

N° d'ordre : /2009/DM

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE BATNA

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

MEMOIRE PRESENTE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE

MAGISTERE

EN

MÉCANIQUE

Option : CONSTRUCTION MECANIQUE

PAR

AOUGELLANET KHADIDJA

**Optimisation dynamique des couples moteurs d'une
main mécanique articulée non anthropomorphe à
quatre doigts**

Travail effectué au sein de laboratoire de recherche en productique (LRP)

Soutenu le: 02/06/2010 devant le jury composé de :

Président : Zidani Kamel	(MC)	UHL. Batna
Examineur :		
Benmohammed Brahim	(MC)	UHL. Batna
Bouchelaghem Abdelaziz	(MC)	UBM. Annaba
Louchene Ahmed	(MC)	UHL. Batna
Promoteur : Barkat Belkacem	(Pr)	UHL. Batna

Remerciements

Avant tout, je remercie le grand Dieu d'avoir guidé mes pas sur le bon chemin.

J'exprime ma profonde gratitude à monsieur **BARKAT Belkacem**, Professeur à l'Université de Batna, pour la patience et l'aide qu'il m'a accordé en tant que promoteur de thèse et pour la qualité scientifique du travail qu'il a proposé.

Je remercie Monsieur **ZIDANI Kamel**, Maître de conférences à l'Université de Batna, pour m'avoir fait le plaisir de présider ce jury de thèse.

Mes remerciements vont à Monsieur **BOUCHELAGHEM Abdelaziz**, Maître de conférences à l'Université de Annaba, pour m'avoir fait l'honneur d'être membre de mon jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur **LOUCHEN Ahmed**, Maître de conférences à l'Université de Batna, pour avoir fait partie de ce jury.

D'autre part je remercie vivement Monsieur **BENMOHAMMED Brahim**, Maître de conférences à l'Université de Batna, pour avoir participé à ce jury.

Que mes amis soient aussi récompensés par des grands merci, pour m'avoir apporté leur soutien et la chaleur humaine dont j'avais tant besoin.

Et par delà de tous mes remerciements, un grand merci à mon marier et ma famille pour leurs soutien et encouragements.

Mme AOUGHELLANET Khadidja

Sommaire

CHAPITRE I: Etude bibliographique sur les architectures des systèmes mécaniques articulés.....	1
Introduction générale.....	1
I.1 Introduction.....	3
<i>I.1.1 Le robot et la robotique.....</i>	<i>3</i>
I.1.1.1 Type de tâche et secteurs d'application.....	4
I.1.1.2 Degré de liberté d'un robot.....	7
<i>I.1.2 Types d'architecture des SMA (Systèmes Mécaniques Articulés)...</i>	<i>9</i>
I.1.2.1 Architecture série (ou chaîne cinématique ouverte).....	9
I.1.2.2 Architecture parallèle (ou chaîne cinématique multiboucle).....	9
I.1.2.3 Architecture mixte.....	9
<i>I.1.3 Les variétés de prise.....</i>	<i>10</i>
I.1.3.1 La prise en puissance.....	12
I.1.3.2 La prise en précision.....	12
I.2 Mains mécaniques de la littérature.....	12
<i>I.2.1 Main de Barrett</i>	<i>12</i>
<i>I.2.2 La main SARAH</i>	<i>13</i>
<i>I.2.3 La main du DLR</i>	<i>14</i>
<i>I.2.4 Main mécanique articulée de LMS.....</i>	<i>14</i>
I.2.4.1 Les caractéristiques techniques.....	15
I.2.4.2 Planification d'une tâche de manipulation.....	16
<i>I.2.5 La main Robonaut</i>	<i>17</i>
<i>I.2.6 main d'Ultralight.....</i>	<i>18</i>
<i>I.2.7 main Gifu III.....</i>	<i>18</i>
<i>I.2.8 La main de Shadow</i>	<i>19</i>
I.3 Récapitulatif des caractéristiques des mains mécaniques analysées.....	21
I.4 CONCLUSION.....	21

CHAPITRE II: Etude bibliographique sur la modélisation dynamique de la saisie d'objet par une main mécanique articulée.....	22
II.1 Introduction	22
II.2 Méthode d'obtention du modèle dynamique	23
<i>II.2.1 Le Formalisme de Lagrange.....</i>	<i>23</i>
<i>II.2.2 Le Formalisme de NewtonEuler</i>	<i>25</i>
II.2.2.1 Présentation théorique du formalisme.....	25
II.2.2.2 Cinématique d'un point quelconque du bras manipulateur	26
II.2.2.3 Les efforts d'inertie d'un corps dans un SMA.....	31
II.2.2.4 Expressions mises en œuvre d'un calcul automatique.....	35
<i>II.2.3 Principe des travaux virtuels de d'Alembert.....</i>	<i>37</i>
<i>II.2.4 Notion « d'énergie d'accélération » ou fonction de Gibbs.....</i>	<i>38</i>
<i>II.2.5 Modèle de la puissance filtrée.....</i>	<i>38</i>
<i>II.2.6 Modèle de Y. F. Li et al</i>	<i>40</i>
<i>II.2.7 Modèle de Kensuke Harada et Makoto Kaneko</i>	<i>41</i>
<i>II.2.8 Etude de Akio Namiki et Masatoshi Ishikawa</i>	<i>44</i>
II.3 Conclusion.....	46
CHAPITRE III: Modélisation dynamique de la saisie par la main mécanique articulée LRP-Hand.....	47
III.1 Introduction	47
III.2 Description de la main LRP.....	47
<i>III.2.1 Conception de la paume</i>	<i>48</i>
<i>III.2.2 Conception du pouce.....</i>	<i>49</i>
<i>III.2.3 Conception de l'indexe.....</i>	<i>50</i>
<i>III.2.4 Conception des doigts longs.....</i>	<i>50</i>
<i>III.2.5 Récapitulatif des caractéristiques de la main (LRP hand).....</i>	<i>51</i>
III.3 Position du problème dynamique.....	52

III.4 Formulation et mise en équations.....	54
III.5 Applications	62
<i>III.5.1 Saisie d'un objet parallélépipédique.....</i>	62
III.5.1.1 Les vitesses angulaires	65
III.5.1.2 : Les accélérations.....	66
III.5.1.3 Les couples actionneurs.....	68
<i>III.5.2 Saisie d'un objet sphérique</i>	69
III.5.2.1 Les vitesses angulaires	70
III.5.2.2 Les accélérations.....	72
III.5.2.3 Les couples moteurs.....	73
<i>III.5.3 Saisie d'un objet cylindrique.....</i>	75
III.5.3.1 Les vitesses angulaires	76
III.5.3.2 Les accélérations	78
III.5.3.3 Les couples moteurs.....	79
III.6 Interprétations et Conclusions.....	81
Conclusion générale et perspectives.....	82
Références bibliographiques.....	83
Annexe.....	85

CHAPITRE I

Etude bibliographique sur les architectures des systèmes mécaniques articulés

I.1 Introduction

La souplesse de la main humaine permet une variété dans la configuration spatiale des doigts et permet également une importante diversité dans les différentes prises envisageables.

La première partie de ce chapitre montre les différentes architectures des SMA (systèmes mécaniques articulés).

Dans la seconde partie nous présentons les différents types de prises possibles et finalement nous citons quelques exemples des mains mécaniques articulées développées par les différents laboratoires à travers le monde.

1.1.1 Le robot et la robotique

Un robot est un dispositif mécanique articulé capable d'imiter certaines fonctions humaines telles que la manipulation d'objet ou la locomotion, dans le but de se substituer à l'homme pour la réalisation de certaines tâches matérielles. Cette réalisation est plus ou moins autonome selon les facultés de perception de l'environnement dont est doté le robot. La robotique est l'ensemble des activités de construction et de mise en œuvre des robots.

Par extension et abus de langage on qualifie quelque fois de « système robotisé » tout dispositif « automatisé ».

On peut dire aussi que tout dispositif pour « faire quelque chose » comporte une partie « opérationnelle » ou « opérative » qui réalise la tâche et une partie « décisionnelle » ou « commande » qui contrôle la partie opérationnelle. Ce qui fait une des différences entre la

robotique et l'automatisation en général est justement la partie opérationnelle qui est, dans le cas de la robotique, un système mécanique articulé.

I.1.1.1 Type de tâche et secteurs d'application

Selon le type de tâche et le secteur d'application, le robot aura une architecture mécanique et un système de contrôle-commande différents.

Dans les industries manufacturières, les robots sont utilisés principalement aux tâches suivantes :

- Manutention de pièces (chargement de machines outils, transfert de pièces d'un tapis roulant palettisation, etc.). Le robot **Figure I.1** doit pouvoir effectuer des mouvements souvent simples mais rapides, après avoir saisi un objet connu à un endroit connu pour le déposer à un autre endroit connu. La précision de positionnement de l'objet n'a pas besoin d'être grande. La manutention des pièces peut se faire par un robot de type bras de manipulation à poste fixe si la zone de travail est limitée. Au contraire si le transfert doit se faire d'un bout à l'autre de l'atelier, on aura recours à un robot mobile constitué d'un chariot à roues évoluant dans un environnement généralement connu (chariot filoguidé...).

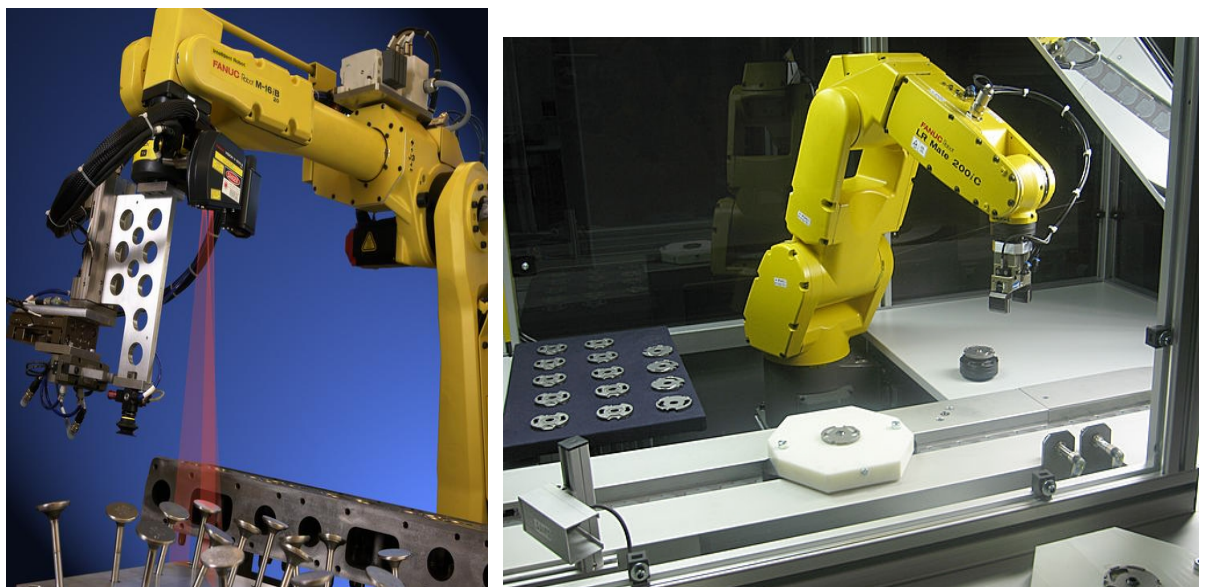


Figure I.1 : Robot de manutention des pièces

- Soudage (point à point ou en continu) **Figure I.2**. En soudage point à point, la difficulté est souvent un problème d'accès sans collision aux éléments qu'il faut

souder (exemple : carrosserie automobile), le robot fonctionne en boucle ouverte. En soudage continu, il faut assurer une bonne précision de la trajectoire et au besoin, le robot doit être doté d'un capteur de suivi de joint. Cependant, compte tenu des vitesses de soudage, le robot n'a pas besoin d'être rapide.



Figure I.2 : Robot de soudage

- Peinture. Le pistolet de peinture étant léger, un robot de peinture sera généralement moins rigide qu'un robot de soudage ou de manutention, il doit être animé d'une grande vitesse.



Figure I.3: Robot de peinture

- Assemblage. Les pièces à assembler, le plus souvent de type pignons, sont connues et leurs emplacements également. L'exigence ici est une très grande précision de positionnement dans le cas d'un robot d'assemblage en boucle ouverte, ou mieux un robot moins précis mais doté d'un dispositif qui s'accommode ou qui corrige les défauts éventuels de positionnement (vision ou détection d'efforts) **Figure I.4.**

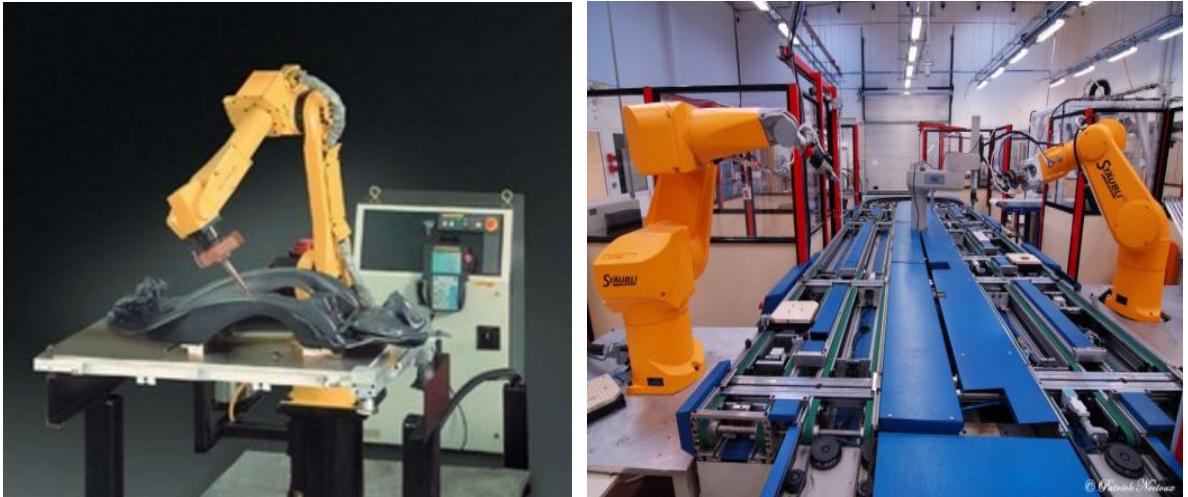


Figure I.4 : Robot d'assemblage

Les quelques tâches citées peuvent être menées en ambiance normale ou en milieu hostile, ce dernier cas justifie l'emploi de systèmes télécommandés.

A un moindre degré, d'autres secteurs sont intéressés par le développement des robots. Citons la robotique médicale, dans laquelle le robot est destiné à se substituer à une fonction déficiente chez un handicapé, ou à aider le chirurgien dans une opération chirurgicale. Citons également la robotique militaire où les besoins se situent plutôt dans le domaine des robots mobiles (locomotion à roues, à pattes, à chenilles...) évoluant dans un environnement inconnu et sur sol accidenté. Citons enfin les robots spatiaux et sous-marins qui doivent concevoir des robots pour manipuler des objets dans des conditions extrêmes de température ou de pression.

Cependant la technologie est très différente selon les secteurs d'application et les tâches indiquées.

I.1.1.2 Degré de liberté d'un robot

Il est bien connu que, dans l'espace, la situation d'un solide est entièrement définie par un jeu de 6 paramètres indépendants. Les plus classiques sont les 3 coordonnées cartésiennes d'un de ses points et 3 angles définissant l'orientation d'un repère lié au solide par rapport à un repère fixe. Supposons que ce solide soit mû par un SMA motorisé. Cela peut être un objet transporté par les robots manipulateur (a), (b), (c) à poste fixe de la **Figure I.5**.

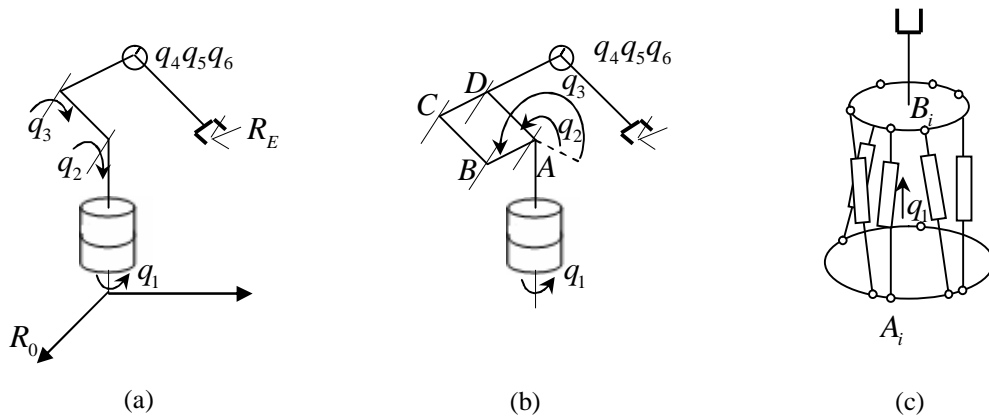


Figure I.5 : Architecture des robots manipulateurs

L'objet transporté et manipulé par le robot mobile de la **Figure I.6**

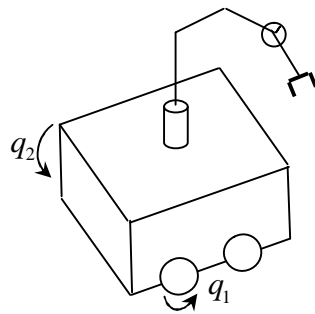


Figure I.6 : Architecture d'un robot mobile

La plate forme du robot marcheur de la **figure 1.7**.

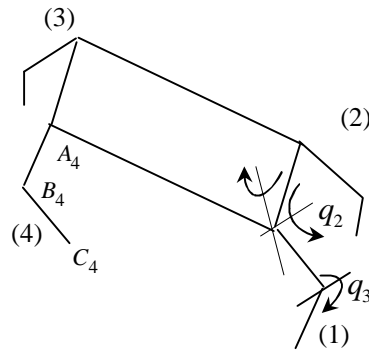


Figure I.7: Architecture d'un robot marcheur

Ou l'objet manipulé par la main S mécanique articulée de la **Figure I.8**.

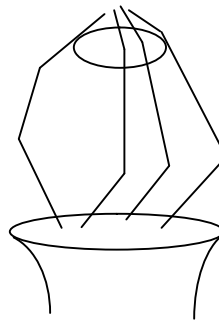


Figure I.8 : Architecture d'une main mécanique articulée

Il est clair que dans chaque cas, pour maîtriser la situation du solide, SMA doit être doté d'au moins 6 liaisons à 1 d.d.l. (degré de liberté) motorisées et asservies en position. On dit aussi que le SMA doit avoir au moins 6 actionneurs. Le nombre d'actionneurs représente ce qu'il est d'usage d'appeler le d.d.l. du robot. Sur la **Figure 1.5**, les liaisons motorisées sont celles auxquelles sont associées les variables articulaires q_i de commande. C'est un moyen de distinguer les liaisons actives des liaisons passives.

1.1.2 Types d'architecture des SMA (Systèmes Mécaniques Articulés)

La façon dont les liaisons motorisées sont réparties du bâti au solide terminal définit trois grandes classes d'architecture des SMA. Repartons-nous à nouveau à la **Figure I.5**.

I.1.2.1 Architecture série (ou chaîne cinématique ouverte)

Il n'y a qu'un chemin possible pour aller du bâti à la pince, les segments du robot ainsi que les liaisons sont bien mises « en série ». Toutes les liaisons pivots sont actives. Celles-ci doivent être correctement agencées pour maîtriser complètement la situation de l'objet saisi, ce qui est le cas du robot à 6 d.d.l. Pour ce robot série, on utilise l'expression « robot 6 axes ».

I.1.2.2 Architecture parallèle (ou chaîne cinématique multiboucle)

Pour aller de la pince au bâti, il y a 6 chemins différents et sur chaque chemin, une seule liaison active prismatique. Ce dispositif, ou des variantes sensiblement équivalentes, est connu sous le nom générique de plate-forme de Stewart. Les liaisons en A_i et B_i sont des liaisons sphériques passives (afin d'éviter la rotation de l'ensemble $A_i B_i$ autour de l'axe passant par le centre des deux rotules, on peut remplacer la rotule A_i par une liaison cardan). Il est moins évident que dans le cas précédent de se rendre compte qu'ici aussi les variations des 6 paramètres q_i provoqueront les 3 mouvements de translation et les 3 mouvements de rotations de la pince.

L'intérêt de l'architecture parallèle sur l'architecture série est une meilleure répartition des efforts autorisant une structure mécanique légère, par contre le volume de travail de la pince est beaucoup plus petit.

I.1.2.3 Architecture mixte

On dit aussi série-parallèle ou parallèle-série selon la prédominance de liaisons en série ou en parallèle.

Pour le robot manipulateur (b) présentant une boucle cinématique, si on part de la pince, on rencontre 3 liaisons pivot actives en série de paramètres q_6, q_5, q_4 , puis deux liaisons pivot actives en parallèle q_3 et q_2 , enfin en série la liaison pivot active q_1 . Les liaisons pivot en B, C, D sont passives. Les liaisons en série dominent, c'est donc un robot manipulateur série-parallèle, on dit aussi « à une boucle ».

C'est aussi le cas du robot mobile **Figure I.6** qui compte 8 d.d.l les 6 d.d.l du bras de manipulation d'architecture série et les 2 d.d.l q_1 et q_2 du chariot en parallèle. On voit apparaître ici une particularité, en ce sens que le nombre d'actionneurs est supérieur à 6, il y a donc, à l'évidence, une redondance de 2 actionneurs pour définir la situation de l'objet

manipulé, si toutefois les 8 actionneurs agissent en même temps. Cette redondance peut être mise à profit pour augmenter la capacité de manipulation dans un environnement encombré.

Pour le robot marcheur **Figure I.7**, la plate-forme est reliée au bâti par 4 chaînes cinématiques identiques en parallèle (les pattes), chacune d'elles, telle que $A_i B_i C_i$, comporte 3 liaisons pivot motorisées et une liaison de contact C_i (assimilée à un contact ponctuel avec frottement). Le robot marcheur est donc parallèle-série à 12 d.d. Il y a 6 actionneurs redondants, ce qui exige ici et contrairement au cas précédent, une bonne coordination des mouvements des moteurs pour éviter la perte de contact ou le glissement sur le sol tout en faisant avancer la plate-forme. Ceci constitue une particularité importante de ce type de SMA. Une autre particularité apparaît quand le robot lève une patte, cette fois il n'y a plus que 3 boucles et une chaîne ouverte. On a affaire à un système dit « topologie variable ».

Pour la main articulée **Figure I.8**, on peut faire le même type de constatations que précédemment – redondance à maîtriser, topologie variable quand 1 ou 2 doigts quittent l'objet – avec en plus la position des points de contact objet doigts qui peut évoluer au cours du mouvement de manipulation de l'objet [2].

1.1.3 Les variétés de prise

Malgré l'impressionnante diversité des prises susceptible d'être employées par la main humaine, il n'existe au final que deux types de saisie, la prise en puissance et la prise en précision. La **Figure I.9** illustre les différentes prises possibles par la main humaine [17].

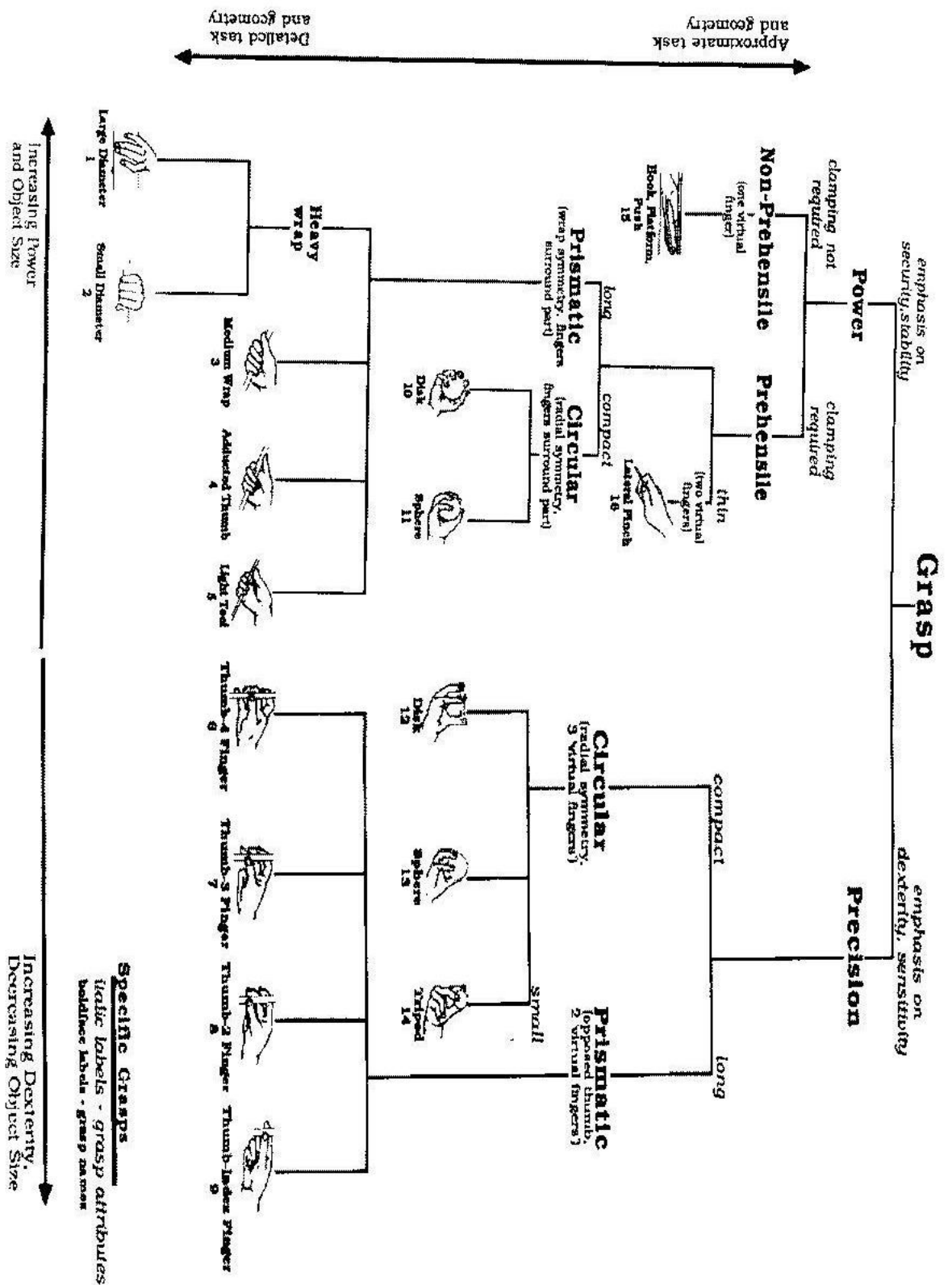


Figure I.9 : Les différentes combinaisons de prises

I.1.3.1 La prise en puissance

Chez l'homme, l'opposition du pouce avec l'ensemble des autres doigts permet d'envelopper l'objet et de le bloquer à l'intérieur de la paume. Avec ce type de saisie, nous avons une surface de contact très importante qui facilite la transmission d'efforts élevés.

C'est pourquoi ce type de saisie est utilisé pour la saisie d'objets lourds, mais par contre il ne donne aucune liberté de mouvement local de l'objet par rapport à la main.

I.1.3.2 La prise en précision

Le principe de la prise en précision ou la manipulation fine est de conserver les six degrés de liberté en translation et rotation de l'objet. L'utilisation du bout des doigts permet de réaliser pleinement la saisie en précision car nous avons une plus petite surface de contact entre chacun des doigts et l'objet.

Notons que la faible surface de contact provoque une faible transmission des efforts rendant cette prise inappropriée pour les objets lourds [1].

I.2 Mains mécaniques de la littérature

Dans cette partie on présente quelques mains mécaniques articulées selon les degrés de libertés qu'elles possèdent (nombre des doigts et nombres d'articulations) et aussi suivant le taux de similarité anthropomorphique qu'elles représentent par rapport à la main humaine.

I.2.1 Main de Barrett

La main de Barrett, produite par Barrett Technology en 1988, est basée sur une conception développée à l'université de Pennsylvanie. C'est une main mécanique composée de trois doigts. Chaque doigt possède deux articulations pivot **Figure I.10**. Un doigt est fixe et les deux autres peuvent s'écarter jusqu'à 180 degrés par rapport à la paume (le doigt 3 est le doigt fixe et les doigts 1 et 2 tournent autour de la paume), et ceci d'une manière synchrone. La main est commandée par quatre moteurs qui activent sept liaisons au total [1].

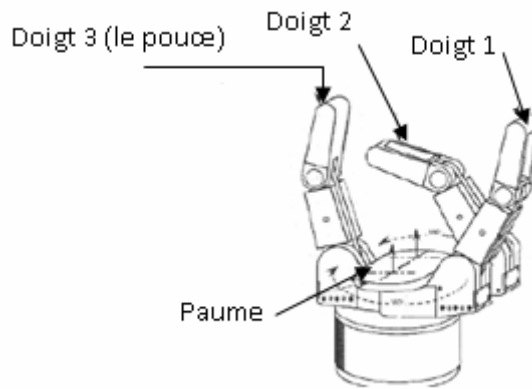


Figure I. 10: Main de Barrett

I.2.2 La main SARAH

La main SARAH (Self-Adaptive Robotic Auxiliary Hand), est une main à trois doigts comme celle de la main de Barrett en 1995. Cette main est installée sur la station spatiale internationale [4].

Le but visé par cette main est la saisie des objets dans l'espace. Les trois doigts sont synchronisés de telle sorte qu'ils s'ouvrent ensemble ou se ferment ensemble. Cette main est motorisée par seulement deux moteurs indépendants, un pour l'ouverture/fermeture et un autre pour l'orientation des doigts. Cette main possède 10 articulations et caractérisée par une aptitude de manipulation d'objet importante **Figure I.11**.



Figure I. 11: La main SARAH

1.2.3 La main du DLR

La main DLR, développée au centre aérospatial Allemand en 1998, est une main robotique articulée à quatre doigts. A la différence de la main de Barrett, et de SARAH, le placement des doigts ressemble à la structure de la main humaine **Figure I.12**. Cependant, parce que tous les moteurs sont contenus à l'intérieur de la main, celle-ci a environ une taille 1.5 fois la taille d'une main humaine moyenne. Les doigts sont identiques. Chacun se compose de trois articulations : une première liaison de type cardan à la base, puis deux liaisons à un degré de liberté de type pivot. La main DLR est actionnée par 12 moteurs microfluidiques. Dans chacun des 4 doigts, trois articulations peuvent être contrôlées indépendamment. La dernière articulation étant couplée dans un rapport fixe avec celle qui la précède comme dans la main humaine [6].

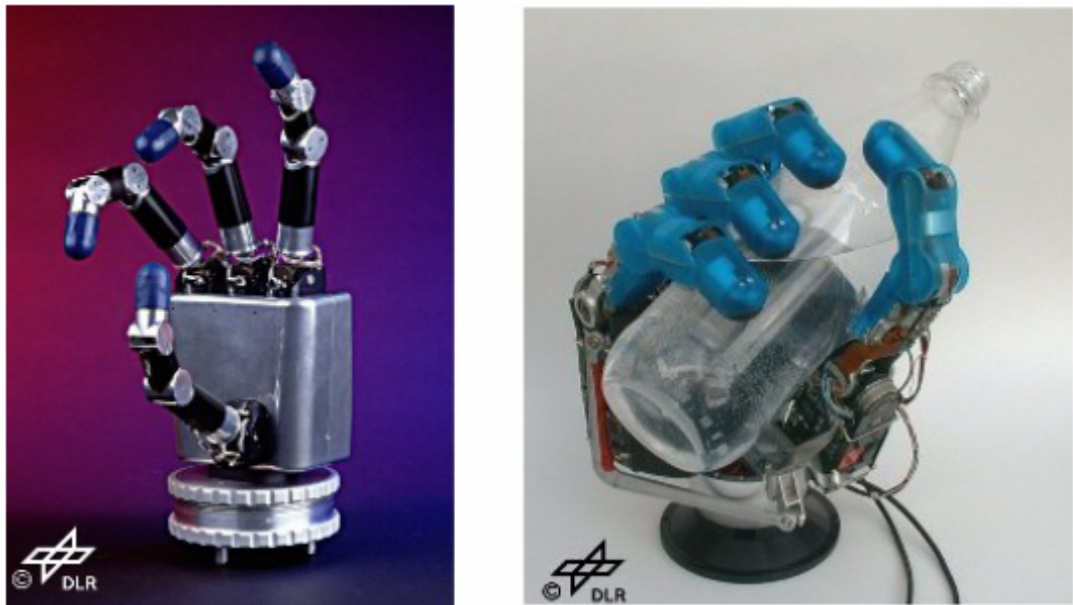


Figure I.12 : Main DLR

1.2.4 Main mécanique articulée LMS

Le LMS a conçu en 1993 une main mécanique articulée à 4 doigts et 16 degrés de mobilité et développé sa commande pour conduire des recherches sur la manipulation fine d'objets sous contrôle d'efforts.

I.2.4.1 Les caractéristiques techniques

La main LMS possède 4 degrés de mobilité par doigt (3 pour les mouvements de flexion-extension et 1 pour le mouvement d'abduction-adduction). Avec son implémentation anthropomorphe des doigts sur la paume, la main permet de reproduire les configurations de prise caractéristiques de la main humaine.

La structure mécanique est en alliage léger d'aluminium. Les 16 articulations sont commandées indépendamment par 16 motoréducteurs électriques à courant continu logés dans l'avant-bras. La transmission entre les 16 actionneurs et les 16 articulations est assurée par des câbles en polyéthylène.

En ce qui concerne l'instrumentation, la main mécanique est dotée d'une part de codeurs incrémentaux placés sur les axes moteurs et d'autre part de potentiomètres absolus intégrés aux articulations. Des capteurs tactiles matriciels tout ou rien implantés sur les phalanges permettent la localisation des points de contact entre l'objet saisi et la main.

L'architecture matérielle et logicielle du système de contrôle de la main est basée sur l'utilisation de cartes d'interface sur bus VME et l'environnement multitâche temps réel OS/9.

Cette architecture de contrôle a permis l'implantation des algorithmes nécessaires aux contrôles en position et en effort.

Une approche originale est présentée en matière de contrôle. Celle-ci intègre le comportement non linéaire des tendons et des gaines de transmission dans les contrôles en effort et en position de la main mécanique **Figure I.13 [6]**.

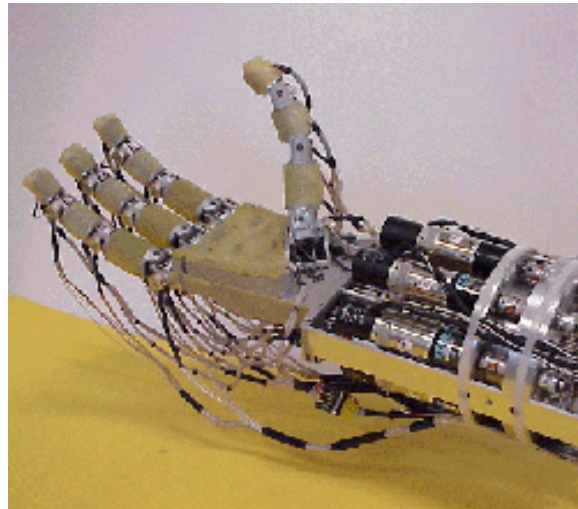


Figure I.13 : La main de LMS

I.2.4.2 Planification d'une tâche de manipulation

Afin de simuler les tâches de manipulation, l'outil de CAO robotique SMAR développé au LMS [1993] a été mis à contribution. Un nouveau module dédié à la main du LMS a été intégré. Une stratégie générale de contrôle de la manipulation a ainsi été développée au sein de cet outil en considérant la planification de la tâche des points de vue de la géométrie et de la stabilité de la prise, avant d'être validée expérimentalement sur la main mécanique [5].



Figure I.14 : Opposition maximale du pouce

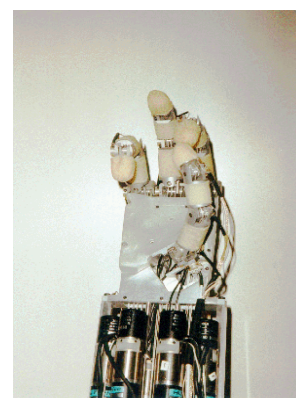


Figure I.15 : Prise entre le pouce et l'index

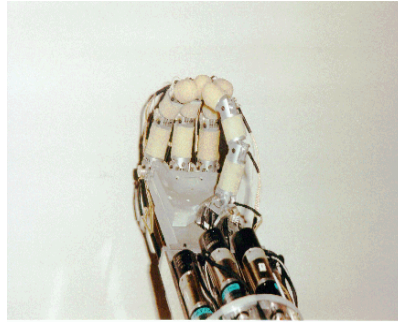


Figure I.16: Prise entre les quatre bouts de doigts

1.2.5 La main Robonaut

La main Robonaut a été développée par la NASA au centre de l'espace Johnson en 2000. Cette main possède 5 doigts et un total de 14 degrés de liberté. Sa taille est équivalente à 95% à celle d'une main humaine **Figure I.17**. L'index, le majeur et le pouce sont considérés comme les doigts primaires de manipulation. Ils sont capables de réaliser les mouvements d'abduction et d'adduction. L'annulaire et l'auriculaire sont décalés par rapports aux autres doigts ce qui leur donne la capacité de s'enrouler autour de l'objet à saisir. Ils sont capables d'exercer des efforts de serrage importants. Cette main comprend 14 moteurs au total situés tous au niveau de l'avant-bras [1].

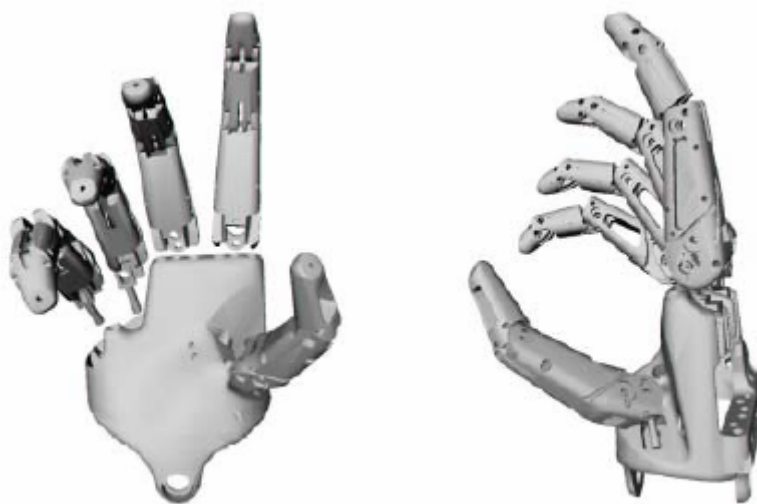


Figure I.17 : Main Robonaut

1.2.6 La main d'Ultralight

Développée en 2001, elle comporte 5 doigts avec au total 13 degrés de liberté, 18 liaisons et le pouce est opposé aux 4 autres doigts.



Figure I.18 : Main d'Ultralight

La taille de cette main est légèrement supérieure à celle de la main humaine, chaque doigt pèse environ 20g. La main est capable de saisir des objets en puissance comme en précision [1].

1.2.7 La main de Gifu III

Développée en 2001 au design complètement anthropomorphique, comporte 5 doigts dont un pouce opposé aux autres, chaque doigt à 4 liaisons et 3 degrés de liberté (dernière phalange couplée par un système 4-barres). Le pouce possède 4 ddls. La main comporte au total 20 liaisons et 16 ddls. Les doigts sont conçus comme des unités indépendantes, facile à remplacer.



Figure I.19 : La Main Gifu III

Cette main respecte l'échelle humaine, les doigts font 21cm depuis la base de la paume. Chaque doigt pèse 200g. Le pouce pèse 250g. Le poids total de la main est 1,4Kg.

La main est capable de saisir des objets en puissance, et en précision, et aussi de faire des manipulations. La main Gifu I développe 8,8N en bout de pouce et 1,1N en bout de chaque doigt. Quant à Gifu III, elle développe 3,4 en bout de pouce et 3,4N en bout de doigt , mais avec une vitesse de 240°/sec [1].

1.2.8 La main de Shadow

Cette main créée par la compagnie Shadow Robot en Angleterre en 2002, à ce jour c'est la main robotique la plus proche de la main humaine. Elle contient 24 degrés de liberté qui sont contrôlés par des muscles pneumatiques situés tous au niveau de l'avant-bras **Figure1.20**. Cette main robotique peut être utilisée dans plusieurs applications : téléprésence, mobilité virtuelle, industrie etc. Les liaisons des doigts sont actionnées par des muscles pneumatiques antagonistes. Par contre, quelques articulations sont actionnées par un seul muscle et le mouvement opposé se fait à l'aide d'un ressort.

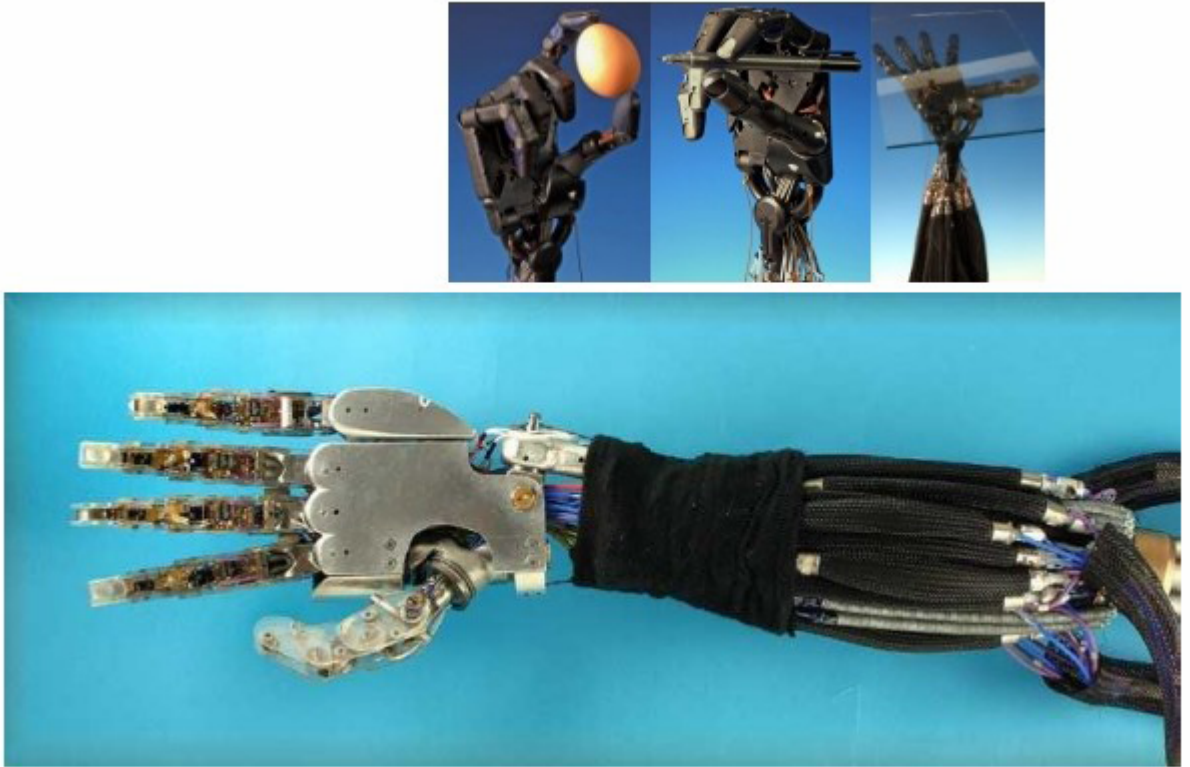


Figure I.20 : Main droite de Shadow

Il faut noter qu'il existe d'autres mains mécaniques articulées à travers les laboratoires du monde vu leur ressemblance avec les mains précédemment mentionnées tel que la main anthropomorphe ACT, créée par l'Université de Carnegie Mellon à Pittsburgh, la main DART créée aussi par la NASA et d'autres [3]. le tableau I.1 récapitule les caractéristiques des mains mécaniques articulées.

I.3 Récapitulatif des caractéristiques des mains mécaniques analysées

Les résultats d'analyse des mains citées sont résumés dans le **tableau I.1**. Où on constat l'utilisation de différents modes de commandes et mécanismes de transmission

Caractéristiques Nom de la main	Type des actionneurs	Nbre de doigts	ddl	Mécanisme de transmission
Main de barrett	Electrique	3	7	Câble
Main de SARAH	Electrique	3	10	Câble
Main de DLR	Electrique	4	12	Câble
LMS	Electrique	4	16	Câble
Main Robonaut	Electrique	5	14	Câble
Main de Shadow	Pneumatique	5	24	Muscle Pneumatique, ressort
Main d'ultraligt	pneumatique	5	13	Commande directe
Main de Gifu III	Servomoteurs intégrés	5	16	Engrenage à vis sans fin

Tableau I.1 : Caractéristiques des mains mécaniques analysées

I.4 CONCLUSION

A travers cette étude bibliographique, nous avons montré les différents types de prises possibles. Nous avons également donné un aperçu sur la robotique et les différentes architectures des SMA. Ensuite nous avons présenté quelques mains mécaniques articulées de la littérature. Nous avons constaté que chaque concepteur cherche une dextérité proche à celle de la main humaine tout en simplifiant la conception et la commande appropriée.

CHAPITRE II

Etude bibliographique sur la modélisation dynamique de la saisie d'objet par une main mécanique articulée

II.1 Introduction

Le modèle dynamique a pour but la commande des actionneurs. Quand la vitesse augmente sa précision diminue car on ne peut plus négliger les phénomènes de modélisation délicate tels que : élasticité, jeux, frottements...

Les effets « parasites » sont générateurs d'oscillations (élasticité d'une transmission à câbles ou à rubans), de vibration, de retard dans les déplacements, d'imprécision finale (jeux et frottements).

Le modèle dynamique doit rester observable et gouvernable afin que le contrôle d'une vitesse plus au moins élevée soit possible. Celui-ci étant non linéaire, certains paramètres doivent être évalués « en ligne » d'où des problèmes pour les calculateurs « temps réel » du point de vue de la vitesse et de la capacité des calculs.

Si la main se déplace très lentement ou la manipulation d'objet en elle-même est très lente. Les forces dynamiques qui s'exercent sur le système (objet/main) sont négligeables, par contre pour les grandes vitesses de déplacement du système (objet/main) ou celle de l'objet manipulé par une main mécanique articulée, les forces dynamiques deviennent significatives, entraînant des déviations de trajectoires, des vibrations et des contraintes mécaniques importantes aux articulations. Dans ce cas, les modèles géométriques (commande en position) et cinématiques (commande en vitesses) sont inadaptés.

Il est nécessaire d'étudier le modèle dynamique d'un SMA (système mécanique articulé) en tenant compte des forces inertielles, de Coriolis, centrifuges et bien sûr des couples moteurs. Dans le cas de manipulation rapide d'objet par une main mécanique articulée ou son déplacement à grande vitesse par une main placée sur un robot.

Le but de la modélisation dynamique est de déterminer les forces ou les couples à appliquer aux articulations pour obtenir à tout instant la configuration désirée du manipulateur. On écrit :

$$\Gamma = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, f_e) \quad (2.1)$$

Où Γ : est le vecteur forces/couples généralisées

q, \dot{q}, \ddot{q} : désignent respectivement les coordonnées, les vitesses, et les accélérations généralisées.

II.2 Méthode d'obtention du modèle dynamique

Les principales méthodes actuelles d'obtention du modèle dynamique sont basées sur l'un des quatre formalismes suivants :

- Le formalisme de Lagrange
- Le formalisme de Newton Euler
- Le principe du travail virtuel de d'Alembert
- La notion d'énergie d'accélération ou fonction de Gibbs[13]

II.2.1 Le Formalisme de Lagrange

Le formalisme de Lagrange est utilisé surtout pour construire le modèle dynamique direct, il ne présente que peu d'intérêts pratiques. On utilise généralement ce modèle pour la simulation des mécanismes poly-articules libres

Les équations de mouvement issue du modèle de Lagrange s'écrivent, en absence d'efforts extérieurs et de frottement comme suit :

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i=, \dots, n \quad (2.2)$$

Où :

τ_i : Couple moteur de la $i^{\text{ème}}$ articulation

L : Lagrangien du système égale à $E_c - E_p$

E_c : Energie cinétique totale

E_p : Energie potentielle totale

n : Nombre total des articulations

L'énergie cinétique du système est une forme quadratique des vitesses articulaires :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}' \tilde{H}(q) \dot{q} \quad (2.3)$$

Où $\tilde{H}(q)$ est la matrice ($n \times n$) d'inertie du système, elle est symétrique et définie positive.

Ce formalisme permet d'écrire les équations de mouvement en termes de travail virtuel et d'énergie directement sous une forme matricielle [16] :

$$\Gamma = [\tilde{H}] * \ddot{q} + [\tilde{B}] * \dot{q} \dot{q} + [\tilde{C}] * \dot{q}^2 + Q + F_{ext} \quad (2.4)$$

Avec :

$[\tilde{H}]$: Matrice d'inertie du bras manipulateur

$[\tilde{B}]$: Matrice des termes de Coriolis

$[\tilde{C}]$: Matrice des termes centrifuge

Q : Vecteur des forces de gravité

F_{ext} : Vecteur des forces extérieures

$$\dot{q} \dot{q} = [\dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad \dot{q}_1 \dot{q}_3 \quad \dots \quad \dot{q}_1 \dot{q}_n \quad \dot{q}_2 \dot{q}_3 \quad \dots \quad \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n]$$

$$\dot{q}^2 = [\dot{q}_1^2 \quad \dot{q}_2^2 \quad \dots \quad \dot{q}_n^2]$$

Les expressions des éléments des matrices B et C sont données par les relations suivantes :

$$B_{i,jk} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \quad (2.5)$$

$$c_{i,j} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial H_{jj}}{\partial q_i} \quad (2.6)$$

II.2.2 Le Formalisme de Newton-Euler

Ce formalisme est très adapté pour construire le modèle dynamique inverse. Il présente un intérêt pratique indéniable aussi bien pendant la conception que lors de l'exploitation. En effet ce formalisme porte sur le calcul des torseurs complets de liaisons et permet donc le dimensionnement de la structure et des actionneurs. Le caractère itératif de ce formalisme réduit énormément le temps de calcul relativement au formalisme de Lagrange et permet l'exploitation des résultats, par une commande évoluée (commande en couple), pour améliorer la précision dynamique.

II.2.2.1 Présentation Théorique Du Formalisme

Considérons l'ensemble des $(n+1)$ corps rigides d'une chaîne cinématique ouverte **Figure II.1** et dans lequel chaque articulation A_j n'admet qu'un seul mouvement de rotation ou de translation.

Chaque corps C_j de la chaîne cinématique est en équilibre sous l'action :

- Des efforts de liaison dus au corps en aval (le corps C_{j+1}) représenté par un torseur, réduit au point O_{j+1} , de résultante $(-f_{j+1})$ et de moment résultant $(-m_{j+1})$.
- Des efforts de liaison dus au corps en amont (le corps C_{j-1}) représenté par un torseur, réduit au point O_j , de résultante (f_j) et de moment résultant (m_j) .
- Des efforts d'inertie dus au corps C_j lui-même, représenté par un torseur, réduit au point G_j centre de gravité du corps C_j , de résultante (F_j) et de moment résultant (N_j) .

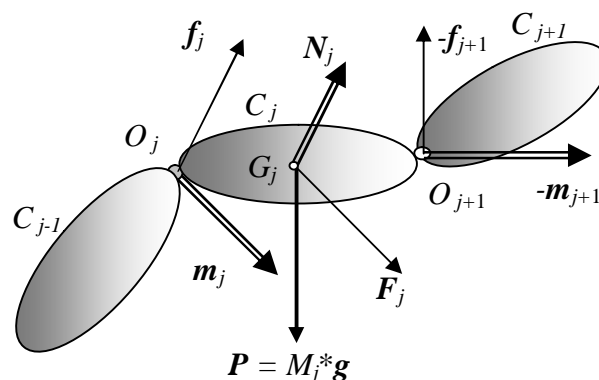


Figure II.1 : Les efforts appliqués sur le corps C_j du bras manipulateur

La condition d'équilibre du corps C_j s'exprime par les deux relations ci-après :

Formule de NEWTON :

$$f_j + M_j * g - f_{j+1} - F_j = \vec{0} \quad (2.7)$$

Formule de EULER :

$$m_j + \overline{O_j G_j} \wedge (M * g) - m_{j+1} - N_j - \overline{O_j G_j} \wedge F_j - \overline{O_j O_{j+1}} \wedge f_{j+1} = \vec{0} \quad (2.8)$$

L'évaluation des efforts d'inertie dus au corps C_j lui-même passe par une étude cinématique générale qui permet d'exprimer la position, la vitesse et l'accélération de n'importe quel point P du bras manipulateur par rapport au repère $\{R_0\}$.

II.2.2.2 Cinématique d'un point quelconque du bras manipulateur

Soit P un point fixe appartenant au corps C_j du bras manipulateur, et de coordonnées x , y et z dans le repère $\{R_j\}$ attaché au corps C_j . $\overline{O_j P}$ est le vecteur position du point P dans le repère $\{R_j\}$. La cinématique instantanée du point P est définie par sa position, sa vitesse et son accélération par rapport au référentiel $\{R_0\}$ attaché à la base du manipulateur.

a) Position du point P dans le repère $\{R_0\}$

Le point P est repéré, à tout instant dans le repère de base $\{R_0\}$ par le vecteur $\overline{O_0 P}$.

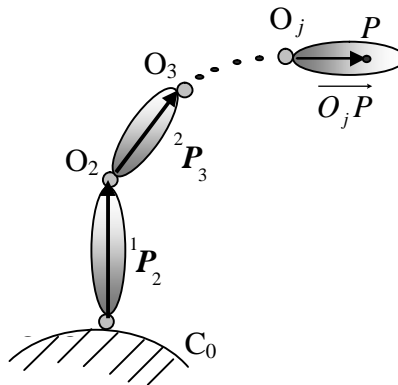


Figure II.2 : Position d'un point P du corps C_j dans le référentiel de base $\{R_0\}$

Le point P appartient au corps C_j , d'où :

$$\overrightarrow{O_0P} = \sum_{i=1}^{i=j} \overrightarrow{O_{i-1}O_i} + \overrightarrow{O_jP} = \sum_{i=1}^{i=j} {}^{i-1}P_i + \overrightarrow{O_jP} \quad (2.9)$$

b) Vitesse du point P dans le repère $\{R_0\}$

Le vecteur vitesse du point P appartenant au corps C_j s'obtient par dérivation de son vecteur position $\overrightarrow{O_0P}$ donné par l'expression (2.9).

$$V_P = \frac{d^0(\overrightarrow{O_0P})}{dt} = \sum_{i=1}^{i=j} \frac{d^0({}^{i-1}P_i)}{dt} + \frac{d^0(\overrightarrow{O_jP})}{dt} \quad (2.10)$$

Nous désignons par w_i le vecteur rotation instantanée du repère $\{R_i\}$ par rapport au repère de base $\{R_0\}$, donné d'après les formules de composition des vitesses, par :

$$w_i = \sum_{k=1}^{k=i} \Omega_{k/k-1} \quad \text{Pour } i=1 \dots n, \quad (2.11)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$V_P = \frac{d^0(\overrightarrow{O_0P})}{dt} = \sum_{i=1}^{i=j} (w_{i-1} \wedge {}^{i-1}P_i + {}^{i-1}\dot{P}_i) + w_j \wedge \overrightarrow{O_jP} + V_P^j \quad (2.12)$$

Avec: $V_P^j = \vec{0}$: La vitesse relative du point P par rapport au repère $\{R_j\}$ est nulle (C_j corps rigide).

En mettant :

$$V_j = \sum_{i=1}^{i=j} (w_{i-1} \wedge {}^{i-1}P_i + {}^{i-1}\dot{P}_i) : \text{Vitesse absolue du point } O_j \text{ l'origine de repère } \{R_j\}.$$

Ce qui donne :

$$\mathbf{V}_P = \frac{d^0 (\overrightarrow{O_0 P})}{dt} = \mathbf{V}_j + \mathbf{w}_j \Lambda \overrightarrow{O_j P} \quad (2.13)$$

Les deux vecteurs \mathbf{w}_i et \mathbf{V}_i peuvent être calculés par récurrence, en appliquant les formules de composition des vitesses.

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{i-1} + \Omega_{i/i-1} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_{i-1} + \mathbf{w}_{i-1} \Lambda^{i-1} \dot{\mathbf{P}}_i + \dot{\mathbf{P}}_i \quad (2.15)$$

Ce qui permet d'établir l'algorithme de calcul de la vitesse absolue d'un point P du corps C_j , suivant :

Algorithme :

Pour $i = 1..j$

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{i-1} + \bar{\sigma}_i * \dot{q}_i * \mathbf{z}_i \\ \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_{i-1} + \mathbf{w}_{i-1} \Lambda^{i-1} \dot{\mathbf{P}}_i + \sigma_i * \dot{q}_i * \mathbf{z}_i \end{array} \right.$$

$\bar{\sigma}$: Variable booléenne

$$\bar{\sigma} = 1 + \sigma$$

On initialise la récurrence par :

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbf{w}_0 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{0} \quad (\text{la base du bras manipulateur fixe}) \\ \mathbf{V}_P = \mathbf{V}_j + \mathbf{w}_j \Lambda \overrightarrow{O_j P} \end{array} \right.$$

Fin

c) **Accélération du point P dans le repère de base $\{R_0\}$**

Le vecteur accélération du point P appartenant au corps C_j s'obtient par dérivation de son vecteur vitesse V_P donné par l'expression (2.12).

$$\dot{V}_P = \frac{d^0(V_P)}{dt} = \frac{d^0}{dt} \left(\sum_{i=1}^{i=j} (w_{i-1} \Lambda^{i-1} P_i + {}^{i-1} \dot{P}_i) \right) + \frac{d^0}{dt} (w_j \Lambda \overline{O_j P}) \quad (2.16)$$

Les dérivées de chacun des termes sont calculées séparément :

- $\frac{d^0 (w_{i-1} \Lambda^{i-1} P_i)}{dt} = \dot{w}_{i-1} \Lambda^{i-1} P_i + w_{i-1} \Lambda \frac{d^0 ({}^{i-1} P_i)}{dt}$

Avec :

$$\dot{w}_{i-1} = \sum_{k=1}^{k=i-1} w_{k-1} \wedge \Omega_{k/k-1} + \dot{\Omega}_{k/k-1} \quad (2.17)$$

$\dot{\Omega}_{k/k-1} = \bar{\sigma}_k * \ddot{q}_k * \mathbf{z}_k$: L'accélération angulaire relative du $\{R_k\}/\{R_{k-1}\}$, déduit de l'expression de $\Omega_{k/k-1}$ par dérivation par rapport au temps.

$$\frac{d^0 ({}^{i-1} P_i)}{dt} = w_{i-1} \Lambda^{i-1} P_i + {}^{i-1} \dot{P}_i$$

Avec ${}^{i-1} \dot{P}_i$: La vitesse relative du point O_i par rapport au repère $\{R_{i-1}\}$.

d'où :

$$\frac{d^0 (w_{i-1} \Lambda^{i-1} P_i)}{dt} = \dot{w}_{i-1} \Lambda^{i-1} P_i + w_{i-1} \Lambda (w_{i-1} \Lambda^{i-1} P_i) + w_{i-1} \Lambda {}^{i-1} \dot{P}_i$$

- $\frac{d^0 ({}^{i-1} \dot{P}_i)}{dt} = w_{i-1} \Lambda^{i-1} \dot{P}_i + {}^{i-1} \ddot{P}_i$

Avec ${}^{i-1} \ddot{P}_i$: L'accélération relative du point O_i par rapport au repère $\{R_{i-1}\}$ se déduit par dérivation scalaire de ${}^{i-1} \dot{P}_i$ donnée par l'expression:

$${}^{i-1} \ddot{P}_i = \frac{d^{i-1} ({}^{i-1} \dot{P}_i)}{dt} = \sigma_i * \ddot{q}_i * \mathbf{z}_i \quad (2.18)$$

- $$\frac{d^0(\mathbf{w}_j \wedge \overrightarrow{O_j P})}{dt} = \dot{\mathbf{w}}_j \wedge \overrightarrow{O_j P} + \mathbf{w}_j \wedge (\mathbf{w}_j \wedge \overrightarrow{O_j P})$$

Après regroupement des différents termes calculés, l'expression (2.16) devient :

$$\dot{\mathbf{V}}_P = \sum_{i=1}^{i=j} \left[\dot{\mathbf{w}}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\mathbf{P}_i + \mathbf{w}_{i-1} \wedge (\mathbf{w}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\mathbf{P}_i) + 2 * \mathbf{w}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\dot{\mathbf{P}}_i + {}^{i-1}\ddot{\mathbf{P}}_i \right] + \dot{\mathbf{w}}_j \wedge \overrightarrow{O_j P} + \mathbf{w}_j \wedge (\mathbf{w}_j \wedge \overrightarrow{O_j P}) \quad (2.19)$$

Lorsque le point P est confondu avec O_j , on trouve par la relation (2.19) l'accélération du point O_j l'origine du repère $\{R_j\}$:

$$\dot{\mathbf{V}}_j = \sum_{i=1}^{i=j} \left[\dot{\mathbf{w}}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\mathbf{P}_i + \mathbf{w}_{i-1} \wedge (\mathbf{w}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\mathbf{P}_i) + 2 * \mathbf{w}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\dot{\mathbf{P}}_i + {}^{i-1}\ddot{\mathbf{P}}_i \right] \quad (2.20)$$

Des deux expressions (2.19) et (2.20), on tire l'expression de l'accélération du point P en fonction de l'accélération du point O_j l'origine du repère $\{R_j\}$:

$$\dot{\mathbf{V}}_P = \dot{\mathbf{V}}_j + \dot{\mathbf{w}}_j \wedge \overrightarrow{O_j P} + \mathbf{w}_j \wedge (\mathbf{w}_j \wedge \overrightarrow{O_j P}) \quad (2.21)$$

De l'expression (2.19), on tire la formulation récurrente de l'accélération absolue du point O_i l'origine du repère $\{R_i\}$:

$$\dot{\mathbf{V}}_i = \dot{\mathbf{V}}_{i-1} + \dot{\mathbf{w}}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\mathbf{P}_i + \mathbf{w}_{i-1} \wedge (\mathbf{w}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\mathbf{P}_i) + 2 * \mathbf{w}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\dot{\mathbf{P}}_i + {}^{i-1}\ddot{\mathbf{P}}_i \quad (2.22)$$

De l'expression (2.22), on tire la formulation récurrente de l'accélération angulaire du repère $\{R_j\}$ par rapport au repère $\{R_0\}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}_i &= \dot{\mathbf{w}}_{i-1} + \mathbf{w}_{i-1} \wedge \boldsymbol{\Omega}_{i/i-1} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{i/i-1} \Rightarrow \\ \dot{\mathbf{w}}_i &= \dot{\mathbf{w}}_{i-1} + \bar{\sigma}_i * (\mathbf{w}_{i-1} \wedge \dot{\mathbf{q}}_i * \mathbf{z}_i + \ddot{\mathbf{q}}_i * \mathbf{z}_i) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ce qui permet d'établir l'algorithme de calcul de l'accélération absolue d'un point P du corps C_j , suivant :

Algorithme :

Pour $i = 1..j$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{aligned} \mathbf{w}_i &= \mathbf{w}_{i-1} + \bar{\sigma}_i * \dot{q}_i * \mathbf{z}_i \text{ d'où } \bar{\sigma}_i = 1 - \sigma_i, \bar{\sigma}_i : \text{variable booléenne} \\ \dot{\mathbf{w}}_i &= \dot{\mathbf{w}}_{i-1} + \bar{\sigma}_i * (\mathbf{w}_{i-1} \wedge \dot{q}_i * \mathbf{z}_i + \ddot{q}_i * \mathbf{z}_i) \\ \dot{\mathbf{V}}_i &= \dot{\mathbf{V}}_{i-1} + \dot{\mathbf{w}}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\mathbf{P}_i + \mathbf{w}_{i-1} \wedge (\mathbf{w}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\mathbf{P}_i) + \bar{\sigma}_i * (2 * \mathbf{w}_{i-1} \wedge \dot{q}_i * \mathbf{z}_i + \ddot{q}_i * \mathbf{z}_i) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

On initialise la récurrence par :

$$\left\| \begin{aligned} \mathbf{w}_0 &= \vec{0}, \dot{\mathbf{w}}_0 = \vec{0} \text{ et } \dot{\mathbf{V}}_0 = \vec{0} \text{ (la base du bras manipulateur fixe)} \\ \dot{\mathbf{V}}_P &= \dot{\mathbf{V}}_j + \dot{\mathbf{w}}_j \wedge \overrightarrow{O_j P} + \mathbf{w}_j \wedge (\mathbf{w}_j \wedge \overrightarrow{O_j P}) \end{aligned} \right.$$

fin

II.2.2.3 Les efforts d'inertie dun corps dans un SMA

Le corps C_j du bras manipulateur est animé d'un mouvement rigidifiant dans l'espace physique à trois dimensions.

Chaque masse élémentaire $dm = \rho dv$ attachée au point P du corps C_j **Figure II.3** soumise à des charges d'inerties représentées par les vecteurs opposés du torseur des quantités d'accélération calculée au point G_j le centre de gravité du corps C_j .

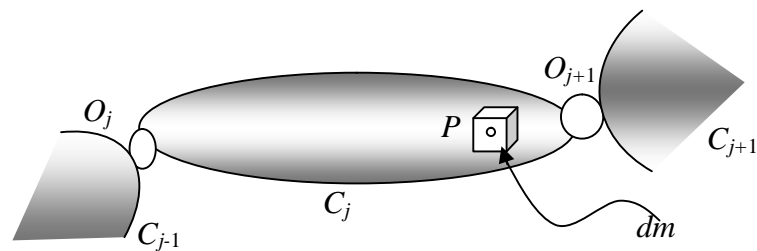


Figure II.3 : La masse élémentaire dm du corps C_j

Le torseur de ces charges d'inerties est donné par :

$$\mathcal{T}_{(dm)/G_j} = \left\{ \begin{array}{l} dF_j = -\rho * \dot{V}_P * dv \\ dN_j = -\rho * \overline{G_j P} \wedge (\dot{V}_P * dv) \end{array} \right\}$$

En intégrant ces deux expressions sur le volume du corps C_j concerné, on détermine la résultante F_j et le moment N_j des actions dynamiques dues au seul corps C_j , réduits à son centre de masse G_j .

a) **La résultante F_j**

$$F_j = \int_{P \in C_j} \dot{V}_P * dm$$

Avec :

$$\dot{V}_P = \dot{V}_j + \dot{w}_j \wedge \overline{O_j P} + w_j \wedge (w_j \wedge \overline{O_j P}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} F_j &= \left(\dot{V}_j * \int_{P \in C_j} dm + \dot{w}_j \wedge \int_{P \in C_j} (\overline{O_j P}) dm + w_j \wedge \left(w_j \wedge \int_{P \in C_j} (\overline{O_j P}) dm \right) \right) \\ &= M_j \left(\dot{V}_j + \dot{w}_j \wedge \overline{G_j P} + w_j \wedge (w_j \wedge \overline{G_j P}) \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$F_j = M_j * \dot{V}_{G_j} \quad (2.24)$$

\dot{V}_{G_j} : Accélération du centre de gravité du corps C_j

b) **Le moment N_j**

$$N_j = \int_{P \in C_j} (\overline{G_j P} \wedge \dot{V}_P) dm$$

Avec :

$$\dot{V}_P = \dot{V}_j + \dot{w}_j \wedge \overrightarrow{O_j P} + w_j \wedge (w_j \wedge \overrightarrow{O_j P}) \Rightarrow$$

$$N_j = \int_{P \in C_j} (\overrightarrow{G_j P} \wedge \dot{V}_j) dm + \int_{P \in C_j} (\overrightarrow{G_j P} \wedge (\dot{w}_j \wedge \overrightarrow{O_j P})) dm + \int_{P \in C_j} (\overrightarrow{G_j P} \wedge (w_j \wedge (w_j \wedge \overrightarrow{O_j P}))) dm$$

En intégrant cette expression terme à terme, on trouve :

$$I_1 = \int_{P \in C_j} (\overrightarrow{G_j P} \wedge \dot{V}_j) dm = \int_{P \in C_j} (\overrightarrow{G_j P}) dm \wedge \dot{V}_j = \vec{0} \quad (2.25)$$

$$\text{Car } \int_{P \in C_j} (\overrightarrow{G_j P}) dm = \vec{0} \quad (G_j \text{ est le centre de masse du corps } C_j).$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{P \in C_j} (\overrightarrow{G_j P} \wedge (\dot{w}_j \wedge \overrightarrow{O_j P})) dm = \int_{P \in C_j} (\overrightarrow{G_j P} \wedge (\dot{w}_j \wedge \overrightarrow{O_j G_j})) dm + \int_{P \in C_j} (\overrightarrow{G_j P} \wedge (\dot{w}_j \wedge \overrightarrow{G_j P})) dm \\ &= \int_{P \in C_j} (\overrightarrow{G_j P}) dm \wedge (\dot{w}_j \wedge \overrightarrow{O_j G_j}) + \left(\int_{P \in C_j} (\overrightarrow{G_j P} \wedge (-\overrightarrow{G_j P})) dm \right) \wedge \dot{w}_j \end{aligned}$$

Le vecteur $(\overrightarrow{G_j P}) \wedge (\dot{w}_j \wedge \overrightarrow{G_j P})$ peut se mettre sous forme matricielle en utilisant les matrices pré-produit vectorielles.

$$\overrightarrow{G_j P} \wedge (\dot{w}_j \wedge \overrightarrow{G_j P}) = \overrightarrow{G_j P} \wedge (-\overrightarrow{G_j P} \wedge \dot{w}_j) = [* \overrightarrow{G_j P}] * [* (-\overrightarrow{G_j P})] * \dot{w}_j$$

Ce qui donne :

$$I_2 = \left(\int_{P \in C_j} \left([* \overrightarrow{G_j P}] * [* (-\overrightarrow{G_j P})] \right) dm \right) * \dot{w}_j = \tilde{\Pi}_{G_j} * \dot{w}_j \quad (2.26)$$

Avec :

$$\tilde{\mathbf{I}}_{G_j} = \left(\int_{P \in \tau} \left(\left[\overrightarrow{*G_j P} \right] * \left[\overrightarrow{*(-G_j P)} \right] \right) dm \right)$$

$\tilde{\mathbf{I}}_{G_j}$: Le tenseur d'inertie du corps C_j , par rapport au repère $(G_j, \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j, \mathbf{z}_j)$.

$$\left[\overrightarrow{*G_j P} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}; \quad \left[\overrightarrow{*(-G_j P)} \right] = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{I}}_{G_j} = \left(\int_{P \in \tau} \left(\begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -x * y & -x * z \\ -x * y & x^2 + z^2 & -y * z \\ -x * z & -y * z & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \right) dm \right)$$

En intégrant cette expression matricielle, on trouve :

$$\tilde{\mathbf{I}}_{G_j} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Où I_{xx} , I_{xy} , I_{xz} , I_{yy} , I_{yz} et I_{zz} : Les moments quadratiques d'inertie du C_j , par rapport au repère $(G_j, \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j, \mathbf{z}_j)$.

$$I_3 = \int_{P \in C_j} \left(\overrightarrow{G_j P} \wedge \left(\mathbf{w}_j \wedge \left(\mathbf{w}_j \wedge \overrightarrow{O_j P} \right) \right) \right) dm = \int_{P \in C_j} \left(\overrightarrow{G_j P} \wedge \left(\mathbf{w}_j \wedge \left(\mathbf{w}_j \wedge \overrightarrow{G_j P} \right) \right) \right) dm$$

Car $\int_{P \in C_j} \left(\overrightarrow{G_j P} \right) dm \wedge \left(\mathbf{w}_j \wedge \left(\mathbf{w}_j \wedge \overrightarrow{O_j G_j} \right) \right) = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{G_j P} \right) \wedge \left(\mathbf{w}_j \wedge \left(\mathbf{w}_j \wedge \overrightarrow{G_j P} \right) \right) &= \left(\overrightarrow{G_j P} \right) \wedge \left(\left(\mathbf{w}_j * \overrightarrow{G_j P} \right) * \mathbf{w}_j - \left(\mathbf{w}_j * \mathbf{w}_j \right) * \overrightarrow{G_j P} \right) \\ &= \left(\overrightarrow{G_j P} \right) \wedge \left(\left(\mathbf{w}_j * \overrightarrow{G_j P} \right) * \mathbf{w}_j \right) \end{aligned}$$

Car :

$$\left(\overrightarrow{G_j P} \right) \wedge \left(- \left(\mathbf{w}_j * \mathbf{w}_j \right) * \overrightarrow{G_j P} \right) = 0$$

De la même façon $\mathbf{w}_j \Lambda \left(-(\overrightarrow{G_j P} * \overrightarrow{G_j P}) * \mathbf{w}_j \right) = 0$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{G_j P}) \Lambda \left((\mathbf{w}_j * \overrightarrow{G_j P}) * \mathbf{w}_j \right) &= \mathbf{w}_j \Lambda \left((\overrightarrow{G_j P} * \overrightarrow{G_j P}) * \mathbf{w}_j - (\overrightarrow{G_j P} * \mathbf{w}_j) * \overrightarrow{G_j P} \right) \\ &= \mathbf{w}_j \Lambda \left(\overrightarrow{G_j P} \Lambda (G_j \overrightarrow{gP} \Lambda \mathbf{w}_j) \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} I_3 &= \mathbf{w}_j \Lambda \int_{P \in C_j} \left(\overrightarrow{G_j P} \Lambda (G_j \overrightarrow{gP} \Lambda \mathbf{w}_j) \right) dm = -\mathbf{w}_j \Lambda \left(\int_{P \in C_j} \left([* \overrightarrow{G_j P}] * [* (-\overrightarrow{G_j P})] \right) dm \right) * \mathbf{w}_j \\ &\Rightarrow I_3 = -\mathbf{w}_j \Lambda \left(\tilde{\mathbf{H}}_{G_j} * \mathbf{w}_j \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Les expressions (2.23), (2.24) et (2.26) permettent d'écrire :

$$\mathbf{N}_j = - \left(\tilde{\mathbf{H}}_{G_j} * \dot{\mathbf{w}}_j + \mathbf{w}_j \Lambda \left(\tilde{\mathbf{H}}_{G_j} * \mathbf{w}_j \right) \right) \quad (2.29)$$

II.2.2.4 Expressions mises en œuvre d'un calcul automatique

Ce formalisme est basé sur une double récurrence : La récurrence avant de la base du robot vers l'effecteur et la récurrence arrière, de l'effecteur vers la base.

Pour les chaînes arborescentes :

Une chaîne complexe **Figure II.4** est une chaîne cinématique constituée de plusieurs chaînes fermées imbriquées [13],[17].

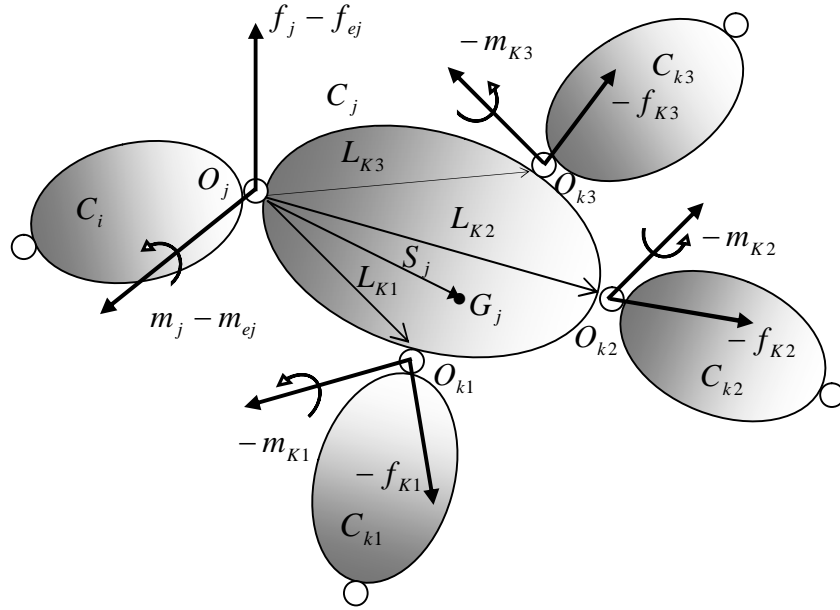


Figure II.4 : Bilan des efforts sur une structure arborescent

Les équations de la récurrence avant, s'écrivent pour $j=1 \dots n$:

Les formules de composition des vitesses et des accélérations :

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{w}_{j-1} + \bar{\sigma}_j * \dot{q}_j * \mathbf{z}_j$$

$$\dot{\mathbf{w}}_j = \dot{\mathbf{w}}_{j-1} + \bar{\sigma}_j * (\ddot{q}_j * \mathbf{z}_j + \dot{q}_j * \mathbf{w}_{j-1} \wedge \mathbf{z}_j)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_j = \dot{\mathbf{V}}_{j-1} + \dot{\mathbf{w}}_{j-1} \wedge {}^{j-1}\mathbf{P}_j + \mathbf{w}_{j-1} \wedge (\mathbf{w}_{j-1} \wedge {}^{j-1}\mathbf{P}_j) + \sigma_j (\ddot{q}_j * \mathbf{z}_j + 2 * \dot{q}_j * \mathbf{w}_{j-1} \wedge \mathbf{z}_j)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_{G_j} = \dot{\mathbf{V}}_j + \dot{\mathbf{w}}_j \wedge \mathbf{S}_j + \mathbf{w}_j \wedge (\mathbf{w}_j \wedge \mathbf{S}_j)$$

Le torseur dynamique du corps C_j :

$$\mathbf{F}_j = M_j * \dot{\mathbf{V}}_{G_j}$$

$$\mathbf{N}_j = \tilde{\mathbf{H}}_{G_j} * \dot{\mathbf{w}}_j + \mathbf{w}_j \wedge (\tilde{\mathbf{H}}_{G_j} * \mathbf{w}_j)$$

On initialise la récurrence par :

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{0} \quad , \quad \dot{\mathbf{w}}_0 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{V}}_0 = -\mathbf{g} \quad (\text{La base du bras manipulateur fixe})$$

Les équations de la récurrence arrière pour $j = n..1$:

$$f_j = F_j + f_{j+1}$$

$$m_j = N_j + m_{j+1} + P_{j+1}^j \wedge f_{j+1} + S_j \wedge F_j$$

Récurrence initialisée par les efforts f_{n+1} et m_{n+1} , noté respectivement F_{ext} et M_{ext} qu'exerce l'organe terminal sur l'environnement.

On remarque que l'on peut toujours faire le calcul pour j variant de 1 à n .

Sachant qu'un corps peut avoir plusieurs successeurs **Figure II.4** et en note k l'indice des repères tels que $a(k)=j$, les équations de récurrence arrière s'écrivent pour $j=n..1$:

$$f_j = F_j + {}^j f_{ej} + \sum_{k/a(k)=j} {}^j f_k$$

$${}^j f_j = {}^i A_j {}^j f_j$$

$${}^j m_j = {}^j N_j + {}^j m_{ej} + \sum_{k/a(k)=j} ({}^j A_k {}^k m_k + {}^j p_k \wedge {}^j f_k)$$

On obtient les couples des actionneurs Γ_j en projetant, selon la nature de la liaison A_j , on ajoute les résistances complémentaires issue des actionneurs eux-mêmes (frottements et inerties des actionneurs).

$$\Gamma_j = (\sigma_j * {}^j f_j + \bar{\sigma}_j * {}^j m_j)^T * z_j + F_{s_j} * \text{sgn}(\dot{q}_j) + F_{V_j} * \dot{q}_j + I a_{j*} \ddot{q}_j \quad (2.30)$$

Avec :

F_{s_j} : Paramètres de frottement sec de l'articulation j

F_{V_j} : Paramètres de frottement visqueux de l'articulation j

Quand le corps C_j est un corps terminal, les termes ${}^j m_k$ et ${}^j f_k$ deviennent nuls [11].

II.2.3 Principe des travaux virtuels de d'Alembert

Ce principe permet d'étudier le comportement dynamique des systèmes articulés en forme d'arbre topologique, dont les articulations possèdent un degré de liberté (translation ou rotation).

Le principe est le suivant : au cours d'un déplacement virtuel, le travail effectué par les forces et couples extérieurs et de gravité, ainsi que par les forces et couples intérieurs, est nul.

II.2.4 Notion « d'énergie d'accélération » ou fonction de Gibbs

Cette méthode s'applique aussi aux systèmes articulés dont les articulations possèdent un degré de liberté, et permet d'établir simplement les équations des systèmes à partir de la notion de fonction de Gibbs.

Cette fonction s'écrit :

$$G = 1/2 \int_{\text{système}} \left\| \frac{d^2}{dt^2}(OM) \right\|^2 dm \quad (2.31)$$

Par rapport à un repère R d'origine O, avec dm = masse de la particule du système.

Si C_0 est le corps fixe de référence, la fonction de Gibbs du système s'écrit :

$$G = \sum_{i=1}^n G_i \quad (2.32)$$

L'inconvénient de cette méthode est que la fonction G est encore plus difficile à obtenir que l'énergie cinématique dans le formalisme de Lagrange [16].

II.2.5 Modèle de la puissance filtrée

Fernando Reyes et Rafael Kelly (1997) ont proposé un modèle de régression basé sur principe de la conservation de l'énergie, ce modèle est nommé : Modèle de la puissance filtrée et ils ont présenté l'évaluation expérimentale de trois schémas identificatifs pour déterminer les paramètres dynamiques d'un robot à commande direct de 2 DDL. Les schémas considérés sont basés sur les modèles de régression suivants :

- ***Dynamique filtrée***

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) = \tau \quad (2.33)$$

q : coordonnée généralisée

$M(q)$: Matrice $n \times n$ d'inertie (symétrique définie positive)

$C(q, \dot{q})$: Matrice $n \times n$ des forces centrifuge et de Coriolis

$g(q)$: Vecteur $n \times 1$ de gravité

$$g(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q}$$

$f(\dot{q})$: Force de frottement

$$f(\dot{q}) = [b_i \dot{q}_i + f_{ci} \operatorname{sgn}(\dot{q}_i)]$$

b_i, f_{ci} : Représente le coefficient de frottement visqueuse et frottement de coulomb du i ème articulation

τ : Couple moteur

- **Modèle de l'énergie fournie**

$$E(q, \dot{q}) = E_c(q, \dot{q}) + E_p(q) \quad (2.34)$$

Avec :

$$E_c(q, \dot{q}) = \phi_K(q, \dot{q})^T \theta_K \quad (2.35)$$

$$E_p(q) = \phi_U(q)^T \theta_U \quad (2.36)$$

$E_c(q, \dot{q})$: L'énergie cinétique

$E_p(q)$: L'énergie potentielle

ϕ_K, ϕ_U : Sont des vecteurs fonctions $P_1 \times 1$ et $P_2 \times 1$

θ_K, θ_U : Vecteurs $P_1 \times 1$ et $P_2 \times 1$ contenant les paramètres dynamiques du manipulateur telle que la masse et l'inertie

- **Modèle de la puissance filtrée**

Le schéma du modèle dynamique filtré présente les meilleurs résultats des paramètres estimés, cependant, il est le plus compliqué à implémenter d'autre part les modèles de l'énergie fournie et de la puissance filtrée réduisent le calcul d'où ils sont les plus convenable pour l'implémentation du temps réel.

Dans le cas de l'absence du frottement ou le frottement de compensation, les modèles de l'énergie fournie et de la puissance filtrée peuvent être dans le même niveau de

performance, cependant, si le frottement de coulomb est présent le modèle de la puissance fournie sera plus performant que ce de l'énergie fournie.

En plus de connaissance exacte de la structure dynamique du robot et le choix favorable du signal de couple d'entrée, la détermination précise de la vitesse des joints joue un rôle très important au niveau des résultats finals obtenus pour la bonne identification des robots [7].

II.2.6 Modèle de Y. F. Li et al

Li et al (1998) ont étudié théoriquement les problèmes de la stabilité dynamique des préhenseurs et l'évalué par la simulation, ils ont conclu que cette dernière est liée aux types de contact entre les doigts et l'objet saisi **Figure II.5**, la configuration de la prise et la loi de contrôle adoptée pour la saisie [8].

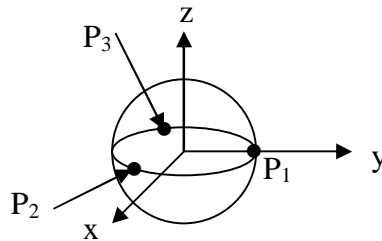


Figure II.5 : saisie d'un objet par trois doigts

Ils ont commencé par les équations dynamiques du système de saisie

$$I_0 \ddot{\Phi} + Q_0 = F + F_{ext} \quad (2.37)$$

Avec :

$$I_0 = \begin{bmatrix} m_0 E_3 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \in R^{6 \times 6}, \quad \ddot{\Phi} = \begin{pmatrix} \dot{v}^T & \dot{\omega}^T \end{pmatrix} \in R^{6 \times 1}$$

$$Q_0 = \left((\omega \times m_0 v)^T \quad (\omega \times I \omega)^T \right)^T \in R^{6 \times 1}$$

$$F = \begin{bmatrix} f \\ m \end{bmatrix}, \quad F_{ext} = \begin{bmatrix} f_{ext} \\ \tau_{ext} \end{bmatrix}$$

E_3 : est la matrice unité 3 X 3

\dot{v} et $\dot{\omega}$: sont la vitesse et al vitesse angulaire de l'objet

m_0 et I : sont la masse et la matrice d'inertie de l'objet
 et ils ont utilisé le théorème de la stabilité de Liapunov

$$V = (1/2) \dot{X}_e^T M_t \dot{X}_e + (1/2) \dot{X}_e^T K_t \dot{X}_e \quad (2.38)$$

Avec :

$$M_t = I_0 + \sum_i M_i, \quad K_t = \sum_i K_i$$

M_i : Matrices d'inertie

K_i : Coefficient de rigidité

Et dans le but de valider l'hypothèse théorique dans ce cas des vérifications expérimentales sont nécessaires.

Les résultats expérimentaux initiaux montrent que le modèle linéaire donne des prédictions acceptables pour le comportement dynamique de la saisie quand les déviations de la configuration de la saisie de sa position d'équilibre sont petites et les contacts entre les doigts et l'objet saisi sont bien maintenus [8].

II.2.7 Modèle de Kensuke Harada et Makoto Kaneko

Kensuke et Makoto (2002) ont proposé la manipulation d'un objet enveloppé à 3D. **Figure II.6** dont la méthode utilisée permet le mouvement de l'objet selon la direction désirée le long de la surface de p-doigts (p-doigts : les doigts qui contrôlent la position et T-doigts : les doigts qui contrôlent le couple moteur).

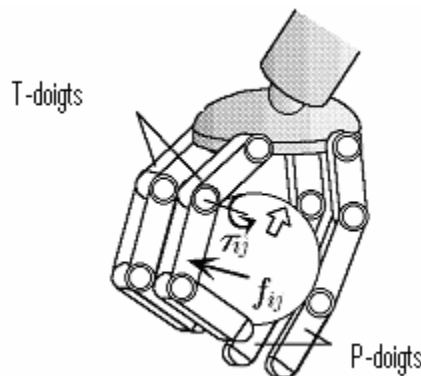


Figure II.6 : Prise enveloppée d'un objet

Pour ce but ils ont obtenus les couples moteurs au niveau des articulations des T-doigts **Figure II.7**.

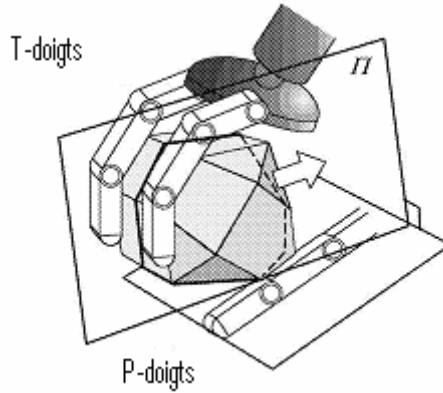


Figure II.7 : Mouvement d'objet projeté sur un plan

$$\tau_i = J_i^T f_i \quad (2.39)$$

D'où :

$$\tau_i = [\tau_{i1}, \dots, \tau_{im}] \in \mathfrak{R}^{m \times 1}$$

τ_i : Moment articulaire du $i^{\text{ème}}$ doigt

f_i : Forces de contact du $i^{\text{ème}}$ doigt au point j

$$f_i = [f_{i1}^T, \dots, f_{im}^T]^T \in \mathfrak{R}^{3m \times 1} \text{ et } J_i^T = \begin{bmatrix} J_{i11}^T & & J_{i1m}^T \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{imm}^T \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{m \times 3m} \quad (2.40)$$

J_i^T : Transposée de la matrice jacobian

$$f_{ij} = \sum_{l=1}^L \lambda_{ij}^l v_{ij}^l, \quad (\lambda_{ij}^l \geq 0) \quad (2.41)$$

$$= V_{ij} \lambda_{ij} \quad (2.42)$$

$$V_{ij} = [v_{ij}^1, \dots, v_{ij}^L] \in \mathfrak{R}^{3 \times L} \text{ et } \lambda_{ij} = [\lambda_{ij}^1, \dots, \lambda_{ij}^L]^T \in \mathfrak{R}^{L \times 1}$$

v_{ij}^l : $l^{\text{ème}}$ vecteur unité

λ_{ij}^l : grandeur de la force de contact

$$f_i = V_i \lambda_i, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (2.43)$$

$$\text{D'où : } \lambda_i = [\lambda_{i1}^T, \dots, \lambda_{im}^T]^T \in \mathfrak{R}^{Lm \times 1} \text{ et } V_i = \text{diag} [V_{i1} \dots V_{im}] \in \mathfrak{R}^{3m \times Lm}$$

De l'équation (2.39) et (2.43) :

$$\tau_i = J_i^T V_i \lambda_i, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (2.44)$$

Pour n doigts :

$$\tau = J^T V \lambda, \quad \lambda \geq 0 \quad (2.45)$$

D'où :

$$\tau = [\tau_1^T, \dots, \tau_n^T] \in \mathfrak{R}^{mn \times 1}, \quad J = \text{diag}[J_1 \dots J_n] \in \mathfrak{R}^{mn \times 3mn}$$

$$V = \text{diag}[V_1 \dots V_n] \in \mathfrak{R}^{3mn \times Lmn}, \quad \lambda = [\lambda_1^T, \dots, \lambda_n^T] \in \mathfrak{R}^{Lmn \times 1}$$

Dans ce cas ils ont considéré un mouvement à 2D projeté sur le plan Π de l'objet et perpendiculaire à la surface de contact, ainsi qu'ils ont considéré le cas où l'objet est en contact surfacique **Figure II.8** avec les P-doigts [9].

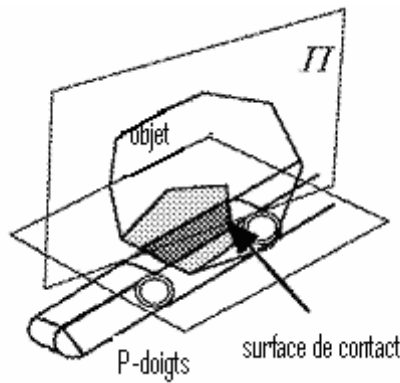


Figure II.8 : Contact surfacique avec les P-doigts

La manipulation de l'objet est définie comme suit :

Soient : b , t_1 et C_{a1} les vecteurs exprimant la direction du mouvement de l'objet

Manipulation positive :

$$b^T t_1 > 0, \quad C_{a1}^T f_T > 0, \quad f_T : \text{force totale}$$

Manipulation négative :

$$b^T t_1 < 0, \quad C_{a1}^T f_T > 0$$

II.2.8 Etude de Akio Namiki et Masatoshi Ishikawa

Akio et Masatoshi (2005) ont proposé l'analyse dynamique pour le cas d'attraper une cible à grande vitesse à l'aide d'une main articulée à trois doigts **Figure II.9** d'où la souplesse de la surface de la cible joue un rôle très important dans cette tâche [10].

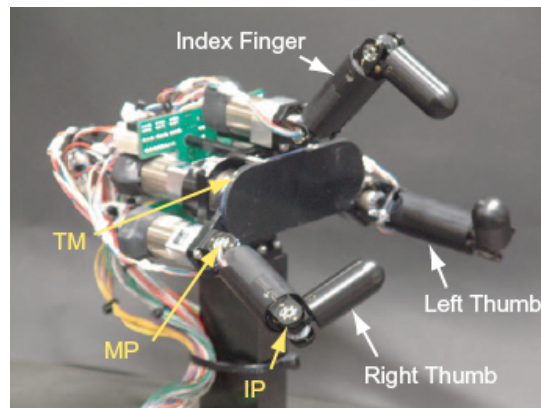


Figure II.9 : Main robotique multi-doigts à grande vitesse

MP,IP : liaison de flexion

TM : liaison de la paume

La **figure II.10** représente la prise optimale d'une cible sphérique à l'aide de deux doigts

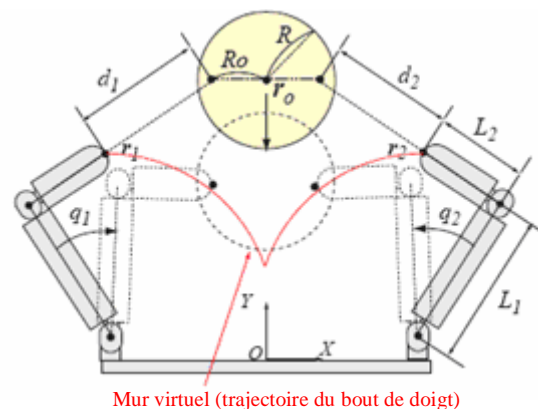


Figure II.10 : trajectoire des bouts de doigts

Sachant que :

$r_0 = [r_{0x}, r_{0y}]^T \in \mathbb{R}^2$: est la position de la cible

$r_i \in \mathbb{R}^2$: est la position du $i^{\text{ème}}$ bout de doigt

$R \in \mathbb{R}$: est le rayon de la cible

$q_i \in \mathbb{R}$: représente l'angle de la liaison MP (joint du $i^{\text{ème}}$ doigt)

L_0 et L_1 : Les longueurs de la paume et de la phalange successivement

L'équation de la trajectoire est :

$$q_{di}(r_0) = a \tan 2 \left(L_1 \pm \sqrt{(L_0 - (-1)^i r_{0ix})^2 + (r_{0iy})^2 - L_1^2} \right) - a \tan 2 \left(r_{0iy}, L_0 - (-1)^i r_{0ix} \right)$$

L'équation de la loi de contrôle est :

$$\tau_i = K_p (q_{di}(r_0) - q_i) - K_v \dot{q}_i, \quad i = 1, 2.$$

Avec :

τ_i : est le couple moteur de MP

K_p et K_v : sont les grandeurs scalaires appropriées.

Le résultat obtenu pour la position de la cible est montré dans la **Figure II.11**

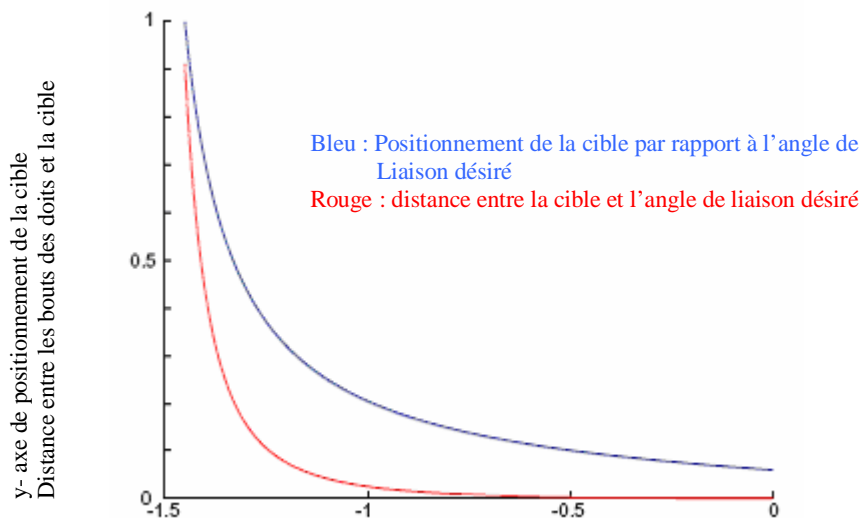


Figure II.11 : Positionnement de la cible

La partie expérimentale de l'étude est représentée par la **Figure II.12**, où la main mécanique articulée saisie un objet sphérique en chute libre, cette opération n'est accomplie qu'à l'aide d'un système de vision intégré.

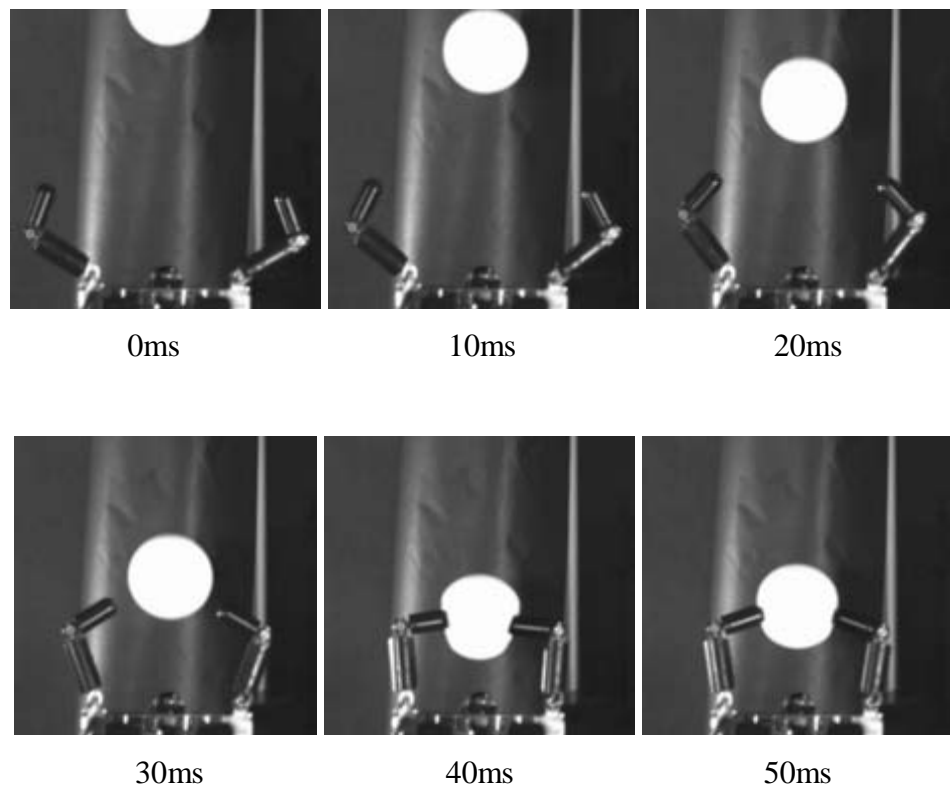


Figure II.12 : Cas d'attraper une cible avec deux doigts

II.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les deux formalismes les plus utilisés pour le calcul du modèle dynamique des robots à chaîne ouverte simple : le formalisme de Newton-Euler et le formalisme de Lagrange. Le premier est basé sur une double récurrence : La récurrence avant de la base du robot vers l'effecteur et la récurrence arrière, de l'effecteur vers la base, le deuxième permet d'écrire les équations de mouvement en termes de travail et d'énergie directement sous une forme matricielle. Ces deux formalismes sont souvent exploités pour la modélisation des chaînes arborescentes telles que les mains mécaniques articulées, en particulier dans le cas de la manipulation dynamique d'objet.

CHAPITRE III

Modélisation dynamique de la saisie par la main mécanique articulée LRP-Hand

III.1 Introduction

Le modèle dynamique de la saisie par une main mécanique articulée permet de déterminer les équations de mouvement c'est –à-dire : la relation entre les couples appliqués aux actionneurs et les positions, vitesses et accélérations articulaires. Dans notre travail nous utilisons la main mécanique (LRP-Hand) [12]-[14].

III.2 Description de la main LRP-Hand

La main (LRP-Hand) est une main non anthropomorphe à quatre doigts, chaque doigt peut faire un mouvement indépendant aux autres. La structure de la main est montrée dans la **Figure III.1**.

La taille de la main est approximativement la taille de la main humaine. La structure mécanique est en alliage d'Aluminium et intègre onze moteurs de type maxon Motor à courant continu à réducteurs intégrés [16]. Les moteurs sont implantés dans la paume et les phalanges des doigts.

La particularité de cette conception est qu'elle combine entre les différents modes de transmission de mouvement (renvoi par engrenage conique, câbles et systèmes à bielles pour les mouvements couplés).

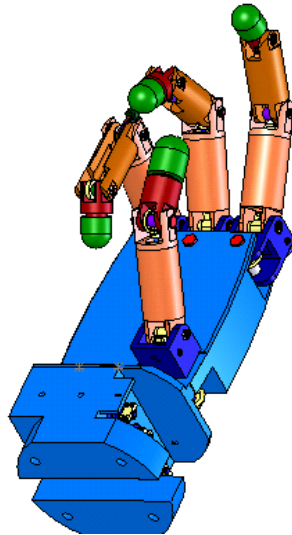
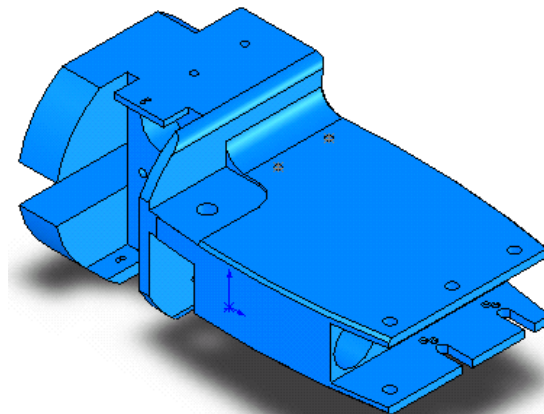


Figure III.1 : structure de la main de "LRP-hand"

III.2.1 Conception de la paume

La paume est conçu en monobloc **Figure III.2**, il a été tenu compte dans la conception les possibilités d'usinage des différents logements des micromoteurs à l'aide d'un centre d'usinage, quatre axes au minimum.



(a)

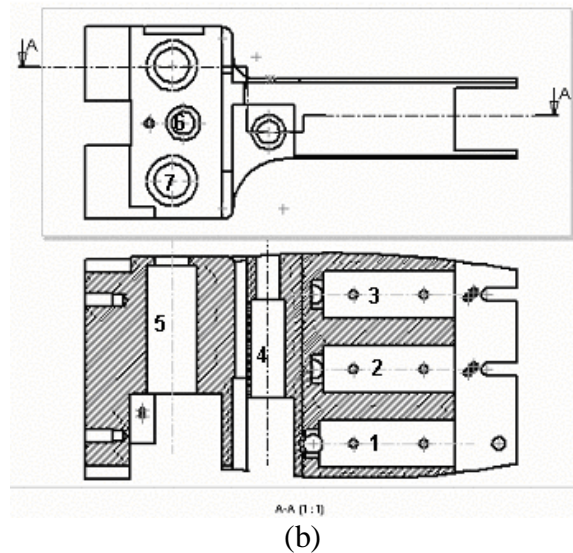


Figure III.2 : Conception de la paume

Les micromoteurs (2, 3, 5) et (7) actionnent le mouvement de flexion-extension des phalanges proximales du pouce et des doigts à l'aide de micro poulies et câbles. Les moteurs (1) et (4) actionnent le mouvement d'abduction adduction du pouce et de l'index à l'aide d'engrenages coniques à dentures droites.

III.2.2 Conception du pouce

Le pouce possède trois degrés de mobilité, il est composé de deux phalanges et trois articulations **Figure III.3**. La première articulation possède un ddl généré par le moteur 1 et autorise le mouvement d'abduction adduction.

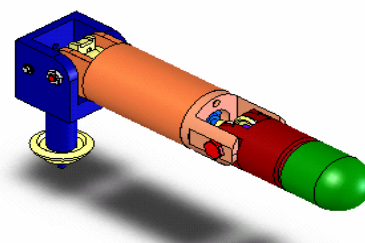


Figure III.3 : Conception du pouce

Les rotations de la seconde et la troisième articulation sont assurées avec les moteurs (7) et (8) autorisant ainsi le mouvement de flexion-extension des phalanges proximale et

distale. Le mouvement de la troisième articulation est obtenu à l'aide d'un mécanisme à engrenages coniques avec un rapport de réduction de 0.5.

III.2.3 Conception de l'indexe

La conception de l'index est relativement semblable à celle du pouce **Figure III.4**. Le pouce possède deux phalanges par contre l'index possède trois phalanges et quatre degrés de mobilité : (i) un d.d.l pour le mouvement de l'abduction adduction commandé par le micromoteur (1) à l'aide d'un mécanisme à engrenages coniques.

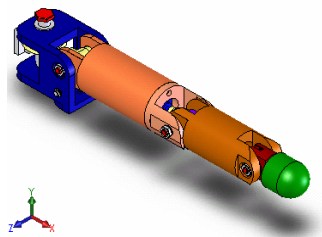


Figure III.4 : Conception de l'indexe

Le moteur (9) actionne le mouvement de flexion extension de la phalange intermédiaire de l'indexe à l'aide d'un mécanisme à engrenage. Les moteurs (6) et (7) donnent respectivement le mouvement de flexion extension des phalanges proximale et distale de l'indexe à l'aide d'un mécanisme à câble et de micro-poulies.

III.2.4 Conception des doigts longs

Les deux doigts longs ne présentent pas une importance égale à celle du pouce et de l'index, notamment dans certaines opérations de saisies d'objets fréquentes, tels que : les prises de pincement ou les manipulations fines d'objets, pour cela que la conception de ces doigts présente un actionneur de moins et intègre trois systèmes de transmission de mouvement (*engrenages, câbles, et biellettes*) pour générer les mouvements des phalanges **Figure III.5**.

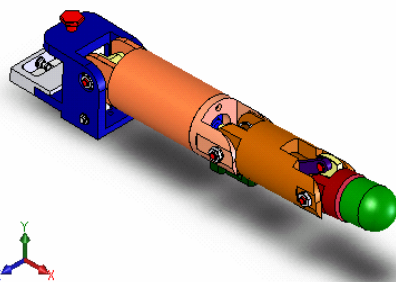


Figure III.5 : Conception des doigts longs

Le premier système est une transmission par câbles, il assure la liaison entre la paume et la phalange proximale, il est actionné par le moteur (2). Le deuxième système est une transmission par engrenages coniques, il assure la liaison entre la phalange proximale et la phalange intermédiaire, il est actionné par le moteur (10). Le troisième système est une transmission par biellette, il assure la liaison entre la phalange proximale et la phalange intermédiaire et est actionnée par le même moteur (10).

III.2.5 Récapitulatif des caractéristiques de la main (LRP-Hand)

Le nombre d'articulations par doigts est inspiré du nombre d'articulations de la main humaine. En générale le nombre de degré de liberté varie selon le type de conception utilisée et en particulier le nombre de tendons (câbles) utilisés pour l'entraînement des phalanges.

- **Taille et placement des doigts**

Pour avoir une saisie et une manipulation d'objet sans risque de perte de contact ou de glissement dans l'espace opérationnel de la main, on doit déterminer la taille et le placement des doigts.

Deux approches sont souvent considérées, une approche anthropomorphe et une approche non anthropomorphe.

Cette approche se base sur le transfert direct des stratégies de prise à partir de la main humaine à la main mécanique articulée. Les différentes tailles des doigts et leur placement asymétrique rend la construction plus chaire et le système de commande plus compliqué, du fait que la commande de chaque doigt est souvent indépendante des autres. Il noter que dans le cas non anthropomorphe les doigts sont identiques en plus ils sont rangés symétriquement [12].

Le tableau récapitulatif **III.1** des Caractéristiques de la main LRP-hand

caractéristiques	Nbre de phalanges	d.d.l	Mécanisme de transmission
Mains			
Le pouce	3	4	Câble-Engrenage
L'indexe	3	4	Câble-Engrenage
Les 2 doigts longs	3	4pour chaque doigt long	Câble-Engrenage-biellette

Tableau III.1 : Caractéristiques de la main de LRP-Hand

III.3 Position du problème dynamique

Le problème que nous vison dans notre travail est la modélisation du comportement dynamique de la saisie d'objet en 3D par la main LRP-Hand lors d'une opération de son transfert d'un endroit vers un autre par un bras manipulateur à un d.d.l dans une cellule robotisée flexible tel que l'exemple montré dans la **Figure III.6**.



Figure III.6 : main robotique saisissant un objet

La **Figure III.7.(a)**, la **Figure III.7.(b)** représentent le schéma cinématique détaillé de la main ainsi que les différents paramètres géométriques [14].

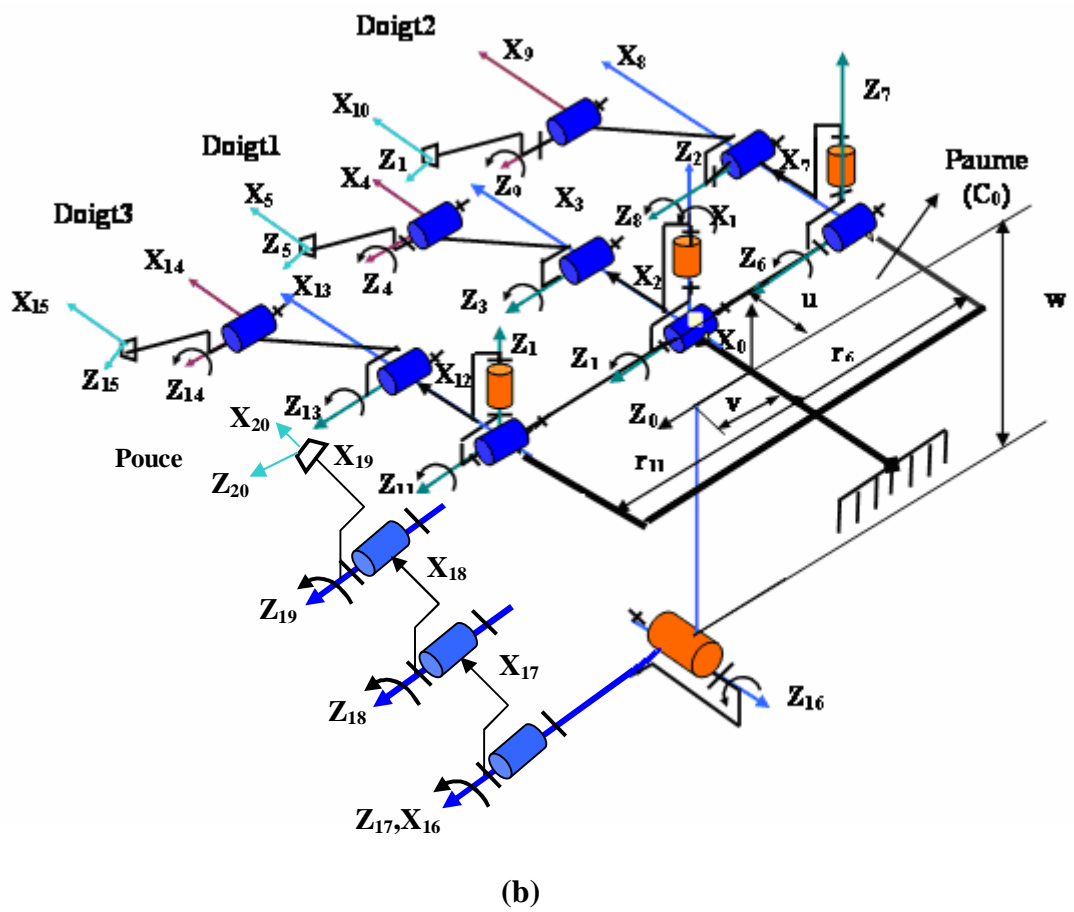
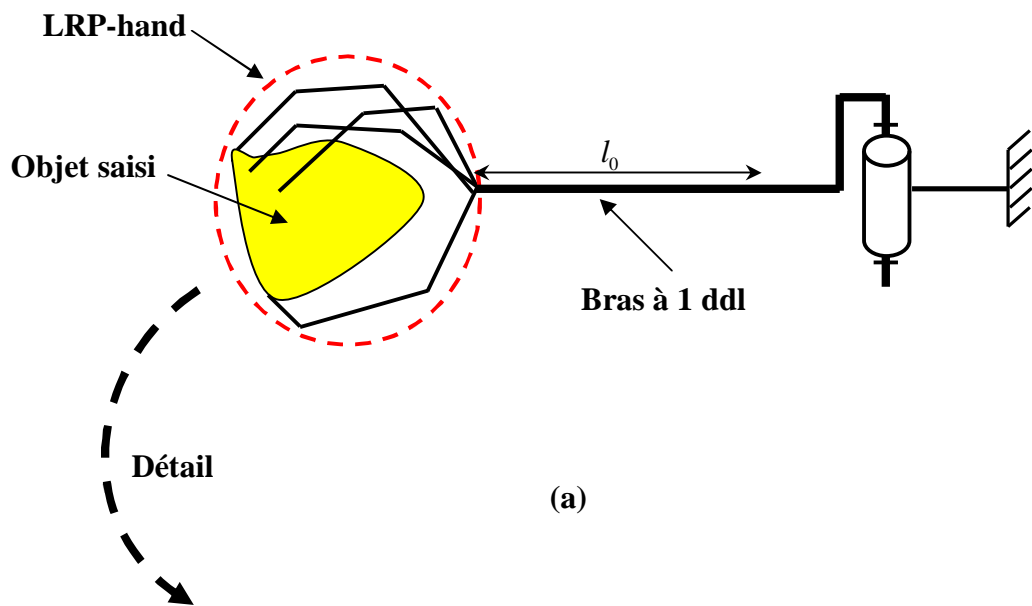


Figure III.7 : Schéma cinématique de la main (LRP-Hand)

III.4 Formulation et mise en équations

La nature du mouvement est circulaire sinusoïdale son équation est sous la forme :

$$\theta_i(t) = A \sin(\beta t + \theta_0) \text{ d'où :}$$

A : L'amplitude

β : La pulsation

θ_0 : La phase initiale

Sachant que :

$$0 < T < 20 \text{ s, } t: \text{ période} = 5 \text{ s, } \theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{t} \Rightarrow \beta = \frac{2\pi}{5} (\text{rad / s}) \Rightarrow$$

$$\text{à } t = 5 \text{ s} \Rightarrow \theta_i(5) = \pi (\text{rad / s}) \Rightarrow \pi = A \sin\left(\frac{2\pi}{5} \times 5 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{\pi}{\sin \frac{5\pi}{2}} = \frac{\pi}{1} = \pi (\text{rad})$$

$$\theta_i(t) = \pi \sin\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ équation du mouvement}$$

$$\dot{\theta}_i(t) = \frac{5\pi^2}{2} \cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right) \text{ équation de la vitesse angulaire}$$

$$\ddot{\theta}_i(t) = -\frac{5\pi^3}{2} \sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right) \text{ équation de l'accélération angulaire}$$

Etape 1 : Calcul itératif direct des vitesses angulaires

$${}^j\omega_i = {}^jA_i {}^i\omega_i$$

$${}^j\omega_j = {}^j\omega_i + \bar{\sigma} \dot{q}_j {}^j a_j$$

$${}^0\omega_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$${}^1\omega_0 = {}^1A_0 {}^0\omega_0 = \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$${}^1\omega_1 = {}^1\omega_0 + \bar{\sigma} \dot{q}_1 {}^1a_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(-\frac{\pi}{200}t + \frac{\pi}{10}\right) \end{bmatrix}^T$$

$${}^2\omega_1 = {}^2A_1 {}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} Cq_2 & -Sq_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_2 & -Cq_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = [0 \quad \dot{\theta}_1 \quad 0]^T = {}^2\omega_2$$

$${}^3\omega_2 = {}^3A_2 {}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} Cq_3 & -Sq_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sq_3 & Cq_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = [-Sq_3\dot{\theta}_1 \quad 0 \quad Cq_3\dot{\theta}_1]^T = {}^3\omega_3$$

$${}^4\omega_3 = {}^4A_3 {}^3\omega_3 = \begin{bmatrix} Cq_4 & -Sq_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_4 & -Cq_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Sq_3\dot{\theta}_1 \\ 0 \\ Cq_3\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = [-Cq_4Sq_3\dot{\theta}_1 \quad Cq_3\dot{\theta}_1 \quad Sq_4Sq_3\dot{\theta}_1]^T = {}^4\omega_4$$

$${}^5\omega_4 = {}^5A_4 {}^4\omega_4 = \begin{bmatrix} Cq_5 & -Sq_5 & 0 \\ Sq_5 & Cq_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Cq_4Sq_3\dot{\theta}_1 \\ Cq_3\dot{\theta}_1 \\ Sq_4Sq_3\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\ = [(-Cq_5Cq_4Sq_3 - Sq_5Cq_3)\dot{\theta}_1 \quad (Cq_5Cq_3 - Sq_5Cq_4Sq_3)\dot{\theta}_1 \quad Sq_4Sq_3\dot{\theta}_1]^T = {}^5\omega_5$$

Etape 2 : Calcul itératif direct des accélérations angulaires

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{\pi}{200}$$

$${}^j\dot{\omega}_i = {}^jA_i {}^i\dot{\omega}_i$$

$${}^j\dot{\omega}_j = {}^j\dot{\omega}_i + \bar{\sigma} [\ddot{q}_j {}^j a_j + {}^j\omega_i \wedge \dot{q}_j {}^j a_j]$$

$${}^0\dot{\omega}_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T =$$

$${}^1\dot{\omega}_0 = {}^1A_0 {}^0\dot{\omega}_0 = \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$${}^1\dot{\omega}_1 = [0 \quad 0 \quad \ddot{\theta}_1]^T = [0 \quad 0 \quad -A\beta^2 \sin(\beta t)]^T$$

$${}^2\dot{\omega}_1 = {}^2A_1 {}^1\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} Cq_2 & -Sq_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_2 & -Cq_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = [0 \quad \ddot{\theta}_1 \quad 0]^T = {}^2\dot{\omega}_2$$

$${}^3\dot{\omega}_2 = {}^3A_2 {}^2\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} Cq_3 & -Sq_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sq_3 & Cq_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = [-Sq_3\ddot{\theta}_1 \quad 0 \quad Cq_3\ddot{\theta}_1]^T = {}^3\dot{\omega}_3$$

$${}^4\dot{\omega}_3 = {}^4A_3 {}^3\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} Cq_4 & -Sq_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_4 & -Cq_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Sq_3\ddot{\theta}_1 \\ 0 \\ Cq_3\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Cq_4Sq_3\ddot{\theta}_1 & Cq_3\ddot{\theta}_1 & Sq_4Sq_3\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = {}^4\dot{\omega}_4$$

$${}^5\dot{\omega}_4 = {}^5A_4 {}^4\dot{\omega}_4 = \begin{bmatrix} Cq_5 & -Sq_5 & 0 \\ Sq_5 & Cq_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Cq_4Sq_3\ddot{\theta}_1 \\ Cq_3\ddot{\theta}_1 \\ Sq_4Sq_3\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-Cq_5Cq_4Sq_3 - Sq_5Cq_3)\ddot{\theta}_1 & (Cq_5Cq_3 - Sq_5Cq_4Sq_3)\ddot{\theta}_1 & Sq_4Sq_3\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = {}^5\dot{\omega}_5$$

Etape 2 : Calcul des $\underline{\underline{b}}_i$

En posant :

$$\underline{\underline{b}}_i = \underline{\underline{\hat{\omega}}}_i + \underline{\underline{\hat{\omega}}}_i \square \underline{\underline{\hat{\omega}}}_i$$

Avec :

$$\underline{\underline{\hat{\omega}}}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega}_z & \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z & 0 & -\dot{\omega}_x \\ -\dot{\omega}_y & \dot{\omega}_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\hat{\omega}}}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{b}}_i = \begin{bmatrix} -\omega_{z_i}^2 - \omega_{y_i}^2 & -\dot{\omega}_{z_i} + \omega_{y_i} \omega_{x_i} & \dot{\omega}_{y_i} + \omega_{z_i} \omega_{x_i} \\ \dot{\omega}_{z_i} + \omega_{x_i} \omega_{y_i} & -\omega_{z_i}^2 - \omega_{x_i}^2 & -\dot{\omega}_{x_i} + \omega_{z_i} \omega_{y_i} \\ -\dot{\omega}_{y_i} + \omega_{z_i} \omega_{x_i} & \dot{\omega}_{x_i} + \omega_{z_i} \omega_{y_i} & -\omega_{y_i}^2 - \omega_{x_i}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{b}}_{1,1} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_{1,1}}^2 - \omega_{y_{1,1}}^2 & -\dot{\omega}_{z_{1,1}} + \omega_{y_{1,1}} \omega_{x_{1,1}} & \dot{\omega}_{y_{1,1}} + \omega_{z_{1,1}} \omega_{x_{1,1}} \\ \dot{\omega}_{z_{1,1}} + \omega_{x_{1,1}} \omega_{y_{1,1}} & -\omega_{z_{1,1}}^2 - \omega_{x_{1,1}}^2 & -\dot{\omega}_{x_{1,1}} + \omega_{z_{1,1}} \omega_{y_{1,1}} \\ -\dot{\omega}_{y_{1,1}} + \omega_{z_{1,1}} \omega_{x_{1,1}} & \dot{\omega}_{x_{1,1}} + \omega_{z_{1,1}} \omega_{y_{1,1}} & -\omega_{y_{1,1}}^2 - \omega_{x_{1,1}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 & -\ddot{\theta}_1 & 0 \\ \ddot{\theta}_1 & -\dot{\theta}_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{b}}_{2,2} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_{2,2}}^2 - \omega_{y_{2,2}}^2 & -\dot{\omega}_{z_{2,2}} + \omega_{y_{2,2}} \omega_{x_{2,2}} & \dot{\omega}_{y_{2,2}} + \omega_{z_{2,2}} \omega_{x_{2,2}} \\ \dot{\omega}_{z_{2,2}} + \omega_{x_{2,2}} \omega_{y_{2,2}} & -\omega_{z_{2,2}}^2 - \omega_{x_{2,2}}^2 & -\dot{\omega}_{x_{2,2}} + \omega_{z_{2,2}} \omega_{y_{2,2}} \\ -\dot{\omega}_{y_{2,2}} + \omega_{z_{2,2}} \omega_{x_{2,2}} & \dot{\omega}_{x_{2,2}} + \omega_{z_{2,2}} \omega_{y_{2,2}} & -\omega_{y_{2,2}}^2 - \omega_{x_{2,2}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 & 0 & \ddot{\theta}_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\ddot{\theta}_1 & 0 & -\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{b}}_{3,3} &= \begin{bmatrix} -\omega_{z_{3,3}}^2 - \omega_{y_{3,3}}^2 & -\dot{\omega}_{z_{3,3}} + \omega_{y_{3,3}} \omega_{x_{3,3}} & \dot{\omega}_{y_{3,3}} + \omega_{z_{3,3}} \omega_{x_{3,3}} \\ \dot{\omega}_{z_{3,3}} + \omega_{x_{3,3}} \omega_{y_{3,3}} & -\omega_{z_{3,3}}^2 - \omega_{x_{3,3}}^2 & -\dot{\omega}_{x_{3,3}} + \omega_{z_{3,3}} \omega_{y_{3,3}} \\ -\dot{\omega}_{y_{3,3}} + \omega_{z_{3,3}} \omega_{x_{3,3}} & \dot{\omega}_{x_{3,3}} + \omega_{z_{3,3}} \omega_{y_{3,3}} & -\omega_{y_{3,3}}^2 - \omega_{x_{3,3}}^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -(Cq_3\dot{\theta}_1)^2 & -Cq_3\ddot{\theta}_1 & -Cq_3Sq_3\dot{\theta}_1^2 \\ Cq_3\ddot{\theta}_1 & \left[-(Cq_3\dot{\theta}_1)^2 - (-Sq_3\dot{\theta}_1)^2 \right] & Sq_3\ddot{\theta}_1 \\ -Cq_3Sq_3\dot{\theta}_1^2 & -Sq_3\ddot{\theta}_1 & -(-Sq_3\dot{\theta}_1)^2 \end{bmatrix} \\
\underline{\underline{b}}_{4,4} &= \begin{bmatrix} -\omega_{z_{4,4}}^2 - \omega_{y_{4,4}}^2 & -\dot{\omega}_{z_{4,4}} + \omega_{y_{4,4}} \omega_{x_{4,4}} & \dot{\omega}_{y_{4,4}} + \omega_{z_{4,4}} \omega_{x_{4,4}} \\ \dot{\omega}_{z_{4,4}} + \omega_{x_{4,4}} \omega_{y_{4,4}} & -\omega_{z_{4,4}}^2 - \omega_{x_{4,4}}^2 & -\dot{\omega}_{x_{4,4}} + \omega_{z_{4,4}} \omega_{y_{4,4}} \\ -\dot{\omega}_{y_{4,4}} + \omega_{z_{4,4}} \omega_{x_{4,4}} & \dot{\omega}_{x_{4,4}} + \omega_{z_{4,4}} \omega_{y_{4,4}} & -\omega_{y_{4,4}}^2 - \omega_{x_{4,4}}^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(-(Sq_4Sq_3\dot{\theta}_1)^2 - (Cq_3\dot{\theta}_1)^2 \right) & (-Sq_4Sq_3\ddot{\theta}_1 - Cq_4Sq_3Cq_3\dot{\theta}_1^2) & (Cq_3\ddot{\theta}_1 - Cq_4Sq_4S^2q_3\dot{\theta}_1^2) \\ (Sq_4Sq_3\ddot{\theta}_1 - Cq_4Sq_3Cq_3\dot{\theta}_1^2) & \left(-(Sq_4Sq_3\dot{\theta}_1)^2 - (Cq_4Sq_3\dot{\theta}_1)^2 \right) & (Cq_4Sq_3\ddot{\theta}_1 + Sq_4Sq_3Cq_3\dot{\theta}_1^2) \\ (-Cq_3\ddot{\theta}_1 - Cq_4Sq_4S^2q_3\dot{\theta}_1^2) & (-Cq_4Sq_3\ddot{\theta}_1 + Sq_4Sq_3Cq_3\dot{\theta}_1^2) & \left(-(Cq_3\dot{\theta}_1)^2 - (Cq_4Sq_3\dot{\theta}_1)^2 \right) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Etape 4 : Calcul des t_j : $\sigma_j = 0$

Toutes les liaisons sont des liaisons pivot $\Rightarrow t_{jj}$ ne seront pas calculés

Etape 5 : Calcul des ${}^{j-1}r_{j-1}$, ${}^j r_{j-1}$, ${}^j \alpha_j$

$${}^j r_{j-1} = {}^j A_{j-1} {}^{j-1} r_{j-1}$$

$$r_{j-1} = \underline{\alpha}_{j-1} + \underline{\underline{b}}_{j-1} \square^j \underline{P}_{j-1}$$

$$\underline{\alpha}_j = \sigma_j \underline{t}_j + r_{j-1} = r_{j-1}$$

$${}^0 r_0 = [0 \quad 0 \quad -g]$$

$$P_{1,0} = [2u+l \quad 0 \quad 0] = [l_0 \quad 0 \quad 0]$$

$$P_{2,1} = [l_1^1 \quad 0 \quad 0]$$

$$P_{3,2} = [l_2^1 \quad 0 \quad 0]$$

$$P_{4,3} = [l_3^1 \quad 0 \quad 0]$$

$$P_{6,0} = [2u + l \quad -r_6 \quad 0] = [l_0 \quad -r_6 \quad 0]$$

$$P_{7,6} = [l_1^2 \quad 0 \quad 0]$$

$$P_{8,7} = [l_2^2 \quad 0 \quad 0]$$

$$P_{9,8} = [l_3^2 \quad 0 \quad 0]$$

$$P_{11,0} = [2u + l \quad r_{11} \quad 0] = [l_0 \quad r_{11} \quad 0]$$

$$P_{12,11} = [l_1^3 \quad 0 \quad 0]$$

$$P_{13,12} = [l_2^3 \quad 0 \quad 0]$$

$$P_{14,13} = [l_3^3 \quad 0 \quad 0]$$

$$P_{16,0} = [0 \quad v \quad -w]$$

$$P_{17,16} = [l_1^4 \quad 0 \quad 0]$$

$$P_{18,17} = [l_2^4 \quad 0 \quad 0]$$

$$P_{19,18} = [l_3^4 \quad 0 \quad 0]$$

$$r_{0,1} = {}^1A_0 r_{0,0} = \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad -g]^T = r_{0,0}$$

$$\alpha_{1,1} = r_{0,1}$$

$$r_{1,1} = [(\alpha_{x1,1} + b_{xx1,1}l_1^1) \quad (\alpha_{y1,1} + b_{yx1,1}l_1^1) \quad (\alpha_{z1,1} + b_{zx1,1}l_1^1)]^T$$

$$r_{1,2} = \begin{bmatrix} Cq_2 & -Sq_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_2 & -Cq_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha_{x1,1} + b_{xx1,1}l_1^1) \\ (\alpha_{y1,1} + b_{yx1,1}l_1^1) \\ (\alpha_{z1,1} + b_{zx1,1}l_1^1) \end{bmatrix}$$

$$= [(Cq_2[\alpha_{x1,1} + b_{xx1,1}l_1^1] - Sq_2[\alpha_{y1,1} + b_{yx1,1}l_1^1]) \quad (\alpha_{z1,1} + b_{zx1,1}l_1^1) \quad (-Sq_2[\alpha_{x1,1} + b_{xx1,1}l_1^1] - Cq_2[\alpha_{y1,1} + b_{yx1,1}l_1^1])]^T$$

$$\alpha_{2,2} = r_{1,2}$$

$$r_{2,2} = [(\alpha_{x2,2} + b_{xx2,2}l_2^1) \quad (\alpha_{y2,2} + b_{yx2,2}l_2^1) \quad (\alpha_{z2,2} + b_{zx2,2}l_2^1)]^T$$

$$r_{2,3} = \begin{bmatrix} Cq_3 & -Sq_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sq_3 & Cq_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha_{x2,2} + b_{xx2,2}l_2^1) \\ (\alpha_{y2,2} + b_{yx2,2}l_2^1) \\ (\alpha_{z2,2} + b_{zx2,2}l_2^1) \end{bmatrix}$$

$$= [(Cq_3[\alpha_{x2,2} + b_{xx2,2}l_2^1] - Sq_3[\alpha_{y2,2} + b_{yx2,2}l_2^1]) \quad -(\alpha_{z2,2} + b_{zx2,2}l_2^1) \quad (Sq_3[\alpha_{x2,2} + b_{xx2,2}l_2^1] + Cq_3[\alpha_{z2,2} + b_{zx2,2}l_2^1])]^T$$

$$\alpha_{3,3} = r_{2,3}$$

$$r_{3,3} = \left[\left(\alpha_{x3,3} + b_{xx3,3} l_3^1 \right) \quad \left(\alpha_{y3,3} + b_{yx3,3} l_3^1 \right) \quad \left(\alpha_{z3,3} + b_{zx3,3} l_3^1 \right) \right]^T$$

$$r_{3,4} = \begin{bmatrix} Cq_4 & -Sq_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_4 & -Cq_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\alpha_{x3,3} + b_{xx3,3} l_3^1 \right) \\ \left(\alpha_{y3,3} + b_{yx3,3} l_3^1 \right) \\ \left(\alpha_{z3,3} + b_{zx3,3} l_3^1 \right) \end{bmatrix}$$

$$= \left[\left(Cq_4 \left[\alpha_{x3,3} + b_{xx3,3} l_3^1 \right] - Sq_4 \left[\alpha_{y3,3} + b_{yx3,3} l_3^1 \right] \right) \quad \left(\alpha_{z3,3} + b_{zx3,3} l_3^1 \right) \quad \left(-Sq_4 \left[\alpha_{x3,3} + b_{xx3,3} l_3^1 \right] - Cq_4 \left[\alpha_{y3,3} + b_{yx3,3} l_3^1 \right] \right) \right]^T$$

$$\alpha_{4,4} = r_{3,4}$$

Etape 6 : Calcul inverse des forces de saisie

$${}^j f_j = {}^j f_{j+1} + b_{j,j} u_{j,j} + m_j \alpha_{j,j}$$

$$f_{j-1,j} = A_{j-1,j} f_{j,j}$$

$$f_{5,4} = \left[f_{x5,4}, f_{y5,4}, f_{z5,4} \right]$$

$$f_{4,4} = f_{5,4} + \underline{\underline{b}}_{4,4} u_{4,4} + m_4 \alpha_{4,4}$$

$$\underline{\underline{b}}_{4,4} u_{4,4} = \begin{bmatrix} b_{xx4,4} & b_{xy4,4} & b_{xz4,4} \\ b_{yx4,4} & b_{yy4,4} & b_{yz4,4} \\ b_{zx4,4} & b_{zy4,4} & b_{zz4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x4,4} \\ u_{y4,4} \\ u_{z4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{xx4,4} u_{x4,4} + b_{xy4,4} u_{y4,4} + b_{xz4,4} u_{z4,4} \\ b_{yx4,4} u_{x4,4} + b_{yy4,4} u_{y4,4} + b_{yz4,4} u_{z4,4} \\ b_{zx4,4} u_{x4,4} + b_{zy4,4} u_{y4,4} + b_{zz4,4} u_{z4,4} \end{bmatrix}$$

$$f_{4,4} = \begin{bmatrix} f_{x5,4} + b_{xx4,4} u_{x4,4} + b_{xy4,4} u_{y4,4} + b_{xz4,4} u_{z4,4} + m_4 \alpha_{x4,4} \\ f_{y5,4} + b_{yx4,4} u_{x4,4} + b_{yy4,4} u_{y4,4} + b_{yz4,4} u_{z4,4} + m_4 \alpha_{y4,4} \\ f_{z5,4} + b_{zx4,4} u_{x4,4} + b_{zy4,4} u_{y4,4} + b_{zz4,4} u_{z4,4} + m_4 \alpha_{z4,4} \end{bmatrix}$$

$$f_{4,3} = \begin{bmatrix} Cq_4 & -Sq_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_4 & -Cq_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x4,4} \\ f_{y4,4} \\ f_{z4,4} \end{bmatrix} = \left[\left(f_{x4,4} Cq_4 - f_{y4,4} Sq_4 \right), f_{z4,4}, \left(-f_{x4,4} Sq_4 - f_{y4,4} Cq_4 \right) \right]$$

$$f_{3,3} = \begin{bmatrix} f_{x4,3} + b_{xx3,3} u_{x3,3} + b_{xy3,3} u_{y3,3} + b_{xz3,3} u_{z3,3} + m_3 \alpha_{x3,3} \\ f_{y4,3} + b_{yx3,3} u_{x3,3} + b_{yy3,3} u_{y3,3} + b_{yz3,3} u_{z3,3} + m_3 \alpha_{y3,3} \\ f_{z4,3} + b_{zx3,3} u_{x3,3} + b_{zy3,3} u_{y3,3} + b_{zz3,3} u_{z3,3} + m_3 \alpha_{z3,3} \end{bmatrix}$$

$$f_{3,2} = \begin{bmatrix} Cq_3 & -Sq_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sq_3 & Cq_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x3,3} \\ f_{y3,3} \\ f_{z3,3} \end{bmatrix} = \left[\left(f_{x3,3} Cq_3 - f_{y3,3} Sq_3 \right), -f_{z3,3}, \left(f_{x3,3} Sq_3 + f_{y3,3} Cq_3 \right) \right]$$

$$f_{2,2} = \begin{bmatrix} f_{x3,2} + b_{xx2,2} u_{x2,2} + b_{xy2,2} u_{y2,2} + b_{xz2,2} u_{z2,2} + m_2 \alpha_{x2,2} \\ f_{y3,2} + b_{yx2,2} u_{x2,2} + b_{yy2,2} u_{y2,2} + b_{yz2,2} u_{z2,2} + m_2 \alpha_{y2,2} \\ f_{z3,2} + b_{zx2,2} u_{x2,2} + b_{zy2,2} u_{y2,2} + b_{zz2,2} u_{z2,2} + m_2 \alpha_{z2,2} \end{bmatrix}$$

$$f_{2,1} = \begin{bmatrix} Cq_2 & -Sq_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_2 & -Cq_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x2,2} \\ f_{y2,2} \\ f_{z2,2} \end{bmatrix} = \left[(f_{x2,2}Cq_2 - f_{y2,2}Sq_2), f_{z2,2}, (-f_{x2,2}Sq_2 - f_{y2,2}Cq_2) \right]$$

$$f_{1,1} = \begin{bmatrix} f_{x2,1} + b_{xx1,1}u_{x1,1} + b_{xy1,1}u_{y1,1} + b_{xz1,1}u_{z1,1} + m_1\alpha_{x1,1} \\ f_{y2,1} + b_{yx1,1}u_{x1,1} + b_{yy1,1}u_{y1,1} + b_{yz1,1}u_{z1,1} + m_1\alpha_{y1,1} \\ f_{z2,1} + b_{zx1,1}u_{x1,1} + b_{zy1,1}u_{y1,1} + b_{zz1,1}u_{z1,1} + m_1\alpha_{z1,1} \end{bmatrix}$$

$$f_{1,0} = \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x1,1} \\ f_{y1,1} \\ f_{z1,1} \end{bmatrix} = \left[(f_{x1,1}Cq_1 - f_{y1,1}Sq_1), (f_{x1,1}Sq_1 + f_{y1,1}Cq_1), f_{z1,1} \right]$$

Etape 7 : Calcule des couples de rotation

$$C_{j,j} = C_{j,j+1} + K_{j,j}\dot{\omega}_{j,j} + \hat{\omega} K_{j,j}\omega_{j,j} + \hat{u}_{j,j}\alpha_{j,j} + \hat{p}_{j,j+1(j)}f_j^{j+1}$$

$$C_{j-1,j} = A_{j-i,j}C_{j,j}$$

Moment de 2^{ème} ordre $K_{j,j}$

$$K_{1,1} = \begin{bmatrix} I_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z1} \end{bmatrix}$$

$$K_{2,2} = \begin{bmatrix} I_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z2} \end{bmatrix}$$

$$K_{3,3} = \begin{bmatrix} I_{x3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z3} \end{bmatrix}$$

$$K_{4,4} = \begin{bmatrix} I_{x4} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y4} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z4} \end{bmatrix}$$

$$K_{6,6} = \begin{bmatrix} I_{x6} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y6} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z6} \end{bmatrix}$$

$$K_{7,7} = \begin{bmatrix} I_{x7} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y7} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z7} \end{bmatrix}$$

$$K_{8,8} = \begin{bmatrix} I_{x8} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y8} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z8} \end{bmatrix}$$

$$K_{11,11} = \begin{bmatrix} I_{x11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y11} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z11} \end{bmatrix}$$

$$K_{12,12} = \begin{bmatrix} I_{x12} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y12} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z12} \end{bmatrix}$$

$$K_{13,13} = \begin{bmatrix} I_{x13} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y13} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z13} \end{bmatrix}$$

$$K_{16,16} = \begin{bmatrix} I_{x16} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y16} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z16} \end{bmatrix}$$

$$K_{17,17} = \begin{bmatrix} I_{x17} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y17} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z17} \end{bmatrix}$$

$$K_{18,18} = \begin{bmatrix} I_{x18} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y18} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z18} \end{bmatrix}$$

$$C_{5,4} = [C_{x5,4}, C_{y5,4}, C_{z5,4}]$$

$$C_{4,4} = \begin{bmatrix} (C_{x5,4} + I_{x4}\dot{\omega}_{x4} - \omega_{z4}I_{y4}\omega_{y4} + \omega_{y4}I_{z4}\omega_{z4} + U_{y4}\alpha_{z4} - \alpha_{y4}U_{z4}) \\ (C_{y5,4} + I_{y4}\dot{\omega}_{y4} + \omega_{z4}I_{x4}\omega_{x4} - \omega_{x4}I_{z4}\omega_{z4} - U_{x4}\alpha_{z4} - \alpha_{x4}U_{z4} - l_3^1 F_{z5,4}) \\ (C_{z5,4} + I_{z4}\dot{\omega}_{z4} - \omega_{y4}I_{x4}\omega_{x4} - \omega_{x4}I_{z4}\omega_{y4} + U_{x4}\alpha_{y4} - U_{y4}\alpha_{x4} + l_3^1 F_{z5,4}) \end{bmatrix}$$

$$C_{4,3} = \begin{bmatrix} Cq_4 & -Sq_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_4 & -Cq_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{x4,4} \\ C_{y4,4} \\ C_{z4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq_4 C_{x4,4} - Sq_4 C_{y4,4} \\ C_{z4,4} \\ -Sq_4 C_{x4,4} - Cq_4 C_{y4,4} \end{bmatrix}$$

$$C_{3,3} = \begin{bmatrix} (C_{x4,3} + I_{x3}\dot{\omega}_{x3} - \omega_{z3}I_{y3}\omega_{y3} + \omega_{y3}I_{z3}\omega_{z3} + U_{y3}\alpha_{z3} - \alpha_{y3}U_{z3}) \\ (C_{y4,3} + I_{y3}\dot{\omega}_{y3} + \omega_{z3}I_{x3}\omega_{x3} - \omega_{x3}I_{z3}\omega_{z3} - U_{x3}\alpha_{z3} - \alpha_{x3}U_{z3} - l_2^1 F_{z4,3}) \\ (C_{z4,3} + I_{z3}\dot{\omega}_{z3} - \omega_{y3}I_{x3}\omega_{x3} - \omega_{x3}I_{z3}\omega_{y3} + U_{x3}\alpha_{y3} - U_{y3}\alpha_{x3} + l_2^1 F_{z4,3}) \end{bmatrix}$$

$$C_{3,2} = \begin{bmatrix} Cq_3 & -Sq_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sq_3 & Cq_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{x3,3} \\ C_{y3,3} \\ C_{z3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq_3 C_{x3,3} - Sq_3 C_{y3,3} \\ -C_{z3,3} \\ Sq_3 C_{x3,3} + Cq_3 C_{y3,3} \end{bmatrix}$$

$$C_{2,2} = \begin{bmatrix} (C_{x3,2} + I_{x2}\dot{\omega}_{x2} - \omega_{z2}I_{y2}\omega_{y2} + \omega_{y2}I_{z2}\omega_{z2} + U_{y2}\alpha_{z2} - \alpha_{y2}U_{z2}) \\ (C_{y3,2} + I_{y2}\dot{\omega}_{y2} + \omega_{z2}I_{x2}\omega_{x2} - \omega_{x2}I_{z2}\omega_{z2} - U_{x2}\alpha_{z2} - \alpha_{x2}U_{z2} - l_1^1 F_{z3,2}) \\ (C_{z3,2} + I_{z2}\dot{\omega}_{z2} - \omega_{y2}I_{x2}\omega_{x2} - \omega_{x2}I_{z2}\omega_{y2} + U_{x2}\alpha_{y2} - U_{y2}\alpha_{x2} + l_1^1 F_{z3,2}) \end{bmatrix}$$

$$C_{2,1} = \begin{bmatrix} Cq_2 & -Sq_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_2 & -Cq_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{x2,2} \\ C_{y2,2} \\ C_{z2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq_2 C_{x2,2} - Sq_2 C_{y2,2} \\ C_{z2,2} \\ -Sq_2 C_{x2,2} - Cq_2 C_{y2,2} \end{bmatrix}$$

$$C_{1,1} = \begin{bmatrix} (C_{x2,1} + I_{x1}\dot{\omega}_{x1} - \omega_{z1}I_{y1}\omega_{y1} + \omega_{y1}I_{z1}\omega_{z1} + U_{y1}\alpha_{z1} - \alpha_{y1}U_{z1}) \\ (C_{y2,1} + I_{y1}\dot{\omega}_{y1} + \omega_{z1}I_{x1}\omega_{x1} - \omega_{x1}I_{z1}\omega_{z1} - U_{x1}\alpha_{z1} - \alpha_{x1}U_{z1} - l_0^1 F_{z2,1}) \\ (C_{z2,1} + I_{z1}\dot{\omega}_{z1} - \omega_{y1}I_{x1}\omega_{x1} - \omega_{x1}I_{z1}\omega_{y1} + U_{x1}\alpha_{y1} - U_{y1}\alpha_{x1} + l_0^1 F_{z2,1}) \end{bmatrix}$$

$$C_{1,0} = \begin{bmatrix} Cq_1 & -Sq_1 & 0 \\ Sq_1 & Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{x1,1} \\ C_{y1,1} \\ C_{z1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq_1 C_{x1,1} - Sq_1 C_{y1,1} \\ Sq_1 C_{x1,1} + Cq_1 C_{y1,1} \\ C_{z1,1} \end{bmatrix}$$

Etape 8 : Calcul des ${}^i\Gamma_j$: couple Moteur pour chaque articulation

$${}^i\Gamma_j = z^j (\sigma_j F_j^j + \overline{\sigma_j} C_j^j) + F^{jj} \dot{\theta}_j + H^{jj} \operatorname{sgn} \dot{\theta}_j + I_{zj} \ddot{\theta}_j$$

$${}^1\Gamma_1 = C_{z1,1} + fp_1 \dot{\theta}_1 + hp_1 \operatorname{sgn} \dot{\theta}_1 + I_{z1} \ddot{\theta}_1$$

$${}^1\Gamma_2 = C_{z2,2} + fp_2 \dot{\theta}_2 + hp_2 \operatorname{sgn} \dot{\theta}_2 + I_{z2} \ddot{\theta}_2$$

$${}^1\Gamma_3 = C_{z3,3} + fp_3 \dot{\theta}_3 + hp_3 \operatorname{sgn} \dot{\theta}_3 + I_{z3} \ddot{\theta}_3$$

$${}^1\Gamma_4 = C_{z4,4} + fp_4 \dot{\theta}_4 + hp_4 \operatorname{sgn} \dot{\theta}_4 + I_{z4} \ddot{\theta}_4$$

Remarque : pour le reste du calcul voir annexe.

III.5 Applications

Afin de valider notre modélisation, nous allons effectuer les calculs pour quelques objets simples de géométrie connue.

III.5.1 Saisie d'un objet parallélépipédique

Les résultats de calcul des vitesses et accélérations articulaires de la main LRP-Hand dans le cas de saisir un parallélépipède **Figure III.8** d'écrit par la méthode de Newton-Euler sont présentés par les **Figures** de **III. 9** jusqu'à **III. 21**.

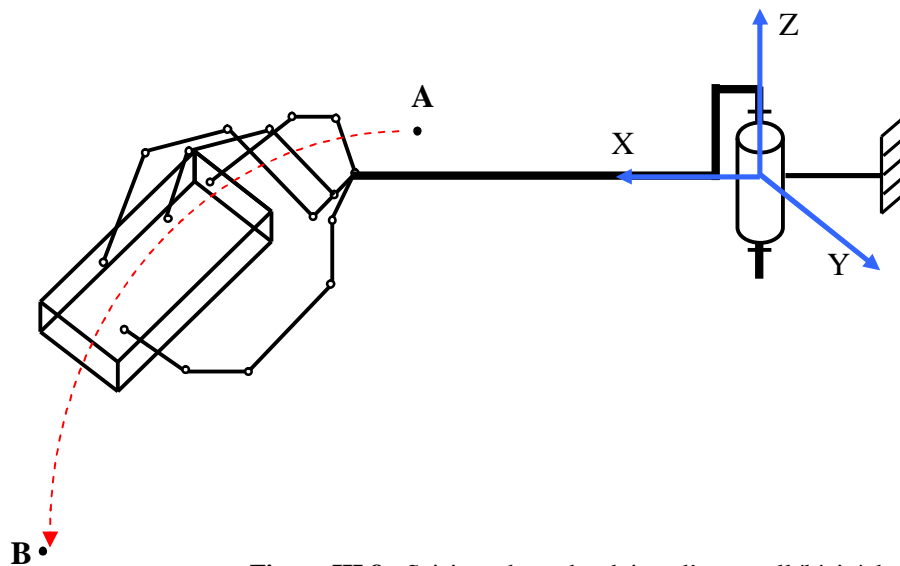


Figure III.8 : Saisie au bout des doigts d'un parallélépipède

Les données nécessaires au calcul du modèle dynamique de la main LRP-Hand sont :

1. Les paramètres géométrique, poids de l'objet, inertiels et frottements ainsi que les efforts des contacts bout des doigts/objet **Tableau III.2**
2. Les positions articulaires, les vitesses et les accélérations articulaires
3. on considère que les doigts longs sont uniformément réparti sur la paume
4. tous les ont été choisis identiques afin de simplifier la fabrication [14].

Paramètres	Valeurs numériques				
Données géométriques de la main dans la configuration de saisie	bras	doigt1	doigt2	doigt3	doigt4
	$q_i = \theta_i$	$q_2 = -22^\circ 29'$	$q_6 = -22^\circ 23'$	$q_{11} = -22^\circ 10'$	$q_{16} = 90^\circ$
		$q_3 = 0^\circ$	$q_7 = -12^\circ$	$q_{12} = 12^\circ$	$q_1 = 53^\circ 46'$
		$q_4 = 44^\circ 57'$	$q_8 = 44^\circ 58'$	$q_{13} = 44^\circ 54'$	$q_{18} = 21^\circ 25'$
		$q_5 = 29^\circ 59'$	$q_9 = 29^\circ 58'$	$q_{14} = 29^\circ 53'$	$q_{19} = 29^\circ 59'$
$l_{br} = 35cm, w = 6cm, r_6 = r_{11} = 5cm, u = 5,5cm, v = 2cm,$ $l_1^1 = l_1^2 = l_1^3 = l_1^4 = 5cm, l_2^1 = l_2^2 = l_2^3 = l_2^4 = 3,5cm,$ $l_3^1 = l_3^2 = l_3^3 = l_3^4 = 2,8cm, r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1cm, r_{bras} = 4cm$					
Poids de l'objet	200g				
Inertiels (Kg.m ²)	$m_1^1 = m_1^2 = m_1^3 = m_1^4 = 15g, m_2^1 = m_2^2 = m_2^3 = m_2^4 = 10g,$ $m_3^1 = m_3^2 = m_3^3 = m_3^4 = 5g$ $I_{x1} = 0.0029, I_{y1} = 0.0106, I_{z1} = 0.0084$ $I_{x2} = 4.6250e-006, I_{y2} = 1.4000e-005, I_{z2} = 1.2375e-005$ $I_{x3} = 2.0208e-006, I_{y3} = 5.0833e-006, I_{z3} = 5.0625e-006$ $I_{x4} = 7.6042e-007, I_{y4} = 1.0417e-006, I_{z4} = 1.7813e-006$ $I_{x6} = 4.6250e-006, I_{y6} = 1.4000e-005, I_{z6} = 1.2375e-005$ $I_{x7} = 2.0208e-006, I_{y7} = 5.0833e-006, I_{z7} = 5.0625e-006$ $I_{x8} = 7.6042e-007, I_{y8} = 1.5417e-006, I_{z8} = 1.7813e-006$ $I_{x11} = 4.6250e-006, I_{y11} = 1.4000e-005, I_{z11} = 1.2375e-005$ $I_{x12} = 2.0208e-006, I_{y12} = 5.0833e-006, I_{z12} = 7.0625e-006$ $I_{x13} = 7.6042e-007, I_{y13} = 1.5417e-006, I_{z13} = 1.7813e-006$ $I_{x16} = 4.6250e-006, I_{y16} = 1.4000e-005, I_{z16} = 1.2375e-005$ $I_{x17} = 2.0208e-006, I_{y17} = 5.0833e-006, I_{z17} = 5.0833e-006$ $I_{x18} = 7.6042e-007, I_{y18} = 1.5417e-006, I_{z18} = 1.7813e-006$				
Dimension de l'objet (cm)	parallélépipède	cylindre		Sphère	
	LxhxH=10x5x2	H=10, r=3		R=1,7	
Frottements	$fp_i = hp_i = 0$				
Efforts de contact bout des doigts/objet	$F_1 = F_2 = F_3 = (0 \ 0 \ 0,83N), F_4 = (0 \ 0 \ 2,5N)$ $C_4 = (0 \ 0 \ 0,0625N / m), C_1 = C_2 = C_3 = (0 \ 0 \ 0,02N / m)$				

Tableau III.2 : Paramètres entrant dans le calcul du modèle dynamique de la saisie d'un parallélépipède

III.5.1.1 Les vitesses angulaires

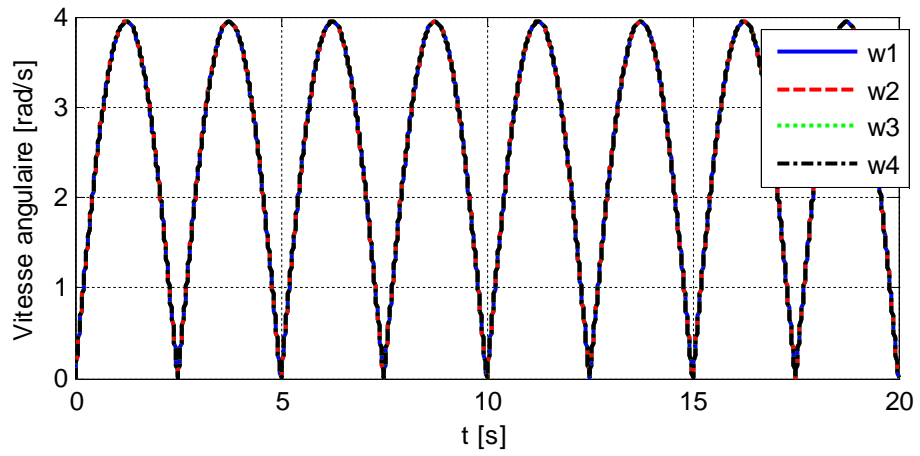


Figure III.9 : Les vitesses angulaires du 1^{er} doigt

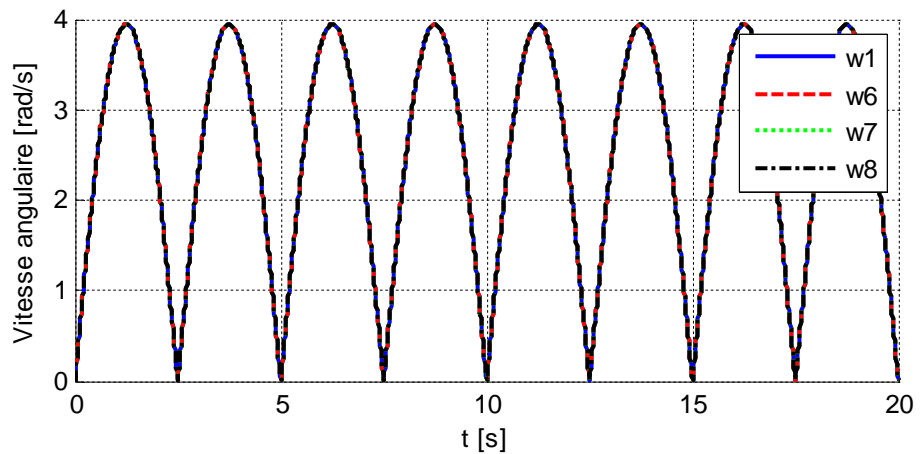


Figure III.10 : Les vitesses angulaires du 2^{ème} doigt

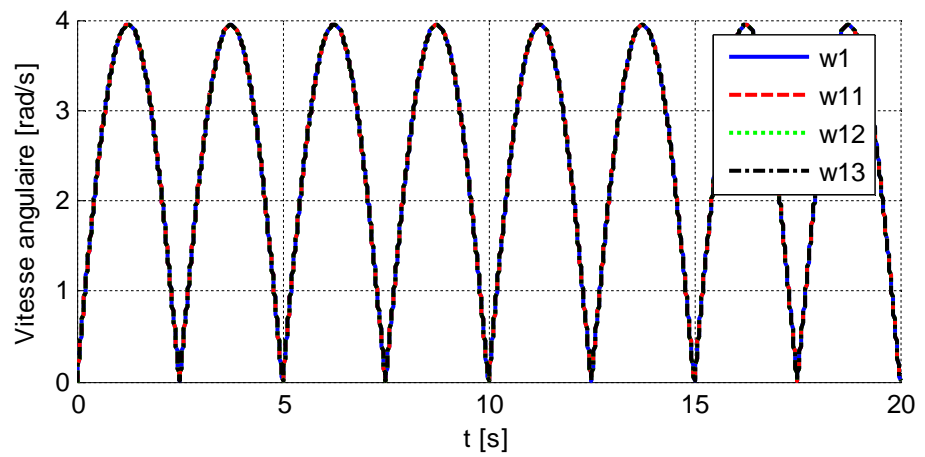


Figure III.11 : Les vitesses angulaires du 3^{ème} doigt

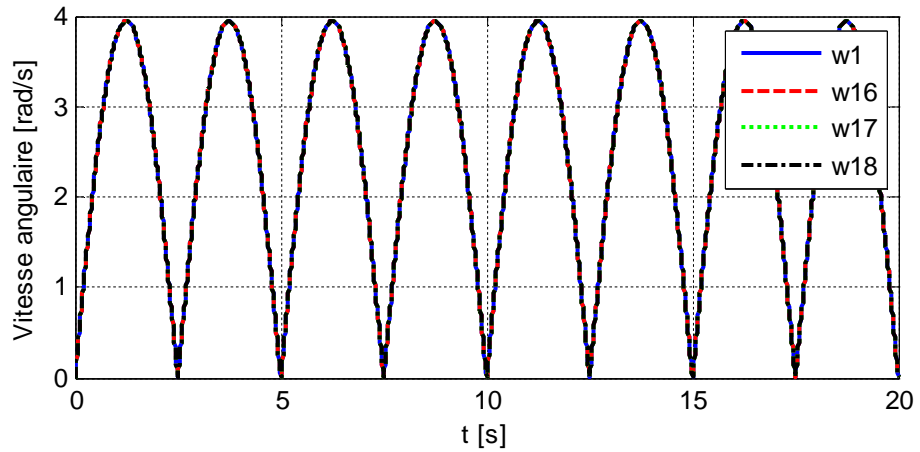


Figure III.12 : Les vitesses angulaires du pouce

Interprétation des résultats

Les quatre doigts ont la même vitesse angulaire car l'ensemble (paume + quatre doigts + bras + objet saisi) se déplace le long de la même trajectoire et par la même vitesse angulaire (valeur maximale 4 rad/s).

III.5.1.2 : Les accélérations angulaires

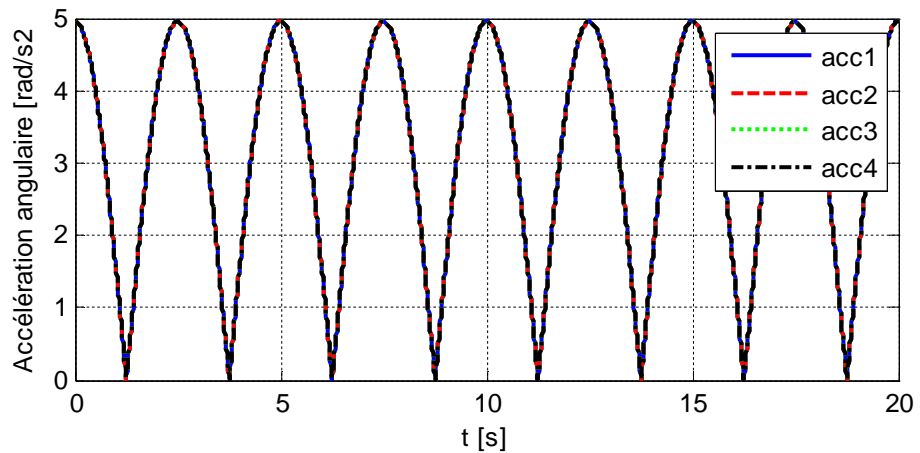


Figure III.13 : Les accélérations angulaires du 1er doigt

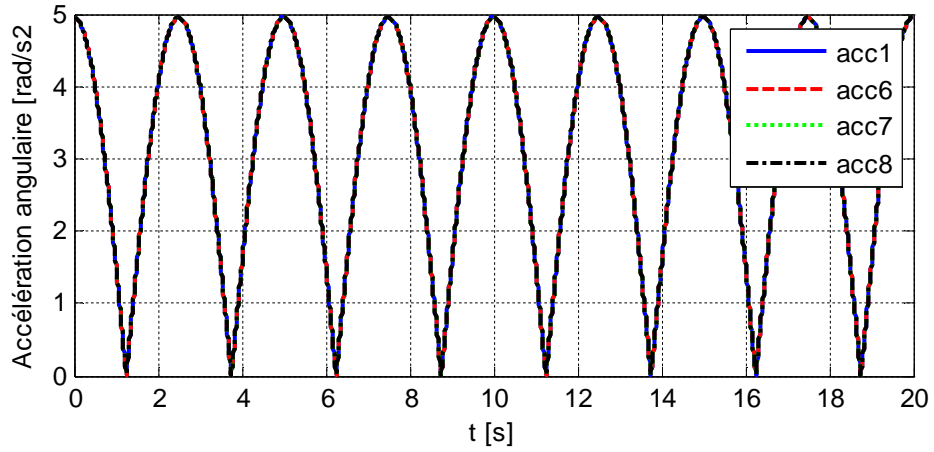


Figure III.14 : Les accélérations angulaires du 2^{ème} doigt

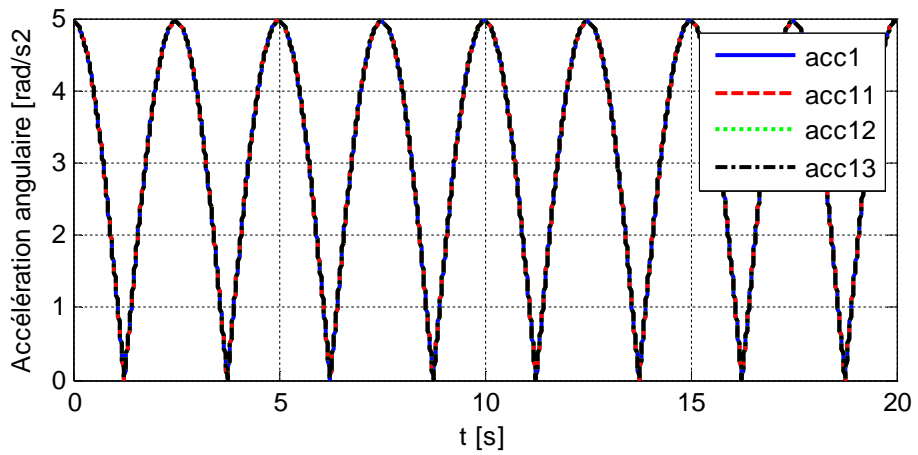


Figure III.15 : Les accélérations du 3^{ème} doigt

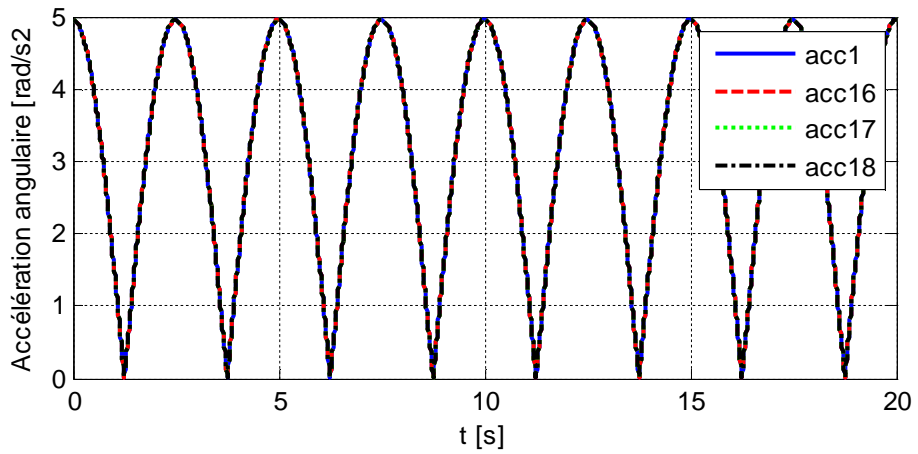


Figure III.16 : Les accélérations du pouce

Interprétation des résultats

Les accélérations angulaires des quatre doigts sont égaux (valeur maximal 5rad/s²).

III.5.1.3 Les couples actionneurs

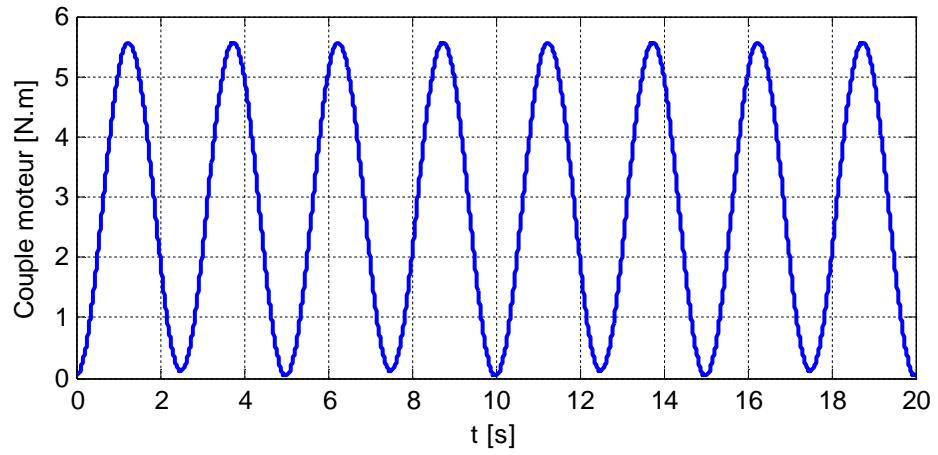


Figure III. 17: Couple moteur du bras

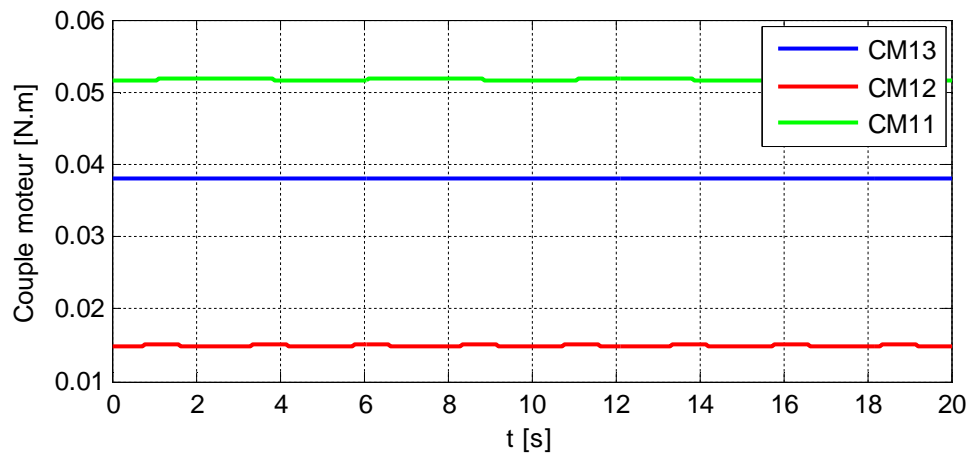


Figure III.18: Couples moteurs du 1^{er} doigt

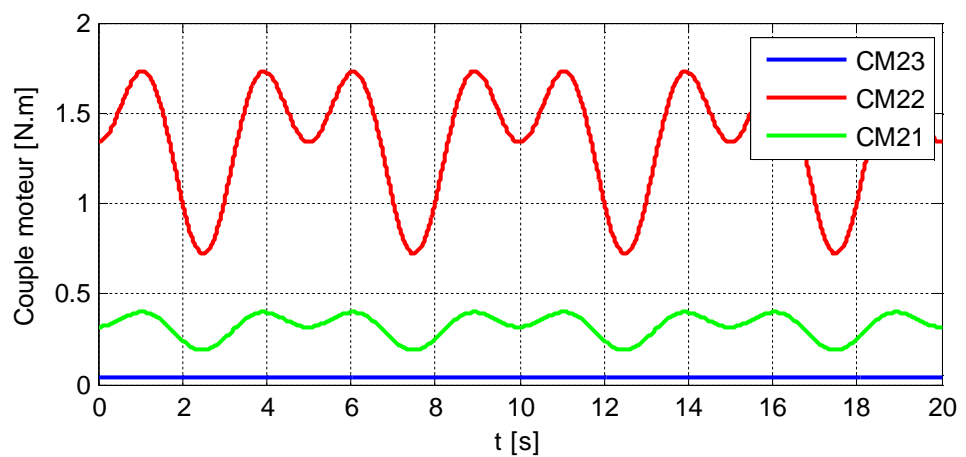


Figure III.19: Couples moteurs du 2^{eme} doigt

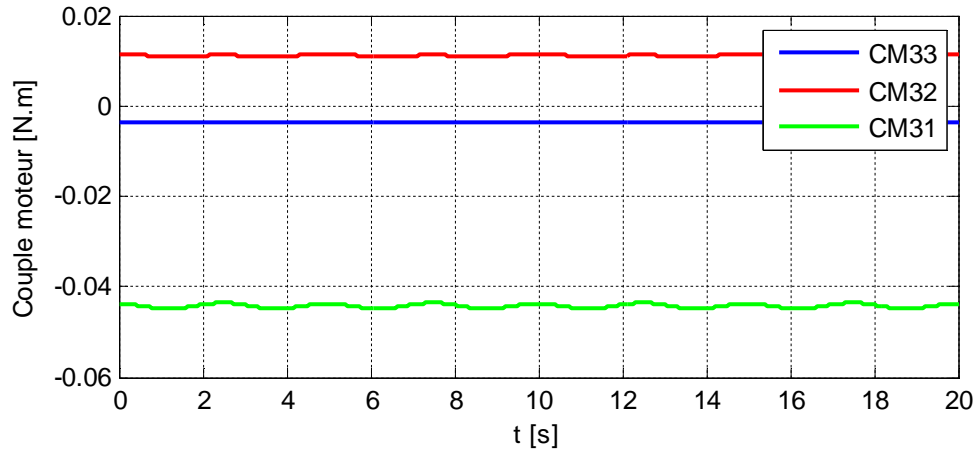


Figure III.20: Couples moteurs du 3^{ème} doigt

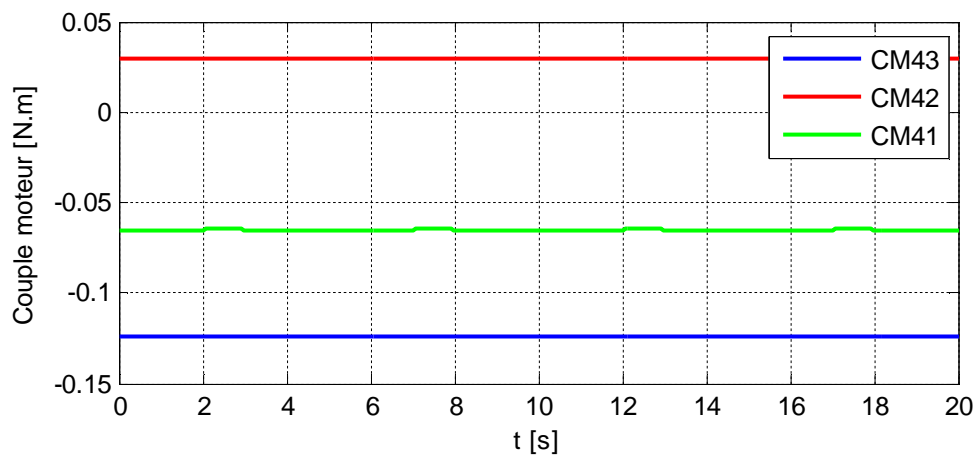


Figure III.21: Couples moteurs du pouce

Interprétation des résultats

Ces résultats de simulation montre que :

Le moteur le plus sollicité est celui du bras (valeur maximale 5,5 N.m) ensuite ceux du deuxième doigt, puis les moteurs du pouce après ceux du premier doigt et en fin ceux du troisième doigt.

III.5.2 Saisie d'un objet sphérique

Les résultats de calcul des vitesses, accélérations articulaires et couple moteur de la main LRP-Hand dans le cas de saisir une sphère **Figure III.22** d'écrit par la méthode de Newton-Euler sont présentés par les **Figures** de **III.23** jusqu'à **III.35**.

Doigt 1	Doigt 2	Doigt 3	pouce
$q_1 = -22^{\circ}28'$	$q_6 = -22^{\circ}28'$	$q_{11} = -22^{\circ}28'$	$q_{16} = 89^{\circ}57'$
$q_2 = 44^{\circ}58'$	$q_7 = 44^{\circ}58'$	$q_{12} = 44^{\circ}58'$	$q_{17} = 61^{\circ}52'$
$q_4 = 44^{\circ}58'$	$q_8 = 44^{\circ}58'$	$q_{13} = 44^{\circ}58'$	$q_{18} = 30^{\circ}55'$
$q_4 = 29^{\circ}59'$	$q_9 = 29^{\circ}59'$	$q_{14} = 29^{\circ}59'$	$q_{19} = 41^{\circ}13'$

Tableau III.3 : Paramètres entrant dans le calcul du modèle dynamique lors de la saisie d'une sphère

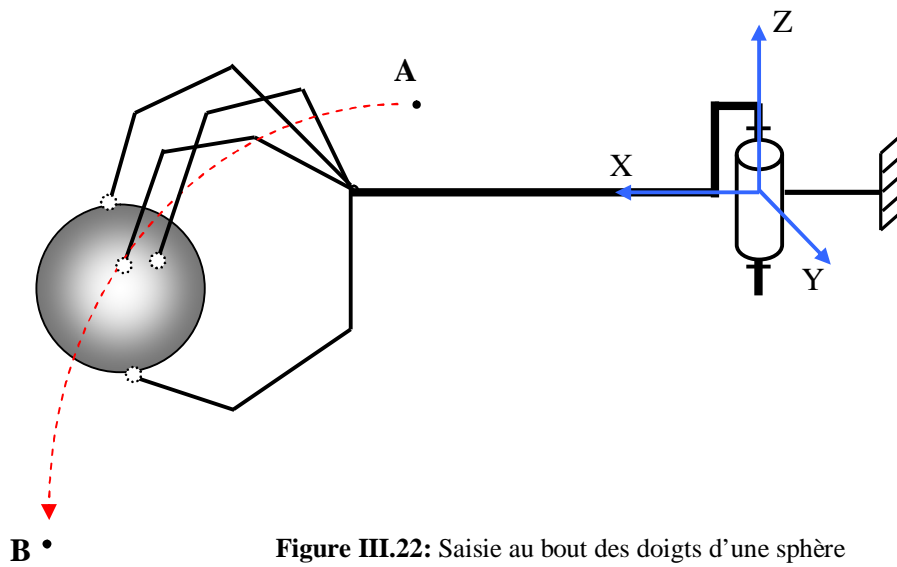


Figure III.22: Saisie au bout des doigts d'une sphère

III.5.2.1 Les vitesses angulaires

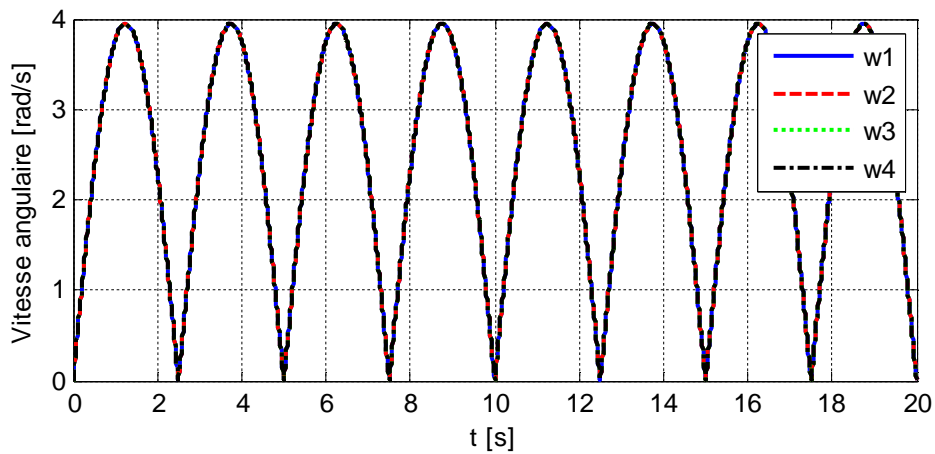


Figure III.23 : Les vitesses angulaires du 1^{er}

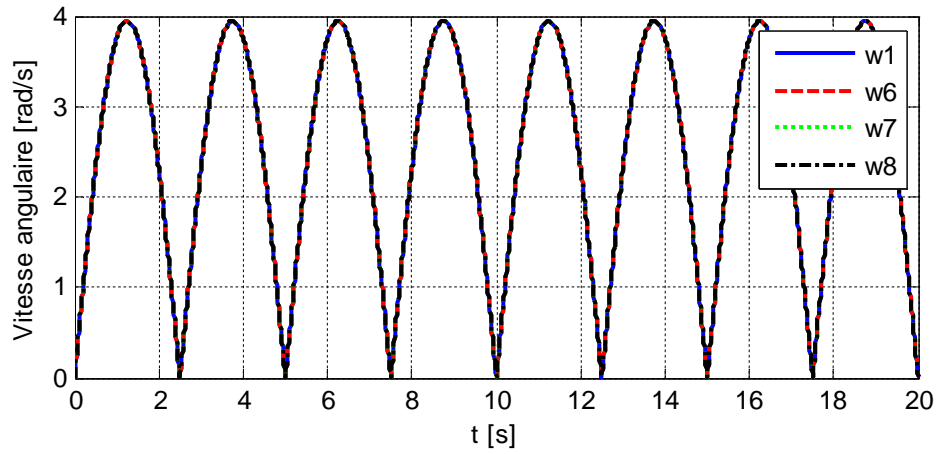


Figure III.24 : Les vitesses angulaires du 2^{ème} doigt

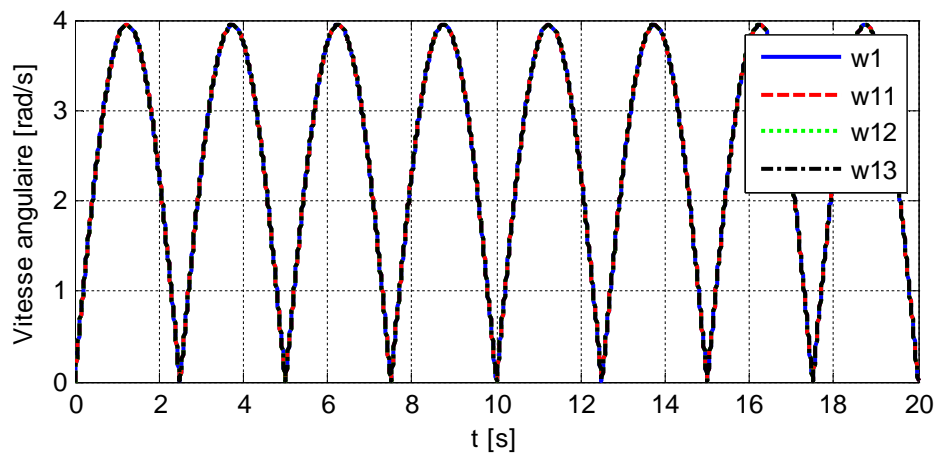


Figure III.25 : Les vitesses angulaires du 3^{ème} doigt

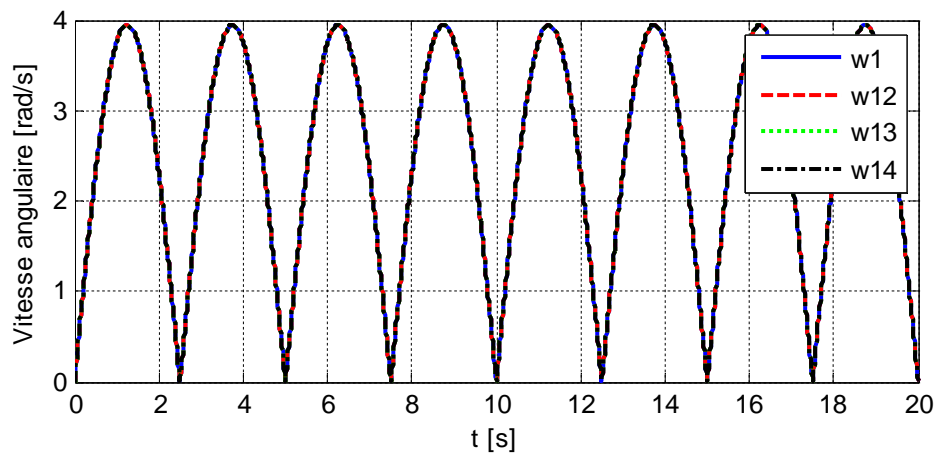


Figure III.26 : Les vitesses angulaires du pouce

III.5.2.2 Les accélérations angulaires

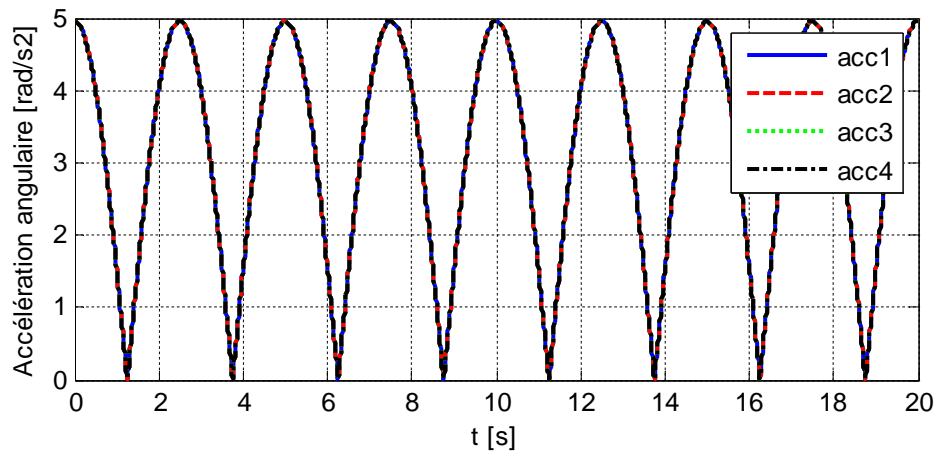


Figure III.27 : Les accélérations angulaires du 1^{er} doigt

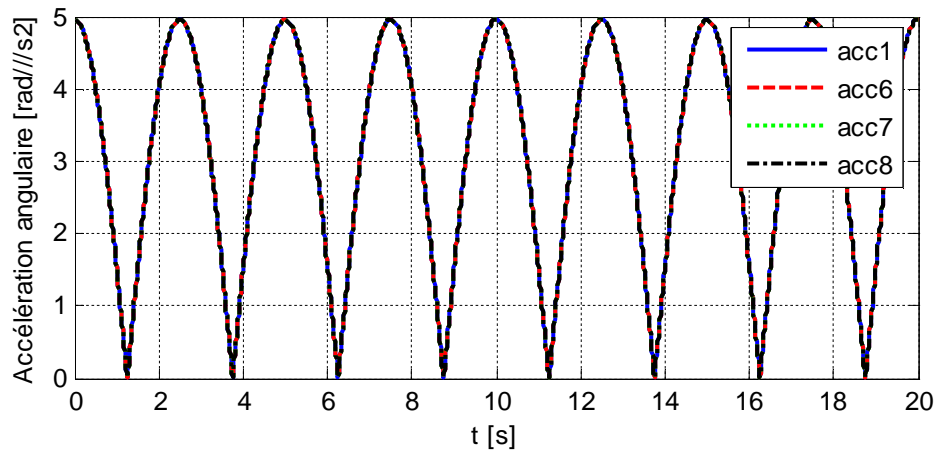


Figure III.28 : Les accélérations angulaires du 2^{ème} doigt

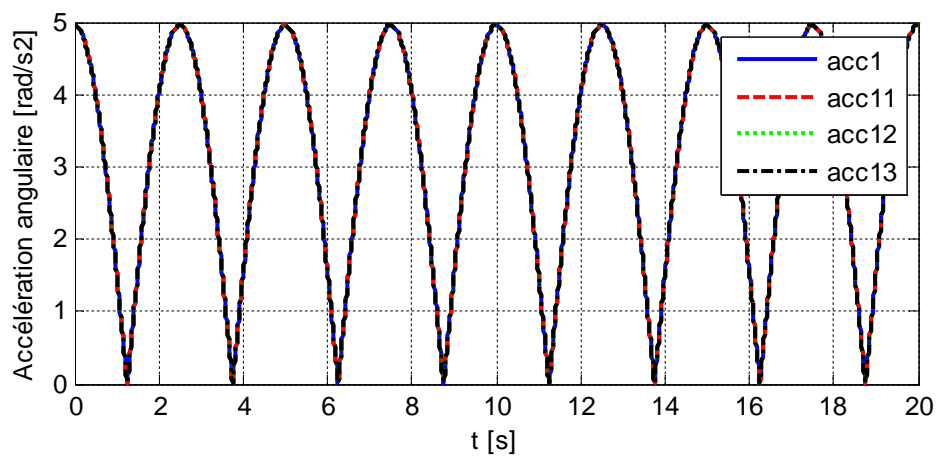


Figure III.29 : Les accélérations angulaires du 3^{ème} doigt

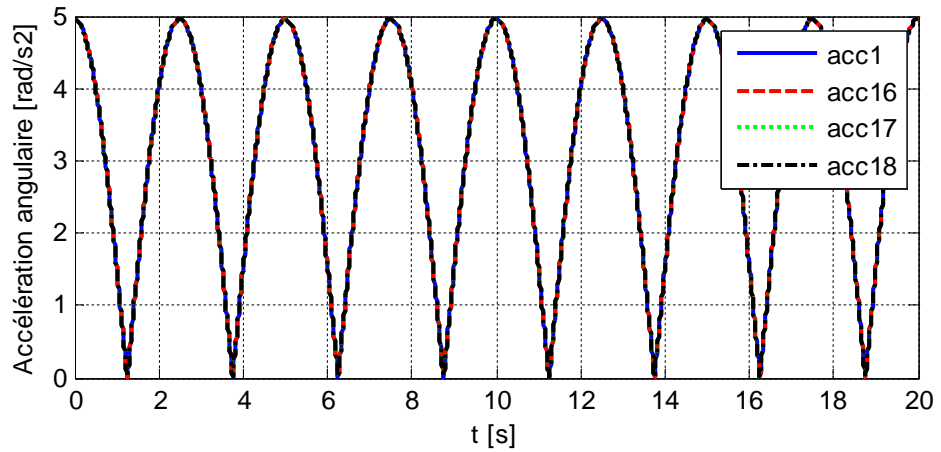


Figure III.30 : Les accélérations angulaires du pouce

Interprétation des résultats :

On remarque que les résultats obtenus (vitesses et accélérations) dans ce cas sont les mêmes que ceux de la saisie d'un parallélépipède.

III.5.2.3 Les couples moteurs

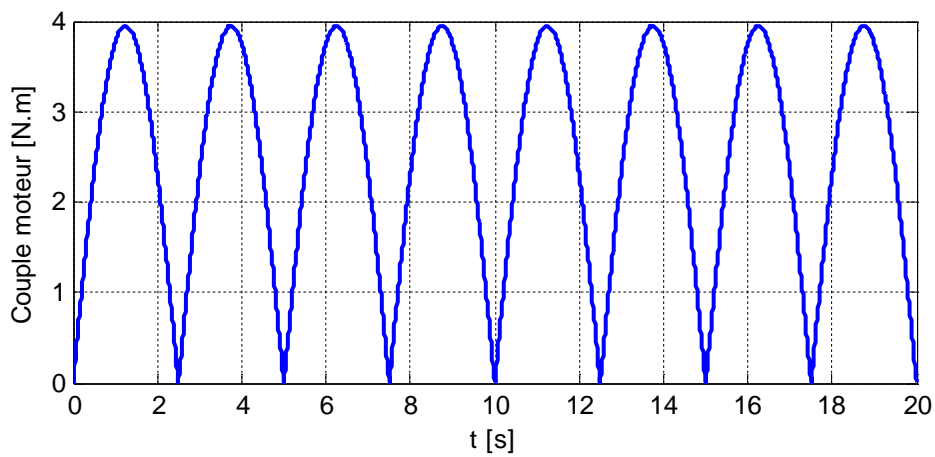


Figure III.31: Couple moteur du bras

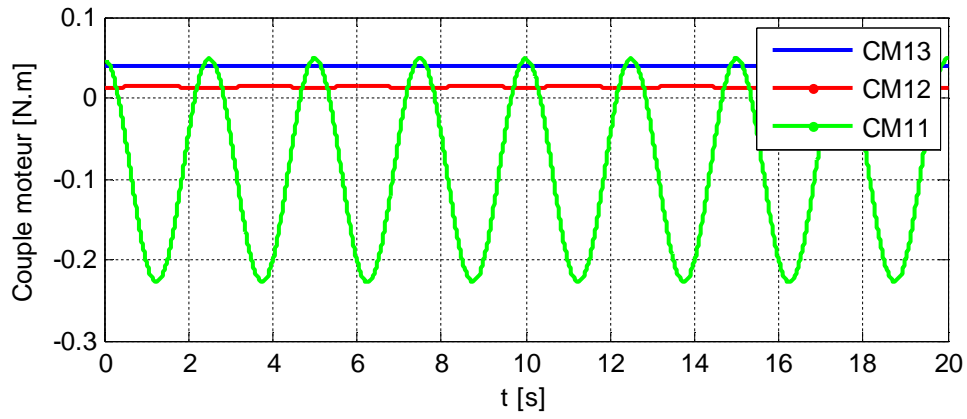


Figure III.32: Couples moteurs du 1^{er} doigt

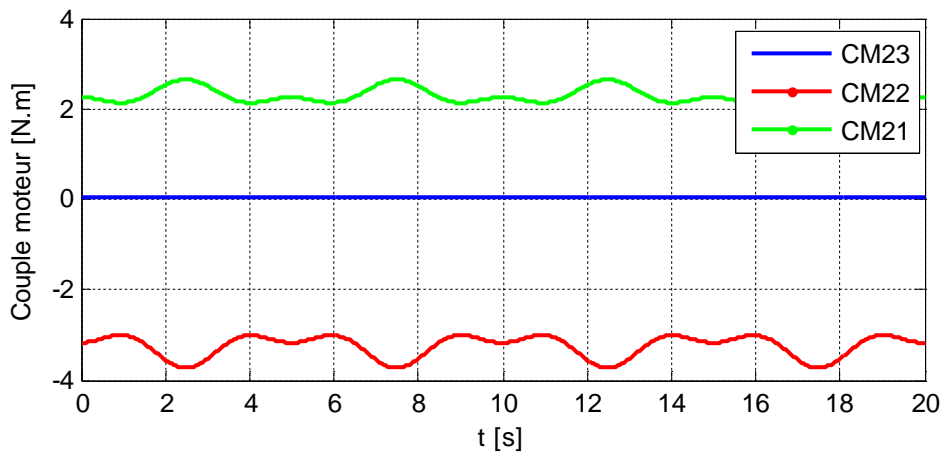


Figure III.33: Couples moteurs du 2^{ème} doigt

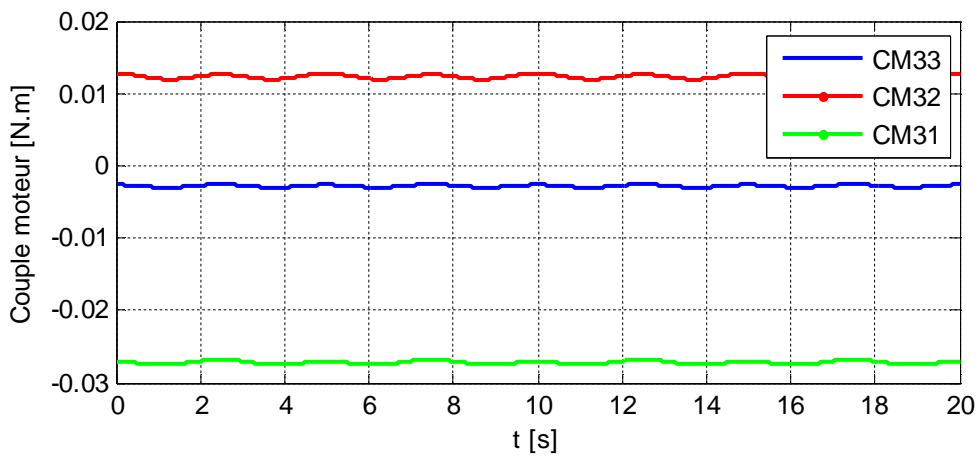


Figure III.34: Couples moteurs du 3^{ème} doigt

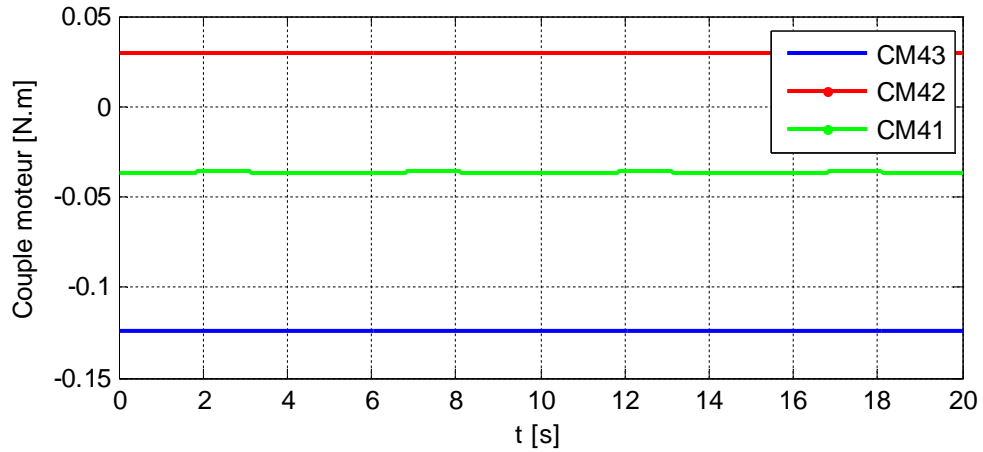


Figure III.35: Couples moteurs du pouce

Interprétation des résultats :

Les résultats obtenus montre que :

Le moteur le plus sollicité est celui du bras (valeur maximale 4 N.m) ensuite ceux du deuxième doigt, puis les moteurs du pouce après ceux du premier doigt et en fin ceux du troisième doigt.

III.5.3 Saisie fine d'un objet cylindrique

Les résultats de calcul des vitesses, accélérations articulaires et couples moteur de la main LRP-Hand dans le cas de saisir une cylindre **Figure III.36** d'écrit par la méthode de Newton-Euler sont présentés par les **Figures de III.37** jusqu'à **III.49**.

Doigt 1	Doigt 2	Doigt 3	pouce
$q_1 = -17^{\circ}59'$	$q_6 = -17^{\circ}59'$	$q_{11} = 0$	$q_{16} = 90^{\circ}$
$q_2 = 0$	$q_7 = 0$	$q_6 = -17^{\circ}59'$	$q_{17} = 61^{\circ}52'$
$q_4 = 59^{\circ}57'$	$q_4 = 59^{\circ}57'$	$q_4 = 59^{\circ}57'$	$q_{18} = 30^{\circ}55'$
$q_4 = 39^{\circ}5'$	$q_4 = 39^{\circ}5'$	$q_{14} = 39^{\circ}53'$	$q_{19} = 21^{\circ}5'$

Tableau III.4 : Paramètres entrant dans le calcul du modèle dynamique lors de la saisie d'un cylindre

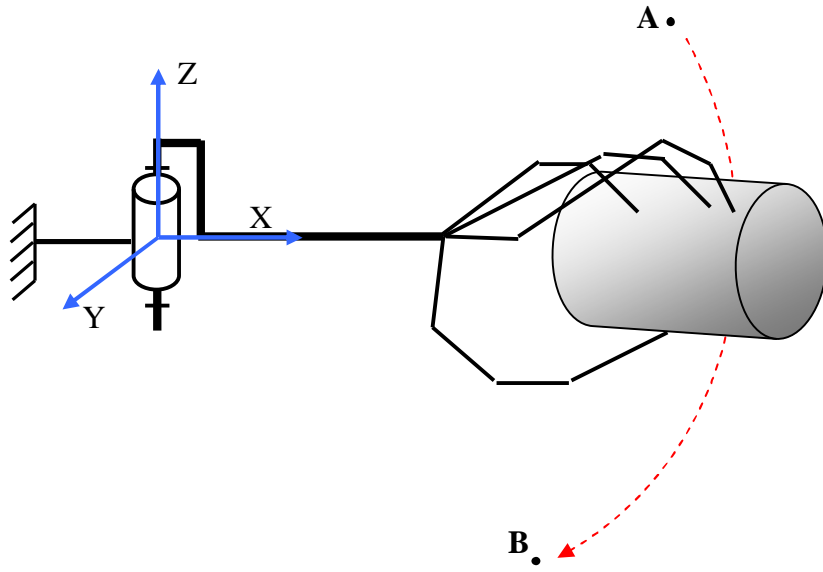


Figure III.36 : Saisie au bout des doigts d'une sphère,

III.5.3.1 Les vitesses angulaires

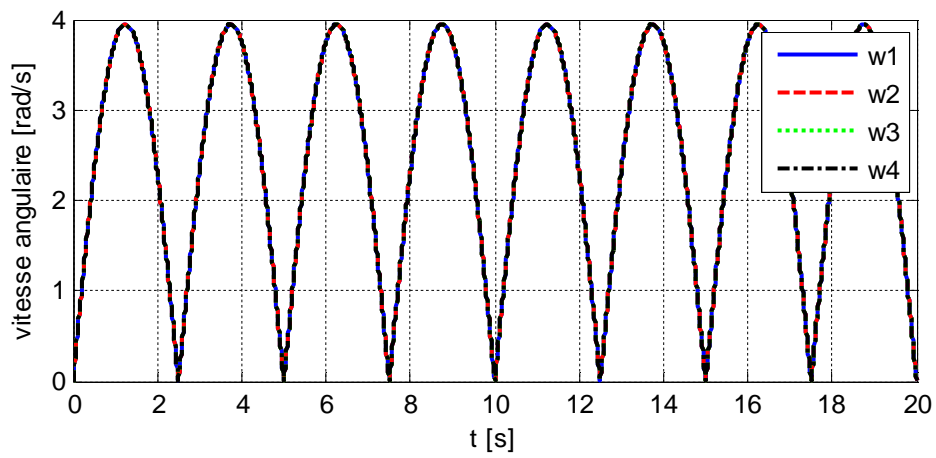


Figure III.37 : Les vitesses angulaires du 1^{er} doigt

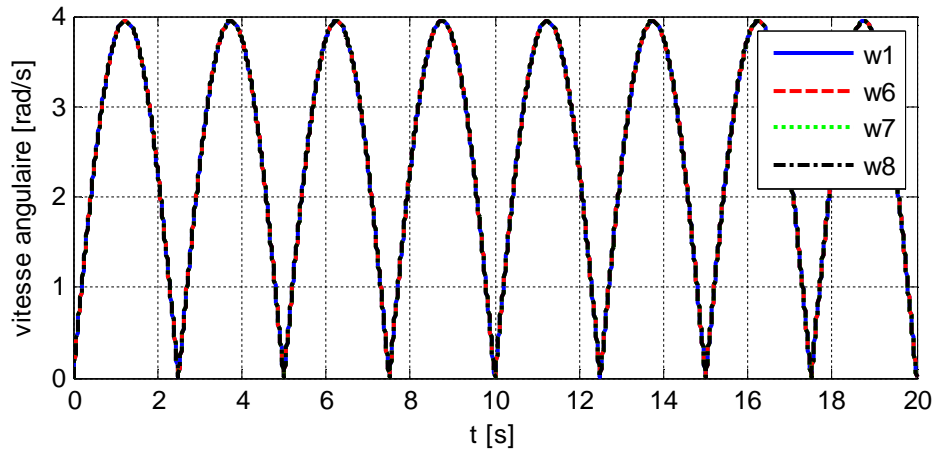


Figure III.38 : Les vitesses angulaires du 2^{ème} doigt

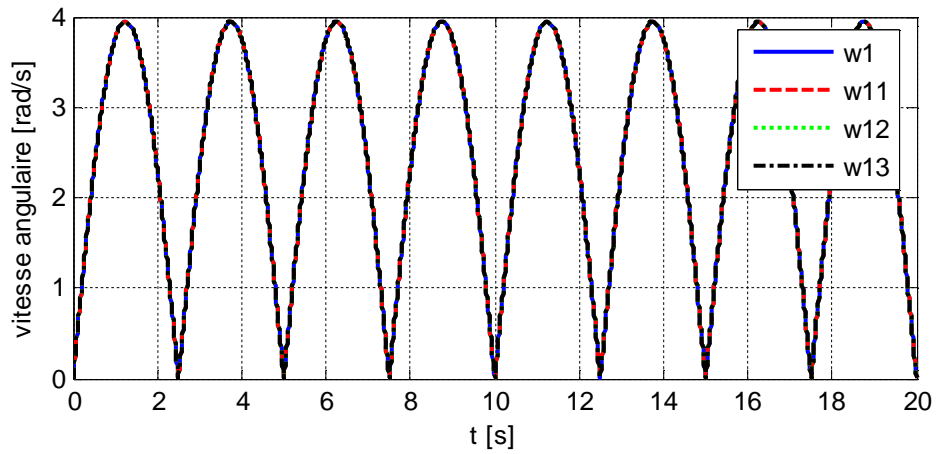


Figure III.39 : Les vitesses angulaires du 3^{ème} doigt

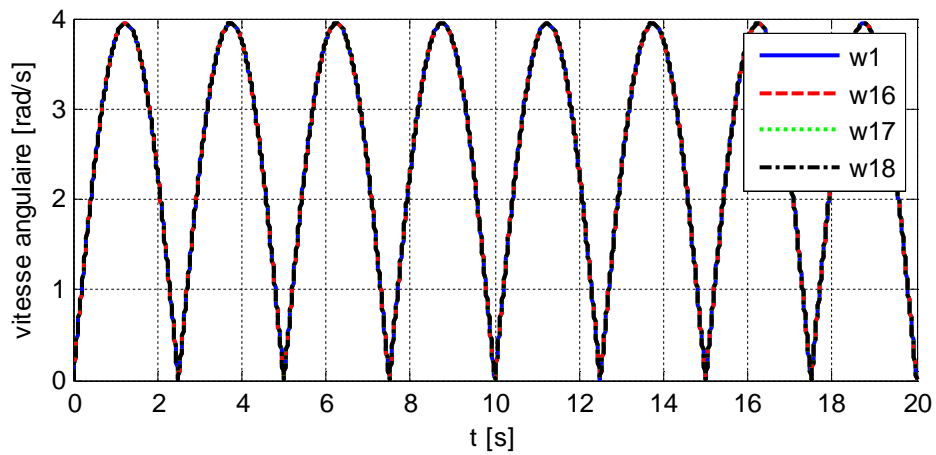


Figure III.40 : Les vitesses angulaires du pouce

III.5.3.2 Les accélérations angulaires

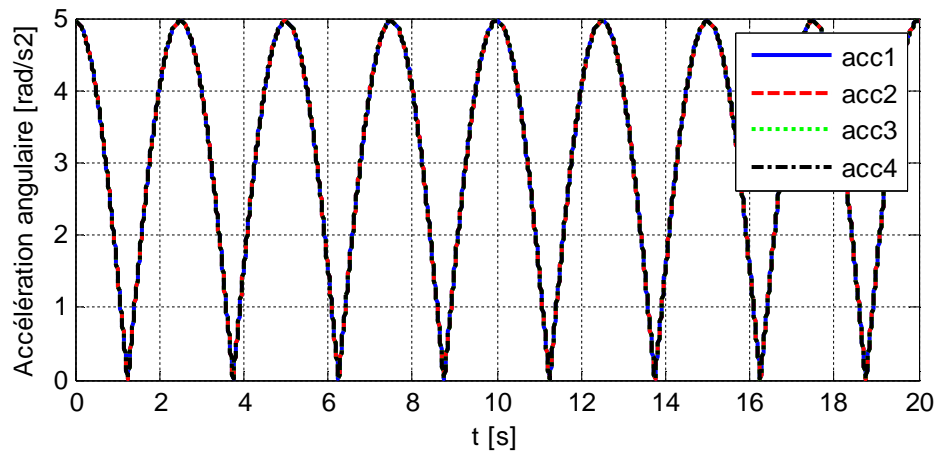


Figure III.41 : Les accélérations angulaires du 1^{er} doigt

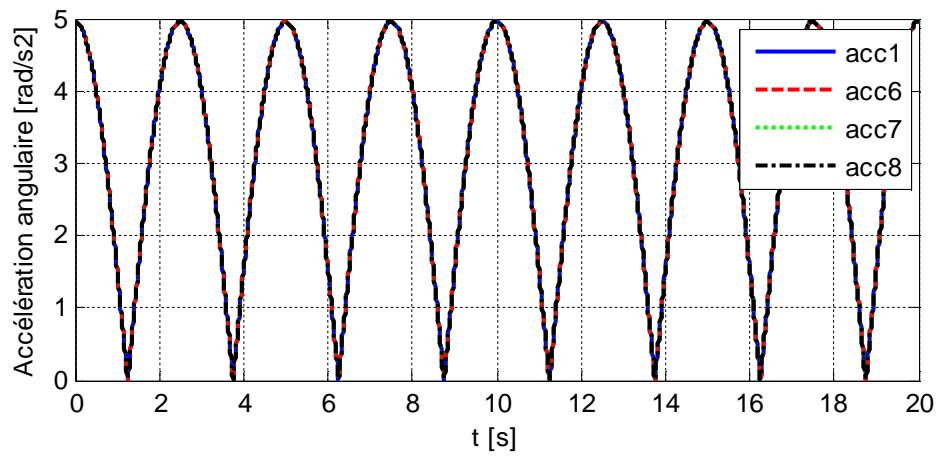


Figure III.42 : Les accélérations angulaires du 2^{ème} doigt

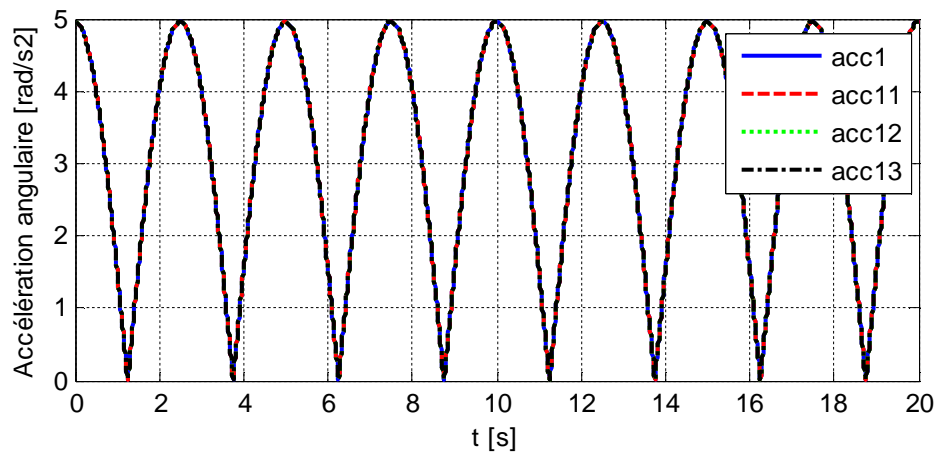


Figure III.43 : Les accélérations angulaires du 3^{ème} doigt

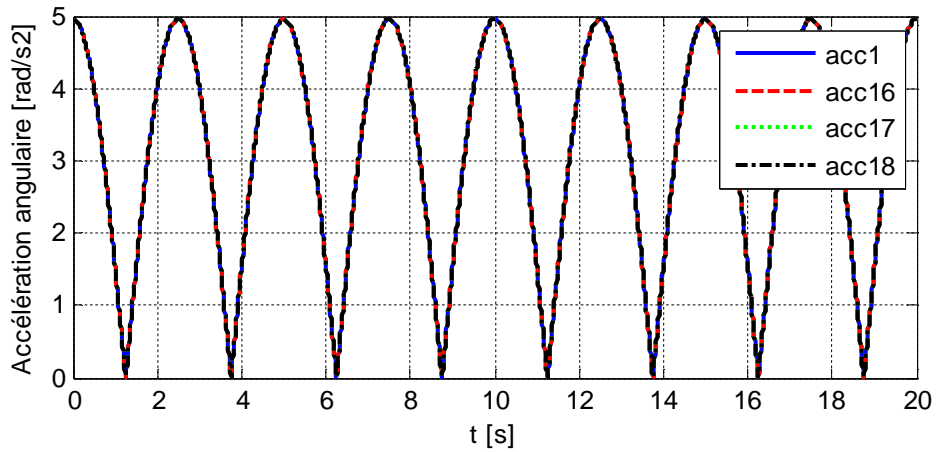


Figure III.44 : Les accélérations angulaires du pouce

Interprétation des résultats

On remarque que les résultats obtenus (vitesses et accélérations) dans ce cas sont les mêmes que ceux de la saisie du parallélépipède et la sphère.

III.5.3.3 Les couples moteurs

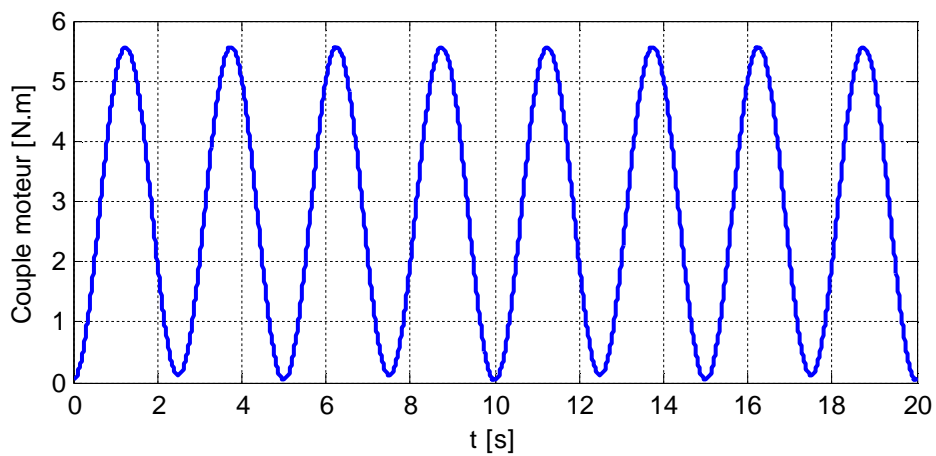


Figure III.45 : Le couple moteur du bras

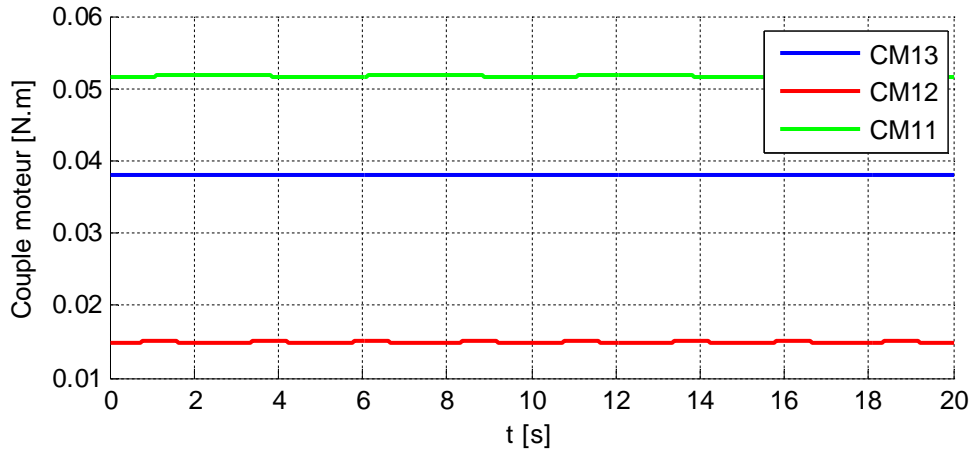


Figure III.46 : Les couples moteurs du 1^{er} doigt

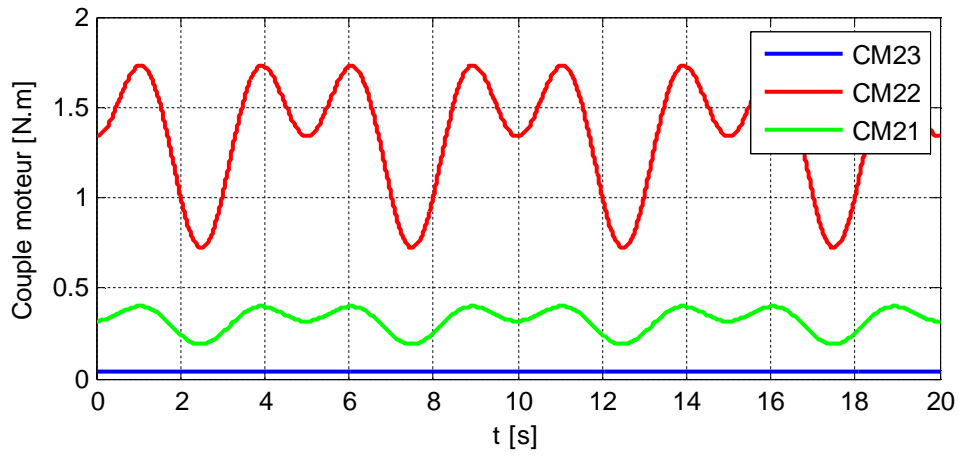


Figure III.47 : Les couples moteurs du 2^{ème} doigt

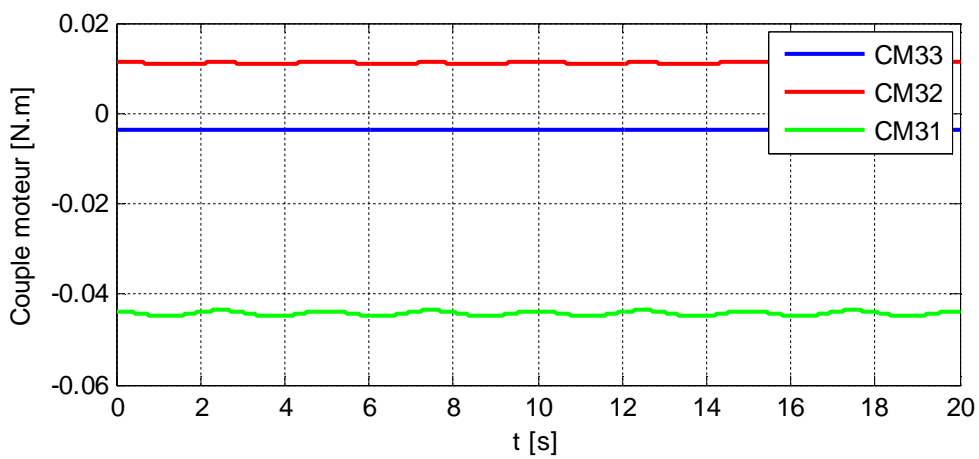


Figure III.48 : Les couples moteurs du 3^{ème} doigt

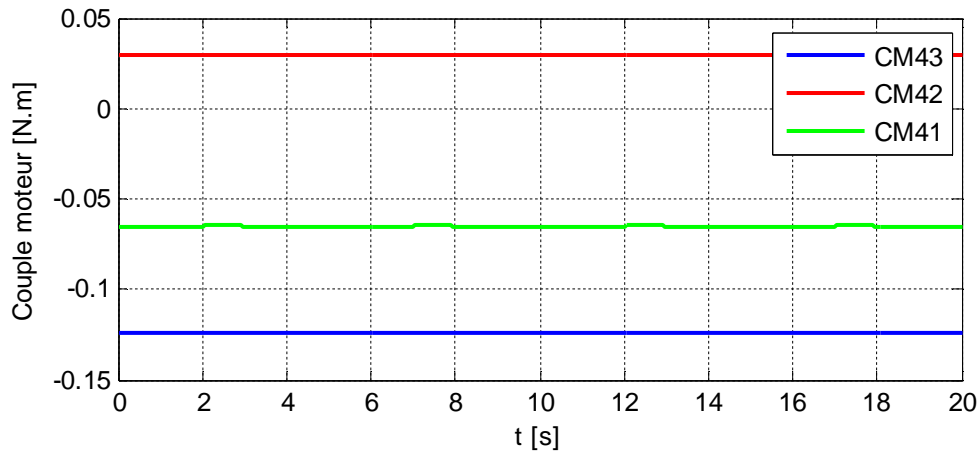


Figure III.49 : Les couples moteurs du pouce

Interprétation des résultats :

Les résultats obtenus sont les même que ceux du parallélépipède Le moteur le plus sollicité est celui du bras (valeur maximale 5,5 N.m) ensuite ceux du deuxième doigt, puis les moteurs du pouce après ceux du premier doigt et en fin ceux du troisième doigt.

III.6 Interprétations et Conclusions

On a appliqué dans ce chapitre les notions du formalisme de Newton-Euler sur la main articulée à quatre doigt (LRP-Hand) ce qui nous a permis de calculer les valeurs des couples moteurs au niveau des articulations produit par le mouvement de cette dernière lors de la saisie d'un objet rigide et de forme définie.

Conclusion générale et perspectives

L'objectif de ce travail et de la modélisation dynamique de la saisie d'objet par une main mécanique articulée non anthropomorphe à quatre doigts.

Afin d'avoir des idées concernant les architectures des SMA et les variétés de prises nous avons consacré le premier chapitre à l'étude bibliographique qui nous a permis de constater qu'il existe différentes configurations des SMA et des mains mécaniques articulées, mais celle qui convient comporte 16 DDL pour assurer une meilleure dextérité.

Nous avons présenté au deuxième chapitre les techniques de la modélisation dynamique et on a cité quelques exemples de leur application sur les différentes mains développées dans la littérature.

Nous avons détaillé les formalismes de calcul du modèle dynamique de la main mécanique articulée non anthropomorphe à quatre doigts de LRP (LRP hand), à travers l'application du formalisme de Newton-Euler ensuite nous avons calculé les valeurs des couples actionneurs nécessaires au niveau des articulations pour saisir un objet rigide et de forme définie lors de son déplacement en rotation par un bras à 1 ddl.

La représentation des différents algorithmes de la modélisation dynamique, a été donnée sur Maple et Matlab ce qui permet d'avoir des résultats sous forme symbolique.

Les perspectives ouvertes par ce travail peuvent concerner la manipulation d'objets et la réalisation d'une partie électronique relative à la commande de la main objet de notre étude (LRP-hand) afin de valider les résultats trouvés.

Références bibliographiques

- [1] – EL-KHOURY SAHAR M. SAHBANI ANIS, " *Planification Pour la Manipulation Dextre D'objets Rigides Par des Approches Probabilistes* ", (L.I.S.I.F) Unité PARC Ivry-sur-Seine, Rapport de stage 2004/2005.
- [2] – J.P.LALLEMEND, S.ZEGHLOUL, " *Robotique aspects fondamentaux* ", MASSON, PARIS,1994
- [3] – JOE . CHALFOUN, " *Prediction Des Efforts Musculaires Dans Le Systeme Main Avant-Bras : modelisation, simulation, optimisation et validation*", Thèse pour l'obtention du grade de Docteur de Versailles Saint-Quentin- en Yvelines , 2005.
- [4] – "<http://robot.gmc.ulaval.ca/fr/recherche/theme304.html> "
- [5] – " [http : //www.-lms.univ-poitiers.fr/robot/Main.html](http://www.lms.univ-poitiers.fr/robot/Main.html) " Laboratoire de Mécanique des solides
- [6] – Zeghloul Saïd, Arsicault Marc, Gazeau Jean-Pierre, "Préhension et manipulation dextre en robotique", Laboratoire de Mécanique des Solides (LMS), Université de Poitiers - UMR CNRS 6610, JNRR 2007 , Obernai, du 9 au 12 octobre 2007.
- [7] – Fernando reyes, Rafael Kelly, " Experimental evaluation of identification schemes on a direct drive robot ", volume 15, pp 563-571 Robotica 1997
- [8] – Y.F.Li, S.K.Tso, Q.Meng " Grasping force measurement for dynamic grasp stability assesement ", IEEE transactions on instrumentation and measurement, volume 47, N°.5, 1998
- [9] – Kensuke Harada, Makoto Kaneko, " Manipulation of 3D enveloped object", Ntional science and technology (AIST),2002

- [10] – Akio Namiki, Masatoshi Ishikawa, " The analysis of high speed catching with a multifingred robot hand", department of information physics and computing, university of tokio, 2005
- [11] – Cours de l'Ecole Militaire Polytechnique
- [12] – Merarda Hakim, " conception d'une main mécanique articulée non anthropomorphe", thèse pour l'obtention du diplôme d'ingénieur, LRP, 2005
- [13] – Wisama Khalil " Modélisation identification et commande des robots", Hermes Science Publications, 1999
- [14] – Bouachari Amel, " Modélisation géométrique d'une main mécanique articulée à quatre doigts", thèse pour l'obtention du diplôme de magistère, LRP, 2005
- [15] – M. Arsicalt, J ;P ; Lallemand, " Main mécanique anthropomorphe pour robot manus", Laboratoire de mécanique des solides, URA 861, 1992
- [16] – catalogue micromoteur FAULHABER série E22

Annexe

Calcul des vitesses angulaires, accélération angulaires, forces de saisie, couples de rotation et couples moteur pour le 2^{ème} doigt, 3^{ème} doigt et le pouce

Calcul itératif des vitesses angulaires

- 2^{ème} doigt

$${}^6\omega_1 = {}^6A_1 {}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} Cq_6 & -Sq_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_6 & -Cq_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}^T = {}^6\omega_6 = {}^2\omega_2$$

$${}^7\omega_6 = {}^7A_6 {}^6\omega_6 = \begin{bmatrix} Cq_7 & -Sq_7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sq_7 & Cq_7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Sq_7\dot{\theta}_1 & 0 & Cq_7\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = {}^7\omega_7 = {}^3\omega_3$$

$${}^8\omega_7 = {}^8A_7 {}^7\omega_7 = \begin{bmatrix} Cq_8 & -Sq_8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_8 & -Cq_8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Sq_7\dot{\theta}_1 \\ 0 \\ Cq_7\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Cq_8Sq_7\dot{\theta}_1 & Cq_7\dot{\theta}_1 & Sq_8Sq_7\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = {}^8\omega_8 = {}^4\omega_4$$

$${}^9\omega_8 = {}^9A_8 {}^8\omega_8 = \begin{bmatrix} Cq_9 & -Sq_9 & 0 \\ Sq_9 & Cq_9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Cq_8Sq_7\dot{\theta}_1 \\ Cq_7\dot{\theta}_1 \\ Sq_8Sq_7\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-Cq_9Cq_8Sq_7 - Sq_9Cq_7)\dot{\theta}_1 & (-Sq_9Cq_8Sq_7 + Cq_9Cq_7)\dot{\theta}_1 & Sq_8Sq_7\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = {}^9\omega_9 = {}^5\omega_5$$

- 3^{ème} doigt

$${}^{11}\omega_1 = {}^{11}A_1 {}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} Cq_{11} & -Sq_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_{11} & -Cq_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}^T = {}^{11}\omega_{11} = {}^6\omega_6 = {}^2\omega_2$$

$${}^{12}\omega_{11} = {}^{12}A_{11} {}^{11}\omega_{11} = \begin{bmatrix} Cq_{12} & -Sq_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sq_{12} & Cq_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Sq_{12}\dot{\theta}_1 & 0 & Cq_{12}\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = {}^{12}\omega_{12} = {}^7\omega_7 = {}^3\omega_3$$

$${}^{13}\omega_{12} = {}^{13}A_{12} {}^{12}\omega_{12} = \begin{bmatrix} Cq_{13} & -Sq_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_{13} & -Cq_{13} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Sq_{12}\dot{\theta}_1 \\ 0 \\ Cq_{12}\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Sq_{12}Cq_{13}\dot{\theta}_1 & Cq_{12}\dot{\theta}_1 & Sq_{13}Sq_{12}\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = {}^{13}\omega_{13} = {}^8\omega_8 = {}^4\omega_4$$

$$\begin{aligned}
{}^{14}\omega_{13} &= {}^{14}A_{13} {}^{13}\omega_{13} = \begin{bmatrix} Cq_{14} & -Sq_{14} & 0 \\ Sq_{14} & Cq_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Sq_{12}Cq_{13}\dot{\theta}_1 \\ Cq_{12}\dot{\theta}_1 \\ Sq_{13}Sq_{12}\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\
&= \left[(-Cq_{14}Sq_{12}Cq_{13} - Sq_{14}Cq_{12})\dot{\theta}_1 \quad (Cq_{14}Cq_{12} - Sq_{14}Sq_{12}Cq_{13})\dot{\theta}_1 \quad Sq_{13}Sq_{12}\dot{\theta}_1 \right]^T = {}^{14}\omega_{14} = {}^9\omega_9 = {}^5\omega_5
\end{aligned}$$

- **Le pouce**

$${}^{16}\omega_1 = {}^{16}A_1 {}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ Cq_{16} & -Sq_{16} & 0 \\ -Sq_{16} & -Cq_{16} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = {}^{16}\omega_{16}$$

$${}^{17}\omega_{16} = {}^{17}A_{16} {}^{16}\omega_{16} = \begin{bmatrix} Cq_{17} & -Sq_{17} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_{17} & -Cq_{17} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Cq_{17}\dot{\theta}_1 & 0 & Sq_{17}\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = {}^{17}\omega_{17}$$

$${}^{18}\omega_{17} = {}^{18}A_{17} {}^{17}\omega_{17} = \begin{bmatrix} Cq_{18} & -Sq_{18} & 0 \\ Sq_{18} & Cq_{18} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Cq_{17}\dot{\theta}_1 \\ 0 \\ Sq_{17}\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Cq_{18}Cq_{17}\dot{\theta}_1 & -Sq_{18}Cq_{17}\dot{\theta}_1 & Sq_{17}\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = {}^{18}\omega_{18}$$

$$\begin{aligned}
{}^{19}\omega_{18} &= {}^{19}A_{18} {}^{18}\omega_{18} = \begin{bmatrix} Cq_{19} & -Sq_{19} & 0 \\ Sq_{19} & Cq_{19} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Cq_{18}Cq_{17}\dot{\theta}_1 \\ -Sq_{18}Cq_{17}\dot{\theta}_1 \\ Sq_{17}\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\
&= \left[(-Cq_{19}Cq_{18}Cq_{17} + Sq_{19}Sq_{18}Cq_{17})\dot{\theta}_1 \quad (-Sq_{19}Cq_{18}Cq_{17} - Cq_{19}Sq_{18}Cq_{17})\dot{\theta}_1 \quad Sq_{17}\dot{\theta}_1 \right]^T = {}^{19}\omega_{19}
\end{aligned}$$

Calcul itératif des accélérations angulaires

- **2^{ème} doigt**

$${}^6\dot{\omega}_1 = {}^6A_1 {}^1\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} Cq_6 & -Sq_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_6 & -Cq_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \ddot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}^T = {}^6\dot{\omega}_6 = {}^2\dot{\omega}_2$$

$${}^7\dot{\omega}_6 = {}^7A_6 {}^6\dot{\omega}_6 = \begin{bmatrix} Cq_7 & -Sq_7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sq_7 & Cq_7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Sq_7\ddot{\theta}_1 & 0 & Cq_7\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = {}^7\dot{\omega}_7 = {}^3\dot{\omega}_3$$

$${}^8\dot{\omega}_7 = {}^8A_7 {}^7\dot{\omega}_7 = \begin{bmatrix} Cq_8 & -Sq_8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_8 & -Cq_8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Sq_7\ddot{\theta}_1 \\ 0 \\ Cq_7\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Cq_8Sq_7\ddot{\theta}_1 & Cq_7\ddot{\theta}_1 & Sq_8Sq_7\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = {}^8\dot{\omega}_8 = {}^4\dot{\omega}_4$$

$${}^9\dot{\omega}_8 = {}^9A_8 {}^8\dot{\omega}_8 = \begin{bmatrix} Cq_9 & -Sq_9 & 0 \\ Sq_9 & Cq_9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Cq_8Sq_7\ddot{\theta}_1 \\ Cq_7\ddot{\theta}_1 \\ Sq_8Sq_7\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[(-Cq_9Cq_8Sq_7 - Sq_9Cq_7)\ddot{\theta}_1 \quad (Cq_9Cq_7 - Sq_9Cq_8Sq_7)\ddot{\theta}_1 \quad Sq_8Sq_7\ddot{\theta}_1 \right]^T = {}^9\dot{\omega}_9 = {}^5\dot{\omega}_5$$

- **3^{ème} doigt**

$${}^{11}\dot{\omega}_1 = {}^{11}A_1 {}^1\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} Cq_{11} & -Sq_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_{11} & -Cq_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \ddot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}^T = {}^{11}\dot{\omega}_{11} = {}^6\dot{\omega}_6 = {}^2\dot{\omega}_2$$

$${}^{12}\dot{\omega}_{11} = {}^{12}A_{11} {}^{11}\dot{\omega}_{11} = \begin{bmatrix} Cq_{12} & -Sq_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sq_{12} & Cq_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Sq_{12}\ddot{\theta}_1 & 0 & Cq_{12}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = {}^{12}\dot{\omega}_{12} = {}^7\dot{\omega}_7 = {}^3\dot{\omega}_3$$

$${}^{13}\dot{\omega}_{12} = {}^{13}A_{12} {}^{12}\dot{\omega}_{12} = \begin{bmatrix} Cq_{13} & -Sq_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_{13} & -Cq_{13} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Sq_{12}\ddot{\theta}_1 \\ 0 \\ Cq_{12}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -Cq_{13}Sq_{12}\ddot{\theta}_1 & Cq_{12}\ddot{\theta}_1 & Sq_{13}Sq_{12}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = {}^{13}\dot{\omega}_{13} = {}^8\dot{\omega}_8 = {}^4\dot{\omega}_4$$

$${}^{14}\dot{\omega}_{13} = {}^{14}A_{13} {}^{13}\dot{\omega}_{13} = \begin{bmatrix} Cq_{14} & -Sq_{14} & 0 \\ Sq_{14} & Cq_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Cq_{13}Sq_{12}\ddot{\theta}_1 \\ Cq_{12}\ddot{\theta}_1 \\ Sq_{13}Sq_{12}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} (-Cq_{14}Cq_{13}Sq_{12} - Sq_{14}Cq_{12})\ddot{\theta}_1 & (Cq_{14}Cq_{12} - Sq_{14}Cq_{13}Sq_{12})\ddot{\theta}_1 & Sq_{13}Sq_{12}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = {}^{14}\dot{\omega}_{14} = {}^9\dot{\omega}_9 = {}^5\dot{\omega}_5$$

- **Le pouce**

$${}^{16}\dot{\omega}_1 = {}^{16}A_1 {}^1\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ Cq_{16} & -Sq_{16} & 0 \\ -Sq_{16} & -Cq_{16} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = {}^{16}\dot{\omega}_{16}$$

$${}^{17}\dot{\omega}_{16} = {}^{17}A_{16} {}^{16}\dot{\omega}_{16} = \begin{bmatrix} Cq_{17} & -Sq_{17} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_{17} & -Cq_{17} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Cq_{17}\ddot{\theta}_1 & 0 & Sq_{17}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = {}^{17}\dot{\omega}_{17}$$

$${}^{18}\dot{\omega}_{17} = {}^{18}A_{17} {}^{17}\dot{\omega}_{17} = \begin{bmatrix} Cq_{18} & -Sq_{18} & 0 \\ Sq_{18} & Cq_{18} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Cq_{17}\ddot{\theta}_1 \\ 0 \\ Sq_{17}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -Cq_{18}Cq_{17}\ddot{\theta}_1 & -Sq_{18}Cq_{17}\ddot{\theta}_1 & Sq_{17}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T = {}^{18}\dot{\omega}_{18}$$

$$\begin{aligned}
{}^{19}\dot{\omega}_{18} &= {}^{19}A_{18} {}^{18}\dot{\omega}_{18} = \begin{bmatrix} Cq_{19} & -Sq_{19} & 0 \\ Sq_{19} & Cq_{19} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Cq_{18}Cq_{17}\ddot{\theta}_1 \\ -Sq_{18}Cq_{17}\ddot{\theta}_1 \\ Sq_{17}\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \\
&= \left[(Sq_{19}Sq_{18}Cq_{17} - Cq_{19}Cq_{18}Cq_{17})\ddot{\theta}_1 \quad (-Sq_{19}Cq_{18}Cq_{17} - Cq_{19}Sq_{18}Cq_{17})\ddot{\theta}_1 \quad Sq_{17}\ddot{\theta}_1 \right]^T = {}^{19}\dot{\omega}_{19}
\end{aligned}$$

Calcul des \underline{b}_i

• **2^{ème} doigt**

$$\underline{\underline{b}}_{6,6} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_{6,6}}^2 - \omega_{y_{6,6}}^2 & -\dot{\omega}_{z_{6,6}} + \omega_{y_{6,6}}\omega_{x_{6,6}} & \dot{\omega}_{y_{6,6}} + \omega_{z_{6,6}}\omega_{x_{6,6}} \\ \dot{\omega}_{z_{6,6}} + \omega_{x_{6,6}}\omega_{y_{6,6}} & -\omega_{z_{6,6}}^2 - \omega_{x_{6,6}}^2 & -\dot{\omega}_{x_{6,6}} + \omega_{z_{6,6}}\omega_{y_{6,6}} \\ -\dot{\omega}_{y_{6,6}} + \omega_{z_{6,6}}\omega_{x_{6,6}} & \dot{\omega}_{x_{6,6}} + \omega_{z_{6,6}}\omega_{y_{6,6}} & -\omega_{y_{6,6}}^2 - \omega_{x_{6,6}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{b}}_{7,7} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_{7,7}}^2 - \omega_{y_{7,7}}^2 & -\dot{\omega}_{z_{7,7}} + \omega_{y_{7,7}}\omega_{x_{7,7}} & \dot{\omega}_{y_{7,7}} + \omega_{z_{7,7}}\omega_{x_{7,7}} \\ \dot{\omega}_{z_{7,7}} + \omega_{x_{7,7}}\omega_{y_{7,7}} & -\omega_{z_{7,7}}^2 - \omega_{x_{7,7}}^2 & -\dot{\omega}_{x_{7,7}} + \omega_{z_{7,7}}\omega_{y_{7,7}} \\ -\dot{\omega}_{y_{7,7}} + \omega_{z_{7,7}}\omega_{x_{7,7}} & \dot{\omega}_{x_{7,7}} + \omega_{z_{7,7}}\omega_{y_{7,7}} & -\omega_{y_{7,7}}^2 - \omega_{x_{7,7}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{b}}_{8,8} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_{8,8}}^2 - \omega_{y_{8,8}}^2 & -\dot{\omega}_{z_{8,8}} + \omega_{y_{8,8}}\omega_{x_{8,8}} & \dot{\omega}_{y_{8,8}} + \omega_{z_{8,8}}\omega_{x_{8,8}} \\ \dot{\omega}_{z_{8,8}} + \omega_{x_{8,8}}\omega_{y_{8,8}} & -\omega_{z_{8,8}}^2 - \omega_{x_{8,8}}^2 & -\dot{\omega}_{x_{8,8}} + \omega_{z_{8,8}}\omega_{y_{8,8}} \\ -\dot{\omega}_{y_{8,8}} + \omega_{z_{8,8}}\omega_{x_{8,8}} & \dot{\omega}_{x_{8,8}} + \omega_{z_{8,8}}\omega_{y_{8,8}} & -\omega_{y_{8,8}}^2 - \omega_{x_{8,8}}^2 \end{bmatrix}$$

• **3^{ème} doigt**

$$\underline{\underline{b}}_{11,11} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_{11,11}}^2 - \omega_{y_{11,11}}^2 & -\dot{\omega}_{z_{11,11}} + \omega_{y_{11,11}}\omega_{x_{11,11}} & \dot{\omega}_{y_{11,11}} + \omega_{z_{11,11}}\omega_{x_{11,11}} \\ \dot{\omega}_{z_{11,11}} + \omega_{x_{11,11}}\omega_{y_{11,11}} & -\omega_{z_{11,11}}^2 - \omega_{x_{11,11}}^2 & -\dot{\omega}_{x_{11,11}} + \omega_{z_{11,11}}\omega_{y_{11,11}} \\ -\dot{\omega}_{y_{11,11}} + \omega_{z_{11,11}}\omega_{x_{11,11}} & \dot{\omega}_{x_{11,11}} + \omega_{z_{11,11}}\omega_{y_{11,11}} & -\omega_{y_{11,11}}^2 - \omega_{x_{11,11}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{b}}_{12,12} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_{12,12}}^2 - \omega_{y_{12,12}}^2 & -\dot{\omega}_{z_{12,12}} + \omega_{y_{12,12}}\omega_{x_{12,12}} & \dot{\omega}_{y_{12,12}} + \omega_{z_{12,12}}\omega_{x_{12,12}} \\ \dot{\omega}_{z_{12,12}} + \omega_{x_{12,12}}\omega_{y_{12,12}} & -\omega_{z_{12,12}}^2 - \omega_{x_{12,12}}^2 & -\dot{\omega}_{x_{12,12}} + \omega_{z_{12,12}}\omega_{y_{12,12}} \\ -\dot{\omega}_{y_{12,12}} + \omega_{z_{12,12}}\omega_{x_{12,12}} & \dot{\omega}_{x_{12,12}} + \omega_{z_{12,12}}\omega_{y_{12,12}} & -\omega_{y_{12,12}}^2 - \omega_{x_{12,12}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{b}}_{13,13} = \begin{bmatrix} -\omega_{z_{13,13}}^2 - \omega_{y_{13,13}}^2 & -\dot{\omega}_{z_{13,13}} + \omega_{y_{13,13}}\omega_{x_{13,13}} & \dot{\omega}_{y_{13,13}} + \omega_{z_{13,13}}\omega_{x_{13,13}} \\ \dot{\omega}_{z_{13,13}} + \omega_{x_{13,13}}\omega_{y_{13,13}} & -\omega_{z_{13,13}}^2 - \omega_{x_{13,13}}^2 & -\dot{\omega}_{x_{13,13}} + \omega_{z_{13,13}}\omega_{y_{13,13}} \\ -\dot{\omega}_{y_{13,13}} + \omega_{z_{13,13}}\omega_{x_{13,13}} & \dot{\omega}_{x_{13,13}} + \omega_{z_{13,13}}\omega_{y_{13,13}} & -\omega_{y_{13,13}}^2 - \omega_{x_{13,13}}^2 \end{bmatrix}$$

- **Le pouce**

$$\underline{\underline{b_{16,16}}} = \begin{bmatrix} -\omega^2_{z_{16,16}} - \omega^2_{y_{16,16}} & -\dot{\omega}_{z_{16,16}} + \omega_{y_{16,16}} \omega_{x_{16,16}} & \dot{\omega}_{y_{16,16}} + \omega_{z_{16,16}} \omega_{x_{16,16}} \\ \dot{\omega}_{z_{16,16}} + \omega_{x_{16,16}} \omega_{y_{16,16}} & -\omega^2_{z_{16,16}} - \omega^2_{x_{16,16}} & -\dot{\omega}_{x_{16,16}} + \omega_{z_{16,16}} \omega_{y_{16,16}} \\ -\dot{\omega}_{y_{16,16}} + \omega_{z_{16,16}} \omega_{x_{16,16}} & \dot{\omega}_{x_{16,16}} + \omega_{z_{16,16}} \omega_{y_{16,16}} & -\omega^2_{y_{16,16}} - \omega^2_{x_{16,16}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{b_{17,17}}} = \begin{bmatrix} -\omega^2_{z_{17,17}} - \omega^2_{y_{17,17}} & -\dot{\omega}_{z_{17,17}} + \omega_{y_{17,17}} \omega_{x_{17,17}} & \dot{\omega}_{y_{17,17}} + \omega_{z_{17,17}} \omega_{x_{17,17}} \\ \dot{\omega}_{z_{17,17}} + \omega_{x_{17,17}} \omega_{y_{17,17}} & -\omega^2_{z_{17,17}} - \omega^2_{x_{17,17}} & -\dot{\omega}_{x_{17,17}} + \omega_{z_{17,17}} \omega_{y_{17,17}} \\ -\dot{\omega}_{y_{17,17}} + \omega_{z_{17,17}} \omega_{x_{17,17}} & \dot{\omega}_{x_{17,17}} + \omega_{z_{17,17}} \omega_{y_{17,17}} & -\omega^2_{y_{17,17}} - \omega^2_{x_{17,17}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{b_{18,18}}} = \begin{bmatrix} -\omega^2_{z_{18,18}} - \omega^2_{y_{18,18}} & -\dot{\omega}_{z_{18,18}} + \omega_{y_{18,18}} \omega_{x_{18,18}} & \dot{\omega}_{y_{18,18}} + \omega_{z_{18,18}} \omega_{x_{18,18}} \\ \dot{\omega}_{z_{18,18}} + \omega_{x_{18,18}} \omega_{y_{18,18}} & -\omega^2_{z_{18,18}} - \omega^2_{x_{18,18}} & -\dot{\omega}_{x_{18,18}} + \omega_{z_{18,18}} \omega_{y_{18,18}} \\ -\dot{\omega}_{y_{18,18}} + \omega_{z_{18,18}} \omega_{x_{18,18}} & \dot{\omega}_{x_{18,18}} + \omega_{z_{18,18}} \omega_{y_{18,18}} & -\omega^2_{y_{18,18}} - \omega^2_{x_{18,18}} \end{bmatrix}$$

Calcul des ${}^{j-1}r_{j-1}$, ${}^j r_{j-1}$, ${}^j \alpha_j$

- **2^{ème} doigt**

$$r_{1,6} = \begin{bmatrix} Cq_6 & -Sq_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_6 & -Cq_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha_{x1,1} + b_{xx1,1} l_1^2) \\ (\alpha_{y1,1} + b_{yx1,1} l_1^2) \\ (\alpha_{z1,1} + b_{zx1,1} l_1^2) \end{bmatrix}$$

$$= \left[\left(Cq_6 [\alpha_{x1,1} + b_{xx1,1} l_1^2] - Sq_6 [\alpha_{y1,1} + b_{yx1,1} l_1^2] \right) \quad (\alpha_{z1,1} + b_{zx1,1} l_1^2) \quad \left(-Sq_6 [\alpha_{x1,1} + b_{xx1,1} l_1^2] - Cq_6 [\alpha_{y1,1} + b_{yx1,1} l_1^2] \right) \right]^T$$

$$\alpha_{6,6} = r_{1,6}$$

$$r_{6,6} = \left[(\alpha_{x6,6} + b_{xx6,6} l_2^2) \quad (\alpha_{y6,6} + b_{yx6,6} l_2^2) \quad (\alpha_{z6,6} + b_{zx6,6} l_2^2) \right]^T$$

$$r_{6,7} = \begin{bmatrix} Cq_7 & -Sq_7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sq_7 & Cq_7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha_{x6,6} + b_{xx6,6} l_2^2) \\ (\alpha_{y6,6} + b_{yx6,6} l_2^2) \\ (\alpha_{z6,6} + b_{zx6,6} l_2^2) \end{bmatrix}$$

$$= \left[\left(Cq_7 [\alpha_{x6,6} + b_{xx6,6} l_2^2] - Sq_7 [\alpha_{y6,6} + b_{yx6,6} l_2^2] \right) \quad -(\alpha_{z6,6} + b_{zx6,6} l_2^2) \quad \left(Sq_7 [\alpha_{x6,6} + b_{xx6,6} l_2^2] + Cq_7 [\alpha_{z6,6} + b_{zx6,6} l_2^2] \right) \right]^T$$

$$\alpha_{7,7} = r_{6,7}$$

$$r_{7,7} = \left[(\alpha_{x7,7} + b_{xx7,7} l_3^2) \quad (\alpha_{y7,7} + b_{yx7,7} l_3^2) \quad (\alpha_{z7,7} + b_{zx7,7} l_3^2) \right]^T$$

$$r_{7,8} = \begin{bmatrix} Cq_8 & -Sq_8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_8 & -Cq_8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha_{x7,7} + b_{xx7,7}l_3^2) \\ (\alpha_{y7,7} + b_{yx7,7}l_3^2) \\ (\alpha_{z7,7} + b_{zx7,7}l_3^2) \end{bmatrix}$$

$$= \left[\left(Cq_8 [\alpha_{x7,7} + b_{xx7,7}l_3^2] - Sq_8 [\alpha_{y7,7} + b_{yx7,7}l_3^2] \right) (\alpha_{z7,7} + b_{zx7,7}l_3^2) \left(-Sq_8 [\alpha_{x7,7} + b_{xx7,7}l_3^2] - Cq_8 [\alpha_{y7,7} + b_{yx7,7}l_3^2] \right) \right]^T$$

$$\alpha_{8,8} = r_{7,8}$$

• *3ème doigt*

$$r_{1,11} = \begin{bmatrix} Cq_{11} & -Sq_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_{11} & -Cq_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha_{x1,1} + b_{xx1,1}l_1^3) \\ (\alpha_{y1,1} + b_{yx1,1}l_1^3) \\ (\alpha_{z1,1} + b_{zx1,1}l_1^3) \end{bmatrix}$$

$$= \left[\left(Cq_{11} [\alpha_{x1,1} + b_{xx1,1}l_1^3] - Sq_{11} [\alpha_{y1,1} + b_{yx1,1}l_1^3] \right) (\alpha_{z1,1} + b_{zx1,1}l_1^3) \left(-Sq_{11} [\alpha_{x1,1} + b_{xx1,1}l_1^3] - Cq_{11} [\alpha_{y1,1} + b_{yx1,1}l_1^3] \right) \right]^T$$

$$\alpha_{11,11} = r_{1,11}$$

$$r_{11,11} = \left[(\alpha_{xx11,11} + b_{xx11,11}l_2^3) (\alpha_{yy11,11} + b_{yy11,11}l_2^3) (\alpha_{zz11,11} + b_{zz11,11}l_2^3) \right]^T$$

$$r_{11,12} = \begin{bmatrix} Cq_{12} & -Sq_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sq_{12} & Cq_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha_{x11,11} + b_{xx11,11}l_2^3) \\ (\alpha_{y11,11} + b_{yx11,11}l_2^3) \\ (\alpha_{z11,11} + b_{zx11,11}l_2^3) \end{bmatrix}$$

$$= \left[\left(Cq_{12} [\alpha_{x11,11} + b_{xx11,11}l_2^3] - Sq_{12} [\alpha_{y11,11} + b_{yx11,11}l_2^3] \right) - (\alpha_{z11,11} + b_{zx11,11}l_2^3) \left(Sq_{12} [\alpha_{x11,11} + b_{xx11,11}l_2^3] + Cq_{12} [\alpha_{z11,11} + b_{zx11,11}l_2^3] \right) \right]^T$$

$$\alpha_{12,12} = r_{11,12}$$

$$r_{12,12} = \left[(\alpha_{xx12,12} + b_{xx12,12}l_3^3) (\alpha_{yy12,12} + b_{yy12,12}l_3^3) (\alpha_{zz12,12} + b_{zz12,12}l_3^3) \right]^T$$

$$r_{12,13} = \begin{bmatrix} Cq_{13} & -Sq_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_{13} & -Cq_{13} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha_{x12,12} + b_{xx12,12}l_3^3) \\ (\alpha_{y12,12} + b_{yx12,12}l_3^3) \\ (\alpha_{z12,12} + b_{zx12,12}l_3^3) \end{bmatrix}$$

$$= \left[\left(Cq_{13} [\alpha_{x12,12} + b_{xx12,12}l_3^3] - Sq_{13} [\alpha_{y12,12} + b_{yx12,12}l_3^3] \right) (\alpha_{z12,12} + b_{zx12,12}l_3^3) \left(-Sq_{13} [\alpha_{x12,12} + b_{xx12,12}l_3^3] - Cq_{13} [\alpha_{y12,12} + b_{yx12,12}l_3^3] \right) \right]^T$$

$$\alpha_{13,13} = r_{12,13}$$

- **Le pouce**

$$r_{1,16} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ Cq_{16} & -Sq_{16} & 0 \\ -Sq_{16} & -Cq_{16} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha_{x1,1} + b_{xx1,1} l_1^4) \\ (\alpha_{y1,1} + b_{yx1,1} l_1^4) \\ (\alpha_{z1,1} + b_{zx1,1} l_1^4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(\alpha_{z1,1} + b_{zx1,1} l_1^4) & (Cq_{16}[\alpha_{x1,1} + b_{xx1,1} l_1^4] - Sq_{16}[\alpha_{y1,1} + b_{yx1,1} l_1^4]) & (-Sq_{16}[\alpha_{x1,1} + b_{xx1,1} l_1^4] - Cq_{16}[\alpha_{y1,1} + b_{yx1,1} l_1^4]) \end{bmatrix}^T$$

$$\alpha_{16,16} = r_{1,16}$$

$$r_{16,16} = \begin{bmatrix} (\alpha_{x16,16} + b_{xx16,16} l_2^4) & (\alpha_{y16,16} + b_{yx16,16} l_2^4) & (\alpha_{z16,16} + b_{zx16,16} l_2^4) \end{bmatrix}^T$$

$$r_{16,17} = \begin{bmatrix} Cq_{17} & -Sq_{17} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_{17} & -Cq_{17} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha_{x16,16} + b_{xx16,16} l_2^4) \\ (\alpha_{y16,16} + b_{yx16,16} l_2^4) \\ (\alpha_{z16,16} + b_{zx16,16} l_2^4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (Cq_{17}[\alpha_{x16,16} + b_{xx16,16} l_2^4] - Sq_{17}[\alpha_{y16,16} + b_{yx16,16} l_2^4]) & (\alpha_{z16,16} + b_{zx16,16} l_2^4) & (-Sq_{17}[\alpha_{x16,16} + b_{xx16,16} l_2^4] - Cq_{17}[\alpha_{y16,16} + b_{yx16,16} l_2^4]) \end{bmatrix}^T$$

$$\alpha_{17,17} = r_{16,17}$$

$$r_{17,17} = \begin{bmatrix} (\alpha_{x17,17} + b_{xx17,17} l_3^4) & (\alpha_{y17,17} + b_{yx17,17} l_3^4) & (\alpha_{z17,17} + b_{zx17,17} l_3^4) \end{bmatrix}^T$$

$$r_{17,18} = \begin{bmatrix} Cq_{18} & -Sq_{18} & 0 \\ Sq_{18} & Cq_{18} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha_{x17,17} + b_{xx17,17} l_3^4) \\ (\alpha_{y17,17} + b_{yx17,17} l_3^4) \\ (\alpha_{z17,17} + b_{zx17,17} l_3^4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (Cq_{18}[\alpha_{x17,17} + b_{xx17,17} l_3^4] - Sq_{18}[\alpha_{y17,17} + b_{yx17,17} l_3^4]) & (Sq_{18}[\alpha_{x17,17} + b_{xx17,17} l_3^4] + Cq_{18}[\alpha_{y17,17} + b_{yx17,17} l_3^4]) & (\alpha_{z17,17} + b_{zx17,17} l_3^4) \end{bmatrix}^T$$

$$\alpha_{18,18} = r_{17,18}$$

Calcul des forces de saisie

- **2^{ème} doigt**

$$f_{9,8} = [f_{x9,8}, f_{y9,8}, f_{z9,8}]$$

$$f_{8,8} = f_{9,8} + \underline{\underline{b}}_{8,8} u_{8,8} + m_8 \alpha_{8,8}$$

$$\underline{\underline{b}}_{8,8} u_{8,8} = \begin{bmatrix} b_{xx8,8} & b_{xy8,8} & b_{xz8,8} \\ b_{yx8,8} & b_{yy8,8} & b_{yz8,8} \\ b_{zx8,8} & b_{zy8,8} & b_{zz8,8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x8,8} \\ u_{y8,8} \\ u_{z8,8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{xx8,8} u_{x8,8} + b_{xy8,8} u_{y8,8} + b_{xz8,8} u_{z8,8} \\ b_{yx8,8} u_{x8,8} + b_{yy8,8} u_{y8,8} + b_{yz8,8} u_{z8,8} \\ b_{zx8,8} u_{x8,8} + b_{zy8,8} u_{y8,8} + b_{zz8,8} u_{z8,8} \end{bmatrix}$$

$$f_{8,8} = \begin{bmatrix} f_{x9,8} + b_{xx8,8} u_{x8,8} + b_{xy8,8} u_{y8,8} + b_{xz8,8} u_{z8,8} + m_8 \alpha_{x8,8} \\ f_{y9,8} + b_{yx8,8} u_{x8,8} + b_{yy8,8} u_{y8,8} + b_{yz8,8} u_{z8,8} + m_8 \alpha_{y8,8} \\ f_{z9,8} + b_{zx8,8} u_{x8,8} + b_{zy8,8} u_{y8,8} + b_{zz8,8} u_{z8,8} + m_8 \alpha_{z8,8} \end{bmatrix}$$

$$f_{8,7} = \begin{bmatrix} Cq_8 & -Sq_8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_8 & -Cq_8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x8,8} \\ f_{y8,8} \\ f_{z8,8} \end{bmatrix} = \left[(f_{x8,8}Cq_8 - f_{y8,8}Sq_8), f_{z8,8}, (-f_{x8,8}Sq_8 - f_{y8,8}Cq_8) \right]$$

$$f_{7,7} = \begin{bmatrix} f_{x8,7} + b_{xx7,7}u_{x7,7} + b_{xy7,7}u_{y7,7} + b_{xz7,7}u_{z7,7} + m_7\alpha_{x7,7} \\ f_{y8,7} + b_{yx7,7}u_{x7,7} + b_{yy7,7}u_{y7,7} + b_{yz7,7}u_{z7,7} + m_7\alpha_{y7,7} \\ f_{z8,7} + b_{zx7,7}u_{x7,7} + b_{zy7,7}u_{y7,7} + b_{zz7,7}u_{z7,7} + m_7\alpha_{z7,7} \end{bmatrix}$$

$$f_{7,6} = \begin{bmatrix} Cq_7 & -Sq_7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sq_7 & Cq_7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x7,7} \\ f_{y7,7} \\ f_{z7,7} \end{bmatrix} = \left[(f_{x7,7}Cq_7 - f_{y7,7}Sq_7), -f_{z7,7}, (f_{x7,7}Sq_7 + f_{y7,7}Cq_7) \right]$$

$$f_{6,6} = \begin{bmatrix} f_{x7,6} + b_{xx6,6}u_{x6,6} + b_{xy6,6}u_{y6,6} + b_{xz6,6}u_{z6,6} + m_6\alpha_{x6,6} \\ f_{y7,6} + b_{yx6,6}u_{x6,6} + b_{yy6,6}u_{y6,6} + b_{yz6,6}u_{z6,6} + m_6\alpha_{y6,6} \\ f_{z7,6} + b_{zx6,6}u_{x6,6} + b_{zy6,6}u_{y6,6} + b_{zz6,6}u_{z6,6} + m_6\alpha_{z6,6} \end{bmatrix}$$

$$f_{6,1} = \begin{bmatrix} Cq_6 & -Sq_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_6 & -Cq_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x6,6} \\ f_{y6,6} \\ f_{z6,6} \end{bmatrix} = \left[(f_{x6,6}Cq_6 - f_{y6,6}Sq_6), f_{z6,6}, (-f_{x6,6}Sq_6 - f_{y6,6}Cq_6) \right]$$

$$f_{1,1} = \begin{bmatrix} f_{x6,1} + b_{xx1,1}u_{x1,1} + b_{xy1,1}u_{y1,1} + b_{xz1,1}u_{z1,1} + m_1\alpha_{x1,1} \\ f_{y6,1} + b_{yx1,1}u_{x1,1} + b_{yy1,1}u_{y1,1} + b_{yz1,1}u_{z1,1} + m_1\alpha_{y1,1} \\ f_{z6,1} + b_{zx1,1}u_{x1,1} + b_{zy1,1}u_{y1,1} + b_{zz1,1}u_{z1,1} + m_1\alpha_{z1,1} \end{bmatrix}$$

• **3^{ème} doigt**

$$f_{14,13} = [f_{x14,13}, f_{y14,13}, f_{z14,13}]$$

$$f_{13,13} = f_{14,13} + \underline{\underline{b_{13,13}}} u_{13,13} + m_{13}\alpha_{13,13}$$

$$\underline{\underline{b_{13,13}}} u_{13,13} = \begin{bmatrix} b_{xx13,13} & b_{xy13,13} & b_{xz13,13} \\ b_{yx13,13} & b_{yy13,13} & b_{yz13,13} \\ b_{zx13,13} & b_{zy13,13} & b_{zz13,13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x13,13} \\ u_{y13,13} \\ u_{z13,13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{xx13,13}u_{x13,13} + b_{xy13,13}u_{y13,13} + b_{xz13,13}u_{z13,13} \\ b_{yx13,13}u_{x13,13} + b_{yy13,13}u_{y13,13} + b_{yz13,13}u_{z13,13} \\ b_{zx13,13}u_{x13,13} + b_{zy13,13}u_{y13,13} + b_{zz13,13}u_{z13,13} \end{bmatrix}$$

$$f_{13,13} = \begin{bmatrix} f_{x14,13} + b_{xx13,13}u_{x13,13} + b_{xy13,13}u_{y13,13} + b_{xz13,13}u_{z13,13} + m_{13}\alpha_{x13,13} \\ f_{y14,13} + b_{yx13,13}u_{x13,13} + b_{yy13,13}u_{y13,13} + b_{yz13,13}u_{z13,13} + m_{13}\alpha_{y13,13} \\ f_{z14,13} + b_{zx13,13}u_{x13,13} + b_{zy13,13}u_{y13,13} + b_{zz13,13}u_{z13,13} + m_{13}\alpha_{z13,13} \end{bmatrix}$$

$$f_{13,12} = \begin{bmatrix} Cq_{13} & -Sq_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_{13} & -Cq_{13} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x13,13} \\ f_{y13,13} \\ f_{z13,13} \end{bmatrix} = \left[(f_{x13,13}Cq_{13} - f_{y13,13}Sq_{13}), f_{z13,13}, (-f_{x13,13}Sq_{13} - f_{y13,13}Cq_{13}) \right]$$

$$f_{12,12} = \begin{bmatrix} f_{x13,12} + b_{xx12,12}u_{x12,12} + b_{xy12,12}u_{y12,12} + b_{xz12,12}u_{z12,12} + m_{12}\alpha_{x12,12} \\ f_{y13,12} + b_{yx12,12}u_{x12,12} + b_{yy12,12}u_{y12,12} + b_{yz12,12}u_{z12,12} + m_{12}\alpha_{y12,12} \\ f_{z13,12} + b_{zx12,12}u_{x12,12} + b_{zy12,12}u_{y12,12} + b_{zz12,12}u_{z12,12} + m_{12}\alpha_{z12,12} \end{bmatrix}$$

$$f_{12,11} = \begin{bmatrix} Cq_{12} & -Sq_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sq_{12} & Cq_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x12,12} \\ f_{y12,12} \\ f_{z12,12} \end{bmatrix} = \left[\left(f_{x12,12}Cq_{12} - f_{y12,12}Sq_{12,12} \right), -f_{z12,12}, \left(f_{x12,12}Sq_{12} + f_{y12,12}Cq_{12} \right) \right]$$

$$f_{11,11} = \begin{bmatrix} f_{x12,11} + b_{xx11,11}u_{x11,11} + b_{xy11,11}u_{y11,11} + b_{xz11,11}u_{z11,11} + m_{11}\alpha_{x11,11} \\ f_{y12,11} + b_{yx11,11}u_{x11,11} + b_{yy11,11}u_{y11,11} + b_{yz11,11}u_{z11,11} + m_{11}\alpha_{y11,11} \\ f_{z12,11} + b_{zx11,11}u_{x11,11} + b_{zy11,11}u_{y11,11} + b_{zz11,11}u_{z11,11} + m_{11}\alpha_{z11,11} \end{bmatrix}$$

$$f_{11,1} = \begin{bmatrix} Cq_{11} & -Sq_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_{11} & -Cq_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x11,11} \\ f_{y11,11} \\ f_{z11,11} \end{bmatrix} = \left[\left(f_{x11,11}Cq_{11} - f_{y11,11}Sq_{11} \right), f_{z11,11}, \left(-f_{x11,11}Sq_{11} - f_{y11,11}Cq_{11} \right) \right]$$

$$f_{1,1} = \begin{bmatrix} f_{x1,1} + b_{xx1,1}u_{x1,1} + b_{xy1,1}u_{y1,1} + b_{xz1,1}u_{z1,1} + m_1\alpha_{x1,1} \\ f_{y1,1} + b_{yx1,1}u_{x1,1} + b_{yy1,1}u_{y1,1} + b_{yz1,1}u_{z1,1} + m_1\alpha_{y1,1} \\ f_{z1,1} + b_{zx1,1}u_{x1,1} + b_{zy1,1}u_{y1,1} + b_{zz1,1}u_{z1,1} + m_1\alpha_{z1,1} \end{bmatrix}$$

- **Le pouce**

$$f_{19,18} = \left[f_{x19,18}, f_{y19,18}, f_{z19,18} \right]$$

$$f_{18,18} = f_{19,18} + \underline{\underline{b_{18,18}}} u_{18,18} + m_{18}\alpha_{18,18}$$

$$\underline{\underline{b_{18,18}}} u_{18,18} = \begin{bmatrix} b_{xx18,18} & b_{xy18,18} & b_{xz18,18} \\ b_{yx18,18} & b_{yy18,18} & b_{yz18,18} \\ b_{zx18,18} & b_{zy18,18} & b_{zz18,18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x18,18} \\ u_{y18,18} \\ u_{z18,18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{xx18,18}u_{x18,18} + b_{xy18,18}u_{y18,18} + b_{xz18,18}u_{z18,18} \\ b_{yx18,18}u_{x18,18} + b_{yy18,18}u_{y18,18} + b_{yz18,18}u_{z18,18} \\ b_{zx18,18}u_{x18,18} + b_{zy18,18}u_{y18,18} + b_{zz18,18}u_{z18,18} \end{bmatrix}$$

$$f_{18,18} = \begin{bmatrix} f_{x19,18} + b_{xx18,18}u_{x18,18} + b_{xy18,18}u_{y18,18} + b_{xz18,18}u_{z18,18} + m_{18}\alpha_{x18,18} \\ f_{y19,18} + b_{yx18,18}u_{x18,18} + b_{yy18,18}u_{y18,18} + b_{yz18,18}u_{z18,18} + m_{18}\alpha_{y18,18} \\ f_{z19,18} + b_{zx18,18}u_{x18,18} + b_{zy18,18}u_{y18,18} + b_{zz18,18}u_{z18,18} + m_{18}\alpha_{z18,18} \end{bmatrix}$$

$$f_{18,17} = \begin{bmatrix} Cq_{18} & -Sq_{18} & 0 \\ Sq_{18} & Cq_{18} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x18,18} \\ f_{y18,18} \\ f_{z18,18} \end{bmatrix} = \left[\left(f_{x18,18}Cq_{18} - f_{y18,18}Sq_{18} \right), \left(Sq_{18}f_{x18,18} + Cq_{18}f_{y18,18} \right), f_{z18,18} \right]$$

$$f_{17,17} = \begin{bmatrix} f_{x18,17} + b_{xx17,17}u_{x17,17} + b_{xy17,17}u_{y17,17} + b_{xz17,17}u_{z17,17} + m_{17}\alpha_{x17,17} \\ f_{y18,17} + b_{yx17,17}u_{x17,17} + b_{yy17,17}u_{y17,17} + b_{yz17,17}u_{z17,17} + m_{17}\alpha_{y17,17} \\ f_{z18,17} + b_{zx17,17}u_{x17,17} + b_{zy17,17}u_{y17,17} + b_{zz17,17}u_{z17,17} + m_{17}\alpha_{z17,17} \end{bmatrix}$$

$$f_{17,16} = \begin{bmatrix} Cq_{17} & -Sq_{17} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_{17} & -Cq_{17} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x17,17} \\ f_{y17,17} \\ f_{z17,17} \end{bmatrix} = \left[\left(f_{x17,17} Cq_{17} - f_{y17,17} Sq_{17} \right), f_{z17,17}, \left(-f_{x17,17} Sq_{17} - f_{y17,17} Cq_{17} \right) \right]$$

$$f_{16,16} = \begin{bmatrix} f_{x17,16} + b_{xx16,16} u_{x16,16} + b_{xy16,16} u_{y16,16} + b_{xz16,16} u_{z16,16} + m_{16} \alpha_{x16,16} \\ f_{y17,16} + b_{yx16,16} u_{x16,16} + b_{yy16,16} u_{y16,16} + b_{yz16,16} u_{z16,16} + m_{16} \alpha_{y16,16} \\ f_{z17,16} + b_{zx16,16} u_{x16,16} + b_{zy16,16} u_{y16,16} + b_{zz16,16} u_{z16,16} + m_{16} \alpha_{z16,16} \end{bmatrix}$$

$$f_{16,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ Cq_{16} & -Sq_{16} & 0 \\ -Sq_{16} & -Cq_{16} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x16,16} \\ f_{y16,16} \\ f_{z16,16} \end{bmatrix} = \left[-f_{z16,16}, \left(f_{x16,16} Cq_{16} - f_{y16,16} Sq_{16} \right), \left(-f_{x16,16} Sq_{16} - f_{y16,16} Cq_{16} \right) \right]$$

$$f_{1,1} = \begin{bmatrix} f_{x16,1} + b_{xx1,1} u_{x1,1} + b_{xy1,1} u_{y1,1} + b_{xz1,1} u_{z1,1} + m_1 \alpha_{x1,1} \\ f_{y16,1} + b_{yx1,1} u_{x1,1} + b_{yy1,1} u_{y1,1} + b_{yz1,1} u_{z1,1} + m_1 \alpha_{y1,1} \\ f_{z16,1} + b_{zx1,1} u_{x1,1} + b_{zy1,1} u_{y1,1} + b_{zz1,1} u_{z1,1} + m_1 \alpha_{z1,1} \end{bmatrix}$$

Calcul des couples de rotation

- 2^{ème} doigt

$$C_{9,8} = [C_{x9,8}, C_{y9,8}, C_{z9,8}]$$

$$C_{8,8} = \begin{bmatrix} \left(C_{x9,8} + I_{x8} \dot{\omega}_{x8} - \omega_{z8} I_{y8} \omega_{y8} + \omega_{y8} I_{z8} \omega_{z8} + U_{y8} \alpha_{z8} - \alpha_{y8} U_{z8} \right) \\ \left(C_{y9,8} + I_{y8} \dot{\omega}_{y8} + \omega_{z8} I_{x8} \omega_{x8} - \omega_{x8} I_{z8} \omega_{z8} - U_{x8} \alpha_{z8} - \alpha_{x8} U_{z8} - l_3^2 F_{z9,8} \right) \\ \left(C_{z9,8} + I_{z8} \dot{\omega}_{z8} - \omega_{y8} I_{x8} \omega_{x8} - \omega_{x8} I_{z8} \omega_{y8} + U_{x8} \alpha_{y8} - U_{y8} \alpha_{x8} + l_3^2 F_{z9,8} \right) \end{bmatrix}$$

$$C_{8,7} = \begin{bmatrix} Cq_8 & -Sq_8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_8 & -Cq_8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{x8,8} \\ C_{y8,8} \\ C_{z8,8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq_8 C_{x8,8} - Sq_8 C_{y8,8} \\ C_{z8,8} \\ -Sq_8 C_{x8,8} - Cq_8 C_{y8,8} \end{bmatrix}$$

$$C_{7,7} = \begin{bmatrix} \left(C_{x8,7} + I_{x7} \dot{\omega}_{x7} - \omega_{z7} I_{y7} \omega_{y7} + \omega_{y7} I_{z7} \omega_{z7} + U_{y7} \alpha_{z7} - \alpha_{y7} U_{z7} \right) \\ \left(C_{y8,7} + I_{y7} \dot{\omega}_{y7} + \omega_{z7} I_{x7} \omega_{x7} - \omega_{x7} I_{z7} \omega_{z7} - U_{x7} \alpha_{z7} - \alpha_{x7} U_{z7} - l_2^2 F_{z8,7} \right) \\ \left(C_{z8,7} + I_{z7} \dot{\omega}_{z7} - \omega_{y7} I_{x7} \omega_{x7} - \omega_{x7} I_{z7} \omega_{y7} + U_{x7} \alpha_{y7} - U_{y7} \alpha_{x7} + l_2^2 F_{z8,7} \right) \end{bmatrix}$$

$$C_{7,6} = \begin{bmatrix} Cq_7 & -Sq_7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sq_7 & Cq_7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{x7,7} \\ C_{y7,7} \\ C_{z7,7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq_7 C_{x7,7} - Sq_7 C_{y7,7} \\ -C_{z7,7} \\ Sq_7 C_{x7,7} + Cq_7 C_{y7,7} \end{bmatrix}$$

$$C_{6,6} = \begin{bmatrix} (C_{x7,6} + I_{x6}\dot{\omega}_{x6} - \omega_{z6}I_{y6}\omega_{y6} + \omega_{y6}I_{z6}\omega_{z6} + U_{y6}\alpha_{z6} - \alpha_{y6}U_{z6}) \\ (C_{y7,6} + I_{y6}\dot{\omega}_{y6} + \omega_{z6}I_{x6}\omega_{x6} - \omega_{x6}I_{z6}\omega_{z6} - U_{x6}\alpha_{z6} - \alpha_{x6}U_{z6} - l_1^2 F_{z7,6}) \\ (C_{z7,6} + I_{z6}\dot{\omega}_{z6} - \omega_{y6}I_{x6}\omega_{x6} - \omega_{x6}I_{y6}\omega_{y6} + U_{x6}\alpha_{y6} - U_{y6}\alpha_{x6} + l_1^2 F_{z7,6}) \end{bmatrix}$$

$$C_{6,1} = \begin{bmatrix} Cq_6 & -Sq_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_6 & -Cq_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{x6,6} \\ C_{y6,6} \\ C_{z6,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq_6 C_{x6,6} - Sq_6 C_{y6,6} \\ -C_{z6,6} \\ -Sq_6 C_{x6,6} - Cq_6 C_{y6,6} \end{bmatrix}$$

• *3^{ème} doigt*

$$C_{14,13} = [C_{x14,13}, C_{y14,13}, C_{z14,13}]$$

$$C_{13,13} = \begin{bmatrix} (C_{x14,13} + I_{x13}\dot{\omega}_{x13} - \omega_{z13}I_{y13}\omega_{y13} + \omega_{y13}I_{z13}\omega_{z13} + U_{y13}\alpha_{z13} - \alpha_{y13}U_{z13}) \\ (C_{y14,13} + I_{y13}\dot{\omega}_{y13} + \omega_{z13}I_{x13}\omega_{x13} - \omega_{x13}I_{z13}\omega_{z13} - U_{x13}\alpha_{z13} - \alpha_{x13}U_{z13} - l_3^3 F_{z14,13}) \\ (C_{z14,13} + I_{z13}\dot{\omega}_{z13} - \omega_{y13}I_{x13}\omega_{x13} - \omega_{x13}I_{y13}\omega_{y13} + U_{x13}\alpha_{y13} - U_{y13}\alpha_{x13} + l_3^3 F_{z14,13}) \end{bmatrix}$$

$$C_{13,12} = \begin{bmatrix} Cq_{13} & -Sq_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_{13} & -Cq_{13} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{x13,13} \\ C_{y13,13} \\ C_{z13,13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq_{13} C_{x13,13} - Sq_{13} C_{y13,13} \\ C_{z13,13} \\ -Sq_{13} C_{x13,13} - Cq_{13} C_{y13,13} \end{bmatrix}$$

$$C_{12,12} = \begin{bmatrix} (C_{x13,12} + I_{x12}\dot{\omega}_{x12} - \omega_{z12}I_{y12}\omega_{y12} + \omega_{y12}I_{z12}\omega_{z12} + U_{y12}\alpha_{z12} - \alpha_{y12}U_{z12}) \\ (C_{y13,12} + I_{y12}\dot{\omega}_{y12} + \omega_{z12}I_{x12}\omega_{x12} - \omega_{x12}I_{z12}\omega_{z12} - U_{x12}\alpha_{z12} - \alpha_{x12}U_{z12} - l_2^3 F_{z13,12}) \\ (C_{z13,12} + I_{z12}\dot{\omega}_{z12} - \omega_{y12}I_{x12}\omega_{x12} - \omega_{x12}I_{y12}\omega_{y12} + U_{x12}\alpha_{y12} - U_{y12}\alpha_{x12} + l_2^3 F_{z13,12}) \end{bmatrix}$$

$$C_{12,11} = \begin{bmatrix} Cq_{12} & -Sq_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ Sq_{12} & Cq_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{x12,12} \\ C_{y12,12} \\ C_{z12,12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq_{12} C_{x12,12} - Sq_{12} C_{y12,12} \\ -C_{z12,12} \\ Sq_{12} C_{x12,12} + Cq_{12} C_{y12,12} \end{bmatrix}$$

$$C_{11,11} = \begin{bmatrix} (C_{x12,11} + I_{x11}\dot{\omega}_{x11} - \omega_{z11}I_{y11}\omega_{y11} + \omega_{y11}I_{z11}\omega_{z11} + U_{y11}\alpha_{z11} - \alpha_{y11}U_{z11}) \\ (C_{y12,11} + I_{y11}\dot{\omega}_{y11} + \omega_{z11}I_{x11}\omega_{x11} - \omega_{x11}I_{z11}\omega_{z11} - U_{x11}\alpha_{z11} - \alpha_{x11}U_{z11} - l_1^3 F_{z12,11}) \\ (C_{z12,11} + I_{z11}\dot{\omega}_{z11} - \omega_{y11}I_{x11}\omega_{x11} - \omega_{x11}I_{y11}\omega_{y11} + U_{x11}\alpha_{y6} - U_{y11}\alpha_{x11} + l_1^3 F_{z12,11}) \end{bmatrix}$$

$$C_{11,1} = \begin{bmatrix} Cq_{11} & -Sq_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_{11} & -Cq_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{x11,11} \\ C_{y11,11} \\ C_{z11,11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq_{11} C_{x11,11} - Sq_{11} C_{y11,11} \\ -C_{z11,11} \\ -Sq_{11} C_{x11,11} - Cq_{11} C_{y11,11} \end{bmatrix}$$

- **Le pouce**

$$C_{18,19} = [C_{x18,19}, C_{y18,19}, C_{z18,19}]$$

$$C_{18,18} = \begin{bmatrix} (C_{x18,19} + I_{x18}\dot{\omega}_{x18} - \omega_{z18}I_{y18}\omega_{y18} + \omega_{y18}I_{z18}\omega_{z18} + U_{y18}\alpha_{z18} - \alpha_{y18}U_{z18}) \\ (C_{y18,19} + I_{y18}\dot{\omega}_{y18} + \omega_{z18}I_{x18}\omega_{x18} - \omega_{x18}I_{z18}\omega_{z18} - U_{x18}\alpha_{z18} - \alpha_{x18}U_{z18} - l_3^4 F_{z19,18}) \\ (C_{z18,19} + I_{z18}\dot{\omega}_{z18} - \omega_{y18}I_{x18}\omega_{x18} - \omega_{x18}I_{z18}\omega_{y18} + U_{x18}\alpha_{y18} - U_{y18}\alpha_{x18} + l_3^4 F_{z18,19}) \end{bmatrix}$$

$$C_{18,17} = \begin{bmatrix} Cq_{18} & -Sq_{18} & 0 \\ Sq_{18} & Cq_{18} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{x18,18} \\ C_{y18,18} \\ C_{z18,18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq_{18}C_{x18,18} - Sq_{18}C_{y18,18} \\ C_{z18,18} \\ -Sq_{18}C_{x18,18} - Cq_{18}C_{y18,18} \end{bmatrix}$$

$$C_{17,17} = \begin{bmatrix} (C_{x18,17} + I_{x17}\dot{\omega}_{x17} - \omega_{z17}I_{y17}\omega_{y17} + \omega_{y17}I_{z17}\omega_{z17} + U_{y17}\alpha_{z17} - \alpha_{y17}U_{z17}) \\ (C_{y18,17} + I_{y17}\dot{\omega}_{y17} + \omega_{z17}I_{x17}\omega_{x17} - \omega_{x17}I_{z17}\omega_{z17} - U_{x17}\alpha_{z17} - \alpha_{x17}U_{z17} - l_2^4 F_{z18,17}) \\ (C_{z18,17} + I_{z17}\dot{\omega}_{z17} - \omega_{y17}I_{x17}\omega_{x17} - \omega_{x17}I_{z17}\omega_{y17} + U_{x17}\alpha_{y17} - U_{y17}\alpha_{x17} + l_2^4 F_{z18,17}) \end{bmatrix}$$

$$C_{17,16} = \begin{bmatrix} Cq_{17} & -Sq_{17} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -Sq_{17} & -Cq_{17} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{x17,17} \\ C_{y17,17} \\ C_{z17,17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq_{17}C_{x17,17} - Sq_{17}C_{y17,17} \\ -C_{z17,17} \\ Sq_{17}C_{x17,17} + Cq_{17}C_{y17,17} \end{bmatrix}$$

$$C_{16,16} = \begin{bmatrix} (C_{x17,16} + I_{x16}\dot{\omega}_{x16} - \omega_{z16}I_{y16}\omega_{y16} + \omega_{y16}I_{z16}\omega_{z16} + U_{y16}\alpha_{z16} - \alpha_{y16}U_{z16}) \\ (C_{y17,16} + I_{y16}\dot{\omega}_{y16} + \omega_{z16}I_{x16}\omega_{x16} - \omega_{x16}I_{z16}\omega_{z16} - U_{x16}\alpha_{z16} - \alpha_{x16}U_{z16} - l_1^4 F_{z17,16}) \\ (C_{z17,16} + I_{z16}\dot{\omega}_{z16} - \omega_{y16}I_{x16}\omega_{x16} - \omega_{x16}I_{z16}\omega_{y16} + U_{x16}\alpha_{y16} - U_{y16}\alpha_{x16} + l_1^4 F_{z17,16}) \end{bmatrix}$$

$$C_{16,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ Cq_{16} & -Sq_{16} & 0 \\ -Sq_{16} & -Cq_{16} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{x16,16} \\ C_{y16,16} \\ C_{z16,16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{z16,16} \\ Cq_{16}C_{x16,16} - Sq_{16}C_{y16,16} \\ -Sq_{16}C_{x16,16} - Cq_{16}C_{y16,16} \end{bmatrix}$$

Calcul des ${}^i\Gamma_j$: couples moteur

- **2^{ème} doigt**

$${}^2\Gamma_8 = C_{z8,8} + fp_8\dot{\theta}_8 + hp_8 \operatorname{sgn} \dot{\theta}_8 + I_{z8}\ddot{\theta}_8$$

$${}^2\Gamma_7 = C_{z7,7} + fp_7\dot{\theta}_7 + hp_7 \operatorname{sgn} \dot{\theta}_7 + I_{z7}\ddot{\theta}_7$$

$${}^2\Gamma_6 = C_{z6,6} + fp_6\dot{\theta}_6 + hp_6 \operatorname{sgn} \dot{\theta}_6 + I_{z6}\ddot{\theta}_6$$

- **3^{ème} doigt**

$${}^3\Gamma_4 = C_{z13,13} + fp_{13}\dot{\theta}_{13} + hp_{13} \operatorname{sgn} \dot{\theta}_{13} + I_{z13}\ddot{\theta}_{13}$$

$${}^3\Gamma_3 = C_{z12,12} + fp_{12}\dot{\theta}_{12} + hp_{12} \operatorname{sgn} \dot{\theta}_{12} + I_{z12}\ddot{\theta}_{12}$$

$${}^3\Gamma_2 = C_{z_{11},11} + fp_{11}\dot{\theta}_{11} + hp_{11} \operatorname{sgn} \dot{\theta}_{11} + I_{z_{11}}\ddot{\theta}_{11}$$

- ***Le pouce***

$${}^4\Gamma_4 = C_{z_{18},18} + fp_{18}\dot{\theta}_{18} + hp_{18} \operatorname{sgn} \dot{\theta}_{18} + I_{z_{18}}\ddot{\theta}_{18}$$

$${}^4\Gamma_3 = C_{z_{17},17} + fp_{17}\dot{\theta}_{17} + hp_{17} \operatorname{sgn} \dot{\theta}_{17} + I_{z_{17}}\ddot{\theta}_{17}$$

$${}^4\Gamma_2 = C_{z_{16},16} + fp_{16}\dot{\theta}_{16} + hp_{16} \operatorname{sgn} \dot{\theta}_{16} + I_{z_{16}}\ddot{\theta}_{16}$$

Résumé : On s'intéresse dans ce mémoire à la modélisation dynamique de la saisie d'objet par une main mécanique articulée non-anthropomorphe à quatre doigts, considérée comme une chaîne cinématique arborescente (complexe), nous donnons en premier lieu une étude bibliographique sur les variétés de prises et les architectures des mains mécaniques articulées existantes à travers les laboratoires du monde, cette étude est suivie par une présentation théorique sur la modélisation dynamique des mains articulées, ensuite nous développons le modèle dynamique de la main de LRP-Hand où le formalisme de Newton-Euler est utilisé à fin de déterminer les couples moteurs aux niveaux des articulations et les représentés graphiquement

Mots clés : Robotique, préhension, préhenseur, main robotique, modélisation dynamique.

Abstract: We interest in this memory to the dynamic modelling of grasping object by a dexterous robot hand with four fingers, considered as a complex kinematic chain. First we give a bibliographic study about the different types of grasping and the mechanical articulated hands existing through the laboratories of the world, this study is followed by a theoretical presentation of the dynamic modelling of the articulated hands, then we develop the dynamic model of LRP-Hand where the formalism of Newton-Euler is used to get the motors torques in each articulation and we represent them graphically.

Keywords: Robotic, grasping, gripper, Robot hand, dynamic modelling.

ملخص: نهتم في هذه المذكرة بالدراسة الديناميكية ليد ميكانيكية مفصلية ذات أربع أصابع شبيهة إلى حد ما باليد البشرية تقوم بنقل جسم صلب و التي نعتبرها سلسلة حركية شجرية و المسماة بالسلسلة الحركية المعقدة. نعطي في البداية نظرة عن أنواع المسكات الممكنة بواسطة اليد، الأنماط الهندسية للأنظمة الميكانيكية المفصلية الموجودة عبر المخابر العالمية، نتبعها بعرض نظرية النمذجة الديناميكية للأيدي المفصلية، بعدها تطور النموذج الديناميكي لليد المراد دراستها مستعملين في ذلك نموذج نيوتن أولار و ذلك لحساب عزوم الحركات على مستوى جميع الوصلات المفصلية الموجودة في اليد و تمثيلها بيانيا.

الكلمات المفتاحية: علم الآلية (الروبوت)، المسك، ماسك آلي، التمثيل الديناميكي، هندسية الأنظمة الميكانيكية المفصلية.