

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université de Batna

Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Département de Génie Civil

**Mémoire de Fin d'Etude
En vue de l'obtention du Diplôme
De Magister en Génie Civil**

**OPTION
Structure et Géomatériaux**

Thème

LES CONTRAINTES LINEAIRES ET LEUR INTRODUCTION

DANS LE CODE « ALGMEF »

Présenté par :

Mme : ZINE Salima

Le 28/09/2005

Devant le Jury

Président	: A. GUETTALA	M.C	Université de Biskra
Rapporteur	: M.T. BELARBI	M.C	Université de Biskra
Examineurs	: T. OUTTAS	M.C	Université de Batna
	:Dr L. BELOUNAR	C.C	Université de Biskra
Invité	: A. KADID	C.C	Université de Batna

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- Mes parents***
- Mon mari et mon fils Aymen Abdallâh***
- Mon beau père et sa femme***
- Mes frères et sœurs, mes beaux frères et belles sœurs***
- L'âme de mon frère Abdelaziz, l'âme de ma belle mère et l'âme de mon amie***

Khadija BOUHOUNE.

- La promotion de Post-Graduation 2001.***

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à remercier en premier lieu Dieu miséricordieux qui m'a donné la force et la patience à achever cette réalisation.

Particulièrement, je remercie vivement M^r BELARBI pour l'intérêt qu'il a apporté à cette étude.

Je tiens à remercier l'ensemble des professeurs qui ont contribué à notre formation de post-graduation ainsi que les membres de jury qui ont accepté d'évaluer ce modeste travail.

Mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.

RESUME

Dans de très nombreux modèles industriels et de génie civil, coexistent des éléments de coque de volume, de poutre et de barre. La connexion des ces éléments pose généralement des problèmes aux utilisateurs des codes de calcul de structure à cause de l'incompatibilité des degrés de liberté aux nœuds, il est donc évidant que la continuité des déplacements et de rotation si elles existent, ne pourra toujours être garantie, alors que le théorie des éléments finis est basée sur cette continuité.

L'objectif de ce travail est que l'ingénieur praticien puisse introduire des relations cinématiques linéaires liant les nœuds de jonction afin de garantir la continuité.

ABSTRACT

In several models of industry and civil engineering, there are elements of shell, volume, beam and bar.

The connection of this elements results problems for the users of structures calculation programs for the reason of the incompatible of degrees of freedom in the nodes, which make the displacements and rotation continuity, if they exist, not warrant forever, whereas the finite element theory is based on this continuity

The target of this work is giving the possibility for the practitioner engineer to insert linear cinematic relations to relate the nodes of junction for the warranty of this continuity.

Key words: Finite elements, Element of membrane with rotation, linear Constraints, junction of Nodes, Incompatibility, Splices of elements,.

ملخص

في نماذج عديدة في الصناعة و الهندسة المدنية ، تتواجد عناصر من نوع قشري، حجم ، عارضة و قضيب.

إن ربط هذه العناصر مع بعضها البعض يضع عموما مشاكل لمستعملي برامج حساب المنشآت بسبب عدم توافق درجات الحرية في العقد. مما يجعل استمرارية الانتقالات و الدوران إن وجدت، غير مضمونة دوما، بينما نظرية العناصر المحدودة مرتكزة على هذه الاستمرارية.

الهدف من هذا العمل هو تمكين المهندس الممارس من إدخال علاقات خطية تربط عقد الربط لضمان الاستمرارية.

Sommaire

INTRODUCTION

0.1. Généralités.....	1
0.2. Objectif de l'ouvrage.....	3
0.3. Structure de l'ouvrage.....	3

1. METHODE DES ELEMENTS FINIS

1.1. Introduction.....	6
1.2. Concept de la méthode des éléments finis.....	7
1.3. Etapes de la méthode des éléments finis.....	7
1.4. Approche variationnelle.....	7
1.4.1. Fonctionnelle.....	8
1.4.2. Principe variationnel.....	8
1.4.3. Forme forte et forme faible.....	8
1.4.4. Conditions limites.....	8
1.4.4.1. Conditions limites naturelles.....	8
1.4.4.2. Conditions limites essentielles.....	9
1.5. Méthodes d'approximation.....	10
1.5.1. Approche cinématique.....	10
1.5.2. Approche statique.....	10
1.5.3. Approche mixte.....	10
1.6. Energie potentielle totale.....	11
1.7. Bibliothèque d'éléments finis.....	12
1.7.1. Élément Barre.....	12
1.7.1.1. Introduction.....	12
1.7.1.2. Élément fini de barre.....	12
1.7.2. Élément de poutre.....	13
1.7.2.1. Introduction.....	13
1.7.2.2. Élément fini de poutre.....	14
1.7.3. Élément membrane avec rotation.....	14
1.7.3.1. Introduction.....	14
1.7.3.2. Description des éléments SBQ4.....	15
1.7.3.3. Formulation variationnelle des éléments SBQ4.....	15
1.8. Conclusion.....	17

2. RACCORD D'ELEMENTS

2.1. Introduction.....	19
2.2. Raccord membrane-membrane.....	19
2.3. Raccord poutre-coque.....	20
2.4. Raccord coque-volume.....	21
2.5. Raccord poutre-membrane.....	22
2.6. Conclusion.....	22

3. METHODES D'IMPOSITION DES CONTRAINTES LINEAIRES

3.1. Introduction.....	24
3.2. Méthode de transformation matricielle.....	26
3.2.1. Principe théorique.....	26
3.2.1.1. Transformation avec condensation	26
3.2.1.2. Transformation sans condensation.....	28
3.2.2. Avantages et désavantages.....	29
3.3. Méthode des fonctions de pénalité.....	30
3.3.1. Principe théorique.....	30
3.3.2. Interprétation physique.....	31
3.3.3. Avantages et désavantages.....	31
3.4. Méthode des multiplicateurs de Lagrange.....	31
3.4.1. Principe théorique.....	32
3.4.2. Interprétation physique.....	33
3.4.3. Energie interne.....	35
3.4.4. Instabilité.....	36
3.4.5. Avantages et désavantages.....	36
3.4.5.1. Avantages.....	36
3.4.5.1. Désavantages.....	37
3.5. Conclusion.....	38

4. LE CODE « ALGMEF » ET L'INTRODUCTION PRATIQUE DES CONTRAINTES LINEAIRES

4.1. Introduction.....	40
4.2. Etapes de base du programme « ALGMEF ».....	40
4.2.1. Présentation du code « ALGMEF ».....	40
4.2.2. Description des étapes.....	42
4.3. Structure générale du code « ALGMEF ».....	43
4.4. Introduction des contraintes linéaires dans « ALGMEF ».....	48
4.4.1. Introduction.....	48
4.4.2. Méthode utilisée et sa mise en œuvre	48
4.4.3. Élément de contrainte linéaire.....	49
4.4.4. Ordre d'introduction des contraintes et triangularisation du système.....	50
4.5. Exemple.....	51
4.6. Fixation des modes rigides par des contraintes linéaires.....	54
4.7. Structure de « ALGMEF » après introduction des contraintes linéaires...	55
4.7.1. Modifications principales.....	55
4.7.2. Programme modifié.....	56
4.5.2.1. Sous routine LIRE.....	58
4.8. Résumé des étapes de « ALGMEF ».....	61
4.9. Utilité pratique des contraintes linéaires.....	62
4.10. Conclusion.....	66

5. VALLIDATION

5.1. Introduction.....	68
5.1.1. Vérification élémentaire.....	68

5.1.2. Etude de jonctions.....	68
5.2. Elément barre.....	69
5.2.1. Cas1 : deux nœuds adjacents non chargés.....	69
5.2.2. Cas2 : deux nœuds adjacents chargés.....	70
5.2.3. Cas3 : deux nœuds non adjacents non chargés.....	72
5.2.4. Cas4 : deux nœuds non adjacents chargés.....	73
5.2.5. Constatations.....	74
5.2.6. Conclusion.....	75
5.3. Elément poutre.....	76
5.3.1. Résultats des déplacements V	77
5.3.2. Superposition graphique (V).....	77
5.3.3. Résultats des rotations (θ).....	78
5.3.4. Superposition graphique (θ).....	78
5.3.5. Constatations.....	78
5.3.6. Conclusion.....	79
5.4. Problèmes de barres.....	80
5.4.1. Données du problème.....	80
5.4.2. Résultats.....	81
5.4.3. Interprétations et conclusion.....	81
5.5. Problèmes de liaison barres-poutres.....	82
5.5.1. Introduction.....	82
5.5.2. Données du problèmes.....	82
5.5.3. Modèle proposé.....	83
5.5.4. Résultats.....	83
5.5.5. Interprétations et conclusion.....	83
5.6. Paroi sur colonnes.....	84
5.6.1. Données du problème.....	84
5.6.2. Résultats.....	86
5.6.3. Constatations et Interprétations des résultats	86
5.6.4. Conclusion.....	86
6. APPLICATION	
6.1. Poutre encastree dans un demi -plan infini.....	88
6.2. Rotation de la poutre.....	90
6.2.1. Approche poutre.....	90
6.2.2. Approche membranaire.....	91
6.3. Constatations.....	91
6.3.1. Rotation sans contraintes linéaires.....	91
6.3.2. Rotation avec contraintes linéaires.....	91
6.4. Conclusion.....	91
CONCLUSION.....	93
RECOMMANDATIONS.....	94
BIBLIOGRAPHIE.....	95
ANNEXES.....	98

Liste des Figures

FIG.0.1.Fond rigide (2D).....	1
FIG.0.2. Raccord poutre-coque.....	3
FIG.0.3.Exemple de liaison	3
FIG.1.1. Elément fini de barre.....	13
FIG.1.2. Elément de poutre.....	13
FIG.1.3. Elément fini de poutre.....	14
FIG.1.4. Elément SBQ4 avec inconnues nodales de rotation.....	15
FIG.2.1. Problème de raccord.....	19
FIG.2.2. Effet Boutonnière	20
FIG.2.3.Relation cinématique.....	20
FIG.2.4. Raccord poutre-coque.....	21
FIG.2.5. Raccord coque-volume.....	21
FIG.2.6. structure mur de refend et sa discrétisation.....	22
FIG.3.1. Exemples d'emploi des contraintes linéaires.....	25
FIG.4.1. Etapes principales du programme « ALGMEF ».....	41
FIG.4.2. Organigramme de « ALGMEF ».....	44
FIG.4.3. Organigramme de la sou routine LIRE.....	45
FIG.4.4.a. Organigramme de la sou routine DEPLACEMENT.....	46
FIG.4.4.b. Organigramme de la sou routine DEPLACEMENT.....	47
FIG.4.5. Allure de la matrice de rigidité [k] et du vecteur d'inconnues {u} d'un élément fictif.....	49
FIG.4.6. Poutre soumise aux contraintes linéaires.....	51
FIG.4.7.Liaison de deux structures par une contrainte linéaire.....	54
FIG.4.8. Organigramme de « ALGMEF »modifié.....	57
FIG.4.9. Organigramme de la sou routine LIRE modifiée.....	58
FIG.4.10.a. Organigramme de la sou routine DEPLACEMENT modifiée....	59
FIG.4.10.b. Organigramme de la sou routine DEPLACEMENT modifiée ...	60
FIG.4.11. Conditions cinématiques.....	62
FIG.4.12. Croisement de poutres.....	63
FIG.4.13. Jonction rigide.....	63
FIG.4.14. Appui d'une structure sur une autre.....	64
FIG.4.15. Lignes et surfaces d'influences.....	65
FIG.4.16. Jonction d'éléments de nature différente.....	66
FIG.4.17. Gradation du réseau.....	66
FIG.5.1. Deux nœuds adjacents non chargés.....	69
FIG.5.2. Numérotation des nœuds.....	69
FIG.5.3. Superposition graphique des résultats CAS 1.....	70
FIG.5.4. Deux nœuds adjacents chargés.....	71
FIG.5.5. Superposition graphique des résultats CAS 2.....	71
FIG.5.6. deux nœuds non adjacents non chargés.....	72
FIG.5.7. Superposition graphique des résultats CAS 3.....	73
FIG.5.8. deux nœuds non adjacents chargés.....	73
FIG.5.9. Superposition graphique des résultats CAS 4.....	74
FIG.5.10.a. Poutre soumise aux contraintes linéaires.....	76
FIG.5.10.b. Numérotation des nœuds.....	76
FIG.5.11.Superposition graphique des déplacements v	77
FIG.5.12. Superposition graphique des déplacements θ	78
FIG.5.13. Schéma de principe.....	80

FIG.5.14. Schéma avec éléments fictifs.	81
FIG.5.15. Assemblage barre-poutre.	82
FIG.5.16. Modèle proposé.....	83
FIG.5.17. Paroi sur colonnes.....	84
FIG.5.18. Détail de la zone de jonction avec éléments fictifs.....	85
FIG.5.19. Numérotation des nœuds	85
FIG.6.1. Poutre encasté dans un demi -plan infini.....	88
FIG.6.2. Région de la connexion.....	89
FIG.6.3. Structure discrétisée($\frac{h}{h_e}=1$).....	90
FIG.6.4. Liaison poutre-voile.....	92

Notations et Abréviations

Notations

E	: Module de Young
$[G]$: Matrice de coefficients
$\{u\}$: Vecteur des déplacements nodaux
ν	: Coefficient de Poisson
A	: Surface totale du solide
I	: Moment d'inertie
N	: Nombre de nœuds
$[K]$: Matrice de rigidité de la structure
$\{P\}$: Vecteur de charge
$\{S\}$: Vecteur des seconds membres des ECL
$[I]$: Matrice Identité
$[\Gamma]$: Matrice de transformation
α	: Coefficient de pénalité
Π	: Energie Potentielle Totale
$\{\lambda\}$: Vecteur des multiplicateurs de Lagrange
U	: Energie interne
V	: Energie externe

Abréviations

E_p	: Elément poutre
E_R	: Elément rectangulaire
MEF	: Méthode des éléments finis
Ddl	: degré de liberté
SCL	: Sans contraintes linéaires
ACL	: Avec contraintes linéaires
ECL	: Equations des contraintes linéaires
Sbq+p	: Strain based quadrilater + poutre

INTRODUCTION

0.1.Généralités

Le calcul de structures par élément fini est une discipline née depuis les années soixante, où se mêlent étroitement les mathématiques, la mécanique et l'analyse numérique, d'où sa complexité et les différentes approches que l'on peut avoir.

Les progrès réalisés ces dernières années en informatique, tant par la puissance de calcul que par une interactivité toujours plus grande et des interfaces homme/machine sans cesse améliorées, ont contribué à une large diffusion d'utilisation de la méthode des éléments finis [GRA 97]. Elle est devenue un outil de travail, calcul et conception quotidien, voire familier, de l'ingénieur dans des domaines aussi variés que l'analyse des structures, le transfert de chaleur, la mécanique des fluides, etc.

Ce développement s'est accompagné de la mise au point de programmes de calcul capables de résoudre des problèmes d'une étonnante complexité, d'où, il est devenu primordial d'avoir une connaissance de base solide des principes, théories et méthodes utilisés dans la méthode des éléments finis pour pouvoir utiliser ces programmes dans les problèmes pratiques avec sûreté et sécurité. [FRE 01]

Parmi les problèmes, que l'utilisateur rencontre au cours de calcul d'une structure :

- L'existence de relations linéaires entre les déplacements de différents nœuds

de la structure à étudier (éléments infiniment rigides), c'est le cas d'un fond rigide dont les déplacements sont caractérisés par les déplacements du nœud central. (FIG.0.1).[IMB 79].

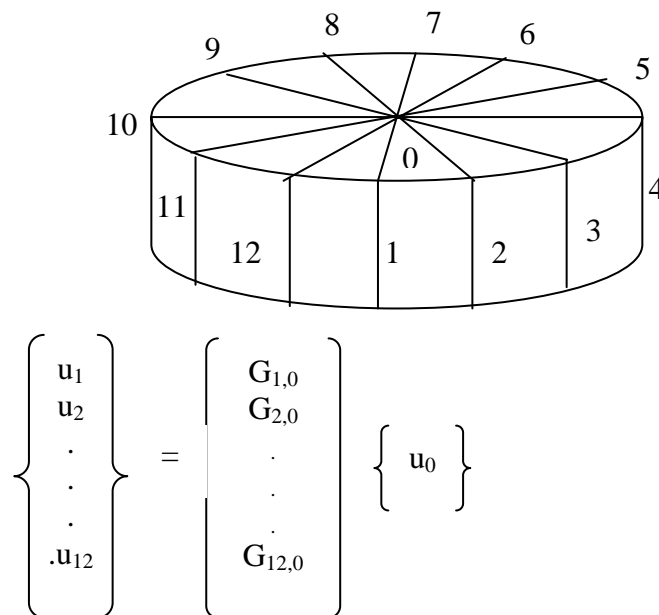


FIG.0.1. Fond rigide (2D)

- L'incompatibilité de degrés de liberté des nœuds, due à la connexion d'éléments de types différents, c'est le cas des poutres utilisées comme raidisseurs sur des panneaux modélisés par des éléments de coque (FIG.0.2). Il faut assurer la continuité du déplacement v de la poutre, qui est du troisième degré, avec le déplacement v de la partie membranaire de la coque, qui est du premier ou du second degré.

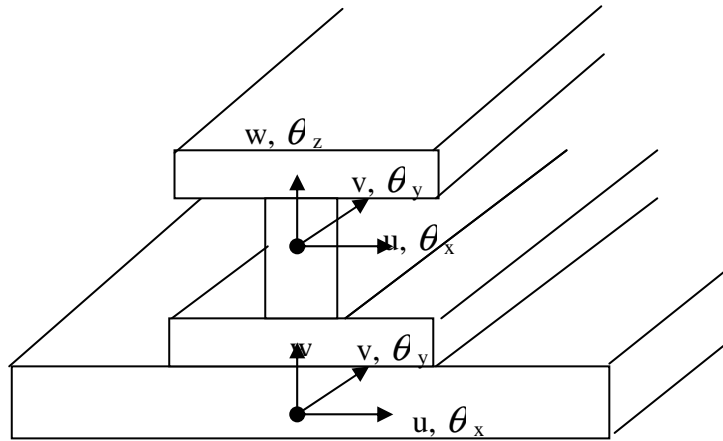


FIG.0.2. Raccord poutre-coque

- L'impossibilité d'ajouter des fixations pour éliminer les mouvements d'ensemble. Dans le cas suivant, tous les nœuds se déplacent dans les deux directions du plan (FIG.0.3)

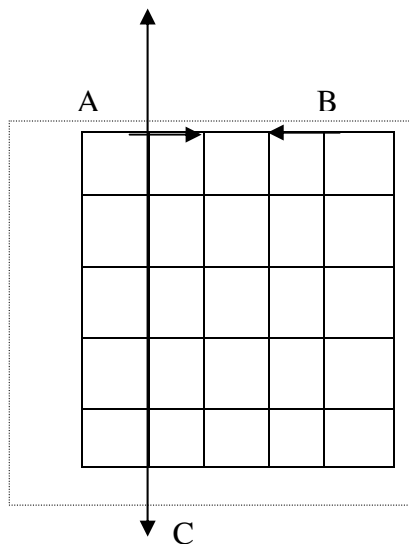


FIG.0.3. Exemple de liaison

Du fait de la symétrie du problème, l'imposition de relations linéaires entre les degrés de liberté de la structure semble inévitable, par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_A = - U_B \\ V_A = - V_C \end{array} \right.$$

Les trois modes rigides du plan sont éliminés bien qu'il n'y ait pas de degrés de libertés fixés.

L'introduction de telles relations dans un code de calcul pose un grand problème pour l'ingénieur.

0.2. Objectif de l'ouvrage

Afin de contribuer à ce que l'utilisateur puisse introduire ces relations cinématiques à un code de calcul, on propose ce présent ouvrage qui traite l'

« Introduction des Contraintes Linéaires dans le Code « ALGMEF ». Les contraintes désignent ici des équations qui imposent des relations supplémentaires entre certaines composantes des déplacements de la structure.

0.3. Structure de l'ouvrage

Le présent travail est structuré en trois parties :

≡ **Première partie (Théorie):**

Le chapitre 1 donne tout d'abord une présentation générale de la méthode des éléments finis, grâce à un survol global de l'ensemble de la méthode, ainsi que quelques types d'éléments finis.

Quelques cas de raccord d'éléments feront l'objet du chapitre 2, où l'introduction de contraintes linéaire semble inévitable.

Le chapitre 3 traite les 'Contraintes Linéaires' ainsi que les trois méthodes utilisées pour les imposer dans le calcul des structures.

Pour clore la première partie de l'ouvrage, une présentation globale du code « ALGMEF » ainsi que l'introduction pratique de ces contraintes linéaires dans ce dernier, par

le biais des éléments de contraintes; basée sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange, est proposée au chapitre 4.

≡ **Deuxième partie** (Validation) :

Dans cette partie, on passe à l'interprétation et la validation élémentaire des résultats sur :

- Un élément barre ;
- Un élément poutre ;
- La jonction barre- poutre ;
- La jonction poutre- membrane avec rotation dans le plan (SBQ4)

≡ **Troisième partie** (Application) :

L'application de notre théorie repose sur l'encastrement d'une poutre dans un demi-plan infini.

Les deux dernières parties nous permettent d'appliquer le maximum de la théorie présentée dans la première.

Les déplacements seulement sont les paramètres de notre étude.

1. METHODE DES ELEMENTS FINIS

Le premier chapitre de cette étude est consacré à la présentation de la Méthode des Eléments Finis (MEF), son procédé de base et ses étapes.

Ce chapitre présente l'approche variationnelle, en donnant intérêt aux conditions aux limites concernant plusieurs degrés de liberté dont les composantes sont connectées par des équations.

Le calcul statique linéaire, nous a conduit à présenter la MEF comme minimisation de l'énergie potentiel total, en effet le potentiel est fonction des déplacements, et lorsque cette fonction est minimale par rapport aux déplacements on obtient des équations d'équilibre.

Enfin, on présente une bibliothèque limitée d'Eléments finis, englobant ceux utilisés par le programme "ALGMEF", soient: deux éléments classiques (barre et poutre) et un nouvel élément membranaire avec un degré de liberté de rotation. (SBQ4)

1.1. Introduction

La méthode des éléments finis est une méthode numérique de résolution approchée des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques de l'ingénierie. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur, c'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés. Dans la pratique : Problèmes stationnaires ou non-stationnaires, linéaires ou non-linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.

La méthode des éléments finis est une technique récente, à caractères pluridisciplinaire, car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base.

- La mécanique des structures : élasticité, résistance des matériaux, dynamique, plasticité, etc.
- L'analyse numérique : méthodes d'approximation, résolution des systèmes linéaires, ...
- L'informatique appliquée : techniques de développement et de maintenance des grands logiciels. [IMB 79].

Il s'agit d'une méthode dite variationnelle de calcul de milieux déformables. Elle consiste à associer au milieu réel un milieu idéalisé, pour lequel on a fait une hypothèse sur la forme de l'une des inconnues du problème. On peut, par exemple, supposer que le déplacement varie linéairement à l'intérieur d'un élément fini, la portion du plan étudié étant décomposée en un nombre fini d'éléments finis.

Habituellement les conditions suivantes sont satisfaites :

- **Equilibre** : Les forces externes sont en équilibre avec les efforts ou les contraintes internes.
- **Compatibilité** : Les déplacements sont connus et peuvent être déduits en chaque point, par des relations linéaires, à partir des déplacements des sommets de l'élément.
- **Lois constitutives** : la loi qui relie la déformation à la contrainte peut être différente pour chacun des éléments finis. Elle être de type élastique, plastique, élastoplastique.

1.2. Concept de la méthode des éléments finis

Le concept de base de la méthode des éléments finis est la subdivision du modèle mathématique à des composants disjoints de géométrie simple appelés « Eléments finis », le comportement de chaque élément est exprimé en terme d'un nombre fini de degrés de liberté, le comportement (réponse) du modèle mathématique est considéré, approximativement, celui du modèle discret obtenu par connexion ou assemblage de tous les éléments. [ZIN 91]

1.3. Etapes de la méthode des éléments finis

Dans les diverses applications précitées, les éléments finis perdent leur signification physique d'éléments structuraux : la méthode des éléments finis est considérée comme un outil de mathématiques appliquées destinée à résoudre les équations différentielles.

Néanmoins, les étapes de l'étude d'un problème aux limites sont toujours les mêmes, on peut les résumer en sept étapes :

1. Découpage du domaine en un maillage d'éléments finis ;
2. Interpolation en respectant les critères de convergence ;
3. Calcul des caractéristiques de chaque élément ;
4. Assemblage ;
5. Introduction des conditions aux limites essentielles et résolution ;
6. Evaluation, dans chaque élément, des grandeurs utiles (contraintes, flux, . . .) ;
7. Jugement de manière critique les résultats obtenus.

1.4. Approche Variationnelle

La MEF est l'une des méthodes basant sur des techniques de calcul variationnel permettant de transformer un système d'équations aux dérivées partielles avec des conditions limites en un système d'équations algébriques plus faciles à résoudre.

On se restreint ici aux calculs statiques linéaires, c'est à dire à la résolution du problème classique $[K] \{u\} = \{F\}$, la matrice de rigidité étant constante, les déformations et rotations restant infinitésimales et les déplacements petits.

1.4.1. Fonctionnelle

On appelle fonctionnelle, une expression dépendant (directement ou sous forme intégrale) de plusieurs fonctions et de leurs dérivées :

$$F = f(y, g, \dot{y}, \dots) \quad \text{ou} \quad F = \int f(y, g, \dot{y}, \dots)$$

L'ordre m de la fonctionnelle est égale à l'ordre le plus élevé des dérivées apparaissant dans son expression.

1.4.2. Principe variationnel

Un principe variationnel est un principe stipulant la stationnarité d'une fonctionnelle. Les principes sont en général établis à partir des considérations énergétiques.

1.4.3. Forme forte (différentielle) et forme faible (variationnelle)

Un problème physique est en général toujours régi par des équations aux dérivées partielles (forme forte) et des conditions limites et éventuellement par un principe variationnel (forme intégrale faible).

1.4.4. Conditions limites

Les conditions limites sur les dérivées d'ordre m , apparaissant dans la forme intégrale, sont appelées « conditions limites naturelles ». Les autres conditions limites sur les variables et les dérivées d'ordre inférieur à m sont appelées « conditions limites essentielles ».[TIM 51, ZIE 89]

1.4.4.1. Conditions aux limites naturelles

Les conditions portant sur les efforts sont dites « naturelles » ou « statiques ». Elles sont appliquées sur une partie S_2 de la surface S . L'intersection des surfaces S_1 et S_2 où rien n'est imposé est vide, l'union des deux reconstitue la surface S totale.

1.4.4.2. Conditions aux limites essentielles

Les conditions portant sur les déplacements sont dites « essentielles » ou « cinématiques », elles s'appliquent sur une partie de la surface S , notée S_1 , touchent les degrés de liberté, et donc le vecteur déplacement dans la formule :

$$[K] \{u\} = \{F\} \quad (1.1)$$

Elles interviennent le plus souvent :

- Au niveau des appuis ;
- Dans les conditions de symétrie ou anti-symétrie ;
- Pour prévenir les modes rigides si nécessaire.

Ces conditions peuvent être imposées en valeurs ou en équations, d'où la classification suivante des contraintes essentielles :

- Conditions concernant un seul degré de liberté ;
- Conditions concernant plusieurs degrés de liberté.

1.4.4.2.1. Conditions concernant un seul degré de liberté :

Elles sont exprimées mathématiquement comme des contraintes sur un seul degré de liberté :

Composante de déplacement nodal = Valeur
--

(1.2)

1.4.4.2.2. Conditions concernant plusieurs degrés de liberté :

Ce sont des équations qui connectent une ou plusieurs composantes de déplacement :

F (Composantes de déplacement nodal) = Valeur

(1.3)

F : fonction qui disparaît si tous les arguments de déplacement nodal disparaissent.

- Si toutes les composantes de déplacement sont du côté droit, l'équation (1.3) est dite « Forme Canonique de la Contrainte »

- Une contrainte de cette forme est dite « multipoint » si elle introduit des composantes de déplacements de différents nœuds.

- Elle est dite « linéaire » si toutes les composantes apparaissent linéairement au côté droit, non-linéaire autrement.

- La contrainte est dite « homogène », si après transfert de tous les termes dépendants des composantes de déplacement au côté droit, le côté gauche de l'équation est zéro, non-homogène autrement.

1.5.Méthodes d'approximation [CRA 01]

1.5.1. Approche Cinématique

Lorsque l'approximation porte uniquement sur le champ de déplacement et qu'elle est introduite dans les champs de contrainte et de déformation, on parle de l'approche cinématique. C'est la technique la plus simple à mettre en œuvre et la plus largement répandue : la très grande majorité des éléments finis utilisés dans les programmes de calcul sont basés sur cette approche.

La fonctionnelle alors utilisée est l'énergie potentielle totale de la structure. Les éléments finis développés par cette méthode sont dits de type cinématique. On choisit pour coordonnées généralisées les déplacements aux nœuds du maillage, le champ de déplacement dans un élément fini étant exprimé sous la forme d'une combinaison linéaire des déplacements aux nœuds de l'élément considéré.

1.5.2. Approche Statique

lorsque l'approximation porte uniquement sur le champ de contrainte et qu'elle est introduite dans les autres champs, on parle de l'approche statique, l'énergie potentielle complémentaire étant alors la fonctionnelle utilisée. Les éléments finis développés par cette méthode sont dits de type équilibre.

1.5.3. Approche Mixte

Il est également possible de travailler conjointement sur les deux approches donnant ainsi des éléments mixtes ou des éléments hybrides.

1.6. Energie Potentielle Totale

Un milieu est dit hyper-élastique, s'il existe une densité d'énergie de déformation W reliant les contraintes aux déformations par :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (1.4)$$

Pour un matériau à comportement élastique linéaire, on écrit :

$$c_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1.5)$$

Dans le cas où les coefficients élastiques C_{ijkl} sont constants, W est une forme quadratique linéaire et symétrique des déformations et s'écrit sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} \epsilon^T D \epsilon \quad (1.6)$$

L'énergie de déformation U du solide est l'intégrale de la densité d'énergie de déformation :

$$U = \int W dv \quad (1.7)$$

Elle correspond au travail de toutes les forces internes. Les charges conservatives (indépendantes des déplacements) externes appliquées sur la structure sont soit des charges de volume d'intensité F_v soit des charges de surface ayant pour intensité F_s , dont le travail est :

$$P = \int \bar{u}^T F_v dv + \int \bar{u}^T F_s ds \quad (1.8)$$

L'énergie potentielle totale de la structure $\Pi(\bar{u})$ est égale à $U-P$. Elle ne dépend que du champ de déplacement, qui doit vérifier les conditions de continuité. Elle ne change pas, au second ordre près, lorsque la structure passe d'une configuration d'équilibre à une configuration infiniment voisine quelconque : sa variation première est nulle. On dit que l'énergie potentielle totale d'un corps en équilibre est stationnaire.

Le théorème des travaux virtuels consiste à imposer un déplacement cinématiquement admissible arbitraire δu sur la structure et à égaliser les travaux des efforts externes et internes pour trouver la condition d'équilibre. Le travail des forces internes s'écrit pour les matériaux élastiques :

$$\delta U = \int \delta \epsilon^T \sigma dv \quad (1.9)$$

Le travail des forces externes s'écrit :

$$\delta P = \int \delta \bar{u}^T F_v dv + \int \delta \bar{u}^T F_s ds \quad (1.10)$$

En supposant que le champ de déplacement puisse se mettre sous la forme :

$$\bar{u} = Nu \quad (1.11)$$

Où u est le vecteur des degrés de liberté choisis pour en représenter le comportement, et N la matrice des fonctions d'interpolation, ces travaux ont pour expression :

$$\delta \bar{u} = N \delta u \quad \delta \varepsilon = D \delta \bar{u} = DN \delta u = B \delta u \quad (1.12)$$

$$\delta U = \int \delta u^T B^T DB u dv \quad (1.13)$$

$$\delta P = \int \delta u^T N^T F_v dv + \int \delta u^T N^T F_s ds \quad (1.14)$$

La matrice de rigidité de la structure est définie par :

$$K = \int B^T DB dv$$

et le vecteur de charge F par :

$$F = \int N^T F_v dv + \int N^T F_s ds \quad (1.15)$$

L'équation d'équilibre est :

$$K u = F \quad (1.16)$$

L'équation dont la résolution est le but de ce travail avec la prise en compte des relations linéaires et homogènes entre les degrés de libertés des nœuds des structures à étudier. Ces relations proviennent généralement de la coexistence d'éléments de même type ou de types différents. Cette contribution se limitera au traitement de la coexistence de quelques uns.

1.7. Bibliothèque d'Eléments finis

1.7.1. Elément Barre

1.7.1.1. Introduction

Une barre est un élément de structure dont les dimensions transversales sont petites par rapport à la longueur et qui ne travaille qu'en traction-compression le long de son axe, ce qui la différencie de la poutre. Les barres sont utilisées pour la modélisation des structures articulées car, ne reprenant ni moments ni efforts tranchants, elles sont naturellement rotulées à leurs deux extrémités. Elles peuvent être considérées comme des poutres particulières.

1.7.1.2. Elément fini de Barre

Une barre est définie par deux nœuds, chacun d'entre eux possédant trois degrés de liberté dans l'espace. (fig.1.1)

Dans le repère de l'élément, il n'existe de rigidité que selon l'axe de l'élément. Par conséquent, selon l'orientation d'un élément et ses connexions, des pivots nuls peuvent être détectés lors de la résolution, correspondant à des degrés de libertés non alimentés en raideur.

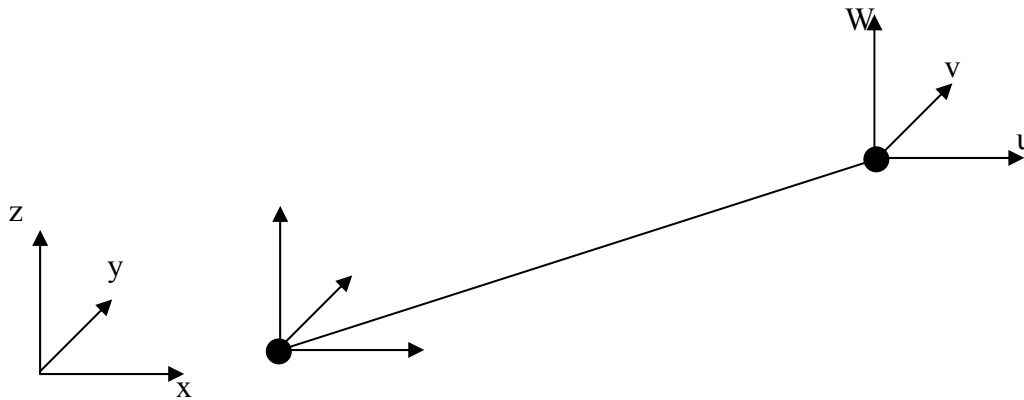


FIG.1.1. Elément fini de barre

1.7.2. Elément de poutre

1.7.2.1. Introduction

La poutre est un élément de structure dont les dimensions transversales sont généralement petites par rapport à la longueur. La section souvent constante, peut évoluer lentement et continûment en forme et en dimension. La poutre est l'élément de base en Résistance des Matériaux et est très utilisée en construction mécanique, soit seule dans un treillis plan ou spatial, soit comme raidisseur dans les structures à panneaux minces. La poutre est susceptible de reprendre les efforts et les moments dans toutes les directions, ce qui la différencie de la barre (FIG.1.2.).

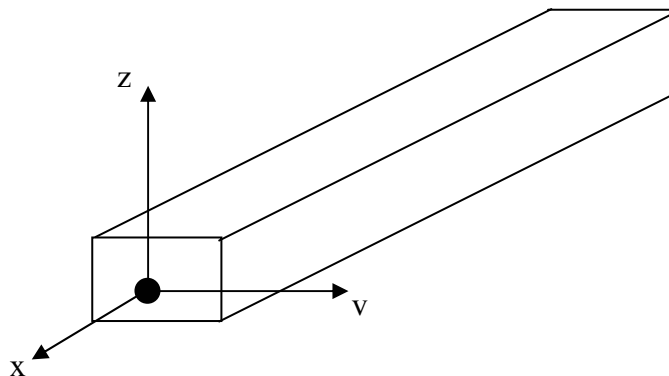


FIG.1.2. Elément Poutre

1.7.2.2. Élément fini de poutre

Une poutre est définie par les deux nœuds décrivant sa fibre neutre, avec six degrés de liberté, tous alimentés en raideur : trois translations trois rotations permettant de reprendre les trois efforts et les trois moments (FIG.1.3.) et

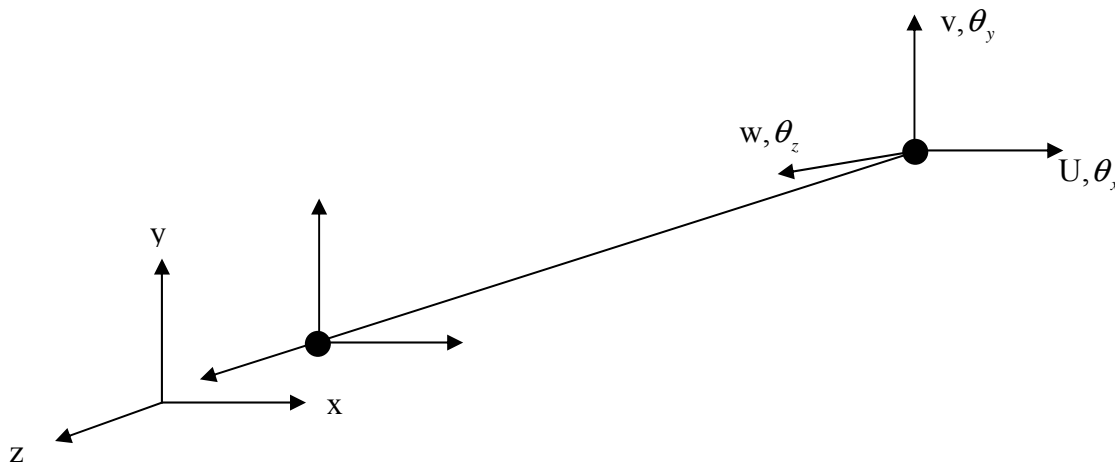


FIG.1.3. Élément fini de poutre

1.7.3. Élément membrane avec rotation

1.7.3.1. Introduction

La recherche en éléments finis de plaque en membrane tenant compte de la rotation dans le plan, se poursuit de façon très active aussi bien pour les éléments triangulaires et quadrangulaires que pour les éléments en forme de secteur. Les exigences croissantes sur la performance de ces éléments, suscitent aujourd'hui une évolution considérable des méthodes de validation ([IBR 93, BEL 98,...]).

Pour la modélisation par éléments finis des structures complexes, divers éléments peuvent être utilisés : poutres, membranes, éléments de solide, plaques et coques. Ces éléments construits selon la formulation classique ne partagent pas, en général, les mêmes degrés de liberté nodaux, ce qui complique l'élaboration d'un modèle compatible. Pour résoudre ce problème, on propose dans ce travail un nouvel élément fini **SBQ4** (quadrilatère à 4 nœuds et 3 ddl / nœud), simple, stable, fiable, peu coûteux en temps de calcul et beaucoup moins sensible aux distorsions géométriques. Ce type d'éléments est également adapté à l'analyse des problèmes généraux d'élasticité plane.

1.7.3.2. Description des éléments SBQ4

La figure 1.4 montre la géométrie de l'élément **SBQ4** et les variables cinématiques nodales correspondantes. A chaque nœud (i) de ddl U_i et V_i est attribuée une rotation additionnelle notée θ_{zi} .

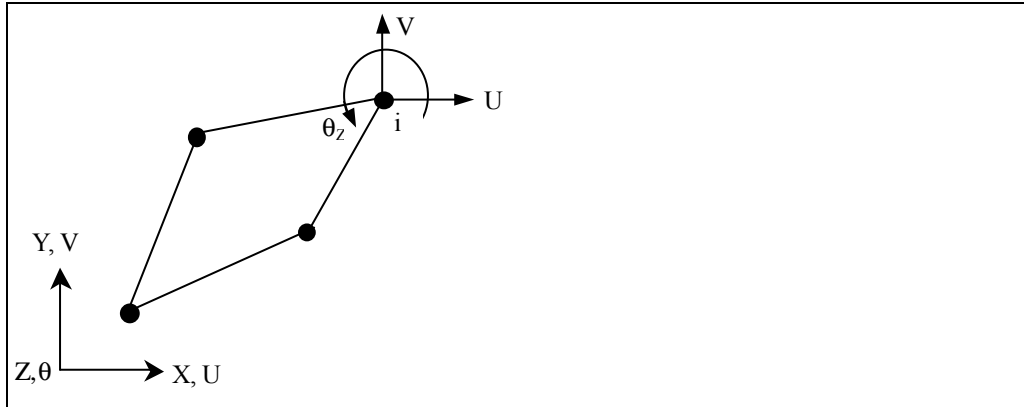


FIG.1.4. Elément SBQ4 avec inconnues nodales de rotation

1.7.3.3. Formulation variationnelle des éléments "SBQ4"

Considérons l'élément quadrilatéral de la figure 1.4. Les trois composantes cartésiennes du champ de déformation dans le plan d'un point P de l'élément sont données par :

$$\varepsilon_x = U_{,x} = (\partial U / \partial x) ; \varepsilon_y = V_{,y} ; \gamma_{xy} = U_{,y} + V_{,x} \quad (1.17)$$

U, V : composantes du déplacement respectivement dans les directions x et y .

Les équations (1.17) doivent au minimum représenter le mouvement d'un corps rigide. Donc, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 0 \\ \varepsilon_y &= 0 \\ \gamma_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (1.18a,b,c)$$

L'intégration de (1.18) permet d'obtenir une solution particulière :

$$U_R = a_1 - a_3 y \quad (1.19a)$$

$$V_R = a_2 + a_3 x \quad (1.19b)$$

Et la vraie rotation θ_z de l'élasticité plane sera donnée par [TIM 51] :

$$\theta_z = \frac{1}{2}(V_{,x} - U_{,y}) = a_3 \quad (1.20)$$

Les équations (1.19) et (1.20) représentent le champ de déplacement correspondant au mouvement du corps rigide (MCR).

L'élément **SBQ4** possède quatre nœuds et trois ddl par nœud (U , V et θ_z). Le champ de déplacement doit contenir douze constantes indépendantes. Trois d'entre elles (a_1 , a_2 et a_3) sont déjà utilisées pour représenter le MCR, il en reste donc neuf (respectivement six) (a_4 , a_5 , ..., $a_{i=12(9)}$) pour représenter approximativement la déformation dans l'élément, tout en vérifiant l'équation de compatibilité (1.21) suivante :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.21)$$

Soit:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= a_4 + a_6 y + a_{10} y^2 + 2a_{11} xy^3 \\ \epsilon_y &= a_7 + a_8 x - a_{10} x^2 - 2a_{11} yx^3 \\ \gamma_{xy} &= 2a_5 + 2a_6 x + 2a_8 y + 2a_9 y + 2a_{12} x \end{aligned} \quad (1.22a,b,c)$$

En substituant (1.22) dans (1.17), et après intégration nous obtenons:

$$\begin{aligned} U_S &= a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_8 \frac{y^2}{2} + a_9 y^2 + a_{10} xy^2 + a_{11} x^2 y^3 \\ V_S &= a_5 x + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 y + a_8 xy - a_{10} x^2 y - a_{11} y^2 x^3 + a_{12} x^2 \\ \theta_z &= -a_9 y - 2a_{10} xy - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x \end{aligned} \quad (1.23a,b,c)$$

Le champ de déplacement final pour **SBQ4** sera obtenu par combinaison de (1.19) et (1.23):

$$\begin{aligned} U &= a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_8 \frac{y^2}{2} + a_9 y^2 + a_{10} xy^2 + a_{11} x^2 y^3 \\ V &= a_2 + a_3 x + a_5 x + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 y + a_8 xy - a_{10} x^2 y - a_{11} y^2 x^3 + a_{12} x^2 \\ \theta_z &= a_3 - a_9 y - 2a_{10} xy - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x \end{aligned} \quad (1.24a,b,c)$$

Remarquons que, les fonctions de déplacement finales contiennent des termes quadratiques et cubiques permettant ainsi le changement de courbure.

La matrice de déformation [Q] s'obtient en substituant les équations (1.23) dans (1.17)

:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & y^2 & 2xy^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & -x^2 & -2x^3y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2x & 0 & 2y & 2y & 0 & 0 & 2x \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

La matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ de **SBQ4** s'obtient ainsi en suivant les techniques habituelles de la méthode des éléments finis.

$$[K_e] = [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \quad (1.26a)$$

Avec :

$$[K_0] = \iint_S [Q]^T [D] [Q] dx dy \quad (1.26 b)$$

La construction de la matrice $[A]$ pour **SBQ4** est décrite en annexe A.

1.8. Conclusion

Bien que la bibliothèque des éléments finis est riche, les problèmes de discrétisation des structures complexes que l'ingénieur rencontre - en particulier au niveau de l'intercompatibilité des éléments finis-, ont conduit à créer de nouveaux éléments dits de transition [BAT 81], et autres de contraintes basés sur l'imposition de conditions cinématiques à la jonction [BER 89], et d'autres basés sur une formulation variationnelle non conventionnelle : caractérisés par la présence d'inconnues nodales non seulement de translation, mais aussi de rotation. [IBR 91]. Le développement de ces nouvelles familles d'EF est consacré au traitement de jonction d'éléments finis basés sur des théories différentes, quelques cas de jonctions seront présentés au chapitre suivant.

2. RACCORD D'ÉLÉMENTS

Dans la modélisation par éléments finis des structures complexes, divers éléments doivent être utilisés : barres, poutres, membranes, éléments de solide, plaques et coques.

La connexion de ces éléments pose généralement des problèmes aux utilisateurs de codes de calcul de structures à cause de l'incompatibilité des degrés de liberté aux nœuds.

Le but de ce chapitre est de sensibiliser le lecteur au fait qu'il y a une difficulté réelle, qui a tendance à être masquée dans certains logiciels par le biais d'outils de plus en plus évolués.

Un raccord homogène est traité sous le titre : Raccord Membrane-Membrane, les deux autres paragraphes sont consacrés à des raccords hétérogènes:

- Raccord Poutre-Coque,
- Raccord Poutre- Volume.

L'introduction des relations cinématiques entre les déplacements des nœuds semble être une solution inévitable dans les cas présentés.

2.1. Introduction

Dans de très nombreux modèles, coexistent des éléments de coque, de volume et de poutre. La connexion de ces éléments pose généralement des problèmes aux utilisateurs de codes de calcul de structures car les degrés de liberté aux nœuds ne sont pas compatibles : une poutre a 6 degrés de liberté alimentés en raideur sur chaque nœud, une coque 5 ou 6 et un volume 3 seulement. Il est donc évident que la continuité des déplacements et des rotations si elles existent, ne pourra pas toujours être garantie alors que la théorie des éléments finis est basée sur cette continuité. Le but de ce chapitre est de présenter une difficulté réelle, qui existe, qui a tendance à être masquée dans certains logiciels par le biais d'outils de plus en plus évolués et automatiques.[CRA 01]

2.2. Raccord membrane –membrane

Une structure rectangulaire est composée de deux carrés, sur l'un, il n'est pas nécessaire d'avoir des résultats précis, ce qui n'est pas le cas sur l'autre.

Pour garantir une bonne continuité des déplacements dans le plan du modèle, il faut que les nœuds se correspondent d'une maille à l'autre, ce qui est illustré sur la figure

(fig.2.1) où l'on voit un maillage au premier degré pour la partie gauche et un maillage au second degré pour la partie droite. Ces deux maillages ne peuvent pas être correctement raccordés dans un même modèle car il s'y développerait l'effet « boutonnière » : Le long de la ligne de raccord, les bords des éléments s'écartent ou s'interpénètrent bien que les nœuds sommets aient les mêmes déplacements (fig.2.2).

Mathématiquement, cela provient du fait qu'il n'est pas possible d'assurer l'égalité entre le déplacement linéaire d'un élément et le déplacement parabolique de l'élément adjacent, à moins d'introduire des relations cinématiques pour imposer au nœud milieu d'avoir pour déplacement la demi-somme des déplacements des nœuds sommets. Ce n'est rien d'autre qu'une linéarisation du champ parabolique(fig.2.3).

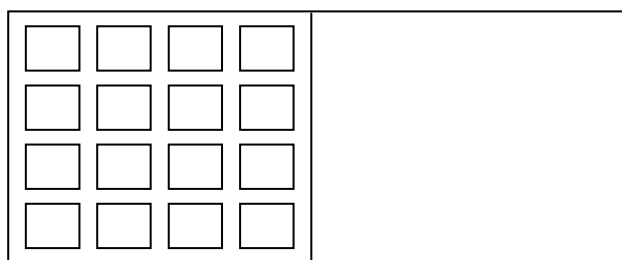


FIG.2.1. Problème de raccord

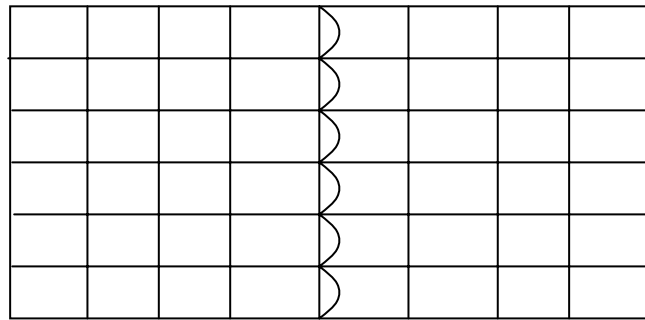


FIG.2.2. Effet boutonnière

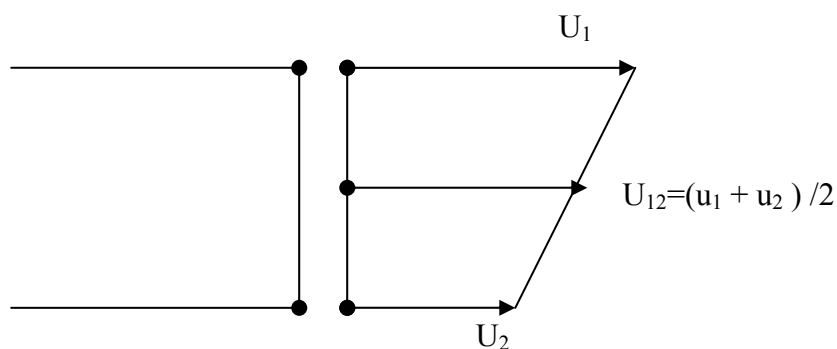


FIG.2.3. Relation Cinématique

Il peut arriver que pour des études particulières on soit conduit à avoir non pas des degrés différents mais un nombre d'éléments différents le long de la ligne de raccord. Dans ce cas, la technique consiste à imposer des relations cinématiques entre les degrés de liberté de la jointure.

2.3. Raccord poutre-coque

C'est le cas des poutres utilisées comme raidisseurs sur des panneaux modélisés par des éléments de coque (fig.2.4.). Il faut assurer la continuité du déplacement v de la poutre, qui est du troisième degré, avec le déplacement v de la partie membranaire de la coque, qui est du premier ou du second degré

$$V_{\text{poutre}} = V_{\text{coque}}$$

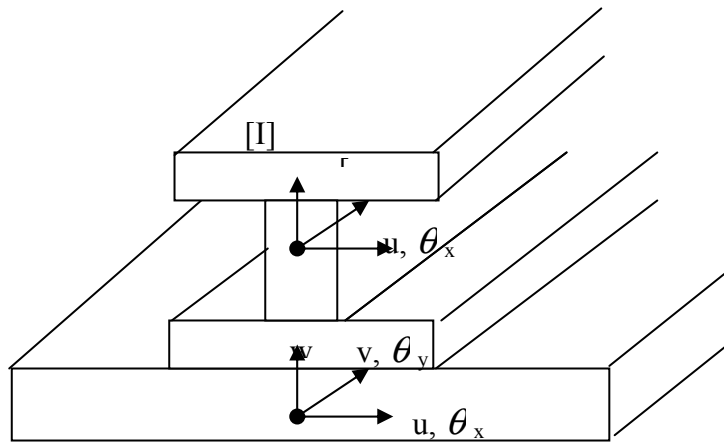


FIG.2.4 Raccord poutre-coque

2.4. Raccord coque-volume

Là encore se pose le problème de connexion d'élément dont les degrés de liberté ne sont pas identiques, 3 translations pour le volume, 3 translations et 3 rotations pour la coque. Si aucune précaution n'est prise, un pivot nul est détecté lors de la résolution, un degré de liberté est bloqué dénaturant complètement le problème posé car la ligne de raccord est en fait un axe charnière autour duquel il existe un mode de rotation d'ensemble de la coque.

La coque étant du premier degré pour la partie membranaire, pour assurer la continuité des champs de déplacement, le volume doit lui aussi être du premier degré. Il est alors sensiblement trop raide s'il est soumis à la flexion, ce qui doit être compensé par un maillage suffisamment fin. Il existe une méthode avec de nombreuses variantes, qui consiste à introduire directement ou non des relations cinématiques entre le déplacement des nœuds du volume situés de part et d'autre de la ligne de raccord avec la coque et les rotations de la coque le long de cette ligne (fig2.5). La zone de raccord est donc artificiellement rigidifiée, sur une bande dont la hauteur est celle des éléments de volume sur lesquelles est appliquée la relation linéaire.

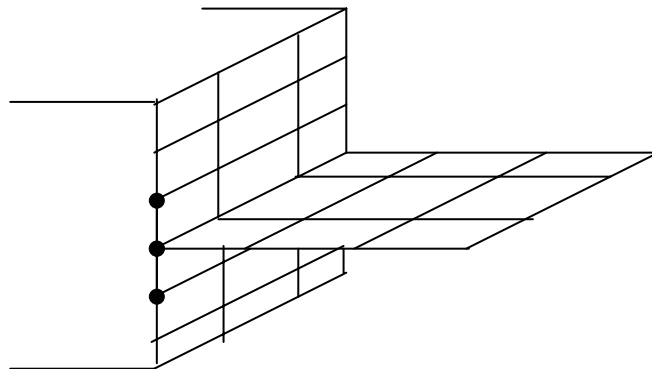


FIG. 2.5. Raccords coque-volume

2.5. Raccord Poutre-Membrane

Les problèmes de compatibilité surgissent quand on combine des éléments de solide et de structure ; par exemple, la discrétisation de la paroi d'un noyau de bâtiment (mur de refend) peut comporter des éléments de membrane et de poutre (FIG.2.6.) ; les inconnues nodales des membranes sont les deux translations u et v , incompatibles avec les inconnues nodales des poutres qui, outre, u et v comportent la rotation θ . Des difficultés de même nature se rencontrent à l'intersection des coques ou des structures plissées, aux nœuds de liaison des poutres et raidisseurs avec les coques, aux jonctions des structures avec les massifs de fondation, etc.

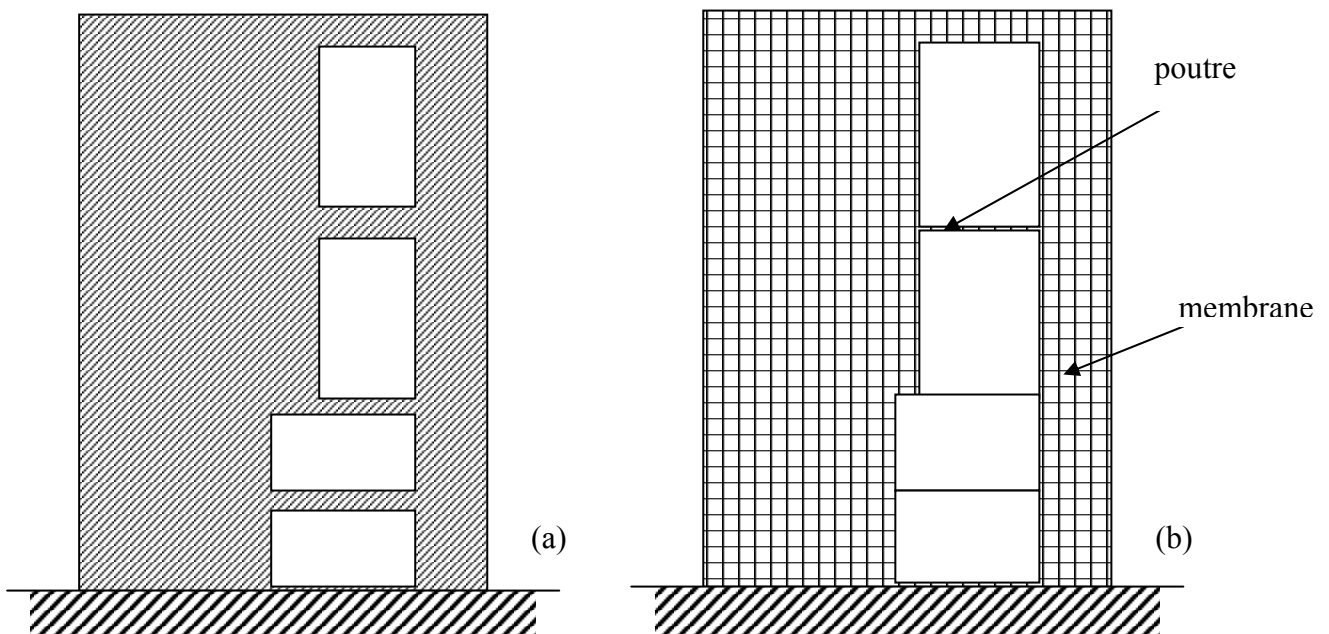


FIG.2.6. Structure (mur de refend et sa discrétisation.)

2.6. Conclusion

Les exemples cités dans ce chapitre, ont permis d'illustrer quelques difficultés de modélisation lorsqu'il s'agit de coexistence d'éléments de même type ou de type différent, l'imposition de relations ou contraintes cinématiques linéaires entre les déplacements des nœuds de raccord semble inévitable afin de résoudre quelques uns.

Les méthodes utilisées pour imposer ces relations feront l'objet du prochain chapitre.

3. Méthodes d'Imposition des Contraintes Linéaires

Le chapitre précédant pose le problème de continuité de champ de déplacement, causé par la coexistence d'éléments de même type ou de type différent et propose l'introduction de relations cinématiques entre les composantes de déplacements des nœuds appartenant à la zone de raccord. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux méthodes d'imposition de ces relations.

Trois méthodes sont présentées:

- Méthode matricielle (avec et sans condensation de certains degrés de liberté);
- Méthode de pénalité;
- Méthode des multiplicateurs de Lagrange.

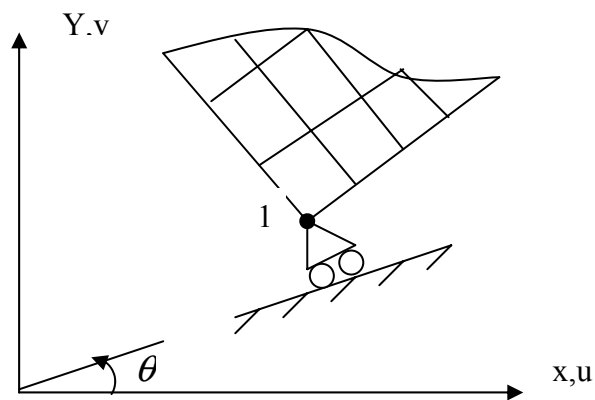
Celle des multiplicateurs de Lagrange est choisie pour l'introduction des relations cinématiques linéaires dans le programme "ALGMEF".

3.1. Introduction

Les contraintes désignent ici des équations qui imposent des relations supplémentaires entre certaines composantes des déplacements de la structure. Ces relations peuvent être linéaires ou non linéaires, homogènes ou non-homogènes, on n'envisage ici que le cas des contraintes linéaires homogènes.

L'utilité pratique des contraintes linéaires est si vaste, on se limite à citer quelques exemples comme :

- l'expression des conditions d'appui (Fig.3.1.a.),
- Déplacement relatif entre deux nœuds (Fig.3.1.b.),
- des éléments infiniment rigides (Fig.3.1.c.),
- des rotules parfaites (Fig3.1.d.).



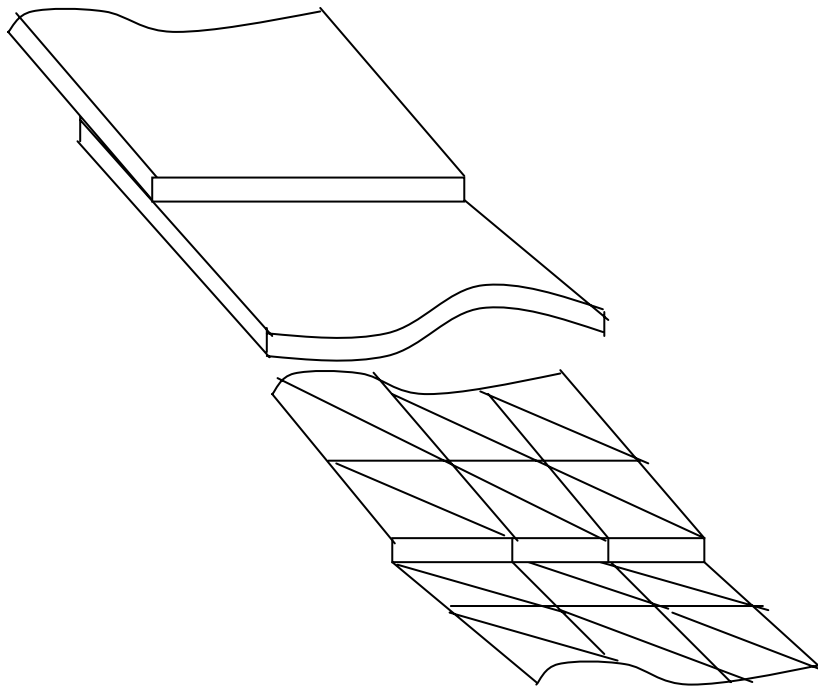
a.- Condition d'appui imposée par la contrainte :

$$-u_1 \sin \theta + v_1 \cos \theta = 0$$

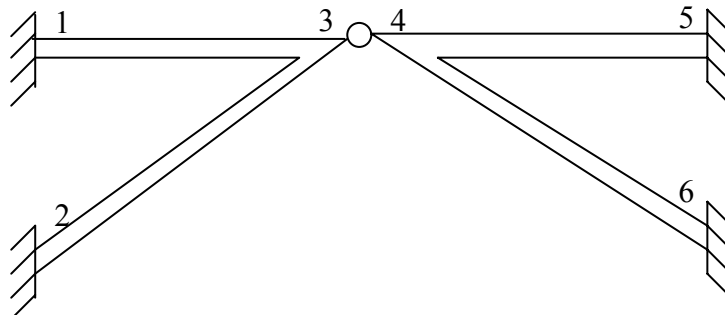


$$\delta = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

b- Déplacement relatif entre deux nœuds



c.- Eléments infiniment rigides



d.- Création d'une rotule par les contraintes :

$$u_3 = u_4 ; v_3 = v_4$$

FIG.3.1. Exemples d'emploi des contraintes linéaires

Pour introduire de telles contraintes dans le système d'équations de la structure analysée par la méthode des éléments finis, trois méthodes principales sont utilisées :

- Méthode de transformation matricielle,
- Méthode des fonctions de pénalité,
- Méthode des multiplicateurs de Lagrange.

3.2. Méthode de transformation matricielle

Les contraintes linéaires sont imposées au système d'équations par l'application d'une transformation matricielle de la matrice de rigidité identique à celle utilisée pour spécifier des axes locaux en certains nœuds de la structure.

3.2.1. Principe théorique

3.2.1.1. Transformation avec condensation de certains degrés de liberté

(Connue aussi sous le nom de « méthode Maître-esclave » (Master-Slave Method).)

En considérant que les (r) équations de contraintes linéaires seront présentées sous la forme générale :

$$[G] \cdot \{u\} = \{S\} \quad (3.1)$$

où :

$[G]_{r \times n}$: est la matrice des coefficients ;

$\{u\}_{n \times 1}$: est le vecteur des n déplacements nodaux ;

$\{S\}_{r \times 1}$: est le vecteur des seconds membres.

Pour chacune de ces équations, une composante des déplacements peut être condensé (composante esclave). Le vecteur $\{u\}$ est partitionné en trois vecteurs :

- $\{u_k\}$: contenant les composantes des déplacements non affectées par les contraintes ;
- $\{u_c\}$: contient les composantes intervenant dans les contraintes ;
- $\{u_a\}$: contient celles condensées.

L'équation (3.1) devient :

$$[[0] \quad [G_a] \quad [G_c]] \cdot \begin{Bmatrix} \{U_k\} \\ \{U_a\} \\ \{U_c\} \end{Bmatrix} = \{S\} \quad (3.2)$$

D'où:

$$\{U_c\} = -[G_c]^{-1} [G_a] \{U_a\} + [G_c]^{-1} \{S\} \quad (3.3)$$

Ce qui permet de définir la transformation :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \{U_k\} \\ \{U_a\} \\ \{U_c\} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [I] \\ [0] & [\Gamma_c] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{U_k\} \\ \{U_a\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ [G_c]^{-1} \cdot \{S\} \end{Bmatrix} \\ &= [\Gamma_c] \begin{Bmatrix} \{U_k\} \\ \{U_a\} \end{Bmatrix} + \{C\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Cette transformation peut être simplifiée en écrivant les contraintes directement sous la forme:

$$\{U_c\} = [G_a] \cdot \{U_a\} + \{S\} \quad (3.5)$$

Alors la matrice de transformation devient:

$$[\Gamma_c] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [I] \\ [0] & [G_a] \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Et le vecteur des constantes:

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{S\} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

L'application de cette dernière transformation au système d'équation original:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (3.8)$$

Avec:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{kk}] & [K_{ka}] & [K_{kc}] \\ [K_{ak}] & [K_{aa}] & [K_{ac}] \\ [K_{ck}] & [K_{ca}] & [K_{cc}] \end{bmatrix}$$

Fournit le système réduit:

$$[K^*] \cdot \begin{Bmatrix} \{U_k\} \\ \{U_a\} \end{Bmatrix} = \{F^*\} \quad (3.9)$$

où:

$$[K^*] = [\Gamma_c]^T \cdot [k] \cdot [\Gamma_c] \quad (3.10)$$

$$\{F^*\} = [\Gamma_c]^T \cdot \{F\} - [\Gamma_c]^T \cdot [k] \cdot \{C\} \quad (3.11)$$

dont les expressions détaillées sont :

$$[K^*] = \begin{bmatrix} [K_{kk}] & [K_{ka}] + [K_{kc}] \cdot [G_a] \\ [K_{ak}] + [G_a]^T \cdot [K_{ck}] & [K_{aa}] + [G_a]^T \cdot [K_a] + [K_{ac}] \cdot [G_a] + [G_a]^T \cdot [K_{cc}] \cdot \{S\} \end{bmatrix}$$

$$\{P^*\} = \begin{Bmatrix} \{P_k\} - [K_{kc}] \cdot \{S\} \\ \{P_c\} + [G_a]^T \cdot \{P_c\} - [K_{ac}] \cdot \{S\} - [G_a]^T \cdot [K_{cc}] \cdot \{S\} \end{Bmatrix}$$

Les nouvelles équations (3.9) fournissent les déplacements $\{u_k\}$ et $\{u_a\}$, tandis que les $\{u_c\}$ se calculent ensuite par (3.5).

3.2.1.2. transformation sans condensation

Ayant le système d'équations partitionné :

$$\begin{bmatrix} [K_{kk}] & [K_{ka}] & [K_{kc}] \\ [K_{ak}] & [K_{aa}] & [K_{ac}] \\ [K_{ck}] & [K_{ca}] & [K_{cc}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{U_k\} \\ \{U_a\} \\ \{U_c\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_k\} \\ \{P_a\} \\ \{P_c\} \end{Bmatrix} \quad (3.12.a,b,c)$$

On introduit les contraintes linéaires dans ce système en remplaçant (3.5) dans (3.12.a) et (3.12.b) et substituant (3.12.c) par (3.5) :

$$\begin{bmatrix} [K_{kk}] & [K_{ka}] + [K_{kc}].[G] & [0] \\ [K_{ak}] & [K_a] + [K_{ac}].[G^T] & [0] \\ [0] & -[G] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_k\} \\ \{U_a\} \\ \{U_c\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_k\} - [K_{kc}].\{S\} \\ \{F_a\} - [K_{ac}].\{S\} \\ \{S\} \end{Bmatrix} \quad (3.13.a,b,c)$$

Dans le but de rendre la matrice de rigidité symétrique, on pré-multiplie l'équation (2.12.c) par $[G_a]^T$ et on l'additionne à (2.13.b) ; puis on pré-multiplie (2.13.c) par $-[K_{cc}]$; on obtient le système transformé :

$$\begin{bmatrix} [K_{kk}] & [K_{ka}] + [K_{kc}].[G_a] & [0] \\ [K_{ak}] + [G_a]^T.[K_{ck}] & [K_{aa}] + [K_{ac}].[G_a] + [G_a]^T.[K_{ca}] & [G_a]^T.[K_{cc}] \\ [0] & [K_{cc}].[G_a] & -[K_{cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_k\} \\ \{U_a\} \\ \{U_c\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_k\} - [K_{kc}].\{S\} \\ \{F_a\} - [K_{ac}].\{S\} \\ -[K_{cc}].\{S\} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

La solution de (3.14) fournit directement les valeurs correctes de tous les déplacements, mais la matrice de rigidité contient des pivots négatifs.

3.2.2. Avantages et désavantages

La méthode de transformation matricielle a l'avantage d'être exacte et réduit le nombre d'inconnus.

- La méthode de transformation avec condensation a :
 - L'avantage de ne pas provoquer des difficultés numériques pendant la résolution du système d'équations réduit, car la matrice de rigidité réduite reste définie positive, mais :
 - Elle exige des calculs supplémentaires pour retrouver les inconnues condensées.
- La méthode de transformation sans condensation :
 - Fournit les valeurs de toutes les inconnues pendant la résolution du système d'équations, mais :
 - Elle produit des pivots négatifs dans la matrice de rigidité.

Les deux méthodes ont les désavantages importants suivants :

- Elles exigent des manipulations de programmation plus compliquées que celles exigées par d'autres méthodes.
- Elles augmentent fortement la largeur de bande de la matrice de rigidité, et la prévision topologique de cette augmentation n'est pas aisée à programmer.

3.3. Méthode des fonctions de pénalité

Chaque équation linéaire implique la présence d'un élément structural fictif dit « élément de pénalité », cet élément est paramétré numériquement par un « poids ». la contrainte exacte est obtenue si le poids tend vers l'infini, les contraintes sont imposées en augmentant les modes des éléments finis par des éléments de pénalité.

3.3.1. Principe théorique [COO 81, ZIE 77]

Les contraintes (3.1) seront écrite sous la forme suivante :

$$\{t\} = [G] \{u\} - \{S\}$$

Si les contraintes sont satisfaites, $\{t\}$ est nul et le produit suivant aussi :

$$\{t\}^T \cdot \{t\} = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \dots + t_r^2 = 0 \quad (3.16)$$

L'énergie potentielle du système original est :

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T \{P\} \quad (3.17)$$

La méthode consiste à augmenter la fonction Π par une fonction de pénalité :

$$\Pi_p = \Pi + \frac{1}{2} \{t\}^T [\alpha] \{t\} \quad (3.18)$$

Où $[\alpha]$ est une matrice diagonale qui contient les coefficients de pénalité α_i ; ces derniers peuvent être identiques et l'énergie augmentée devient :

$$\Pi_p = \Pi + \frac{1}{2} \alpha \{t\}^T \{t\} \quad (3.19)$$

Quand $\{t\} = \{0\}$, le terme additionnel est nul est la valeur de l'énergie ne change pas.

Exprimons la condition stationnaire de l'énergie $\frac{\partial \pi_p}{\partial \{u\}}$; on trouve le nouveau système

d'équations :

$$[[K] + [G]^T [\alpha] [G]] \{u\} = \{P\} + [G]^T [\alpha] \{S\} \quad (3.20)$$

Où

$$[K] \{u\} = \{P\}$$

Si $[\alpha] = [0]$, les contraintes sont ignorées ; si on augmente la valeur des α_i ; $\{u\}$ change de valeur d'une façon telle que les contraintes seront de mieux en mieux satisfaites ; mais lorsque les α_i deviennent de très grands chiffres, la précision décroît et des problèmes numériques peuvent surgir.

3.3.2. Interprétation Physique

Le terme de pénalité $[G]^T \cdot [\alpha] \cdot [G]$ est interprété physiquement comme étant la rigidité de l'élément fictif qui lie les nœuds contraints pour réaliser la contrainte imposée ; donc si $[\alpha]$ devient trop grand, on aura des erreurs numériques semblables à celles dues à la présence d'un élément très rigide parmi les éléments de la structure.

3.3.3. Avantages Et Désavantages

L'introduction des contraintes linéaires par la méthode des fonctions de pénalité a les avantages :

- D'être simple ;
- De ne pas augmenter la largeur de bande de la matrice de rigidité ni le nombre d'inconnues ;
- D'être facilement extensible aux contraintes non-linéaires ;
- D'être facilement extensible à l'analyse non linéaire ;
- La définition positive de $[k]$ n'est pas perdue.

Mais a un inconvénient essentiel est que :

- La précision des résultats dépend de l'expérience de l'utilisateur par le choix des coefficients α_i ; cette méthode peut donc provoquer des erreurs numériques autres que les erreurs d'arrondi.

3.4. Méthode des multiplicateurs de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange est utilisée pour trouver l'extremum d'une fonction dont les variables ne sont pas toutes indépendantes. Ici la fonction est l'énergie

potentielle et les variables sont les composantes des déplacements qui doivent remplir des relations supplémentaires exprimées par les contraintes linéaires.

Dans la suite de ce travail, nous étudions soigneusement cette méthode et son application à l'introduction des contraintes linéaires dans le code ALGMEF.

3.4.1. Principe théorique

Considérons les contraintes linéaires (3-1)

$$\{t\} = [G]\{U\} - \{S\} = \{0\}$$

En pré-multipliant le vecteur $\{t\}$ par le vecteur $\{\lambda\}$ qui contient autant de multiplicateurs de Lagrange qu'il y a de contraintes linéaires et en ajoutant ce produit à l'expression de l'énergie potentielle du système original (3-3), l'énergie ne change pas de valeur puisque $\{t\} = \{0\}$.

On trouve la nouvelle expression de l'énergie :

$$\begin{aligned} \Pi_L &= \Pi + \{\lambda\}^T ([G]\{U\} - \{S\}) \\ \Pi_L &= \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} - \{U\}^T \{F\} + \{\lambda\}^T ([G]\{U\} - \{S\}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Cette dernière fonction a comme variables les déplacements $\{u\}$ et les multiplicateurs de Lagrange $\{\lambda\}$.

La condition stationnaire de Π_L est donnée par les deux équations :

$$\frac{\partial \Pi_L}{\partial \{U\}} = 0, \quad [K]\{u\} + [G]^T \{\lambda\} = \{F\} \quad (3.22.a)$$

$$\frac{\partial \Pi_L}{\partial \{\lambda\}} = 0, \quad [G]\{u\} = \{S\} \quad (3.22.b)$$

Et le nouveau système d'équations devient :

$$\begin{bmatrix} [K] & [G]^T \\ [G] & [0] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{S\} \end{Bmatrix}$$

$$(3.23)$$

La résolution de (3.23) fournit les valeurs exactes de tous les déplacements et les multiplicateurs de Lagrange; ces derniers sont susceptibles d'une interprétation physique attrayante comme on le démontrera ultérieurement.

On remarque que les équations (3.23) sont semi-définies positives, ce qui exige certaines précautions pour le choix de l'algorithme de résolution utilisé; l'utilisation de l'élimination de Gauss nécessite le respect de plusieurs règles pour l'ordre d'introduction des équations des contraintes dans le système d'équations original; ces règles seront expliquées en détail plus tard.

GALLAGHER [GAL 75] a proposé une méthode pour éviter la présence des termes nuls sur la diagonale du système (3.23); la résolution de (3.23) donne :

$$\{u\} = [K]^{-1} \{F\} - [K]^{-1} [G]^T \{\lambda\} \quad (3.24)$$

Remplaçons (3.24) dans (3.22.b.); on trouve :

$$\{\lambda\} = ([G][K]^{-1}[G]^T)^{-1} ([G][K]^{-1}\{F\} - \{S\}) \quad (3.25)$$

Calculons d'abord le vecteur $\{\lambda\}$, on peut tirer $\{u\}$ par (3.24) ; mais cette méthode ne peut pas être appliquée aux structures dont les conditions d'appui sont spécifiées par les contraintes linéaires, car $[K]$ ne doit pas être singulière.

3.4.2. Interprétation physique des multiplicateurs de Lagrange :

Considérons un solide de volume V soumis à des forces de volumes F_i et des tractions de surface T_i appliquées sur la surface A_T du solide; A_u est la surface sur laquelle les conditions cinématique aux limites sont imposées; A^* est la surface sur laquelle des conditions cinématique supplémentaires sont imposées sous forme de contraintes linéaires.

L'énergie potentielle totale de ce solide est donnée par (cas linéaire):

$$\Pi_L = U + V + \Pi^* \quad (3.26)$$

Et la condition stationnaire est donnée par :

$$\delta \Pi_L = \delta U + \delta V + \delta \Pi^* = 0 \quad (3.27)$$

Où :

$$\Pi^* = \{\lambda\}^T ([G]\{u\} - \{S\}) \quad (3.28)$$

Vu que (3.28) est une relation discrète (déplacements nodaux $\{u\}$ du solide), il faut aussi exprimer les termes de $\delta\Pi_L$ de manière discrète.

L'énergie interne s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv$$

Et sa variation est :

$$\delta U = \int_v \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dv = \int_v \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}$$

L'application du théorème de Green fournit :

$$\delta U = - \int_v \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dv + \int_A \sigma_{ij} \delta u_i n_j dA$$

Où A est la surface totale du solide ; matriciellement cette expression s'écrit :

$$\delta U = \int_v \{\delta \bar{u}\}^T [\mathcal{E}]^T \{\sigma\} dv + \int_A \{\delta \bar{u}\}^T [\sigma] [c] dA \quad (3.29)$$

Où :

$\{\bar{u}\}$: est le champ des déplacements ;

$\{c\}$: est le vecteur des cosinus directeurs ;

$[\mathcal{E}]^T$: est une matrice d'opérateurs différentiels.

Après discrétisation, le champ des déplacements est donné en fonction des déplacements nodaux $\{u\}$ par :

$$\{\bar{u}\} = [N] \{u\}$$

et (3.29) devient :

$$\delta U = - \int_v \{\delta u\}^T \int [N]^T [\mathcal{E}]^T \{\sigma\} dv + \int_A \{\delta u\}^T \int [N]^T [\sigma] [c] dA \quad (3.30)$$

L'expression de l'énergie externe est donnée par :

$$V = - \int_{v^i} \bar{F}_i \delta u_i dV - \int_{A_T} \bar{T}_i u_i dA$$

et sa variation est :

$$\delta V = - \int_v \bar{F}_i \delta u_i dV - \int_{A_T} \bar{T}_i \delta u_i dA$$

Matriciellement cette variation s'écrit :

$$\delta V = - \int_v \{\delta \bar{u}\}^T \{F\} dV - \int_{A_T} \{\delta \bar{u}\}^T \{T\} dA \quad (3.31)$$

Après discrétisation, (3.31) devient :

$$\delta V = -\{\delta u\}^T \int_V [N]^T \{F\} dV - \{\delta u\}^T \int_{A_T} [N]^T \{T\} dA \quad (3.32)$$

Dans l'expression (3.28), la variation doit porter sur les variables $\{u\}$ et $\{\lambda\}$:

$$\delta \Pi^* = \{\delta u\}^T [G]^T \{\lambda\} + \{\delta \lambda\}^T ([G]\{u\} - \{S\}) \quad (3.33)$$

En remplaçant (3.30), (3.32) et (3.33) dans (3.27) ; on trouve :

$$\begin{aligned} & -\{\delta u\}^T \int_V [N]^T \left([S]^T \{\sigma\} + \{F\} \right) dV + \{\delta u\}^T \int_{A_T} [N]^T (\{\sigma\} [c] - \{T\}) dA \\ & + \{\delta u\}^T \left(\int_A [N]^T (\{\sigma\} [c] dA + [G]^T \{\lambda\}) + \{\delta \lambda\}^T ([G]\{u\} - \{S\}) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Il en résulte (équations d'Euler) :

$$\text{Equilibre en volume } [S]^T \{\sigma\} + \{F\} = \{0\} \text{ dans } V \quad (3.35)$$

$$\text{Equilibre en surface } \{\sigma\} [c] - \{T\} = \{0\} \text{ sur } A_T \quad (3.36)$$

$$\text{Conditions cinématiques } [G]\{u\} - \{S\} = \{0\} \text{ sur } A^* \quad (3.37)$$

$$\text{Et l'équation } \{f\} + [G]^T \{\lambda\} = \{0\} \text{ sur } A^* \quad (3.38)$$

Où

$$\{f\} = \int_{A^*} [N]^T \{\sigma\} [c] dA : \text{ est l'expression des forces internes nodales}$$

L'équation (3.38) montre donc que le produit $[G]^T \{\lambda\}$ s'identifie au vecteur des forces internes nodales dues aux contraintes linéaires, mais avec un signe inverse $[G]^T \{\lambda\} = -\{f\}$.

$[G]$, qui ne contient que des constantes, s'identifie à une matrice de connexion ;

$\{f\}$, sont les forces nodales associées aux déplacements $\{u\}$, et « moins » les multiplicateurs de Lagrange $\{\lambda\}$ s'identifient aux forces internes conjuguées aux déplacements $\{S\}$. Ainsi l'équation (3.38) est l'équation statique associée à l'équation cinématique (3.37).

3.4.3. Energie interne

L'énergie interne U en présence de contraintes linéaires s'écrit, à partir de (3.21) :

$$U_\lambda = \frac{1}{2} \{u\}^T [K]\{u\} + \{\lambda\}^T ([G]\{u\} - \{S\})$$

L'introduction de $[K]\{u\}$ tiré de (3.16.a) dans cette relation, puis de $[G]\{u\}$ tiré de (3.22.b), donne :

$$U_\lambda = \frac{1}{2}\{u\}^T \{F\} - \frac{1}{2}\{\lambda\}^T \{S\} \quad (3.39)$$

L'énergie interne n'est donc affectée par les contraintes linéaires que si celle-ci ont des termes indépendants $\{S\}$.

3.4.4. Instabilité

En stabilité, on ne peut introduire que des contraintes linéaires homogènes de la forme :

$$[G]\{u\} = \{0\}$$

Et le critère d'instabilité matriciel, tiré de (3.23), s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [K_t] & [G]^T \\ [G] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{du_c\} \\ \{d\lambda_c\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.40)$$

En instabilité linéaire d'Euler, on aura donc simplement :

$$\left(\begin{bmatrix} [K_t] & [G]^T \\ [G] & [0] \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} [K_\sigma] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{u_c\} \\ \{\lambda_c\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.41)$$

Où :

μ : Est la valeur propre (multiplicateur critique),

$[K_\sigma]$: La matrice des contraintes initiales

Le problème reste donc essentiellement le même qu'en l'absence de contraintes linéaires, et on généralise sans peine à l'instabilité non linéaire.

3.4.5. Avantages et désavantages

3.4.5.1. Avantages

La méthode des multiplicateurs de Lagrange est largement utilisée pour introduire les contraintes linéaires dans le système d'équations de la structure ; en effet :

- Elle est simple, naturelle et efficace ;

- Elle permet de formuler les contraintes les plus générales et peut être étendue pour imposer des contraintes non-linéaires ;
- Un avantage essentiel est qu'elle fournit les valeurs exactes de tous les déplacements (si l'on néglige les erreurs d'arrondi) ;
- Elle n'augmente que peu la largeur de bande, par rapport à la méthode de transformation matricielle, et les manipulations de programmation nécessaires sont nettement moindres.

3.4.5.2. Désavantages

Le problème le plus délicat de cette méthode est :

Qu'elle rend la matrice de rigidité semi-définie positive, la présence de termes nuls sur la diagonale peut être à l'origine de diverses difficultés numériques pour la résolution du système d'équations.

Malgré que le nombre d'inconnues s'accroît, cette méthode reste plus efficace que celle de transformation matricielle tant que le nombre des contraintes reste limité vis-à-vis de celui des inconnues, car la largeur de bande reste plus petite.

Le tableau suivant résume les propriétés des trois méthodes :

Propriété	Matricielle	Pénalité	Lagrange
Facilité d'implémentation	Pauvre-moyenne	Bonne	Moyenne
Sensitivité aux décisions de l'utilisateur	Haute	Haute	Faible
Précision	Variable	Médiocre	Excellente
Sensitivité en regard des dépendances de contraintes linéaires	Elevée	Nulle	Elevée
Garder la matrice [K] définie positive	Oui	Oui	Non
Modification de la dimension du vecteur {f}	Oui	Non	Oui
Généralité	Considérable	Excellente	Excellente

Tab.3.1. Résumé d'évaluation des méthodes d'imposition des contraintes linéaires

3.5. Conclusion

Le traitement des contraintes linéaires dans les systèmes analysés par la méthode des éléments finis peut être effectué par différentes méthodes, trois ont été présentées :

- Méthode matricielle ;
- Méthode des fonctions de pénalité :
- Méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Il est à noter, qu'aucune n'est uniformément satisfaisante en terme de généralité, comportement numérique et simplicité d'implémentation. (Voir Tab3.1)

Pour un programme, dont le but est d'approcher le comportement (avec le minimum de décisions de la part de l'utilisateur), la méthode des multiplicateurs de Lagrange est appropriée, mais elle a une complexité d'implémentation remarquable, en plus de la perte de la définition positive de la matrice de rigidité.[ZIE 01]

4. Le Code "ALGMEF" et l'Introduction Pratique des Contraintes Linéaires

Au niveau de ce chapitre on présente :

- Le programme de calcul statique des structures "ALGMEF" élaboré par Mr BELARBI pour le calcul par EF en Algérie, sur lequel on va appliquer des modifications afin d'étendre son domaine d'application: Permettre à ses utilisateurs de pouvoir introduire des relations cinématiques linéaires entre les composantes des déplacements des nœuds qu'on baptise dans ce travail "Contraintes Linéaires" (CL), ainsi que :

- La méthode choisie pour imposer ces contraintes linéaires soit : la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

- Et enfin les modifications apportées à "ALGMEF" après l'application de la méthode précitée.

4.1. Introduction

Les problèmes d'élasticité plane peuvent être divisés en deux groupes distincts , les problèmes de contraintes planes et les problèmes de déformation plane. Dans le premier cas, la structure a une petite épaisseur par rapport à ses autres dimensions et les contraintes normales au plan sont négligées ; tandis que dans le deuxième cas la structure a une dimension très grande par rapport à ses autres dimensions et la déformation normale au plan de la charge est nulle.

Ce code traite la formulation d'éléments représentant des plaques planes minces soumises à des contraintes agissant dans le plan de l'élément. Il permet la modélisation des éléments structuraux en élasticité plane.

4.2. Etapes de base du programme « ALGMEF »

4.2.1. Présentation du programme « ALGMEF »

ALGMEF a été élaboré d'une manière structurée, il est constitué de plusieurs sous programmes où le passage des paramètres ne s'effectue pas lors de l'appel du sous programme, mais par le biais de blocs communs « COMMON » étiquetés, ce qui facilite la programmation et la rend très souple car on ne sera pas contraint à chercher les paramètres qui doivent passer d'une routine à une autre.

Comme tout programme d'éléments finis, ALGMEF nous fait passer par les étapes suivantes :

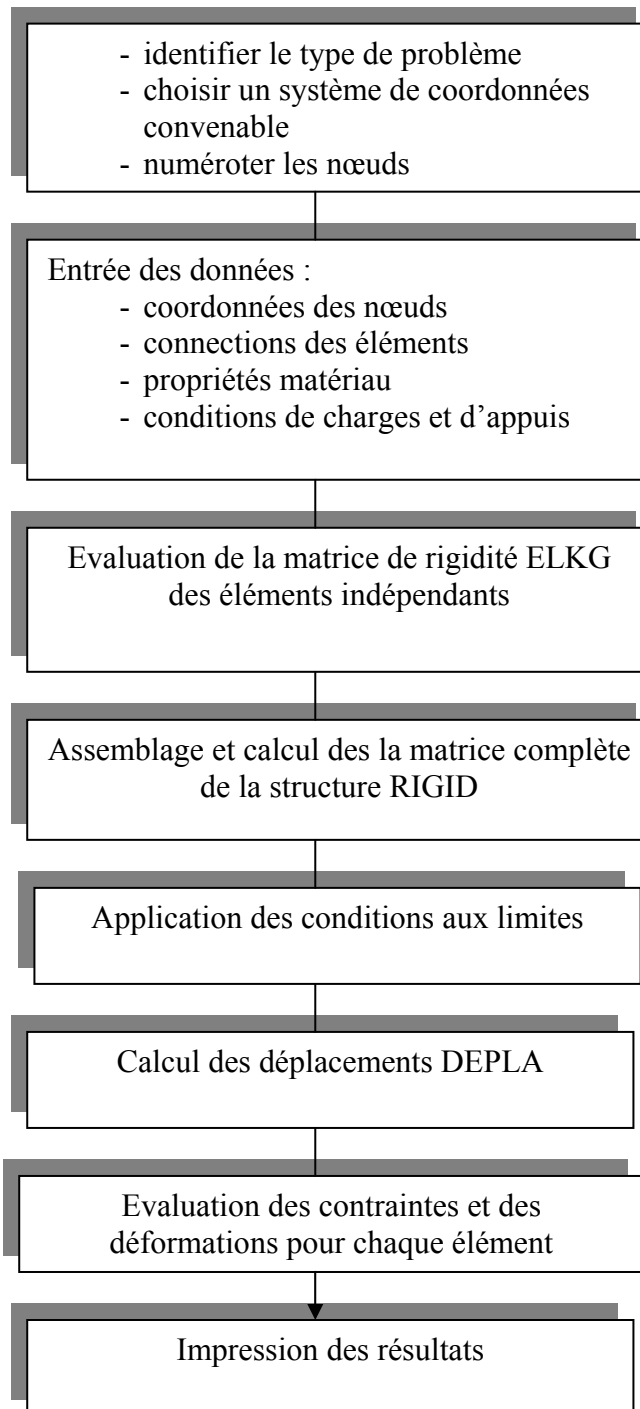


FIG. 4.1. Etapes Principales du programme « ALGMEF »

4.2.2. Description des étapes

Une description détaillée des différentes étapes est présentée ci-dessous :

Etape 1 : Fixation des termes constants qui définissent l'élément :

- NNOEL : Nombre de nœuds par élément,
- NDLEL : Nombre de degrés de liberté par élément,
- NTNO : nombre total de nœuds de la structure idéalisée,
- NTEL : nombre total d'éléments de la structure idéalisée,
- NTDI : nombre total de déplacement imposés,
- NTFI : nombre total de forces imposées,
- LB : largeur de bande .

Tous ces paramètres sont gérés par la sous routine « DEFINITION ». Cette sous routine peut accéder à plusieurs blocs communs, où elle stocke les paramètres lus, afin qu'ils puissent être exploités par d'autres sous routines.

Etape 2 : Entrée des données

Cette partie est traitée dans une routine appelée « LIRE » qui permet de saisir puis imprimer les données concernant la structure à modéliser.

Les données principales à évaluer sont les suivantes :

- Coordonnées : seront générées par la sous-routine « DCOOR »,
- Connections : « DICON »,
- Sections : « DSECT »,
- Matériaux : « DPHYS »,
- Conditions d'appui : « DDEPI »,
- Forces imposées : « DFORI ».

Etape 3 : Evaluation des matrices de rigidité élémentaires

Après avoir lu les données et formé toutes les tables nécessaires à la modélisation , on procède à l'élaboration des matrices et vecteurs élémentaires par le biais du sous programme « DEPLACEMENT » qui permet de former la matrice de rigidité élémentaire.

Etape 4 : Assemblage

Toutes les matrices représentant les éléments de la structure sont assemblées pour créer un modèle global représenté par un ensemble d'équations. Le principe est basé sur le fait qu'à chaque nœud où des éléments sont reliés, la valeur du déplacement est la même pour tous les éléments reliés à ce nœud.

L'assemblage est géré par la sous-routine « ASSEMV ». Parmi les méthodes de stockage de la matrice de rigidité global, le stockage vectoriel (la bande est incluse) a été opté, en effet ce type de stockage diminue la dimension de la matrice de rigidité pour qu'on puisse calculer de grandes structures en utilisant un grand nombre d'éléments.

Etape 5 : La prise en compte des conditions aux limites :

En général, la structure s'appuie sur plusieurs nœuds pour lesquels certains déplacements sont interdits. Dans de tels cas, il est nécessaire d'enlever les lignes et les colonnes appropriées de la matrice [RIGID] stockée vectoriellement (RIGID).

La technique utilisée par ALGMEF pour cela est celle de multiplier les termes diagonaux de [RIGID], correspondant aux déplacements fixés ($RIGID[i,i]$) par un grand nombre : $GRAND = 10^{30}$.

Etape 6 : Résolution du système :

La méthode de résolution utilisée dans le code « ALGMEF » est celle de CHOLESKY. Cette méthode est applicable aux matrices symétriques, définies positives. Elle consiste à décomposer la matrice [RIGID] (stockée vectoriellement) en deux matrices triangulaires. Suite à cette décomposition, des opérations sont effectuées sur le vecteur de chargement pour aboutir aux déplacements.

Cette étape est réalisée par la routine « RESOL »

Etape 7 : Evaluation des efforts

Il s'agit d'évaluer les efforts dans chaque nœud, par le biais du sous-programme EFFORT.

Etape 8 : Impression des résultats

C'est la sous-routine « SORTIE » qui effectue cette opération, elle imprime les résultats dans un fichier préalablement défini.

4.3. Structure générale du code « ALGMEF »

Le code « ALGMEF » (Programme Principal), pour l'élément poutre, ainsi que les deux sous-programmes dont les modifications ont touché le plus (sous-programmes LIRE et DEPLACEMENTS) sont structurés comme suit : (Figures 5.1, 5.2, 5.3).

Le programme traitant l'élément membrane avec rotation et poutre SBQ4-P, avant est après la réalisation des modifications seront présentés sur l'annexe B.

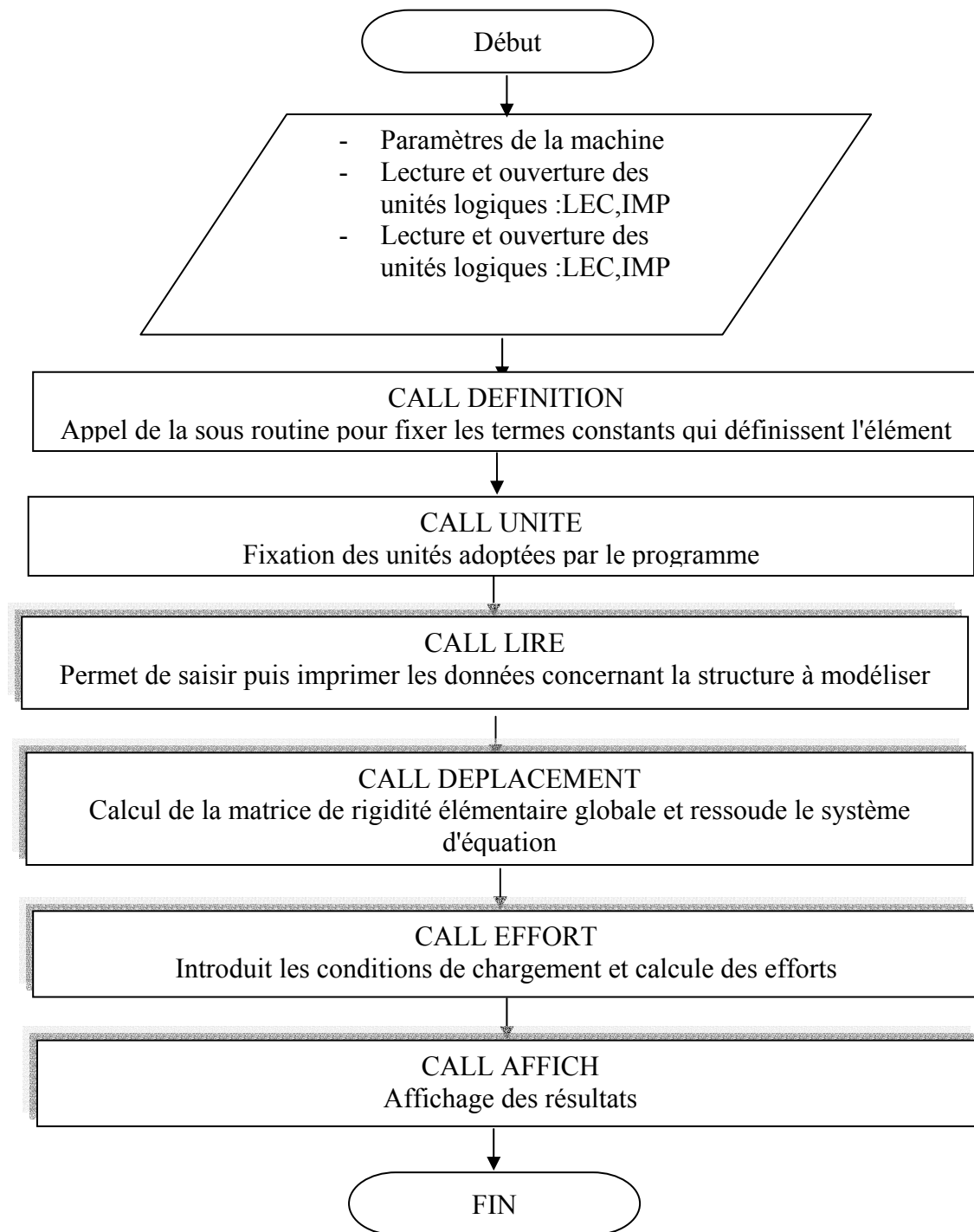


FIG.4.2. Organigramme de ALGMEF

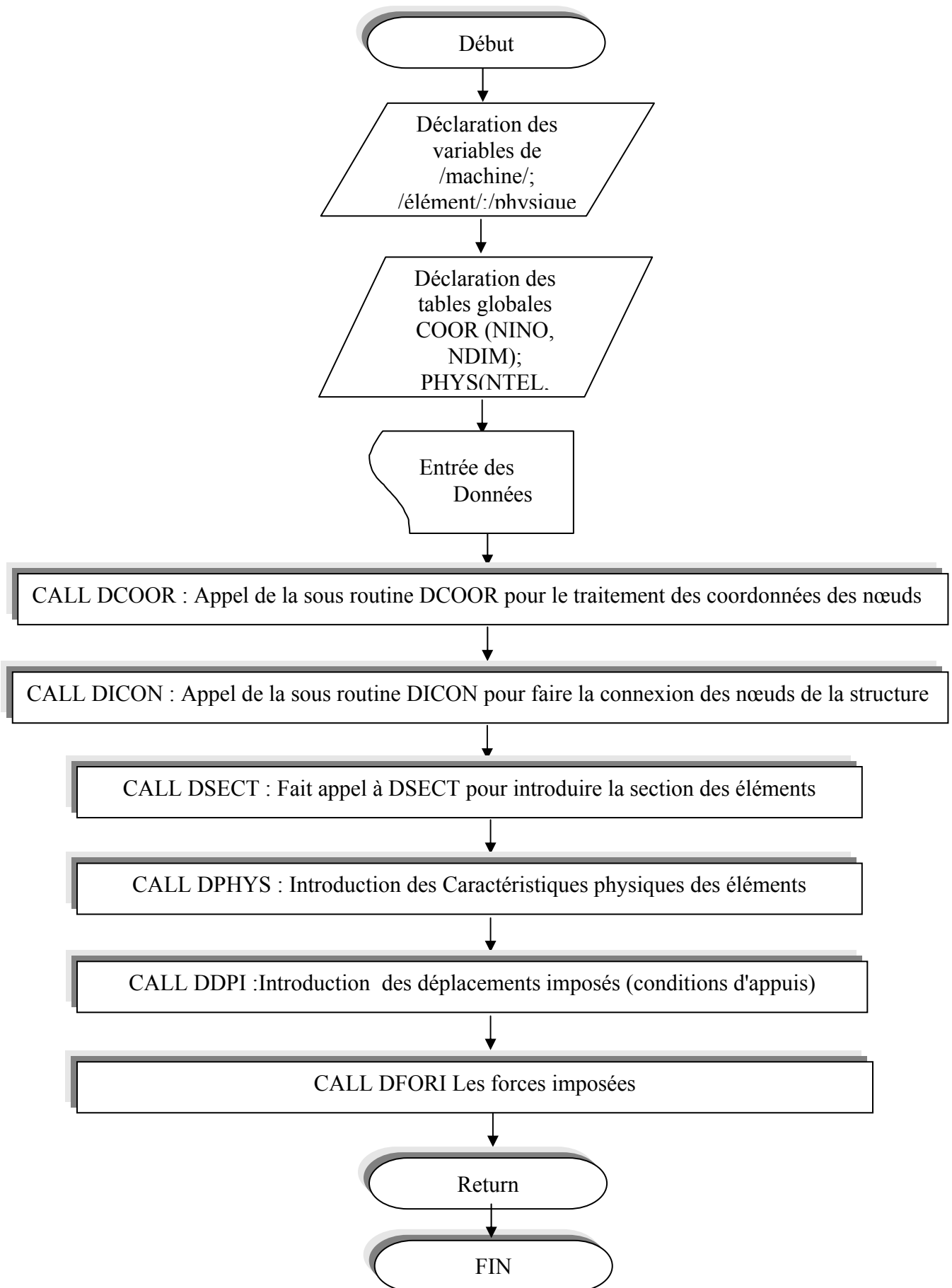


FIG.4.3. Organigramme de la Sous routine LIRE

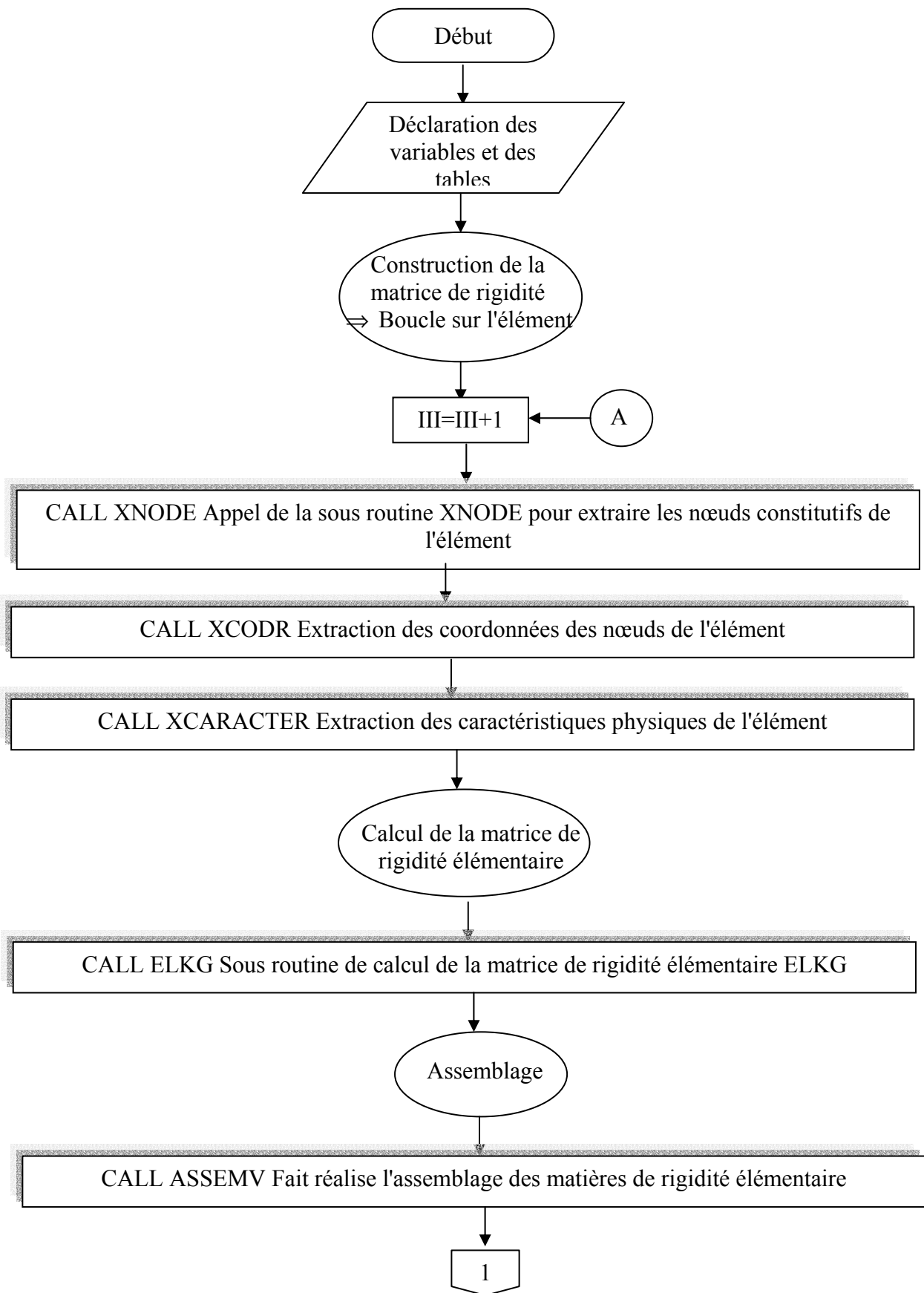


FIG.4.4.a. Organigramme de la Sous routine DEPLACEMENT

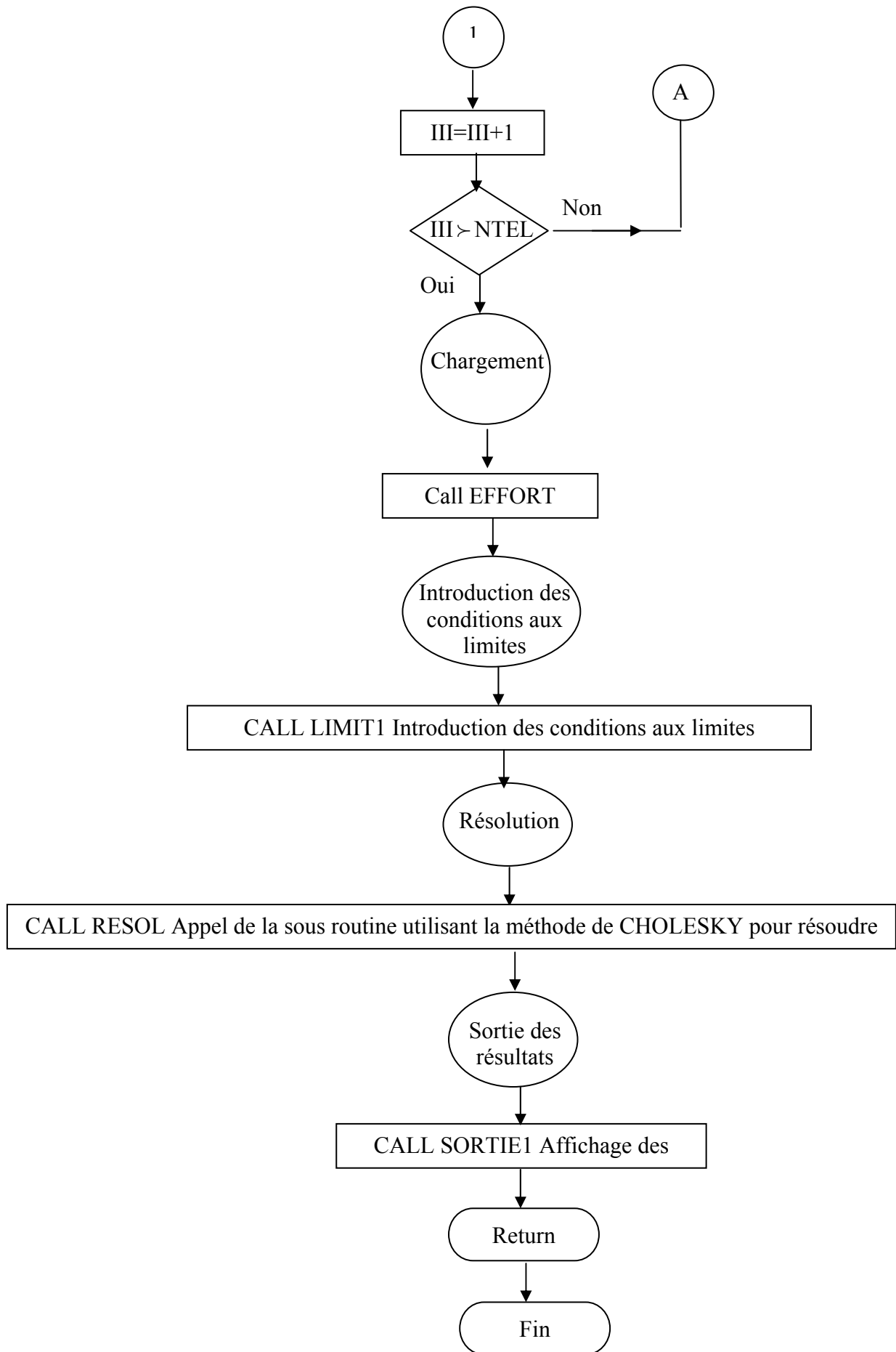


FIG.4.4.b. Organigramme de la Sous routine DEPLACEMENT(suite)

4.4. Introduction des contraintes linéaires dans le code « ALGMEF » :

4.4.1. Introduction :

Les multiplicateurs de Lagrange sont traités comme les autres degrés de liberté de la structure ; ils doivent être numérotés de façon à conserver une largeur de bande aussi petite que possible.

Cette numérotation des multiplicateurs $\{\lambda\}$ est réalisée par l'introduction des nœuds fictifs associés aux équations des contraintes linéaires.

Un nœud fictif associé à une contrainte est lié par des éléments finis fictifs aux nœuds de la structure dont les degrés de liberté contribuent à cette contrainte ; on doit donc spécifier autant d'éléments fictifs qu'il y a de nœuds de la structure affectés par cette contrainte.

Pour définir un élément fictif de contrainte, il faut donner les paramètres suivants :

1. Le numéro du nœud fictif auquel la contrainte est associée ;
2. le numéro du nœud de la structure dont un ou plusieurs degrés de liberté interviennent dans cette contrainte ;
3. les degrés de liberté en question ;
4. les coefficients associés à ces degrés de liberté (g_{ij}) ;
5. le second membre éventuel de cette contrainte (S_i).

L'assemblage de tous les éléments fictifs forme l'équation de la contrainte :

$$g_{i1} u_1 + g_{i2} u_2 + g_{i3} u_3 + \dots + g_{in} u_n = S_i \quad (i=1, \dots, r) \quad (4.1)$$

4.4.2. Méthode utilisée et sa mise en oeuvre

Les contraintes linéaires sont introduites dans ALGMEF par la méthode des multiplicateurs de Lagrange grâce à des éléments de contraintes.

Les contraintes sont considérées sous la forme générale :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l g_{i,j,k} u_{j,k} = s_i \quad (i = 1, \dots, r) \quad (4.2)$$

Où :

i : numéro de l'équation de contrainte,

r : nombre de ces équations ;

j : numéro du nœud de la structure dont un ou plusieurs d.d.l interviennent dans l'équation,

m : nombre de ces nœuds ;

k : numéro du d.d.l du nœud (j),

l : nombre de ces d.d.l ;

$u_{j,k}$: composantes globales des déplacements nodaux.

- chaque contrainte (i) doit être associée à un degré de liberté d' un nœud fictif NF .
- Pour chaque contrainte, on doit spécifier autant d'éléments de contraintes (j) qu'il y a de nœuds (j) de la structure qui interviennent dans (4.1).
- Chaque élément fournit les coefficients $g_{i,j,k}$ correspondants aux k d.d.l du nœud NS de la structure lié à NF pour cet élément.
- Le second membre S_i s'interprète physiquement comme un déplacement imposé .

De cette façon, on construit l'équation de contrainte dans le système d'équations comme pour des éléments finis traditionnels.

Les contraintes linéaires sont repérées par ALGMEF par le nombre des équations-contraintes NTCL, si ce dernier est non nul, le calcul en contraintes linéaires sera activé, sinon, ALGMEF réalise sa tâche initiale et principale (calcul statique).

4.4.3. Élément de contrainte linéaire

L'élément de contrainte linéaire est un élément fictif dont la matrice de rigidité contribue à la construction d'une équation de contrainte linéaire par une expression de la forme :

$$\sum_k g_{i,j,k} u_{j,k} \quad k = 1, \dots, NDDLNO$$

Cet élément est défini par ses deux nœuds NF et NS, la sous-routine XNODE1 détecte le nœud fictif NF en utilisant une variable logique FICT, si FICT est vrai ,d'autres variables logiques nous fournissent sa position, ensuite la construction de la matrice de rigidité sera lancée. Cette matrice est constituée de trois blocs (Figure4.1.) dont les deux diagonaux sont nuls et le troisième contient la ligne (s) non-nulle (s) fournissant les $g_{i,j,k}$. Ses dimensions NDLEL x NDLEL dépendent du type de structure auquel les contraintes sont imposées.

La formation des contraintes linéaires à partir des éléments fictifs est illustrée dans le schéma suivant :

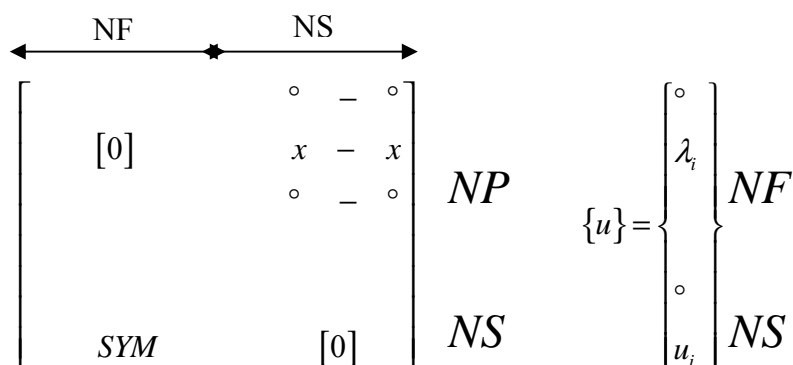


FIG.4.5. Allure de la matrice de rigidité $[k]$ et du vecteur d'inconnues $\{u\}$ d'un élément fictif

Les seconds membres des contraintes linéaires $\{S\}$ s'interprètent comme des déplacements, ils sont introduits comme des charges concentrées aux nœuds fictifs, on peut donc effectuer, par contrainte linéaire, l'analyse d'une structure soumise à un déplacement imposé.

Lors de la résolution du système d'équations, la présence des contraintes linéaires peut être à l'origine de l'apparition de pivot négatifs, ce qui contrarie la condition de la décomposition de CHOLESKY adoptée par ALGMEF, cela a conduit à adopter l'élimination de Gauss .

En utilisant l'élimination de Gauss comme algorithme de résolution, les contraintes linéaires peuvent être à l'origine du blocage du système de résolution ; pour éviter de telles difficultés numériques pendant la triangularisation, il faut respecter plusieurs règles de numérotation des nœuds et, par conséquent, l'ordre d'introduction des équations de contraintes.

4.4.4. Ordre d'introduction des contraintes et triangularisation du système

Pendant la triangularisation du système d'équations, on peut obtenir un blocage de la résolution à cause de la présence d'un pivot nul correspondant au d.d.l associé à une contrainte linéaire. Pour se prémunir contre ce problème, il faut respecter les règles suivantes :

REGLE 01

Pour chaque contrainte linéaire introduite au nœud fictif NF et faisant intervenir certains nœuds NS de la structure, il faut s'assurer qu'il existe au moins un nœud NS dont le numéro est plus petit que celui de NF.

Le respect de cette règle est contrôlé par le programme ; il en résulte en particulier qu'on ne peut pas placer les équations de contraintes en tête du système.

REGLE 02

Un degré de liberté bloqué d'un nœud de la structure ne peut pas intervenir dans une contrainte linéaire, mais sera introduit comme déplacement imposé à ce nœud.

Cette règle a pour but d'éviter de mélanger les conditions d'appui et les contraintes linéaires, pour la raison suivante :

Si les degrés de liberté des nœuds de la structure NS dont le numéro est plus petit que celui de NF sont bloqués, leur élimination (en tant qu'équations réactions) avant résolution , fera à nouveau apparaître un pivot nul dans l'équation de contrainte linéaire.

REGLE 03

Deux équations de contraintes linéaires, dont tous les d.d.l des NS inférieurs aux NF sont communs, ne doivent pas se suivre dans le système d'équations.

Deux telles équations peuvent être introduites dans deux d.d.l d'un même NF, ou dans deux NF numérotés successivement.

REGLE 04

Les d.d.l d'un nœud fictif non concernés par une contrainte linéaire doivent être bloqués. Ce blocage nous évite de trouver un pivot nul pendant la triangularisation.

4.5. Exemple

La figure (4.6.) montre une poutre console formée de 4 éléments et soumise aux contraintes suivantes qu'imposent l'alignement des éléments 3 et 4:

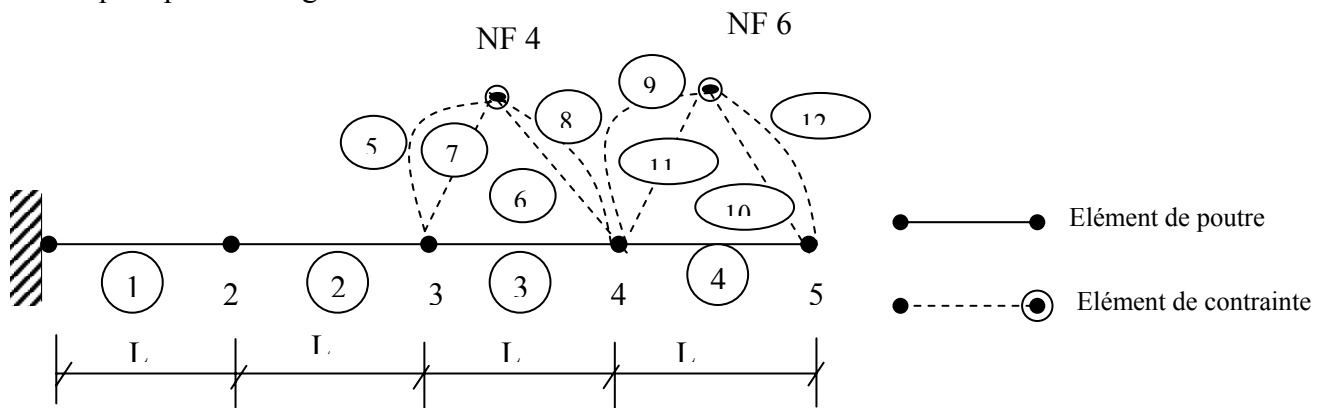


FIG.4.6. : poutre soumise aux contraintes linéaires.

$$1) \theta_3 - \frac{1}{25}v_5 + \frac{1}{25}v_3 = 0 \quad \text{associée au multiplicateur } \lambda_1$$

$$2) v_5 - v_3 - 25\theta_5 = 0 \quad \text{associée au multiplicateur } \lambda_2$$

$$3) v_7 - v_5 - 25\theta_5 = 0 \quad \text{associée au multiplicateur } \lambda_3$$

$$4) \theta_5 - \theta_7 = 0 \quad \text{associée au multiplicateur } \lambda_4$$

contrainte	N° de l'élément	NF	KDOF	NS	K (No. du d.d.l. de NS)		G _{ij,k}			Partie de la contrainte construite par l'élément
(1)	5	4	3	3	2	3	0.04	1.0		0.04v ₃ +θ ₃
	6	4	3	5	2		-0.04			-0.04v ₅
(2)	7	4	2	3	2		-1.0			-1.0v ₃
	8	4	2	5	2	3	1.0	-	25.0	1.0v ₅ -25.0θ ₅
(3)	9	6	2	5	2	3	-1.0	-	25.0	-1.0v ₅ -25.0θ ₅
	10	6	2	7	2		1.0			1.0v ₇
(4)	11	6	3	5	3		1.0			1.0θ ₅
	12	6	3	7	3		-1.0			-1.0θ ₅

Tab.4.1. Association des contraintes linéaires aux éléments fictifs correspondants

L'introduction de ces contraintes exige la spécification de deux nœuds fictifs (NF4 et NF6, deux d.d.l. de chacun d'eux sont utilisées) et de 8 éléments fictifs ; tous les paramètres nécessaires sont donnés dans le tableau 4.1. Puisque les quatre contraintes sont homogènes, on ne spécifie aucune charge concentrée aux nœuds fictifs. Pour la contrainte (1), les matrices de rigidité des éléments 5 et 6 sont :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} NF4 \\ NS3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \hline 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 2 & 3 & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & & \\ [0] & & & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0.04 & 1.0 & & & \\ \hline SYM & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{array} \right)
 \end{array}$$

Élément 5 (KDOF =3)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} NF4 \\ NS5 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \hline 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 2 & 3 & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & & \\ [0] & & & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & -0.04 & 1.0 & & & \\ \hline SYM & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{array} \right)
 \end{array}$$

Élément 6 (KDOF =3)

La contribution des éléments 5 et 6 fournit l'équation de contrainte (1) qui occupe le 3^{ème} d.d.l. de NF4. Après l'assemblage, on trouve le système montré à la page suivante.

$[k_{11}]$	$[k_{12}]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[k_{35}]$	$[k_{35}]$	$[k_{55}]$	$[k_{57}]$	$[k_{77}]$	$\{u\}$	$\{F\}$
	$[k_{22}]$	$[0]$									
		$[k_{23}]$									
			$[0]$								

Allure du système après assemblage

4.6. Fixation des modes rigides (mécanismes) par des contraintes linéaires

Envisageons le cas où une première partie d'une structure est liée à une seconde par des contraintes linéaires telles que, si on les supprimait, cette première partie deviendrait un mécanisme. il faut a/ors numéroté cette partie de façon à éliminer les contraintes qui bloquent les modes rigides avant l'élimination du dernier nœud de cette partie , sinon, on aura un blocage du système d'équations pendant la triangularisation à cause de ta présence des mécanismes.

Considérons la structure de la figure (4.7.) constituée de deux parties I et II qui sont liées uniquement par des contraintes linéaires associées à NF \therefore la partie n est appuyée de manière que sa matrice de rigidité $[K]_n$ ne soit pas singulière, tandis que la matrice $[k]_i$ de la partie i est singulière, car elle présente un (ou plusieurs) mode(s) rigide (s) fixé (s) par les contraintes uniquement,

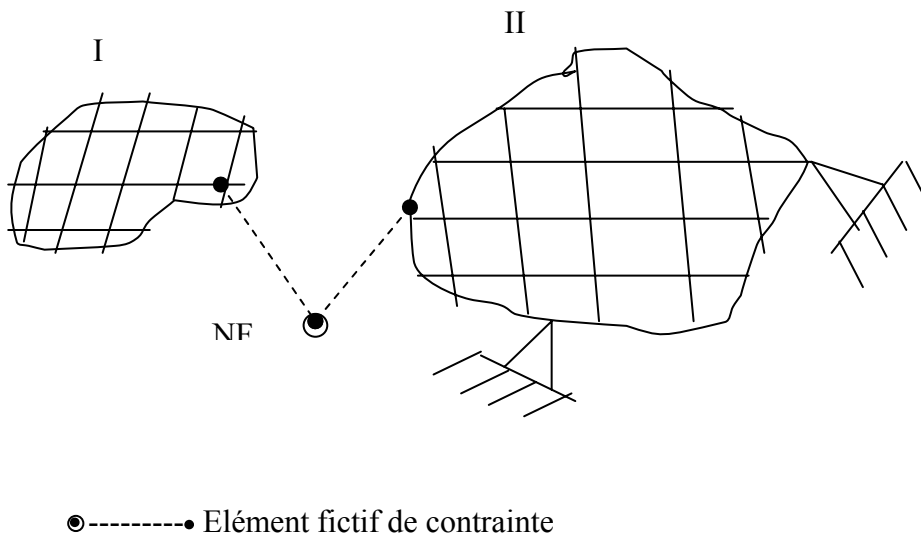


FIG.4.7. Liaison de deux structures par une contrainte linéaire

Si on numérote d'abord les noeuds de II, puis NF, et enfin les noeuds de I, La matrice de rigidité de la structure aura l'allure :

$$K = \begin{matrix} & & NF \\ \left[\begin{array}{ccc} [k_{II}] & [G_{II}]^T & [0] \\ [G_{II}] & [0] & [G_I] \\ [0] & [G_I]^{-1} & [k_I] \end{array} \right] & & \left[\begin{array}{c} \\ \\ NF \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4.3)$$

L'élimination de NF avant $[K]_I$ élimine la singularité de $[K]_I$ et on n'aura aucun problème pendant la triangularisation,

Si l'on numérote d'abord tous les nœuds de I, ensuite NF, puis ceux de \bar{I} , la matrice de rigidité devient :

$$K = \begin{matrix} & & N \\ \left[\begin{array}{ccc} [k_I] & [G_I]^T & [0] \\ [G_I] & [0] & [G_{II}] \\ [0] & [G_I]^T & [k_{II}] \end{array} \right] & & \left[\begin{array}{c} \\ \\ N \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4.4)$$

$[K]_I$ étant singulière, l'élimination des derniers d.d.l. de (I) bloque l'algorithme à cause d'un pivot nul ou très petit correspondant à ces d.d.l. pour résoudre ce cas, il faudrait éliminer NF avant les derniers d.d.l. de I. Pour se prémunir contre ce problème on doit respecter la règle de numérotation suivante :

REGLE 05

Lorsqu'une partie de la structure présente un mode rigide fixé par une contrainte linéaire (qui lie cette partie soit à la fondation, soit au reste de la structure), il faut que le numéro du NF associé à cette contrainte soit plus petit que le plus grand numéro de nœud de cette partie (de façon à éliminer le dernier nœud de cette partie).

4.7. Structure de « ALGMEF » après introduction des contraintes linéaires

4.7.1. Modifications principales introduites à ALGMEF

ALGMEF, comme a été présenté, se base sur des appels de sous programmes ou branchage à des étiquettes, les instructions simples n'ont pas de place dans le corps du programme

principal. L'implantation des contraintes linéaires dans ALGMEF nous a obligé à introduire de nouvelles variables, sous-routines et instructions.

La modification apportée n'a pas touché toutes les sous-routines, le sous programme traitant la résolution (CHOLESKY) a été totalement supprimé et remplacé par un autre qui utilise la méthode de Gauss .

L'introduction des contraintes linéaires a apporté les modifications principales suivantes :
au programme traitant l'élément poutre.

1.Sous-Routine X N O D E 1

Le rôle de cette sous-routine est de repérer

- l'existence de nœuds fictifs dans les éléments de la structure à étudier ;
- la position de ces nœuds dans l'élément (début, fin).

2.Sous-routine E L E M F

Elle constitue la modification principale effectuée dans la sous-routine DEPLACEMENT, en effet elle est chargée de calculer la matrice de rigidité de l'élément fictif (de contrainte) détecté par XNODE1, cette matrice aura l'allure défini sur la figure 4.4., son mode de stockage était en ligne de ciel (sky line), mais le changement du procédé de résolution, nous a obligé à le modifier. L'espace mémoire utilisé est important, sa réduction n'entre pas dans l'objectif de ce travail.

3. Sous-routines LIMIT1 , RESOL1 et SORTIE1

L'utilisation de la méthode des Multiplicateurs de Lagrange implique la perte de la définition positive de la matrice de raideur [k], cette perte entraîne l'impossibilité de poursuivre la résolution du problème en utilisant la décomposition de Cholesky, d'où la suppression de la sous-routine de décomposition adoptée par ALGMEF ainsi que la sous-routine chargée de calcul des efforts EFFORT. LIMIT1 fait l'introduction des conditions aux limites en valeurs (conditions d'appuis) et RESOL1 se charge de l'appel de l'élimination de Gauss et enfin SORTIE1 fournit les résultats sur l'unité de sortie IMP dont quelques exemplaires seront sur l'annexe C.

4.7.2. Programme modifié

Après l'introduction des contraintes linéaires et ainsi les modifications précitées, le programme ALGMEF et les sous routines lire et déplacement seront présentés comme suit:

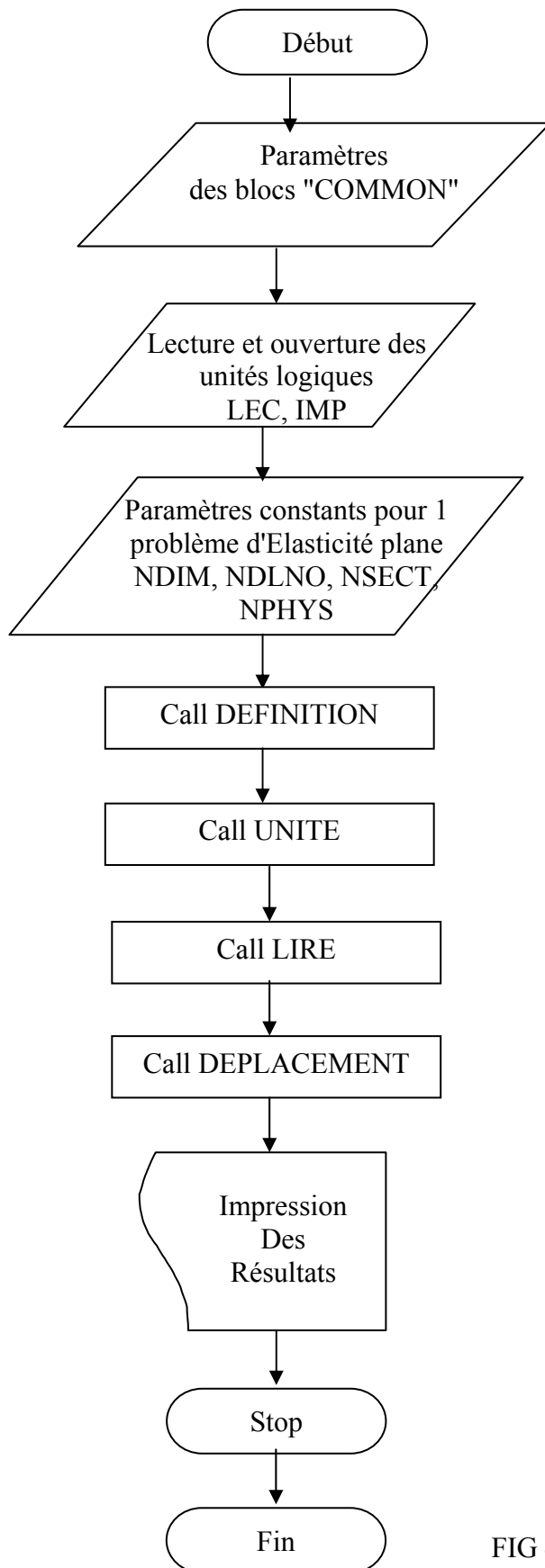


FIG 4.8. Organigramme du programme "ALGMEF" modifié

4.7.2.1. Sous routine LIRE

Après avoir détecté l'existence des CL lors de l'exécution du sous programme "DEFINITION" ce dernier introduit deux tables statiques ITYPE (à une dimension) et DONNEES (à deux dimensions) concernant les contraintes linéaires à introduire ce qui entraîne les changements suivantes au niveau de la sous routine lire.

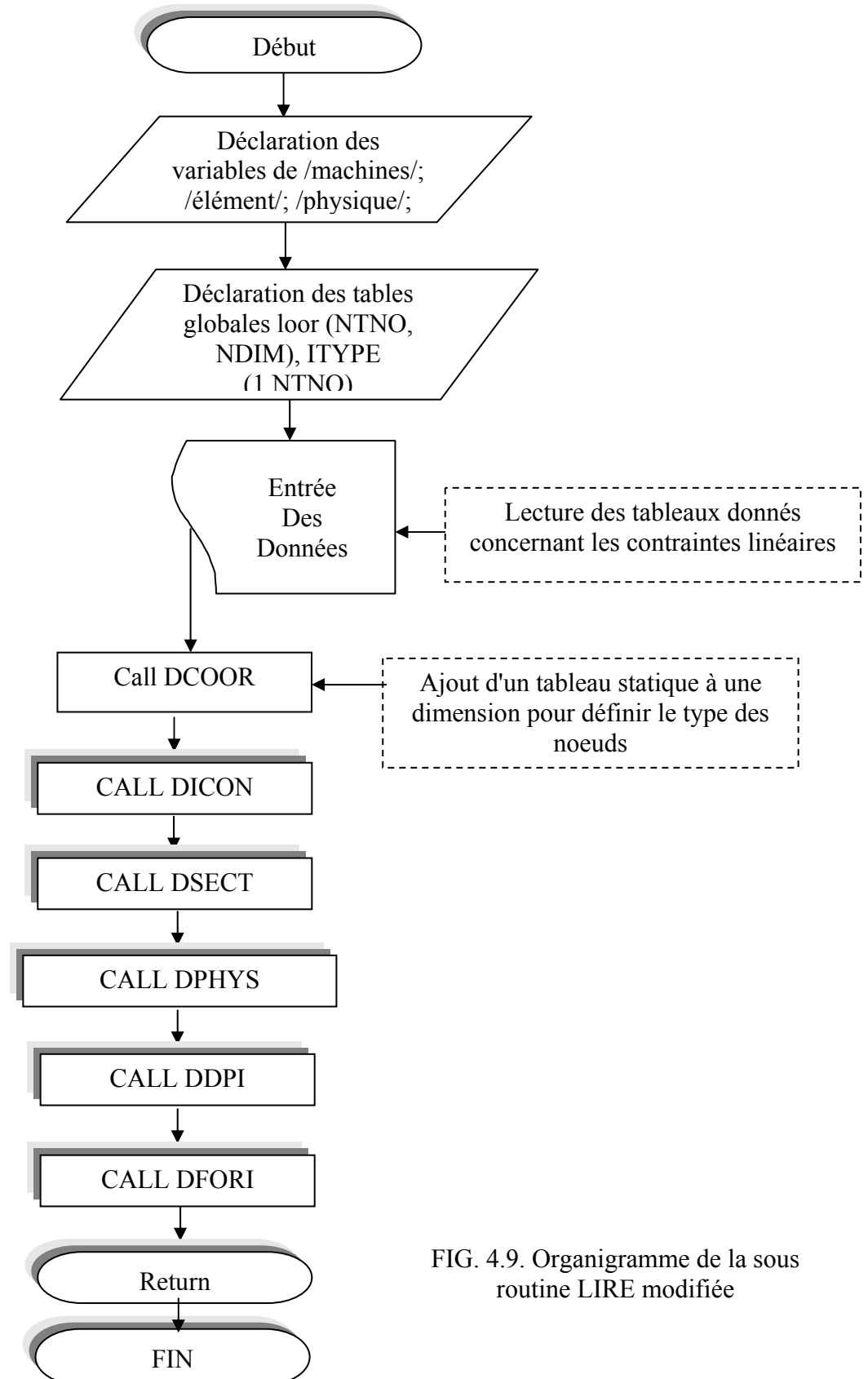


FIG. 4.9. Organigramme de la sous routine LIRE modifiée

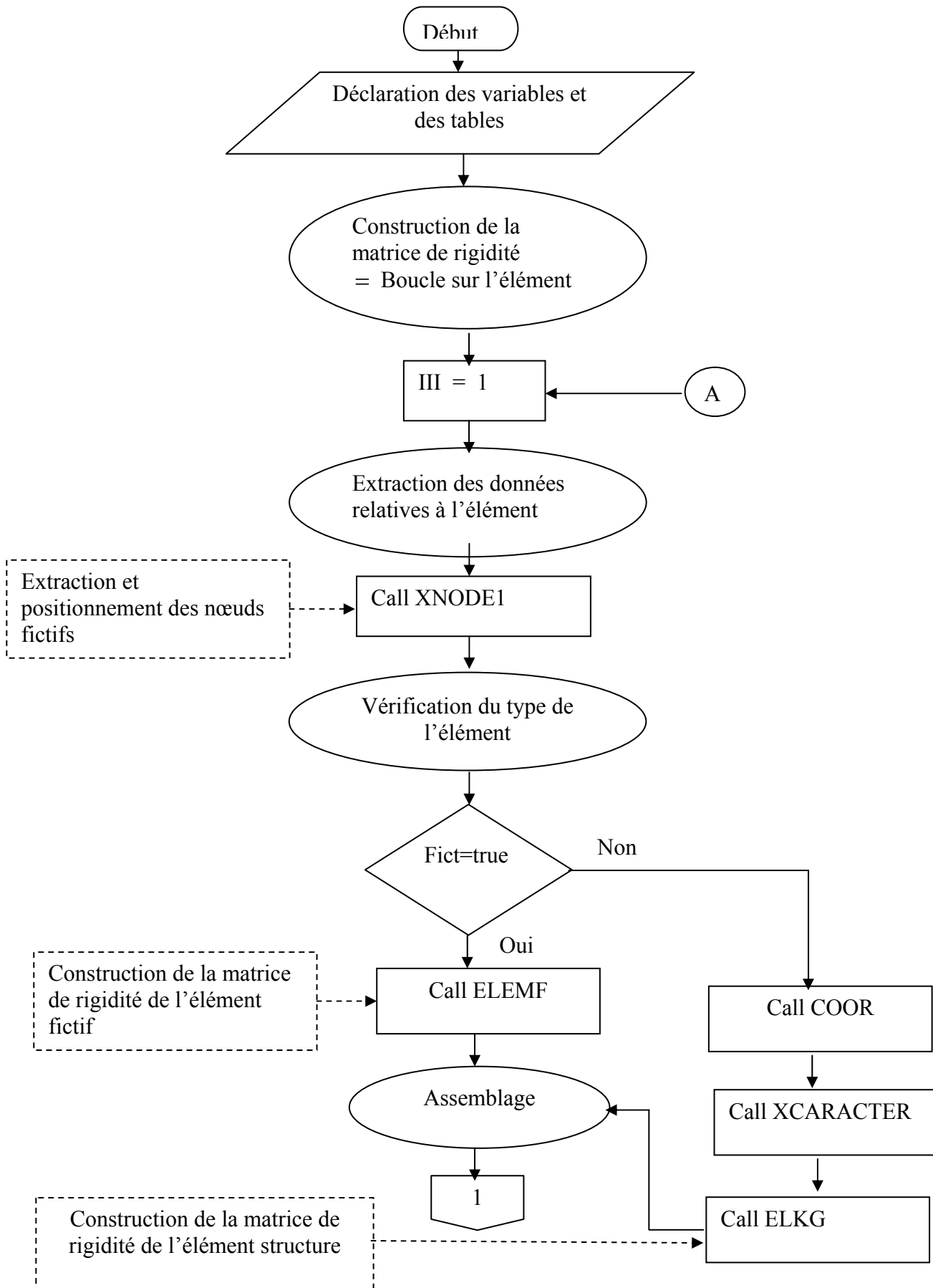


FIG. 4.10.a. Organigramme de la Sous routine DEPLACEMENT modifiée

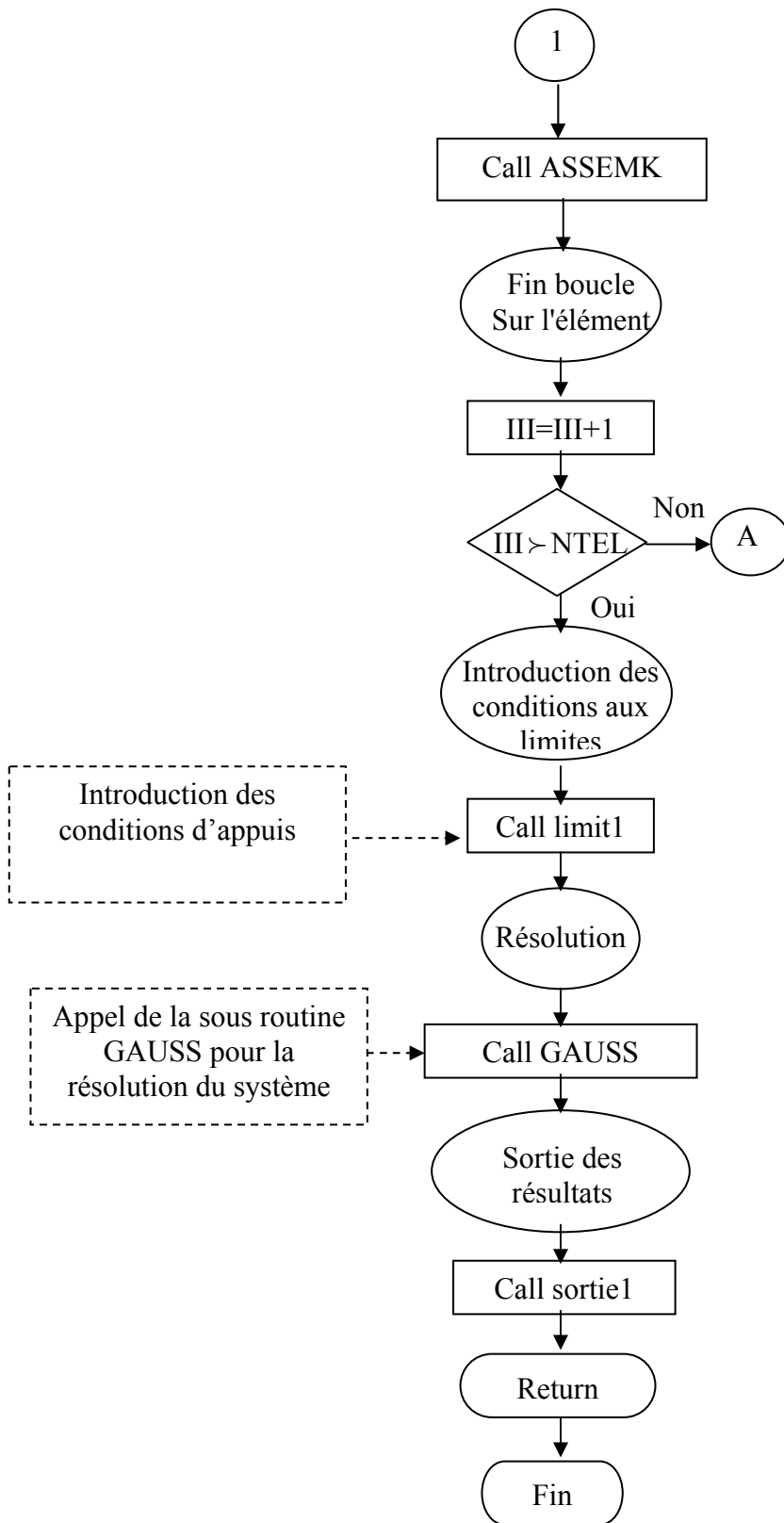


FIG. 4.10.b. Organigramme de la Sous routine DEPLACEMENT modifiée (suite)

4.8. Résumé des étapes de « ALGMEF »

A travers ce chapitre, on a pu présenter le programme « ALGMEF » avant et après l'introduction des contraintes linéaires d'une façon globale, avant de clore cette liste d'organigrammes représentatifs, on récapitule tout le travail – pour le cas d'un élément fini de poutre- sur le tableau suivant :

É T A P E S	Sous-routines nécessaires avant introduction des contraintes linéaires	Sous-routines nécessaires après introduction des contraintes linéaires
1 2 3 4	<p>- DEFINITION</p> <p>- LIRE(ICON,COOR,PHYS,SECT, DEPI,VDEPI,FORI,VFORI,KIMPO, VKIMPO,KPLUS,VKPLUS)</p> <ul style="list-style-type: none"> • CALDCOOR(NDIM,NTNO, COOR) • DICON(NNOEL,NTEL,ICON) • DSECT(NSECT,NTEL,SECT) • DPHYS(NPHYS,NTEL,PHYS) • DDEPI(NTDI,DEPI,VDEPI) • DFORI(NTFI,FORI,VFORI) <p>- DEPLACEMENT(ICON,COOR,DEPI, VDEPI,PHYS,SECT,FORI,VFORI, RIGID,CHARG)</p> <ul style="list-style-type: none"> • XNODE(III,ICON,NNOL,NTEL,NODE) • XCOORD(NODE,NNOEL,COOR,NDIM, NTNO,X,Y,Z) • XCHARACTER(III,NTEL,NSECT,SECT, NPHYS,PHYS,ELA,ELI,ELE) • GEOM(X,Y,ELL,RONO) • MATRICE(ELL,ELA,ELI,ELE,ELK) • ROTATION(RONO,ROEL) • RTKR(ROEL,ELK,ELKG) • C_POINT (NODE,POINT) • LIMIT2(ELKG,VDEPI,JAXA,POINT, RIGID,CHARG,ICOL) <ul style="list-style-type: none"> • ASSEMF(NDLNO,FORI,VFORI, 	<p>- DEFINITION(DONNNEES)</p> <p>- LIRE(ICON,COOR,PHYS,SECT, DEPI,VDEPI,FORI,VFORI,KIMPO, VKIMPO,KPLUS,VKPLUS,ITYPE)</p> <ul style="list-style-type: none"> • CALDCOOR(NDIM,NTNO, COOR,ITYPE) • DICON(NNOEL,NTEL,ICON) • DSECT(NSECT,NTEL,SECT) • DPHYS(NPHYS,NTEL,PHYS) • DDEPI(NTDI,DEPI,VDEPI) • DFORI(NTFI,FORI,VFORI) <p>- DEPLACEMENT(ICON,COOR,DEPI, VDEPI,PHYS,SECT,FORI, VFORI,RIGID,CHARG,ITYPE,DONNEES</p> <ul style="list-style-type: none"> • XNODE1(III,ICON,ITYPE,NTNO, NNOEL,NTEL,NODE,FICT,FICT1, FICT2) • XCOORD(NODE,NNOEL,COOR,NDIM, NTNO,X,Y,Z) • XCHARACTER(III,NTEL,NSECT,SECT, NPHYS,PHYS,ELA,ELI,ELE) • GEOM(X,Y,ELL,RONO) • MATRICE(ELL,ELA,ELI,ELE,ELK) • ROTATION(RONO,ROEL) • RTKR(ROEL,ELK,ELKG) • POINTEUR1(NODE,POINT) • ASSEMK(POINT,ELKG,NDLEL, NTDL,RIGID) • ELEMF(NODE,NNOEL,NDIM,NDLEL, NTNO,ITYPE,ELKG,DONNEES) • ASSEMF(NDLNO,FORI,VFORI,

	CHARG,ICOL)	NTFI,NTDL,CHARG)
5	<ul style="list-style-type: none"> • TRIPLD(RIGID,JAXA) 	<ul style="list-style-type: none"> • LIMIT1(DEPI,VDEPI,RIGID,CHARG)
6	<ul style="list-style-type: none"> • SOL2(RIGID,CHARG,JAXA) • SORT1(CHARG,VFORI,NTFI,ICOL) 	<ul style="list-style-type: none"> • RESOL1(RIGID,CHARG,DEPLA)
7	- EFFORT(ICON,COOR,PHYS,SECT,CHARG)	- Étape supprimée
8	<ul style="list-style-type: none"> • SORTI3(III,NODE,EFFO) 	<ul style="list-style-type: none"> • SORTIE1(DEPLA)

Tab.4.2. Tableau récapitulatif des étapes principales de « ALGMEF » -Poutre-

4.9. Utilité pratique des contraintes linéaires

L'utilité pratique des contraintes linéaires est très vaste dans l'analyse des structures par la méthode des éléments finis ; nous illustrons ici quelques exemples :

A. Les conditions cinématiques aux limites peuvent être imposées par les contraintes linéaires, en particulier, quand ces conditions ne s'expriment pas facilement dans les axes globaux (Fig. 4.11.)

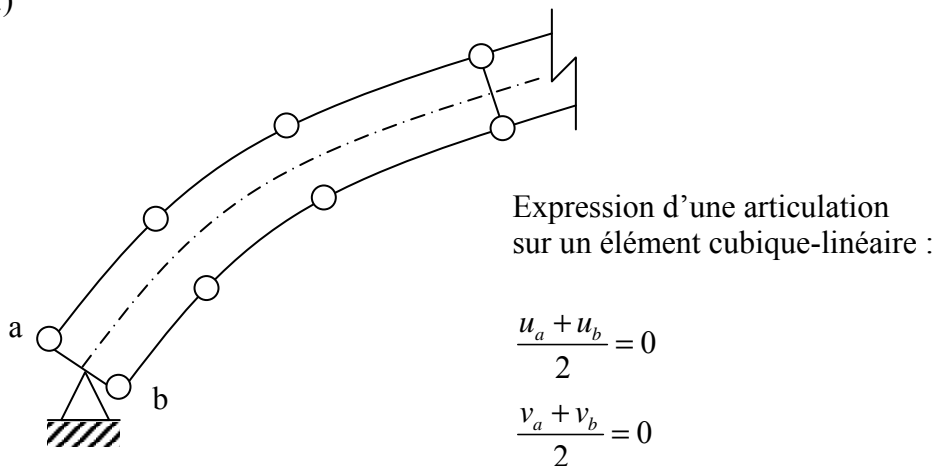
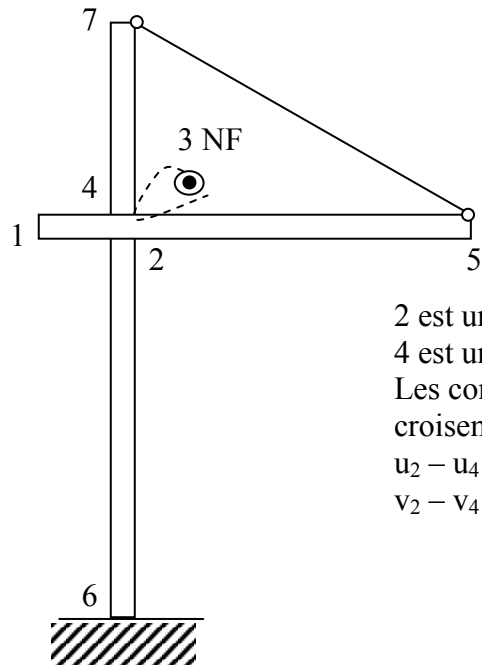


Fig. 4.11. conditions cinématiques

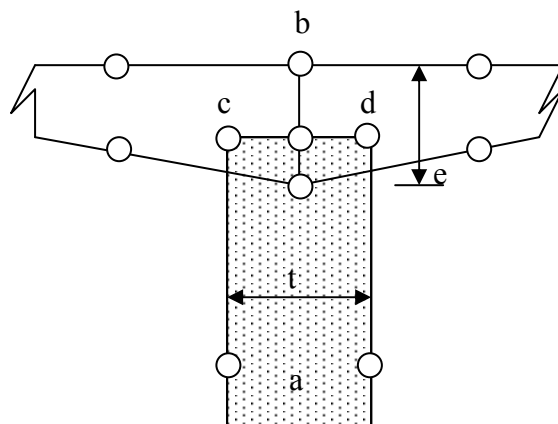
B. Croisement de poutres (Fig.4.12.).



2 est un nœud de la poutre 1.2.5
 4 est un nœud de la poutre 6.4.7.
 Les contraintes nécessaires pour assurer le
 croisement articulé des deux poutres sont :
 $u_2 - u_4 = 0$
 $v_2 - v_4 = 0$

FIG.4.12. Croisement de poutres

C. Jonction d'Eléments .



Contraintes linéaires

$$\frac{u_a + u_b}{2} = \frac{u_c + u_d}{2}$$

$$\frac{v_a + v_b}{2} = \frac{v_c + v_d}{2}$$

$$\frac{u_a - u_b}{e} = \frac{v_d - v_c}{t}$$

FIG.4.13. Jonction rigide

D. Appui d'une structure sur une autre.

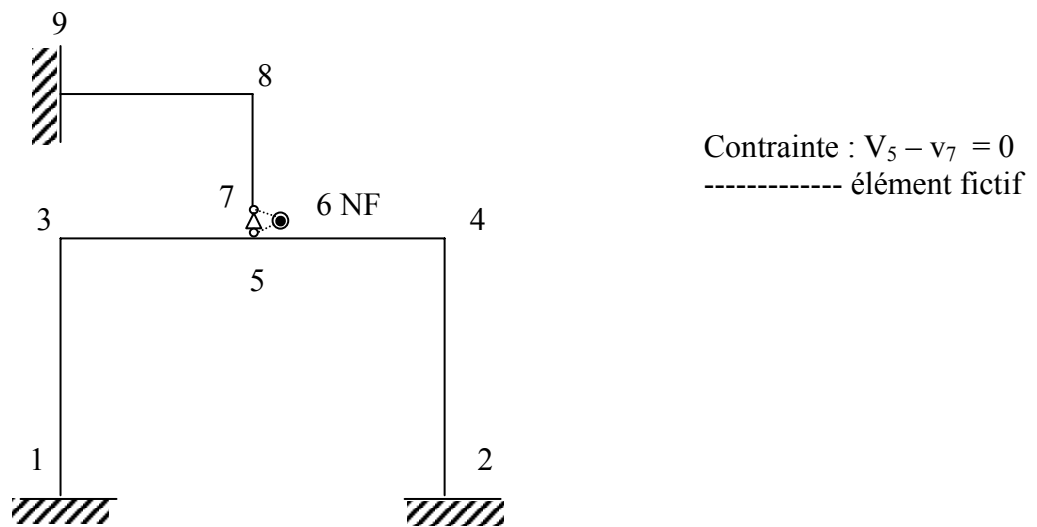


FIG.4.14. Appui d'une structure sur une autre.

E. Les lignes et surfaces d'influence que l'on résout par la méthode cinématique en utilisant les contraintes linéaires (Fig.4.15.)

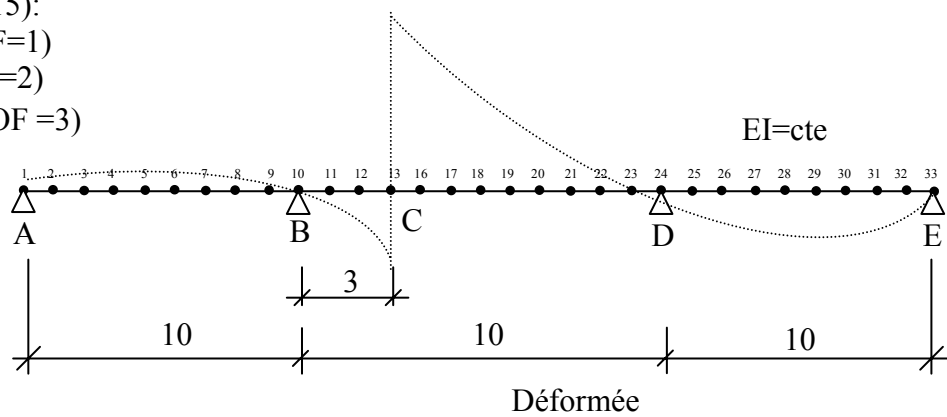
Li de Q_c

Contraintes (NF15):

$u_{16} - u_{14} = 0$ (KDOF=1)

$v_{16} - v_{14} = 1$ (KDOF=2)

$\theta_{16} - \theta_{13} = 0$ (KDOF=3)



Vue en plan

$DEPL = 10.00 \times$

$MULT = 0.000 \text{ E}+00$

$REAC = -20.0$

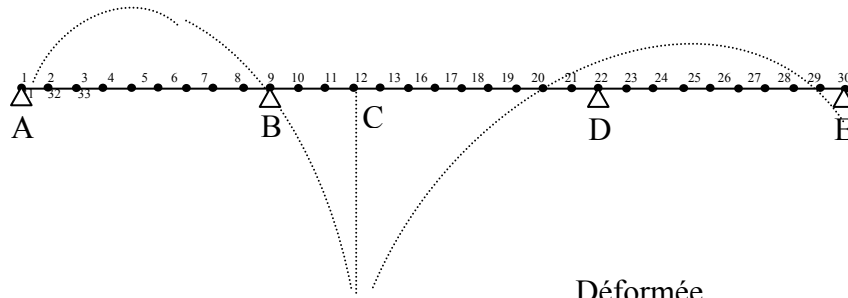
Li de M_c

Contraintes (NF15):

$$u_{16} - u_{14} = 0 \text{ (KDOF=1)}$$

$$v_{16} - v_{14} = 0 \text{ (KDOF=2)}$$

$$\theta_{16} - \theta_{14} = 1 \text{ (KDOF=3)}$$

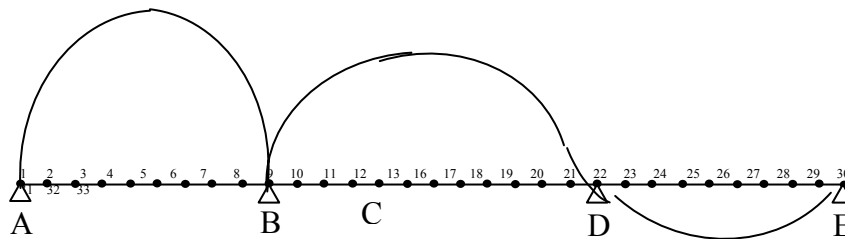


Déformée

Li de M_b

Contraintes (NF12):

$$\theta_{13} - \theta_{11} = 1 \text{ (KDOF=3)}$$



Vue en plan

$$DEPL = 10.00 \times$$

$$MULT = 0.000 \text{ E}+00$$

$$REAC = -20.0$$

Déformée

Vue en plan

$$DEPL = 10.00 \times$$

$$MULT = 0.000 \text{ E}+00$$

$$REAC = -160.$$

FIG.4.15. Lignes et surfaces d'influences

F. Jonction d'éléments de nature différente (Fig.4.16.) ; cette jonction ne peut être réalisée par ALGMEF que si tous les nœuds ont le même nombre de degrés de liberté.

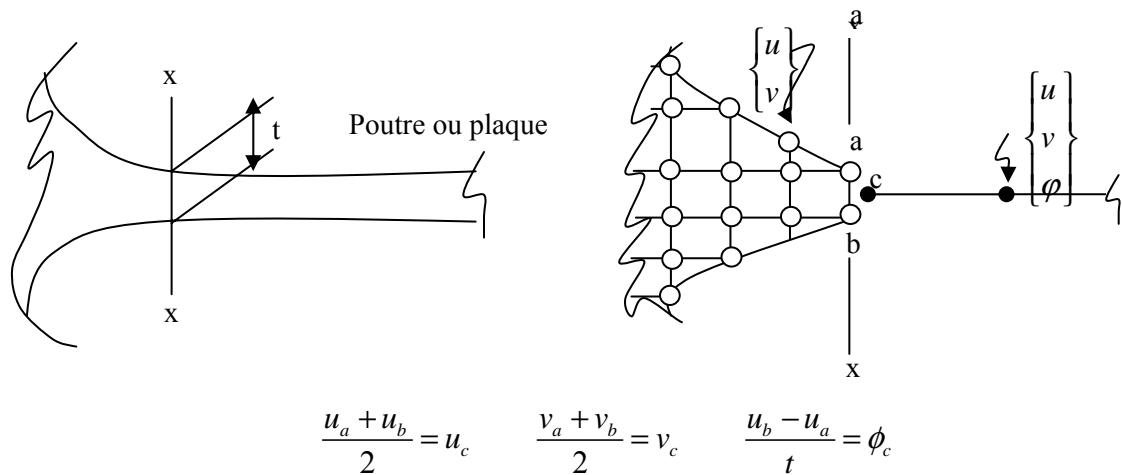


FIG.4.16. Jonction d'éléments de nature différente

G. Gradation du réseau, utilisant des éléments assurant la continuité des déplacements entre eux (fig.4.17.).

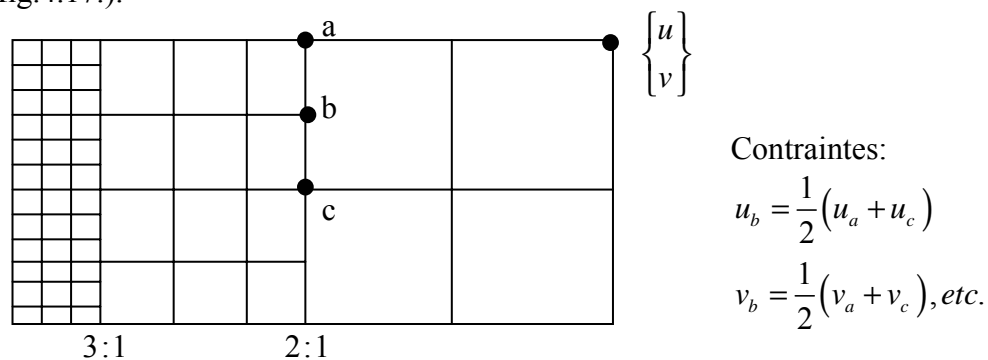


FIG.4.17. Gradation du réseau

4.10. Conclusion

La mise en œuvre du programme de calcul ALGMEF, basé sur la méthode des éléments finis, pour le calcul statique des structures, est réalisé depuis des années. L'introduction des contraintes linéaires reliant les composantes de déplacements des différents nœuds de la structure, dans ce programme, a nécessité l'application des modifications prédéfinies. La validation des résultats, ainsi que l'amélioration du programme (mode de stockage des matrices, allocation dynamique de l'espace mémoire, utilisation du mode graphique...etc.) seront les prochaines étapes ; la première entrera dans le cadre de cette contribution – dans le prochain chapitre- , l'autre sera peut être sujette à d'autres recherches.

5. VALIDATION

Au cours des quarante années, la simulation numérique est devenue une des composantes de la méthode scientifique, au même titre que ses deux composantes traditionnelles, la théorie et l'expérience.

Traditionnellement, le développement de nouvelles connaissances s'appuie sur des résultats expérimentaux que l'on cherche à expliquer par une théorie, laquelle prédit à son tour des résultats nouveaux que l'expérience confirme ou infirme.

C'est évidemment l'apparition d'ordinateurs puissants qui a permis le développement de la simulation numérique. Le rythme d'évolution de l'informatique est actuellement effréné et les possibilités d'application augmentent sans cesse. C'est pourquoi il est important de s'assurer que le passage des connaissances vers les applications puisse se faire de façon efficace, c'est en effet le but de notre chapitre.

5.1. Introduction

La validation du programme « ALGMEF » avec contraintes linéaires, nous a emmené à procéder comme suit :

5.1. 1. Vérification Elémentaire

En premier lieu, on a appliqué le programme à

- ▣ Un élément barre : les calculs sont fait suivant un seul axe (X), autrement dit il n'existe pas des nœuds non alimentés en raideur.

Quatre cas ont été envisagés :

- ▣ Contrainte linéaire imposée à deux nœuds adjacents non chargés,
- ▣ Contrainte linéaire imposée à deux nœuds adjacents chargés,
- ▣ Contrainte linéaire imposée à deux nœuds non adjacents non chargés,
- ▣ Contrainte linéaire imposée à deux nœuds non adjacents chargés,

Ces cas ont été traité par FREY dans le programme qui prend en compte les contraintes linéaires « FINELG ».

- ▣ Un élément poutre (de Bernoulli) : l'application est faite sur une poutre encastree

5.1.2. Etude de jonctions

Après avoir eu des résultats convaincants au niveau élémentaire, on passe à l'application du programme sur des structures comportant des jonctions entre des éléments de type différent. Pour cela, on a choisi des exemples dont le résultat analytique -au niveau de la jonction-, existe :

- Une liaison des barres;
- Une liaison de barre-poutre;
- Une paroi reposant sur colonnes : on se préoccupe du détail de la jonction poutre-membrane.

Les unités de calcul adoptées par le programme ALGMEF sont :

- Newton (N) : Charges;
- Centimètre (cm) : Déplacement.

Les unités logiques d'entrée / sortie (I/O) sont :

- Unité d'entrée LEC =15.
- Unité de sortie IMP=16.

5.2. Élément Barre

5.2.1. Cas 01 : Deux nœuds adjacents non chargés

Dans ce cas, les 2 nœuds affectés par la contrainte linéaire appartiennent au même élément (fig. 5.1.)

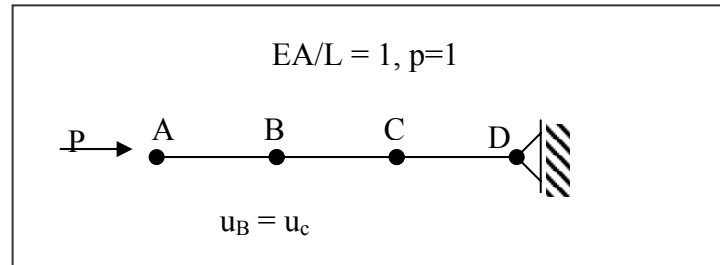


FIG.5.1. Deux nœuds adjacents non chargés

Dans le cas de l'élément barre, on a accompagné chaque méthode par un programme qui résout l'équation : $[k]\{u\}=\{f\}$ dans le but de comparer les résultats.

Afin d'imposer la contrainte linéaire $u_B = u_C$, on procède à numéroté les nœuds, pour cela on adopte trois numérotations :

- L'une pour les méthodes de résolution sans éléments fictifs (S.E.F). (fig.5.2.a)
- Les deux autres sont utilisées pour le programme « ALGMEF » avec contraintes linéaires par le biais des multiplicateurs de Lagrange (A.C.L).(fig.5.2.b et fig.5.2.c)

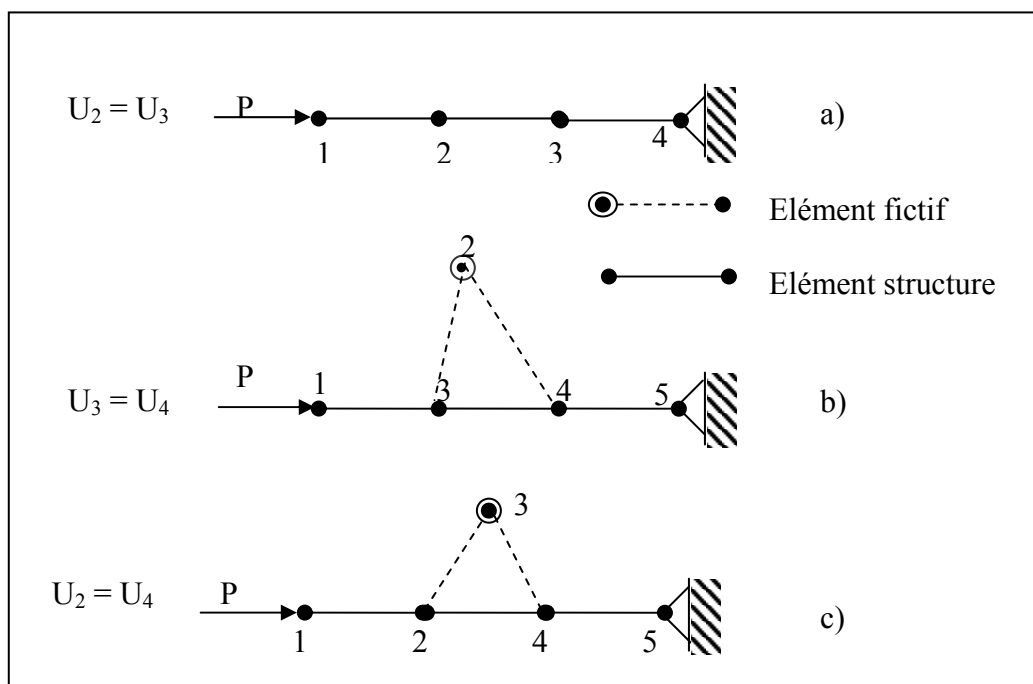


FIG.5.2. Numérotation des nœuds

Les résultats obtenus seront comparés aux déplacements sans contraintes linéaires (S.C.L).

5.2.1.1. Résultats

Les résultats sont récapitulés sur le tableau (Tab.5.1)

Déplacements	Méthodes					
	ALGMEF -SCL-	FINELG	Matricielle	Pénalité ($\alpha=100$)	Lagrange -SEF-	ALGMEF -ACL-
U ₁	3.000000	2.000000	2.000000	2.009901	2.000000	2.000000
U ₂	2.000000	1.000000	1.000000	1.009901	1.000000	1.000000
U ₃	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
U ₄	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Tab.5.1. Déplacement u –Cas 1-

5.2.1.2. Superposition graphique des résultats

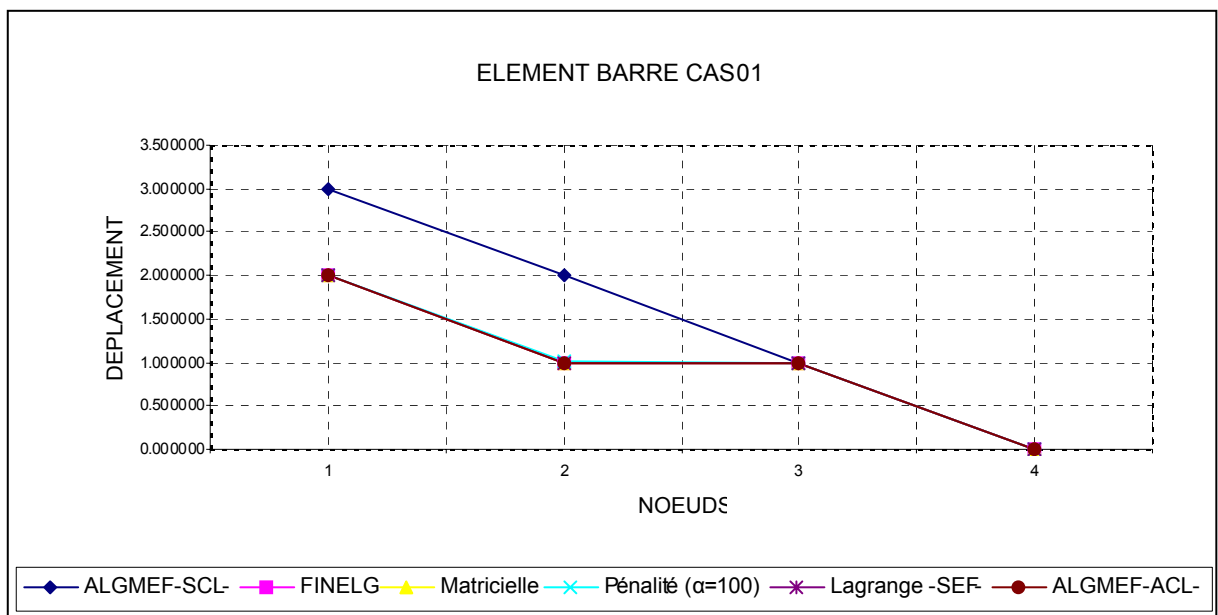


FIG.5.3. Superposition graphique des résultats CAS 1

5.2.2. Cas 02 : Deux nœuds adjacents chargés

L'exemple précédent est repris, avec une nouvelle contrainte linéaire :

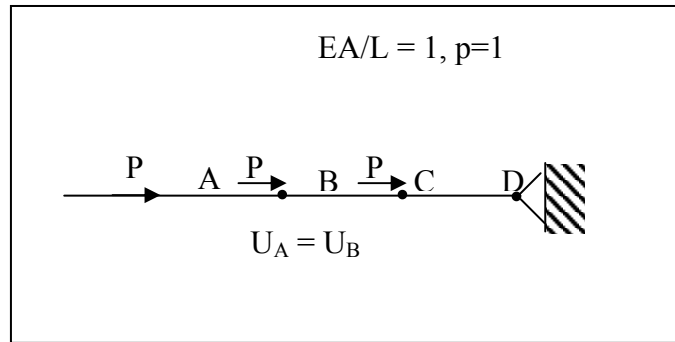


Fig.5.4. Deux nœuds adjacents chargés

On conserve les numerotations (a) et (c) du premier cas, les resultats sont groupés sur le tableau (Tab.5.2.)

5.2.2.1. Résultats

Déplacements	Méthodes					
	ALGMEF SCL	FINELG	Matricielle	Pénalité ($\alpha=100$)	Lagrange SEF	Lagrange AEF
U_1	6.000000	5.000000	5.000000	5.009901	5.000000	5.000000
U_2	5.000000	5.000000	5.000000	5.000000	5.000000	5.000000
U_3	3.000000	3.000000	3.000000	3.000000	3.000000	3.000000
U_4	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Tab 5.2 Déplacement u –CAS 2-

5.2.2.2. Superposition graphique des résultats

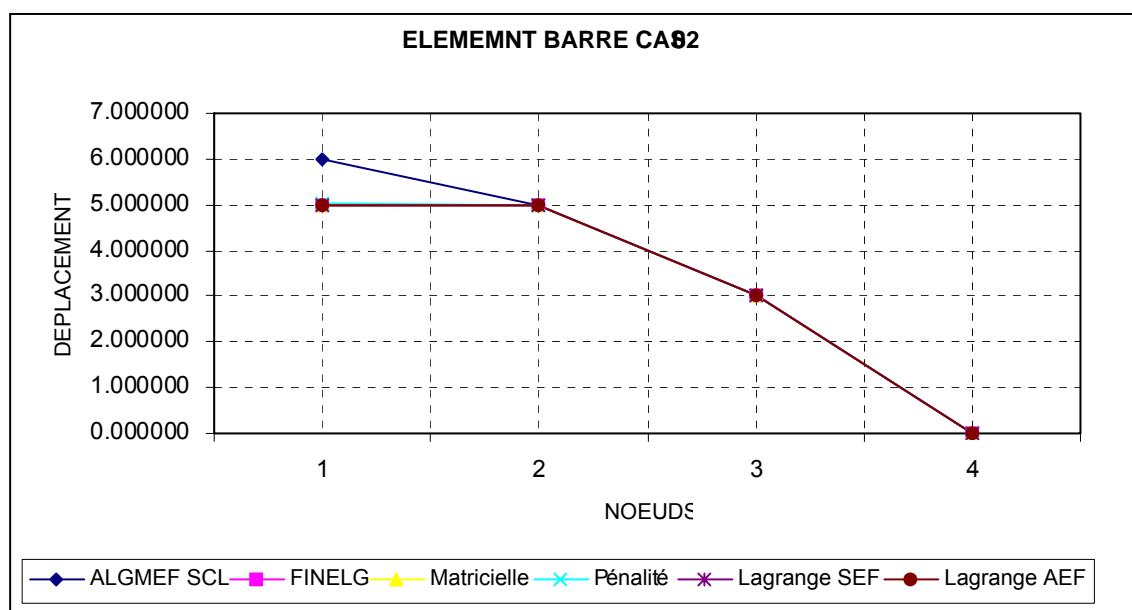


FIG.5.5. Superposition graphique des résultats CAS 2

5.2.3. Cas 03 : Deux nœuds non adjacents non chargés

La barre dont les degrés de liberté des nœuds remplissent une contrainte linéaire de ce cas est représentée sur la figure (fig.5.6.)

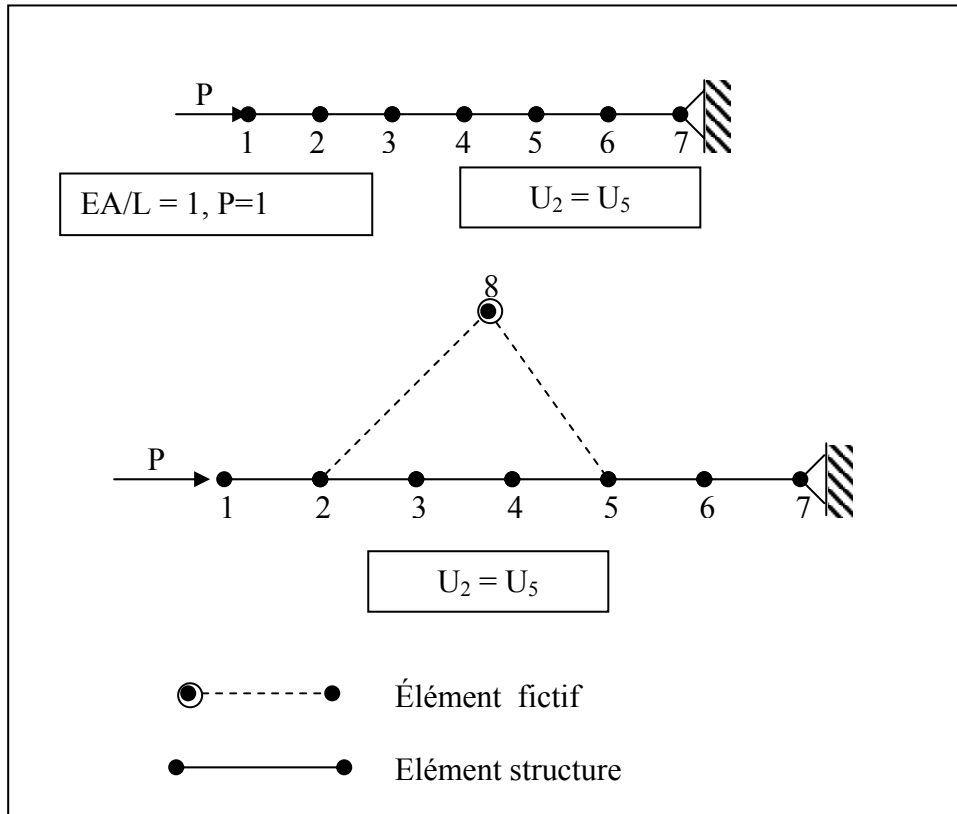


FIG.5.6. Deux nœuds non adjacents non chargés

5.2.3.1. Résultats

Les résultats sont groupés sur le tableau suivant :

Déplacements	Méthodes					
	ALGMEF -SCL-	FINELG	Matricielle	Pénalité ($\alpha=100$)	Lagrange SEF	ALGMEF -ACL-
U_1	6.000000	3.000000	3.000001	3.009971	3.000000	3.000000
U_2	5.000000	2.000000	2.000001	2.009971	2.000000	2.000000
U_3	4.000000	2.000000	2.000002	2.006648	2.000000	2.000000
U_4	3.000000	2.000000	2.000001	2.003326	2.000000	2.000000
U_5	2.000000	2.000000	2.000001	2.000004	2.000000	2.000000
U_6	1.000000	1.000000	1.000001	1.000002	1.000000	1.000000
U_7	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Tab 5.3 Déplacement u –CAS 3-

5.2.3.2. Superposition graphique des résultats

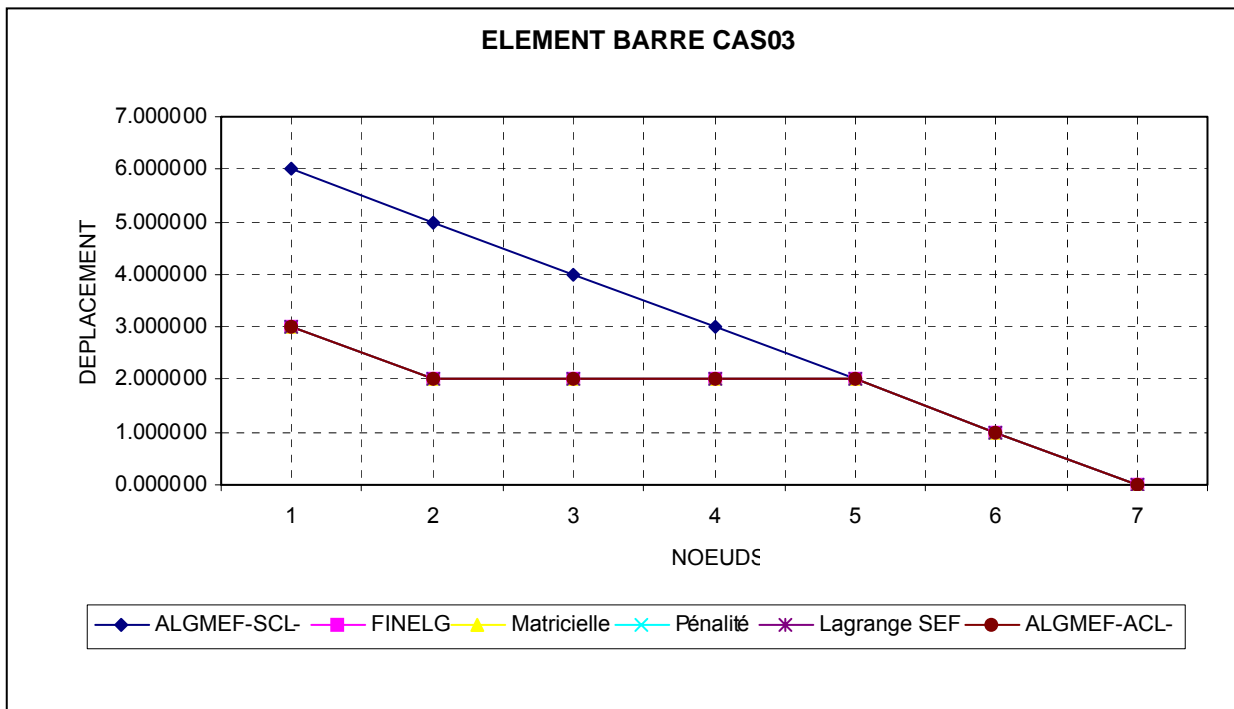


FIG. 5.7. Superposition graphique des résultats CAS 3

5.2.4. Cas 04 : Deux nœuds non adjacents chargés

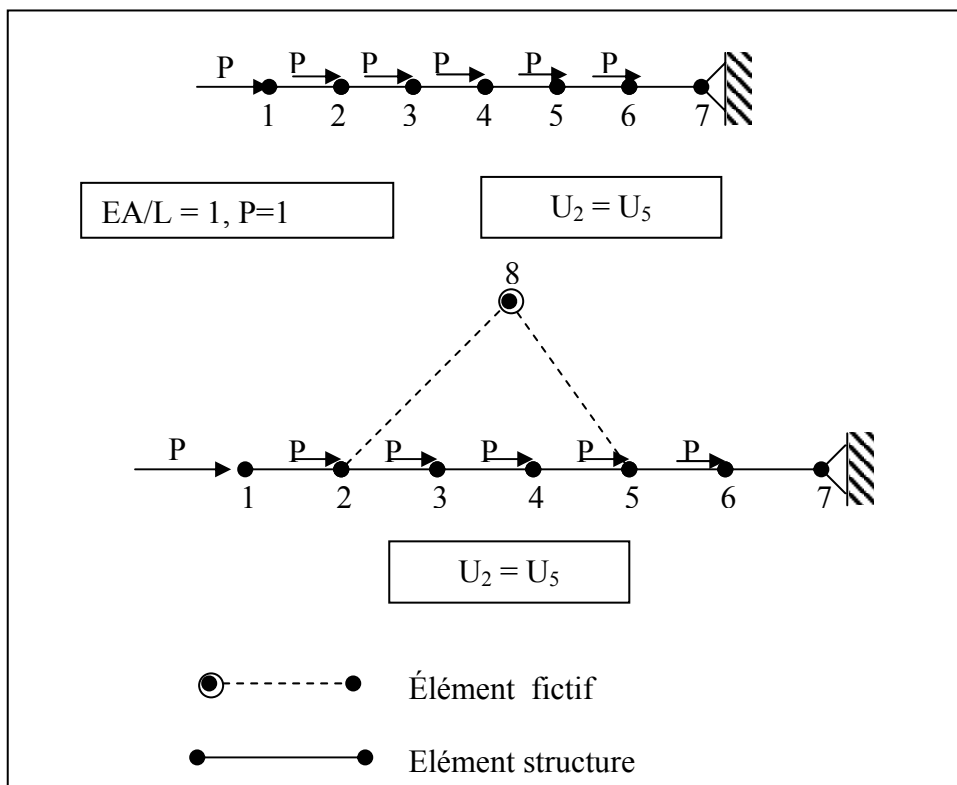


FIG. 5.8. Deux nœuds non adjacents chargés

5.2.4.1 Résultats

Déplacements	Méthodes					
	ALGMEF SCL	FINELG	Matricielle	Pénalité ($\alpha=100$)	Lagrange -SEF-	ALGMEF -ACL-
U ₁	21.000000	7.000000	7.000001	7.034918	7.000000	7.000000
U ₂	20.000000	6.000000	6.000001	6.034918	6.000000	6.000000
U ₃	18.000000	7.500000	7.500002	7.52619	7.500000	7.500000
U ₄	15.000000	8.000000	8.000002	8.017462	8.000000	8.000000
U ₅	11.000000	7.500000	7.500002	7.508734	7.500000	7.500000
U ₆	6.000000	6.000000	6.000001	6.000006	6.000000	6.000000
U ₇	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Tab 5.4 Déplacement u –CAS 4-

5.2.4.2. Superposition graphique des résultats

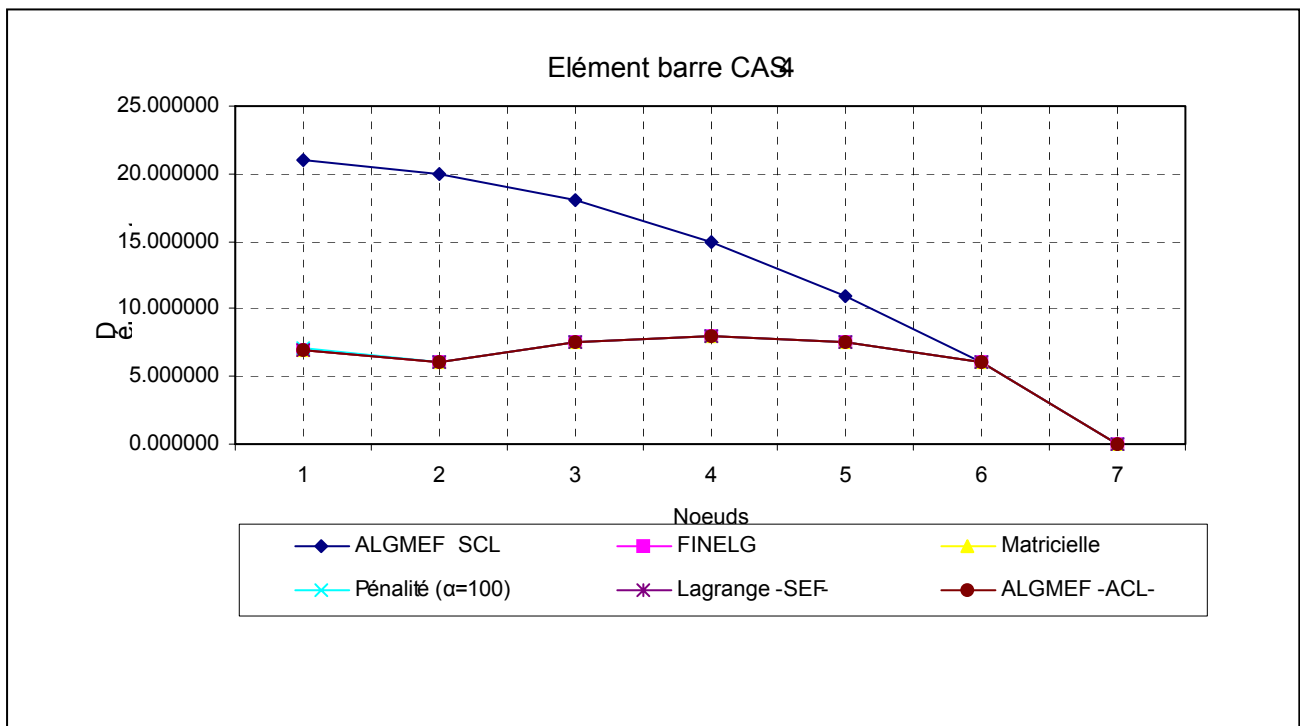


FIG. 5.9. Superposition graphique des résultats CAS 4

5.2.5. Constatations :

Dans les 4 cas, on constate que :

1. La contrainte linéaire imposée est vérifiée ainsi que la condition d'appui;
2. Les déplacements fournis par les quatre méthodes sont très proches de celles de notre référence FINELG.

3. Les déplacements sans contraintes linéaires (ALGMEF –SCL-) sont supérieurs à ceux obtenus avec contraintes linéaires, et ceux fournis par ALGMEF -ACL- sont égaux à ceux trouvés par FREY.

5.2.6. Conclusion :

1. La prise en compte de la contrainte linéaire a diminué les valeurs des déplacements.

2. Les composantes de déplacement concerné par la contrainte linéaire ont pris la plus petite valeur des deux composantes avant application de la contrainte linéaire.

Donc, il est évident que : négliger une contrainte linéaire qui existe , par défaut d'une difficulté rencontrée pendant l'utilisation d'un code de calcul , implique des résultats qui ne correspondent en aucun cas avec la réalité.

5.3. Élément poutre

Dans le cas de la poutre, notre référence sera la méthode matricielle, du fait qu'elle est supposée exacte lorsque l'imposition des contraintes linéaires ne pose pas de problèmes lors du choix des nœuds maîtres et esclaves.

Soit la poutre encastrée suivante :

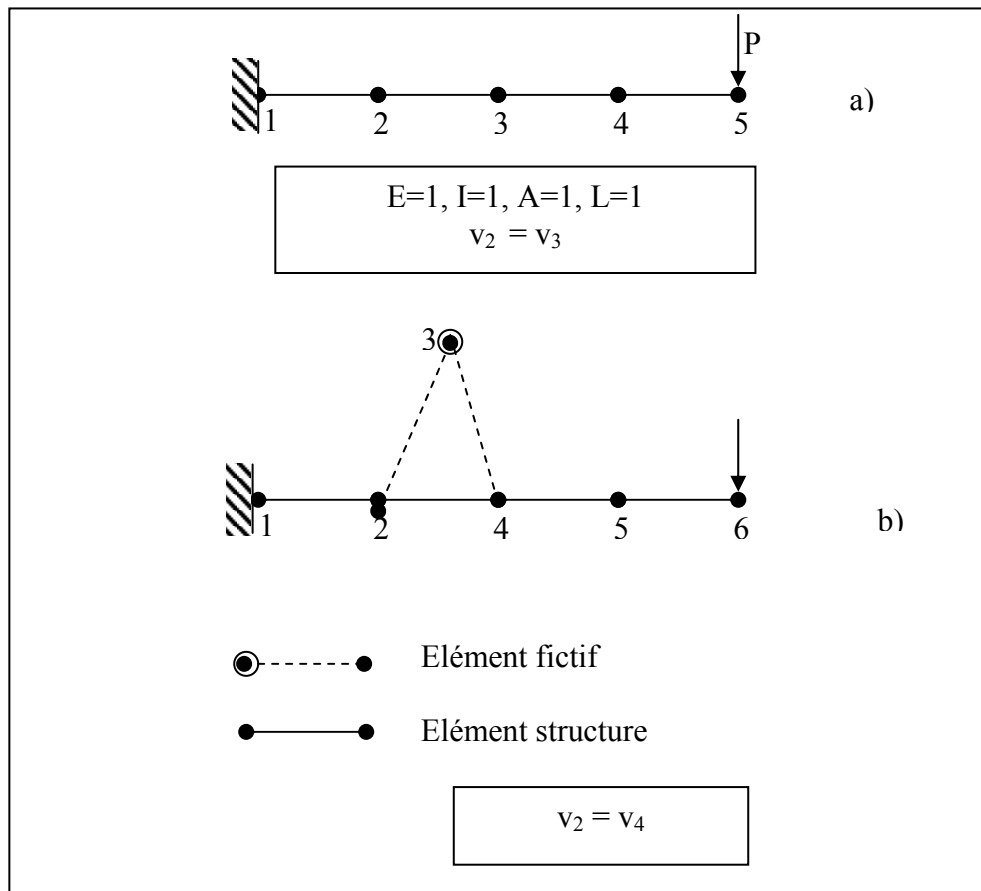


Fig.5.10. a) Poutre soumise aux contraintes
b) Numérotation des nœuds

5.3.1. Résultats (Déplacement V)

Déplacements	Méthode				
	ALGMEF -SCL-	Matricielle	Pénalité ($\alpha=100$)	Pénalité ($\alpha=1000$)	ALGMEF -ACL-
V ₁	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
V ₂	1.833	0.0208	0.0343	0.02219	0.02083
V ₃	6.666	0.0208	0.0703	0.0258	0.02083
V ₄	13.500	1.416	1.506	1.425	1.416
V ₅	21.333	3.812	3.942	3.825	3.812

Tab. 5.5. Résultats du déplacement V

5.3.2. Superposition graphique des résultats (Déplacement V)

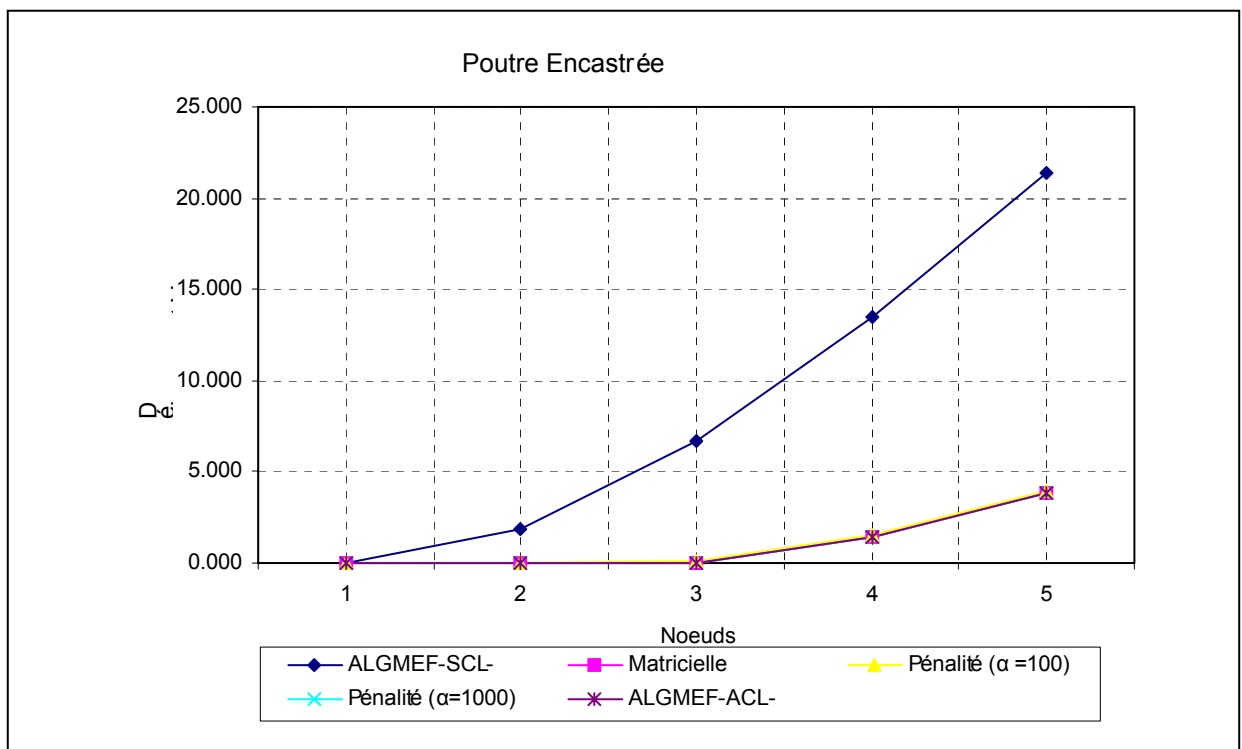


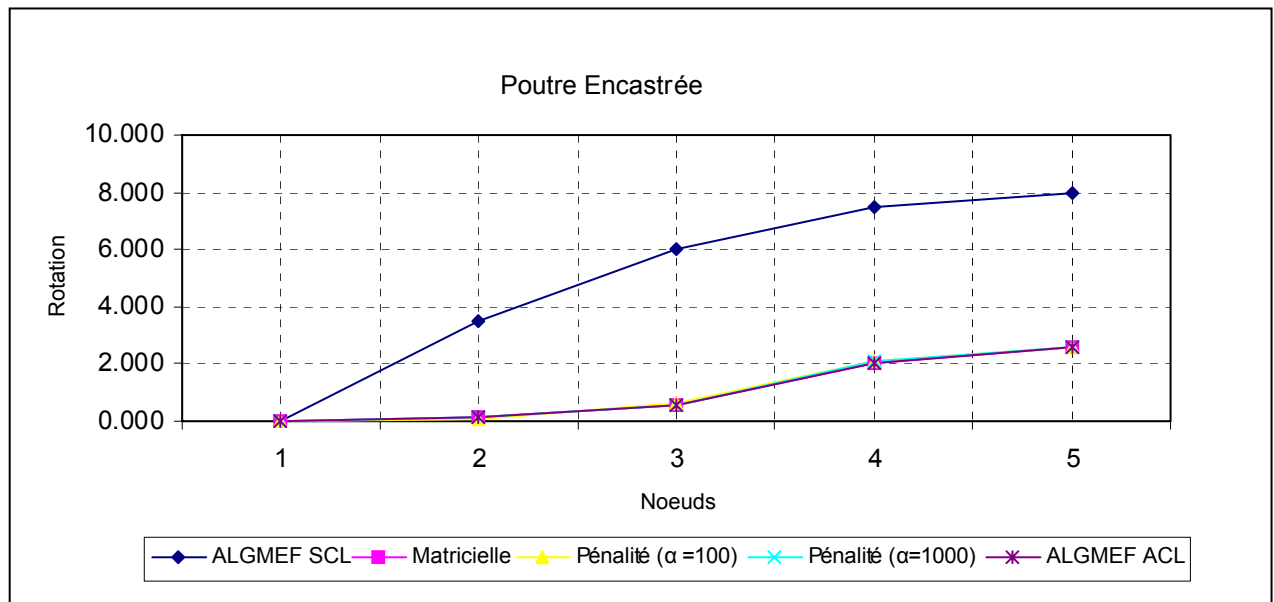
FIG. 5.11. Superposition graphique des résultats (V)

5.3.3. Résultats (Rotation θ)

Rotation	Méthode				
	ALGMEF SCL	Matricielle	Pénalité ($\alpha=100$)	Pénalité ($\alpha=1000$)	ALGMEF ACL
θ_1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
θ_2	3.500	0.12499	0.09801	0.1222	0.125
θ_3	6.00	0.56249	0.6029	0.566	0.5625
θ_4	7.500	2.062	2.1029	2.0665	2.0626
θ_5	8.000	2.56249	2.60977	2.566	2.5625

Tab.5.6. Résultats de la rotation θ

5.3.4. Superposition graphique(Rotation θ)

FIG. 5.12. Superposition graphique des résultats (θ)

5.3.5. Constatations :

1. La contrainte linéaire imposée est vérifiée ainsi que la condition d'appui ;
2. Les trois méthodes fournissent des résultats très proches ;
3. les valeurs des déplacements sans contraintes linéaires sont remarquablement grandes par rapport à celles calculées avec une contrainte linéaire.
4. la méthode matricielle (exacte) fournit des résultats très proches à ceux de la méthode Lagrangienne avec éléments fictifs. (ALGMEF –ACL-)

5.3.6. Conclusion

1. Les contraintes linéaires n'ont pas besoin d'être mise à l'échelle, aucun facteur n'a été pré ou post multiplié par les équations contraintes.
2. La méthode de Lagrange, choisie pour imposer les contraintes linéaires donne des résultats acceptables au niveau élémentaire.

5.4. Problèmes de barres

5.4.1. Données du problème

Soit la structure physique suivante, schématisée ci-dessous, pour laquelle on souhaite calculer les déplacements (Fig.5.13). On suppose le problème linéaire d'un point de vue géométrique et matériel. Ces deux membrures sont de section circulaire constantes et leurs deux dimensions dans le plan de section sont petites vis à vis de la longueur. Le plan qui contient le centre de gravité de toutes les sections droites des membrures est le plan arbitrairement noté Π dont les axes de références sont Ox et Oy .

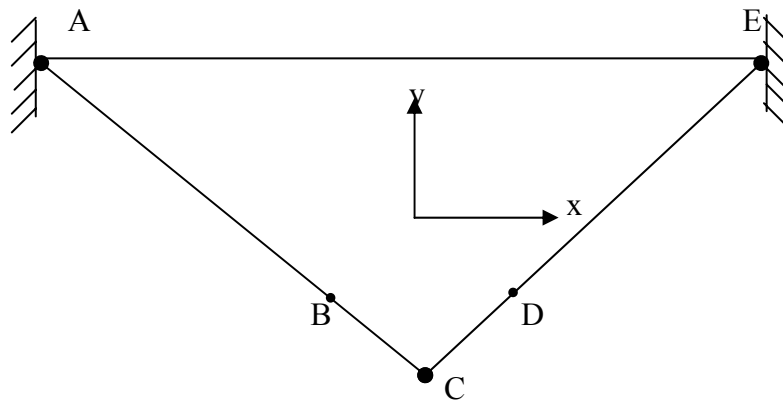


FIG. 5.13. Schéma de principe

Aux points A et E, la structure peut tourner librement et sans frottement autour d'un axe perpendiculaire au plan Π mais n'a aucune translation possible : il y a en ces points des charnières fixes dans l'espace, sans raideur en rotation autour de leur axe. Au point C, la partie mâle (point B à C) et la partie femelle (point C à D) sont reliées par un axe qui interdit toute translation relative d'une membrure par rapport à l'autre mais qui laisse libres et indépendantes leurs rotations dans le plan Π .

Cette liaison est elle supposée parfaite, c'est-à-dire sans frottement. On applique une charge sur l'axe qui est situé au point C, dans la direction y , telle que la résultante des efforts soit dans le plan Π . Les longueurs AB et DE sont très largement supérieures aux distances BC et CD.

L'énoncé aurait pu se résumer à ceci : soit deux barres de 1m de long, formant un V d'angle interne 120 degrés, de section circulaire (diamètre 5 cm), en acier ($E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$),

encastrées aux deux extrémités du V et soumises à une charge de 5000 N. On suppose toutes les liaisons parfaites.

Le code « ALGMEF », lors de l'introduction des données précitées, est bloqué. ALGMEF trouve lors de la résolution un mode d'ensemble détecté par un zéro sur la diagonale de la matrice de raideur d'où son non-inversibilité.

Une solution à ce problème est la suivante : il faut qu'il existe au point C deux nœuds, de numéros distincts notés ici 3 et 4, de positions identiques dont on lie les composantes de translation :

$$u(3)=u(4) \quad v(3) = v(4)$$

On a appliqué cette solution au programme « ALGMEF » avec éléments fictifs (élément barre) (FIG.5.14.).

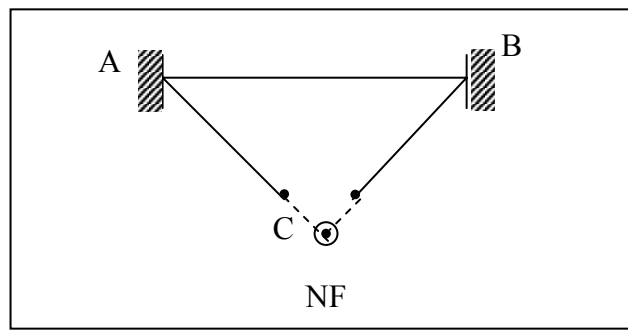


FIG 5.14.Schéma avec éléments fictifs

5.4.2. Résultats

DEPL	REF	ALGMEF SCL	ALGMEF AEF	E%
$v(C)*10^2$	0.2546	/	0.2547	0.039

Tab.5.7. Déplacement v du point C

5.4.3. Interprétations et Conclusion

Le problème posé a un plan de symétrie orthogonal à l'axe des x et passant par le point C. La symétrie est topologique et mécanique : il est donc possible de ne modéliser que la moitié de la structure à condition d'y appliquer des conditions aux limites supplémentaires rendant compte de cette symétrie.

La symétrie n'étant pas prise en compte lors de la résolution, les éléments fictifs étant choisis, pour imposer les relations linéaires citées ci-dessus donnent des résultats égaux à ceux fournis par la résistance des matériaux.

5.5. Problèmes de liaison Barres-Poutres

5.5.1. Introduction

Une grande quantité de structures industrielles comportent des poutres ou des assemblages de poutres au sens général. Parmi ces assemblages, on ne rencontre pas uniquement des ensembles mécano-soudés où tous les efforts et les moments se transmettent par les liaisons. En effet, les conditions aux limites aux extrémités des membrures sont variées : plusieurs cas peuvent se présenter selon le type de liaison, dont celui du raccord barre poutre qui fait l'objet de cet exemple.

Une barre est une poutre particulière en ce sens qu'elle est rotulée à chaque extrémité et ne transmet de ce fait aucun moment ni effort tranchant.

La difficulté principale du raccord barre-poutre réside dans le fait que le nœud d'une poutre possède 6 degrés de liberté (3 translations et 3 rotations) alors que le nœud d'une barre n'en possède que 3 (les trois translations). Et on sait que mélanger dans un même modèle des éléments finis qui n'ont pas les mêmes degrés de liberté peut parfois causer quelques soucis.

5.5.2. Données du problème

L'exemple traité, bien qu'académique, permet d'illustrer simplement les différentes façons de traiter le problème de ce type de raccord. La structure de la figure est constituée de trois membrures. En prenant pour axes et notations conventionnels ceux de la figure ci-dessus, les membrures soudées au point 2 sont des poutres, la membrure articulée aux points 1 et 3 est une barre. Le point 1 est encasturé, le point 3 est sollicité par une charge imposée ponctuelle de 100N. On fera référence par la suite à ces points caractéristiques plutôt qu'à des nœuds dont le numéro est susceptible de changer avec le raffinement du maillage. Le matériau des 3 membrures est de l'acier (module de Young de 210000 MPa, coefficient de Poisson de 0.3),leur section circulaire (diamètre de 3 cm). Les deux poutres ont une longueur de 50 cm et forment un angle droit.

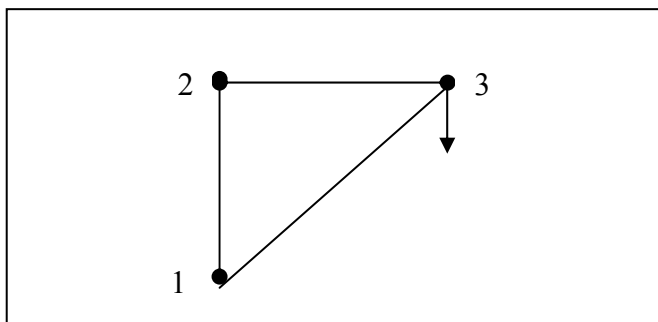


FIG5.15 assemblage barre-poutre

5.5.3. Modèle Proposé

La solution utilisée consiste à définir 5 points, les points 1 et 4 d'une part, 3 et 5 d'autre part étant superposés : ils ont des numéros différents mais les m^{es} coordonnées. On définit ensuite 3 éléments finis de poutre (1-2, 2-3, 5-6), l'encastrement est réalisé au point 1. quatre éléments ainsi que 2 nœuds fictifs sont définis, reliant les nœuds 3,5 et 1,6. (FIG.5.)

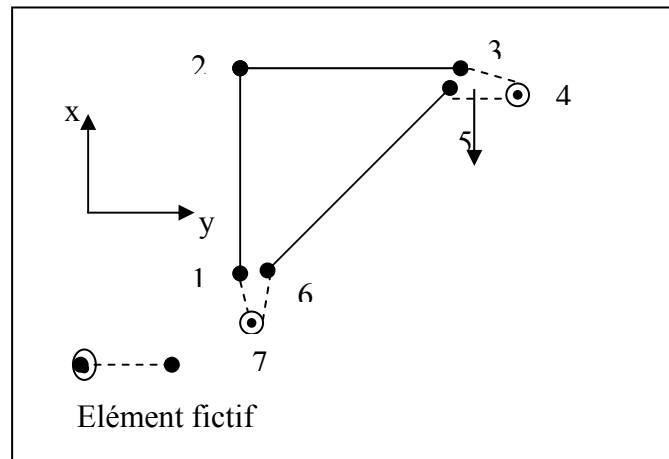


FIG.5. 16. Modèle proposé

On établit des relations cinématiques pour lier les translations des nœuds superposés :

$$u_6 = u_1 \quad , \quad v_6 = v_1 \quad (\text{idem pour 3 et 5})$$

5.5.4. Résultats

Le lancement du programme conduit aux résultats suivants :

DEPL	REF	ALGMEF SCL	ALGMEF AEF	E%
u(3) (cm)	0.461	/	0.410	11.06
v (3)(cm)	-0.464	/	0.411	11.42

Tab.5.8. Déplacements du nœud chargé

5.5.5. Interprétation et Conclusion

Malgré qu'on a dédoublé les nœuds, introduit des éléments et nœuds fictifs suite à l'établissement de relations cinématiques liant les translations des nœuds superposés, on n'a pu avoir qu'un résultat dont l'erreur est de 11% . cela implique que la liaison barre-poutre peut être modélisée par l'introduction de contraintes linéaires mais avec un taux d'erreur un peu élevé (dans le cas étudié)

5.6. Paroi sur colonne : Jonction Poutre-Membrane

5.6.1. Données du problème

Une paroi discrétisée par des éléments de membrane avec rotation normale nodale, est portée par deux colonnes, discrétisée chacune par une poutre classique de Bernoulli (fig.5.13)

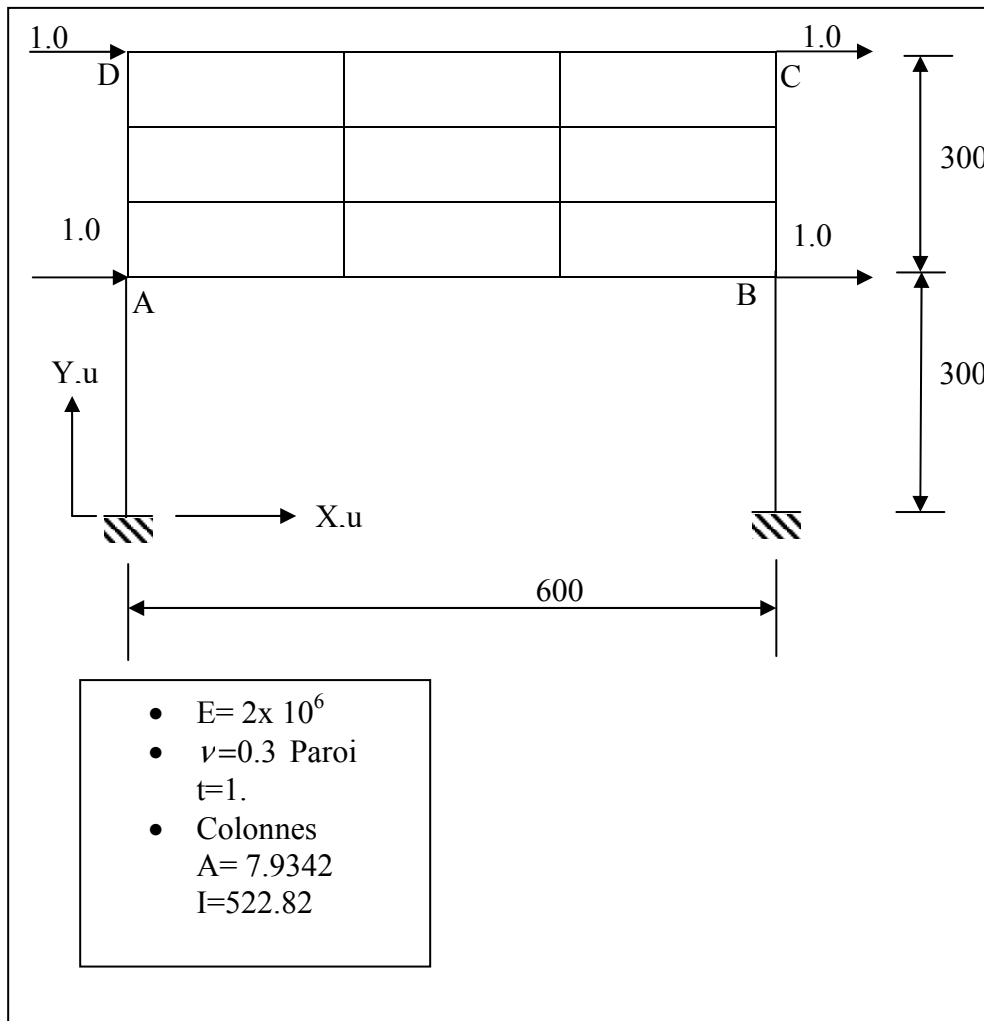


FIG.5.17. Paroi sur colonnes

Dans cet exemple, on se préoccupe du détail de la jonction poutre-membrane, dans cette zone, on isole les colonnes des membranes, puis on les relie par des éléments fictifs. (fig.5.14.), alimentés par les contraintes linéaires suivantes:

$$\begin{cases} U_2 = U_4 \\ V_2 = V_4 \\ \theta_2 = \theta_1 \end{cases} \text{ I} \quad \begin{cases} U_{17} = U_{19} \\ V_{17} = V_{19} \\ \theta_{17} = \theta_{19} \end{cases} \text{ II}$$

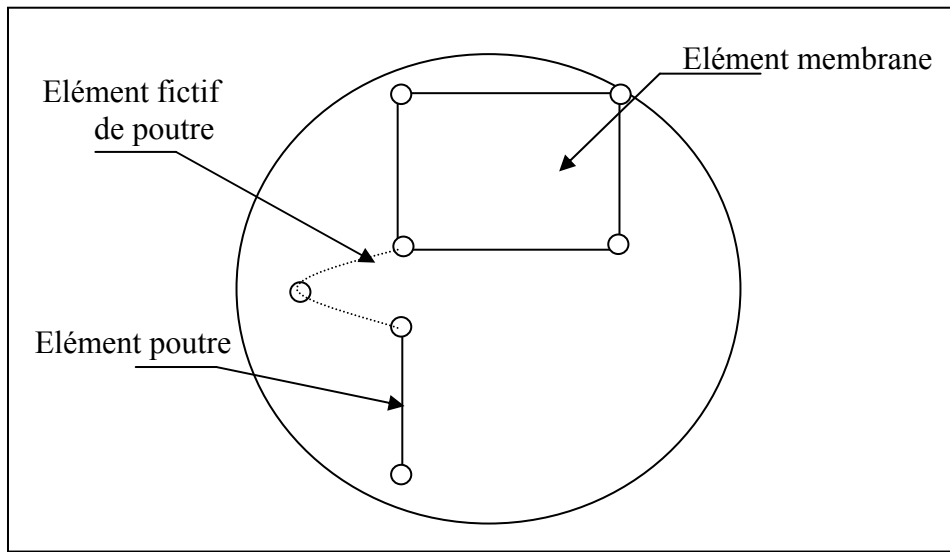
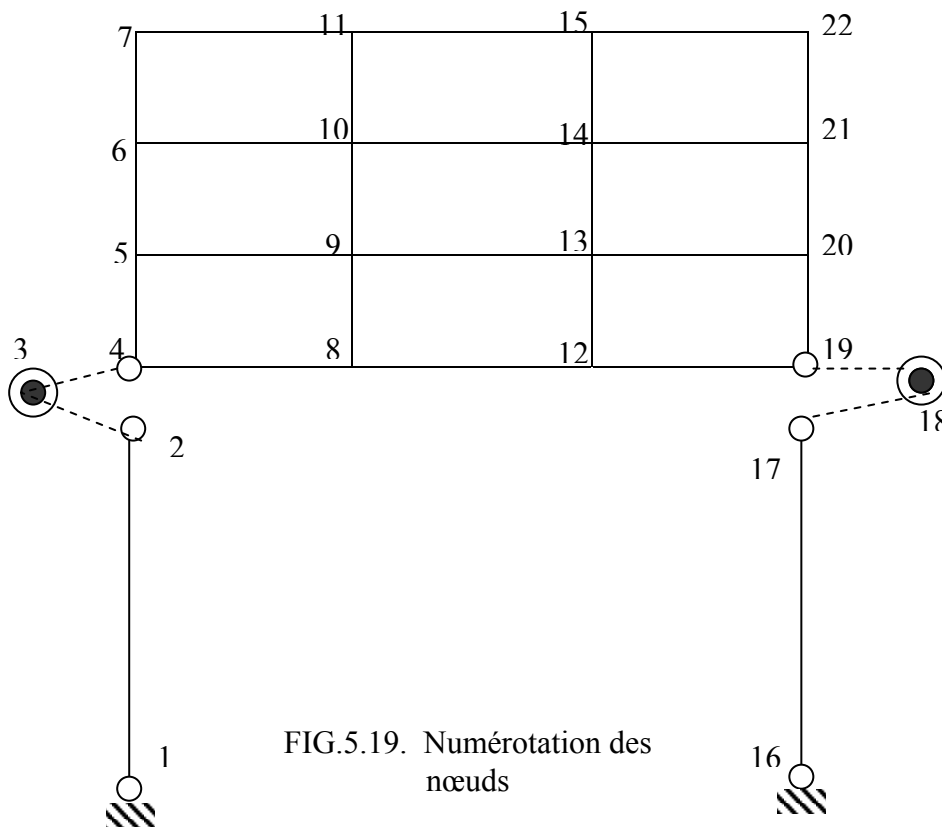


FIG.5.18. Détail de la zone de jonction avec éléments fictifs

Les groupes (I) , (II) de contraintes linéaire occupent les trois degré de liberté des nœuds fictifs (NF=3) et (NF=18) liés au nœuds structure (NS=2,4 et NS = 17,19)

La structure sera présentée comme suit :



Le tableau (Tab.5.9.) donne quelques résultats (avant et après l'introduction des contraintes linéaires reliant les nœuds 2,4 et 17,19).

5.6.2. Résultats des déplacements

Déplacements	Réf	SBQ4 A.E.F	S.B.Q4 S.E.F	IBR	SAB
$10^3 \cdot V_B$	4.304	4.3481	4.338	4.335	4.329
$10^7 \cdot \theta_z$	0.000	2.330	2.300	2.148	1.615

Tab.5.9. paroi sur colonnes

5.6.3. Constatations et interprétation des résultats

5.6.3.1. Constatations

De l'analyse du tableau ci-dessus, on constate que les déplacements dans les zones de jonctions, sans éléments fictifs sont très proches de ceux obtenus après application de contraintes linéaires et ajout d'éléments fictifs.

5.6.3.2. Interprétations

La modélisation de la structure proposée par des membranes avec degré de liberté de rotation et des poutres de Bernoulli assure une compatibilité entre ces deux éléments distincts au niveau de la jonction membrane-poutre.

5.6.4. Conclusion

Le raccord membrane-poutre (membrane avec degré de liberté de rotation) ne pose pas de problèmes au niveau de la jonction, en effet, le transfert des grandeurs cinématiques est réalisé, ce qui a été vérifié lors de l'appel aux contraintes linéaires.

6.APPLICATION

La compatibilité des éléments les uns avec les autres est souvent un problème délicat de la discrétisation d'une structure compliquée. Cette compatibilité est nécessaire pour garantir la convergence, même si elle peut être relaxée légèrement grâce au patch test. De tels problèmes surgissent quand on combine des éléments de solide et de structure.

Des éléments spéciaux ont été développés, afin de traiter la jonction d'éléments finis basés sur des théories différentes (Continu \leftrightarrow structure), parmi ceux-ci, des membranes à trois degrés de liberté par nœud (2 translations et une rotation) ont été créées et testées sur des exemples numériques qui comprennent des jonctions, par les chercheurs dans ce domaine [IBR 90] afin d'évaluer la performance de cet élément. Le cas que nous allons traiter comme application de notre présentation constitue un exemple qui a été étudié par Ibrahimbegovic et Frey [IBR].

6.1. Poutre encastrée dans un demi-plan infini

Dans les exemples précédents, on n'a pas raffiné le maillage dans les zones de jonction des divers composants structuraux : il s'agissait en fait de vérifier que le transfert de grandeurs cinématiques était réalisé.

Dans cet exemple, on examine en détail la jonction membrane-poutre (fig.6.1.). Ce problème a été étudié analytiquement par [MUS 53] et expérimentalement par [DON 60].

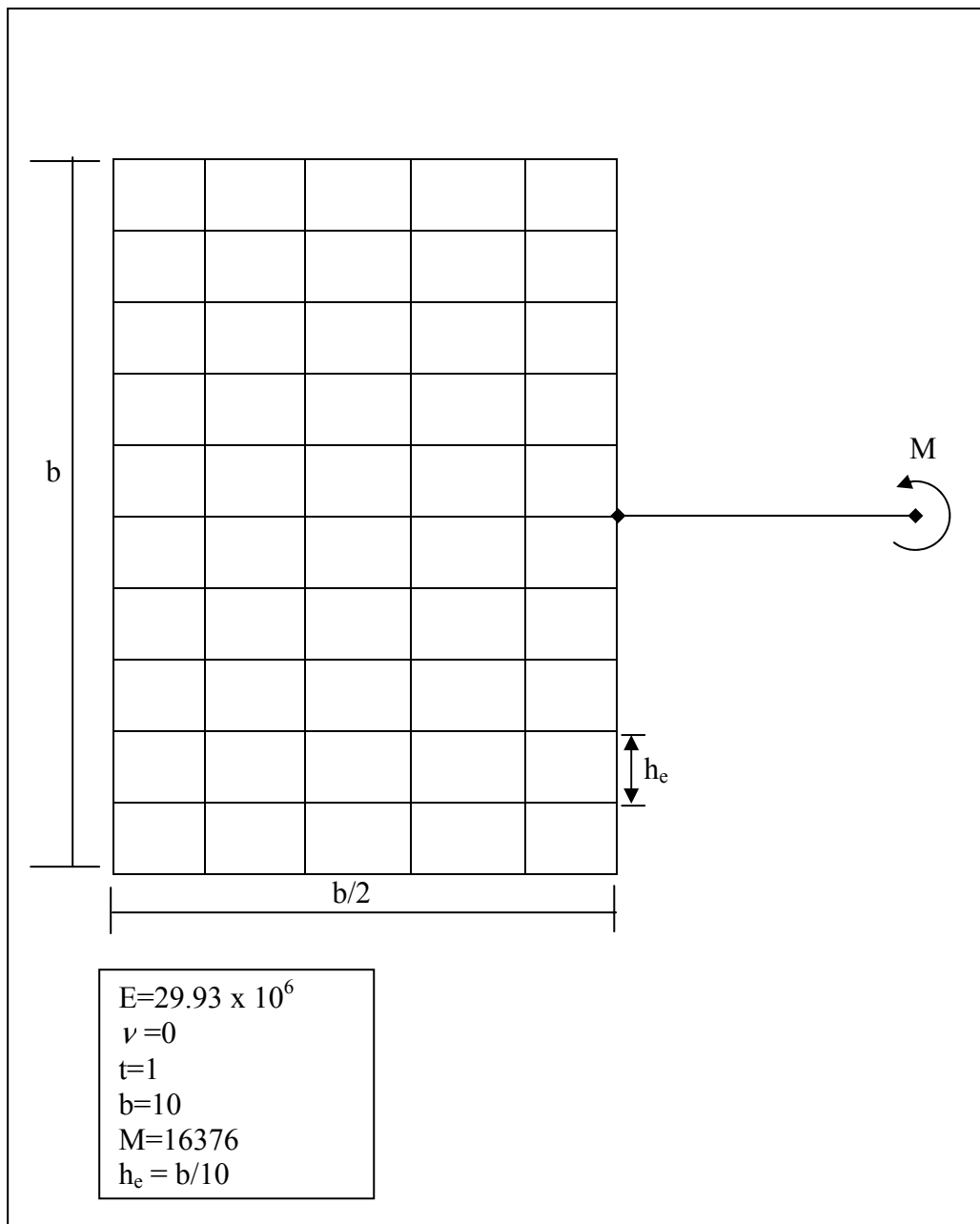


FIG. 6.1. Poutre encastrée dans un demi-plan infini.

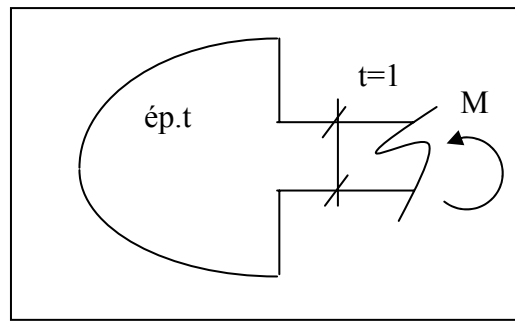


FIG.6.2. Région de la connexion

La solution de [MUS 53] suppose que la section d'encastrement reste plane ; sous l'effet d'un moment M , elle tourne de l'angle θ : ($t=1$)

$$\theta = \frac{16\pi M}{E h^2 \left\{ \pi^2 + \ln^2 \left[\frac{(3-\nu)(1+\nu)}{2} \right] \right\}}$$

Ce que les essais de [DON 60] ont confirmé. En réalité toutefois, la section d'encastrement ne reste pas plane.

On a discrétisé une portion du demi-plan en éléments membrane avec rotation normale. La poutre et sa jonction au demi-plan sont discrétisées de trois façons différentes :

- La poutre est modélisée par des éléments de poutre classiques et la jonction avec le demi-plan a lieu ponctuellement au nœud commun médian de la section d'encastrement.
- La poutre est modélisée comme ci-dessus et quand $h_e \leq h/2$, c'est à dire, quand deux ou plusieurs éléments de membrane sont contact direct avec la section d'encastrement de la poutre, [IBR 90] impose à cette dernière de rester plane (via, dans FELINA, les contraintes linéaires).
- Le maillage en membrane du demi-plan est prolongé dans la poutre.

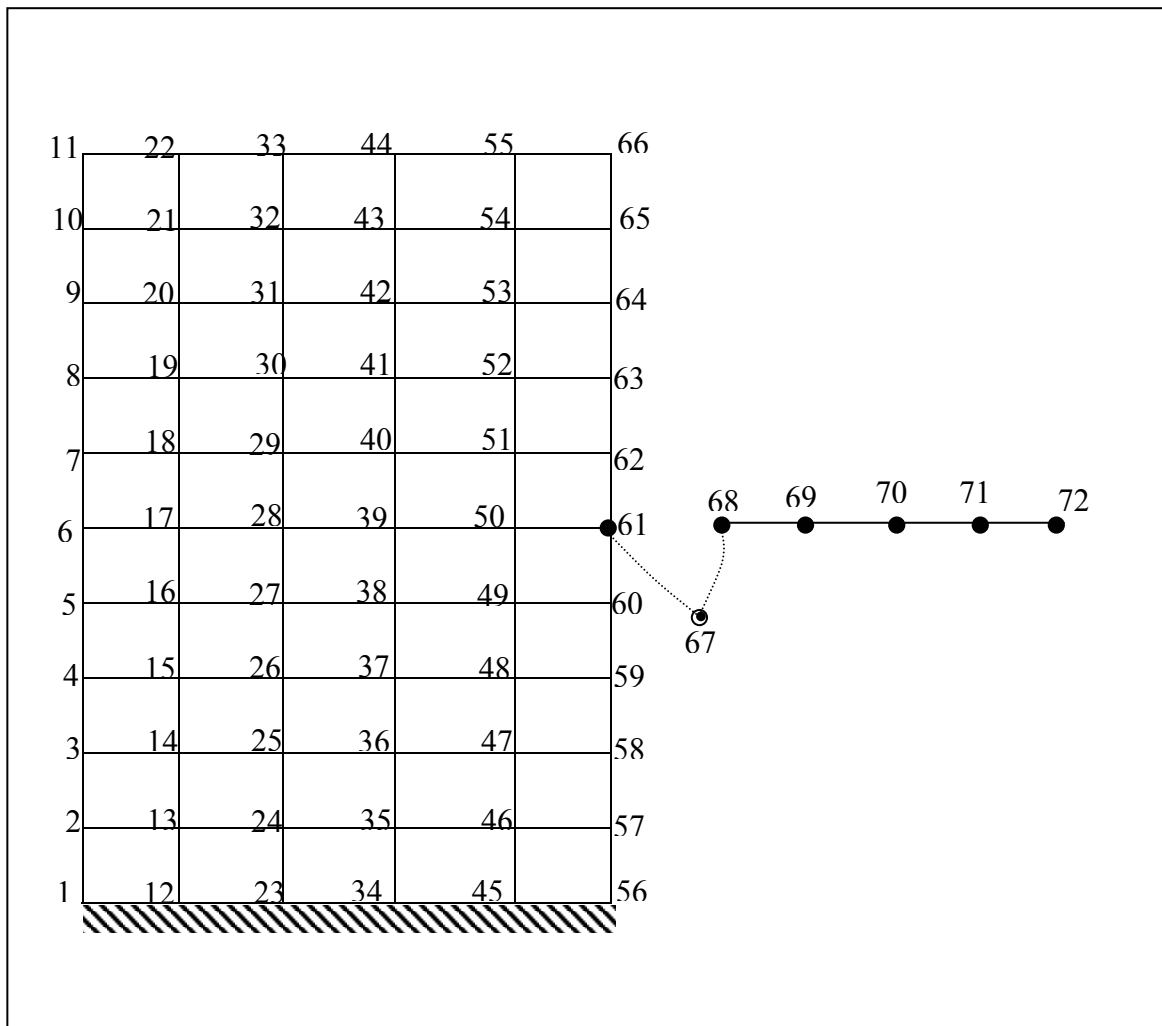


FIG.6.3. Structure discrétisée ($\frac{h}{h_e} = 1$)

Les tableaux (Tab.6.1. et Tab.6.2.) fournissent les déplacements des nœuds de la poutre :

6.2. Rotation de la poutre : poutre modélisée par des éléments poutre de Bernoulli et par des éléments membranes :

6.2.1. Approche poutre

	Analy MUS (53)	EXP DON (60)	IBR $\frac{h}{h_e} = 8$	IBR $\frac{h}{h_e} = 1$	ALGMEF SCL	ALGMEF ACL
$\theta \times 10^2$	0.248	0.252	0.243	0.946	3.8665	0.2373

Tab.6.1. Rotation de la poutre (Approche poutre)

6.2.2. Approche membranaire

	Analy MUS (53)	EXP DON (60)	IBR $\frac{h}{h_e} = 8$	ALGMEF SCL	ALGMEF ACL
$\theta \times 10^2$	0.248	0.252	0.214	0.2144	/

Tab.6.2. rotation de l'axe de la poutre (Approche membrane)

6.3. Constations

6.3.1. Rotation sans contraintes linéaires :

- **Approche poutre**

L'exécution du programme « ALGMEF » sans l'imposition de contraintes linéaires a fourni pour la rotation de l'axe de la poutre θ (approche poutre pour $h/h_e = 1$) une valeur très proche de celle trouvée par [IBR] (sans contraintes linéaires) pour $h/h_e = 2$.

- **Approche membrane**

L'approche membranaire a donné pour la rotation avec $\frac{h}{h_e} = 1$. une valeur égale à celle trouvée par [IBR] pour $\frac{h}{h_e} = 8$ ($\theta = 0.214 \times 10^2$ rad) et $\frac{h}{h_e} = 4$ avec contraintes linéaire imposées via « FELINA ».

6.3.2. Rotation avec contraintes linéaires :

- **Approche poutre**

La poutre étant modélisée par des éléments poutre de Bernoulli a fournit un résultat fiable par rapport aux résultats analytiques [MUS 53] et [DON 60].

- **Approche membrane**

Le programme « ALGMEF » n'a pas fourni de résultats.

6.4. Conclusion

L'étude de la zone de jonction de la poutre encastree dans le demi –plan sans et avec application de contraintes linéaires et en modélisant la poutre par des

éléments poutre et membrane avec un raffinement de maillage auprès de cette zone nous a conduit aux résultats suivants :

- la performance d'éléments membrane avec rotation dans le plan est évaluée par le programme « ALGMEF » avec utilisation de contraintes linéaires.
- L'introduction des contraintes linéaires dans « ALGMEF » donne une allure rapide à la convergence vers la solution , en effet, les résultats fournis par le programme « FELINA » ne convergent qu' à $\frac{h}{h_e}=8$ tandis que ALGMEF à

$$\frac{h}{h_e}=1.$$

Finalement, on peut dire que sans les contraintes linéaires, il est évident que les résultats ne correspondent pas avec la réalité. Dans ce cas il y a toujours un élément qui est lié avec la poutre de Bernoulli. Manifestement la rigidité dépend de la hauteur de l'élément. Donc, pour obtenir des résultats raisonnables, il est indispensable d'utiliser les contraintes linéaires .Ainsi tous les éléments qui touchent la section de la poutre sont en contact direct et ajoutent leur partie à la liaison de la jonction. Pour juger la convergence, il manque toutefois des tests supplémentaires avec un maillage encore plus raffiné.

On ne peut clore ce chapitre sans noter que l'analyse d'une telle jonction avec des éléments classiques de membrane (sans les degrés de liberté de rotation) impose de prolonger la poutre dans le maillage du demi-plan infini (FIG.6.4.). Un modèle numérique de ce type a été décrit dans [COO 91] et son analyse de convergence a été étudié par Ciarlet et ses collaborateurs [CIA 87].

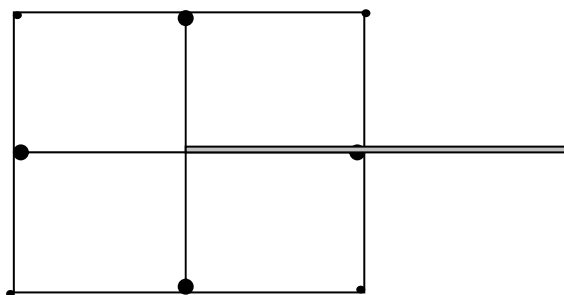


FIG.6.4. Liaison poutre-voile

CONCLUSION

Dans cette contribution, on a présenté quelques problèmes rencontrés par les utilisateurs des codes de calcul des structures, causés par l'incompatibilité des degrés de liberté aux nœuds. Une incompatibilité qui met en jeu la continuité des déplacements et des rotations, qui constitue la base de la théorie des éléments finis.

Le but de ce travail n'est pas de passer en revue toutes les solutions possibles mais de sensibiliser le lecteur au fait qu'il y a une difficulté réelle, qui a tendance à être masquée dans certains logiciels par le biais d'outils de plus en plus évolués et automatique.

L'ouvrage propose une solution à ce problème d'incompatibilité, basée sur l'introduction de contraintes linéaires liant les nœuds concernés, cette introduction est réalisée dans le code « ALGMEF » de calcul statique des structures, ainsi qu'un élément appartenant à une nouvelle famille d'éléments finis, caractérisée par la présence d'inconnues nodales de rotation (membrane avec rotation dans le plan SBQ4).

Un objectif important visé par ce travail, est que l'utilisateur de « ALGMEF » puisse imposer non seulement des conditions aux limites en valeur mais aussi des conditions liées par des équations, lors de l'analyse d'une structure qu'elle soit simple ou complexe.

L'étude n'a été validée que par des relations d'égalité entre les composantes des déplacements des nœuds, mais cela n'empêche que le programme traite des cas plus complexes d'équations seulement. (le programme ne traite pas les inégalités (\geq) (\leq))

La méthode d'introduction pratique des contraintes linéaire malgré la perte de la définition positive de la matrice de rigidité, nous a permis :

- d'introduire des variables physiques additionnelles comme inconnues et ainsi des conditions de dérivabilité et conditions aux limites moins sévères sur $\{u\}$,
- d'étendre le domaine d'utilisation du programme « ALGMEF »,
- d'évaluer la performance de l'élément membrane avec degré de liberté de rotation dans le plan (SBQ4).
- de conclure que : sans les contraintes linéaires , il est évident que les résultats ne correspondent pas avec la réalité.

Recommandations

Vu l'importance du problème d'intercompatibilité, ou le problème d'imposition de conditions aux limites qui se présentent sous forme d'équations ; que rencontrent les ingénieurs praticiens lors de la discrétisation des structures complexes par les programmes de calculs qui constituent des boîtes noires pour leurs utilisateurs, on espère que ce sujet fera l'objet d'autres recherches à l'avenir, plus approfondies.

Pour cela, on propose aux futures travaux intéressés par ce sujet l' :

- Etude de la jonction coque-volume ;
- Etude de l'interaction sol-structure ;
- Extension du programme à une étude non linéaire ;
- Extension du programme à une étude dynamique. ;
- Amélioration du programme « ALGMEF » en profitant des progrès réalisés dans le domaine informatique (utilisation des tableaux dynamiques, graphes pour le pré-processing [maillage] et post-processing [déplacements], l'orienté objet, ...etc.)

Bibliographie

- [ALL 88] ALLMAN.D.J.
A quadrilateral finite element including vertex rotation for plane elasticity analysis,
IJNME, Vol 26, 1988.
- [BAT 81] BATHE K.J. et L.W. HO,
Some Results in the Analysis of Thin Shell Structures, in Nonlinear Finite
Element Analysis in Structural Mechanics,
Springer, Berlin 1981.
- [BEL 90] BELARBI Mohamed Tahar,
Développement d'Algorithmes et Eléments dans la Méthode des Eléments Finis,
Mémoire de Magister,
université de Annaba 1990.
- [BEL 98a] BELARBI.M.T. et CHARIF.A., N.NOWEL,
Elément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan,
Revue Européenne des éléments finis, Vol 7, N° 4, Juin 1998.
- [BEL 98b] BELARBI.M.T. et CHARIF.A.,
Nouveau Quadrilateral SBQ4 avec Drilling Rotation,
Conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquées et les Sciences de
l'Ingénieur CIMASI 98, Casablanca, Vol 2, 1998.
- [CIA 87] CIARLET P.G., H.LEDRET et R.NZENGWA,
Modélisation de la jonction entre un corps élastique tridimensionnel et une
plaque,
C.R. Acad. Sci. Paris 1987.
- [CIA 90] CIARLET P.G.,
Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation,
Masson, 1990.
- [COO 91] COOK.R.G.,
Beam cantilevered From Elastic Support: Finite Element Modeling,
Commun, Appl. Numer. Methods, 1991.
- [CRA 01] CRAVEUR Jean-Charles,
Modélisation des Structures – Calcul par éléments finis-,
2^{ème} édition, Dunod, Paris 2001.
- [DON 60] O'DONNELL. W. J. ,
The additional Deflexion of contilever due to the Elasticity of the support,
J.App.Mech, 27, 1960.
- [FIN 85] FINEL-G, User's manual,
IREM Internal Report 85/3, July 1985.

- [FRE 98] FREY François et JAROSLAV Jirousek,
Analyse des structures et milieux continus-Méthode des Eléments Finis-,
Vol 6, Suisse 98.
- [FRE 01] FREY François,
Analyse des structures et milieux continus –Mécanique des solides-,
Vol 3, Suisse 2001.
- [GALL 75] GALLAGHER. R.H.,
Finite Element Analysis :Fundamentals,
Prentice-Hall, Englewood Cliffs,N.J, 1975.
- [IBR 90] IBRAHIMBEGOVIC A,TAYLOR.R.L. et WILSON.E.L.,
A Robust Quadrilateral Membrane Finite Elementwith Drilling Degree of
Freedom,
IJNME,Vol 30,1990.
- [IBR 91] IBRAHIMBEGOVIC A. et E.I. WILSON,
Thick shell ans Solid Finite Elements with independent Rotation Fields,
Int. J.Methods Eng, 1991.
- [IBR 93] IBRAHIMBEGOVIC A.,
Mixed Finite Element for Plane Problems in Finite Elasticity,
Comput.Methods Appl. Mech. Eng., 1993.
- [IMB 79] IMBERT J.F. , Analyse des structures par éléments finis.
Cépaduès 1979.
- [MAS 72] MASSONNET G.H. , DEPREZ.G, MAQUOI .R, MULER. R, FONDER.G,
Calcul des structures sur ordinateur,
Tome II, Eyrolles, Paris 1972.
- [MUS 53] MUSKHELISHVILI .N.I. ,
Some Basic Problems of the Mahemactical Theory of Elasticity,
P. Noordhoff, Groning, Holland 1953.
- [SAB 95] SABIR A.B, ASFENDJI,
Triangular rand rectangular Plane elasticity finite element,
.ELSEVIER Science Limited, 1995.
- [SAN 80] SANNDER G,
L'analyse matricielle des structures,
Notes de cours 1980, L.T.A.S.- Université de Liège.
- [SHE 84] SHEPHARD M.S: Linear multipoint constraints applied via transformation as part
of a direct stiffness assembly process,
Int.J. Num. Meth. Inging, Vol.20, 1984.

- [TOU 84] TOUZOT Gilbert et GOURI Dhatt,
Une présentation de la méthode des éléments finis,
2^{ème} édition, Paris 1984.
- [TOU 84] TOUZOT GILBERT ET GOURI DHATT ,
Une présentation de la méthode des éléments finis,
2ème édition, Paris 1984.
- [ZIE 77] ZIEKIEICZ O.C,
The finit élément méthode ,
3rd édition London, 1977.
- [ZIE 91] ZIENKIEWCZ.O.C ET TAYLOR R.L,
The Finite Element Method,
McGraw-Hill, London 1991.
- [ZIE 01] ZIENKIEWCZ. O. C. et TAYLOR. R.L ,
The Finite Element Method,
McGraw-Hill, London 2001.

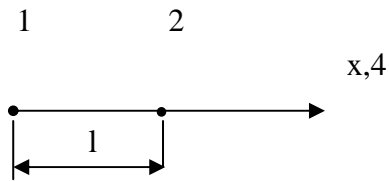
ANNEXE A

1/ Eléments barre :

✚ Fonctions de forme :

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{l}$$

$$N_2(x) = \frac{x}{l}$$



✚ Matrice de rigidité :

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2/ Elément poutre :

✚ Fonctions de forme :

$$N_1 = 1 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3$$

$$N_2 = x - 2L \left(\frac{x}{L} \right)^2 + L \left(\frac{x}{L} \right)^3$$

$$N_3 = 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3$$

$$N_4 = -L \left(\frac{x}{L} \right)^2 + L \left(\frac{x}{L} \right)^3$$

✚ Matrice de rigidité

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L \end{bmatrix}$$

3/ Élément membrane avec rotation SBQ4

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & a & \frac{a}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & -b & a & b & a.b & 0 & \frac{b^2}{2} & b^2 & a.b^2 & a^2.b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & a & \frac{a^2}{2} & b & a.b & 0 & -a^2.b & -a^3.b^2 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & -2ab & -3a^2.b & a & 0 \\ 1 & 0 & -b & 0 & b & 0 & 0 & \frac{b^2}{2} & b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ANNEXE B

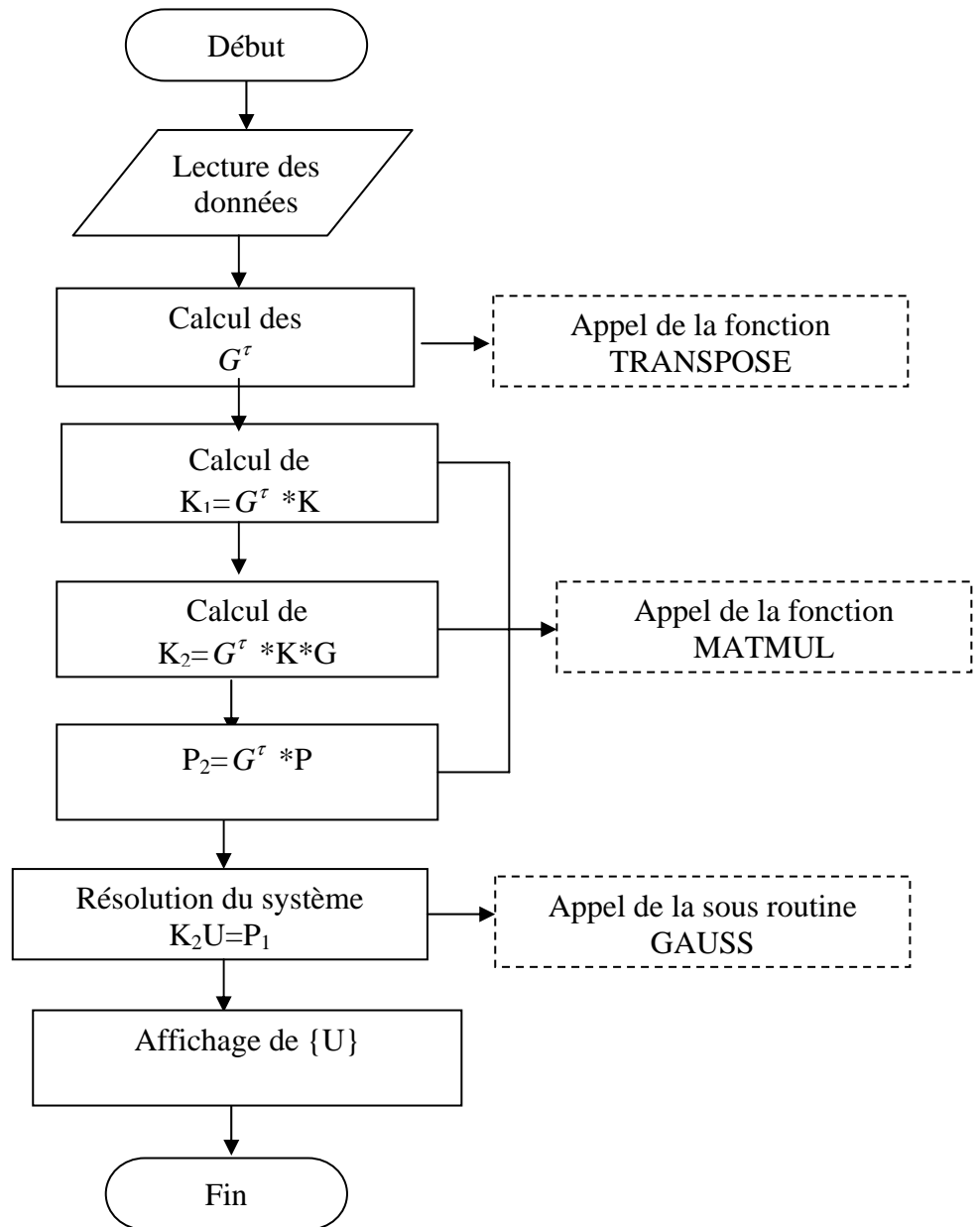
✚ Dérivation matricielle

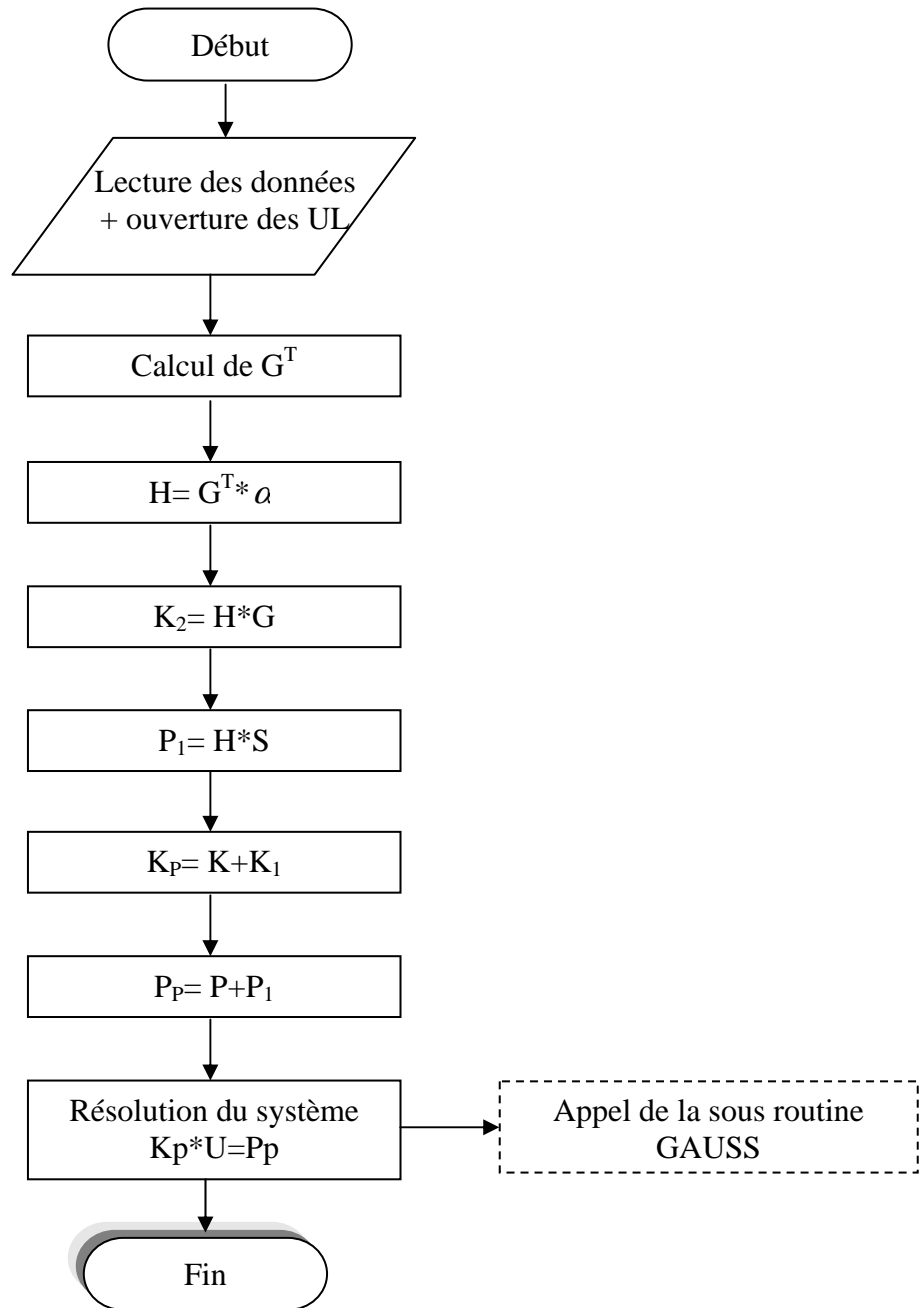
$$U = \frac{1}{2} X^T A X = \frac{\partial U}{\partial X} = A X$$

$$S = X^T A Y = \frac{\partial S}{\partial X} = A Y$$

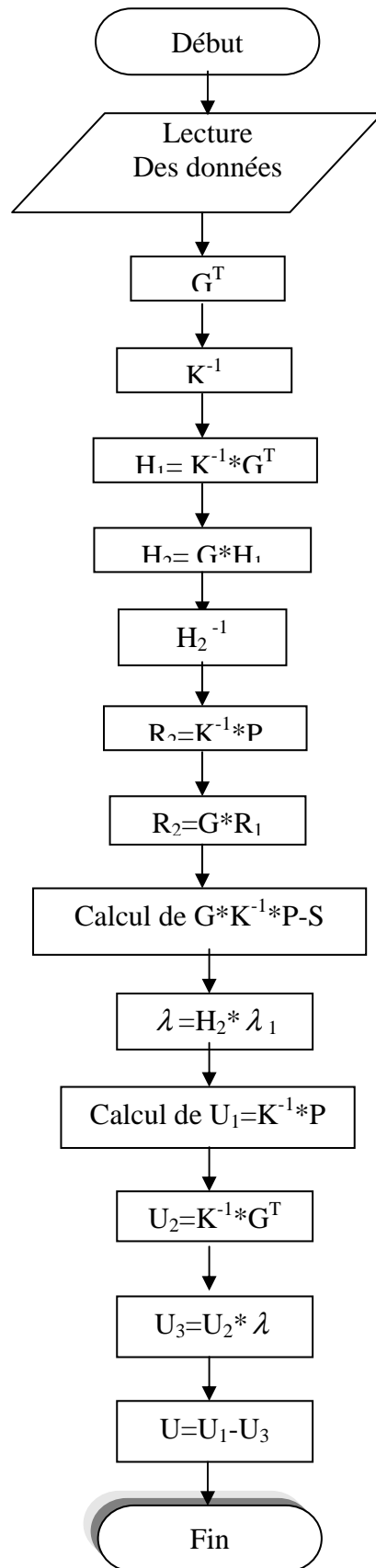
$$\frac{\partial S}{\partial Y} = A^T X$$

- Organigrammes des méthodes utilisées pour l'introduction des contraintes linéaires.
 - organigramme de la méthode matricielle
 - organigramme de la méthode de pénalité
 - organigramme de la méthode de Lagrange S.E.F.

② ORGANIGRAMME DE LA METHODE MATRICIELLE

② ORGANIGRAMME DE LA METHODE DE PENALITE

② ORGANIGRAMME DE LA METHODE DE LAGRANGE S.E.F.



ANNEXE C

Dans cette annexe, on va présenter quelques exemples de fichiers de résultats (unité de sortie) :

1. Elément Barre

```

*****
** ELEMENT BARRE:2 NOEUDS ADJACENTS NON CHARGES **
*****

*****
*****
***** DEPLACEMENTS *****
*****
*****
*****
* * * * *
* NODE * Ux * Vy * TETA *
* * * * *
*****
* 1 * .2000E+01 * .0000E+00 * .0000E+00 *
*-----*-----*-----*
* 2 * .1000E+01 * .0000E+00 * .0000E+00 *
*-----*-----*-----*
* 3 * .1000E+01 * .0000E+00 * .0000E+00 *
*-----*-----*-----*
* 4 * .1000E+01 * .0000E+00 * .0000E+00 *
*-----*-----*-----*
* 5 * .1000E-29 * .0000E+00 * .0000E+00 *
*****

```

2. Problème de barres

```

*****
*****
***** DEPLACEMENTS *****
*****
*****
*****
* * * * *
* NODE * Ux * Vy * TETA *
* * * * *
*****
* 1 * .43296E-26 * -.24999E-26 * -.26483E-28 *
*-----*-----*-----*
* 2 * -.69346E-05 * -.25478E+00 * -.48351E-29 *
*-----*-----*-----*
* 3 * -.25478E-30 * -.21649E+04 * .00000E+00 *
*-----*-----*-----*
* 4 * -.69321E-05 * -.25478E+00 * .48122E-28 *
*-----*-----*-----*
* 5 * -.43296E-26 * -.25001E-26 * .26474E-28 *
*****

```

3. liaison barre-poutre

```
*****
*****
***** DEPLACEMENTS *****
*****
*****
*****
* * * * *
* NODE * Ux * Vy * TETA *
* * * * *
*****
* 1 * -.52817E-33 * -.10000E-27 * -.10340E-26 *
*-----*-----*-----*
* 2 * .41058E+00 * -.69971E-04 * -.12326E-01 *
*-----*-----*-----*
* 3 * .41065E+00 * -.41120E+00 * -.10371E-26 *
*-----*-----*-----*
* 4 * -.41120E-30 * -.85741E+02 * .00000E+00 *
*-----*-----*-----*
* 5 * .41065E+00 * -.41120E+00 * -.14651E-26 *
*-----*-----*-----*
* 6 * .27922E-08 * -.27922E-08 * -.14647E-26 *
*-----*-----*-----*
* 7 * -.10000E-57 * -.49945E+02 * .00000E+00 *
*****
```

4. Jonction poutre-Membrane avec rotation dans la plan - Paroi sur colonnes

```
*****
*****
***** DEPLACEMENTS *****
*****
*****
*****
* * * * *
* NODE * Ux * Vy * TETA *
* * * * *
*****
* 1 * .20044E-29 * .20039E-29 * -.30148E-27 *
*-----*-----*-----*
* 2 * .43481E-02 * .37884E-04 * -.23307E-06 *
*-----*-----*-----*
* 3 * .64470E-08 * .23021E-36 * .43860E-32 *
*-----*-----*-----*
* 4 * .43481E-02 * .37885E-04 * -.23021E-06 *
*-----*-----*-----*
* 5 * .43663E-02 * .34354E-04 * -.11999E-06 *
*-----*-----*-----*
* 6 * .43775E-02 * .34154E-04 * -.12578E-06 *
*-----*-----*-----*
* 7 * .43906E-02 * .34822E-04 * -.13536E-06 *
*-----*-----*-----*
* 8 * .43544E-02 * .97952E-05 * -.94303E-07 *
*-----*-----*-----*
* 9 * .43652E-02 * .98367E-05 * -.11004E-06 *
*-----*-----*-----*
```

```

* 10 * .43770E-02 * .10768E-04 * -.11178E-06 *
*-----*-----*-----*
* 11 * .43883E-02 * .10931E-04 * -.10893E-06 *
*-----*-----*-----*
* 12 * .43544E-02 * -.95652E-05 * -.93918E-07 *
*-----*-----*-----*
* 13 * .43652E-02 * -.95938E-05 * -.11000E-06 *
*-----*-----*-----*
* 14 * .43770E-02 * -.10514E-04 * -.11219E-06 *
*-----*-----*-----*
* 15 * .43884E-02 * -.10680E-04 * -.10919E-06 *
*-----*-----*-----*
* 16 * .20042E-29 * -.19952E-29 * -.30146E-27 *
*-----*-----*-----*
* 17 * .43480E-02 * -.37720E-04 * -.23524E-06 *
*-----*-----*-----*
* 18 * .39481E-08 * .23237E-36 * .43103E-32 *
*-----*-----*-----*
* 19 * .43480E-02 * -.37721E-04 * -.23237E-06 *
*-----*-----*-----*
* 20 * .43663E-02 * -.34134E-04 * -.12076E-06 *
*-----*-----*-----*
* 21 * .43775E-02 * -.33932E-04 * -.12576E-06 *
*-----*-----*-----*
* 22 * .43907E-02 * -.34616E-04 * -.13592E-06 *
*****

```

- Poutre encasté dans un demi plan infini

```

*****
*****
***** DEPLACEMENTS *****
*****
*****
*****
* * * *
* NODE * Ux * Vy * TETA *
* * * *
*****
* 1 * -.23691E-27 * -.10415E-26 * -.31029E-04 *
*-----*-----*
* 2 * -.17738E-04 * -.10241E-03 * .60462E-04 *
*-----*-----*
* 3 * -.85470E-04 * -.18729E-03 * .73691E-04 *
*-----*-----*
* 4 * -.18192E-03 * -.26719E-03 * .11381E-03 *
*-----*-----*
* 5 * -.31018E-03 * -.32641E-03 * .13404E-03 *
*-----*-----*
* 6 * -.45307E-03 * -.36378E-03 * .14708E-03 *
*-----*-----*
* 7 * -.59746E-03 * -.38109E-03 * .14070E-03 *
*-----*-----*
* 8 * -.73764E-03 * -.38627E-03 * .13364E-03 *
*-----*-----*
* 9 * -.86881E-03 * -.38610E-03 * .12941E-03 *
*-----*-----*
* 10 * -.99615E-03 * -.38478E-03 * .12427E-03 *
*-----*-----*
* 11 * -.11215E-02 * -.38497E-03 * .12720E-03 *

```

* 12 * .19777E-27 * -.22065E-26 * .11680E-04 *

* 13 * -.22291E-04 * -.60939E-04 * .32033E-04 *

* 14 * -.81911E-04 * -.11763E-03 * .75126E-04 *

* 15 * -.18117E-03 * -.16845E-03 * .10280E-03 *

* 16 * -.30955E-03 * -.20891E-03 * .12336E-03 *

* 17 * -.45384E-03 * -.23692E-03 * .12771E-03 *

* 18 * -.60022E-03 * -.25022E-03 * .13328E-03 *

* 19 * -.73789E-03 * -.25619E-03 * .13133E-03 *

* 20 * -.87004E-03 * -.25890E-03 * .12624E-03 *

* 21 * -.99590E-03 * -.25929E-03 * .12599E-03 *

* 22 * -.11208E-02 * -.25965E-03 * .12362E-03 *

* 23 * .20738E-29 * -.55254E-27 * .26655E-05 *

* 24 * -.18365E-04 * -.26808E-04 * .33611E-04 *

* 25 * -.73603E-04 * -.60595E-04 * .64088E-04 *

* 26 * -.17391E-03 * -.90570E-04 * .95583E-04 *

* 27 * -.30976E-03 * -.11297E-03 * .11844E-03 *

* 28 * -.46015E-03 * -.12313E-03 * .13656E-03 *

* 29 * -.60603E-03 * -.13283E-03 * .12693E-03 *

* 30 * -.74454E-03 * -.13592E-03 * .12247E-03 *

* 31 * -.87191E-03 * -.13577E-03 * .12305E-03 *

* 32 * -.99714E-03 * -.13564E-03 * .12257E-03 *

* 33 * -.11198E-02 * -.13474E-03 * .12399E-03 *

* 34 * .13849E-27 * -.40231E-27 * -.17605E-05 *

* 35 * -.75695E-05 * -.59209E-05 * .10551E-04 *

* 36 * -.55774E-04 * -.37829E-05 * .72732E-04 *

* 37 * -.15612E-03 * -.10301E-04 * .10696E-03 *

* 38 * -.30348E-03 * -.29427E-04 * .12932E-03 *

* 39 * -.47411E-03 * -.51142E-04 * .93547E-04 *

* 40 * -.62887E-03 * -.31908E-04 * .11689E-03 *

* 41 * -.75511E-03 * -.20307E-04 * .11576E-03 *

* 42 * -.87816E-03 * -.14032E-04 * .12646E-03 *

* 43 * -.99870E-03 * -.13099E-04 * .11806E-03 *

* 44 * -.11173E-02 * -.14283E-04 * .11967E-03 *

* 45 * .16280E-26 * .49120E-26 * -.26215E-04 *

* 46 * .13850E-04 * -.61296E-05 * .12655E-04 *

* 47 * -.28521E-04 * .46573E-04 * .43308E-04 *

* 48 * -.13281E-03 * .85972E-04 * .12520E-03 *

* 49 * -.27980E-03 * .10009E-03 * .15897E-03 *

* 50 * -.50418E-03 * .96056E-04 * .29479E-03 *

* 51 * -.67044E-03 * .64691E-04 * .63234E-04 *

* 52 * -.76647E-03 * .97841E-04 * .14093E-03 *

* 53 * -.89046E-03 * .10461E-03 * .10074E-03 *

* 54 * -.99842E-03 * .10310E-03 * .11794E-03 *

* 55 * -.11147E-02 * .10322E-03 * .11302E-03 *

* 56 * -.10123E-26 * -.70858E-27 * -.36728E-04 *

* 57 * .11133E-04 * .68886E-04 * .62565E-04 *

* 58 * .80053E-05 * .19079E-03 * .14777E-03 *

* 59 * -.85003E-04 * .26517E-03 * .19629E-03 *

* 60 * -.23476E-03 * .35729E-03 * .26982E-03 *

* 61 * -.59115E-03 * .30934E-03 * .37363E-03 *

* 62 * -.64134E-03 * .24893E-03 * .17472E-03 *

* 63 * -.77113E-03 * .27069E-03 * .19603E-03 *

* 64 * -.88557E-03 * .21660E-03 * .11864E-03 *

* 65 * -.99985E-03 * .21639E-03 * .11020E-03 *

* 66 * -.11147E-02 * .21856E-03 * .11867E-03 *

* 67 * -.58399E-03 * .68931E-03 * .38665E-03 *

* 68 * -.55004E-03 * .10837E-02 * .40228E-03 *

* 69 * -.53082E-03 * .14939E-02 * .41856E-03 *

* 70 * -.50739E-03 * .19203E-02 * .43427E-03 *

RESUME

Dans de très nombreux modèles industriels et de génie civil, coexistent des éléments de coque de volume, de poutre et de barre. La connexion des ces éléments pose généralement des problèmes aux utilisateurs des codes de calcul de structure à cause de l'incompatibilité des degrés de liberté aux nœuds, il est donc évidant que la continuité des déplacements et de rotation si elles existent, ne pourra toujours être garantie, alors que le théorie des éléments finis est basée sur cette continuité.

L'objectif de ce travail est que l'ingénieur praticien puisse introduire des relations cinématiques linéaires liant les nœuds de jonction afin de garantir la continuité.

Mots clés: Eléments fini, Elément de membrane avec rotation, Contraintes linéaires, Nœuds de jonction, Incompatibilité, Raccords d'éléments.

ABSTRACT

In several models of industry and civil engineering, there are elements of shell, volume, beam and bar.

The connection of this elements results problems for the users of structures calculation programs for the reason of the incompatible of degrees of freedom in the nodes, which make the displacements and rotation continuity, if they exist, not warrant forever, whereas the finite element theory is based on this continuity

The target of this work is giving the possibility for the practitioner engineer to insert linear cinematic relations to relate the nodes of junction for the warranty of this continuity.

Key words: Finite elements, Element of membrane with rotation, linear Constraints, junction of Nodes, Incompatibility, Splices of elements,.