

N° d'ordre : /2013/DM

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE *SCIENTIFIQUE*

UNIVERSITÉ DE BATNA  
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE  
DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE

Mémoire présenté Pour l'obtention du diplôme de

**MAGISTÈRE**

**En**

**Mécanique**

Option : **CONSTRUCTION MÉCANIQUE**

Par

**BOUSBIA SALAH Seif Eddine**

**Analyse vibratoire forcée des structures  
par éléments finis**

Soutenu le : / / 2013 Devant le jury composé de

|                  |                               |            |
|------------------|-------------------------------|------------|
| Pr OUTTAS TOUFIK | Prof. Université de Batna     | Président  |
| Pr BRIOUA MOURAD | Prof. Université de Batna     | Rapporteur |
| Pr ZIDANI KAMEL  | Prof. Université de Batna     | Examineur  |
| Pr ZEDIRA HAMMA  | Prof. Université de Khenchela | Examineur  |

Année universitaire 2012 / 2013

*Dédicaces*

*A mes chers parents*

# Remerciements

Tous mes remerciements vont au **Dieu** en premier lieu.

*Je remercie infiniment mon encadreur Pr. M.BRIOUA, pour avoir accepté encadrement dans ce sujet.*

*Je remercie vivement tout particulièrement Dr. C.REBIAI pour son énorme aide, sa sympathie, ses conseils et sa disponibilité et surtout sa patience pendant toute la durée de la réalisation du mémoire.*

*Je tiens à remercier : les professeurs OUTTAS TOUFIK, ZIDANI KAMEL et ZEDIRA HAMMA pour nous avoir fait l'honneur d'être membres du jury. Ainsi que pour avoir consacré une partie de leur temps précieux pour lire et corriger ce mémoire. On portera beaucoup d'intérêt à leurs remarques constructives.*

*Mes sincères remerciements et mes vives reconnaissances tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail.*

# Table des matières

|                                   |          |
|-----------------------------------|----------|
| Remerciements                     |          |
| Table des matières                |          |
| Liste des figures et des tableaux |          |
| Nomenclature et Indices           |          |
| <b>Introduction Générale</b>      | <b>1</b> |

## Chapitre I.

### *Etudes bibliographiques*

|                                   |          |
|-----------------------------------|----------|
| <b>I.1. Introduction</b>          | <b>3</b> |
| <b>I.2. Revue bibliographique</b> | <b>3</b> |

## Chapitre II :

### *Formulation de quelques éléments basés sur le champ de déplacement*

|   |           |
|---|-----------|
| <b>II.1. Introduction</b>   | <b>8</b>  |
| II.1.1 Qu'est que c'est la méthode des éléments finis (MEF)                                     | 8         |
| II.1.2 Principes de la MEF  | 9         |
| II.1.3. Les différents types de modèles d'éléments finis  | 10        |
| <b>II.2. Le concept d'analyse de rigidité</b>   | <b>12</b> |
| <b>II.3. Procédure générale pour la formulation de la matrice de rigidité d'un élément fini</b> | <b>14</b> |
| II.3.1. Etape 1: Identifié le problème  | 14        |
| II.3.2. étape 2 : Choisir des fonctions de déplacement convenables                              | 14        |
| II.3.3. Etape 3: Relié les déplacements généraux de l'élément à ses déplacements nodaux         | 15        |
| II.3.4. étape 4 : Relations entre déplacements et déformations cas général                      | 16        |
| II.3.5. étape 5 : relations entre déformations et contraintes                                   | 17        |
| II.3.6. étape 6 : Relié les charges nodales aux déplacements nodaux                             | 17        |
| <b>II.4. Formulation de la matrice de rigidité d'élément fini de poutre</b>                     | <b>19</b> |
| <b>II.5. Eléments finis rectangulaires pour l'étude de l'élasticité plane</b>                   | <b>24</b> |
| II.5.1. l'Elément bilinéaire quadratique (élément rectangulaire à quatre nœuds) (Q4)            | 24        |
| II.5.2. Elément quadrilatéral quadratique (élément rectangulaire à 8 nœuds) (Q8)                | 31        |

|   |    |
|---|----|
| II.5.3. Présentation de l'Élément <b>T6</b> , Élément Triangulaire à 6 nœuds (ou LST linear strain triangle)..... | 33 |
| <b>II.6. Assemblage des matrices de rigidité des éléments</b> .....   | 35 |
| <b>II.7. Détermination de matrice de masse des éléments</b> .....   | 36 |
| II.7.1. La matrice masse d'un élément de poutre.....  | 37 |
| II.7.2. La matrice masse d'un élément rectangulaire.....  | 38 |

## Chapitre III :

### *Analyse dynamique des structures par éléments finis*

|  |    |
|--|----|
| <b>III.1. Introduction</b> .....   | 39 |
| <b>III.2. Dynamique d'une poutre par la méthode analytique</b> .....                           | 39 |
| III.2.1. Déformée d'une poutre en flexion dans l'hypothèse de la résistance des matériaux..... | 39 |
| III.2.2. Equation différentielle de la déformée en terme de chargement linéaire $q(x)$ ....    | 41 |
| III.2.3. Equation différentielle des vibrations d'une poutre.....                              | 42 |
| III.2.3.1. Vibrations libres.....  | 42 |
| III.2.3.1.1. Modes propres de vibration d'une poutre cantilever de section rectangulaire.....  | 44 |
| III.2.3.2. Vibrations forcée.....  | 46 |
| <b>III.3. Etude vibratoire par éléments finis</b> .....  | 47 |
| III.3.1. Élément unidimensionnel (1D) : élément de poutre.....                                 | 47 |
| III.3.1.1. poutre avec des forces verticales et une charge répartie uniforme....               | 47 |
| III.3.1.2. poutre avec des forces verticales et une charge appliquée au niveau des nœuds.....  | 49 |
| III.3.1.3. Matrice de rigidité d'une poutre .....  | 49 |
| III.3.1.4. Poutre avec une force axiale.....   | 50 |
| III.3.2. Eléments bidimensionnels (2D) : contrainte et déformation plane.....                  | 51 |

## Chapitre IV :

### *Validation numérique des éléments à champs de déplacement en dynamique*

|                                 |    |
|---------------------------------|----|
| <b>IV.1. Introduction</b> ..... | 55 |
| <b>IV.2. Cas de tests</b> ..... | 56 |

|   |           |
|---|-----------|
| IV.2.1. Valeurs propres en vibration libre d'un solide rectangulaire .....              | 57        |
| IV.2.1.1. Synoptique du programme de vibration libre d'un solide<br>rectangulaire.....  | 57        |
| IV.2.1.2. Tests et validations.....   | 58        |
| IV.2.2. Vibration forcée d'un solide rectangulaire.....                                 | 61        |
| IV.2.2.1. Synoptique du programme de vibration forcée d'un solide<br>rectangulaire..... | 61        |
| IV.2.2.2. Tests et validations.....   | 62        |
| <b>IV.3. Conclusion.....</b>  | <b>68</b> |
| <br>  |           |
| <b>Conclusions générale.....</b>  | <b>69</b> |
| <br>  |           |
| <b>Références bibliographiques.</b>   |           |

## Liste des figures

**Fig.I.1** : Trapézoïdale de Fourier de p-élément

**Fig.I.2** : Maillages trapézoïdale dans un bar élastique

**Fig.I.3** : Les différents types de Maillages d'un cantilever plan

**Fig.I.4** : Élément quadrilatère courbé

**Fig.I.5** : Élément coque quadrilatère à 8 nœuds de contrainte assumée hybride

**Fig.I.6** : Maillage des éléments triangulaires dans la méthode des éléments finis alpha alternatif (A $\alpha$ FEM)

**Fig.II.1** : Structure treillis (exemple de Pont)..

**Fig.II.2** : Modélisations par éléments finis de structures continues, **a** Mur de barrage, **b** plaque pliée.

**Fig.II.3** : Principes d'analyse par la MEF

**Fig.II.4** : Simple ressort élastique.

**Fig.II.5** : Relation entre force et déplacement pour un simple ressort élastique

**Fig.II.6** : Armature de poutres hyperstatique.

**Fig.II.7.a** : Déplacements transversaux et de rotation à chaque extrémité de l'élément de poutre EP.

**Fig.II.8.b** : Position déformé et les forces et des moments en chaque nœud de poutre EP.

**Fig.II.8.a**: Élément quadrilatère bilinéaire Q4, a et b : Déplacements nodaux.

**Fig.II.8.b** : Élément quadrilatère bilinéaire Q4, c : Forces nodales.

**Fig.II.9** : Déformations dans l'élément fini rectangulaire

**Fig.II.10** : Élément quadratique quadrilatéral Q8

**Fig.II.11**: Élément de type T6 et ses 12 degrés de liberté

**Fig.II.12** : deux éléments de poutre 1 et 2 avec  $L_1$  et  $L_2$

**Fig.III.1** : Géométrie d'une poutre

**Fig.III.2** : Le moment de flexion

**Fig.III.3** : L'équilibre mécanique du tronçon de longueur  $dx$  soumis au chargement  $q(x)$ .

**Fig.III.4** : Vibration libre d'une poutre cantilever

**Fig.III.5** : courbe d'équation de caractéristique

**Fig.III.6 :** Vibration forcée d'une poutre cantilever

**Fig.III.7 :** Mince élément de poutre

**Fig.III.8 :** Poutre avec une force axiale

**Fig.III.9 :** (a) Mur de cisaillement avec des ouvertures. (b) L'élément typique rectangulaire à quatre nœuds d'angle

**Fig.IV.1:** Géométrie et maillage de la poutre.

**Fig.IV.2 :** Synoptique du programme de vibration libre d'un solide rectangulaire

**Fig.IV.3 :** Maillage de (3×1) et l'élément Q4

**Fig.IV.4:** Maillage de (5×1) et l'élément Q4

**Fig.IV.5:** Maillage de (3×1) et l'élément Q8

**Fig.IV.6:** Maillage de (5×1) et l'élément Q8

**Fig.IV.7:** Maillage de (3×1) et l'élément T6

**Fig.IV.8:** Maillage de (5×1) et l'élément T6

**Fig.IV.9 :** Synoptique du programme de vibration forcée d'un solide rectangulaire (masse ponctuelle)

**Fig.IV.10 :** Géométrie et maillage de la poutre cantilever soumise à une vibration forcée

**Fig.IV.11 :** Vibration forcée d'un solide rectangulaire " déplacement par rapport au temps pour l'élément Q8" Test 1

**Fig.IV.12 :** Vibration forcée d'un solide rectangulaire " déplacement par rapport au temps pour l'élément Q8" Test 1

**Fig.IV.13 :** La convergence entre l'élément Q8 et T6

**Fig.IV.14 :** Géométrie et maillage de solide rectangulaire soumis à une vibration forcée

**Fig.IV.15 :** Sollicitation harmonique "Les forces par rapport au temps"

**Fig.IV.16 :** Vibration forcée d'un solide rectangulaire " déplacement par rapport au temps pour l'élément Q8" Test 2

**Fig.IV.17 :** Vibration forcée d'un solide rectangulaire " déplacement par rapport au temps pour l'élément Q8" Test 2

## *Liste des tableaux*

**Tableau.IV.1:** Valeurs propres de la poutre cantilever cas de déformation plane.

**Tableau.IV.2:** Vibration forcée d'un solide rectangulaire "déplacement par rapport au temps"

**Tableau.IV.3 :** Vibration forcée d'un solide rectangulaire avec masse localisée " déplacement par rapport au temps et forces".



## *Nomenclature et Indices*

A, S : Aire

[A] : Matrice associée à la fonction de déplacement

[B] : Matrice reliant les déformations de l'élément à ses déplacements nodaux

[D] : Matrice d'élasticité

$D_x, D_y, D_{xy}, D_1$  : Rigidités de flexion d'une plaque

E : Module d'Young

F : Force

{F} : Vecteur des forces nodales

$F_x, F_y, F_z$  : Forces dans les directions x, y et z

G : Module de Coulomb

[H] : Matrice reliant contraintes et déplacements

I : Deuxième moment de l'aire

k : Rigidité

$k_{ij}$  : Terme de [K] situé sur la ligne i de la colonne j

[K] Matrice de rigidité

L : Longueur

$L_1, L_2, L_3$  : Coordonnées barycentriques

$M_x, M_y, M_{xy}$  : Moments de flexion interne

$N_x, N_y$  : Fonctions de pondération (chapitre 1)

t : Épaisseur (t pour « thickness »)

[T] : Matrice de changement de coordonnées ou de base

$T_x, T_y, T_{xz}$  : Moments le long des axes  $x, y$  et  $z$

$u, v, w$  : Déplacements le long des axes  $x, y$  et  $z$

$x, y, z$  : Système de coordonnées cartésiennes rectangulaires

$\alpha_1, \alpha_2$  : Constantes utilisées dans la fonction de déplacement

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  : Déformations de cisaillement

$\delta$  : Déplacement

$\{\delta\}$  : Vecteur des déplacements nodaux

$\Delta$  : Aire de l'élément

$\varepsilon$  : Déformation

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  : Déformations directes

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$  : Rotations autour des axes  $x, y$  et  $z$

$\phi_x, \phi_y, \phi_z$  : Angles entre les axes des systèmes de coordonnées local et global

$\sigma$  : Contrainte

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  : Contraintes directes

$\tau_x, \tau_y, \tau_z$  : Contraintes de cisaillement

$\nu$  : Coefficient de Poisson

[ ] : Désigne une matrice

{ } : Désigne un tableau unidimensionnel, vecteur ligne ou colonne

[<sup>e</sup>] {<sup>e</sup>} : Matrice, vecteur se rapportant à un seul élément

[ ]<sup>T</sup> : Transposée d'une matrice

{<sub>i</sub>},  $x_i$  : Désigne des quantités associées au nœud  $i$

( $x, y$ ) : Désigne des quantités fonctions de  $x$  et de  $y$

[ ]<sup>-1</sup> : Inverse u une matrice

| <i>Abréviation</i> | <i>Signification</i>                              |
|--------------------|---|
| MEF                | Méthode d'éléments finis.                         |
| AVMEF              | Analyse vibratoire par méthode des éléments finis |
| Q4                 | Élément rectangulaire à 4 nœuds.                  |
| Q8                 | Élément rectangulaire à 8 nœuds.                  |
| E-P                | Élément poutre.                                   |
| T6                 | Élément Triangulaire à 6 nœuds                    |
| DDL                | Degré De Liberté                                  |
| 1D                 | unidimensionnel                                   |
| 2D                 | bidimensionnel                                    |

## Introduction générale

Pour évaluer les caractéristiques vibratoires dans la conception des produits, des pièces mécaniques et des structures, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement dynamique de systèmes physiques complexes. Il peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système.

Les sciences de l'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermique...) permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions.

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur.

La méthode des éléments finis subit un développement rapide dans plusieurs directions depuis son apparition en 1956, plus exactement après les publications de Turner, Clough, Martin et Topp [1] qui ont introduit le concept d'élément fini et le travail de Argyris, et Kesly [2] qui systématisa l'utilisation de la notion d'énergie dans l'analyse des structures.[22]

En effet l'utilisation des éléments finis à champs de déplacement pour l'analyse statique, non linéaires et vibratoire connaît une certaine extension fantastique qui va de pair avec l'évolution de l'industrie. Dans le contexte d'avoir de bons résultats dans l'analyse structurale, l'ingénieur a besoin de plus en plus aux outils numériques de simulation par éléments finis à la place de outils de prototypage ou expérimentale qui sont très coûteux.

Dans ce travail de mémoire une investigation dans le comportement dynamique des éléments à champs de déplacement **Q4** (élément rectangulaire à **Quatre** nœuds), **Q8** (élément

rectangulaire à **huit** nœuds), **EP** (**É**lément **P**outre) et l'élément à champs de déplacement **T6** (élément **T**riangulaire à **6** nœuds) dans l'analyse vibratoire libre et forcée est décrite.

Avec l'outil informatique, on utilise la programmation *FORTRAN* pour tester les performances de ces éléments dans les problèmes vibratoires des structures.

Les solutions d'éléments finis obtenus pour ces problèmes sont comparées aux valeurs analytiques proposées en dynamique des structures.

Les résultats obtenus à l'aide de l'élément **T6** sont aussi comparés à celles des éléments **Q4**, **Q8**, et **Élément Poutre** respectivement.

- **L'objectif**

La prédiction du comportement de l'élément **T6** en analyse vibratoire libre et forcée des solides rectangulaires par la méthode des éléments finis est l'objectif essentiel de ce travail.

- **Plan de mémoire**

Le mémoire est divisé en quatre chapitres :

Le premier est consacré à une analyse bibliographique dont laquelle on donne un contexte historique sur les travaux antérieures en dynamique.

Le deuxième chapitre est purement consacré à la formulation de quelques éléments basés sur de champs de déplacements.

Dans le troisième chapitre est consacré au Analyse dynamique des structures par la méthode d'éléments finis et un petit rappel sur les méthodes analytiques.

Le quatrième chapitre est réservé aux validations de l'élément **T6** en analyse vibratoire libre et forcée. Pour cela différents tests sont illustrés dans cette étude.

# CHAPITRE I :

## ÉTUDES BIBLIOGRAPHIQUES

### I.1. INTRODUCTION

Le domaine d'éléments finis est très vaste et il à connu depuis son apparition un développement très rapide, chaque jour il y a de nouveaux éléments qui peut résoudre ce problème ou l'autre.

Dans ce chapitre on fait une analyse bibliographique dont laquelle on donne un contexte historique sur les travaux antérieurs sur l'utilisation de la méthode des éléments finis dans l'analyse vibratoire des structures et revue sur les différents éléments utilisés ou proposés.

### I.2. REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

En 2003 A.Y.T. Leung, Zhu Bin, Jian jin Zheng, Hao Yang[8], qui utilisent un élément appelé *trapézoïdale de Fourier de p-élément* pour l'analyse des vibrations de solides élastiques à deux dimensions 2D est présentée comme suit :

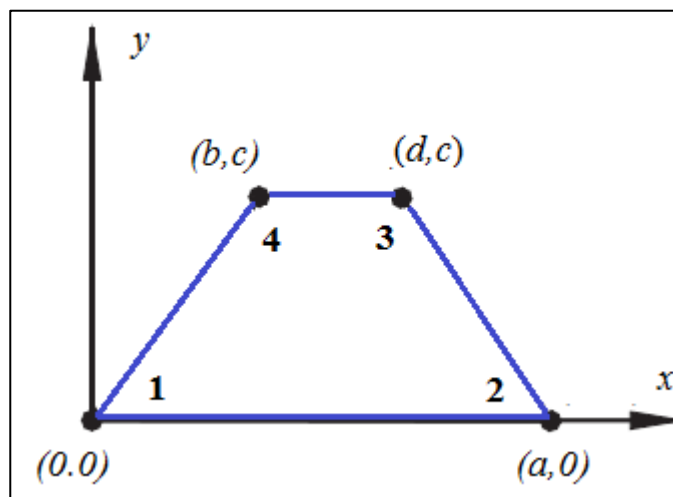


Fig.I.1 : Trapézoïdale de Fourier de p-élément

Les cas des tests utilisés est la vibration libre longitudinale d'une barre élastique et d'une poutre cantilever plane et la comparaison est faite avec des éléments : linéaire Triangulaire T3, linéaire rectangulaire LR,Q8 et Q6 et avec les formules d'intégration analytique.

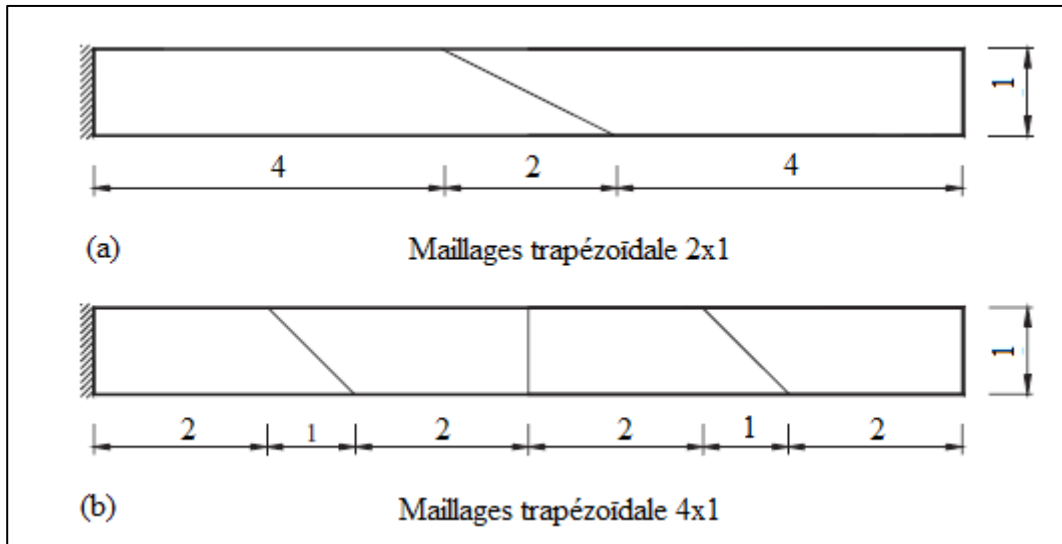


Fig.I.2 : Maillages trapézoïdale dans un bar élastique

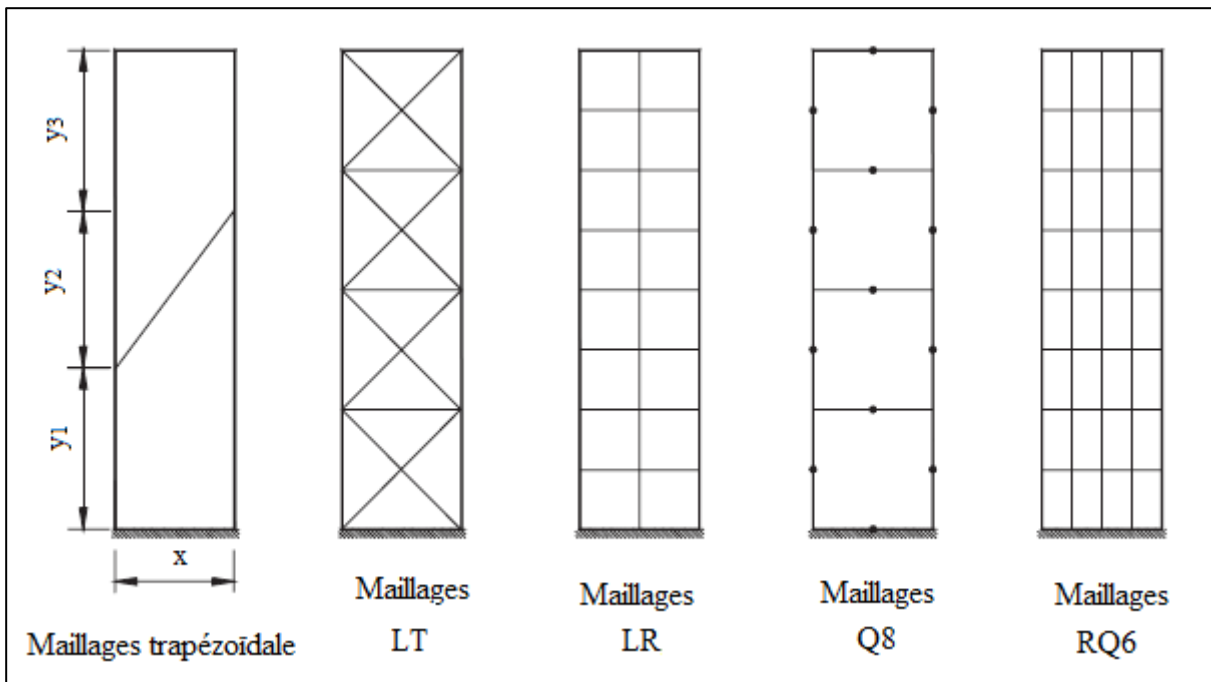


Fig.I.3 : Les différents types de Maillages d'un cantilever plan

Ils montrent que cet élément de Fourier est plus précis que ceux des éléments utilisant la quadrature de Gauss pour les problèmes de vibration dans le plan, et cet élément est plus efficace pour les vibrations de haute fréquence.

En 2006 les auteurs Yeon Seok Choo, Noori Choi Byung, Chai Lee [9], ont proposé des éléments plan quadrilatères et triangulaires élastiques linéaires flexibles, précis et robustes, avec l'introduire des degrés de liberté supplémentaires de rotation.

Ils montrent que les degrés de rotation supplémentaires augmentent la précision et la qualité de robustesse de l'élément développé.

Les travaux de recherche de A. Houmat [10] 2006, ont été consacrés à l'étude de P-Version trigonométrique de la méthode des éléments finis basé sur un *élément quadrilatère courbé* figure (I.4). Cet élément a été développé et appliqué à l'analyse des vibrations libres des structures en membranes de forme arbitraire.

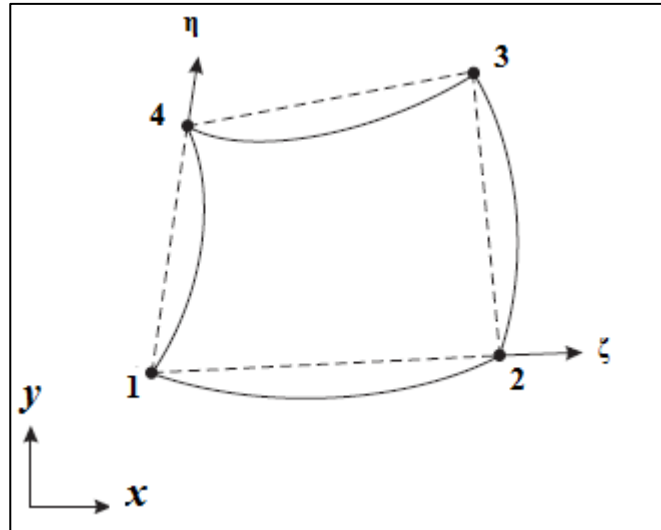


Fig.I.4 : Élément quadrilatère courbe

Des nouvelles fonctions de forme ont été exprimées en termes de fonctions trigonométriques. Le calcul de ces fonctions à des ordres élevés est plus stable par rapport à ceux de polynômes orthogonaux.

Il a calculé les valeurs de fréquence pour les éléments secteurs ouverts et fermés à l'aide de maillages à un élément quadrilatère courbe et a montré que la convergence est rapide et de haute précision par cette méthode. Ces valeurs sont très précises et peuvent servir de base de comparaison pour les autres techniques de calcul.

Les recherches de Kutlu Darılmaz et de Nahit Kumbasar[11] en 2006, ont été consacrées à l'étude d'un élément coque quadrilatère à 8 nœuds de contrainte assumée hybride, avec six degrés de liberté par nœud, et chaque nœud à trois déplacements et trois rotations :



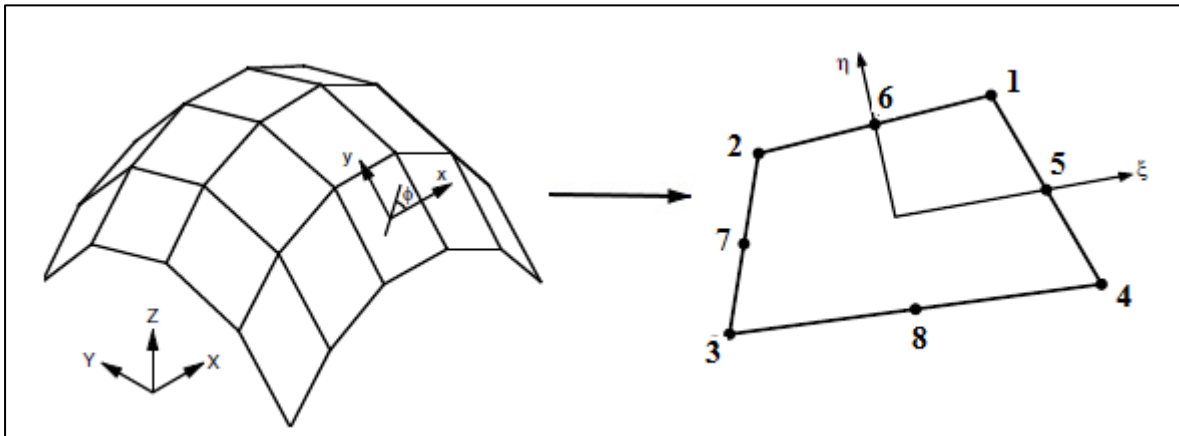


Fig.I.5 : Élément coque quadrilatère à 8 nœuds de contrainte assumée hybride.

Ils ont étudié la performance de l'élément pour différents cas de structures, mais ils ont conditionné l'utilisation de l'élément dans l'analyse statique et vibratoire des structures avec propriétés de matériau (isotrope / orthotrope).

En 2009 N. Nguyen-Thanha, et all [12], ont utilisé la méthode des éléments finis alpha alternatif (A $\alpha$ FEM) pour l'analyse des *vibrations libre et forcée* des structures en utilisant les maillages avec éléments triangulaires (figure.I.6)

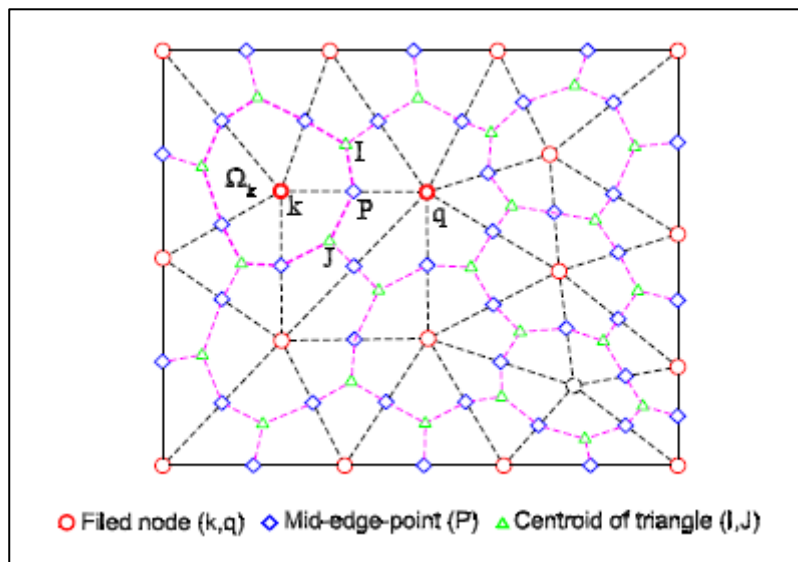


Fig.I.6 : Maillage avec éléments triangulaires dans la méthode des éléments finis alpha alternatif (A $\alpha$ FEM)

La méthode proposée améliore considérablement la précision des éléments finis triangulaires standard et fournit une solution super convergente dans la norme de l'énergie pour l'analyse statique et dynamique des solides dans les problèmes de deux dimensions. Ainsi ils ont trouvé que :

- Les résultats numériques de la  $A\alpha$ FEM utilisant des éléments triangulaires sont toujours plus précis que celles de FEM-T3 et même plus précis que ceux de la FEM-Q4 avec le même nombre de nœuds. Les taux de convergence de la norme de l'énergie sont asymptotiquement les mêmes que celle de cette technique standard FEM.
- Dans la fréquence propre et l'analyses des vibrations forcées, la  $A\alpha$ FEM est toujours stable et donne des résultats plus précis que la méthode correspondante FEM-T3 et FEM-Q4;
- La méthode  $A\alpha$ FEM est facile à mettre en œuvre dans un programme d'éléments finis et des maillages triangulaires sont idéals pour les domaines de problèmes complexes.

## **CHAPITRE II :**

### **FORMULATION DE QUELQUES ÉLÉMENTS BASÉS SUR LE CHAMP DE DÉPLACEMENT**

Ce chapitre est une synthèse bibliographique des références [3], [4], [5].

#### **II.1. INTRODUCTION**

##### **II.1.1 Qu'est que c'est la méthode des éléments finis (MEF)[3] et [5]**

La méthode des éléments finis est une technique d'analyse numérique qui permet d'obtenir des solutions approchées dans une large variété de problèmes d'ingénieries .Tout au début cette méthode était développée pour étudier les structures complexes. [5]

Un grand nombre de structures utilisées par les ingénieurs sont composées d'une réunion de parties indépendantes reliées entre elles par des points. Nous appellerons de telles structures des «structures treillis», les points auxquels les parties indépendantes sont reliées étant communément appelés *nœuds*. [3]

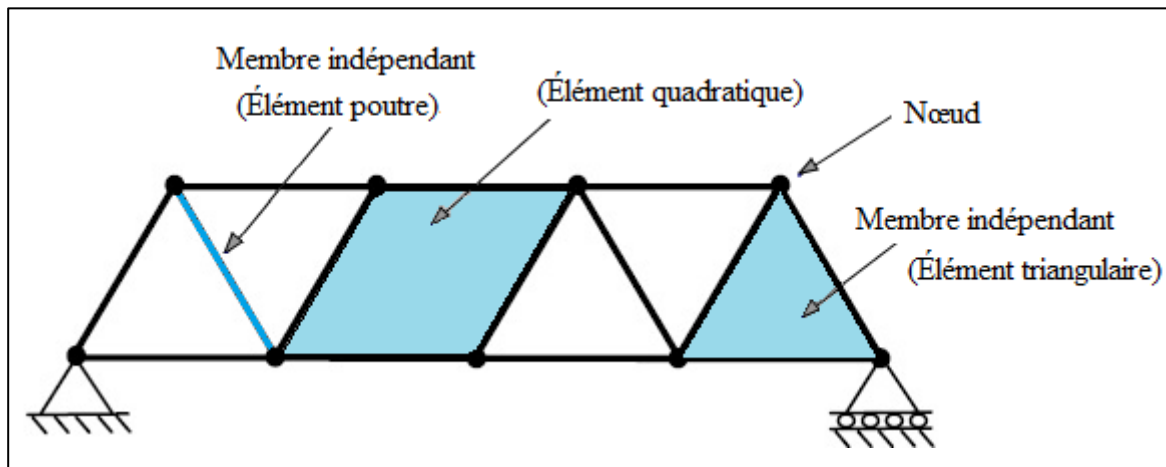


Fig. II.1 : Structure treillis (exemple de Pont).

L'analyse de telles structures peut s'effectuer en considérant d'abord le comportement de chaque partie indépendante puis en assemblant ces parties de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

Mais par la suite elle a été étendue et appliquée dans le champ des mécaniques continues et les ingénieurs ont souvent besoin d'étudier des structures continues, telles que les poutres épaisses, les plaques sujettes à la flexion, les plaques pliées et les coques.

Dans la méthode des éléments finis, les parties continues sont représentées comme des structures composées d'éléments indépendants reliés uniquement par les nœuds (fig. II.2).

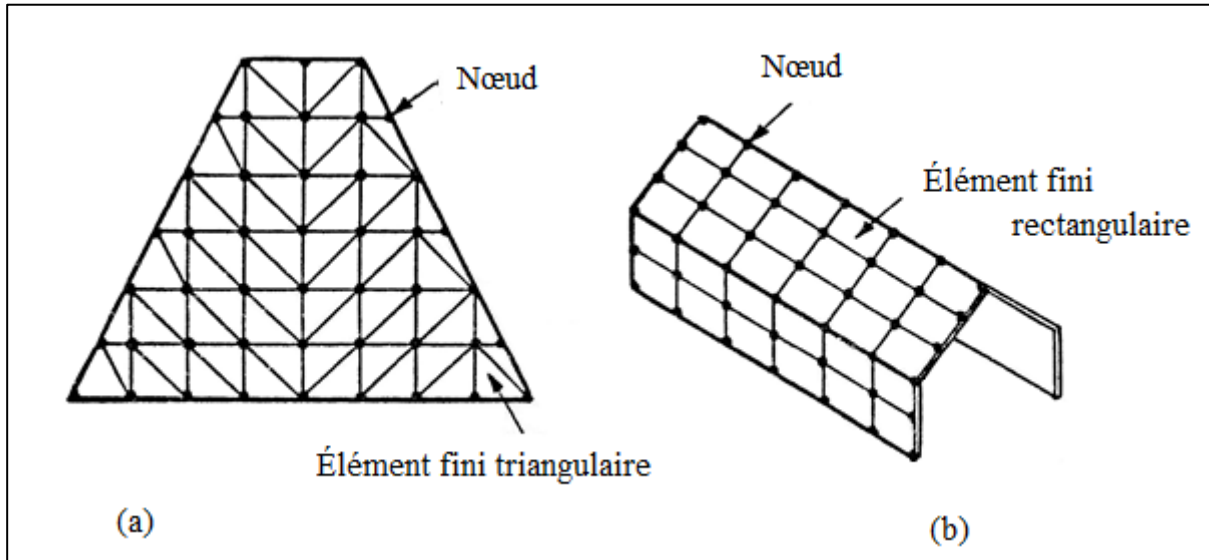


Fig. II.2 : Modélisations par éléments finis de structures continues,  
*a* Mur de barrage, *b* plaque pliée.

### II.1.2 Principes de la MEF :

- La MEF est basée sur une idée simple : subdiviser (**discrétiser**) une forme complexe en un grand nombre de sous domaines élémentaires de forme géométrique simple (**éléments finis**) interconnectés en des points appelés **nœuds**.
- Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous assemblons ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.
- La MEF utilise des approximations simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.
- Les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation.

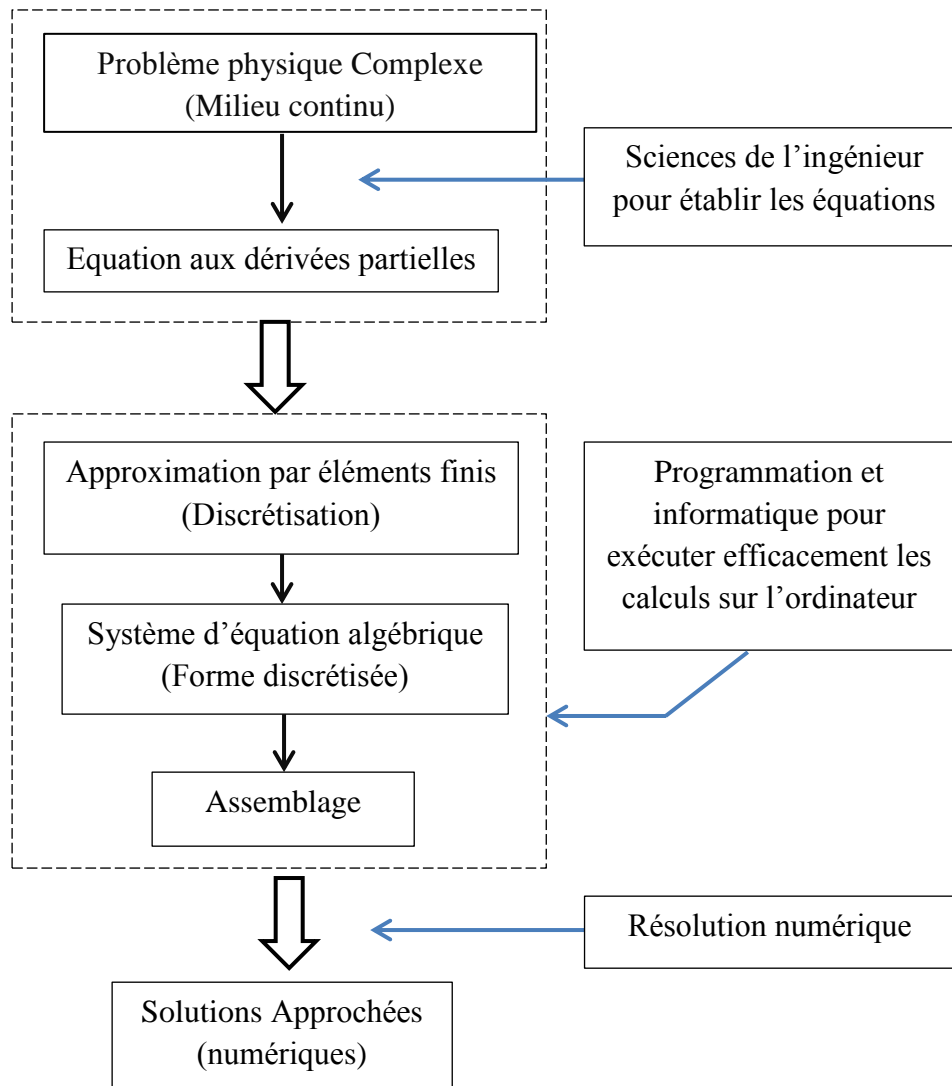


Fig.II.3 : Principes d'analyse par la MEF

### II.1.3. Les différents types de modèles d'éléments finis: [6]

Les modèles d'élément finis les plus courants sont les suivants :

#### a) *Modèle déplacement*

Les éléments finis de cette catégorie sont basés sur une interpolation du champ des déplacements étendue à tout l'élément, il en résulte que les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans la structure, alors que les contraintes ne peuvent être connues que par certains moyens et ne sont pas continuées aux frontières. Le modèle déplacement est le plus populaire, le plus connu et le plus développé. Dans ce modèle, les fonctions de déplacements sont choisies en utilisant le triangle de pascal, de telle sorte que le nombre total

de constantes indépendantes soit égal au nombre total de degrés de libertés de l'élément, donc l'invariance géométrique est maintenue.

### ***b) Modèle contrainte***

A l'inverse du précédent, un tel élément est construit à partir d'une approximation du seul champ des contraintes. La connaissance des contraintes est alors détaillée, celle des déplacements sommaire. Ce modèle est rarement employé, car il conduit en général, à qualité égale, à un plus grand nombre d'inconnues que le modèle déplacement.

### ***f) Modèle déformation***

Pour obtenir une convergence satisfaisante, les éléments dérivant de l'approche déplacement exigent un grand nombre d'éléments dans le maillage des structures. Par conséquent, l'approche basée sur le modèle déformation a été développée, pas seulement pour les éléments courbés mais aussi pour les structures plates. L'approche est basée sur le calcul des termes exacts qui représentent tous les modes du corps rigide, les autres composantes des fonctions de déplacements sont basées sur la forme des fonctions de déformations indépendantes. Au fur et à mesure qu'on vérifie les équations de compatibilité, ce modèle permet de proposer des champs de déformations en fonction de paramètres propres à la structure (coefficient de poisson par exemple) tout en vérifiant les équations d'équilibre. Cette approche mène, généralement, à la représentation des déplacements par un polynôme d'ordre élevé sans avoir besoin de degrés de liberté additionnels (internes et inutiles). Une convergence plus rapide est obtenue habituellement quand les résultats sont comparés avec les éléments du déplacement correspondant, c'est-à-dire, éléments en déplacement qui ont le même nombre total de degré de liberté.

### ***c) Modèle mixte***

Ce modèle est basé sur des approximations indépendantes de deux ou plusieurs champs (déplacements, déformations, contraintes) étendues à tout l'élément ; en général, ce modèle conserve les paramètres inconnus de tous les champs comme degrés de liberté ; la mise au point peut être longue et coûteuse ; il peut toutefois être d'excellente qualité.

Le modèle mixte est parfois utilisé pour corriger certains défauts du modèle déplacement : on interpole, par exemple, certaines composantes internes de la déformation pour améliorer la précision au niveau des contraintes ; les paramètres correspondants peuvent alors être éliminés par condensation, de sorte que l'élément reprend l'aspect d'un modèle déplacement.

## II.2. LE CONCEPT D'ANALYSE DE RIGIDITÉ

Le plus simple composant de structure avec lequel la plupart des ingénieurs sont familiarisés est le lien articulé à ses deux extrémités qui possède les mêmes caractéristiques que le ressort élastique (fig. II.4). Pour un tel élément il existe une relation directe entre la force  $F$  dans le ressort et le déplacement  $\delta$  de son extrémité libre. Cette relation prend la forme de l'équation II.2.1 :

$$F = k \cdot \delta \quad (\text{II.2.1})$$

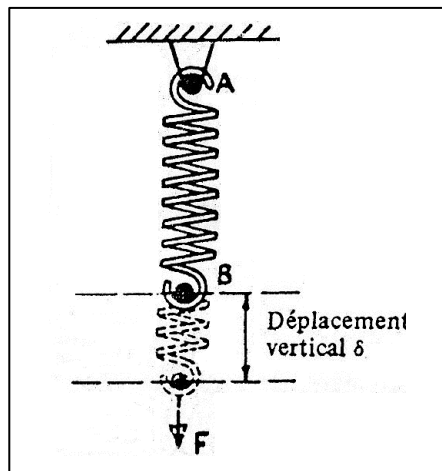


Fig. II.4. - Simple ressort élastique.

La quantité  $k$  est appelée la rigidité (ou raideur) du ressort et correspond à la pente de la courbe: force en fonction du déplacement (fig. II.5). Connaissant les valeurs de la rigidité et de la force appliquée, l'équation II.2.1 donne le déplacement.

$$\delta = \frac{1}{k} F \quad (\text{II.2.2})$$

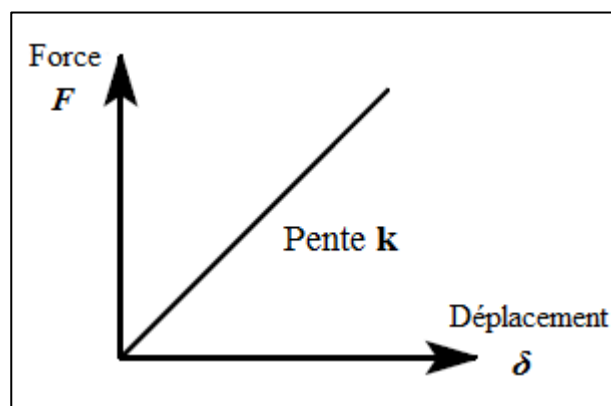


Fig. II.5. - Relation entre force et déplacement pour un simple ressort élastique.

Mais tandis que la valeur d'un seul déplacement est suffisante pour caractériser complètement l'état de déformation d'un simple ressort (fig. II.5), il est par contre nécessaire de déterminer les déplacements des joints B, C, D et E lorsqu'on s'intéresse à des structures plus compliquées comme la structure hyperstatique articulée de la figure II.6

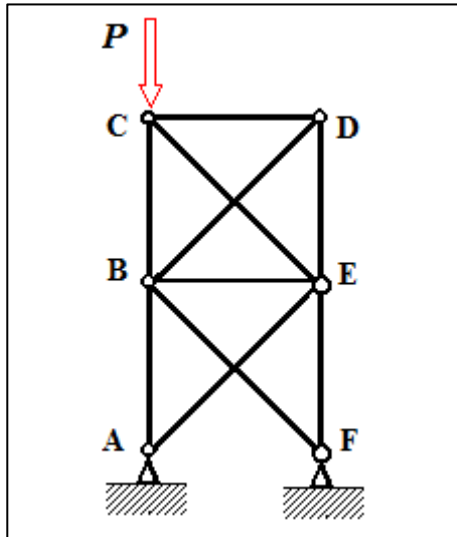


Fig. II.6. - Armature de poutres hyperstatique.

Afin de pouvoir évaluer les contraintes existant dans les différentes parties. Dans toute la suite, des points comme B, C, D et E seront appelés nœuds. Supposons que, pour une structure complète, on puisse déterminer une quantité similaire à  $k$  dans l'équation II.2.1 ; il est alors nécessaire d'écrire cette dernière sous la forme matricielle de l'équation II.2.3.

Les quantités  $\{F\}$  et  $\{\delta\}$  sont respectivement les vecteurs représentant les charges et les déplacements nodaux. On a alors :

$$\{F\} = [K] \{\delta\} \quad (\text{II.2.3})$$

Où la quantité  $[K]$  est la rigidité de la structure complète.

Ce concept est la base de la méthode d'analyse des rigidités. La quantité  $[K]$  est appelée la matrice de rigidité pour la structure et relie les forces nodales appliquées  $\{F\}$  aux déplacements nodaux inconnus  $\{\delta\}$ . Dans le cas de la structure simple de la figure II.4 pour laquelle un seul déplacement est possible, cette matrice se réduit à un seul élément et les vecteurs  $\{F\}$  et  $\{\delta\}$  contiennent un terme chacun.

Et nous donnerons des détails sur la manière d'assembler cette matrice pour une structure complète. Nous allons d'abord examiner la forme prise par la matrice de rigidité



dans le cas de simples parties articulées. En effet, la bonne compréhension de l'analyse matricielle des structures comprenant de simples parties rectilignes donne la clé de toute la ; méthode des éléments finis.

### II.3. PROCÉDURE GÉNÉRALE POUR LA FORMULATION DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ D'UN ÉLÉMENT FINI

On traite principalement de la première étape de l'analyse des rigidités d'une structure ou d'un composant, c'est-à-dire la formulation de la matrice de rigidité  $[K^e]$  de l'élément.

On présente les sept étapes de base utilisées pour le calcul de la rigidité d'un élément fini.

#### II.3.1. ETAPE 1: Identifié le problème :

L'étape I consiste à choisir un système de coordonnées et une numérotation des nœuds appropriés pour l'élément.

Puisque l'on connaît les degrés de liberté de l'élément fini choisi, on peut déterminer le vecteur de déplacement nodal  $\{\delta^e\}$  et le vecteur de charge nodale  $\{F^e\}$ . La matrice de rigidité  $[K^e]$  pour cet élément est alors définie par l'équation II.3.1.

$$\{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\} \quad (\text{II.3.1})$$

#### II.3.2. ETAPE 2 : Choisir des fonctions de déplacement convenables

On choisit une fonction de déplacement qui définit de façon unique l'état de déplacement de tous les points de l'élément.

Ce modèle peut être représenté de façon commode par une expression polynomiale, et puisque son but est d'exprimer les déplacements  $\{\delta(x,y)\}$  de n'importe quel point en termes de déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$  elle doit contenir un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté de l'élément. L'état des déplacements en chaque point  $(x,y)$  de l'élément peut être décrit sous forme matricielle par l'équation II.3.2.

$$\{\delta(x,y)\} = [f(x,y)] \{\alpha\} \quad (\text{II.3.2})$$

où  $\{\alpha\}$  est le vecteur colonne des coefficients encore inconnus de la fonction polynôme  $[f(x,y)]$ .

### II.3.3. ETAPE3: Relier les déplacements généraux de l'élément à ses déplacements nodaux

On exprime maintenant les coefficients de la fonction de déplacement  $\{\alpha\}$  en fonction des déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$  et représentent dans l'équation II.3.2 on relie les déplacements des points de l'élément aux déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$ . Cela donne par exemple pour le nœud 1:

$$\{\delta_1^e\} = \{\delta(x_1, y_1)\} = [f(x_1, y_1)]\{\alpha\} \quad (\text{II.3.3})$$

En procédant de façon similaire pour tous les autres nœuds on obtient pour n nœuds par exemple :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1^e\} \\ \{\delta_2^e\} \\ \vdots \\ \{\delta_n^e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ \vdots \\ [f(x_n, y_n)] \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (\text{II.3.4})$$

Ou

$$\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\} \quad (\text{II.3.5})$$

Cela donne :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (\text{II.3.6})$$

On remplace  $\{\alpha\}$  par sa valeur dans l'équation II.3.2 et on obtient relation cherchée entre les déplacements  $\{\delta(x, y)\}$  de tous les points de l'élément et les déplacements nodaux :

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)][A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (\text{II.3.7})$$

### II.3.4. ETAPE 4 : Relations entre déplacements et déformations cas général

On relie maintenant les déformations  $\varepsilon(x, y)$  du point  $(x, y)$  de l'élément aux déplacements  $\delta(x, y)$  et donc aussi aux déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$ .

Les déformations aux différents points de l'élément peuvent être obtenues à partir de la fonction de déplacement par une différentiation dont la forme exacte dépend du type de problème traité. Par exemple, pour un problème d'élasticité plane, les déformations correspondent aux dérivées premières des déplacements, tandis que pour les problèmes de flexion, les déformations sont associées à la courbure de l'élément et correspondent aux dérivées secondes. En général

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \{\text{différentielle de } \delta(x, y)\} \quad (\text{II.3.8})$$

On obtient la forme exacte de cette expression pour chaque classe de problème à partir de la théorie de l'élasticité. En utilisant l'expression de l'équation II.3.6 pour  $\{\delta(x, y)\}$  et en remarquant que  $[A]^{-1}$  et  $\{\delta^e\}$  sont indépendants de  $x$  et  $y$ , le vecteur de déformation le  $\varepsilon(x, y)$ , est donné par :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [\text{différentielle de } f(x, y)][A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (\text{II.3.9})$$

En posant la matrice différentielle de  $f(x, y)$  égale à  $[C]$ , cette équation peut être écrite de la façon suivante :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [C][A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (\text{II.3.10})$$

Où, en général,  $[C]$  contiennent des termes en  $x$ , et  $y$ .

C'est la relation cherchée entre les déformations en chaque point de l'élément et les déplacements nodaux. Avec :

$$[C][A]^{-1} = [B] \quad (\text{II.3.11})$$

Cette relation devient :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B]\{\delta^e\} \quad (\text{II.3.12})$$

### II.3.5. ETAPE 5 : Relations entre déformations et contraintes

Les contraintes internes à l'élément  $\{\sigma(x,y)\}$  sont maintenant reliées aux déformations le  $\{\varepsilon(x,y)\}$ .

Puisque l'on connaît déjà une relation entre les déformations internes et les déplacements nodaux  $\{\delta^e\}$ , on peut relier les contraintes internes  $\{\sigma(x,y)\}$  à ces derniers. Dans cette étape, il est clair que les propriétés élastiques de l'élément devront être considérées. En général,

$$\{\sigma(x,y)\} = [D] \{\varepsilon(x,y)\} \quad (\text{II.3.13})$$

Où  $[D]$  est la matrice d'élasticité et contient les propriétés élastiques de l'élément, c'est-à-dire des quantités telles que le module d'Young' d'élasticité transversale  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . Puisque l'on sait à partir de l'équation II.3.12 que  $\{\varepsilon(x,y)\} = [B] \{\delta^e\}$

$$\{\sigma(x,y)\} = [D][B] \{\delta^e\} \quad (\text{II.3.14})$$

### II.3.6. ETAPE 6 : Relié les charges nodales aux déplacements nodaux

Les contraintes internes  $\{\sigma(x,y)\}$  sont maintenant remplacées par les charges nodales  $\{F^e\}$  statiquement équivalentes et ces dernières sont reliées aux déplacements nodaux, définissant ainsi la matrice de rigidité  $[K^e]$  de l'élément,

On utilise le principe des travaux virtuels pour déterminer l'ensemble des charges nodales qui est statiquement équivalent aux contraintes internes. La condition d'équivalence peut être exprimée comme suit : durant n'importe quel déplacement virtuel imposé à l'élément, le travail extérieur total produit par les charges nodales doit être égal au travail interne total des contraintes. On choisit un ensemble arbitraire de déplacements nodaux représenté par le vecteur  $\{\delta^{*e}\}$  où

$$\{\delta^{*e}\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1^{*e}\} \\ \{\delta_2^{*e}\} \\ \vdots \\ \{\delta_n^{*e}\} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3.15})$$

Le travail extérieur  $W_{\text{ext}}$  des forces nodales est donné par :

$$\begin{aligned}
W_{\text{int}} &= \{\delta_1^{*e}\} \{F_1^e\} + \{\delta_2^{*e}\} \{F_2^e\} + \dots + \{\delta_n^{*e}\} \{F_n^e\} \\
&= \{\delta^{*e}\}^T \{F^e\}
\end{aligned}
\tag{II.3.16}$$

Si les déplacements arbitrairement imposés produisent des déformations  $\{\varepsilon(x, y)^*\}$  aux points de l'élément où les contraintes réelles sont les  $\{\sigma(x, y)\}$ , alors le travail interne par unité de volume est donné par :

$$W_{\text{int}} = \{\varepsilon(x, y)^*\}^T \{\sigma(x, y)\} \tag{II.3.17}$$

et le travail interne total est obtenu en intégrant sur le volume total de l'élément c'est-à-dire

$$\int^r W_{\text{int}} = d(\text{vol}) = \int^r \{\varepsilon(x, y)^*\}^T \{\sigma(x, y)\} d(\text{vol}) \tag{II.3.18}$$

Maintenant, on sait par l'équation IV que les déformations en chaque point de l'élément sont exprimées en fonction des déplacements nodaux par  $\{\varepsilon(x, y)\} = [B] \{\delta^e\}$ . D'où, les  $\{\delta^{*e}\}$  étant imposés, les déformations correspondantes s'expriment par :

$$\{\varepsilon(x, y)^*\} = [B] \{\delta^{*e}\} \tag{II.3.19}$$

De plus l'équation II.3.12 relie les contraintes réelles dans l'élément aux déplacements nodaux par :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D][B] \{\delta^e\} \tag{II.3.20}$$

L'opération finale consiste à évaluer travail interne et travail externe produits pendant les déplacements virtuels  $\{\delta^{*e}\}$ . Puisque le principe de base des déplacements virtuels est valide pour n'importe quel système de déplacements appliqué, on peut choisir ce dernier comme l'on veut. Dans le cas présent, il est commode de supposer les déplacements nodaux égaux à l'unité. On obtient alors :

$$\{F^e\} = \left[ \int^v [B]^T [D][B] d(\text{vol}) \right] \{\delta^e\} \tag{II.3.21}$$

En comparant l'équation II.3.21 avec l'équation l'écrite à nouveau ci-dessous,

$$\{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\} \quad (\text{II.3.22})$$

Il est clair que la matrice de rigidité  $[K^e]$  de l'élément est donnée par l'expression :

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] d(vol) \quad (\text{II.3.23})$$

Donc, pour évaluer la matrice de rigidité de l'élément dans le cas général, il est nécessaire de calculer la matrice  $[B]$  donnée dans l'étape 4 à partir des matrices  $[A]^{-1}$  et  $[C]$ , et la matrice  $[D]$  donnée dans l'étape 5 ; puis il suffit de faire les multiplications et les intégrations définies par l'équation II.3.21.

#### II.4. FORMULATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE D'ÉLÉMENT FINI DE POUTRE : [3], [4]

On considère un Élément de Poutre avec une section transversale uniforme faisant partie d'une structure continue. Pour un tel élément on peut utiliser le système de coordonnées et la numérotation de la figure II.7.a

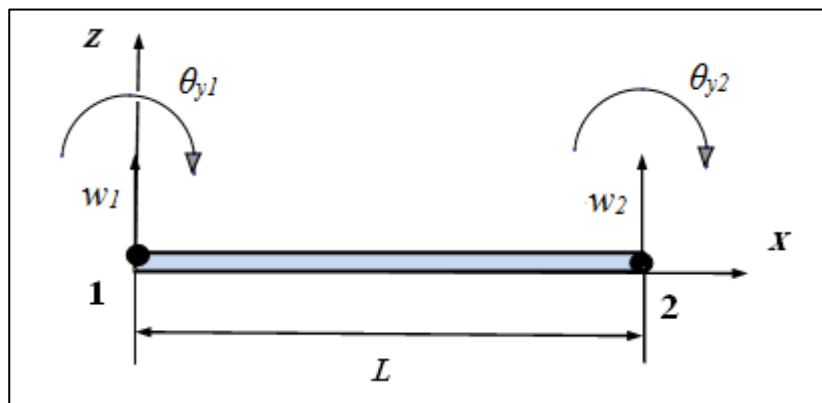


Fig. II.7.a : Déplacements transversaux et de rotation à chaque extrémité de l'élément de poutre EP.

L'élément de poutre de la figure II.7.b La poutre est chargée par des forces et des moments en chaque nœud et on suppose qu'elle a une rigidité uniforme à la flexion  $EI$ .

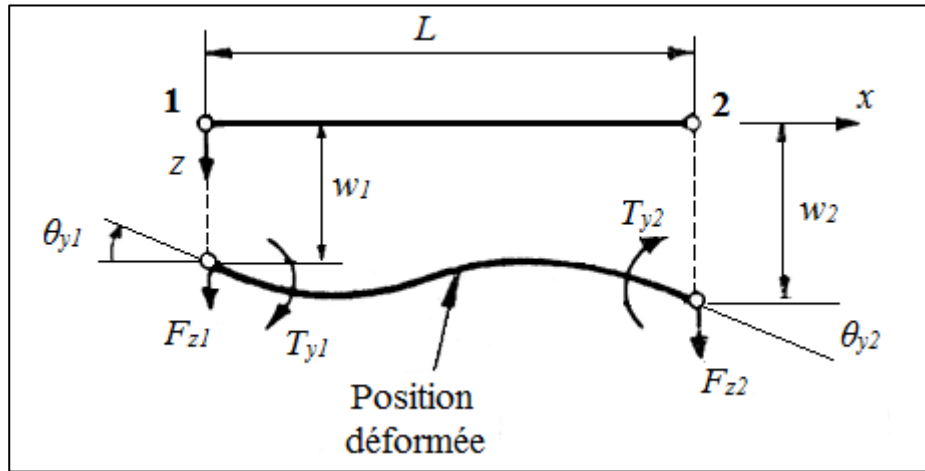


Fig. II.7.b :Position déformé et les forces et des moments en chaque nœud de poutre EP.

On associe aux déplacements transversaux et de rotation à chaque extrémité de l'élément des forces nodales correspondantes, le moment  $T_y$  et la force de cisaillement  $F_z$  (fig. II.7.b).

Les vecteurs pour les déplacements et les forcés au nœud 1 peuvent être respectivement écrits de la façon suivante :

$$\left\{ \delta_1^e \right\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix}, \quad \left\{ F_1^e \right\} = \begin{Bmatrix} F_{z1} \\ T_{y1} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4.1})$$

Les vecteurs complets des déplacements nodaux et des charges nodales pour la poutre 1-2 prennent donc la forme

$$\left\{ \delta^e \right\} = \begin{Bmatrix} \left\{ \delta_1^e \right\} \\ \left\{ \delta_2^e \right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix}, \quad \left\{ F^e \right\} = \begin{Bmatrix} \left\{ F_1^e \right\} \\ \left\{ F_2^e \right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{z1} \\ T_{y1} \\ F_{z2} \\ T_{y2} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4.2})$$

Le déplacement de n'importe quel point de l'élément peut être défini par les deux composantes  $w$  et  $\theta_y$  de déplacement et de rotation.

Ainsi le vecteur déplacement est donné par :

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4.3})$$

Puisque l'élément possède quatre degrés de liberté ( $w_1$ ,  $\theta_{y1}$ ,  $w_2$  et  $\theta_{y2}$ ), quatre coefficients inconnus doivent apparaître dans le polynôme représentant le modèle du déplacement. Supposons que  $w$  soit donné par l'équation II.4.4.

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (\text{II.4.4})$$

Où  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$  sont des coefficients non encore déterminés. Puisque  $\theta_y = dw/dx$ , on obtient:

$$\theta_y = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 \quad (\text{II.4.5})$$

Ainsi à partir des équations II.4.4 et II.4.5 on obtient le vecteur de déplacements  $\{\delta(x,y)\}$  donné par l'équation II.4.6.

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4.6})$$

qui définit la matrice  $[f(x, y)]$  et le vecteur  $\{\alpha\}$  de l'équation II.3.2.

Pour le simple élément de poutre de la figure II.6, les coordonnées des nœuds sont 0 et  $L$ . L'expression choisie pour définir  $\{\delta(x, y)\}$  (équation II.4.4) est :

$$\begin{aligned} w &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \\ \theta_y &= \frac{dw}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 \end{aligned} \quad (\text{II.4.7})(\text{II.4.8})$$

Au nœud  $I$ ,  $x = 0$  et donc

$$w_1 = \alpha_1 \text{ et } \theta_{y1} = \alpha_2$$



Au nœud 2,  $x = L$  et donc

$$w_2 = \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3$$

$$\theta_{y,2} = \alpha_2 + 2\alpha_3 L + 3\alpha_4 L^2$$

Cela donne sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4.9})$$

La matrice  $[A]^{-1}$  correspond à la matrice carrée d'ordre 4 de l'équation II.4.9.

Dans ce cas la seule «déformation» à considérer est la courbure autour de l'axe des y, Donc, à partir de l'équation II.4.4, le vecteur de déformation est donné par :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \frac{-d^2 w}{dx^2} = -2\alpha_3 - 6\alpha_4 x \quad (\text{II.4.10})$$

Et sous forme matricielle :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4.11})$$

On a établi à l'étape 3 que  $\{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta\}$ . En remplaçant  $\{\alpha\}$  par sa valeur dans l'équation II.4.11 on obtient alors :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4.12})$$

Ce qui donne après multiplication matricielle

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^3} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4.13})$$

On a ainsi obtenu la matrice  $[B]$  de l'équation II.3.13.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^3} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.4.14})$$

Donc, dans ce cas particulier, la matrice  $[D]$  contient un seul terme correspondant à la rigidité de flexion  $EI$ . Cependant, en général,  $[D]$  est d'ordre plus élevé. L'équation II.3.12 devient donc :

$$\{\sigma(x, y)\} = [EI] \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^3} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4.15})$$

Toutes les matrices de cette expression ont déjà été calculées explicitement. La matrice  $[K^e]$ , tirée de l'équation II.3.23 peut donc être obtenue par

$$[K] = \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} [EI] \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^3} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} dx \quad (\text{II.4.16})$$

En effectuant les calculs, on obtient l'équation II.4.17 et l'intégration donne finalement la matrice  $[K^e]$  par l'équation II.4.18.

$$[K^e] = [EI] \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{36}{L^4} - \frac{144x}{L^5} + \frac{144x^2}{L^6} & \frac{24}{L^3} - \frac{84x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} & -\frac{36}{L^4} + \frac{144x}{L^5} - \frac{144x^2}{L^6} & \frac{12}{L^3} - \frac{60x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} \\ \frac{24}{L^3} - \frac{84x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} & \frac{16}{L^2} - \frac{48x}{L^3} + \frac{36x^2}{L^4} & -\frac{24}{L^3} + \frac{84x}{L^4} - \frac{72x^2}{L^5} & \frac{8}{L^2} - \frac{36x}{L^3} + \frac{36x^2}{L^4} \\ \frac{36}{L^4} - \frac{144x}{L^5} + \frac{144x^2}{L^6} & \frac{24}{L^3} - \frac{84x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} & \frac{36}{L^4} - \frac{144x}{L^5} + \frac{144x^2}{L^6} & \frac{12}{L^3} - \frac{60x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} \\ \frac{12}{L^3} - \frac{60x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} & \frac{8}{L^2} - \frac{36x}{L^3} + \frac{36x^2}{L^4} & -\frac{12}{L^3} + \frac{60x}{L^4} - \frac{72x^2}{L^5} & \frac{4}{L^2} - \frac{24x}{L^3} + \frac{36x^2}{L^4} \end{bmatrix} d\delta \quad (II.4.17)$$

$$[K^e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (II.4.18)$$

## II.5.ÉLÉMENTS FINIS POUR L'ÉTUDE DE L'ÉLASTICITÉ PLANE

Les problèmes d'élasticité plane peuvent être divisés en deux groupes distincts, les problèmes de contraintes plans et les problèmes de déformations plans. Dans le premier cas, les structures à une petite épaisseur par rapport à ses autres dimensions et, les contraintes normales au plan sont négligées ; tandis que dans le deuxième cas la structure à une dimension très grande par rapport à ses autres dimensions et la déformation normale au plan de la charge est nulle.

On emploie les étapes de base pour calculer la matrice de rigidité des éléments rectangulaire et triangulaire dans le cas de contraintes et de déformations planes.

### II.5.1.Élément Rectangulaire à Quatre nœuds Q4, (l'Élément bilinéaire quadratique) :

On suppose que l'élément rectangulaire Q4 a des côtés de longueur a et b et une épaisseur t (fig. II.7.a). On utilise le système de numérotation des nœuds de la figure II.7.a.

Puisque pour un problème d'élasticité plane l'élément a deux degrés de liberté en chaque nœud, chaque élément a huit degrés de liberté. La figure II.7.b montre les huit déplacements inconnus.

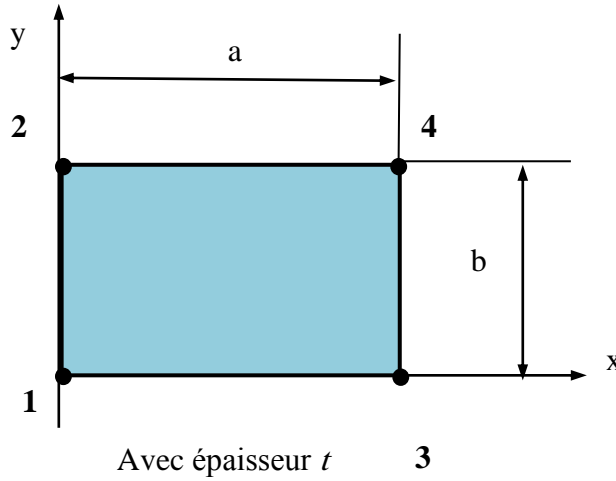


Fig. II.8 (a)

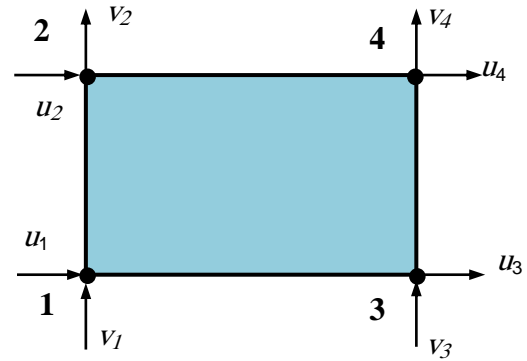


Fig. II.8 (b)

Fig. II.8.a : Élément quadrilatère bilinéaire Q4, a et b : Déplacements nodaux.

et la figure II.8.c les forces nodales correspondantes. En utilisant la notation matricielle on peut écrire les déplacements au nœud 1 de la façon suivante :

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \end{Bmatrix} \quad (II.5.1)$$

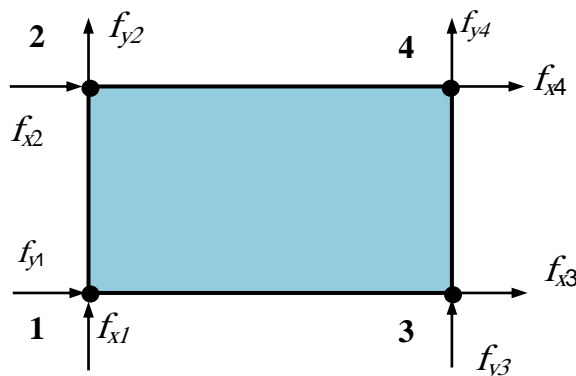


Fig. II.8(c)

Fig. II.8.b : Élément quadrilatère bilinéaire Q4, c : Forces nodales.

Pour un problème d'élasticité plane, l'état du déplacement en tout point  $(x, y)$  de l'élément peut être représenté par deux composantes, c'est-à-dire :

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (\text{II.5.2})$$

Puisque l'élément a huit degrés de liberté, on doit avoir huit coefficients inconnus dans le polynôme représentant le modèle de déplacement. Deux telles fonctions sont données par l'équation II.5.3.

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{cases} \quad (\text{II.5.3})$$

On peut écrire l'équation II.5.3 sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.5.4})$$

Ce qui peut être résumé par l'équation générale II.3.2.

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)]\{\alpha\} \quad (\text{II.3.2})$$

$$\{\delta^e\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \\ \hline 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (\text{II.5.5})$$

Ce qui peut se réduire à :

$$\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\} \quad (\text{II.3.5})$$

Où  $\{\alpha\}$  est le vecteur des coefficients inconnus des polynômes donnés par l'équation II.3.5. Ainsi l'équation II.3.5 définit la matrice  $[A]$  pour le cas particulier d'un élément rectangulaire pour des problèmes d'élasticité plane.

On multiplie alors les deux membres de l'équation II.5.5 par l'inverse de  $[A]$  pour obtenir les coefficients  $\{\alpha\}$  :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (\text{II.3.6})$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.5.6})$$

Définissant ainsi l'inverse de la matrice  $[A]$ , c'est-à-dire  $[A]^{-1}$ . On peut vérifier le résultat en calculant le produit  $[A]^{-1} [A]$  pour s'assurer qu'il est bien égal à la matrice identité  $[I]$ .

Il est évident que la relation entre les déformations et les déplacements en tout point pour un problème d'élasticité plané est indépendante de la forme de l'élément choisi. Ainsi :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \partial u / \partial x \\ \varepsilon_y &= \partial v / \partial y \\ \gamma_{xy} &= \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.5.7})$$

En remplaçant  $u$  et  $v$  par leur valeur à partir de l'équation II.5.3, on obtient l'expression suivante pour les déformations en tout point de l'élément :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy) = \alpha_2 + \alpha_4 y \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy) = \alpha_7 + \alpha_8 x \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy) \\ &= \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_8 y \end{aligned} \quad (\text{II.5.8})$$

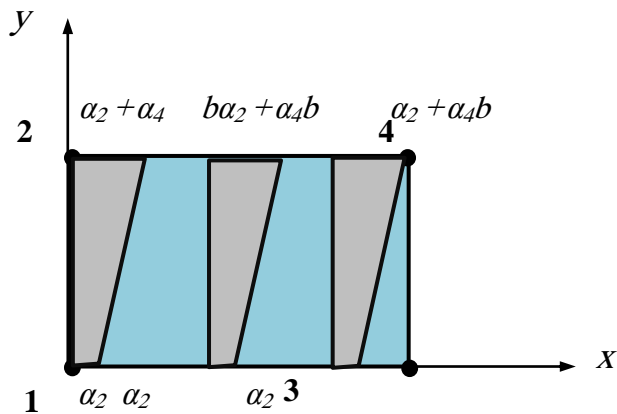


Fig. II.9 : Déformations dans l'élément fini rectangulaire

Il est d'un intérêt particulier de noter que ces déformations varient linéairement dans l'élément. En considérant la variation de  $\varepsilon_x$  par exemple, elle est indépendante de  $x$  et dépend linéairement de  $y$ , variant ainsi dans l'élément comme le montre la figure II.9. De même  $\varepsilon_y$  est indépendant de  $y$  et linéairement dépendant de  $x$  tandis que  $\gamma_{xy}$  varie linéairement à la fois en  $x$  et en  $y$ .

En utilisant ces expressions des déformations dans l'équation II.5.8, on obtient :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 + \alpha_4 y \\ \alpha_7 + \alpha_8 x \\ \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_8 y \end{Bmatrix} \quad (\text{II.5.9})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.5.10})$$

Et avec la valeur de  $\{\alpha\}$  donnée par l'équation II.3.6,

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [C][A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (\text{II.3.10})$$

Où

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B] \{\delta^e\} \quad (\text{II.3.12})$$

Où

$$[B] = [C][A]^{-1} \quad (\text{II.3.11})$$

L'équation II.3.12 relie les déformations en chaque point aux déplacements nodaux. La matrice  $[B]$  est établie à partir de l'équation II.3.11. En prenant la matrice  $[C]$  définie par l'équation II.5.10 et  $[A]^{-1}$  définie par l'équation II.3.6, on obtient la matrice  $[B]$  :

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & 0 & \frac{-y}{ab} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & 0 & \frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} \\ \frac{-1}{b} + \frac{x}{ab} & \frac{-1}{a} + \frac{y}{ab} & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & \frac{-y}{ab} & \frac{-x}{ab} & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} \end{bmatrix} \quad (\text{II.5.11})$$



Les composantes des contraintes et des déformations sont reliées par la matrice  $[D]$  où  $\{\sigma(x,y)\}=[D] \{\epsilon(x, y)\}$ . Pour des problèmes d'élasticité plane,  $[D]$  est une matrice carrée d'ordre 3 dont les termes dépendent du problème : contraintes ou déformations planes.

La matrice  $[D]$  requise pour l'équation générale II.3.20., c'est-à-dire :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D][B]\{\delta^e\} \quad (\text{II.3.20})$$

Qui donne la relation entre les contraintes en tout point et les déplacements nodaux de la façon suivante :

Pour l'état de contrainte plane :

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.5.12})$$

Et pour l'état de déformation plane.

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.5.13})$$

La matrice  $[B]$  étant définie par l'équation II.5.11 et la matrice  $[D]$  par l'équation II.5.12. D'où, dans l'évaluation de  $[K^e]$  selon l'équation

$$[K^e] = \int [B]^T [D] [B] d(vol) \quad (\text{II.3.23})$$

qui pour un élément d'épaisseur constante devient :

$$[K^e] = t \iint [B]^T [D] [B] dx dy \quad (\text{II.5.14})$$

Le produit  $[B]^T [D] [B]$  doit être évalué en premier, et les termes de la matrice qui en résultent doivent être intégrés sur la surface de l'élément. Donc :

$$[K^e] = t \int_0^a \int_0^b [B(x, y)]^T \cdot [D] \cdot [B(x, y)] dx \cdot dy \quad (II.5.15)$$

$$[K^e] = t \int_0^a \int_0^b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & y \end{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} dx \cdot dy \quad (II.5.16)$$

Tout calcul fait on obtient finalement la matrice de rigidité élémentaire  $[K^e]$  :

$$[K^e] = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ab & 0 & \frac{ab^2}{2} & 0 & 0 & \nu ab & \frac{\nu a^2 b}{2} \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)ab}{2} & \frac{(1-\nu)a^2 b}{4} & 0 & \frac{(1-\nu)ab}{2} & 0 & \frac{(1-\nu)ab^2}{4} \\ 0 & \frac{ab^2}{2} & \frac{(1-\nu)a^2 b}{4} & \frac{1}{3} \left[ ab^3 + \frac{(1-\nu)a^3 b}{2} \right] & 0 & \frac{(1-\nu)a^2 b}{4} & \frac{\nu ab^2}{4} & \frac{(1+\nu)a^2 b^2}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)ab}{2} & \frac{(1-\nu)a^2 b}{4} & 0 & \frac{(1-\nu)ab}{2} & 0 & \frac{(1-\nu)ab^2}{4} \\ 0 & \nu ab & 0 & \frac{\nu ab^2}{4} & 0 & 0 & ab & \frac{a^2 b}{2} \\ 0 & \frac{\nu a^2 b}{2} & \frac{(1-\nu)ab^2}{4} & \frac{(1+\nu)a^2 b^2}{8} & 0 & \frac{(1-\nu)ab^2}{4} & \frac{a^2 b}{2} & \frac{1}{3} \left[ a^3 b + \frac{(1-\nu)ab^3}{2} \right] \end{bmatrix} \quad (II.5.17)$$

### II.5.2. Élément Rectangulaire à 8 nœuds Q8,(Elément quadrilatéral quadratique).[3] [5] :

L'élément Q8 est un quadrilatère (rectangle) à huit nœuds. Deux degrés de liberté à chaque nœud ( $u, v$  déplacements) a totale c'est 16 DDL, cet élément basé sur le champ de déplacement dans les directions x et y, sont présentés dans la figure II.10.

En termes de coordonnées généralisées  $\alpha_i$ , le champ de déplacement est donné par:

$$\begin{aligned}
 u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 \\
 v &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} x^2 + \alpha_{13} xy + \alpha_{14} y^2 + \alpha_{15} x^2 y + \alpha_{16} xy^2
 \end{aligned}
 \quad (II.5.18)$$

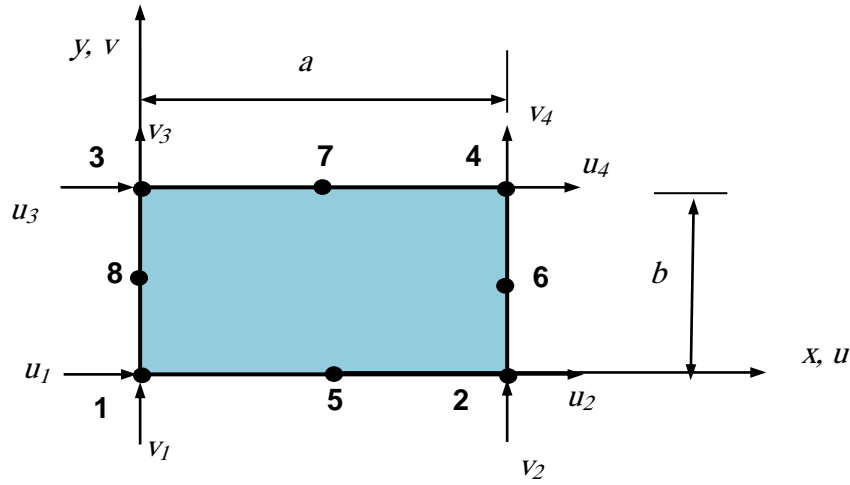


Fig.II.10 : Élément quadratique quadrilatéral Q8

La déformation de ce l'élément c'est :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 2\alpha_7 xy + \alpha_8 y^2 \\
 \varepsilon_y &= \alpha_{11} + \alpha_{13} x + 2\alpha_{14} y + \alpha_{15} x^2 + 2\alpha_{16} xy \\
 \gamma_{xy} &= \alpha_3 + \alpha_{10} + (\alpha_5 + 2\alpha_{12})x + (2\alpha_6 + \alpha_{13})y + \alpha_7 x^2 + 2(\alpha_8 + \alpha_{15})xy + \alpha_{16} y^2
 \end{aligned}
 \quad (II.5.19)$$

Pour déterminé la matrice de rigidité  $[K^e]$  de l'élément à champs de déplacement Q8 en doit calcule l'intégrale d'après l'équation (II.3.23) :

$$[K^e] = \int^v [B]^T [D] [B] d(vol) \quad (II.3.23)$$

$$[K^e] = t \int_0^a \int_0^b [B(x, y)]^T \cdot [D] \cdot [B(x, y)] dx \cdot dy \quad (II.5.15)$$

La matrice de déformation  $[B]$  pour cet élément est :

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 2xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 2y & x^2 & 2xy \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & x^2 & 2xy & 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 2xy & y^2 \end{bmatrix} \quad (II.5.20)$$

Et  $[D]$  c'est la matrice d'élasticité (II.5.12) et (II.5.13).

### II.5.3. Présentation de l'Élément T6, Élément Triangulaire à 6 nœuds (ou LST linear strain triangle) [4] :

L'élément T6 est représenté dans la figure II.11. Il présente, à part les trois nœuds 1, 2 et 3, des nœuds supplémentaires situés au milieu de chaque côté du triangle. Les degrés de liberté sont en nombre de 12 (deux degrés de liberté  $u_i, v_i$  pour chaque nœud,  $i = 1 \dots 6$ ).

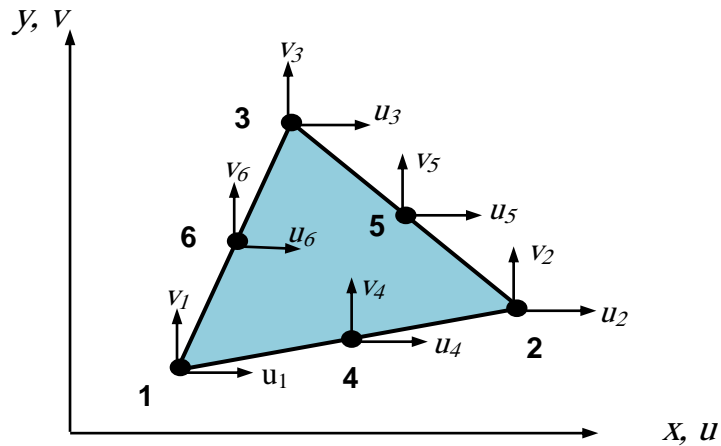


Fig.II.11 : Élément de type T6 et ses 12 degrés de liberté

En terme de coordonnées généralisées  $\alpha_i$ , le champ de déplacement est décrit par:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy \\ v &= \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} x^2 + \alpha_{11} y^2 + \alpha_{12} xy \end{aligned} \quad (\text{II.5.21})$$

et respectivement, pour le champ de déformations:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_6 y \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_9 + 2\alpha_{11} y + \alpha_{12} x \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 + 2\alpha_5 y + \alpha_6 x + \alpha_8 + 2\alpha_{10} x + \alpha_{12} y \end{aligned} \quad (\text{II.5.22})$$

En utilisant les polynômes de déplacement ci-dessus la matrice  $[A]$  de l'équation :

$$\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\} \quad (\text{II.3.5})$$

Sera :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2 y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & y_3^2 & x_3 y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & y_4^2 & x_4 y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & y_5^2 & x_5 y_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & y_6^2 & x_6 y_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2 y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & y_3^2 & x_3 y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & y_4^2 & x_4 y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & y_5^2 & x_5 y_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & y_6^2 & x_6 y_6 \end{bmatrix} \quad (\text{II.5.23})$$

Après avoir les champs de déplacement, la matrice de rigidité de l'élément triangulaire peut être évaluée par l'expression générale suivant :

$$[K^e] = \iint [B]^T [D] [B] dx dy \quad (\text{II.3.23})$$

La matrice de déformation  $[B]$  pour cet élément est :

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & x & 0 & 1 & 0 & 2x & 0 & y \end{bmatrix} \quad (\text{II.5.24})$$

Et  $[D]$  c'est la matrice d'élasticité (II.5.12) et (II.5.13)

**Remarque :** dans le chapitre quatre le programme d'éléments finis qui va calculer l'intégrale de l'équation (II.3.23). Il suffit d'entrer les valeurs des matrices  $[B]^T$ ,  $[D]$  et  $[B]$  de chaque élément pour déterminer la matrice de rigidité élémentaire  $[K^e]$ .

## II.6. ASSEMBLAGE DES MATRICES DE RIGIDITÉ DES ÉLÉMENTS [4]

Quand la matrice de rigidité  $[K^e]$  est déterminée pour un élément typique dans la structure, les équations pour tous les éléments doivent être assemblés pour obtenir un système d'équations de la forme :

$$\{F\} = [K_G] \cdot \{\delta_G\} \quad (\text{II.6.1})$$

Qui relie les déplacements et les charges de la structure complète par l'intermédiaire de la matrice de rigidité.

Dans l'équation (II.6.1),  $\{F\}$  est un vecteur de forces extérieures appliquées aux points nodaux de la structure. Chaque force extérieure est la somme des forces appliquées aux nœuds adjacents. Le vecteur  $\{\delta_G\}$  dans (II.6.1) représente les déplacements aux nœuds ; chaque déplacement dans le vecteur  $\{\delta_G\}$  a la même valeur que les déplacements des nœuds adjacents. Les termes dans la matrice  $[K_G]$  sont la somme des termes appropriés dans la matrice de rigidité des éléments qui ont un déplacement commun.

Pour illustrer ce principe considérons l'exemple suivant où nous proposons d'assembler deux éléments poutres.

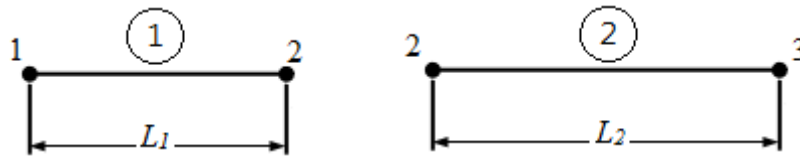


Fig.II.12 : deux éléments de poutre 1 et 2 avec  $L_1$  et  $L_2$

Remarquons que ces deux éléments ont le nœud 2 en commun. Soient  $[K^1]$  et  $[K^2]$  les matrices de rigidité des éléments 1 et 2.

Élément 1 :

$$[K^1] = \frac{EI}{L_1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_1 & -12 & 6L_1 \\ 6L_1 & 4L_1^2 & -6L_1 & 2L_1^2 \\ -12 & -6L_1 & 12 & -6L_1 \\ 6L_1 & 2L_1^2 & -6L_1 & 4L_1^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.2})$$

Élément 2 :

$$[K^2] = \frac{EI}{L_2^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_2 & -12 & 6L_2 \\ 6L_2 & 4L_2^2 & -6L_2 & 2L_2^2 \\ -12 & -6L_2 & 12 & -6L_2 \\ 6L_2 & 2L_2^2 & -6L_2 & 4L_2^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.3})$$

Ainsi la matrice de rigidité totale sera :

$$[K_G] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L_1^3} & \frac{6EI}{L_1^2} & \frac{-12EI}{L_1^3} & \frac{6EI}{L_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L_1^2} & \frac{4EI}{L_1} & \frac{-6EI}{L_1^2} & \frac{2EI}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{-12EI}{L_1^3} & \frac{-6EI}{L_1^2} & \frac{12EI}{L_1^3} + \frac{12EI}{L_2^3} & \frac{-6EI}{L_1^2} + \frac{6EI}{L_2^2} & \frac{-12EI}{L_2^3} & \frac{6EI}{L_2^2} \\ \frac{6EI}{L_1^2} & \frac{2EI}{L_1} & \frac{-6EI}{L_1^2} + \frac{6EI}{L_2^2} & \frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{L_2} & \frac{-6EI}{L_2^2} & \frac{2EI}{L_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI}{L_2^3} & \frac{-6EI}{L_2^2} & \frac{12EI}{L_2^3} & \frac{-6EI}{L_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{L_2^2} & \frac{2EI}{L_2} & \frac{-6EI}{L_2^2} & \frac{4EI}{L_2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.6.4})$$

On remarque que la matrice de rigidité de deux éléments est une matrice symétrique carrée d'ordre six par six (6x6). Cet ordre est dû au fait que l'élément assemblé possède trois nœuds donc six degrés de liberté car chaque nœud à deux degrés de liberté.

Pour un assemblage de trois, quatre éléments ou plus d'élément **E-P**, **Q4**, **Q8**, **T6** on procède de la même façon.

## II.7. DETERMINATION DE MATRICE DE MASSE DES ÉLÉMENTS : [4]

On construit la matrice de masse élémentaire (d'un élément particulier donné) à partir de l'expression de l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} \int (\vec{v}(x,y,z))^2 dm \quad (\text{II.7.1})$$

$\vec{v}(x,y,z)$  : est le vecteur vitesse en du point courant.

La formulation générale qui détermine la matrice masse  $[M^e]$  de l'élément est représenté comme suit:

$$[M^e] = \rho [A^{-1}]^T \int_v [\phi(x, y, z)]^T \cdot [\phi(x, y, z)] dv \cdot [A^{-1}] \quad (\text{II.7.2})$$

### II.7.1. La matrice masse d'un élément de poutre :

D'après l'équation (II.7.2) la matrice masse  $[M^e]$  est :

$$[M^e] = \rho [A^{-1}]^T \int_v [\phi(x)]^T \cdot [\phi(x)] dv \cdot [A^{-1}] \quad (\text{II.7.3})$$

Avec :

$$[\phi(x)] = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \quad (\text{II.7.4})$$

Et :

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{-2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7.5})$$

Donc :

$$[M^e] = \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-3}{L^2} & \frac{2}{L^3} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{L} & \frac{1}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{L^2} & \frac{-2}{L^3} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{L} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \int_0^L \int_0^h \int_0^b \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] dx dy dz \cdot [A^{-1}] \quad (\text{II.7.6})$$

$$= \rho b h \begin{bmatrix} \frac{L}{2} & \frac{3L^2}{20} & \frac{L^3}{15} & \frac{L^4}{28} \\ \frac{L^2}{12} & \frac{L^3}{30} & \frac{L^4}{60} & \frac{L^5}{105} \\ \frac{L}{2} & \frac{7L^2}{20} & \frac{4L^3}{15} & \frac{3L^4}{14} \\ \frac{-L^2}{12} & \frac{-L^3}{20} & \frac{-L^4}{30} & \frac{-L^5}{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{-2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7.8})$$

Ainsi :



$$[M^e] = \frac{\rho b h L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{Symétrique} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.7.9})$$

### II.7.2. La matrice masse d'un élément rectangulaire :

D'après l'équation (II.7.2) on a :

$$[M^e] = \rho [A^{-1}]^T \int_v [\phi(x, y)]^T \cdot [\phi(x, y)] dv \cdot [A^{-1}] \quad (\text{II.7.10})$$

Avec :

$$[\phi(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \quad (\text{II.7.11})$$

Pour  $[A^{-1}]^T$  et  $[A^{-1}]$  voir le titre II.5.1.

Ainsi on obtiendra :

$$[M^e]_{\rho.h.ab} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7.12})$$

On doit appliquer la même procédure pour déterminé la matrice masse des éléments Q8 et T6.

De la même manière qu'avec les matrices de rigidité, on construit la matrice de masse globale par assemblage des matrices de masse élémentaires.

## **CHAPITRE III :**

### **ANALYSE DYNAMIQUE DES STRUCTURES PAR ÉLÉMENTS FINIS**

#### **III.1. INTRODUCTION :**

Ce chapitre est consacré à l'Analyse dynamique des structures par la méthode d'éléments finis, étude vibratoire sur un élément unidimensionnel, élément poutre. Et sur un élément bidimensionnel, élément rectangulaire.

Et aussi avec une petite rappelle sur la vibration d'une poutre par la méthode analytique.

#### **III.2. DYNAMIQUE D'UNE POUTRE PAR LA METHODE ANALYTIQUE**

Ce titre est une synthèse bibliographique des références [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19].

Ces titres sont consacrés à la présentation des théories des vibrations libre et forcée des poutres, un modèle analytique simplifié. Pour une étude comparative avec les résultats ont été validés par la méthode des éléments finis.

##### **III.2.1. Déformée d'une poutre en flexion dans l'hypothèse de la résistance des matériaux.**

Une poutre élancée rectiligne d'axe  $x$ , de longueur  $L$  et de section droite d'aire  $S$ , hauteur  $h$  et largeur  $b$  vérifiant  $h, b \ll L$  fléchit sous l'action d'un chargement linéique transversal  $q(x)$  et prend une déformée  $y(x)$ . Pour des chargements modérés, induisant une déformée telle que le déplacement transversal reste petit devant les dimensions transversales de la poutre :  $y(x) \ll b, h$ , les sections droites restent droites (ne gauchissent pas) et tournent simplement l'une par rapport à l'autre.

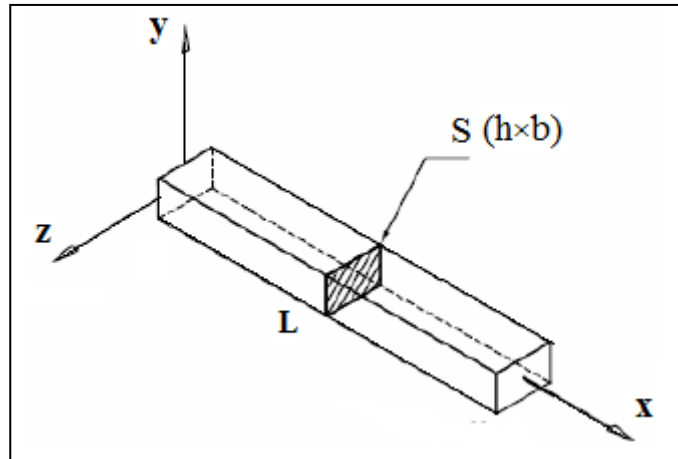


Fig.III.1 : Géométrie d'une poutre

$M(x)$  caractérisant le moment de flexion à l'abscisse  $x$  résultant du chargement  $q(x)$ , écrivons, dans cette hypothèse de flexion faible, l'équilibre mécanique d'un petit tronçon de longueur  $dx$  sous l'action du moment  $M(x)$ .

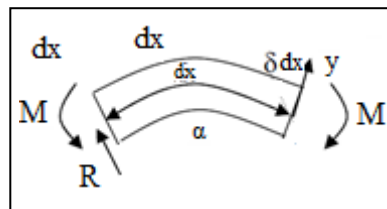


Figure.III.2 : le moment de flexion

En traçant au centre de la section droite terminale la parallèle à la section droite d'entrée, l'angle  $\alpha$  caractérisant la rotation relative des deux sections par rapport à l'état non fléchi s'écrit sous la forme :  $\alpha = \frac{dx}{R} = \frac{\delta dx}{y}$  soit  $\frac{\delta dx}{dx} = \frac{y}{R}$ . Le rapport  $\frac{\delta dx}{dx}$  n'est autre que la déformation d'allongement  $\epsilon_{XX}$  de sorte que la déformation d'allongement des fibres de la poutre s'écrit :  $\epsilon_{XX} = \frac{y}{R}$ .  $E$  caractérisant le Module d'Young du matériau constitutif de la poutre, la contrainte de traction  $\sigma_{XX}$  s'écrit :

$$\sigma_{XX} = \frac{Ey}{R} \tag{III. 1}$$

La force résultante  $F$  induite par ces contraintes et le moment de flexion résultant  $M$  sont donnés par :

$$F = \iint_S \sigma_{XX} dS = \frac{E}{R} \int_{-h/2}^{h/2} by dy = 0 \tag{III. 2}$$

$$M = \iint_S \sigma_{xx} y dS = \frac{E}{R} \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy = \frac{EI}{R} \quad (\text{III. 3})$$

$bh^3/12$  étant le moment quadratique (couramment appelé moment d'inertie de flexion) de la section droite par rapport à l'axe de flexion  $z$ .  $F=0$  traduit l'absence de force appliquée et la seconde relation exprime la proportionnalité entre la courbure locale  $1/R$  de la déformée et le moment de flexion appliqué  $M$  et constitue l'équation différentielle de la déformée.

Dans l'hypothèse des petits déplacements envisagés ici, la courbure

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y}{dX^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dX}\right)^2\right)^{3/2}} \approx \frac{d^2 y}{dX^2} \quad (\text{III. 4})$$

L'équation différentielle de la déformée se réduit à :

$$EI \frac{d^2 y}{dX^2} = -M(X) \quad (\text{III. 5})$$

Le signe - provient du fait que la déformée  $y(x)$  est repérée dans le référentiel  $x, y, z$  alors que le moment de flexion  $M(x)$  est défini dans le trièdre de Frenet : tangente  $t$ , normale  $n$  et bi normale  $r$  avec  $t=x$ ,  $r=-z$  et  $n=-y$

### III.2.2.Équation différentielle de la déformée en terme de chargement linéaire $q(x)$

Dans le trièdre de Frenet, écrivons l'équilibre mécanique du tronçon de longueur  $dx$  soumis au chargement linéaire  $q(x)$ .

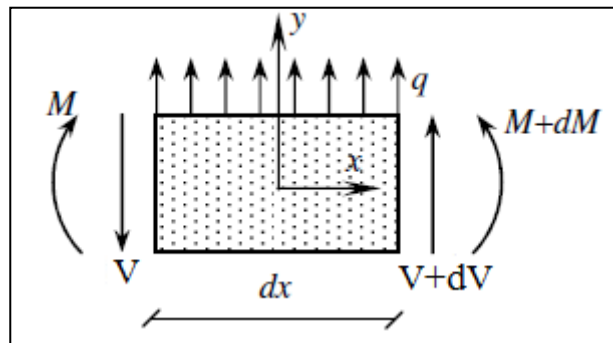


Figure.III.3 :L'équilibre mécanique du tronçon de longueur  $dx$  soumis au chargement  $q(x)$ .

L'équilibre des forces (nullité de la résultante) s'écrit :

$$-V + qdx + V + dV = 0 \quad \text{soit} \quad q(x) = -\frac{dV}{dx} \quad (\text{III. 6})$$

L'équilibre des moments par rapport à l'origine du trièdre s'écrit :

$$-\vec{M} + (\vec{V} + d\vec{V}) \wedge \vec{t} + \vec{M} + d\vec{M} = 0 \quad \text{soit en projection sur l'axe } z :$$

$$-M - (V + dV)dx + M + dM = 0 \quad \text{soit en négligeant le terme du second ordre } dVdx: V(x) = \frac{dM}{dx}$$

En différentiant deux fois l'équation différentielle de la déformée  $EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M(X)$  écrite en terme de moment fléchissant et en tenant compte des deux relations précédentes, l'équation s'écrit finalement en termes de chargement linéique :

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = q(X) \quad (\text{III. 7})$$

### III.2.3. Équation différentielle des vibrations d'une poutre

#### III.2.3.1. VIBRATIONS LIBRES

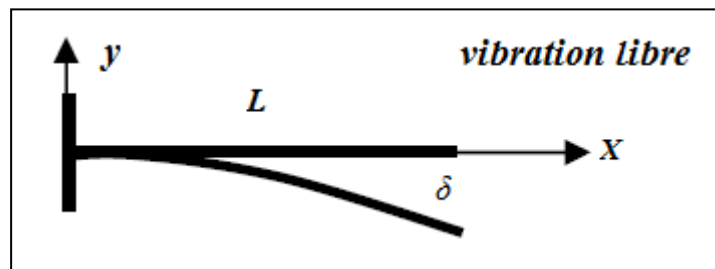


Fig.III.4 : vibration libre d'une poutre cantilever

La masse  $m(x)$  étant égale à  $\rho.S$ , la force d'inertie linéique  $q(x)$  induite par la vibration sera :

$$q(x) = -m(x)\ddot{y}(x) = -\rho S \frac{d^2y}{dt^2} \quad (\text{III. 8})$$

$$\gamma(x) = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (\text{III. 9})$$

Étant l'accélération induite par la vibration, d'où l'équation différentielle des vibrations libres:

$$\boxed{EI \frac{d^4 y}{dX^4} = -\rho S \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{d^4 y}{dX^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{d^2 y}{dt^2} = 0} \quad (\text{III. 10})$$

Compte tenu des hypothèses de flexion faible, la solution de cette équation ne sera acceptable que dans la mesure où l'amplitude de vibration  $a$  reste petite devant l'épaisseur  $h$  :  $a \ll h$ .

En posant  $k^4 = \frac{\rho S \omega^2}{EI}$  et en séparant les parties temporelles et spatiales

$$y(X, t) = Y(X) \exp(i\omega t) \quad (\text{III. 11})$$

L'équation différentielle donnant l'amplitude  $Y(x)$  de la déformée à la pulsation  $\omega$  s'écrit :

$$\frac{d^4 Y}{dX^4} + k^4 Y = 0 \quad (\text{III. 12})$$

La solution de cette équation s'écrit sous la forme générale :

$$Y(X) = A_1 \exp(k_1 X) + A_2 \exp(k_2 X) + A_3 \exp(k_3 X) + A_4 \exp(k_4 X) \quad (\text{III. 13})$$

$k_1=k$ ,  $k_2=-k$ ,  $k_3=ik$  et  $k_4= -ik$  étant les racines de l'équation

$$k^4 = \frac{\rho S \omega^2}{EI}. \text{ Avec } k = \left(\frac{\rho S \omega^2}{EI}\right)^{1/4} \omega = k^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (\text{III. 14})$$

Elle s'écrit donc également sous la forme plus commode :

$$Y = a \sin(kx) + b \cos(kx) + c \operatorname{sh}(kx) + d \operatorname{ch}(kx) \quad (\text{III. 15})$$

### III.2.3.1.1. Modes propres de vibration d'une poutre cantilever de section rectangulaire

Avec  $S=bh$  et  $I = \frac{bh^3}{12}$ , les fréquences propres sont données par :

$$f_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{12}} \alpha_i^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{h}{L^2} k_i^4 = \frac{12\rho\omega^2}{Eh^2} \quad (\text{III. 17})$$

et les modes propres par :

$$Y_i(X) = a\sin(k_iX) + b\cos(k_iX) + c\sinh(k_iX) + d\cosh(k_iX) \quad (\text{III. 15})$$

Dans le cas d'une poutre encastree, les conditions aux limites sont :

- $Y_i(0) = 0 = b + d$  Déplacement d'encastrement interdit
- $\frac{dY_i}{dX}(0) = 0 = a + c$  Rotation interdite à l'encastrement
- $\frac{d^2Y_i}{dX^2}(L) = 0 = k_i^2 \{a\sin(k_iL) + b\cos(k_iL) + c\sinh(k_iL) + d\cosh(k_iL)\}$  Absence de moment de flexion à l'extrémité libre
- $\frac{d^3Y_i}{dX^3}(L) = 0 = k_i^3 \{-a\cos(k_iL) + b\sin(k_iL) + c\cosh(k_iL) + d\sinh(k_iL)\}$  Absence d'effort tranchant à l'extrémité libre

Les constantes  $a, b, c, d$  sont calculées à partir des conditions initiales et des conditions aux limites. On peut facilement faire apparaître l'équation caractéristique permettant de trouver les pulsations propres du système :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(k_iL) & -\cos(k_iL) & \sinh(k_iL) & \cosh(k_iL) \\ -\cos(k_iL) & \sin(k_iL) & \cosh(k_iL) & \sinh(k_iL) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ce système n'admet une solution  $a, b, c, d$  proportionnels à une constante arbitraire près que si son déterminant est nul, soit l'équation aux pulsations propres définies par les conditions aux limites :

$$\cosh(k_iL) \cos(k_iL) + 1 = 0$$

Tracé l'équation caractéristique et recherche des zéros

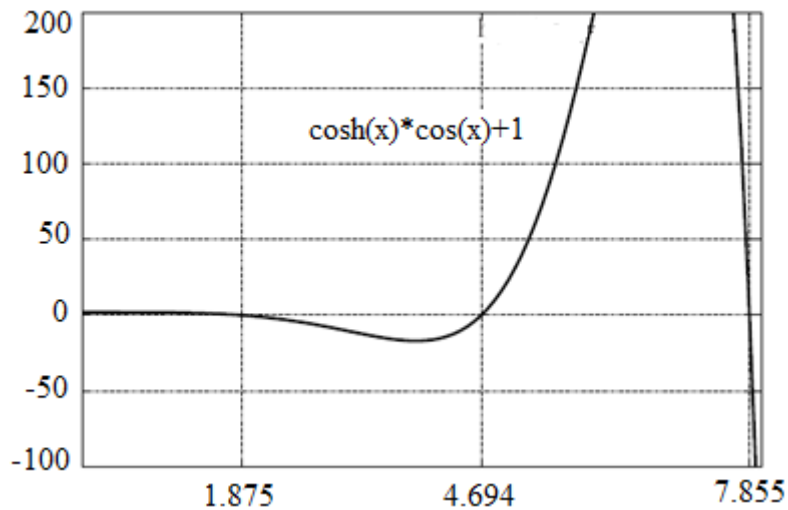


Fig.III.5 : courbe d'équation de caractéristique

Dont les solutions sont :  $\alpha_1 = k_1.L = 1.875$ ,  $\alpha_2 = k_2.L = 4.694$ ,  $\alpha_3 = k_3.L = 7.855, \dots$

Et les fréquences propres sont :

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \omega_1 = \frac{1}{2\pi} k_1^2 \sqrt{\frac{E I}{\rho S^2}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1.875}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{E I}{\rho S}}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \omega_2 = \frac{1}{2\pi} k_2^2 \sqrt{\frac{E I}{\rho S^2}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4.694}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{E I}{\rho S}}$$

Donc les pulsations propres de vibration sont (modes fondamentales) :

$$\omega_1 = k_1^2 \sqrt{\frac{E I}{\rho S^2}} = \left(\frac{1.875}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{E I}{\rho S}}$$

$$\omega_2 = k_2^2 \sqrt{\frac{E I}{\rho S^2}} = \left(\frac{4.694}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{E I}{\rho S}}$$

$$\omega_3 = k_3^2 \sqrt{\frac{E I}{\rho S^2}} = \left(\frac{7.855}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{E I}{\rho S}}$$



**III.2.3.2. VIBRATIONS FORCÉE**

Pour une excitation harmonique :  $F_0 \cos \omega t$  , le problème à résoudre est :  $\forall x \in ] 0, L [$

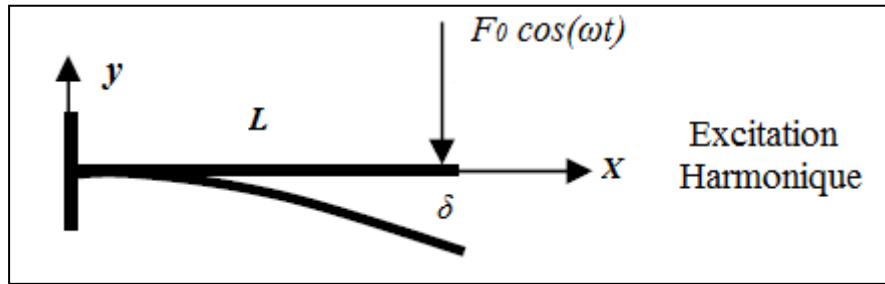


Fig.III.6 : vibration forcée d’une poutre cantilever

$$EI \frac{d^4 y}{dX^4} + \rho S \frac{d^2 y}{dt^2} = F_0 \cos \omega t \tag{III. 18}$$

$$\text{Avec C.L. : } \begin{cases} y(0,t) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial X}(0,t) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L,t) = 0 \\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L,t) = -F_0 \cos(\omega t) \end{cases}$$

Recherche d’une solution particulière de la forme :

$$y(X,t) = Y(x) \cos(\omega t) \rightarrow \frac{d^4 Y}{dX^4} + k^4 Y = 0 \tag{III. 19}$$

$$D'où Y_i(X) = a \sin(k_i X) + b \cos(k_i X) + c \operatorname{sh}(k_i X) + d \operatorname{ch}(k_i X) \tag{III. 15}$$

Avec

$$k^4 = \frac{\rho S \omega^2}{EI} \tag{III. 14}$$

Dans le cas d’une poutre encastree, les conditions aux limites sont :

- $Y_i(0) = 0 = b + d$  Déplacement d’encastrement interdit
- $\frac{dY_i}{dX}(0) = 0 = a + c$  Rotation interdite à l’encastrement
- $\frac{d^2 Y_i}{dX^2}(L) = 0 = k_i^2 \{ a \sin(k_i L) + b \cos(k_i L) + c \operatorname{sh}(k_i L) + d \operatorname{ch}(k_i L) \}$  Absence de moment de flexion à l’extrémité libre

- $\frac{dY_i^3}{dX^3}(L) = F_0 \cos \omega t = k_i^3 \{-a \cos(k_i L) + b \sin(k_i L) + c \operatorname{ch}(k_i L) + d \operatorname{sh}(k_i L)\}$  excitation harmonique à l'extrémité libre

$a, b, c, d$  sont solution du système linéaire. Les constantes  $a, b, c, et d$  sont calculées à partir des conditions initiales et des conditions aux limites. On peut lourdement faire apparaître l'équation caractéristique permettant de trouver les pulsations propres du système.

### III.3. ETUDE VIBRATOIRE PAR ELEMENTS FINIS

Ce titre est une synthèse bibliographique des références [7] et, [4], [6], [20], [21].

#### III.3.1. ÉLEMENT UNIDIMENSIONNEL (1D) : Élément de poutre

On considère un élément unidimensionnel (1D) solide, une poutre mince dans la figure III.7, Les nœuds 1 et 2 d'extrémité sont soumis des forces verticales  $F_1, F_2$  et des moments  $M_1, M_2$  qui résulte des translations et des rotations. À chaque nœud il y a deux degrés de liberté.

##### III.3.1.1. Poutre avec des forces verticales et une charge répartie uniforme :

L'élément a une longueur  $L$ , Est soumise à une charge répartie uniforme  $q$  transversale par unité de longueur. L'équation de l'équilibre pour ce système est donnée par :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q \quad (\text{III. 20})$$

La variable continue  $w$  est approchée en termes de valeurs nodales discrets, nous avons choisi d'écrire

$$w \approx [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 21})$$

Où  $\theta_1 = \partial w / \partial x$  au nœud 1 et ainsi de suite. L'équation (III.21) pour être exacte en choisissant les fonctions de forme cubique:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{L^3}(L^3 - 3Lx^2 + 2x^3) \\
 N_2 &= \frac{1}{L^2}(L^2x - 2Lx^2 + x^3) \\
 N_3 &= \frac{1}{L^3}(3Lx^2 - 2x^3) \\
 N_4 &= \frac{1}{L^2}(x^3 - Lx^2)
 \end{aligned}
 \tag{III.21}$$

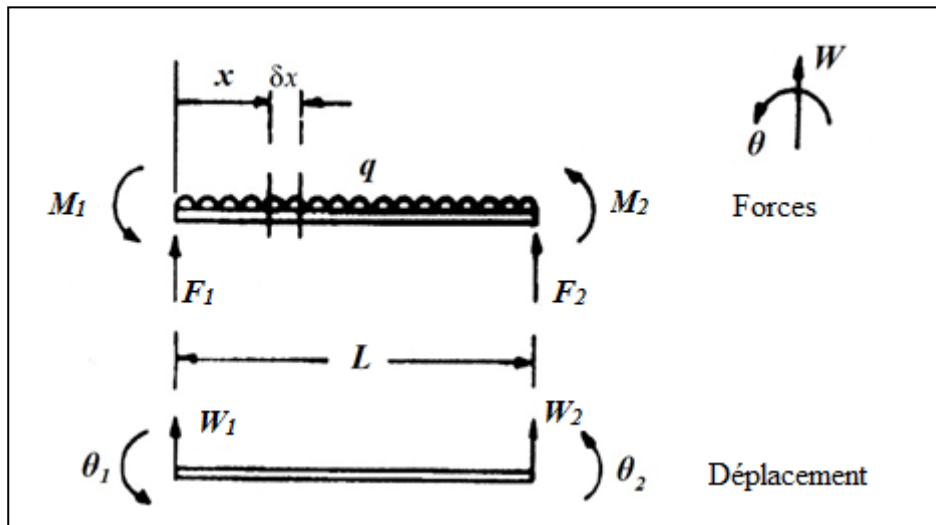


Fig.III.7 : Un élément poutre mince

Le dérivé des fonctions de forme est égal à 1 dans un nœud spécifique et égale à zéro à tous les autres nœuds.

La substitution dans (III.20) et l'application de la méthode de Galerkin's conduit aux équations à quatre éléments:

$$\int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} q dx
 \tag{III.23}$$

Théorème de Green est utilisé pour éviter différencier quatre fois, par exemple :

$$\int N_i \frac{\partial^4 N_j}{\partial x^4} dx = - \int \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial^3 N_j}{\partial x^3} dx = \int \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} dx + \text{terme négligable}
 \tag{III.24}$$

On supposer que  $EI$  et  $q$  ne sont pas des fonctions de  $x$ , (III.23) deviennent :

$$EI \int \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} dx \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = q \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} dx \quad (\text{III. 25})$$

L'évaluation des intégrales donne :

$$EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \text{Symétrique} & & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ & & & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L^2}{12} \\ \frac{L}{2} \\ -\frac{L^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 26. a})$$

### III.3.1.2. Poutre avec des forces verticales et une charge appliquée au niveau des nœuds :

Le cas ci-dessus est pour une charge répartie uniforme, appliquée sur une poutre. Pour le cas où la charge est appliquée uniquement au niveau des nœuds, nous avons :

$$EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \text{Symétrique} & & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ & & & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 26. b})$$

Qui représente la relation de rigidité d'élément. Par conséquent, en notation matricielle, nous avons

$$KMw = F \quad (\text{III. 27})$$

### III.3.1.3. Matrice de rigidité d'une poutre :

Si l'élément de la figure III.7a vibrant transversalement il serait soumis à une force supplémentaire restituée :  $-PA(\partial^2 w / \partial t^2)$ , La matrice d'inertie ou de masse :

$$-\rho A \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 & N_3 N_4 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4 N_4 \end{bmatrix} dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 28})$$

L'évaluation des intégraux

$$-\frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ \text{Symétrique} & & 156 & -22L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 29})$$

### III.3.1.4. Poutre avec une force axiale :

Si l'élément de poutre à la figure III.7 est soumis à une force axiale supplémentaire  $P$  (Fig.III.8), une simple modification de l'équation (III.20), on obtient l'équation différentielle :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \pm P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q \quad (\text{III. 30})$$

Le signe positif correspond à une charge de compression axiale.

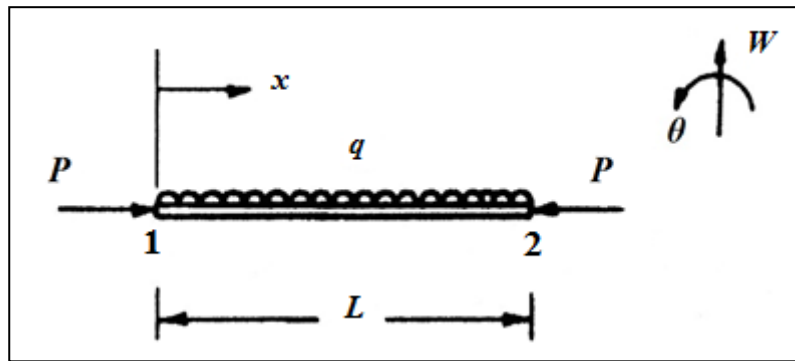


Fig.III.8 : Poutre avec une force axiale

La discrétisation par éléments finis et l'application de la méthode de Galerkin's conduit à une matrice supplémentaire associé à la force axiale :

$$\pm P \int \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 31})$$

L'évaluation de ces intégraux pour les forces  $P$  (compression) :

$$+ \frac{P}{30} \begin{bmatrix} \frac{36}{L} & 3 & -\frac{36}{L} & 3 \\ & 4L & -3 & -L \\ \text{Symétrique} & & \frac{36}{L} & -3 \\ & & & 4L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 32})$$

### III.3.2. ELEMENTS BIDIMENSIONNELS (2D) : Contrainte et déformation plane

L'élément décrit n'est pas d'éléments fini vrais parce qu'il utilisé uniquement pour résoudre les équations différentielles dans une variable à une seule dimension. Ainsi, le problème complexe impliquant deux ou trois variables d'espace 2D et 3D.

La situation change radicalement dans analyse des problèmes à deux ou trois dimensions. Par exemple, considérons le mur plan la figure III.9 (a). Le mur a été subdivisé en éléments rectangulaires de  $a \times b$  dans laquelle figure III.9 (b) est typique. Ces éléments ont quatre nœuds aux coins

Les équations à résoudre sont les suivants :

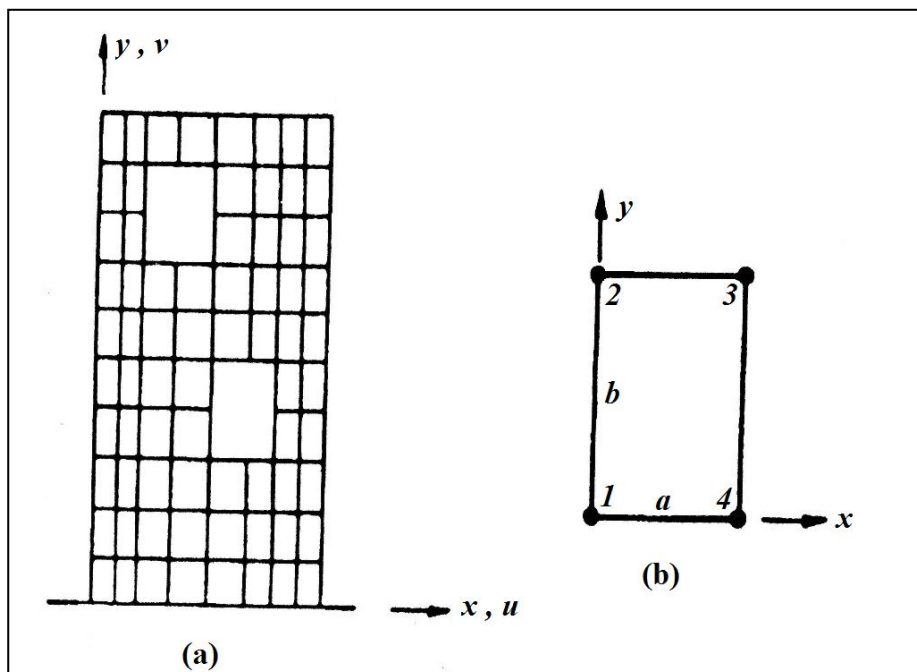


Fig.III.9 : (a) maillage d'un mur. (b) Élément typique rectangulaire de quatre nœuds aux coins

**(i) l'équilibre**

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \quad (\text{III. 33})$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0 \quad (\text{III. 34})$$

Où  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  sont les seules contraintes non nulles et  $F_x$ ,  $F_y$  sont les forces du corps, par unité de volume.

**(ii) contrainte-déformation (contraintes planes)**

$$\text{(Généralisée de Hooke)} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 35})$$

Où  $E$  est le module d'Young,  $\nu$  est le coefficient de Poisson et  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ , et  $\gamma_{xy}$  sont les composants indépendants de faible déformation.

**(iii) contrainte - déplacement**

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 36})$$

Où  $u$ ,  $v$  sont les composantes du déplacement dans le sens  $x$ ,  $y$ .

En utilisant la notation de la section précédente avec  $A$  comme l'opérateur de contrainte-déplacement et  $D$  la matrice contrainte-déformation, ces trois équations deviennent

$$\begin{aligned} A^T \sigma &= -F \\ \sigma &= D\varepsilon \\ \varepsilon &= Ae \end{aligned} \quad (\text{III. 37})$$

Où

$$e = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 38})$$

En suite :

$$A^T \sigma = -F$$

$$A^T D \varepsilon = -F \quad (\text{III. 39})$$

$$A^T D A e = -F$$

En écrivant (III.39) :

$$\frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Fx \\ -Fy \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 40})$$

C'est une paire d'équations différentielles partielles dans l'espace avec des variables continues  $u$  et  $v$ .

Ceux-ci peuvent être résolus par la discrétisation sur chaque élément à l'aide des fonctions de forme :

$$u = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (\text{III. 41})$$

et

$$v = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{v} \quad (\text{III. 42})$$

Dans le cas de l'élément représenté sur la figure rectangulaire III.9 (b) les fonctions de forme  $N_i$  est :



$$\begin{aligned}N_1 &= \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\N_2 &= \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \\N_3 &= \frac{x}{a} \frac{y}{b} \\N_4 &= \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right)\end{aligned}\tag{III. 43}$$

Ce résultat appelé le rectangle de linéaire déformation, fonction de Lagrange.

## **CHAPITRE IV :**

### **VALIDATION NUMÉRIQUE DES ÉLÉMENTS À CHAMPS DE DÉPLACEMENT EN ANALYSE VIBRATOIRE**

#### **IV.1. INTRODUCTION [4], [22] :**

La détermination des modes propres de vibration d'une structure par la technique des éléments finis conduit à une relation du type suivant :

$$[K][X_i] = \lambda_i [M]\{X_i\} \quad (\text{IV.1})$$

Avec

$[K]$  : La rigidité du système,

$[M]$  : La matrice des masses,

$\{X_i\}$  : Le vecteur des déplacements de la structure définissant l' $i$ -ème mode propre de vibration, l'amplitude de déplacement,

$\lambda_i = \omega^2$  : le carré de la pulsation correspondante ou la fréquence angulaire.

Résoudre un problème de valeurs propres consiste à trouver des couples  $\lambda_i\{X_i\}$  qui satisfont la relation (IV.1). A chaque valeur  $\lambda_i$  correspond un vecteur propre  $\{X_i\}$ .

Mais le plus souvent, l'équation des valeurs propres va décrire une situation physique telle que les vibrations libres ou forcées d'un solide ou d'un fluide.

Pour un solide élastique en vibration libre l'équation est :

$$\left( [K^e] - \omega^2 \cdot [M^e] \right) \cdot \{X\} = 0 \quad (\text{IV.2})$$

Chaque élément de la structure aura une équation de la forme (IV.2). D'où en combinant l'ensemble de ces équations on obtiendra le système d'équations suivant pour toute la structure :

$$\left( [K_G] - \omega^2 \cdot [M_G] \right) \cdot \{X\} = 0 \quad (\text{IV.3})$$

Ou  $\{X\}$  et  $[M_G]$  sont respectivement le vecteur de déplacement et la matrice masse pour tout la structure.

La structure considérée qui est un corps élastique ayant un nombre infini de degrés de liberté et de fréquences propres est remplacée en utilisant la méthode des éléments finis, par un modèle ayant des masses concentrées aux nœuds et un nombre fini de degrés de liberté et de fréquences propres.

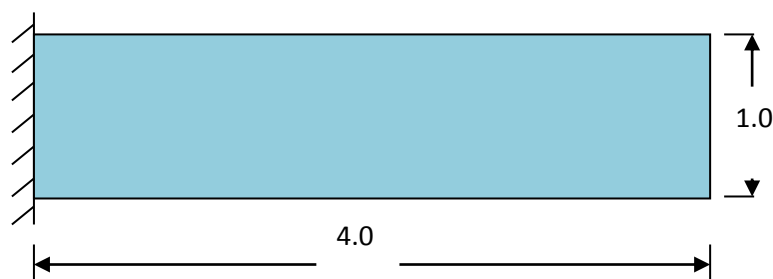
Qui, bien que cette équation n'étant plus sous sa forme standard, elle peut facilement être convertie en cette forme standard. Dans ce cas la matrice de masse globale  $[M_G]$  peut être concentrée ou consistante.

$$[K^e]\{X\} - \omega^2 \cdot \{X\} = 0$$

## IV.2. CAS DE TESTS

Dans ce chapitre nous procédons à la validation de l'élément **T6 (Triangulaire avec 6 nœuds)** basé sur le modèle en déplacement en analyse vibratoire libre et forcée. Pour cela trois différents tests sont illustrés dans cette validation.

Nominalement ces tests représentent un problème d'un solide rectangulaire élastique en porte à faux (Poutre cantilever) figure (IV.1), la longueur dans la direction x est 4.0 et suivant y est de 1.0 avec une section transversale de 1.0.



**Fig.IV.1: Géométrie et maillage de la poutre.**

## IV.2.1. Valeurs propres en vibration libre d'un solide rectangulaire

### IV.2.1.1. Synoptique du programme de vibration libre d'un solide rectangulaire

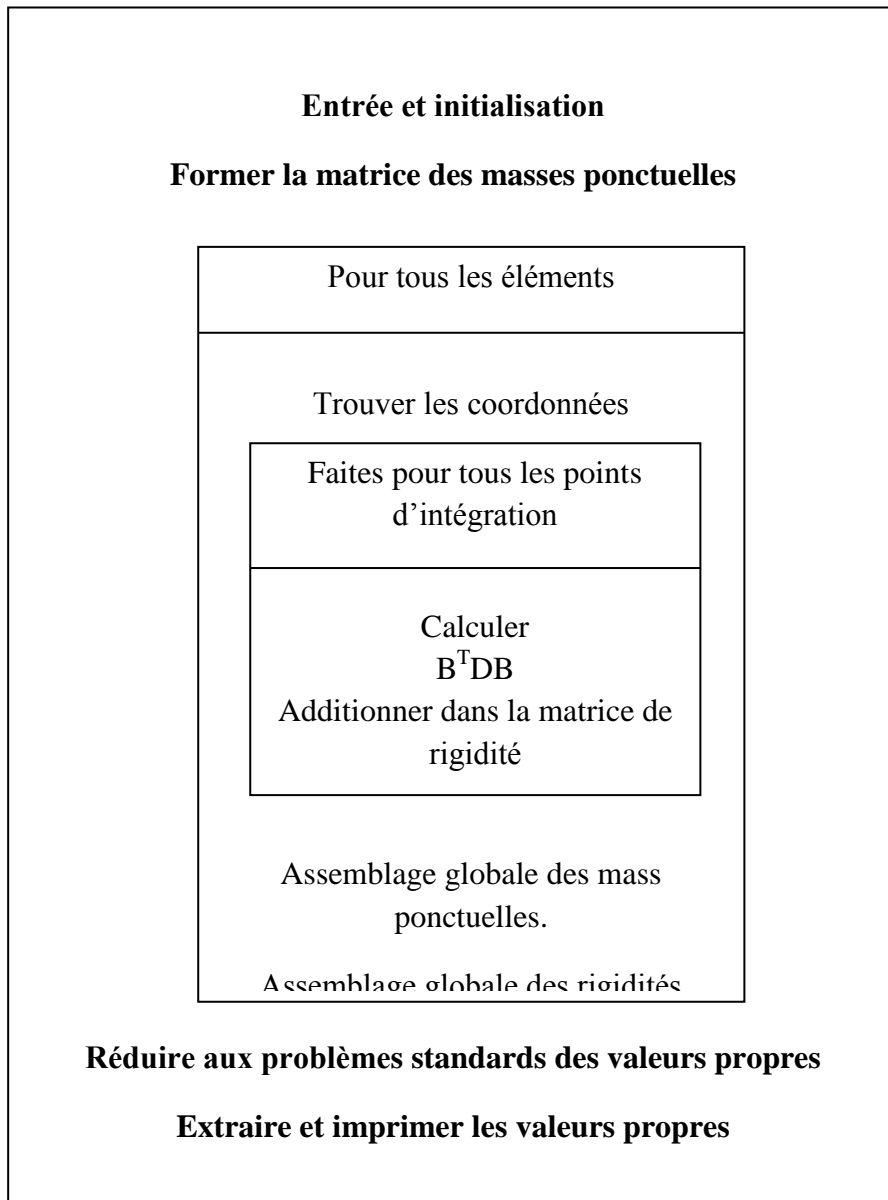


Fig.IV.2 : Synoptique du programme de vibration libre d'un solide rectangulaire

### IV.2.1.2. Tests de validation

Notre poutre avec une rigidité à la flexion de  $1/12$  soit  $0.083333$ . Le coefficient de poisson est  $\nu=0.3$  pour le maillage  $(3 \times 1)$ , et  $\nu=0$  pour le maillage  $(5 \times 1)$ , et le module de Young est pris  $E=1 \text{ kN/m}^2$ . Le problème est en déformation plane avec masse concentrée. La masse par unité de surface est  $\rho=1$ . Les figures suivantes représentent les maillages de  $(3 \times 1)$  et  $(5 \times 1)$ , et les différents éléments Q4, Q8 et T6.

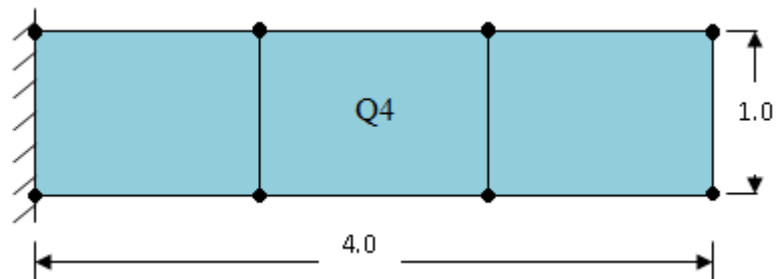


Fig.IV.3 : Maillage de  $(3 \times 1)$  et l'élément Q4

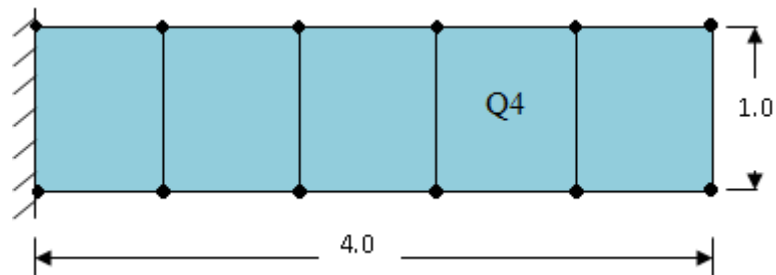


Fig.IV.4: Maillage de  $(5 \times 1)$  et l'élément Q4

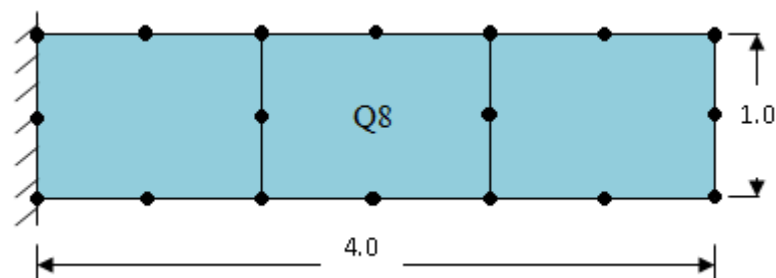
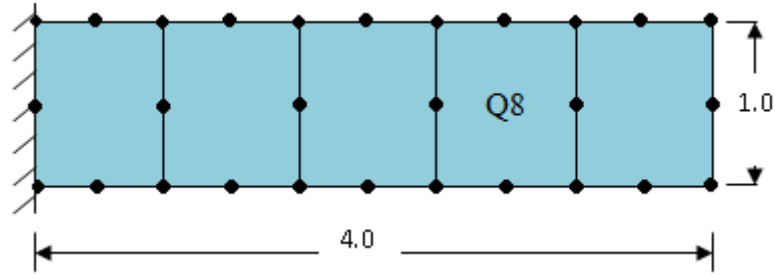
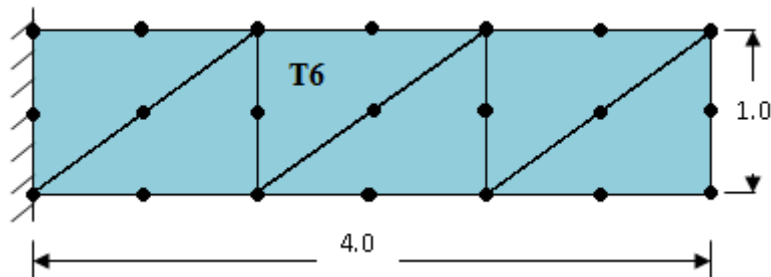


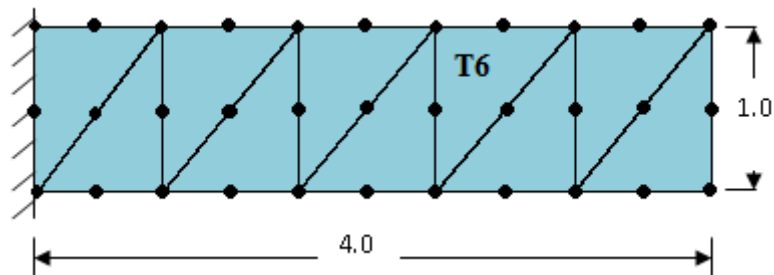
Fig.IV.5: Maillage de  $(3 \times 1)$  et l'élément Q8



**Fig.IV.6: Maillage de (5×1) et l'élément Q8**



**Fig.IV.7: Maillage de (3×1) et l'élément T6**



**Fig.IV.8: Maillage de (5×1) et l'élément T6**

Les résultats des valeurs propres sont illustrés dans le tableau (IV.1) pour le cas de déformation plane. La fréquence fondamentale  $\omega_1$  et la fréquence axiale  $\omega_2$  sont calculées avec les différents éléments Q4, Q8, poutre et T6. Les résultats obtenus par l'élément T6 montrent que les valeurs des fréquences sont en bon accord avec celles obtenues par l'élément Q8 et avec celles de la solution analytique. La fréquence fondamentale obtenue par l'élément Q4 est considérablement plus grande que celle de la solution analytique.

| Fréquences                       |            | Q4                              | Q8    | Poutre | T6           |
|----------------------------------|------------|---------------------------------|-------|--------|--------------|
| Maillage<br>3×1                  | $\omega_1$ | 0.0805                          | 0.064 | 0.063  | <b>0.064</b> |
|                                  | $\omega_2$ | 0.353                           | 0.413 | 0.397  | <b>0.414</b> |
| Maillage<br>5×1                  | $\omega_1$ | 0.068                           | 0.060 | 0.060  | <b>0.060</b> |
|                                  | $\omega_2$ | 0.391                           | 0.391 | 0.0393 | <b>0.392</b> |
| Solution<br>exacte<br>[23] Smith | $\omega_1$ | $1.875^4 \times EI / \rho AL^4$ |       | 0.063  |              |
|                                  | $\omega_2$ | $\pi / 2L \sqrt{E / \rho}$      |       | 0.393  |              |

Tableau.IV.1: Valeurs propres de la poutre cantilever cas de déformation plane

## IV.2.2. Vibration forcée d'un solide rectangulaire

### IV.2.2.1. Synoptique du programme de vibration forcée d'un solide rectangulaire

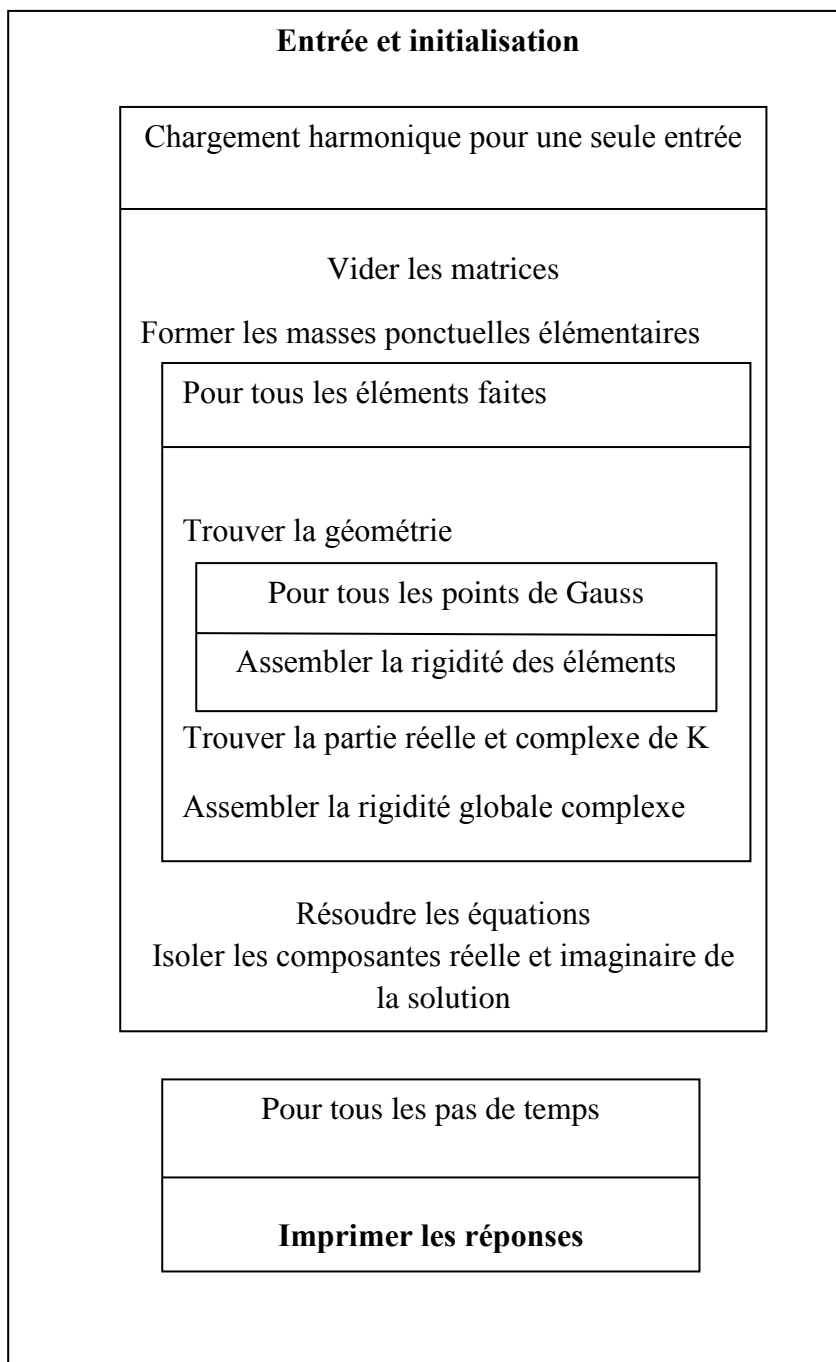


Fig.IV.9 : Synoptique du programme de vibration forcée d'un solide rectangulaire (masse ponctuelle)

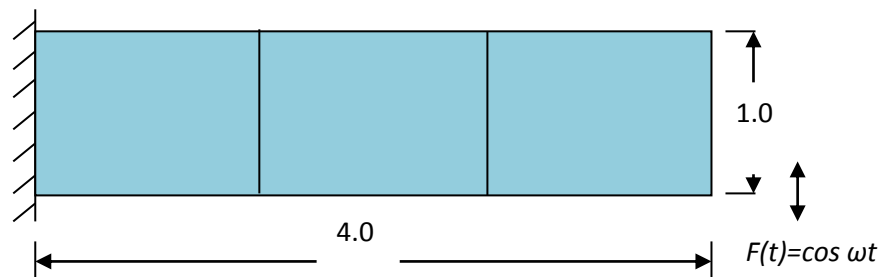


#### IV.2.2.2. Tests de validation :

Pour valider l'emploi de l'élément T6 (triangulaire à 6 nœuds) en vibration forcée on a proposé deux tests qui ont été traité dans la référence [23] **Smith 2004**.

➤ **Le premier test :**

Pour le premier test figure (IV.4) dans l'analyse vibratoire forcée on utilise la méthode de la réponse complexe décrite dans la référence [23]. La poutre cantilever est soumise à une force verticale harmonique  $\cos \omega t$ . Le taux d'amortissement  $\gamma$  est de **0,005** soit 5 % appliqué à tous les modes du système, le module de Young est  $E=1 \text{ kN/m}^2$ , le coefficient de Poisson  $\nu=0.3$ , fréquence forcée  $\omega=0.3$  et la masse par unité de surface est  $\rho=1 \text{ t/m}^3$ . Ici le pas du temps est pris égal à 1/20 de la période ( $2\pi/\omega$ ) soit disant 1.047. Le problème est en déformation plane.



**Fig.IV.10 : Géométrie et maillage de la poutre cantilever soumise à une vibration forcée**

Les résultats illustrés dans le tableau (IV.3) montrent les déplacements à l'extrémité de la poutre par rapport au pas de temps imposé (time-step) par l'utilisation des deux éléments Q8 et T6. Nous pouvons voir que le comportement de l'élément T6 est strictement similaire à celui de l'élément Q8 en analyse vibratoire forcée.

| Temps | Déplacements |        |
|-------|--------------|--------|
|       | Q8           | T6     |
| 0     | 0            | 0      |
| 1.047 | 27.21        | 27.40  |
| 2.094 | 36.68        | 36.87  |
| 3.142 | 42.55        | 42.72  |
| 4.189 | 44.26        | 44.40  |
| 5.236 | 41.64        | 41.73  |
| 6.283 | 34.94        | 34.98  |
| 7.330 | 24.82        | 24.80  |
| 8.378 | 12.27        | 12.19  |
| 9.425 | -1.480       | -1.607 |
| 10.47 | -15.09       | -15.25 |
| 11.52 | -27.21       | -27.40 |
| 12.57 | -36.68       | -36.87 |
| 13.61 | -42.55       | -42.72 |
| 14.66 | -44.26       | -44.40 |
| 15.71 | -41.64       | -41.73 |
| 16.76 | -34.94       | -34.98 |
| 17.80 | -24.82       | -24.80 |
| 18.85 | -12.27       | -12.19 |
| 19.90 | 1.480        | 1.607  |
| 20.94 | 15.09        | 15.25  |

**Tableau .IV.2 : Vibration forcée d'un solide rectangulaire " déplacement par rapport au temps"**

Les résultats des déplacements sont illustrés dans le tableau IV.2 et les figures IV. Ces résultats montrent bien que le comportement de l'élément T6 est similaire à l'élément Q8.

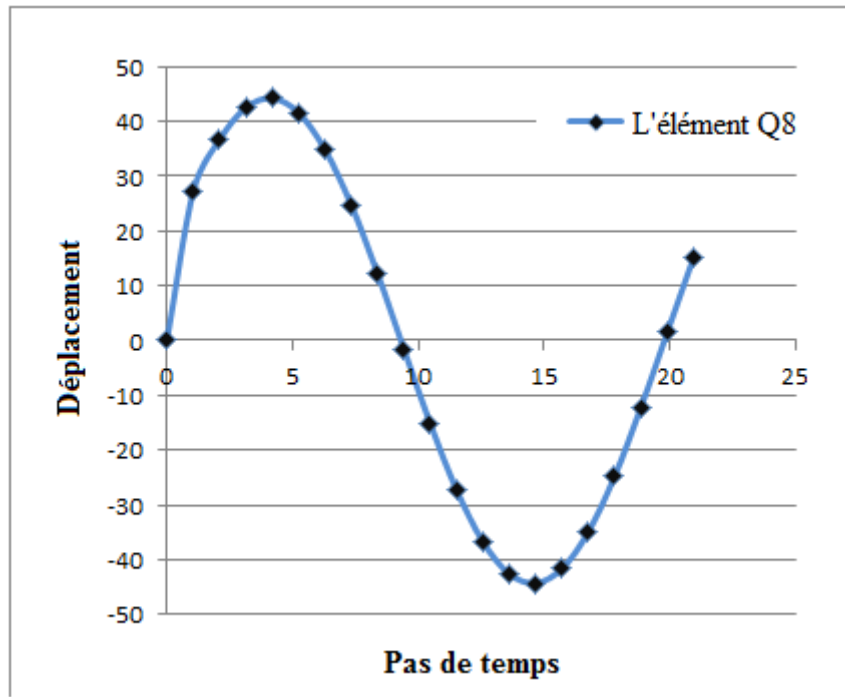


Fig.IV.11 : *Vibration forcée d'un solide rectangulaire " déplacement par rapport au temps pour l'élément Q8" Test 1*

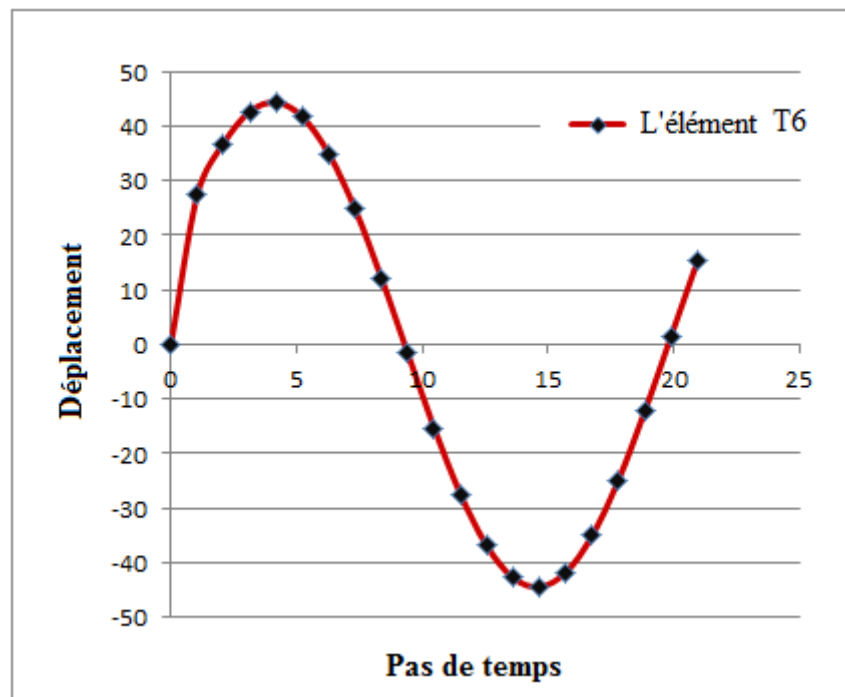


Fig.IV.12 : *Vibration forcée d'un solide rectangulaire " déplacement par rapport au temps pour l'élément T6" Test 1*

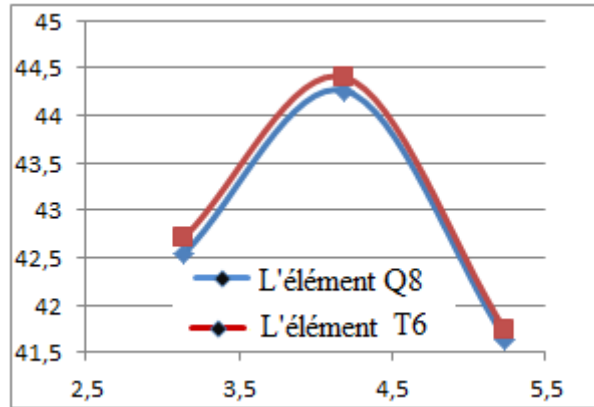


Fig.IV.13 : La convergence entre l'élément Q8 et T6

➤ *Le second test :*

Pour le second test figure (IV.5) dans l'analyse vibratoire forcée on utilise la méthode de superposition modale avec la masse concentrée décrite dans la référence [23]. La poutre cantilever est soumise à une force verticale harmonique  $\cos \omega t$ . Le taux d'amortissement  $\gamma$  est de **0,005** soit 5 %, le module de Young est  $E=1\text{kN}/\text{m}^2$ , le coefficient de Poisson  $\nu=0.3$ , la fréquence forcée  $\omega=0.3$ . Ici le pas du temps est pris égal à 1/20 de la période ( $2\pi/\omega$ ) soit disant 1.047. Le problème est en déformation plane.

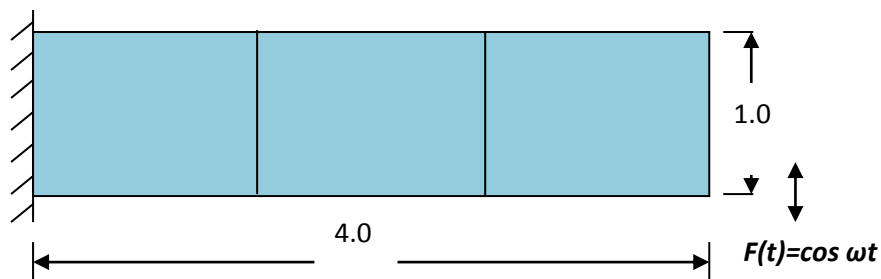


Fig.IV.14 : Géométrie et maillage de solide rectangulaire soumis à une vibration forcée

| Temps | Force                    | Déplacements |        |
|-------|--------------------------|--------------|--------|
|       |                          | Q8           | T6     |
| 0     | 1                        | 0            | 0      |
| 1.047 | 0.9511                   | 27.32        | 27.32  |
| 2.094 | 0.8090                   | 36.36        | 36.37  |
| 3.142 | 0.5878                   | 41.84        | 41.85  |
| 4.189 | 0.3090                   | 43.22        | 43.23  |
| 5.236 | $-0.5390 \cdot 10^{-14}$ | 40.37        | 40.39  |
| 6.283 | -0.3090                  | 33.57        | 33.59  |
| 7.330 | -0.5878                  | 23.48        | 23.50  |
| 8.378 | -0.8090                  | 11.10        | 11.11  |
| 9.425 | -0.9511                  | -2.373       | -2.362 |
| 10.47 | -1.000                   | -15.45       | -15.61 |
| 11.52 | -0.9511                  | -27.32       | -27.32 |
| 12.57 | -0.8090                  | -36.36       | -36.37 |
| 13.61 | -0.5878                  | -41.84       | -41.85 |
| 14.66 | -0.3090                  | -43.22       | -43.23 |
| 15.71 | $0.5390 \cdot 10^{-14}$  | -40.37       | -40.39 |
| 16.76 | 0.3090                   | -33.57       | -33.59 |
| 17.80 | 0.5878                   | -23.48       | -23.50 |
| 18.85 | 0.8090                   | -11.10       | -11.11 |
| 19.90 | 0.9511                   | 2.373        | 2.373  |
| 20.94 | 1.000                    | 15.45        | 15.61  |

**Tableau .IV.3 : Vibration forcée d'un solide rectangulaire avec masse localisée "**  
**déplacement par rapport au temps et forces"**

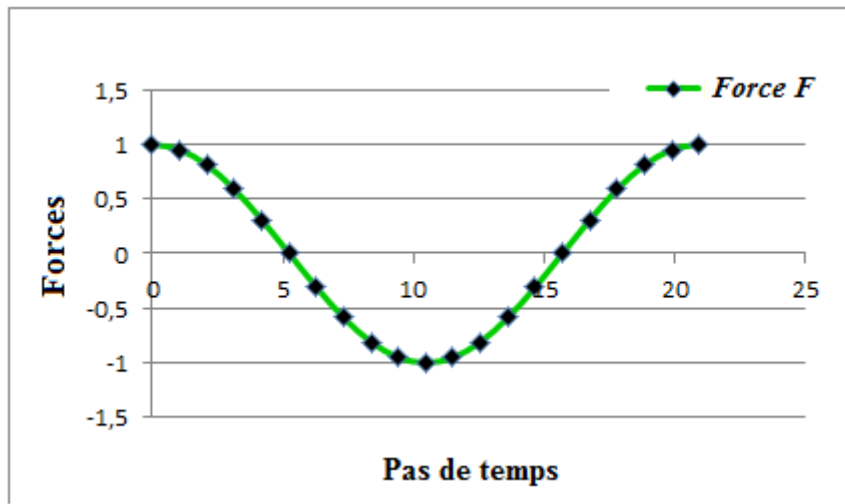


Fig.IV.15 : Sollicitation harmonique "Les forces par rapport au temps"

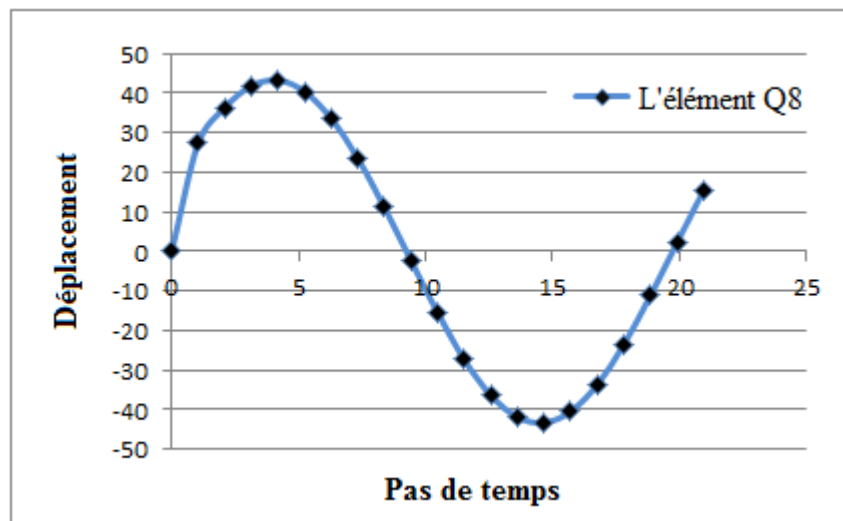
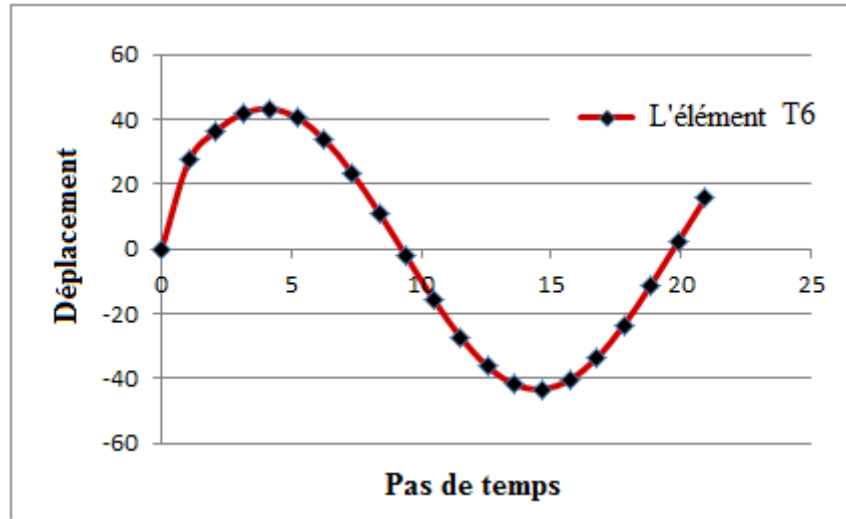


Fig.IV.16 : Vibration forcée d'un solide rectangulaire " déplacement par rapport au temps pour l'élément Q8" Test 2



**Fig.IV.17 : *Vibration forcée d'un solide rectangulaire " déplacement par rapport au temps pour l'élément T6" Test 2***

Les résultats illustrés dans le tableau (IV.4) montrent les déplacements à l'extrémité de la poutre par rapport au pas de temps imposé (time-step) et la force perturbatrice  $\cos \omega t$  par l'utilisation des deux éléments Q8 et T6. Nous pouvons voir clairement que le comportement de l'élément T6 est strictement similaire à celui de l'élément Q8 en analyse vibratoire forcée.

### IV.3. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons pu faire programmer l'élément triangulaire T6 et valider cet élément en analyse vibratoire libre et forcée. A travers plusieurs tests numériques réputés sévères nous avons constaté que l'élément T6 est similaire à l'élément Q8 dans ces analyses. La validation de l'élément T6 en analyse vibratoire a été le but essentiel de ce chapitre.

## Conclusion générale

Dans ce travail une investigation dans l'analyse vibratoire des structures membranaires par la méthode des éléments finis est faite. Les éléments Q4, Q8 et E-Poutre utilisés dans cette étude sont basés sur l'approche de déplacement. Nous avons pu utiliser l'élément T6 pour cette analyse vibratoire.

Nous avons testé la performance de l'élément T6 dans les problèmes vibratoires forcés et libres des structures et faire la comparaison avec les éléments Q4, Q8 et E Poutre.

Ensuite tous les résultats obtenus à l'aide de ces éléments sont comparés aux solutions exactes (solution analytique)

L'étude montre que:

- Le comportement des éléments à champs de déplacement Q8 et Poutre sont similaire à l'élément à champs de déplacement T6 en analyse vibratoire forcée et libre.
- Le comportement de l'élément Q4 s'avère un peu mauvais comparativement avec les éléments Q8 et T6 suivant le calcul de la pulsation  $\omega_2$  en vibration libre.
- L'élément Poutre Donne de meilleur résultat.
- En vibration forcée l'élément Q4 est une mauvaise représentation des solides rectangulaires.



## Références bibliographiques

- [1] TURNER, M. R. CLOUGH, H. MARTIN, et L. TOPP. , « *Stiffness and deflection analysis of complex Structure* », J. Aearo. sci., 23 N°. 9 SEPT (1956)
- [2] ARGYRIS, J. et S. KELSEY. , « *Energy Theorems and structural analysis*» Butterwoth Scientific publication London, (1960).
- [3] L.ROCKEY et W.GRIFFITHS et R.EVANS et D.NETHERCOT. «*Introduction à la méthode des éléments finis* » Editions EYROLLES .61, bd Saint-Germain, 75005 PARIS (1979)
- [4] O.RAHMANI, S.KEBDANI. « *Introduction à la méthode des éléments finis pour les ingénieurs* » l'Université d'Oran. Office des publications universitaires, 06 -88.
- [5] MARTIN LEVESQUE. « *Cours d'éléments Finis en Mécanique des Solides*» Ecole Polytechnique de Montréal
- [6] ANTOINE LEGAY. «*Calcul des structures par éléments finis*» CNAM-Paris, Édition (2012)
- [7] SMITH I.M, GRIFFITH D.V. « *Programming the Finite Element Method*», Chapter 2, second Edition. John Wiley & Sons, UK, (1988).
- [8] A.Y.T. LEUNG, ZHU BIN, JIANJIN ZHENG, HAO YANG « *Analytic trapezoidal Fourier p-element for vibrating plane problems* »Journal of Sound and Vibration. City University of Hong Kong, Tatchee Avenue, HKSAR, China, (2003).
- [9] Y.S.CHOO, N.C.BYUNG, C.LEE « *Quadrilateral and triangular plane elements with rotational degrees of freedom based on the hybrid Trefftz method* »Korea Advanced Institute of Science and Technology, Korea,(2006).
- [10] A.HOUMAT .Article « *Free vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using*

- the trigonometric p-version of the finite-element method* » Faculty of Engineering, University of Tlemcen, B.P. 230, Tlemcen 13000, Algeria(2006)
- [11] KUTLU DARILMAZ et DE NAHIT KUMBASAR. « *An 8-node assumed stress hybrid element for analysis of shells* » Department of Civil Engineering, Istanbul Technical University, 34469 Maslak, Istanbul, Turkey, 2006.
- [12] N. NGUYEN-THANHA, TIMON RABCZUKA, H. NGUYEN-XUANBE, STÉPHANE PA BORDASC, D. « *An alternative alpha finite element method (AaFEM) for free and forced structural vibration using triangular meshes* » Journal of Computational and Applied Mathematics 2009
- [13] L. CHAMPANEY. « *Vibration de systèmes continus* » Notes du cours du Dynamique des Constructions. Notes du cours du Dynamique des Constructions, Ecole de ENSMP, France.
- [14] A.DELAPLACE, F.GATUINGT et F.RAGUENEAU. « *Aide-mémoire Mécanique des Structures Résistance des Matériaux* » DUNOD, Paris, Édition (2008)
- [15] SINGIRESU S. RAO« *Mechanical Vibrations* » Second Edition .PURDUE University. (2000) S. GRAHAM KELLY. « *Mechanical Vibrations theory and applications*» the university of AKRON.USA. Edition 2012
- [16] ALAIN PECKER. « *dynamique des structures et des ouvrages* » Ecole nationale des ponts et chaussées FRANCE. Édition (2009)
- [17] S. GRAHAM KELLY. « *Mechanical Vibrations theory and applications*» the university of AKRON.USA. Edition 2012
- [18] JEAN-CLAUDE PASCAL. « *Vibrations et acoustique 2* » Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs du mans - Université du Maine. (2009)
- [19] J. BESNIER, R. TARBADAR. « *Travaux Pratiques en Comportement Dynamique* »

Génie Mécanique. ICAM2 .Nantes.

- [20] MAURICE PETYT. « *Introduction to finite element vibration analysis* » CAMBRIDGE university PRESS (1998)
- [21] JL BATOZ, G DHATT. « *Modélisation des structures par éléments finis, Poutre et Plaque* » volume 2, Les Presses de l'Université LAVAL Sainte-Foy, Québec. (1990).
- [22] G.DHATT, G.TOUZOT. « *Une présentation de la méthode des éléments finis* » ,deuxième édition, PARIS (1984).
- [23] SMITH I.M, GRIFFITH D.V. « *Programming the Finite Element Method* », Chapter 9, John Wiley & Sons, UK, (2004).