

N° d'ordre : /2009/DM

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE BATNA

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE

MAGISTÈRE

EN

MÉCANIQUE

Option : MECANIQUE DES STRUCTURES

PAR

ABDELHAMID MOURAD

**Analyse de la réponse à une sollicitation cyclique
d'un alliage à mémoire de forme.**

Soutenu le:

Devant le Jury :

BENBOUTA Rachid	M.C	Université de Batna	Président
ZIDANI Kamel	M.C	Université de Batna	Rapporteur
BRIOUA Mourad	MC	Université de Batna	Co-rapporteur
MANAA Rabah	Docteur C.C	Université de Batna	Examineur
DJEBAILI Hamid	M.C	Université de Khenchela	Examineur

Année Universitaire 2008 / 2009

Remerciements

Je tiens à remercier tous mes professeurs qui, de par leur expérience, m'ont prodigué
Des conseils permettant l'élaboration de ce mémoire. Je pense tout particulièrement
au docteur Zidani Kamel et au docteur Brioua Mourad.

Je remercie également les membres de ma petite famille pour leur compréhension.

Liste Des Figures

Figure 1:Avion American F14 [1]	1
Figure 2:Implant médical en nitinol _STENT [1]	2
Figure 3:formation d'une variante de martensite [6]	4
Figure 4:Energie libre des phases martensite en fonction de la température [6]	5
Figure 5:Fraction volumique de la martensite en fonction de la température [6].....	6
Figure 6:Loi de Clausius Clapeyron [6]	7
Figure 7:Effet mémoire de forme simple sens [6]	8
Figure 8: Effet mémoire de forme double sens assisté [6]	9
Figure 9:Effet caoutchoutique [6].....	10
Figure 10: Effet superélasticité [6]	10
Figure 11:Les différentes étapes de production des AMF [6].....	11
Figure 12:Traitement de bétalisation d'un AMF [6]	12
Figure 13:La variation de température de transformation [5]	13
Figure 14:Télescope Hubble lancé en Avril1990 [6]	18
Figure 15:Satellite Clémentine lancé en Janvier 1994 [6].....	18
Figure 16:Couplage thermomécanique [5].....	19
Figure 17:Micro activateur pour la robotique [3].....	19
Figure 18:Lunette avec monture superélastique [5]	20
Figure 19:Stent cardiovasculaire comprimé [5]	20
Figure 20:Stent cardiovasculaire relâché [5]	20
Figure 21:Valve cardiaque [5].....	21
Figure 22:Broche d'orthodontie [6].....	21
Figure 23:Appareil Rheometrique RSA-II [12].....	22
Figure 24:Essais identique mais a des vitesses différentes [3].....	24
Figure 25:Exemple de données obtenues a l'aide du RSA_II [12]	24
Figure 26: exemple de chargement et de déchargement [12]	25
Figure 27:Combinaison des fichiers de chargement et déchargement [12].....	25
Figure 28:Equilibre thermodynamique des AMF [12]	26
Figure 29:Proportion des martensites microscopique [12].....	27
Figure 30:Modèle Bilinéaire salon Muller et XU [6]	27
Figure 31 Modèle Bilinéaire salon Brandon et Rogers [3]	28
Figure 32 Modèle Bilinéaire salon Gillet, Patoor et Berveiller [5]	28
Figure 33 Schéma des fonctions dérive et fluctuation [12]	31
Figure 34 Température de traitement thermique 325°	46
Figure 34 Température de traitement thermique 385°	47
Figure 34 Température de traitement thermique 425°	47
Figure 34 Température de traitement thermique 485°	48
Figure 34 Surface Krigée I	48
Figure 34 Surface Krigée II.....	49

Table des matières

Table des matières	i
Liste des figures.....	iii
Introduction.....	1
Chapitre I Généralités sur la transformation martensitique.....	3
I-1 La transformation martensitique.....	3
I-2 Thermodynamique de la transformation	4
I-3 Diagramme contrainte-température	6
I-4 Diagramme contrainte-température.....	7
I-4-1 Effet mémoire simple.....	7
I-4-2 Effet mémoire double sens assisté.....	8
I-4-3 Effet caoutchoutique	9
I-3-4 Effet superélastique	10
I-3-5 Effet amortissement.....	10
Chapitre II Familles d'alliage à mémoire de forme.....	12
II-1 Fonderie.....	12
II-2 Austénisation ou traitement de bétatisation	12
II-3 Mise en forme.....	14
II-4 Propriétés des principales familles d'AMF.....	14
II-5 Résistance à la fatigue	15
II-6 Applications	17
II-6-1 Fil dentaire	17
II-6-2 Fil de localisation pour mammographie.....	17
II-6-3 Endoscope actif	18
II-6-4 Réduction de fracture	18
II-6-5 Filtre à caillots de sanguins	18
II-6-6 Domaine Aérospatial.....	19
II-6-7 Domaine biomédical	21
Chapitre III Caractérisation des constantes élastiques et modèle numérique.....	24
III-1 Caractérisation des constantes élastiques.....	24
III-2 Modélisation numérique	29
III-2-1 Les modèles thermodynamiques ou macroscopiques	29
III-2-2 Les modèles micromécaniques	30
III-2-3 Les modèles phénoménologiques.....	31

1- Interpolation	31
2- Tanaka	33
Chapitre IV Le krigeage.....	35
IV-1 Introduction.....	35
IV-2 Mise en place des équations du krigeage.....	36
IV-3 Effet pépite.....	42
IV-4 Invariance du krigeage.....	43
IV-5 Application au krigeage des surfaces.....	43
IV-6 Application à la réponse des AMF à des sollicitations cycliques.....	47
Conclusion et perspective	55
Listing programme Maple.....	56
Bibliographie.....	59

Introduction :

Lors de la conférence du 27 mai 1932 de la Swedish metallographic society, Arne örlander a fait part, et pour la première fois, de sa découverte au monde scientifique. Dans la même année, il a publié un article intitulé " An electrochemical investigation of solid cadmium-gold alloy ". Depuis, le qualificatif de père des alliages à mémoire de forme lui a été attribué et les étonnantes propriétés de ces alliages ont constitué un sujet de recherche scientifique à travers le monde.

Ce n'est qu'en 1951, après la publication de Chang et Read, que tous les aspects fondamentaux de ces alliages sont compris. Depuis, la découverte d'autres alliages a suivi. Mais la commercialisation et l'utilisation de ces matériaux n'était pas encore envisageable, à cause principalement du coût encore trop élevé et de la non vulgarisation des techniques de fabrication.

La découverte, en 1960, de l'alliage équiatomique de nickel et de titane et la réalisation à base de ce matériau en 1969 d'un manchon de raccordement pour les conduites hydrauliques des avions américains F14 (fig 1) finissent par intéresser véritablement l'industrie à ce nouveau genre de matériau.



fig 1 Avion américain F14 [1]

Depuis, la recherche scientifique s'est intensifiée, et une première application médicale du nitinol, non sans importance, voit le jour. Désormais, le problème des artères atteintes de sténose est résolu par un implant (fig 2) en nitinol appelé stent. Ce dernier se dilate et libère le passage du sang grâce à la température du corps humain.

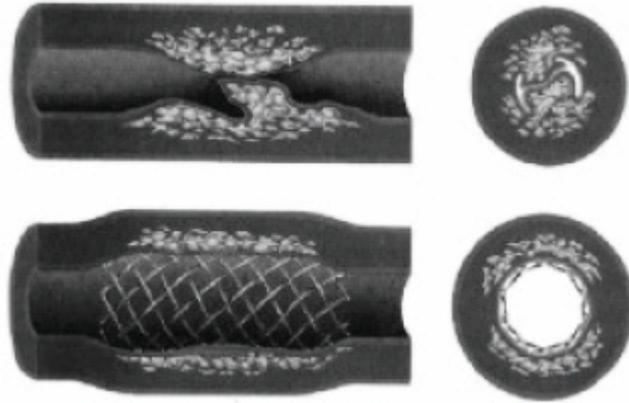


fig 2 implant médical en nitinol - STENT- [1]

Il faut préciser que le développement très rapide de l'industrie des AMF, est du à l'avènement concomitant de l'ordinateur et du développement des méthodes numériques et des modèles mathématiques. En effet, les différents essais et prototypages très coûteux sont devenus de moins en moins nécessaires, car la prédiction du comportement thermomécanique est devenu facile et moins onéreuse.

Ce qui a rendu possible la conception de systèmes plus complexes, utilisés en robotique, qu'on désigne généralement par activateur. Le souci constant de réduire les couts de fabrication de ce genre de matériau, a poussé les scientifiques à envisager des matériaux de base autres que ceux connus jusqu'à présent tels que le nickel, le titane ou le cadmium. Ainsi, plusieurs familles d'alliages à mémoire de forme ont vu le jour. Le fer, l'aluminium, le zinc et le cuivre sont les principaux composants de ces familles. La réduction du prix de revient de ces AMF est très significative, ce qui a permis aux laboratoires de recherche de mieux connaître leurs propriétés et par la même d'envisager leur utilisation dans les différents domaines de l'industrie.

chapitre I : Généralités sur la transformation martensitique

I.1 La transformation martensitique:

Les matériaux solides présentent, en règle générale, un comportement qualifié d'élastique ou plastique. Les alliages à mémoire de forme, échappent à cette règle générale, car ils subissent une transformation martensitique, leur permettant de récupérer en partie ou totalement leur forme initiale par le simple fait de chauffer l'échantillon.

Nous présentons dans cette partie la transformation martensitique ainsi que les propriétés thermomécaniques liées à cette transformation.

Les alliages à mémoire de forme présentent deux états ou phases d'équilibre stables, l'un à haute température, appelé austénite, l'autre à basse température appelé martensite du nom de son inventeur, le physicien Martens.

La transformation martensitique est un changement de phase qui s'opère à l'état solide. Cette transformation est qualifiée de displacive, parce que les déplacements atomiques restent faibles par rapport aux dimensions de la maille. Par opposition aux déformations par diffusion, qui procèdent par des mouvements atomiques arbitraires, la transformation martensitique est dû à un mouvement atomique corrélé ou mouvement d'ensemble.

La transformation martensitique peut s'opérer, sans toutefois qu'il y ait de modification de la composition chimique, à différentes températures et à différentes vitesses de chauffage ou de refroidissement. Il faut, cependant, préciser que la vitesse de déplacement est limitée par la vitesse du son dans le matériau.

La martensite conserve l'ordre atomique et la composition chimique de la phase mère, l'austénite. Tout ce passe donc comme s'il y avait un réarrangement des atomes pour former une structure plus stable.

La transformation martensitique est dite du premier ordre, c'est à dire qu'il y a coexistence des deux phases, haute et basse température, séparées par un plan appelé plan d'habitat.

Précisons, pour parfaire la définition, que la déformation à l'échelle macroscopique est une déformation homogène du réseau qui s'opère par glissement et qui conserve un plan invariant.

Le plan d'habitat, qui est une interface commune aux deux phases, s'appelle également plan d'accolement. Le cisaillement s'opère parallèlement à ce plan.

Lorsque la température augmente, la martensite croît dans l'austénite, il y a alors apparition de plaquettes appelées variantes. Ces variantes peuvent avoir des orientations différents, et pour un monocristal, on dénombre un maximum de 24 orientations possibles.

Au cours du refroidissement, les variantes se forment afin de compenser les déformations dues aux autres variantes, on parle alors d'autoaccommodation.

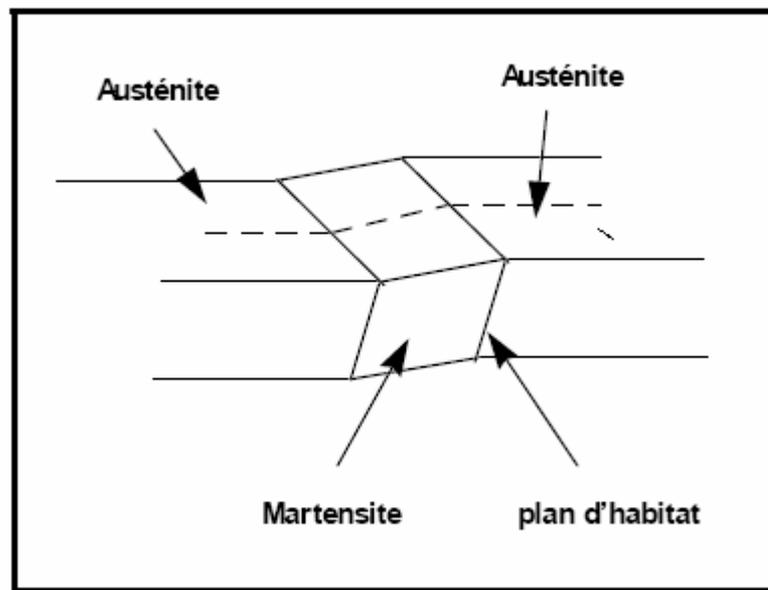


fig I-1 formation d'une variante de martensite [6]

La description de la déformation observée, à l'échelle macroscopique, peut se faire à l'aide de trois opérations successives:

- ✓ **une déformation homogène du réseau:** à l'échelle microscopique, la déformation se traduit par un mouvement atomique d'ensemble. elle préserve la différence entre les mailles cristallographiques de la phase austénite et de la phase martensite. Pour passer d'une phase à l'autre, seule une déformation homogène est requise.
- ✓ **Une déformation hétérogène à réseau invariant:** cette déformation est le résultat. Elle a pour effet de minimiser l'énergie de déformation et d'assurer la compatibilité du plan invariant.
- ✓ **Une rotation rigide:** l'échantillon semble avoir subi une rotation d'ensemble sans déformation:

I.2 Thermodynamique de la transformation:

Examinons, pour le cas d'un monocristal, la thermodynamique de la transformation martensitique. Il est démontré qu'il existe des relations linéaires entre les énergies libres de la phase austénitique et la phase martensitique.

$$G_{\{A\}} = H_{\{A\}} - T \square S_{\{A\}} \quad (\text{dans le cas de la phase austénitique}). \quad [I-1]$$

$$G_{\{M\}} = H_{\{M\}} - T \square S_{\{M\}} \quad (\text{dans le cas de la phase martensitique}). \quad [I-2]$$

Où G est l'énergie libre de la phase, H l'enthalpie et S l'entropie.

L'énergie libre de transformation s'écrit alors:

$$\Delta G_{\{A \rightarrow M\}} = G_{\{A\}} - G_{\{M\}} \quad [I-3]$$

L'intersection des deux courbes représente alors la température d'équilibre T_0 .

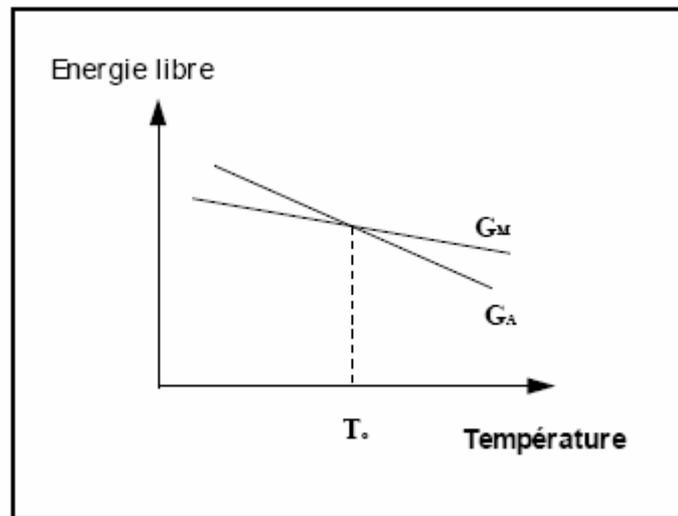


fig I-2 Energie libre des phases martensite et austénite en fonction de la température [6]

$\Delta G_{\{A \rightarrow M\}}$ est négatif pour des températures supérieures à T_0 , comme indiqué sur la figure, et c'est la phase austénitique qui est stable. A l'inverse, lorsque la température est inférieure à T_0 la phase martensitique devient stable.

Cette écriture, ou si l'on préfère cette équation, s'annule lorsque la température est égale à T_0 . Cela correspond en fait au cas théorique parfait. En réalité, les deux phases sont séparées par un plan d'habitat ou interface qui nécessite une certaine énergie pour son déplacement.

Cette énergie constitue une barrière énergétique à la transformation et n'est pas mise en évidence dans l'équation ci-dessus.

Il serait plus logique de voir l'énergie libre comme la somme de deux énergies, l'une chimique et motrice, l'autre non chimique mais élastique et dissipative et qui tend à s'opposer à la transformation martensitique.

$$\Delta G_{\{tot\}} = \Delta G_{\{chim\}} + \Delta G_{\{elast\}} + \Delta G_{\{dissip\}} \quad [I-4]$$

Comme il n'y a pas de diffusion atomique, et en vertu du principe de l'énergie minimum, la morphologie, l'orientation et la position des nouveaux domaines de la phase martensitique sont gouvernées par la nécessité de diminuer l'énergie élastique à chaque étape de la transformation. Et après transformation, l'énergie non chimique stockée sous forme élastique, plastique ou interfaciale contribue à la réversion de la martensite en austénite.

Les températures de transformation sont prises par convention à 10 et à 90 pourcents de la transformation et sont définies de la manière suivante:

- ▶ $M_{\{s\}}$: température de début de transformation martensitique
- ▶ $M_{\{f\}}$: température de fin de transformation martensitique
- ▶ $A_{\{s\}}$: température de début de transformation austénitique
- ▶ $A_{\{f\}}$: température de fin de transformation austénitique

L'énergie de dissipation durant les deux transformations est proportionnelle à la surface du cycle d'hystérésis

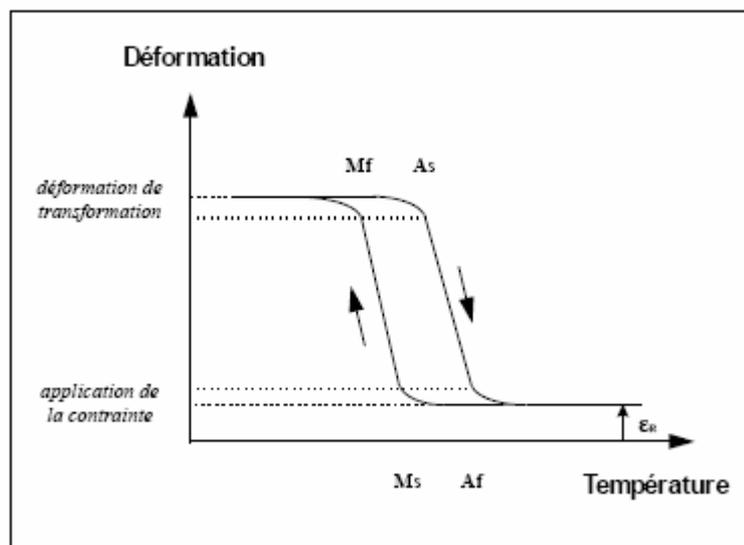


fig I-3 Fraction volumique de la martensite en fonction de la température [6]

On distingue deux types de transformation: *la transformation par "Burst"* et *la transformation thermoélastique*.

Le premier type se caractérise par une croissance de la martensite par un processus en avalanche. la martensite croit de façon rapide et brusque jusqu'à ce qu'un joint de grain stoppe cette évolution. Elle implique l'existence d'une force motrice important, supérieure à la force non chimique ce qui est la cause d'une forte hystérésis.

Le deuxième type se caractérise, quant à lui, par une succession des positions d'équilibre des interfaces lors d'une variation de la température. Il s'agit, en fait, à chaque température, d'un compromis énergétique entre énergie motrice et énergie résistive. Ce qui est la cause d'une faible hystérésis due à la faiblesse de la force motrice.

I.3 Diagramme contrainte-température:

Un effet thermique induit la martensite. Il en est de même par application d'une contrainte, mais dans ce cas, la contrainte doit être supérieur à un certain seuil $\sigma_{\{c\}}$.

Cette contrainte critique doit avoir une évolution linéaire en respect de la loi de Clausius-clapeyron:

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right) = \left(\frac{\rho\Delta H}{\epsilon T}\right)$$

[I-5]

Ou

T_0 est la température d'équilibre de la transformation.

σ la contrainte appliquée

ϵ la déformation de la transformation.

ρ la masse volumique.

ΔH l'enthalpie de la transformation.

La martensite est initiée, sous une contrainte σ , à la température M_s^σ .

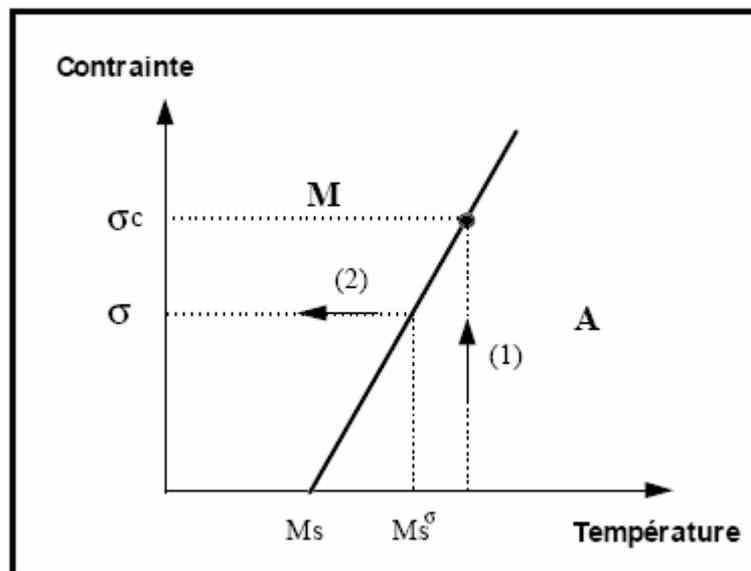


fig I-4 loi de Clausius Clapeyron [6]

(1) à température constante et à contrainte croissante

(2) à contrainte constante et à température décroissante

I.4 Propriétés thermomécaniques des alliages à mémoire de forme.

I-4-1 Effet mémoire simple:

Lorsqu'on déforme un échantillon d'alliage à mémoire de forme, à une température inférieure à la température de fin de transformation de la martensite $M_{\{f\}}$, l'autoaccommodation est telle que l'échantillon garde sa forme haute température. Il y a alors déplacement des interfaces entre variantes, et la contrainte finit par favoriser une variante dont le cisaillement est orienté dans le sens de la contrainte. Au retrait de la contrainte, une déformation permanente demeure. C'est alors qu'un simple réchauffement à une température supérieure à $A_{\{s\}}$ permet à l'échantillon de retrouver progressivement sa forme haute température.

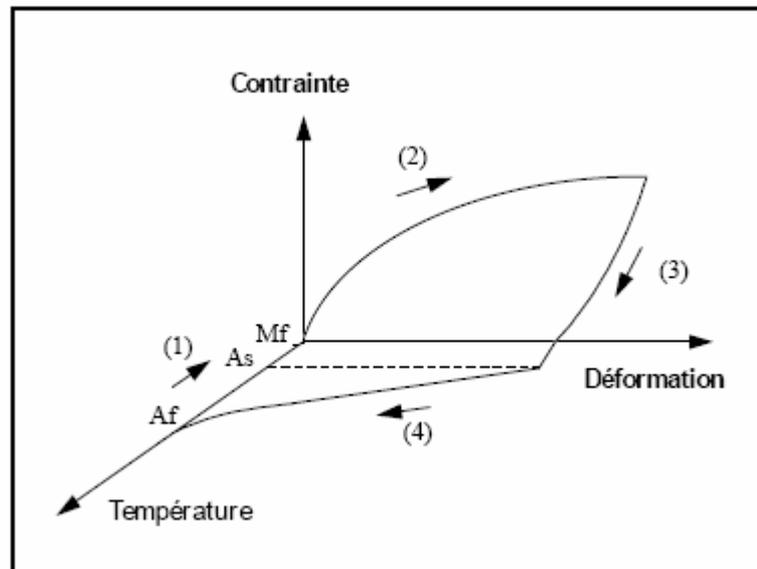


fig I-5 Effet mémoire de forme simple sens [6]

I-4-2 Effet mémoire double sens assisté:

L'effet mémoire double sens assisté est le passage réversible d'une forme stable à haute température à une autre forme stable à basse température sous une contrainte constante.

Lorsqu'on applique, à haute température, une contrainte constante, puis, en maintenant la contrainte, on refroidit le matériau à $T < M_{\{f\}}$,

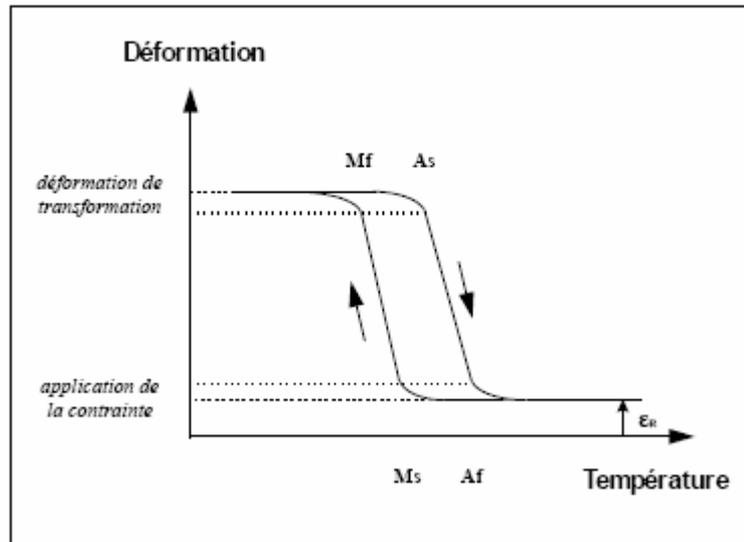


fig I-6 Effet mémoire de forme double sens assisté [6]

Après un cycle, la déformation ne disparaît pas complètement. Subsiste alors une déformation résiduelle $\varepsilon_{\{r\}}$ attestant d'un changement de l'état interne du matériau. Ce qui s'explique par la présence d'un pourcentage résiduel de martensite ou par l'apparition de dislocations. A chaque cycle, la déformation résiduelle augmente jusqu'à saturation. Les cycles qui suivent restent alors sensiblement identiques tant que le taux de dislocation ou d'endommagement n'augmente pas. On dit que le matériau est éduqué, car il a "appris" à retrouver les deux formes stables à haute et basse température. Il y a donc mémorisation des formes et on parle alors d'effet mémoire double sens.

I-4-3L'effet caoutchoutique:

Lorsque l'échantillon se trouve à l'état martensitique, l'application d'une contrainte a pour conséquence la déformation de l'échantillon. Au retrait de cette contrainte, la déformation se scinde en deux parties, l'une réversible et l'autre résiduelle. C'est l'effet caoutchoutique.

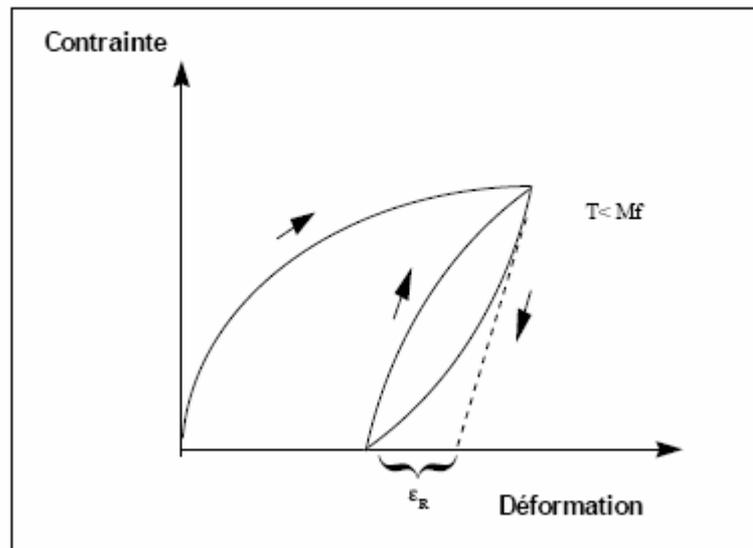


fig I-7 Effet caoutchoutique [6]

I-4-4 L'effet superélastique:

A une température $T > A_f$, l'application d'une certaine contrainte critique provoque l'apparition de martensite, dite induite. Cette martensite continue de croître de façon linéaire avec la température selon la loi de Clausius-Clapeyron. L'application de cette contrainte favorise la croissance de certaines variantes ce qui donne à l'échantillon un pouvoir de déformation plus grand pouvant aller jusqu'à 10% pour les monocristaux. La martensite, ainsi induite, se transforme en austénite au retrait de cette contrainte, ce qui permet à l'échantillon de retrouver sa forme initiale.

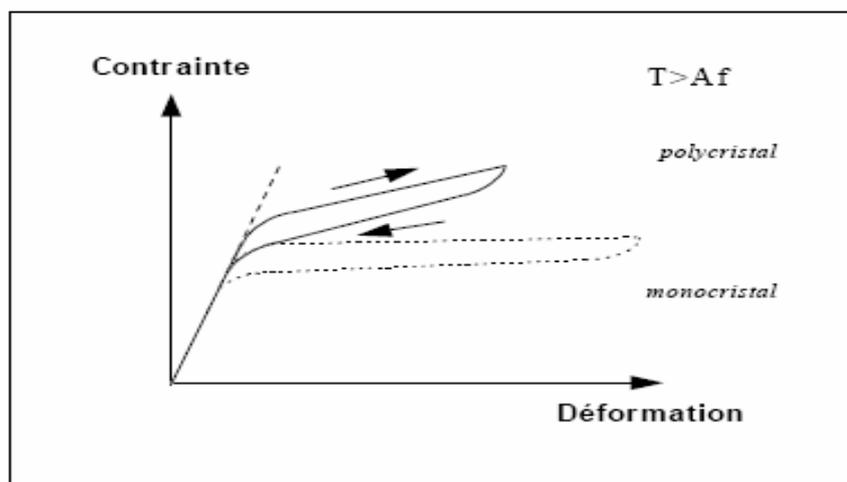


fig I-8 Effet superélastique [6]

I-4-5 L'effet amortissement:

L'effet amortissement ou encore frottement interne est la conséquence d'une dissipation d'énergie thermique. Cette énergie dissipée est le résultat de la transformation irréversible d'une énergie mécanique. Ce frottement interne est fonction de la température, de la fréquence, du degré de déformation et des caractéristiques des matériaux lui-même.

Pour les alliages à mémoire de forme, on remarque que le frottement interne est très variable dans trois domaines de température différents. Le frottement interne croit selon que le matériau se trouve en phase austénitique, martensitique ou phase intermédiaire durant laquelle les deux phases coexistent.

Chapitre II : Familles d'alliages à mémoire de forme.

Il existe plusieurs familles d'alliages à mémoire de forme. Les plus utilisés sont à base de nickel, de titane, de cuivre, d'aluminium et de zinc. Certains alliages ont même du fer comme composant, mais il est très rarement utilisé à cause de ses mauvaises performances en milieu corrosif.

Néanmoins, le procédé de fabrication de ces alliages est sensiblement le même:

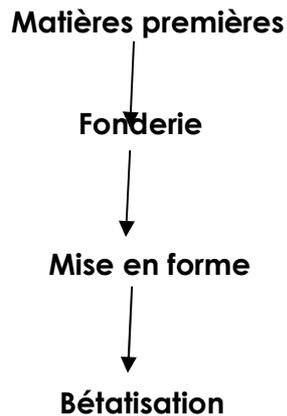


fig II-1 Les différentes étapes de production des AMF [6b]

II-1 Fonderie.

Les composants de l'alliage, pris en quantité bien déterminée, sont mis en fusion dans un premier temps. Avant la coulée, la composition de l'alliage subit un premier contrôle. Dans le cas où l'analyse du bain en fusion n'est pas conforme, on réajuste sa composition. Il est indispensable de mener à bien cette première étape, car la propriété de référence, qui est le cycle de transformation auténite-martensite ou plus exactement les différentes températures de transition, dépend de façon très sensible de la composition.

Par exemple, la température d'apparition de la martensite, appelée $M_{\{s\}}$ pour l'alliage CuAlNi est linéaire par rapport à la concentration en aluminium. On voit donc que deux alliages de CuAlNi n'ayant pas la même concentration en Al auront des cycles de transformation différents.

II-2 Austénisation ou traitement de bétatisation.

Elle se compose d'une phase d'élévation de la température au delà de la température de fusion durant un temps bien déterminé, puis d'une trempe permettant d'obtenir à température ambiante la martensite, d'un revenu destiné à éliminer les lacunes et défauts par une nouvelle élévation de température suivi, finalement d'une trempe.

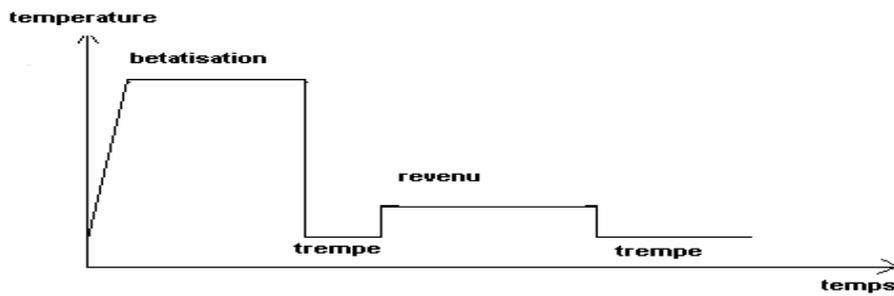


fig II-2 traitement de bétatisation (austénisation) d'un AMF [6b]

Les conditions de réalisation des séquences du traitement thermique et les facteurs régissant ces différentes phases, ont une importance capitale sur les propriétés futures de l'alliage.

La sélection d'un traitement thermique adéquat, communément appelé recuit ou revenu, constitue un défi en soi. En effet, les propriétés mécaniques d'un AMF dépendent de la combinaison du taux de déformation à froid et du traitement thermique, qui dépend à son tour de la température et du temps de recuit.

Cependant, l'amélioration d'une propriété quelconque est souvent obtenue au détriment d'une autre. Par exemple, l'augmentation de la dureté ne peut être envisagée sans augmenter la fragilité. Le contrôle du traitement thermique est donc très important pour la reproductibilité des propriétés mécaniques ainsi que des températures de transformation des échantillons.

Il n'y a donc pas de recette miracle pour choisir le traitement adéquat. Il faut effectuer quelques traitements, les analyser et voir si cela convient. De plus, il n'existe pas de relation entre le traitement appliqué et les températures de transformation, c'est-à-dire qu'il ne suffit pas d'augmenter le temps et la température pour diminuer les températures de transformation.

En effet, en observant les résultats on remarque qu'il n'y a aucune relation facilement quantifiable.

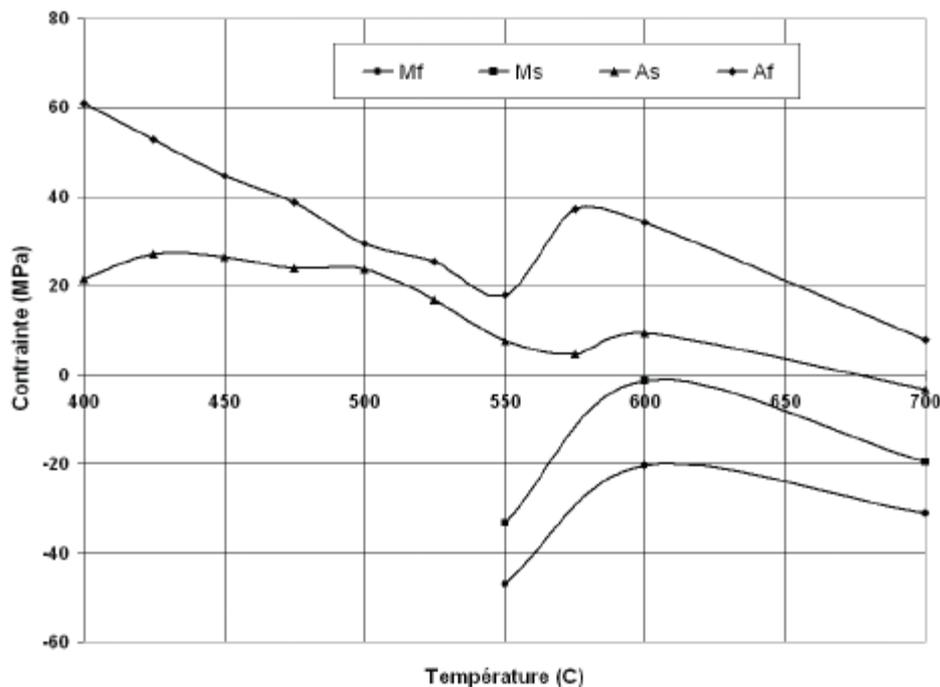


fig II-3 Variation des températures de transformation en fonction de la température du traitement thermique d'une durée d'une heure [5]

II-3 Mise en forme :

Le procédé de mise en forme est spécifique à chaque famille d'alliage, car la ductilité peut être très différente. L'aptitude de l'alliage à être déformé en fonction de la température conditionne la mise en forme à chaud ou à froid de l'alliage. La température du traitement thermique ainsi que sa durée, les conditions de la trempe dans un bain d'huile ou d'eau et du revenu sont autant de facteurs qui influencent directement les différentes températures de transition ($M_{\{s\}}$, $M_{\{f\}}$, $A_{\{s\}}$, $A_{\{f\}}$) de l'alliage.

II-4 Propriétés des principales familles d'AMF.

Actuellement, les applications industrielles n'ont été développées qu'à partir de trois familles d'alliages : les nickel -- titane (NiTi), les cuivre -- zinc -- aluminium (CuZnAl) et les cuivre -- aluminium -- nickel (CuAlNi). Ce choix s'est effectué en fonction des propriétés mécaniques, thermiques et électriques des matériaux, de leur aptitude à la mise en forme, de leur élaboration, de leur coût et de l'existence d'une industrie élaboratrice.[6]

Historiquement, c'est le nickel -- titane proche de la composition équiatomique appelé nitinol qui a donné lieu aux premiers développements. Des éléments d'addition ont été envisagés et des brevets ont été déposés sur les nouvelles compositions. Par exemple, l'ajout du cuivre permet de jouer sur la largeur de l'hystérésis. L'addition de fer, de chrome, de manganèse ou d'aluminium donne lieu à une diminution des

températures de transformation alors que les additions d'or ou de palladium permettent de les augmenter. Les nickel -- titane se caractérisent par un excellent effet mémoire (10 % de déformation réversible) et par la possibilité de développer des forces importantes. Ils possèdent une bonne résistance à la fatigue et à la corrosion et peuvent subir sans dommage des températures élevées (400 °C) pendant quelques instants.

Les alliages cuivreux ont été envisagés industriellement du fait de leur coût inférieur à celui du nickel -- titane et de leur mise en oeuvre plus aisée. Des ajouts permettent aujourd'hui de limiter le grossissement des grains lors du traitement de bétatisation ou de limiter la diffusion en phase β et ainsi stabiliser les phénomènes de vieillissement (nickel). [6]

Les alliages de CuZnAl sont moins chers mais leur effet mémoire est plus petit (4 %), moins stable et ils sont très sensibles au vieillissement (perte de mémoire). Par contre, ces matériaux ont une excellente conductivité électrique et thermique, leur hystérésis est plus faible que celle des NiTi et leur mise en forme plus aisée. Ils ont aussi l'avantage d'être facilement élaborés sous forme monocristalline ; leurs propriétés sont alors comparables à celles des NiTi (10 % d'effet de mémoire, augmentation d'un facteur compris entre 10 et 100 de leur durée de vie en fatigue).

Les alliages de CuAlNi permettent des applications à des températures plus élevées (jusqu'à 250 °C) que les CuZnAl et les NiTi, limités à 100 °C). Le développement de cette famille d'alliage est plus récent du fait de sa fragilité qui rend délicate sa mise en forme et de ses moindres performances en fatigue. Des études ont cependant permis d'améliorer de façon sensible les caractéristiques mécaniques de ces matériaux en réduisant la taille des grains, limitant ainsi les effets d'anisotropie du matériau, au prix d'une très légère diminution des propriétés de mémoire. L'utilisation de ces alliages sous forme monocristalline semble être une autre voie d'amélioration possible.

Le développement de ces trois types de matériaux permet aux AMF de couvrir une large gamme d'applications. Lorsqu'on se propose de développer une application employant des alliages à mémoire de forme, il faut systématiquement se reporter aux abaques physicochimiques et thermomécaniques, afin de choisir le matériau le mieux adapté.

Les abaques physico-chimiques précisent, pour une famille d'alliage donnée, les grandeurs définies par la norme AFNOR : températures caractéristiques, étalement de la transformation, largeur de l'hystérésis ou encore enthalpie de changement de phase. Il convient aussi de connaître des paramètres tels que la résistivité électrique ou la conductibilité thermique dans chacune des phases.

Les abaques thermomécaniques informent sur la variation des modules mécaniques lors du changement de phase, l'effort de recouvrance que peut générer le matériau, les déformations que l'on peut attendre par effet superélastique et effet mémoire ou encore l'évolution des températures de transformation avec la contrainte mécanique, lorsque le matériau est contraint.[6]

II-5 Résistance à la fatigue.

La fatigue est un phénomène de rupture par fissuration progressive d'un matériau, sous l'effet d'efforts cycliques répétés, au-dessus d'une certaine valeur critique. Bref, c'est la tendance d'un matériau à

se briser sous des conditions d'efforts cycliques répétés bien inférieurs à la contrainte ultime. Les contraintes périodiques mécaniques ou thermiques induisent des dislocations dans le matériau. Il y a alors durcissement du matériau, création de fissures et propagation de fissures jusqu'à la rupture. Cependant, le phénomène de fatigue est beaucoup plus complexe pour les alliages à mémoire de forme. En effet, puisque l'état microstructural de l'AMF change, ce dernier voit ses propriétés se modifier [5].

Les AMF, en tout cas les principales familles, sont très sensibles à la fatigue.

En plus des phénomènes classiques connus pour les matériaux simples et qui sont:

- ✓ Augmentation de la densité de dislocation
- ✓ Arrangement des dislocations.
- ✓ Naissance des fissures

Les AMF subissent en outre les mécanismes relatifs au changement de phase, ce qui les rend plus vulnérables.

En résumé, nous pouvons dire que nous sommes en présence de deux modes de fatigue, l'un étant mécanique et l'autre thermique. Le mode thermique de fatigue s'explique par le cyclage thermique guidé par la variation de la température, faisant basculer l'alliage de la phase martensitique vers la phase austénitique et inversement. Le mode mécanique, quant à lui, varie avec la température:

- ✓ tant que la température de l'AMF est inférieure à $M_{\{f\}}$ les variantes de martensites se réorientent.
- ✓ pour une température comprise entre $A_{\{f\}}$ et $M_{\{s\}}$ la martensite se forme sous contrainte
- ✓ au delà de la température $M_{\{s\}}$ l'AMF subit la fatigue classique connu pour les matériaux simples.

A cela s'ajoute, pour de nombreuses applications, la possibilité de couplage des mécanismes cités. Le phénomène de fatigue devient très complexe et la prise en compte, pour l'étudier, de plusieurs paramètres s'avère nécessaire voire même incontournable. Ces facteurs sont:

- ✓ La température
- ✓ La contrainte appliquée
- ✓ La déformation imposée
- ✓ la température de transformation $M_{\{s\}}$.

Un autre genre de fatigue, non moins important, mérite une attention particulière eu égard à ses effets dénaturants de l'AMF, le vieillissement. Tout se passe comme si l'alliage devient amnésique et ne réagit plus, comme prévu, aux points de transformation (température). La loi de comportement du

matériau subit une évolution pour être la loi de comportement d'un matériau dont la phase martensitique est croissante et stable.

II-6 Applications

Les propriétés thermomécaniques exceptionnelles des AMF en font des matériaux aux applications potentielles très importantes dans le domaine biomédical. L'utilisation de tels matériaux en contact avec le corps humain impose de déterminer au préalable leur degré de biocompatibilité.

Trois paramètres sont à déterminer :

- ✓ La résistance à la corrosion de l'alliage en présence de fluides ou de tissus humains
- ✓ La biocompatibilité proprement dite
- ✓ Les effets toxiques ou cancérogènes possibles à long terme

La bonne résistance à la corrosion des alliages nickel -- titane assure à ces matériaux le monopole des applications biomédicales. En ce qui concerne la biocompatibilité, des études entreprises sur l'alliage de NiTi ont démontré que la réaction des tissus vivants à la présence d'une prothèse en NiTi se stabilise après avoir atteint un maximum dans les trois premiers mois de l'implantation, comme pour les aciers inoxydables. Cependant, leur emploi est actuellement limité par suite du manque de données crédibles sur la toxicité à long terme. En effet, la présence de nickel à la teneur de 50 % atomique est un problème important auquel se heurtent toutes les applications de ce matériau comme implant, car celui-ci utilisé seul est reconnu comme toxique pour les milieux vivants. Néanmoins, des résultats quant à son action lorsqu'il est allié au titane, qui est parfaitement toléré par le corps humain, sont tout à fait encourageants comme en témoignent les tests réalisés sur des échantillons. [6]

Toutefois, on peut noter la possibilité de déposer en couches minces des métaux adéquats qui assurent la non toxicité biologique pour une application chirurgicale. Par exemple, les revêtements d'or ou de platine, du fait de leur grande stabilité, sont totalement biocompatibles et parfaitement adaptés aux implantations chirurgicales.

II-6-1 Fil dentaire

L'utilisation de fils dentaires en alliage à mémoire de forme est la plus ancienne et la plus répandue des applications biomédicales de ces matériaux. Environ dix millions de ces fils sont produits annuellement. Le comportement superélastique des fils de nickel -- titane permet de supporter de fortes variations de déformation tout en conservant un niveau de contrainte presque constant. Les réglages sont beaucoup moins fréquents que pour les fils dentaires classiques et le confort de l'utilisateur est accru.

II-6-2 Fil de localisation pour mammographie

La distinction entre cellules malades et cellules saines est très difficile à opérer lors de l'ablation d'une tumeur cancéreuse. Seul l'examen radiologique autorise une telle distinction. Les propriétés

superélastiques des NiTi alliées aux excellentes caractéristiques mécaniques de ces alliages permettent cependant de préserver les tissus sains pendant l'opération chirurgicale.

Un fil superélastique en NiTi, dont l'extrémité est en forme de boucle, est placé de façon rectiligne dans un cathéter. Lors de l'examen radiologique, le cathéter est positionné à proximité de la tumeur à extraire et le fil est poussé hors de son guide. Il forme alors une boucle qui vient marquer les tissus malades, servant ainsi de guide au bistouri du chirurgien.

II-6-3 Endoscope actif

Les possibilités offertes à la médecine moderne par l'emploi des fibres optiques ont rendu les endoscopes indispensables. L'utilisation des matériaux à mémoire de forme permet de réaliser des endoscopes actifs qui sont d'un emploi moins désagréable pour le patient.

Un tel instrument est constitué par une succession d'éléments rigides, de faible longueur, articulés entre eux. La faible taille des activateurs à mémoire de forme permet de doter ces articulations de « muscles ». Des muscles qui sont en même temps les nerfs « sensitifs ».

A chaque instant, la mesure de la variation de résistivité des activateurs permet de déterminer la contrainte s'exerçant sur chaque articulation. Par chauffage ou refroidissement des éléments à mémoire de forme, on peut ainsi donner à l'endoscope la forme la plus appropriée possible pour réduire les contraintes. Ces différentes opérations sont gérées de façon autonome par un microordinateur permettant ainsi à l'opérateur de guider cet endoscope d'une manière.

II-6-4 Réduction de fracture

La réduction d'une fracture est accélérée si un effort de compression est exercé sur la surface de réduction pendant la reconstitution du tissu osseux. L'emploi d'agrafes à mémoire de forme permet de réaliser simplement cette condition. Les parties fracturées sont assemblées au moyen d'agrafes en Nickel - Titane enfoncées dans l'os. Une fois mises en place, la température du corps humain sert de température de déclenchement à un effet de mémoire de forme qui, par modification de la géométrie des agrafes, assure la mise en compression de la surface à réduire.

II-6-5 Filtre à caillots sanguins

Des caillots sanguins peuvent se former dans certaines régions du corps humain et provoquer ainsi des embolies. Un filtre à caillots implanté dans la veine cave permet d'éviter ce risque. Cette solution implique une intervention chirurgicale délicate qui peut être supprimée par l'utilisation des matériaux à mémoire de forme. Un filtre est réalisé au moyen d'un fil en nickel -- titane en austénite. Ce fil est refroidi en phase martensitique puis déformé pour être placé dans un cathéter. L'ensemble est alors introduit dans le circuit veineux. Pendant cette opération, la circulation d'un fluide réfrigérant maintient l'alliage en phase basse température. Une fois arrivé dans la veine cave, le fil est expulsé du cathéter. Il se réchauffe alors au contact du sang et par mémoire simple retrouve sa forme de filtre.

D'autres applications médicales des propriétés des matériaux à mémoire de forme existent, par exemple le redressement de scoliose par l'implantation d'une barre en NiTi exerçant un effort de rappel sur la colonne vertébrale, ou l'emploi de rivets à mémoire de forme en chirurgie crânienne.

II-6-6 Domaine aérospatial

L'industrie aérospatiale doit minimiser le volume et le poids de toutes leurs composantes afin de minimiser les coûts de lancement. Puisque les AMF offrent un rapport force / densité excellent, ils sont des outils par excellence.

Le premier exemple est le télescope Hubble. Ce télescope, lancé en avril 1990, possédait des actionneurs en AMF (reprise de forme) pour le déploiement des panneaux solaires nécessaires à l'alimentation électrique des composantes électroniques.



fig II-4 Téléscope Hubble lancé en avril 1990 [5]

Le deuxième exemple est le satellite Clémentine. Lancé le 25 janvier 1994, ce satellite a déployé ses panneaux solaires en utilisant des boulons frangibolt développés par la compagnie TiNi Alloy Aerospace Inc. de San Leandro, Californie. Ces boulons permettent d'éliminer les charges explosives utilisées auparavant qui nécessitaient des précautions spéciales pour le transport et l'entreposage. De plus, ces charges libéraient un gaz lors de l'explosion, ce qui peut faire dévier le satellite de sa trajectoire initiale.



fig II-5 Satellite Clémentine lancé le 25/01/1994 [6]

Finalement, le dernier exemple est la célèbre station spatiale MIR. Après la chute de l'URSS, cette dernière est devenue la première station internationale. Dans un environnement hostile comme l'espace et avec l'absence de gravité, il est difficile d'assembler les modules de façon traditionnelle, comme par

exemple le boulonnage, le rivetage, la soudure. En effet, le simple fait d'appliquer une force sur une clé afin de serrer un boulon repousse l'astronaute en direction opposée. L'idée développée pour contrer ce problème utilise les AMF. Ce procédé ressemble à un sertissage effectué avec un tube d'AMF. On déforme préalablement à froid le tube, on y insère à l'intérieur l'assemblage et on chauffe par infrarouge le tube. Il se contracte et sertit alors l'assemblage. Cette technique ressemble énormément à la première application des AMF, c'est-à-dire à celle du manchon de raccordement pour les conduites hydrauliques du chasseur américain, le F-14.

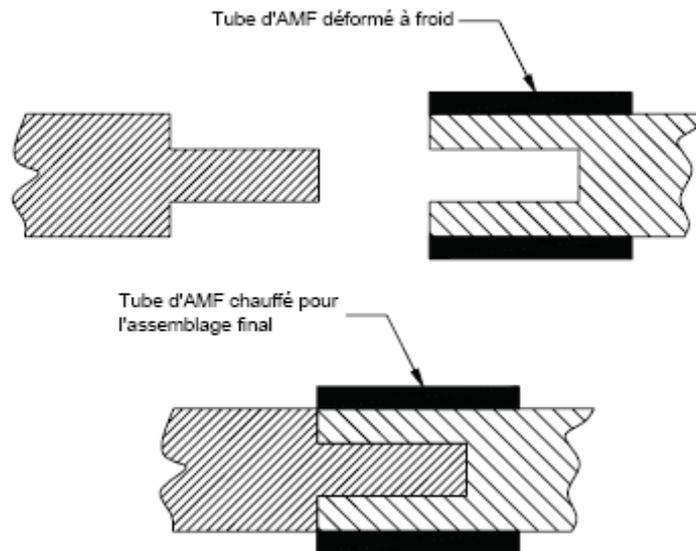


fig II-6 couplage thermomécanique [5]

Le secteur industriel, tout comme le secteur aérospatial, utilise également la reprise de forme des AMF afin de créer des actionneurs les plus compacts possible. Par contre, on utilise aussi les AMF pour leur effet amortissant et leur effet superélastique. En robotique, l'utilisation des microactionneurs est courante. Par exemple, la figure ci-dessous montre une main artificielle utilisant les AMF.

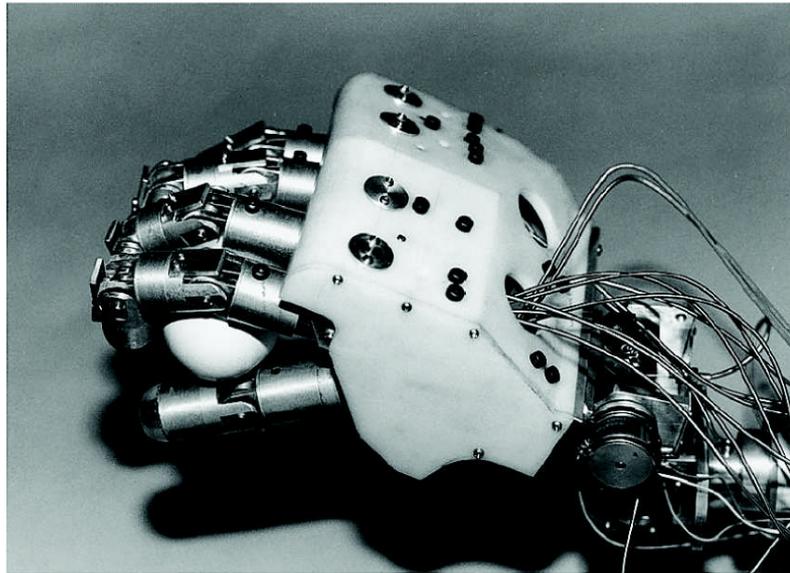


fig II-7 Micro activateur pour la robotique [5]

L'optométrie, avec ses lunettes à monture superélastique, est probablement l'exemple le plus connu. En effet, la superélasticité permet de grandes déformations et les lunettes deviennent alors pratiquement incassables.



fig II-8 Lunettes avec monture superélastique [5].

II-6-7 Domaine biomédical

Ce secteur d'activité a des exigences très élevées par rapport aux matériaux utilisés. D'ailleurs, ce secteur est probablement le plus actif de nos jours et il utilise particulièrement l'effet superélastique avec les alliages de nitinol qui sont évidemment biocompatibles. Par exemple, les stents sont des dispositifs qui permettent une chirurgie minimalement invasive afin de contrer les problèmes cardiaques liés à l'obstruction partielle des artères. En effet, ce dispositif, une fois contracté, s'insère dans l'artère. Par la suite, lors du relâchement, l'effet superélastique contraint l'artère à retrouver le diamètre original et permet ainsi le passage du sang.

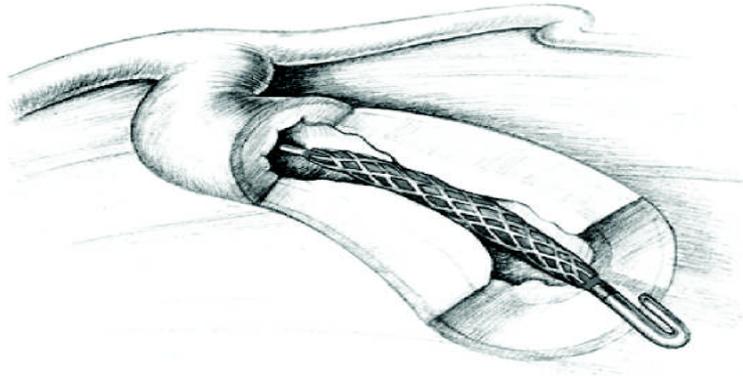


fig II-9 Stent cardiovasculaire comprimé [5]

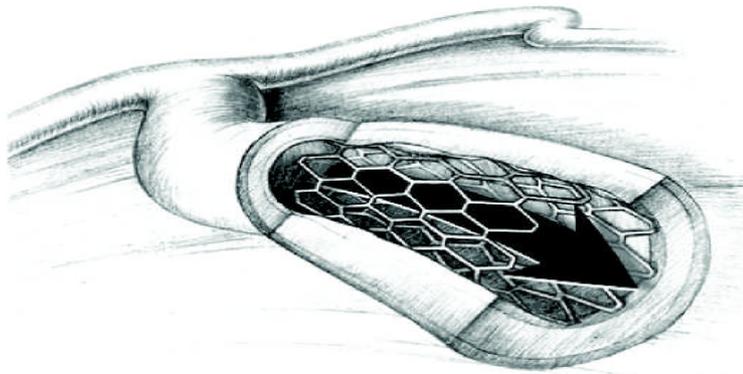


fig II-10 Stent cardiovasculaire relâché [5]

Tout comme le stent, la valve cardiaque de la figure permet une chirurgie minimalement invasive, ce qui réduit les répercussions négatives sur le patient. Pour plus d'information sur son fonctionnement, il est possible de consulter le brevet US6458153.

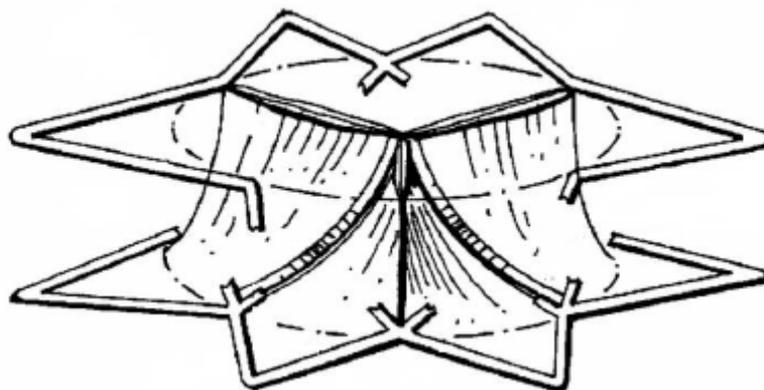


fig II-11 Valve cardiaque [5]

Finalement, le dernier exemple du secteur biomédical est les broches d'orthodontie. En effet, puisque les AMF ont un plateau sur l'hystérésis, la charge appliquée sur les dents reste constante pour une

certaine plage de déformation. Cela permet au patient d'aller moins régulièrement chez son dentiste pour l'ajustement de son appareil dentaire.



fig II-12 Broche d'orthodontie [5]

Chapitre III : Caractérisation des constantes élastiques et modèle numérique

III-1 Caractérisation des constantes élastiques:

Le présent chapitre, totalement inspiré de la référence [12] explique la procédure à suivre pour l'élaboration du diagramme de phase d'un alliage à mémoire de forme (AMF). Ce diagramme, nécessaire à l'utilisation des modèles numériques, représente la loi de comportement de l'alliage. Les données expérimentales, fournies par une des machines conçues spécialement à cet effet, sont collectées puis analysées pour l'obtention des paramètres de caractérisation. Par paramètres de caractérisation on entend, bien sûr les constantes élastiques de l'alliage telles que le module de Young et le coefficient de Poisson.

Ces données expérimentales peuvent être obtenues par plusieurs types d'appareil. Le RSA-II, appareil rhéométrique de fabrication canadienne, a été choisi pour expliquer la procédure.



fig III-1 Appareil Rheometrics RSA-II [12]

La procédure d'utilisation de ce genre d'appareil est la suivante:

- ✓ 1. Régler le zéro de l'appareil Rheometrics afin d'éliminer le poids des mors ou de tout autre élément.
- ✓ 2. Régler le décalage de contrainte à un.
- ✓ 3. Installer l'échantillon en le manipulant délicatement afin de minimiser l'orientation de la martensite de façon préférentielle. Plus le fil est petit, plus cette étape est importante.
- ✓ 4. S'assurer que l'échantillon est bien aligné et bien fixé.

✓ 5. Fermer l'enceinte thermique et augmenter la température interne jusqu'à une température supérieure à la température de fin de transformation de l'austénite, A_f (≈ 100 Celsius). Ceci permet la transformation de tout l'échantillon en austénite.

✓ 6. Ajuster le décalage de contrainte afin d'éliminer la charge appliquée au fil.

La longueur initiale du fil pour le calcul des déformations est la longueur du fil complètement transformé en austénite.

✓ 7. L'impossibilité du réglage (à cause du déplacement restreint) signifie que, lors de l'installation, la martensite était orientée et le fil était trop long. Il faut alors :

- ▶a. Enlever l'échantillon des mords.
- ▶b. Chauffer l'échantillon à l'aide d'un pistolet à air chaud pour retourner à l'austénite.
- ▶c. Après le refroidissement, on obtiendra de la martensite auto-accommodante.
- ▶d. Recommencer les étapes 1 à 6 en portant une attention particulière à l'étape 3.

Certains essais ont démontré qu'il y a sur ce matériau un effet de mémoire à deux sens. Si l'étape 7 ne fonctionne pas, il est possible d'installer l'échantillon de façon à ce qu'il soit lâche.

✓ 8. Ouvrir l'enceinte et mesurer (avec un compas et un pied à coulisse) la distance entre les Mords. Cette distance est la longueur initiale du fil nécessaire au calcul des déformations.

✓ 9. Entrer les paramètres voulus dans le logiciel, c'est-à-dire la longueur de l'échantillon mesurée à l'étape 8, la vitesse de déformation, la température, le temps, le diamètre et les unités.

✓ 10. Fermer l'enceinte et chauffer ou refroidir l'intérieur de l'enceinte thermique à la température désiré.

Il n'est pas possible d'exécuter un chargement suivi d'un déchargement en un seul essai, en raison d'une erreur résiduelle. Par conséquent, s'il y a plusieurs essais consécutifs à réaliser, l'erreur sur les derniers essais sera très importante, puisqu'elle est cumulative. Il faut donc effectuer deux essais distincts, c'est-à-dire qu'il faut effectuer un essai de traction suivi d'un essai de compression, comme aux étapes 11 et 12.

✓ 11. Effectuer un essai de traction, sauvegarder et exporter les données en ASCII.

✓ 12. Effectuer un essai de compression, sauvegarder et exporter les données en ASCII.

✓ 13. Si la température d'essai est inférieure à la température A_f (effet mémoire de forme), il faut s'assurer de retransformer tout l'échantillon en austénite afin d'éliminer la martensite

orientée. Pour ce faire, il suffit de chauffer l'échantillon à une température supérieure à AF.

On peut utiliser l'enceinte thermique pour augmenter la température, mais il est préférable d'utiliser un pistolet à air chaud. Cette technique est beaucoup plus rapide. Par contre, il faut s'assurer de chauffer entièrement l'échantillon.

- ✓ 14. Répéter les étapes 8 à 12 pour différentes températures.
- ✓ 15. Une fois que toute la plage de températures a été balayée, il suffit de recommencer les mêmes étapes, mais avec un échantillon différent.

L'échantillon analysé a une longueur initiale d'environ 30 mm. De plus, la vitesse de déformation est de 1 % par seconde. Cette vitesse relativement basse minimise l'effet de la chaleur latente sur l'échantillon. En effet, la chaleur latente pourrait permettre à l'échantillon d'atteindre une température différente de celle de l'enceinte thermique si les vitesses de chargement et de déchargement étaient élevées. Les deux essais effectués à température constante, mais avec deux vitesses de déformation différentes. Le premier essai est à 0,1 % par seconde, alors que le second est à 1 % par seconde. On peut voir aussi que les points sont plus rapprochés sur la courbe à carré. Les points sont tellement proches l'un de l'autre que la courbe ressemble à une ligne épaisse. Il importe tout particulièrement de souligner que les résultats sont très semblables et donc qu'il n'est pas nécessaire d'aller plus lentement. Diminuer encore la vitesse de déformation ne ferait que prolonger la durée des essais.

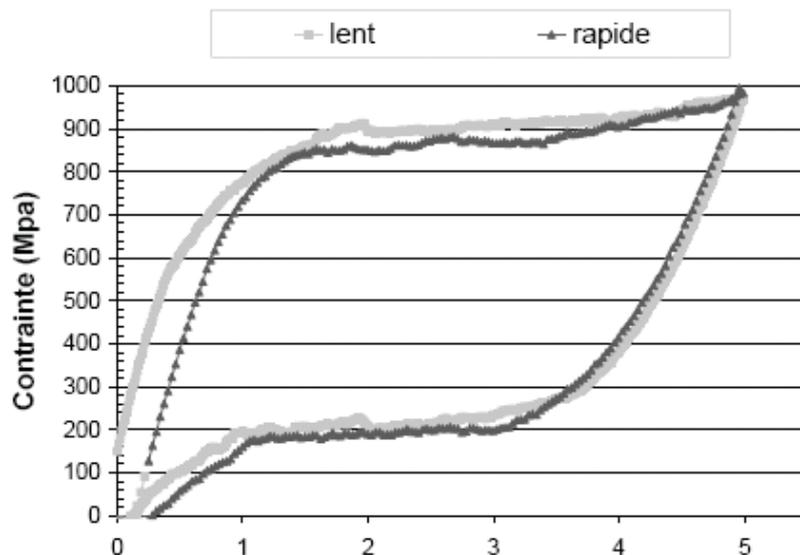


fig III-2 Essais identiques mais à des vitesses différentes [12]

Les résultats obtenus lors des essais expérimentaux permettent d'obtenir un fichier ASCII qui contient, par exemple, les données suivantes :

Exemple de données obtenues à l'aide du RSA-II

Tableau I: Exemple de données obtenues à l'aide du RSA-II

Durée s	Contrainte (t) Pa	Déformation (t)	Force N	DeltaL mm	Temp. °C
0	0	0	0	-0,4915	29,27
0,063	-2,94E+05	3,51E-04	-0,0024	-0,481	29,27
0,094	-1,33E+05	6,59E-04	-0,0011	-0,4717	29,27
0,125	-3,25E+05	9,71E-04	-0,0026	-0,4623	29,27
0,156	-4,65E+05	0,00129	-0,0038	-0,4528	29,27
0,188	-17356	0,0016	-1,41E-04	-0,4434	29,27
0,219	1,78E+05	0,00191	0,00144	-0,4341	29,27
0,25	7,08E+05	0,00222	0,00574	-0,4246	29,27
...

Tableau III-1 Exemple de données obtenues à l'aide du RSA-II [12]

La première colonne correspond à la durée de l'essai. La seconde et la troisième correspondent à la contrainte et à la déformation selon la force à la colonne quatre, la variation de longueur mesurée par la machine à la colonne cinq, ainsi que les dimensions introduites à l'initialisation du logiciel, soit la longueur initiale et le diamètre du fil. Finalement, la dernière colonne correspond à la température à l'intérieur de l'enceinte thermique.

Avant de traiter les données, il faut d'abord effectuer une correction. En effet, l'appareil Rheometrics calcule les déformations à partir de la variation de longueur et de la longueur initiale préalablement entrée dans le logiciel. Par contre, il utilise comme référence le point de départ, donc tous les essais débutent au point 0,0. Il n'y a donc pas de problème pour le chargement. Par contre, il faut ajuster les données pour le déchargement. Le graphe ci-après montre un chargement et un déchargement avant le traitement des données. La partie dans le quadrant III (partie inférieure gauche) correspond au déchargement, tandis que la partie dans le quadrant I (partie supérieure droite) correspond au chargement.

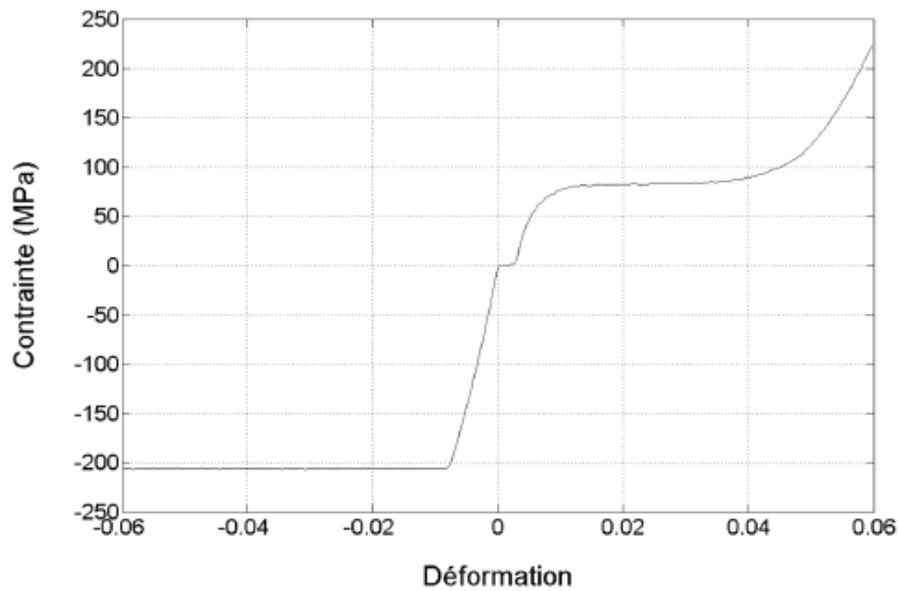


fig III-3 Exemple de chargement et de déchargement [12]

Il faut donc, pour le déchargement, appliquer une translation en x afin d'obtenir un point final en zéro et un déplacement en y ainsi que, à la fin, une contrainte nulle. Pour ce faire, une macro doit être réalisée. Elle permettra, via une interface graphique, d'entrer les facteurs de correction et de visualiser la translation. Une instruction de la macro permettra de sauvegarder les données dans un nouveau fichier tandis qu'une autre instruction permettra d'ouvrir le prochain fichier à corriger.

Une fois tous les fichiers de déchargement corrigés, il suffit de combiner le fichier de chargement avec le fichier de déchargement corrigé pour obtenir la courbe de traction complète, comme à la figure suivante:

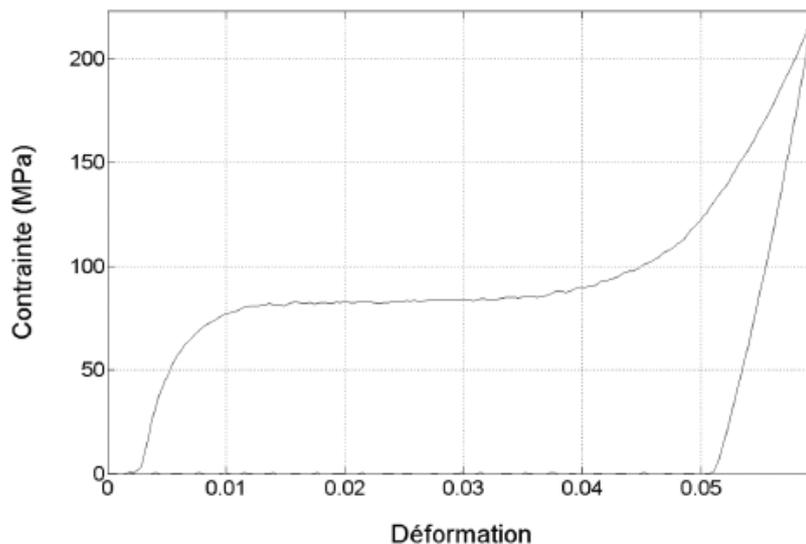


fig III-4 Combinaison des fichiers de chargement et de déchargement [12]

III-2 Modélisation numérique:

En raison de leur capacité à convertir l'énergie électrique en énergie mécanique par effet joule, il est tout indiqué de concevoir des modèles numériques, pour l'étude des AMF, qui tiennent compte du bilan thermomécanique.

Cependant, une revue bibliographique est d'abord effectuée afin de bien situer le modèle idoine par rapport à ceux existants.

Il existe essentiellement trois familles de modèles numériques d'AMF. Chacune de ces familles possède ses avantages et ses inconvénients propres à une application particulière. La section qui suit décrit brièvement ces trois familles.

III-2-1 Les modèles thermodynamiques ou macroscopiques

Cette approche a été utilisée par certains auteurs tels que Ivshin et Pence, Boyd et Lagoudas, Benzaoui, LExcellent et al., ainsi que par plusieurs autres. Généralement, les équations utilisées emploient les lois de la thermodynamique, c'est-à-dire qu'ils utilisent des notions abstraites comme l'enthalpie, l'entropie et l'énergie de Gibbs qui sont plutôt difficiles à mesurer. Par exemple, l'entropie peut être vue comme la mesure du désordre moléculaire, mais avec quel instrument peut-on mesurer ce désordre? Cependant, une fois que les paramètres sont assimilés et calculés, il suffit d'évaluer l'énergie libre de l'austénite et de la martensite. L'état ayant la plus faible énergie est favorisé. En effet, tout corps cherche à minimiser son énergie interne peu importe sa nature thermique, mécanique, chimique, électrique ou gravitationnel. Par exemple, la figure ci-après représente l'énergie de Gibbs (G) en fonction de la température (T) et de la pression (P) pour l'austénite et la martensite. Suivant le raisonnement précédent et en assimilant la pression à une contrainte, on remarque dans le diagramme P versus T que la martensite est la phase stable à basse température tandis que l'austénite est la phase stable à haute température. De plus, la droite qui sépare les deux états ressemble aux quatre droites du diagramme de phase. En effet, la droite du graphique représente la température T_0 , cette température critique n'est ni plus ni moins que la moyenne de M_F , M_s , A_s et A_f . Finalement, cette approche utilise uniquement une proportion de martensite macroscopique, ce qui signifie qu'on approxime un polycristal par un monocristal. Il n'est donc pas possible de simuler des textures.

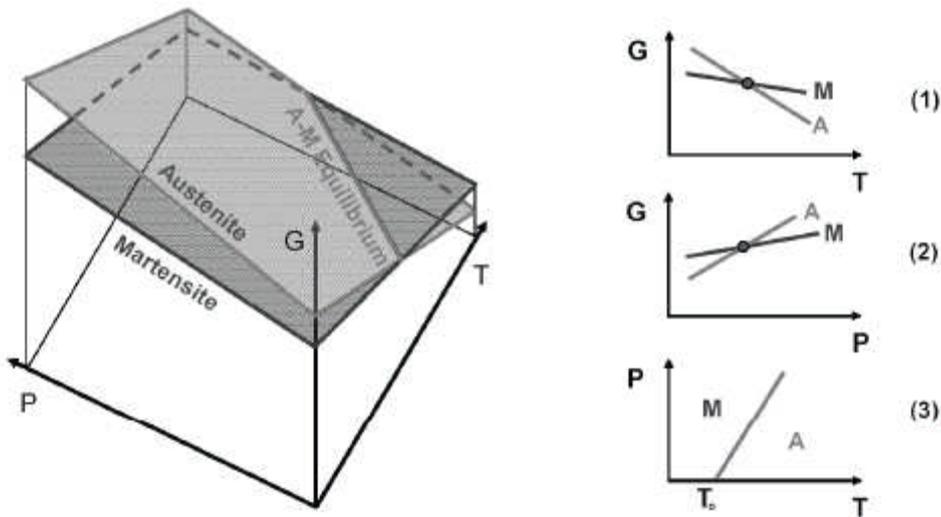


fig III-5 Equilibre thermodynamique des AMF [5]

III-2-2 Les modèles micromécaniques

Plusieurs auteurs, comme Lichatchev et Patoor et al., ont développé des modèles micromécaniques. Cette technique de modélisation est différente de la dernière présentée. En effet, cette approche calcule les déformations à l'échelle atomique et, par la suite, en effectuant une moyenne, il est possible de trouver la déformation macroscopique de l'échantillon. Cela implique le calcul d'une microdéformation et d'une proportion de martensite pour chaque grain du matériau. La figure ci-dessous montre la proportion de martensite pour trois grains. Malheureusement, le nombre de grains est normalement très élevé et rend les calculs très lourds. Un nombre insuffisant de grains ne représente pas bien la réalité, bien entendu, pour un matériau polycristallin. En effet, un matériau monocristallin n'a qu'un seul grain et, par conséquent, il n'est pas nécessaire d'utiliser un nombre élevé de grains, un seul suffit. Finalement, cette approche permet de modéliser facilement des textures (pour les matériaux polycristallins) en modifiant simplement l'orientation des grains. Il est aussi possible, à l'aide de cette famille de modèle, de créer les variantes de martensite. Cette approche, combinée à la texture, permet d'obtenir des modèles 3D très réalistes. Cependant, tout comme les modèles thermodynamiques, le calcul de la proportion de martensite s'effectue en calculant l'énergie libre de chaque grain, ce qui rend les calculs plus longs puisque le nombre de grains est normalement très élevé.

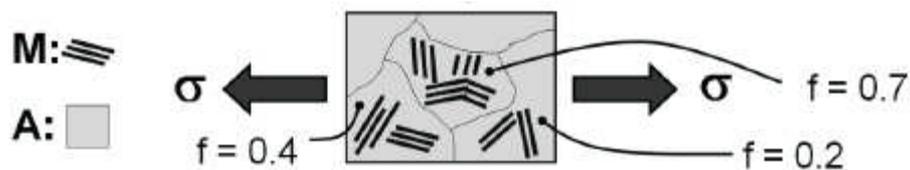


fig III-6 Proportion de martensite microscopique [5]

III-2-3 Les modèles phénoménologiques

La dernière famille de modèle est probablement la plus utilisée de par sa simplicité de compréhension. Par contre, elle est la moins captivante pour les puristes puisqu'elle reproduit des phénomènes physiques préalablement définis plutôt que de les expliquer. En effet, on bâtit le modèle à partir de résultats plutôt qu'à partir de phénomènes. Cette famille de modèle peut être divisée en deux sous catégories : les modèles basés sur l'interpolation et ceux fondés sur la loi constitutive de Tanaka.

1 Interpolation

Un des premiers modèles d'AMF est le modèle bilinéaire, c'est-à-dire qu'il est composé essentiellement de droites. Les fondateurs de ce modèle sont Müller et Xu qui ont modélisé une courbe superélastique comme à la figure ci-après. Les sous-cycles sont aussi modélisés avec des droites et les points d'inflexion passent par une droite nommée droite d'équilibre. La faiblesse de ce modèle est sans aucun doute la droite de transformation qui a une pente nulle. Cela signifie que $\sigma_{ms} = \sigma_{mf}$, ce qui est, à la base, difficilement concevable pour la majorité des AMF. Ce modèle considère donc le changement de phase comme étant instantané.

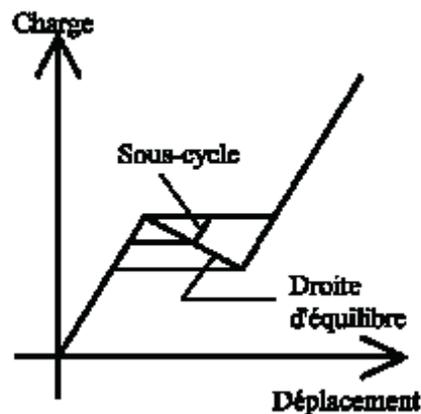


fig III-7 Modèle bilinéaire selon Müller et Xu [5]

Par la suite, une pente a été ajoutée à la droite de transformation. Ils obtiennent à ce moment un modèle qui ressemble à la figure ci-après.

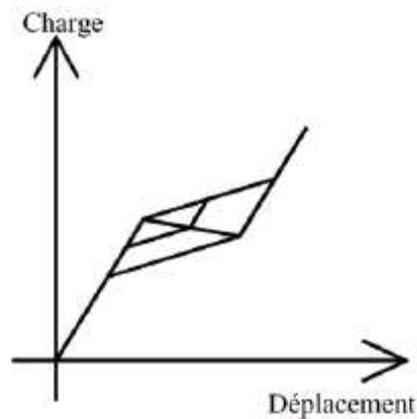


fig III-8 Modèle bilinéaire selon Brandon et Rogers [6]

D'autres auteurs ont aussi travaillé à améliorer le modèle. C'est le cas de Gillet et al. qui ont modifié le modèle en gérant différemment les sous-cycles. En effet, la droite d'équilibre est toujours présente, mais lorsque le chargement traverse cette droite, une pente est automatiquement calculée, et ce, à chaque fois. Cette façon de faire correspond mieux au comportement du nitinol pour les sous-cycles de chargement et de déchargement. Finalement, Viens a publié de récents travaux qui ont permis d'intégrer ce modèle au logiciel d'éléments finis commercial, ANSYS.

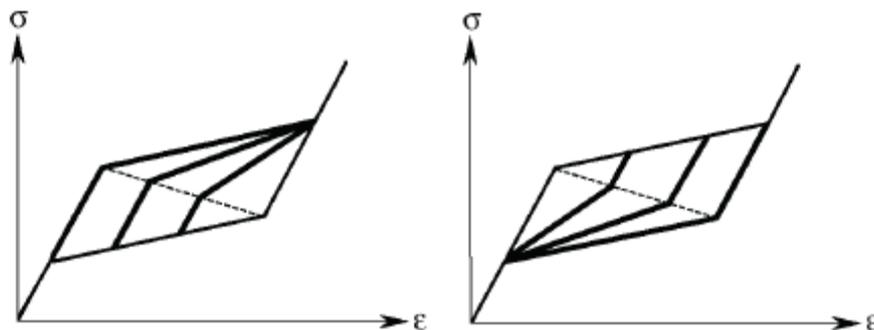


fig III-9 Modèle bilinéaire selon Gillet, Patoor et Berveiller [5]

Les modèles décrits précédemment ne représentent que les alliages à mémoire de forme dans leur domaine superélastique. Afin de remédier à ce problème, un autre modèle a été créé par Terriault . Il s'agit de définir une surface représentant le comportement d'un AMF dans le domaine de la déformation, de la température et de la contrainte. Pour ce faire, quelques courbes expérimentales sont utilisées et, à l'aide de la méthode d'interpolation du krigage, il est possible de générer une surface complexe. Il suffit par la suite d'interpréter sur la surface l'information désirée. En effet, si on connaît deux des trois paramètres de chargement, il est facile de trouver la courbe d'intersection sur la surface.

2 Tanaka

La dernière série de modèles est basée sur une équation constitutive développée par Tanaka . Cette équation s'appuie sur la thermodynamique et a la forme dérivative suivante :

$$d\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}d\varepsilon + \frac{\partial\sigma}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\sigma}{\partial T}dT \quad [\text{III-1}]$$

Où σ est la contrainte.

ξ est la proportion de martensite dans le matériau.

ε est la déformation.

T est la température.

À première vue, on peut dire que la contrainte dépend de la déformation, de la proportion de martensite ainsi que de la température. Le premier terme correspond à la déformation élastique. En effet, la variation de contrainte par rapport à une variation de déformation est tout simplement le module de Young et la loi de Hooke stipule que le module de Young multiplié par la déformation est égal à la contrainte. Toutefois, il est important de noter que le module de Young est différent pour la martensite et l'austénite. Le second terme est la contrainte de transformation qui dépend de la proportion de martensite. Finalement, le dernier terme correspond à la variation de contrainte générée par la température pour un AMF. On peut comparer ce terme à la dilatation.

L'équation peut aussi s'écrire de la façon suivante sous forme incrémentielle par rapport à un état connu ($\sigma_o, \varepsilon_o, T_o, \xi_o$)

où D est le module de Young, Ω est le tenseur de transformation et Θ est le taux de variation de la contrainte par rapport à la température.

$$\sigma - \sigma_o = D(\varepsilon, \xi, T) * (\varepsilon - \varepsilon_o) + \Omega(\varepsilon, \xi, T) * (\xi - \xi_o) + \Theta(\varepsilon, \xi, T) * (T - T_o) \quad [\text{III-2}]$$

Le module de Young dépend de trois facteurs. Cependant, des études expérimentales démontrent qu'il est étroitement lié à la proportion de martensite. Liang [52] propose donc l'équation suivante :

$$D(\varepsilon, \xi, T) = D_a + \xi(D_m - D_a) \quad [\text{III-3}]$$

Où D_a est le module d'élasticité de l'austénite tandis que D_m est celui de la martensite. Il est aussi possible d'exprimer Ω de la façon suivante :

$$\Omega(\varepsilon, \xi, T) = -\epsilon_L D(\xi) \quad [\text{III-4}]$$

Où $\{L\}$ est la valeur de déformation résiduelle maximum. Finalement, la valeur de Θ peut être considérée comme une constante puisque la variation de ce terme est très faible en fonction des variables impliquées. Par exemple, Brinson utilise une valeur de 0.55 MPa/oC. Cet auteur a d'ailleurs modifié légèrement

l'équation de Tanaka. Toutefois, l'essence reste la même. L'équation de Tanaka semble donc à première vue très simple. Par contre, le calcul de la proportion de martensite est compliqué. En effet, les modèles utilisant l'équation de Tanka se distinguent par le calcul de cette proportion. Tanaka utilise une équation qui approxime la proportion de martensite à l'aide d'une équation exponentielle. Liang et Rogers proposent une équation basée sur un cosinus tandis que Brinson conserve la forme basée sur le cosinus, mais sépare la proportion de martensite en deux proportions de martensite distinctes. La première dépend de la contrainte, c'est donc la proportion de martensite orientée. La deuxième, pour sa part, ne dépend que de la température, c'est donc la proportion de martensite autoaccomodante. Bien entendu, la somme des deux proportions de martensite doit toujours être comprise entre zéro et un. Finalement, Huang propose un ajustement de courbe sur le ratio de la déformation de transformation par rapport à la déformation de transformation maximum pour trouver la proportion de martensite.

Chapitre IV : Le Krigage

IV.1 Introduction:

A partir d'une série d'observations ou de mesures d'un phénomène physique ou d'une entité géométrique, comment obtenir un modèle mathématique, le plus fidèle possible, du phénomène ou de la forme?

La réponse à la question se trouve parmi les nombreuses méthodes numériques. L'une de ces méthodes, récemment développée, est le krigage.

Le principe de la méthode est simple. Toute observation ou mesure peut s'écrire sous la forme suivante:

$$u(x)=a(x)+b(x) \quad [VI-1]$$

Où

a(x) est une fonction représentant la valeur moyenne de la mesure ou de l'observation et est appelée **Dérive**.

b(x) est une fonction qui représente les fluctuations et est appelée covariance.

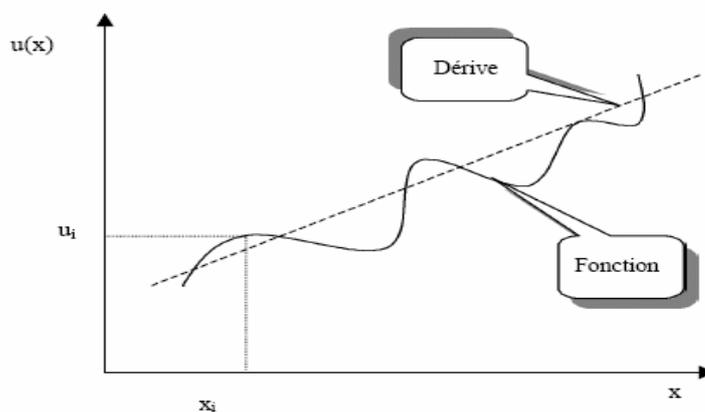


fig IV-1 schéma des fonctions dérive et fluctuation [6]

Le krigage détermine de façon singulière ces deux fonctions. En effet chaque mesure peut être décomposée en une valeur moyenne, grâce à la dérive, à laquelle s'ajoute une correction adéquate représentée, en l'occurrence, par la covariance.

La fonction $a(x)$ peut faire l'objet de plusieurs hypothèses:

- ▶ $a(x)=a_0$ dérive constante
- ▶ $a(x)=a_0+a_1 x$ dérive linéaire
- ▶ $a(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2$ dérive quadratique
- ▶ $a(x)=a_0 +a_1 \cos x+a_2 \sin x$ dérive trigonométrique

IV.2 Mise en place des équations du krigeage.

Soit un phénomène discrétisé par une série de mesures $(x_0 ,x_1 ,.....x(i).....x(n))$.

La fonction $u(x)$ représentant la valeur moyenne peut être prise égale à l'espérance mathématique de la série de mesures.

Donc

$$u(x) = a(x) = E[u(x)] = \sum_{i=1}^n \lambda_i . u(x_i) \quad \text{[VI-2]}$$

A partir de cette hypothèse, nous allons déterminer les deux fonctions $a(x)$ et $b(x)$.

Tout d'abord, précisons qu'il y a certaines conditions, appelées conditions de non biais, préalables aux hypothèses déjà faites. En effet si la tendance de la mesure ou du phénomène était linéaire, alors on peut écrire:

$$a_0 + a_1 x = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_0 + a_1 x_i) \quad \text{[VI-3]}$$

D'où l'on tire, puisque cette équation est vérifiée quels que soient a_0 et a_1

$$\begin{aligned} & a_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) + a_1 \left(x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) = (\\ & \text{▶ } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \\ & \text{▶ } \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = x \end{aligned} \quad \text{[VI -4]}$$

Un raisonnement analogue permet d'établir les conditions de non biais pour un dérive constante, quadratique, trigonométrique ou autre.

D'une façon générale, les conditions de non-biais, se déduisent de l'équatio

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^p = x^p \quad \text{[VI-5]}$$

Ces équations doivent faire partie du système d'équations à résoudre pour le krigage d'un échantillon.

L'hypothèse (1) faite, il reste alors à l'optimiser pour avoir un estimateur le plus fiable possible.

Dans ce but, on minimise la variance de l'erreur d'estimation.

L'erreur d'estimation est donnée par l'expression:

$$\delta u(x) = u(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i) \quad \text{[VI-6]}$$

et la variance de l'erreur d'estimation par

$$\text{var}[\delta u(x)] = E[(\delta u(x) - E[\delta u(x)])^2] \quad \text{[VI-7]}$$

Le problème d'interpolation du phénomène physique se transforme, ainsi, en un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité représentées par les conditions de non biais.

Le système à résoudre devient donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MIN}(E[(\delta u(x) - E[\delta u(x)])^2]) \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = x \end{array} \right. \quad \text{[VI-8]}$$

Développons la première équation

$$\text{var}[\delta u(x)] = E[(\delta u(x) - E[\delta u(x)])^2] = E[(\delta u(x))^2] \quad \text{[VI-9]}$$

puisque $E[\delta u(x)] = 0$ traduction des conditions de non-biais. Et donc:

$$\begin{aligned}
 var[\delta u(x)] &= E \left[\left(u(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i) \right)^2 \right] \\
 var[\delta u(x)] &= E \left[u(x)^2 - 2 * u(x) * \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i) + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i) \right)^2 \right] \\
 var[\delta u(x)] &= E \left[u(x)^2 - 2 * \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i) * u(x) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j u(x_i) u(x_j) \right] \quad [VI-10] \\
 var[\delta u(x)] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j E[u(x_i) * u(x_j)] - 2 * \sum_{i=1}^n \lambda_i E[u(x_i) * u(x)] + E[u(x)^2]
 \end{aligned}$$

Pour cela, le système d'équations à résoudre devient :

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j E[u(x_i) * u(x_j)] - 2 * \sum_{i=1}^n \lambda_i E[u(x_i) * u(x)] + E[u(x)^2] \\
 &\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \\
 &\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i = x
 \end{aligned} \right. \quad [VI-11]$$

Ce qui est équivalent au problème d'optimisation suivant:

minimiser l'équation

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j E[u(x_i) * u(x_j)] - 2 * \sum_{i=1}^n \lambda_i E[u(x_i) * u(x)] + E[u(x)^2] \quad [VI-12]$$

Sous les contraintes d'égalité

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i E[u(x_i)] = E[u(x)] \quad [VI-13]$$

$$\quad [VI-14]$$

Puisque $E[u(x)]$ représente l'espérance mathématique c'est à dire la moyenne des mesures du phénomène physique, on peut lui substituer la fonction $a(x)$ qui représente cette même moyenne. Donc:

$$E[u(x)] = a(x) \quad [VI-15]$$

D'autre part, en statistique la définition de la covariance est:

$$cov(x,y) = E[(x-E[x])(y-E[y])] = E[x.y] - E[x]E[y]$$

$$\Rightarrow E[x.y] = cov(x,y) + E[x].E[y] \quad [VI-16]$$

la terme $E[x.y]$ qui quantifie la corrélation entre deux variables x et y , dépend de la distance $|x-y|$

et permet de faire l'hypothèse intrinsèque :

$$E[x.y] = K(|x - y|) \tag{VI-17}$$

la fonction k() est appelée covariance généralisée.

La fonction K() n'est autre que la distance euclidienne entre un point situé à x et un autre situé à y

Signalons qu'il existe plusieurs modèles possibles pour définir la covariance généralisée. Les plus utilisés sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} K(|x - y|) = |x - y| \\ K(|x - y|) = |x - y|^2 \ln|x - y| \\ K(|x - y|) = |x - y|^3 \end{array} \right. \tag{VI-18}$$

pour, respectivement une covariance linéaire, logarithmique ou cubique.

Les simplifications ci-après des termes de l'équation (2) s'imposent

$$\begin{aligned} E[u(x).u(x_i)] &= K(|x - x_i|) \\ E[u(x_i).u(x_j)] &= K(|x_i - x_j|) \\ E[u(x)^2] &= cte \end{aligned} \tag{VI-19}$$

Le problème d'optimisation se réduit alors à

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j K(|x_i - x_j|) - 2 * \sum_{i=1}^n \lambda_i K(|x - x_i|) \right) \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i = x \end{array} \right. \tag{VI-20}$$

Pour ce faire, il est nécessaire d'écrire l'équation de Lagrange:

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j K(|x_i - x_j|) - 2 * \sum_{i=1}^n \lambda_i K(|x - x_i|) + \mu_0 \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i - 1 \right) + \mu_1 \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i - x \right) \tag{VI-21}$$

Ou μ_0 et μ_1 sont les multiplicateurs de Lagrange.

la solution consiste alors à écrire que les dérivées de l'équation de Lagrange par rapport aux différents variables $\lambda_{\{i\}}$ et par rapport aux multiplicateurs de Lagrange sont nulles et de résoudre le système d'équations obtenu par rapport aux mêmes variables

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \lambda_j K(|x_i - x_j|) - 2 * K(|x - x_i|) + \mu_0 + \mu_1 x_i = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_0} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i = x \end{array} \right. \quad \text{[VI-22]}$$

Ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2} K(|x_i - x_j|) + \frac{\mu_0}{2} + \frac{\mu_1}{2} x_i = K(|x_i - x|) \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_0} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i = x \end{array} \right. \quad \text{[VI-23]}$$

La solution du système, sous forme vectorielle, s'écrit:

$$u(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{j=1}^N b_j K(|x - x_j|) \quad \text{[VI-24]}$$

Ce qui donne, sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & 1 & x_1 \\ \dots & K(|x_i - x_j|) & \dots & 1 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & \dots & x_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \dots \\ 1 \\ x \end{bmatrix} \quad \text{[VI-25]}$$

Les coefficients b_i sont déterminés en écrivant l'équation krigée pour l'ensemble des points donnés ce qui donne le système dual à résoudre suivant:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & 1 & x_1 \\ \dots & K(|x_i - x_j|) & \dots & 1 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & \dots & x_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\text{VI-26}]$$

La fonction qui interpole un phénomène physique donné, se compose donc de deux fonctions.

La première $a(x)$ est appelée dérive et représente la tendance moyenne du phénomène. C'est la raison pour laquelle la fonction $a(x)$ sensée approcher, en tout point x , la valeur moyenne du phénomène étudié est dite moyenne mobile.

La seconde $k(x)$ est appelée fluctuation aléatoire et représente une correction de la dérive permettant à la courbe de passer par les points de collocation donnés.

Il faut noter que les deux systèmes obtenus précédemment comportent des matrices à trace nulle, et donc un soin particulier doit être apporté à la résolution de ces systèmes, surtout si la méthode d'élimination de Gauss a été retenue pour la résolution du système, de peur que les pivots ne soient nuls.

Le développement précédent n'est valable que pour une dérive supposée linéaire. si la dérive est prise quadratique alors un ajustement est nécessaire et s'écrit, le principe restant le même, comme :

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & 1 & x_1 & x_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & x_2 & x_2^2 \\ \dots & K(|x_i - x_j|) & \dots & 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_i & x_n & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_i^2 & x_n^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_i \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ u(x_i) \\ 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}$$

De la même façon, si la dérive était bidimensionnelle, alors le système devient :

$$\begin{bmatrix}
 \dots & \dots & \dots & 1 & x_1 & y_1 \\
 \dots & \dots & \dots & 1 & x_2 & y_2 \\
 \dots & K\left(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\right) & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & 1 & x_n & y_n \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & x_i & x_n & 0 & 0 & 0 \\
 1 & y_i & y_n & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 \dots \\
 b_n \\
 a_0 \\
 a_1 \\
 a_2
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 u(x_1, y_1) \\
 u(x_2, y_2) \\
 \dots \\
 u(x_n, y_n) \\
 1 \\
 x \\
 y
 \end{bmatrix}$$

Le principe de la technique du krigeage est ainsi entièrement développé. Il serait intéressant de détailler les propriétés du krigeage.

IV.3 Effet pépète.

En premier lieu, il est important de préciser que la fonction $k()$, que nous avons appelée covariance généralisée, peut s'exprimer par n'importe quelle norme. Le plus simple est alors de prendre pour la fonction $k()$, en une dimension, la norme $|x-y|$ qui caractérise la notion bien connue de distance.

En dimension 2 la même norme s'exprime par $\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$. En dimension trois et plus, le rapprochement est vite fait.

Si la fonction $K()$ peut avoir pour expression celle d'une norme quelconque, le choix ne se fait pas de façon tout à fait arbitraire. Certaines fonctions peuvent représenter, mieux que d'autres, le phénomène physique étudié. Le soin du choix est laissé à l'appréciation de l'analyste.

Il est parfois utile de ne pas recourir du tout aux normes, et de penser à utiliser une fonction plus spécifique au phénomène utilisé. Par exemple, il peut arriver que certaines mesures ne reflètent pas de façon fidèle le phénomène physique étudié et qu'il faille, en toute logique, éliminer ce genre de données.

Pour tenir compte de cette observation, il est possible d'introduire une distance d'influence au delà de laquelle la fonction $K()$ s'annule, ce qui permet de réduire l'influence de certains points de collocation situés à une distance supérieure à d :

$$k(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{d} & \text{si } 0 < x < d \\ 0 & \text{si } x > d \end{cases} \quad \text{[VI-27]}$$

En effet, lorsqu'on fait de l'interpolation à partir de mesures expérimentales, il est quelquefois utile, voire même nécessaire, d'avoir la possibilité d'éliminer une ou plusieurs données qui paraissent aberrantes. Ces données peuvent provenir d'erreur de mesure par exemple. Cette façon de procéder est appelée effet pépité

IV.4 Invariance du krigage:

Si la fonction $k(x)$ est remplacée par $k(x) + c$, l'équation d'ordre i du système devient:

$$b_1(k(x) + c) + b_2(k(x) + c) + \dots + b_n(k(x) + c) + a_0 + a_1x = f(x_i) \quad [\text{VI-28}]$$

qui peut être développé de la manière suivante:

$$\sum_{i=1}^n b_i k(x) + \sum_{i=1}^n c b_i + a_0 + a_1 x = f(x_i) \quad [\text{VI-29}]$$

ou encore
$$\sum_{i=1}^n b_i k(x) + c \sum_{i=1}^n b_i + a_0 + a_1 x = f(x_i) \quad [\text{VI-30}]$$

or d'après les conditions de non biais, $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ il vient donc

$$\sum_{i=1}^n b_i k(x) + a_0 + a_1 x = f(x_i) - c \quad [\text{VI-31}]$$

La forme de courbe reste la même car elle n'a subi qu'une translation globale de vecteur vertical $-c$.

Il en est de même, si au lieu d'ajouter une constante c aux éléments k_{ij} , on les multiplie par une constante λ . Le vecteur $\{b\}$, solution du système d'équations dual, est divisée par cette même constante mais la courbe reste inchangée.

IV-5 Application au krigage des surfaces

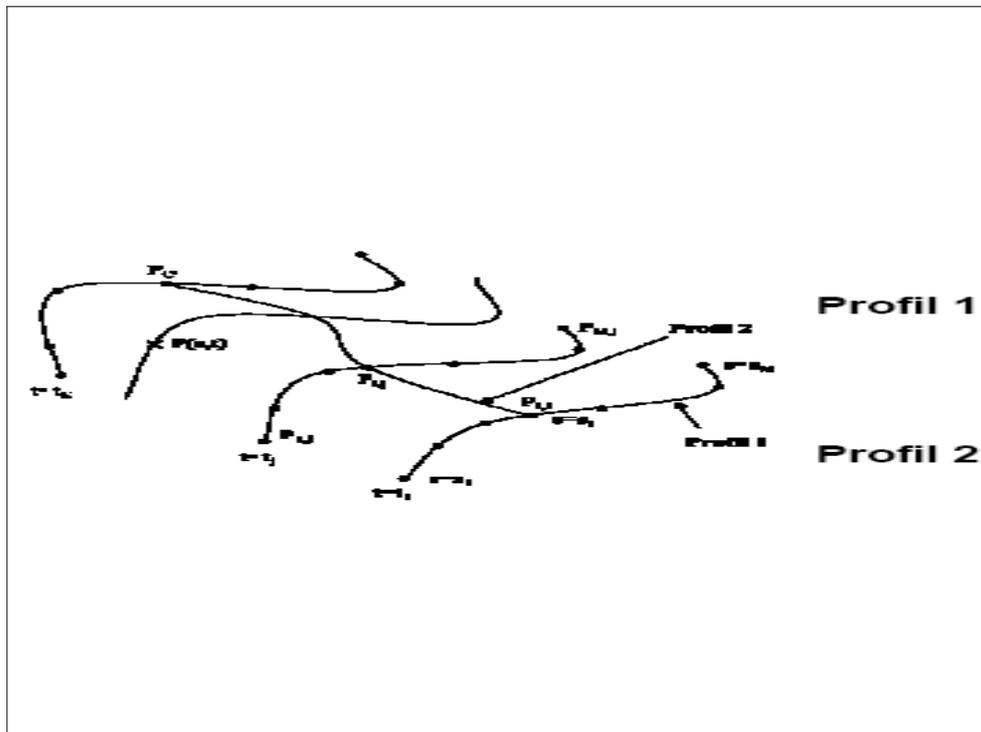


fig IV-2 Représentation d'une surface par des courbes [9]

Considérons une surface $z=f(x,y)$. Cette fonction est définie par différentes courbes $z=f(x,y_{\{i\}})$.

C'est-à-dire qu'à chaque valeur de la coordonnées y correspond une courbe de la surface. sur chacune des n courbes données choisissons m points

Une autre formulation consiste à choisir $m*n$ points P_{ij} tels que $P_{ij}=z(x_{\{i\}},y_{\{j\}})$ $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$

Les courbes obtenues en faisant $y=c_{te}$ sont désignées par le terme profil1, et celles obtenues en faisant $x=c_{te}$ par le terme profil2.

Alors, suivant le profil1, pour tout point de la courbe $y=y_{\{i\}}=c_{te}$ la valeur de z peut être interpolée par la technique du krigage en considérant une dérive constante par exemple:

$$f(x,y) = a_0 + \sum_{k=1}^n b_k K_1(|x - x_k|) \quad [VI-32]$$

ou sous forme vectorielle:

$$f(x,y) = \langle K_1(|x-x_1|), K_1(|x-x_2|), \dots, K_1(|x-x_m|), 1 \rangle \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \\ a_0 \end{Bmatrix} \quad [\text{VI-33}]$$

le vecteur {b} est solution du système dual suivant:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & K_1(|x_i-x_j|) & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \\ a_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x_1, y_q) \\ \dots \\ f(x_m, y_q) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

en remplaçant l'expression du vecteur {b} dans l'équation (3-1), on peut écrire:

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \\ a_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & K_1(|x_i-x_j|) & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f(x_1, y_q) \\ \dots \\ f(x_m, y_q) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou sous forme condensée on peut écrire:

$$f(x,y) = \langle K_1(|x-x_1|), K_1(|x-x_2|), \dots, K_1(|x-x_m|), 1 \rangle \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & K_1(|x_i-x_j|) & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f(x_1, y_q) \\ \dots \\ f(x_m, y_q) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [\text{VI-34}]$$

D'autre part, selon le profil2, les mêmes points appartiennent à des courbes f(x=cte,y). Ce qui nous donne, en considérant cette fois, une dérive linéaire:

$$f(x,y) = \langle K_1 \rangle [S]^{-1} \{f(x,y_q)\} \quad [\text{VI-35}]$$

sous forme vectorielle, on peut écrire:

$$f(x, y_q) = \langle d_1, d_2, \dots, d_n, c_0, c_1 \rangle \left\{ \begin{array}{c} K_2(|y - y_1|) \\ K_2(|y - y_2|) \\ \dots \\ K_2(|y - y_n|) \\ 1 \\ y \end{array} \right\} \quad [\text{VI-36}]$$

Soit $f(x, y_q) = \langle d \rangle \{K_2\}$ [VI-37]

le vecteur ligne $\langle d \rangle$ est solution du système dual suivant:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & 1 & y_1 \\ \dots & K_2(|y_i - y_j|) & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & y_n \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ y_1 & \dots & y_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} d_1 \\ \dots \\ d_n \\ c_0 \\ c_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f(x_p, y_1) \\ \dots \\ f(x_p, y_n) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

soit sous forme condensée:

$$\begin{aligned} \text{d'ou} \quad [T]\{d\} &= \{f(x_p, y_q)\} \\ \{d\} &= [T]^{-1} \{f(x_p, y_q)\} \\ \{d\}^t &= ([T]^{-1} \{f(x_p, y_q)\})^t = \{f(x_p, y_q)\}^t ([T]^{-1}) \end{aligned} \quad [\text{VI-38}]$$

Et comme [T] est une matrice symétrique, donc:

$$\{d\}^t = \{f(x_p, y_q)\}^t ([T]^{-1}) \quad [\text{VI-39}]$$

$$\text{ou encore} \quad \langle d \rangle = \{d\}^t = \{f(x_p, y_q)\}^t ([T]^{-1}) \quad [\text{VI-40}]$$

Remplaçons dans (3-3), il vient:

$$f(x, y_q) = \{f(x_p, y_q)\}^t \cdot [T]^{-1} \cdot \{K_2\} \quad [\text{VI-41}]$$

Reportons enfin cette expression dans (3-2):

$$f(x, y) = \langle K_1 \rangle \cdot [S]^{-1} \cdot \{f(x_p, y_q)\}^t \cdot [T]^{-1} \cdot \{K_2\} \quad [\text{VI-42}]$$

C'est l'équation recherchée, qu'on peut simplifier de la manière suivante:

$$f(x,y) = \langle K_1 \rangle \cdot [S]^{-1} \cdot [f(x_q, y_p)] \cdot [T]^{-1} \cdot \{K_2\} \quad [VI-43]$$

IV-6 Application à la réponse des AMF aux sollicitations cycliques

La thèse du docteur Enrique Lopez Cuellar de l'école doctorale de Lyon option matériaux [3] comporte, en son chapitre V, l'étude de la contrainte d'un échantillon AMF, en l'occurrence NiTiCu 5%, en fonction du nombre de cycle thermomécanique. L'échantillon subit plusieurs hystérésis, quelques milliers, durant lesquelles des mesures de la contrainte sont faites régulièrement. Ce travail a été repris pour des températures de traitement différentes, mais pour un même temps de traitement.

Pour chacune des températures de traitement, au nombre quatre 325, 385, 425 et 485, les courbes représentant l'évolution de la contrainte en fonction du nombre de cycles sont consignés sur des graphiques que nous reportons ci-dessous:

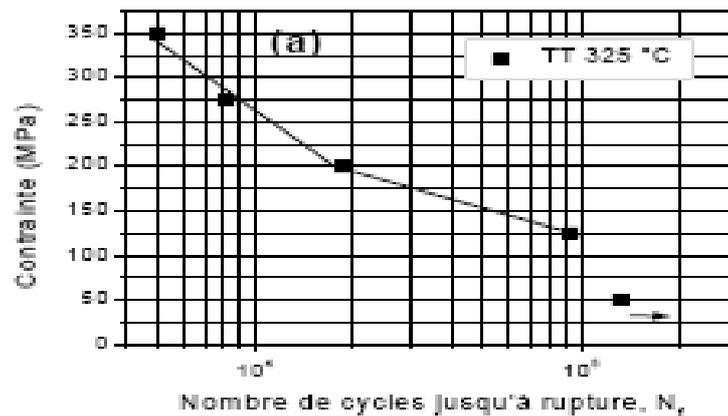


fig IV-3 Contrainte en fonction du nombre de cycle à TT=325°C [3]

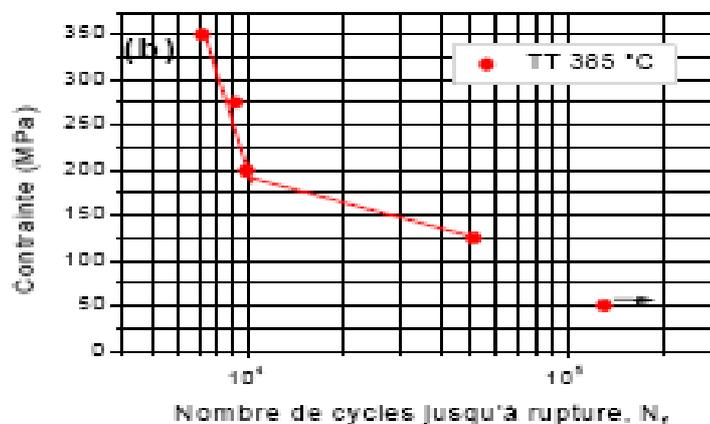


fig IV-4 Contrainte en fonction du nombre de cycle à TT=385°C [3]



fig IV-5 Contrainte en fonction du nombre de cycle à TT=425°C [3]

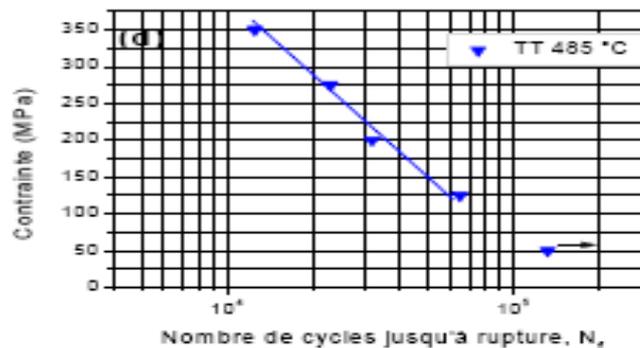


fig IV-6 Contrainte en fonction du nombre de cycle à TT=485°C [3]

L'auteur précise que, vu le grand nombre des essais, l'aspect statistique lié à la dispersion des résultats n'a pu être étudié. c'est ce que nous nous proposons de faire, grâce à la technique d'interpolation du krigage.

Pour appliquer la technique d'interpolation étudiée au chapitre précédent, quatre points ont été prélevés sur chacune des quatre courbes retenues. Ces points sont consignés dans le tableau suivant:

...	x=14000	x=20000	x=25000	x=30000
y=325	218.33	183.34	179.18	175.00
y=385	170.00	162.50	156.25	150.00
y=425	310.77	269.23	234.62	200.00
y=485	350.00	320.65	296.20	271.74

Dans notre cas, la coordonnées x correspond au nombre de cycles et la coordonnées y à la température du traitement thermique. Les valeurs situées à l'intersection des lignes et colonnes représentent les valeurs de $z=f(x,y)$. La fonction z correspond à la contrainte.

Calculons le vecteur ligne K:

$$K_1 = \langle |x - 14000|, |x - 20000|, |x - 25000|, |x - 30000|, 1 \rangle \quad [\text{VI-44}]$$

Calculons les éléments de la matrice [S] et son inverse:

$$[S] = \begin{bmatrix} |14000 - 14000| & |14000 - 20000| & |14000 - 25000| & |14000 - 30000| & 1 \\ |20000 - 14000| & |20000 - 20000| & |20000 - 25000| & |20000 - 30000| & 1 \\ |25000 - 14000| & |25000 - 20000| & |25000 - 25000| & |25000 - 30000| & 1 \\ |30000 - 14000| & |30000 - 20000| & |30000 - 25000| & |30000 - 30000| & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6000 & 11000 & 16000 & 1 \\ 6000 & 0 & 5000 & 10000 & 1 \\ 11000 & 5000 & 0 & 5000 & 1 \\ 16000 & 10000 & 5000 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

, inverse:

$$[S]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12000} & \frac{1}{12000} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12000} & -\frac{11}{60000} & \frac{1}{10000} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10000} & -\frac{1}{5000} & \frac{1}{10000} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10000} & -\frac{1}{10000} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -8000 \end{bmatrix}$$

Calculons le vecteur k2

$$K_2 = \left\{ \begin{array}{l} |y - 325| \\ |y - 385| \\ |y - 425| \\ |y - 485| \\ 1 \\ y \end{array} \right\}$$

les éléments de la matrice [T] et son inverse:

$$[T] = \begin{bmatrix} |325 - 325| & |325 - 385| & |325 - 425| & |325 - 485| & 1 & 325 \\ |385 - 325| & |385 - 385| & |385 - 425| & |385 - 485| & 1 & 385 \\ |425 - 325| & |425 - 385| & |425 - 425| & |425 - 485| & 1 & 425 \\ |485 - 325| & |485 - 385| & |485 - 425| & |485 - 485| & 1 & 485 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 325 & 385 & 425 & 485 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 60 & 100 & 160 & 1 & 325 \\ 60 & 0 & 40 & 100 & 1 & 385 \\ 100 & 40 & 0 & 60 & 1 & 425 \\ 160 & 100 & 60 & 0 & 1 & 485 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 325 & 385 & 425 & 485 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{192} & \frac{1}{120} & 0 & -\frac{1}{320} & \frac{97}{32} & -\frac{1}{160} \\ \frac{1}{120} & -\frac{1}{48} & \frac{1}{80} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{80} & -\frac{1}{48} & \frac{1}{120} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{320} & 0 & \frac{1}{120} & -\frac{1}{192} & -\frac{65}{32} & \frac{1}{160} \\ \frac{97}{32} & 0 & 0 & -\frac{65}{32} & \frac{31525}{16} & -\frac{81}{16} \\ -\frac{1}{160} & 0 & 0 & \frac{1}{160} & -\frac{81}{16} & \frac{1}{80} \end{bmatrix}$$

calculons finalement les éléments de la matrice $f(x_{\{q\}}, y_{\{p\}})$:

$$f(x_q, y_p) = \begin{bmatrix} 218.33 & 170.00 & 310.77 & 350.00 & 0 & 0 \\ 183.34 & 162.50 & 269.23 & 320.65 & 0 & 0 \\ 179.18 & 156.25 & 234.62 & 296.20 & 0 & 0 \\ 175.00 & 150.00 & 200.00 & 271.74 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons finalement la fonction recherchée:

$$z=f(x,y)=\text{abs}(y-325)*(0.17623\text{e-}4*\text{abs}(x-14000)-0.13024\text{e-}4*\text{abs}(x-20000)-.66247+0.13542\text{e-}7*\text{abs}(x-25000)-0.46126\text{e-}5*\text{abs}(x-30000))$$

$$+\text{abs}(y-385)*(-0.54541\text{e-}4*\text{abs}(x-14000)+0.20846\text{e-}4*\text{abs}(x-20000)+1.4977-0.29167\text{e-}7*\text{abs}(x-25000)+0.33737\text{e-}4*\text{abs}(x-30000))$$

$$+\text{abs}(y-425)*(-.7298+0.43908\text{e-}4*\text{abs}(x-14000)-0.43929\text{e-}4*\text{abs}(x-30000)-0.12500\text{e-}7*\text{abs}(x-20000)+0.12500\text{e-}7*\text{abs}(x-25000))$$

$$+\text{abs}(y-485)*(-0.6990\text{e-}5*\text{abs}(x-14000)-0.78094\text{e-}5*\text{abs}(x-20000)-.1055+0.31247\text{e-}8*\text{abs}(x-25000)+0.14804\text{e-}4*\text{abs}(x-30000))$$

$$-0.38707\text{e-}2*\text{abs}(x-14000)+0.75761\text{e-}2*\text{abs}(x-20000)-35.32-0.40313\text{e-}5*\text{abs}(x-25000)-0.37013\text{e-}2*\text{abs}(x-30000)$$

$$+y*(0.2937\text{e-}5*\text{abs}(x-14000)-0.15619\text{e-}4*\text{abs}(x-20000)+.7138+0.62500\text{e-}8*\text{abs}(x-25000)+0.12676\text{e-}4*\text{abs}(x-30000))$$

La validation de ce résultat est immédiate, si l'on fixe la température de traitement à 325° par exemple, nous obtenons la parfaite concordance entre le graphe donné par la fonction $z=f(x,y)$ et le graphe donné, pour cette même température de traitement thermique, par le docteur Cuellar.

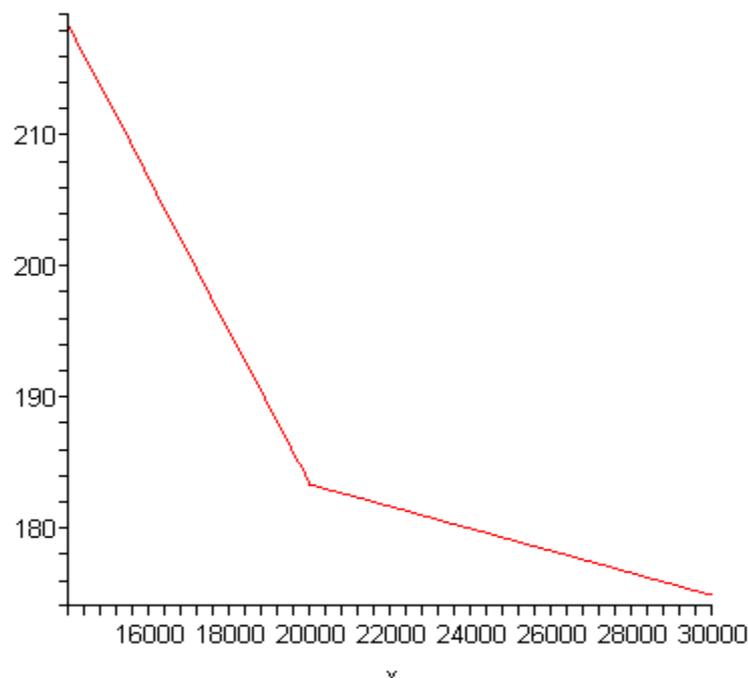


Fig IV -7 Température de traitement thermique 325°

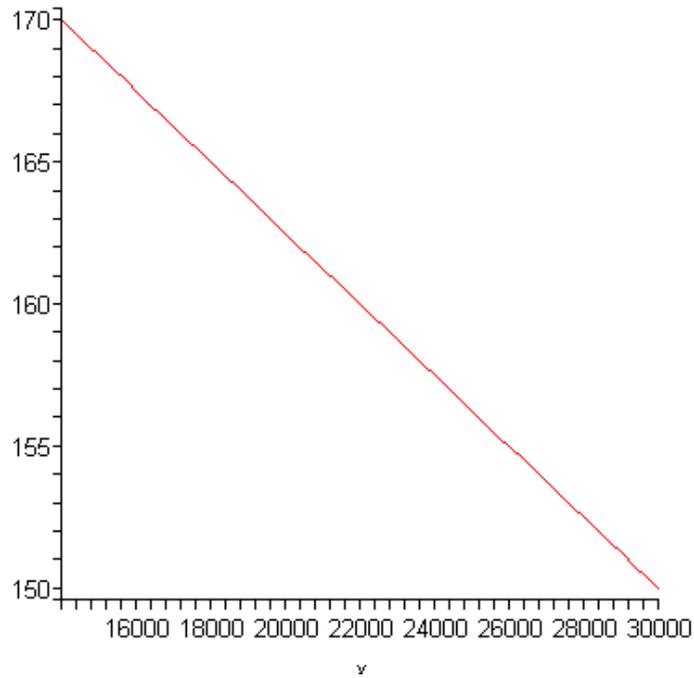


Fig IV -8 Température de traitement thermique 385°

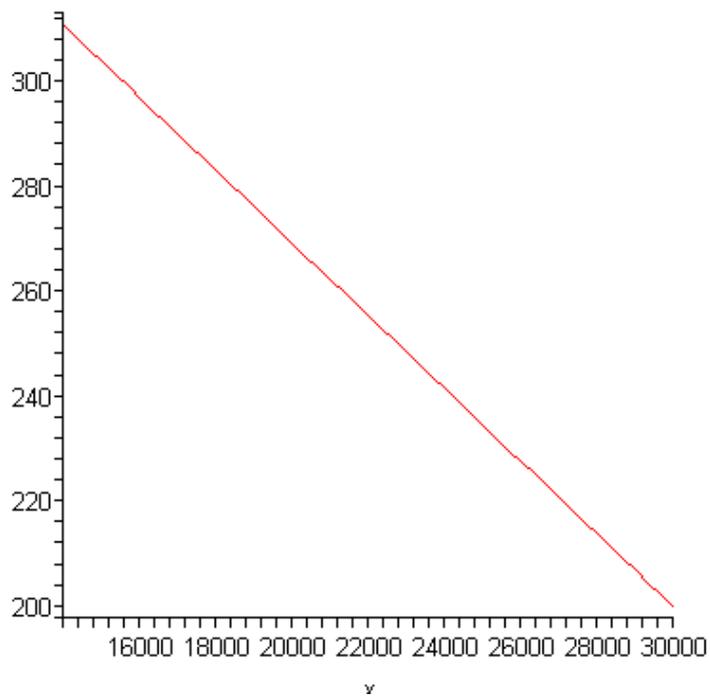


Fig IV -9 Température de traitement thermique 425°

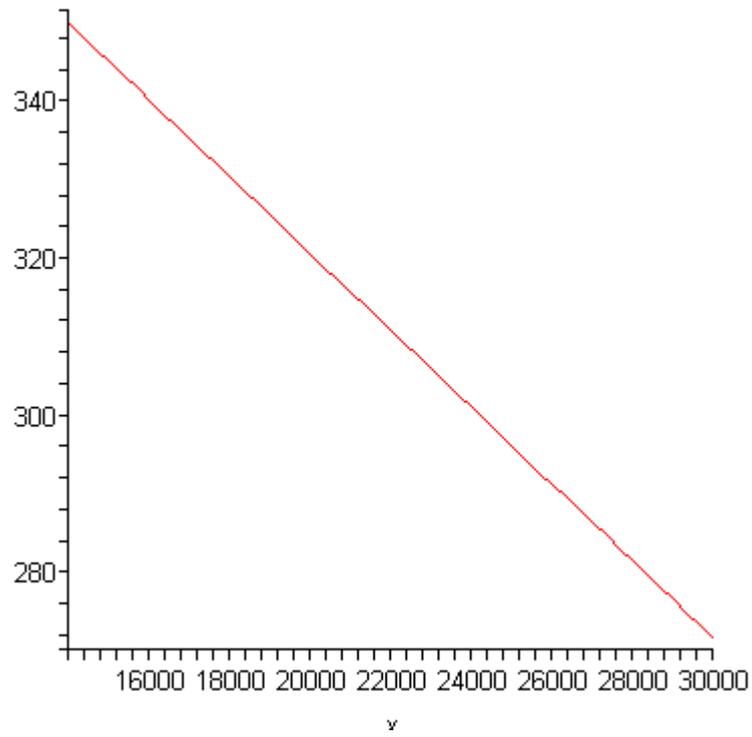


Fig IV -10 Température de traitement thermique 485°

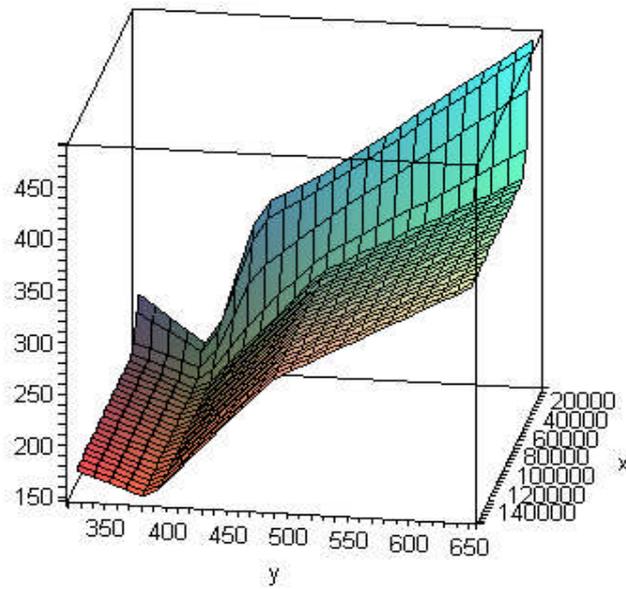


Fig IV-11 Surface krigée I

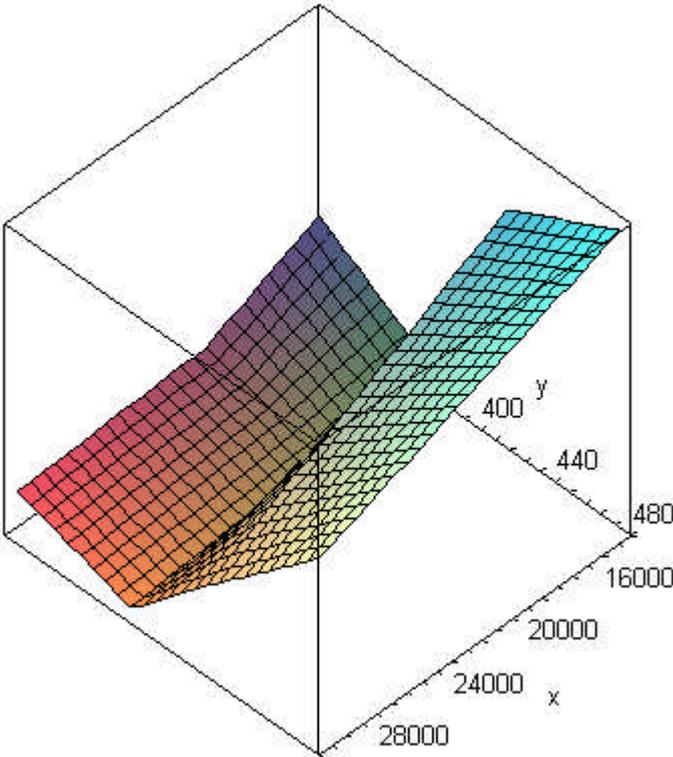


Fig IV-12 Surface krigée II

Conclusion et perspective :

La fonction contrainte que nous avons obtenue par le développement de la méthode du krigeage est une fonction définie par morceaux. Elle peut donc être injectée dans les différentes formulations mathématiques. Elle permet non seulement d'interpoler la valeur du paramètre étudié, ici la contrainte, dans un intervalle donné, mais aussi une extrapolation en dehors de cet intervalle. Pour cela, il serait judicieux de choisir comme modèle mathématique, un modèle qui comporte des valeurs limites en contrainte ou en déplacement pour palier aux lacunes de la fonction obtenue par la méthode du milieu mobile. En effet, la fonction contrainte obtenue donnerait la valeur de la contrainte pour, par exemple, un nombre de cycles infini. Alors qu'on sait qu'au delà d'une certaine contrainte, l'échantillon d'AMF ne résiste pas et il peut en résulter une rupture pure et simple de l'AMF.

Une limite en contrainte ou en déformation peut être incorporée dans la formule du krigeage grâce à l'effet pépète étudié. L'inconvénient est que cette limite soit connue d'avance, ce qui n'est pas toujours le cas.

Dans notre étude, nous avons limité l'intervalle entre 10.000 et 30.000 cycles pour obtenir la fonction contrainte. Si nous extrapolons à un nombre de cycles beaucoup plus élevé 130.000 par exemple, nous obtenons une contrainte admissible. les essais réalisés par le docteur Enrique Lopez Cuellar de l'école doctorale de Lyon option matériaux le confirment, puisqu'à 131.120 cycles il a constaté que l'échantillon est toujours viable.

Ainsi, la méthode du krigeage fournit une formulation mathématique globale de la réponse des AMF à des sollicitations cycliques ou autres. Cette formulation, si elle est limitée à un intervalle déterminé, permet l'analyse de la réponse en fonction des paramètres considérés. Ce que ne permettait la loi de comportement des AMF que par paramètre à la fois: l'hystérésis en contrainte, en température ou en fonction du nombre de cycle.

Cette fonction contrainte obtenue par le krigeage, ou de façon équivalente la fonction déformation, peut être injectée dans les nombreux modèles numériques utilisés comme la formulation de Tanaka par exemple. Dans cette optique et à notre avis, la synthèse des travaux de recherche de Jean Philippe Mandallena de l'équipe AVA de l'université de Nîmes publiée en avril 2008 offre, moyennant certaines adaptations, des perspectives prometteuses pour l'étude des AMF.

Références

- [1] **David Fugazza.** (Thèse doctorat) Shape memory alloy devices in earthquake engineering : mechanical properties, constitutive modeling and numerical simulations Pavia University september 2003.
- [2] **Cesar Henrique Gonzalez** (These doctorat) Etude du comportement thermomécanique et de la stabilisation martensitique d'alliages monocristallins à mémoire de forme base cuivre. Institut national des sciences appliquées de Lyon 2002.
- [3] **Enrique Lopez Cuellar** (These doctorat) Fatigue par cyclage thermique sous contrainte de fil à mémoire de forme Ti-Ni-Cu après différents traitements thermomecaniques . Institut national des sciences appliquées de Lyon 2002.
- [4] **Nicolas Sacépé** (Thèse doctorat) Etude phénoménologique et microstructurale de l'alliage à mémoire de forme NiTi en réponse à des sollicitations thermomécaniques cycliques. Université de Montréal Août 1999.
- [5] **O.Boissonneault & F.C. Wong** Modèle numérique hybride macro-micro mécanique d'alliage à mémoire de forme. Rapport technique defense du Canada. Décembre 2006.
- [6] **Généralités** sur la transformation martensitique.
- [6b] **C.A.R.M.A** Centre d'animation régional en matériaux avancés.
- [7] **Jean Lemaître** A course on damage mechanics. Université Paris 6 . 1991.
- [8] **A. Zegloul** Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture. Université de Metz.
- [9] **F. Trochu** Le krigeage universel Ecole polytechnique de Montréal 2004.
- [10] **A.Fortin** Méthodes Numériques Ecole polytechnique de Montréal 2001.
- [11] **G. Matheron** Le krigeage universel Centre de morphologie mathématique. Ecole nationale supérieure des mines de Paris.
- [12] **O.Boissonneault & F.C. Wong** Comportement dynamique des microactionneurs d'alliage à mémoire de forme sous force constante.