REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE HADJ LAKHDAR BATNA
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

MEMOIRE PRESENTE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MAGISTERE

EN

GENIE MECANIQUE

Option : Construction Mécanique

Par

Mr. BENKARRA KHALIFA

Thème

Problème de contact d'une couche élastique transverse isotrope sollicitée par un poinçon annulaire rigide.

Soutenue publiquement le : / /2013

Devant le jury composé de :

Mr ZIDANI Kamel	Prof	Université de Batna	Président
Mr SEGHIR Kamel	M.C.A	Université de Batna	Rapporteur
Mr OUTTAS Toufik	Prof	Université de Batna	Examinateur
Mr DJEBAILLI Hamid	Prof	Université de Khenchela	Examinateur

Année universitaire 2013/2014

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement, Mr K.SEGHIR, Maître de conférences à l'Université de Batna d'avoir accepté de diriger ce travail et de m'avoir donné des conseils et des orientations pour la réalisation de ce mémoire.

Je remercie également les membres du jury, Messieurs :

M K. ZIDANI r, Professeur à l'Université de Batna, d'avoir accepté de présider ce jury.

Mr T.OUTTAS, Professeur à l'Université de Batna, qui a accepté d'examiner ce travail et tout particulièrement, Mr H.DJEBAILLI, Professeur a l'Université de Khenchela pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et l'examen de cette mémoire

Je remercie aussi l'ensemble des enseignants qui sont contribué à ma formation ainsi que mes amis, mes collègues qui m'ont encouragé.

Je souhaite finalement remercier tous ceux qui m'ont apportés leur soutien.

Table des matières

Chapitre 3 : Résolution du problème de contact couche transverse isotrope –poinçon cylindrique

Chapitre 4: Résolution du problème de contact couche transverse isotrope –poinçon annulaire rigide

Chapitre 5 : Calcul numériques et résultats graphique

Introduction :

Le contact est le problème centrale de la mécanique des solides, par ce que la zone de contact est l'endroit principal ou se concentre les efforts sur un corps déformable et représente le point le plus critique dans le corps.

Au cours de ces dernières années, comme exemple l'industrie du transport a connue un essor et un développement important, sachant qu'un progrès énorme a été réalisé dans le domaine du transport ferroviaire ainsi que dans le domaine de l'automobile qui peut atteindre et même dépasser certaines vitesses considérables ou la fiabilité des freins est impérative afin de diminuer le risque et d'augmenter la sécurité.

Le présent travail s'inscrit dans le cadre de la formulation semi analytique des problèmes aux limites pour les matériaux transversalement isotropes. La motivation principale est de chercher le meilleur compromis efficacité-cout pour les méthodes de calcul correspondantes. Ce compromis peut être pensé au stade de la formulation de façon à définir les outils mathématiques puissants capables de tenir compte du maximum d'informations entourant l'environnement du problème posé.

Nous traitons alors dans ce présent travail le problème de contact de poinçon cylindrique annulaire et une couche élastique transversalement isotrope colée sur un substrat également rigide. Il a été nécessaire, afin de déterminer la répartition des contraintes à l'interface du contact qui est bien le but, de conduire la démarche selon les étapes suivantes :

Chapitre 1 : Ce chapitre présente une étude théorique fondée sur les travaux de recherche (précédents et récents) dans le domaine du contact qui intéresse notre travail. Plusieurs models de calcul que les chercheurs ont utilisés ainsi que les hypothèses et les difficultés rencontrées ont été présentées.

Chapitre 2 : Ici, nous faisant appel à la théorie de l'élasticité (structure à symétrie axiale) des corps isotrope et anisotrope présentées dans [1] pour formuler les équations générales des contraintes élastiques à utilisé dans la résolution aux limites.

Chapitre 3 : Nous résolvons dans un premier temps le problème statique d'impression de poinçon cylindrique à extrémités plates sur une couche épaisse transversalement isotrope. Nous déterminons alors la variation de la contrainte normale à l'interface poinçon-couche élastique. Nous utilisons pour cela une méthode semi analytique basée sur la transformation de Hankel[2].

Chapitre 4 : On applique directement les équations fondamentales aux conditions aux limites du problème. Nous formulons le système d'équations intégrales qui gouverne le problème que nous résolvons ensuit pour déterminer les contraintes a l'interface.

Chapitre 5 : Dans ce chapitre sont regroupés les résultats graphiques relatifs aux formules closes des contraintes trouvés dans les chapitres précédents. Des interprétations et discussions de ces courbes sont également données.

Chapitre 1

Recherche bibliographie

1.1 Historique

Le problème de contact le plus connu dans la théorie classique de l'élasticité (problème de Boussinesq) est celui de la détermination de l'état de contraintes dans un demi- espace élastique lorsque le plan limite du corps élastique est déformé par la pression d'un corps parfaitement rigide. On suppose alors qu'aux points du corps élastique éloignés du poinçon rigide, chacune des composantes du tenseur de contraintes tend vers zéro. Il a été nécessaire de formuler l'hypothèse de la disparition de la contrainte de cisaillement en tout point du bord. On formule également l'hypothèse que la perturbation de la configuration d'équilibre est assez réduite pour que les conditions aux limites sur la surface libre soient remplacées par des conditions correspondantes sur la limite plane non déformée.

- On dispose principalement de quatre méthodes de résolution de problèmes de contact :

1 - les méthodes des variables complexes,

2 - les méthodes de transformations intégrales,

3 – les méthodes variationnelles et des différences finis,

4 - les méthodes numériques, (éléments finis).

L'utilisation de la méthode des variables complexes peut mener à la solution d'une intégrale singulière dont la solution numérique est dérivée par la méthode d'Erdogan et Gupta [3].

L'utilisation d'une transformation intégrale peut amener la solution numérique d'une intégrale de Fredholm de la deuxième espèce.

Muskhelishvili [4] est le premier qui a développé les méthodes des variables complexes pour les solutions des problèmes aux limites en élasticité plane. Son ouvrage trace l'histoire de ses travaux de pionnier. England [5] fait un exposé clair et élémentaire de l'utilisation de ces méthodes en élasticité plane. Brilla [6] étudie de façon détaillée la théorie plane des corps anisotropes.

Harding et Sneddon [7] semblent être les premiers à utiliser les transformations Intégrales pour résoudre les problèmes mixtes de valeurs aux limites en élasticité. Ils utilisent la théorie des transformations intégrales de Hankel pour réduire le problème de Boussinèsq pour un poinçon en forme d'un solide de révolution, à celui de la résolution d'une paire d'équations intégrale doubles. L'intérêt pour les équations de ce type avait été ranimé par E.C.Titchmarsh dans la publication de son ouvrage (introduction to the theory of Fourier integrals).Beaucoup d'autres ouvrages décrivent de façon détaillée les méthodes des transformations intégrales et leurs applications aux problèmes de contact [8, 9,10].

Kupradze [12] a amélioré une méthode d'équations intégrales plus appropriée à la solution des problèmes tridimensionnels. La méthode des transformations intégrales prend ses origines dans le traité classique de Boussinesq [13] qui d'ailleurs reste digne d'intérêt et d'étude.

En parallèle avec l'évolution de ces méthodes mathématiques d'autres chercheurs effectuent des travaux numériques qui deviennent au cours du temps surtout avec le développement

remarquable des moyens de calcul des plus sollicités , parlant des méthodes des différences finis et celle d'éléments finis. Plusieurs monographies ont apportés des éclaircissements aux problèmes de contact, citons l'imminente publication de la monographie de Gladwell [14] vaste est complète constituant une mise à jour dans le domaine. Il faut noter aussi le livre de Vorovich [15], les synthèses de Lubkin [16] et de Abramyan [17]. Ce dernier complète l'ouvrage de Galin [18] faisant synthèse des travaux d'après –guerre.

Après avoir mis un œil sur les travaux antérieurs servant toujours de bases aux travaux récents, nous allons essayer d'étudier essentiellement les travaux dans le domaine de l'utilisation des transformations intégrales, et également ceux couvrant les méthodes des équations intégrales.

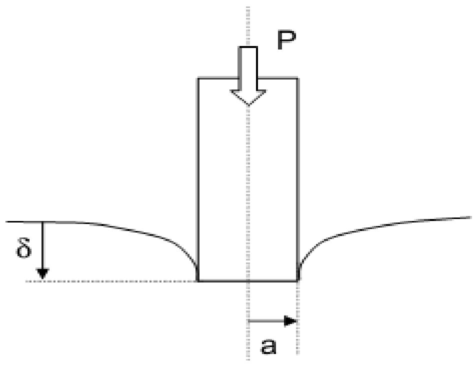

Figure. 1.2 Problème de contacte de Boussinesq (poinçon rigide plan)

1.1 Problème du poinçon annulaire rigide :

Le problème de la détermination de la répartition des contraintes dans un solide élastique semi-infini quand un corps rigide de forme prescrite est pressée contre sa surface libre est associée au nom de Boussinesq depuis qu'il a été examiné en détail dans son traité classique (Boussinesq 1885) . Depuis lors, de nombreux travaux de recherche ont été publiés sur ce problème. Un compte rendu détaillé peut être trouvé dans Sneddon [9] andGreen [19].

Harding et Sneddon [8] furent les premiers à étudier le problème de la symétrie axiale et ont fait une comparaison entre les contraintes provoquées par le poinçon et contraintes induites par les effets thermiques. En utilisant une technique différente, Keer et Fu [20] ont déterminé la distribution des contraintes dues à la charge combinée de coups de poinçon rigide non symétriques circulaires comprimant une plaque élastique épais dont la Face inférieure est collée à un support plat également rigide.

En Shibuya [21] une nouvelle méthode a été conçue pour déterminer la répartition des contraintes dans un demi-espace élastique en retrait par un poinçon annulaire rigide et une plaque élastique épaisse. La méthode de Shibuya [21] réduit les équations triples intégrales résultant en raison des trois conditions aux limites sur la surface de contact dans un ensemble d'équations linéaires. Ces équations peuvent être résolues numériquement.

1.1.2 Trois équations intégrales

Soit le système d’équations intégrales triple :

$$\int_0^\infty A(\lambda) J_n(\lambda x)\, d\lambda = f(x) \qquad (0 < x < a)$$

$$\int_0^\infty \lambda^{2\alpha} A(\lambda) J_n(\lambda x)\, d\lambda = g(x) \qquad (a < x < b)$$

$$\int_0^\infty A(\lambda) J_n(\lambda x)\, d\lambda = h(x) \qquad (x > b)$$

Où f, g et h sont des fonctions connues. $A(\lambda)$ est généralement la fonction a déterminer, se type de formulation est celui qu’on rencontre dans des problèmes potentiels avec des conditions aux limites prises sur un disque annulaire. Si ces conditions sont axialement symétriques, la valeur de n est égale a zéro.

La première tentative de solution semble avoir été donnée par Tranter [22], qui réduit le problème à une paire de double série de polynômes de Jacobi, et il était en mesure de compléter la solution de ce problème que dans le cas $n = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$. L'application évidente dans le cas n = 0 est un disque annulaire, ou un poinçon annulaire sur une surface plane et la première solution de ce problème est dû à Muskhelishvili [23] même s'ils n'ont pas utilisé la formulation de l'équation intégrale triple. Des résultats numériques pour la capacité du disque annulaire ont été donnés par Smythe [24] qui les a obtenus par des méthodes approximatives. Collins [25] a également donné la solution de ce problème obtenu comme limite d'une bague annulaire sphérique que le rayon tend vers l'infini. Cooke [26] et Williams [27] ont généralisé de façon indépendante les équations pour un n général, pour $\alpha = \frac{-1}{2h}$ ils aboutissent au même résultat. Cooke a appliqué sa méthode pour le disque annulaire et a été d'accord avec les résultats de Smythe [24]. Cooke a également donné une solution pour $\alpha = \frac{1}{2}$. Noble [28] a également résolu le problème pour $\alpha = \frac{-1}{2}$ par une méthode différente.

Les résultats de Cooke et Williams n'étaient peut-être pas dans la forme la plus utile. Car les équations intégrales constatées n'admettent pas les itérations pour les petites a / b et qu'elles ne se réduisent pas à celles de Gubenko et Mossakowski pour $n = 0$. Williams [27] a donné une autre solution pour $\alpha = \frac{-1}{2}$, cette solution correspond parfaitement aux précédents.

Chapitre II

Théorie générale de l'élasticité

2 .1 Théorie générale d'élasticité

La théorie de l'élasticité repose donc sur la détermination de l'état de contrainte ou déformation à l'intérieur d'un corps solide soumis à des forces de volume et/ou à des forces de surface. La détermination de cet état revenait généralement à la recherche de certaines fonctions représentants les composantes de déplacements. Ces fonctions doivent satisfaire les équations différentielles d'équilibre en tout point du corps et aussi satisfaire les conditions aux limites de ce corps [19].

Ce problème qui vient d'être formulé est connu comme le problème direct de la théorie d'élasticité. D'après les forces agissantes sur la surface limite du corps on trouve les composantes des contraintes (ou de la déformation) en tout point du corps et les déplacements des points limites.

On rencontre également le problème inverse (indirect). Ou on se donne les déplacements de la surface limite et on cherche les forces de surface pour une telle déformation de la surface limite, ainsi que les contraintes qui apparaissant à l'intérieure du corps. On peut avoir le problème mixte c'est-à-dire qui on se donne partiellement les déplacements de la surfaces limite et les forces de surface.

Il faut donc déterminer les composantes de contraintes satisfaisant les équations différentielles d'équilibre, les composantes de déformation satisfaisant les conditions de compatibilité et les composantes de déplacement satisfaisant les conditions aux limites. Tout cela est évidement très complexes du point de vue mathématique.

2.1.1 : Équations de la statique : (équations de Navier)

les équations différentielles d'équilibre local sont **:**

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\, \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\, \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0$$

σ_{ij} : Contraintes locale

F_x, F_y et F_z : Forces de volume

2. 1.2 : Équations géométriques :(équations de Cauchy)

partant de l'hypothèse de la petite déformation les expressions finales des extensions et des distorsions :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \qquad (2.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

u, v et w : déplacements

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ et ε_z : extension $\qquad \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$ et γ_{zx} : distorsions.

2. 1.3 : Équations de la physique :(équations de Lamé)

$$\sigma_x = \lambda \varepsilon_v + 2\mu\varepsilon_x \qquad \tau_{xy} = \mu\, \gamma_{xy}$$

$$\sigma_x = \lambda \varepsilon_v + 2\mu\varepsilon_y \qquad \tau_{yz} = \mu\, \gamma_{xy} \qquad (2.3)$$

$$\sigma_x = \lambda \varepsilon_v + 2\mu\varepsilon_z \qquad \tau_{zx} = \mu\, \gamma_{zx}$$

λ , μ : Constantes de Lamé

ε_v : La dilatation cubique

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

2.1.4 Équations d'élasticités en coordonnées polaires

Il est commode d'utiliser les coordonnées polaires pour le traitement de problèmes de forme curviligne ,(anneaux, disques, cylindres,…..), ainsi que pour la structures à symétrie axiale.

En coordonnées polaires la position d'un point est définie par :

$$x = r\cos\theta \qquad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\theta \qquad ; \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

2.1.4.1 Équations d'équilibre local

Les équations d'équilibres en coordonnées cylindriques dans le cas tridimensionnel s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0 \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\tau_{rz} = 0$$

2.1.4.2 les expressions finales des déformations et des distorsions :

Ce sont des relations géométriques en coordonnées polaires qui s'écrivent

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \qquad (2.5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$$

2.1.4.3 les relations des contraintes-déformations:

Ce sont des Équations de la physique en coordonnées polaires qui s'écrivent :

$$\sigma_r = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_r \qquad \tau_{r\theta} = \mu\,\gamma_{r\theta}$$

$$\sigma_\theta = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_\theta \qquad \tau_{rz} = \mu\,\gamma_{rz} \qquad (2.6)$$

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z \qquad \tau_{\theta z} = \mu\,\gamma_{\theta z}$$

2.1.5 : Relations d'Elasticité axisymétrique :

Pour les structures à symétrie axiale, les composantes des contraintes sont indépendantes de l'angle de symétrie θ. Ainsi pour la même raison les composantes ($\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{z\theta}$, $\tau_{r\theta}$ et $\tau_{z\theta}$) sont nulles et toutes les dérivées par rapport à θ disparaissent des équations d'équilibres.

$$\tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0$$

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{z\theta} = 0$$

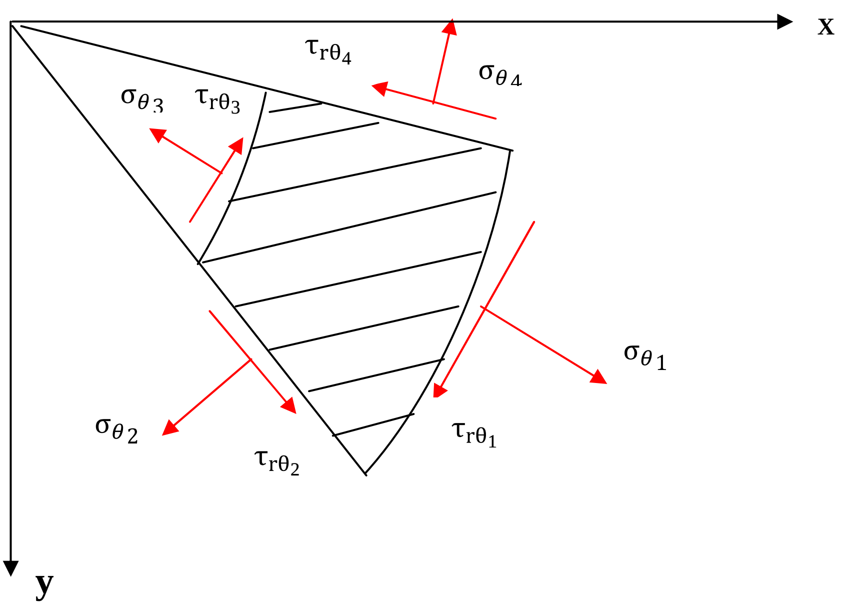

Figure1 : éléments infiniment petit en coordonné cylindrique.

Dans ce cas de la symétrie axiale nous avons deux équations d'équilibre.

$$\frac{\partial\ \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\ (\ \sigma_r - \ \sigma_\theta) = 0$$

$$\frac{\partial\ \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\ \tau_{rz} = 0 \qquad (2.7)$$

2.1.5.1: Relation contraintes-déformations en symétrie axiale :

Les équations de physiques se réduisent à :

$$\sigma_r = 2\mu\ \varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z)\ ;$$

$$\sigma_\theta = 2\mu\ \varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z); \qquad (2.8)$$

$$\sigma_z = 2\mu\ \varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z)\ ;$$

$$\tau_{rz} = \mu\ \gamma_{rz}$$

2.1.5.2: Les expressions des déformations:

Les relations géométriques se réduisent aussi à :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r} \quad , \varepsilon_\theta = \frac{U_r}{r} \quad , \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad , \gamma_{rz} = \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \qquad (2.9)$$

2.1.5.3: Expressions des contraintes par les déplacements :

En substituant les déformations par les déplacements (2.8) dans il résulte les expressions des contraintes par les déplacements

$$\sigma_r = 2\mu \frac{\partial U_r}{\partial r} + \lambda\left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right) = (\ 2\mu + \ \lambda\ ) \frac{\partial U_r}{\partial r} + \lambda \frac{U_r}{r} + \lambda \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

$$\sigma_\theta = 2\mu \frac{U_r}{r} + \lambda\left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right) = \lambda \frac{\partial U_r}{\partial r} + (\ 2\mu + \ \lambda\ ) \frac{U_r}{r} + \lambda \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

$$\sigma_z = 2\mu \frac{\partial U_r}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right) = \lambda \frac{\partial U_r}{\partial r} + \lambda\ \frac{U_r}{r} + (\ 2\mu + \ \lambda\ ) \frac{\partial U_z}{\partial z} \qquad (2.10)$$

$$\tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r}\right)$$

Sur la base des travaux [35] pour l'obtention de la solution générale (cas de la symétrie axiale) on introduit la fonction d'Airy de contraintes φ (r, z) définie par les relations :

$$U_z = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} . \nabla^2 \varphi - \frac{\lambda + \mu}{\mu} . \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$U_r = \frac{\lambda + \mu}{\mu} . \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} \tag{2.11}$$

Après substitutions de (2.11) dans (2.10), on obtient les équations suivantes :

$$\sigma_r = \lambda \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - 2 (\lambda + \mu) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial r^2}$$

$$\sigma_z = (3\lambda + 4\mu) \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - 2 (\lambda + \mu) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} \tag{2.12}$$

$$\sigma_\theta = \lambda \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - 2 \left(\frac{\lambda + \mu}{r} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}$$

$$\tau_{rz} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - 2 (\lambda + \mu) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r \partial z^2}$$

Remplaçons (2.12) dans (2.7) nous obtenons l'équation bi harmonique gouvernant le présent problème d'élasticité en symétrie axiale, soit.

$$\nabla^4 \varphi = 0 \tag{2.13}$$

Ou :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

2.2: Solution générale du problème d'élasticité axisymétrique (cas de matériau homogène isotrope) :

Soit $\overline{\varphi}$ (ξ, z) la transformée de Hankel d'ordre zéro de la fonction φ (r, z) ;

On écrit :

$$\overline{\varphi}(\xi, z) = \int_0^\infty r \varphi(r, z) J_0(\xi, r) dr \tag{2.14}$$

J_0: Étant la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro

La fonction $\varphi(r,z)$ s'exprime par la transformée inverse de(2.14) de la manière suivante. :

$$\varphi(\mathrm{r},\mathrm{z}) = \int_0^\infty \xi\overline{\varphi}(\xi,z)(\,\xi\mathrm{r})\mathrm{d}\xi\mathrm{J}_0$$

Soient les dérivées partielles de $\varphi(\mathrm{r},\mathrm{z})$

$$\frac{\partial\varphi(r,z)}{\partial r} = \int_0^\infty \xi\overline{\varphi}(\xi,z)\frac{\partial J_1(\xi r)}{\partial r}d\xi \quad = -\int_0^\infty \xi^2\,\overline{\varphi}(\xi,z)\mathrm{J}_1\,(\xi r)\,d\xi \tag{2.15}$$

Sachant que

$$\frac{\partial^2\varphi(r,z)}{\partial r^2} = -\int_0^\infty \xi^2\,\varphi(\xi,\boldsymbol{z})\frac{\partial\mathrm{J}_\mathbf{1}(\xi r)}{\partial r}d\xi = \int_0^\infty \xi\,[-\xi^2\mathrm{J}_0(\xi r)+\frac{\xi}{\Gamma}\mathrm{J}_1(\xi r)]\varphi(\xi,z)d\xi$$

$$\frac{\partial^2\varphi(r,z)}{\partial z^2} = \int_0^\infty \xi\frac{\partial^2\overline{\varphi}(\xi,z)}{\partial z^2}\;\mathrm{J}_0\,(\xi r)d\xi$$

Remplaçons ces dérivées dans l'équation d'élasticité (2.13):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \int_0^\infty \xi\,\overline{\varphi}(\xi,z)[-\xi^2\mathrm{J}_0(\xi r)+\frac{\xi}{r}\mathrm{J}_\mathbf{1}(\xi r)-\frac{1}{r}\;\xi\mathrm{J}_1(\xi r)\;]d\xi$$

$$= -\int_0^\infty \xi^3\,\overline{\varphi}(\xi,z).\,\mathrm{J}_0(\xi r)d\xi$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \int_0^\infty \xi\mathrm{J}_0(\xi r)\left[\frac{d^2\overline{\varphi}(\xi,z)}{dz^2}-\xi^2\overline{\varphi}(\xi,z)\right]d\xi\;=0$$

On obtient après avoir substituer les dérivées partielles de la fonction de contraintes $\varphi(\xi,z)$ dans (2.4) l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\frac{d^2\overline{\varphi}(\xi,z)}{dz^2}-\xi^2\overline{\varphi}(\xi,z)=0 \tag{2.16}$$

La solution générale correspondante est :

$$\overline{\varphi}(\xi,z) \;=\; [\mathrm{B}_1(\xi)+\mathrm{B}_2(\xi)\mathrm{z}]e^{-\xi z}+[\mathrm{B}_3(\xi)+\mathrm{B}_4(\xi)\mathrm{z}]e^{\xi z}$$

Les fonctions $B_1(\xi), B_2(\xi), B_3(\xi)$ et $B_4(\xi)$ sont les fonctions d'intégrations à définir par les conditions aux limites.

Remplaçons $\overline{\varphi}(\xi, z)$par son expression dans celle de $\varphi(r, z)$, nous obtenons la fonction générale de contrainte définie par l'expression :

$$\varphi\,(r, z) = \int_0^\infty \xi\{[B_1(\xi) + B_2(\xi)z]e^{-\xi z} + [B_3(\xi) + B_4(\xi)z]e^{\xi z}\}J_0(\xi r)d\xi \qquad (2.17)$$

2.2.1 : Les expressions générale des contraintes et déplacements :

Les formes générales des expressions des contraintes et déplacements sont obtenues par substitution de (2.17) dans (2.11) puis dans (2.12).

$$U_r = \frac{1}{b_1}\int_0^\infty \xi^2\{[-\xi\, B_1(\xi) + (1 - \xi z)B_2(\xi)]\, e^{-\xi z} + [\xi B_3(\xi) + (1 + \xi z)B_4(\xi)]e^{\xi z}\}J_1(\xi r)d\xi$$

$$U_z = -\int_0^\infty \xi^2\{[\frac{1}{b_1}\xi\, B_1(\xi) + (2 + \frac{1}{b_1}\xi z)B_2(\xi)]\, e^{-\xi z} + [\frac{1}{b_1}\xi B_3(\xi) - (2 - \frac{1}{b_1}\xi z)B_4(\xi)]e^{\xi z}\}J_{\mathbf{0}}(\xi r)d\xi$$

$$\sigma_z = \sigma_z = 2b_3\int_0^\infty \xi^3\{[\xi\, B_1(\xi) + (b_1 + \xi z)B_2(\xi)]\, e^{-\xi z} - [\xi B_3(\xi) - (b_1 - \xi z)B_4(\xi)]e^{\xi z}\}J_0(\xi r)d\xi$$

(2.18)

$$\tau_{rz} = 2b_3\int_0^\infty \xi^3\{[\xi\, B_1(\xi) - (b_2 - \xi z)B_2(\xi)]\, e^{-\xi z} + [\xi B_3(\xi) + (b_2 + \xi z)B_4(\xi)]e^{\xi z}\}J_1(\xi r)d\xi$$

Où B_i (i=1, 2, 3,4) fonctions inconnues

$$b_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad b_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad , \quad b_4 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}$$

$$\lambda = \frac{\nu \boldsymbol{E}}{(1 + \nu)(\mathbf{1} - \mathbf{2}\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

2.3 : Solution générale du problème d'élasticité (cas de matériau transverse-isotrope) :

Les composantes du tenseur de contraintes s'expriment par l'intermédiaire des composantes du vecteur de déplacement [34,36] :

$$\sigma_r = \left[A_{11}\frac{\partial}{\partial r} + (A_{11} - 2A_{66})\frac{1}{r}\right]U_r + A_{13}\frac{\partial U_z}{\partial z};$$

$$\sigma_z = A_{13}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)U_r + A_{33}\frac{\partial U_z}{\partial z};$$

$$\sigma_\theta = (A_{11} - 2A_{66})\frac{\partial U_r}{\partial r} + A_{11}\frac{U_r}{r} + A_{33}\frac{\partial U_z}{\partial z}; \tag{2.19}$$

$$\tau_{rz} = A_{44}\left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r}\right).$$

Ou les A_{ij} sont les constantes d'élasticité du matériau [2,3].

La fonction de contraintes $\varphi(r,z)$ est introduite sous la forme :

$$U_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \quad ; U_z = K\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Ou K est une constante quelconque.

Substituons les relations (2.19) dans les équations d'équilibre locales (problème d'élasticité axisymétrique) et tenant compte de (2.11) et (2.12) nous déduisons les équations différentielles suivantes :

$$A_{11}\nabla_1^2\phi + [A_{44} + k(A_{13} + A_{44})]\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$[A_{13} + (1 + k)A_{44}]\nabla_1^2\varphi + kA_{13}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

Egalisons ces deux dernières expressions, on obtient :

$$\nabla_1^2 + v_1^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi_i = 0 \;\; ; \quad (i = 1,2) \tag{2.20}$$

Avec :

$$\frac{A_{44} + k_i(A_{13} + A_{44})}{A_{11}} = \frac{k_i A_{33}}{A_{13} + (1 + K)A_{44}} = v_i^2 \tag{2.21}$$

Et :

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{2.22}$$

Les paramètres γ_i^2 sont les racines de l'équation suivante obtenue à partir des équations (2.13) par élimination de la constante $k_i \;\; , i = 1{,}2$.

$$A_{11}A_{44}\,\gamma_i^4 + [A_{13}(A_{13} + 2A_{44}) - A_{11}A_{44}]\gamma_i^2 + A_{44}A_{33} = 0 \tag{2.23}$$

$k_i \;\; , i = 1{,}2$: Valeurs de la constante (k), définie de l'égalité (2.13) respectivement pour $\gamma_i \;\; , i = 1{,}2$.

Pour la solution des équations (2.12), concernant les domaines de grandes d'étendues, il convient d'utiliser la transformation de Hankel d'ordre zéro des fonctions de contraintes $\varphi_i(r,z)$, soit :

$$\overline{\varphi_i}(\xi,z) = \int_0^\infty r\varphi_i(r,z)J_0(\xi r)dr$$

En intégrant les équations différentielles (2.12) conformément aux transformations inverses de Hankel (2.9) des fonctions $\varphi_i(r,z)$.

$$\varphi_i(r,z) = \int_0^\infty \xi\overline{\varphi_i}\,(\xi,z)J_0(\xi r)d\xi \tag{2.24}$$

J_0 : étant la fonction de Besse d'ordre zéro.

On déduit les solutions générales a partir des ces équations différentielles ordinaires suivantes.

$$\frac{\partial^2\overline{\varphi}_i(\xi,z)}{\partial z^2} - \frac{\xi^2}{(\gamma_i^2)^2}\,\overline{\varphi}_i(\xi,z) = 0$$

Soient :

$$\overline{\varphi}_i(\xi,z) = B_{i1}(\xi)e^{\frac{-\xi z}{\gamma_i}} + B_{i2}(\xi)e^{\frac{\xi z}{\gamma_i}} \tag{2.25}$$

$B_{i1}(\xi)$ et $B_{i2}(\xi)$sont des fonctions inconnues d'intégrations a déterminer par les conditions aux limites.

2.3.1: Expressions générales des contraintes et déplacements

Ayant trouvé les fonctions $\overline{\varphi}_i(\xi, z)$, remplaçons leurs expressions dans ceux des déplacements (2.11) puis dans ceux des contraintes (2.12), ce qui donne :

$$U_r = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{et} \quad U_z = \frac{\partial}{\partial z}(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2)$$

$$U_r = -\int_0^\infty \xi^2[S_1(\xi z) + S_2(\xi, z)]J_1(\xi r)d\xi$$

$$U_z = \int_0^\infty \xi^2\left[\frac{k_1}{\gamma_1}S_3(\xi, z) + \frac{k_2}{\gamma_2}S_4(\xi, z)\right]J_0(\xi r)d\xi$$

$$\sigma_z = \int_0^\infty \xi^3\left[\frac{d_1}{\gamma_1^2}S_1(\xi, z) + \frac{d_2}{\gamma_2^2}S_2(\xi, z)\right]J_0(\xi r)d\xi$$

$$\tau_{rz} = -A_{44}\int \xi^3\left[\frac{1+k_1}{\gamma_1}S_3(\xi, z) + \frac{1+k_2}{\gamma_2}S_4(\xi, z)\right]J_1(\xi r)d\xi \tag{2.26}$$

$$\sigma_z = -\int_0^\infty \xi^3\left[\frac{d_3}{\gamma_1^2}S_1(\xi, z) + \frac{d_4}{\gamma_2^2}S_2(\xi, z)\right]J_0(\xi r)d\xi + \frac{2A_{66}}{r}\int_0^\infty \xi^2[S_1(\xi, z) + S_2(\xi, z)]J_1(\xi r)d\xi$$

Avec :

$$S_1(\xi, z) = B_{11}(\xi z)e^{\frac{-\xi z}{\gamma_1}} + B_{12}(\xi z)e^{\frac{\xi z}{\gamma_1}}$$

$$S_2(\xi, z) = B_{21}(\xi z)e^{\frac{-\xi z}{\gamma_2}} + B_{22}(\xi z)e^{\frac{\xi z}{\gamma_2}} \tag{2.27}$$

$$S_3(\xi, z) = -B_{11}(\xi z)e^{\frac{-\xi z}{\gamma_1}} + B_{12}(\xi z)e^{\frac{\xi z}{\gamma_1}}$$

$$S_4(\xi, z) = -B_{21}(\xi z)e^{\frac{-\xi z}{\gamma_2}} + B_{22}(\xi z)e^{\frac{\xi z}{\gamma_2}}$$

$$d_i = k_iA_{33} - \gamma_1^2A_{13}, \qquad (i = 1,2)$$

$$d_3 = -k_1A_{13} + \gamma_1^2A_{11}$$

$$d_4 = -k_2A_{13} + \gamma_2^2A_{11}$$

Nous signalons que dans le cas de l'espace transverse isotrope les modules d'élasticité A_{ij} sont liés aux coefficients de déformations a_{ij}[34,38] selon les rapports suivants :

$$A_{11} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{(a_{11} - a_{12})[a_{33}(a_{11} + a_{12}) - 2a_{13}^2]}$$

$$A_{33} = \frac{a_{11} + a_{12}}{a_{33}(a_{11} + a_{12}) - 2a_{13}^2}$$

$$A_{13} = \frac{a_{13}}{a_{33}(a_{11} + a_{12}) - 2a_{13}^2}$$

$$A_{44} = \frac{1}{a_{44}} \quad , \quad A_{66} = \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \tag{2.28}$$

$$A_{66} = \frac{E}{2(1+\gamma)} = \mu$$

Ici :

$$a_{11} = \frac{1}{E} \ , \quad a_{33} = \frac{1}{E'} \ , \quad a_{13} = \frac{-\delta}{E} \ , a_{13} = \frac{-\delta'}{E}, \quad a_{44} = \frac{1}{\mu'}$$

E, E' : Modules de Young correspondants aux contraintes dans le plan d'isotropie et dans le plan perpendiculaire à celui-ci.

δ', δ : Coefficients de Poisson correspondantes aux contraintes lors de la traction dans le plan d'isotropie et dans le plan perpendiculaire a celui-ci.

μ' : Module de glissement caractérise le glissement des angles entre les directions de plans d'isotrope et les directions perpendiculaires à ces dernières.

Chapitre 3

Résolution du problème de contact couche transverse isotrope –poinçon cylindrique

3.1 Problématique

On se propose d'étudier le problème d'élasticité de la pénétration d'un corps rigide (cylindre), dans un corps élastique transversal isotrope.

La couche d'épaisseur « H » à faces parallèles de matériau isotrope transverse est statiquement comprimée par un cylindre rigide à extrémités plates sur la face supérieure. La face inférieure est collée à un support plat également rigide.

Le problème ainsi posé est axisymétrique et peut être étudié dans le système de coordonnée cylindrique (r, θ, z) coïncidant avec la surface supérieur de la couche et l'axe de symétrie de la structure (Fig.1).

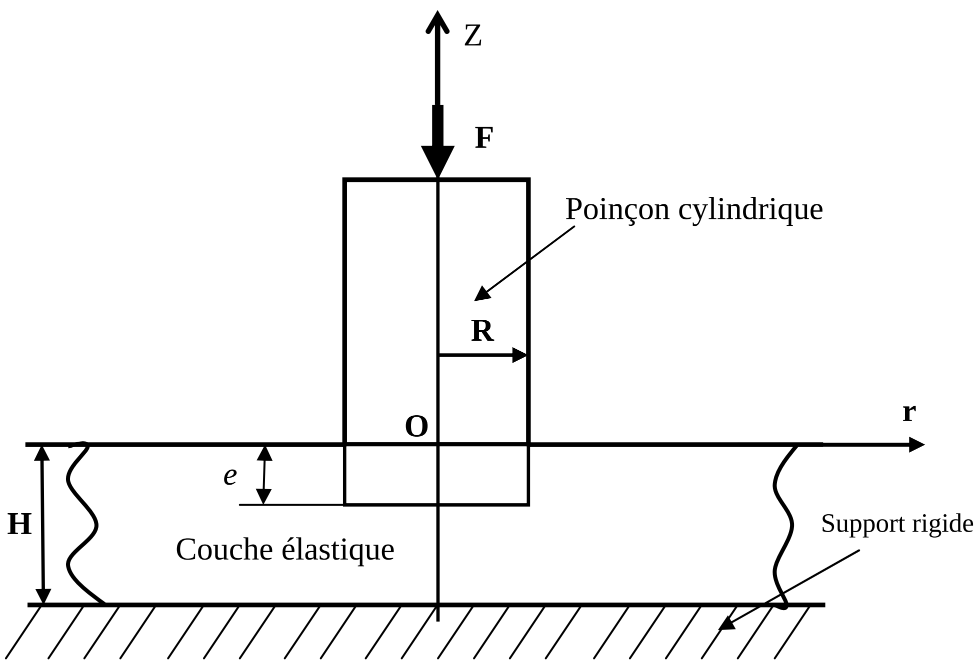

fig.1- croquis schématique du problème

ε: Représenter la profondeur de pénétration du poinçon dans la couche élastique.

H : étant l'épaisseur de la couche élastique

Soient les conditions aux limites suivantes :

$$U_{zz} = -\varepsilon \qquad \zeta = 0 \qquad 0 \le \rho \le 1 \qquad (3-1)$$

$$\tau_{rz} = 0 \qquad \zeta = 0 \qquad 0 \le \rho \le \infty \qquad (3-2)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \qquad \zeta = 0 \qquad 1 \le \rho \le \infty \qquad (3-3)$$

$$\tau_{rz} = 0 \qquad \zeta = -H \qquad 0 \le \rho \le \infty \qquad (3-4)$$

$$U_{zz} = 0 \qquad \zeta = -H \qquad 0 \le \rho \le \infty \qquad (3-5)$$

3.2 Méthode de résolution du problème aux limites

Effectuant le changement de variables

$$F_i(\eta) = \frac{\eta^3}{R^3} B_i\left(\frac{\eta}{R}\right) ; (i = 1{,}4)$$

$$\rho = \frac{r}{R} \;;\; \eta = \xi R \;;\; \zeta = \frac{z}{R}$$

$$d_1 = k_1 A_{33} - v_1^2 A_{33} \;;\; d_2 = k_2 A_{33} - v_2^2 A_{33} \;;\; d_3 = -v_1^2 A_{13} + v_1^2 A_{11} \;; d_4 = -k_2 A_{13} + v_2^2 A_{11}$$

Les formules des contraintes et déplacements élastique prennent les formes suivantes :

$$U_z = \int_0^\infty \eta^{-1} \left\{ \frac{k_1}{v_1} \left[-F_1(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{v_1}} + F_2(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{v_1}} \right] + \frac{k_2}{v_2} \left[-F_3(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{v_2}} + F_4(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{v_2}} \right] \right\} J_0(\eta\rho) d\eta$$

$$\tau_{rz} = -\frac{A_{44}}{R} \int_0^\infty \left\{ \frac{1+k_1}{v_1} \left[-F_1(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{v_1}} + F_2(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{v_1}} \right] + \frac{1+k_2}{v_2} \left[-F_3(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{v_2}} + F_4(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{v_2}} \right] \right\} J_1(\eta\rho) d\eta$$

$$\sigma_z = \frac{1}{R} \int_0^\infty \left\{ \frac{d_1}{{v_1}^2} \left[F_1(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{v_1}} + F_2(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{v_1}} \right] + \frac{d_2}{{v_2}^2} \left[-F_3(\eta) e^{-\frac{\eta\zeta}{v_2}} + F_4(\eta) e^{\frac{\eta\zeta}{v_2}} \right] \right\} J_0(\eta\rho) d\eta \qquad (3-5)$$

Satisfaisons les conditions aux limites et introduisons une nouvelle fonction $\phi(\eta)$ Dans la condition (3-3), nous obtenons le système d'équations algébrique aux inconnues suivantes:

$$\int_0^\infty \eta^{-1}\left\{\frac{k_1}{v_1}\left(-F_1(\eta)+F_2(\eta)\right)+\frac{k_2}{v_2}\left(-F_3(\eta)+F_4(\eta)\right)\right\}J_0(\eta\rho)d\eta=-\varepsilon \qquad (3-6)$$

$$\frac{1+k_1}{v_1}\left(-F_1(\eta)+F_2(\eta)\right)+\frac{1+k_2}{v_2}\left(-F_3(\eta)+F_4(\eta)\right)=0 \qquad (3-7)$$

$$\frac{d_1}{{v_1}^2}\left(F_1(\eta)+F_2(\eta)\right)+\frac{d_2}{{v_2}^2}\left(F_3(\eta)+F_4(\eta)\right)=\eta\phi(\eta)R \qquad (3-8)$$

$$\frac{1+k_1}{v_1}\left(-F_1(\eta)e^{\frac{\eta L}{v_1}}+F_2(\eta)e^{-\frac{\eta L}{v_1}}\right)+\frac{1+k_2}{v_2}\left(-F_3(\eta)e^{\frac{\eta L}{v_2}}+F_4(\eta)e^{-\frac{\eta L}{v_2}}\right)=0 \qquad (3-9)$$

$$\frac{k_1}{v_1}\left(-F_1(\eta)e^{\frac{\eta L}{v_1}}+F_2(\eta)e^{-\frac{\eta L}{v_1}}\right)+\frac{k_2}{v_2}\left(-F_3(\eta)e^{\frac{\eta L}{v_2}}+F_4(\eta)e^{-\frac{\eta L}{v_2}}\right)=0 \qquad (3-10)$$

Résolvons le système d'équations algébriques obtenu $(3-6),(3-7),(3-8),(3-9)$ et $(3-10)$ et exprimons les fonctions $F_i(\eta)(i=1,4)$ par $\phi(\eta)$.

Ecrivons le système d'équations pour les quatre dernières équations $(3-7),(3-8)$, $(3-9)$ et $(3-10)$ Sous forme matricielle.

$$\begin{bmatrix} -\frac{1+k_1}{v_1} & \frac{1+k_1}{v_1} & -\frac{1+k_2}{v_2} & \frac{1+k_2}{v_2} \\ \frac{d_1}{{v_1}^2} & \frac{d_1}{{v_1}^2} & \frac{d_2}{{v_2}^2} & \frac{d_2}{{v_2}^2} \\ -\frac{1+k_1}{v_1}e^{\eta\frac{L}{v_1}} & \frac{1+k_1}{v_1}e^{\eta\frac{L}{v_1}} & -\frac{1+k_2}{v_2}e^{\eta\frac{L}{v_2}} & \frac{1+k_2}{v_2}e^{-\eta\frac{L}{v_2}} \\ -\frac{k_1}{v_1}e^{\eta\frac{L}{v_1}} & \frac{k_1}{v_1}e^{-\eta\frac{L}{v_1}} & -\frac{k_2}{v_2}e^{\eta\frac{L}{v_2}} & \frac{k_2}{v_2}e^{-\eta\frac{L}{v_2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \eta\phi(\eta)R\\0\\0\end{bmatrix} \qquad (3-11)$$

3.3 Résolution de système d'équations linéaire :

La résolution du système d'équations (3-11) par les méthodes classique est assez complexe, Nous, nous en passons de cette manière.

L'équation $(3-7)$ se réécrit sous forme :

$$-F_1+F_2=\frac{1+k_2}{1+k_1}\frac{v_1}{v_2}(F_3-F_4)$$

La première condition (3.1) s'écrira en fonction de $F_3(\eta)$ et $F_4(\eta)$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\eta}\left[\frac{k_1}{v_1}\frac{1+k_2}{1+k_1}\frac{v_1}{v_2}-\frac{k_2}{v_2}\right](F_3-F_4)\,J_0(\eta\rho)d\eta=-\varepsilon \qquad (3-12)$$

La troisième condition prend la forme suivante :

$$\int_0^\infty \eta\phi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=0 \qquad (3-13)$$

Soustrayons (3.9) de (3.10) après avoir multiplié respectivement par k_1 et $(1+k_1)$

$$\left[-(1+k_1)\frac{k_2}{v_2}+(1+k_2)\frac{k_1}{v_2}\right]e^{\frac{\eta L}{v_2}}F_3+\left[(1+k_1)\frac{k_2}{v_2}-(1+k_2)\frac{k_1}{v_2}\right]e^{\frac{-\eta L}{v_2}}F_4=0$$

D'où :

$$F_4=e^{\frac{2\eta L}{v_2}}F_3 \qquad (3-14)$$

De la condition (3-9), on tire après avoir substitué $F_3(\eta)$ et $F_4\,(\eta)$ la relation entre les fonctions $F_1(\eta)$ et $F_2(\eta)$ soit :

$$\frac{-(1+k_1)}{v_1}e^{\eta\frac{L}{v_1}}F_1+\frac{(1+k_1)}{v_1}e^{\eta\frac{-L}{v_1}}F_2+\frac{(1+k_2)}{v_2}(1-1)e^{\eta\frac{L}{v_2}}F_3=0$$

$$F_2=e^{\frac{2\eta L}{v_1}}F_1 \qquad (3-15)$$

Substituons à présent dans les équations (3-7) et (3-8) $F_2(\eta)$ et $F_4(\eta)$ exprimant par $F_1(\eta)$ et $F_3(\eta)$. On obtient deux équations algébrique en $F_1(\eta)$ et $F_3(\eta)$

1/ $$\frac{(1+k_1)}{v_1}\left[e^{2\eta\frac{L}{v_1}}-1\right]F_1+\frac{(1+k_2)}{v_2}\left[e^{2\eta\frac{L}{v_2}}-1\right]F_3=0 \qquad (3-16)$$

2/ $$\frac{d_1}{{v_1}^2}\left[e^{2\eta\frac{L}{v_1}}+1\right]F_1+\frac{d_2}{{v_2}^2}\left[e^{\frac{2\eta L}{v_2}}+1\right]F_3=R\eta\phi(\eta) \qquad (3-17)$$

Nous réduisons alors le système d'équations $(3-11)$ à un système (2×2) à 2 inconnues $F_1(\eta)$ et $F_3(\eta)$:

$$\begin{bmatrix} \frac{(1+k_1)}{v_1}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_1}}-1\right) & \frac{(1+k_2)}{v_2}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_2}}-1\right) \\ \\ \frac{d_1}{{v_1}^2}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_1}}+1\right) & \frac{d_2}{{v_2}^2}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_2}}+1\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ \\ F_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \\ \eta\phi(\eta)R \end{bmatrix} \qquad (3-18)$$

Par cramer, on déterminer les fonctions $F_1(\eta)$ et $F_3(\eta)$ par les rapports :

$$F_1(\eta)=\frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad (3-19)$$

$$F_3(\eta)=\frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad (3-20)$$

Δ : étant le déterminant de la matrice des coefficients des inconnues $F_1(\eta)$ et $F_3(\eta)$, soit :

$$\Delta = det\begin{bmatrix} \frac{(1+k_1)}{v_1}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_1}}-1\right) & \frac{(1+k_2)}{v_2}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_2}}-1\right) \\ \\ \frac{d_1}{{v_1}^2}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_1}}+1\right) & \frac{d_2}{{v_2}^2}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_2}}+1\right) \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \frac{4(1+k_1)}{v_1}\frac{d_2}{{v_2}^2}e^{\eta\frac{L}{v_1}}e^{\eta\frac{L}{v_2}}sinh\eta\frac{L}{v_1}cosh\eta\frac{L}{v_2}-\frac{4(1+k_2)}{v_2}\frac{d_1}{{v_1}^2}e^{\eta\frac{L}{v_1}}e^{\eta\frac{L}{v_2}}sinh\eta\frac{L}{v_2}cosh\eta\frac{L}{v_1}$$

$$\Delta = \frac{4}{v_1v_2}e^{\eta L(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2})}\mathrm{Q}(\eta) \qquad (3-21)$$

Avec : $\mathrm{Q}(\eta)=\frac{(1+k_1)}{v_2}d_2 sinh\eta\frac{L}{v_1}cosh\eta\frac{L}{v_2}-\frac{(1+k_2)}{v_1}d_1 sinh\eta\frac{L}{v_2}cosh\eta\frac{L}{v_1}$

Δ_1 : Est le déterminant de la matrice composée des coefficients de l'inconnue $F_3(\eta)$ et de termes de la colonne droite en remplacement des coefficients de l'inconnue $F_1(\eta)$

$$\Delta_1 = det\begin{bmatrix} 0 & \frac{(1+k_2)}{v_2}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_2}}-1\right) \\ \\ R\eta\phi(\eta) & \frac{d_2}{{v_2}^2}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_1}}+1\right) \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = -\frac{(1+k_2)}{v_2}(e^{2\eta\frac{L}{v_2}}-1)R\eta\phi(\eta)$$

$$\Delta_1 = -\frac{2(1+k_2)}{v_2}e^{\eta\frac{L}{v_2}}sinh\eta\frac{L}{v_2}R\eta\phi(\eta) \qquad (3-22)$$

Δ_2 : Est le déterminant de la matrice composée des coefficients de l'inconnue $F_1(\eta)$ et de termes de la colonne droite en remplacement des coefficients de l'inconnue $F_3(\eta)$

$$\Delta_2 = det\begin{bmatrix} \frac{(1+k_1)}{v_1}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_1}}-1\right) & 0 \\ \\ \frac{d_1}{{v_1}^2}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_1}}+1\right) & R\eta\phi(\eta) \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \frac{(1+k_1)}{v_1}(e^{2\eta\frac{L}{v_1}}-1)R\eta\phi(\eta)$$

$$\Delta_2 = \frac{2(1+k_1)}{v_1}e^{\eta\frac{L}{v_1}}sinh\eta\frac{L}{v_1}R\eta\phi(\eta) \qquad (3-23)$$

Donc :

$$F_1(\eta) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$F_1(\eta) = \frac{-\frac{(1+k_2)}{v_2}(e^{2\eta\frac{L}{v_2}}-1)R\eta\phi(\eta)}{\frac{4}{v_1v_2}e^{\eta L(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2})}\left[\frac{(1+k_1)}{v_2}d_2 sinh\eta\frac{L}{v_1}cosh\eta\frac{L}{v_2}-\frac{(1+k_2)}{v_1}\right]}$$

$$F_1(\eta) = \frac{-\frac{(1+k_2)}{v_1} sinh\eta \frac{L}{v_2} R\eta\phi(\eta)}{2e^{\eta\frac{L}{v_1}}\mathrm{Q}(\eta)} \qquad (3-24)$$

$$F_3(\eta) = \frac{\frac{2(1+k_1)}{v_1} e^{\eta\frac{L}{v_1}} sinh\eta \frac{L}{v_1} R\eta\phi(\eta)}{\frac{4}{v_1 v_2} e^{\eta L(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2})}\left[\frac{(1+k_1)}{v_2} d_2 sinh\eta \frac{L}{v_1} cosh\eta \frac{L}{v_2} - \frac{(1+k_2)}{v_1}\right]}$$

$$F_3(\eta) = \frac{\frac{(1+k_1)}{v_2} sinh\eta \frac{L}{v_1} R\eta\phi(\eta)}{2e^{\eta\frac{L}{v_1}}\mathrm{Q}(\eta)} \qquad (3-25)$$

3.4 Développement du système d'équations intégrales :

La fonction $F_2(\eta)$, étant exprime par la fonction $F_1(\eta)$ $(3-15)$

$$F_2 = e^{\frac{2\eta L}{v_1}} F_1$$

$$F_2 = \frac{-\frac{(1+k_2)}{v_1} e^{\eta\frac{L}{v_2}} sinh\eta \frac{L}{v_2} R\eta\phi(\eta)}{2\mathrm{Q}(\eta)} \qquad (3-26)$$

La fonction $F_4(\eta)$, étant exprime par la fonction $F_3(\eta)$ $(3-14)$

$$F_4 = e^{\frac{2\eta L}{v_2}} F_3$$

$$F_4 = \frac{\frac{(1+k_1)}{v_2} sinh\eta \frac{L}{v_1} R\eta\phi(\eta)}{\mathrm{Q}(\eta)} \qquad (3-27)$$

Le système d'équations $(3-6)$et $(3-8)$ se réduit à deux équations intégrales après avoir introduit les fonctions inconnues $F_3(\eta) et\ F_4(\eta)$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\delta_0}\displaystyle\int_0^\infty \phi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta = \dfrac{-\varepsilon}{R} + \dfrac{1}{\delta_0}\displaystyle\int_0^\infty G(\eta l)\phi(\eta)\,J_0(\eta\rho)d\eta & : \rho < 1 \\ \displaystyle\int_0^\infty \eta\phi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta = 0 & : \rho > 1 \end{cases} \qquad (3-28)$$

Avec :

$$l = \frac{H}{R} \quad ; \quad \delta_0 = \frac{(A_{11}v_2^2 + A_{13})v_2 d_1}{A_{11}(v_1^2 - v_2^2)v_1}$$

$$G(\eta l) = 1 - \frac{sh\dfrac{\eta l}{v_2} sh\dfrac{\eta l}{v_1}}{\dfrac{1}{v_2} ch\dfrac{\eta l}{v_1} sh\dfrac{\eta l}{v_2} - \dfrac{1}{v_1} ch\dfrac{\eta l}{v_2} sh\dfrac{\eta l}{v_1}} \qquad (3-29)$$

Nous proposons la fonction sous la forme [39].

$$\phi(\eta) = \delta_0 \int_0^1 f_0(t)\,cos\eta t\,dt \qquad (3-30)$$

D'après la table d'intégration [41], l'intégral de Weber se résout en :

$$\int_0^\infty J_0\,(\eta\rho)sin\eta d\eta = \begin{cases} 0 & : \rho > t \\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} & : \rho < t \end{cases} \qquad (3-31)$$

La deuxième équation (3.28) est donc satisfaite identiquement, en effet:

$$\int_0^\infty \eta J_0(\eta\rho)d\eta \int_0^1 f_0(t)cos\,\eta t\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad \rho > 1 \\ \dfrac{f_0(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \displaystyle\int_\rho^0 \dfrac{f_0'(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} & : \quad \rho < 1 \end{cases} \qquad (3-32)$$

La première équation (3.28) se ramène à une intégrale d'Abel

$$\int_0^1 f_0(t)dt \int_0^\infty J_0\,(\eta\rho)cos\eta t d\eta = \frac{-\varepsilon}{R} + \int_0^1 f_0(t)dt \int_0^\infty G(\eta l)J_0(\eta\rho)cos\eta t d\eta$$

Posons

$$\int_0^1 f_0(t)dt \int_0^\infty J_0\,(\eta\rho)cos\eta t d\eta = g(\rho)$$

D'après la table d'intégration [40], on écrit ;

$$\int_0^\infty J_0(\eta\rho)cos\eta t d\eta = \begin{cases} 0 & : \quad \rho < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} & : \quad \rho > t \end{cases}$$

D'où l'intégral D'Abell

$$\int_0^\rho \frac{f_0(t)dt}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} = g(\rho) \quad : \quad \rho > t \qquad (3-33)$$

Qui se résout [40]:

$$f_0(t) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\rho g(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} d\rho \qquad (3-34)$$

Avec:

$$g(\rho) = \frac{-\varepsilon}{R} + \frac{1}{\delta_0}\int_0^\infty G(\eta l)\phi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta \qquad (3-35)$$

Substituons (3.35) dans (3.33) et tenons compte de (3.30),

$$f_0(t) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}}\left(\frac{-\varepsilon}{R} + \int_0^1 f_0(t)dt\int_0^\infty G(\eta l)J_0(\eta\rho)cos\eta t d\eta\right) =$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon}{R}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} + \frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}}\int_0^\infty G(\eta l)J_0(\eta\rho)d\eta\int_0^1 f_0(u)cosu\eta du$$

Effectuant le changement de variable pour le calcul de cette intégrale

Soit ;

$$\int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} = -\int_t^0 \frac{zdz}{z} = t$$

D’ou :

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}}\int_0^\infty G(\eta l)\, J_0(\eta\rho)d\eta \int_0^1 f_0(u)cosu\eta du =$$

$$\int_0^1 f_0(u)du\int_0^\infty G(\eta l)cosu\eta d\eta\left[\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\rho J_0(\eta\rho)d\eta}{\sqrt{\rho^2 - t^2}}\right] = \int_0^1 f_0(u)du\int_0^\infty G(\eta l)cosu\eta cos\eta t d\eta$$

D’après [40]

$$\int_0^t \frac{\rho J_0(\eta\rho)d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} = \frac{sin\eta t}{\eta}$$

Nous obtenons après ces transformations l’expression de $f(t)$

$$f_0(t) = -\frac{2\varepsilon}{\pi R} + \frac{2}{\pi}\int_0^1 f_0(x)dx\int_0^\infty G(\eta l)cos\eta x cos\eta t d\eta \qquad 0 \le t \le 1 \qquad (3-36)$$

Les contraintes à la surface de contact $\sigma_z(\rho,0)$, se déterminent par la formule.

$$\sigma_z(\rho,0) = \delta_0\left[\frac{f_0(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_\rho^1 \frac{f_0'(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\right] \qquad (3-37)$$

La charge totale sur le poinçon qui produit la pénétration est donnée par la condition d’équilibre statique:

$$P = -2\pi R^2\int_0^1 \rho\,\sigma_z(\rho)d\rho \qquad (3-38)$$

L’expression (3.37) s’écrit également sous la forme:

$$\sigma_z(\rho,0) = \delta_0 \int_0^1 f_0(t)\, cos\eta t dt \int_0^\infty \eta J_0(\eta\rho) d\,\eta \tag{3 − 39}$$

Portons (3.39) dans (3.35) tenons compte de (3.36) et intégrons par rapport à la variable (t), nous aurons :

$$f_0(t) = \frac{-P}{2\pi R^2 \delta_0}\Psi(t) \tag{3 − 40}$$

Avec :

$$\Psi(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Psi(x)dx \int_0^\infty G\,(\eta L) cos\eta x \left[cos\eta t - \frac{sin\eta}{\eta}\right] d\eta = 1 \tag{3.41}$$

Cette équation s’écrit aussi :

$$\Psi(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \Psi(x)dxK(x,t)dx = 1 \tag{3.42}$$

Avec :

$$K(x,t) = \int_0^\infty G\,(\eta L) cos\eta x \left[cos\eta t - \frac{sin\eta}{\eta}\right] d\eta$$

L’approximation de $\Psi(t)$ par un polynôme, nous facilite le calcul de la contrainte $\sigma_z(\rho)$ au contact cylindre-couche :

$$\sigma_z(\rho,0) = -\frac{-P}{2\pi R^2 \delta_0}\sigma_z^*(\rho) \tag{3.43}$$

$$\sigma_z^*(\rho) = \frac{\Psi(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_0^1 \frac{\Psi'(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \tag{3.44}$$

Chapitre 4

Résolution du problème du contact couche transverse isotrope –poinçon annulaire rigide

4.1 Position et formulation de problème

On se propose d'étudier la pression à l'interface du contact poinçon annulaire rigide et la couche élastique.

Le problème statique ainsi posé est axisymétrique et peut être étudié dans le système de coordonnée cylindrique (r, z) coïncidant avec la surface supérieur de la couche et l'axe de symétrie de la structure (Fig.1).

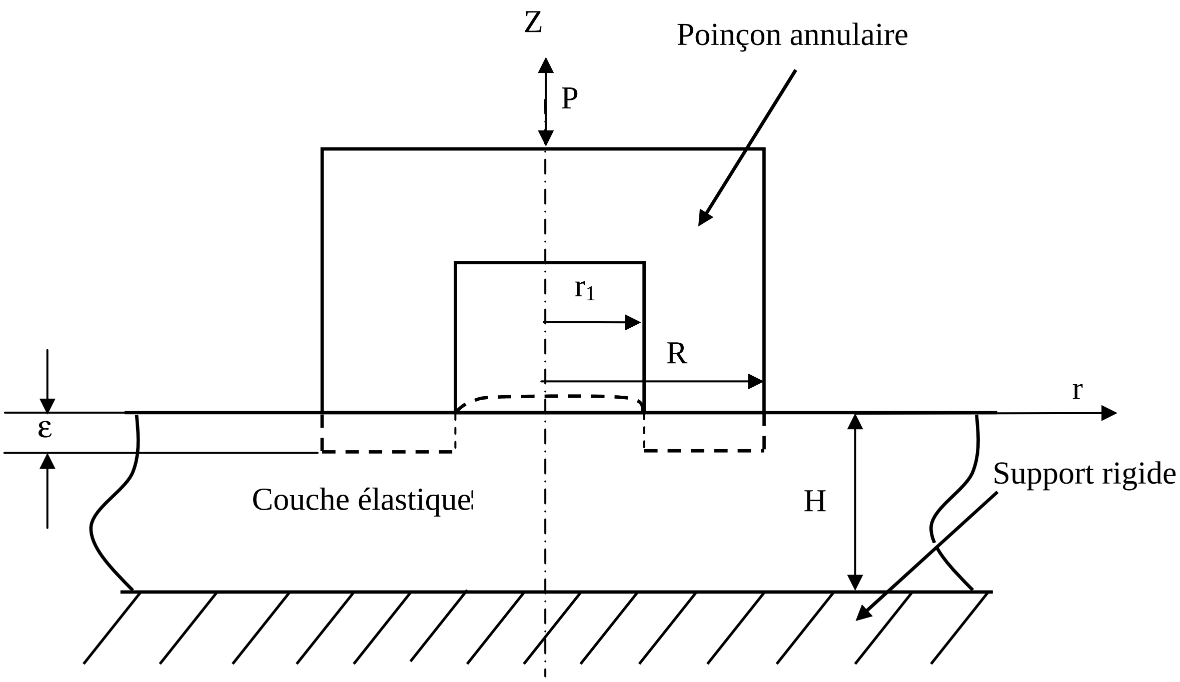

Fig.1 – Croquis schématique du problème

ε : Représentera la profondeur de pénétration du poinçon dans la couche élastique (transverse isotrope)

H : étant l'épaisseur de la couche élastique.

Avec $r_1; R$: les rayons du Poinçon annulaire.

Soient les conditions aux limites suivantes :

$U_{zz} = -\varepsilon \qquad \rho_1 \leq \rho \leq 1 \qquad \zeta = 0 \qquad (4-1)$

$\tau_{rz} = 0 \qquad 0 \leq \rho \leq \infty \qquad \zeta = 0 \qquad (4-2)$

$\sigma_{zz} = 0 \qquad 0 \leq \rho \leq \rho_1 \qquad \zeta = 0 \qquad (4-3)$

$\sigma_{zz} = 0 \qquad 1 \leq \rho \leq \infty \qquad \zeta = 0 \qquad (4-4)$

$\tau_{rz} = 0 \qquad 0 \leq \rho \leq \infty \qquad \zeta = -H \qquad (4-5)$

$U_{zz} = 0 \qquad 0 \leq \rho \leq \infty \qquad \zeta = -H \qquad (4-6)$

4.2 Méthode de résolution aux limites du problème élastique:

Rappelons les formules des contraintes et déplacements(2.27) après avoir introduit le changement de variables suivant:

$$F_i(\eta) = \frac{\eta^3}{R^3} B_i\left(\frac{\eta}{R}\right); (i = 1,2,3,4)$$

$$\rho_1 = \frac{r_1}{R} \;;\; \rho = \frac{r}{R} \;;\; \eta = \xi R \;;\; \zeta = \frac{z}{R}$$

$$U_z = \int_0^\infty \eta^{-1} \left\{ \frac{k_1}{v_1}\left[-F_1(\eta)e^{-\frac{\eta\zeta}{v_1}} + F_2(\eta)e^{\frac{\eta\zeta}{v_1}}\right] + \frac{k_2}{v_2}\left[-F_3(\eta)e^{-\frac{\eta\zeta}{v_2}} + F_4(\eta)e^{\frac{\eta\zeta}{v_2}}\right]\right\} J_0(\eta\rho)d\eta$$

$$\tau_{rz} = -\frac{A_{44}}{R}\int_0^\infty \left\{ \frac{1+k_1}{v_1}\left[-F_1(\eta)e^{-\frac{\eta\zeta}{v_1}} + F_2(\eta)e^{\frac{\eta\zeta}{v_1}}\right] + \frac{1+k_2}{v_2}\left[-F_3(\eta)e^{-\frac{\eta\zeta}{v_2}} + F_4(\eta)e^{\frac{\eta\zeta}{v_2}}\right]\right\} J_1(\eta\rho)d\eta$$

$$\sigma_z = \frac{1}{R}\int_0^\infty \left\{ \frac{d_1}{{v_1}^2}\left[F_1(\eta)e^{-\frac{\eta\zeta}{v_1}} + F_2(\eta)e^{\frac{\eta\zeta}{v_1}}\right] + \frac{d_2}{{v_2}^2}\left[-F_3(\eta)e^{-\frac{\eta\zeta}{v_2}} + F_4(\eta)e^{\frac{\eta\zeta}{v_2}}\right]\right\} J_0(\eta\rho)d\eta$$

Satisfaisons les conditions aux limites et introduisons une nouvelle fonction $\phi(\eta)$ Dans la condition (4-3), nous obtenons le système d'équations intégrales suivantes:

$$\int_0^\infty \eta^{-1}\left\{\frac{k_1}{v_1}(-F_1(\eta)+F_2(\eta))+\frac{k_2}{v_2}(-F_3(\eta)+F_4(\eta))\right\}J_0(\eta\rho)d\eta=-\varepsilon \qquad (4-7)$$

$$-\frac{A_{44}}{R}\int_0^\infty \left\{\frac{1+k_1}{v_1}(-F_1(\eta)+F_2(\eta))+\frac{1+k_2}{v_2}(-F_3(\eta)+F_4(\eta))\right\}J_1(\eta\rho)d\eta=0 \qquad (4-8)$$

$$\frac{1}{R}\int_0^\infty \left\{\frac{d_1}{{v_1}^2}\big(F_1(\eta)+F_2(\eta)\big)+\frac{d_2}{{v_2}^2}\big(-F_3(\eta)+F_4(\eta)\big)\right\}J_0(\eta\rho)d\eta=0 \qquad (4-9)$$

$$\frac{1}{R}\int_0^\infty \left\{\frac{d_1}{{v_1}^2}\big(F_1(\eta)+F_2(\eta)\big)+\frac{d_2}{{v_2}^2}\big(-F_3(\eta)+F_4(\eta)\big)\right\}J_0(\eta\rho)d\eta=R\,\eta\phi(\eta) \qquad (4-10)$$

$$-\frac{A_{44}}{R}\int_0^\infty \left\{\frac{1+k_1}{v_1}\left(-F_1(\eta)e^{\frac{\eta L}{v_1}}+F_2(\eta)e^{-\frac{\eta L}{v_1}}\right)+\frac{1+k_2}{v_2}\left(-F_3(\eta)e^{\frac{\eta L}{v_2}}+F_4(\eta)e^{-\frac{\eta L}{v_2}}\right)\right\}J_1(\eta\rho)d\eta=0$$

$$(4-11)$$

$$\int_0^\infty \eta^{-1}\left\{\frac{k_1}{v_1}\left(-F_1(\eta)e^{\frac{\eta L}{v_1}}+F_2(\eta)e^{-\frac{\eta L}{v_1}}\right)+\frac{k_2}{v_2}\left(-F_3(\eta)e^{\frac{\eta L}{v_2}}+F_4(\eta)e^{-\frac{\eta L}{v_2}}\right)\right\}J_0(\eta\rho)d\eta=0$$

$$(4-12)$$

Considérons la résolution du système d'équations (4-8), (4-10), (4-11), et (4-12)

$$\frac{1+k_1}{v_1}[-F_1(\eta)+F_2(\eta)]+\frac{1+k_2}{v_2}[-F_3(\eta)+F_4(\eta)]=0 \qquad (4-13)$$

$$\frac{d_1}{{v_1}^2}[-F_1(\eta)+F_2(\eta)]+\frac{d_2}{{v_2}^2}[-F_3(\eta)+F_4(\eta)]=R\,\eta\phi(\eta) \qquad (4-14)$$

$$\frac{k_1}{v_1}\left(-F_1(\eta)e^{\frac{\eta L}{v_1}}+F_2(\eta)e^{-\frac{\eta L}{v_1}}\right)+\frac{k_2}{v_2}\left(-F_3(\eta)e^{\frac{\eta L}{v_2}}+F_4(\eta)e^{-\frac{\eta L}{v_2}}=0\right. \qquad (4-15)$$

$$\frac{1+k_1}{v_1}\left[-F_1(\eta)e^{\frac{\eta L}{v_1}}+F_2(\eta)e^{-\frac{\eta L}{v_1}}\right]+\frac{1+k_2}{v_2}\left[-F_3(\eta)e^{\frac{\eta L}{v_2}}+F_4(\eta)e^{-\frac{\eta L}{v_2}}\right]=0 \qquad (4-16)$$

Sous forme matricielle le système précédent s'écrit:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1+k_1}{v_1} & \frac{1+k_1}{v_1} & -\frac{1+k_2}{v_2} & \frac{1+k_2}{v_2} \\ \frac{d_1}{{v_1}^2} & \frac{d_1}{{v_1}^2} & \frac{d_2}{{v_2}^2} & \frac{d_2}{{v_2}^2} \\ -\frac{1+k_1}{v_1}e^{\eta\frac{L}{v_1}} & \frac{1+k_1}{v_1}e^{\eta\frac{L}{v_1}} & -\frac{1+k_2}{v_2}e^{\eta\frac{L}{v_2}} & \frac{1+k_2}{v_2}e^{-\eta\frac{L}{v_2}} \\ -\frac{k_1}{v_1}e^{\eta\frac{L}{v_1}} & \frac{k_1}{v_1}e^{-\eta\frac{L}{v_1}} & -\frac{k_2}{v_2}e^{\eta\frac{L}{v_2}} & \frac{k_2}{v_2}e^{-\eta\frac{L}{v_2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta\phi(\eta)R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(4-17)$$

4.3 Méthodologie de résolution du système d'équation algébrique :

La résolution directe du présent système d'équations par Gauss est assez compliquée. Les expressions analytiques sont longues et le risque d'erreurs est très probable .Afin de contourner ce risque, il est préférable de procéder de la manière suivante.

L'équation (4-8), s'écrit en fonction de $F_3(\eta)$ et $F_4(\eta)$ et prend la forme suivante :

$$-F_1(\eta)+F_2(\eta)=\frac{1+k_2}{1+k_1}\frac{v_1}{v_2}\left(-F_3(\eta)+F_4(\eta)\right) \qquad (4-18)$$

La première condition (4.7) s'écrit en fonction de $F_3(\eta)$ et $F_4(\eta)$ de cette façon ;

$$\frac{k_1-k_2}{v_2(1+k_1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\eta^{-1}[(-F_3(\eta)+F_4(\eta))]J_0(\eta\rho)d\eta=-\varepsilon \qquad \rho<1 \qquad (4-19)$$

Soustrayons l'équation (4-12) de l'équation (4-11) après avoir multiplié respectivement par $(1+k_1)$ et k_1 , on obtient la relation entre $F_3(\eta)$ et $F_4(\eta)$:

$$F_4=e^{\frac{2\eta L}{v_2}}F_3 \qquad (4-20)$$

De la condition (4-11), on tire après avoir substituer $F_3(\eta)$ et $F_4(\eta)$ la relation entre les fonctions $F_1(\eta)$ et $F_2(\eta)$, soit :

$$F_2=e^{\frac{2\eta L}{v_1}}F_1 \qquad (4-21)$$

La première condition (4-1) s'écrira en fonction de $F_3(\eta)$ et $F_4(\eta)$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\eta}\left[\frac{k_1}{v_1}\frac{1+k_2}{1+k_1}\frac{v_1}{v_2}-\frac{k_2}{v_2}\right](F_3-F_4)J_0(\eta\rho)d\eta=-\varepsilon \qquad \rho_1<\rho<1 \qquad (4-22)$$

La troisième condition prend la forme suivante :

$$\int_0^\infty \eta\,\phi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=0 \qquad :\rho<\rho_1 \qquad (4-23)$$

La quatrième condition prend la forme suivante :

$$\int_0^\infty \eta\,\phi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=0 \qquad :\rho>1 \qquad (4-24)$$

Il est donc question de chercher seulement la fonction $F_3(\eta)$ par $\phi(\eta)$ au lieu des quatre fonctions $F_i(\eta)$; pour cela considérons les équations (conditions) (4-8) et (4-10), soient :

$$\begin{bmatrix} \frac{(1+k_1)}{v_1}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_1}}-1\right) & \frac{(1+k_2)}{v_2}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_2}}-1\right) \\ \frac{d_1}{{v_1}^2}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_1}}+1\right) & \frac{d_2}{{v_2}^2}\left(e^{2\eta\frac{L}{v_2}}+1\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \eta\phi(\eta)R \end{bmatrix}$$

Par cramer, on déterminer les fonctions $F_1(\eta)$ et $F_3(\eta)$ par les rapports :

$$F_1(\eta)=\frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$F_3(\eta)=\frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$\Delta=\frac{4(1+k_1)}{v_1v_2}e^{\eta\frac{L}{v_1}}e^{\eta\frac{L}{v_2}}\left[\frac{(1+k_1)}{v_2}d_2 sinh\eta\frac{L}{v_1}cosh\eta\frac{L}{v_2}-\frac{(1+k_2)}{v_1}d_1 sinh\eta\frac{L}{v_2}cosh\eta\frac{L}{v_1}\right]$$

Qui s'écrit aussi

$$\Delta = \frac{4}{v_1 v_2}\frac{d_1 d_2}{v_1 v_2 A_{44}} e^{\eta L\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)} \mathrm{Q}(\eta L) \qquad (4-25)$$

Avec :

$$\mathrm{Q}(\eta L) = \frac{1}{v_1} sinh\eta \frac{L}{v_1} scosh\eta \frac{L}{v_2} - \frac{1}{v_2} sinh\eta \frac{L}{v_2} cosh\eta \frac{L}{v_1}$$

Et :

$$\Delta_1 = -\frac{2(1+k_2)}{v_2} e^{\eta \frac{L}{v_2}} sinh\eta \frac{L}{v_2} R\eta\phi(\eta) \qquad \text{et} \qquad \Delta_2 = \frac{2(1+k_1)}{v_1} e^{\eta \frac{L}{v_1}} sinh\eta \frac{L}{v_1} R\eta\phi(\eta)$$

Introduisons les résultats dans les équations $(4-22), (4-23)$ et $(4-24)$, nous obtenons un système de trois équations intégrales que nous écrivons sous la forme :

$$\int_0^\infty G(\eta L)\,\phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = -\frac{\varepsilon}{R\delta_0} \qquad : \rho_1 < \rho < 1 \qquad (4-26)$$

$$\int_0^\infty \eta\,\phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \qquad : \rho < \rho_1 \qquad (4-27)$$

$$\int_0^\infty \eta\,\phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \qquad : \rho > 1 \qquad (4-28)$$

$$\text{Ou} : \delta_0 = \left[\frac{k_1}{v_1}\frac{1+k_2}{1+k_1}\frac{v_1}{v_2} - \frac{k_2}{v_2}\right]$$

Choisissons comme fonction de contraintes la fonction $f(\rho)$ continue sur l'intervalle $\rho_1 \leq \rho \leq 1$ développable en séries de Fourier :

Soit :

$$f(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n cosn\theta \qquad (4-29)$$

Ou :

$$\begin{cases} f(\rho_1) \neq 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases}$$

a_n : sont les coefficients inconnues de la série.

D'autre part, nous admettons que la contrainte à la surface de contact $\rho_1 \leq \rho \leq 1$ peut être exprimée par [32]:

$$\sigma_z = \frac{-\varepsilon\, f(\rho)}{\sqrt{(1-\rho^2)(\rho^2-{\rho_1}^2}} \qquad : \rho_1 \leq \rho \leq 1 \qquad (4-30)$$

La variable ρ de la fonction $f(\rho)$ peut être remplacée par la variable $0 \leq \theta \leq \pi$ par ce changement de variable suivant :

$$a = \frac{1}{2}(\rho_1 + 1)$$

$$b = \frac{1}{2}(1 - \rho_1)$$

D'ou :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\theta}$$

Et :

$$2absin\theta = \sqrt{(\rho^2-\rho_1^2)(1-\rho^2)} \qquad (4-31)$$

Donc $(4-30)$ peut être décrite par :

$$\sigma_z = -\frac{\varepsilon}{2ab}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n cosn\theta}{sin\theta} \qquad : \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \qquad (4-32)$$

Passons à la résolution des équations intégrales $(4-27)$ et $(4-28)$ ce qui peut s'écrire

$$\int_0^\infty \eta\, \phi(\eta) J_0(\eta\rho)d\eta = -\frac{\varepsilon}{2ab}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n cosn\theta}{sin\theta} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \qquad (4-33)$$

Par la transformation inverse de Hankel, on tire :

$$\phi(\eta) = -\frac{\varepsilon}{2ab}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\rho_1}^{1} J_0(\eta\rho)\frac{cosn\theta}{sin\theta}\rho d\rho \qquad (4-34)$$

Sachant que :

$$\rho^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\theta$$

Alors :

$$\rho d\rho = absin\theta d\theta$$

Donc l'expression $(4-34)$ prend la forme :

$$\phi(\eta) = -\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} J_0(\eta\rho)cosn\theta d\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

Encore l'expression $(4-34)$ s'écrit :

$$\phi(\eta) = -\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} cosn\theta J_0\left(\eta\sqrt{a^2+b^2-2abcos\theta}\right)d\theta \qquad (4-35)$$

D'âpres la table des transformations intégrales '' Erdelyi'' [29]:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} cos\kappa\theta J_0\left(\eta\sqrt{a^2+b^2-2abcos\theta}\right)d\theta = J_k(\eta a)J_k(\eta b)$$

Ce qui écrit $(4-35)$ sous cette représentation :

$$\phi(\eta) = -\frac{1}{2}\pi\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(\eta a)J_n(\eta b) \qquad (4-36)$$

Remplaçons $\phi(\eta)$ dans la condition (4-26) par $(4-36)$

$$\int_0^{\infty} G(\eta l)\left[-\frac{1}{2}\pi\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(\eta a)J_n(\eta b)\right]J_0(\eta\rho)d\eta = -\frac{\varepsilon}{R\delta_0} \qquad (4-37)$$

Autrement :

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\pi R\delta_0 a_n \int_0^{\infty} G(\eta l)J_n(\eta a)J_n(\eta b)J_0(\eta\rho)d\eta \quad : \quad \rho_1 < \rho < 1 \qquad (4-38)$$

Utilisons maintenant l'autre formule de transformation de la fonction de Bessel d'ordre zéro [28] ;

$$J_0(\eta\rho) = J_0(\eta a)J_0(\eta b) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(\eta a)J_m(\eta b)cosm\theta \qquad \rho_1 < \rho < 1 \qquad (4-39)$$

Donc l'expression (4-38) prend sa forme finale :

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\pi R\delta_0 a_n \int_0^{\infty} G(\eta l)\,[J_0(\eta a)J_0(\eta b)J_n(\eta a)J_n(\eta b) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(\eta a)J_m(\rho b) *$$

$$* J_n(\eta a)J_n(\eta b)\ cosm\theta]d\eta \qquad (4-40)$$

Le problème ce réduit alors à la résolution du présent système infini d'équations algébrique pour la détermination des coefficients inconnues de la fonction introduite $(4-29)$. Cette équation vérifié pour une valeur quelconque de $''\theta''$ se réduit a la résolution du système d'équations algébrique suivant aux inconnues$''a_n''$

$$\pi R\delta_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} G(\eta l)J_m(\eta a)J_m(\eta b)J_n(\eta a)J_n(\eta b)d\eta = 1 \qquad (4-41)$$

Qui s'écrit sous forme simplifié

$$\pi R\delta_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n\Omega_{nm} = 1$$

Avec :

$$\Omega_{nm} = \int_0^{\infty} G(\eta l) \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\eta a)J_m(\eta b)\,J_n(\eta a)J_n(\eta b)d\eta$$

4.4 Calcul des coefficients Ω_{nm}

4.4.1 Approximation de l'intégrale impropre

Le calcul des coefficients $''\Omega_{nm}''$ à partir des intégrales impropres contenant quatre fonctions de Bessel pose beaucoup de difficultés. La plus simple des approximations numériques de ce type d'intégrale est basé sur la représentation des expressions Ω_{nm} sous la forme suivante :

$$\Omega_{nm} = \int_0^{\eta_0} G(\eta l)\, J_n(\eta a) J_n(\eta b) J_m(\eta a) J_m(\eta b) d\eta + \int_{\eta_0}^{\infty} G(\eta l) J_n(\rho a)\, J_n(\eta b) J_m(\eta a) J_m(\eta b) d\rho$$

Qui se partage en deux intégrales

$$F_1 = \int_0^{\eta_0} G(\eta l)\, J_n(\eta a) J_n(\eta b) J_m(\eta a) J_m(\eta b) d\eta$$

$$F_2 = \int_{\eta_0}^{\infty} G(\eta l) J_n(\eta a) J_n(\eta b) J_m(\eta a) J_m(\eta b) d\eta$$

Le choix de η_0 est pour la possibilité d'utiliser plus tard l'intégrale symptotique des fonctions de Bessel.

$$J_n(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\eta}} cos\left[\eta - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right] \;, \qquad \text{pour} \qquad \eta \geq \eta_0$$

L'expression symptotique des produits de quatre fonctions de Bessel

$$J_n(\eta a) J_n(\eta b) J_m(\eta a) J_m(\eta b) \approx \left[\frac{1}{(2\pi^2\eta^2\beta)}\right] [1 + (-1)^{n-m} + ((-1)^n + (-1)^m) *$$

$$* \,(sin2\eta + sin2\beta\eta) + cos(2(1-\beta)\eta) - (-1)^{n+m} cos2(1+\beta)\eta] \qquad (4-44)$$

Avec :

$$\beta = \frac{b}{a}$$

Ainsi la deuxième partie de l'intégrale F_2 du calcul des coefficients Ω_{nm} se calcule par la formule approximative suivante :

$$\int_{\eta_0}^{\infty} G(\eta l) J_n(\eta a)\, J_n(\eta b) J_m(\eta a) J_m(\eta b) d\eta = \int_{\eta_0}^{\infty} G(\eta l) \left[\frac{1}{(2\pi^2\eta^2\beta)}\right] [1 + (-1)^{n-m} +$$

$$+((-1)^n + (-1)^m) * (sin2\eta + sin2\beta\eta) + cos(2(1-\beta)\eta) - (-1)^{n+m} cos2(1+\beta)\eta] d\eta$$

4.4.2 Autre approximation de l'intégrale impropre

L'autre possibilité de réduire le calcul de l'intégral Ω_{nm} est comme suite :

Sachent :

$$J_n(\eta a) J_n(\eta b) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} J_0\left(\eta\sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\theta}\right) cosn\theta d\theta$$

Et :

$$J_m(\eta a) J_m(\eta b) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} J_0\left(\eta\sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\varphi}\right) cosm\varphi d\varphi \qquad (4-45)$$

L'expression de Ω_{nm} $(4-43)$prend la forme

$$\Omega_{nm} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} cosn\theta \int_0^{\pi} cosm\varphi \int_0^{\infty} G(\eta l)\, J_0\big(\eta\rho(\theta)\big) J_0\big(\eta\rho(\varphi)\big) d\eta d\theta d\varphi \qquad (4-46)$$

Avec :

$$\rho(\theta) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\theta}$$

$$\rho(\varphi) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\varphi}$$

4.5 Equation d'équilibre statique

La charge totale sur le poinçon qui produit la pénétration est donnée par la condition d'équilibre statique:

$$F = -\int_{r_1}^{R} \sigma_z(\rho)\, ds \; = -2\pi R^2 \int_{r_1}^{R} \sigma_z(\rho)\; \rho d\rho \qquad (4-47)$$

Sachant :

$$\sigma_z = -\frac{\varepsilon}{2ab}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n cosn\theta}{sin\theta}$$

Et :

$$\rho d\rho = absin\theta d\theta$$

L'expression (4-47) prend la forme :

$$F = -\int_{\rho_1}^{1} 2\pi R^2 \left[-\frac{\varepsilon}{2ab}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n cosn\theta}{sin\theta}\right]\; absin\theta d\theta \qquad (4-48)$$

Encore l'expression (4-47) s'écrit :

$$F = \pi R^2 \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{0}^{\pi} cosn\theta d\theta \; = \pi^2 R^2 \varepsilon\, a_0 \qquad (4-49)$$

L'expression (4.48) s'écrit également sous la forme:

$$F = \pi R^2 \varepsilon a_0 \int_0^{\pi} d\theta + \pi R^2 \varepsilon a_1 \int_0^{\pi} cos\theta d\theta + \cdots + \pi R^2 \varepsilon a_n \int_0^{\pi} cosn\theta d\theta = \pi^2 R^2 \varepsilon\, a_0$$

$$(4-50)$$

Les contraintes $\sigma_z(\rho)$, se déterminent par la formule :

$$\sigma_z \; = -\frac{F{\delta_0}^*}{2ab\pi R}\; \sigma_z^*(\rho) \qquad (4-51)$$

Chapitre 5

Calcul numériques et résultats graphique

5. 1 Poinçon plat :

Le schéma du problème de contact étudié (fig.1 chapitre 3) où une couche transversalement isotrope homogène est déposée sur un substrat rigide serrée contre celui-ci par un poinçon plat cylindrique rigide sur sa surface limite supérieur.

5.1.1 Distribution des contraintes

Prenons comme exemple de calcul, une couche élastique d'épaisseur réduite l = H/R = 2, discrétisons le rayon en 20 parties (N=20), utilisons pour l'approximation de la fonction $\Psi(t)$ le polynôme de degré k=5 et faisant appel aux formules précédemment trouvées au chapitre 3.

$$\sigma_z^*(\rho) = \frac{\Psi_0(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_\rho^1 \frac{\Psi_0{}'(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}$$

$$\Psi_0(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \Psi_0(x)dx \int_0^\infty G\,(\eta, L) cos\eta x \left[cos\eta t - \frac{sin\eta}{\eta}\right] d\eta = 1$$

$$\sigma_z(\rho, 0) = -\frac{F}{2\pi R^2 \delta_0}\sigma_z^*(\rho)$$

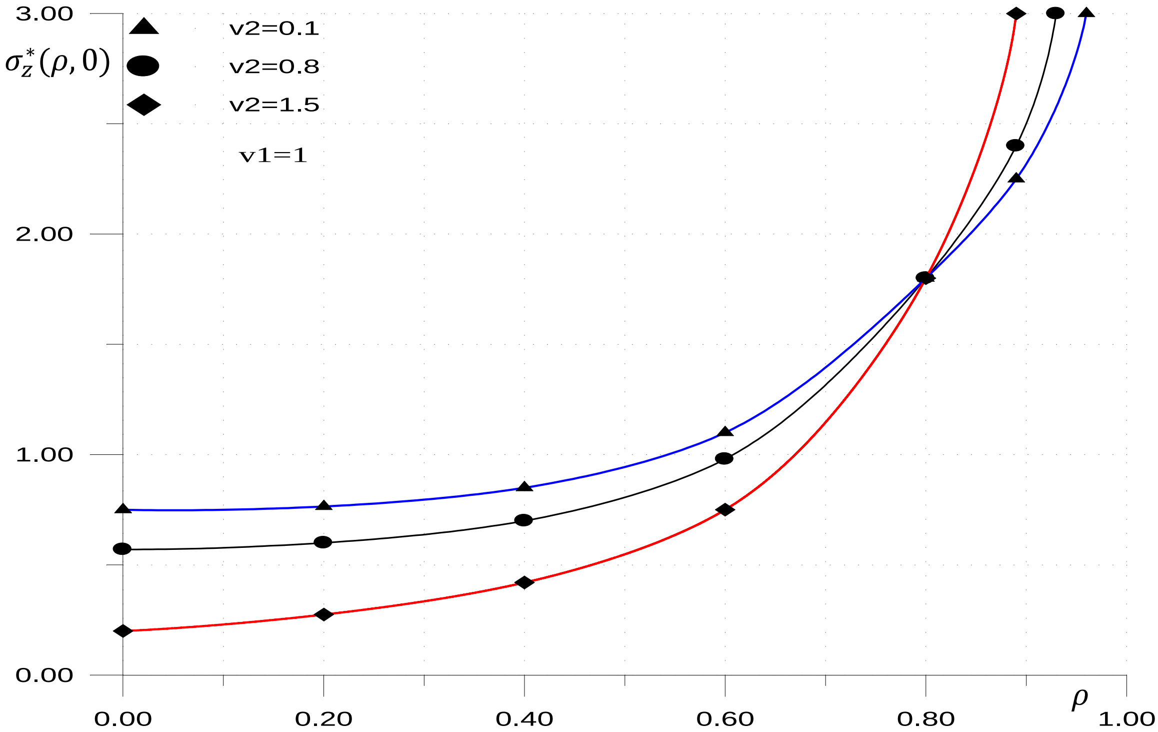

Fig 5.1– distribution de contraintes dans la zone de contact

Matériau transverse isotrope ($v_1$constant)

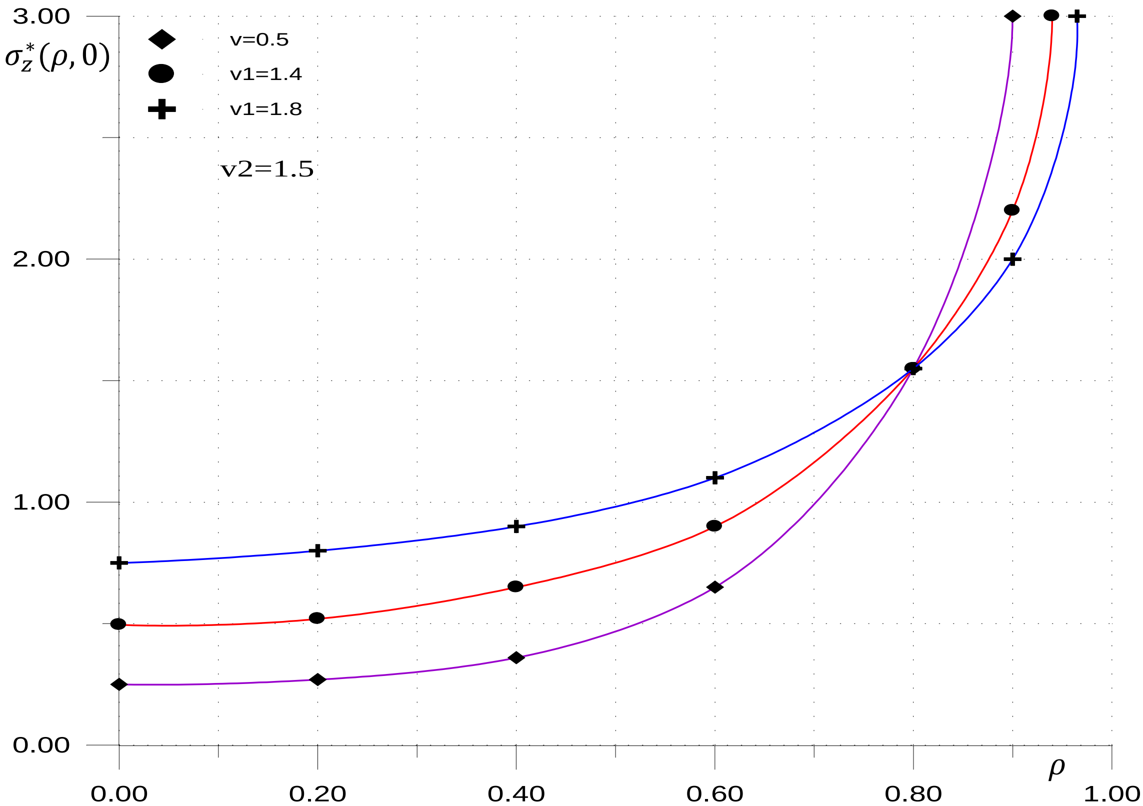

Fig 5.2– distribution de contraintes dans la zone de contact

Matériau transverse isotrope ($v_2$constant)

Les résultats numérique obtenue sont représenté sous forme des courbes des contraints au contact poinçon-couche élastique.

De chacune des représentations nous fixons l'un des coefficients d'anisotropie et nous varions et nous varions le second.

Figure 1 Fixons la valeur $v_1 = 1$ et changeons $v_2 = 0{,}1\ ;\ 0{,}8\ ;\ 1{,}5$ ensuite Figure 2 fixons la valeur $v_2 = 1{,}5$ et changeons $v_1 = 0{,}5\ ;\ 1{,}4\ ;\ 1{,}8$.

Ce qui ressort à travers l'allure des graphes est premièrement les valeurs importantes aux bords du poinçon (r=R), est plus faible au centre du poinçon.

La variation de la contrainte à la surface de contact est continue qui progressivement de la valeur mini vers les valeurs plus important selon une loi qui peut être exponentielle.

Suivant les courbe (fig 5-2) les contraint σ^* deviennent plus forts pour des valeurs plus grandes de l'anisotrope dans le plan horizontale (c'est-à-dire pour v_1 plus grand) ; sur la zone de contact centrale qui peut aller jusqu'a la valeur $\rho = 0.8$ et inversement sur la zone $0.8 \leq \rho \leq 1$ les contraints s'affaiblissent avec l'augmentation des valeurs de v_1.

Par contre en fixant $v_2 = 1$ et en changeons $v_2 = 0{,}1\ ;\ 0{,}8\ ;\ 1{,}5$ Nous remarquons cette fois les contraintes diminuant avec l'augmentation des valeurs de v_2 selon les courbes sur la même zone $0 \leq \rho \leq 0.8$ et inversement sur la même zone $0.8 \leq \rho \leq 1$.

5.2 Poinçon annulaire rigide

Le schéma du problème de contacte étudie (fig.1) (chapitre 4) ou une couche transverse isotrope est déposée sur un substrat rigide serrée contre celui -ci par un poinçon plat annulaire rigide sur sa surface limité supérieure.

Les formules pour la détermination des contraintes obtenues (chapitre 4), rappelons-les :

$$\sigma_z = -\frac{\varepsilon}{2ab}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n cosn\theta}{sin\theta} \qquad (4-32)$$

$$\pi R\delta_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} G(\eta l) J_m(\eta a) J_m(\eta b) J_n(\eta a) J_n(\eta b) d\eta = 1 \qquad (4-41)$$

Ou :

$$G(\eta L) = \frac{sinh\eta\frac{L}{v_1}sinh\eta\frac{L}{v_2}}{\frac{1}{v_1}sinh\eta\frac{L}{v_1}cosh\eta\frac{L}{v_2} - \frac{1}{v_2}sinh\eta\frac{L}{v_2}cosh\eta\frac{L}{v_1}}$$

$$\sigma_z = -\frac{F\delta_0{}^*}{2ab\pi R}\,\sigma_z^*(\rho) \qquad (4-51)$$

Avec :

$$\delta_0{}^* = \frac{\delta_0}{a_0}$$

Aux quelles correspondent les graphes suivants à différents niveaux de l'épaisseur de la couche.

5.2.1 Distribution des contraintes

Calcul des coefficients de la série par la formule (4-41) page 38.

n	$r_1 = 0.25$	$r_1 = 0.5$
0	4.41835821	3.31350650
1	3.53179407	2.35144319
2	2.26617016	1.07028413
3	1.07839732	0.33373203
4	0.82674867	0.09868091
5	0.50544638	0.01534853
6	0.35348677	0.00328198
7	0.09836026	-0.00011012
8	0.04574867	
9	0.008739723	
10	0.001137106	
11	-0.000704867	

Les valeurs de coefficients a_n

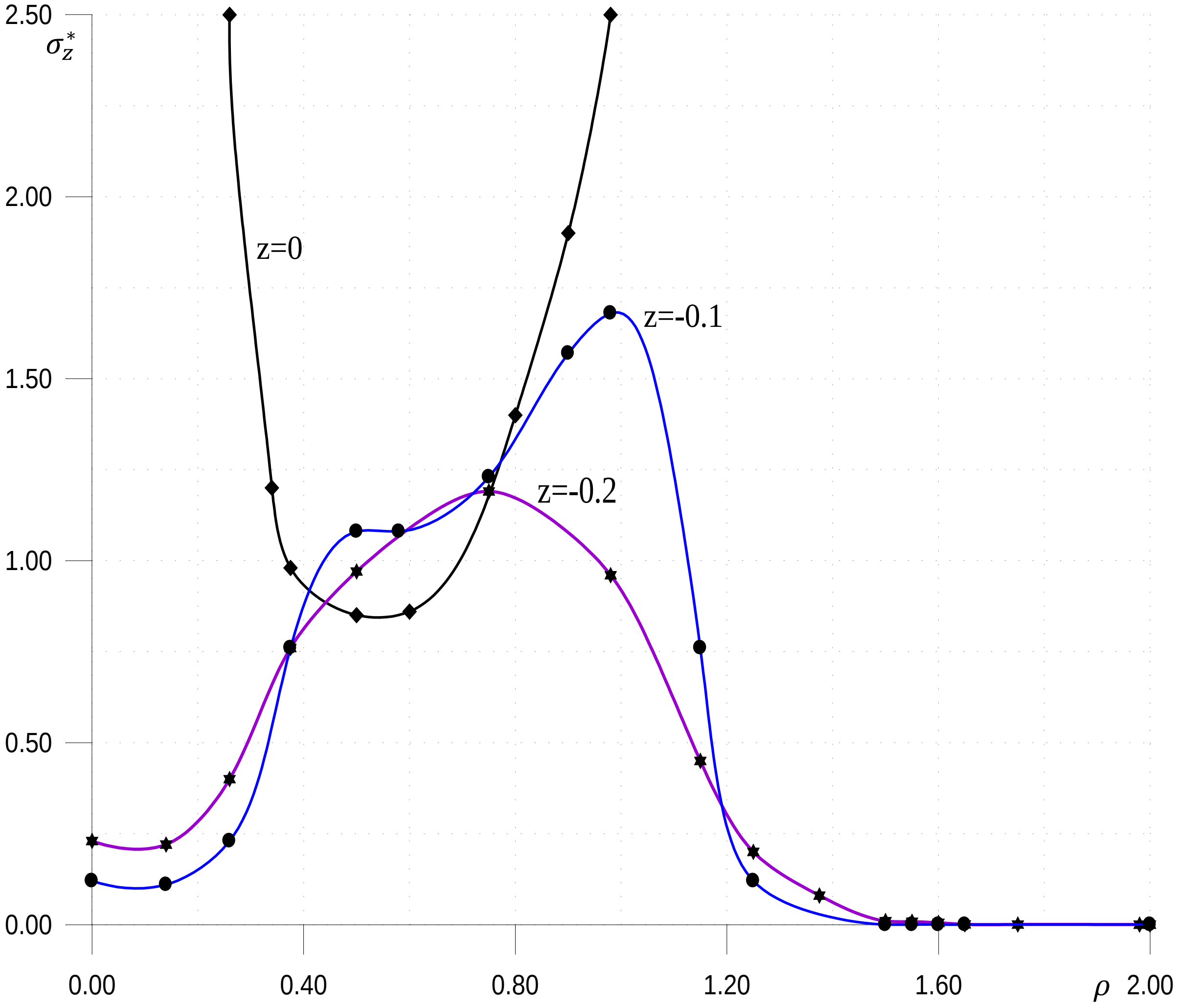

Fig 5.3 Distribution des contraintes pour $R = 1$ et $r_1 = 0.25$

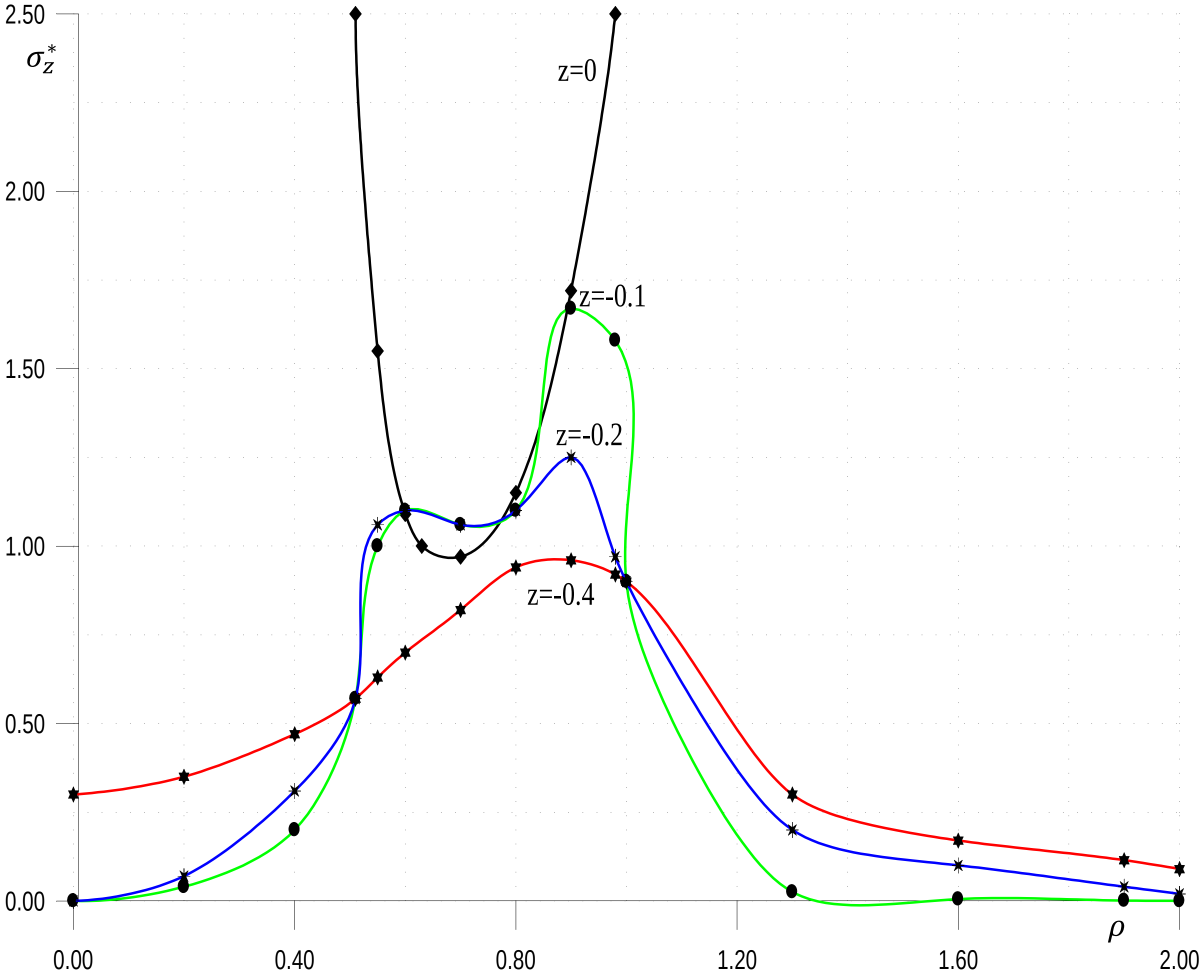

Fig 5.4 Distribution de contraintes pour $R = 1$ et $r_1 = 0.5$

Les courbes représentative de distribution de la contrainte normale σ_z^* pour les cas $(R = 1, r_1 = 0.25)$ et $(R = 1, r_1 = 0.5)$ reflètent exactement la logique de la singularité aux bords du poinçon (à l'intérieur r_1 et à l'extérieur R). En effet la contrainte σ_z^* remarquablement plus importante au voisinage $R = 1, r_1 = 0.25; 0.5$ et plus significative à la surface de contact $z = 0$.

À l'intérieur de la matière, c'est-à-dire pour $z = 0.1, 0.2$ ... le courbes des contraint montrent une répartition continue, mais plus fort dans la zone de contact et plus marqué sur les bords.

Les courbes des contraints s'aplatissent de plus en plus à chaque fois que l'on y va vers les profondeurs importantes, se que justifie et convient l'hypothèse qu'aux points du corps éloigné les composant de déformation tendent vers zéro.

Conclusion générale

Le but principal de cette mémoire est d'étudier la répartition des contraintes normales dans la surface de contact poinçon annulaire - couche élastique. Cette étude, met en évidence la complexité de la résolution du problème et d'analyse des contraintes par l'influence des différents paramètres, notamment les caractéristiques physiques des matériaux et représente une étape essentiale dans la connaissance dans ce domaine.

Nous avons solutionné le problème de contact d'une couche transverse isotrope par un poinçon cylindrique plein à extrémités plats en résolvants deux équations intégrales, des formules closes calculant les contraints de contacts sont obtenues.

Pour la résolution du problème de contact de la même couche avec un poinçon de même forme annulaire, nous aboutissons à un système de trois équations intégrales.que nous résolvons par l'emploie de la transformation intégrale de Hankel en passant par un changement de variable et l'introduction de la fonction de contraints sous forme d'une série de Fourier.

Les résultats numériques obtenus sont présentés pour les matériaux arbitraires, car les paramètres employés dans les expressions des solutions sont sans dimensions. La représentation graphique montre clairement au travers des courbes l'influence de l'anisotropie sur la répartition de la pression en dessous du poinçon. Les effets des deux bords du poinçon sur la répartition des contraints normales à la surface de la couche sont significatifs. La répartition des pressions $\sigma^*(\rho)$ correspondant de façon satisfaisante a la logique.

References Bibliographies:

[1] Grilitskii, SG. theory of deformation elastic and thermic, Axisymmetric contact problem , Nauka, Moscow, 1981.(61)

[2] Ditkin, V.A., Prudnikov, A.P., Integral transforms and operational calculus Pergamon Press, NewYork, 1965

[3] Shelestovshii, B.G., Gabrusev, G.V., International Applied Mechanics, 04 40, (2004), 67-77

[4]:Erdogan.f, ET Gupta G.D.On the numerical solution of singular integral equations, Q.App1.Math. , 1972, 29,525.

[5]: Muskhelishvili n. I. Somme basic problems of the mathematical theory of elasticity, Noordhoff, Groningen, 1953.

[6]: England A.H. complex variable methods in elasticity, wiley, New York, 1971.

[7]: Brilla J.Mixed boundary value problems of plane anisotropic bodies, CISM Course and Lectures, n 16, Springer-Verlag,Vienne, 1969.

[8]: Harding J.W. et Sneddon I.N: The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface of a semi-infinite elastic solid by a rigid punch, Pro.cambridge Phil. Soc.,1945,41,16.

[9]: Sneddon I.N. Fourier transforms, McGraw-will, New York,1951.

[10]: Sneddon I.N. The use of transform methods in elasticity, vol.1: N .C.State Unive.Techn.Rept. AFOSR.1964, vol. 2:1965.

[11]: Uflyand Ja.S.Survey articles on the applications of integral transforms in the theory of elasticity,N.C.State Univ.,Raleigh,N.C.,1965.

[12]: Kupradze V.D.Méthodes par Potentielles dans la théorie de l'élasticité, Moscou, 1963. Traduction anglaise 1965

[13]: Boussinesq J. Applications des potentiels à l'étude del'équilibre et du mouvement des solides élastiques,Gautier-Villars, Paris, 1885.

[14]: Gladwell G.M.L. A contact problem for a circular cylindrcal punch in adhesive contact with an elastic half- space,Int.J.Engng. Sci., 1969, 7, 295.

[15]: Vorovich I.I., Aleksandrov V.M. problèmes non classiques mixtes de la théorie del'élasticité, Nauka, Moscou, 1974.

[16]: Lubkin J.L. Contact problems Mc Graw-Hill, NewYork, 1962,

[17]: Abramyan B.L. Problèmes de contact mixtes de la théorie de l'élasticité (en russe), traduction anglaise,N.C. state Univ, RaleighN.C.,1971.

[18] :Galin :Problèmes de contact de la théorie de l'élasticité (en russe) ,traduction anglaise ,North Carolina state Univ.,RaleighN.C.,1961.

[19] Green, A.E., Lindsay, K.A., 1972. Thermoelasticity. J. Elast. 2, 1–7.

[20] Keer,L.M., and Fu,w.s.(1967). Some stress distribution in an elastic plate due to rigid heated punches .Int.J.Engng Sci., 5,555.

[21] Shibuya, T. (1974) An elastic contact problem for a half-space indented by a flat annular rigid stamp .Int.J.Engng Sci.,

[22]: C.J. Tranter, g further note on dual integral equations and an application to the diffraction of electromagnetic waves, Quart. J. Mech. and Appl. Math, 7_ (1954),318.

[23]: Muskhelishvili n. I. Somme basic problems of the mathematical theory of elasticity,

Noordhoff, Groningen, 1953.

[24] Smythe V.A., Prudnikov, A.P., Integral transforms and operational calculus Pergamon

Press, NewYork, 1965

[26]:J. C. Cooke, The solution of triple integral equations in operational form, Quart. J. Mech. Appl. Math., 18 (1965), 57-72.

[27]: W.E. Williams, The solution of certain dual integral equations, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), 12 (1961), 213--216.

[28]:B. Noble, The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method, Proc. Cambridge Phil Soc. 59 (1963a) 351--362.

[14]: C. Nasim and I.N. Sneddon, A general procedure for deriving solutions of dual integral equations, J_._Engg. Sc. Vol. 12(3), (1978), I15-128.

[29]: A. Erdelyi et al., Tables of integral transforms vol. I, MO3raw-Hill, New York, 1958.

[30]:G. K. Dhawan, Bhopal, A transversely isotropic half-space intended by a flat annular rigid stamp Springer-Verlag, India, 1979.

[31] Ditkin, V.A., Prudnikov, A.P., Integral transforms and operational calculus Pergamon

Press, NewYork, 1965

[32]:G. K. Dhawan, Bhopal, A transversely isotropic half-space intended by a flat annular rigid stamp in the presence of adhesion Springer-Verlag, India, 1981.

[33]: Toshiaki Hara, Makoto Sakamoto, Toshikazu Shibuya , Takashi koizumi , an axisymmetric contact problem of a transversely isotropic layer indented by a annular rigid punch JSME international journal

[34] Leknitskii, S.G., theorie of elasticity of an anisotropy elastic body. San Francisco:

Holden-Day, 1963.

[35]: Hayes, W. C., Keer, L. M., Herrmann, G. and Mockros, L. F. (1972) A mathematical analysis for indentation tests of articular cartilage. J. Biomech. 5, 541-551. (17)

[36] Sing A Stress distribution within solids of revolution.-ZAMM, 1959,-Bd.39H.12.

[37] Peng-Fei Hou,Andrew Y.T.Leung, Chang-Ping Chen, Fundamental solution for transversely isotropic thermo elastic materials. International Journal of Solids and Structures 45 (2008) 392-408

[38] Bakhterov ,V.N. Etude anlytique de la loi géneralisée de Hook J.Ass. ph. cimie 1925. (62).

[39] Ufljand, Ja.S. , Survey of articles on the applications of integral transforms in the theory

of elasticity, N.C.State Univ., Raleigh, N.C., 1965

[40] Gradshteyn, I.I., Ryzhik, I.M., Tables of integrals, series, and products, Academie press,

NewYork, 1980.

[41]: Mow, V.C., M.C. Gibbs, W.M. Lai, W.B. Zhu and K.A. Athanasiou, "Biphasic indentation of articular cartilage. II. A numerical algorithm and an experimental study", Journal of Biomechanics, 22, 853-861, (1989).

[42]: Abramyan B.L. Problèmes de contact mixtes de la théorie de l'élasticité (en russe), traduction anglaise,N.C.state Univ,RaleighN.C.,1971.

[43]: Harding J.W. et Sneddon I.N: The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface of a semi-infinite elastic solid by a rigid punch,Pro.cambridge Phil. Soc.,1945,41,16.

[44] A.E.Giannakopoulos and S.Suresh,Identation of solids with gradients in elastic properties.

[45] Shelestovshii, B.G., Gabrusev, G.V., International Applied Mechanics, 04 40, (2004), 67-77.

[46]: Abramyan B.L. Problèmes de contact mixtes de la théorie de l'élasticité (en russe), traduction anglaise,N.C.state Univ,RaleighN.C.,1971.

[47] Bakhterov ,V.N. Etude analytique de la loi géneralisée de Hooke J.Ass. ph.chimie 1925.

Annexes

Annexe 1 :

Solution gouvernant notre problème s'écrit $\nabla^2\mathrm{\varphi}(\mathrm{r},\mathrm{z}) = 0$

Pour le domaine illimité, la solution de l'équation (1-1) nécessite l'utilisation de la transformation de Hankel d'ordre zéro de la fonction $\mathrm{\varphi}(\mathrm{r},\mathrm{z}) = 0$ défini par :

$$\bar{\varphi}(\xi,z) = \int_0^{\infty} r\varphi(r,z)\,\mathbf{J}_0(\xi r)dr$$

Ou :

$\mathbf{J}_0$: Fonction de Bessel d'ordre zéro

La fonction $\varphi(r,z)$ peut être exprimée par la transformation inverse on obtient :

$$\varphi(r,z) = \int_0^{\infty} \xi\bar{\varphi}(\xi,z)\,\mathbf{J}_0(\xi r)d\xi$$

La solution de l'équation $\nabla^2\mathrm{\varphi}(\mathrm{r},\mathrm{z}) = 0$

On a :

$$\nabla^2\mathrm{\varphi}(\mathrm{r},\mathrm{z}) = \frac{\partial^2\mathrm{\varphi}}{\partial\mathrm{r}^2} + \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial\mathrm{\varphi}}{\partial\mathrm{r}} + \frac{\partial^2\mathrm{\varphi}}{\partial\mathrm{z}^2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \int_0^{\infty} \xi\varphi(\,(\xi,z)\frac{\partial J_0(\xi r)}{\partial r}d\xi = -\int_0^{\infty} \xi^2\varphi\,(\xi,z)J_1(\xi r)d\xi$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = -\int_0^{\infty} \xi^2\varphi(\,(\xi,z)\frac{\partial J_1(\xi r)}{\partial r}d\xi = \int_0^{\infty} \xi\left[-\xi^2 J_0(\xi r) + \frac{\xi}{r}J_1(\xi r)\right]\varphi(\xi,z)\,d\xi$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \int_0^{\infty} \xi\,\frac{\partial^2\varphi(\xi,z)}{\partial z^2}J_0(\xi r)\,d\xi$$

Avec :

$$\frac{\partial J_1(\xi r)}{\partial r} = \xi J_0 - \frac{J_1(\xi r)}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} J_0(\xi r) = -\xi J_1(\xi r)$$

$$\frac{\partial^2 J_0(\xi r)}{\partial r^2} = -\xi \frac{\partial J_1(\xi r)}{\partial r} = -\xi^2 J_0(\xi r) + \frac{\xi}{r} J_1(\xi r)$$

On obtient après substitution des dérivées partielles dans l'équation $\nabla^2 \varphi = 0$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \left[-\xi^2 j_0(\xi r) + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}(\xi, z)}{\partial z^2} \right] d\xi$$

Alors :

$$\nabla^2 \varphi = \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \left[\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dz^2} - \xi^2 \varphi \right] = 0$$

φ Est dérivée seulement par rapport à Z

Est une équation ordinaire du quatrième ordre

L'équation caractéristique : $k^2 - \xi^2 = 0 \implies \begin{cases} k_1 = \xi \\ k_2 = -\xi \end{cases}$

Donc la solution générale est :

$$\bar{\varphi}(\xi, z) = [B_1(\xi) + B_2(\xi) z] e^{-\xi z} + B_3(\xi) + B_4(\xi) e^{\xi z}$$

Ou :

$B_1(\xi), B_2(\xi), B_3(\xi)$ est $B_4(\xi)$ Sont des fonctions à déterminer par les conditions aux limites.

Annexe 2 :

Quelque expressions approchées de fonction remarquable

Fonctions approchées de Bessel de première espèce (d'ordre zéro et un)

Pour $-3 \leq x \leq 3$

$$J_0(x) = 1 - 2.249997\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1.2656208\left(\frac{x}{3}\right)^4 - 0.31638\left(\frac{x}{3}\right)^6 + 0.04444\left(\frac{x}{3}\right)^8 - 0.00394\left(\frac{x}{3}\right)^{10} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 1{,}6.10^{-8}$$

Pour $3 \leq x \leq \infty$

$$J_0(x) = x^{-\frac{1}{2}} f_0 cos\theta_0$$

$$Y_0(x) = x^{-\frac{1}{2}} f_0 sin\theta_0$$

$$\theta_0 = x - 0.7853981 - 0.0416639\left(\frac{3}{x}\right) - 0.0000395\left(\frac{3}{x}\right)^2 + 0.0026257\left(\frac{3}{x}\right)^3 - 0.0005412\left(\frac{3}{x}\right)^4 - 0.0002933\left(\frac{3}{x}\right)^6 + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 7{,}10^{-6}$$

Pour $0 < x \leq 3$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} ln\frac{x}{2} J_0(x) + 0.3674669 + 0.6055936\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 0.7435038\left(\frac{x}{3}\right)^4 + 0.2530011\left(\frac{x}{3}\right)^6 - 0.0426121\left(\frac{x}{3}\right)^8 + 0.0042791\left(\frac{x}{3}\right)^{10} - 0.0002484\left(\frac{x}{3}\right)^{12} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 1{,}4.10^{-8}$$

Pour $-3 < x \leq 3$

$$x^{-1}J_1(x) = 0.5 - 0.6524988\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 0.2109357\left(\frac{x}{3}\right)^4 - 0.0.395428\left(\frac{x}{3}\right)^6 + 0.0044331\left(\frac{x}{3}\right)^8 - 0.0003176\left(\frac{x}{3}\right)^{10} + 0.00001109\left(\frac{x}{3}\right)^{12} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 1{,}3.10^{-8}$$

Pour $3 \leq x \leq \infty$

$$J_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} f_1 cos\theta_1$$

$$f_1(x) = 0.7978845 + 0.000000156\left(\frac{3}{x}\right) + 0.0165966\left(\frac{3}{x}\right)^2 + 0.00017105\left(\frac{3}{x}\right)^3 - 0.0024951\left(\frac{3}{x}\right)^4 + 0.0011365\left(\frac{3}{x}\right)^5 - 0.0002003\left(\frac{3}{x}\right)^6 + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 4{,}1.10^{-8}$$

$$\theta_1 = x - 0.23561944 + 0.1249961\left(\frac{3}{x}\right) + 0.0005650\left(\frac{3}{x}\right)^2 + 0.0063787\left(\frac{3}{x}\right)^3 + 0.0007434\left(\frac{3}{x}\right)^4 + 0.0007982\left(\frac{3}{x}\right)^5 - 0.0002916\left(\frac{3}{x}\right)^6 + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 9.10^{-8}$$

Formules exactes

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{k(k+1)}$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) ln\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^2 (k+1)}{(k)^2(k+1)}$$

Racines des fonctions de Bessel de première espèce d'ordre un et deux.

$J_0(\lambda_k) = 0$

$\lambda_k(k = 1,2,3 \ldots \ldots 13) = 2.404825 : 5{,}25007 : 8{,}65372 : 11{,}79153 : 1493019 : 18{,}07106:$

$: 2121163 : 2435247 : 27{,}49347 : 30{,}36460 : 33{,}77582 : 36{,}91709 : 40{,}05842.$

$J_1(\mu_k) = 0 (k = 1,2,3 \ldots \ldots 13)$

$\mu_k(k = 1,2,3 \ldots \ldots 13) = 3{,}83171 : 7{,}0.1559 : 10{,}17347 : 13{,}32369 : 16{,}47063 : 19{,}61586:$

$: 22{,}76008 : 29{,}04683 : 32{,}18968 : 35{,}33231 : 38{,}47477 : 41{,}61709.$

Annexe 3

Calcul numérique.

L'utilisation de la méthode des sommes finies (intégration numérique) pour la résolution de l'équation intégrale (3.21) nous amène à résoudre un système d'équations algébriques linéaires d'inconnue i $\Psi(t)$; (i =1, N+1).

Que nous présentant sous cette forme,

L'expression de $\Psi(t)$ peut également s'écrire :

$$\Psi(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \Psi(x)dxK(x,t)dx = 1$$

Avec :

$$K(x,t) = \int_0^\infty \frac{1 + 2\eta - e^{-2\eta L}}{sh2\eta L + 2\eta L} cosx(cos\,\eta t - \frac{sin\eta}{\eta})d\eta \qquad x, t \in [0,1]$$

Utilisons pour l'intégration numérique le pas de valeur « h » :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\big(f(a) + 2f(a_1) + 2f(a_2) + \cdots\cdots + f(b)\big),$$

Ce qui conduit l'équation (3.28) à un système de N équations algébriques suivant

$$\Psi(1) - \frac{2}{\pi}\frac{H}{2}[\Psi(1)K(1,1) + 2\Psi(2)K(2,1) + 2\Psi(3)K(3,1) + \cdots + \Psi(n)K(1,n)] = 1$$

$$\Psi(2) - \frac{2}{\pi}\frac{H}{2}[\Psi(1)K(1,2) + 2\Psi(t)K(2,2) + 2\Psi(3)K(3,2) + \cdots + \Psi(n)K(n,2)] = 1$$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

$$\Psi(n) - \frac{2}{\pi}\frac{H}{2}[\Psi(t)K(1,n) + 2\Psi(t)K(2,n) + 2\Psi(t)K(3,n) + \cdots + \Psi(n)K(n,n)] = 1$$

Avec H : pas d'intégration

Soit, sous forme matricielle linéaire :

$[A]\{X\} = [B]$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1-\frac{H}{\pi}K(1,1) & -2\frac{H}{\pi}K(2,1) & -2\frac{H}{\pi}K(3,1) & \cdots & -\frac{H}{\pi}K(n,1) \\ -\frac{H}{\pi}K(1,2) & 1-\frac{H}{\pi}K(2,2) & 1-\frac{H}{\pi}K(3,2) & \cdots & -\frac{H}{\pi}K(n,2) \\ -\frac{H}{\pi}K(1,3) & -2\frac{H}{\pi}K(2,3) & 1-\frac{H}{\pi}K(3,3) & \cdots & -\frac{H}{\pi}K(n,3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{H}{\pi}K(1,n) & -\frac{2H}{\pi}K(2,n) & \frac{2H}{\pi}K(3,n) & \cdots & 1-\frac{H}{\pi}K(n,n) \end{bmatrix}$$

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \Psi(t) \\ \Psi(t) \\ \cdots \\ \cdots \\ \Psi(t) \end{Bmatrix} \qquad [B] = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ \cdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

La fonction $\Psi(t)$ est définie en N points par la résolution de l'équation matricielle $[A]\{X\} = [B]$ dans l'intervalle$t \in [0\,,1]$ divisé en N parties de longueur « h », c'est-à-dire par les couple $\{t_i, \Psi_i\}$

$$\Psi(t) = \{(t_1, \Psi_1), (t_2, \Psi_2), \cdots, (t_n, \Psi_n)\} \quad t \in [0\,,1]$$

L'approximation de $\Psi(t)$par le polynôme de la forme ;

$$\Psi(t_i) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k {t_i}^k$$

Nous facilite le calcul de dérivée et par conséquent le calcul de la contrainte normale $\sigma_z^*(\rho)$ à l'interface du contact.

L'introduction de $\Psi(t_i)$ dans (3.20), nous conduit une fois encore à un nouveau système d'équations algébriques linéaire en (a_i),

$$\Psi(t_1) = a_0 + a_1 t_1^1 + a_2 t_1^2 + a_3 t_1^3 + \cdots\cdots + a_n t_1^n = a_0$$

$$\Psi(t_1) = a_0 + a_1 t_2^1 + a_2 t_2^2 + a_3 t_2^3 + \cdots\cdots + a_n t_2^n$$

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

$$\Psi(t_n) = a_0 + a_1 t_n^1 + a_2 t_n^2 + a_3 t_n^3 + \cdots\cdots + a_n t_n^n$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 & t_1^3 & \cdots & t_1^n \\ t_2 & t_2^2 & t_2^3 & \cdots & t_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_n & t_n^2 & t_n^3 & \cdots & t_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi(t_2) - a_0 \\ \Psi(t_3) - a_0 \\ \cdots \\ \cdots \\ \Psi(t_n) - a_0 \end{bmatrix}$$

Annexe 4

Programme de calcule (Poinçon plat)

```
open(unit=45,file='résult.TXT')

open(unit=46,file='donne.dat')

n=11

h=0.2

r=0.1

a=0.

b=1.

d=1.

read(46,*)(eata(k),k=1,10,1)

read(46,*)(w(k),k=1,10,1)

read(46,*)(bv(k),k=1,11,1)

l=h/r

!do k=1,10,1

!eata(k)=(d+a)/2+(d-a)*epslon(k)/2

!enddo

t(1)=0.

x(1)=0.

do i=2,11

x(i)=x(i-1)+r

t(i)=t(i-1)+r

enddo
```

```
do i=1,11,1
do j=1,11,1
do k=1,10,1
p(k)=w(k)*((1+2*eata(k)*l-exp(-
2*eata(k)*l))/(sinh(2*eata(k)*l)+2*eata(k)*l))*(cos(eata(k)*x(j))*(cos(eata(k)*t(i))-
sin(eata(k))/eata(k)))
enddo
am(i,j)=(100/2)*sum(p(1:10:1))
enddo
enddo
write(45,*)'les valeurs de la matrice avant de les changer'
do 5101 i=1,11,1
        write(45,391)(am(i,j),j=1,11,1)
391    format (11(f10.4))
5101      continue
am(1,1)=1-am(1,1)*r/3.14
am(n,n)=1-am(n,n)*r/3.14
do i=2,n-1
am(i,i)=1-2*am(i,i)*r/3.14
enddo
do i=1,n-1
am(i+1,1)=-am(i+1,1)*r/3.14
am(i,n)=-am(i,n)*r/3.14
```

```
enddo
do i=1,n
do j=2,n-1
if(i.ne.j)then
am(i,j)=-2*am(i,j)*r/3.14
endif
enddo
enddo
write(45,*)'les valeurs de la matrice aprés de les changer'
do 5102 i=1,11,1
        write(45,392)(am(i,j),j=1,11,1)
392    format (11(f10.4))
5102      continue
write(45,*)'les valeurs de la matrice aprés de les diagonaliser'
call triang(am,bv,n,100)
do 5103 i=1,11,1
        write(45,393)(am(i,j),j=1,11,1)
393    format (11(f10.4))
5103      continue
end program Benkarra
***********************************************************************
subroutine triang(am,bv,n,ndim)
dimension am(ndim,ndim),bv(ndim)
```

```
do i=1,n-1
pivot=i
do k=i+1,n
if(abs(am(pivot,i))<abs(am(k,i)))then
pivot=k
endif
enddo
if(abs(am(pivot,i))<1.0e-5)then
write(*,*)('pivot proche de 0')
goto 7
endif
if(pivot.ne.i)then
temp=bv(i)
bv(i)=bv(pivot)
bv(pivot)=temp
do j=1,n
temp=am(i,j)
am(i,j)=am(pivot,j)
am(pivot,j)=temp
enddo
endif
do j=i+1,n
if(am(j,i).ne.0)then
```

```
rr=am(j,i)/am(i,i)
bv(j)=bv(j)-rr*bv(i)
do k=i,n
am(j,k)=am(j,k)-rr*am(i,k)
enddo
endif
enddo
enddo
7 return
 end
```

```
calcule de psy
p=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ];
B=am^(-1);
psy=B*p'
do i=1:1:n
    do j=1:1:n
        F(i,j)=t(i)^(j);
    enddo;
enddo;
for i=1:1:n
    psy1(i)=psy(i);
enddo
psy1
```

```
K=F^-1

A1=K*psy1'

do i=1:1:10

    do j=1:1:10

 psy3(j)=(A1(j)*t(i)^j);

enddo;

psy2(i)=sum(psy3(1:1:10));

enddo;
```

****

Calcule des contraints

```
x=0:0.2:1

rt=0:0.2:1

do i=2:1:6

do j=2:1:6

y(i-1,j-1)=log(1+sqrt(1-rt(j)^2));

y1(i-1,j-1)=-0.5*(x(i)-(rt(j)^2/x(i)));

y2(i-1,j-1)=-0.25*((x(i)^2/2)+2*rt(j)^2*log(x(i)^2)-(rt(j)^4/2*x(i)^2));

    enddo

enddo

do i=1:1:5

do j=1:1:3

        sig(i,j)=psy2(1)*y(i,j)+psy2(6)*y1(i,j)+psy2(10)*y2(i,j)+psy(1)/sqrt(1-rt(j)^2);

        rt1(j)=rt(j+1);
```

```
   enddo
  enddo
```

Abstract : A solution is given for a transversely isotropic layer indented by an annular rigid punch, where the elastic layer is resting on a rigid foundation.

We use the Hankel integral transforms method, we reduce the three part mixed boundary value problem to a system of triple integral equations. With the help of Cooke's solution, Erdelyi integral transformation and some integral representations of the Bessel function, we get an infinite system of algebraic equations for determining the unknown function. The expression of the stress intensity was given analytically.

Key words: Contact problem, layer transversely isotropic, annular rigid punch.

Résumé : Une solution est donnée pour une couche transversalement isotrope pénétrée par un poinçon annulaire rigide, où la couche élastique est posée sur un support rigide. Nous utilisons la transformation intégrale de Hankel pour formuler le problème aux conditions aux limites de trois équations intégrales. A l'aide de la solution de Cooke, l'intégrale de Erdelyi et quelques représentations intégrales de table de Bessel, on obtient un système infini d'équations algébriques définissant les coefficients de série de Fourrier. L'expression de l'intensité de contrainte est donnée analytiquement.
Mots clés: problème de contact, couche transverse isotrope, poinçon annulaire rigide.