

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE BATNA

FACULTE DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE

MAGISTÈRE

EN

MÉCANIQUE

Option: ENERGÉTIQUE

Préparé PAR

REZIK HAFIED

**ÉTUDE DES TRANSFERTS
DE CHALEUR ET DE MASSE
DE L'AILETTE HUMIDE**

Soutenu publiquement le : 18 /02/2014

Devant le jury composé de :

Hocine	Benmoussa	Professeur	Université de Batna	Président
Cherif	Bougriou	Professeur	Université de Batna	Rapporteur
Samir	Rahal	Professeur	Université de Batna	Examineur
Omar	Kholai	Professeur	Université de Constantine	Examineur

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2013/2014

DÉDICACES

Je dédie ce travail à:

Ma mère;

Mon père;

Mon épouse et mes enfants;

Tous mes amis et collègues;

Tous ceux qui me sont chers.

R.Hafied

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord le bon Dieu qui ma donnée la santé et la volonté pour terminer ce travail.

Je remercie vivement mon encadreur Monsieur **Cherif BOUGRIOU**, Professeur à l'université de Batna, pour avoir dirigé ce travail, pour ses conseils et ses encouragements qui m'ont énormément aidé à mener ce travail.

Je tiens à exprimer ma respectueuse gratitude à mes Professeurs, Messieurs:

H. BENMOUSSA, Professeur au Département de Mécanique de l'Université de Batna.

Samir RAHAL, Professeur au Département de Mécanique de l'Université de Batna.

Omar KHOLAI, Professeur au Département de Mécanique de l'Université de Constantine.

Je remercie beaucoup tous mes enseignants de la post-graduation.

Je tiens à remercier également mes amis **Ch. Lagoune, M. Mahmaï, Dj. BenYoub** et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

SOMMAIRE

SOMMAIRE	III
NOMENCLATURE	VI
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : RAPPELS ET DEFINITIONS	
I.1 Transfert de chaleur	3
I.1.1 Définition	3
I.1.2 Transfert de chaleur par conduction	3
I.1.3 Transfert de chaleur par convection	3
I.2 Transfert de chaleur et de masse simultanément	4
I.2.1 Condensation	4
I.2.2 Condensation en film	4
I.2.3 Condensation en gouttes	5
I.2.4 Condensation mixte	5
I.3 Généralités sur les ailettes	5
I.3.1 Définition d'une ailette	5
I.3.2 Différents types d'ailettes	5
I.3.3 Efficacité d'ailette	6
I.4 Propriétés de l'air humide	7
I.4.1 Air humide et Atmosphère standard	7
I.4.2 Paramètres fondamentaux	8
I.4.2.1 Pressions et masses volumiques	8
I.4.2.2 Humidité absolue (ou spécifique)	9
I.4.2.3 Humidité relative	9
I.4.2.4 Relation entre l'humidité relative et l'humidité absolue	9
I.4.2.5 Degré de saturation	10
I.4.2.6 Point de rosée	10
I.4.2.7 Température sèche	10
I.4.2.8 Température humide	11
I.4.2.9 Enthalpie	11
I.5 Diagramme de l'air humide	11
CHAPITRE II : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	13
CHAPITRE III: ANALYSE MATHÉMATIQUE DES ÉPINGLES EN RÉGIME SEC	

III.1 Équation différentielle généralisée	33
III.1.1 Schématisation d'une épingle	33
III.1.2 Équation différentielle régissante	34
III.2 Epingles de section constante	36
III.2.1. Épingle cylindrique	36
III.2.2 Épingle rectangulaire	37
III.2.3 Épingle elliptique	38
III.3 Épingle conique	39
III.4 Épingle de profil parabolique concave	42
III.5 Épingle de profil parabolique convexe	43
CHAPITRE IV : ANALYSE MATHÉMATIQUE DES ÉPINGLES HUMIDE	
IV.1 Équation différentielle générale	46
IV.1.1 Modèle physique	46
IV.1.2 Hypothèses:	46
IV.1.3 Types d'ailettes étudiées	47
IV.1.4 Equation régissante	47
IV.2 Épingle de profil rectangulaire ($n = 0$)	52
IV.3 Épingle de profil triangulaire ($n = 1$)	53
IV.4 Épingle de profil parabolique convexe ($n = 1/2$)	53
IV.5 Épingle de profil parabolique concave ($n = 2$)	54
CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUSSIONS	
V.1 Efficacité de l'épingle	56
V.2 Distribution de la température sur la surface de l'épingle	57
V.3 Effet de la variation de la pression atmosphérique	60
V.4 Dimensions optimales de l'épingle	61
V.4.1 Dimensions optimales pour une épingle de profil rectangulaire	62
V.4.2 Dimensions optimales pour une épingle de profil triangulaire	62
V.4.3 Dimensions optimales pour une épingle de profil parabolique convexe	63
V.4.4 Dimensions optimales pour une épingle de profil parabolique concave	64
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	67
REFFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	69
ANNEXES	
A.1.1 Equations de Bessel et fonctions de Bessel	71
A.1.2 Forme généralisée de l'équation de Bessel	73

A.2 Épingle conique	75
A.3 Épingle Parabolique Convexe	76
A.4. Programmes de calcul en Fortran	78
A.5 Diagramme de l'air humide	81

NOMENCLATURE

Symbole	Désignation	Unité
a_1, a_2	Paramètres définis en équations (IV.8a) et (IV.9a).	$\text{kg}_v / \text{kg}_a$
A	Aire de la surface transversale de l'ailette.	m^2
b_1, b_2	Paramètres définis en équations (IV.8b) et (IV.9b).	$\text{kg}_v / \text{kg}_a \text{ K}$
B	Paramètre définis en équations (IV.5).	$^\circ\text{C}$
C	Constante définie en équation (II.10), (IV.7).	$\text{kg}_v / \text{kg}_a \text{ K}$
C_1, C_2	Constantes arbitraires.	
C_0	Constante définie en équation (II.26) et (IV.10).	$\text{kg}_v / \text{kg}_a \text{ K}$
C_{pa}	Chaleur spécifique du courant d'air humide.	$\text{J} / \text{kg K}$
C_{pw}	Chaleur spécifique du film de condensât.	$\text{J} / \text{kg K}$
d	Diamètre de l'épingle.	m
d_b	Diamètre de la base de l'épingle.	m
d^*	Diamètre adimensionnel de la base de l'épingle.	
FC	Facteur de correction égal à $\sqrt{1+b_2B}$.	
f_1, f_2, f_3	Fonctions de x .	
h	Enthalpie du mélange, coefficient de transfert de chaleur coté air.	$\text{J}/\text{kg}_a, \text{W}/\text{m}^2 \text{ K}$
h_D	Coefficient de transfert de masse.	$\text{Kg} / \text{m}^2 \text{ s}$
h_{fg}	Chaleur latente d'évaporation de l'eau.	J/kg
I_0	Fonction modifiée de Bessel de premier type, d'ordre 0.	
I_1	Fonction modifiée de Bessel de premier type, d'ordre 1.	
I_2	Fonction modifiée de Bessel de premier type, d'ordre 2.	
K_0	Fonction modifiée de Bessel de deuxième type, d'ordre 0.	
K_1	Fonction modifiée de Bessel de deuxième type, d'ordre 1.	
k	Conductivité thermique du matériau de l'épingle.	$\text{W} / \text{m K}$
L	Longueur de l'épingle.	m
m	Paramètre d'épingle humide définis en équation (IV.10).	m^{-1}
m_0	Paramètre d'épingle sèche définis en équation (III.7).	
m_{co}	Taux total de condensation, définis en équation (II.17).	kg/s
m_a	Masse de l'air sec.	kg
m_v	Masse de la vapeur d'eau.	kg
M_a	Masse moléculaire de l'air sec.	kg/mole
M_v	Masse moléculaire de la vapeur d'eau.	kg/mole

N	Nombre entier, constant en équation (V.25).	
P	Pression du gaz, périmètre de l'épingle.	Pa, m
P_{atm}	Pression atmosphérique.	Pa
p_a	Pression partielle de l'air sec dans un mélange.	Pa
p_s	Pression partielle de la vapeur d'eau dans un mélange saturé.	Pa
p_v	Pression partielle de la vapeur d'eau dans un mélange.	Pa
q	Flux de transfert de chaleur.	W
q_b	Flux de transfert de chaleur à la base.	W
q_{Lat}	Flux de transfert de chaleur latente (de condensation).	W
$q_{réel}$	Flux de transfert de chaleur réel dissipé.	W
q_{id}	Flux de transfert de chaleur idéal dissipé.	W
r	Rayon de l'ailette annulaire.	m
R_a	Constante des gaz pour l'air sec.	J/(kg.K)
R_v	Constante des gaz pour la vapeur d'eau.	J/(kg.K)
\bar{R}	Constante universelle de gaz.	J/(kg mole.K)
S	Surface latérale de l'épingle.	m^2
t	Épaisseur de l'ailette.	m
T	Température de la surface de l'épingle.	K
T_a	Température de l'air humide.	K
T_b	Température de la base de l'épingle.	K
T_{ext}	Température de l'extrémité de l'épingle.	K
T_r	Température du point de rosée.	K
u	Changement de variable.	
V	Volume de l'épingle.	m^3
v	Volume du mélange de gaz.	m^3
x	Distance à partir de l'extrémité de l'épingle.	m
x_0	Distance de la surface séparante entre les régions humide et sèche.	m
X	Distance adimensionnelle à partir de l'extrémité de l'épingle.	
x_v	Fraction molaire de la vapeur d'eau dans le mélange.	
x_s	Fraction molaire de la vapeur d'eau dans un mélange saturé.	
W	Humidité absolue (ou spécifique) de l'air sur l'épingle.	kg_v / kg_a
W_a	Humidité absolue de l'air humide.	kg_v / kg_a

Symboles Grec

ε	Humidité relative.	%
ρ	masse volumique.	kg/m ³
η	Efficacité de l'épingle.	
μ	Degré de saturation.	%
θ	Température adimensionnelle définie dans la page 55.	
θ_b	Différence de température ($T_b - T_a$).	K
θ_d	Différence de température ($T - T_a$) définie dans la page 40.	K
θ_p	Paramètre adimensionnel défini à l'équation (II.27) et (IV.13).	
λ	Paramètre adimensionnel définis à l'équation (VI.2).	
δ_1, δ_2	Côtés de l'épingle rectangulaire, demi-axes majeur et mineur de l'épingle elliptique.	m
α	Paramètre défini dans l'équation (III.20).	
Ω	Rapport adimensionnel d'humidité définis dans l'équation (IV.6).	

Indices

<i>a</i>	Air.
<i>b</i>	Base de l'ailette.
<i>Cond</i>	Conduction.
<i>Conv</i>	Convection.
<i>ext</i>	Extrémité l'ailette.
<i>r</i>	Point de rosée.
<i>fg</i>	Latente.
<i>max</i>	Maximum.
<i>opt</i>	Optimal.
<i>s</i>	Surface.
<i>v</i>	Vapeur d'eau.

Nombres adimensionnels

<i>Le</i>	Nombre de Lewis.
<i>Bi</i>	Nombre de Biot.

Abréviations

<i>SI</i>	Système International.
<i>IP</i>	Système Impérial d'unités.



**INTRODUCTION
GENERALE**

INTRODUCTION GENERALE

Les surfaces étendues ou ailettes sont utilisées pour améliorer le taux de transfert de chaleur entre un solide et un fluide adjacent.

Les surfaces étendues de section transversale circulaire sont appelés épingles. Elles sont largement utilisées dans de nombreux types d'échangeurs de chaleur pour de nombreuses applications en génie thermique telles que, la réfrigération, l'air conditionné (climatisation) et des applications de traitement chimique,...etc.

Cependant, dans des procédés de refroidissement et de déshumidification, qui se tiennent dans les équipements de la réfrigération et du conditionnement de l'air, le transfert de chaleur est accompagné par un transfert de masse en même temps lorsque la température de surface de l'épingle est inférieure à la température de point de condensation (rosée) de l'air entrant. Dans ce cas, cet air se condense sur la surface de l'épingle.

Par conséquent, la performance de ces équipements ou de ces échangeurs de chaleur est principalement fonction de la performance (ou efficacité) d'épingles. Nous cherchons, dans ce thème qui est une initiation à la recherche, d'étudier analytiquement quelques épingles qui fonctionnent sous la condition entièrement humide, c'est-à-dire dans le cas où le transfert de chaleur et de masse se font simultanément en se basant sur les travaux de la référence [26]. Pour cela, on a développé un programme informatique en Fortran pour le calcul de l'air humide et le calcul des champs de température, les efficacités et l'optimisation des différentes épingles. On a corrigé aussi quelques solutions données dans [26].

Pour cela notre travail est constitué par les chapitres suivants :

- ◆ Une introduction générale.
- ◆ Le premier chapitre comporte un rappel des quelques notions importantes du transfert de chaleur, des quelques généralités sur les ailettes et des propriétés de l'air humide.
- ◆ Le deuxième chapitre est consacré à l'étude bibliographique où on s'est basé sur les ailettes fonctionnant à l'état humide.
- ◆ Le troisième chapitre présente l'analyse mathématique des épingles en état sec.
- ◆ Le quatrième chapitre présente l'analyse mathématique des épingles en état humide.
- ◆ Le cinquième chapitre présente les résultats et l'optimisation de ces épingles sous forme de courbes ainsi que les discussions et analyses nécessaires.
- ◆ On termine ce mémoire par des conclusions générales, perspectives et
- ◆ Références bibliographiques.

Ce mémoire est complété par des annexes comportant :

- ◆ Une exposition des fonctions et des équations de Bessel.

- ◆ Programmes de calcul en Fortran.
- ◆ Diagramme psychrométrique.

CHAPITRE I

RAPPELS ET DEFINITIONS

CHAPITRE I : RAPPELS ET DEFINITIONS

Tout d'abord, on doit citer quelques notions du transfert de chaleur et de l'air humide.

I.1 Transfert de chaleur

I.1.1 Définition

On appelle « transfert de chaleur » le déplacement de la chaleur d'une région à une autre suite à une différence de température, ce déplacement peut se produire entre deux corps en contact (solide-solide, solide-fluide, fluide-fluide) ou entre deux parties d'un même corps.

L'énergie interne du système change au cours du déplacement de la chaleur en produisant :

- Le flux thermique transmis.
- La répartition de la température à l'intérieur du milieu considéré.

Avant d'arriver au phénomène de la condensation de l'air humide sur l'ailette on doit d'abord parler des modes de transmission de la chaleur qui s'effectuent dans et sur l'ailette et qui sont : la conduction, la convection et sans oublier le transfert de chaleur avec changement de phase lors de la condensation qui est le phénomène le plus important dans ce thème.

I.1.2 Transfert de chaleur par conduction

La conduction est le transfert de chaleur des parties chaudes vers les parties plus froides, d'un même corps ou de deux corps en contact sans mouvement apparent de matière.

Ce mode peut s'effectuer dans les solides et les fluides. Cependant, c'est le seul mécanisme par lequel la chaleur peut se déplacer dans les solides opaques.

La conduction est régie par la loi de Fourier :

$$q = -kA \frac{dT}{dx} \quad [\text{W}] \quad (\text{I.1})$$

Cette formule donne la valeur du flux de chaleur dans la direction x , avec :

Le signe (-) intervient puisque la chaleur s'écoule vers le décroissement de la température.

k : La conductivité thermique du milieu considéré [W/m.K].

A : La surface d'échange de chaleur [m²].

dT/dx : Le gradient de température dans la direction de x [K/ m].

I.1.3 Transfert de chaleur par convection

De façon générale, la convection est le transport d'une grandeur physique d'un fluide d'un point à un autre par le mouvement de ses molécules. Les différences de

températures dans les fluides entraîne des différences de densités et donc un mouvement des particules du fluide, ce mouvement à pour effet de véhiculer la chaleur du fluide et d'égaliser les températures par substitution réciproque des molécules froides à des molécules chaudes.

Le phénomène de convection intervient à chaque fois qu'un fluide se déplace par rapport à des éléments fixes (murs, plaques, tubes, ...etc.) à des températures différentes de celle du fluide ou lorsque deux fluides à des températures différentes sont mis en contact.

On dit que la convection est naturelle si le mouvement des masses fluides responsables du transfert de la chaleur, est provoqué par des différences de densités provenant elles mêmes des différences de températures à l'intérieur du fluide. On dit que la convection est forcée si le mouvement est crée par une action extérieure (ventilateurs, pompes, ...etc.)

La loi de Newton donne le flux échangé entre une surface de valeur S et de température T et un fluide de température T_f , elle s'écrit :

$$q = hS (T - T_f) \quad [\text{W}] \quad (\text{I.2})$$

Avec :

h : Coefficient d'échange convectif [$\text{W}/\text{m}^2.\text{K}$].

S : Surface d'échange de chaleur [m^2].

I.2 Transfert de chaleur et de masse simultané (avec changement de phase) :

Lorsqu'on a la condensation d'une vapeur sur un corps (liquide ou solide), on dit qu'on a un transfert de chaleur et de masse simultané.

I.2.1 Condensation

La condensation est le processus par lequel une vapeur est convertie à son état liquide. En raison de la différence d'énergie interne importante entre les états liquide et vapeur, une quantité importante de chaleur peut être libérée pendant le processus de condensation. Pour cette raison, le processus de condensation est utilisé dans de nombreux systèmes thermiques. En général, une vapeur va se condenser en liquide quand elle est refroidie suffisamment ou lorsqu'elle est en contact avec un corps (un fluide ou un solide) qui est en dessous de sa température de saturation. La condensation peut s'établir sous trois modes, en film, en gouttelettes, ou dans un mode mixte.

I.2.2 Condensation en film

Dans ce mode de condensation sur une paroi verticale, le condensât mouille entièrement la surface, l'épaisseur du film croit et le film s'écoule le long de la surface. Il

existe un gradient de température dans ce film, il représente alors une résistance en terme de transfert de chaleur.

I.2.3 Condensation en gouttes

Dans ce mode de condensation, la vapeur se condense sur une surface qui n'est pas mouillée par le condensât. Le condensât ne s'étale pas mais forme sur la surface des gouttes discrètes. La condensation en goutte est plus efficace que celle en film. Les coefficients de transfert de chaleur lors de la condensation en gouttelettes sont alors beaucoup plus grands que ceux trouvés en condensation en film [13].

I.2.4 Condensation mixte

Il existe un troisième mode de condensation qui est la condensation mixte, il préexiste alors à la surface de condensation des gouttes isolées et un film de condensât. Ce mode de condensation peut avoir lieu lors de la transition entre la condensation en gouttelettes dans un premier temps et la condensation en film.

I.3 Généralités sur les ailettes

I.3.1 Définition d'une ailette

L'ailette est un dispositif qui permet de créer des perturbations et de la turbulence au niveau de l'écoulement du fluide entourant l'ailette (elle permet d'augmenter le niveau de la turbulence dans la couche limite) mais surtout la surface d'échange de chaleur, donc le transfert thermique.

I.3.2 Différents types d'ailettes

Les différents types d'ailettes sont regroupés en deux grandes parties :

- Ailettes continues

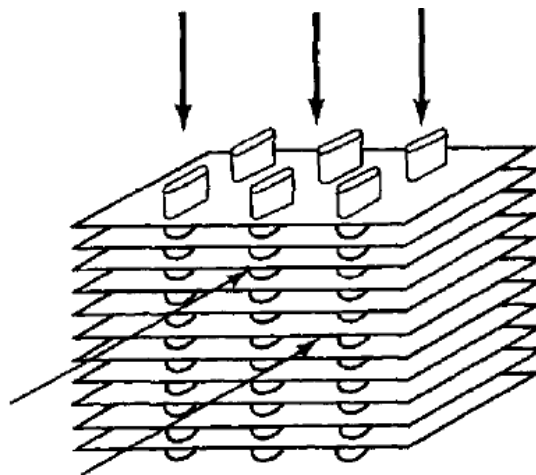


Figure I-1 : Exemple typique d'une surface étendue continue [14].

• Ailettes indépendantes

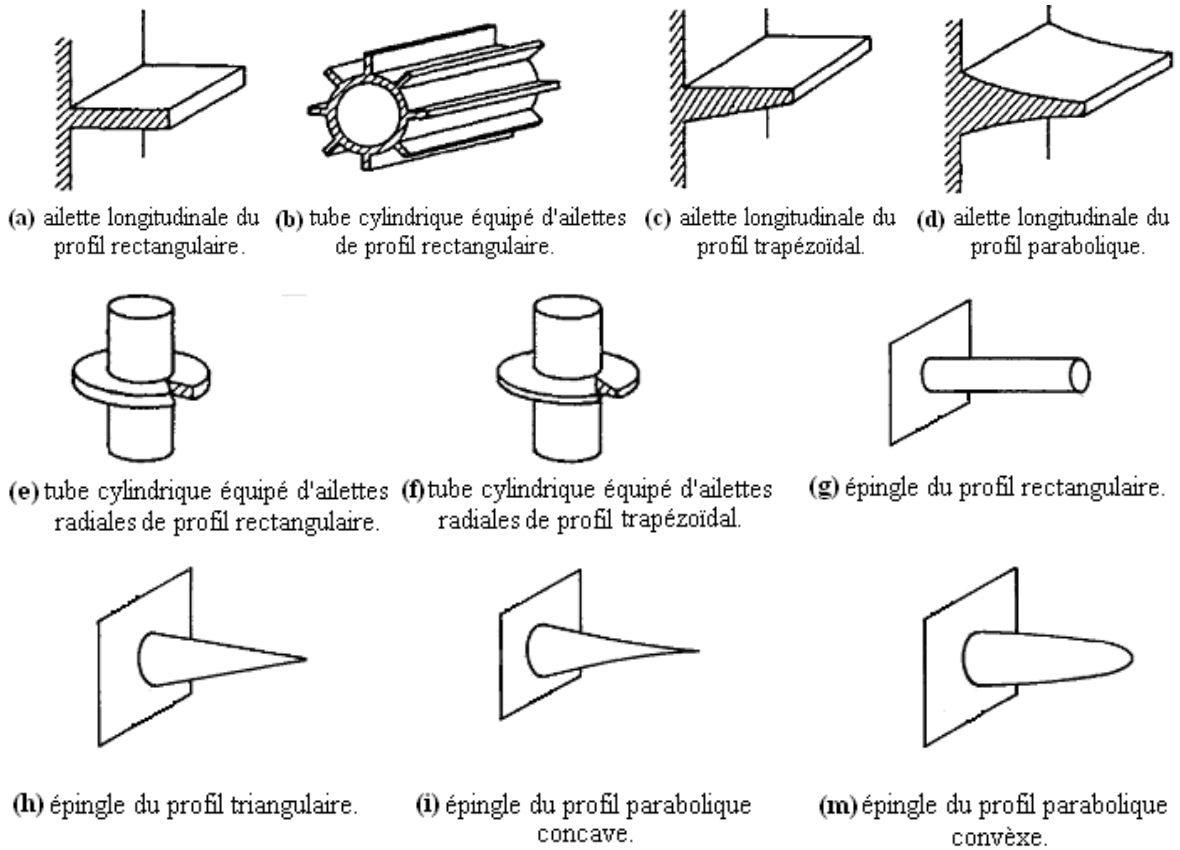


Figure I-2 : Quelques exemples typiques de surfaces étendues indépendantes [14].

Les ailettes continues sont utilisées dans les échangeurs de chaleur employés dans l'habitat, tandis que les échangeurs de chaleur industriels ont plutôt des ailettes indépendantes.

I.3.3 Efficacité d'ailette

L'efficacité d'une ailette est définie comme étant le rapport de la puissance thermique réellement échangée par l'ailette à la puissance thermique théorique qu'elle serait capable d'échanger si toute la surface de l'ailette est à la température de sa base T_b .

$$\eta = \frac{q_{réel}}{q_{th}} \quad (I.3)$$

I.4 Propriétés de l'air humide¹

I.4.1 L'air humide et l'atmosphère standard

L'air atmosphérique est un mélange de nombreux gaz, plus de vapeur d'eau et de polluants innombrables. Mis à part la quantité de vapeur d'eau et de polluants, qui peuvent varier considérablement, la composition des gaz qui constituent l'air sec est à peu près constante, variant légèrement avec le temps, le lieu et l'altitude. En 1949, une composition standard d'air sec a été fixée par la Comité Mixte Internationale sur les Données Psychrométriques comme indiqué dans la table I-1.

La relation des gaz parfaits

$$Pv = \frac{P}{\rho} = R_a T \quad (\text{I.4})$$

En se basant sur la composition de l'air dans la table I-1, la masse moléculaire de l'air sec M_a est 28.965 et sa constante des gaz R_a est

$$R_a = \frac{\bar{R}}{M_a} = \frac{8314}{28.965} = 287 \text{ J/(kgK)} \quad (\text{I.5})$$

où \bar{R} est la constante universelle de gaz; $\bar{R} = 8314 \text{ J/(kg mole K)}$.

Table I-1 : Composition de l'air sec

Constituent	Masse Moléculaire	Fraction de Volume
Oxygène	32.000	0.2095
Nitrogène	28.016	0.7809
Argon	39.944	0.0093
Dioxyde de Carbon	44.010	0.0003

La plupart des processus de conditionnement d'air contiennent un mélange de l'air sec et la vapeur d'eau. La quantité de vapeur d'eau peut varier de zéro à l'état saturé qui est un maximum déterminé par la température et la pression du mélange. L'air saturé est un état d'équilibre neutre entre l'air humide et une phase liquide ou solide de l'eau qui peut être présente. La masse moléculaire de l'eau est 18,015 et la constante des gaz pour la vapeur d'eau est :

$$R_v = \frac{\bar{R}}{M_v} = \frac{8314}{18.015} = 462 \text{ J/(kgK)} \quad (\text{I.6})$$

La pression atmosphérique peut être estimée en fonction de l'altitude par la relation suivante :

$$P = a + bH \quad (\text{I.7})$$

¹ La plus part de cette partie est empruntée de McQuiston [15].

où

a et b : Constantes données dans la table I-2.

H : Altitude au-dessus du niveau de mer en mètres.

P : Pression en kilo pascal.

Table I-2 : Constantes pour l'équation (I.7)

Constante	$H \leq 4000$ ft ou 1220 m		$H > 4000$ ft ou 1220m	
	IP	SI	IP	SI
a	29.92	101.325	29.42	99.436
b	-0.001025	-0.01153	-0.0009	-0.010

I.4.2 Paramètres fondamentaux

I.4.2.1 Pressions et masses volumiques

La loi de Dalton pour un mélange des gaz parfaits indique que la pression de mélange est égale à la somme des pressions partielles des constituants :

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + \dots \quad (\text{I.8})$$

Pour l'air humide

$$P = p_{N_2} + p_{O_2} + p_{CO_2} + p_{Ar} + p_v \quad (\text{I.9})$$

Parce que les différents constituants de l'air sec peuvent être considéré comme étant un gaz, il en résulte que la pression totale de l'air humide est la somme des pressions partielles de l'air sec et la vapeur d'eau :

$$P = p_a + p_v \quad (\text{I.10})$$

Chaque constituant dans un mélange de gaz parfait se comporte comme si les autres n'étaient pas présents.

D'après la loi des gaz parfait (I.4), la masse volumique pour l'air sec peut s'écrire :

$$\rho_a = \frac{P - P_v}{R_a T} = \frac{P - P_v}{287 \cdot T}$$

et pour la vapeur d'eau comme suite :

$$\rho_v = \frac{P_v}{R_v T} = \frac{P_v}{462 \cdot T}$$

dans le cas où l'air humide est saturé de vapeur d'eau, la pression de la vapeur d'eau est alors la pression, p_s .

I.4.2.2 Humidité absolue (ou spécifique)

L'humidité absolue W est le rapport de la masse de la vapeur d'eau m_v , à la masse de l'air sec m_a dans le mélange.

$$W = \frac{m_v}{m_a} \quad (\text{I.11})$$

W est appelée aussi, rapport d'humidité, rapport de mélange, teneur en eau, etc.

I.4.2.3 Humidité relative

L'humidité relative ε est le rapport de la fraction molaire de la vapeur d'eau x_v dans le mélange à la fraction molaire x_s de la vapeur d'eau dans un mélange saturé à la même température et pression :

$$\varepsilon = \left[\frac{x_v}{x_s} \right]_{T,P} \quad (\text{I.12})$$

Pour un mélange de gaz parfaits, la fraction molaire est égale au rapport de pression partielle de chaque constituant. La fraction molaire de la vapeur d'eau est

$$x_v = \frac{p_v}{P} \quad (\text{I.13})$$

Utilisant l'équation (I.6)-(I.12), on peut écrire l'humidité relative comme :

$$\varepsilon = \frac{p_v/P}{p_s/P} = \frac{p_v}{p_s} \quad (\text{I.14})$$

Puisque les températures de l'air sec et de la vapeur d'eau sont supposées les mêmes dans le mélange,

$$\varepsilon = \frac{p_v/R_v T}{p_s/R_v T} = \left[\frac{\rho_v}{\rho_s} \right]_{T,P} \quad (\text{I.15})$$

où les masses volumiques ρ_v et ρ_s sont appelées (désignées comme) les humidités absolues de la vapeur d'eau (masse d'eau par unité de volume de mélange).

I.4.2.4 Relation entre l'humidité relative et l'humidité absolue

Utilisant la loi de gaz parfait, on peut dériver un rapport entre l'humidité relative ε et l'humidité absolue W :

$$m_v = \frac{p_v V}{R_v T} = \frac{p_v V M_v}{\bar{R} T} \quad (\text{I.16a})$$

et

$$m_a = \frac{p_a V}{R_a T} = \frac{p_a V M_a}{\bar{R} T} \quad (\text{I.16b})$$

et

$$W = \frac{M_v p_v}{M_a p_a} \quad (\text{I.17a})$$

Pour le mélange air-vapeur d'eau, l'équation (I.17a) se réduit à :

$$W = \frac{18.015}{28.965} \frac{p_v}{p_a} = 0.6219 \frac{p_v}{p_a} \quad (\text{I.17b})$$

Combinant l'équation (I.14) et l'équation (I.17b), on trouve

$$\varepsilon = \frac{p_a}{0.6219 p_s} W \quad (\text{I.18})$$

I.4.2.5 Degré de saturation

Le degré de saturation μ est le rapport de l'humidité absolue W au rapport d'humidité d'un mélange saturé W_s à la même température et pression :

$$\mu = \left[\frac{W}{W_s} \right]_{T,p} \quad (\text{I.19})$$

I.4.2.6 Point de rosée

Quand un mélange de gaz est refroidi à pression constante, la température à laquelle la condensation commence est le point de rosée. À une pression (totale) de mélange donné, le point de rosée est fixé par l'humidité absolue W ou par la pression partielle de la vapeur d'eau. Ainsi T_r , W et p_v ne sont pas des propriétés indépendantes.

Température de rosée

La température de rosée T_r correspond à l'apparition de la phase condensée, eau ou glace sur une surface S refroidit par un moyen quelconque placée dans un air humide dont l'humidité spécifique reste constante. Ce phénomène est très visible sur un miroir ou toute surface polie (lisse). La température de rosée T_r est appelée aussi de givre (quand on a apparition de la glace).

I.4.2.7 Température sèche

La température sèche ou de bulbe sec est celle indiquée par un thermomètre dont l'élément sensible «le bulbe» est parfaitement sec. C'est le terme habituel de température.

Il y'aura dépôt de condensât de vapeur d'eau (ou de givre) sur une surface quelconque si sa température sèche est inférieure à la température de rosée de l'air ambiant.

Dans ce cas, l'humidité absolue de l'air reste constante, sa pression de vapeur P_v est invariable.

I.4.2.8 Température humide

La température humide ou de bulbe humide T_h est la température indiquée par un thermomètre dont le bulbe est recouvert d'un tissu mouillé.

Le groupement d'un thermomètre à bulbe sec et d'un thermomètre à bulbe humide ventilé constitue un appareil appelé psychromètre.

I.4.2.9 Enthalpie

L'enthalpie h d'un mélange des gaz parfaits est égale à la somme des enthalpies de chaque constituant.

$$h = h_a + W h_v \quad (\text{I.20})$$

et pour le mélange air-vapeur d'eau est généralement référencée à la masse d'air sec. C'est parce que la quantité de vapeur d'eau peut varier au cours de certains processus, mais la quantité d'air sec reste typiquement constante. Chaque terme dans l'équation (I.20) a l'unité d'énergie par unité de masse d'air sec. Avec l'hypothèse de comportement de gaz parfait, l'enthalpie est une fonction seulement de température. Si 0°C est sélectionné comme état de référence où l'enthalpie de l'air sec est 0, et si les chaleurs spécifiques C_{pa} et C_{pv} sont supposées constantes, des relations simples résultent :

$$h_a = C_{pa} T \quad (\text{I.21})$$

$$h_v = h_g + C_{pv} T \quad (\text{I.22})$$

où l'enthalpie de vapeur d'eau saturée h_g à 0°C est 2501.3 kJ/kg.

Utilisant les équations (I.20), (I.21) et (I.22) avec C_{pa} et C_{pv} prennent 1.0 et 1.86 kJ/(kg°C), respectivement, nous avons

$$h = 1.0T + W (2501.3 + 1.86T) \quad \text{kJ} / \text{kg}_a \quad (\text{I.23})$$

I.5 Diagramme de l'air humide

Le diagramme de l'air humide dans la page 80 permet, par simple lecture et sans effectuer aucun calcul, de déterminer la valeur de toutes les grandeurs caractérisant l'air humide connaissant deux d'entre elles, comme le montre le schéma ci-dessus.

Si le point 1 représente l'air humide considéré (température T ; humidité relative ε), on peut tirer plusieurs paramètres, comme l'humidité spécifique, l'humidité spécifique de saturation, la pression de vapeur, la pression de vapeur de saturation, la température de rosée, la température humide, l'enthalpie spécifique, le volume spécifique, ... etc.

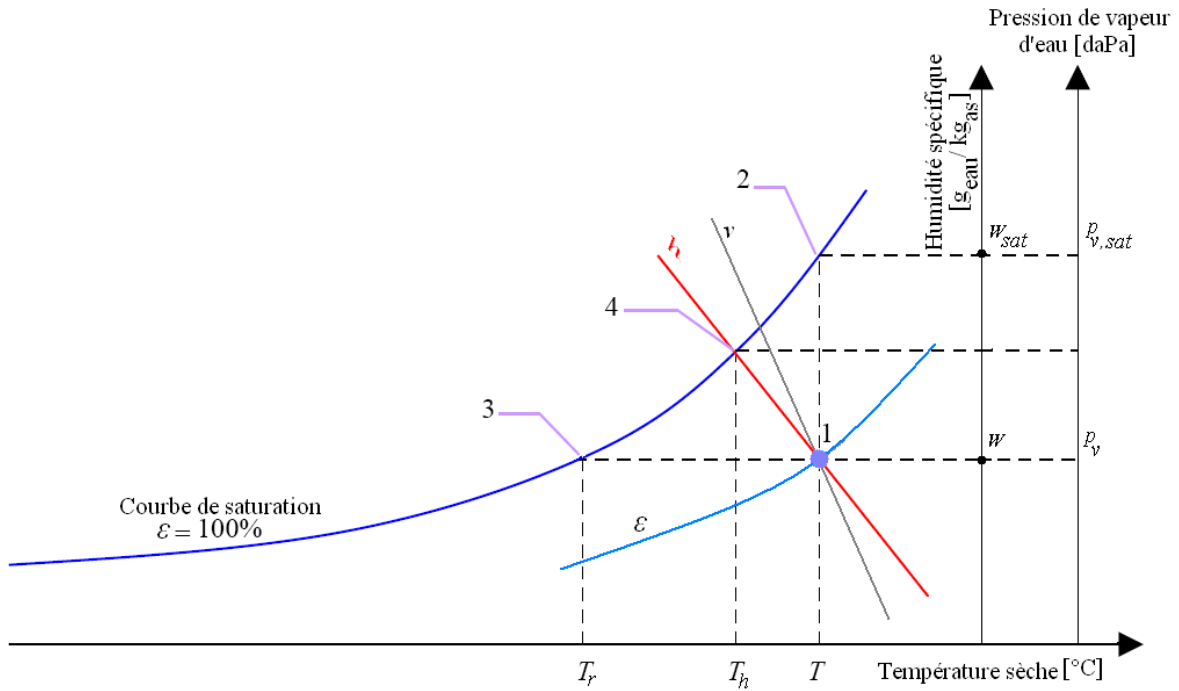


Figure I-3 : Schéma du diagramme de l'air humide.

Au vu de ce diagramme, on observe que :

Le point 2 correspond la limite maximale de vapeur d'eau pouvant être contenue dans l'air à cette même température (w_{sat}).

Le point 3 correspond au refroidissement maximal possible sans condensation, la température de rosée (T_r).

Le point 4 correspond à la saturation atteinte par injection de gouttelettes d'eau. Ce procédé permet de refroidir sans dépense d'énergie (température humide T_h à enthalpie constante).

CHAPITRE II

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE II : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Une revue, de transfert thermique sur les surfaces étendues, détaillée a été réalisée par **Razelos** [1]. Cependant, dans des processus, par exemple le refroidissement et la déshumidification qui ont lieu dans les équipements de réfrigération et de climatisation, le transfert de la chaleur et de la masse se produisent simultanément quand la température de la surface d'ailette est plus basse que la température de point de condensation d'air entrant. Plusieurs tentatives ont été faites pour analyser l'efficacité des surfaces étendues avec le transfert de chaleur et de masse simultanés.

Threlkeld [2] a étudié l'expression analytique de l'efficacité globale d'une ailette humide en utilisant la différence d'enthalpie comme force motrice pour la production de transfert de chaleur et de masse simultanément.

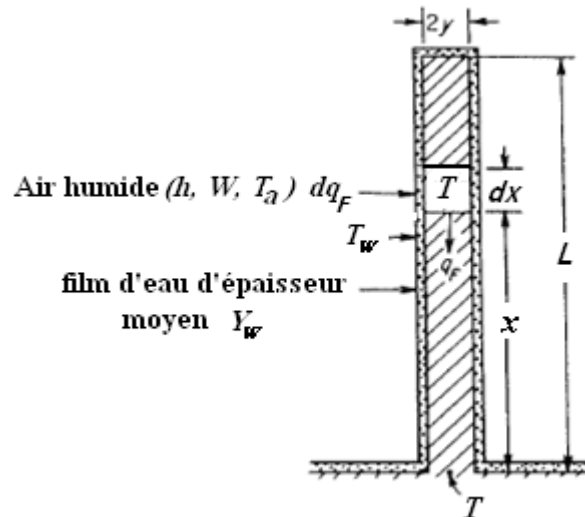


Figure II-1 : Ailette longitudinale mouillée lors de condensation de l'air humide.

La conduction dans le film de condensât est supposée seulement dans la direction y . Pour une unité de longueur de l'ailette, la densité du flux de chaleur échangé est donnée par :

$$q_F = 2k_F y_F \frac{dT_F}{dx} \quad (\text{II.1})$$

$$dq_F = -2 \frac{k_w}{y_w} (T_w - T_F) dx \quad (\text{II.2})$$

Il a supposé que sur une petite gamme de température, l'enthalpie de l'air saturé h_s , varie linéairement suivant l'expression suivante :

$$h_s = a + bT_s \quad (\text{II.3})$$

Il a utilisé l'équation approximative suivante :

$$dq = \frac{h_{c,o} dA_o}{C_{p,a}} (h - h_{s,w}) \quad (\text{II.4})$$

La figure II-2 montre que sur une gamme étroite de température, par exemple d'environ 4,72°C, h_s peut être donné par l'équation (II.3) où les coefficients a et b sont des valeurs moyennes.

Dans le graphe de la figure II-3, la variation du coefficient b est donnée pour une pression barométrique allant de 82737.12 à 101325.393 Pa (ou de 12 à 14,696 psia).

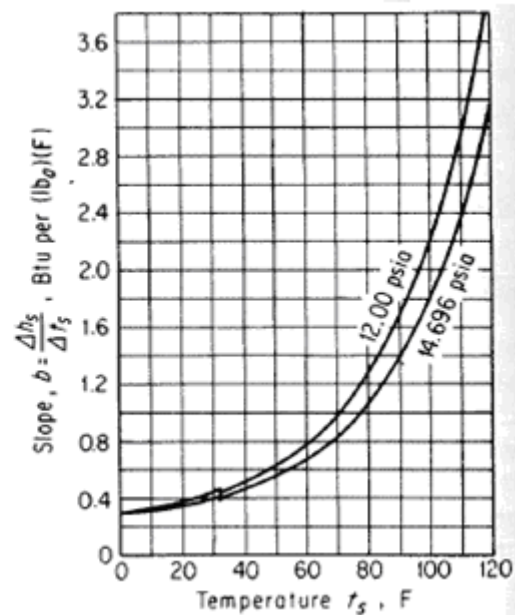
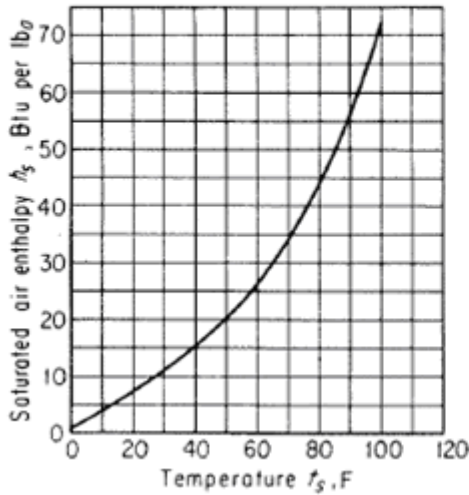


Figure II-2 : Enthalpie de l'air saturé en fonction de la température pour une pression de 101325.393 Pa.. **Figure II-3 :** Pente $\Delta h_s/\Delta t_s$ de l'air saturé.

A partir des équations (II.1), (II.2), (II.3) et (II.4), il a abouti à l'équation suivante :

$$\frac{d^2 \Delta h_F}{dx^2} = \frac{h_{o,w}}{k_F y_F} \Delta h_F \quad (\text{II.5})$$

Les conditions aux limites pour cette équation sont :

$$\Delta h_F = \Delta h_{F,b} \text{ à } x = 0, \text{ et } d\Delta h_F/dx = 0 \text{ à } x = L.$$

Cette équation et ses conditions aux limites sont complètement analogues à celle de l'équation d'ailette sèche. Ainsi, la solution de cette équation a la même forme que celle d'ailette sèche. L'efficacité de cette ailette humide est donnée par :

$$\eta_{Hum} = \frac{\tanh mL}{pL} \quad (\text{II.6})$$

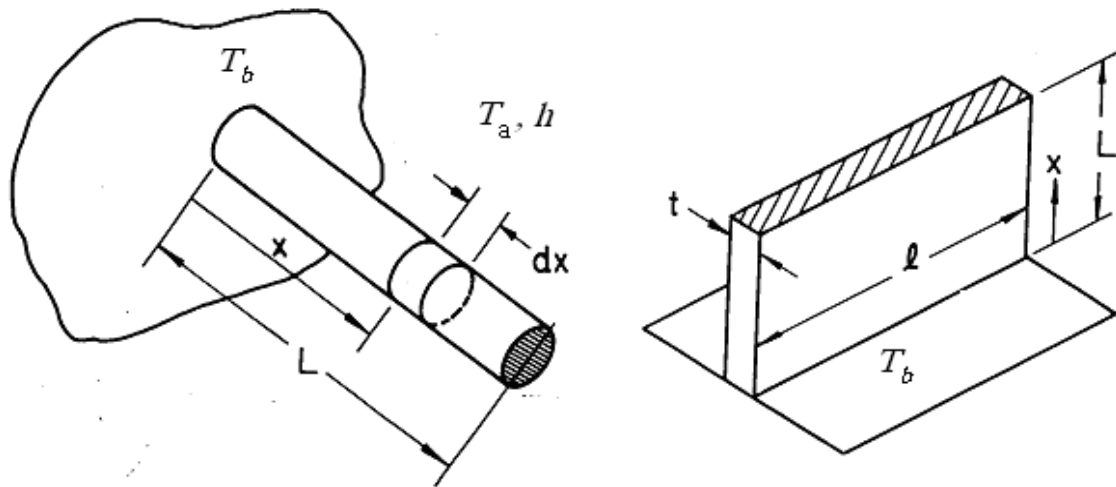
où

$$m = \sqrt{h_{o,w} / (ky)}$$

Si nous analysons autres types d'ailettes et faisons des substitutions semblables, on obtiendra des résultats analogues. On conclut que les solutions donnant l'efficacité d'ailettes sèches s'appliquent également à l'efficacité d'ailettes humides en remplaçant $h_{o,w}$ de l'ailette humide à la place de $h_{c,o}$ de l'ailette sèche.

Donc, il a suggéré d'après ces résultats que l'efficacité de l'ailette humide est indépendante de l'humidité relative de l'air.

McQuiston [3] a étudié l'efficacité d'une ailette droite et humide (section transversale uniforme), figure II-4.



a- Ailette de section transversale uniforme. *b-* Ailette plate de section transversale uniforme.

Figure II-4 : Ailettes de section uniforme.

En ajoutant l'effet de la chaleur de condensation à l'équation qui régit la distribution de température dans l'ailette, le bilan énergétique d'un volume élémentaire devient :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{P}{kA} \left[h(T - T_a) + h_D h_{fg} (W - W_a) \right] \quad (\text{II.7})$$

Il a utilisé la relation de Lewis pour obtenir le coefficient de transfert de masse (h_D) :

$$h_D = h/C_{p,a} \quad (\text{II.8})$$

et donc, une nouvelle équation régissant de la température de l'ailette en considérant le transfert combiné de chaleur et de masse en combinant les équations (II.7) et (II.8) :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{hP}{kA} \left[(T - T_a) + \frac{h_{fg}}{C_{p,a}} (W - W_a) \right] \quad (\text{II.9})$$

Pour résoudre cette équation, il a supposé que $(W-W_a)$ est linéairement liée à $(T-T_a)$,

$$C = \frac{W - W_a}{T - T_a} \quad (\text{II.10})$$

L'équation différentielle décrivant la distribution de température dans un système ailette-film mince de section transversale uniforme devient donc :

$$\frac{d^2(T - T_a)}{dx^2} = m^2(T - T_a) \quad (\text{II.11})$$

où :

$$m^2 = \left(\frac{hP}{kA} \right) \left(1 + \frac{C \cdot h_{fg}}{C_{p,a}} \right) \quad (\text{II.12})$$

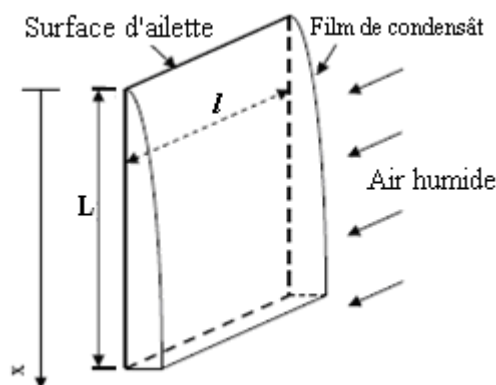
quand il n'y a pas de condensation ($C = 0$) et :

$$m^2 = \frac{hP}{kA} = m_0^2 \quad (\text{II.13})$$

Il a trouvé que la condensation de l'humidité réduit l'efficacité de l'ailette, particulièrement pendant que l'humidité relative devient grande. Pour une condition typique, la réduction est de 7 ou 8 pour cent et des fois peut atteindre jusqu'à 14%.

Ce modèle présenté ici est simple et directe à utiliser. Il est facilement adaptable à l'ordinateur et facile à utiliser avec des calculs à la main.

Xiangguo Xu et al [4] ont développé, un modèle modifié de McQuiston pour évaluer l'efficacité d'ailette plane verticale humide montrée dans la figure II-5 en tenant en compte du film de condensât s'écoulant sur les surfaces d'ailettes et ses impacts sur le transfert de chaleur, et par conséquent, le changement d'enthalpie de ce film.



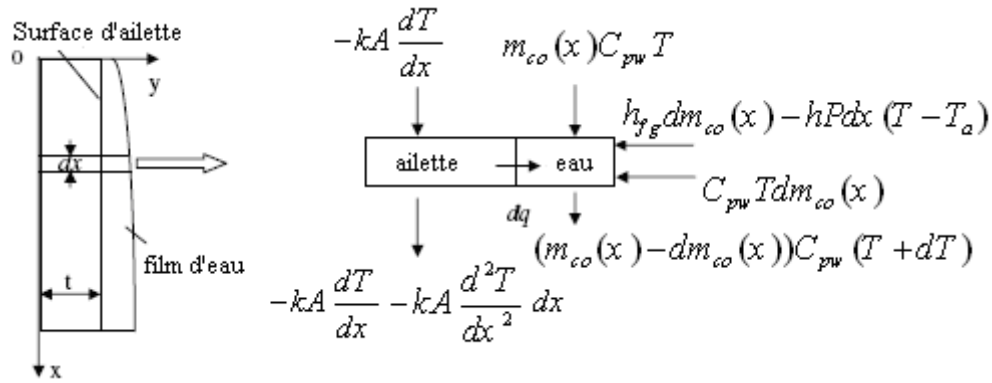


Figure II-5 : Transfert de chaleur entre l'ailette et le film dans un volume de contrôle élémentaire du système ailette-film.

Pour l'élément d'ailette, le bilan thermique est :

$$kA \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{dq}{dx} = 0 \quad (\text{II.14})$$

Pour l'élément de film, le bilan thermique est :

$$dq = (m_{co}(x) + dm_{co}(x))C_{p,w}(T + dT) - m_{co}(x)C_{p,w}T - C_{p,w}T dm_{co}(x) - h_{fg} dm_{co}(x) + hP dx (T - T_a) \quad (\text{II.15})$$

La simplification de l'équation (II.15) donne :

$$\frac{dq}{dx} = m_{co}(x)C_{p,w} \frac{dT}{dx} - h_{fg} \frac{dm_{co}(x)}{dx} + hP(T - T_a) \quad (\text{II.16})$$

Le taux total de condensât est donné par :

$$\begin{aligned} m_{co}(x) &= m_{co}(0) + \int_0^x dm_{co}(x) \\ &= m_{co}(0) - \int_0^x h_D (W - W_a) P dx \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

D'autre part, l'hypothèse de McQuiston selon laquelle $(W - W_a)$ est simplement une relation linéaire de $(T - T_a)$, est adoptée ici,

$$C = \frac{W - W_a}{T - T_a} \quad (\text{II.18})$$

Les coefficients de transfert de chaleur et de masse sont liés par l'analogie de Chilton-Colburn [12] :

$$h = h_D C_{p,a} Le^{\frac{2}{3}} \quad (\text{II.19})$$

Ici, le nombre de Lewis Le est supposé égal à 1. En combinant les équations (II.14) et (II.16) - (II.19), et en utilisant θ_d pour représenter la différence de température, $T-T_a$, ils ont trouvé :

$$\frac{d^2\theta_d}{dx^2} = \frac{m_{co}(x)C_{p,w}}{kA} \frac{d\theta_d}{dx} + \frac{hP}{kA} \left(\frac{C \cdot h_{fg}}{C_{p,a}} + 1 \right) \theta_d \quad (II.20)$$

L'équation (II.20) représente le model modifié de McQuiston. En comparant avec le model de McQuiston dans l'équation (II.11), un nouveau terme qui représente l'effet de la variation d'enthalpie du film de condensât mobile et de son impact sur le transfert de chaleur dans un système ailette-film de condensât est ajouté. Ce modèle était censé être plus complet.

D'après les résultats, ils ont révélé qu'à un taux de condensation total très élevé, l'utilisation de ce modèle pour évaluer l'efficacité d'ailette humide est plus stable que celui de McQuiston.

G. Wu, T.Y. Bong [5] ont réalisé une étude analytique de l'efficacité d'une ailette droite dans des conditions entièrement et partiellement humide.

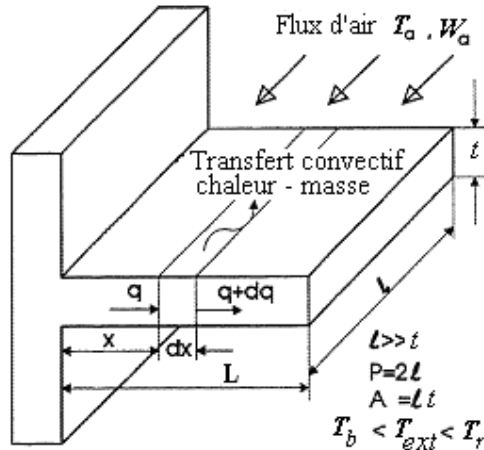


Figure II-6 : Ailette droite entièrement mouillée.

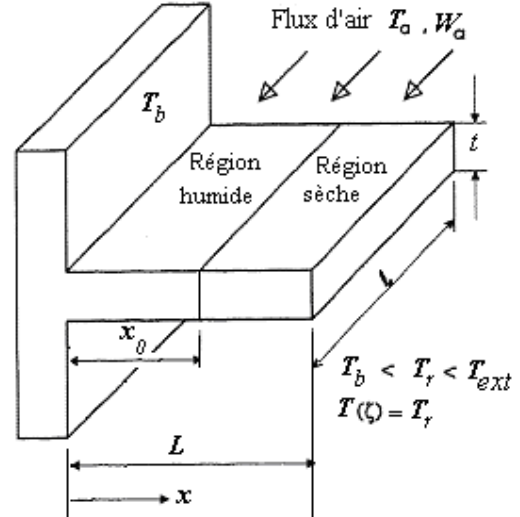


Figure II-7 : Ailette droite partiellement mouillée.

L'efficacité de l'ailette sèche est donnée dans la plupart des documents par :

$$\eta_0 = \frac{\tanh(m_0 L)}{m_0 L} \quad (II.21)$$

où:

$$m_0 = \sqrt{\frac{hP}{kA}} \quad (\text{II.22})$$

♦ Pour l'ailette entièrement humide, ils ont appliqué la loi de conservation de l'énergie pour un volume élémentaire, $dA = Pdx$, montré dans la figure II-6.

$$-kA \frac{dT}{dx} - hPdx (T_a - T) - h_D Pdx (W_a - W) h_{fg} + kA \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) = 0 \quad (\text{II-23})$$

Après réarrangement des termes, et en adaptant l'analogie (II.19), l'équation différentielle régissant de la distribution de température le long de l'ailette, devient :

$$\frac{d^2\theta_d}{dx^2} - m_0^2\theta_d - m_0^2 \frac{h_{fg}}{C_p Le^{2/3}} (W_a - W) = 0 \quad (\text{II.24})$$

$$\text{où : } \theta_d = T_a - T$$

Pour résoudre l'équation (II-24), ils ont proposé une relation linéaire entre W et T sur la plage de température ($T_b < T < T_{ext}$) comme suit :

$$W = a + bT \quad (\text{II.25})$$

où

$$b = \frac{W_{ext} - W_b}{T_{ext} - T_b} \quad \text{et} \quad a = W_b - \frac{W_{ext} - W_b}{T_{ext} - T_b} T_b$$

En substituant l'équation (II-25) dans l'équation (II-24), on obtient :

$$\frac{d^2\theta_d}{dx^2} - m_0^2(1 + bB)\theta_d - m_0^2 BC_0 = 0 \quad (\text{II.26})$$

$$\text{où } B = \frac{h_{fg}}{C_p Le^{2/3}} \quad \text{et} \quad C_0 = W_a - a - bT_a$$

L'équation (II-26) est une équation différentielle non homogène du second ordre. La distribution de la température le long de la surface d'ailette est :

$$\frac{\theta_d + \theta_p}{\theta_b + \theta_p} = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cos(mL)} \quad (\text{II.27})$$

$$\text{où } \theta_p = \frac{BC_0}{1+bB} \quad \text{et} \quad m^2 = m_0^2(1+bB)$$

L'efficacité pour cette ailette est :

$$\eta_{Hum} = \frac{\tanh(mL)}{mL} \quad (\text{II.28})$$

L'expression mathématique de l'efficacité d'ailette humide donnée par l'équation (II.28) est similaire de l'ailette sèche donnée par l'équation (II.21). La seule différence est que le paramètre m est remplacé par m_0 multiplié par $(1+bB)^{1/2}$. La constante b est la pente moyenne de la ligne de saturation sur la carte psychrométrique dans l'intervalle de température ($T_b < T < T_{ext}$).

♦ Pour l'ailette partiellement humide, on a deux régions et ses équations différentielles régissantes sont :

$$\frac{d^2\theta_d}{dx^2} - m_0^2(1+bB)\theta_d - m_0^2BC_0 = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq x < x_0 \quad (\text{II.29})$$

$$\text{et} \quad \frac{d^2\theta_d}{dx^2} - m_0^2\theta_d = 0 \quad \text{pour} \quad x_0 \leq x < L \quad (\text{II.30})$$

La résolution de ces équations différentielles régissantes, avec les conditions aux limites correspondantes, donne la distribution de la température dans l'ailette comme suit,

$$\frac{\theta_d + \theta_p}{\theta_b + \theta_p} = \frac{\frac{\theta_r + \theta_p}{\theta_b + \theta_p} \sinh(mx) + \sinh[m(x_0 - x)]}{\sinh(mx_0)} \quad \text{si} \quad 0 \leq x < x_0 \quad (\text{II-31})$$

$$\text{et} \quad \frac{\theta_d}{\theta_r} = \frac{\cosh[m_0(L - x)]}{\cosh[m_0(L - x_0)]} \quad \text{si} \quad x_0 \leq x < L \quad (\text{II-32})$$

L'efficacité pour la région humide est :

$$\eta_{R.hum} = \frac{\left(\frac{\theta_r + \theta_p}{\theta_b + \theta_p} + 1\right) [\cosh(mx_0) - 1]}{mx_0 \sinh(mx_0)} \quad (\text{II.33})$$

L'efficacité pour la région sèche est :

$$\eta_{R.s\grave{e}c} = \frac{\theta_r}{(1+bB)(\theta_b + \theta_p)} \frac{\tanh[m_0(L - x_0)]}{m_0(L - x_0)} \quad (\text{II.34})$$

L'efficacité globale pour toute la surface est :

$$\eta = \frac{x_0}{L} \eta_{R.hum} + \frac{L - x_0}{L} \eta_{R.s\grave{e}c} \quad (\text{II.35})$$

Ils ont trouvé que pour une ailette entièrement humide, l'efficacité globale est faiblement dépendante de l'humidité relative, ce qui est similaire au résultat de Threlkeld et différent à

celui de McQuiston. Pour l'ailette partiellement humide, l'efficacité de l'ailette doit être déterminée séparément pour la région humide et la région sèche; ils ont trouvé que l'efficacité globale pour toute la surface est significativement dépendante de l'humidité relative.

Mostafa H. Sharqawy, Syed M. Zubair [6] ont fourni une solution analytique pour l'efficacité d'une ailette annulaire entièrement humide.

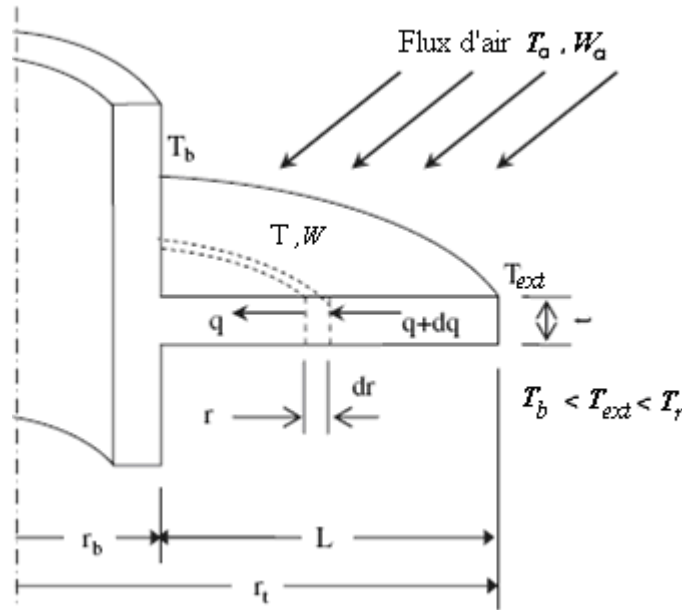


Figure II-8 : Ailette annulaire entièrement humide.

En appliquant un bilan thermique sur une surface infinitésimale, $dA=2\pi r.dr$ de cette ailette, figure II-8 :

$$(q + dq) + 4\pi r h (T_a - T) dr + 4\pi r h_D h_{fg} (W_a - W) dr - q = 0 \quad (\text{II.35})$$

d'après la loi de conduction de la chaleur de Fourier, nous avons

$$q = 2\pi r k \frac{dT}{dr} \quad (\text{II.36})$$

En acceptant l'analogie de Chilton-Colburn (II.19), le bilan thermique sur le volume élémentaire donne l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\theta_d}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_d}{dr} - m_0^2\theta_d - m_0^2B(W_a - W) = 0 \quad (\text{II.37})$$

$$\text{où } m_0 = \sqrt{\frac{2h}{kt}}, \quad B = \frac{h_{fg}}{C_p Le^{2/3}} \text{ et } \theta_d = T_a - T$$

Ils ont introduit une hypothèse du modèle linéaire plus réaliste pour la relation entre le rapport d'humidité W et la température de surface T , sur la plage de température ($T_b < T < T_r$) comme suit :

$$W = a_2 + b_2 T \quad (\text{II.38})$$

où

$$a_2 = W_b - \frac{W_r - W_b}{T_r - T_b} T_b \quad (\text{II.39})$$

$$b_2 = \frac{W_r - W_b}{T_r - T_b} \quad (\text{II.40})$$

Ici les constantes a_2 et b_2 peuvent être calculées à partir des conditions de l'air ambiant et de la température de base d'ailette. La constante b_2 est la pente moyenne de la ligne de saturation sur le diagramme psychrométrique sur toute la plage de température ($T_b < T < T_r$), qui peut être facilement calculée, contrairement à l'étude précédente, sans connaître la condition de l'extrémité de l'ailette.

En substituant l'équation (II.38) dans l'équation (II.37), on obtient :

$$\frac{d^2 \theta_d}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \theta_d}{dr} - m^2 \theta_d = m_0^2 B C_0 \quad (\text{II.41})$$

$$\text{où } m^2 = m_0^2 (1 + b_2 B), \quad C_0 = W_a - a_2 - b_2 T_a$$

L'équation (II.41) est l'équation régissant. Elle est résolue analytiquement, et d'après les résultats, la température de surface augmente quand il y a condensation d'humidité, plus le taux d'humidité relative est élevé, plus la température de surface devient aussi élevée.

Ils ont étudié aussi l'effet de la pression atmosphérique sur l'efficacité de l'ailette, en plus des dimensions optimales de l'ailette. Ils ont constaté que l'efficacité de l'ailette augmente avec l'augmentation de la pression atmosphérique. En théorie, lorsque la pression atmosphérique augmente le taux d'humidité de l'air augmente. Ce qui rend la force motrice du processus de transfert de masse sur la surface de l'ailette élevé et donc des améliorations dans le taux de transfert de chaleur due à la condensation.

Balaram Kundu [7] a présenté une résolution analytique de la performance et l'optimisation d'une ailette conique droite (trapézoïdale) humide.

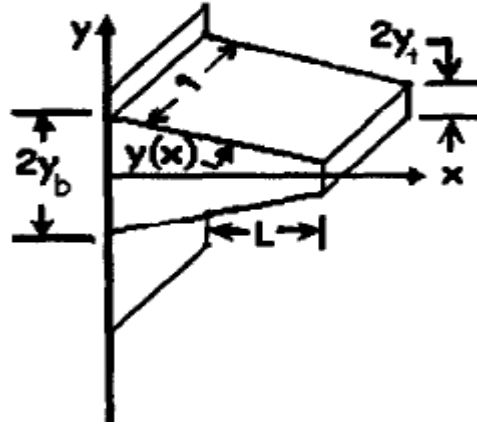


Figure II-9 : Ailette triangulaire (trapézoïdale) humide.

Pour l'état d'équilibre, l'équation de l'énergie de l'ailette complètement humide peut être écrite, après avoir employé l'analogie qui relie les coefficients du transfert de chaleur et de masse (II.19), sous forme différentielle :

$$\frac{d}{dX} \left(Y \frac{d\theta}{dX} \right) = \frac{Bi}{\psi^2} \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX} \right)^2} \left[\theta + \frac{(W_a - W) h_{fg}}{C_p (T_a - T_b) Le^{2/3}} \right] \quad (\text{II.42})$$

où $\theta = (T_a - T)/(T_a - T_b)$, $Bi = hy_b/k$, $\psi = y_b/L$, $Le = Sc/Pr$,
 $C_p = C_{pa} + WC_{pv}$, $X = x/L$, $Y = y/y_b$ et $\lambda = y_t/y_b$ (II.43)

Le profil de cette ailette peut être exprimé sous la forme adimensionnelle suivante :

$$Y = y/y_b = 1 - (1 - \lambda)X, \text{ pour } 0 \leq \lambda < 1 \quad (\text{II.44})$$

où $[\lambda] = \begin{cases} 0 & \text{pour ailette triangulaire} \\ > 0 & \text{pour ailette trapézoïdale} \end{cases}$

Il a adopté l'hypothèse (II.25) de G. Wu et T.Y. Bong [5] pour la relation entre l'humidité spécifique et la température locale, l'équation (II.42) devient comme suit :

$$\frac{d}{dY} \left(Y \frac{d\theta}{dY} \right) = m^2 (\theta + \zeta) \quad (\text{II.45})$$

où

$$m = \left[Z_0^2 (1 + b\xi) \sqrt{1 + \psi^2 (1 - \lambda)^2} / (1 - \lambda)^2 \right]^{1/2}, \quad \zeta = C_0 \xi_a / (1 + b\xi), \quad \xi_a = \xi / (T_a - T_b),$$

$$\xi = h_{fg} / C_p Le^{2/3}, \quad C_0 = W_a - a - bT_a, \quad a = \left[(T_t - T_b) W_b - T_b (W_t - W_b) \right] / (T_t - T_b),$$

$$b = (W_t - W_b) / (T_t - T_b) \text{ et } Z_0 = \sqrt{Bi} / \psi.$$

La résolution de l'équation (II.45) donne la distribution de la température dans l'ailette. Il a trouvé que :

- l'augmentation de l'humidité relative de l'air fait augmenter la température dans toute la surface de l'ailette due à la chaleur latente de condensation.

- l'ailette humide est moins efficace qu'une ailette sèche pour le même paramètre Z_0 .

- pour une humidité relative particulière, la performance est maximale pour l'ailette rectangulaire, minimale pour l'ailette triangulaire et celle d'ailette conique droite se situe entre les deux.

- pour un volume d'ailette constant, le taux de transfert de chaleur à travers les ailettes augmente avec ψ , atteint un maximum bien défini, puis diminue progressivement.

- l'ailette triangulaire optimale transfère plus de chaleur par rapport aux ailettes trapézoïdales pour le même volume d'ailette, rapport d'aspect, des paramètres thermiques et psychométriques.

Chien-Nan Lin, Jiin-Yuh Jang [8] ont présenté une analyse numérique bidimensionnelle pour l'efficacité d'une ailette elliptique sous les conditions sèche, partiellement et entièrement humide. Pour une plage de valeurs de rapport d'axe Ar , de nombre de Biot et d'humidité relative de l'air.

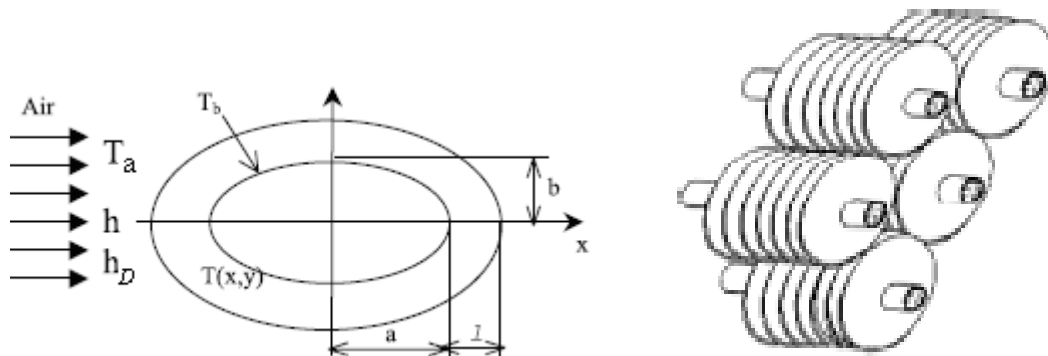


Figure II-10 : Modèle physique et système de coordonnées.

Les équations régissantes :

- Ailette sèche

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 2 \frac{h}{kt} (T - T_a) \quad (II.46)$$

- Ailette entièrement humide

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{2h}{kt}(T - T_a) + \frac{2h_D}{kt}(W - W_a)h_{fg} \quad (\text{II.47})$$

- Ailette partiellement humide

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 2 \frac{h}{kt}(T - T_a)$$

pour le domaine sec ($T > T_r$) (II.48)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{2h}{kt}(T - T_a) + \frac{2h_D}{kt}(W - W_a)h_{fg}$$

pour le domaine humide ($T < T_r$) (II.49)

Ils ont introduit les variables et les paramètres adimensionnels suivants :

$$X = x/b, Y = y/b, l^* = l/b, t^* = t/b, \theta = \frac{T - T_a}{T_b - T_a}, Bi = \frac{hb}{k}, Ar = \frac{a}{b} \text{ et } Le = \left(\frac{h}{h_D c_p} \right)^{3/2}$$

Pour la relation entre W et T , ils ont adopté l'approximation suivante :

$$W = c_1 + c_2 T + c_3 T^2 \quad (\text{II.50})$$

$$\text{où } c_1 = 0.00378, c_2 = 0.000209(^{\circ}\text{C}^{-1}), c_3 = 0.000018(^{\circ}\text{C}^{-2}) \text{ pour } 0^{\circ}\text{C} \leq T \leq 30^{\circ}\text{C}$$

Ils ont trouvé qu'en raison de transfert de la chaleur latente supplémentaire de l'air humide à l'ailette, les températures d'une ailette humide sont plus élevées que celles d'une ailette sèche. Donc quand l'humidité relative est élevée la distribution de la température sur l'ailette est plus élevée et l'interface entre les régions mouillée et sèche se déplace peu à peu vers l'extrémité jusqu'à ce que l'ailette devienne complètement humide.

Ils ont également trouvé que l'efficacité est augmentée quand le rapport d'axe major/mineur (Ar) est augmenté et l'efficacité d'ailette entièrement humide est plus faible que celle d'une ailette sèche de 10 à 20%.

Les résultats numériques indiquent que les deux efficacités d'ailettes elliptiques sèches et humides sont de 1 à 4% plus élevées que celles des ailettes circulaires ayant le même périmètre et le même nombre de Biot (ou coefficient de transfert de chaleur).

Par conséquent, dans cet article, ils ont trouvé que l'efficacité de l'ailette elliptique est plus élevée jusqu'à 4% que celle de l'ailette circulaire ayant le même périmètre pour le régime sec, et de 8% pour le régime mouillé.

Paisarn Naphon [9] a présenté les résultats théoriques des caractéristiques de transfert de chaleur et de l'efficacité d'une ailette annulaire dans des conditions de surfaces sèches, partiellement et entièrement humide.

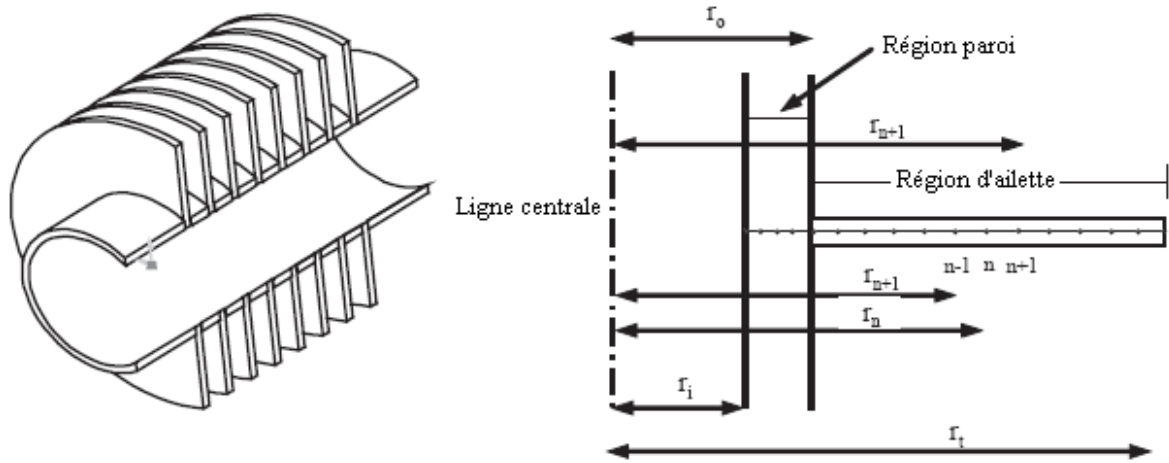


Figure II-11 : Schéma de principe d'assemblage d'ailettes annulaire.

Le modèle mathématique est basé sur les équations de conservation de l'énergie et de la masse qui sont développées et résolues par la méthode de différences finies centrales pour obtenir la distribution de la température le long de l'ailette.

Pour la relation entre W et T , il a adopté l'approximation suivante :

$$W = (3.7444 + 0.3078T + 0.0046T^2 + 0.0004T^3) \times 10^{-3}, 0 < T < 30^\circ\text{C}. \quad (\text{II.51})$$

Les résultats trouvés sont récapitulés sur les figures suivantes :

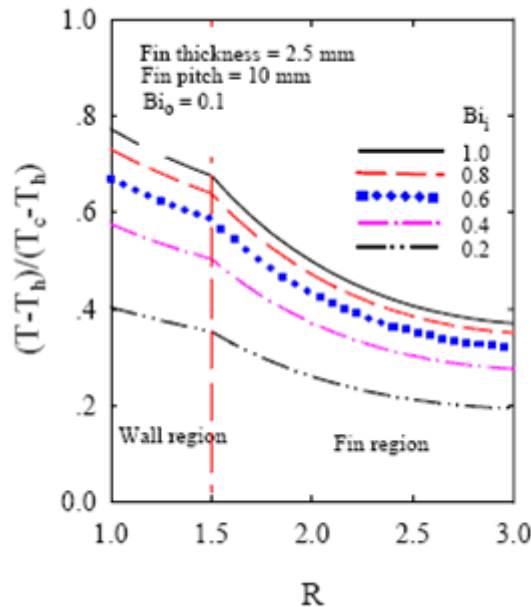


Figure II-12 : Distribution de la température dans l'ailette sèche.

Dans le cas d'une surface sèche, la température augmente avec l'augmentation de rayon. Pour la région du tube, on a la conduction de chaleur pure, et pour cela la distribution de la température semble linéaire. Cependant, pour la région d'ailette, la répartition de la température n'est pas linéaire, parce qu'on a le transfert de chaleur par conduction et par convection latérale.

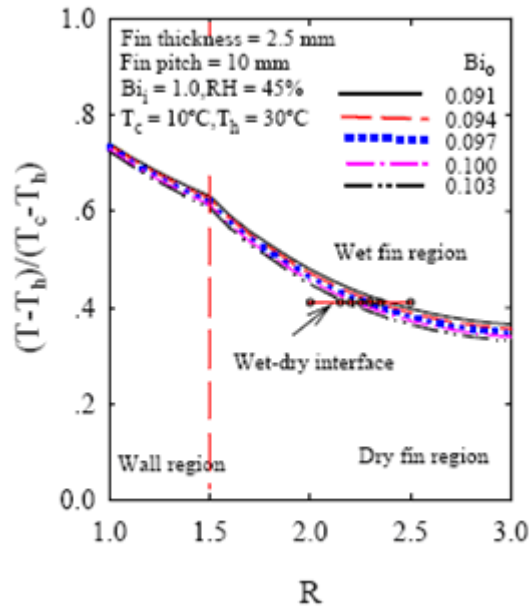


Figure II-13 : Distribution de la température dans l'ailette humide.

Pour la condition de surface partiellement humide, on a trois régions séparées : La première région est la paroi du tube. La deuxième région est la zone d'ailette où la température est en dessous de point de rosée de l'air, et l'humidité se condense sur la surface de l'ailette. Pour cette région, en raison de la condensation, la pente de la courbe de température augmente. Cela indique que le taux de transfert de chaleur latente a un effet significatif sur le taux de transfert de chaleur total.

La troisième région est la zone d'ailette où la température est supérieure à celle du point de rosée de l'air. L'interface humide-sèche est le point où la température d'ailette est égale à la température du point de rosée de l'air.

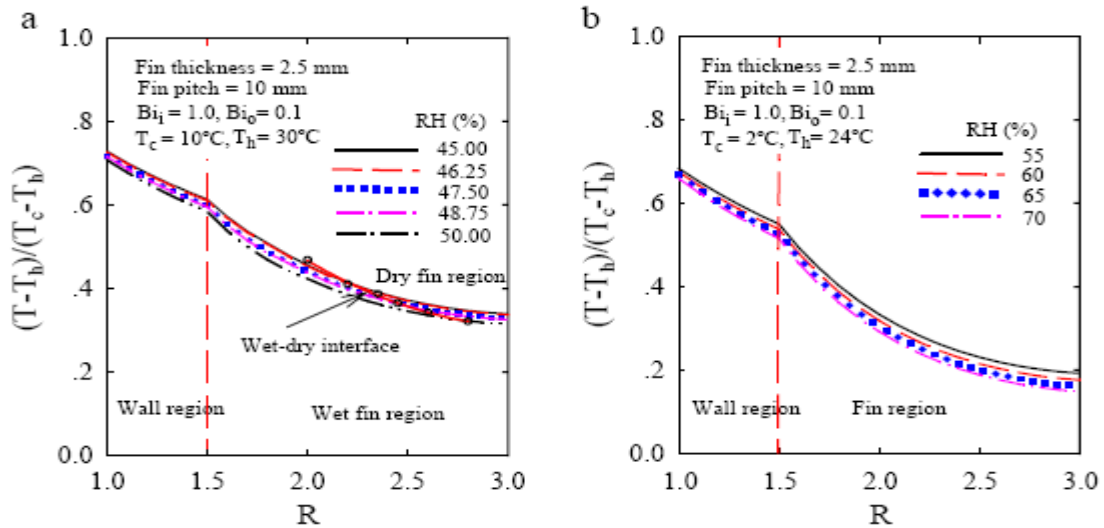


Figure II-14 : Effet de RH % sur la distribution de la température.

Les figures II-14 (a) et (b) montrent l'effet de l'humidité relative de l'air sur la répartition de la température sous des conditions de surface partiellement et entièrement mouillée. Pour des valeurs, de nombre de Biot à l'intérieur, à l'extérieur et de température des fluides chaud et froid, données. Le taux de transfert de chaleur latente résultant de la condensation de l'humidité sur la surface augmente avec l'augmentation d'humidité relative. Par conséquent, la température adimensionnelle diminue à mesure que l'humidité relative augmente et, constamment la largeur de la région humide de l'ailette augmente également, comme indiqué dans la figure II-14.

Balaram Kundu [10] a déterminé analytiquement les performances et l'optimisation des ailettes longitudinales et à épingles d'épaisseur uniforme sous des conditions entièrement et partiellement humide.

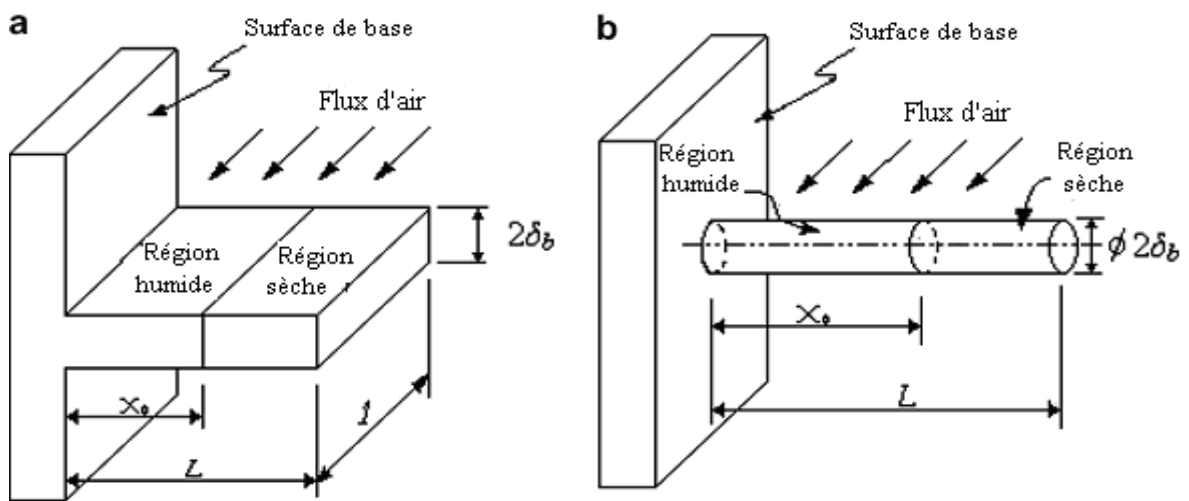


Figure II-15 : Schéma de principe de surface partiellement humide d'une ailette à épaisseur uniforme: (a) ailette longitudinale; (b) ailette à épingles.

L'équation d'énergie régissante est :

$$kA \frac{dT}{dx} - kA \left[\frac{dT}{dx} + \left(\frac{d^2T}{dx^2} \right) dx \right] = hp dx (T_a - T) + h_D P dx (W_a - W) h_{fg} \quad (\text{II.52})$$

Il a adopté l'hypothèse (II.25) de G. Wu et T.Y. Bong [5] pour la relation entre l'humidité spécifique et la température locale, et appliqué l'analogie de Chilton-Colburn (II.19), cette équation différentielle régissante peut être exprimée sous la forme normalisée suivante :

Surface entièrement humide

$$d^2\phi/dX^2 = f Z_d^2 (1+B\xi)\phi \quad (\text{II.53})$$

Surface partiellement humide

$$\begin{bmatrix} d^2\phi/dX^2 \\ d^2\theta/dX^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f Z_d^2 (1+B\xi)\phi \\ f Z_d^2 \theta \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 0 \leq X \leq X_0; \quad 0 < X_0 < 1 \\ X_0 \leq X \leq 1 \end{array} \quad (\text{II.54})$$

Surface entièrement sèche

$$d^2\theta/dX^2 = f Z_d^2 \theta \quad (\text{II.55})$$

où $Z_d = \sqrt{Bi} / \psi$, $\psi = \delta_b / L$, $Bi = h \delta_b / k$, $X = x / L$, $\phi = \theta + \theta_p$,
 $\theta = (T_a - T) / (T_a - T_b)$, $\xi = h_{fg} / C_p Le^{2/3}$ et
 $\theta_p = (W_a - BT_a - A) / [(T_a - T_b)(1+B\xi)]$ (II.56)

et f est une constante égale à 1 et 2 pour l'ailette longitudinale et à épingle, respectivement.

Les résultats obtenus sont représentés dans la figure II-16.

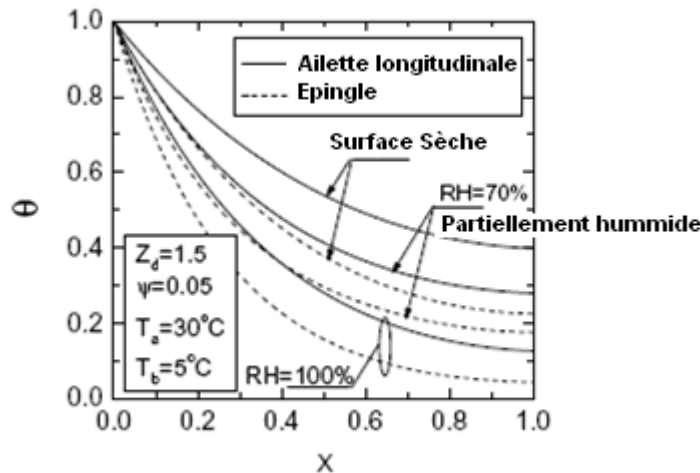


Figure II-16 : Effets de l'humidité relative de l'air sur la distribution de la température dans les ailettes longitudinales et à épingle.

La température dans les deux ailettes augmente progressivement avec l'augmentation de X et la température maximale est atteinte à l'extrémité de l'ailette ($X = 1$).

La température de surface d'ailette à épingle est supérieure à celle de l'ailette longitudinale pour les mêmes paramètres thermiques et physiques.

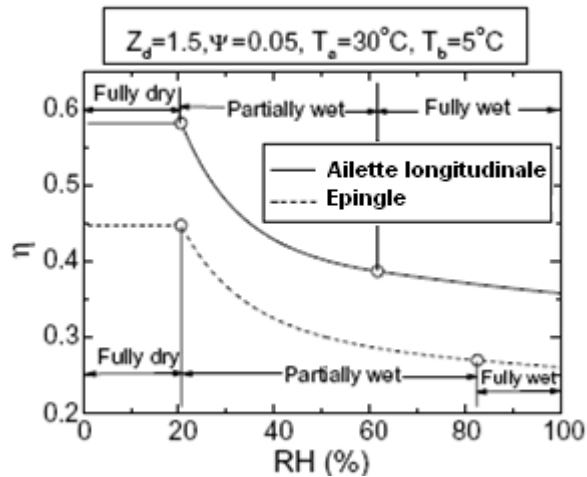


Figure II-17 : Efficacité des ailettes longitudinales et à épingle en fonction de l'humidité relative de l'air.

La plage d'humidité relative, pour laquelle l'ailette à épingle est partiellement humide, est plus large en comparaison avec l'ailette longitudinale.

L'efficacité des ailettes à épingle présente une faible valeur par rapport à celui des ailettes longitudinales, indépendamment des conditions de surface.

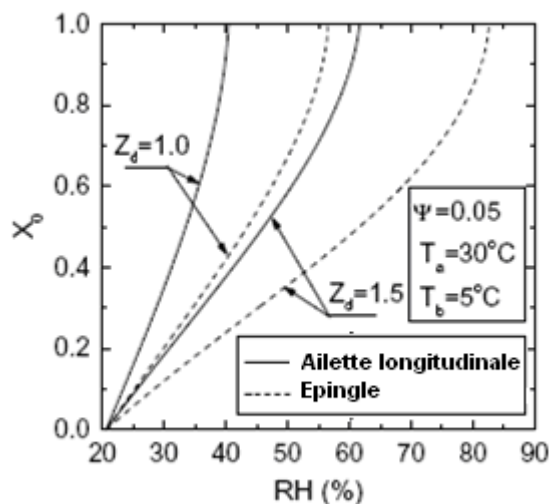


Figure II-18 : Lieu séparant les régions sèches et humides, en fonction de l'humidité relative de l'air ambiant et le paramètre d'ailette Z_d .

Pour la surface partiellement mouillée, la valeur de X_0 augmente progressivement avec l'humidité relative jusqu'à une certaine valeur, puis, il y a une forte augmentation de X_0 jusqu'à ce qu'elle atteigne l'état complètement humide ($X_0 = 1$).

En comparaison avec l'ailette longitudinale, une plus grande plage d'humidité relative de l'air est satisfaite dans des conditions partiellement humides en cas d'ailettes à épingles.

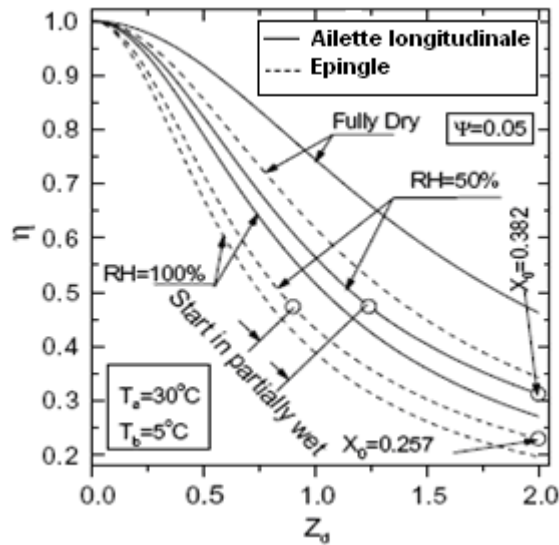


Figure II-19 : Efficacité des ailettes humides en fonction de paramètre Z_d pour ailettes longitudinales et à épingles.

L'efficacité de l'ailette longitudinale est toujours supérieure que celle de l'ailette à épingles pour des paramètres thermo-géométriques et psychrométriques identiques.

Le paramètre d'ailette Z_d est l'un des principaux facteurs pour déterminer l'état de surface mouillée de toute ailette. Pour maintenir une surface partiellement humide d'une ailette à épingles, la valeur Z_d est toujours plus faible que celui d'une ailette longitudinale.

Balaram Kundu et all [11] ont établi analytiquement un modèle analytique. La performance d'une ailette triangulaire (humide) sous conditions de déshumidification satisfait une relation polynomiale cubique entre l'humidité spécifique et la température de saturation correspondant.

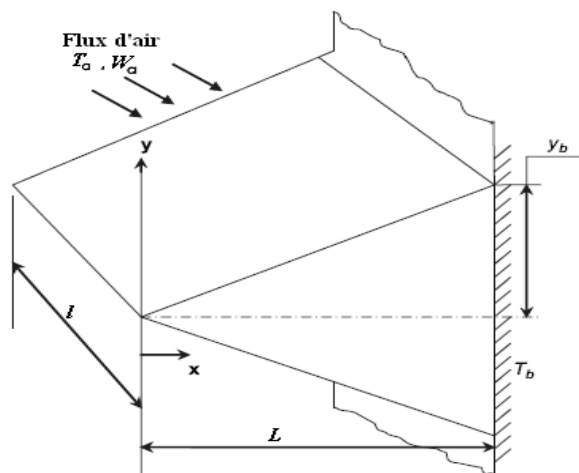


Figure II-20 : Schéma de principe d'une ailette triangulaire.

L'équation d'énergie régissante :

$$\frac{d}{dx}(y l k dT/dx) + (2y + l) \sqrt{1 + (dy/dx)^2} [h(T_a - T) + h_D h_{fg} (W_a - W)] = 0 \quad (\text{II.57})$$

En substituant l'analogie de Chilton-Colburn (II.19) dans l'équation (II.57), et après le remplacement de la variable y par la relation d'un profil triangulaire, on peut obtenir l'expression suivante en fonction de x :

$$\frac{d}{dx}(y_b x l k dT/dx) + (2y_b x + lL) \sqrt{1 + (y_b/L)^2} h[(T_a - T) + h_{fg} (W_a - W)/C_p L e^{2/3}] = 0 \quad (\text{II.58})$$

La relation, adoptée ici, entre l'humidité spécifique de l'air sur la surface d'ailette et la température de saturation correspondante est comme suit : $W = A + BT + CT^2 + DT^3$ (A, B, C et D sont des constantes). L'équation (II.58) peut être écrite sous forme adimensionnelle comme :

$$X \frac{d^2\theta}{dX^2} + \frac{d\theta}{dX} = (X + G)(K_1\theta^3 - K_2\theta^2 + K_3\theta + K_4) \quad (\text{II.59})$$

où $G = 1/2\sigma$, $\sigma = y_b/l$

$$\begin{aligned} K_1 &= 2\sqrt{1 + \psi^2} Z_0^2 \sigma D \xi (T_a - T_b)^2, \\ K_2 &= 2\sqrt{1 + \psi^2} Z_0^2 \sigma \xi (C + 3DT_a)(T_a - T_b), \\ K_3 &= 2\sqrt{1 + \psi^2} Z_0^2 \sigma (1 + B\xi + 2CT_a\xi + 3D\xi T_a^2) \text{ et} \\ K_4 &= 2\sqrt{1 + \psi^2} Z_0^2 \sigma \xi (W_a - A - BT_a - CT_a^2 - DT_a^3)/(T_a - T_b) \end{aligned}$$

L'équation (II.59) est une équation différentielle de second ordre ordinaire non linéaire, qui ne peut pas être résolu par une technique d'analyse conventionnelle. Ainsi, pour obtenir une solution analytique, ils ont adopté la méthode de transformation différentielle. A travers ce modèle ils ont trouvé des résultats adaptables avec les autres modèles.

Malgré le grand nombre des études faites dans ce domaine et parmi eux ceux déjà présentées, la recherche dans le sens de l'étude et l'optimisation des épingles est continuellement en évolution. Ce travail est une contribution pour l'étude analytique des transferts de chaleur et de masse des épingles.

CHAPITRE III

**ANALYSE
MATHÉMATIQUE DES ÉPINGLES
EN RÉGIME SEC**

**CHAPITRE III : ANALYSE MATHÉMATIQUE DES ÉPINGLES
EN RÉGIME SEC³**

III.1 Équation différentielle généralisée

III.1.1 Schématisation d'une épingle

Prenons l'épingle du profil arbitraire représentée dans la figure III-1 et supposons qu'elle dissipe ou perd de la chaleur à son environnement. Notez que l'origine du repère est à l'extrémité et qui a une orientation positive de l'extrémité à la base de l'épingle.

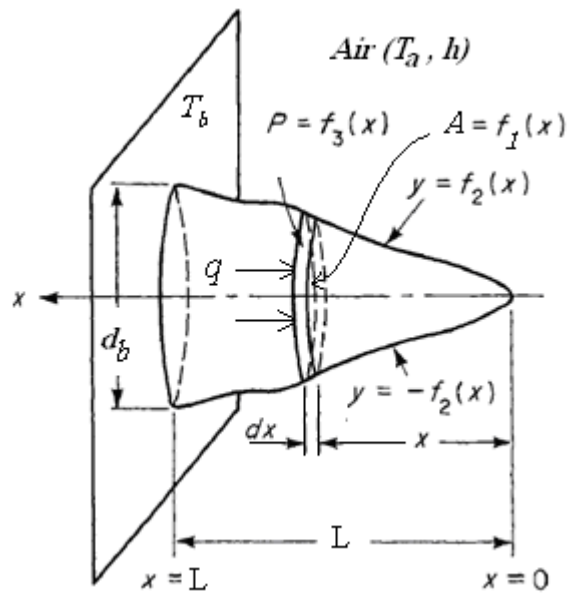


Figure III-1 : Schéma d'une épingle de profil arbitraire.

On voit que la section transversale de l'épingle normale à l'écoulement de la chaleur, son profil de confinement, et son périmètre sont parfaitement tous des fonctions arbitraires de la distance x .

Gardner [16] a proposé une fonction de profil pour les épingles :

$$f_2(x) = \frac{d_b}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^n \quad (\text{III.1})$$

où $n = (1 - 2N)/(2 - N)$, et N nombre entier.

Avec la valeur appropriée de n , l'équation (III.1) peut être utilisé pour le développement d'une équation généralisée pour des épingles.

² On se base dans ce chapitre sur la référence [14].

III.1.2 Équation différentielle gouvernante

En se basant sur les hypothèses restrictives, qui sont presque toujours désignés comme les hypothèses de Murray-Gardner, suivantes :

- Le régime est permanent.
- Le matériau est isotrope.
- Le coefficient de transfert de chaleur par convection sur les faces de l'ailette est constant et uniforme sur toute la surface de l'ailette.
- La température du milieu environnant l'ailette est uniforme.
- L'épaisseur d'ailette est faible, par rapport à sa longueur, de sorte que les gradients de température à travers l'épaisseur et l'extrémité de l'ailette peuvent être négligés.
- La température à la base de l'ailette est uniforme.
- Il n'y a pas de résistance de contact, où la base de l'ailette se joint à la surface lisse.
- Il n'y a pas de sources de chaleur au sein de l'ailette elle-même.
- La chaleur transférée à travers l'extrémité de l'ailette est négligeable par rapport à la chaleur qui quitte sa surface latérale.
- Le transfert de chaleur vers ou à partir de l'ailette est proportionnel à la différence de température entre l'ailette et le milieu environnant.

Une équation différentielle pour la différence en température, $\theta_d(x) = T(x) - T_a$, peut être écrite en considérant un élément de volume de l'épingle situé à x ayant une longueur dx , une surface transversale A , et un périmètre P , comme le montre la figure III-2.

$$A(x) = f_1(x)$$

$$P(x) = f_3(x)$$

$$d(x) = 2f_2(x)$$

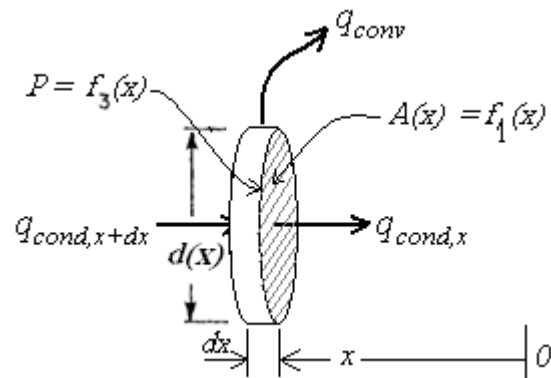


Figure III-2 : Elément de volume de

En régime permanent, le bilan énergétique de cet élément de volume peut être exprimé comme :

$$-q_{cond,x} + q_{cond,x+dx} - q_{conv} = 0$$

où

$q_{cond,x}$: Flux de chaleur conductif sortant de l'élément à travers la section transversale $A(x)$,

$q_{cond,x+dx}$: Flux de chaleur conductif entrant dans l'élément à travers la section transversale $A(x)$, et

$q_{conv} = h(P dx)(T - T_a)$: Flux de chaleur convectif dissipée par la surface latérale de l'élément Pdx .

En remplaçant et en divisant par dx , nous obtenons

$$\frac{q_{cond,x+dx} - q_{cond,x}}{dx} - hP(T - T_a) = 0 \quad (III.2)$$

En prenant la limite quand $dx \rightarrow 0$, on peut écrire

$$\frac{q_{cond,x+dx} - q_{cond,x}}{dx} = \frac{dq_{cond}}{dx}$$

L'équation (III.2) devient

$$\frac{dq_{cond}}{dx} - hP(T - T_a) = 0 \quad (III.3)$$

D'après la loi de Fourier de la conduction de chaleur, et avec la convention de signe, nous avons

$$q_{cond} = kA \frac{dT}{dx}$$

La substitution de cette relation dans l'équation (III.3) donne l'équation différentielle suivante,

$$\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) - hP(T - T_a) = 0 \quad (III.4)$$

et après remplacement des expressions de A et P , et différentiation, l'équation (III.4) devient

$$f_1(x) \frac{d^2 \theta_d}{dx^2} + \frac{df_1(x)}{dx} \frac{d\theta_d}{dx} - \frac{h}{k} f_3(x) \theta_d = 0 \quad (III.5)$$

Les relations entre $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ sont

$$f_1(x) = \pi [f_2(x)]^2 \quad \text{et} \quad f_3(x) = 2\pi f_2(x)$$

La substitution de ces relations dans l'équation (III.5) donne l'équation différentielle, qui gouverne le transfert de chaleur dans l'épingle sèche, suivante

$$[f_2(x)]^2 \frac{d^2 \theta_d}{dx^2} + \frac{d}{dx} [f_2(x)]^2 \frac{d\theta_d}{dx} - \frac{2h}{k} f_2(x) \theta_d = 0 \quad (III.6)$$

Cette équation différentielle est du second ordre à coefficients variables, sauf lorsque la section transversale de l'épingle perpendiculaire au flux de chaleur est constante. Elle peut être résolue par comparaison terme à terme avec l'équation générale de Bessel. En outre, la solution générale de l'équation (III.6) aura deux constants arbitraires évalués en utilisant les conditions aux limites suivantes :

$$\theta_d(x = L) = \theta_b \quad (\text{III.6a})$$

et

$$\left. \frac{d\theta_d}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{III.6b})$$

III.2 Les épingles de section constante

III.2.1 Épingle cylindrique

Pour l'épingle cylindrique représentée sur la figure III-3, la fonction de profil de l'équation (III.1) correspond à la configuration où $n = 0$. En fait, d_b peut être remplacé par le diamètre d de l'épingle. Ainsi

$$f_2(x) = \frac{d}{2}, \quad [f_2(x)]^2 = \frac{d^2}{4} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx}[f_2(x)]^2 = 0$$

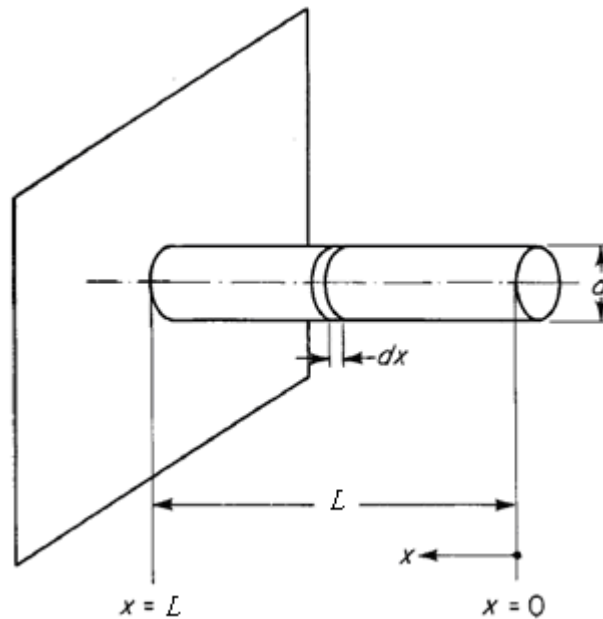


Figure III-3 : Schémas d'une épingle de profil rectangulaire et section circulaire.

Ces valeurs peuvent être substitués en équation (III.6) pour obtenir

$$\frac{d^2\theta_d}{dx^2} - m_0^2\theta_d = 0 \quad (\text{III.7})$$

où

$$m_0 = \left(\frac{4h}{kd} \right)^{1/2}$$

L'équation (III.7) est une équation différentielle ordinaire du second ordre avec des coefficients constants. Sa solution générale est

$$\theta_d = C_1 e^{m_0 x} + C_2 e^{-m_0 x} \quad (\text{III.8})$$

L'application des conditions aux limites des équations (III.6a) et (III.6b) permet l'évaluation des constantes arbitraires C_1 et C_2 . Cette évaluation donne la différence de température dans chaque point, $\theta_d(x) = T(x) - T_a$:

$$\theta_d(x) = \theta_b \frac{\cosh m_0 x}{\cosh m_0 L} \quad (\text{III.9})$$

Puisque l'orientation de coordonnée x est opposée à la direction du flux de chaleur dans l'ailette, le flux de chaleur réel à travers la base d'ailette q_b est obtenue de

$$q_{\text{réel}} = q_b = kA \left. \frac{d\theta_d}{dx} \right|_{x=L}$$

la surface de la section transversale de l'ailette est $A = \frac{\pi}{4} d^2$, de sorte que l'utilisation de la dérivée de l'équation (III.9) évaluée en $x = L$, donne

$$q_{\text{réel}} = \frac{\pi}{4} kd^2 m_0 \theta_b \tanh m_0 L$$

Le flux de chaleur idéal échangé à travers la surface d'épingle q_{id} , avec $P = \pi d$, est

$$q_{id} = hPL\theta_b = \pi h d L \theta_b$$

L'efficacité de cette ailette est donnée par

$$\eta = \frac{q_{\text{réel}}}{q_{id}} = \frac{\frac{\pi}{4} kd^2 m_0 \theta_b \tanh m_0 L}{\pi h d L \theta_b} = \frac{m_0 \tanh m_0 L}{\frac{4h}{kd} L}$$

Puisque $m_0^2 = \frac{4h}{kd}$, elle peut être écrite

$$\eta = \frac{\tanh m_0 L}{m_0 L} \quad (\text{III.10})$$

III.2.2 Épingle rectangulaire

Pour l'épingle rectangulaire représentée sur la figure III-4, la fonction de profil de l'équation (III.1) correspond à la configuration où $n = 0$. Ici, les côtés sont désignés par δ_1 et δ_2 , donc

$$f_1(x) = \delta_1 \delta_2 \quad , \quad f_3(x) = 2(\delta_1 + \delta_2) \quad \text{et} \quad \frac{df_1(x)}{dx} = 0$$

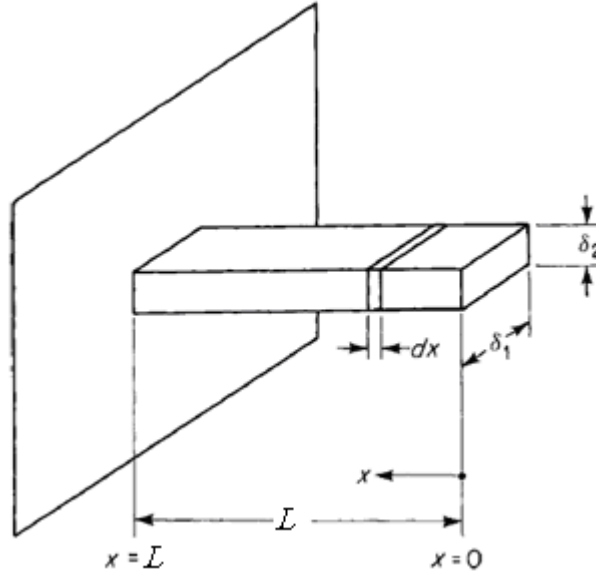


Figure III-4 : Schémas d'une épingle de profil rectangulaire et section rectangulaire.

Substituant en équation (III.5), l'équation différentielle pour la différence de température est obtenue :

$$\frac{d^2 \theta_d}{dx^2} - m_0^2 \theta_d = 0 \quad \text{(III.11)}$$

Ici m_0 a une forme spéciale impliquant le périmètre de l'épingle :

$$m_0 = \left(\frac{hP}{kA} \right)^{1/2} = \left[\frac{2h(\delta_1 + \delta_2)}{k \delta_1 \delta_2} \right]^{1/2}$$

qui est une forme d'expression générale pour tous les épingles et les valeurs données précédemment pour les épingles de section constante sont des valeurs spécifiques de cette expression. Pour le cas particulier de la section transversale carrée, $\delta = \delta_1 = \delta_2$, l'équation (III.11) s'applique avec $m_0 = (4h/k\delta)^{1/2}$.

L'équation (III.11) est identique à l'équation (III.7). D'où la différence de la température et l'efficacité sont donnée par les équations (III.9) et (III.10), respectivement, à condition que la valeur correcte de m_0 est employée. Le flux de chaleur à travers la base est

$$q_b = k \delta_1 \delta_2 m_0 \theta_b \tanh m_0 L \quad \text{(III.12)}$$

III.2.3 Épingle elliptique

La section transversale de l'épingle elliptique est montrée dans la figure III-5, où il est à noter que les demi axes majeur et mineur sont désignés, respectivement, par δ_1 et δ_2 .

Ici

$$f_1(x) = \pi \delta_1 \delta_2, \quad \frac{df_1(x)}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad f_3(x) = \pi (\delta_1 + \delta_2) \left(1 + \frac{p^2}{4} + \frac{p^4}{64} + \frac{p^6}{256} + \dots \right)$$

où
$$p = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}$$

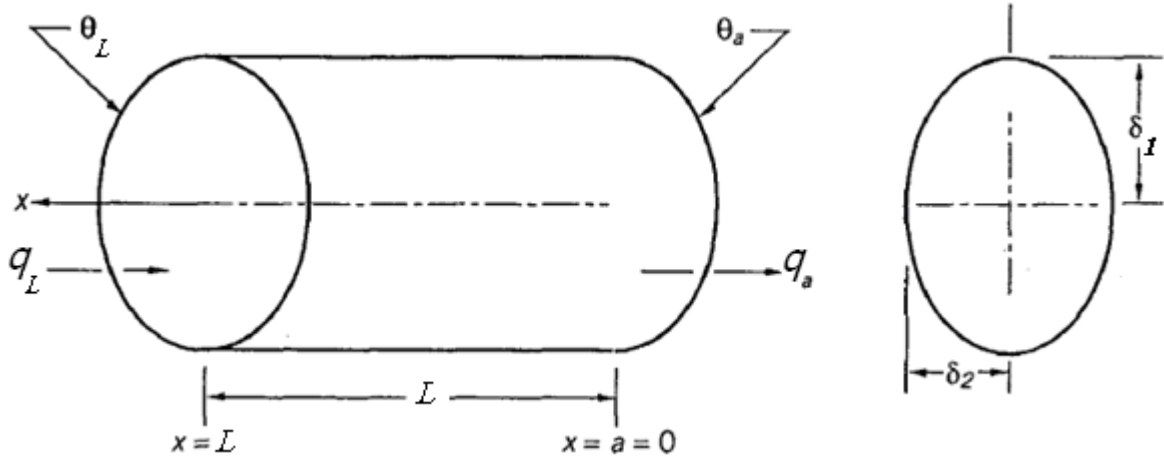


Figure III-5 : Schémas d'une épingle de profil rectangulaire et de section elliptique.

Ici aussi, l'équation différentielle de la différence de température est donnée par l'équation (III.7), mais avec

$$m_0 = \left(\frac{hP}{kA} \right)^{1/2} = \left[\frac{h(\delta_1 + \delta_2)}{k \delta_1 \delta_2} \left(1 + \frac{p^2}{4} + \frac{p^4}{64} + \frac{p^6}{256} + \dots \right) \right]^{1/2}$$

La différence de température et l'efficacité d'ailette sont données par les équations (III.9) et (III.10), respectivement, mais la chaleur dissipée est donnée par

$$q_b = \left[hk \pi^2 \delta_1 \delta_2 (\delta_1 \delta_2) \left(1 + \frac{p^2}{4} + \frac{p^4}{64} + \frac{p^6}{256} + \dots \right)^{1/2} \theta_b \tanh m_0 L \right] \quad (\text{III.13})$$

III.3 Épingle conique

Pour l'épingle conique représentée par la figure III-6, la fonction de profil est définie par l'équation (III.1) avec $n = 1$. D'où

$$f_2(x) = \frac{d_b}{2} \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad \frac{df_2(x)}{dx} = \frac{d_b}{2L}$$

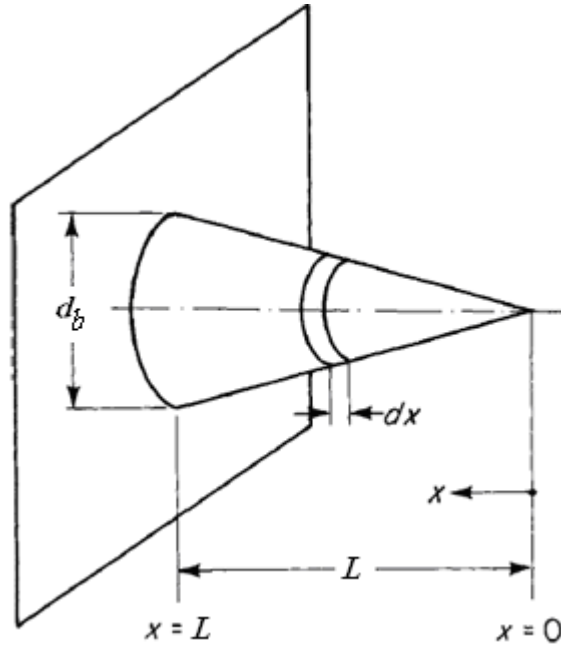


Figure III-6 : Schémas d'une épingle de profil triangulaire.

L'utilisation de ceux-ci dans l'équation (III.6) donne l'équation différentielle de la différence de température, $\theta_d(x) = T(x) - T_a$:

$$x^2 \frac{d^2 \theta_d}{dx^2} + 2x \frac{d \theta_d}{dx} - M^2 x \theta_d = 0 \quad (\text{III.14})$$

où

$$M = (2m_0^2 L)^{1/2} \quad \text{et} \quad m_0 = (2h/kd_b)^{1/2}$$

La solution générale de l'équation (III.14) est indiquée dans l'annexe A.2 comme suit

$$\theta_d(x) = x^{-1/2} [C_1 I_1(2M \sqrt{x}) + C_2 K_1(2M \sqrt{x})] \quad (\text{III.15})$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires qui doivent être évalués à partir des conditions aux limites des équations (III.6a,b). Cependant, on peut noter tout de suite que dans le but d'avoir une différence de température finie en $x = 0$, C_2 doit être égale à zéro parce que $K_1(2M \sqrt{x})/\sqrt{x}$ n'est pas bornée à $x = 0$. Par conséquent, seule C_1 doit être évalué. Cette évaluation est effectuée à $x = L$, et lorsque le résultat est substitué en équation (III.15), la solution particulière pour la différence de température est obtenue :

$$\theta_d(x) = \theta_b \left(\frac{L}{x} \right)^{1/2} \frac{I_1(2M \sqrt{x})}{I_1(2M \sqrt{L})} \quad (\text{III.16})$$

ce qui réduit, comme il se doit, à θ_b pour $x = L$.

Le flux de chaleur à travers la base peut être obtenue par la différenciation de l'équation (III.16), l'évaluation en $x = L$, et la substitution dans

$$q_b = kA \left. \frac{d\theta_d}{dx} \right|_{x=L}$$

La différenciation de l'équation (III.16) est mieux réalisée en utilisant une transformation de variable

$$u \equiv 2M \sqrt{x}$$

de sorte que

$$\frac{d\theta_d}{dx} = \frac{du}{dx} \frac{d\theta_d}{du} = \frac{2M^2}{u} \frac{d\theta_d}{du}$$

et avec $d\theta_d/du$ évaluée à

$$u_b = 2M \sqrt{L}$$

le flux de chaleur à travers la base en fonction de u est

$$q_b = \frac{\pi k d_b^2 \theta_b M^3 \sqrt{L} I_2(u_b)}{u_b^2 I_1(u_b)}$$

en fonction de x il est

$$q_b = \frac{\pi k d_b^2 \theta_b M I_2(2M \sqrt{L})}{4\sqrt{L} I_1(2M \sqrt{L})} \quad (\text{III.17})$$

La surface de l'épingle conique est l'intégrale de la fonction de périmètre évalué entre les limites $x = 0$ et $x = L$:

$$S = \int_{x=0}^{x=L} f_3(x) dx = \int_{x=0}^{x=L} \pi \frac{d_b}{L} x dx = \frac{\pi}{2} d_b L$$

Le flux de chaleur idéal est obtenu à partir de cette surface en fonction de la différence de température de base :

$$q_{id} = h \left(\frac{\pi}{2} d_b L \right) \theta_b$$

Ensuite, l'efficacité avec $M = m_0 \sqrt{2L}$ est

$$\eta = \frac{q_b}{q_{id}} = \frac{\pi k d_b \theta_b M I_2(2M \sqrt{L})}{(\pi/2) h d_b b \theta_b I_1(2M \sqrt{L})}$$

ou

$$\eta = \frac{q_b}{q_{id}} = \frac{\sqrt{2} I_2(2\sqrt{2} m_0 L)}{(m_0 L) I_1(2\sqrt{2} m_0 L)} \quad (\text{III.18})$$

III.4 Épingle de profil parabolique concave

Pour l'épingle de profil parabolique concave représenté par la figure III-7, la fonction de profil est définie par l'équation (III.1) avec $n = 2$, d'où

$$f_2(x) = \frac{d_b}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2$$

et

$$\frac{df_2(x)}{dx} = \frac{d_b x}{L^2}$$

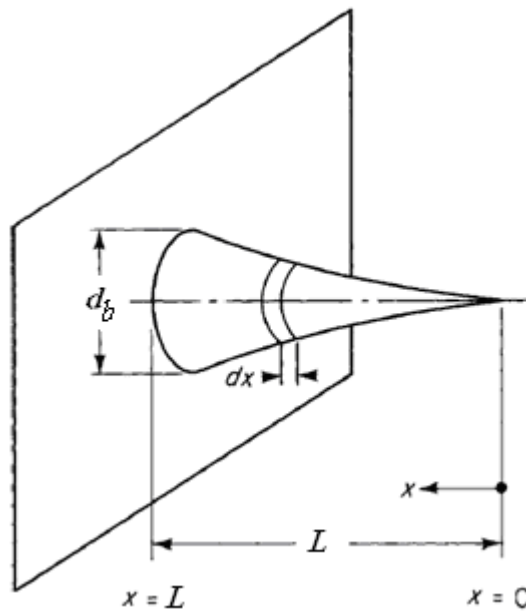


Figure III-7 : Schémas d'une épingle de profil parabolique concave.

L'utilisation de ceux-ci dans l'équation (III.6) donne l'équation différentielle qui régit la différence de température, $\theta_d(x) = T(x) - T_a$:

$$x^4 \frac{d^2 \theta_d}{dx^2} + 4x^3 \frac{d \theta_d}{dx} - M^2 x^2 \theta_d = 0 \quad (\text{III.19})$$

où $M = \sqrt{2} m_0 L$ et $m_0 = (2h/kd)^{1/2}$.

L'équation (III.19) est reconnue comme étant une équation d'Euler, et sa solution particulière est donnée par :

$$\theta_d(x) = \theta_b \left(\frac{x}{L} \right)^\alpha \quad (\text{III.20})$$

où

$$\alpha = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(9 + 4M^2)^{1/2}}$$

Le flux de chaleur à travers la base de l'ailette est obtenu par évaluation :

$$q_b = k \left(\frac{\pi}{4} d_b^2 \right) \frac{d\theta_d}{dx} \Big|_{x=L}$$

et en utilisant l'équation (III.20) :

$$q_b = \frac{\pi k d_b^2 \theta_b \left[-3 + (9 + 4M^2)^{1/2} \right]}{8L} \quad (\text{III.21})$$

La surface d'épingle est

$$S = \int_{x=0}^{x=L} f_3(x) dx = \int_{x=0}^{x=L} \pi d_b \left(\frac{x}{L} \right)^2 dx = \frac{1}{3} \pi d_b L$$

qui peut être utilisée pour obtenir la dissipation de la chaleur idéale,

$$q_{id} = \frac{1}{3} h \pi d_b L \theta_b$$

L'efficacité est

$$\eta = \frac{q_b}{q_{id}} = \frac{3\pi k d_b^2 \alpha \theta_b}{4\pi h d_b L^2 \theta_b} = \frac{3k d_b \alpha}{4h L^2}$$

qui peut être ajusté pour donner :

$$\eta = \frac{3}{2m_0^2 L^2} \left[-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(9 + 4M^2)^{1/2}} \right]$$

ou après réajustement algébrique convenable, la forme finale et plus simple pour l'épingle du profil parabolique concave :

$$\eta = \frac{2}{1 + \left(1 + \frac{8}{9} m_0^2 L^2 \right)^{1/2}} \quad (\text{III.22})$$

III.5 Épingle de profil parabolique convexe

Pour l'épingle de profil parabolique convexe représenté sur la figure III-8, la fonction de profil est définie par l'équation (III.1) avec $n = 1/2$. D'ou

$$f_2(x) = \frac{d_b}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^{1/2}$$

et

$$\frac{df_2(x)}{dx} = \frac{d_b}{4} \left(\frac{1}{Lx} \right)^{1/2}$$

Lorsque ceux-ci sont remplacés dans l'équation (III.6), l'équation différentielle qui régit la différence de température, $\theta_d(x) = T(x) - T_a$, devient

$$x \frac{d^2 \theta_d}{dx^2} + \frac{d \theta_d}{dx} - M^2 \sqrt{x} \theta_d = 0 \quad (\text{III.23})$$

où

$$M = (2m_0^2 L^{1/2})^{1/2}$$

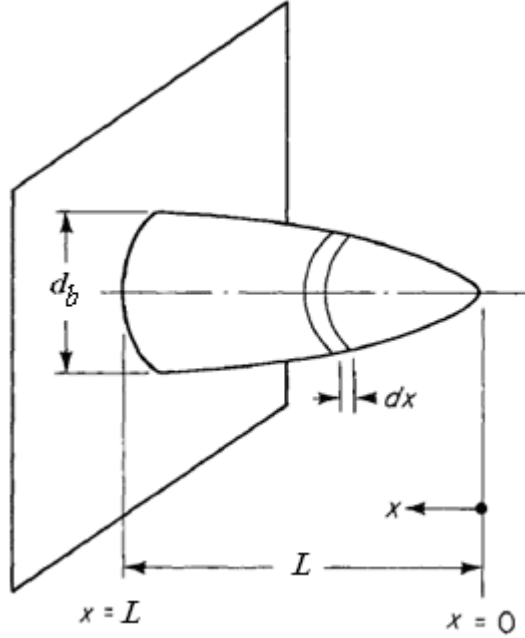


Figure III-8 : Schémas d'une épingle de profil parabolique convexe.

et $m_0 = (2h/kd)^{1/2}$.

Comme indiqué dans l'annexe A.3, la solution générale de l'équation (III.23) est

$$\theta_d(x) = C_1 I_0\left(\frac{4}{3} M x^{3/4}\right) + C_2 K_0\left(\frac{4}{3} M x^{3/4}\right) \quad (\text{III.24})$$

et il convient de noter que, parce que $K_0(0)$ n'est pas bornée, afin de maintenir une différence de température finie en $x = 0$, C_2 doit être égal à zéro. Ainsi l'équation (III.24) se réduit à

$$\theta_d(x) = C_1 I_0\left(\frac{4}{3} M x^{3/4}\right)$$

Puis C_1 peut être évaluée en utilisant la condition aux limites de l'équation (III.6a), ce qui conduit à la solution particulière

$$\theta_d(x) = \frac{\theta_b I_0\left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m_0 L^{1/4} x^{3/4}\right)}{I_0\left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m_0 L\right)} \quad (\text{III.25})$$

Le flux de chaleur à travers la base de l'ailette est obtenu en faisant la transformation

$$u \equiv \frac{4}{3} \sqrt{2} m_0 L^{1/4} x^{3/4}$$

Ensuite, parce que pour $x = L$

$$u(x = L) = u_b = \frac{4}{3} \sqrt{2} m_0 L$$

la transformation de l'équation (III.25), devient :

$$q_b = kA \left. \frac{d\theta_d}{du} \right|_{u=u_b} = \frac{\pi}{4} k d_b^2 \theta_b \left(\frac{16 m_0^4 L}{3u} \right)^{1/3} \frac{d}{du} \left[\frac{I_0(u)}{I_0(u_b)} \right]_{u=u_b}$$

Le flux de chaleur à travers la base en fonction de la variable transformée u est :

$$q_b = \frac{\sqrt{2}}{4} k \pi d_b^2 \theta_b m_0 \frac{I_1(u_b)}{I_0(u_b)}$$

et en ce qui concerne les dimensions spécifiées de l'épingle,

$$q_b = \frac{\sqrt{2}}{4} k \pi d_b^2 \theta_b m_0 \frac{I_1\left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m_0 L\right)}{I_0\left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m_0 L\right)} \quad (\text{III.26})$$

Sachant que la surface de l'épingle est :

$$S = \int_{x=0}^{x=L} f_3(x) dx = \int_{x=0}^{x=L} \pi d_b \left(\frac{x}{L} \right)^{1/2} dx = \frac{2}{3} \pi d_b L$$

qui peut être utilisée pour obtenir la dissipation de la chaleur idéale,

$$q_{id} = hS \theta_b = \frac{2}{3} h \pi d_b L \theta_b$$

L'efficacité de l'épingle devient alors

$$\eta = \frac{q_b}{q_{id}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right) k \pi d_b^2 m_0 \theta_b I_1\left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m_0 L\right)}{\left(\frac{2}{3} \right) \pi d_b h L \theta_b I_0\left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m_0 L\right)}$$

Ou après simplification :

$$\eta = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{I_1\left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m_0 L\right)}{(m_0 L) I_0\left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m_0 L\right)} \quad (\text{III.27})$$

CHAPITRE IV

**ANALYSE
MATHÉMATIQUE DES ÉPINGLES
EN RÉGIME HUMIDE**

CHAPITRE IV : ANALYSE MATHÉMATIQUE DES ÉPINGLES EN RÉGIME HUMIDE⁵

IV.1 Équation différentielle générale

IV.1.1 Modèle physique

L'analyse mathématique en régime permanent est réalisée sur une épingle de section circulaire et un profil arbitraire lorsqu'elle est exposée à un courant d'air humide en mouvement, comme le montre la figure IV-1.

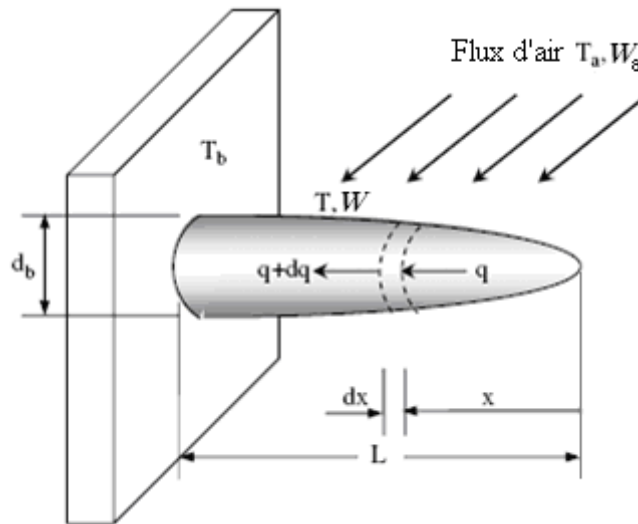


Figure IV-1 : Schéma d'une épingle complètement humide.

IV.1.2 Hypothèses :

À cet égard, les hypothèses suivantes sont faites pour simplifier l'analyse :

- a- Le régime est permanent.
- b- Il n'y a pas de sources de chaleur ou des puits dans l'épingle.
- c- Les températures d'air environnant et de la base d'épingle sont uniformes.
- d- Le matériau d'ailette est homogène et isotrope.
- e- Le flux d'air humide est stable et avec une vitesse uniforme.
- f- La conductivité thermique de l'épingle, le coefficient de transfert de chaleur et la chaleur latente de condensation de la vapeur d'eau sont constants.
- g- La résistance thermique associée à la présence d'un film mince d'eau due à la condensation est faible et peut être négligée.

⁵ On se base dans ce chapitre sur la référence [26].

h- L'effet de la baisse de pression de l'air due à l'écoulement de l'air est négligé.

Ce sont essentiellement les hypothèses classiques qui sont généralement utilisés pour l'analyse des surfaces étendues.

IV.1.3 Types d'ailettes étudiées

Les épingles étudiées peuvent être classés en fonction de son profil, comme indiqué dans la figure IV-2. Le profil de l'épingle est défini en fonction de la variation de sa section transversale circulaire le long de sa longueur étendue. Le diamètre de la section transversale circulaire peut varier comme :

$$d = d_b \left(\frac{x}{L} \right)^n$$

où d_b est le diamètre à la base d'épingle. L'exposant du profil d'épingle n , change comme suit :

- (a) Épingle de profil rectangulaire ($n = 0$) $d = d_b$
- (b) Épingle de profil triangulaire ($n = 1$) $d = d_b(x/L)$
- (c) Épingle de profil parabolique convexe ($n = 1/2$) $d = d_b(x/L)^{1/2}$
- (d) Épingle de profil parabolique concave ($n = 2$) $d = d_b(x/L)^2$

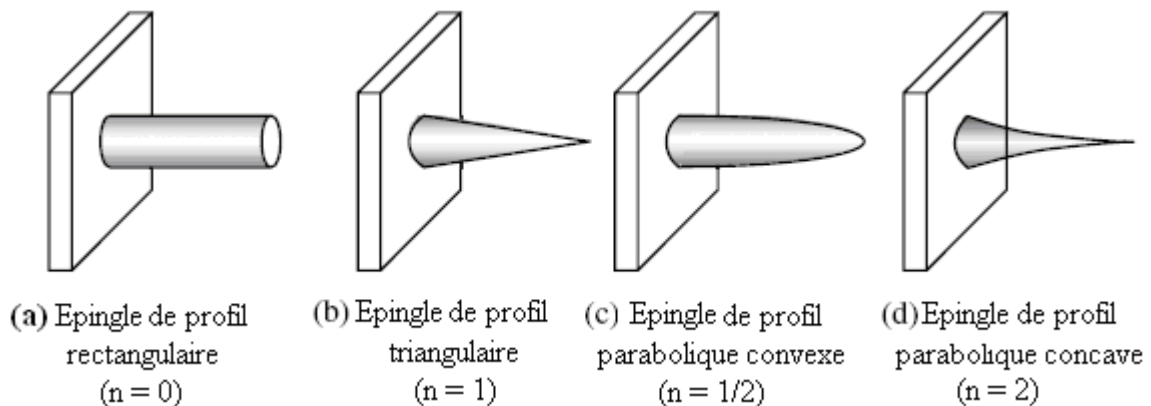


Figure IV-2 : Schémas des différents profils d'épingle.

IV.1.4 Equation régissante

Considérer un élément de volume de l'épingle situé à x ayant une longueur dx , une surface transversale A , et un périmètre P , comme le montre la figure IV-3. En régime permanent, le bilan énergétique de cet élément de volume peut être exprimé comme suit :

$$q_{cond,x} - q_{cond,x+dx} + q_{conv} + q_{Lat} = 0$$

où

$$q_{conv} = h(P dx)(T_a - T)$$

$$q_{Lat} = h_D(P dx) h_{fg} (W_a - W)$$

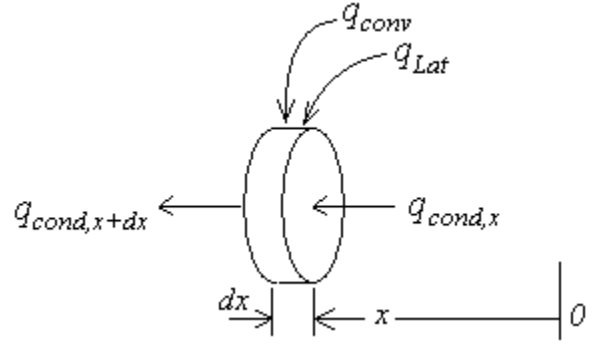


Figure IV-3 : Élément de volume de l'épingle.

En remplaçant et en divisant par dx , nous obtenons :

$$-\frac{q_{cond,x+dx} - q_{cond,x}}{dx} + hP(T_a - T) + h_D P h_{fg} (W_a - W) = 0 \quad (IV.1)$$

En faisant la limite quand $dx \rightarrow 0$, on a :

$$\frac{q_{cond,x+dx} - q_{cond,x}}{dx} = \frac{dq_{cond}}{dx}$$

L'équation (IV.1) devient :

$$-\frac{dq_{cond}}{dx} + hP(T_a - T) + h_D P h_{fg} (W_a - W) = 0 \quad (IV.2)$$

D'après la loi de Fourier de la conduction de chaleur, nous avons :

$$q_{cond} = -kA \frac{dT}{dx}$$

La substitution de cette relation dans l'équation (IV.2) donne l'équation différentielle qui régit le transfert de chaleur dans l'épingle :

$$\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) + hP(T_a - T) + h_D P h_{fg} (W_a - W) = 0 \quad (IV.3)$$

Les coefficients de transfert de chaleur et de masse sont reliés par l'analogie de Chilton-Colburn (II.19) :

$$\frac{h}{h_D} = C_p Le^{2/3}$$

L'équation (IV.3) devient :

$$\frac{d}{dx} \left(A \frac{dT}{dx} \right) + \frac{hP}{k} \left[(T_a - T) + \frac{h_{fg}}{C_p Le^{2/3}} (W_a - W) \right] = 0 \quad (IV.4)$$

• **Adimensionnalisation de l'équation**

Posant $X = \frac{x}{L}$ donc $dx = L dX$

La surface transversale A de l'épingle s'écrit

$$A = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \pi \left[\frac{d_b}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^n \right]^2 = \frac{\pi d_b^2}{4} \left(\frac{x}{L} \right)^{2n} = \frac{\pi d_b^2}{4} X^{2n}$$

Le périmètre de l'épingle s'écrit

$$P = \pi d = \pi d_b \left(\frac{x}{L} \right)^n = \pi d_b X^n$$

On substitut ceux ci dans l'équation (IV.4), on trouve :

$$\frac{d}{LdX} \left(\left(\frac{\pi d_b^2}{4} X^{2n} \right) \frac{dT}{LdX} \right) + \frac{h(\pi d_b X^n)}{k} \left[(T_a - T) + \frac{h_{fg}}{C_p Le^{2/3}} (W_a - W) \right] = 0$$

Après élimination et réarrangement,

$$\frac{d}{dX} \left((X^{2n}) \frac{dT}{dX} \right) + \frac{4h(X^n)}{k d_b} L^2 \left[(T_a - T) + \frac{h_{fg}}{C_p Le^{2/3}} (W_a - W) \right] = 0$$

On dérive le premier terme, on trouve :

$$X^{2n} \frac{d^2T}{dX^2} + 2nX^{2n-1} \frac{dT}{dX} + \frac{4h(X^n)}{k d_b} L^2 \left[(T_a - T) + \frac{h_{fg}}{C_p Le^{2/3}} (W_a - W) \right] = 0$$

Devisant par X^n , on trouve :

$$X^n \frac{d^2T}{dX^2} + 2nX^{n-1} \frac{dT}{dX} + m_0^2 L^2 [(T_a - T) + B (W_a - W)] = 0 \quad (IV.5)$$

où

$$m_0 = \sqrt{\frac{4h}{k d_b}}$$

$$B = \frac{h_{fg}}{C_p Le^{2/3}}$$

Dans ce chapitre nous posons : $\theta = \frac{T_a - T}{T_a - T_b}$,

donc

$$\frac{dT}{dX} = -(T_a - T_b) \frac{d\theta}{dX} \quad \text{et} \quad \frac{d^2T}{dX^2} = -(T_a - T_b) \frac{d^2\theta}{dX^2}$$

Remplaçant $\frac{dT}{dX}$ et $\frac{d^2T}{dX^2}$ par ses expressions dans l'équation (IV.5), on trouve

$$-X^n (T_a - T_b) \frac{d^2\theta}{dX^2} - 2nX^{n-1} (T_a - T_b) \frac{d\theta}{dX} + m_0^2 L^2 [(T_a - T) + B (W_a - W)] = 0$$

Devisant par $(T_a - T_b)$, on trouve

$$-X^n \frac{d^2\theta}{dX^2} - 2nX^{n-1} \frac{d\theta}{dX} + m_0^2 L^2 \left[\frac{(T_a - T)}{(T_a - T_b)} + B \frac{(W_a - W)}{(T_a - T_b)} \right] = 0$$

Cette dernière équation peut s'écrire comme suite

$$X^n \frac{d^2\theta}{dX^2} + 2nX^{n-1} \frac{d\theta}{dX} = m_0^2 L^2 \left[\theta + B \frac{W_a - W_b}{T_a - T_b} \Omega \right] \quad (IV.6)$$

Avec $\Omega = \frac{W_a - W}{W_a - W_b}$

Nous soulignons que la chaleur latente de vaporisation de l'eau, le nombre de Lewis et la chaleur spécifique de l'air peuvent être supposés constants parce que les variations ne sont pas significatives pour les conditions typiques de fonctionnement d'une épingle. Ainsi B peut être considéré comme une constante dans l'équation (IV.6) et a une valeur moyenne de 2433°C [6]. Dans une gamme pratique de la température et l'humidité relative de l'air, la variation de la valeur de B est dans $\pm 1,6\%$ de la valeur moyenne. Cette variation a un effet négligeable sur la solution.

Pour résoudre l'équation (IV.6), une équation supplémentaire pour W est requise. McQuiston [3] a considéré la variation de l'humidité spécifique avec la température, suivante

$$W_a - W = C (T_a - T) \quad (IV.7)$$

où C est une constante. Bien que cette hypothèse simplifie la solution de l'équation différentielle (IV.6), ce n'est pas une relation physique de grande envergure. L'équation (IV.6) peut encore être résolu par l'utilisation du fait que l'air près de la surface de l'épingle est saturé, similaire aux travaux de Elmahdy et Briggs [17]. Cependant, Wu et Bong [5] ont utilisé une relation linéaire entre W et T sur la plage de température ($T_b < T < T_{ext}$), donnée par :

$$W = a_1 + b_1 T \quad (IV.8)$$

où

$$a_1 = W_b - \frac{W_{ext} - W_b}{T_{ext} - T_b} T_b \quad (IV.8a)$$

$$b_1 = \frac{W_{ext} - W_b}{T_{ext} - T_b} \quad (IV.8b)$$

Bien que cette hypothèse semble physiquement acceptable, nous ne savons toujours pas la température à l'extrémité de l'épingle. Par conséquent, nous ne pouvons pas calculer les constantes a_1 et b_1 avant de résoudre la distribution de la température sur la surface de l'épingle.

Une autre amélioration de la relation linéaire qui est suggéré par Sharqawy et Zubair [6] entre W et T sur toute la plage de température ($T_b < T < T_r$) peut être exprimée comme

$$W = a_2 + b_2 T \quad (IV.9)$$

où

$$a_2 = W_b - \frac{W_r - W_b}{T_r - T_b} T_b \quad (IV.9a)$$

$$b_2 = \frac{W_r - W_b}{T_r - T_b} \quad (IV.9b)$$

Ici les paramètres a_2 et b_2 peuvent être calculés à partir des conditions de l'air ambiant et de la température de base de l'épingle. Il n'y a aucun besoin de procédures itératives pour trouver ces paramètres. La température de l'extrémité de l'épingle en état complètement humide doit être inférieure ou égale à la température du point de rosée, T_r du flux d'air entrant. Cette relation linéaire a été testé par Sharqawy et Zubair [18] en résolvant l'équation différentielle non linéaire régissant numériquement et comparer les résultats avec ceux obtenus à partir de la solution analytique. Ils ont été trouvé que cette hypothèse a un effet négligeable sur les résultats comme mentionné plus haut.

Substituant l'équation (IV.9) dans (IV.6), nous obtenons

$$X^n \frac{d^2 \theta}{dX^2} + 2nX^{n-1} \frac{d\theta}{dX} - m^2 L^2 \theta = m_0^2 L^2 B C_0 \quad (IV.10)$$

où

$$m = m_0 \sqrt{1 + b_2 B}$$

$$C_0 = \frac{W_a - a_2 - b_2 T_a}{T_a - T_b}$$

Notez que l'équation (IV.10) est une équation différentielle du second ordre non homogène avec les conditions aux limites suivantes :

$$\text{à } X = 0, \quad \frac{d\theta}{dX} = 0 \quad (\text{IV.11a})$$

$$\text{à } X = 1, \quad \theta = 1 \quad (\text{IV.11b})$$

Il est considéré (voir (IV.11a)) que le transfert de chaleur à partir de l'extrémité est négligeable par rapport à celle dissipée par les côtés (par exemple, l'extrémité de l'épingle est isolée).

IV.2 Épingle de profil rectangulaire (n = 0)

L'équation qui gouverne la température dans ce cas devient :

$$\frac{d^2\theta}{dX^2} - m^2 L^2 \theta = m_0^2 L^2 B C_0 \quad (\text{IV.12})$$

La solution de cette équation lorsqu'elle est soumise à des conditions aux limites (IV.11a) et (IV.11b) donne la distribution de la température le long de la surface de cette ailette sous la forme :

$$\frac{\theta + \theta_p}{1 + \theta_p} = \frac{\cosh(mLX)}{\cosh(mL)} \quad (\text{IV.13})$$

Où $\theta_p = \frac{BC_0}{1 + b_2 B}$

Le flux de chaleur réel transféré à la surface d'épingle, $q_{réel}$, peut être calculé de

$$q_{réel} = k \frac{A_b}{L} (T_a - T_b) \left. \frac{d\theta}{dX} \right|_{X=1}$$

où A_b est l'aire de la section transversale à la base de l'épingle. Ceci donne :

$$q_{réel} = k A_b m (T_a - T_b) (1 + \theta_p) \tanh(mL) \quad (\text{IV.14})$$

Le flux de transfert de chaleur maximum, q_{max} , qui existerait si la surface de l'épingle complète est à la température de base et le taux d'humidité saturée correspond à cette température, peut être calculée par l'équation suivante :

$$q_{max} = A_s h [(T_a - T_b) + B(W_a - W_b)] \quad (\text{IV.15})$$

où A_s la surface totale de l'épingle calculé par

$$A_s = \pi d_b L \int_0^1 X^n dX \quad (\text{IV.16})$$

En substituant la surface totale dans l'équation du q_{max} nous donnera le flux maximum possible de transfert de chaleur qui peut être écrit comme :

$$q_{max} = k A_b m^2 L (T_a - T_b) (1 + \theta_p) \quad (\text{IV.17})$$

Il est important de noter que θ_p représente la composante de transfert de masse du flux de transfert de chaleur total.

Introduisant l'efficacité d'ailette comme le rapport entre le flux de transfert de chaleur total réel au flux de transfert de chaleur maximum possible, nous obtenons :

$$\eta = \frac{q_{réel}}{q_{max}} = \frac{\tanh(mL)}{mL} \quad (IV.18)$$

IV.3 Épingle de profil triangulaire (n = 1)

L'équation (IV.10) qui régit la température dans ce cas devient :

$$X \frac{d^2\theta}{dX^2} + 2 \frac{d\theta}{dX} - m^2 L^2 \theta = m_0^2 L^2 B C_0 \quad (IV.19)$$

La solution de cette équation lorsqu'elle est soumise à des conditions aux limites (IV.11a) et (IV.11b) donne la distribution de la température le long de la surface de cette ailette sous la forme

$$\frac{\theta + \theta_p}{1 + \theta_p} = X^{-1/2} \frac{I_1(2mL\sqrt{X})}{I_1(2mL)}$$

Le flux de chaleur réel transféré à la surface d'ailette, $q_{réel}$, peut être calculé par :

$$q_{réel} = k A_b m (T_a - T_b)(1 + \theta_p) \frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)} \quad (IV.20)$$

Le flux de transfert de chaleur maximum possible, q_{max} , peut être calculé en utilisant l'équation (IV.15) ainsi que l'équation (IV.16) qui calcule la surface totale de l'épingle. Par conséquent, le flux de transfert maximum de chaleur est donnée par :

$$q_{max} = \frac{1}{2} k A_b m^2 L (T_a - T_b)(1 + \theta_p) \quad (IV.21)$$

L'efficacité de l'épingle peut être exprimée comme :

$$\eta = \frac{2}{mL} \frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)} \quad (IV.22)$$

IV.4 Épingle de profil parabolique convexe (n = 1/2)

L'équation (IV.10) qui gouverne la température dans ce cas devient :

$$X^{1/2} \frac{d^2\theta}{dX^2} + X^{-1/2} \frac{d\theta}{dX} - m^2 L^2 \theta = m_0^2 L^2 B C_0 \quad (IV.23)$$

La solution de cette équation lorsqu'elle est soumise à des conditions aux limites (IV.11a) et (IV.11b) donne la distribution de la température le long de la surface de cette ailette sous la forme :

$$\frac{\theta + \theta_p}{1 + \theta_p} = I_0\left(\frac{4}{3}mLX^{3/4}\right) / I_0\left(\frac{4}{3}mL\right)$$

Le flux de chaleur réel transféré à la surface d'ailette, $q_{réel}$, peut être calculé par :

$$q_{réel} = k A_b m (T_a - T_b)(1 + \theta_p) I_1\left(\frac{4}{3}mL\right) / I_0\left(\frac{4}{3}mL\right) \quad (IV.24)$$

Comme précédemment, le flux de transfert de chaleur maximum possible, q_{max} , peut être calculée en utilisant l'équation (IV.15) ainsi que (IV.16). Ainsi, le flux de transfert de chaleur maximum peut être écrit comme :

$$q_{max} = \frac{2}{3} k A_b m^2 L (T_a - T_b)(1 + \theta_p) \quad (IV.25)$$

L'efficacité de l'épingle peut être exprimée comme :

$$\eta = \frac{3/2}{mL} I_1\left(\frac{4}{3}mL\right) / I_0\left(\frac{4}{3}mL\right) \quad (IV.26)$$

IV.5 Épingle de profil parabolique concave (n = 2)

L'équation (IV.10) qui régit la température dans ce cas devient :

$$X^2 \frac{d^2\theta}{dX^2} + 4X \frac{d\theta}{dX} - m^2 L^2 \theta = m_0^2 L^2 B C_0 \quad (IV.27)$$

La solution de cette équation lorsqu'elle est soumise à des conditions aux limites (IV.11a) et (IV.11b) donne la distribution de la température le long de la surface de cette ailette sous la forme :

$$\frac{\theta + \theta_p}{1 + \theta_p} = X^{(3/2)} \frac{(-1 + \sqrt{1 + (4/9)m^2 L^2})}{(-1 + \sqrt{1 + (4/9)m^2 L^2})}$$

Le flux de transfert de chaleur réel transféré à la surface d'ailette, $q_{réel}$, peut être calculé par

$$q_{réel} = \frac{3}{2} k A_b \frac{1}{L} (T_a - T_b)(1 + \theta_p) \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}mL\right)^2} \right) \quad (IV.28)$$

Comme précédemment, le flux de transfert de chaleur maximum possible, q_{max} , peut être calculée en utilisant l'équation (IV.15) ainsi que (IV.116). Ainsi, le flux de transfert de chaleur maximum peut être écrit comme :

$$q_{max} = \frac{1}{3} k A_b m^2 L (T_a - T_b)(1 + \theta_p) \quad (IV.29)$$

L'efficacité de l'épingle peut être exprimée comme

$$\eta = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + ((2/3)mL)^2}} \quad (IV.30)$$

Il convient de noter que les expressions mathématiques de l'efficacité d'une épingle entièrement mouillée, données par les équations (IV.18), (IV.22), (IV.26) et (IV.30) sont les mêmes que pour une épingle sèche. La seule différence est que le paramètre m est modifié en multipliant m_0 par le facteur de correction $(1 + b_2 B)^{1/2}$. McQuiston [3] et Wu et Bong [5] ont également obtenu une expression de l'efficacité d'ailettes dans des conditions complètement humide semblable à celui dans des conditions sèches, mais seulement pour les ailettes rectangulaires droites. Dans la méthode de McQuiston, le paramètre m est égal à $m_0(1 + CB)^{1/2}$, où C est une constante définie par l'équation (IV.7), mais dans la méthode de Wu, le paramètre m est égal à $m_0(1 + b_1 B)^{1/2}$, où b_1 est défini dans l'équation (IV.8b).

Il convient de noter que pour calculer la constante b_1 , nous devons connaître l'état de l'extrémité, qui peut être déterminée, seulement, par une procédure itérative. Alors que dans le présent travail, la constante b_1 est remplacé par b_2 (voir l'équation (IV.9b)), qui est essentiellement la pente moyenne de la ligne de saturation sur le diagramme psychrométrique sur la plage de température ($T_b < T_s < T_r$). Cela peut facilement être calculé sans connaître l'état de l'extrémité de l'épingle.

CHAPITRE V

RESULTATS ET DISCUSSIONS

CHAPITRE V : RESULTATS ET DISCUSSION⁷

V.1 Efficacité de l'épingle

Pour utiliser les équations (IV.18), (IV.22), (IV.26) et (IV.30) de l'efficacité de l'épingle, le paramètre modifié m de l'épingle doit être connue. La figure V-1 donne le facteur de correction, FC. La multiplication de ce facteur par le paramètre de l'épingle sèche, m_o , donne son paramètre à l'état humide, m .

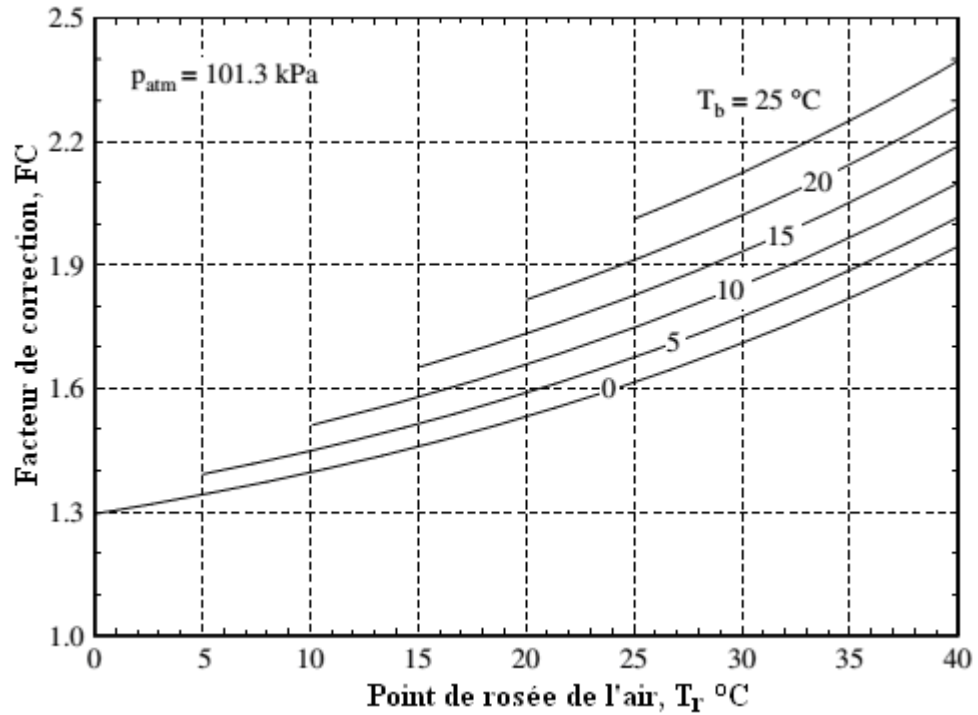


Figure V-1 : Paramètre d'épingle, facteur de correction [26].

On peut voir sur cette figure que le facteur de correction est une fonction de la température de point de rosée de l'air, T_r et celle de la base de l'épingle, T_b . Pour une épingle complètement humide, le point de rosée de l'air devrait être supérieur à la température de base de l'épingle au moins de 7 °C.

En utilisant les Figures V-1 et V-2, l'efficacité de l'épingle à l'état complètement mouillée peut facilement être mis en place.

⁷ On se base dans ce chapitre sur la référence [26].

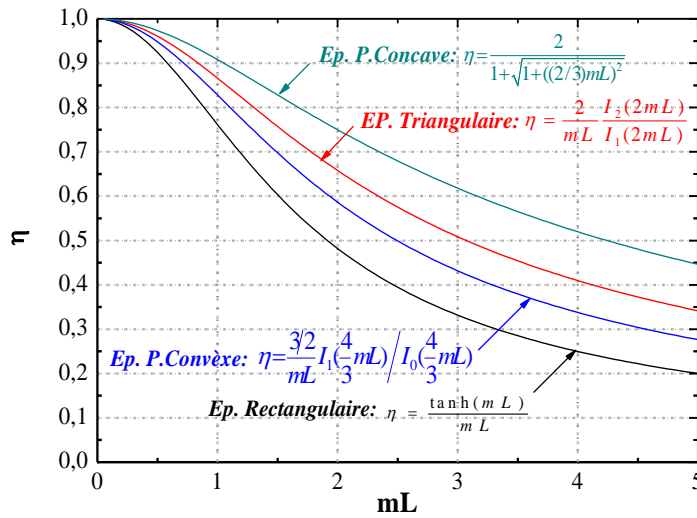


Figure V-2 : Efficacités d'épingles des différents profils en fonction de mL .

Pour illustrer les résultats de ce travail, l'efficacité globale de l'épingle et la distribution de température sur une surface de l'épingle ont été calculées pour une température de base constante de 7°C et une gamme de taux d'humidité relative. Pour faciliter la comparaison entre ces résultats et ceux des autres, l'humidité relative est utilisé ici au lieu du taux d'humidité de l'air, qui est l'une des variables importantes dans les équations décrites dans le chapitre précédent.

V.2 Distribution de la température sur la surface de l'épingle

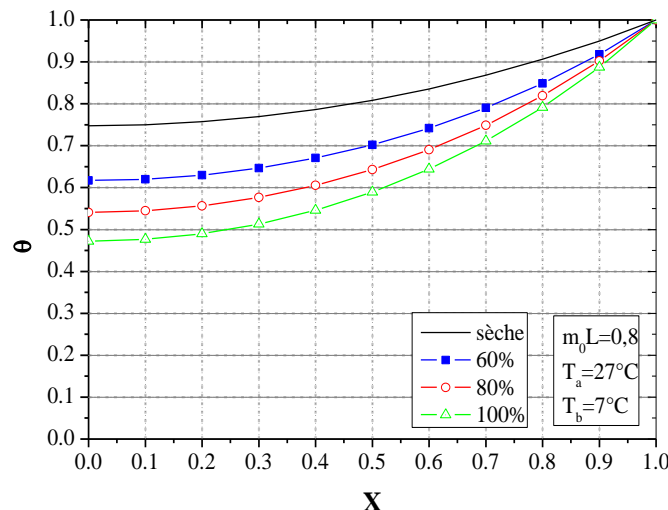


Figure V-3 : Distribution de la Temperature sur l'épingle rectangulaire.

Sur les figures V-3, V-4, V-5 et V-6, la distribution de la température adimensionnelle sur la surface de l'épingle est tracée en fonction de la distance adimensionnelle à partir de son extrémité, X , pour des valeurs d'humidités relatives, $\varepsilon = 60$,

80 et 100%. Pour ces trois valeurs, la température de l'extrémité se trouve être inférieure au point de rosée de l'air et, par conséquent, l'épingle est entièrement mouillée.

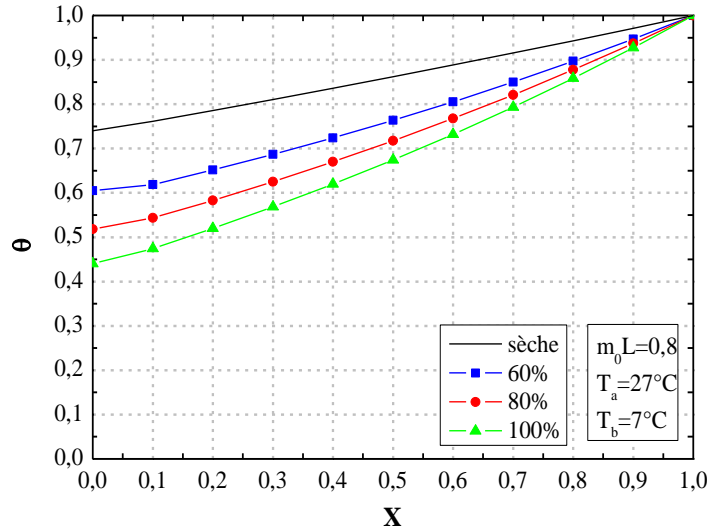


Figure V-4 : Distribution de la température sur l'épingle triangulaire.

On voit que dans le même emplacement sur l'épingle, la différence de température entre l'air et la surface de l'épingle est plus petite pour une épingle humide que pour une autre sèche.

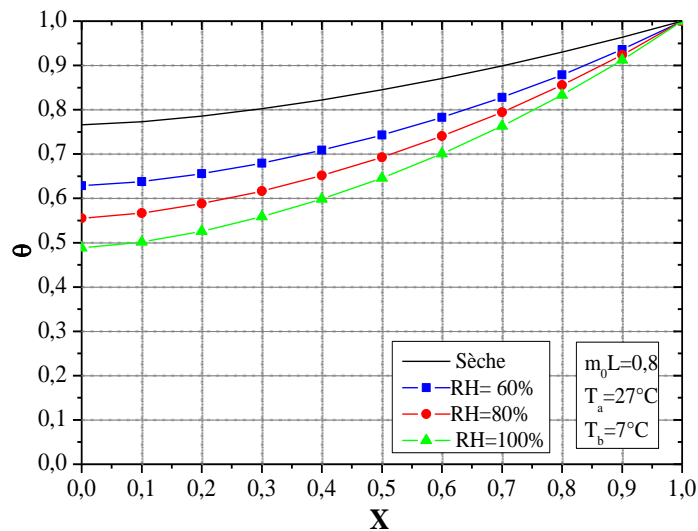


Figure V-5 : Distribution de la température sur l'épingle parabolique convexe.

En conséquence, la température de la surface augmente (à cause de dégagement de chaleur due à la chaleur latente) quand il y a de la condensation. Il est important de noter que plus l'humidité relative augmente, plus la température de surface devient élevée.

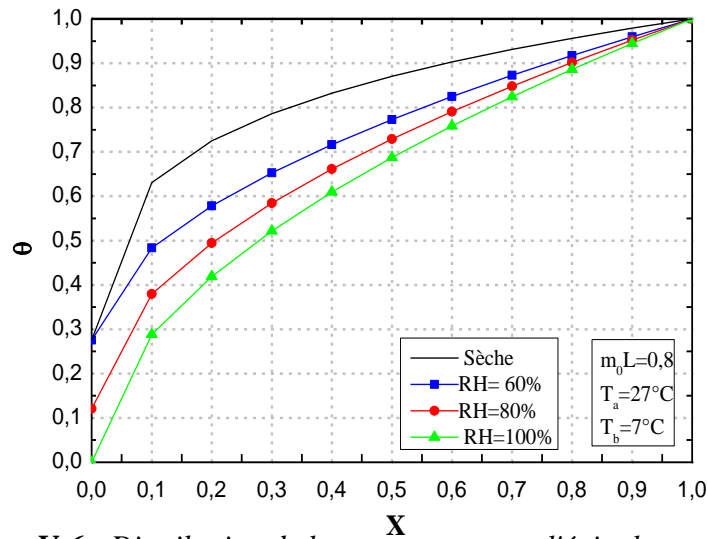


Figure V-6 : Distribution de la température sur l'épingle parabolique concave.

L'efficacité de l'épingle obtenue du présent travail est comparée à celle obtenue par d'autres méthodes [3,5,20] dans des conditions entièrement mouillée. Le tableau 1 montre les résultats comparatifs d'une ailette rectangulaire droite, pour une humidité relative (ε) comprise entre 40 et 100%.

Tableau 1 : Comparaison des efficacités de l'épingle rectangulaire

ε (%)	Kuehn et McQuiston	Wu et Bong [5]	Présente approche	Déffirence avec Wu et Bong [5] en %	
40	0.660	0.790	0.670	0.695	3.6
50	0.657	0.758	0.667	0.682	2.2
60	0.653	0.727	0.663	0.671	1.2
70	0.650	0.695	0.660	0.661	0.2
80	0.647	0.663	0.657	0.651	-0.9
90	0.643	0.632	0.653	0.643	-1.6
100	0.640	0.600	0.650	0.634	-2.5

La valeur du paramètre d'épingle (m_oL) est choisie pour être égale à 0,8 [19]. Il convient de noter que d'après la méthode de McQuiston [3], l'efficacité de l'épingle dépend fortement de ε , tandis que dans les méthodes de Kuehn et autres [20], Wu et Bong [5] et le présent travail, l'efficacité de l'épingle diminue légèrement avec l'augmentation de l'humidité relative. Nous remarquons que l'approche de Wu et Bong [5] s'accorde très bien avec les résultats actuels.

Cependant, Il est important de noter que dans la méthode de Wu et Bong, il n'est pas possible de calculer l'efficacité de l'épingle sans connaître la température de l'extrémité. D'autre part, il y a une petite différence dans l'efficacité de l'épingle obtenue à partir de

l'approche analytique actuelle (directe) et celle obtenue en utilisant la méthode de Wu et Bong. Cette différence dépend des valeurs de m_oL et ε . Pour l'ensemble des ε et m_oL étudiés, nous avons constaté que le pourcentage de différence atteint un maximum de 4,5% à une valeur d'humidité relative de 40% et un paramètre d'épingle $m_oL = 1,2$.

V.3 Effet de la variation de la pression atmosphérique

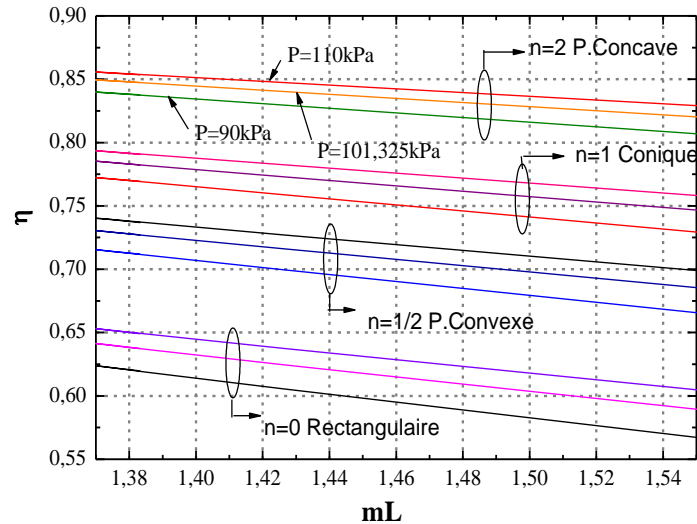


Figure V-7 : Efficacités d'épingles en fonction d'humidité relative aux différentes pressions atmosphériques.

L'effet de la variation de la pression atmosphérique sur la production combinée du processus de transfert de chaleur et de masse n'a pas été pris en considération dans toutes les études précédentes rapportées dans la littérature des épingle. Nous savons que toutes les propriétés psychrométriques changent avec les variations de la pression atmosphérique. Il peut arriver que les équipements d'échangeur de chaleur soient situés à des altitudes élevées du niveau de la mer, ce qui signifie que la pression atmosphérique est différente de la norme. La figure V-7 montre l'efficacité des différents profils d'épingle en fonction de l'humidité relative de l'air à différentes pressions atmosphériques.

En général, on peut constater que l'efficacité de l'épingle augmente avec l'augmentation de la pression atmosphérique. En théorie, lorsque la pression atmosphérique augmente le taux d'humidité de l'air augmentera également. Ceci augmente la force d'entraînement du processus de transfert de masse sur la surface de l'épingle, et donc augmente le taux de transfert de la chaleur due au processus de condensation.

V.4 Dimensions optimales de l'épingle

Les épingles montrées dans la figure IV-2 de la page 46 sont couramment utilisées dans de nombreuses applications de transfert de chaleur où les processus de refroidissement et de déshumidification se produisent simultanément. Comme avec les géométries des autres ailettes, le poids et le coût de matériau des surfaces étendues sont très importants. Par conséquent, les dimensions de l'épingle doivent être optimisées de telle sorte que la moindre quantité de matériau permet de dissiper une quantité donnée de flux de chaleur, ou encore que le taux de dissipation maximale puisse être obtenue à partir d'un volume donné de matériau de l'épingle.

Schneider [21] a fourni des expressions analytiques pour l'épaisseur optimale des ailettes droites pour différents profils en fonction des conditions de surface sèches. Une expression analytique est également dérivée par Sonn et Bar-Cohen [22] pour donner le diamètre optimal d'ailettes à épingle pour le taux de dissipation de chaleur optimal. Cette expression a été basée sur la condition sèche d'ailettes à épingle. Brown [23] a dérivé une équation pour une ailette annulaire sèche reliée les dimensions optimales avec le taux de transfert de chaleur, ses propriétés thermiques et le coefficient de transfert de chaleur. Ce rapport a été présenté graphiquement en termes de paramètres adimensionnels convenables mais encore une fois basée sur la condition de l'ailette sèche.

Kundu et Das [24] ont récemment établi des courbes de conception afin d'obtenir une épaisseur optimale des ailettes rectangulaires dans des conditions totalement ou partiellement mouillés. Ils ont utilisé la même relation linéaire entre le taux d'humidité et la température qui nécessite une solution itérative que celle utilisée par Wu et Bong [5].

Il convient toutefois de noter qu'il n'y a pas de solution analytique générale qui peut être utilisé pour déterminer les dimensions optimales de l'épingle lorsque le transfert de chaleur et de masse se produit simultanément. Par conséquent, le but de ce chapitre est de présenter les dimensions optimales de l'épingle qui donne le taux maximal du transfert de chaleur.

Les dimensions optimales de l'épingle peuvent être définies comme ceux pour lesquels elle va dissiper la quantité maximale de chaleur. Par conséquent, pour tout profil de l'épingle donné, le diamètre optimal de sa base est obtenu en conservant tous les paramètres constants et considérant d_b comme la seule variable indépendante dans l'équation de transfert de chaleur. Le taux maximal de transfert de chaleur à partir de l'épingle peut être obtenu en différentiant par rapport au d_b et équivaut à zéro.

V.4.1 Dimensions optimales pour une épingle de profil rectangulaire (n = 0)

Le taux de transfert de chaleur total à partir de la surface d'épingle de profil rectangulaire lorsque le transfert de chaleur et de masse se produit simultanée est donnée par l'équation (IV.14) qui peut être réécrite comme :

$$\frac{q}{(\pi/4)k (T_a - T_b)(1 + \theta_p)} = \frac{\pi d_b^4}{4 V} \lambda \tanh(\lambda) \quad (\text{V.1})$$

où λ est un paramètre adimensionnel donnée par :

$$\lambda = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{4h}{k} (1 + b_2 B)} \frac{V}{d_b^{5/2}} \quad (\text{V.2})$$

et V le volume de l'épingle, qui est considéré comme une valeur constante :

$$V = \frac{\pi}{4} d_b^2 L \quad (\text{V.3})$$

Après calcul de $dq/d d_b = 0$, nous obtenons

$$5\lambda \operatorname{sech}^2(\lambda) = 3 \tanh(\lambda) \quad (\text{V.4})$$

La racine positive de l'équation (V.4) est :

$$\lambda_{opt} = 0.9193 \quad (\text{V.5})$$

Par conséquent, le diamètre optimal de la base d'épingle de profil rectangulaire pour un volume fixe est

$$d_{b,opt} = \left[\frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{4h}{k} (1 + b_2 B)} \frac{V}{0.9193} \right]^{2/5} \quad (\text{V.6})$$

V.4.2 Dimensions optimales pour une épingle de profil triangulaire (n = 1)

Le taux de transfert de chaleur total à partir de la surface d'épingle de profil triangulaire lorsque le transfert de chaleur et de masse se produit simultanément est donnée par l'équation (IV.20) qui peut être réécrite comme :

$$\frac{q}{(\pi/4)k (T_a - T_b)(1 + \theta_p)} = \frac{\pi d_b^4}{24 V} \lambda \frac{I_2(\lambda)}{I_1(\lambda)} \quad (\text{V.7})$$

où

$$\lambda = \frac{24}{\pi} \sqrt{\frac{4h}{k} (1 + b_2 B)} \frac{V}{d_b^{5/2}} \quad (\text{V.8})$$

$$V = \frac{\pi}{12} d_b^2 L \quad (\text{V.9})$$

Le flux de chaleur maximal est obtenu quand $dq/d d_b = 0$, nous obtenons

$$6I_1(\lambda)I_2(\lambda) + 5\lambda I_2(\lambda)[I_0(\lambda) + I_2(\lambda)] = 5\lambda I_1(\lambda)[I_1(\lambda) + I_3(\lambda)] \quad (\text{V.10})$$

La solution correspond à la racine positive de l'équation (V.10) :

$$\lambda_{opt} = 2.8643 \quad (\text{V.11})$$

Ainsi, le diamètre optimal de la base d'épingle triangulaire qui a une surface de profil constante peut être exprimée par :

$$d_{b,opt} = \left[\frac{24}{\pi} \sqrt{\frac{4h}{k}(1+b_2B)} \frac{V}{2.8643} \right]^{2/5} \quad (\text{V.12})$$

V.4.3 Dimensions optimales pour une épingle de profil parabolique convexe (n = 1/2)

Le taux de transfert de chaleur total à partir de la surface d'épingle parabolique convexe lorsque le transfert de chaleur et de masse se produit simultanément est donnée par l'équation (IV.24) qui peut également être réécrite comme :

$$\frac{q}{(\pi/4)k(T_a - T_b)(1+\theta_p)} = \frac{3\pi d_b^4}{32V} \lambda \frac{I_1(\lambda)}{I_0(\lambda)} \quad (\text{V.13})$$

où

$$\lambda = \frac{32}{3\pi} \sqrt{\frac{4h}{k}(1+b_2B)} \frac{V}{d_b^{5/2}} \quad (\text{V.14})$$

$$V = \frac{\pi}{8} d_b^2 L \quad (\text{V.15})$$

Le flux est maximal quand $dq/d d_b = 0$:

$$6I_1(\lambda)I_0(\lambda) + 10\lambda I_1(\lambda) = 5\lambda I_0(\lambda)[I_0(\lambda) + I_2(\lambda)] \quad (\text{V.16})$$

La solution du problème correspond à la racine positive d'équation (V.16), nous obtenons

$$\lambda_{opt} = 1.4906 \quad (\text{V.17})$$

Par conséquent, le diamètre optimal de la base pour l'épingle de surface de profil parabolique convexe fixe est :

$$d_{b,opt} = \left[\frac{32}{3\pi} \sqrt{\frac{4h}{k}(1+b_2B)} \frac{V}{1.4906} \right]^{2/5} \quad (\text{V.18})$$

V.4.4 Dimensions optimales pour une épingle de profil parabolique concave (n = 2)

Le taux de transfert de chaleur total à partir de la surface d'épingle parabolique concave lorsque le transfert de chaleur et de masse se produisent simultanément est donnée par l'équation (IV.28) qui peut être réécrite comme

$$\frac{q}{(\pi/4)k(T_a - T_b)(1 + \theta_p)} = \frac{3\pi d_b^4}{40V}(-1 + \sqrt{1 + \lambda^2}) \quad (\text{V.19})$$

où

$$\lambda = \frac{40}{3\pi} \sqrt{\frac{4h}{k}(1 + b_2 B)} \frac{V}{d_b^{5/2}} \quad (\text{V.20})$$

$$V = \frac{\pi}{20} d_b^2 L \quad (\text{V.21})$$

Le flux de chaleur maximal est obtenu quand $dq/d d_b = 0$:

$$\lambda^2 = 5.25 \quad (\text{V.22})$$

Cela donne

$$\lambda_{opt} = 2.2913 \quad (\text{V.23})$$

L'épaisseur optimale de l'épingle parabolique concave pour la surface de profil fixe est donc :

$$d_{b,opt} = \left[\frac{40}{3\pi} \sqrt{\frac{4h}{k}(1 + b_2 B)} \frac{V}{2.2913} \right]^{2/5} \quad (\text{V.24})$$

Des équations (V.6), (V.12), (V.18) et (V.24), l'épaisseur optimale sans dimension peut aussi être exprimée en :

$$d_{b,opt}^* = \frac{d_{b,opt}^5}{V^2 (4h/k)} = (1 + b_2 B) \left(\frac{N}{\lambda_{opt}} \right)^2 \quad (\text{V.25})$$

où $(N/\lambda_{opt}) = (4/0.9193\pi)$, $(24/2.8643\pi)$, $(32/4.4718\pi)$ et $(40/6.8739\pi)$, pour les épingles rectangulaire, triangulaire, parabolique convexe et parabolique concave, respectivement.

Le diamètre adimensionnel de l'épingle donnée par l'équation (V.25) est présenté en fonction du facteur de correction de transfert de masse $(1 + b_2 B)^{1/2}$ pour différentes valeurs de pression, qui est tracée dans les figures V-8, V-9 et V-10.

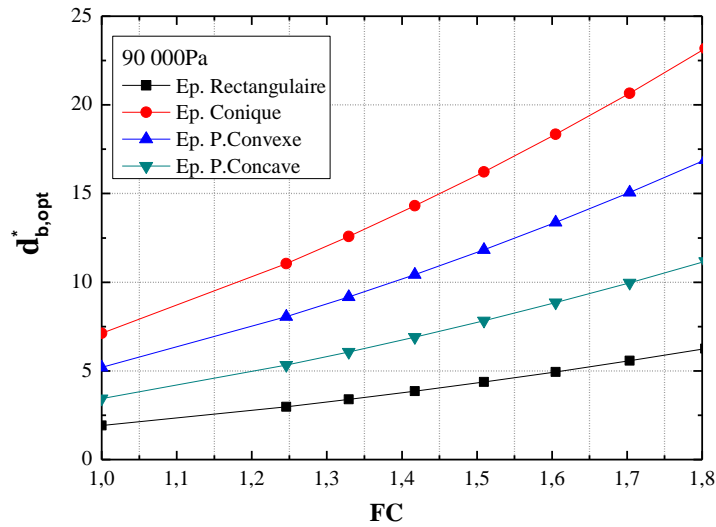


Figure V-8 : Diamètre de la base adimensionnel optimal pour les différents profils d'épingles à 90 000 Pa.

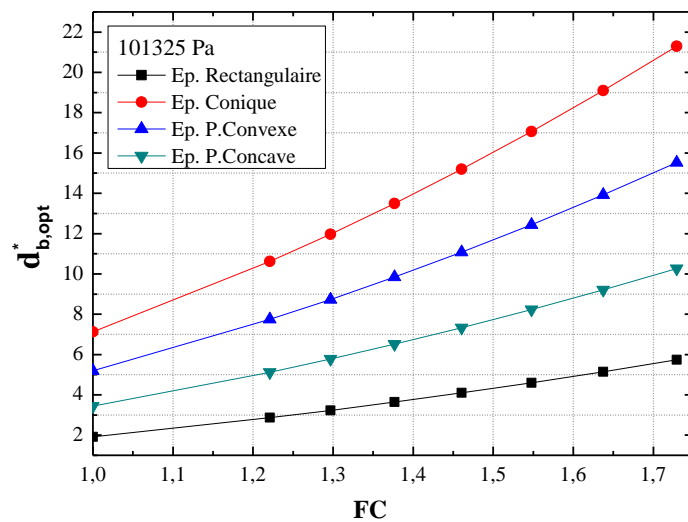


Figure V-9 : Diamètre de la base adimensionnel optimal pour les différents profils d'épingles à 101 325 Pa.

Il est important de noter que les résultats du cas sec de l'épingle sont présentés par $(1+b_2B)^{1/2}=1$ dans ces figures (c'est à dire $B = 0$). Il est clair de ces figures que le diamètre optimal de la base augmente quasi linéairement avec le facteur de correction de transfert de masse.

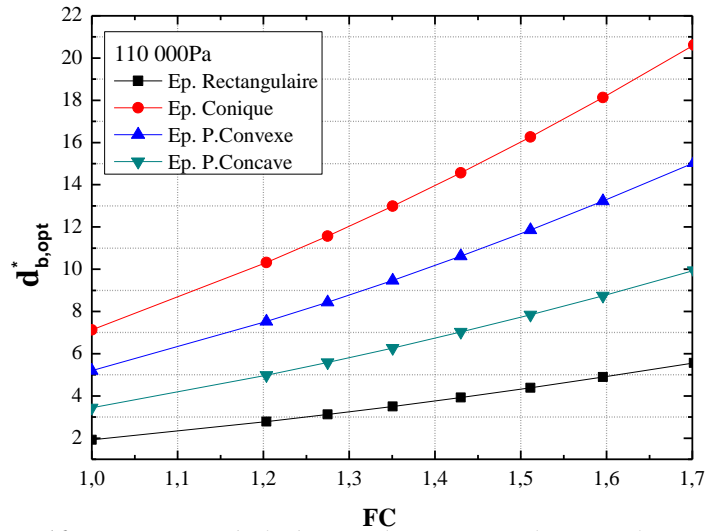


Figure V-10 : Diamètre de la base adimensionnel optimal pour les différents profils d'épingles à 110000 Pa.

La figure V-11 montre la variation de l'efficacité optimale en fonction de FC. Chaque valeur de ce dernier correspond à un diamètre adimensionnel optimal (pour chaque épingle).

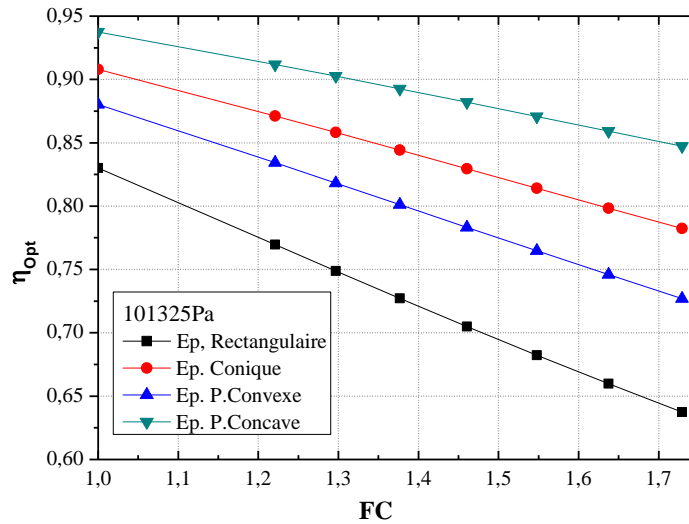


Figure V-11 : Efficacité optimale en fonction de FC pour les différents profils d'épingles.



**CONCLUSIONS
ET
PERSPECTIVES**

CONCLUSIONS

Une solution analytique est obtenue pour l'efficacité ainsi que le taux de transfert de chaleur totale des épingle lors du fonctionnement dans des conditions entièrement mouillées.

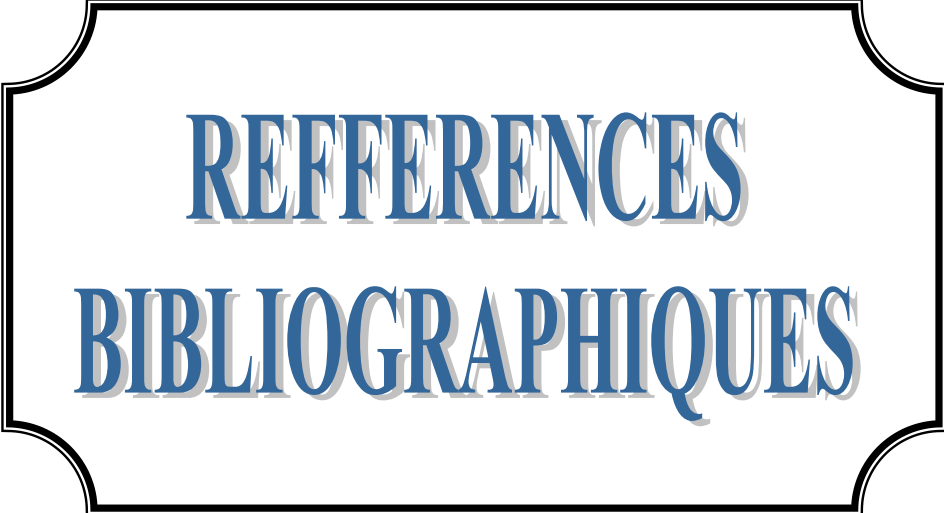
Les conclusions suivantes peuvent être tirées de cette étude :

- a) Un modèle d'approximation linéaire modifiée a été introduit (utilisé) dans ce travail pour la relation entre l'humidité absolue et la température sur la surface de l'épingle. Ce modèle peut être utilisée sans connaître la température à l'extrémité de l'épingle.
- b) Un diagramme de correction permet de corriger la valeur du paramètre d'épingle à l'état sec, m_o , dans le paramètre d'épingle à l'état entièrement mouillé, m . On peut voir sur ce diagramme que le facteur de correction est une fonction de la température de point de rosée de l'air, T_r , et celle de la base de l'épingle, T_b .
- c) Il est claire des figures de la température que :
 - Pour une épingle complètement humide, le point de rosée de l'air devrait être supérieure à la température de la base d'épingle au moins de 7 °C.
 - Pour les valeurs d'humidité relative, (HR = 60, 80 et 100%), la température de l'extrémité se trouve inférieure au point de rosée de l'air et par conséquent l'épingle est entièrement mouillé.
 - Sur le même emplacement sur l'épingle, la différence en température entre l'air et la surface de l'épingle est plus petite pour l'état humide que pour l'état sec. Cette différence explique l'effet du changement de phase (la condensation), de l'air humide, qui s'effectué près de la surface d'épingle.
 - Plus que l'humidité relative augmente, plus que la température de surface devient supérieure (à cause de dégagement de chaleur latente).
- d) L'efficacité globale de l'épingle complètement mouillée, dépend de la pression atmosphérique. Elle augmente également avec l'augmentation de la pression atmosphérique.
- e) Le diamètre adimensionnel optimal de la base de chaque épingle est bien déterminé pour les conditions entièrement sèches et mouillées.
- f) L'épingle de forme parabolique concave est la plus performante par rapport aux autres formes, puis l'épingle de forme triangulaire, ensuite la forme parabolique convexe et rectangulaire.

PERSPECTIVES

On propose pour la suite de ce présent travail :

- D'étudier les ailettes droites de différents profils entièrement mouillées et les comparées avec ces épingles.
- D'étudier l'état partiellement mouillé de ces ailettes et les comparées avec ceux qui sont entièrement mouillées et sèches.
- De comparer les différentes méthodes d'étude analytique de ces ailettes.
- De réaliser cette étude et autres expérimentalement pour confirmer ces résultats analytiques.



REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] P. Razelos, A critical review of extended surface heat transfer, *Heat Transfer Engineering* 24 (6) (2003) 11–28.
- [2] J.L. Threlkeld, *Thermal Environmental Engineering*, second ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1970).
- [3] F.C. McQuiston, Fin efficiency with combined heat and mass transfer, *ASHRAE Transactions* 81 (Part 1) (1975) 350-355.
- [4] Xiangguo Xu, Liang Xia, Mingyin Chan, Shiming Deng, A Modified McQuiston model for evaluating efficiency of wet fin considering effect of condensate film moving on fin surface, *Energy Conversion and Management* 49 (2008) 2403–2408.
- [5] G. Wu, T.Y. Bong, Overall efficiency of a straight fin with combined heat and mass transfer, *ASHRAE Transactions* 100 (Part 1) (1994) 367e374.
- [6] Mostafa H. Sharqawy, Syed M. Zubair, Efficiency and optimization of an annular fin with combined heat and mass transfer - An analytical solution, *International Journal of Refrigeration* 30 (2007) 751e757.
- [7] Balam Kundu, An Analytical Study Of The Effect Of Dehumidification Of Air On The Performance And Optimization Of Straight Tapered Fins, *Int. Comm Heat Mass Transfer* Vol. 29. No. 2, pp. (2002) 269-218.
- [8] Chien-Nan Lin, Jiin-Yuh Jang, A two-dimensional fin efficiency analysis of combined heat and mass transfer in elliptic fins, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45 (2002) 3839–3847.
- [9] Paisarn Naphon, Study on the heat transfer characteristics of the annular fin under dry-surface, partially wet-surface, and fully wet-surface conditions, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 33 (2006) 112– 121.
- [10] Balam Kundu, Performance and optimum design analysis of longitudinal and pin fins with simultaneous heat and mass transfer: Unified and comparative investigations, *Applied Thermal Engineering* 27 (2007) 976–987.
- [11] B. Kundu, D. Barman, S. Debnath, An analytical approach for predicting fin performance of triangular fins subject to simultaneous heat and mass transfer, *international journal of refrigeration* 31 (2008) 1113–1120.
- [12] Chilton TH, Colburn AP. Mass transfer (absorption) coefficients. *Ind Eng Chem* (1934);26:1183–7.
- [13] Jean-Michel JASON, Condensation des effluents gazeux dans les échangeurs de chaleur en présence d'incondensable, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis (2003).
- [14] A.D. Kraus, A. Aziz, J. Welty, *Extended Surface Heat Transfer*, John Wiley & Sons, New York, (2001).
- [15] F.C. McQuiston, J.D. Parker, *Heating, Ventilating and Air Conditioning*, John Wiley & Sons, New York, (1994).
- [16] Gardner, K. A. Efficiency of Extended Surface, *Trans. ASME*, 67 (1945) 621.
- [17] A.H. Elmahdy, R.C. Briggs, Efficiency of extended surfaces with simultaneous heat and mass transfer, *ASHRAE Transactions* 89 (1983) 135–143 part IA.

- [18] M.H. Sharqawy, S.M. Zubair, Combined heat and mass transfer analysis from annular fins of constant cross-sectional area, in: 8th International Symposium on Advances in Computational Heat Transfer, ICHMT, Marrakech, Morocco, CHT-08 (May 2008) 239.
- [19] M.H. Sharqawy, S.M. Zubair, Efficiency and optimization of straight fins with combined heat and mass transfer – an analytical solution, *Applied Thermal Engineering* 28 (2008) 2279–2288.
- [20] T.H. Kuehn, J.W. Ramsey, J.L. Threlkeld, *Thermal Environmental Engineering*, third ed. Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, (1998).
- [21] P.J. Schneider, *Conduction Heat Transfer*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, (1955).
- [22] A. Sonn, A. Bar-Cohen, Optimum cylindrical pin fin, *ASME Journal of Heat Transfer* 103 (1981) 814–815.
- [23] A. Brown, Optimum dimensions of uniform annular fins, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 8 (1965) 655–662.
- [24] B. Kundu, P.K. Das, Performance and optimization analysis for fins of straight taper with simultaneous heat and mass transfer, *Transactions of the ASME* 126 (2004) 862–868.
- [25] Watson, G. N. *A Treatise on Bessel Functions*, 3rd Ed, Cambridge University Press, New York (1966).
- [26] M.H. Sharqawy, S.M. Zubair, Performance and optimum geometry of spines with simultaneous heat and mass transfer, *International Journal of Thermal Sciences* xxx (2009) 1-9.

ANNEXES

ANNEXES

A.1.1 Equations de Bessel et fonctions de Bessel ⁹

Le résumé complet moderne des fonctions attribuées à FW Bessel est celle de GN Watson [25]. Considérons l'équation différentielle linéaire

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (\text{A.1})$$

Cette équation à coefficients variables, connues sous le nom de l'équation différentielle de Bessel, est dite être d'ordre n . Parce que c'est une équation différentielle linéaire du second ordre, il doit avoir deux solutions linéairement indépendantes. Sa solution générale où n n'est pas un nombre entier est

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x) \quad (\text{A.2a})$$

et lorsque n est un nombre entier,

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \quad (\text{A.2b})$$

Dans les équations (A.2a) et (A.2b), C_1 et C_2 sont des constants arbitraires, $J_n(x)$ est la fonction de Bessel de premier type d'ordre n et d'argument x , et $Y_n(x)$ est la fonction de Bessel de deuxième type, d'ordre n et d'argument x .

$J_n(x)$ et $J_{-n}(x)$ sont des séries infini des formes

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+n}}{2^{2m+n} m! \Gamma(m+n+1)} \quad (\text{A.3a})$$

et

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n} m! \Gamma(m-n+1)} \quad (\text{A.3b})$$

où $\Gamma(m+n+1)$ et $\Gamma(m-n+1)$ sont les fonctions gamma de $m+n+1$ et $m-n+1$, respectivement.

$Y_n(x)$ est aussi une série infinie, qui peut s'écrire, en termes généraux, comme

$$Y_n(x) = A J_n(x) \int \frac{dx}{x [J_n(x)]^2} + B J_n(x) \quad (\text{A.4a})$$

Diverses formes de $Y_n(x)$ peuvent être obtenus, selon les valeurs assignées aux constantes A et B . Une telle forme est

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \quad (\text{A.4b})$$

⁹ La plus part de cette partie est empruntée de A.D. Kraus [14].

Connu sous la forme de Weber, il est couramment utilisé et valable tant que n n'est pas un entier. Lorsque n est un nombre entier, $Y_n(x)$ est la limite d'équation (A.4b) parce que n s'approche de la valeur de l'entier, d'où $Y_n(x)$ peut être exprimée comme une série de puissance.

Une équation qui ressemble attentivement à l'équation de Bessel est

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2) y = 0 \quad (\text{A.5a})$$

L'équation (A.5a) diffère de l'équation (A.1) que dans le dernier terme, qui est négatif. Cette équation est appelée équation de Bessel modifiée. Elle peut être ajustée pour donner

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (i^2 x^2 - n^2) y = 0 \quad (\text{A.5b})$$

Les équations (A.5a) et (A.5b) sont d'autres formes. La solution formelle de ces équations est, lorsque n n'est pas un nombre entier,

$$y = C_1 J_n(ix) + C_2 J_{-n}(ix) \quad (\text{A.6a})$$

et lorsque n est un nombre entier,

$$y = C_1 J_n(ix) + C_2 Y_n(ix) \quad (\text{A.6b})$$

Les solutions réelles des équations (A.6a) et (A.6b) sont des fonctions réelles en ce sens qu'elles ne contiennent pas la quantité imaginaire $i = \sqrt{-1}$. Par conséquent, la fonction modifiée de Bessel de première type, d'ordre n et d'argument x , est définie par

$$I_n(x) = (i)^{-n} J_n(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+n}}{2^{2m+n} m! \Gamma(m+n+1)} \quad (\text{A.7a})$$

et

$$I_{-n}(x) = i^n J_{-n}(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m-n}}{2^{2m-n} m! \Gamma(m-n+1)} \quad (\text{A.7b})$$

La seconde solution indépendante de l'équation modifiée de Bessel est la fonction modifiée de Bessel de deuxième type, d'ordre n et d'argument x . Cette solution, noté $K_n(x)$, est de forme semblable à $Y_n(x)$ et peut être écrite lorsque n n'est pas un entier comme

$$K_n(x) = \frac{\pi/2}{\sin n\pi} [I_{-n}(x) - I_n(x)] \quad (\text{A.8a})$$

et lorsque n est un nombre entier, $K_n(x)$ est la limite approché par l'équation (A.11a) lorsque n tend vers la valeur de l'entier :

$$K_n(x) = \frac{2}{\cos n\pi} \left[\frac{\partial I_{-n}(x)}{\partial n} - \frac{\partial I_n(x)}{\partial n} \right] \quad (\text{A.8b})$$

La solution de l'équation (A.5a) peut donc s'écrire, lorsque n n'est pas un entier,

$$y = C_1 I_n(x) + C_2 I_{-n}(x) \quad (\text{A.9a})$$

et lorsque n est un nombre entier,

$$y = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x) \quad (\text{A.9b})$$

A.1.2 Forme généralisée de l'équation de Bessel

Les fonctions de Bessel sont d'un intérêt particulier, car elles fournissent des solutions pour la plupart des équations qui surviennent continuellement dans les applications d'ingénierie, notamment dans l'analyse des surfaces étendues. Souvent, les équations ayant des fonctions de Bessel leurs solutions ne sont pas facilement reconnaissables. Par conséquent, il est souhaitable d'étudier des équations différentielles linéaires à coefficients variables donnés pour déterminer si elles se réduisent à l'équation de Bessel.

Par exemple, prenons l'équation différentielle générale

$$\frac{d}{dx} \left(x^p \frac{dy}{dx} \right) + (ax^j + bx^k) y = 0 \quad j > k \quad (\text{A.10})$$

une tentative de la réduire à une forme de l'équation de Bessel

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(m^2 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (\text{A.11})$$

Pour atteindre ces objectifs, il est nécessaire de faire deux transformations

$$x = u^\alpha \quad (\text{A.12a})$$

et

$$y = u^\beta v \quad (\text{A.12b})$$

où α et β sont des paramètres arbitraires encore à déterminer. Puis

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \alpha u^{\alpha-1} \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{\alpha u^{\alpha-1}} \\ \frac{dy}{du} &= v \beta u^{\beta-1} + u^\beta \frac{dv}{du} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Les équations (A.13) peuvent être utilisés pour produire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \left(v \beta u^{\beta-1} + u^\beta \frac{dv}{du} \right) \frac{1}{\alpha u^{\alpha-1}}$$

et

$$x^p \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\alpha} \left(u^{\alpha p + \beta - \alpha + 1} \frac{dv}{du} + \beta v u^{\alpha p + \beta - \alpha} \right) \quad (\text{A.14})$$

Maintenant, la dérivée par rapport à x de l'équation (A.14), ainsi que les équations (A.12), peut être substitué en équation (A.10) pour donner, après simplification

$$0 = \frac{d^2 v}{du^2} + \frac{\alpha p + 2\beta - \alpha + 1}{u} \frac{dv}{du} + \left[\frac{\beta(\alpha p + \beta - \alpha)}{u^2} + \alpha^2 a u^{\alpha j + 2\alpha - \alpha p - 2} + \alpha^2 b u^{\alpha k - \alpha p + 2\alpha - 2} \right] v \quad (\text{A.15a})$$

L'équation (A.15a) a la même forme que l'équation de Bessel,

$$\frac{d^2 v}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dv}{du} + \left(\omega^2 - \frac{n^2}{u^2} \right) v = 0 \quad (\text{A.15b})$$

et on voit que pour l'identité complète entre les équations (A.15a) et (A.15b), il doit se produire le suivant :

1. Le coefficient de $(1/u)$ (dv/du) doit égale l'unité, ou

$$\alpha p + 2\beta - \alpha + 1 = 1 \quad (\text{A.16})$$

2. L'exposant de u dans le second terme entre crochets dans l'équation (A.15a) doit être nul, ou

$$\alpha j + 2\alpha - \alpha p - 2 = 0 \quad (\text{A.17})$$

3. L'exposant de u dans le troisième terme entre les crochets doit être -2, alors que ce terme peut être combiné avec le premier terme entre crochets :

$$\alpha k - \alpha p + 2\alpha - 2 = -2 \quad (\text{A.18})$$

Les équations (A.16) à (A.18) permettent l'évaluation de α , β et k . Tout d'abord, à partir de l'équation (A.17),

$$\alpha = \frac{2}{2 - p + j} \quad (\text{A.19})$$

Puis, par substitution dans l'équation (A.16),

$$\beta = \frac{\alpha(1-p)}{2} = \frac{1-p}{2-p+j} \quad (\text{A.20})$$

et enfin, à partir de l'équation (A.18),

$$k = p - 2 \quad (\text{A.21})$$

Remarquons que si $b = 0$ dans l'équation (A.10), la condition $k = p - 2$ est sans importance (n'est pas pertinent). Mais, lorsque $b \neq 0$ et $k = p - 2$, l'équation d'origine peut être ramené à la forme de l'équation de Bessel où α et β sont donnés par les équations (A.19) et (A.20) :

$$\frac{d^2v}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dv}{du} + \left[a\alpha^2 + \frac{\beta(\alpha p + \beta - \alpha) + \alpha^2 b}{u^2} \right] v = 0 \quad (\text{A.22})$$

De l'équation (A.15b)

$$-n^2 = \beta(\alpha p + \beta - \alpha) + \alpha^2 b$$

ou, en insérant α et β des équations (A.19) et (A.20),

$$n = \frac{\sqrt{(1-p)^2 - 4b}}{2-p+j} \quad (\text{A.23})$$

et enfin,

$$\omega^2 = a\alpha^2$$

ou

$$\omega = \alpha\sqrt{a} \quad (\text{A.24})$$

La solution générale pour v dans l'équation (A.15b) peut être maintenant écrite, lorsque n n'est pas un entier,

$$v = C_1 J_n(\omega u) + C_2 J_{-n}(\omega u) \quad (\text{A.25a})$$

et lorsque n est un nombre entier,

$$v = C_1 J_n(\omega u) + C_2 Y_n(\omega u) \quad (\text{A.25b})$$

Ensuite, la solution de l'équation (A.15b) en termes de y et x est obtenue. Des équations (A.12)

$$u = x^{1/\alpha}$$

et

$$y = u^\beta v = x^{\beta/\alpha} v$$

Lorsque n n'est pas un nombre entier,

$$y = x^{\beta/\alpha} \left[C_1 J_n(\omega x^{1/\alpha}) + C_2 J_{-n}(\omega x^{1/\alpha}) \right] \quad (\text{A.26a})$$

et lorsque n est un nombre entier,

$$y = x^{\beta/\alpha} \left[C_1 J_n(\omega x^{1/\alpha}) + C_2 Y_n(\omega x^{1/\alpha}) \right] \quad (\text{A.26b})$$

A.2 Épingle conique

Considérons l'équation différentielle

$$x^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + 2x \frac{d\theta}{dx} - M^2 x \theta = 0 \quad (\text{A.27})$$

et la comparer avec l'équation généralisée de Bessel

$$\frac{d}{dx} \left(x^p \frac{d\theta}{dx} \right) + (a x^j + b x^k) \theta = 0 \quad (\text{A.10})$$

Si la comparaison indique que $p = k + 2$ ou $b = 0$, alors l'équation (A.27) est réduit à l'équation de Bessel et la solution (si a est négatif) sera

$$\theta(x) = x^{\beta/\alpha} [C_1 I_n(\omega x^{1/\alpha}) + C_2 I_{-n}(\omega x^{1/\alpha})] \quad (\text{A.28a})$$

si n n'est pas un nombre entier, et

$$\theta(x) = x^{\beta/\alpha} [C_1 I_n(\omega x^{1/\alpha}) + C_2 K_n(\omega x^{1/\alpha})] \quad (\text{A.28b})$$

si n est un nombre entier. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} p &= 2 & j &= 1 \\ a &= -M^2 & b &= k = 0 \end{aligned}$$

et parce que $b = 0$, l'équation (A.27) se réduit à l'équation de Bessel où l'évaluation des constantes α , β , ω , et n se procède comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{2-p+j} = \frac{2}{2-2+1} = \frac{2}{1} = 1 \\ \beta &= \frac{1-p}{2-p+j} = \frac{1-2}{2-2+1} = \frac{-1}{1} = -1 \\ \omega &= -i \alpha \sqrt{a} = i 2 \sqrt{-M^2} = 2M \\ n &= \frac{\sqrt{(1-p)^2 + 4b}}{2-p+j} = \frac{\sqrt{(1-2)^2 + 0}}{1} = \frac{\sqrt{1}}{1} = 1 \end{aligned}$$

Parce que n est un entier, donc la solution générale de l'équation (A.27) est

$$\theta(x) = x^{-1/2} [C_1 I_1(2M \sqrt{x}) + C_2 K_1(2M \sqrt{x})] \quad (\text{A.29})$$

A.3 Épingle Parabolique Convexe

Considérons l'équation différentielle

$$x^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{d \theta}{dx} - M^{1/2} x \theta = 0 \quad (\text{A.30})$$

et la comparer avec l'équation généralisée de Bessel

$$\frac{d}{dx} \left(x^p \frac{dy}{dx} \right) + (ax^j + bx^k) y = 0 \quad (\text{A.10})$$

Si la comparaison indique que $p = k + 2$ ($b = 0$), alors l'équation (A.30) se réduit à l'équation de Bessel et de la solution (si a est négatif) sera

$$\theta(x) = x^{\beta/\alpha} [C_1 I_n(\omega x^{1/\alpha}) + C_2 K_n(\omega x^{1/\alpha})] \quad (\text{A.31a})$$

si n est un nombre entier, ou

$$\theta(x) = x^{\beta/\alpha} [C_1 I_n(\omega x^{1/\alpha}) + C_2 I_{-n}(\omega x^{1/\alpha})] \quad (\text{A.31b})$$

si n n'est pas un nombre entier. Pour le cas qui nous occupe,

$$\begin{aligned} p &= 1 & j &= 1/2 \\ a &= -M^2 & b &= k = 0 \end{aligned}$$

et parce que $b = 0$, l'équation (A.30) se réduit à l'équation de Bessel où l'évaluation des constantes α , β , ω et n se procède comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{2-p+j} = \frac{2}{2-1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} \\ \beta &= \frac{1-p}{2-p+j} = \frac{1-1}{3/2} = 0 \\ \omega &= -i\alpha\sqrt{a} = -i\frac{4}{3}\sqrt{-M^2} = \frac{4}{3}M \\ n &= \frac{\sqrt{(1-p)^2 - 4b}}{2-p+j} = \frac{\sqrt{(1-1)^2 - 0}}{3/2} = 0 \end{aligned}$$

Parce que n est un entier, donc la solution générale de l'équation (A.30) est

$$\theta = C_1 I_0\left(\frac{4}{3}M x^{\frac{3}{4}}\right) + C_2 K_0\left(\frac{4}{3}M x^{\frac{3}{4}}\right) \quad (\text{A.32})$$

A.4 Programmes de calcul en Fortran

1. Programme du calcul d'efficacités d'épingles

```
*
*   Programme du Calcul des efficacités des épingles
*   *****
Open(1,file='Efficacités des 4 Spines.txt')
xxx=0.05
do n=1,100
xmL=n*xxx
dd=(1+((2./3)*xmL)**2)**(0.5)
frect=(tanh(xmL))/(xmL)
fConc=2./(1+dd)
fConv=(2./((4./3)*xmL))*XI1((4./3)*xmL)/XI0((4./3)*xmL)
ftria=(2./xmL)*(XI0(2*xmL)/XI1(2*xmL)-(1./xmL))
write(1,*)xmL,fRect,fTria,fConv,fConc
end do
end
```

2. Programme du calcul de la température sur l'épingle

```
*
*   *****
*   La distribution de la température sur les épingles
*   *****
dimension Tr(7),Xr(7),Xb(7)
real m0L,mL
OPEN(5,FILE='1 TETArect.txt')
OPEN(6,FILE='2 TETAtria.txt')
OPEN(7,FILE='3 TETAconv.txt')
OPEN(8,FILE='4 TETAconc.txt')
DATA Tr(1),Tr(2),Tr(3)/18.73,23.33,27./
DATA Xr(1),Xr(2),Xr(3)/0.01342,0.01802,0.02269/
DATA Xb(1),Xb(2),Xb(3)/0.00371,0.00496,0.00621/
Tb=7.
Ta=27.
B=2415.
m0L=0.8
do 10 I=1,4
k=I
IF(k.eq.4)THEN
B=0.
Fc=1.
ELSE
b2=(Xr(I)-Xb(I))/(Tr(I)-Tb)
a2=Xb(I)-b2*Tb
Fc=(1+b2*B)**(0.5)
Xa=Xr(I)
C0=(Xa-a2-b2*Ta)/(Ta-Tb)
ENDIF
TETAp=(B*C0)/(1+b2*B)
mL=m0L*Fc

*
*   Calcul de Teta sur les 4 types d'épingle en fonction de X
*   *****
```

```

R=(1+(4./9)*(mL)**2)**(0.5)
XX=0.1
Do 9 J=1,11
X=XX*(J-1)
TETArect=(1+TETAp)*(Cosh(mL*X))/(Cosh(mL))-TETAp
PO=XI1(2*mL*X**(0.5))/XI1(2*mL)
If(J.eq.1)THEN
TETAtria=0.74
ELSE
TETAtria=(1+TETAp)*(X**(-0.5))*PO-TETAp
ENDIF
TETAconv=(1+TETAp)*XIO((4./3)*mL*X**(3./4))/XIO((4./3)*mL)-TETAp
TETAconc=(1+TETAp)*X**((3./2)*(-1.+R))-TETAp
write(5,*)X,TETArect
write(6,*)X,TETAtria
write(7,*)X,TETAconv
write(8,*)X,TETAconc
If(J.eq.11)Then
write(5,*)"
write(6,*)"
write(7,*)"
write(8,*)"
else
endif
9 Continue
10 continue
End

```

3. Fonctions de Bessel modifiées

```

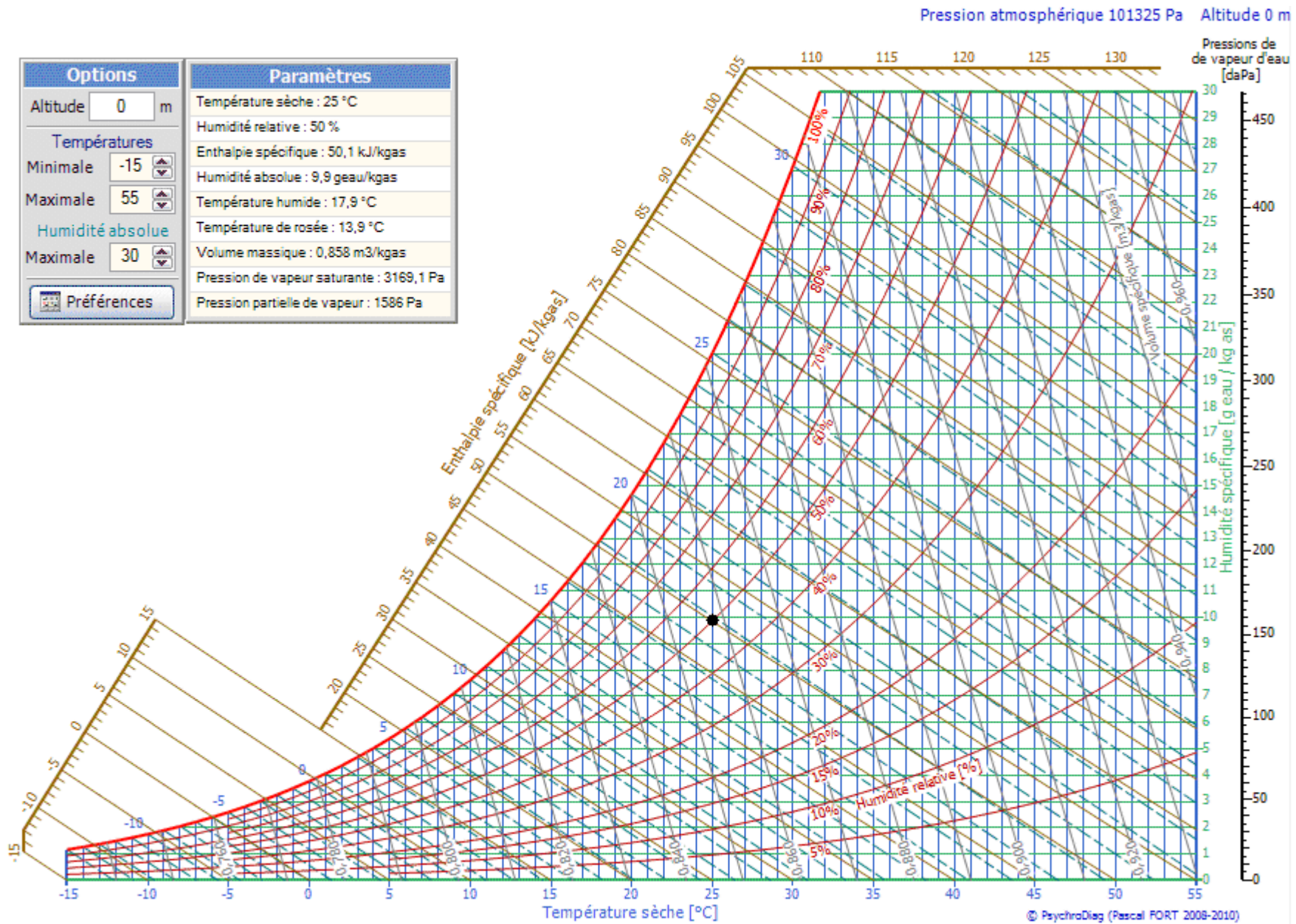
* *****
* * FONCTIONS DE BESSEL MODIFIEES *
* *****
FUNCTION XI0(X)
DATA P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7/1.0D0,3.5156229D0,3.0899424D0,
* 1.2067492D0,0.2659732D0,0.360768D-1,0.45813D-2/
DATA Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7,Q8,Q9/0.39894228D0,0.1328592D-1,
* 0.225319D-2,-0.157565D-2,0.916281D-2,-0.2057706D-1,
* 0.2635537D-1,-0.1647633D-1,0.392377D-2/
IF(ABS(X).LT.3.75)THEN
Y=(X/3.75)**2
XI0=P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y*(P5+Y*(P6+Y*P7))))
ELSE
AX=ABS(X)
Y=3.75/AX
XI0=(EXP(AX)/SQRT(AX))*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+Y*(Q5+Y*(Q6+
* Y*(Q7+Y*(Q8+Y*Q9))))))
ENDIF

RETURN
END

FUNCTION XI1(X)
DATA P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7/0.5D0,0.87890594D0,0.51498869D0,
* 0.15084934D0,0.2658733D-1,0.301532D-2,0.32411D-3/

```

```
DATA Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7,Q8,Q9/0.39894228D0,-0.3988024D-1,  
* -0.362018D-2,0.163801D-2,-0.1031555D-1,0.2282967D-1,  
* -0.2895312D-1,0.1787654D-1,-0.420059D-2/  
IF(ABS(X).LT.3.75)THEN  
  Y=(X/3.75)**2  
  XI1=X*(P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y*(P5+Y*(P6+Y*P7))))))  
ELSE  
  AX=ABS(X)  
  Y=3.75/AX  
  XI1=(EXP(AX)/SQRT(AX))*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+  
* Y*(Q5+Y*(Q6+Y*(Q7+Y*(Q8+Y*Q9))))))  
ENDIF  
RETURN  
END
```



ملخص

السطوح الممتدة تستعمل لغرض زيادة التبادل الحراري بين الجسم الصلب و المائع المحيط به. السطوح الممتدة ذات المقطع الدائري تسمى مسامير أو إبر. في هذه الدراسة، درسنا الكفاءة لأشكال مختلفة من المسامير خاضعة لميكانيزمي التبادل الحراري والكتلي في نفس الوقت. الفروق في درجة الحرارة وفي منسوب الرطوبة هي القوى المنتجة للتبادل الحراري والكتلي. حلولا نظرية، للمردودية وتوزيع الحرارة على سطوح المسامير، عثرنا عليها عندما تكون مبللة كلية. جدول تصحيحي طوّر لتصحيح قيمة معيار المسامير في حالة الجفاف إذا كانت تعمل تحت شرط البلل الكامل. تأثير الضغط الجوي على مردودية المسامير درس أيضا هو والأبعاد الحدية الموجودة لما تنتج قيمة قصوى لمنسوب التبادل الحراري.

الكلمات المفتاحية: التبادل الحراري، التبادل الكتلي، الكفاءة، المردودية، زعانف المسامير، هواء رطب.

Résumé

Les surfaces étendues sont employées pour augmenter le taux de transfert de chaleur entre un solide et un fluide adjacent. Les surfaces étendues de section circulaire sont appelés épingles. Dans cette étude, on a étudié la performance des épingles de différentes configurations soumises aux mécanismes simultanés de transfert de la chaleur et de la masse. La différence de la température et le rapport d'humidité sont les forces d'entraînement de transfert de la chaleur et de masse, respectivement. Des solutions analytiques sont obtenues pour l'efficacité et la distribution de température sur la surface d'épingle quand elle est entièrement humide. Un diagramme de correction est développé pour corriger la valeur du paramètre d'épingle sèche si la condition de sa surface est entièrement humide. L'effet de la pression atmosphérique sur l'efficacité d'épingle a été également étudié. Les géométries optimales d'épingle correspondant à une quantité maximale de taux de transfert de chaleur ont été obtenues.

Mots clés: Transfert de chaleur, Transfert de masse, Optimisation, Performance, Ailettes, Air humide.

Abstract

Extended surfaces are used to enhance the heat transfer rate between a solid and an adjoining fluid. Extended surfaces of circular cross-section are called spines. In this study an analysis was carried out to study the performance of spine fins of different configurations when subjected to simultaneous heat and mass transfer mechanisms. The temperature and humidity ratio differences are the driving forces for the heat and mass transfer, respectively. Analytical solutions are obtained for the efficiency and temperature distribution over the spine surface when the surface condition is fully wet. A correction chart is developed to correct the value of the dry fin spine parameter if the fin surface condition is fully wet. The effect of atmospheric pressure on the spine efficiency was also studied as well as the spine optimum geometries were obtained such that a maximum amount of heat transfer rate occurs.

Keywords: Heat transfer, Mass transfer, Optimization, Performance, Spine fins, Moist air.