

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ HADJ LAKHDAR DE BATNA
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

MEMOIRE PRESENTE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE
MAGISTERE

EN

MÉCANIQUE
Option : CONTRUCTION MECANIQUE

PAR
ARAR KARIM

**DETERMINATION DES CONTRAINTES THERMIQUES DANS
UNE COUCHE ELASTIQUE SOLLICITEE PAR DEUX
POINCONS CYLINDRIQUES RIGIDES PORTES À UNE
TEMPERATURE STATIONNAIRE**

Soutenu le:

Devant le Jury :

Dr. ZIDANI Kamel	Prof.	Université de Batna	Président
Dr. BENBOUTA Rachid	Prof.	Université de Batna	Rapporteur
Dr. SEGHIR Kamel	M.C.A.	Université de Batna	Co-rapporteur
Dr. BRIOUA Mourad	Prof.	Université de Batna	Examineur
Dr. DJEBAILI Hamid	Prof.	Université de Khenchela	Examineur

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement les Drs. R.BENBOUTA et K.SEGHIR d'avoir accepté de diriger ce travail et de m'avoir prodigué de conseils et des orientations pour la réalisation de ce manuscrit.

Je remercie vivement Dr. K. ZIDANI d'avoir accepté d'examiner ce travail et de présider le jury de soutenance.

Mes remerciements vont également aux Dr. M. BRIOUA et H. DJEBAILI pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et d'avoir bien voulu m'honorer de leur présence parmi le jury de soutenance.

Mes remerciements vont aussi :

- A l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation ainsi que tout le personnel administratif qui, a participé au bon déroulement de ce travail.

- A tous ceux qui, par leur encouragement ou leur amitié, ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Résumé

Le problème de poinçonnement (contact) se pose en générale comme une variante des problèmes mixtes aux valeurs aux limites.

Le but du sujet est de déterminer les contraintes thermiques sur une couche élastique sollicitée par deux poinçonnes cylindriques rigides a extrémités plates chauffés.

Nous développent et proposons dans ce but une méthode semi analytique basée sur la transformation intégrale de Hankel prévue pour résoudre les équations différentielles gouvernant le problème. Un exemple pratique est étudié et les courbes de la répartition de température et des contraintes thermiques sont tracées.

Mots-clés : problème de contact, axisymétrique, conduction thermique, couche homogène isotrope, poinçon cylindrique.

Abstract

The problem of punching (contact) arises in general like an alternative of the mixed boundary value problem.

The purpose of subject is to determine thermal pressures on an elastic coat, solicited by two clips cylindrical rigid has flat end heated.

We development and offer a method in this purpose semi analytical based on the entriire transformation of Hankel envisaged to solve equation differentials governing problem. A practical example is studied and the curvzs of the sharing out of temperature and thermal pressures are drawn.

Key words: problem of contact, axisymétric, thermal conduction, homogeneous isotropic layer, punch.

SOMMAIRE

INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLEME

I- Introduction générale	1
II- Position du problème	3

CHAPITRE I : GENERALITE SUR LA CONDUCTION THERMIQUE

I-1 Généralité sur la conduction de la chaleur.....	4
I-1-1 Introduction	4
I-1-2 Définitions.....	4
a - Champs de température.....	4
b - Gradient de la température.....	4
c - Flux de chaleur à travers d'une surface.....	5
d - Densité de flux de chaleur.....	5
e - La loi de Fourier.....	5
I-2 Problème stationnaire de conduction (équation de Laplace).....	7
I-3 Solution finale de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques	9

CHAPITRE II : DETERMINATION DE LA REPARTITION DE TEMPERATURE DANS LA COUCHE ELASTIQUE

II-1 Détermination de la répartition de la température (méthode analytique).....	12
II-1-1 Etude du problème aux limites.....	12
II-1-2 Détermination de répartition de la température.....	17
II-2 Détermination de la répartition de la température (méthode des éléments finis).....	18

II-2-1 principe et description de la méthode.....	18
II-2-2 Généralisation des concepts d'éléments finis	18
II-2-2-1 Equation d'Euler dans le cas simple.....	19
II-2-2-2 Expression intégrales équivalentes aux équations différentielles	21
II-2-2-3 Principes variationnelles.....	24
II-2-3 Présentation matricielle	25

CHAPITRE III : DETERMINATION DES CONTRAINTES THERMIQUES DANS LA COUCHE ELASTIQUE

III : Détermination des contraintes thermiques.....	34
III-1 Expression générale des contraintes thermiques en cordonnées cylindriques.....	34
III-1-1 Solution générale de l'équation de Laplace gouvernant le problème.....	34
III-1-2 Expressions générales des contraintes et déplacements thermiques.....	35

CHAPITRE IV : CALCULS NUMERIQUES

IV : Calcul numérique	38
IV-1 Les étapes de résolution (partie analytique).....	38
IV-1-2 Calculs des intégrales.....	39
IV-1-3 Résultats graphiques et interprétations	42
IV-2 Résultats obtenus par la méthode des éléments finis.....	45
IV-3 Résultats des contraintes thermiques.....	47

Conclusion générale
Références bibliographiques
Annexes

Introduction et position du problème

I - Introduction Générale

Pendant ces dernières années, nous assistons à un développement imposant de la science de thermo élasticité. Le développement est du aux demandes qu'exigent la technique de la science. Il est stimulé par l'essor que prend l'aérotechnique, et par le développement réalisé dans le domaine de la construction des machines, de la technologie chimique et le nucléaire. C'est surtout la théorie classique des contraintes thermiques qui a été développée et plus particulièrement les problèmes des parcours thermiques stationnaires.

La théorie des contraintes thermiques basée sur les énoncés fondamentaux de la théorie classique d'élasticité et sur la présomption de l'indépendance du champ de température et de celui de déformation.

Un premier contact se produit généralement en un point et au fur et à mesure se forme d'une surface de contact (les vrais surface de contact sont rugueuses). Ce ci affect la conduction de la chaleur à travers l'interface de contact aussi bien que le procédé mécanique de contact.

La mécanique des contacts traite des calculs impliquant des corps élastiques, visco-élastiques ou plastique lors des contacts statiques ou dynamiques [1,2,3]. Elle peut être appliquée dans différents domaines tels que le contact roue-rail, les embrayages, les freins, les pneumatiques, les liaisons mécaniques, les joints.

Avec le développement continu des nouvelles technologies dans l'industrie du transport, les véhicules sont toujours plus puissants et rapides. De ce fait, les systèmes de freinages doivent suivre ce même rythme de progression pour diminuer les risque et augmenter la sécurité ce ci ramène à étudier et analyser les phénomènes ayant lieu de la surface du contact des disques des freins.

D'un point de vue thermique peut de recherches, on y été menées jusqu'aujourd'hui. On arrive pas à déterminer correctement la répartitions de la température au sein de contact.

Les contraintes thermiques du es au contact sont habituellement analysée avec les conditions de frontière thermique [4,5] de la conduction parfaite ou de l'isolation parfaite. Le poinçon est en contacts thermiques tandis que le reste de la frontière est isolé.

Le mémoire est organisé de la façon suivante :

- Dans le chapitre I, un bref état d'art sur la conduction thermique est exposé et présenté.
- Le chapitre II est consacré au développement des expressions pour la détermination de la répartition de température (cas matériaux homogènes isotropes). Deux méthodes de calculs sont présentées :

- 1- Méthode analytique.
- 2- Méthode des éléments finis.

- Le chapitre III a pour objectif de déterminer les contraintes thermiques dans une couche élastique.
- Le chapitre IV est réservé aux applications numériques et l'interprétation des résultats obtenus.

II - Position du problème

La couche d'épaisseur (L) à deux faces parallèles d'un matériau homogène isotrope est statiquement sollicitée par deux cylindres rigides à extrémités plates sur les deux faces (supérieur et inférieur).

Le problème ainsi posé est axisymétrique et peut être étudié dans le système à coordonnées cylindriques (r , θ , z) coïncidant avec la surface extérieure de la couche et l'axe de symétrie de la structure (Fig. 1).

Le poinçon cylindrique (1) est porté à une température T_0 .

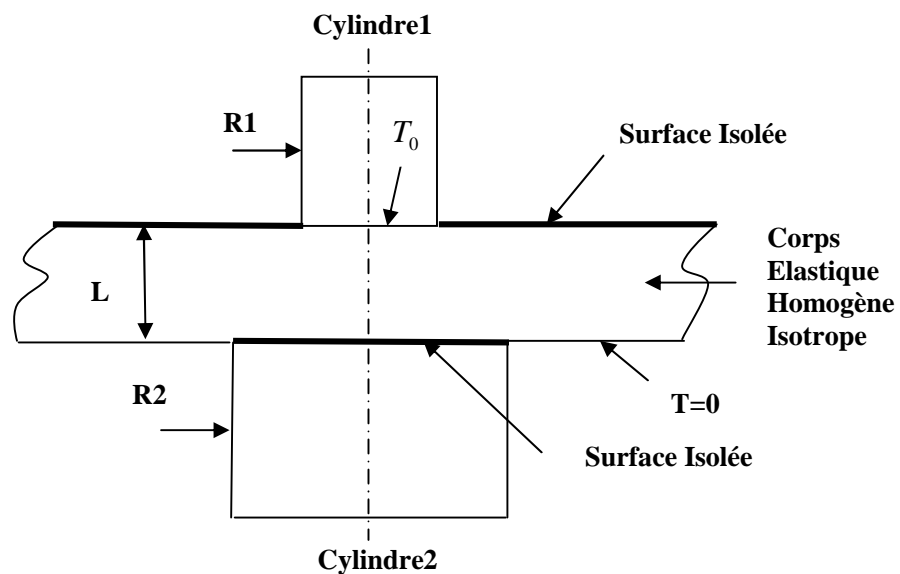


Fig.1 : Croquis schématique du problème

Les conditions aux limites relatives aux problèmes (fig. 1), sont

$$1/ \quad Z = 0 \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad T = T_0$$

$$2/ \quad Z = 0 \quad r > R_1 \quad \frac{\partial T}{\partial Z} = 0$$

$$3/ \quad Z = -L \quad 0 \leq r \leq R_2 \quad \frac{\partial T}{\partial Z} = 0$$

$$4/ \quad Z = -L \quad r > R_2 \quad T = 0$$

Chapitre I
Généralités sur
conduction de la
chaleur

I-1 Généralité sur la conduction de la chaleur

I -1-1 Introduction

La conduction est le mode de transfert de chaleur existant dans un milieu donné sans qu'il y ait déplacement apparent de matière. C'est ce qui se passe en particulier dans un milieu solide homogène (métal, paroi), mais qui a lieu aussi dans les fluides immobiles.

La conduction ne peut exister que s'il existe des écarts de températures c'est-à-dire si le gradient de température n'est pas nul. Dans le cas contraire le milieu est en équilibre thermique et aucun transfert de chaleur ne peut se produire. Pour que ce gradient de température existe, il faut une action externe au système pour pouvoir maintenir des conductions de températures données aux limites du système [6].

I -1-2 Définitions

a : Champs de température

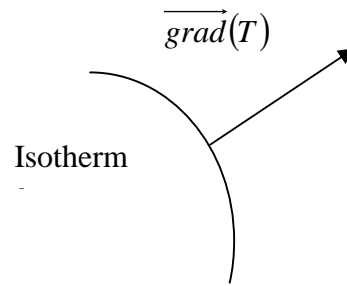
Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T = f(x, y, z, t)$. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

b : Gradient de la température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température.

$$\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n}$$



Avec : \vec{n} vecteur unitaire de la normale

$\frac{\partial T}{\partial n}$ dérivée de la température de long de la normale

On a donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}}T = \frac{\partial T}{\partial X} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial Y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial Z} \vec{k}$$

c : Flux de chaleur à travers d'une surface

C'est la quantité de chaleur qui traverse la surface considérée pendant l'unité du temps

On appelle flux thermique : la puissance échangé par la surface S

$$\{ = \frac{dQ}{dt} \quad (I-1)$$

d : Densité de flux de chaleur

C'est la quantité de chaleur qui traverse l'unité de surface pendant l'unité du temps.

C'est donc le flux de chaleur par unité de surface (ou densité de flux)

$$w = \frac{dW}{ds} \quad (I-2)$$

e : La loi de Fourier

La conduction est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres [7].

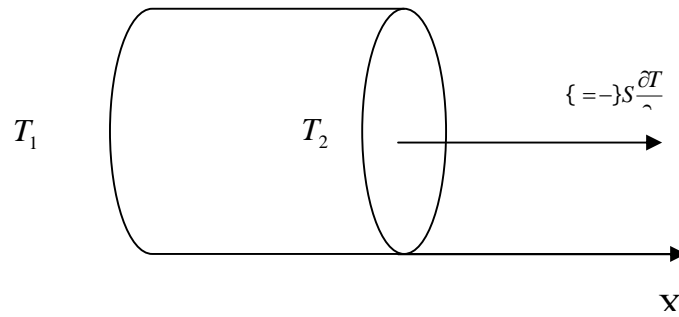


Fig. I-1 : Schéma du transfert de chaleur conductif

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température

$$\vec{q} = -\lambda S \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

Ou sous forme algébrique :
$$q = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \quad (I-3)$$

- { : Flux de chaleur transmis par conduction (W)
- } : Conductivité thermique du milieu (W m⁻¹ °C⁻¹)
- X : Variable d'espace dans la direction du flux (m)
- S : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m²)

On trouvera dans le tableau 1.1 les valeurs de la conductivité thermique } de certains matériaux parmi les plus courants :

Matériaux	} (W.m ⁻¹ .°C ⁻¹)
Argent	419
Cuivre	386
ALUMINIUM	204
Acier doux	45
Acier inox	15
Béton	1,4
Verre	1,05
Amiante	0,16
Eau	0,60
Plâtre	0,48
Polystyrène extrudé	0,027
Air	0,026

Tableau I-1 : Conductivité thermique de certains matériaux

I-2 Problème stationnaire de conduction (équation de Laplace)

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan [8,9]:

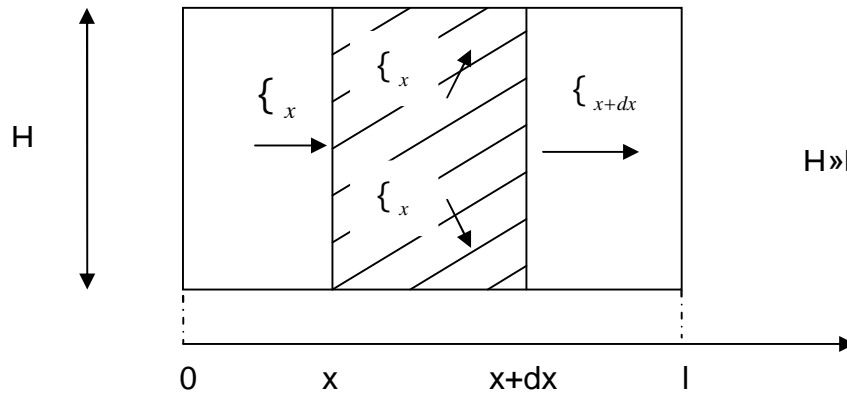


Fig. I-2 : Bilan thermique sur un système élémentaire

Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction Ox . Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\{x\} + \{g\} = \{x+dx\} + \{st\} \quad (I-4)$$

Avec

- $\{x\}$: flux de chaleur entrant (w)
- $\{g\}$: flux de chaleur généré (w)
- $\{st\}$: flux de chaleur stocké (w)
- $\{x+dx\}$: flux de chaleur sortant (w)

Avec :

$$\{x\} = - \left(\int S \frac{\partial T}{\partial X} \right)_x \quad \text{et} \quad \{x+dx\} = - \left(\int S \frac{\partial T}{\partial X} \right)_{x+dx}$$

$$\{g\} = qSdx$$

$$\{st\} = \dots cSdx \frac{\partial T}{\partial t}$$

Avec	λ : Conductivité thermique du milieu	$(W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1})$
	q : Densité volumique d'énergie générée	$(W.m^{-3})$
	ρ : Masse volumique	$(Kg.m^{-3})$
	c : Chaleur massique	$(J.Kg^{-1}.^{\circ}C^{-1})$

En reportant dans le bilan d'énergie (I-4) et en divisant par dx, nous obtenons :

$$\frac{\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} + qS = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t}$$

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right) + qS = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I-5)$$

Et dans le cas tridimensionnel [10,11], nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I-6)$$

Cette équation (I-5) peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

- a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$
- b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $q = 0$.
- c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T.

Les hypothèses a) + b) +c) permettent d'écrire :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I-7)$$

- d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I-8)$$

Le rapport : $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ est appelé la diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$) qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = 0 \quad (I-9)$$

Par ailleurs, les hypothèses a), c) et d) permettent d'écrire :

- Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{a} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I-10)$$

II-3 Solution générale de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la température ne dépend que de r et de z, l'équation (I-10) peut s'écrire sous forme simplifiée :

$$\nabla^2 T = 0$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (I-11)$$

Soit $\bar{T}(\langle, z)$ la transformée de Hankel d'ordre zéro de la fonction $T(r, z)$:

$$\bar{T}(\langle, z) = \int_0^{\infty} r T(r, z) J_0(\langle r) \partial \langle \quad (I-12)$$

J_0 : étant la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro.

La fonction $T(r, z)$ s'exprime par la transformation inverse de (I-12) de la façon suivante.

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \langle \bar{T}(\langle, z) J_0(\langle r) \partial \langle \quad (I-13)$$

Soit les dérivées partielles de la fonction $T = (r, z)$:

$$\frac{\partial T(r, z)}{\partial r} = - \int_0^{\infty} \langle^2 \bar{T}(\langle, z) J_1(\langle r) \partial \langle$$

Sachant que :

$$\frac{\partial J_0(\langle r)}{\partial r} = - \langle J_1(\langle r)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \int_0^{\infty} \langle \left[- \langle^2 J_0(\langle r) \frac{\langle}{r} J_1(\langle r) \partial \langle \right] \bar{T}(\langle, z) \partial \langle$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \int_0^{\infty} \langle \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2}(\langle, z) J_0(\langle r) \partial \langle$$

On obtient après avoir substituer les dérivées partielles de la fonction $T = (r, z)$ dans l'équation de Laplace ($\nabla^2 T = 0$), l'équation différentielle ordinaire du second ordre suivante :

Ce qui s'écrit :

$$\frac{d^2 T}{dz^2} - \langle^2 \bar{T} = 0 \quad (I-14)$$

La solution générale correspondante est :

$$\bar{T}(\langle, z) = [A(\langle) e^{\langle z} + B(\langle) e^{-\langle z}] J_0(\langle r) \partial \langle$$

Les fonctions $A(\langle)$ et $B(\langle)$ sont les fonctions d'intégrations à définir par les condition aux limites.

Enfin la solution générale $T = (r, z)$ s'écrit sous la forme :

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \langle [A(\langle) e^{\langle z} + B(\langle) e^{-\langle z}] J_0(\langle r) \partial \langle$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} \langle^2 [A(\langle) e^{\langle z} - B(\langle) e^{-\langle z}] J_0(\langle r) \partial \langle \quad (I-15)$$

Soit le changement de variables ci-dessous, l'expression de $T = (r, z)$ et sa première dérivée prennent les formes suivantes :

$$\langle R = y \quad , \quad \frac{r}{R} = \dots \quad \text{et} \quad \frac{z}{R} = ' \quad \rangle$$

On écrit alors :

$$T(\dots, ') = \int_0^{\infty} \frac{y}{R} \left[A \left(\frac{y}{R} \right) e^{\frac{y}{R} z} + B \left(\frac{y}{R} \right) e^{-\frac{y}{R} z} \right] J_0 \left(\frac{y}{R} r \right) \frac{\partial y}{R} \quad (I-16)$$

Avec :

$$\{_1(y) = \frac{y}{R^2} A \left(\frac{y}{R} \right) \quad \text{et} \quad \{_2(y) = \frac{y}{R^2} B \left(\frac{y}{R} \right)$$

On a :

$$T(\dots, ') = \int_0^{\infty} \left[\{_1(y) e^{y'} + \{_2(y) e^{-y'} \right] J_0(y \dots) \partial y \quad (I-17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} y \left[\{_1(y) e^{y'} - \{_2(y) e^{-y'} \right] J_0(y') \partial y$$

Chapitre II
Détermination de la
répartition de
température

II-1 Détermination de la répartition de la température (méthode analytique).

Nous nous proposons d'étudier et de déterminer l'état du champ thermique dans une couche élastique homogène isotrope d'épaisseur très importante comparativement à son épaisseur soumise à un champ thermique stationnaire imposé à la surface limite de la couche en l'absence de source de chaleur.

Nous déterminons dans un premier temps la distribution de température dans la couche comme étant l'étape fondamentale qui nous conduit par la suite au calcul des contraintes d'origine thermiques [12].

II-1-1 : Etude du problème aux limites

Le problème ainsi posé est axisymétrique, sera étudié en coordonnées cylindriques, le poinçon cylindrique est porté à une température fixe (constante) T_0 .

Les conditions aux limites relatives au problème (Fig.1), sont :

$$1/ \quad Z = 0 \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad T = T_0 \quad (II-1)$$

$$2/ \quad Z = 0 \quad r > R_1 \quad \frac{\partial T}{\partial Z} = 0 \quad (II-2)$$

$$3/ \quad Z = -L \quad 0 \leq r \leq R_2 \quad \frac{\partial T}{\partial Z} = 0 \quad (II-3)$$

$$4/ \quad Z = -L \quad r > R_2 \quad T = 0 \quad (II-4)$$

La solution générale du problème du genre relatif à la distribution de la température (cas de matériau isotrope) (I, 17) s'exprime par la formule suivante :

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \langle [A(\langle) e^{\langle z} + B(\langle) e^{-\langle z}] J_0(\langle r) \partial \langle \quad (II-5)$$

Par ce changement de variables ci-dessous l'expression de $T = (r, z)$ et sa première dérivée passent aux formes suivantes :

$$\langle R = y \quad , \quad \frac{r}{R} = \dots \quad , \quad \frac{z}{R} = ' \quad ,$$

$$\{_1(y) = \frac{y}{R^2} A\left(\frac{y}{R}\right), \quad \{_2(y) = \frac{y}{R^2} B\left(\frac{y}{R}\right)$$

$$T(\dots, ') = \int_0^{\infty} [\xi_1(y)e^{y'} + \xi_2(y)e^{-y'}] J_0(y\dots) \partial y \quad (II-6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} y [\xi_1(y)e^{y'} - \xi_2(y)e^{-y'}] J_0(y') \partial y \quad (II-7)$$

Satisfont les conditions aux limites, nous obtenons un système de quatre équations intégrales.

$$1/ \int_0^{\infty} [\xi_1(y) + \xi_2(y)] J_0(y\dots) dy = 0 \quad \dots < 1 \quad (II-8)$$

$$2/ \int_0^{\infty} y [\xi_1(y) - \xi_2(y)] J_0(y\dots) dy = 0 \quad \dots > 1 \quad (II-9)$$

$$3/ \int_0^{\infty} y [\xi_1(y)e^{-yl} - \xi_2(y)e^{yl}] J_0(y\dots) dy = 0 \quad \dots < C \quad (II-10)$$

$$4/ \int_0^{\infty} [\xi_1(y)e^{-yl} + \xi_2(y)e^{yl}] J_0(y\dots) dy = 0 \quad \dots > C \quad (II-11)$$

Avec :

$$l = \frac{L}{R}, \quad C = \frac{R_2}{R_1}$$

Reconsidérons les conditions (2) et (4) sous nouvelle forme :

$$2/ \int_0^{\infty} y [\xi_1(y) - \xi_2(y)] J_0(y\dots) dy = U(1 - \dots) X(\dots) \quad (II-12)$$

$$4/ \int_0^{\infty} [\xi_1(y)e^{-yl} + \xi_2(y)e^{yl}] J_0(y\dots) dy = U(C - \dots) Y(\dots) \quad (II-13)$$

$U(x)$ est la fonction de KHIVISIDE définie par :

$$U(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (II-14)$$

$U(x)$ est la fonction de KHIVISIDE définie par :

$X(\dots)$ et $Y(\dots)$ sont des fonction développables en fonction de Bessel de cette façon :

$$X(\dots) = a_0 + \sum_{k=1}^{N_1} a_k J_0(\}k \dots) / \quad X(\dots = 1) = a_0 = 0 \quad (\text{II-15})$$

$$Y(\dots) = b_0 + \sum_{k=1}^{N_2} b_k J_0\left(\frac{\}k}{C} \dots\right) / \quad Y(\dots = C) = b_0 = 0 \quad (\text{II-16})$$

$\}k$: sont les racines de la fonction de BESSEL d'ordre zéro (Annexe 2)

a_k et b_k les coefficients de développement ($k=1, 2, \dots, N_1$)

La transformation de HANKEL des équations (II-12) et (II-13) nouvellement écrites, nous permet d'obtenir un systèmes d'équations aux inconnus $\{1$ et $\{2$

$$\begin{aligned} \{1(y) - \{2(y) &= \int_0^\infty \dots X(\dots) U(1 - \dots) J_0(y \dots) d\dots \\ \frac{1}{y} [\{1(y) e^{-yL} + \{2(y) e^{yL}] &= \int_0^\infty \dots Y(\dots) U(C - \dots) J_0(y \hat{\dots}) d\dots \end{aligned} \quad (\text{II-17})$$

Comme : $U(1 - \dots) = 1$ et $U(C - \dots) = 1$

Le présent système s'écrit :

$$\begin{aligned} \{1(y) - \{2(y) &= \int_0^1 \dots X(\dots) J_0(y \dots) d\dots \\ \frac{1}{y} [\{1(y) e^{-yL} + \{2(y) e^{yL}] &= \int_0^C \dots Y(\dots) J_0(y \hat{\dots}) d\dots \end{aligned} \quad (\text{II-18})$$

Substituons les fonction $X(\dots)$ et $Y(\dots)$ par leur développement :

$$\begin{aligned} \{1(y) - \{2(y) &= \sum_{k=1}^{N_1} a_k \int_0^1 \dots J_0(\}k \dots) J_0(y \dots) d\dots \\ \frac{1}{y} [\{1(y) e^{-yL} + \{2(y) e^{yL}] &= \sum_{k=1}^{N_2} b_k \int_0^C \dots J_0\left(\frac{\}k}{C} \dots\right) J_0(y \hat{\dots}) d\dots \end{aligned} \quad (\text{II-19})$$

D'après l'orthogonalité des fonctions de Bessel (Annexe), on a :

$$\int_0^1 \dots J_0(\}k \dots) J_0(y \dots) d\dots = \frac{\}k J_0'(\}k) J_0(y) - y J_0(\}k) J_0'(y)}{y^2 - \}k^2} = \frac{-\}k J_1(\}k) J_0(y)}{y^2 - \}k^2}$$

$$\int_0^1 J_0\left(\frac{\beta_k}{c}\right) J_0(y \dots) dy \dots = -\frac{\beta_k J_1(\beta_k) J_0(cy)}{y^2 - \left(\frac{\beta_k}{c}\right)^2} \quad (\text{II-20})$$

D'où

$$\begin{aligned} \xi_1(y) - \xi_2(y) &= \sum_{k=1}^{N_1} a_k - \frac{\beta_k J_1(\beta_k) J_0(y)}{y^2 - \beta_k^2} \\ \frac{1}{y} [\xi_1(y) e^{-yL} + \xi_2(y) e^{yL}] &= \sum_{k=1}^{N_2} b_k - \frac{\beta_k J_1(\beta_k) J_0(cy)}{y^2 - \left(\frac{\beta_k}{c}\right)^2} \end{aligned} \quad (\text{II-21})$$

Avec :

$$\begin{aligned} a_k^* &= a_k \beta_k J_1(\beta_k) = a_k \beta_k J_{-1}(\beta_k) \\ b_k^* &= b_k \beta_k J_1(\beta_k) = b_k \beta_k J_{-1}(\beta_k) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \xi_1(y) - \xi_2(y) &= \sum_{k=1}^{N_1} \frac{a_k^* J_0(y)}{y^2 - \beta_k^2} \\ \frac{1}{y} [\xi_1(y) e^{-yL} + \xi_2(y) e^{yL}] &= \sum_{k=1}^{N_2} \frac{b_k^* J_0(cy)}{y^2 - \left(\frac{\beta_k}{c}\right)^2} \end{aligned} \quad (\text{II-22})$$

On pose :

$$w_1(y) = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{a_k^* J_0(y)}{y^2 - \beta_k^2} \quad \text{et} \quad w_2(y) = \sum_{k=1}^{N_2} \frac{b_k^* J_0(cy)}{y^2 - \left(\frac{\beta_k}{c}\right)^2}$$

Substituons maintenant $w_1(y)$ et $w_2(y)$ dans l'équation (II-22) le système s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \xi_1(y) - \xi_2(y) &= w_1(y) \\ [\xi_1(y) e^{-yL} + \xi_2(y) e^{yL}] &= y w_2(y) \end{aligned} \quad (\text{II-23})$$

D'où

$$\begin{aligned} \xi_1(y) &= \frac{1}{2 \cosh yL} [e^{yL} w_1(y) + y w_2(y)] \\ \xi_2(y) &= \frac{1}{2 \cosh yL} [y w_2(y) + w_1(y) e^{-yL}] \end{aligned}$$

Les expressions des conditions aux limites s'écrivent après substitution de $\{_1$ et $\{_2$ sous la nouvelle forme :

$$1/ \int_0^{\infty} \left[\frac{y}{chyl} w_2(y) + thyl w_1(y) \right] J_0(y \dots) dy = T_0 \quad \dots < 1 \quad (II-24)$$

$$2/ \int_0^{\infty} y w_1(y) J_0(y \dots) dy = 0 \quad \dots > 1 \quad (II-25)$$

$$3/ \int_0^{\infty} y \left[\frac{1}{chyl} w_1(y) - thyl w_2(y) \right] J_0(y \dots) dy = 0 \quad \dots < C \quad (II-26)$$

$$4/ \int_0^{\infty} y w_1(y) J_0(y \dots) dy = 0 \quad \dots > C \quad (II-27)$$

Reprenons les équations (II-25) et (II-27) développées en série de fonction de Bessel :

$$\int_0^{\infty} y w_1(y) J_0(y \dots) dy = X^1(\dots) U(1 - \dots) \quad 0 \leq \dots < \infty \quad (II-28)$$

$$\int_0^{\infty} y w_1(y) J_0(y \dots) dy = Y^1(\dots) U(C - \dots) \quad 0 \leq \dots < \infty \quad (II-29)$$

Transformée maintenant le système d'équations (II-28) et (II-29) :

$$w_1(y) = \int_0^{\infty} \dots X^1(\dots) U(1 - \dots) J_0(y \dots) dy = \int_0^1 \dots X^1(\dots) J_0(y \dots) dy = \sum_{k=1}^{N_1} a_k^1 \int_0^{\infty} \dots J_0(\{_k) J_0(y \dots) dy$$

$$w_1(y) = \sum_{K=1}^{N_1} \frac{a_K^{*1} J_0(y)}{y^2 - \{_K^2}$$

Avec $a_K^{*1} = a_K^1 \{_K J_{-1}(\{_K)$

$$w_2(y) = \int_0^{\infty} \dots Y^1(\dots) U(C - \dots) J_0(y \dots) dy = \int_0^C \dots Y^1(\dots) J_0(y \dots) dy = \sum_{k=1}^{N_2} b_k^1 \int_0^c \dots J_0\left(\frac{\{_K}{C} \dots\right) J_0(y \dots) dy$$

$$w_2(y) = \sum_{K=1}^{N_2} \frac{b_K^{*1} J_0(Cy)}{y^2 - \left(\frac{\{_K}{C}\right)^2}$$

Avec $b_K^{*1} = a_K^1 \{_K J_{-1}(\{_K)$

Substitution à présent $w_1(y)$ et $w_2(y)$ dans les conditions (II-24) et (II-26), on a :

$$\sum_{K=1}^{N_1} a_K^{*1} \int_0^{\infty} thyl \frac{J_0(y)J_0(y...)}{y^2 - \beta_K^2} dy + \sum_{K=1}^{N_{21}} b_K^{*1} \int_0^{\infty} \frac{y}{chyl} \frac{J_0(Cy)J_0(y...)}{y^2 - \left(\frac{\beta_K}{C}\right)^2} dy = T_0 \quad \dots < 1 \quad (II-30)$$

$$\sum_{K=1}^{N_1} a_K^{*1} \int_0^{\infty} \frac{y}{chyl} \frac{J_0(y)J_0(y...)}{y^2 - \beta_K^2} dy + \sum_{K=1}^{N_{21}} b_K^{*1} \int_0^{\infty} y^2 thyl \frac{J_0(Cy)J_0(y...)}{y^2 - \left(\frac{\beta_K}{C}\right)^2} dy = 0 \quad \dots < C \quad (II-31)$$

III-1-2 Détermination de répartition de la température

Revenant à présent à la formule générale (II-6) calculant la température $T(\dots, z)$ dans laquelle nous remplaçant $\{_1(y)$ et $\{_2(y)$, par leurs nouvelles expressions.

$$\{_1(y) = \frac{1}{2chyl} [e^{y'l} w_1(y) + y w_2(y)]$$

$$\{_2(y) = \frac{1}{2chyl} [y w_2(y) + w_1(y) e^{-y'l}]$$

L'équation (II.6) peut s'écrire de la manière suivante :

$$T(\dots, ') = \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{y'l}}{2chyl} (e^{y'l} w_1(y) + y w_2(y)) + \frac{e^{-y'l}}{2chyl} (y w_2(y) - w_1(y) e^{-y'l}) \right] J_0(y...) dy$$

$$T(\dots, ') = \int_0^{\infty} \frac{shy(l+')}{chyl} w_1 J_0(y...) dy + \int_0^{\infty} \frac{ychy'}{chyl} w_2(y) J_0(y...) dy \quad (II-32)$$

Substitution à présent $w_1(y)$ et $w_2(y)$ dans l'équation (II.32), on a :

$$w_1(y) = \sum_{K=1}^{N_1} \frac{a_K^{*1} J_0(y)}{y^2 - \beta_K^2} \quad \text{et} \quad w_2(y) = \sum_{K=1}^{N_2} \frac{b_K^{*1} J_0(Cy)}{y^2 - \left(\frac{\beta_K}{C}\right)^2}$$

D'où la formule finale calculant la répartition de la température :

$$T(\dots, ') = \sum_{k=1}^{N_1} a_k^{*1} \int_0^{\infty} \frac{V(y, ')}{y^2 - \beta_k^2} J_0(y) J_0(y...) dy + \sum_{k=1}^{N_2} b_k^{*1} \int_0^{\infty} \frac{W(y, ')}{y^2 - \left(\frac{\beta_k}{C}\right)^2} J_0(Cy) J_0(y...) dy \quad (II - 33)$$

Avec : $V(y, ') = \frac{shy(l+')}{chyl}$ et $W(y, ') = \frac{ych(y')}{chyl}$

II-2 Détermination de la répartition de la température (méthode des éléments finis).

II-2-1 principe et description de la méthode

Cette méthode consiste à utiliser une approximation par éléments finis des fonctions inconnus (U) pour discrétiser une forme intégrale, puis à résoudre le système d'équations algébriques[13].

Elle repose sur deux hypothèses :

- les frontières des éléments doivent coïncider avec les discontinuités de la structure :
- la représentation de la fonction inconnue (pour notre cas c'est la température) en un point a d'un élément E^n par une fonction matricielle d'interpolation $T(M)$ prenant les valeurs (T_r, T_s, T_x) lorsque le point 'a' coïncide aux nœuds (A_r, A_s, A_x) de l'élément.

Il est à noter que la M.E.F. nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur

II-2-2 Généralisation des concepts d'éléments finis

Pour se fixer l'idée sur la position du problème, examinons tout d'abord l'objet de calcul des variations par quelques exemples.

Soient $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)$ les coordonnées des extrémités de la trajectoire L susceptible de changer, et $v(x, y, z)$ la vitesse d'un point décrivant la courbe L .

Calculons le temps mis par le point pour décrire la courbe L à la vitesse indiquée.

$$T = \int_{(L)} dt = \int_{(L)} \frac{ds}{v(x, y, z)} \quad (\text{II-34})$$

La quantité T variera en fonction de L . alors on dit que T est une fonctionnelle de la ligne L , la fonctionnelle T prendra des valeurs qui dépendront du choix de L , le problème consiste les extrémités étant fixe à déterminer L de manière à minimiser la fonctionnelle T .

Si x est pris comme paramètre, la ligne L peut être définie paramétriquement par les équations $y(x)$ et $z(x)$, l'intégrale s'écrit alors :

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v(x, y, z)} dx \quad (\text{II-35})$$

Le problème est de chercher $y(x)$ et $z(x)$ qui minimise l'intégrale 2), ces fonctions doivent en outre satisfaire les conditions aux limites :

$$y(x_0) = y_0 ; \quad Z(x_0) = Z_0$$

$$y(x_1) = y_1 ; \quad Z(x_1) = Z_1$$

Le problème fondamental du calcul des variations consiste précisément à chercher les valeurs minimales et maximales des fonctionnelles de lignes. Ainsi s'agissant de l'intégrale précédente on cherchera une ligne telle que le temps mis pour la parcourir soit inférieur à celui mis pour parcourir toutes les lignes suffisamment proches.

Ce problème est analogue à la détermination du maximum et du minimum d'une fonction en calcul différentiel.

Nous savons que pour déterminer les valeurs de (x) réalisant l'extremum d'une fonction $F(x)$, il faut résoudre l'équation $F'(x) = 0$.

En calcul des variations la ligne $y = y(x)$ donnant l'extremum d'une fonctionnelle doit vérifier une certaine équation différentielle.

II-2-2-1 Equation d'Euler dans le cas simple

Soit la fonctionnelle

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (\text{II-36})$$

Où F est une fonction donnée de x, y et y' . On supposera qu'elle est continue avec ses dérivées secondes dans un domaine du plan (x, y) quelles que soient les valeurs de y' , on suppose connus les valeurs prises par la fonction $y(x)$ aux extrémités de l'intervalle d'intégration :

$$y(x_0) = y_0 \quad ; \quad y(x_1) = y_1$$

On montre que la fonction $y(x)$ qui donne un extremum de l'intégrale (II-36) doit vérifier l'équation :

$$Fy' y' .Y'' + Fy' y' .Y' +_{xy} -F_y = 0$$

Dite équation d'Euler. C'est une équation différentielle du second ordre et son intégrale générale contient deux constantes arbitraires qui sont déduites des conditions aux limites.

Commençons par poser le problème à résoudre de la manière la plus générale :

Il s'agit de trouver une fonction inconnue 'U' satisfaisant à un certain ensemble d'équation différentielle

$$A(u) = \begin{Bmatrix} A_1(u) \\ A_2(u) \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{II-37})$$

A l'intérieur d'un domaine (volumique, surfacique) Ω et à un certain nombre de conditions aux frontières associées

$$B(u) = \begin{Bmatrix} B_1(u) \\ B_2(u) \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{II-38})$$

Le long des frontières Γ du domaine.

La fonction cherchée peut être une quantité scalaire ou représenter un vecteur de plusieurs variables ; de la même manière, on peut avoir une équation différentielle unique, ou bien un ensemble d'équations simultanées.

C'est pour cette raison qu'on fait appel à la notation matricielle, l'approche par éléments finis qui est précédé d'approximation consiste à chercher la solution sous la forme approchée.

$$U \cong 0 = \sum_1^r N_i a_i = Na \quad (\text{II-39})$$

Les N_i sont les fonction de formes qui sont défini à l'aide des variables indépendantes (telles que les coordonnées x, y, etc.....) et tous les paramètres a_i , ou seulement quelques-uns sont inconnus.

C'est en tenant compte de ces remarques que nous allons d'abord d'écrire les équations qui définissent les paramètres inconnus (a_i) sous la forme intégrale

$$\int_{\Omega} G_j(u) d\Omega + \int_{\Gamma} g_j(u) d\Gamma = 0 \quad (j = 1 - m) \quad (II-40)$$

Dans laquelle G_i et g_i désignent des fonctions ou opérateurs connus :

Des formes intégrales de ce genre permettront d'obtenir l'approximation élément par élément, et d'effectuer ainsi l'assemblage en faisant appel aux méthodes mises au point pour les systèmes standards discrets.

Si on suppose en effet les fonctions G_i et g_i intégrables, on a :

$$\int_{\Omega} G_j d\Omega + \int_{\Gamma} g_j d\Gamma = \sum_{e=1}^m \left[\int_{\Omega_e} G_j d\Omega + \int_{\Gamma_e} g_j d\Gamma \right] \quad (II-41)$$

Ω_e désigne le domaine recouvert par un élément, et Γ_e la partie de frontière qui le délimite.

Deux procédures bien distinctes permettent de conduire à de telles formes intégrales de l'approximation : la première est la méthode des résidus pondérés et la seconde consiste en la détermination de fonctionnelle variationnelle dont on cherche à exprimer la stationnarité.

II-2-2-2 Expression intégrales équivalentes aux équations différentielles

Puisque les expressions différentielles constituant le premier membre de la relation (II-34) doivent s'annuler en tout point du domaine (D), il résulte que l'on peut écrire :

$$\int_{\Omega} V^T A(u) d\Omega = \int_{\Omega} (v_1 A_1(u) + v_2 A_2(u) + \dots) d\Omega = 0 \quad (II-42)$$

Egalité dans laquelle le vecteur $v = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix}$

Représente un ensemble arbitraire dont le nombre est égale à celui des équations considérées (ou, ce qui revient au même, au nombre de composants (v_i) si l'on veut de plus que les conditions aux frontières (II- 38) soient simultanément satisfaites, on peut alors soit choisir une fonction (u) qui satisfait à ces conditions, soit imposer la condition :

$$\int_{\Gamma} V^T B(u) d\Gamma = \int_{\Gamma} (v_1 B_1(u) + v_2 B_2(u) + \dots) d\Gamma = 0 \quad (II-43)$$

Quelque soit l'ensemble des fonctions V .

En fait, la condition présentée sous forme intégrale,

$$\int_{\Omega} V^T A(u) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{V}^T B(u) d\Gamma = 0 \quad (II-44)$$

Qui doit être satisfaite quelque soit V et \bar{V} , est équivalente à la satisfaction des équations différentielles (II-34) et leurs conditions aux frontières associées (II-35).

Des restrictions sont imposées aux fonctions (U_1, U_2, \dots, etc) qui dépendent évidemment de l'ordre des dérivées intervenant dans les expressions $A(u)$, ou $B(u)$.

EX :

Equation de conduction en régime stationnaire pour un domaine bidimensionnel :

$$A(w) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial w}{\partial y} \right) + Q = w$$

$$B(w) = w - \bar{w} = w \quad \text{le long de } \Gamma_{\phi}$$

$$= K \frac{\partial w}{\partial x} - \bar{q} = w \quad \text{le long de } \Gamma_q \quad (II-45)$$

$w = u$ représente la température, K est la conductivité, \bar{w} et \bar{q} sont des valeurs imposées de la température et du flux de chaleur à travers les frontières, respectivement (n désigne la direction normale à Γ).

Considérons maintenant la forme intégrale de l'équation (II-45) ; nous pouvons écrire la condition (III-44) sous la forme

$$\int_{\Omega} v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial w}{\partial y} \right) + Q \right] dx dy + \int_{\Gamma} \bar{v} \left[k \frac{\partial w}{\partial n} - \bar{q} \right] d\Gamma = 0 \quad (II-46)$$

En remarquant de v et \bar{v} sont des fonctions scalaires et en supposant que l'une des conditions aux limites, c'est à dire : $w - \bar{w}$ est automatiquement satisfaite par les fonctions w choisies. On peut maintenant intégrer par parties les intégrales intervenantes au premier membre de (III-46).

Nous utilisons ici les formules générales applicables à de telles intégrations (les formules dites de Green,)

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial W}{\partial x} \right) dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \left(k \frac{\partial W}{\partial x} \right) dx dy + \oint_{\Gamma} v \left(k \frac{\partial W}{\partial x} \right) n_x d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial W}{\partial y} \right) dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} \left(k \frac{\partial W}{\partial y} \right) dx dy + \oint_{\Gamma} v \left(k \frac{\partial W}{\partial y} \right) n_y d\Gamma \quad (II-47)$$

On a donc :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} k \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} k \frac{\partial W}{\partial y} - Q \right) dx dy + \oint_{\Gamma} v k \left(\frac{\partial W}{\partial x} n_x + \frac{\partial W}{\partial y} n_y \right) d\Gamma + \oint_{\Gamma_q} \bar{v} \left(k \frac{\partial W}{\partial n} - \bar{q} \right) d\Gamma = 0$$

Si l'on remarque que la dérivée normale est donnée par :

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial x} n_x + \frac{\partial W}{\partial y} n_y$$

Est si l'on pose en plus,

Sans que l'on perd rien en généralité (puisque les deux fonctions sont arbitraires), on peut réécrire l'égalité (II-47) sous la forme :

$$\int_{\Omega} \nabla^T . v . \nabla W . dW - \int_{\Omega} v . Q . d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{v} . \bar{q} . d\Gamma - \int_{\Gamma_q} v k \frac{\partial W}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (II-48)$$

L'opérateur est simplement :

$$v = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\}$$

Telle est la forme faible de la condition de conduction de chaleur équivalente à l'expression (III-41)

II-2-2-3 Principes variationnels

Un principe variationnel définit une quantité scalaire (qu'on appelle une fonctionnelle), qui s'écrit sous la forme d'une intégrale :

$$\Pi = \int_{\Omega} F\left(U + \frac{\partial U}{\partial x}, \dots\right) d\Omega + \int_{\Gamma} E\left(U + \frac{\partial U}{\partial x}, \dots\right) d\Gamma \quad (II-49)$$

U ici est la fonction inconnue, F et E des opérateurs donnés, la solution du problème continu est une fonction U qui rend Π stationnaire, ce qui signifie que sa 'variation' correspondante à des petits changements u de la fonction inconnue doit être nulle :

$$u\Pi = 0$$

Si on est en mesure de trouver un 'principe variationnel' pour le problème continu étudié, on a alors immédiatement un moyen d'obtenir des solutions approchées par la méthode des éléments finis, dont on a vu précédemment à la forme intégrale classique.

On cherche la fonction U sous la forme habituelle d'un développement

$$U = \sum_{i=1}^m N_i a_i$$

Cette expression est représentée dans l'expression (II-49), ce qui permet d'écrire la variation sous la forme :

$$u\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} u a_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} u a_2 + \dots = \frac{\partial \Pi}{\partial a} u a$$

Cette égalité devant être vérifiée quelque soient les variations $u a$ comme à écrire l'ensemble d'équations suivantes :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} \end{Bmatrix}$$

Qui permet de calculer les paramètres a_i . Les équations sont sous une forme intégrale qui permet la résolution approchée par la méthode des éléments finis, puisque Π à été au départ donnée sous forme de la somme d'une intégrale prise sur le domaine et d'une intégrale de frontière.

Le processus qui permet d'obtenir aux conditions de stationnarité par rapport aux paramètres 'a' des fonctions constantes est connu de longue date associé aux noms de « RAYLEIGH et RITZ »

Cette méthode occupe aujourd'hui une importante considérable en théorie des éléments finis et se ramène à un 'processus variationnel « typique »

III-2-3 Présentation matricielle

Equation différentielle de conduction en régime stationnaire

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{xx} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{yy} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{zz} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + Q = 0 \tag{II-50}$$

Avec les conditions aux limites :

1/ $U = U_B$ sur la surface S_1

$$2/ \left(\lambda_{xx} \frac{\partial U}{\partial x} i_x \right) + \left(\lambda_{yy} \frac{\partial U}{\partial y} i_y \right) + \left(\lambda_{zz} \frac{\partial U}{\partial z} i_z \right) + \bar{q} + h(U - U_\infty) = 0 \tag{II-51}$$

sur la surface S_2

$\lambda_{xx}, \lambda_{yy}, \lambda_{zz}$: coefficients de conduction

Q : source de chaleur

\bar{q} : flux à travers la surface S_2

h : coefficient de convection

$i_{x,y,z}$: cosinus directeurs de la normale à la surface 'S'

U_∞ : température de l'environnement.

Considérons le cas d'une fonctionnelle d'un seul argument 'U' de plusieurs variables.

$$I(U) = \int_v f(x, y, z, U_x, U_y, U_z) dv + \int_s \left(\bar{q} \frac{h}{2} U^2 \right) ds \tag{II-52}$$

La fonction cherchée 'U' qui assure la stationnarité de la fonctionnelle doit annuler sa première variation δI :

$$\delta I = \int_v \left(\frac{\partial F}{\partial U} \delta U + \frac{\partial F}{\partial U_x} \delta U_x + \frac{\partial F}{\partial U_y} \delta U_y + \frac{\partial F}{\partial U_z} \delta U_z \right) dv + \int_{s_2} (\bar{q} \delta U + h \delta U \cdot U) ds \tag{II-53}$$

$$\text{Avec : } U_x = \frac{\partial U}{\partial x} \longrightarrow uU_x = u \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (uU)$$

L'expression (II-53) s'écrit alors sous la forme :

$$\int_v \left(\frac{\partial F}{\partial U} uU + \frac{\partial F}{\partial U_x} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial U_y} uU_y + \frac{\partial F}{\partial U_z} \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) dv + \int_{s_2} (\bar{q}uU + h.U.uU) ds \quad (\text{II-54})$$

On intègre par la application de la formule de Gauss-Ostrogradski :

$$\int_v \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_s (P \cos \Gamma + Q \cos S + R \cos X) ds$$

$$\text{D'autre part : } (UV)' = U'V + V'U$$

Il vient

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} uU \right) = \frac{\partial F}{\partial U_x} \frac{\partial}{\partial x} (uU) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \right) uU$$

D'où :

$$\int_v \frac{\partial F}{\partial U_x} \frac{\partial}{\partial x} (uU) dv = \int_v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} uU \right) dv - \int_v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \right) uU dv$$

$$\int_v \frac{\partial F}{\partial U_x} \frac{\partial}{\partial x} (uU) dv = \int_s i_x \cdot \frac{\partial F}{\partial U_x} uU ds - \int_v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \right) uU dv$$

De même pour le reste des termes :

$$\int_v \frac{\partial F}{\partial U_y} \frac{\partial}{\partial y} (uU) dv = \int_s i_y \cdot \frac{\partial F}{\partial U_y} uU ds - \int_v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial U_y} \right) uU dv$$

$$\int_v \frac{\partial F}{\partial U_z} \frac{\partial}{\partial z} (uU) dv = \int_s i_z \cdot \frac{\partial F}{\partial U_z} uU ds - \int_v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial U_z} \right) uU dv$$

Finalement :

$$uI = \int_v uU \left(\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial U_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial U_z} \right) \right) dv + \int_{s_2} uU \left(\bar{q} + hU + i_x \frac{\partial F}{\partial U_x} + i_y \frac{\partial F}{\partial U_y} + i_z \frac{\partial F}{\partial U_z} \right) ds$$

$i_x = \cos \Gamma$, $i_y = \cos S$, $i_z = \cos X$: cosinus directeurs de la normale à la surface S_2 avec les axes x, y, z .

Pour que la fonctionnelle soit stationnaire il faut que $uI = 0$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial U_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial U_z} \right) = 0 \\ i_x \frac{\partial F}{\partial U_x} + i_y \frac{\partial F}{\partial U_y} + i_z \frac{\partial F}{\partial U_z} + \bar{q} + hU = 0 \end{array} \right.$$

Telle sont les conditions de stabilité de la fonctionnelle, dites « Equations d'Euler »

Dans le cas général et d'après Euler, la résolution du problème est équivalente à la minimisation de la fonctionnelle :

$$I(U) = \int_v \frac{1}{2} \left[\}_{_{xx} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \}_{_{yy} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \}_{_{zz} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - 2QU} \right] dv + \int_{s_2} \left[\bar{q}U + \frac{h}{2}(U - U_\infty) \right] ds$$

Cas particuliers :

Si le corps est interne sans source de chaleur interne, l'équation de conduction devient celle de la place :

En coordonnées cylindriques :

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Et la fonctionnelle correspondante s'écrit sous la forme :

$$I(U) = \int_v \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{1}{2} r dv$$

Ou $\}_{_{xx} = \}_{_{yy}}$: coefficients de conduction suivant r et z la minimisation de fonctionnelle revient à vérifier l'équation d'Euler suivante :

$$F_u - \frac{\partial}{\partial r}(F_{ur}) - \frac{\partial}{\partial z}(F_{uz}) = 0$$

$$F_u = \frac{\partial F}{\partial U} = 0$$

$$F_{ur} = \frac{\partial F}{\partial U_r} = \} r \frac{\partial U}{\partial r} \quad \frac{d}{dr} F_{ur} = \} \frac{\partial U}{\partial r} + \} r \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$$

$$F_{uz} = \frac{\partial F}{\partial U_z} = \} r \frac{\partial U}{\partial z} \quad \frac{d}{dz} F_{uz} = \} \frac{\partial U}{\partial z} + \} r \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Après substitution des ces expressions dans les équations d'Euler, on obtient :

$$\} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0$$

Ainsi l'équation d'Euler est vérifiée et la fonctionnelle est stationnaire.

En partageant le domaine 'V' en éléments (domaines) 'V_l', la fonctionnelle peut être exprimé comme étant la somme des fonctionnelle élémentaire I_l(u) de chaque élément constituant le domaine 'V'.

$$I(u) = \sum_{L=1}^N I_L(u)$$

Sous forme intégrale, on écrit :

$$I(u) = \int_v \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] \} \frac{1}{2} r dv = \sum_{L=1}^N \left\{ \} \frac{1}{2} \int_{v_L} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] r dv \right\} \quad (II-55)$$

Ecrivant à présent la fonctionnelle sous forme la forme matricielle, introduisons alors les matrices suivantes :

$$(q)^T = \left(\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{\partial U}{\partial z} \right), \quad (D) = \begin{bmatrix} \} & 0 \\ 0 & \} \end{bmatrix}$$

I_L(u) s'écrit :

$$I_L(u) = \frac{1}{2} \int (q)^T (D)(q) r dv \quad (II-56)$$

Optons pour la décritisation en éléments triangulaires soit $U_i(L), U_j(L)$ et $U_k(L)$ les températures aux nœuds de l'élément quelconque (L).

L'approximation de la température 'U' sur l'élément s'écrit :

$$U(r, z) = N_i(L)U_i(L) + N_j(L)U_j(L) + N_k(L)U_k(L)$$

Ou $N_i(L), N_j(L), N_k(L)$: fonctions d'interpolations

$U_i(L), U_j(L), U_k(L)$: variables nodales «paramètres nodaux» (températures)

Introduisant à présent cette forme d'approximation $U(r, z)$ dans $[q]^T$:

$$[q] = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(L)}{\partial r} & \frac{\partial N_j(L)}{\partial r} & \frac{\partial N_k(L)}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i(L)}{\partial z} & \frac{\partial N_j(L)}{\partial z} & \frac{\partial N_k(L)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i(L) \\ U_j(L) \\ U_k(L) \end{bmatrix} = [B][w]$$

L'expression s'écrit :

$$I_L(u) = \frac{1}{2} \int_{v_L} [B]^T [w]^T [D][w] r dv \tag{II-57}$$

Avec

$$[w] = \begin{bmatrix} U_i(L) \\ U_j(L) \\ U_k(L) \end{bmatrix} : \text{Vecteur de variables nodales}$$

Minimiser la fonctionnelle, c'est satisfaire les conditions qui la rendent stationnaire :

$$\frac{\partial I(u)}{\partial [w]} = \frac{\partial}{\partial w} \sum_{L=1}^N I_L(u) = 0$$

$$\frac{\partial I(u)}{\partial w} = \int_{v_L} [B]^T [D][B][w] r dv = [K_L][w]$$

$$\text{Avec : } [K_L] = \int_{v_L} [B]^T [D][B] r dv = \int_{v_L} [B]^T [D][B] r \cdot 2f \cdot r dr dz \tag{II-58}$$

$[K_L]$: Matrice de chaleur élémentaire

$$\frac{\partial I}{\partial [w]} = \sum_{L=1}^N [[K_L][w]] = [K][w] = 0$$

Avec :

$$[K_L] = \sum_{K=1}^N [K_L] \quad (\text{II-59})$$

Cordonnées intrinsèques :

Les coordonnées barycentriques (L_1, L_2 et L_3) sont souvent utilisées pour repérer un point "O" d'un triangle.

Soient (A_1, A_2 et A_3) respectivement les aires des triangles élémentaires et la surface totale

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

L_1, L_2 et L_3 respectivement par :

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \quad L_2 = \frac{A_2}{A} \quad \text{et} \quad L_3 = \frac{A_3}{A}$$

$$\text{Alors } L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

L'approximation nodale possède (3) deux propriétés fondamentales :

$$U^L(r, z) = N_i(r, z)U_i + N_j(r, z)U_j + N_k(r, z)U_k$$

Comme : $U_i^L(r, z) = U_i$ les fonctions N vérifiant :

$$N_j = N_k = 0, N_i = 1$$

$$U_j^L(r, z) = U_j \Rightarrow N_i = N_k = 0, N_j = 1$$

$$U_k^L(r, z) = U_k \Rightarrow N_i = N_j = 0, N_k = 1$$

$$\text{*alors} \quad N_i^2 + N_j^2 + N_k^2 = 1 \quad (\text{II-60})$$

*l'erreur d'approximation est définie par :

$$e = U - U_{\text{exat}} = 0$$

Les relations entre coordonnées barycentriques et physiques sont :

$$r = \sum_{i=1}^3 N_i(r, z)r_i \quad , \quad z = \sum_{i=1}^3 N_i(r, z)z_i \quad (\text{II-61})$$

De (II-60) et (II-61) on écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ r \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_i & r_j & r_k \\ z_i & z_j & z_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} \quad (\text{II-62})$$

Exprimons $(N_i, N_j, \text{et } N_k)$, inversion :

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ z \end{bmatrix} \quad (II-63)$$

$$\Delta = 2S_{ijz} = [r_j z_k - z_j r_k] - [r_i z_k - r_k z_i] + [r_{izj} - r_{jzi}]$$

S_{ijz} = surface du triangle "ijk"

Les termes b_{ij} s'expriment en fonction de $[r_{ijk}, r_{zjk}]$:

$$b_{11} = r_j z_k - r_k z_j \quad b_{21} = -[r_i z_k - r_k z_i] \quad b_{31} = -[r_i z_k - r_k z_i]$$

$$b_{12} = -z_k - z_j \quad b_{22} = -z_k - z_j \quad b_{32} = -z_k - z_j$$

$$b_{13} = r_k - r_j \quad b_{23} = -[r_k - r_i] \quad b_{33} = r_j - r_i$$

Les termes $N_{i,j,k}$ s'expriment par :

$$N_i = \frac{1}{\Delta} [b_{11} + b_{12} + b_{13} z]$$

$$N_j = \frac{1}{\Delta} [b_{21} + b_{22} + b_{23} z]$$

$$N_k = \frac{1}{\Delta} [b_{31} + b_{32} + b_{33} z]$$

Substituons $N_{i,j,k}$ dans l'expression (II-52), on obtient :

$$U^L(r, z) = \frac{1}{\Delta} \left\{ (b_{11} + b_{12} r + b_{13} z), (b_{21} + b_{22} r + b_{23} z), (b_{31} + b_{32} r + b_{33} z) \right\} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix}$$

Introduisons cette forme décrite dans la formule (II-54) exprimant la matrice de chaleur élémentaire :

$$[K_L] = \frac{1}{2} \int_{V_L} [B]^T [B] r \cdot 2f \cdot r dr dz$$

$$[B] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & \frac{\partial N_j}{\partial r} & \frac{\partial N_k}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$[B]^T [B] = \begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12}^2 + b_{13}^2 & b_{12}b_{22} + b_{13}b_{23} & b_{12}b_{32} + b_{13}b_{33} \\ b_{22}b_{12} + b_{23}b_{13} & b_{22}^2 + b_{23}^2 & b_{22}b_{32} + b_{23}b_{33} \\ b_{32}b_{12} + b_{33}b_{13} & b_{32}b_{22} + b_{33}b_{23} & b_{32}^2 + b_{33}^2 \end{bmatrix} \left[\frac{1}{\Delta} \right] 2$$

$$[K]_L = \int_{V_L} r [B]^T [B] dv = \int_{V_L} r [B]^T [B] 2f . r dr dz$$

v_L : Volume de la couronne de matière

On utilise au lieu de l'intégration numérique, l'intégration réduite, il suffit de calculer la matrice $[B(r, z)]$ au centre de gravité de l'élément défini par :

$$\bar{r} = (r_i + r_j + r_k) / 3$$

$$\bar{z} = (z_i + z_j + z_k) / 3$$

Il vient alors :

$$[K]_L = 2f \bar{r} \Delta [B(\bar{r}, \bar{z})]_L^T [B(\bar{r}, \bar{z})]_L \bar{r} = 2f \bar{r}^2 \Delta [C(\bar{r}, \bar{z})]_L \frac{1}{\Delta} 2 = \frac{2f}{\Delta} \bar{r}^2 [C(\bar{r}, \bar{z})]_L$$

$$[C(\bar{r}, \bar{z})]_L = [B(\bar{r}, \bar{z})]_L^T [B(\bar{r}, \bar{z})]_L$$

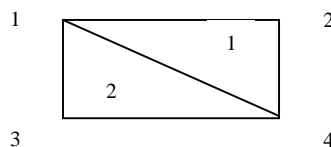
$$[K]_G = \sum_{L=1}^N [K]_L = 2f \sum_{L=1}^N \frac{\bar{r}^2}{\Delta} [C(\bar{r}, \bar{z})]_L$$

Remplaçons maintenant $[K]_G$ son expression dans (*), il résulte un système d'équations algébriques dont les inconnus sont les températures U_L .

$$[K]_G [w] = 0 \Rightarrow [K]_G = 2f \sum_{L=1}^N \frac{\bar{r}^2}{\Delta} [C(\bar{r}, \bar{z})]_L [w] = 0$$

Assemblage des matrices élémentaires :

Soit la structure à symétrie axiale à deux éléments



Pour chaque élément, écrivons le système $[K][w] = 0$:

Elément 1

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_4^1 \\ U_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \end{bmatrix}$$

Elément 2

$$\begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^2 \\ U_3^2 \\ U_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \end{bmatrix}$$

Considérons la structure toute entière, l'ordre de $[K]_G$ est de 4 aux nœuds commun aux éléments 1 et 4 les températures sont les mêmes $U_1 \equiv U_4$, alors on écrit $[K]_G$ comme suit :

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 + k_{11}^2 & k_{31}^1 & k_{12}^2 & k_{12}^1 + k_{13}^2 \\ k_{21}^1 + k_{21}^2 & k_{23}^1 & k_{22}^2 & k_{22}^1 + k_{23}^2 \\ k_{31}^1 + k_{31}^2 & k_{33}^1 & k_{32}^2 & k_{32}^1 + k_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^2 \\ U_3^2 \\ U_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \end{bmatrix}$$

Dans le cas général groupant plusieurs éléments, le processus d'assemblage se passera suivant cet algorithme qui permettra l'assemblage par localisation de chaque élément appartenant à la matrice globale (générale).

Chapitre III
Détermination des
contraintes
thermiques

III- Détermination des contraintes thermiques

III-1 Expression générale des contraintes thermiques en coordonnées cylindriques

Examinons l'état de déformation d'un corps élastique homogène isotrope axisymétrique du à un champ thermique stationnaire.

Comme indiqué dans les travaux [14,15] le champ thermique $T(r, z)$ et le potentiel de déformation $\xi(r, z)$ satisfont les équations suivantes.

$$\begin{aligned}\nabla^2 T &= 0 \\ \nabla^2 \xi &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \gamma_T T\end{aligned}\quad (\text{III-1})$$

Les contraintes et déplacements thermiques sont définis par les expressions suivantes:

$$U_r(T) = \frac{\partial \xi}{\partial r}, \quad U_z(T) = \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad t_{rz}(T) = 2\gamma_T \frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial z}, \quad \dagger_z(T) = -2\gamma_T \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \right)$$

et :

$$\dagger_r(T) = -2\gamma_T \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \quad (\text{III-2})$$

Avec :

γ_T : est le coefficient de dilatation thermique

Donc pour déterminer les contraintes et les déplacements thermiques, on est amené à définir d'abord le champ thermique $T(r, z)$ ensuite le potentiel thermique de déplacement $\xi(r, z)$ et se servir des formules (III-2) pour le calcul des contraintes et déplacements

III-2 Solution générale de l'équation de Laplace gouvernant le problème (matériau homogène isotrope)

Pour les domaines illimités on utilise la transformation de Hankel $\bar{T}(\langle, z)$ d'ordre zéro de la fonction $T(r, z)$ de distribution de la température [16].

$$\bar{T}(\langle, z) = \int_0^{\infty} r T(r, z) J_0(\langle r) dr \quad (\text{III-3})$$

Substituons dans l'équation de Laplace, on obtient l'équation différentielle ordinaire du second ordre.

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa^2 \right) \bar{T}(\kappa, z) = 0 \quad (\text{III-4})$$

Résolvons cette équation (III-4) en utilisant la transformation inverse de (III-3), on obtient l'expression définissant la distribution de la température.

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \kappa [A(\kappa)e^{+\kappa z} + B(\kappa)e^{-\kappa z}] J_0(\kappa r) d\kappa \quad (\text{III-5})$$

III- 3 Expressions générales des contraintes et déplacements thermiques

Pour un champ thermique connu [17], le potentiel thermo élastique est déterminé par la deuxième équation (III-1), dont la solution particulière pour un domaine axisymétrique illimitée est de la forme.

$$\zeta(r, z) = z \int_0^{\infty} \kappa [A^0(\kappa)e^{+\kappa z} + B^0(\kappa)e^{-\kappa z}] J_0(\kappa r) d\kappa \quad (\text{III-6})$$

$A^0(\kappa)$ et $B^0(\kappa)$ sont déterminées à l'aide des fonctions $A(\kappa)$ et $B(\kappa)$ à partir de la coïncidence des deux équations (III-1).

Ainsi pour les domaines d'étendue important,

$$\zeta = \frac{1+u}{2(1-u)} r_T z \int_0^{\infty} [A(\kappa)e^{+\kappa z} + B(\kappa)e^{-\kappa z}] J_0(\kappa r) d\kappa \quad (\text{III-7})$$

La solution générale pour $\zeta(r, z)$ est égale à la somme de la solution particulière (III-6) et la solution générale correspondante à l'équation homogène $\nabla^2 \zeta = 0$ s'écrivant sous la forme.

$$\zeta_0 = \int_0^{\infty} \kappa [C(\kappa)e^{+\kappa z} + D(\kappa)e^{-\kappa z}] J_0(\kappa r) d\kappa \quad (\text{III-8})$$

On signale que lors de l'analyse des problèmes thermo élastique, il est préférable d'utiliser la solution générale représentée par la fonction bi harmonique, c'est pourquoi les expressions données par la suite (composantes de contraintes et déplacements) correspondent uniquement à une valeur particulière du potentiel thermo élastique.

Substituons (III-7) dans (III-2), on obtient :

$$\begin{aligned}
 U_z^{(T)} &= \frac{1+u}{2(1-u)} r_T \int_0^\infty [A(\zeta)(1+\zeta z)e^{+\zeta z} + B(\zeta)(1-\zeta z)e^{-\zeta z}] J_0(\zeta r) d\zeta \\
 \dagger_z^{(T)} &= \frac{1+u}{1-u} \sim r_T Z \int_0^\infty \zeta^2 [A(\zeta)e^{+\zeta z} + B(\zeta)e^{-\zeta z}] J_0(\zeta r) d\zeta \\
 \ddagger_{rz}^{(T)} &= \frac{1+u}{1+u} \sim r_T \int_0^\infty \zeta [A(\zeta)(1+\zeta z)e^{+\zeta z} + B(\zeta)(1-\zeta z)e^{-\zeta z}] J_1(\zeta r) d\zeta \quad (III-9)
 \end{aligned}$$

Contrainte axiale :

Effectuant le changement de variables introduit précédemment

$$C = \frac{R_2}{R_1}, \quad \zeta R_1 = y, \quad \frac{r}{R_1} = \dots, \quad \frac{Z}{R_1} = \dots \quad \text{et} \quad \ell = \frac{L}{R_1}$$

La formule (III-9) déterminant la contrainte axiale $\dagger_z^{(T)}$ sous l'effet thermique s'écrit :

$$\dagger_z^{(T)} = \frac{1+u}{1-u} \sim r_T' \int_0^\infty y [\xi_1(y)e^{+y'} + \xi_2(\sim)e^{-y'}] J_0(y\dots) dy$$

$$\xi_1(y) = \frac{y}{R^2} A\left(\frac{y}{R}\right) \quad \text{et} \quad \xi_2(y) = \frac{y}{R^2} B\left(\frac{y}{R}\right)$$

$$\dagger_z^{(T)}(\dots, ') = \frac{1+u}{1-u} \sim r_T' \int_0^\infty y \left[\frac{1}{2chyl} (w_1(y)e^{y'} + yw_2(y)) \right] e^{y'} + \left[\frac{1}{2chyl} (yw_2(y) - w_1(y)e^{-y'}) \right] e^{-y'} J_0(y\dots) dy$$

Remplacent ensuite $w_1(y)$ et $w_2(y)$ par leurs expression définis auparavant, ce qui s'écrite :

$$\tau_z^{(r)}(\dots, ') = \frac{1+u}{1-u} \sim r_{T'} \int_0^\infty y \left[\frac{1}{2chyl} e^{y'l} w_1(y) e^{y'} + \frac{y}{2chyl} w_2(y) e^{y'} \right] + \left[\frac{y}{2chyl} w_2(y) e^{-y'} - \frac{1}{2chyl} w_1(y) e^{-y'l} e^{-y'} \right] J_0(y \dots) dy$$

Autrement

$$\tau_z^{(r)}(\dots, ') = \frac{1+u}{1-u} \sim r_{T'} \int_0^\infty \left(y \frac{shy(l+')}{chyl} w_1(y) + \frac{y^2 chy'}{chyl} w_2(y) \right) J_0(y \dots) dy \tag{III-10}$$

Avec :

$$w_1(y) = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{a_k^{*1} J_0(y)}{y^2 - \beta_k^2} \quad w_2(y) = \sum_{k=1}^{N_2} \frac{b_k^{*1} J_0(Cy)}{y^2 - \left(\frac{\beta_k}{C}\right)^2}$$

D'où l'expression (III-43) donnant la distribution de contraintes dans la couche :

$$\tau_z^{(r)}(\dots, ') = \frac{1+u}{1-u} \sim r_{T'} \left[\sum_{k=1}^{N_1} a_k^{*1} \int_0^\infty \frac{V_1(y, ')}{y^2 - \beta_k^2} J_0(y) J_0(y \dots) dy + \sum_{k=1}^{N_2} b_k^{*1} \int_0^\infty \frac{W_1(y, ')}{y^2 - \left(\frac{\beta_k}{C}\right)^2} J_0(Cy) J_0(y \dots) dy \right]$$

Avec :

$$V_1(y, ') = \frac{yshy(l+')}{chyl} \quad \text{et} \quad W_1(y, ') = \frac{y^2 chy'}{chyl}$$

Les valeurs de a_k^{*1} et b_k^{*1} sont définis précédemment pour la répartition de la température, il suffit maintenant de varier les valeurs de ... pour chaque valeur de ' et calculer les intégrales correspondantes.

Chapitre IV

Calculs Numériques

IV- Calculs numériques**Donnée :**

$$l = \frac{L}{R_1} = 2$$

$$C = \frac{R_2}{R_1} = 2,5$$

IV-1 Les étapes de résolution (partie analytique)

- 1- détermination des racines des fonctions de Bessel $J_0(\{ \}_k)$ et $J_1(\{ \}_k)$ par la procédure (unit) (voir annexe 3).
- 2- détermination de la matrice principale (calcul d'intégrales)
- 3- Résolution du système d'équation algébrique pour l'obtention des valeurs de (a_k^{*1}) et (b_k^{*1})
- 4- Résolution de l'équation analytique pour trouver les valeurs de températures dans les différents points du rayon

L'expression finale de la répartition du champ thermique étant définie (II-33), dont les coefficients a_k^{*1} et b_k^{*1} sont à déterminés de la résolution du système d'équations algébriques suivant décrit auparavant par (II-30) et (II-31) , exprimé par l'équation matricielle suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{K=1}^{N_1} a_K^{*1} L_K^1(\dots) + \sum_{K=1}^{N_2} b_K^{*1} L_K^2(\dots) = T_0 \\ \sum_{K=1}^{N_1} a_K^{*1} L_K^3(\dots) + \sum_{K=1}^{N_2} b_K^{*1} L_K^4(\dots) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(IV-1)} \\ \text{(IV-2)} \end{array}$$

Avec :

$$L_K^1(\dots) = \int_0^{\infty} \frac{y}{\text{chyl}} \frac{J_0(Cy)J_0(y\dots)}{y^2 - \left(\frac{\{ \}_K}{C}\right)^2} dy \quad \text{(IV-3)}$$

$$L_K^2(\dots) = \int_0^{\infty} \text{thyl} \frac{J_0(y)J_0(y\dots)}{y^2 - \{ \}_K^2} dy \quad \text{(IV-4)}$$

$$L_K^3(\dots) = \int_0^\infty \frac{y}{chyl} \frac{J_0(y)J_0(y\dots)}{y^2 - \}K^2} dy \tag{IV-5}$$

$$L_K^4(\dots) = \int_0^\infty thyl \frac{J_0(Cy)J_0(y\dots)}{y^2 - \left(\frac{\}K}{C}\right)^2} dy \tag{IV-6}$$

Formule matricielle

$$\left(\begin{array}{c|c} L_1^2(\dots_1) & L_1^1(\dots_1) \\ L_2^2(\dots_2) & L_2^1(\dots_2) \\ \dots & \dots \\ L_{N_1}^2(\dots_{N_1}) & L_{N_1}^1(\dots_{N_1}) \\ \hline L_1^3(\dots_1) & L_1^4(\dots_1) \\ L_2^3(\dots_2) & L_2^4(\dots_2) \\ \dots & \dots \\ L_{N_1}^3(\dots_{N_1}) & L_{N_1}^4(\dots_{N_1}) \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} a_1^{*1} \\ a_2^{*1} \\ \dots \\ a_N^{*1} \\ b_1^{*1} \\ b_2^{*1} \\ \dots \\ b_N^{*1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_0 \\ \dots \\ T_0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

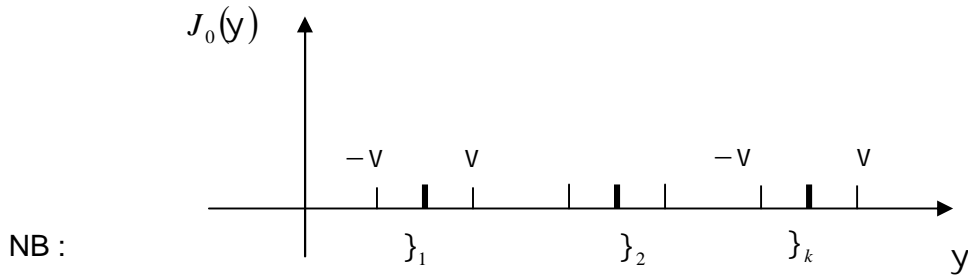
IV-1-1 Calculs des intégrales

a : Calcul de l'intégrale

$$L_K(\dots) = \int_0^\infty w(y) \frac{J_0(y)J_0(y\dots)}{y^2 - \}k^2} dy \tag{IV-7}$$

Le calcul de ce type d'intégral pose un problème, que soit au niveau des bornes d'intégrations, ou au niveau des singularités qui les rendent discontinues non intégrables en ces points [18]. Les singularités ont pour valeurs les racines de la fonction de Bessel d'ordre zéro }_k.

Afin de contourner cette difficulté on a adopté une simplification de ces expressions par l'application de la règle de l'Hospital connu pour dégager l'indétermination, ainsi :



$$\frac{dJ_0(Cy)}{dy} = -CJ_1(y)$$

$$\lim_{y \rightarrow \}K} \frac{J_0(y)}{y^2 - \}K^2} = \lim_{y \rightarrow \}K} \frac{J_0'(y)}{(y^2 - \}K^2)'} = \lim_{y \rightarrow \}K} \left[-\frac{1}{2} \frac{J_1(y)}{y} \right] = -\frac{1}{2} \frac{J_1(\}K)}{\}K} \tag{IV-8}$$

$$L_K(\dots) = \int_0^{\}1-v} \dots + \int_{\}1-v}^{\}1+v} \dots + \int_{\}1+v}^{\}2-v} \dots + \int_{\}2-v}^{\}2+v} \dots + \int_{\}2+v}^{\}3-v} \dots$$

v : Est une valeur choisie suffisamment petite pour rester loin de l'indétermination.

Les fonctions de Bessel sont prises sous la forme intégrale approchée.

D'où le calcul de l'intégral $L_k(\dots)$:

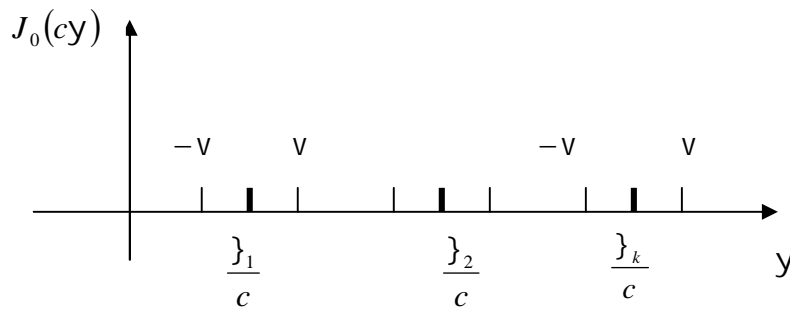
$$L_K(\dots) = \sum \left[\int_{A_1}^{A_2} w(y\dots) \frac{J_0(y)J_0(y\dots)}{y^2 - \}K^2} dy + \left(-\frac{1}{2} \int_{B_1}^{B_2} w(y) \frac{J_1(\}K)J_0(y)}{\}K} dy \right) \right]$$

$$L_K^3(\dots) = \sum \left[\int_{A_1}^{A_2} \frac{y}{\text{chyl}} \frac{J_0(y)J_0(y\dots)}{y^2 - \}K^2} dy + \left(-\frac{1}{2} \int_{B_1}^{B_2} \frac{y}{\text{chyl}} \frac{J_1(\}K)J_0(y)}{\}K} dy \right) \right]$$

$$L_K^3(\dots) = \sum \left[\int_{A_1}^{A_2} \frac{y}{\text{thyl}} \frac{J_0(y)J_0(y\dots)}{y^2 - \}K^2} dy + \left(-\frac{1}{2} \int_{B_1}^{B_2} \frac{y}{\text{thyl}} \frac{J_1(\}K)J_0(y)}{\}K} dy \right) \right] \tag{IV-9}$$

On utilise La même méthode pour calculer l'intégrale de type

$$L_K(\dots) = \int_0^{\infty} wyl \frac{J_0(cy)J_0(y\dots)}{y^2 - \left(\frac{\}k}{c}\right)^2} dy \tag{IV-10}$$



$$\lim_{y \rightarrow \frac{\lambda_k}{c}} \frac{J_0(cy)}{y^2 - \left(\frac{\lambda_k}{c}\right)^2} = \lim_{y \rightarrow \frac{\lambda_k}{c}} \frac{-cJ_1(cy)}{2y} = \frac{c^2}{2} \frac{J_1(\lambda_k)}{\lambda_k} \tag{IV-11}$$

$$L_K(\dots) = \int_0^{\frac{\lambda_{1-V}}{c}} \dots + \int_{\frac{\lambda_{1-V}}{c}}^{\frac{\lambda_{1+V}}{c}} \dots + \int_{\frac{\lambda_{2-V}}{c}}^{\frac{\lambda_{2+V}}{c}} \dots + \int_{\frac{\lambda_{3-V}}{c}}^{\frac{\lambda_{3+V}}{c}} \dots$$

D'où le calcul de l'intégral $L_k(\dots)$:

$$L_K(\dots) = \sum \left[\int_{A_{11}}^{A_{22}} w(y) \frac{J_0(cy)J_0(y\dots)}{y^2 - \left(\frac{\lambda_k}{c}\right)^2} dy + \left(-\frac{c^2}{2} \int_{B_{11}}^{B_{22}} w(y) \frac{J_1(\lambda_k)J_0(y\dots)}{\lambda_k} dy \right) \right]$$

$$L_K^1(\dots) = \sum \left[\int_{A_{11}}^{A_{22}} \frac{y}{ch(y)} \frac{J_0(cy)J_0(y\dots)}{y^2 - \left(\frac{\lambda_k}{c}\right)^2} dy + \left(-\frac{c^2}{2} \int_{B_{11}}^{B_{22}} \frac{y}{ch(y)} \frac{J_1(\lambda_k)J_0(y\dots)}{\lambda_k} dy \right) \right]$$

$$L_K^1(\dots) = \sum \left[\int_{A_{11}}^{A_{22}} y^2 th(y) \frac{J_0(cy)J_0(y\dots)}{y^2 - \left(\frac{\lambda_k}{c}\right)^2} dy + \left(-\frac{c^2}{2} \int_{B_{11}}^{B_{22}} y^2 th(y) \frac{J_1(\lambda_k)J_0(y\dots)}{\lambda_k} dy \right) \right] \tag{IV-12}$$

IV-1-2 Résultats et interprétation

a- Résultats des intégrales

Pour :
$$L_k^1(\dots) = \int_0^\infty \frac{y}{ch y \ell} \frac{J_0(cy)J_0(y\dots)}{y^2 - \left(\frac{K}{C}\right)^2}$$

	$\}_1$	$\}_2$	$\}_3$	$\}_4$	$\}_5$
... ₁	11.41214	18.984	51.4315	101.546	169.659
... ₂	11.7552	34.2658	82.7141	159.088	264.329
... ₃	69.8836	111.354	206.11	361.871	582.877
... ₄	1933.27	2936.79	5301.76	9251.1	14906.2
... ₅	3206.13	4879.76	8824.18	15410.5	24840.4

Pour :
$$L_k^2(\dots) = \int_0^\infty th y \ell \frac{J_0(y)J_0(y\dots)}{y^2 - \}_k^2} dy$$

	$\}_1$	$\}_2$	$\}_3$	$\}_4$	$\}_5$
... ₁	0.0424529	0.266139	0.670579	1.2558	2.02181
... ₂	0.0424328	0.266012	0.670256	1.2552	2.02083
... ₃	0.0423527	0.265502	0.668966	1.25278	2.01693
... ₄	0.0420345	0.263478	0.663846	1.24317	2.00144
... ₅	0.0419227	0.262768	0.662048	1.23979	1.99600

Pour :
$$L_k^3(\dots) = \int_0^\infty \frac{y}{ch y \ell} \frac{J_0(y)J_0(y\dots)}{y^2 - \}_k^2}$$

	$\}_1$	$\}_2$	$\}_3$	$\}_4$	$\}_5$
... ₁	0.000106355	0.000206162	0.00318489	0.0139672	0.052213
... ₂	0.000106459	0.000206358	0.00318877	0.0139800	0.592418
... ₃	0.001059400	0.000205379	0.00317333	0.0139164	0.059098
... ₄	0.000104300	0.000202286	0.00312762	0.0137155	0.086418
... ₅	0.000103727	0.000201204	0.00311163	0.0348070	0.0584816

Pour : $L_k^4(\dots) = \int_0^\infty y^{2k} \text{th} y \ell \frac{J_0(Cy) J_0(y \dots)}{y^2 - \left(\frac{k}{C}\right)^2} dy$

	$\}1$	$\}2$	$\}3$	$\}4$	$\}5$
...1	4.0452310	9.4512830	24.552319	45.9018020	79.04523
...2	23.125911	52.163612	101.629510	159.320422	214.36410
...3	31.321123	69.00533	145.830820	233.342505	256.31256
...4	90.92305	113.80287	204.134120	398.43121	444.00245
...5	221.00151	329.44052	401.521630	488.84201	538.61234

b- Résultats de température en fonction de ...

1) pour : ' = 0

...	0	1	1,5	1,9	2	3	4	5	6
T	10	10	5	4	3,5	2,5	2	1,5	1,2

2) pour : ' = -0,75

...	0	0,2	0,4	0,8	0,9	1	1,5	1,9	2	3	4	5	6
T	5,8	5,7	5,6	5,5	5,3	5,1	2,9	2,2	2	1,5	1	0,8	0,7

3) pour : ' = -1

...	0	0,2	0,4	0,8	1	1,1	1,2	1,3	1,5	2	3	4	5	6
T	2,5	2,46	2,41	2,35	2,1	2	1,8	1,5	1,1	1	0,9	0,8	0,5	0,3

4) pour : ' = -1,5

...	0	0,5	0,9	1	1,1	1,3	1,5	3	4	5	6
T	0,9	0,85	0,82	0,81	0,80	0,5	0,3	0,15	0,1	0,08	0,02

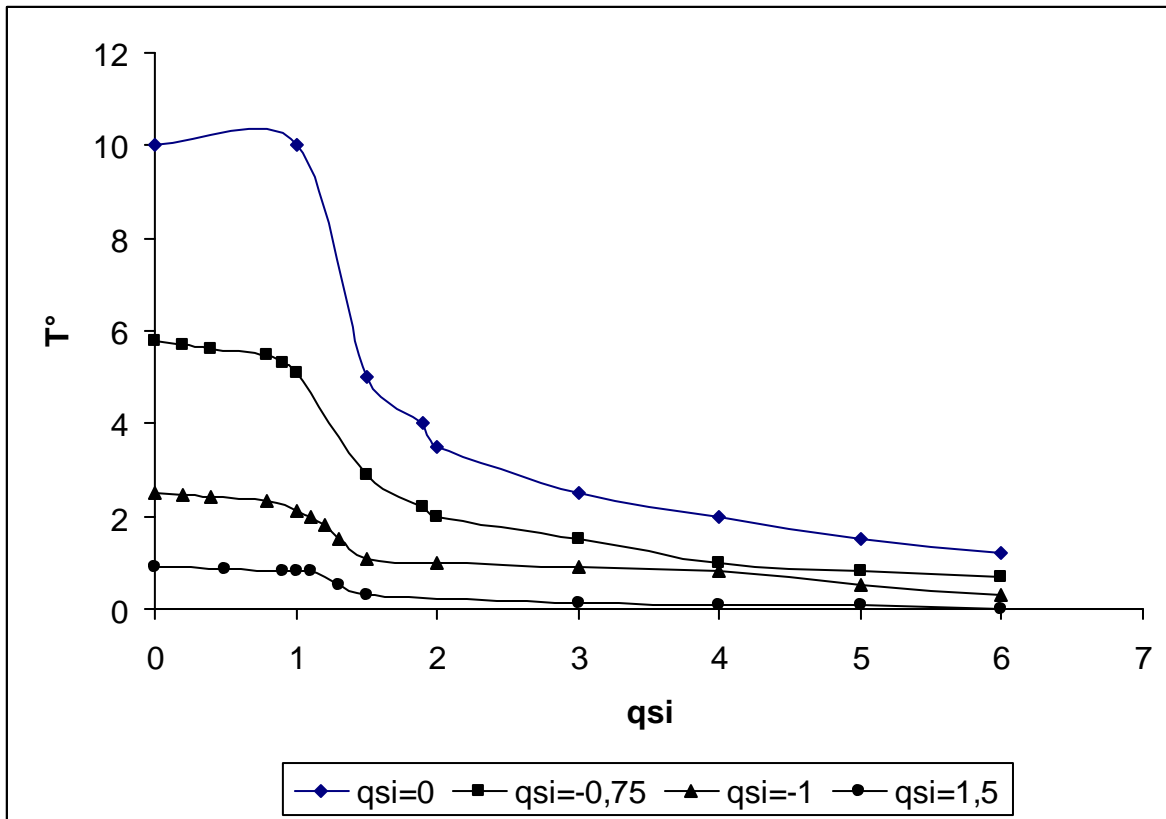


Fig. IV-1 Représentation graphique de la répartition de température de la couche

c- Interprétation des résultats

La vitesse de décroissement du gradient de la température diminue tout en s'approchant du contact inférieur.

A partir de ($\dots > 1$) et du fait que la couche (surface externe) est isolée, il est donc logique que la valeur de la température chute.

Au fond du corps (pour les courbes qui correspondent à ($'_1, ' _2$)) la valeur de la température devient plus faible qu'au premier cas.

Enfin, avec l'isolation thermique tout le long de (R_2), la dernière courbe donne des valeurs notamment faibles et elle décroît progressivement avec l'augmentation de \dots .

IV-2 Résultats obtenus par la méthode des éléments finis**Donnée :**

$$l = \frac{L}{R_1} = 3$$

$$C = \frac{R_2}{R_1} = 4$$

a- Résultats de température en fonction de ...**1) pour $\xi = -0.16$**

...	0	1	1.5	2	3	4	5	6
T^0	6.85	6.61	4	3	2.44	1.85	1.25	1

2) pour $\xi = -0.66$

...	0	1	1.5	1.9	2	3	4	5	6
T^0	5.4	4	2.55	2.05	1.72	1.41	0.98	0.76	0.61

3) pour $\xi = -1.1$

...	0	0.4	0.8	1	1.1	1.2	1.3	1.5	2	3	4	6
T^0	3.65	3.4	2.63	2.12	1.86	1.71	1.51	1.21	0.92	0.78	0.57	0.31

4) pour $\xi = -1.6$

...	0	1.1	1.3	1.5	3	4	5	6
T^0	1.68	0.79	0.47	0.35	0.16	0.09	0.07	0.03

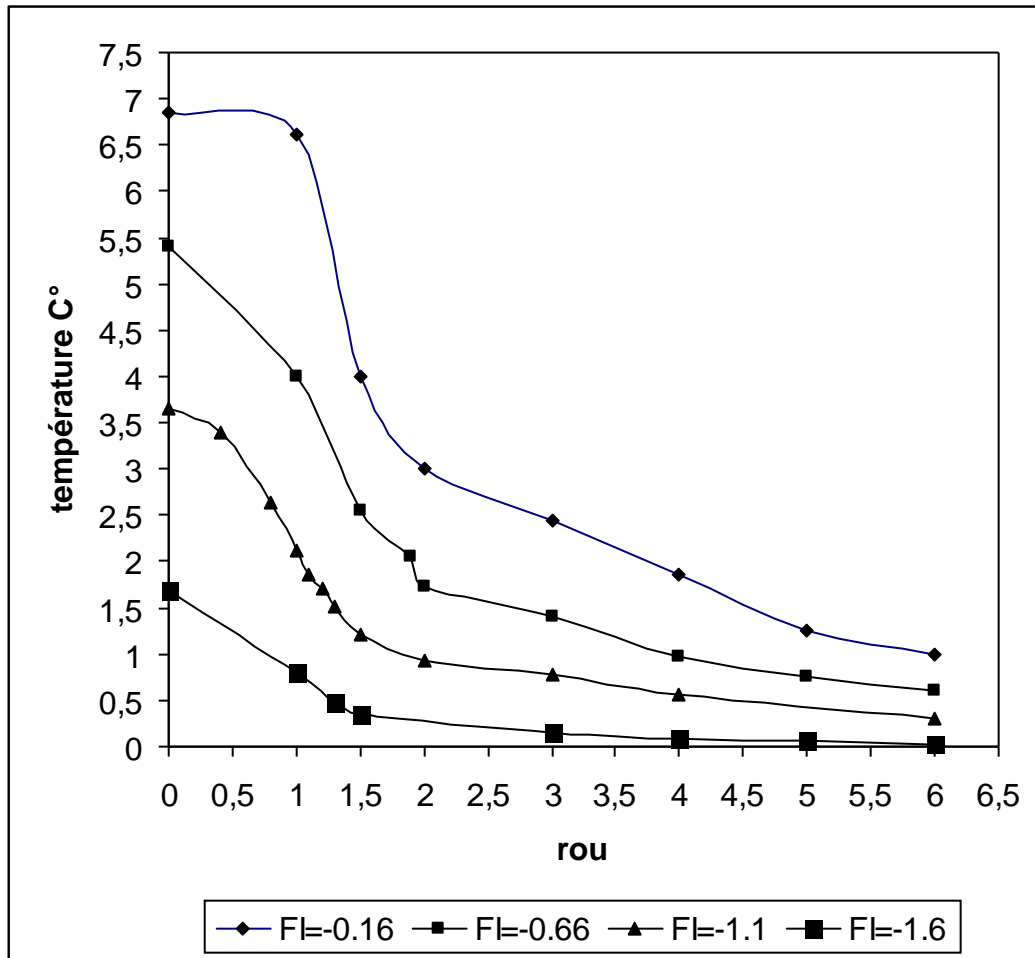


Fig. IV-2 Représentation graphique de la répartition de température de la couche

b- Interprétation des résultats :

Malgré que la méthode des éléments finis est approximative, elle nous a permis de trouver des diagrammes de distribution de température proches de ceux de la méthode analytique.

Ceci est du au manque des moyens de calculs, en effet pour que cette méthode devient efficace cela exige des moyens de grandes capacités, comme l'explique d'ailleurs le premier diagramme de la méthode analytique.

Ce dernier ne peut être atteint (par la M.E.F) que si on augmente le nombre d'éléments, ceci entraîne un calcul très important.

IV- 3 Résultats des contraintes thermiques en fonction de ...

1) pour : ' = 0

...	0	0,3	0,6	0,85	1,18	1,4	1,58	1,8	1,9
$\dagger_z^{(T)}$	0	-0,05	-0,1	-0,2	-0,45	-0,7	-1,1	-1,85	-2,8

2) pour : ' = - 0,4

...	0	0,3	0,6	0,85	1,18	1,4	1,58	1,8	1,9
$\dagger_z^{(T)}$	0,03	0,32	0,4	0,45	0,6	0,8	1,1	1,6	2,5

1,3) pour : ' = - 0,8

...	0	0,3	0,6	0,85	1,18	1,58	1,77	1,9	1,95
$\dagger_z^{(T)}$	0,7	0,73	0,75	0,78	0,9	1,1	1,3	1,75	3,85

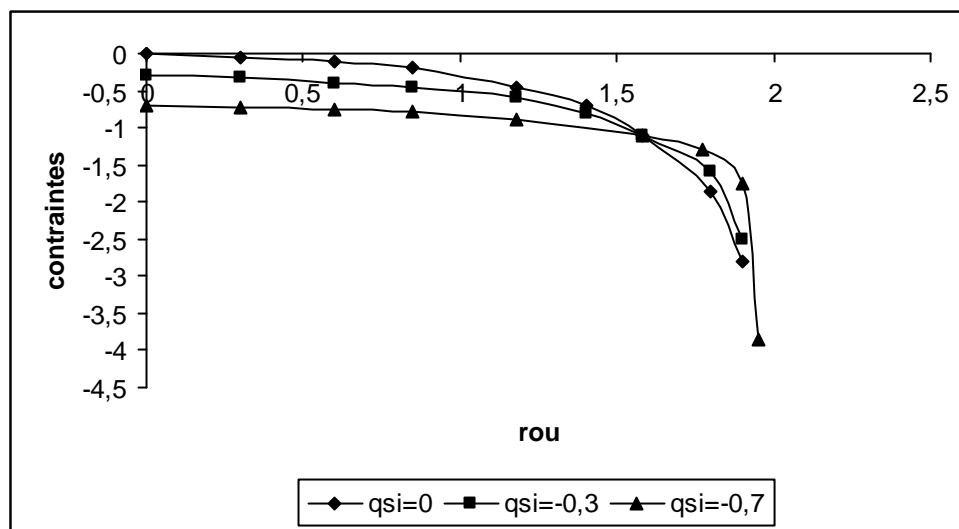


Fig. IV-3 Représentation graphique des contraintes en fonction de ...

Interprétation des résultats

Nous montrons à travers ces courbes l'influence du champ thermique sur les contraintes thermique

Nous prenons pour l'exemple de calcul le matériau de mêmes données que ceux considérées pour le calcul de la répartition du champ thermique.

L'influence thermique dans la région centrale est beaucoup plus important, est un résultat évident pour les données de l'exemple.

Conclusion générale

Cette étude, met en évidence la complexité du problème d'analyse des contraintes thermiques et l'influence des différents paramètres notamment les caractéristiques physiques du matériaux et représente une étape essentielle dans la connaissance de ce domaine.

De nombreux travaux et recherches certes ont été menés pour qu'aujourd'hui les constructions mécaniques trouvent leurs fiabilités.

Le but principal de cette étude est étudier et déterminer l'influence de champ de température sur la répartition des contraintes thermiques.

Nous l'avons entrepris en deux étapes et ce dans le but de déterminer les contraintes thermiques.

Dans la première étape, nous avons déterminé la répartition de température dans la couche élastique on a utilisée deux méthodes :

- méthode analytique
- méthode des éléments finis

Dans la deuxième étape nous avons abordé le problème principal qui se résumer à la détermination des contraintes thermiques dans la couche élastique.

Les figures (IV-1, IV-2, IV-3) sont reportées les solutions du problème les courbes représentées donnent les résultats conformément aux conditions aux limites du problème.

La répartition des températures et des contraintes thermiques correspond de façon satisfaisante à la logique

Les représentations graphiques pour la répartition de température calculée par les deux méthodes (analytique – éléments finis) montrent que les résultats obtenus par la méthode analytique est plus précise et efficace par rapport à la méthode des éléments finis.

Enfin La solution semi analytique proposée nous semble intéressante. Car le même algorithme est facilement utilisé pour différents cas (élastique, thermique et thermoélastique) et également pour résoudre le problème de couche transverse-isotrope.

Références Bibliographies

- [1] Peng-Fei Hou, Andrew Y.T. Leung, Chang-Ping Chen, Fundamental solution for transversely isotropic thermo elastic materials. International Journal of Solids and Structures 45 (2008) 392-408
- [2] Yves JANNOT, Transferts de Chaleurs, édition 2009
- [3] I. N. Sneddon. Transformation de Fourier, Moscou 1965
- [4] Joseph Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Paris, 1822
- [5] J. Ph. Pérez et A. M. Romulus. Thermodynamique. Fondements et applications, Masson, Paris, 1993
- [6] D. Gurelicki et Y. Kizima . Théorie de la déformation élastique et thermique, problème de contact axisymétrique. Moscou 1981
- [7] J. Crabrol (1989) "Transferts de chaleur, tome 1 les principes", collection technologies, Masson
- [8] Nowacki. W, Issues of thermoelasticity [Russian translation]. Izd. AN SSSR. Moscow 1962
- [9] Sing A. Axisymétrique thermal stresses in transversely isotropic bodies. - Arch. Mech. Stos., 1966. - v. 12, N3
- [10] Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, Oxford, 1984
- [11] Y. C.engel (1998) "Heat transfert, a practical approach", Mc Graw Hill Incropera, DeWitt : Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 5th Edition, Wiley
- [12] V. Ditkine. Transformations intégrales et calculs opérationnels, édition 1960
- [13] k. Seghir et R. Benbouda, Détermination des contraintes sur les surfaces limite d'une couche élastique sollicitée par deux poinçons cylindriques rigides. 17^{ème} Congés Français de Mécanique.
- [14] Gérard. Hirsch. Calcul d'intégrales Maths 54

Annexe 1

Solution de l'équation $\nabla^2 T = 0$

$$\bar{T}(\langle, z) = \int_0^{\infty} r T(r, z) J_0(\langle r) dr$$

Ou :

J_0 : fonction de Bessel d'ordre zéro

La fonction $T(r, z)$ peut être exprimé par la transformation inverse on obtient :

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \langle \bar{T}(\langle, z) J_0(\langle r) d\langle$$

La solution de l'équation $\nabla^2 T(r, z) = 0$

On a :

$$\nabla^2 T(r, z) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \int_0^{\infty} \langle T(\langle, z) \frac{\partial J_0(\langle r)}{\partial r} d\langle = - \int_0^{\infty} \langle^2 T(\langle, z) J_1(\langle r) d\langle$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = - \int_0^{\infty} \langle^2 T(\langle, z) \frac{\partial J_1(\langle r)}{\partial r} d\langle = \int_0^{\infty} \langle \left[-\langle^2 J_0(\langle r) + \frac{\langle}{r} J_1(\langle r) \right] T(\langle, z) d\langle$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \int_0^{\infty} \langle \frac{\partial^2 T(\langle, z)}{\partial z^2} J_0(\langle r) d\langle$$

Avec :

$$\frac{\partial J_1(\langle r)}{\partial r} = \langle J_0 - \frac{J_1(\langle r)}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} J_0(\langle r) = -\langle J_1(\langle r)$$

$$\frac{\partial^2 J_0(\langle r)}{\partial r^2} = -\langle \frac{\partial J_1(\langle r)}{\partial r} = -\langle^2 J_0(\langle r) + \frac{\langle}{r} J_1(\langle r)$$

On obtient après substitution des dérivées partielles dans l'équation $\nabla^2 T = 0$

$$\frac{\partial^2 \{ \}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \{ \}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \{ \}}{\partial z^2} = \int_0^{\infty} \langle J_0(\langle r) \left[-\langle^2 J_0(\langle r) + \frac{\partial^2 \{(\langle, z)\}}{\partial z^2} \right] d\langle$$

Alors :

$$\nabla^2 \xi = \int_0^\infty \kappa J_0(\kappa, r) \left[\frac{d^2 \xi}{dz^2} - \kappa^2 \xi \right] = 0$$

ξ est dérivée seulement par rapport à Z

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2 \xi}{dz^2} - \kappa^2 \xi \right) = 0 \text{ est une équation ordinaire du quatrième ordre}$$

L'équation caractéristique : $K^2 - \kappa^2 = 0 \Rightarrow$

$$K^2 - \kappa^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \kappa \\ K_2 = -\kappa \end{cases}$$

Donc la solution générale est :

$$\bar{\xi}(\kappa, z) = [B_1(\kappa) + B_2(\kappa)z]e^{-\kappa z} + [B_3(\kappa) + B_4(\kappa)z]e^{\kappa z}$$

Ou :

$B_1(\kappa), B_2(\kappa), B_3(\kappa)$ et $B_4(\kappa)$ sont des fonctions à déterminer par les conditions aux limites .

Annexe 2**Résolution de l'équation de Laplace par la méthode de Fourier**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Soit :

$$T = R(r)Z(z)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{d^2 R(r)}{dr^2} Z(z)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dZ(z)}{dz} R(r)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} R(r)$$

L'équation (1) s'écrit :

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} Z(z) + \frac{1}{r} Z(z) \frac{dR(r)}{dr} + R(r) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}$$

Divisons cette expression par $R(r)Z(z)$, on obtient :

$$\frac{d^2 R(r) + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr}}{R(r)} = \frac{-d^2 Z(z)}{dz^2}$$

Cette équation peut être représenté sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} = \pm r^2 R(r)$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = \pm r^2 Z(z)$$

1) signe de positif

La première équation est celle de Bessel, admet comme solution

$$R(r) = C_1 J_0(r) + C_2 N_0(r)$$

J_0 : Fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro

N_0 : Fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre zéro

Sachant que $\lim_{r \rightarrow 0} N_0(r) = \infty$, par conséquent pour borner les solutions,

il faudra posé $C_2 = 0$, d'où $R_1(r) = C_1 J_0(r)$

La deuxième équation admet les solutions sous forme :

$$Z_1(z) = e^{Kz}, \quad (K_i = \pm r)$$

$$Z_1(z) = A_1 e^{rz} + B_1 e^{-rz}$$

La solution est par conséquent

$$T_1(r, z) = J_0(r) [A_1 \operatorname{ch}(rz) + B_1 \operatorname{ch}(rz)]$$

2) signe de négatif

La solution de l'équation de Bessel cette fois ci est :

$$R_2(r) = C_1 J_0(r) + C_2 N_0(r)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} N_0(r) = \infty$$

$$R_2(r) = C_1 J_0(r)$$

La solution de la deuxième équation est

$$Z_2(z) = A_1 e^{irz} + B_1 e^{-irz}, \quad (K_j = \mp r)$$

D'où la solution du deuxième système

$$T_2(r, z) = I_0(r) [A_2 \cos(rz) + B_2 \sin(rz)]$$

La solution initiale de l'équation de Laplace est

$$T_0(r, z) = A_0 z + B_0 + D_0 (r^2 - 2z^2)$$

Et la solution générale est sous la forme :

$$T(r, z) = A_0 z + B_0 + D_0 (r^2 - 2z^2) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(r_k r) [A_k \operatorname{sh}(r_k z) + B_k \operatorname{ch}(r_k z)] \\ + \sum_{k=1}^{\infty} I_0(r_k r) [C_k \cos(r_k z) + D_k \sin(r_k z)]$$

Enfin la solution de l'équation de Laplace pour le cas de la symétrie axiale

$$T(r, z) = A_0 z + B_0 + D_0 (\}^2 r^2 - rz^2) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(r_k r) \left[A_k \operatorname{sh}\left(\frac{r_k z}{\}\right) + B_k \operatorname{ch}\left(\frac{r_k z}{\}\right) \right] \\ + \sum_{k=1}^{\infty} I_0(\} x_k r) [C_k \cos(x_k z) + D_k \sin(x_k z)]$$

$\}$:est le coefficient de conductibilité

Annexe 3**Quelques expressions approchées de fonctions remarquables**

Fonctions approchées de Bessel de première espèce (d'ordre zéro et un)

*** Pour : $-3 \leq x \leq 3$

$$J_0(x) = 1 - 2,249997 \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1,2656208 \left(\frac{x}{3}\right)^4 - 0,31638 \left(\frac{x}{3}\right)^6 + 0,04444 \left(\frac{x}{3}\right)^8 - 0,00394 \left(\frac{x}{3}\right)^{10} + v$$

$$|v| < 1,6 \cdot 10^{-8}$$

*** Pour : $3 \leq x < \infty$

$$J_0(x) = x^{\frac{1}{2}} f_0 \cos n_0$$

$$Y_0(x) = x^{\frac{1}{2}} f_0 \sin n_0$$

$$n_0 = x - 0,7853981 - 0,0416639 \left(\frac{3}{x}\right) - 0,0000395 \left(\frac{3}{x}\right)^2 + 0,0026257 \left(\frac{3}{x}\right)^3 - 0,0005412 \left(\frac{3}{x}\right)^4 - 0,0002933 \left(\frac{3}{x}\right)^6 + v . \quad |v| < 7 \cdot 10^{-6}$$

*** Pour : $0 < x \leq 3$

$$Y_0(x) = \frac{2}{f} \ln \frac{x}{2} J_0(x) + 0,3674669 + 0,6055936 \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 0,74355038 \left(\frac{x}{3}\right)^4 + 0,2530011 \left(\frac{x}{3}\right)^6 - 0,0246121 \left(\frac{x}{3}\right)^8 + 0,0042791 \left(\frac{x}{3}\right)^{10} - 0,0002484 \left(\frac{x}{3}\right)^{12} + v . \quad |v| < 1,4 \cdot 10^{-8}$$

*** Pour : $-3 \leq x \leq 3$

$$x^{-1} J_1(x) = 0,5 - 0,6524998 \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 0,2109357 \left(\frac{x}{3}\right)^4 - 0,0395428 \left(\frac{x}{3}\right)^6 + 0,0044331 \left(\frac{x}{3}\right)^8 - 0,0003176 \left(\frac{x}{3}\right)^{10} + 0,00001109 \left(\frac{x}{3}\right)^{12} + v . \quad |v| < 1,3 \cdot 10^{-8}$$

*** Pour : $3 \leq x < \infty$

$$J_1(x) = x^{-0,5} f_1 \cos n_1$$

$$f_1 = 0,7978845 + 0,00000156 \left(\frac{3}{x}\right) + 0,0165966 \left(\frac{3}{x}\right)^2 + 0,00017105 \left(\frac{3}{x}\right)^3 - 0,0024951 \left(\frac{3}{x}\right)^4 +$$

$$+ 0,0011365 \left(\frac{3}{x}\right)^5 - 0,0002003 \left(\frac{3}{x}\right)^6 + v . \quad |v| < 4.10^{-8}$$

$$r_1 = x - 2,3561944 + 0,1249961 \left(\frac{3}{x}\right) + 0,0005650 \left(\frac{3}{x}\right)^2 - 0,0063787 \left(\frac{3}{x}\right)^3 + 0,0007434 \left(\frac{3}{x}\right)^4 +$$

$$+ 0,0007982 \left(\frac{3}{x}\right)^5 - 0,0002916 \left(\frac{3}{x}\right)^6 + v . \quad |v| < 9.10^{-8}$$

Formules exactes

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k\Gamma(k+1)}$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{f} J_0(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{2}{f} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k)^2} \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} \quad (\Gamma' : \text{Dérivée logarithmique})$$

Racines des fonctions de Bessel de première espèce d'ordre un et deux.

$$J_0(\}k) = 0$$

$$\}k (k = 1, 2, 3, \dots, 13) = 2,404825 : 5,25007 : 8,65372 : 11,79153 : 14,93091 : 18,07106 : 21,21163 : 24,35247 : 27,49347 : 30,36460 : 33,77582 : 36,91709 : 40,05842$$

$$J_1(\sim k) = 0$$

$$\sim k (k = 1, 2, 3, \dots, 13) = 3,83171 : 7,01559 : 10,17347 : 13,32369 : 16,47063 : 19,61586 : 22,76008 : 29,04683 : 32,18968 : 35,33231 : 38,47477 : 41,61709$$

Annexe 4**Orthogonalité des fonctions de Bessel**

$$X^2 Y'' + XY' + (K^2 X - v^2)Y = 0$$

$$t = KX \Rightarrow t^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{\partial Y}{\partial t} + (t^2 - v^2)Y = 0$$

$$y = J_v(t) = J_v(K.X)$$

$$X^2 \frac{d^2}{dX^2} [J_v(K.X)] + X \frac{d}{dX} [J_v(K.X)] + (K^2 X^2 - v^2)J_v(K.X) = 0$$

Divisons cette expression par X

$$\frac{d}{dX} \left[X \frac{d}{dX} J_v(Kv) \right] + \left[K^2 X - \frac{v^2}{X} \right] J_v(K.X) = 0$$

Pour $K_1 \neq K_2$ on aura deux équations différentielles qui sont :

$$a) \frac{d}{dX} \left[X \frac{d}{dX} J_v(K_1 v) \right] + \left[K_1^2 X - \frac{v}{X} \right] J_v(K_1.X) = 0$$

$$b) \frac{d}{dX} \left[X \frac{d}{dX} J_v(K_2 v) \right] + \left[K_2^2 X - \frac{v}{X} \right] J_v(K_2.X) = 0$$

Divisons les équations (a) et (b) respectivement par :

$$J_v(K_2.X) J_v(K_1.X)$$

La différence (a-b) donne :

$$J_v(K_2.X) \frac{d}{dX} \left[X \frac{d}{dX} J_v(K_1.X) \right] - J_v(K_1.X)$$

$$J_v(K_2.X) \frac{d}{dX} \left[X \frac{d}{dX} J_v(K_1.X) \right] - J_v(K_1.X) \frac{d}{dX} \left[X \frac{d}{dX} J_v(K_2.X) \right] =$$

$$X(K_2^2 - K_1^2) J_v(K_1.X) J_v(K_2.X)$$

$$\frac{d}{dX} \left[X \frac{d}{dX} J_v(K_2.X) \frac{d}{dX} J_v(K_1.X) - X \frac{d}{dX} J_v(K_1.X) \frac{d}{dX} J_v(K_2.X) \right] =$$

$$X(K_2^2 - K_1^2) J_v(K_1.X) J_v(K_2.X)$$

$$(K_1^2 - K_2^2) \int_0^l X J_\nu(K_1 \cdot X) J_\nu(K_2 \cdot X) dX = X J_\nu(K_2 \cdot X) J_\nu(K_1 X) - X J_\nu(K_1 X) \\ [K_1 J'_\nu(K_1 \cdot l) J_\nu(K_2 \cdot l) - K_2 J_\nu(K_1 \cdot l) J'_\nu(K_2 \cdot l)]$$

Pour $l = 1$

$$\int_0^1 X J_\nu(K_1 \cdot X) J_\nu(K_2 \cdot X) dX = \frac{K_1 J'_\nu(K_1) J_\nu(K_2) - K_2 J_\nu(K_1) J'_\nu(K_2)}{K_2^2 - K_1^2}$$