la force que crée le moment de flexion, alors que le dénominateur  $F_T$  est la force tangentielle de torsion sur l'arbre.

Rappelons que  $d$  est le diamètre de l'arbre non cannelé, et que  $D_o$  est le diamètre extérieur de la section cannelée de l'arbre. La distance de séparation entre les forces, le moment de flexion et le moment de torsion sont à déterminer par la géométrie de l'arbre, puisque les charges ont été appliquées à la fin de la section non cannelée. Les calculs sont fait pour différents rapports du diamètre lisse et cannelé de l'arbre à savoir ( $d/D = 0.500, 0.750$  et  $0.886$ ) [15].

**Tableau IV-3 :** Calcul du moment de flexion et de torsion pour l'arbre avec épaulement de rapport ( $d/D=0,50$ )

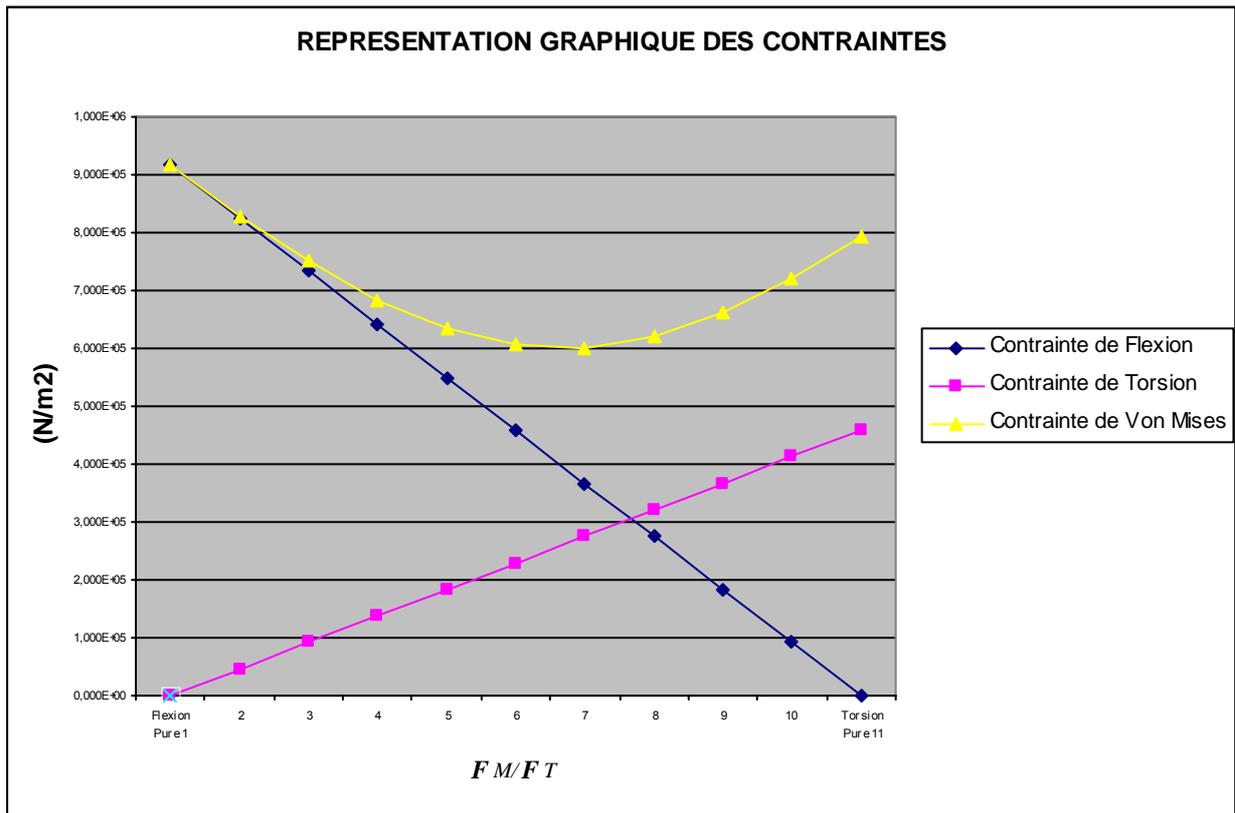
Charge	La Flexion				La Torsion				Contrainte Von Mises ( $N/m^2$ )
	Fm(N)	d (m)	Moment (N.m)	Contrainte ( $N/m^2$ )	Ft(N)	d (m)	Moment (N.m)	Contrainte ( $N/m^2$ )	
<b>Flexion Pure 1</b>	224,8	0,033	7,418	2,104E+06	0	0,033	0,000	0,000	2,104E+06
<b>2</b>	202,32	0,033	6,677	1,893E+06	22,48	0,033	0,742	1,052E+05	1,902E+06
<b>3</b>	179,84	0,033	5,935	1,683E+06	44,96	0,033	1,484	2,104E+05	1,722E+06
<b>4</b>	157,36	0,033	5,193	1,473E+06	67,44	0,033	2,226	3,156E+05	1,571E+06
<b>5</b>	134,88	0,033	4,451	1,262E+06	89,92	0,033	2,967	4,207E+05	1,458E+06
<b>6</b>	112,4	0,033	3,709	1,052E+06	112,4	0,033	3,709	5,259E+05	1,391E+06
<b>7</b>	89,92	0,033	2,967	8,415E+05	134,9	0,033	4,451	6,311E+05	1,380E+06
<b>8</b>	67,44	0,033	2,226	6,311E+05	157,4	0,033	5,193	7,363E+05	1,423E+06
<b>9</b>	44,96	0,033	1,484	4,207E+05	179,8	0,033	5,935	8,415E+05	1,517E+06
<b>10</b>	22,48	0,033	0,742	2,104E+05	202,3	0,033	6,677	9,467E+05	1,653E+06
<b>Torsion Pure 11</b>	0	0,033	0,000	0,000	224,8	0,033	7,418	1,052E+06	1,822E+06



**Figure IV-9.** Représentation théorique les courbes de contrainte et De déformation de l'arbre cannelé de rapport  $d/D=0.500$

**Tableau IV-4** : Calcul du moment de flexion et de torsion pour l'arbre avec épaulement de rapport ( $d/D=0,75$ )

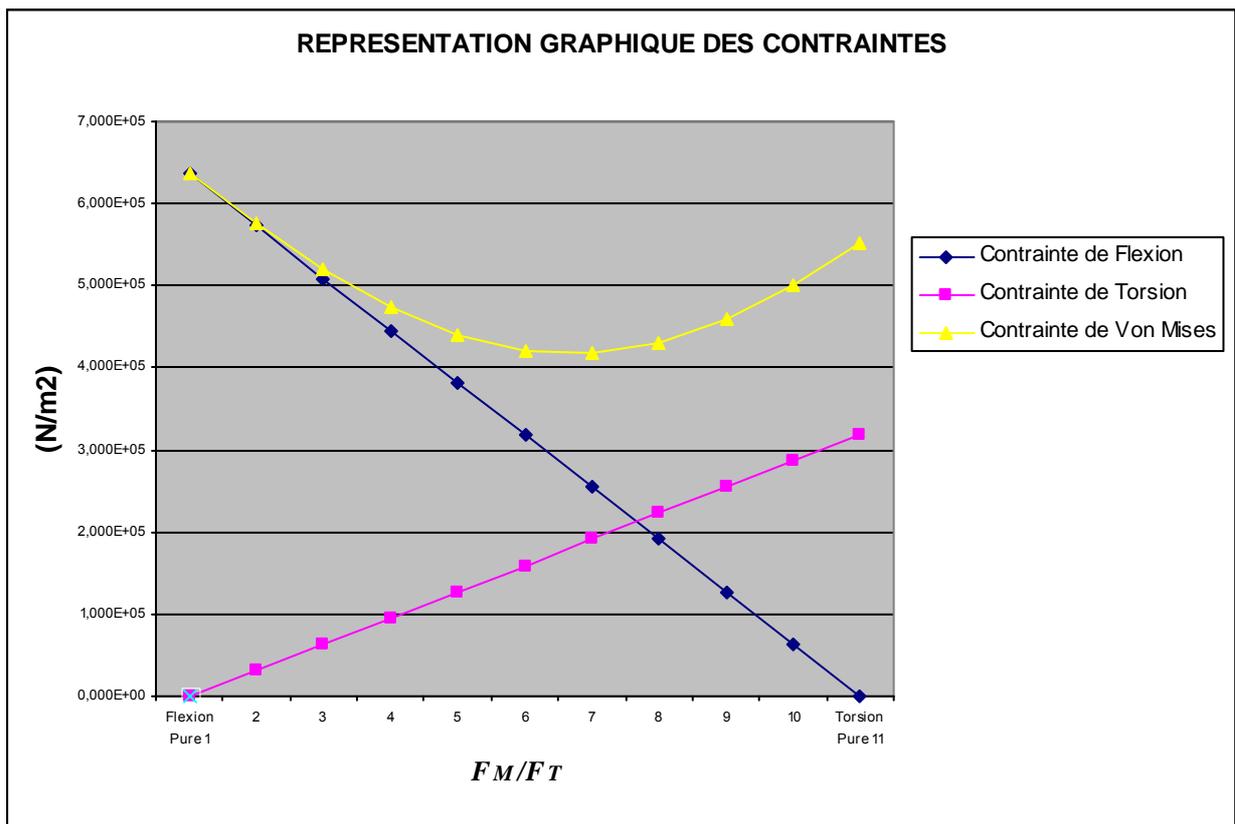
Charges	La Flexion				La Torsion				Contrainte Von Mises (N/m <sup>2</sup> )
	Fm(N)	d (m)	Moment (N.m)	Contrainte (N/m <sup>2</sup> )	Ft(N)	d (m)	Moment (N.m)	Contrainte (N/m <sup>2</sup> )	
<b>Flexion Pure 1</b>	224,8	0,050	11,240	9,164E+05	0	0,050	0,000	0,000	9,164E+05
<b>2</b>	202,32	0,050	10,116	8,247E+05	22,48	0,050	1,124	4,582E+04	8,286E+05
<b>3</b>	179,84	0,050	8,992	7,331E+05	44,96	0,050	2,248	9,164E+04	7,501E+05
<b>4</b>	157,36	0,050	7,868	6,415E+05	67,44	0,050	3,372	1,375E+05	6,842E+05
<b>5</b>	134,88	0,050	6,744	5,498E+05	89,92	0,050	4,496	1,833E+05	6,349E+05
<b>6</b>	112,4	0,050	5,620	4,582E+05	112,4	0,050	5,620	2,291E+05	6,061E+05
<b>7</b>	89,92	0,050	4,496	3,666E+05	134,9	0,050	6,744	2,749E+05	6,009E+05
<b>8</b>	67,44	0,050	3,372	2,749E+05	157,4	0,050	7,868	3,207E+05	6,198E+05
<b>9</b>	44,96	0,050	2,248	1,833E+05	179,8	0,050	8,992	3,666E+05	6,608E+05
<b>10</b>	22,48	0,050	1,124	9,164E+04	202,3	0,050	10,116	4,124E+05	7,201E+05
<b>Torsion Pure 11</b>	0	0,050	0,000	0,000	224,8	0,050	11,240	4,582E+05	7,936E+05



**Figure IV-10.** Représentation théorique les courbes de contrainte et De déformation de l'arbre cannelé de rapport  $d/D=0.750$

**Tableau IV-5 :** Calcul du moment de flexion et de torsion pour l'arbre avec épaulement de rapport ( $d/D=0,886$ )

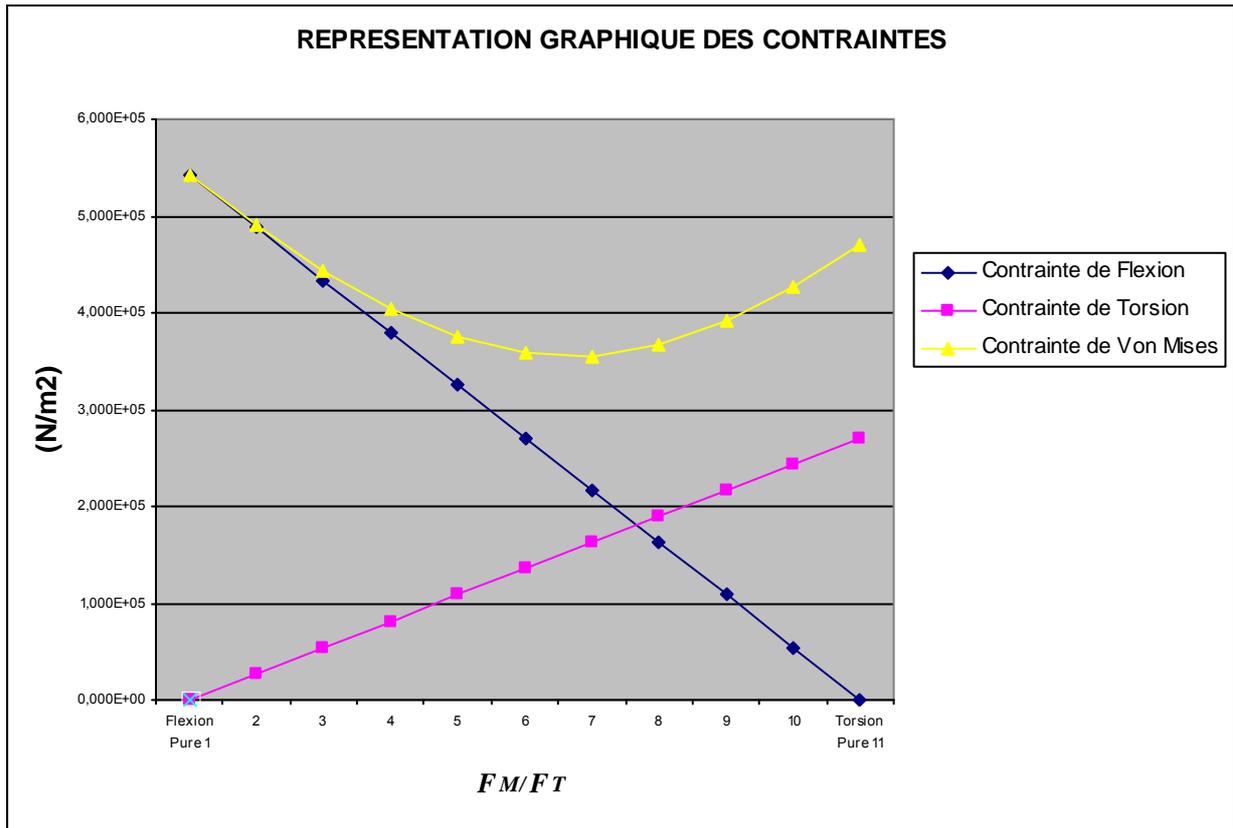
Charge	La Flexion				La Torsion				Contrainte Von Mises (N/m <sup>2</sup> )
	Fm(N)	d (m)	Moment (N.m)	Contrainte (N/m <sup>2</sup> )	Ft(N)	d (m)	Moment (N.m)	Contrainte (N/m <sup>2</sup> )	
<b>Flexion Pure 1</b>	224,8	0,060	13,488	6,364E+05	0	0,060	0,000	0,000	6,364E+05
<b>2</b>	202,32	0,060	12,139	5,727E+05	22,48	0,060	1,349	3,182E+04	5,754E+05
<b>3</b>	179,84	0,060	10,790	5,091E+05	44,96	0,060	2,698	6,364E+04	5,209E+05
<b>4</b>	157,36	0,060	9,442	4,455E+05	67,44	0,060	4,046	9,546E+04	4,752E+05
<b>5</b>	134,88	0,060	8,093	3,818E+05	89,92	0,060	5,395	1,273E+05	4,409E+05
<b>6</b>	112,4	0,060	6,744	3,182E+05	112,4	0,060	6,744	1,591E+05	4,209E+05
<b>7</b>	89,92	0,060	5,395	2,546E+05	134,9	0,060	8,093	1,909E+05	4,173E+05
<b>8</b>	67,44	0,060	4,046	1,909E+05	157,4	0,060	9,442	2,227E+05	4,304E+05
<b>9</b>	44,96	0,060	2,698	1,273E+05	179,8	0,060	10,790	2,546E+05	4,589E+05
<b>10</b>	22,48	0,060	1,349	6,364E+04	202,3	0,060	12,139	2,864E+05	5,001E+05
<b>Torsion Pure 11</b>	0	0,060	0,000	0,000	224,8	0,060	13,488	3,182E+05	5,511E+05



**Figure IV-11.** Représentation théorique les courbes de contrainte et De déformation de l'arbre cannelé de rapport  $d/D=0.886$

**Tableau IV-6 :** Calcul du moment de flexion et de torsion pour l'arbre avec épaulement de rapport ( $d/D=1$ )

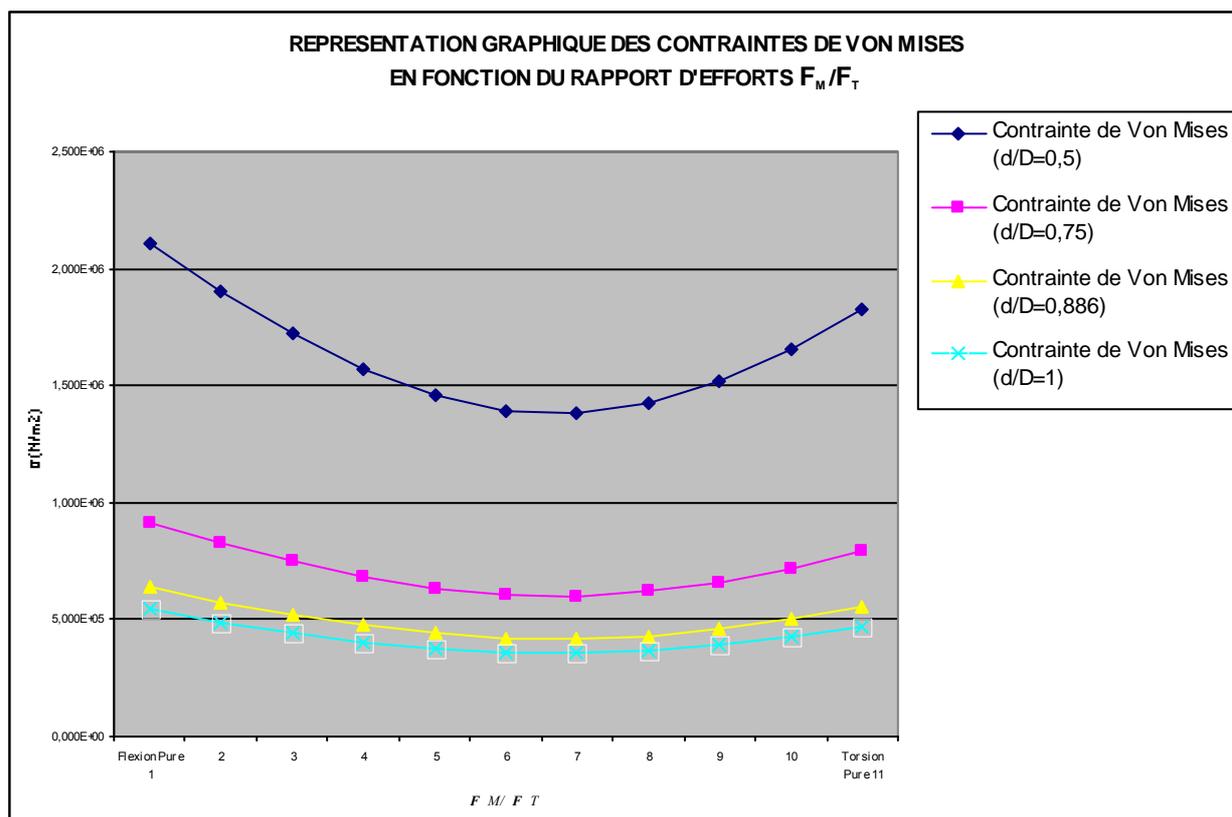
Charge	La Flexion				La Torsion			
	Fm(N)	d (m)	Moment (N.m)	Contrainte (N/m <sup>2</sup> )	Ft(N)	d (m)	Moment (N.m)	Contrainte (N/m <sup>2</sup> )
Flexion Pure 1	224,8	0,065	14,612	5,422E+05	0	0,065	0,000	0,000
2	202,32	0,065	13,151	4,880E+05	22,48	0,065	1,461	2,711E+04
3	179,84	0,065	11,690	4,338E+05	44,96	0,065	2,922	5,422E+04
4	157,36	0,065	10,228	3,796E+05	67,44	0,065	4,384	8,134E+04
5	134,88	0,065	8,767	3,253E+05	89,92	0,065	5,845	1,084E+05
6	112,4	0,065	7,306	2,711E+05	112,4	0,065	7,306	1,356E+05
7	89,92	0,065	5,845	2,169E+05	134,9	0,065	8,767	1,627E+05
8	67,44	0,065	4,384	1,627E+05	157,4	0,065	10,228	1,898E+05
9	44,96	0,065	2,922	1,084E+05	179,8	0,065	11,690	2,169E+05
10	22,48	0,065	1,461	5,422E+04	202,3	0,065	13,151	2,440E+05
Torsion Pure 11	0	0,065	0,000	0,000	224,8	0,065	14,612	2,711E+05



**Figure IV-12.** Représentation théorique les courbes de contrainte et De déformation de l'arbre cannelé de rapport  $d/D=1$

**Tableau IV-7 :** Récapitulatif des contraintes et déformations des arbres avec épaulements & partiellement cannelé

Charge	Contrainte Von Mises (N/m <sup>2</sup> ) d/D=0,5	Contrainte Von Mises (N/m <sup>2</sup> ) d/D=0,75	Contrainte Von Mises (N/m <sup>2</sup> ) d/D=0,886	Contrainte Von Mises (N/m <sup>2</sup> ) d/D=1
<b>Flexion Pure 1</b>	2,104E+06	9,164E+05	6,364E+05	5,422E+05
2	1,902E+06	8,286E+05	5,754E+05	4,903E+05
3	1,722E+06	7,501E+05	5,209E+05	4,438E+05
4	1,571E+06	6,842E+05	4,752E+05	4,049E+05
5	1,458E+06	6,349E+05	4,409E+05	3,757E+05
6	1,391E+06	6,061E+05	4,209E+05	3,587E+05
7	1,380E+06	6,009E+05	4,173E+05	3,556E+05
8	1,423E+06	6,198E+05	4,304E+05	3,668E+05
9	1,517E+06	6,608E+05	4,589E+05	3,910E+05
10	1,653E+06	7,201E+05	5,001E+05	4,261E+05
<b>Torsion Pure 11</b>	1,822E+06	7,936E+05	5,511E+05	4,696E+05



**Figure IV-13.** Représentation théorique les courbes de contrainte de Von Mises En fonction du rapport  $F_M/F_T$

## IV-5.2. Etude par logiciel Cosmosworks

L'objectif de cette partie est de vérifier la validité des résultats de notre modèle Eléments Finis 3D vis à vis du comportement théorique des arbres avec épaulement et partiellement cannelés. En ce qui concerne la recherche des valeurs extrémales des contraintes de Von Mises et des déformations, il a fallu relever pour chaque nœud les différentes valeurs des contraintes et des déformations, comme il est illustré dans les figures de IV-15 à IV -43.

### IV-5.2.1. Etude d'arbres avec épaulement.

Aucun modèle théorique n'est proposé pour prédire les comportements des efforts dans les arbres cannelés. La solution qui a été développée concerne des arbres ronds endossés avec un rayon du filet fini. Cependant, rien dans la littérature ne suggère une solution analytique pour prédire l'effort dans un arbre avec épaulement cannelé.

Les prédictions théoriques des efforts dans la section non lisse et cannelée de l'arbre avec épaulement sont dues à des efforts qui ont été calculées à des emplacements dans l'arbre où les efforts sont importants.

#### A- Arbre avec épaulement de rapport $d/D = 0.50$

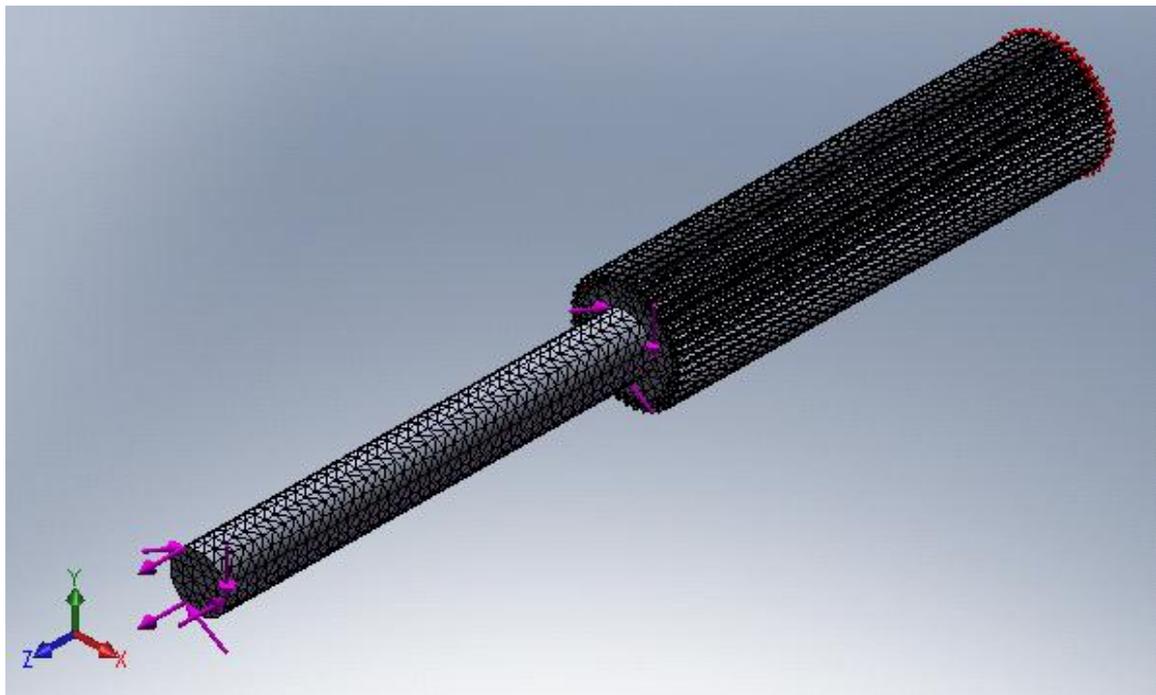


Figure IV-15. Le maillage, les conditions aux limites et les chargements

➤ 1<sup>er</sup> Cas de Flexion Pure ( $F_M/F_T = 224.8/0$ )

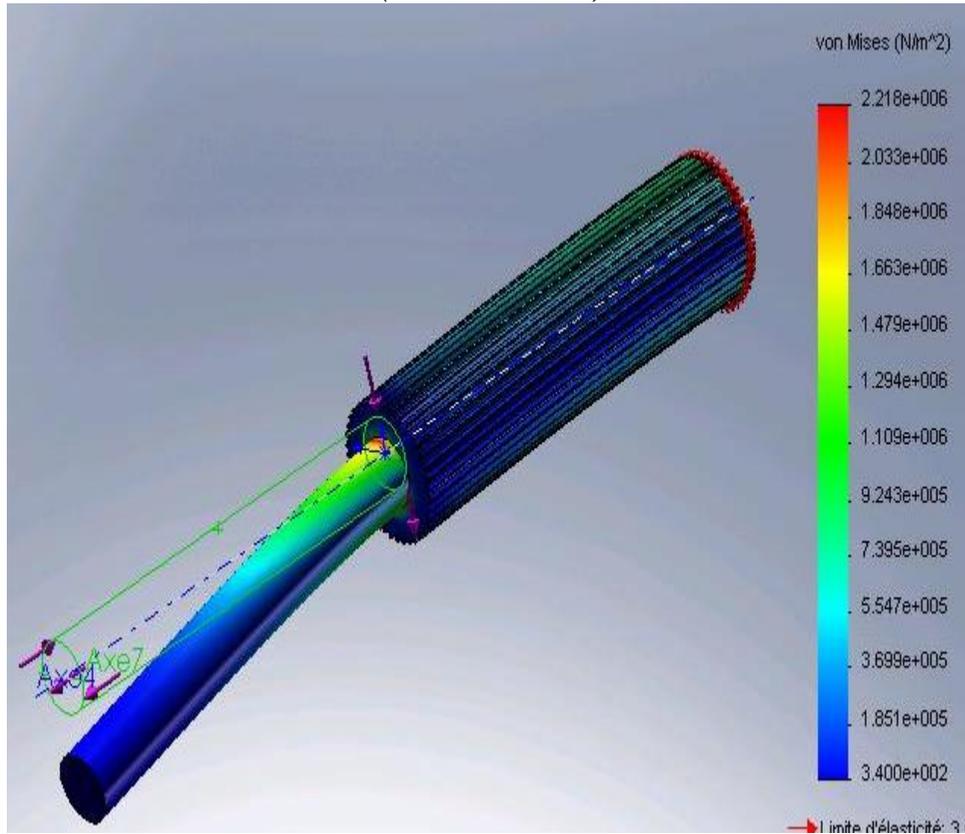


Figure IV-16. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

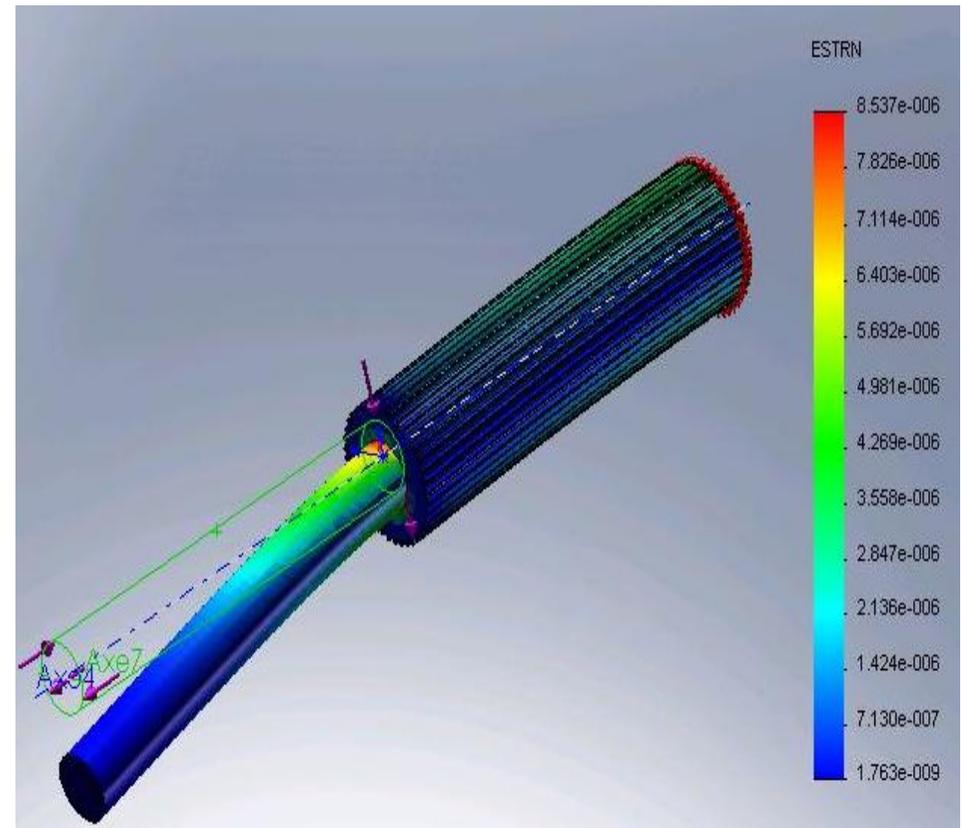


Figure IV-17. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

➤ 11<sup>ème</sup> Cas de Torsion Pure ( $F_M/F_T = 0/224.8$ )

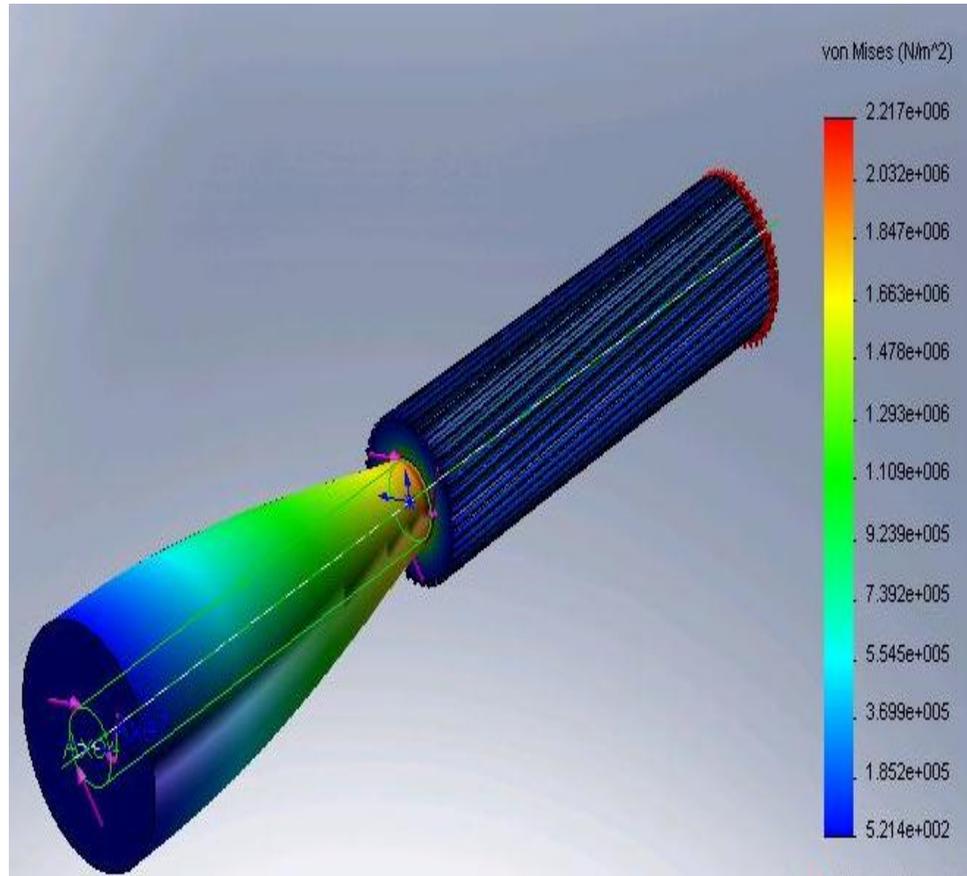


Figure IV-18. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

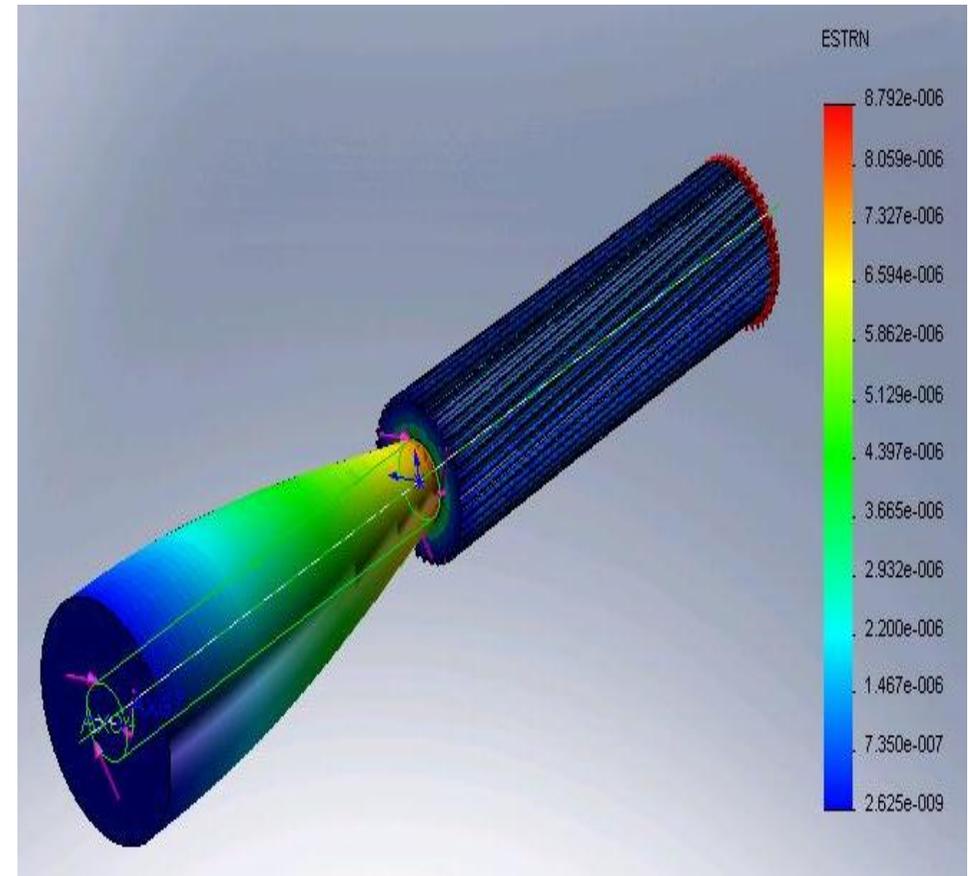


Figure IV-19. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

➤ 6<sup>ème</sup> Cas de Flexion & Torsion combinée ( $F_M/F_T = 112,4/112,4$ )

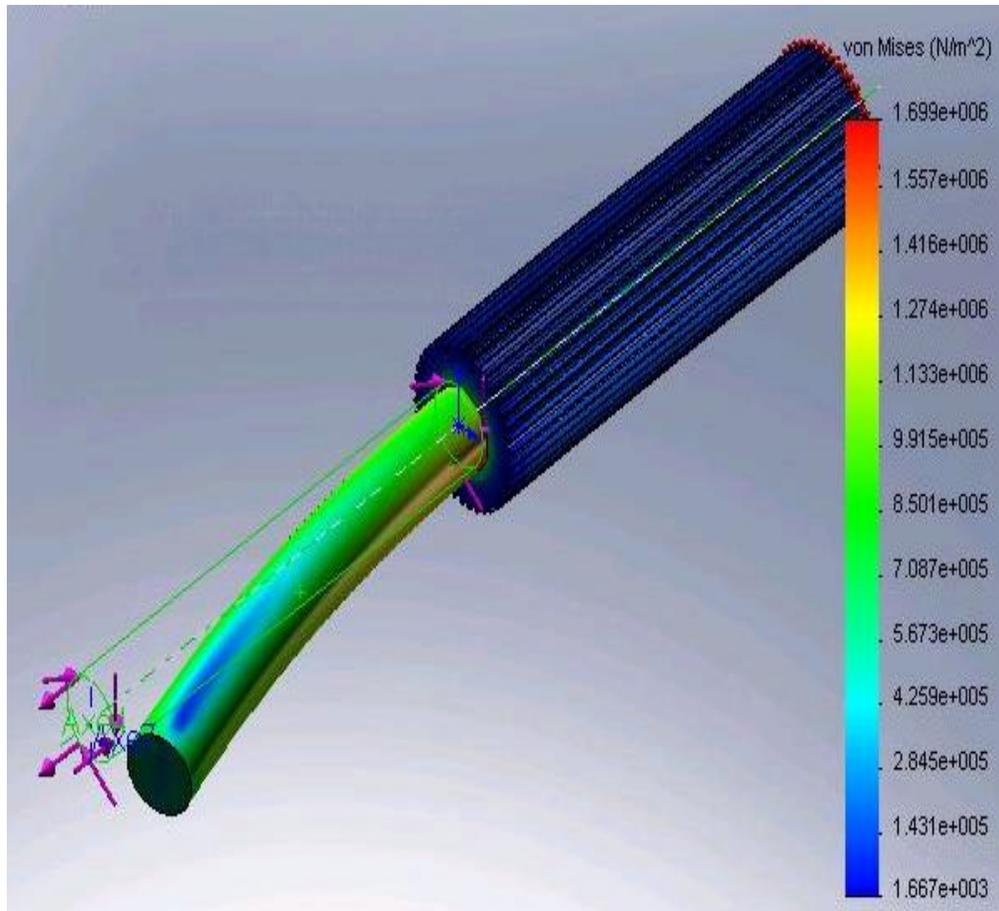


Figure IV-20. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

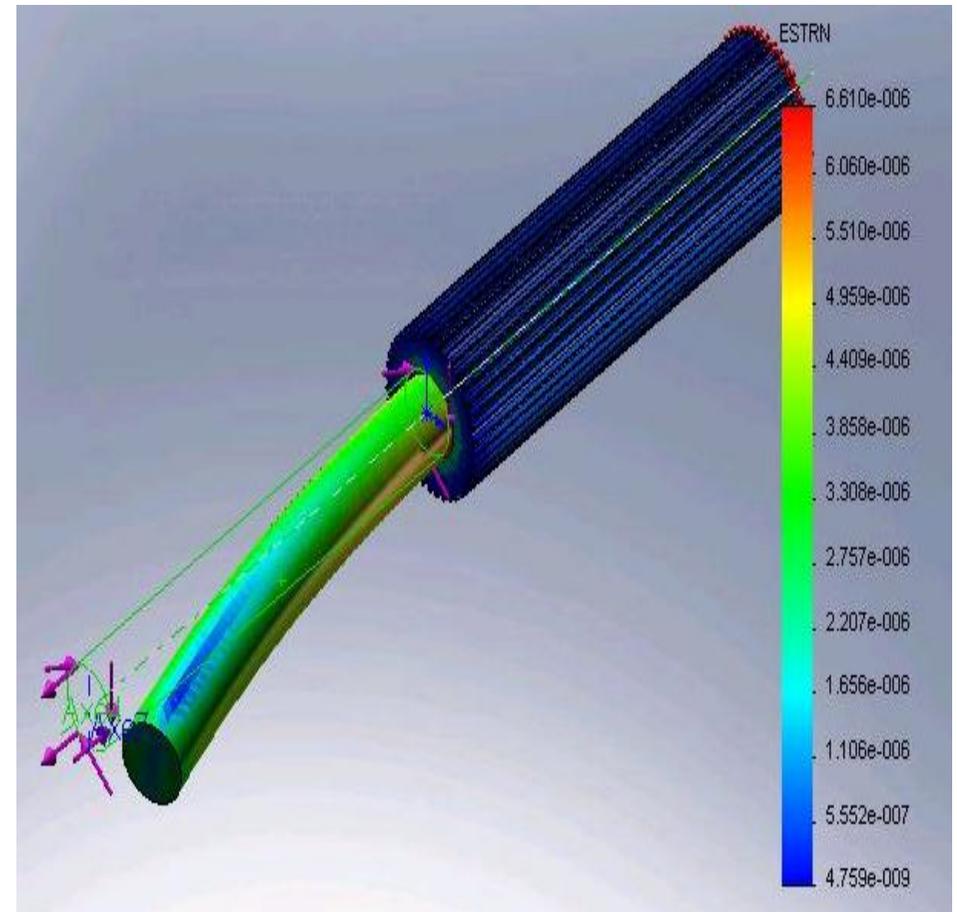
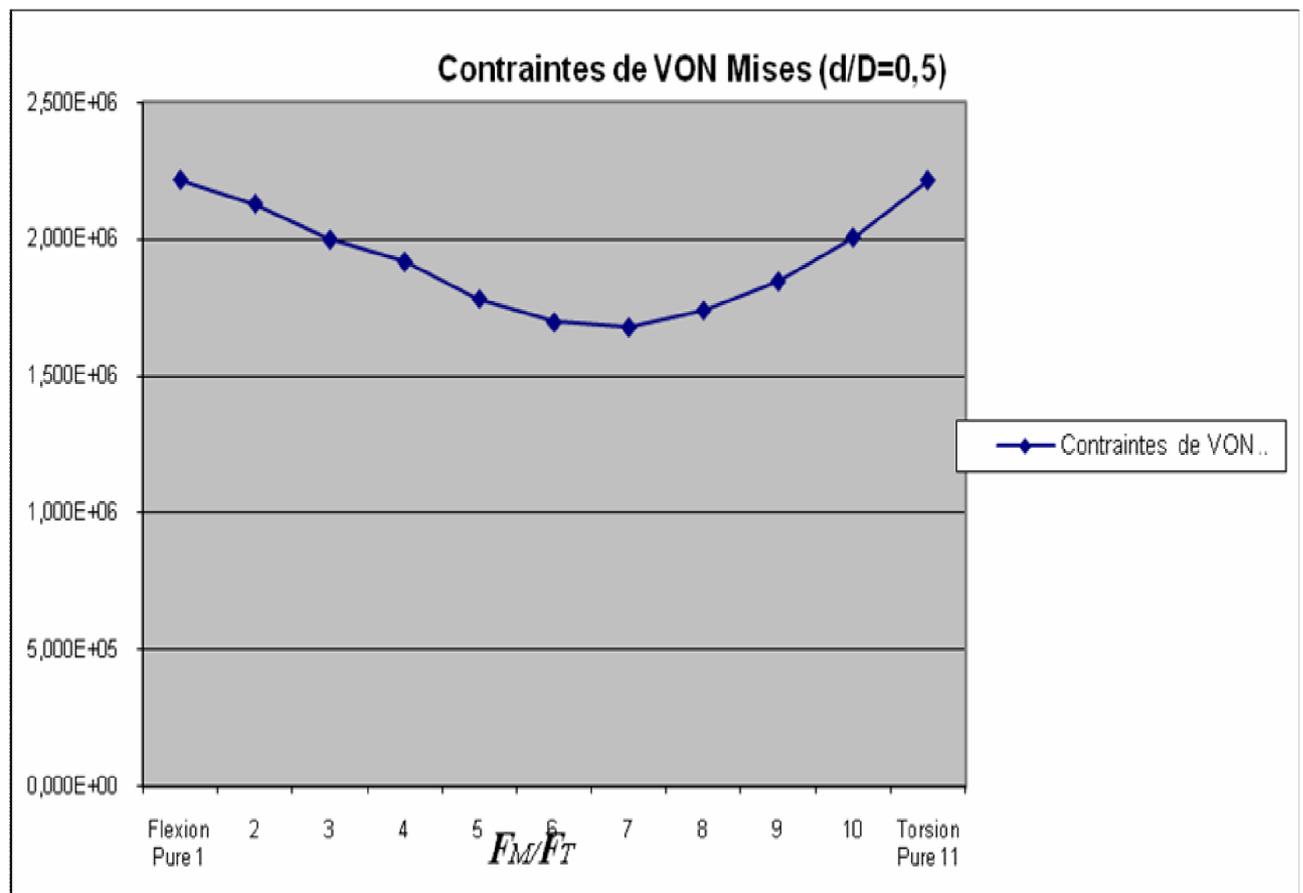


Figure IV-21. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

**Tableau IV-8:** Calcul du moment de flexion et de torsion pour l'arbre avec épaulement de rapport ( $d/D=0,50$ )

Charge	Flexion		Torsion		Contrainte Von Mises (N/m <sup>2</sup> )	Déformation
	Fm(N)	d (m)	Ft(N)	d (m)		
<b>Flexion Pure 1</b>	224,8	0,033	0	0,033	2,218E+06	9,817E-06
<b>2</b>	202,32	0,033	22,48	0,033	2,131E+06	8,898E-06
<b>3</b>	179,84	0,033	44,96	0,033	2,001E+06	8,080E-06
<b>4</b>	157,36	0,033	67,44	0,033	1,920E+06	7,399E-06
<b>5</b>	134,88	0,033	89,92	0,033	1,784E+06	6,895E-06
<b>6</b>	112,4	0,033	112,4	0,033	1,698E+06	6,610E-06
<b>7</b>	89,92	0,033	134,88	0,033	1,680E+06	6,571E-06
<b>8</b>	67,44	0,033	157,36	0,033	1,742E+06	6,804E-06
<b>9</b>	44,96	0,033	179,84	0,033	1,848E+06	7,261E-06
<b>10</b>	22,48	0,033	202,32	0,033	2,009E+06	7,951E-06
<b>Torsion Pure 11</b>	0	0,033	224,8	0,033	2,217E+06	8,791E-06



**Figure IV-22.** Représentation Graphiques la courbe de contrainte de Von Mises pour ( $d/D=0.50$ )

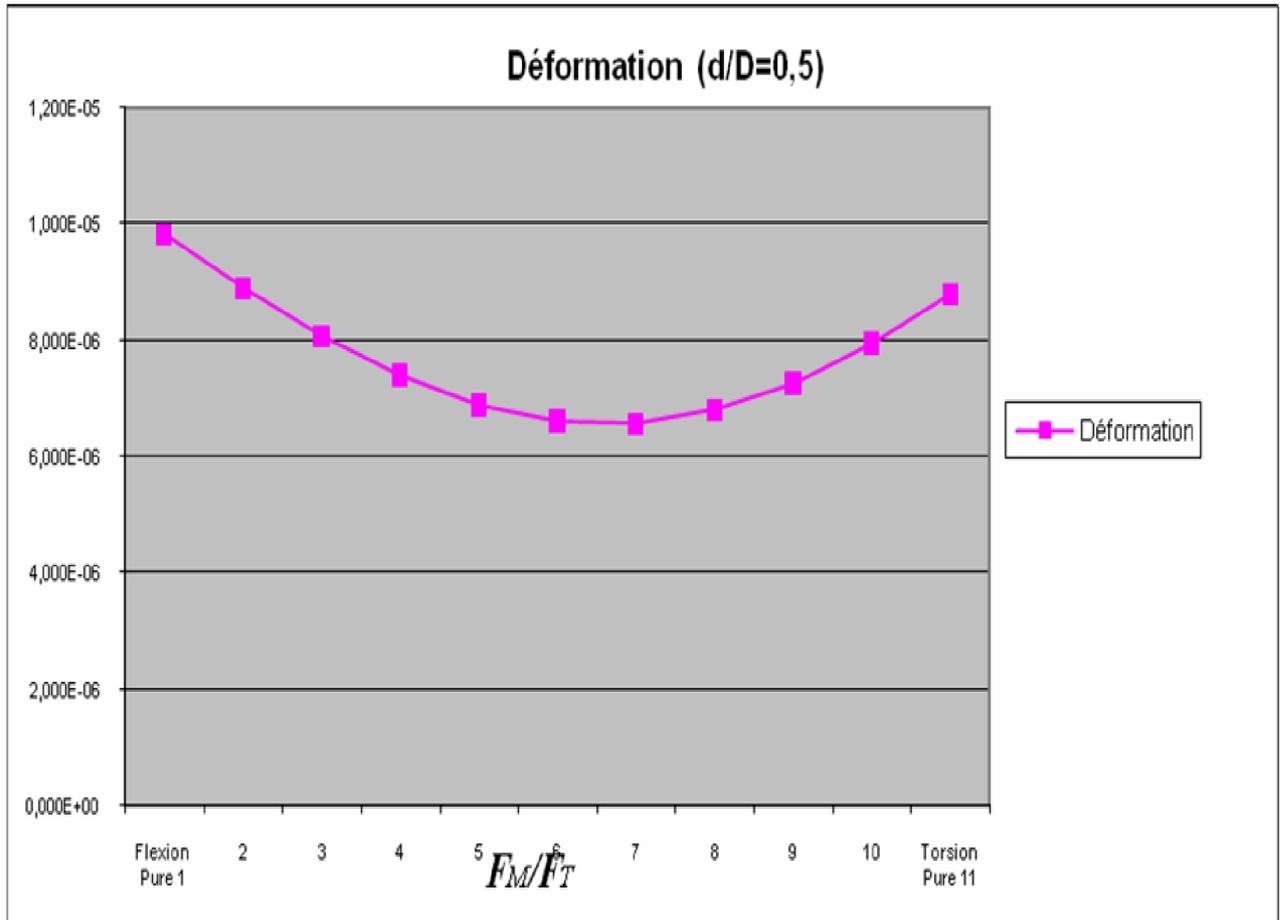


Figure IV-23. Représentation Graphiques la courbe de Déformations pour (d/D=0.50)

**B- Arbre avec épaulement du rapport d/D =0.750**

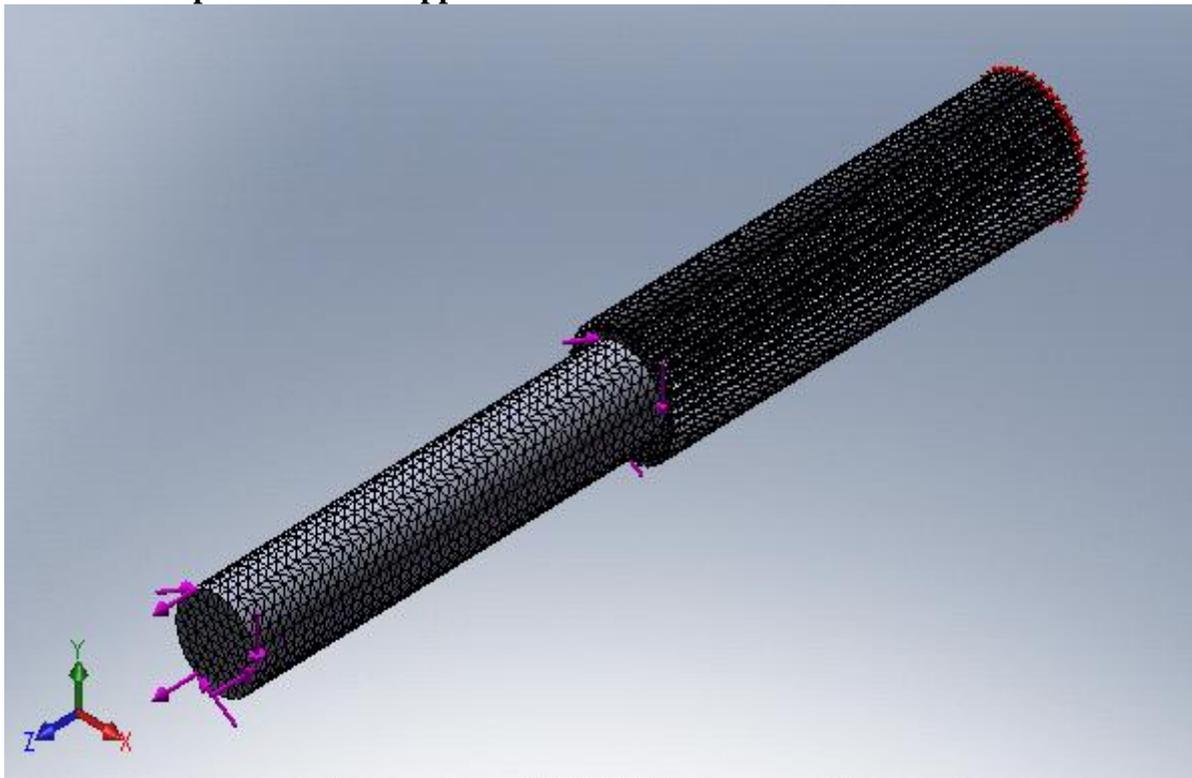


Figure IV-24. Les conditions aux limites et les chargements

➤ 1<sup>er</sup> cas de flexion pure ( $F_M/F_T = 224.8/0$ )

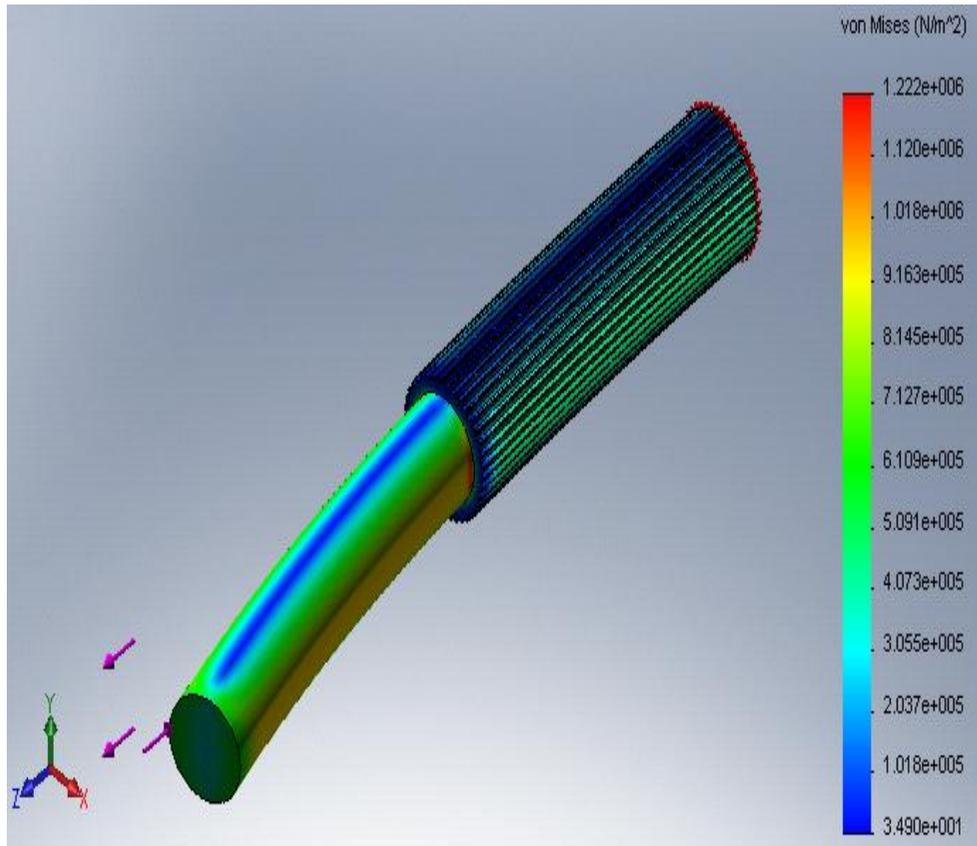


Figure IV-25. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

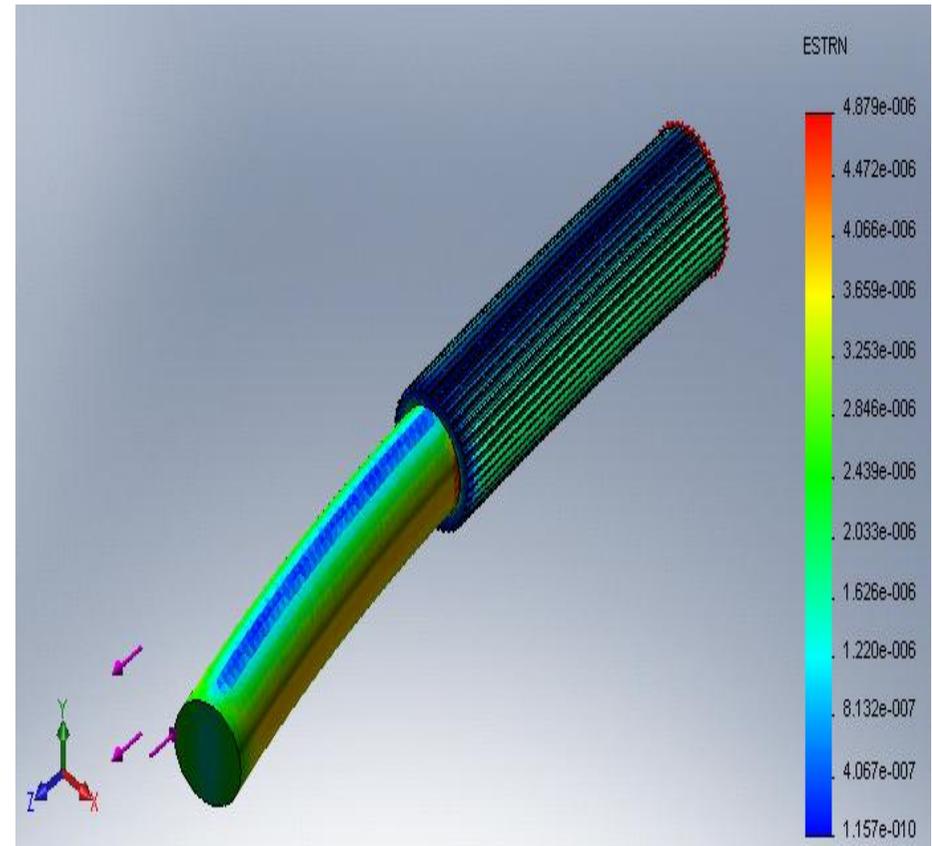


Figure IV-26. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

➤ 11<sup>ème</sup> cas de torsion pure ( $F_M/F_T = 0/224.8$ )

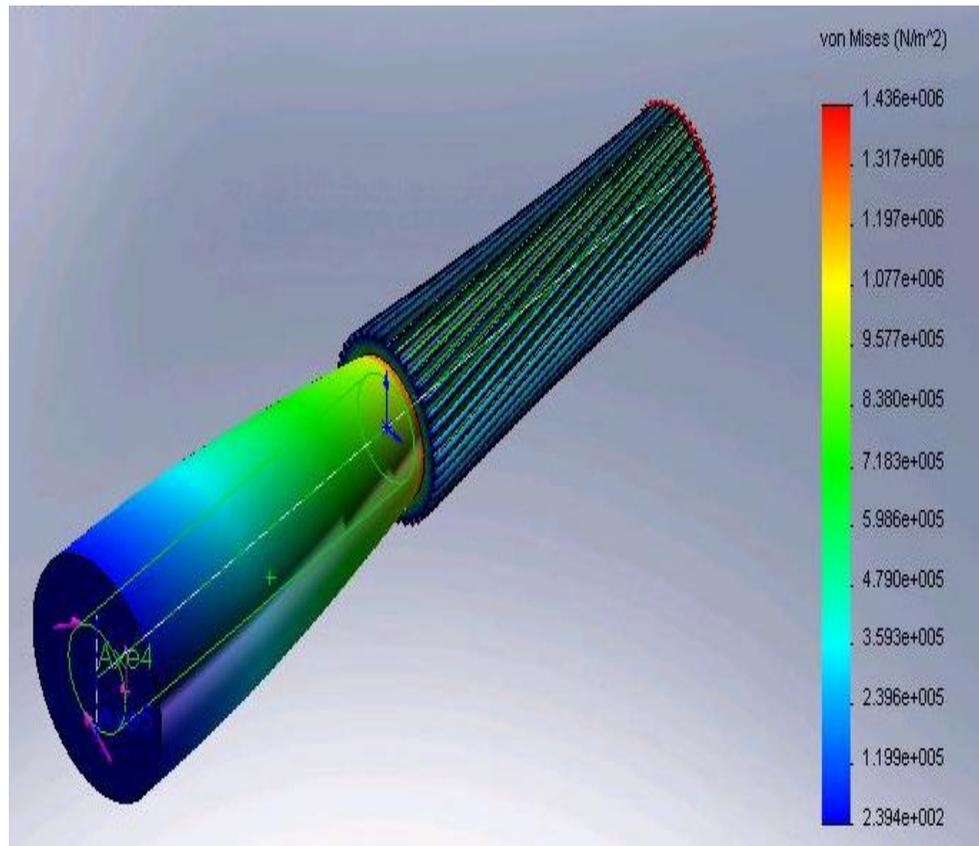


Figure IV-27. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

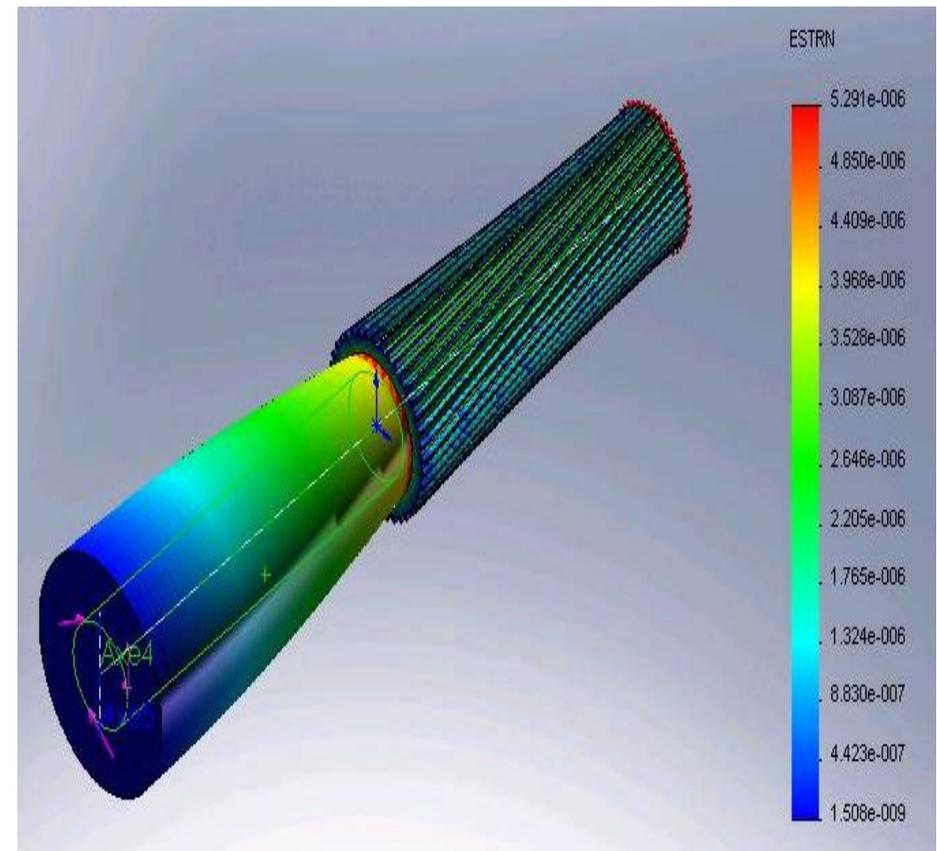


Figure IV-28. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

➤ 6<sup>ème</sup> de flexion et torsion combinée ( $F_M/F_T = 112,4/112,4$ )

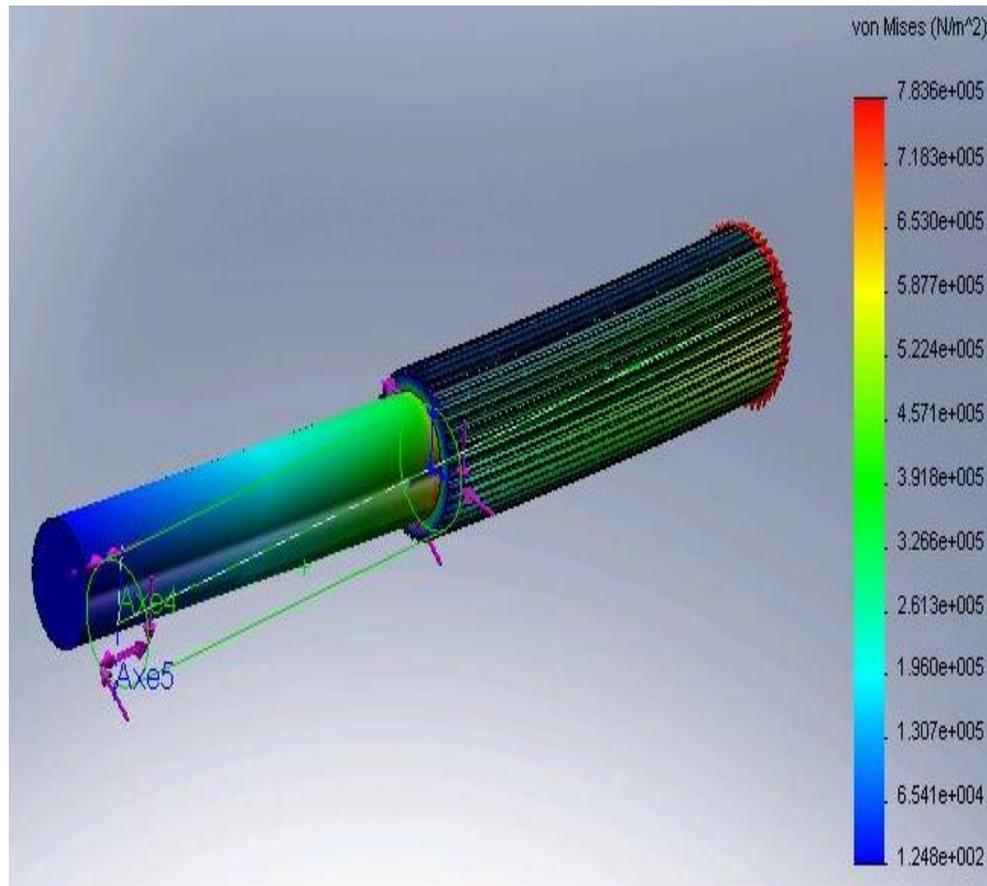


Figure IV-29. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

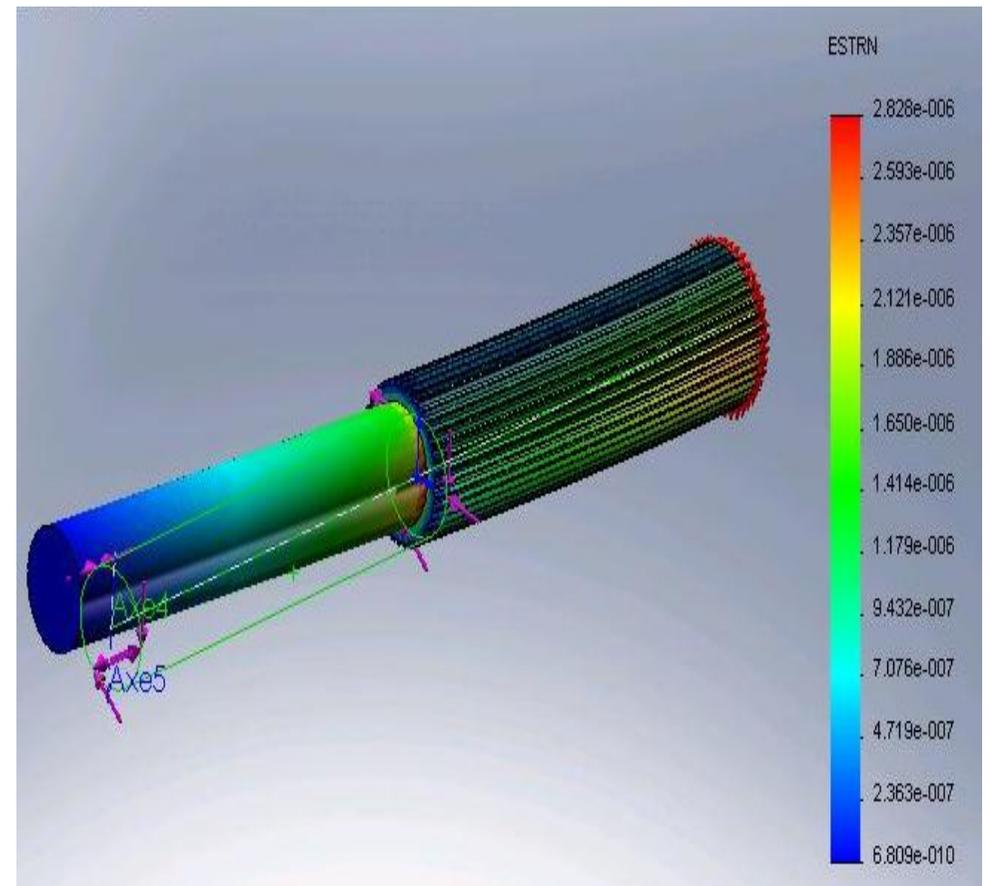
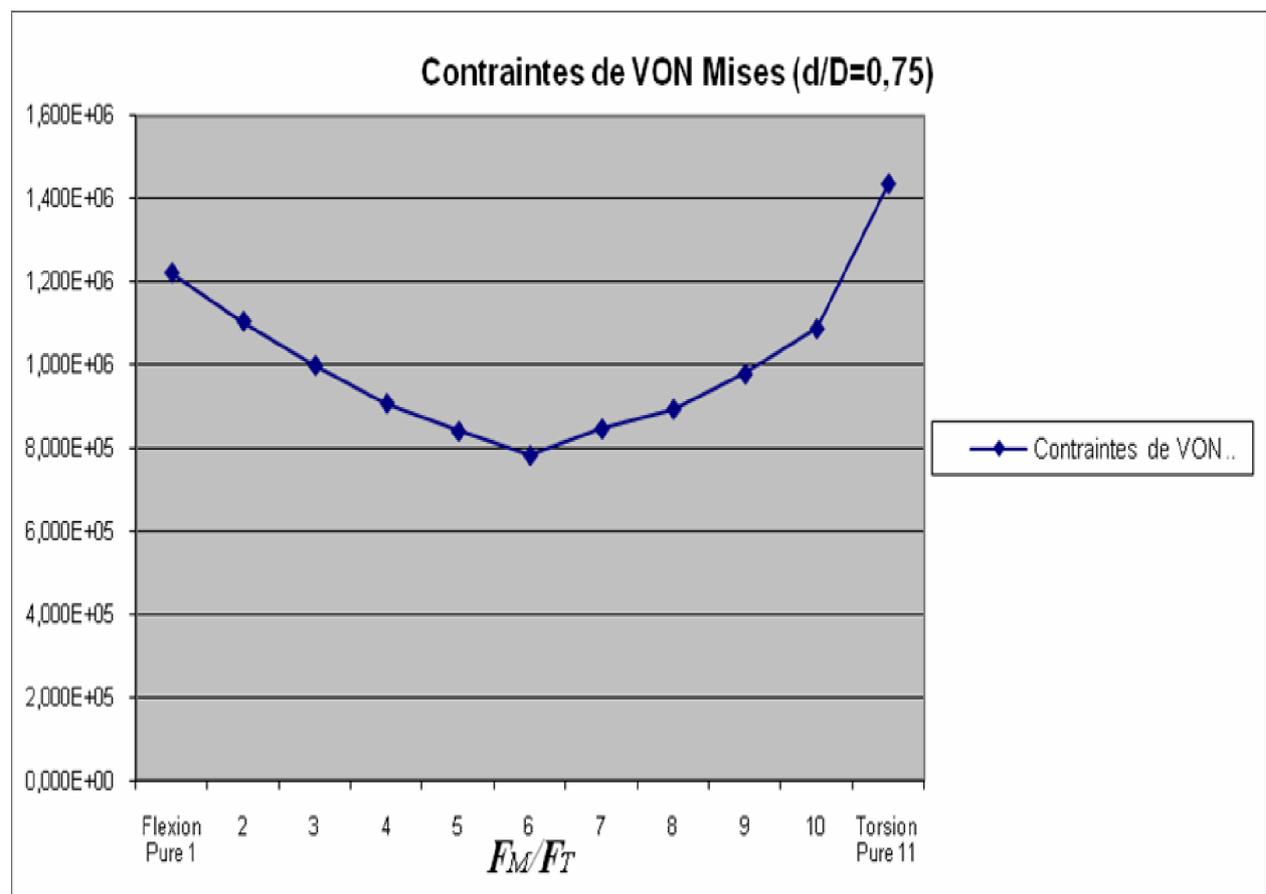


Figure IV-30. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

**Tableau IV-9 :** Calcul du moment de flexion et de torsion pour l'arbre avec épaulement de rapport ( $d/D=0,75$ )

Charge	Flexion		Torsion		Contrainte Von Mises (N/m <sup>2</sup> )	Déformation
	Fm (N)	d (m)	Ft(N)	d (m)		
<b>Flexion Pure 1</b>	224,8	0,050	0	0,050	1,222E+06	4,879E-06
<b>2</b>	202,32	0,050	22,48	0,050	1,105E+06	4,416E-06
<b>3</b>	179,84	0,050	44,96	0,050	9,993E+05	4,003E-06
<b>4</b>	157,36	0,050	67,44	0,050	9,087E+05	3,659E-06
<b>5</b>	134,88	0,050	89,92	0,050	8,413E+05	3,403E-06
<b>6</b>	112,4	0,050	112,4	0,050	7,836E+05	3,263E-06
<b>7</b>	89,92	0,050	134,88	0,050	8,471E+05	3,265E-06
<b>8</b>	67,44	0,050	157,36	0,050	8,945E+05	3,385E-06
<b>9</b>	44,96	0,050	179,84	0,050	9,780E+05	3,628E-06
<b>10</b>	22,48	0,050	202,32	0,050	1,087E+06	3,999E-06
<b>Torsion Pure 11</b>	0	0,050	224,8	0,050	1,436E+06	4,409E-06



**Figure IV-31.** Représentation Graphiques la courbe de contrainte de Von Mises pour ( $d/D=0.750$ )

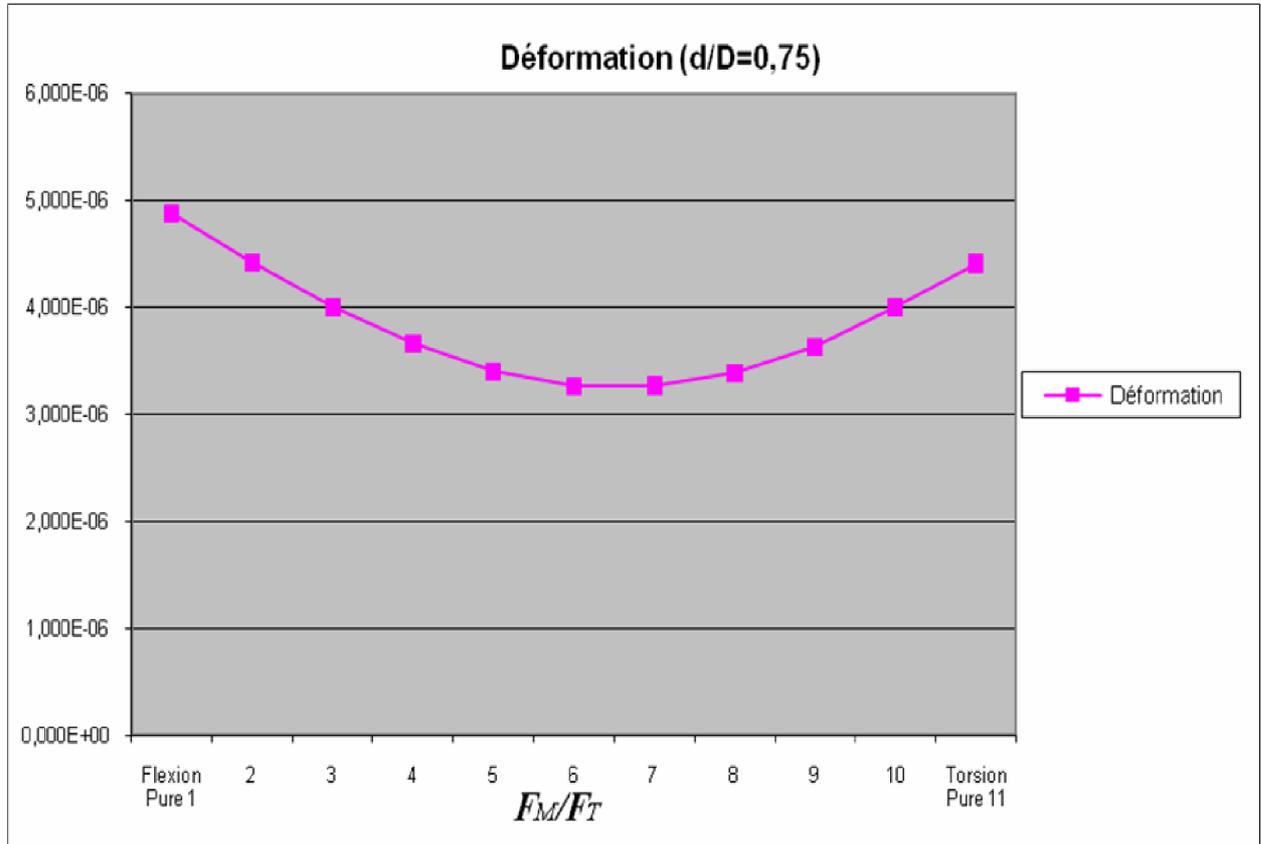


Figure IV-32. Représentation Graphiques la courbe de Déformations pour (d/D=0.750)

C- Arbre avec épaulement de rapport  $d/D = 0.886$

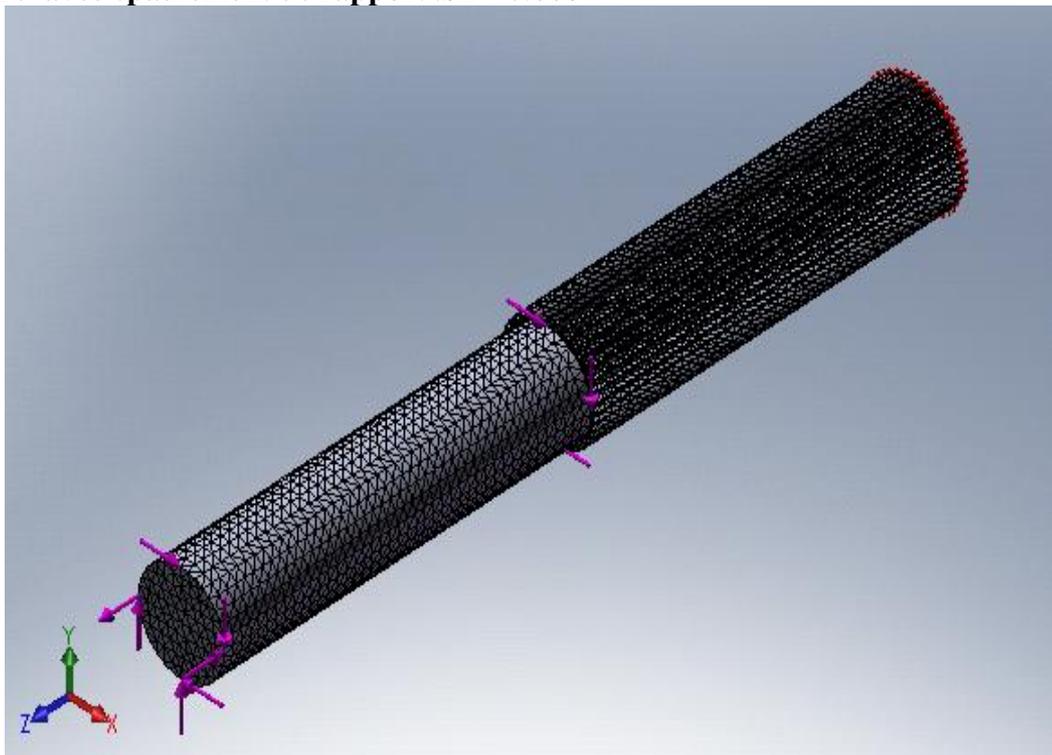
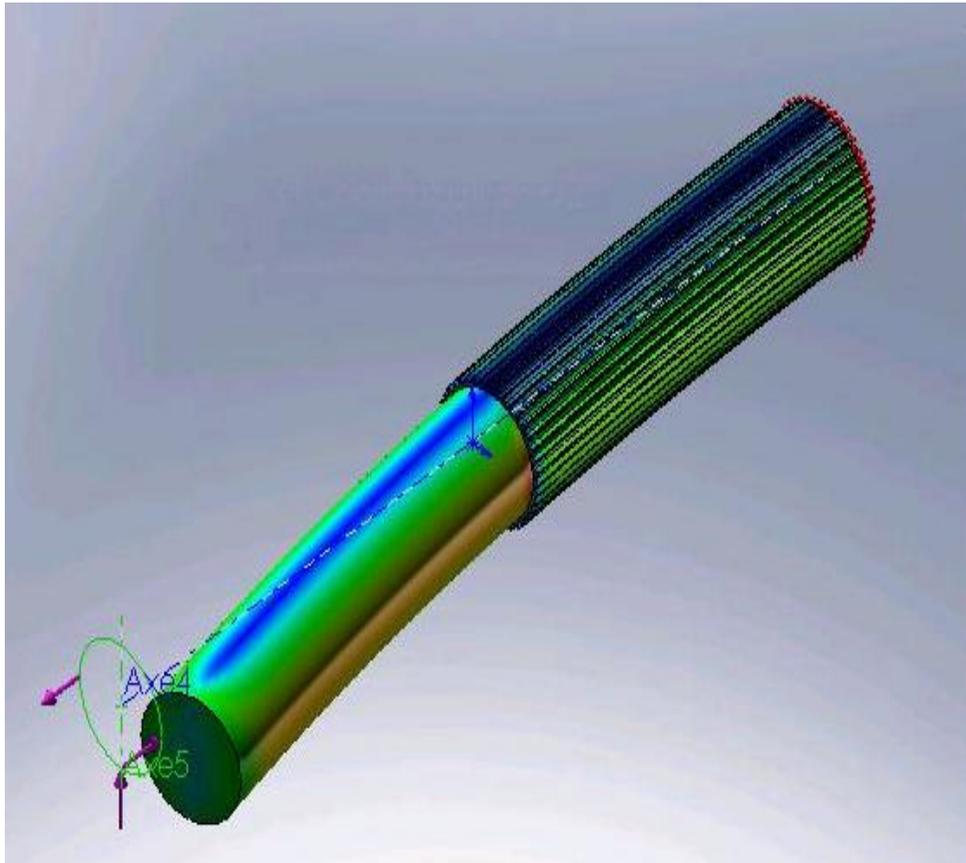
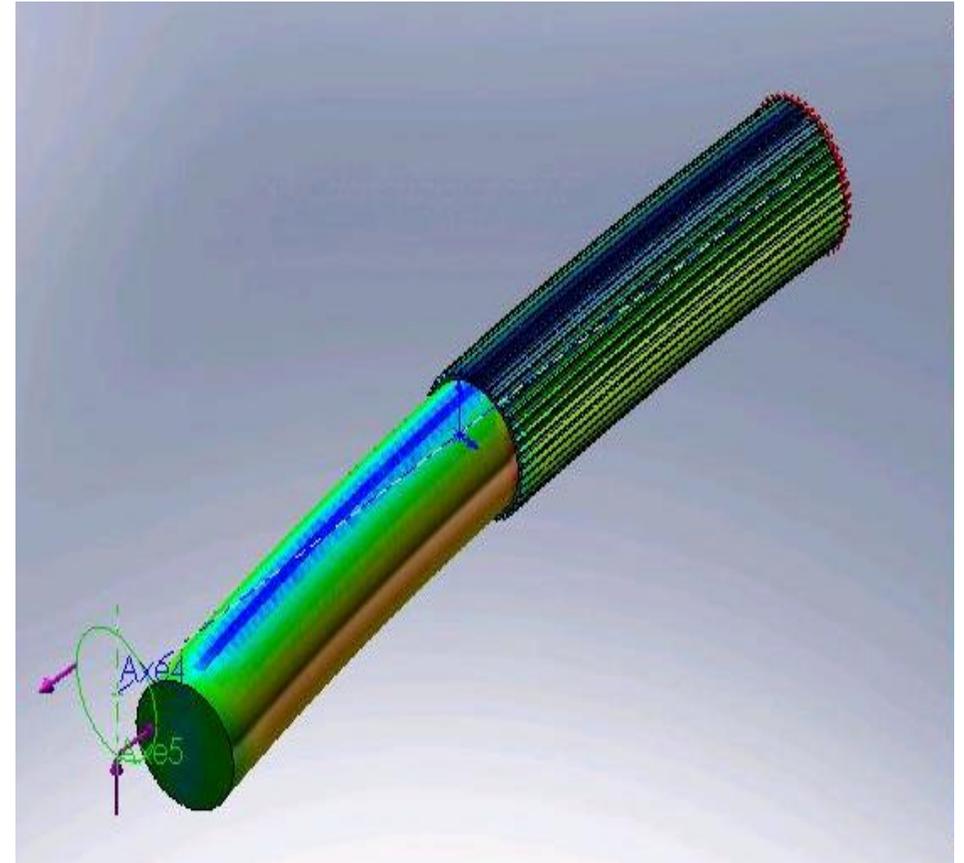


Figure IV-33. Les conditions aux limites et les chargements

➤ 1<sup>er</sup> cas de flexion pure ( $F_M/F_T = 224.8/0$ )

**Figure IV-34.** Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre



**Figure IV-35.** Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

➤ 11<sup>ème</sup> cas de torsion pure ( $F_M/F_T = 0/224.8$ )

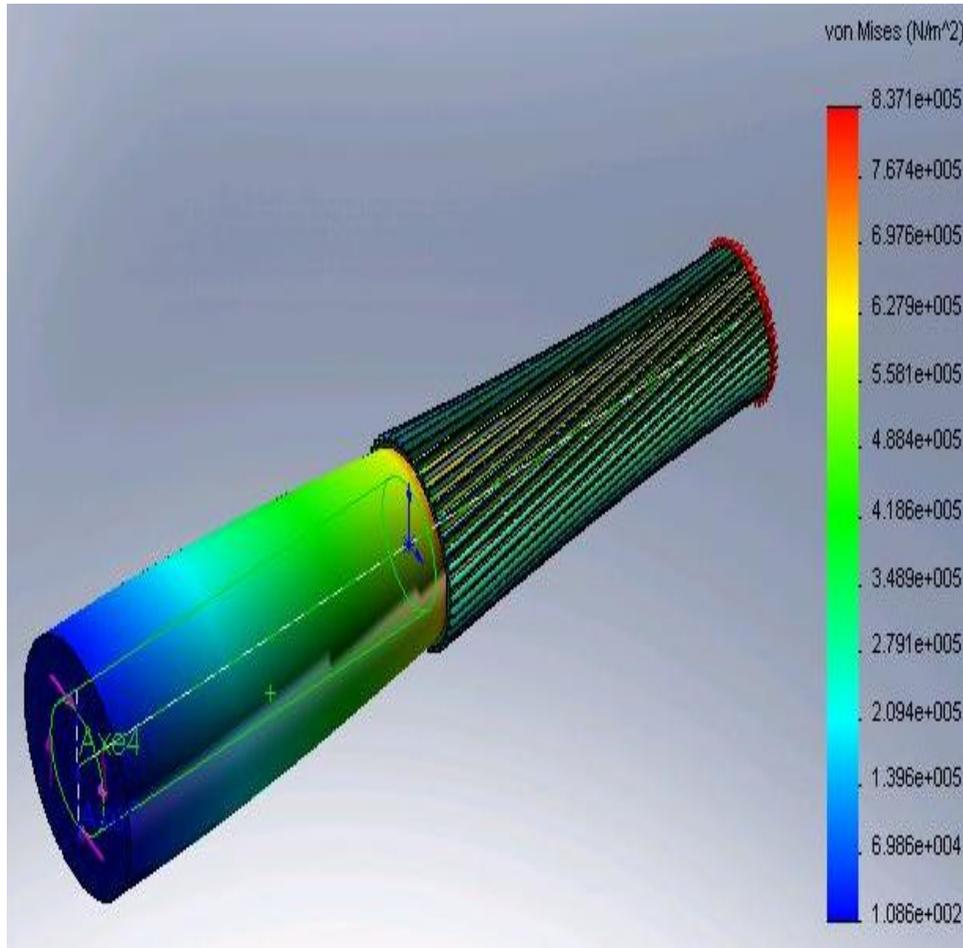


Figure IV-36. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

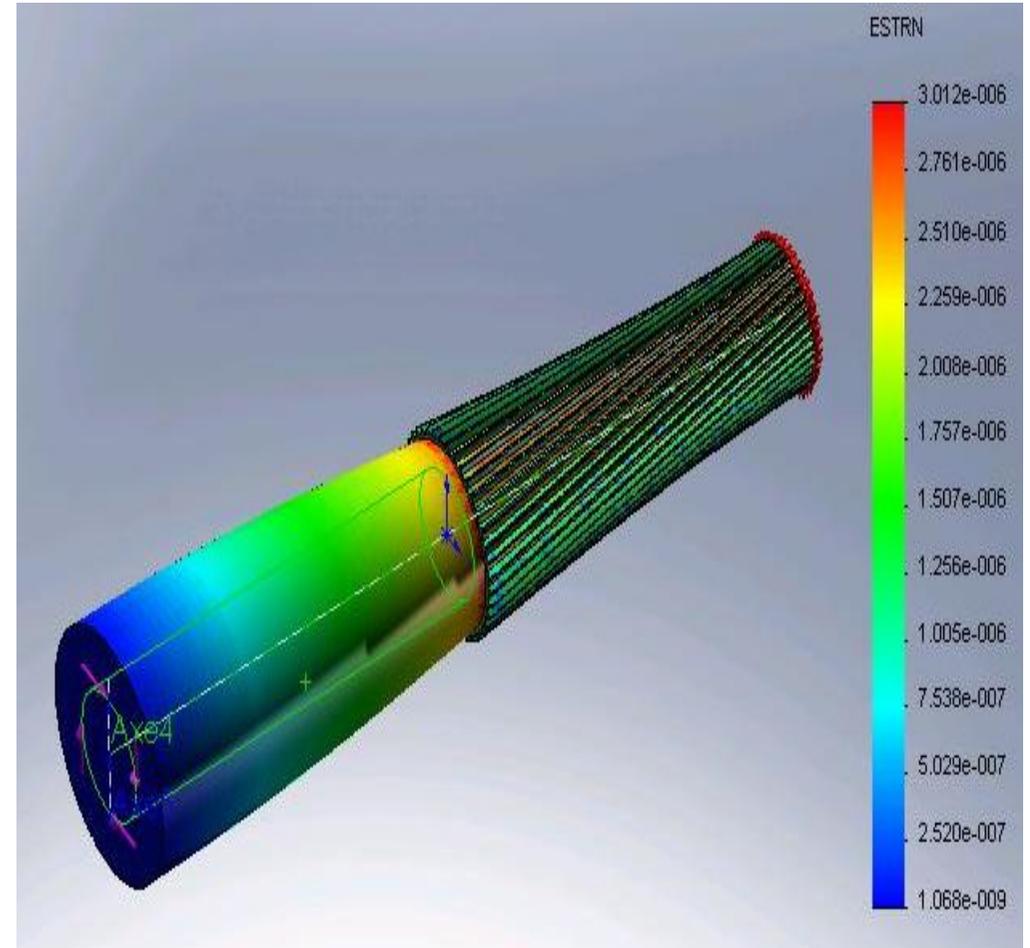


Figure IV-37. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

➤ 6<sup>ème</sup> cas de flexion et torsion combinée ( $F_M/F_T = 112,4/112,4$ )

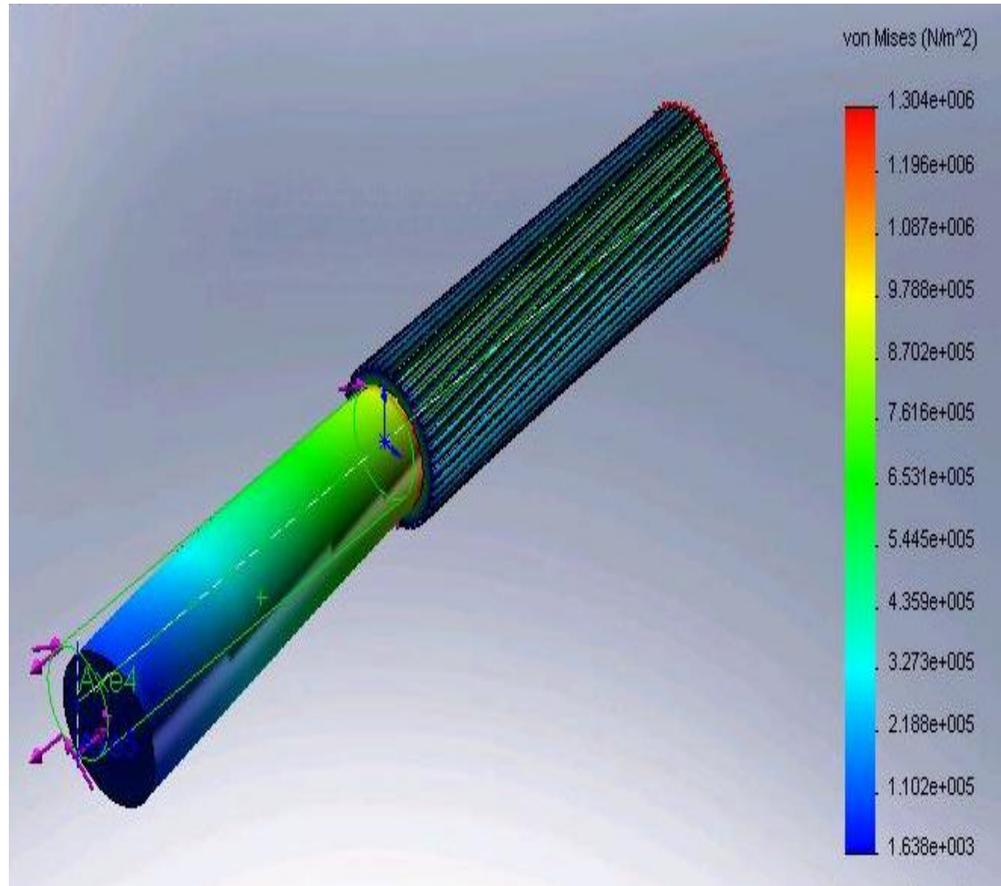


Figure IV-38. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

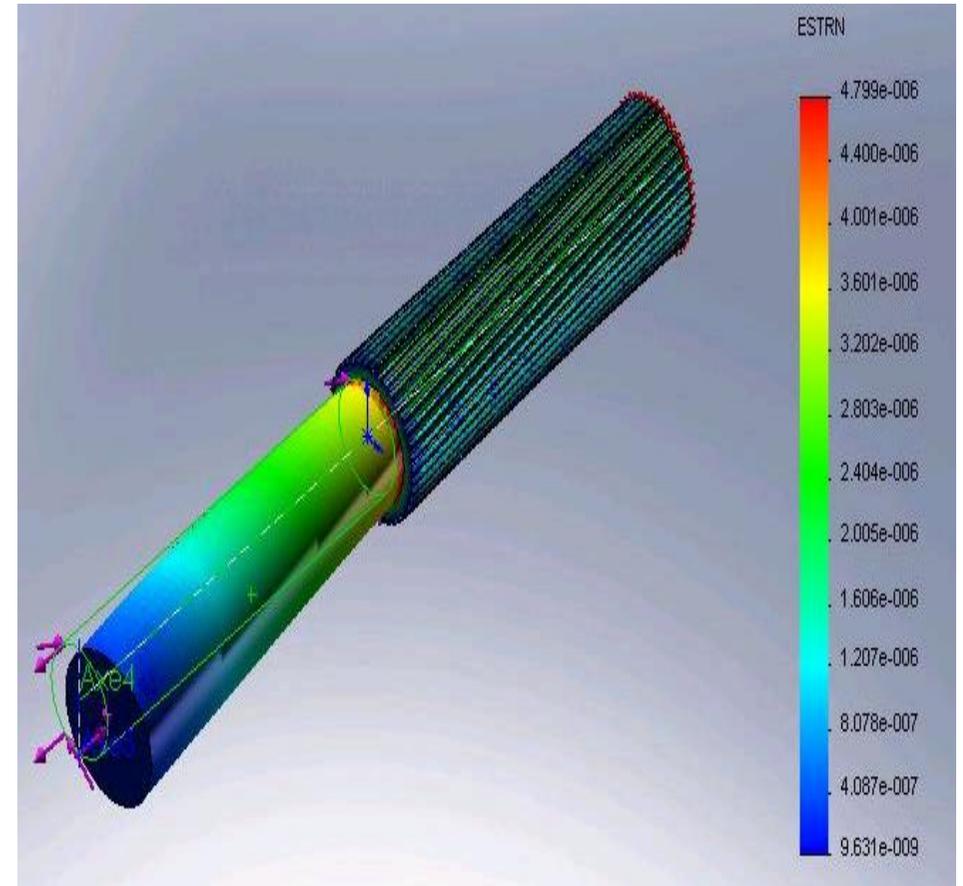
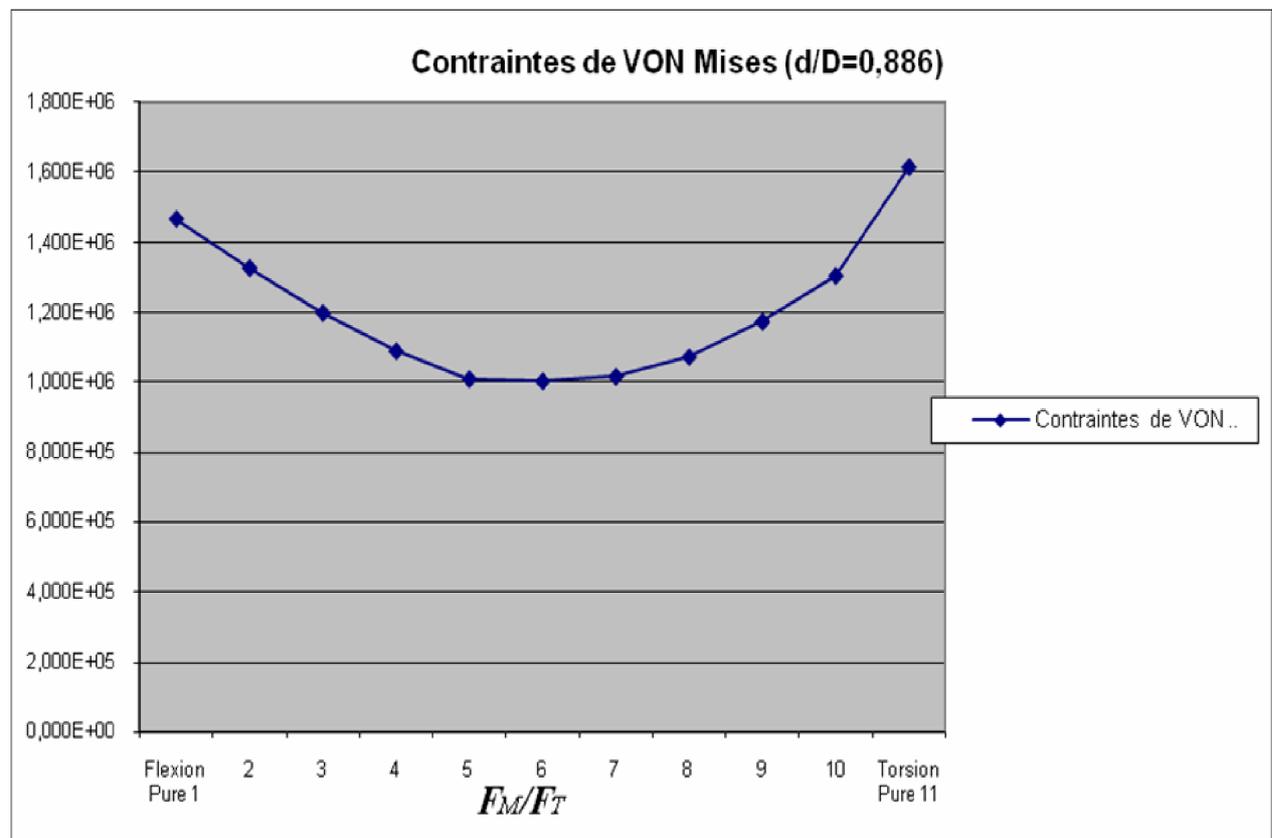


Figure IV-39. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

**Tableau IV-10:** Calcul du moment de flexion et de torsion pour l'arbre avec épaulement de rapport ( $d/D=0,886$ )

Charge	La Flexion		La Torsion		Contrainte Von Mises (N/m <sup>2</sup> )	Déformation
	Fm (N)	d (m)	Ft(N)	d (m)		
<b>Flexion Pure 1</b>	224,8	0,060	0	0,060	1,466E+06	5,854E-06
<b>2</b>	202,32	0,060	22,48	0,060	1,326E+06	5,299E-06
<b>3</b>	179,84	0,060	44,96	0,060	1,199E+06	4,804E-06
<b>4</b>	157,36	0,060	67,44	0,060	1,090E+06	4,391E-06
<b>5</b>	134,88	0,060	89,92	0,060	1,010E+06	4,084E-06
<b>6</b>	112,4	0,060	112,4	0,060	1,004E+06	3,916E-06
<b>7</b>	89,92	0,060	134,88	0,060	1,017E+06	3,918E-06
<b>8</b>	67,44	0,060	157,36	0,060	1,073E+06	4,063E-06
<b>9</b>	44,96	0,060	179,84	0,060	1,174E+06	4,354E-06
<b>10</b>	22,48	0,060	202,32	0,060	1,304E+06	4,799E-06
<b>Torsion Pure 11</b>	0	0,060	224,8	0,060	1,614E+06	5,291E-06



**Figure IV-40.** Représentation Graphiques la courbe de contrainte de Von Mises pour ( $d/D=0,886$ )

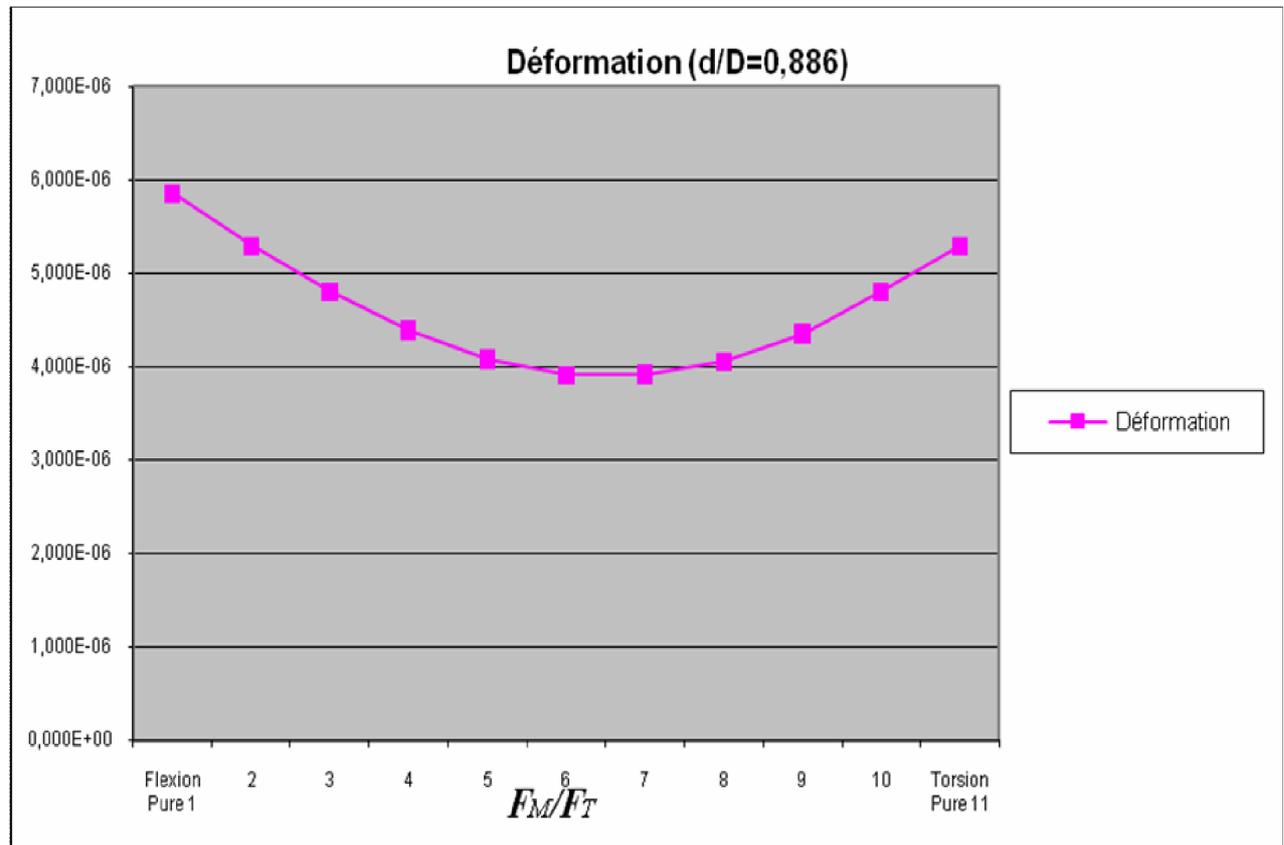


Figure IV-41. Représentation Graphiques la courbe de Déformations pour (d/D=0.886)

Tableau IV-11: Récapitulatif des contraintes et déformations des arbres avec épaulements

Charges	Contrainte Von Mises (N/m²) d/D=0,5	Contrainte Von Mises (N/m²) d/D=0,75	Contrainte Von Mises (N/m²) d/D=0,886	Déformation d/D=0,5	Déformation d/D=0,75	Déformation d/D=0,886
Flexion Pure 1	2,218E+06	1,222E+06	1,466E+06	8,537E-06	4,879E-06	5,854E-06
2	2,131E+06	1,105E+06	1,326E+06	8,398E-06	4,416E-06	5,299E-06
3	2,001E+06	9,993E+05	1,199E+06	8,080E-06	4,003E-06	4,804E-06
4	1,920E+06	9,087E+05	1,090E+06	7,399E-06	3,659E-06	4,391E-06
5	1,784E+06	8,413E+05	1,010E+06	6,895E-06	3,403E-06	4,084E-06
6	1,698E+06	7,836E+05	1,004E+06	6,610E-06	2,828E-06	4,799E-06
7	1,680E+06	8,471E+05	1,017E+06	6,571E-06	3,265E-06	3,918E-06
8	1,742E+06	8,945E+05	1,073E+06	6,804E-06	3,385E-06	4,063E-06
9	1,848E+06	9,780E+05	1,174E+06	7,261E-06	3,628E-06	4,354E-06
10	2,009E+06	1,087E+06	1,304E+06	7,951E-06	3,999E-06	4,799E-06
Torsion Pure 11	2,217E+06	1,436E+06	1,614E+06	8,792E-06	5,291E-06	5,012E-06

Représentation Graphiques des contraintes de Von Mises et des déformations pour les résultats obtenus par le logiciel COSMOSWorks.

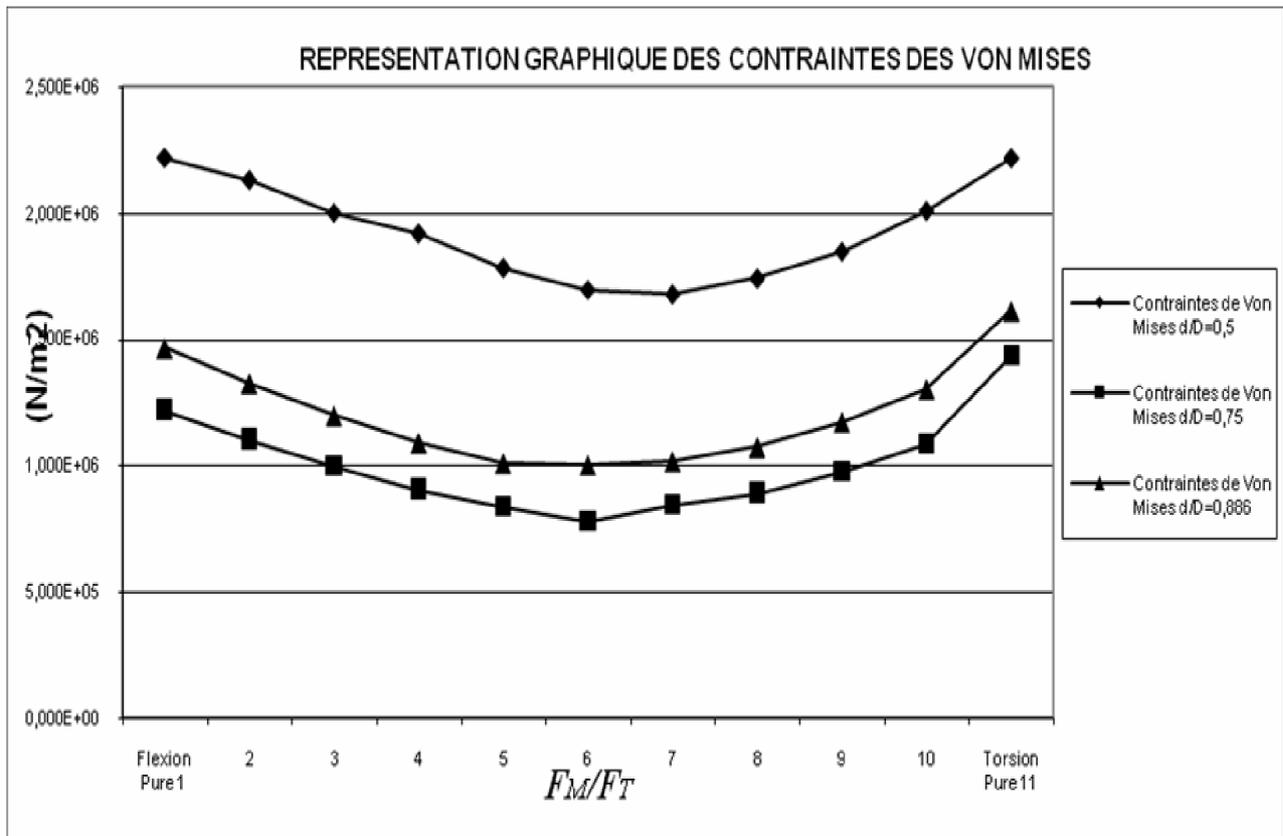


Figure IV-42. Représentation COSMOSWorks les courbes de contrainte de Von Mises  
En fonction du rapport  $F_M/F_T$

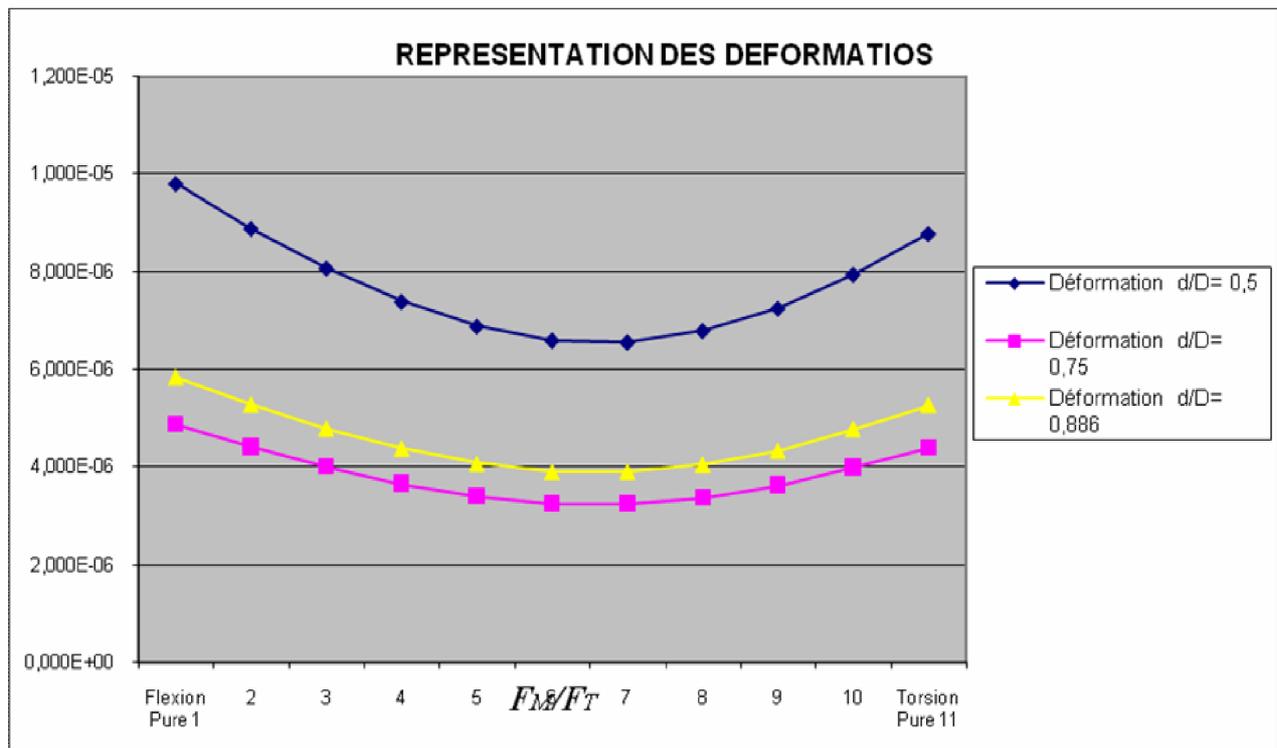


Figure IV-43. Représentation COSMOSWorks les courbes de déformations  
En fonction du rapport  $F_M/F_T$

### IV-5.2.2. Etude d'arbres partiellement cannelé

Dans les figures de IV-44 à IV-72, sont montrés les résultats des contraintes et déformations obtenus grâce au logiciel Cosmosworks qui seront comparés avec les contraintes calculées par l'équation (II.16) pour les arbres partiellement cannelés. Les résultats de Cosmosworks pour les sections cannelées des arbres sont seulement comparables au modèle théorique pour le cas de la charge de flexion pure. Aucune solution analytique n'existe pour prédire même correctement les efforts développés dans la racine de la dent de cannelure. Pour cette étude en particulier, on utilise des modèles analytiques dont le calcul sera simplifié, ces derniers seront comparés avec ceux obtenus par Cosmosworks. Sachant que ces modèles analytiques utilisent seulement une contrainte de cisaillement et une contrainte de flexion. Quant à Cosmosworks, il considère trois contraintes normales et trois contraintes de cisaillement dans son calcul.

#### A- Arbre partiellement cannelé $R_{\text{fraise1}} = 25\text{mm}$

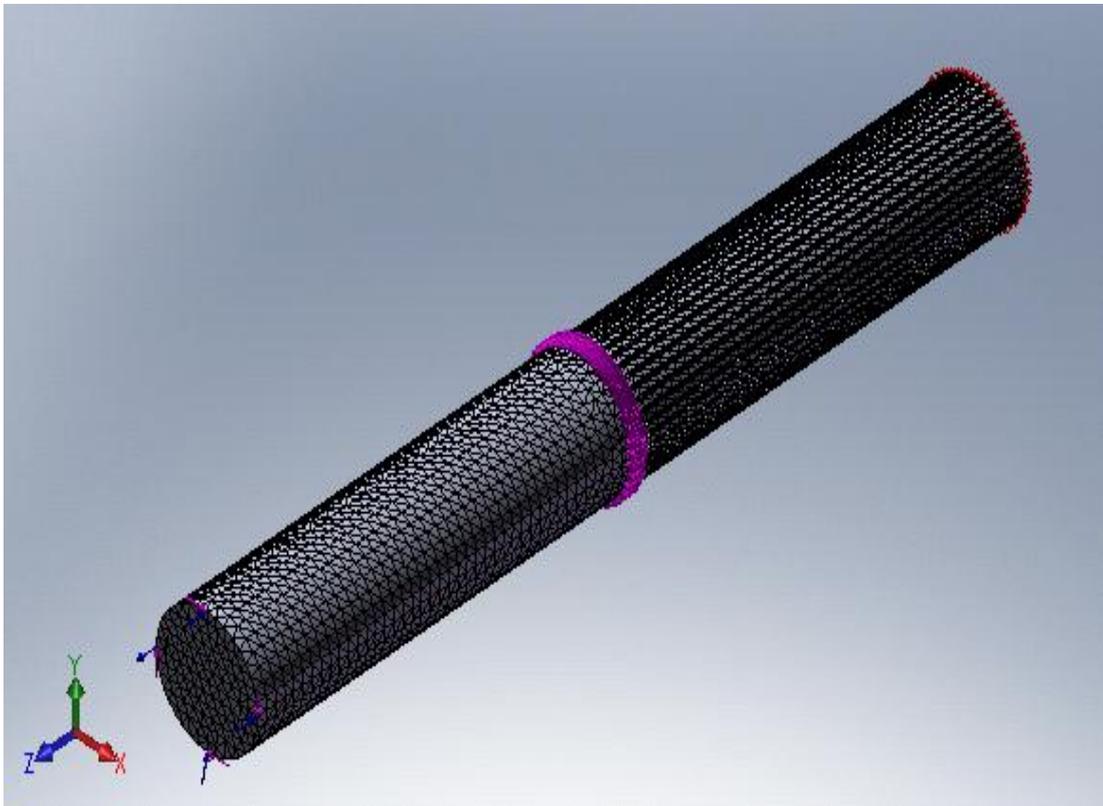


Figure IV-44. Les conditions aux limites et les chargements

➤ 1<sup>er</sup> cas de Flexion Pure ( $F_M/F_T = 224.8/0$ )

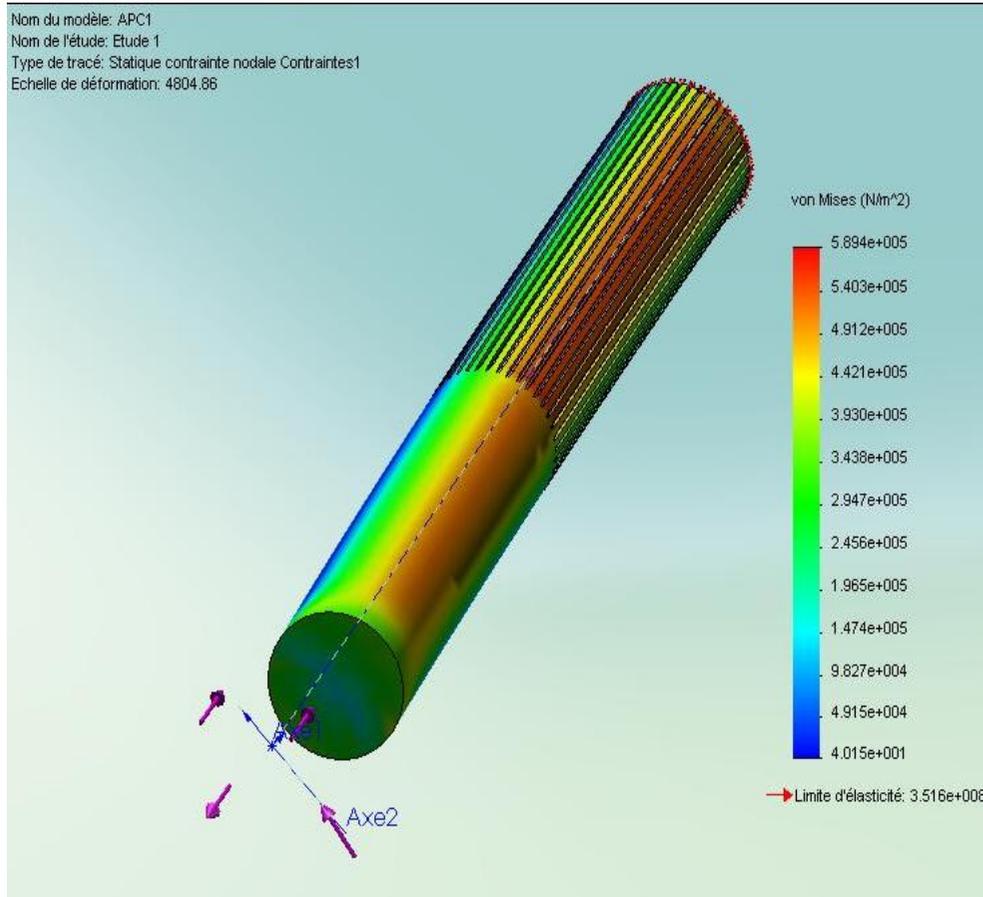


Figure IV-45. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

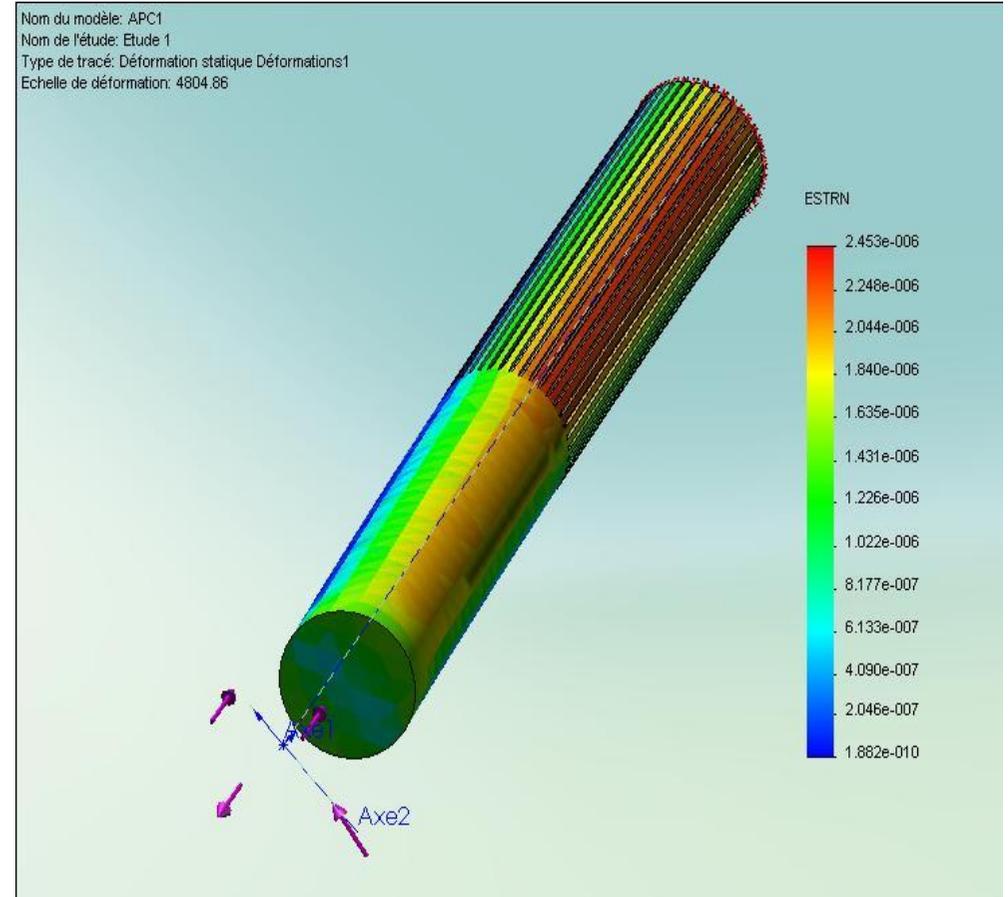


Figure IV-46. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

➤ 11<sup>ème</sup> cas de torsion pure ( $F_M/F_T = 0/224.8$ )

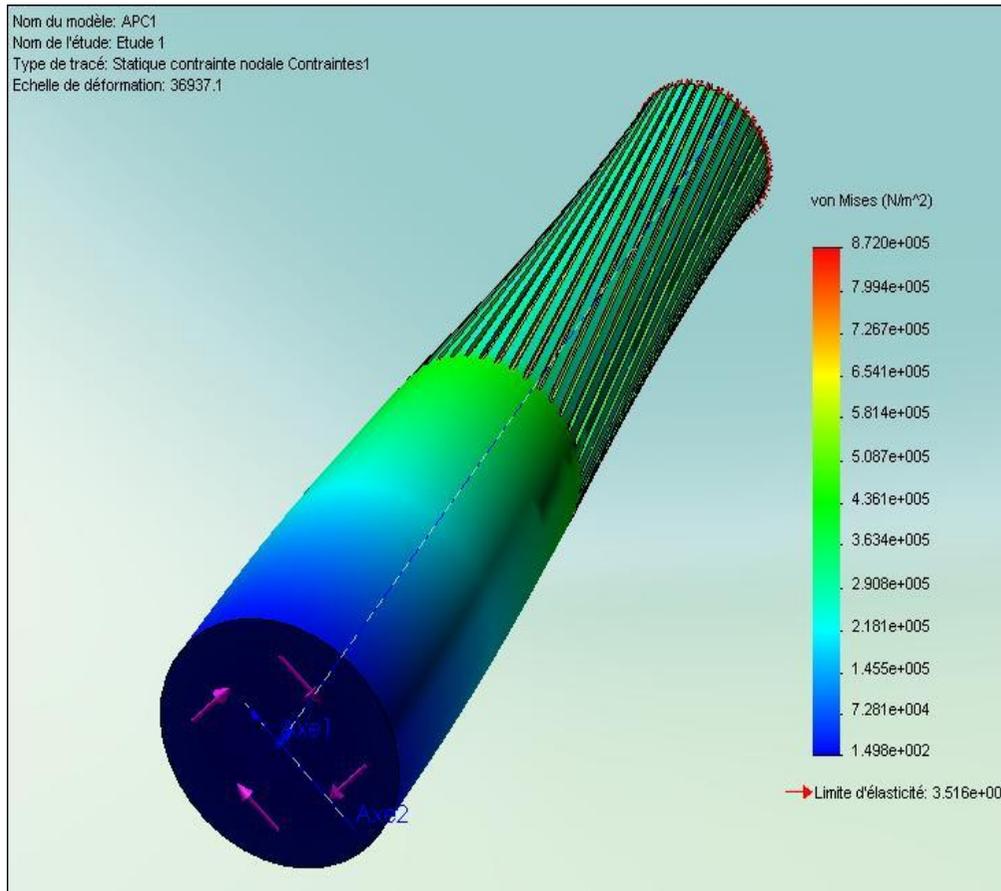


Figure IV-47. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

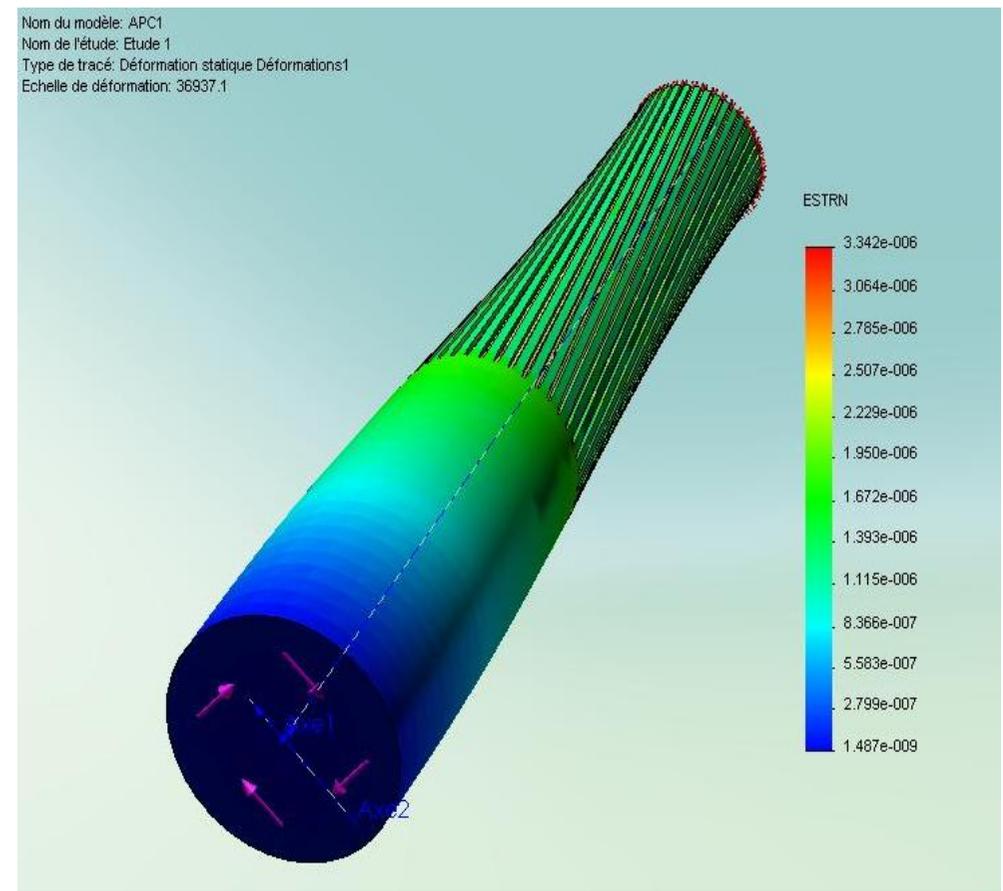


Figure IV-48. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

➤ 6<sup>ème</sup> cas de flexion et torsion combinée ( $F_M/F_T = 112,4/112,4$ )

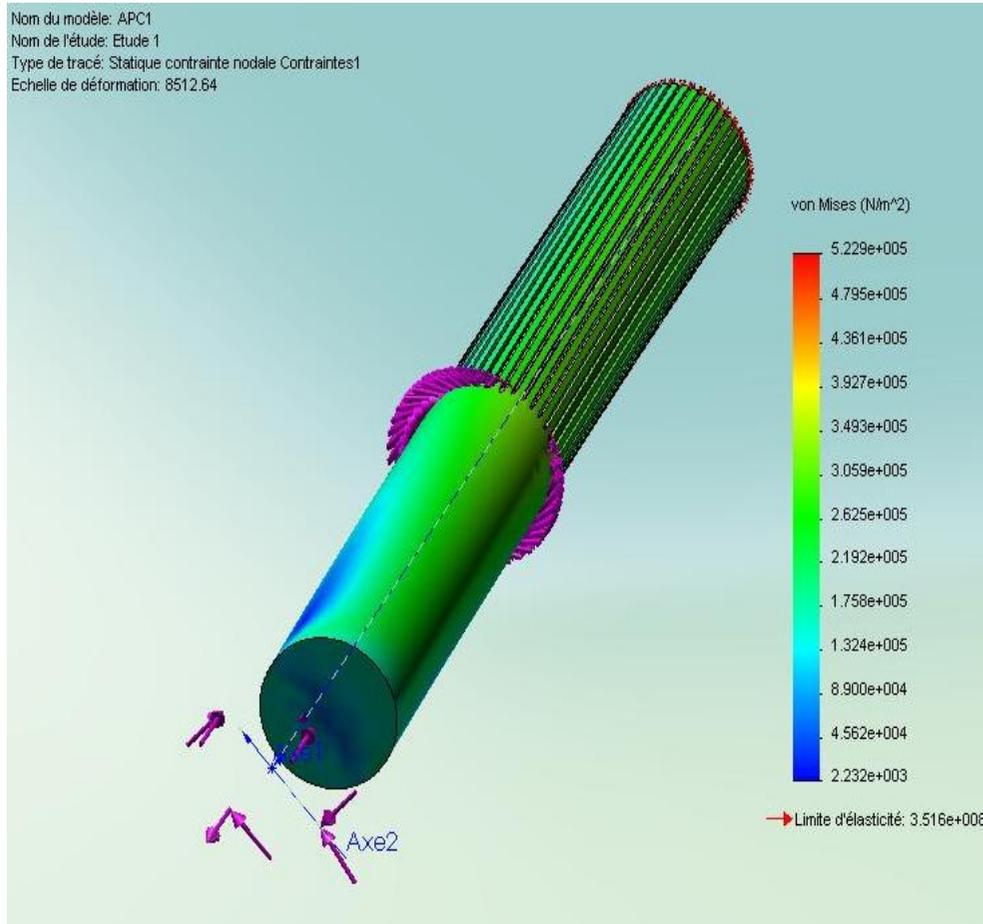


Figure IV-49. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

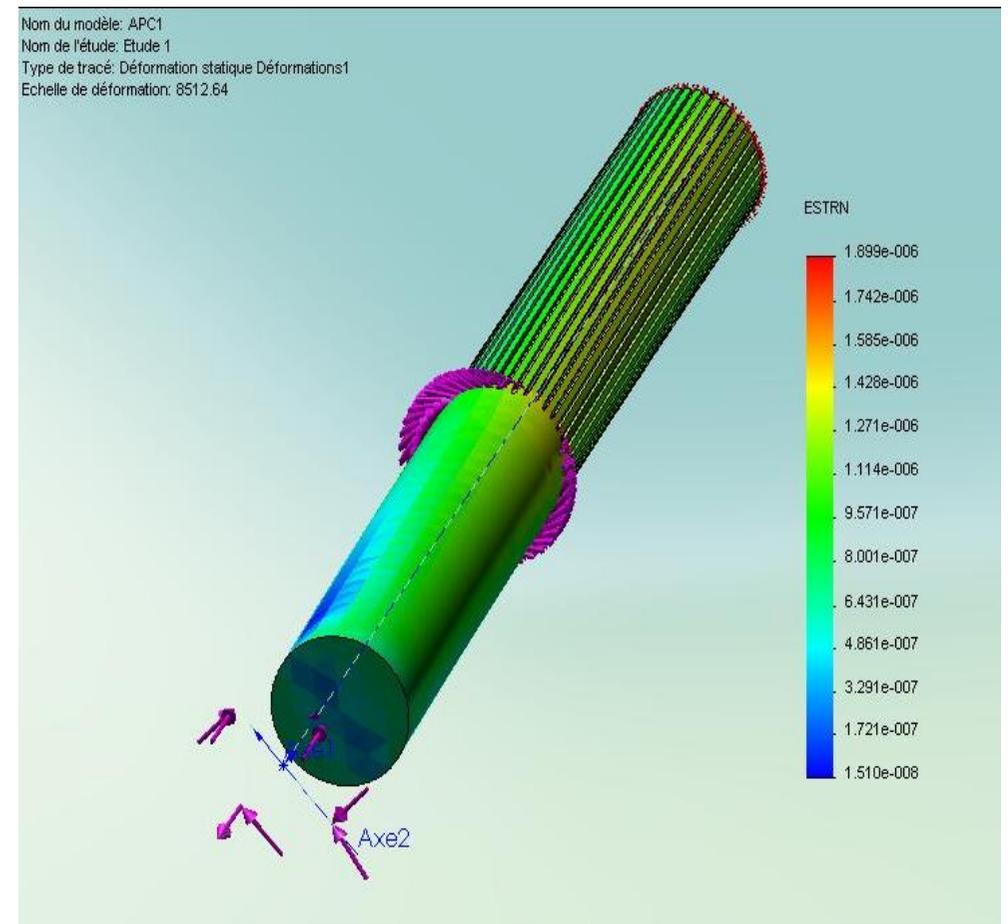
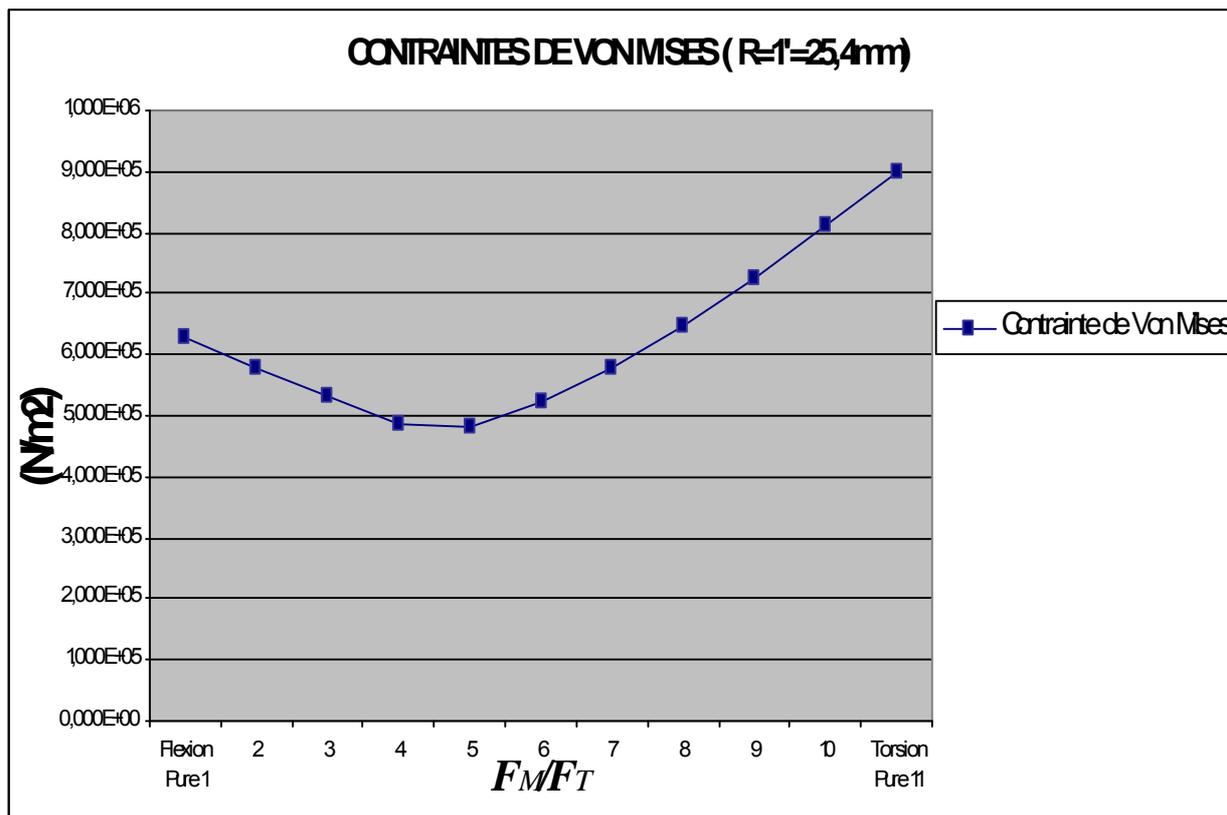


Figure IV-50. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

**Tableau IV-12** : calcul du moment de flexion et de torsion pour l'arbre partiellement cannelé de rayon de fraise ( $R = 25mm$ )

Charges	La Flexion		La Torsion		Contrainte Von Mises (N/m <sup>2</sup> )	Déformation
	Fm(N)	d (m)	Ft(N)	d (m)		
Flexion Pure 1	224,8	0,065	0	0,065	5.894E+05	2.453E-06
2	202,32	0,065	22,48	0,065	5,763E+05	2,267E-06
3	179,84	0,065	44,96	0,065	5,300E+05	2,025E-06
4	157,36	0,065	67,44	0,065	4,878E+05	1,898E-06
5	134,88	0,065	89,92	0,065	4,810E+05	1,949E-06
6	112,4	0,065	112,4	0,065	5,229E+05	1.899-06
7	89,92	0,065	134,88	0,065	5,798E+05	2,294E-06
8	67,44	0,065	157,36	0,065	6,486E+05	2,553E-06
9	44,96	0,065	179,84	0,065	7,259E+05	2,853E-06
10	22,48	0,065	202,32	0,065	8,098E+05	3,181E-06
Torsion Pure 11	0	0,065	224,8	0,065	8,979E+05	3,537E-06



**Figure IV-51.** Représentation Graphiques la courbe de contrainte de Von Mises pour ( $R=25mm$ )

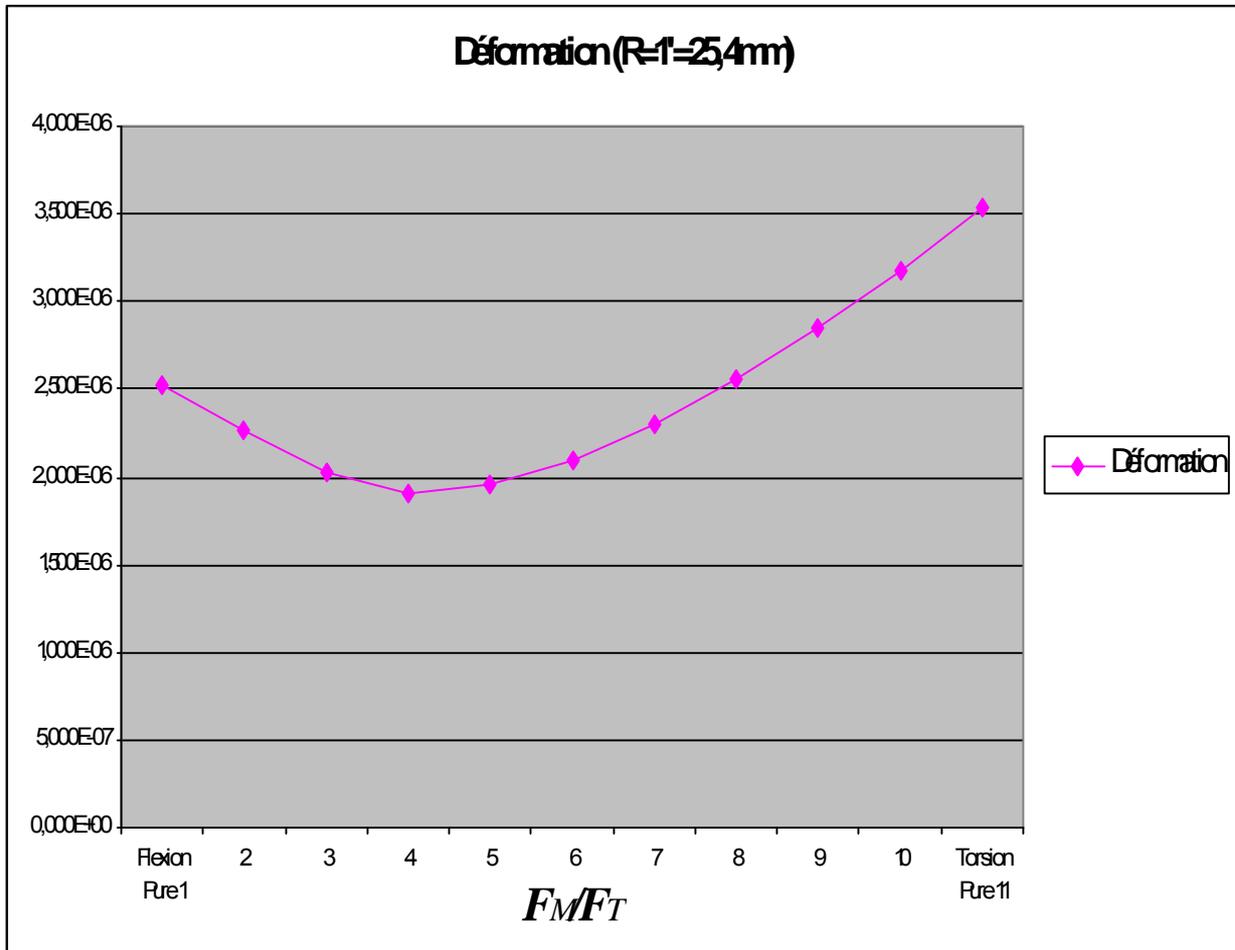


Figure IV-52. Représentation Graphiques la courbe de Déformations pour (R=25mm)

**B- Arbre partiellement cannelé  $R_{\text{fraise2}} = 38 \text{ mm}$**

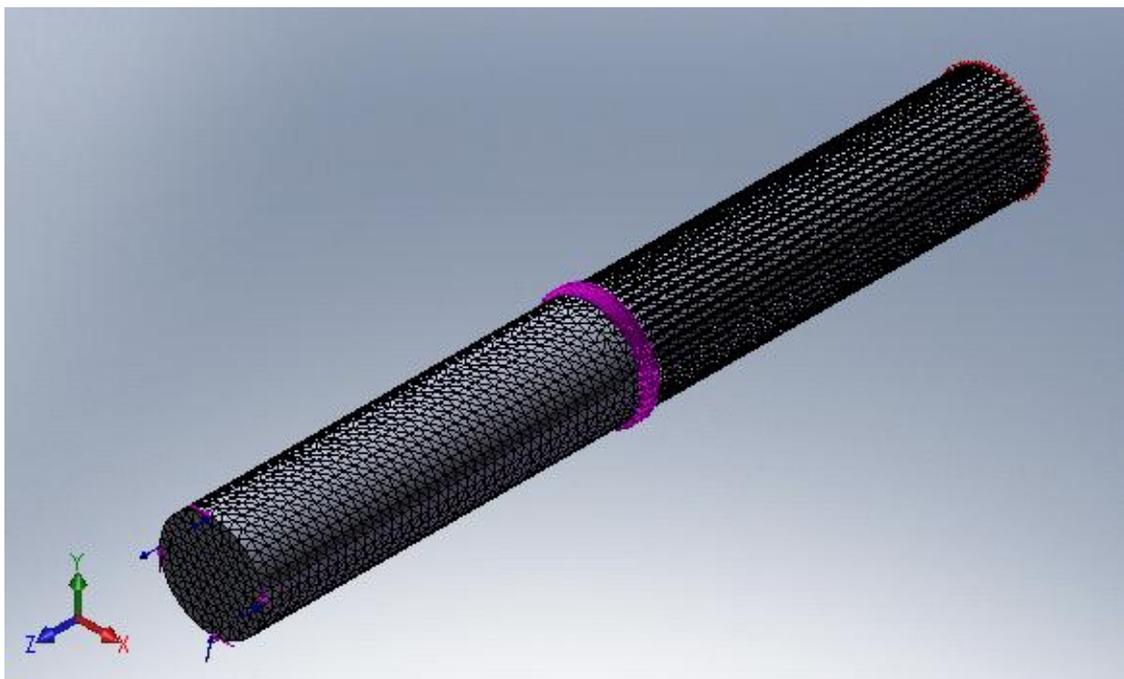


Figure IV-53. Les conditions aux limites et les chargements

➤ 1<sup>er</sup> cas de flexion pure ( $F_M/F_T = 224.8/0$ )

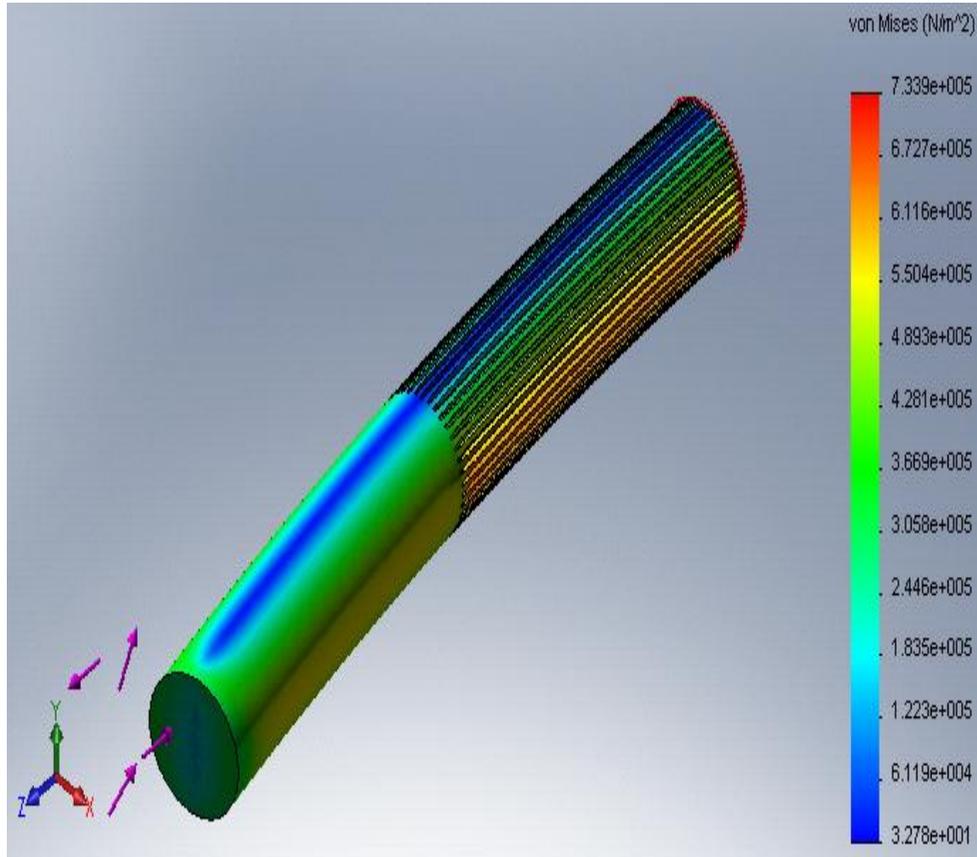


Figure IV-54. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

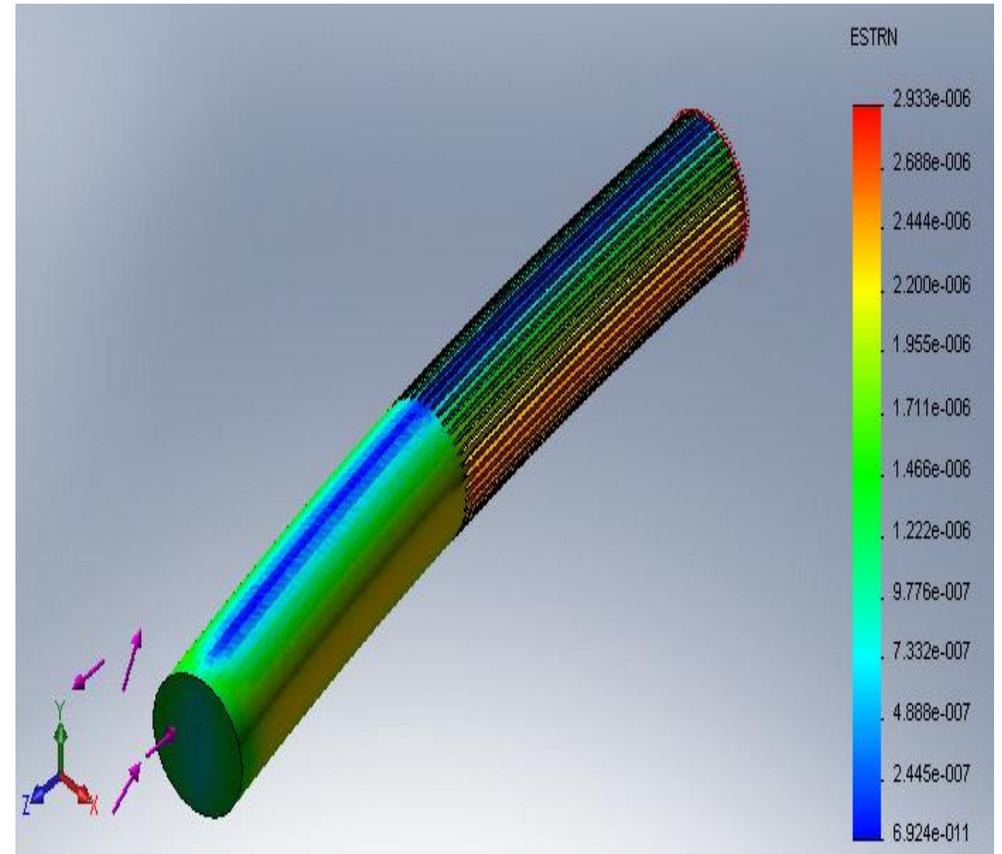


Figure IV-55. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

➤ 11<sup>ème</sup> Cas de torsion pure ( $F_M/F_T = 0/224.8$ )

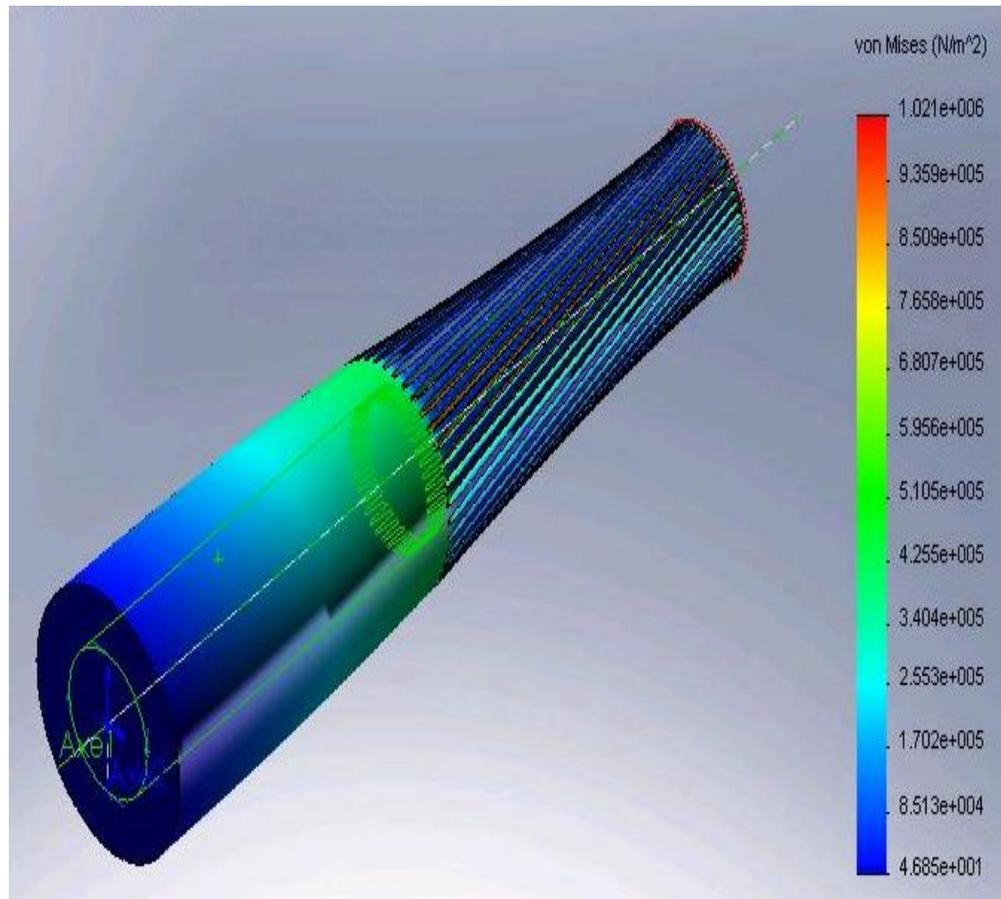


Figure IV-56. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

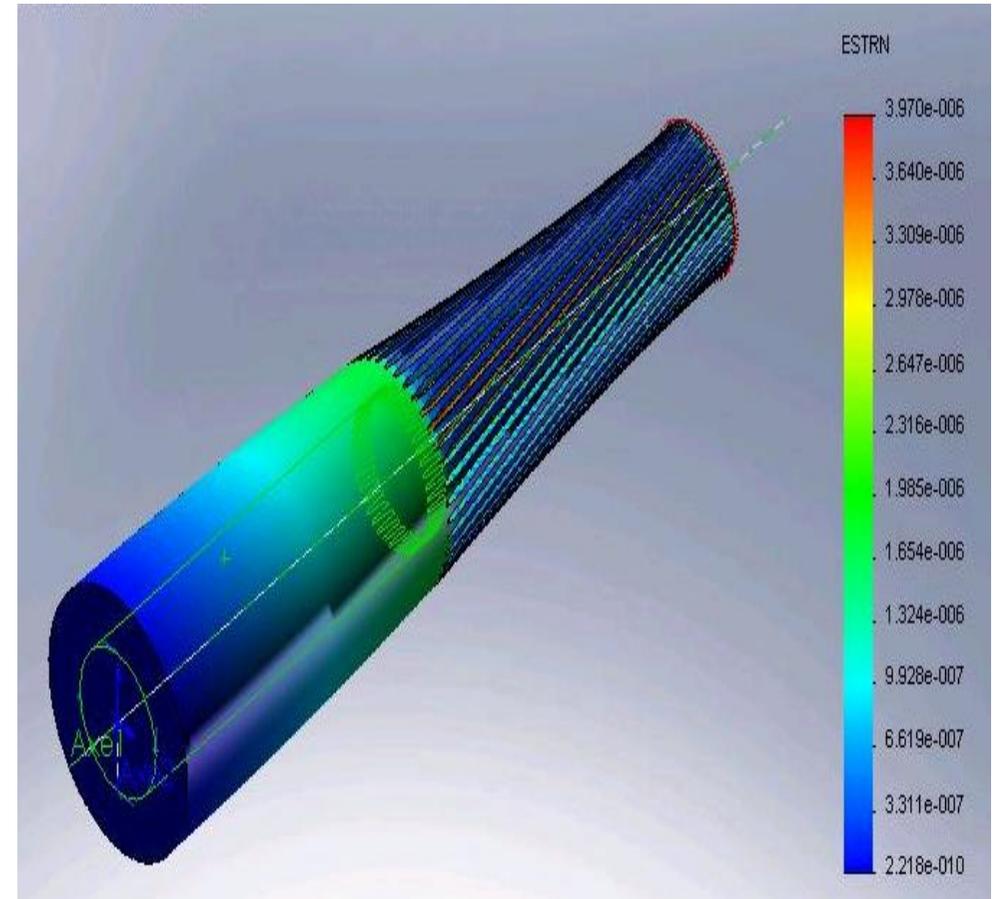


Figure IV-57. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

➤ 6<sup>ème</sup> Cas de flexion et torsion combinée ( $F_M/F_T = 112,4/112,4$ )

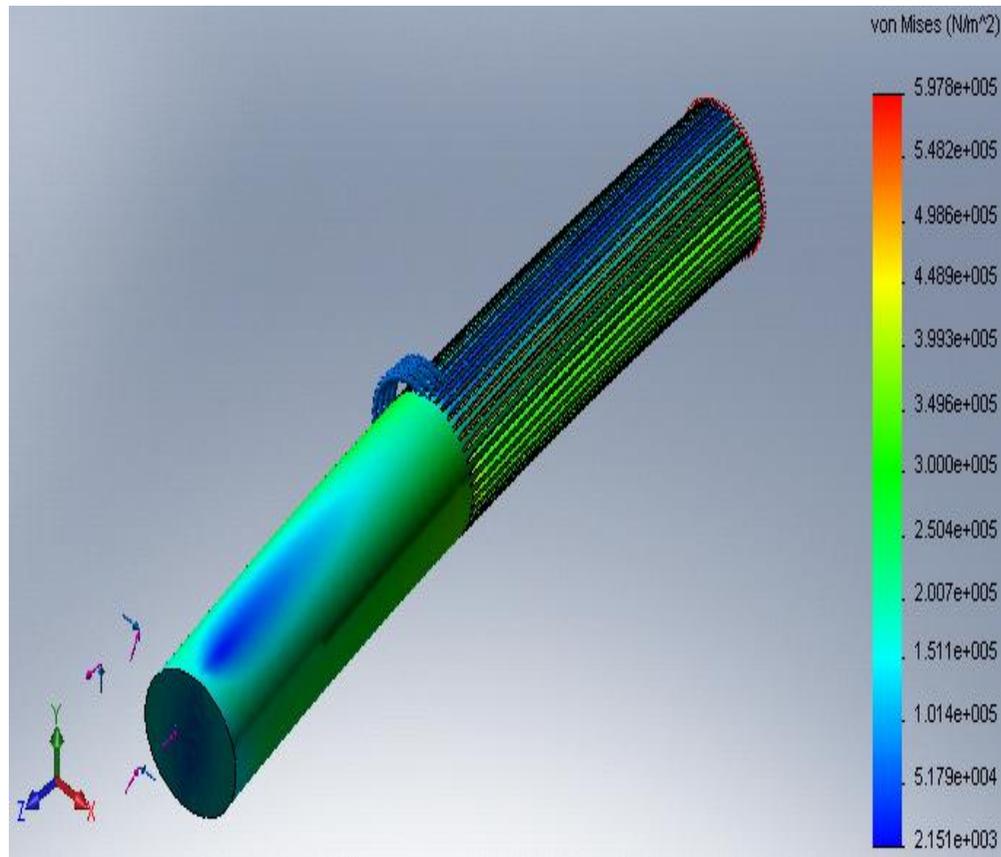


Figure IV-58. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

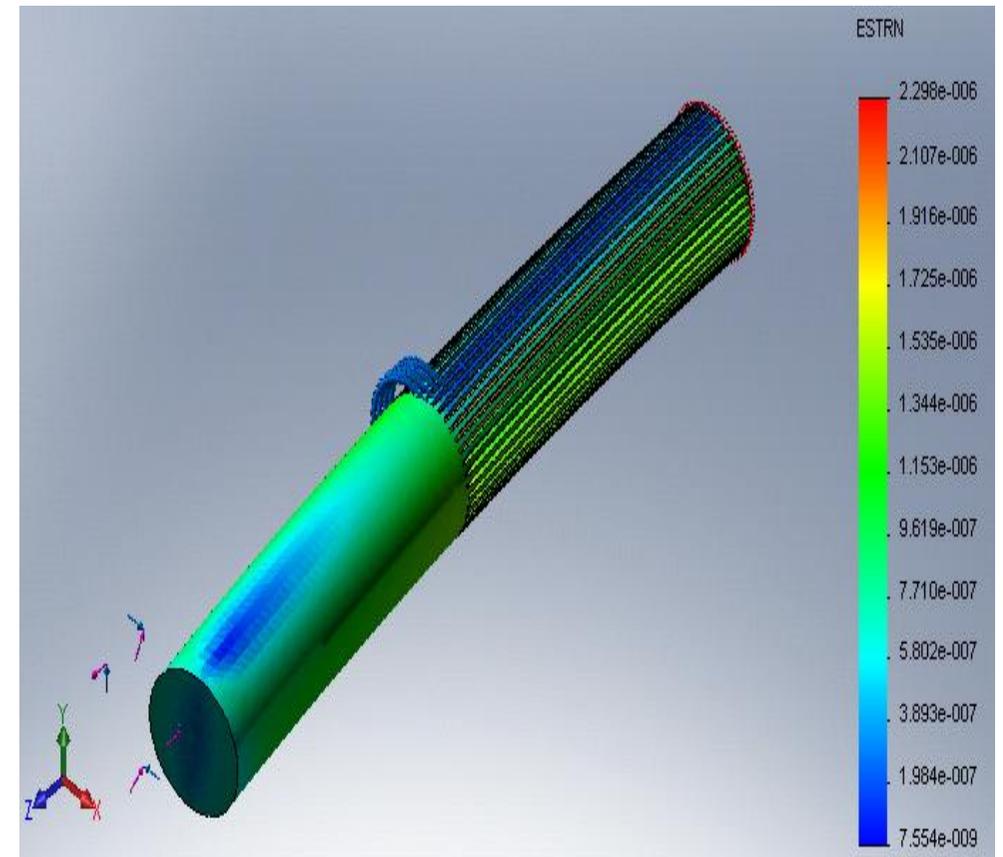
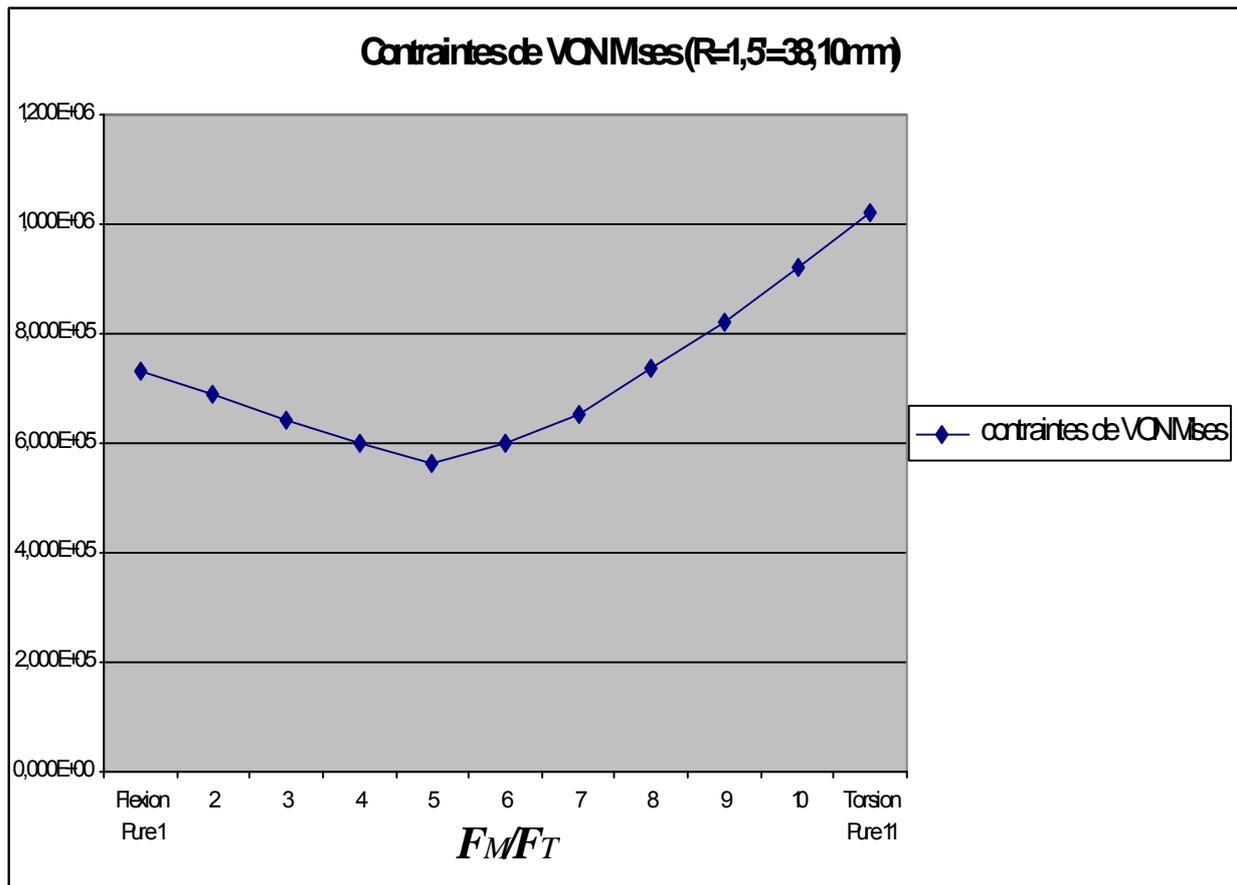


Figure IV-59. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

**Tableau IV-13:** calcul du moment de flexion et de torsion pour l'arbre partiellement cannelé de rayon de fraise ( $R= 38mm$ )

Charge	La Flexion		La Torsion		Contrainte Von Mises (N.m2)	Déformation
	Fm (N)	d (m)	Ft(N)	d (m)		
Flexion Pure 1	224,8	0,065	0	0,065	7,339E+05	2,933E-06
2	202,32	0,065	22,48	0,065	6,884E+05	2,623E-06
3	179,84	0,065	44,96	0,065	6,439E+05	2,316E-06
4	157,36	0,065	67,44	0,065	6,007E+05	2,121E-06
5	134,88	0,065	89,92	0,065	5,618E+05	2,175E-06
6	112,4	0,065	112,4	0,065	5,978E+05	2,298E-06
7	89,92	0,065	134,88	0,065	6,523E+05	2,489E-06
8	67,44	0,065	157,36	0,065	7,353E+05	2,796E-06
9	44,96	0,065	179,84	0,065	8,187E+05	3,183E-06
10	22,48	0,065	202,32	0,065	9,197E+05	3,572E-06
Torsion Pure 11	0	0,065	224,8	0,065	1,021E+06	3,970E-06



**Figure IV-60.** Représentation Graphiques la courbe de contrainte de Von Mises pour ( $R=38mm$ )

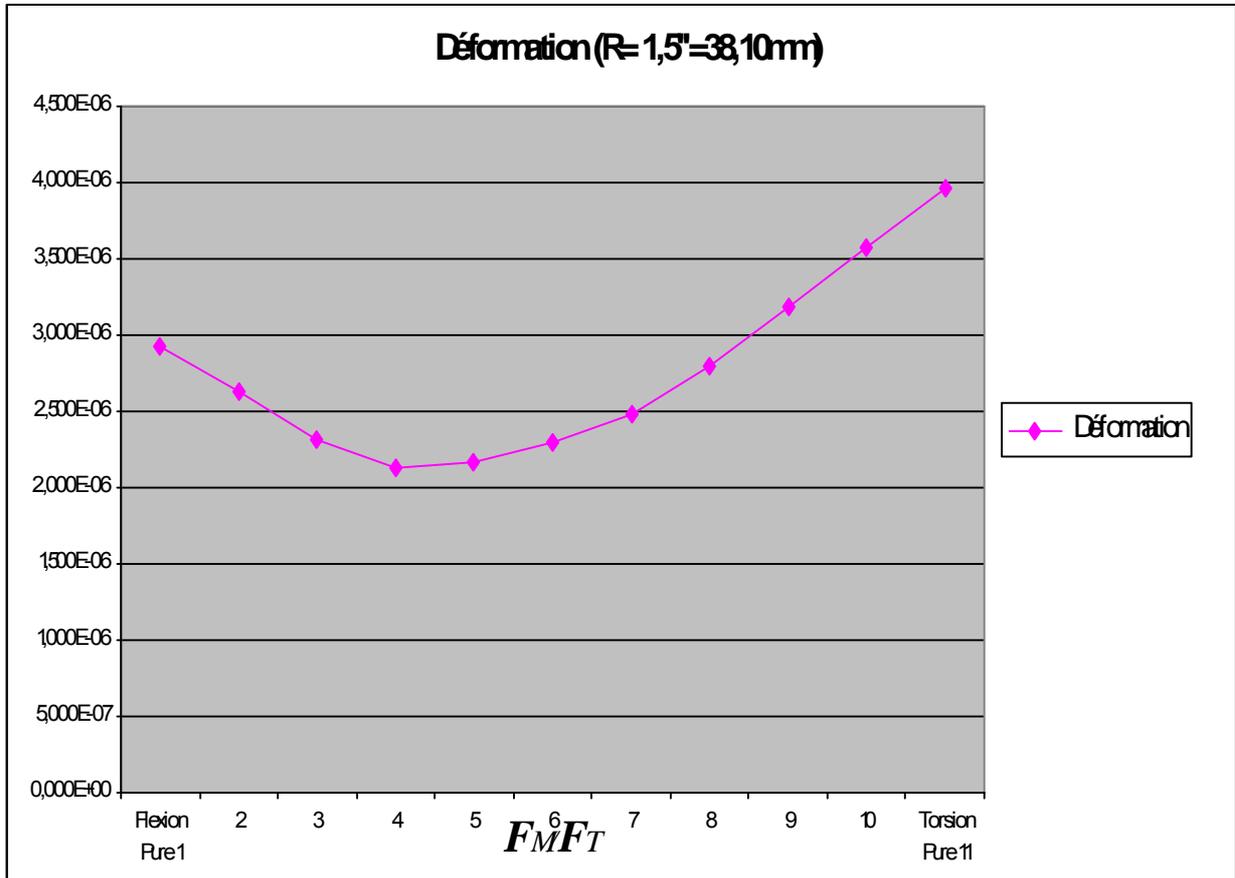


Figure IV-61. Représentation Graphiques la courbe de Déformations pour (R=38mm)

C- Arbre partiellement cannelé  $R_{\text{fraise3}} = 50 \text{ mm}$

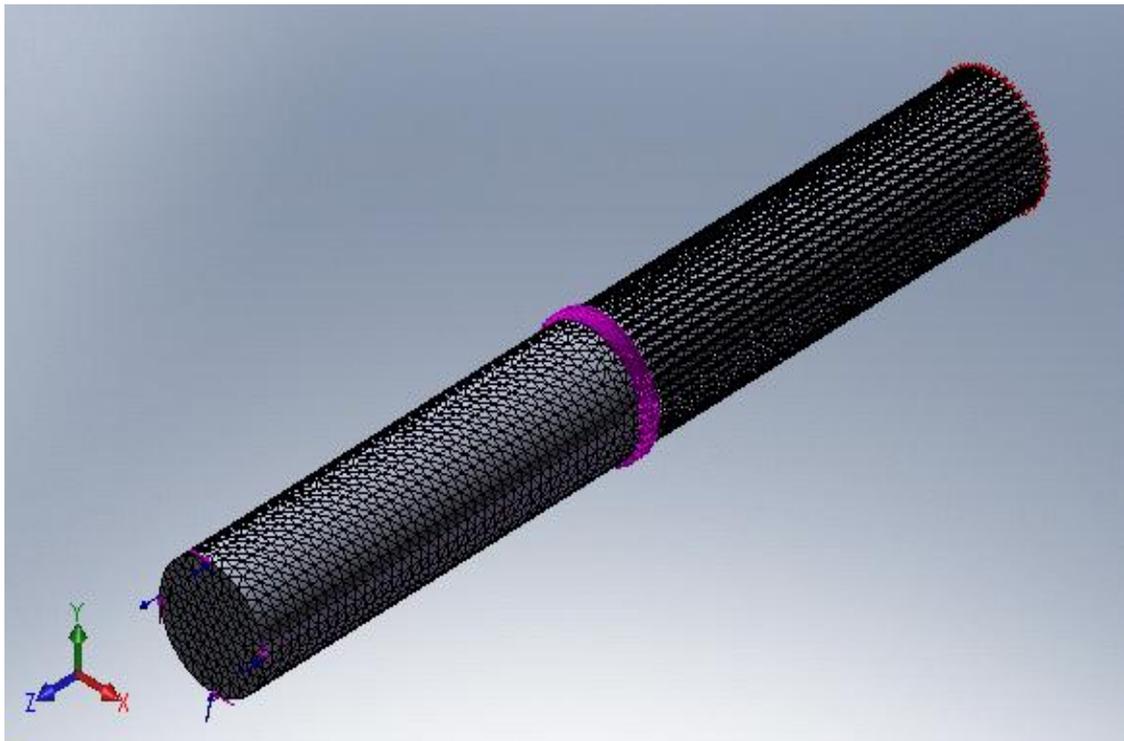


Figure IV-62. Les conditions aux limites et les chargements

➤ 1<sup>er</sup> Cas Flexion Pure ( $F_M/F_T = 224.8/0$ )

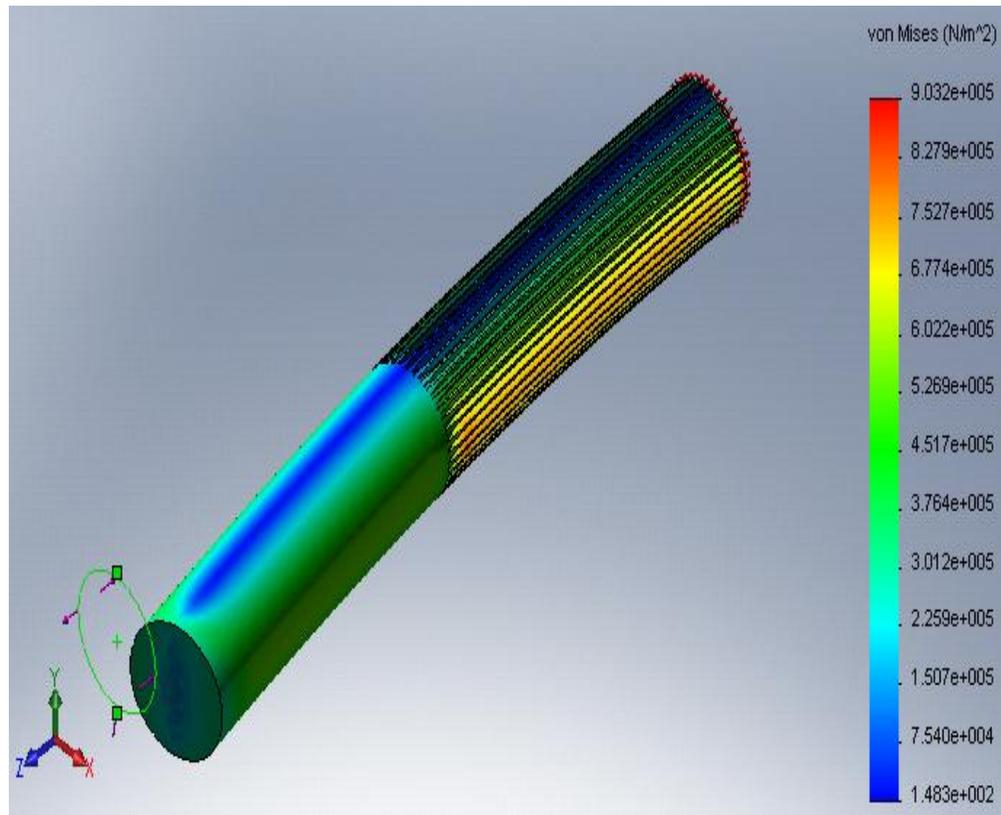


Figure IV-63. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

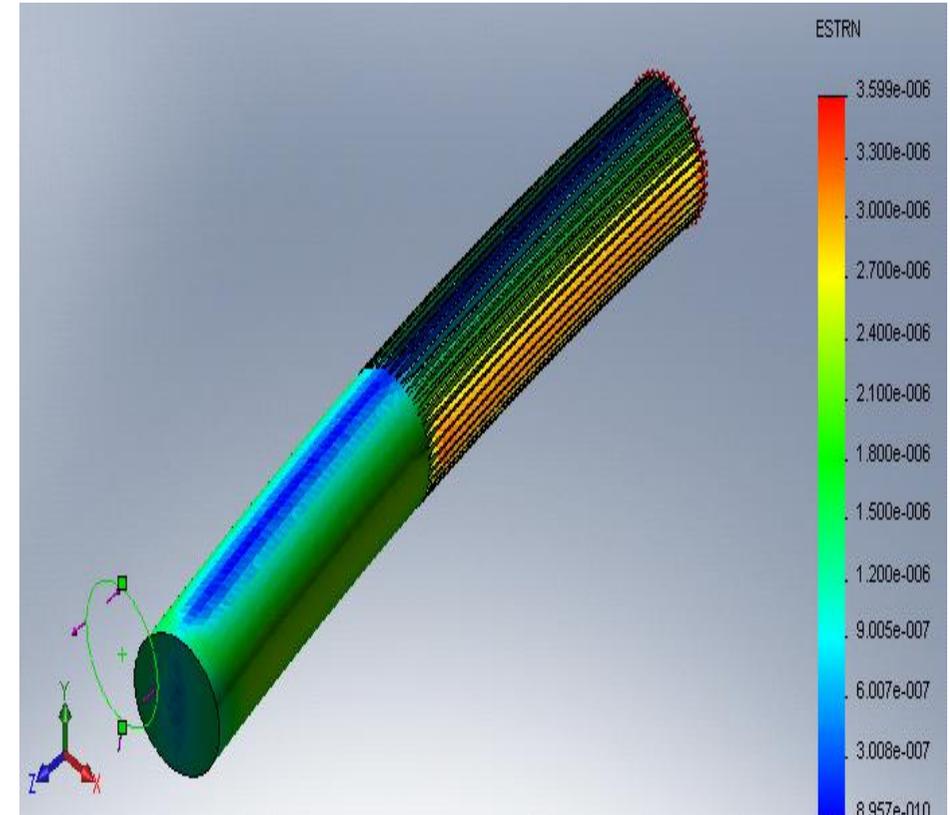


Figure IV-64. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

➤ 11<sup>ème</sup> Cas de torsion pure ( $F_M/F_T = 0/224.8$ )

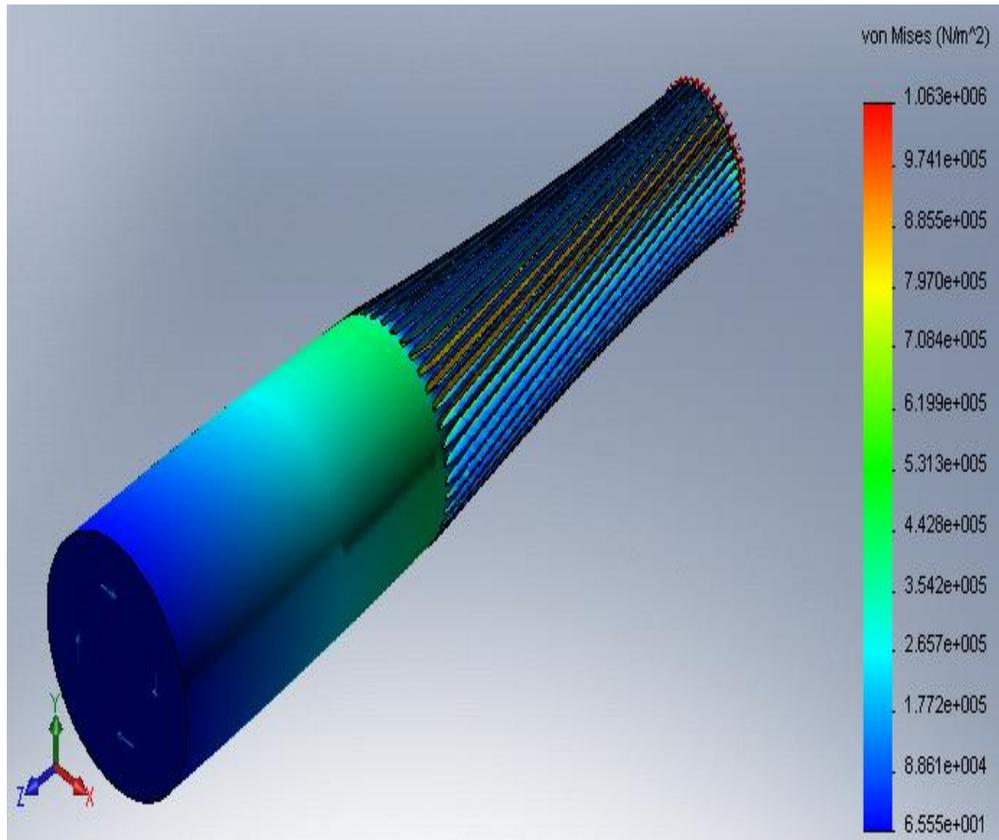


Figure IV-65. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

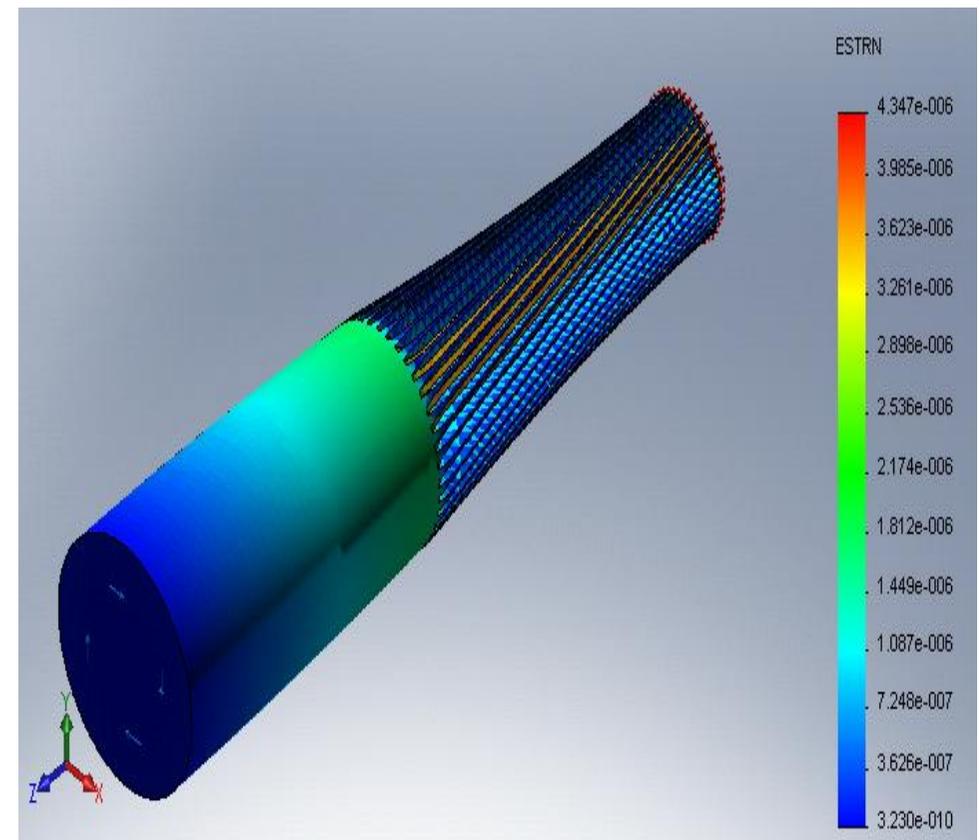


Figure IV-66. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

➤ 6<sup>ème</sup> Cas de flexion et torsion combinée ( $F_M/F_T = 112,4/112,4$ )

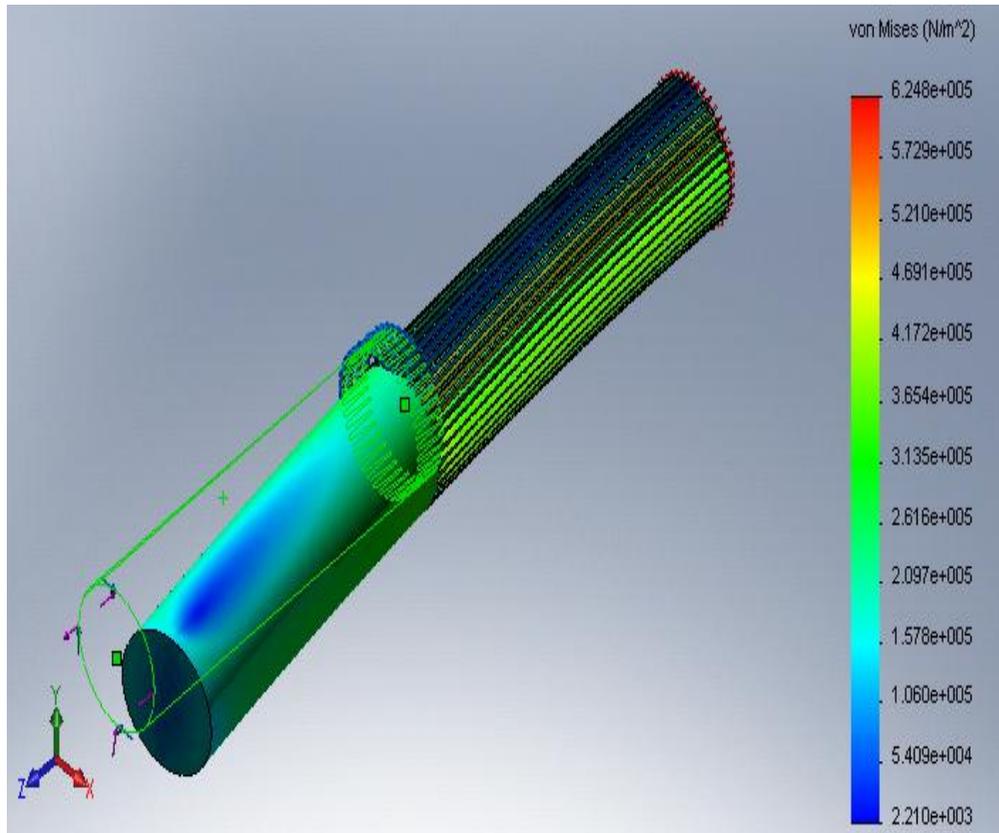


Figure IV-67. Isocontraintes de Von Mises le long de l'arbre

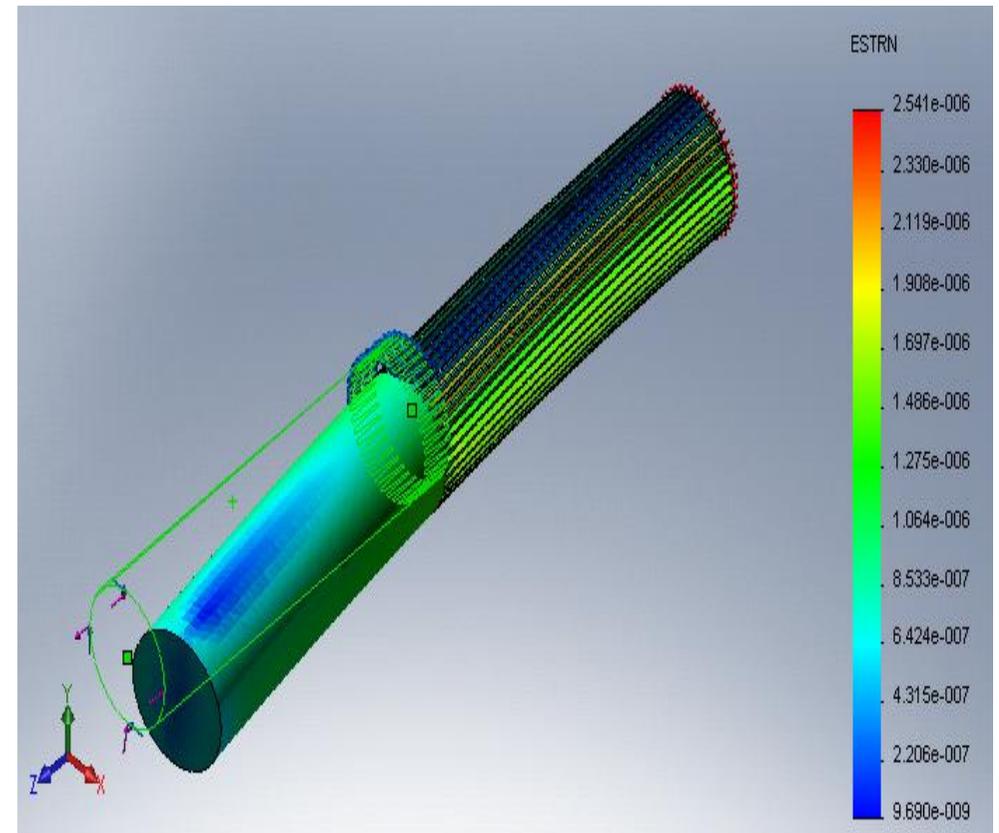
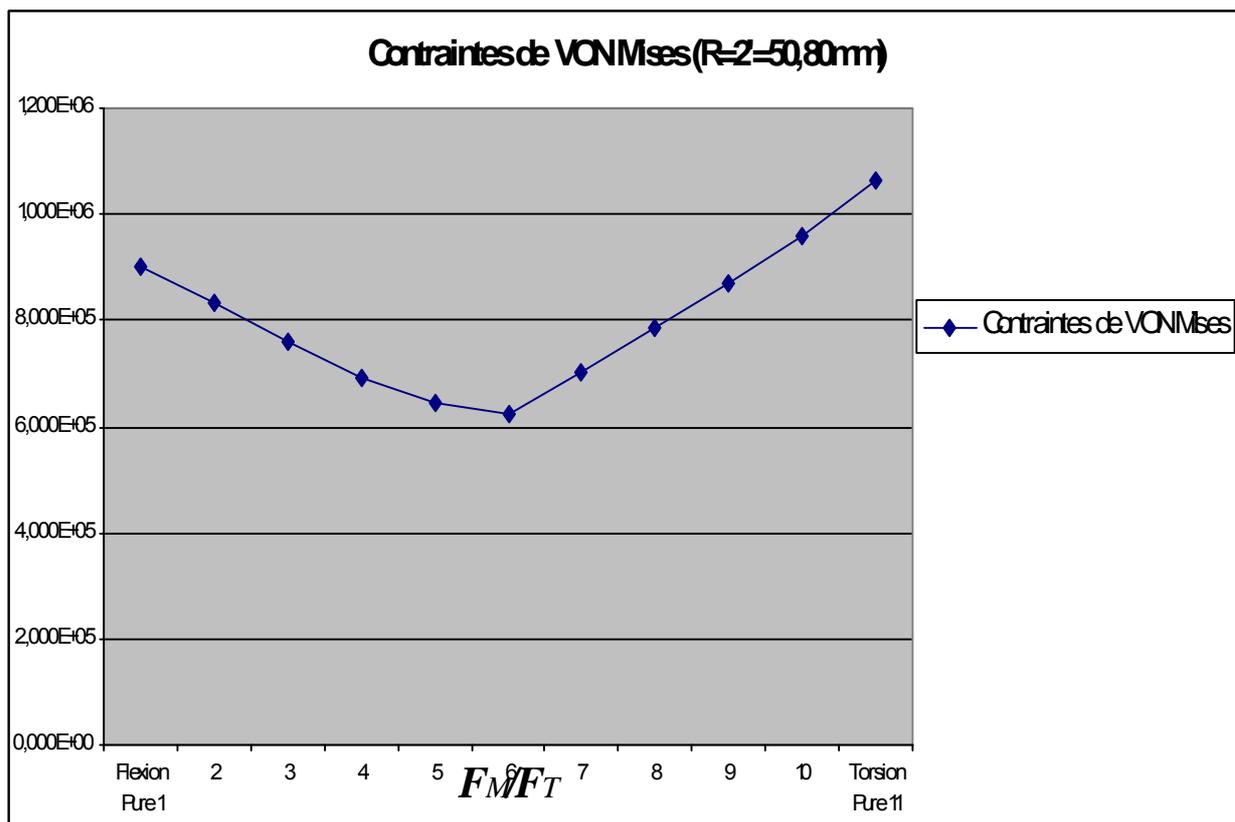


Figure IV-68. Isovaleurs des déformations le long de l'arbre

**Tableau IV-14:** calcul du moment de flexion et de torsion pour l'arbre partiellement cannelé de rayon de fraise ( $R= 50mm$ )

Charge	La Flexion		La Torsion		Contrainte Von Mises (N/m <sup>2</sup> )	Déformation
	Fm(N)	d (m)	Ft(N)	d (m)		
Flexion Pure 1	224,8	0,065	0	0,065	9,032E+05	3,599E-06
2	202,32	0,065	22,48	0,065	8,335E+05	3,231E-06
3	179,84	0,065	44,96	0,065	7,618E+05	2,848E-06
4	157,36	0,065	67,44	0,065	6,940E+05	2,489E-06
5	134,88	0,065	89,92	0,065	6,445E+05	2,347E-06
6	112,4	0,065	112,4	0,065	6,248E+05	2,541E-06
7	89,92	0,065	134,88	0,065	7,017E+05	2,811E-06
8	67,44	0,065	157,36	0,065	7,836E+05	3,143E-06
9	44,96	0,065	179,84	0,065	8,692E+05	3,524E-06
10	22,48	0,065	202,32	0,065	9,590E+05	3,925E-06
Torsion Pure 11	0	0,065	224,8	0,065	1,063E+06	4,347E-06



**Figure IV-69.** Représentation Graphiques la courbe de contrainte de Von Mises pour ( $R=50mm$ )

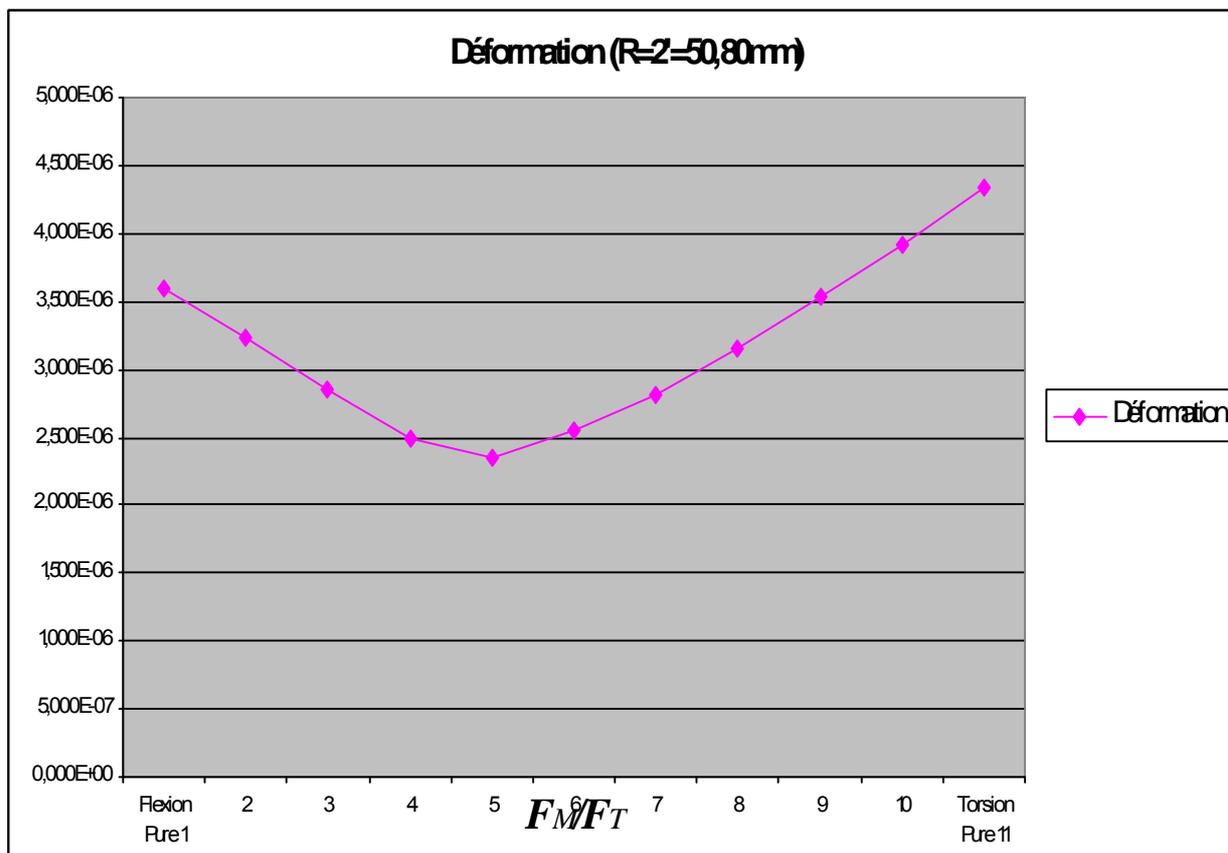


Figure IV-70. Représentation Graphiques la courbe de Déformations pour (R=50mm)

Tableau IV-15: Récapitulatif des contraintes et déformations des arbres partiellement cannelés

Charges	Contrainte Von Mises (N/m <sup>2</sup> ) R <sub>f1</sub> =25mm	Contrainte Von Mises (N/m <sup>2</sup> ) R <sub>f2</sub> =38 mm	Contrainte Von Mises (N/m <sup>2</sup> ) R <sub>f3</sub> =50 mm	Déformation R <sub>f1</sub> =25mm	Déformation R <sub>f2</sub> =38 mm	Déformation R <sub>f3</sub> =50 mm
Flexion Pure 1	5,894E+05	7,339E+05	9,032E+05	2,453E-06	2,933E-06	3,599E-06
2	5,763E+05	6,884E+05	8,335E+05	2,267E-06	2,623E-06	3,231E-06
3	5,300E+05	6,439E+05	7,618E+05	2,025E-06	2,316E-06	2,848E-06
4	4,878E+05	6,007E+05	6,940E+05	1,898E-06	2,121E-06	2,489E-06
5	4,810E+05	5,618E+05	6,445E+05	1,949E-06	2,175E-06	2,347E-06
6	5,229E+05	5,978E+05	6,248E+05	1,899E-06	2,298E-06	2,541E-06
7	5,798E+05	6,523E+05	7,017E+05	2,294E-06	2,489E-06	2,811E-06
8	6,486E+05	7,353E+05	7,836E+05	2,553E-06	2,796E-06	3,143E-06
9	7,259E+05	8,187E+05	8,692E+05	2,853E-06	3,183E-06	3,524E-06
10	8,098E+05	9,197E+05	9,590E+05	3,181E-06	3,572E-06	3,925E-06
Torsion Pure 11	8,979E+05	1,021E+06	1,063E+06	3,537E-06	3,970E-06	4,347E-06

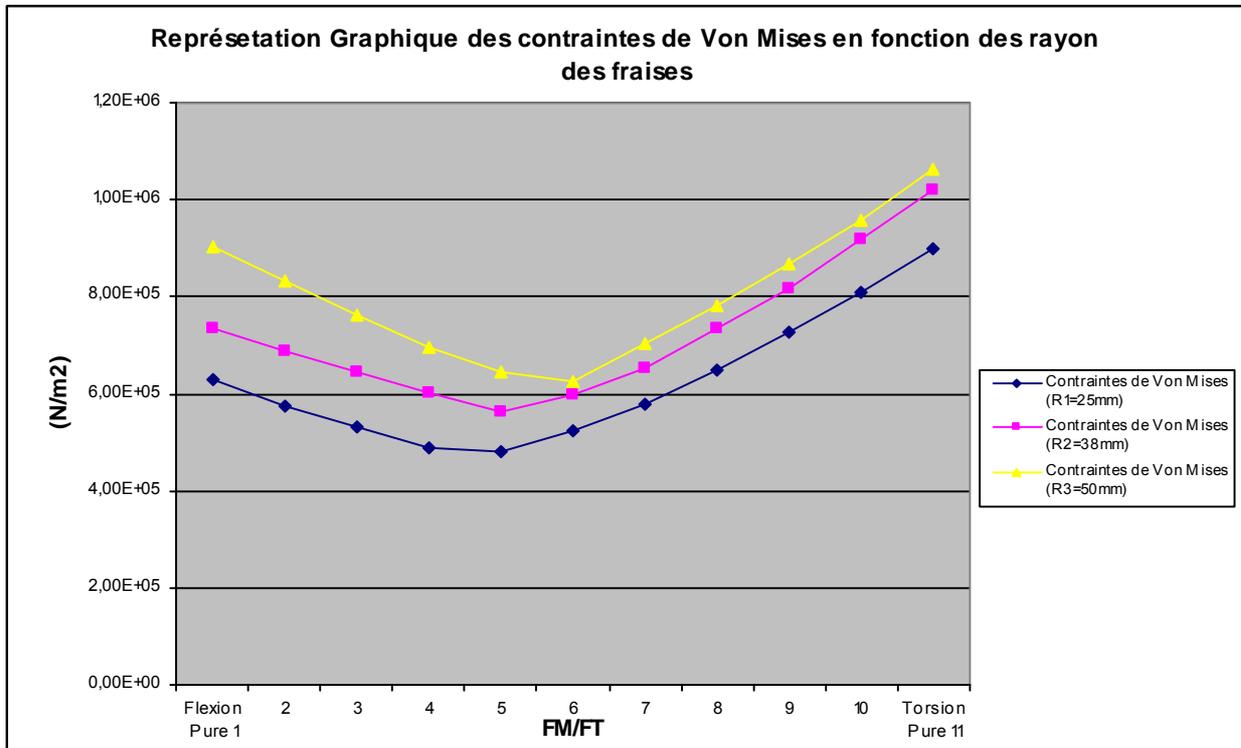


Figure IV-71. Représentation COSMOSWorks les courbes de contrainte de Von Mises

En fonction du rayon de fraise R

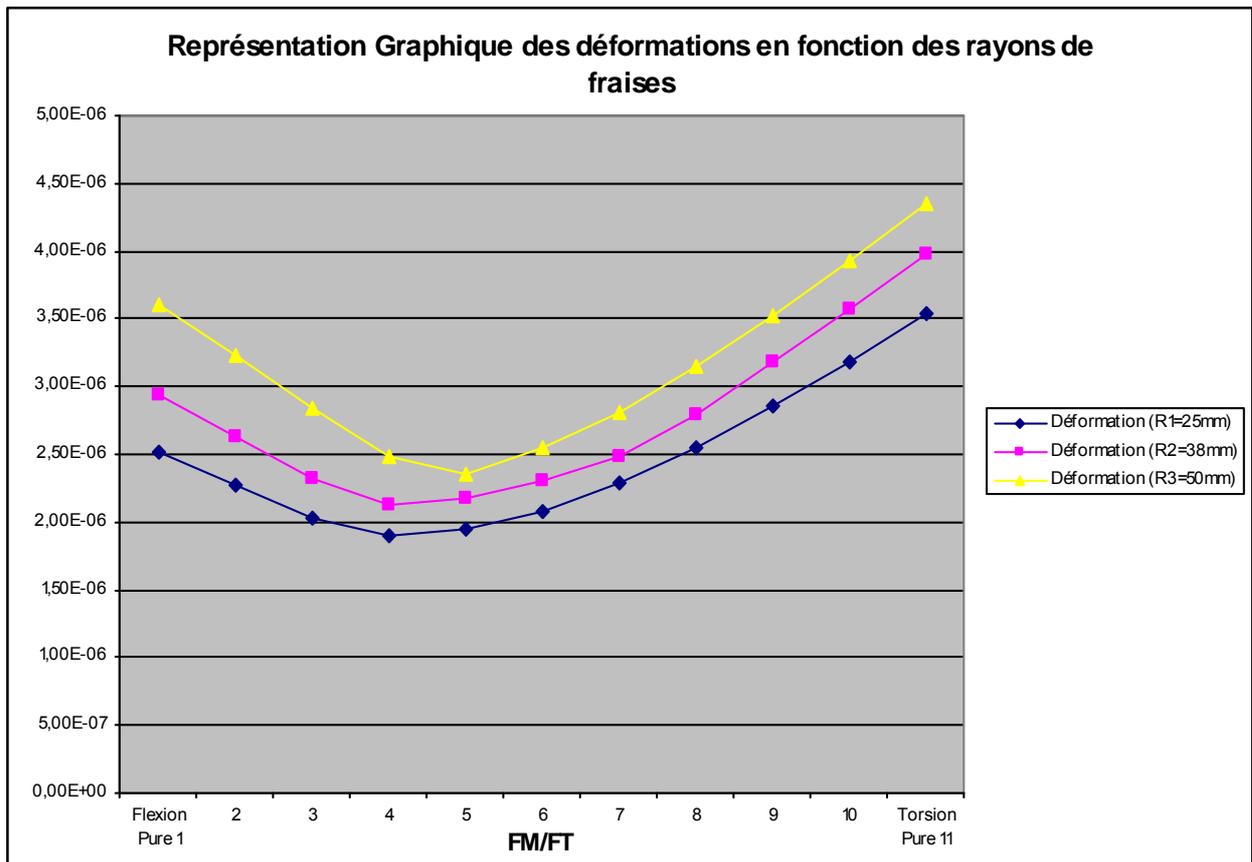


Figure IV-72. Représentation COSMOSWorks les courbes de déformations en fonction du

En fonction du rayon de fraise R

#### IV-6. Etude du comportement dynamique

L'analyse dynamique une technique utilisé pour déterminer le comportement dynamique d'une structure ou d'un composant, quand l'inertie de la structure (effet de la masse) et son amortissement jouent un rôle important.

Le comportement dynamique peut se présenter comme étant :

- Des caractéristiques vibrations, comment la structure vibre et à quelles fréquences.
- L'effet de la variation du chargement en fonction du temps (sur les déplacements et contraintes de la structure, par exemple).
- L'effet de chargement périodique (cyclique ou aléatoire).

L'analyse dynamique concerne généralement :

- Les vibrations - dues aux machines tournantes, par exemple.
- Les chocs - accidents de voiture, coups de marteau.
- Les forces cycliques – arbres coudés et autres machines tournantes.
- Les charges sismiques – tremblement de terre.
- Les vibrations aléatoires, lancement de fusée, transport routier.

Chaque situation est traitée par un type spécifique d'analyse dynamique.

- **Equation générale du mouvement :**

L'équation générale du mouvement se présent comme suit :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\}$$

Les différents types d'analyse nous conduisent à résoudre différentes formes de cette équation.

- **Pour l'analyse Modale :**

$F(t)$  est égale à zéro et  $[C]$  est souvent négligée, c qui revient à résoudre :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0$$

- **Pour l'analyse Harmonique :**

$F(t)$  et  $u(t)$  considérés comme étant harmonique, *i.e.*  $\xi \sin(\omega t)$ , ou  $\xi$  est l'amplitude et  $\omega$  la fréquence en radians/sec, ce qui revient à résoudre :

- Pour une excitation harmonique non amortie :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \xi \sin \omega t$$

- Pour une excitation harmonique amortie :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \xi \sin \omega t$$

### IV-6.1. Etude des vibrations libres

On considère un système mécanique possédant  $n$  degrés de liberté, et tel que chacun de ses oscillateurs peut vibrer autour d'une position d'équilibre en réagissant avec les oscillateurs voisins. On doit définir un nombre de variables de position égal au nombre de degrés de liberté du système.

En générale, les oscillations libres de ce système ne sont pas harmoniques. Cependant, dans certaines conditions, les masses peuvent exécuter des oscillations harmoniques à la même fréquence, les masses étant en phase ou en opposition par rapport à l'une d'entre elles prise comme une référence.

On dit alors que l'on a affaire à un **mode propre** du système, et la fréquence d'oscillation est une **fréquence propre**. Si le système vibre suivant un mode propre, on dit qu'on le normalise en posant l'amplitude de l'un des oscillateurs égale à l'unité. Il y a autant de modes (et de fréquence) propres du système que de degrés de liberté. Dans le cas général, le mouvement du système est une combinaison linéaire des mouvements correspondant à chaque mode propre.

- **Mise en équation et solution :**

L'équation de mouvement d'un système à  $n$  degrés de libertés sont données par :

$$[M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + [K]q = F(t) \quad (IV.1)$$

La solution de ce système peut s'obtenir à partir de l'étude des vibrations libres, c'est-à-dire la superposition de solution du système sans second membre, soit :

$$[M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + [K]q = 0 \quad (IV.2)$$

Les modes sont donc les solutions propres du système (IV.2), et dans le cas générale pour éviter d'obtenir des modes complexes dont l'interprétation physique n'est pas évidente, on étudie les vibrations libres des structures non amorties, c'est-à-dire on cherche des solutions de (IV.3), tel que :

$$[M]\ddot{q} + [K]q = 0 \quad (IV.3)$$

Les solutions de (IV.3) sont harmoniques de la forme :

$$q = X \cdot \exp(j\omega t) \text{ et donc : } \dot{q} = j\omega X \cdot \exp(j\omega t) \text{ et } \ddot{q} = -\omega^2 X \cdot \exp(j\omega t)$$

En remplaçant tout ceci dans (IV.3), on obtient les équations modales :

$$-\omega^2 [M]X + [K]X = 0 \quad (IV.4)$$

Les matrices  $[M]$  et  $[K]$  sont symétriques, ce système d'ordre  $n$  possèdera  $n$  valeurs propres réelles, qu'on notera  $\lambda_i$  tel que :  $\lambda_i = \omega_i^2$  ( $\omega_i$  sont les pulsations propres).

En injectant les  $\lambda_i$  et en multipliant (IV.4) par  $[M]^{-1}$  on obtient :  $(-\lambda.[1] + [M]^{-1}[K])X = 0$

En posant :  $[M]^{-1}[K] = [L]$  on aura l'équation caractéristique (équation aux valeurs propres) :

$$(-\lambda[1] + [L])X = 0 \quad (IV.5)$$

$[L]$  est appelé matrice dynamique, et  $[1]$  la matrice unité.

Aux  $n$  valeurs propres  $\lambda_i$  correspondent  $n$  solution (ou vecteurs) propres réelles non triviales qui sont les modes propres de vibration du système non amorti, ils sont notés par :

$$x^{(1)}, \dots, x^{(n)}.$$

On appelle matrice modale  $\Phi$ , la matrice  $(n \times n)$  dont les colonnes sont constituées par les  $n$  vecteurs propres solutions de (IV.5), et on note :

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \cdot \\ x_n^i \end{bmatrix} \text{ Pour le mode } n \text{ solution du système (IV.5).}$$

- **Propriétés des modes propres :**

Du fait de la symétrie des matrices  $[K]$  et  $[M]$ , les modes propres sont orthogonaux par rapport à  $[K]$  et  $[M]$ .

Deux vecteurs propres  $\Phi_i$  et  $\Phi_j$  sont dites orthogonaux par rapport à  $[K]$  et  $[M]$  si :

$$\begin{cases} \Phi_i^T \cdot [M] \cdot \Phi_j = 0 \\ \Phi_i^T \cdot [K] \cdot \Phi_j = 0 \end{cases} \quad (IV.6)$$

Dans ce cas l'orthogonalité de la matrice modale par rapport à  $[K]$  et  $[M]$  sera conditionnée par :

$$\begin{cases} [\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] = 0 \\ [\Phi]^T \cdot [K] \cdot [\Phi] = 0 \end{cases} \quad (IV.7)$$

- **Equations découplées. solution en base modale :**

En écrivant le vecteur solution  $\{q\}$  dans la base modale tel que :  $\{q\} = [\Phi] \cdot \{Y\}$  et en remplaçant

dans (IV.3) on aura :  $[M] \ddot{q} + [K] q = 0 \Rightarrow [M] \cdot [\Phi] \cdot [\ddot{Y}] + [K] \cdot [\Phi] \cdot [Y] = 0$

En pré multipliant par  $[\Phi]^T$  on aura :

$$[\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] \cdot \{\ddot{Y}\} + [\Phi]^T \cdot [K] \cdot [\Phi] \cdot [Y] = 0 \quad (IV.8)$$

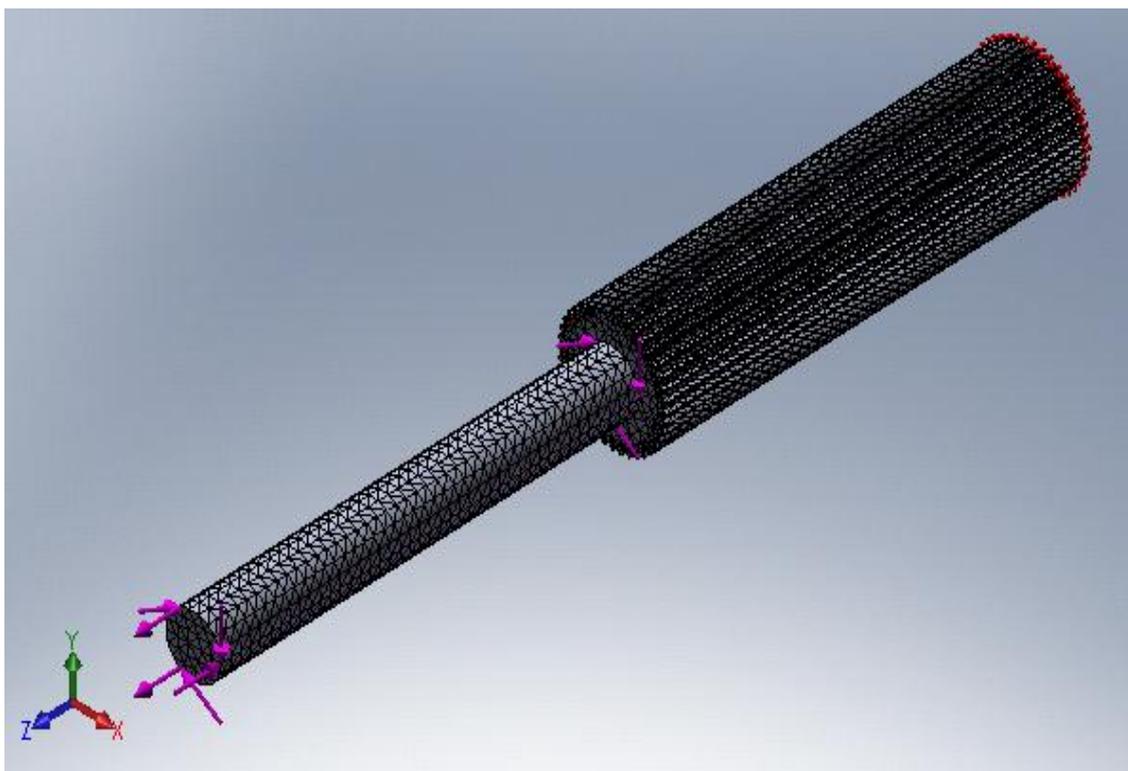
Sachant que les matrices notées :  $\begin{cases} m = [\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] \\ k = [\Phi]^T \cdot [K] \cdot [\Phi] \end{cases}$  sont diagonales, le système (IV.8)

Obtenu permet d'avoir les équations découplées en  $Y_i$  dans la base modale.

## IV-6.2. Etude des vibrations forcées

### IV-6.2.1. Arbre avec épaulement du rapport $d/D = 0.50$

Pour notre approche dynamique, nous avons choisi pour chaque type d'arbre, un seul modèle de dimension, le choix est porté sur l'arbre épaulé de rapport des diamètres  $d/D = 0.50$ , et ce à cause de la différence importante en dimension radiale entre la partie lisse et cannelée.



**Figure IV-73.** Les conditions aux limites et les chargements

- Informations sur les chargements et les déplacements imposés

**Tableau IV-16:** les déplacements imposés

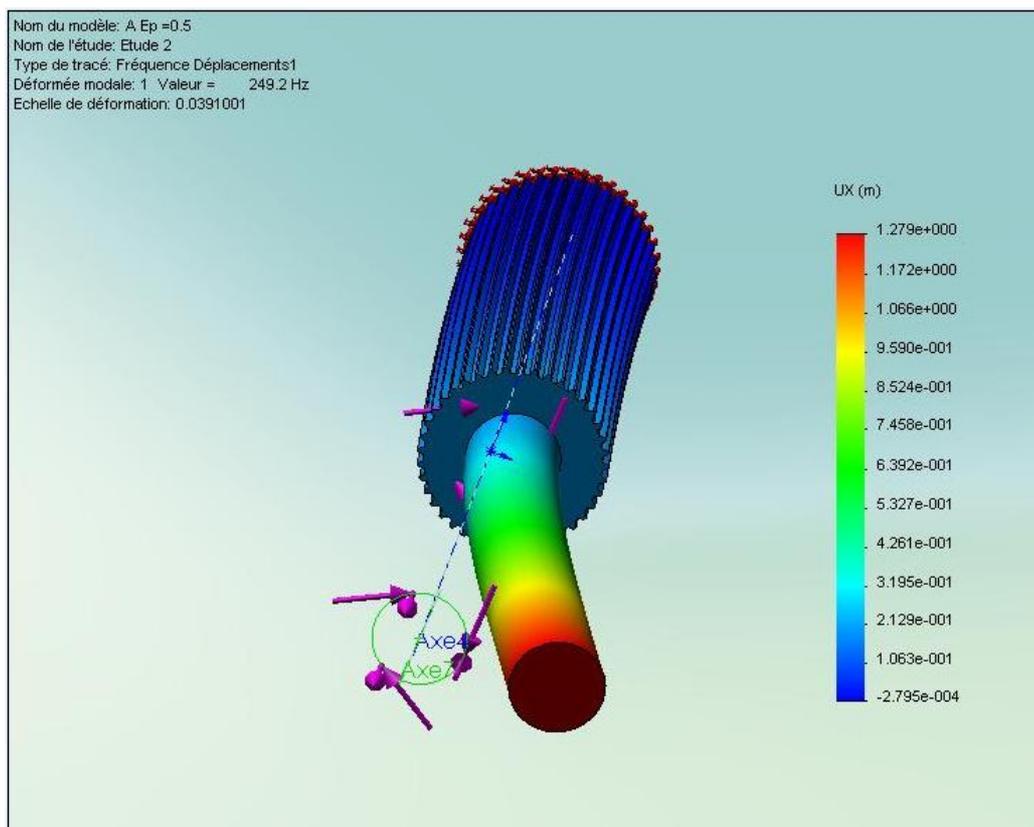
Déplacements imposés	
Déplacement imposé1 <A Ep =0.5>	sur 1 Face(s) Fixe.

**Tableau IV-17:** les chargements

Chargements		
Force-1 <A Ep =0.5>	sur 1 Face(s) appliquer un moment 5.62 N-m selon le plan de référence sélectionné Axe4 avec une distribution uniforme	Chargement séquentiel
Force-2 <A Ep =0.5>	sur 1 Face(s) appliquer un moment 5.62 N-m selon le plan de référence sélectionné Axe7 avec une distribution uniforme	Chargement séquentiel

- Résultats obtenus

Ci-dessous sont présentés les 3 premiers modes de vibrations forcés, obtenus par l'analyse fréquentielle réalisée par COSMOSWorks.



**Figure IV-74.** Déplacement au mode 1 suivant -X-

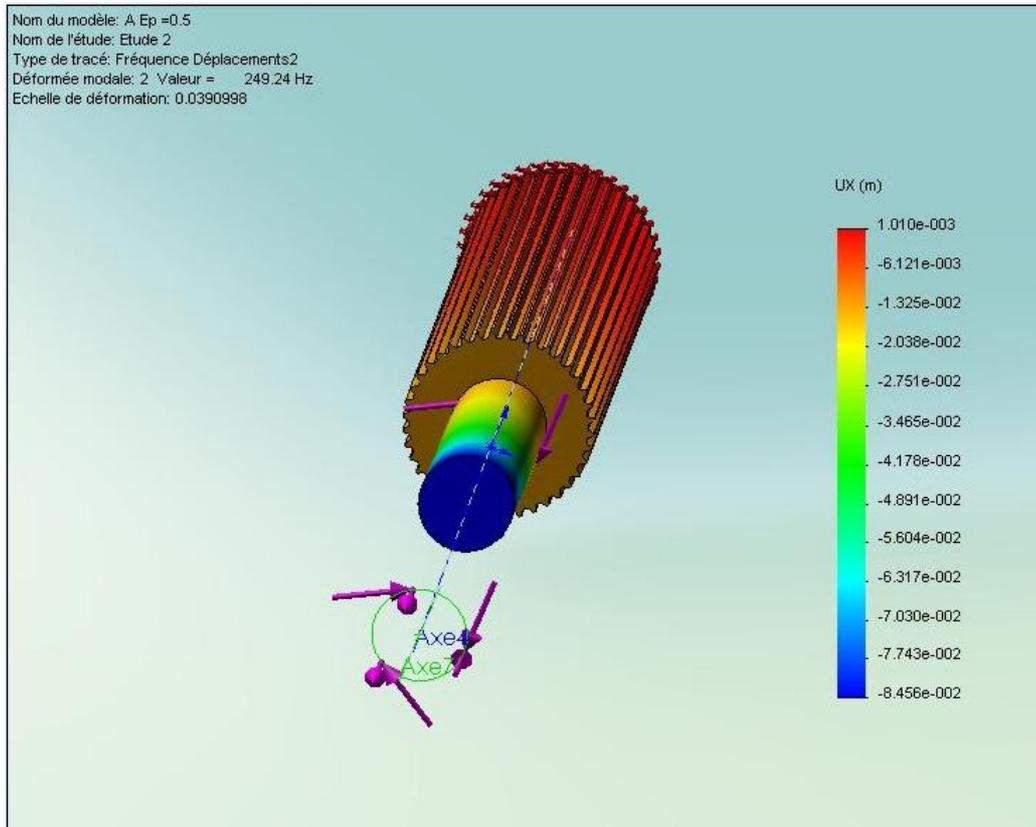


Figure IV-75. Déplacement au mode 2 suivant -X-

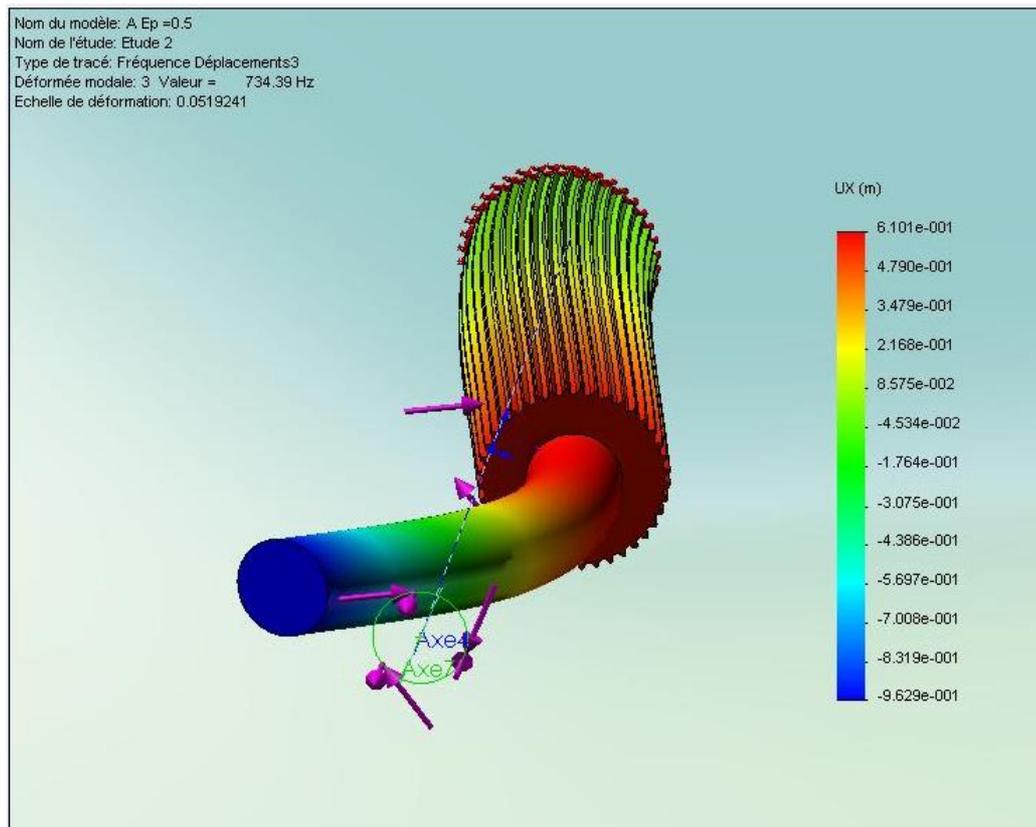


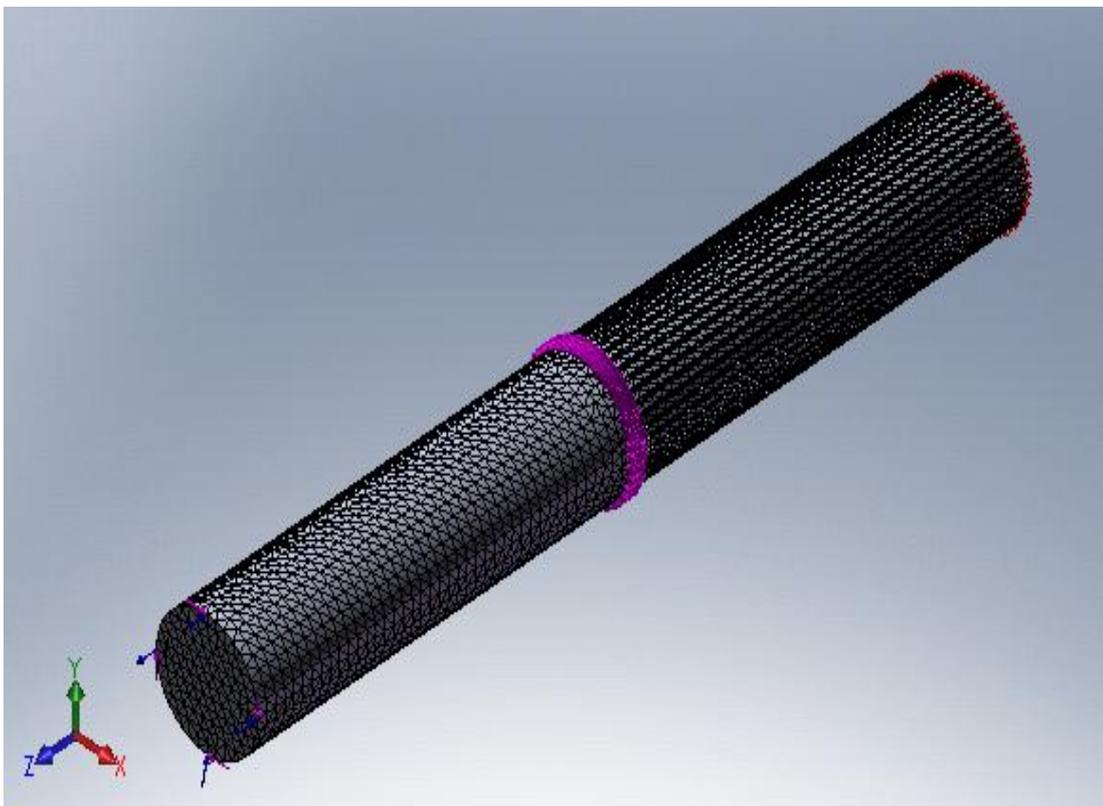
Figure IV-76. Déplacement au mode 3 suivant -X-

**Tableau IV-19:** liste des fréquences pour chaque Mode.

Liste des modes		
Mode	Fréquence (Hz)	Temps (S)
1	249.2	0.0040128
2	249.24	0.0040122
3	734.39	0.0013617
4	734.45	0.0013616
5	2091.4	0.00047814

#### IV-6.2.2. Arbre partiellement cannelé $R_{\text{fraise1}} = 50\text{mm}$

Concernant l'arbre partiellement cannelé, nous avons considéré le cas de l'arbre avec le plus grand diamètre de fraise, à savoir 100 mm.

**Figure IV-80.** Les conditions aux limites et les chargements

- Informations sur les chargements et les déplacements imposés

**Tableau IV-20:** les Déplacements imposés

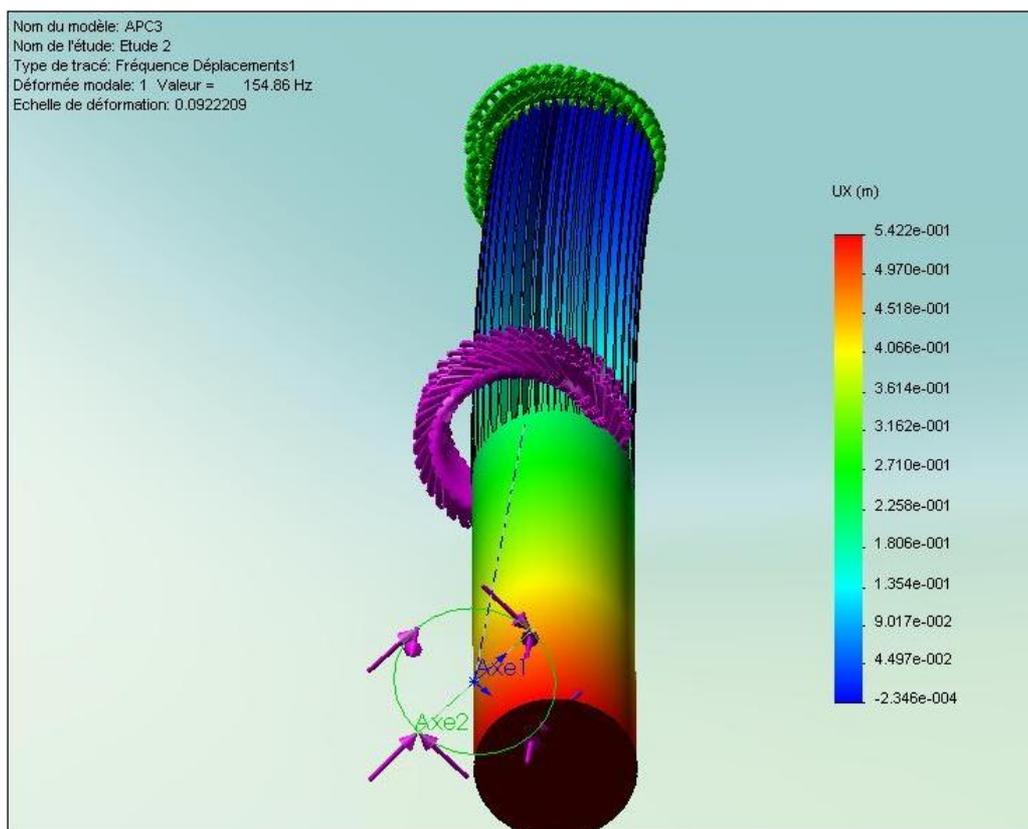
Déplacements imposés	
Déplacement imposé1 <APC3 > = R=0.50 mm	sur 1 Face(s) Fixe

**Tableau IV-21:** les chargements

Chargements		
Force-1 <APC3 >	sur 1 Face(s) appliquer un moment 7.306 N-m selon le plan de référence sélectionné <b>Axe1</b> avec une distribution uniforme	Chargement séquentiel
Force-2 <APC3 >	sur 1 Face(s) appliquer un moment 7.306 N-m selon le plan de référence sélectionné <b>Axe2</b> avec une distribution uniforme	Chargement séquentiel

- Résultats obtenus

Ci-dessous sont présentés les 3 premiers modes de vibrations forcés, obtenus par l'analyse fréquentielle réalisée par COSMOSWorks.



**Figure IV-81.** Déplacement au mode 1 suivant -X-

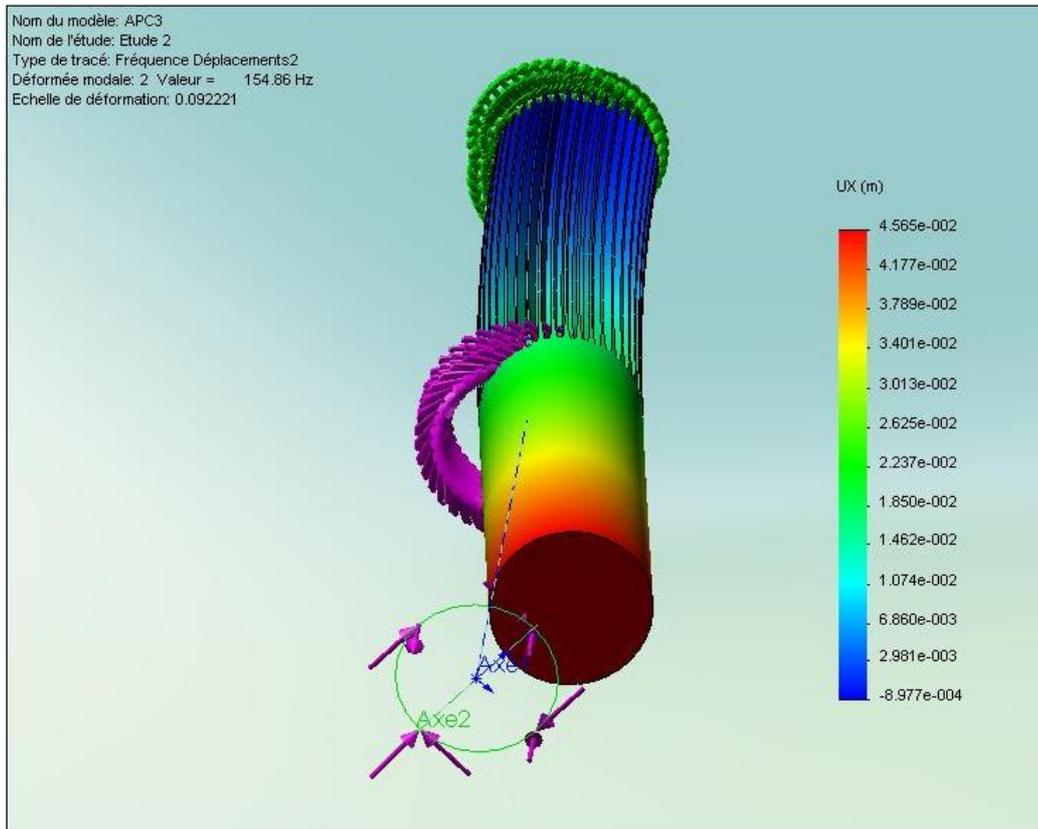


Figure IV-82. Déplacement au mode 2 suivant -X-

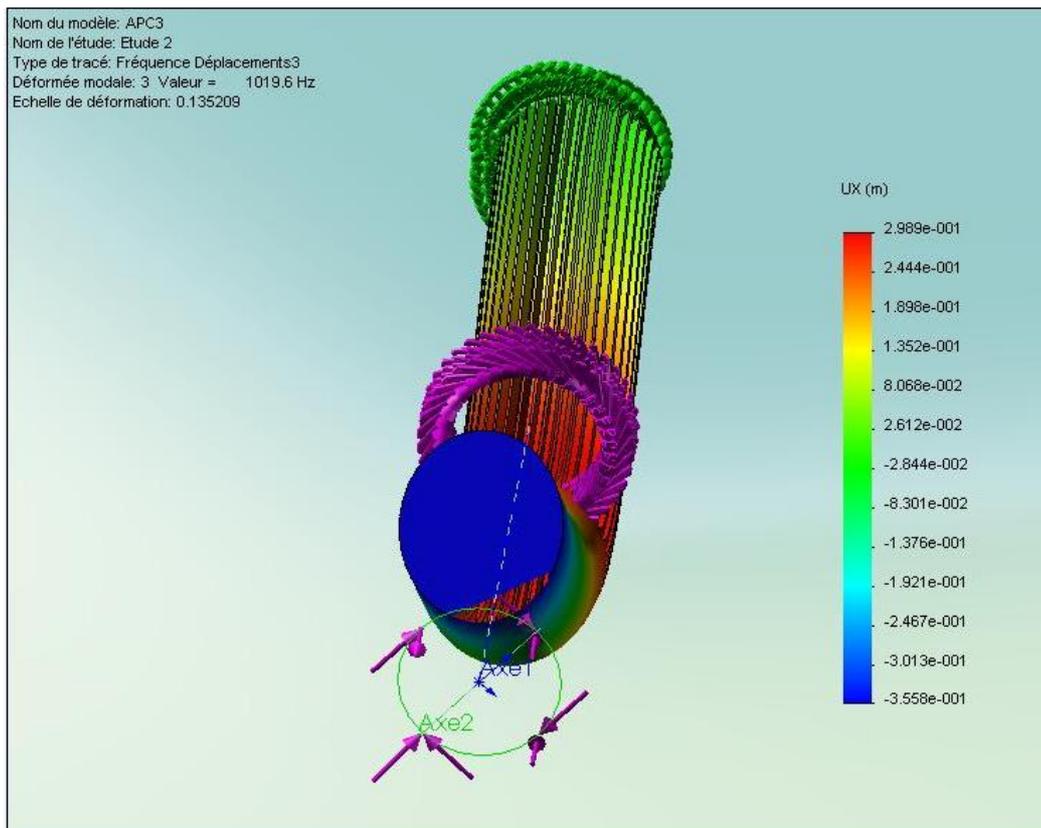
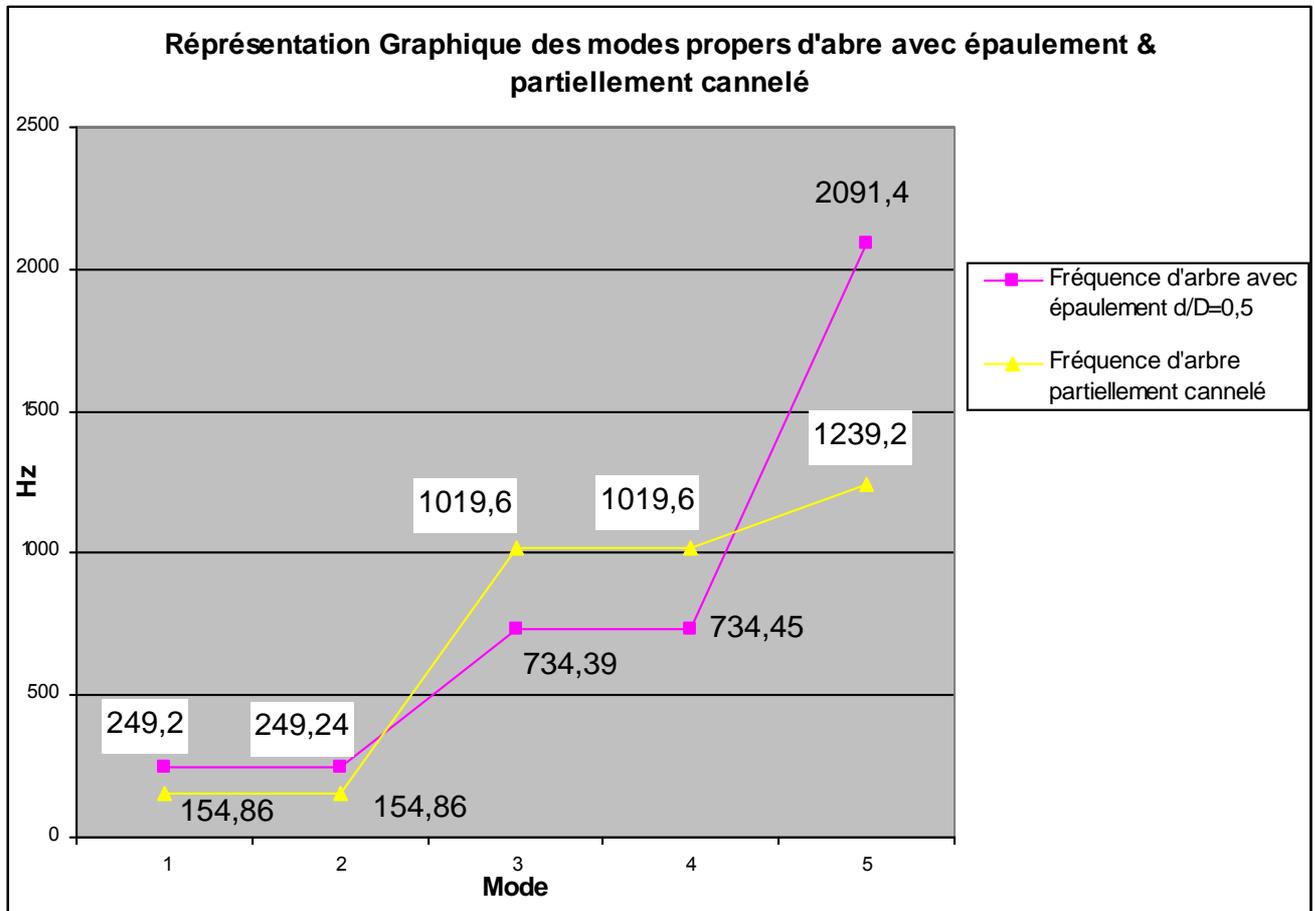


Figure IV-83. Déplacements au mode 3 suivant -X-

C- Fréquences forcés (*Modes forcés*)

**Tableau IV-23:** liste des fréquences pour chaque Mode.

Liste des modes		
Mode	Fréquence (Hz)	Temps (S)
1	154.86	0.0064574
2	154.86	0.0064574
3	1019.6	0.00098076
4	1019.6	0.00098075
5	1239.2	0.00080697



**Figure IV-87.** Fréquences calculées des modes propres d'arbre avec épaulement  $d/D=0.50$  & partiellement cannelé de fraise  $R=50\text{mm}$

### V-1. Interprétation et comparaison des résultats

L'objectif de cette partie est de vérifier la validité des résultats de notre modèle éléments finis 3D vis à vis du comportement d'une cannelure.

#### V-1.1. Modèles d'efforts sur l'arbre avec épaulement

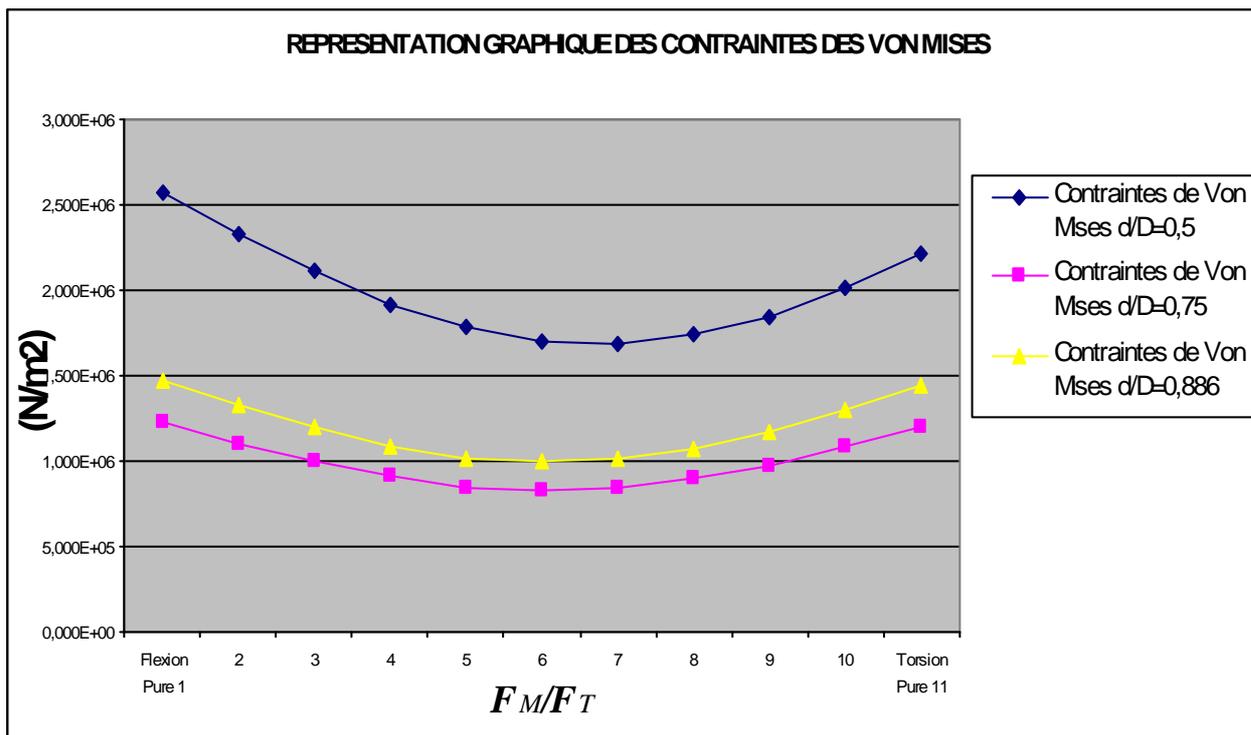


Figure V-01. Représentation Graphiques les courbes de contrainte de Von Mises Pour les arbres avec épaulement en fonction de  $F_M/F_T$

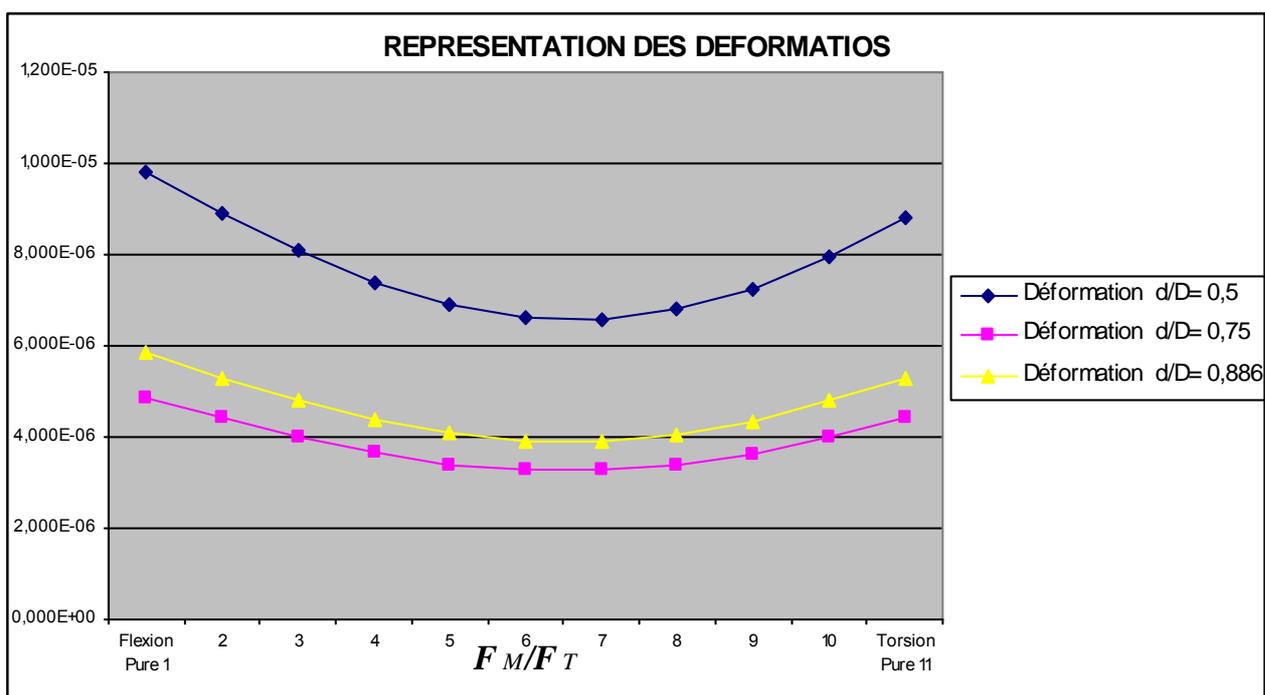


Figure V-02. Représentation Graphiques les courbes de Déformations Pour les arbres avec épaulement en fonction de  $F_M/F_T$

Trois modèles d'élément fini d'un arbre avec épaulement cannelé ont été construits en utilisant les rapports ( $d/D_0$ ) de 0.500, 0.750 et 0.886. Chaque modèle a été soumis à des charges variées de flexion pure, de torsion pure ainsi que plusieurs combinaisons de flexion et torsion.

Les figures IV-16 à IV-21 décrivent les efforts produits dans l'arbre de rapport  $d/D=0.500$ . La répartition des contraintes de Von Mises est relativement uniforme le long de l'arbre, une différence d'effort apparaît cependant juste avant et après l'épaulement, et ceci à cause de la modification de la géométrie ainsi que de la présence des cannelures au niveau supérieur de l'arbre.

**Tableau V-01.** : Les résultats obtenus de l'arbre avec épaulement ( $d/D=0.500$ )

➤ **Flexion pure ( $F_M/F_T=224.8/0$ )**

Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	27.7548 N/m <sup>2</sup> Noeud: 19358	(2.02128 mm, 23.5462 mm, -121.487 mm)	2.57655e+006 N/m <sup>2</sup> Noeud: 125542	(-16.411 mm, 0 mm, 2.97619 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 891	(3.3119 mm, 30.4992 mm, -250 mm)	2.60676e-005 m Noeud: 302	(-16.411 mm, 2.00977e-015 mm, 250 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	2.38505e-010 Elément: 10412	(2.01226 mm, -1.76372 mm, -149.732 mm)	9.81723e-006 Elément: 52206	(-14.8399 mm, -3.09235 mm, 2.48175 mm)

➤ **Torsion pure ( $F_M/F_T=0/224.8$ )**

Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	521.449 N/m <sup>2</sup> Noeud: 87116	(0.00527164 mm, 0.0596121 mm, -250 mm)	2.2166e+006 N/m <sup>2</sup> Noeud: 125608	(2.84974 mm, 16.1617 mm, 2.97619 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 891	(3.3119 mm, 30.4992 mm, -250 mm)	2.07703e-006 m Noeud: 303	(-15.4213 mm, 5.61289 mm, 250 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	2.62526e-009 Elément: 5115	(0.0225542 mm, -0.0566462 mm, -217.384 mm)	8.79153e-006 Elément: 57605	(-8.95135 mm, 12.2698 mm, 2.10024 mm)

➤ **Flexion & Torsion combinée ( $F_M/F_T = 112,4/112,4$ )**

Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	1667.13 N/m <sup>2</sup> Noeud: 123362	(0.154765 mm, -31.2689 mm, -1.26902 mm)	1.69853e+006 N/m <sup>2</sup> Noeud: 125542	(-16.411 mm, 0 mm, 2.97619 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 891	(3.3119 mm, 30.4992 mm, -250 mm)	1.39654e-005 m Noeud: 125620	(-2.63909e-015 mm, 16.411 mm, 250 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	4.75927e-009 Elément: 43299	(-0.126693 mm, -32.055 mm, -2.12261 mm)	6.61046e-006 Elément: 52206	(-14.8399 mm, -3.09235 mm, 2.48175 mm)

Les efforts maximaux ainsi que la contrainte maximale de Von Mises, se produisent dans la zone entre  $Z = +2.976$  et  $+250$  mm dans la section non cannelée de l'arbre, et pour le cas de charge ( $F_M/F_T = 224.8/0$ ), donc pour une flexion pure, ils ont plus importants que ceux produits dans la section cannelée. L'effort maximal à travers l'épaulement d'arbre diminue pour atteindre finalement un minimum local à l'emplacement  $Z=-1.269$  dans la section cannelée de l'arbre.

**Tableau V-02.** : Les résultats obtenus de l'arbre avec épaulement ( $d/D=0.75$ )

➤ **Flexion pure ( $F_M/F_T = 224.8/0$ )**

Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	34.8962 N/m <sup>2</sup> Noeud: 54215	(1.16863 mm, 25.6344 mm, -100.757 mm)	1.22178e+006 N/m <sup>2</sup> Noeud: 149224	(-24.4496 mm, 2.85774 mm, 2.97619 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 1148	(3.3119 mm, 30.4992 mm, -250 mm)	1.31468e-005 m Noeud: 431	(-24.616 mm, 3.01459e-015 mm, 250 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	1.15708e-010 Elément: 35182	(1.16834 mm, 9.31714 mm, -106.977 mm)	4.87872e-006 Elément: 18379	(-23.3789 mm, -3.6134 mm, 2.00153 mm)

➤ **Flexion & Torsion combinée ( $F_M/F_T = 112,4/112,4$ )**

Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	1950.74 N/m <sup>2</sup> Noeud: 110955	(2.83985e-015 mm, 32.8177 mm, -8.92857 mm)	828837 N/m <sup>2</sup> Noeud: 152029	(23.9525 mm, -5.67684 mm, 0 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 1148	(3.3119 mm, 30.4992 mm, -250 mm)	7.21491e-006 m Noeud: 149356	(-1.43129 mm, 24.5744 mm, 250 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	1.11641e-008 Elément: 15558	(0.121456 mm, -31.0328 mm, -0.5199 mm)	3.26342e-006 Elément: 18371	(-22.0732 mm, -8.79619 mm, 2.13502 mm)

➤ **Torsion pure ( $F_M/F_T = 0/224.8$ )**

Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	186.738 N/m <sup>2</sup> Noeud: 829	(2.15402 mm, 2.90703e-009 mm, 250 mm)	1.19742e+006 N/m <sup>2</sup> Noeud: 145436	(-7.05995 mm, -23.5819 mm, 0 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 1148	(3.3119 mm, 30.4992 mm, -250 mm)	1.40981e-006 m Noeud: 149387	(-23.1315 mm, 8.41917 mm, 250 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	1.19557e-009 Elément: 39863	(-1.14627 mm, -1.84644 mm, 249.023 mm)	4.40933e-006 Elément: 29530	(-0.487233 mm, 23.8131 mm, 1.93292 mm)

Pour les arbres de rapport  $d/D=0.750$ , le même phénomène est observé, à part la position des contraintes maximales qui se situent à  $Z = 0$  et un niveau minimal entre  $Z = -2.97\text{mm}$  et  $Z = 0$  dans la section cannelée de l'arbre.

**Tableau V-03.** : Les résultats obtenus de l'arbre avec épaulement ( $d/D=0.886$ )

➤ **Flexion pure ( $F_M/F_T = 224.8/0$ )**

Nom	Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
Contraintes1	VON: contrainte de von Mises	19.8553 N/m <sup>2</sup> Noeud: 31528	(-0.00774459 mm, 20.4532 mm, -115.419 mm)	894761 N/m <sup>2</sup> Noeud: 163722	(-28.9483 mm, 2.76423 mm, 0 mm)
Déplacements1	URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 1192	(3.3119 mm, 30.4992 mm, -250 mm)	1.19699e-005 m Noeud: 476	(-29.08 mm, 3.56127e-015 mm, 250 mm)
Déformations1	ESTRN: Déformation équivalente	8.74909e-011 Elément: 12863	(0.142351 mm, 5.9544 mm, -101.262 mm)	3.49525e-006 Elément: 45748	(-27.3048 mm, -7.61916 mm, 2.1806 mm)

➤ **Flexion & Torsion combinée ( $F_M/F_T = 112,4/112,4$ )**

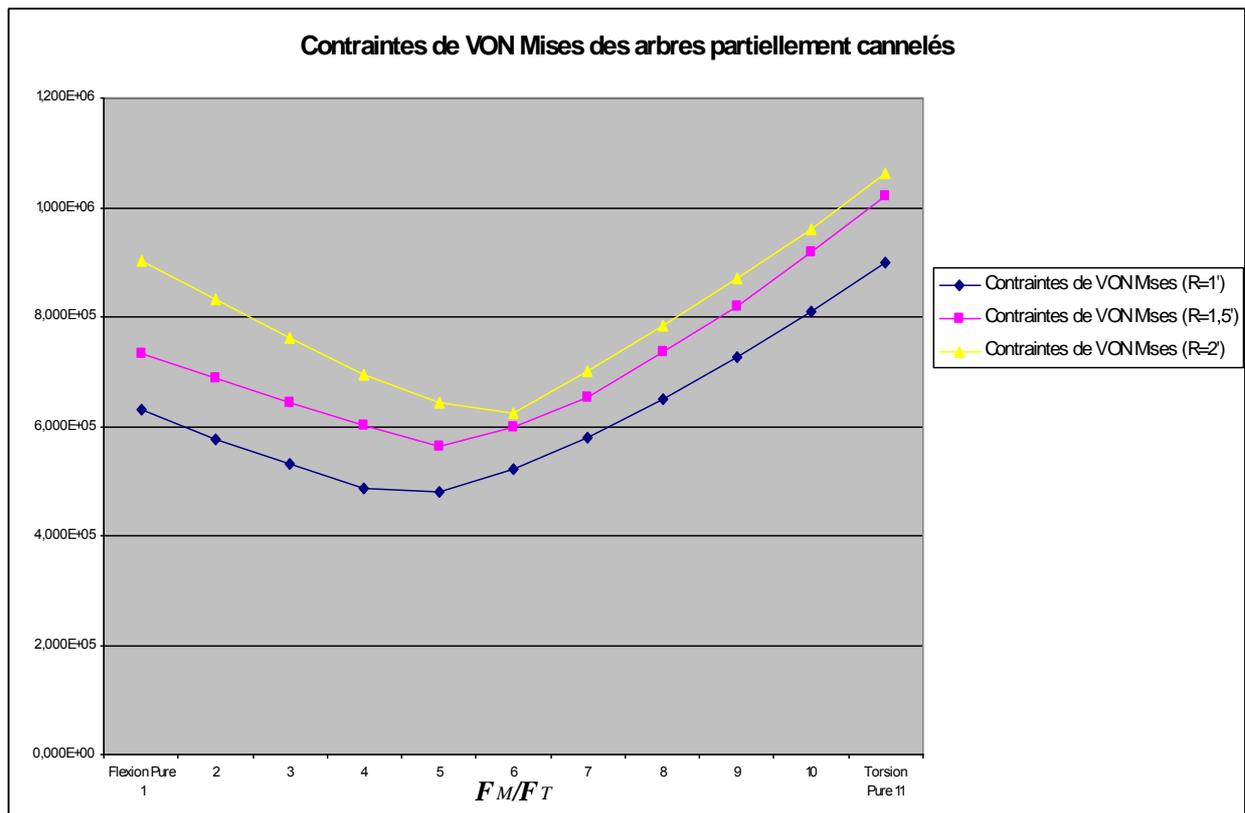
Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	2340.88 N/m <sup>2</sup> Noeud: 110955	(2.83985e-015 mm, 32.8177 mm, -8.92857 mm)	994604 N/m <sup>2</sup> Noeud: 152029	(23.9525 mm, -5.67684 mm, 0 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 1148	(3.3119 mm, 30.4992 mm, -250 mm)	8.65789e-006 m Noeud: 149356	(-1.43129 mm, 24.5744 mm, 250 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	1.3397e-008 Elément: 15558	(0.121456 mm, -31.0328 mm, -0.5199 mm)	3.91611e-006 Elément: 18371	(-22.0732 mm, -8.79619 mm, 2.13502 mm)

➤ **Torsion pure ( $F_M/F_T = 0/224.8$ )**

Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	239.388 N/m <sup>2</sup> Noeud: 829	(2.15402 mm, 2.90703e-009 mm, 250 mm)	1.43642e+006 N/m <sup>2</sup> Noeud: 145436	(-7.05995 mm, -23.5819 mm, 0 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 1148	(3.3119 mm, 30.4992 mm, -250 mm)	1.69182e-006 m Noeud: 433	(-21.9977 mm, 11.0476 mm, 250 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	1.50796e-009 Elément: 39863	(-1.14627 mm, -1.84644 mm, 249.023 mm)	5.29067e-006 Elément: 29530	(-0.487233 mm, 23.8131 mm, 1.93292 mm)

Pour l'arbre  $d/D=0.886$ , il y a un comportement attendu pour la contrainte de Von Mises, comme illustré dans les figures IV-34 à IV-39. celle-ci passe par un maximum local près de l'épaulement  $Z = 0$  mm pour le cas de charge ( $F_M/F_T = 0/224.8$ ) qui est la torsion pure, et on constate que les contraintes nominales dans la section non cannelée sont plus importants que dans la section cannelée.

**V-1.2. Modèles d'efforts dans un arbre partiellement cannelé**



**Figure V-03.** Représentation Graphiques les courbes de contrainte de Von Mises Pour les arbres partiellement cannelés en fonction de rayon de fraise

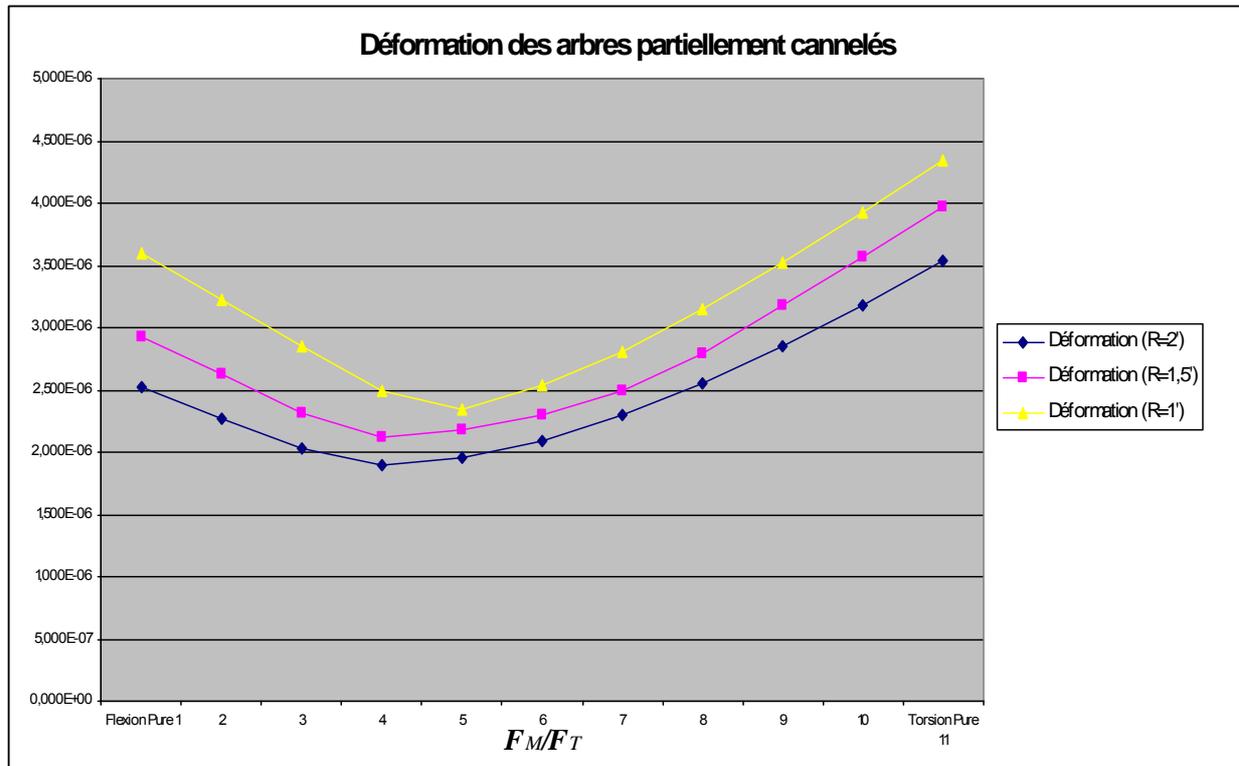


Figure V-04. Représentation Graphiques les courbes de Déformations Pour les arbres partiellement cannelés en fonction de rayon de fraise

De la même manière que précédemment, trois modèles d'élément fini de l'arbre partiellement cannelé ont été construits avec les fraises de rayons  $R_{1,2,3} = 25\text{mm}$ ,  $38\text{mm}$  et  $50\text{mm}$ . Chaque modèle était soumis à charges appliquées qui varient de flexion pure à torsion pure et plusieurs combinaisons de flexion et torsion. Les graphiques illustrent les rapports entre la contrainte de Von Mises et le rayon de la fraise ( $R$ ) de chacun des arbres partiellement cannelés.

Tableau V-04. : Les résultats obtenus de l'arbre partiellement cannelé ( $R_1=25\text{mm}$ )

➤ Flexion pure ( $F_M/F_T=224.8/0$ )

Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	78.7986 N/m <sup>2</sup> Noeud: 14339	(-0.414605 mm, 20.5828 mm, -370.534 mm)	630593 N/m <sup>2</sup> Noeud: 3454	(32.5588 mm, 4.14434 mm, -500 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 1900	(1 mm, 32.8063 mm, -500 mm)	1.04354e-005 m Noeud: 593	(32.8215 mm, 0 mm, 0 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	2.84423e-010 Elément: 31859	(-0.416114 mm, -26.1136 mm, -365.844 mm)	2.52249e-006 Elément: 82887	(32.2881 mm, 2.9425 mm, -497.899 mm)

La distribution de la contrainte de Von Mises dans l'arbre partiellement cannelé de rayon de la fraise  $R_f=25\text{mm}$  est représentée dans les figures IV-45 à IV-50. Pour le premier cas de charge ( $F_M/F_T = 224.8/0$ ), la contrainte de Von Mises prend une valeur nominale jusqu'à l'emplacement  $Z^*=-500\text{mm}$  dans la section non cannelée, puis commence alors à augmenter brusquement à une valeur maximale à l'emplacement  $Z^*= 250\text{mm}$  dans la section cannelée.

La valeur maximale se produit pour le cas de charge ( $F_M/F_T= 0/224.8$ ), ou quand les charges de torsion sont proportionnellement plus grand que ceux de flexion, cela indique que la géométrie de la dent inachevée a beaucoup plus d'effet sur la contrainte, quand l'arbre est soumis à la torsion.

➤ **Flexion & Torsion combinée ( $F_M/F_T = 112,4/112,4$ )**

Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	1759.79 N/m <sup>2</sup> Noeud: 56141	(-0.39616 mm, 0.569086 mm, -94.8709 mm)	522406 N/m <sup>2</sup> Noeud: 141408	(31.179 mm, -4.93747 mm, -369.048 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 1900	(1 mm, 32.8063 mm, -500 mm)	5.84656e-006 m Noeud: 584	(2.00974e-015 mm, 32.8215 mm, 0 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	7.50755e-009 Elément: 29113	(-0.22747 mm, 0.000940356 mm, -66.5186 mm)	2.08586e-006 Elément: 62652	(30.9925 mm, -4.7338 mm, -367.568 mm)

➤ **Torsion pure ( $F_M/F_T = 0/224.8$ )**

Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	56.6019 N/m <sup>2</sup> Noeud: 1135	(0.676565 mm, -2.43665e-007 mm, 0 mm)	897910 N/m <sup>2</sup> Noeud: 141408	(31.179 mm, -4.93747 mm, -369.048 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 1900	(1 mm, 32.8063 mm, -500 mm)	1.35489e-006 m Noeud: 166452	(-26.8858 mm, 18.8256 mm, 0 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	5.01009e-010 Elément: 44402	(0.331256 mm, 0.669876 mm, -3.2257 mm)	3.53732e-006 Elément: 22260	(4.65705 mm, 31.0038 mm, -486.3 mm)

**Tableau V-05.** : Les résultats obtenus de l'arbre partiellement cannelé ( $R_2=38\text{mm}$ )➤ **Flexion pure ( $F_M/F_T=224.8/0$ )**

Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	584.248 N/m <sup>2</sup> Noeud: 67801	(-0.398404 mm, -0.256647 mm, -160.522 mm)	688417 N/m <sup>2</sup> Noeud: 2918	(32.6069 mm, -3.74698 mm, -500 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 1994	(24.1771 mm, 22.1972 mm, -500 mm)	1.04645e-005 m Noeud: 133769	(13.871 mm, 29.7464 mm, 0 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	2.27007e-009 Elément: 6303	(-0.425708 mm, -0.645639 mm, -125.405 mm)	2.62313e-006 Elément: 45506	(32.0791 mm, -2.21963 mm, -497.635 mm)

➤ **Flexion & Torsion combinée ( $F_M/F_T = 112,4/112,4$ )**

Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	2150.8 N/m <sup>2</sup> Noeud: 67801	(-0.398404 mm, -0.256647 mm, -160.522 mm)	597834 N/m <sup>2</sup> Noeud: 125868	(29.7172 mm, -5.41547 mm, -242.173 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 1994	(24.1771 mm, 22.1972 mm, -500 mm)	6.56491e-006 m Noeud: 589	(2.00974e-015 mm, 32.8215 mm, 0 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	7.55449e-009 Elément: 14499	(-0.716723 mm, 2.60611 mm, -41.2295 mm)	2.298e-006 Elément: 48561	(29.4314 mm, 4.14205 mm, -242.721 mm)

➤ **Torsion pure ( $F_M/F_T=0/224.8$ )**

Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	46.854 N/m <sup>2</sup> Noeud: 1144	(0.676565 mm, -2.43665e-007 mm, 0 mm)	1.02103e+006 N/m <sup>2</sup> Noeud: 105551	(-4.58536 mm, -28.9508 mm, -324.405 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 1994	(24.1771 mm, 22.1972 mm, -500 mm)	1.69431e-006 m Noeud: 133746	(29.7464 mm, 13.871 mm, 0 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	2.21754e-010 Elément: 77134	(0.0925409 mm, -0.181097 mm, -3.20803 mm)	3.97036e-006 Elément: 52423	(-13.6892 mm, 25.6598 mm, -354.931 mm)

Le comportement semblable est montré dans les figures IV-54 à IV-59 pour le rayon de fraise  $R_2=38\text{mm}$  de l'arbre partiellement cannelé. La contrainte maximale de Von Mises est plus grande que la contrainte nominale dans la section non cannelée, de même, il y a deux sommets notables qui apparaissent, le plus petit est près de l'emplacement  $Z^*=-324.405\text{mm}$  dans la section non cannelée, et le plus grand sommet à l'emplacement  $Z^*=-500\text{mm}$  dans la section cannelée.

**Tableau V-06.** : Les résultats obtenus de l'arbre partiellement cannelé ( $R_3=50\text{ mm}$ )

➤ **Flexion pure ( $F_M/F_T=224.8/0$ )**

Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	148.341 N/m <sup>2</sup> Noeud: 39451	(-0.354071 mm, 17.5174 mm, -325.79 mm)	903167 N/m <sup>2</sup> Noeud: 3834	(32.7605 mm, 2 mm, -500 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 2112	(-2 mm, 32.7605 mm, -500 mm)	1.35686e-005 m Noeud: 621	(32.8215 mm, 0 mm, 0 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	8.95676e-010 Elément: 10651	(-0.365387 mm, 14.3425 mm, -364.643 mm)	3.59946e-006 Elément: 13605	(31.9436 mm, 2.64554 mm, -497.832 mm)

➤ **Flexion & Torsion combinée ( $F_M/F_T = 112,4/112,4$ )**

Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	2209.84 N/m <sup>2</sup> Noeud: 50131	(-0.439119 mm, -0.908062 mm, -48.2765 mm)	624769 N/m <sup>2</sup> Noeud: 89695	(22.4935 mm, -16.3425 mm, -494.048 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 2112	(-2 mm, 32.7605 mm, -500 mm)	7.75807e-006 m Noeud: 612	(2.00974e-015 mm, 32.8215 mm, 0 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	9.69038e-009 Elément: 3223	(-0.630616 mm, 7.54291 mm, -31.4715 mm)	2.54057e-006 Elément: 29281	(-26.3967 mm, 8.15501 mm, -289.611 mm)

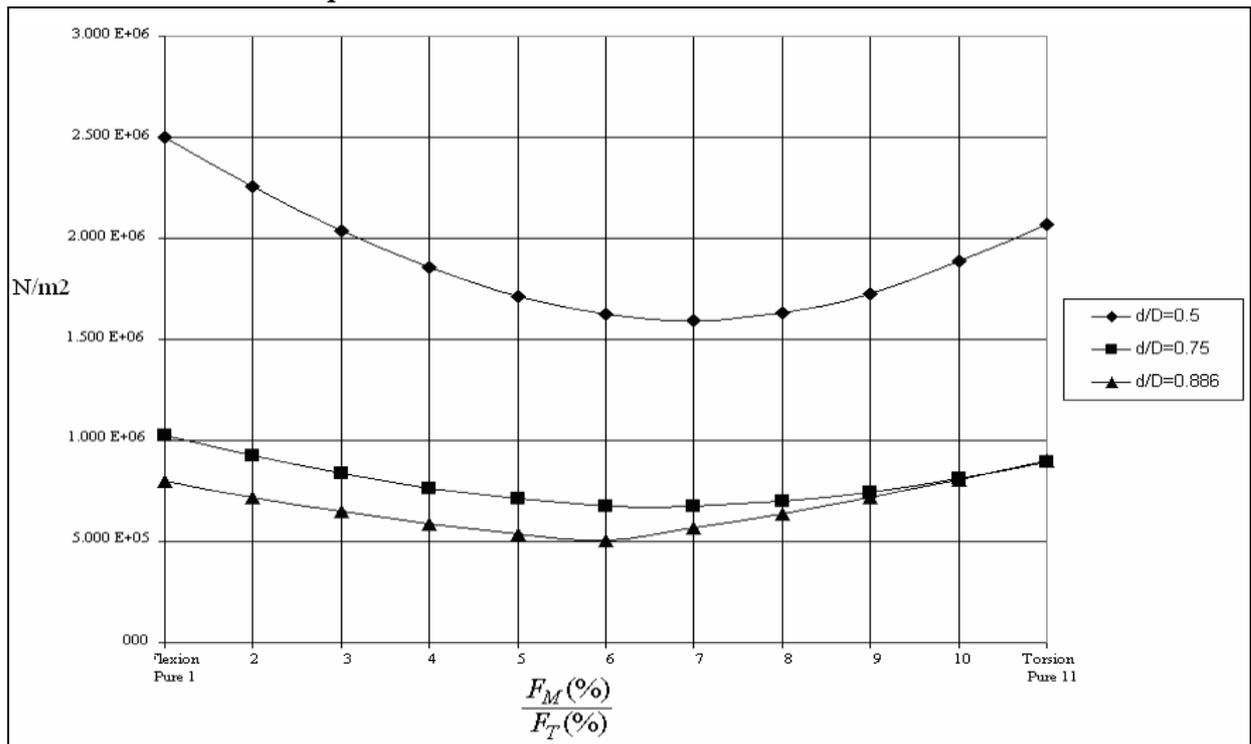
Dans les figures IV-63 à IV-68, le phénomène maximal double qui s'est produit dans les modèles antérieurs se produit pour un rayon de fraise  $R = 50\text{mm}$ . La contrainte Von Mises passe par un plus petit sommet localisé près de l'emplacement  $Z^*=-500$  avant de passer par un plus grand près de l'emplacement  $Z^*=-494.048\text{ mm}$  dans la section cannelée de l'arbre. Sa valeur maximale qui se produit pour le cas de charge ( $F_M/F_T = 0/224.8$ ) se situe près de  $Z^*=-494.048\text{mm}$  emplacement dans la portion de la section non cannelée de l'arbre. Cette valeur est aussi plus importante que l'effort nominal dans la section non cannelée de l'arbre.

➤ **Torsion pure ( $F_M/F_T = 0/224.8$ )**

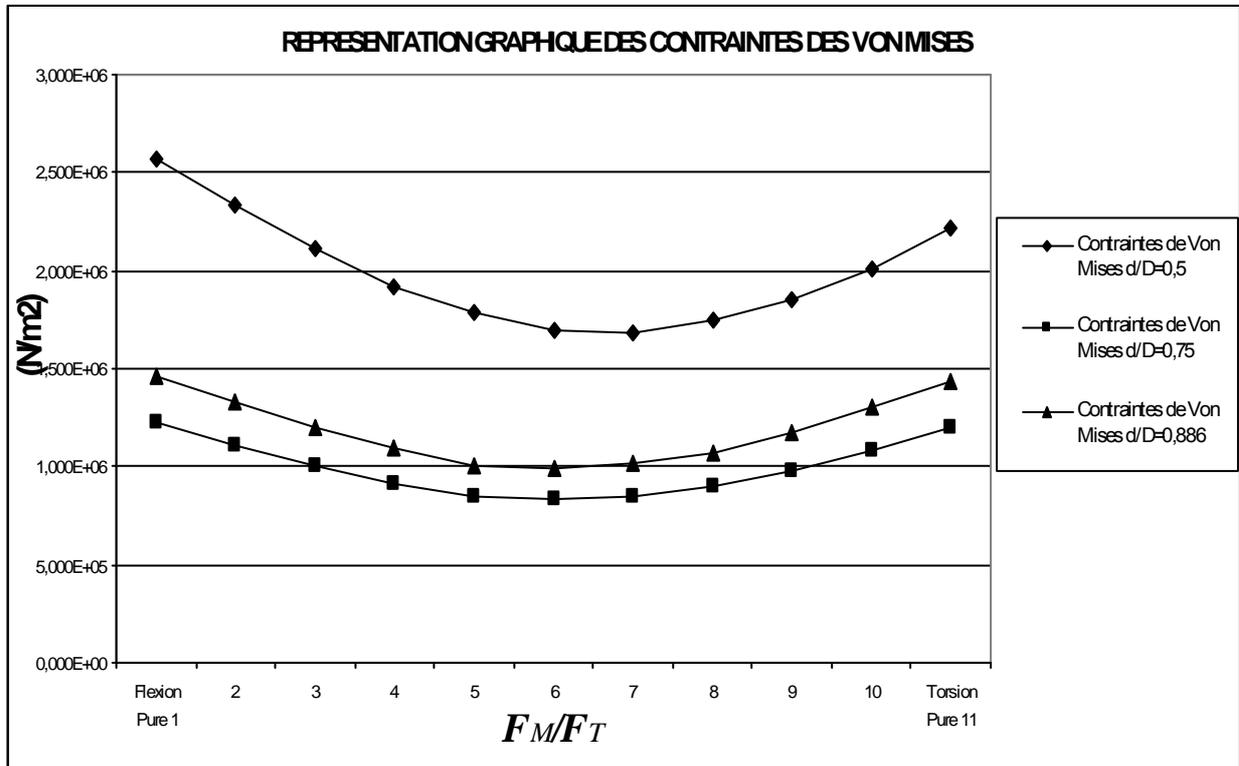
Type	Min	Emplacement	Max	Emplacement
VON: contrainte de von Mises	65.546 N/m <sup>2</sup> Noeud: 1173	(0.676565 mm, -2.43665e-007 mm, 0 mm)	1.06262e+006 N/m <sup>2</sup> Noeud: 105155	(4.34943 mm, 27.4612 mm, -494.048 mm)
URES: Déplacement résultant	0 m Noeud: 2112	(-2 mm, 32.7605 mm, -500 mm)	2.05637e-006 m Noeud: 116883	(29.7464 mm, 13.871 mm, 0 mm)
ESTRN: Déformation équivalente	3.23024e-010 Elément: 74509	(0.165546 mm, 0.576625 mm, -3.23327 mm)	4.34738e-006 Elément: 29281	(-26.3967 mm, 8.15501 mm, -289.611 mm)

**V-2. Validation des résultats**

**V-2.1. Arbres Avec Epaulements**



**Figure V-05.** Contraintes de Von Mises maximal pour les arbres avec épaulement  
En fonction de  $F_M/F_T$  [15]



**Figure V-06.** Contraintes de Von Mises maximal obtenus pour les arbres avec épaulement  
En fonction de  $F_M/F_T$

La distribution des contraintes maximales pour chaque cas de charge dans les arbres avec épaulement est représentée sur la figure V-05 et V-06. Les valeurs maximales se produisent à plusieurs emplacements situés entre  $Z=0$  à  $Z=+250$ mm.

Dans le cas de l'arbre avec épaulement, l'amplitude de diminution de ces contraintes maximales avec le rapport  $d/D$  montre que le plus petit rapport  $d/D=0.500$  possède les plus importantes contraintes des trois modèles pour les deux études théorique et numérique. Ces contraintes ont tendance à se produire quand les contraintes de flexion sont plus grandes que les contraintes de torsion. L'arbre épaulé  $d/D=0.886$  présente l'exception à tout ceci, car la torsion devient plus prédominante [15].

Cependant, d'après la figure IV-06 l'amplitude de diminution des contraintes minimales avec le rapport  $d/D$  montre que l'arbre de rapport  $d/D=0.750$  possède les plus petites contraintes des trois modèles.

V-2.2. Arbres Partiellement Cannelés

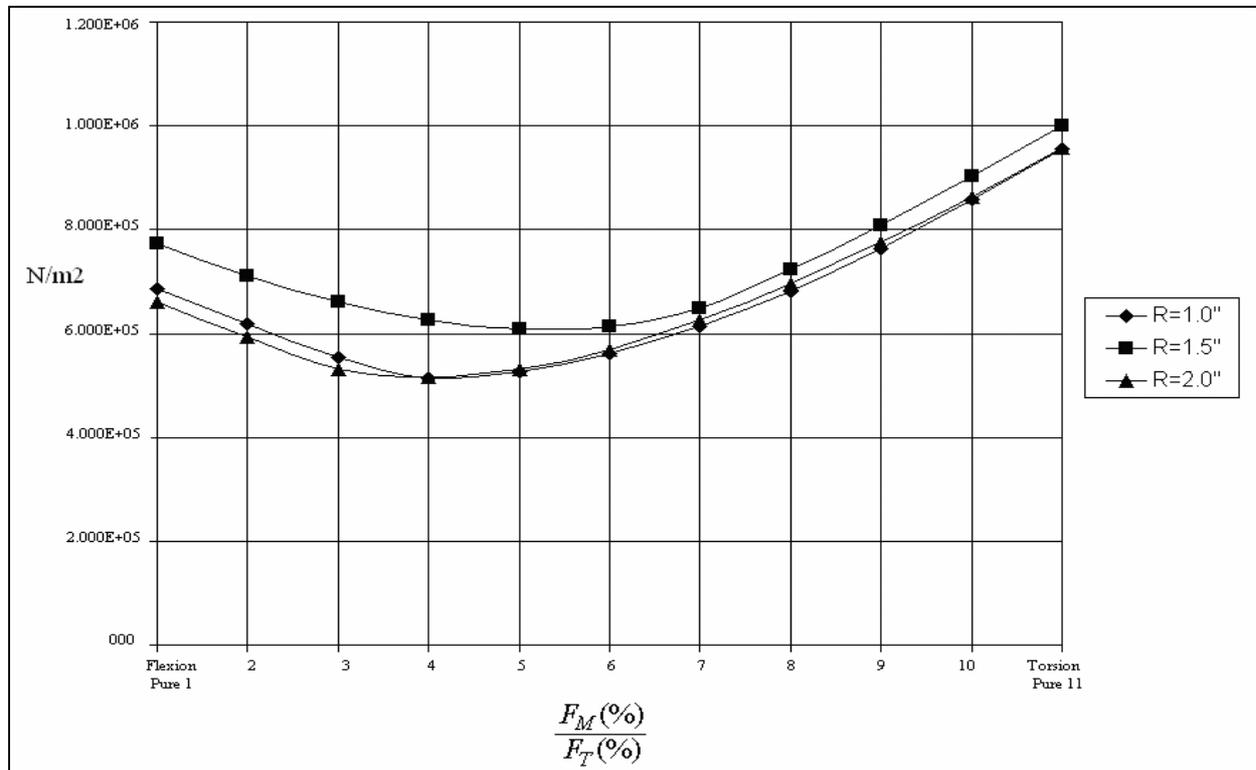


Figure V-07. Contraintes de Von Mises maximaux pour les arbres partiellement cannelés  
En fonction de rayon de fraise [15]

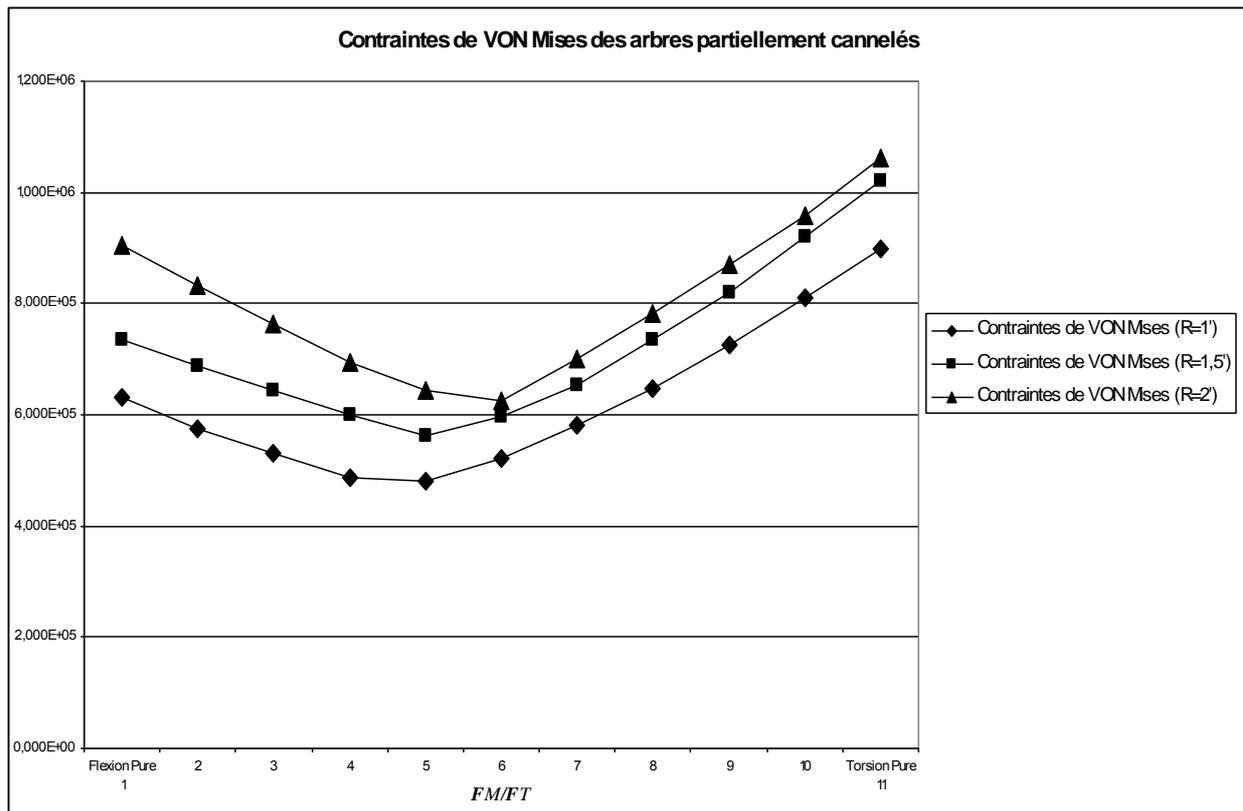


Figure V-08. Contraintes de Von Mises maximaux obtenus pour les arbres partiellement cannelés  
En fonction de rayon de fraise

La distribution des efforts maximaux dans l'arbre partiellement cannelé est représenté plus clairement dans la figure *V-07 et IV-08*, les valeurs maximales se produisent aux emplacements précédemment discutés (de  $Z=+0$  à  $Z= +500\text{mm}$  alignées le long de l'axe de l'arbre). Pour ce type d'arbres partiellement cannelé, la magnitude des efforts ne paraît pas être une fonction de la dimension des dents inachevées ou de la dimension du rayon de la fraise. La plus grande contrainte de Von Mises a eu lieu dans le cas où la torsion est prédominante par rapport à la flexion, les contraintes maximales sont obtenues pour le rayon de fraise  $R_2= 38\text{mm}$  d'après l'étude ref.[15]. Par contre, notre étude montre que ces mêmes contraintes maximales apparaissent pour l'arbre partiellement cannelé avec un rayon de fraise  $R_3= 50\text{mm}$ , chose qui peut être justifiée par l'effet géométrique de la dent inachevée, ainsi que le nombre de dents qui a augmenté.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Une modélisation du comportement statique et dynamique des arbres cannelés épaulés et partiellement cannelés à été abordée dans ce travail. Cette étude nous a permis de simuler le champ de contrainte et de déformation sur ces arbres, et ce en les considérant soumis respectivement à des chargements de flexion pure, torsion pure et combinés.

Dans le cas de l'arbre avec épaulement, trois géométrie d'arbres ont été choisi en s'inspirant de la littérature, à savoir :  $d/D=0.500$ ,  $d/D=0.750$ ,  $d/D=0.886$ . Dans le cas de l'arbre partiellement cannelé, trois rayons de fraise ont été adopté pour la réalisation des cannelures, à savoir :  $R_1=25\text{mm}$ ,  $R_2=38\text{mm}$  et  $R_3=50\text{mm}$ .

Les résultats de l'analyse par éléments finis, réalisée sur le module de calcul "COSMOS Works" inclut dans le logiciel de D.A.O. et C.A.O. "SOLIDWorks", nous ont permis de faire les constatations suivantes:

Pour le cas de l'arbre épaulé, nous avons établi que l'arbre ayant le plus petit rapport  $d/D=0.500$  génère les plus importantes contraintes de Von Mises des trois modèles d'arbres, et ceci pour les deux études théorique et numérique. Ces contraintes de Von Mises ont tendance à se produire quand les effets de flexion sont plus importants que les effets de torsion. L'arbre épaulé avec  $d/D=0.886$  présente l'exception à tout ceci, car on remarque ces contraintes maximales quand la torsion devient plus prédominante.

Cependant, il a été aussi établi que l'arbre de rapport  $d/D=0.750$ , présente les plus petites valeurs des contraintes des trois modèles, chose qui est remarquée d'après l'amplitude de diminution des contraintes minimales avec le rapport  $d/D$ .

Pour le cas de l'arbre partiellement cannelé, il a été démontré que la distribution des contraintes maximales ne paraît pas être une fonction de la dimension des dents inachevées ou de la dimension du rayon de la fraise. La plus grande contrainte de Von Mises a eu lieu dans le cas où la torsion est prédominante par rapport à la flexion, les contraintes maximales sont obtenues pour le rayon de fraise  $R_2= 38\text{mm}$  d'après l'étude ref.[15]. Par contre, notre étude montre que ces mêmes contraintes maximales apparaissent pour l'arbre partiellement cannelé avec un rayon de fraise  $R_3= 50\text{mm}$ , chose qui peut être justifiée par l'effet géométrique de la dent inachevée, ainsi que le nombre de dents qui a augmenté.

A travers cette étude, nous avons pu approcher, par une simulation numérique, l'étude du comportement en sollicitations combinées d'un organe mécanique très délicat et d'une importance considérable dans les machines, qui est l'arbre avec cannelures (épaulé ou non). Les résultats obtenus ont été largement validé, soit par les formules théoriques déjà existantes, soit par des

résultats numériques antérieurs, et des constatations non négligeables ont émanées suite à notre étude effectuée avec succès.

Pour la poursuite éventuelle de ce travail, on pourrait recommander de le réaliser pour des arbres avec des cannelures hélicoïdales, qui sont des pièces certes peu utilisées en mécanique générale, mais d'une importance considérable en mécanique de précision ou en technologie de pointe (domaine exigeant une grande précision tel que l'instrumentation médicale ou chirurgicale commandée à distance).

## Annexe

Cette annexe présente les dimensions géométriques nécessaires dans le chapitre I traitant des normalisations française et américaine.

### I- NORME FRANÇAISE

Il existe plusieurs normes françaises concernant les différents types de cannelures. En voici une énumération :

**NF E 22-131 Avril 1986** Cannelures cylindriques à flancs parallèles, à centrage intérieur  
Dimensions, tolérance et vérification

**NF E 22-141 Décembre 1955** Cannelures rectilignes à flancs en développantes

**E 22-142 Janvier 1986** Cannelures cylindriques droites- Angle de pression 20° - Vérification par calibres

**E 22-143 Mai 1950** Cannelures à flancs en développante

**NF E 22-144 Octobre 1987** Cannelures cylindriques droites et centrage sur flancs – Angles de pression 30°, 37,5° et 45° -Généralités et dimensions

**NF E 22-145 Juin 1979** Cannelures cylindriques droites, à module métrique, à centrage sur flancs - Angles de pression 30 °, 37,5° et 45 ° - Vérification.

**NF E 22-146 Octobre 1987** Cannelures cylindriques droites et centrage sur flancs - Angles de pression 30°, 37,5° et 45° - Tableaux de dimensions des cannelures

**E 22-148 Novembre 1985** Cannelures cylindriques droites–Règles pour le choix dimensionnel et la vérification

**NF E 22-151 Janvier 1967** Dentelures rectilignes – Arbres et moyeux cylindriques

**NF E 22-152 Février 1961** Dentelures rectilignes – Arbres et moyeux coniques

L'ensemble des ces normes traite du dimensionnement géométrique des différents types de cannelures (côtes de fabrication) et de leur contrôle. Seule la norme E 22-148 (complément de la norme NF E 22-144) précise le calcul des contraintes et celui du couple admissible en vue du choix des dimensions pour des cannelures.

## 2- NORME AMERICAINE

Les deux principales normes américaines concernant les cannelures sont les deux suivantes :

- **ANSI B92.1-1970 (R 1993)**
- **ANSI B92.2M-1980 (R 1989)** qui est en fait la version « métrique » de la norme précédente.

En ce qui concerne la définition géométrique des cannelures, on retrouve les mêmes formulations que celles des normes françaises. La particularité intéressante du point de vue de la conception est la prise en compte dans ces normes des principaux défauts et phénomènes pouvant altérer le bon fonctionnement des cannelures à travers plusieurs coefficients. Ces coefficients donnent des formules de capacité de charge sûrement mieux adaptées que celles proposées par les normes françaises mais encore surdimensionnées. Toutefois ceci montre à nouveau que le comportement des cannelures reste un domaine peu approfondi par les instituts de normalisation. Nous présentons ci-après quelques précisions concernant les calculs donnés par cette norme.

*Remarque : les unités de longueur sont en inch, de pression en psi.*

### **Tables des différents facteurs et valeurs admissibles**

Source de puissance	Type de chargement			
	Uniforme (ventilateur)	Chocs légers (pompes oscillantes, etc.)	Chocs intermittents (pompes à vérin)	Chocs forts (perforateurs)
	Facteur d'application de charge $K_a$			
Uniforme (turbine, moteur)	1.0	1.2	1.5	1.8
Chocs légers (moteur hydraulique)	1.2	1.3	1.8	2.1
Chocs moyens (combustion interne, moteur)	2.0	2.2	2.4	2.8

**Tableau AI.1 : Facteur d'application de charge  $K_a$**

Défaut d'alignement en inch par inch	Facteur de distribution de charge, $K_m$			
	0.5 inch de largeur de face	1 inch de largeur de face	2 inch de largeur de face	4 inch de largeur de face
0.001	1	1	1	1.5
0.002	1	1	1.5	2
0.004	1	1.5	2	2.5
0.008	1.5	2	2.5	3

Tableau AI.2 : Facteur de distribution de charge  $K_m$ 

Nombre de cycles de couple*	Facteur de fatigue, $K_f$	
	Unidirectionnel	Alterné
1000	1.8	1.8
10000	1.0	1.0
100000	0.5	0.4
1000000	0.4	0.3
10000000	0.3	0.2

Tableau AI.3 : Facteur de fatigue  $K_f$ 

Nombre de tours de la cannelure	Facteur d'usure, $K_w$	Nombre de tours de la cannelure	Facteur d'usure, $K_w$
10000	4.0	100000000	1.0
100000	2.8	1000000000	0.7
1000000	2.0	10000000000	0.5
10000000	1.4	...	...

Tableau AI.4 : Facteur d'usure  $K_w$ 

Matériau	Dureté		Contrainte maximale de cisaillement admissible en psi
	Brinell	Rockwell C	
acier	160-200	--	20000
acier	230-260	--	30000
acier	302-351	33-38	40000
acier traité en surface	--	48-53	40000
acier cimenté	--	58-63	50000
acier trempé à cœur	--	42-46	45000

Tableau AI.5 : Contrainte de cisaillement admissible

Matériau	Dureté		Contrainte de compression maximale admissible (psi)	
	Brinell	Rockwell C	Cannelures non bombées	Cannelures bombées
acier	160-200	--	1500	6000
acier	230-260	--	2000	8000
acier	302-351	33-38	3000	12000
acier traité en surface	--	48-53	4000	16000
acier cimenté	--	58-63	5000	20000

**Tableau AI.6 : Contrainte de compression admissible**

Matériau	Dureté		Contrainte de traction maximale admissible (psi)
	Brinell	Rockwell C	
acier	160-200	--	22000
acier	230-260	--	32000
acier	302-351	33-38	45000
acier traité en surface	--	48-53	45000
acier cimenté	--	58-63	55000
acier trempé à cœur	--	42-46	50000

**Tableau AI.7 : Contrainte de traction admissible**

Longueur maximale effective en fonction du type de cannelures, de l'assemblage et du diamètre primitif.

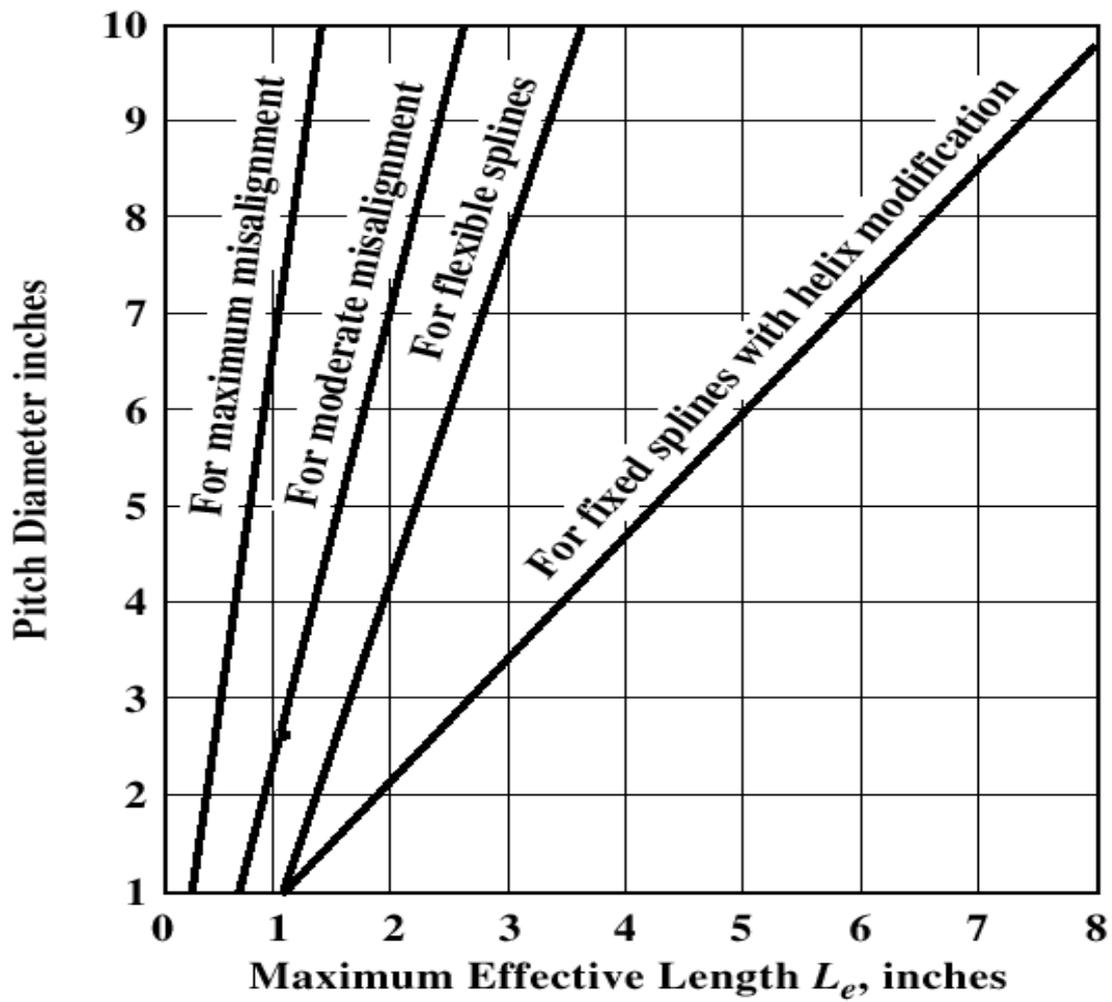


Tableau AI.8 : Longueurs effectives maximales  $L_e$

## ANNEXE

### Modes propres

### Modes forcés

#### 1/- Arber Partiellement cannelé

Fréquence n?	Hertz	Seconds
1	154.89	0.0064561
2	154.92	0.0064548
3	1019.7	0.00098065
4	1020	0.00098044
5	1242.6	0.00080476

Fréquence n?	Hertz	Seconds
1	154.86	0.0064574
2	154.86	0.0064574
3	1019.6	0.00098076
4	1019.6	0.00098075
5	1239.2	0.00080697

#### 2/- Arber Avec épaulement

Fréquence n?	Hertz	Seconds
1	249.48	0.0040084
2	249.59	0.0040065
3	734.45	0.0013616
4	735.1	0.0013604
5	2088.1	0.00047891

Fréquence n?	Hertz	Seconds
1	249.2	0.0040128
2	249.24	0.0040122
3	734.39	0.0013617
4	734.45	0.0013616
5	2091.4	0.00047814

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [01] Adey, R. A., Baynham, J. and Taylor, J. W. (2000). "Development of analysis tools for spline couplings." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 214(6), pp. 347-357.
- [02] ANSI B92.1- (1970). "Inviolable Splines and Inspection". The American National Standards Institute, 1970.
- [03] Blanc, H. (1999-2000). "Un Nouveau modèle pour l'étude et le dimensionnement des liaisons par cannelures axiales." 4th World Congress on Gearing and Power Transmission, vol. 2, pp. 1217-1227.
- [04] Barrot, P., Paredes, M. and Sartor, M. (2005). "An assistance tool for spline coupling design". *Recent Advances in Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*, Springer, pp. 329-342
- [05] Ku, Walton, J. F. J. and Lund, J. W. (1993). "A theoretical approach to determine angular stiffness and damping coefficients of an axial spline coupling in high-speed rotating machinery." *Journal of Vibration of Rotating Systems, Transactions of the ASME*, vol. 60, pp. 249-256.
- [06] Ku, Walton, J. F. J. and Lund, J. W. (1994a). "Dynamic coefficients of axial spline couplings in high-speed rotating machinery." *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, vol. 116(3), pp. 250-256.
- [07] Ku, Walton, J. F. J. and Lund, J. W. (1994b). "An investigation of angular stiffness and damping coefficients of an axial spline coupling in high-speed rotating machinery". *Nasa conference publication*, pp. 293-303.
- [08] Leen, S. B., Hyde, T. R., Williams, E. J., Becker, A. A., McColl, I. R., Hyde, T. H. and Taylor, J. W. (2000). "Development of a representative test specimen for frictional contact in spline joint couplings." *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 35(6), pp. 521-544.
- [09] Limmer, L., Nowell, D. and Hills, D. A. (2001). "A combined testing and modelling approach to the prediction of the fretting fatigue performance of splined shafts." *Institution of Mechanical Engineers, Part G. : Journal of Aerospace Engineering*, vol. 215, pp. 105-111.
- [10] Marmol, R. A., Smalley, A. J. and Tecza, J. A. (1980). "Spline coupling induced nonsynchronous rotor vibrations." vol. 102(1), pp. 168-176.
- [11] Peterson, R.E (1974). *Stress Concentration Factors*, John Wiley & Sons.

- [12] **Sum, W. S., Leen, S. B. and Williams, E. J. (2003).** "Parametric Study on the Frictional Contact Behaviour between Spline Teeth". *Modern Practice in Stress and Vibration*.  
*Analysis: Proceedings of the 5th International Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis, Sep 9-11 2003*, Glasgow, Scotland, United Kingdom, Trans Tech Publications Ltd, vol. 440-441, pp. 69-76.
- [13] **Teru Hayashi (1985).** "Miniaturization of Involute Splined Couplings-Discussion from Torsional Stiffness and Yield Torque". *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*. Vol.28, No. 236, pp 259-266.
- [14] **Volfson, B.P, (1983).** "Stress Sources and Critical Stress Combinations for Splined Shaft". *Journal of Mechanical Design*. Vol. 104, No. 551, pp 65-72.
- [15] **Donald Alexander Baker (1999).** cA finite element study of stresses in stepped splined Shafts and partially splined shafts ".
- [16] **Pierre Barrot (1999).** "Analyse et modélisation du comportement des liaisons cannelées – Mise en place des bases d'un outil d'assistance à la conception". p 48-49.
- [17] **Cornell, R. W.(1981).**"Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth." vol. 103(2), pp. 447-459.
- [18] **Goryacheva, I. G., Murthy, H. and Farris, T. N. (2002).** "Contact problem with partial slip for the inclined punch with rounded edges." *International Journal of Fatigue*, vol. 24(11), pp. 1191-1201.
- [19] **Hanson, M. T. and Keer, L. M. (1989).** "Stress analysis and contact problems for an elastic quarter-plane." *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 42 pt 3, pp. 363-383.
- [20] **Huang, K. J. and Liu, T. S. (2000).** "Dynamic analysis of a spur gear by the dynamic stiffness method." vol. 234(2), pp. 311.
- [21] **Manners, W. (2000).** "Pressure required to flatten an elastic random rough profile." *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 42(12), pp. 2321-2336.
- [22] **Matusz, J. M., O Donnell, W. J. and Erdlac, R. J. (1969).** "Local flexibility coefficients for the built-in ends of beams and plates." *Journal of Engineering for Industry*, vol. 91, pp. 607-614.
- [23] **Munro, R. G., Palmer, D. and Morrish, L. (2001).** "An experimental method to measure gear tooth stiffness throughout and beyond the path of contact." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 215(7), pp. 793-803.
- [24] **Donnell, W. J. (1960).** "The additional deflection of a cantilever due to the elasticity of the support." *Journal of Applied Mechanics*, vol. 27, pp. 461-464.
- [25] **Oda, S., Koide, T., Ikeda, T. and Umezawa, K. (1986a).** "Effects of pressure angle on tooth deflection and root stress." *Bulletin of the JSME*, vol. 29(255), pp. 3141-3148.

- [26] **Orain, M. (1976).** "Contribution à l'étude de mécanismes homocinétiques". Thèse de docteur ingénieur de l'université Paris III, pp. 260-276.
- [27] **Sackfield, A., Mugadu, A., Barber, J. R. and Hills, D. A. (2003).** "The application of asymptotic solutions to characterising the process zone in almost complete frictionless contacts." vol. 51(7), pp. 1333.
- [28] **Sainsot, P. and Velex, P. (2004).** "Contribution of gear body to tooth deflections - A new bidimensional analytical formula." Journal of mechanical design (ASME), vol. 126, pp. 748-752.
- [29] **Tatur (1969).** "Irregularity of load distribution along a splined coupling." Russian Engineering Journal, vol. XLIX, pp. 23-27.
- [30] **Terauchi, Y. and Nagamura, K. (1981).** "Study on deflection of spur gear teeth - 2. Calculation of tooth deflection for spur gears with various tooth profiles." Bulletin of the JSME, vol. 24(188), pp. 447-452.
- [31] **Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (2003).** "Mechanics of materials solutions manual".
- [32] **Wang, J. and Howard, I. (2004).** "The torsional stiffness of involute spur gears." Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 218(1), pp. 131-142.
- [33] **Bucher, F., Knothe, K. and Theiler, A. (2002).** "Normal and tangential contact problem of surfaces with measured roughness." Wear, vol. 253(1-2), pp. 204-218.
- [34] **Colin, G. (1988).** "Le fretting corrosion." CETIM-Informations, vol. 107, pp. 47-52.
- [35] **Cartier, M. (2006).** "Usure des contacts mécaniques : Manifestations de l'usure". Technique de l'Ingénieur, vol. BM 5 067, pp. 14.
- [36] **Dundurs and Lee (1972).** "Stress concentration at a sharp edge in contact problems." J. elasticity, vol. 2, pp. 109-112.
- [37] **Fregly, B. J., Bei, Y. and Sylvester, M. E. (2003).** "Experimental evaluation of an elastic foundation model to predict contact pressures in knee replacements." Journal of Biomechanics, vol. 36(11), pp. 1659
- [38] **Gedeon, M(2002).** "Fretting Corrosion." Technical Tidbits, Brushwellman engineering materials, V 4(3).
- [39] **Goryacheva, I. G., Murthy, H. and Farris, T. N. (2002).** "Contact problem with partial slip for the inclined punch with rounded edges." International Journal of Fatigue, vol. 24(11), pp. 1191-1201.
- [40] **Hanson, M. T. and Keer, L. M. (1989).** "Stress analysis and contact problems for an elastic quarter-plane." Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. 42 pt 3, pp. 363-383.
- [41] **Huang, K. J. and Liu, T. S. (2000).** "Dynamic analysis of a spur gear by the dynamic stiffness method." vol. 234(2), pp. 311.
- [42] **Johnson, K. L. (1985).** "Contact Mechanics". Cambridge, Cambridge University Press.