

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE EL HADJ LAKHDAR BATNA  
Institut de Génie civil, Hydraulique et Architecture  
Département de Génie Civil

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de Magistère  
En Génie Civil

THEME

**Investigation numérique des problèmes de l'élasticité plane  
par Élément Fini Rectangulaire basé sur l'approche en  
déformation**

OPTION

Ouvrages d'Art en Zones Sismiques

Présenté par

**MEGUELATTI YOUNES**

**Soutenu-le : 15/03 /2016**

**Devant le jury :**

|                     |            |              |              |
|---------------------|------------|--------------|--------------|
| <b>Président :</b>  | T. KARECHE | <b>Prof.</b> | Univ. BATNA  |
| <b>Rapporteur :</b> | T. MAALEM  | <b>M.C.A</b> | Univ. BATNA  |
| <b>Examineurs :</b> | D.HAMADI   | <b>Prof.</b> | Univ. BISKRA |
|                     | N.LAHBARI  | <b>M.C.A</b> | Univ. BATNA  |

## **DEDICACES**

Je dédie ce travail à mes parents qui me sont très chers. A mes frères et sœurs et à toute ma famille. A tous mes amis et collègues de la promotion de Génie Civil 2012/2013.

## REMERCIEMENTS

J'exprime mes vifs remerciements à mon encadreur Monsieur **T. Maalem**, Maitre de conférences a l'université de Batna. Son assistance, sa disponibilité, les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer et enfin la confiance qu'il m'a toujours témoigné, m'ont été d'un grand secours pour l'accomplissement de ce travail.

Je tiens à remercier profondément les membres de jury :

- Monsieur **T. Kareche**, Professeur à l'Université de Batna, pour avoir accepté de présider le jury. Je le remercie très sincèrement
- Monsieur **D. Hamadi**, Professeur à l'Université de Biskra, qui m'a fait l'honneur d'examiner ce travail et je lui en suis profondément reconnaissant.
- Monsieur **N. Lahbari**, Maitre de conférences a l'université de Batna, qui a accepté d'être examinateur. Je le remercie très sincèrement.

# Résumé

Dans ce mémoire, on propose une formulation d'un nouvel élément rectangulaire membranaire, baptisé **R4MM** pour l'élasticité plane doté de 2 d.d.l par nœud pour enrichir la bibliothèque des éléments finis. Dans l'élément en question on utilise la technique de condensation statique, cette dernière a montré dans beaucoup de cas sa performance. On utilise pour cela l'approche en déformation devenue, actuellement très répandue dans la littérature. Lors du développement du champ des déplacements, les modes de corps rigide et déformations constantes sont satisfaits. Au niveau du champ de déformation les fonctions sont indépendantes, on les intègre ensuite sur les variables dépendantes. L'élément est validé à travers une série de tests réputés être sévères. Pour les applications, on a utilisé, les poutres à parois minces avec différents types d'appuis, différentes longueurs et largeurs, sous différents chargements. On aboutit au résultat : qu'avec la présente formulation, la double condensation essayée pour la première fois dans cette approche, ne semble pas être réellement performante.

**Mots-Clés : Approche déformation-Éléments finis -Rectangulaire – R4MM — Double condensation statique – Membrane - Élasticité plane.**

## ملخص

في هذه الرسالة، نقترح صياغة عنصر جديد غشائي مستطيل، ويدعى R4MM للمرونة المسطحة و في كل عقدة يوجد درجتين من الحرية و ذلك لإثراء مكتبة العناصر المحددة. من أجل هذا العنصر نستعمل تقنية التكثيف الاستاتيكي (السكوني) التي اظهرت أداء جيدا في كثير من الحالات. هذا العنصر مبني على مبدأ التشويه الذي أصبح حاليا واسع الاستعمال. عندما تطور حقل التشويه حركة الجسم الصلبة و التشوه الثابت محققين. على مستوى حقل التشوه تعتبر الدالات مستقلة ثم نكالمها حسب المتغيرات. يتم التحقق من صحة عمل العنصر من خلال سلسلة من الاختبارات تعتبر شديدة الصعوبة. فيما يخص التطبيقات استعملنا كمرات رقيقة مع عدة انواع من الركائز و أبعاد متعددة و تحت حمولات مختلفة. و اللذي أوصل إلى النتيجة مع هذه الصيغة لا يبدو أن التكثيف المزدوج الذي يستعمل لأول مرة فعلا حقا.

**كلمات مفتاحية : مقارنة التشوه - عنصر مجدد - مستطيل - غشائي - المرونة المسطحة**

# Abstract

For this thesis, we propose a formulation of a new rectangular membrane element with 2 D.O.F per node, called **R4MM** and used for plane elasticity to enrich the finite elements library. For the present element the static condensation technique is used, this latter has been shown to be effective in many cases. This element is based on strain approach, which is currently becoming widely used in the literature. While developing its displacement field, rigid body and constant deformation modes are included and preserved. The strain field functions are assumed to be independent; they are then integrated on, to dependent displacement variables. The element is validated through a series of severe tests, and then it has been applied for thin beams with various types of supports, lengths and widths, and under different loads. This leads to the result: with this formulation, the double condensation tried for the first time along with this approach does not seem to be really effective.

**Keywords : Strain approach- Finite elements -Rectangular – R4MM –Double static condensation– Membrane - Plane elasticity.**

# Table des figures

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.1  | Déformation plane dans une barre tubulaire . . . . .   | 11 |
| 2.2  | Forces de surface pour une problème d'élasticité plane . . . . .   | 13 |
| 2.3  | Plaque mince sous contrainte plane . . . . .   | 15 |
| 4.1  | Géométrie, numérotation et disposition des nœuds de l'élément <b>R4MM</b> . . . . .  | 34 |
| 4.2  | Patch test d'un élément fini en dilatation . . . . .   | 36 |
| 4.3  | Patch-test : plaque soumis a des déplacements imposés suivant x (les 2 cas de chargement) . . . . .  | 38 |
| 4.4  | Patch-test : plaque soumis a des déplacements imposés suivant y (les 2 cas de chargement) . . . . .  | 39 |
| 4.5  | Poutre console mince soumise à une force à l'extrémité . . . . .   | 40 |
| 4.6  | Flèche normée au point A d'une poutre console mince soumise à une force à l'extrémité : convergence d l'élément <b>R4MM</b> comparé avec <b>SAP2000</b> et <b>ABAQUS</b> . . . . .     | 41 |
| 4.7  | Poutre console soumise à une flexion pure . . . . .  | 41 |
| 4.8  | Flèche normée au point A d'une poutre console mince soumise au flexion pure à l'extrémité : convergence d l'élément <b>R4MM</b> comparé avec <b>SAP2000</b> et <b>ABAQUS</b> . . . . . | 42 |
| 4.9  | Poutre console soumise à une force parabolique à l'extrémité . . . . .   | 43 |
| 4.10 | Convergence de la flèche d'une poutre console soumise à une force parabolique à l'extrémité Allman . . . . .   | 44 |
| 4.11 | Poutres consoles soumises à une force à l'extrémité . . . . .  | 45 |
| 4.12 | Convergence de la fleche d'une poutre console soumise à une force à l'extremité ( $L/b = 2,5$ ) . . . . .  | 46 |
| 4.13 | Convergence de la fleche d'une poutre console soumise à une force à l'extremité ( $L/b = 5$ ) . . . . .  | 47 |

---

|      |  |    |
|------|--|----|
| 4.14 | Convergence de la fleche d'une poutre console soumise à une force à l'extrémité<br>( $L/b = 10$ ) . . . . .        | 48 |
| 4.15 | Poutre Large simplement appuyée chargée au milieu . . . . .  | 49 |
| 4.16 | Contrainte normale au point <i>A</i> pour la Poutre Large simplement appuyée chargée<br>au milieu . . . . .        | 50 |
| 4.17 | Contrainte tangentielle au point <i>B</i> pour la Poutre Large simplement appuyée char-<br>gée au milieu . . . . . | 51 |

# Liste des tableaux

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.1  | Conversion entre les solutions des états plans de contrainte et de déformation . . .                        | 17 |
| 4.1  | Déplacements et contraintes nodales d'un seul élément en dilatation . . . . .                               | 37 |
| 4.2  | Déplacements du nœud central (cas de chargement 1) . . . . .  | 37 |
| 4.3  | Déplacements du nœud central (cas de chargement 2) . . . . .  | 37 |
| 4.4  | Déplacements du nœud central (cas de chargement 1) . . . . .  | 38 |
| 4.5  | Déplacements du nœud central (cas de chargement 2) . . . . .  | 38 |
| 4.6  | Flèche normée au point A d'une poutre console mince soumise à une force à l'ex-<br>trémité . . . . .        | 40 |
| 4.7  | Flèche normée au point A, d'une poutre console soumise à la flexion pure . . . . .                          | 42 |
| 4.8  | Flèche normée pour la poutre console soumise à une force parabolique à l'extrémité                          | 43 |
| 4.9  | Fleche d'une poutre console soumise à une force à l'extrémité ( $L/b=2,5$ ) . . . . .                       | 45 |
| 4.10 | Fleche d'une poutre console soumises à une force à l'extrémité ( $L/b=5$ ) . . . . .                        | 46 |
| 4.11 | Fleche d'une poutre console soumises à une force à l'extrémité ( $L/b=10$ ) . . . . .                       | 47 |
| 4.12 | Contrainte normale au point A pour la Poutre Large simplement appuyée chargée<br>au milieu . . . . .        | 49 |
| 4.13 | Contrainte tangentielle au point B pour la Poutre Large simplement appuyée char-<br>gée au milieu . . . . . | 50 |

# Table des matières

|   |            |
|---|------------|
| <b>Table des figures</b>                                  | <b>iv</b>  |
| <b>Liste des tableaux</b>                                 | <b>vi</b>  |
| <b>Table des matières</b>                                 | <b>vii</b> |
| <b>1 Introduction générale</b>                            | <b>1</b>   |
| 1.1 Introduction . . . . .                                | 1          |
| 1.2 Méthodes numériques utilisées en ingénierie . . . . . | 1          |
| 1.3 Définition de la M.E.F . . . . .                      | 3          |
| 1.4 Présentation des logiciels utilisés . . . . .         | 4          |
| 1.4.1 SAP2000 . . . . .                                   | 4          |
| 1.4.2 ABAQUS . . . . .                                    | 5          |
| 1.5 Langage FORTRAN . . . . .                             | 6          |
| 1.6 Objectifs du Mémoire . . . . .                        | 6          |
| 1.7 Plan du mémoire . . . . .                             | 7          |
| <b>2 Aperçu sur la théorie de l'élasticité plane</b>      | <b>8</b>   |
| 2.1 Introduction . . . . .                                | 8          |
| 2.2 Principes fondamentaux d'analyse . . . . .            | 9          |
| 2.3 États plans de déformation . . . . .                  | 10         |
| 2.4 États plans de contrainte . . . . .                   | 14         |
| 2.5 Fonction de contrainte d'AIRY . . . . .               | 17         |
| <b>3 Revue de littérature</b>                             | <b>19</b>  |
| 3.1 Introduction . . . . .                                | 19         |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.2      | Domaines d'application . . . . .   | 19        |
| 3.3      | Etapas de la M.E.F . . . . .   | 20        |
| 3.4      | Les modèles éléments finis . . . . .   | 22        |
| 3.5      | Approche en déformation . . . . .  | 23        |
| 3.5.1    | Définition . . . . .   | 23        |
| 3.5.2    | Avantages du modèle en déformation . . . . .   | 24        |
| 3.6      | Contribution de l'approche en déformation dans l'analyse des structures . . . . .              | 24        |
| 3.7      | Revue de littérature . . . . .   | 25        |
| 3.8      | Avenir de la méthode . . . . .   | 28        |
| 3.9      | Condensation statique . . . . .  | 29        |
| 3.9.1    | Description . . . . .  | 30        |
| 3.9.2    | Implémentation de la condensation statique : . . . . .   | 31        |
| 3.9.2.1  | Méthodes matricielles directes : . . . . .   | 31        |
| 3.9.2.2  | Méthode d'élimination de Gauss : . . . . .   | 32        |
| 3.9.3    | Remonter aux degrés de liberté internes . . . . .  | 32        |
| <b>4</b> | <b>Validation et Applications de l'élément R4MM</b>  | <b>33</b> |
| 4.1      | Construction de l'élément R4MM . . . . .   | 33        |
| 4.1.1    | Introduction . . . . .   | 33        |
| 4.1.2    | Développement analytique . . . . .   | 33        |
| 4.1.3    | Évaluation de la matrice $[K0]$ . . . . .  | 35        |
| 4.2      | Validations . . . . .  | 36        |
| 4.2.1    | Patch-test pour un seul élément . . . . .  | 36        |
| 4.2.2    | Patch-tests pour plusieurs éléments . . . . .  | 37        |
| 4.2.2.1  | Déplacements suivant l'axe x . . . . .   | 37        |
| 4.2.2.2  | Déplacements suivant l'axe y . . . . .   | 38        |
| 4.3      | Applications . . . . .   | 39        |
| 4.3.1    | Poutre console mince soumise à une force à l'extrémité (Macneal) . . . . .                     | 39        |
| 4.3.2    | Poutre console mince soumise à une flexion pure à l'extrémité (Macneal) . . . . .              | 41        |
| 4.3.3    | Poutre console mince soumise à une force parabolique à l'extrémité (Poutre d'Allman) . . . . . | 43        |

---

|   |  |           |
|---|--|-----------|
| 4.3.4   | Poutre console mince avec différentes largeurs soumise à une force à l'extrémité . . . . . | 44        |
| 4.3.5   | Poutre large simplement appuyée, chargée au milieu . . . . .                               | 48        |
| <b>Conclusions et Recommandations</b>                               |  | <b>52</b> |
| <b>Bibliographie</b>  |  | <b>53</b> |
| <b>A Matrices utilisées pour le développement de l'élément R4MM</b> |  | <b>60</b> |
| A.1   | Matrice de prés rigidité $[K0]$ . . . . .  | 60        |
| A.2   | Matrice $[Q]$ . . . . .  | 61        |
| A.3   | Matrice $[D]$ . . . . .  | 61        |
| A.4   | Matrice $[A]$ . . . . .  | 62        |
| A.5   | Matrice $[A]^{-1}$ . . . . .   | 62        |
| A.6   | Matrice du champs R4MM . . . . .   | 63        |
| A.7   | Déterminant de la matrice $[A]$ . . . . .  | 63        |
| <b>B Programme R4MM</b>   |  | <b>64</b> |

# Liste des symboles

$[ \ ]$  Matrice

$\{ \}$  Vecteur

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  composantes normales du tenseur des contraintes

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  composantes tangentielles du tenseur des contraintes

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$  composantes normales du tenseur de déformation

$\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{yz}$  composantes tangentielles du tenseur de déformation

$x, y, z$  coordonnées cartésiennes du repère global

$a, b$  dimensions de l'élément fini respectivement dans les directions  $x$  et  $y$

$[ \ ]^{-1}$  L'inverse d'une matrice

$[ \ ]^{-T}$  Transposée d'une matrice

$u, v, w$  déplacements d'un point de l'élément suivant les directions  $x, y, z$

$\{\delta^e\}$  Vecteur des déplacement nodales elementaires

$[A]$  Matrice de transformation

$[D]$  Matrice de comportement

$\{f\}$  Vecteur des forces nodales de la totalité du structure assemblé

$\{f^e\}$  Vecteur des forces nodales élémentaires

$\{K\}$  Matrice de rigidité pour la totalité du structure assemblé

$[K^e]$  Matrice de rigidité élémentaire

---

|   |   |
|---|---|
| $\{u\}$   | Vecteur des déplacements nodales de la totalité du structure assemblé |
| $[\delta_c^e]$  | Vecteur des déplacements nodales élémentaires après condensation      |
| $[B]$   | Matrice de déformabilité  |
| $\{f_c^e\}$   | Vecteur des forces nodales élémentaires après condensation            |
| $[K_0^e]$   | Matrice élémentaire intégrée ou matrice de prés-rigidité              |
| $[K_c^e]$   | Matrice de rigidité élémentaire après condensation                    |
| $[Q]$   | Matrice du champs de deformation                                      |
| $\nu$   | coefecient de Poisson   |
| $\phi$  | Rotation en plan «drilling rotation»                                  |
| $a_i$   | Coefficients indéterminées  |
| $A$   | Air de section  |
| $E$   | Module élastique «module de Young»                                    |
| $H$   | largeur   |
| $I$   | Inerti d'une section  |
| $L$   | longueur  |
| $t$   | épaisseur   |
| $\int$  | Intégral  |
| $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ | Dérivées partielles par rapport à x , y , z                           |

# Chapitre 1

## Introduction générale

### 1.1 Introduction

Ce mémoire est en relation avec les méthodes de calculs numériques traitant les problèmes des sciences de l'ingénieur, et plus particulièrement la méthode des éléments finis (M.E.F). On essaye de mettre en œuvre une base de travail pour l'analyse des problèmes de l'élasticité linéaire plane en utilisant les hypothèses des petits déplacements et des petites déformations. Pour cela, on formule un élément fini rectangulaire doté de quatre nœuds basé sur l'approche en déformation, dans lequel on voit à travers les résultats l'effet d'une double condensation statique. L'approche en déformation pour modéliser les structures est couverte par beaucoup d'auteurs, et elle a vu un développement rapide ces dernières années et un nombre appréciable d'articles a été publiée sur le sujet.

### 1.2 Méthodes numériques utilisées en ingénierie

Pour analyser un phénomène naturel en générale ou un problème d'ingénierie en particulier[1], on est souvent amené à développer un modèle mathématique pouvant décrire d'une manière aussi fiable que possible le problème en question. Le développement d'un modèle mathématique s'appuie généralement sur quelques postulats de base et plusieurs hypothèses simplificatrices pour aboutir à des équations gouvernantes qui sont souvent des équations différentielles auxquelles sont ajoutées des conditions aux limites. Exemple, la théorie d'élasticité s'appuie sur le postulat fondamental de l'existence du vecteur contrainte et les équations générales d'élasticité linéaire isotrope sont obtenues avec les hypothèses de petites déformations, d'homogénéité

et d'isotropie des matériaux ainsi que la linéarité des relations liant les contraintes et les déformations.

La résolution analytique d'équations différentielles pose parfois des difficultés insurmontables, et une solution exacte décrivant bien le problème étudié n'est pas toujours facile à trouver. Le recours aux modèles physiques et à la simulation expérimentale pour la recherche d'une solution analogue à la solution recherchée peut s'avérer coûteux en temps et en moyens. Cependant, avec les progrès enregistrés dans le domaine de l'informatique et les performances des ordinateurs de plus en plus grandes, il est devenu possible de résoudre des systèmes d'équations différentielles très complexes. Plusieurs techniques de résolution numérique ont été ainsi développées et appliquées avec succès pour avoir des solutions satisfaisantes à des problèmes d'ingénierie très variés.

Aidées par le développement spectaculaire des moyens de calculs (sur tous les plans : méthodes, machines et logiciels), les solutions numériques consistent à donner une solution approchée d'un système complètement défini. Les méthodes numériques présentent des intérêts considérables, parmi lesquels :

- Traitement des formes géométriques compliquées.
- Traitement des comportements complexes et évolutifs (non linéarité, viscosité, transitoire, . . . ).
- Couplage des différents phénomènes : mécanique, thermique, magnétisme, hydraulique, . . .
- Exploitation directe et rapide des résultats.
- Grande capacité d'adaptation aux innovations (modèles, matériaux, procédés, . . . ).
- Très grande simplicité d'utilisation (c'est aussi un danger ! Car cela n'encourage pas trop à réfléchir !).

Néanmoins, certains inconvénients peuvent être gênants :

- Temps de calcul assez significatif pour les modèles réels.
- Grand besoin en ressources informatiques (puissance, capacité de stockage, . . . ).
- Résultats non transposables et spécifiques à l'application numérique.
- Sensibilité des informations locales pour plusieurs types de problèmes (fissuration, . . . ).
- Effort considérable pour l'interprétation et la validation des résultats. Il faut garder à l'esprit que le coût réel d'une modélisation, n'est en réalité ni le coût-machine ni le

coût-logiciel, mais plutôt le coût-ingénieur, évalué par le temps passé pour la définition, l'implémentation du modèle, la validation, l'interprétation et la présentation des résultats.

### 1.3 Définition de la M.E.F

La méthode des éléments finis est l'une des techniques numériques les plus puissantes, l'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traitée par la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis est une technique d'analyse numérique pour obtenir des solutions approximatives à une large variété des problèmes des sciences de l'ingénieur. Bien qu'à l'origine, son développement était destiné pour l'étude des contraintes dans des parties de structures d'avions

A cause de sa diversité et sa flexibilité comme outil d'analyse, elle reçoit beaucoup d'attention dans les écoles d'ingénieurs en même temps que dans l'industrie. De nos jours, dans beaucoup de problèmes on constate que les ingénieurs ont tendance à chercher des solutions approximatives plutôt que des solutions fermes et exactes. Par exemple, si nous voulons connaître les déplacements d'une structure quelconque, sans trop d'efforts, nous pouvons écrire les équations gouvernant et les conditions aux limites pour ce problème, mais nous constaterons tout de suite qu'on ne peut pas trouver une solution analytique simple. La difficulté réside dans le fait, que la géométrie de la structure ou d'autres particularités du problème soient irrégulières ou "quelconques". Les solutions analytiques sont rares pour ces types de problèmes, que l'ingénieur est appelé à résoudre. Le bon sens et le savoir faire d'un utilisateur avertis viennent souvent à sa rescousse, et lui fournissent plusieurs alternatives pour surmonter ce dilemme. Une des possibilités est la simplification des hypothèses (pour ignorer certaines difficultés et réduire le problème pour qu'il puisse être traité). Parfois cette procédure marche, mais le plus souvent, elle mène à des résultats erronés ou à des réponses qui s'avèrent fausses. Maintenant que les ordinateurs sont largement disponibles, une alternative plus fiable se présente, c'est de laisser telles qu'elles les complexités du problème et de trouver une solution numérique approximative.

Le principe de base de la MEF est que le domaine peut être analytiquement modelé ou rapproché en le remplaçant par un ensemble d'éléments discrets. Puisque ces éléments peuvent être réunis de plusieurs manières, ils peuvent donc être employés pour représenter des formes extrêmement complexes. La MEF est en particulier bien convenu pour des problèmes avec des géométries complexes.

## **1.4 Présentation des logiciels utilisés**

Les codes éléments finis font maintenant partie des outils couramment utilisés pour la conception et l'analyse des produits industriels. Les outils d'aide à la modélisation devenant de plus en plus perfectionnés, l'utilisation de la méthode des éléments finis s'est largement développée et peut sembler de moins en moins une affaire de spécialistes. Si l'utilisation de la méthode se démocratise de part la simplicité croissante de mise en œuvre, la fiabilité des algorithmes et la robustesse de la méthode, il est donc indispensable que tout ingénieur connaisse les bases de la M.E.F, et comprenne également le processus de la phase de solution. Cette compétence ne peut être acquise que par l'étude analytique du concept de la M.E.F et la connaissance des techniques en rapport avec l'utilisation de ces outils de calcul. On s'intéresse pendant cette étude à utiliser les codes de calcul suivants :

### **1.4.1 SAP2000**

SAP 2000 est un logiciel de calcul et de conception des structures d'ingénierie particulièrement adapté aux bâtiments et ouvrages de génie civil[2]. Il permet en un même environnement la saisie graphique des ouvrages de B. T. P avec une bibliothèque d'élément autorisant l'approche du comportement de ce type de structure. Il offre de nombreuses possibilités d'analyse des effets statiques et dynamiques avec des compléments de conception et de vérification des structures en béton armé, charpente métallique. Le post-processeur graphique disponible facilite considérablement l'interprétation et l'exploitation des résultats et la mise en forme des notes de calcul et des rapports explicatifs. Le logiciel permet d'effectuer les étapes de modélisation (définition de la géométrie, conditions aux limites, chargements de la structure, etc. ) de façon totalement graphique, numérique ou combinée, en utilisant les innombrables outils disponibles. En effet, une structure peut être composée en sous schémas (portiques, treillis, dalle, voile) chacun défini dans sa base graphique correspondante, ensuite assemblée en schéma final de calcul, pendant que la compatibilité des connections s'effectue automatiquement.

Par ailleurs, les éléments finis, associés à une des bases graphiques de génération de schéma (base de treillis, de portique, de trame de poutre, de dalle, de voile, de coque, etc. ), sont directement paramétrés. Le préprocesseur numérique qui traduit automatiquement les données saisies graphiquement, offre une assistance permanente pour l'extension ou la correction des documents générés. Ces données numériques sont traduits dans un fichier ayant une extension. \$2K ou S2K. Le programme offre les possibilités d'analyse suivantes :

- Analyse statique linéaire
- Analyse P-Delta
- Analyse statique non linéaire
- Analyse dynamique

Ce logiciel facilite considérablement l'interprétation des résultats, en offrant notamment la possibilité de visualiser : la déformée du système, les diagrammes des efforts et courbes enveloppes, les champs de contraintes, les modes propres de vibration, etc.

### 1.4.2 ABAQUS

**ABAQUS** est une suite des programmes puissant de simulation de technologie, basé sur la méthode des éléments finis, qui peut résoudre des problèmes s'étendant des analyses linéaires relativement simple aux simulations non linéaires les plus provocantes[3], créés en 1978, **ABAQUS** contiens une bibliothèque étendue des éléments qui peuvent modeler pratiquement n'importe quelle géométrie. Il à une liste également étendue de modèles matériels qui peuvent simuler le comportement de la plupart des matériaux typiques de technologie comprenant des métaux, le caoutchouc, les polymères, les composites, le béton armé, et les matériaux géotechniques tels que les sols et la roche. Conçu comme un outil d'usage universel de simulation, **ABAQUS** peut être employé pour étudier plus que juste (effort/déplacement) des problèmes structuraux, il peut simuler des problèmes dans de tels secteurs divers, comme le transfert thermique, la diffusion massique, la gestion thermique des composantes électriques (analyses thermique électriques couplées), l'acoustique la mécanique de sol et l'analyse piézoélectrique.

**ABAQUS** est simple a employer et offre à l'utilisateur un éventail de possibilités même les mâtereaux les plus compliquées peuvent être modélisé facilement. **ABAQUS** se divise en deux grands codes :

**ABAQUS/ standard** est un code implicite d'analyses par éléments finis, il permet la résolution d'un très grand nombre de problèmes physiques différents. **ABAQUS/ standard** nous permet de

réaliser des études statiques en contraintes /déplacement, dynamiques linéaires ou non linaires. **ABAQUS/ explicit** est un code implicite d'analyses par éléments finis. **ABAQUS/ explicit** permet la résolution d'études comme les problèmes de dynamique rapides, grâce a ces algorithmes de contacts robustes, **ABAQUS/ explicit** et aussi un puissant outil pour les simulations de mise en forme (dynamique et quasi -statique) **ABAQUS/ explicit** dispose en plus de méthodes de maillage adaptif, utilisant les techniques qui permettent d'obtenir une solution robuste a des problèmes fortement non linéaires en grands déformations.

## 1.5 Langage FORTRAN

De l'abréviation : Formula Translation, c'est le premier langage informatique de haut niveau développé, c'est à dire qu'il nécessite un programme intermédiaire (le compilateur) qui le traduit en instructions compréhensibles par l'ordinateur. L'avantage est que le programme en FORTRAN est indépendant de la machine, il suffit d'avoir le compilateur adapté. Il est toujours utilisé dans les domaines scientifiques et techniques. Le premier document faisant référence au langage FORTRAN date de 1954. Il a été initialement conçu pour simplifier la programmation de calculs numériques sur les plateformes IBM 704. La première version du FORTRAN n'est apparue qu'au début de l'année 1957, ensuite il s'est imposé auprès de la communauté scientifique : il était bien plus simple à écrire. Très rapidement, il a été possible de réutiliser des codes FORTRAN sur d'autres plateformes telles que celles d'IBM. En 1966, il y eu une première tentative de normalisation du langage (travaux du Working Group X3. 4. 3) mais le groupe de travail n'a pas réussi à s'entendre sur un standard unique. C'est ainsi que sont nées deux normalisations distinctes : FORTRAN et Basic FORTRAN. En 1978, le même groupe de travail s'est de nouveau réuni et les spécifications du FORTRAN 77 furent adoptées. Depuis, le langage a encore évolué, deux autres standards sont nés, FORTRAN 90 et FORTRAN 95.

## 1.6 Objectifs du Mémoire

L'objectif du mémoire est la mise en œuvre d'un élément rectangulaire pour résoudre les problèmes de l'élasticité plane. L'élément en question est membranaire avec quatre nœuds aux angles, pour enrichir le champ des déplacements, on essaye de le doter de deux nœuds supplémentaires qui vont par la suite être condensés. Cette double condensation n'a pas été pratiquée auparavant. Le nouvel élément permet la modélisation des poutres minces en flexion, c'est-à-dire en état plan de contrainte. Le champ de déformation est intégré analytiquement, et la

matrice de rigidité est injectée dans le code de calcul de type universitaire le « **ALGMEF** » pensé et écrit par Belarbi [4]. Ce code permet le calcul par éléments finis d'éléments basés sur différents modèles, avec rajout de sous programmes permettant la condensation. Comme il est permis de traiter les états plans de contraintes et de déformations.

## 1.7 Plan du mémoire

Dans le premier chapitre on trouve quelques notions sur les méthodes numériques pour ingénierie, en particulier la MEF ainsi que les logiciels utilisés pour cette étude. Le second chapitre est consacré à des rappels, des bases théoriques de l'élasticité plane. Le troisième chapitre est dédié principalement à l'approche en déformation, en revenant sur son lointain historique jusqu'à aujourd'hui. On expose ensuite la technique de condensation statique simple et double. Le quatrième chapitre décrit le nouveau élément fini développé, il est rectangulaire et modélisant les états membranaires, le **R4MM**.

# Chapitre 2

## Aperçu sur la théorie de l'élasticité plane

### 2.1 Introduction

Les approches utilisées en générale, pour déterminer l'influence des charges appliquées sur les corps élastiques sont la théorie élémentaire (mécanique des matériaux) et la théorie de l'élasticité. Les deux théories se fondent sur les conditions d'équilibre et les relations entre les déformations et les contraintes. La différence fondamentale entre ces théories réside dans la mesure et la description des déformations et dans les types de simplifications utilisées. L'approche de la mécanique des matériaux utilise un certain mode de déformation ou une distribution des déformations dans le solide et donne la moyenne des contraintes dans une section donnée sous une charge quelconque. En outre, elle traite habituellement séparément chaque type de chargement complexe, tels, la traction (compression), la flexion ou la torsion. Les formules de la mécanique des matériaux sont mieux souhaitées pour les structures relativement minces et s'obtiennent sur la base de conditions très restrictives et limités.

D'autre part, la théorie d'élasticité [5] ne se fonde pas sur un certain mode de déformation prescrit mais traite avec la satisfaction des équations générales d'un corps en équilibre sous n'importe quel système de forces externes.

La théorie de l'élasticité est souhaitable lorsque les contraintes de conception critiques tels que le poids minimum, le cout minimum, ou la haute fiabilité dictent un traitement plus exacte ou lorsque l'expérience préalable est limité et l'intuition ne sert pas adéquatement à fournir les simplifications nécessaires avec un quelconque degré d'assurance.

Si elle est correctement utilisée, la théorie de l'élasticité devrait apporter des solutions les plus rapprochées pour les distributions réelles des contraintes, déformations et déplacements. Ainsi, la théorie de l'élasticité permet de vérifier les limites de la mécanique des matériaux. Cependant, Nous soulignons que les deux approches citées, sont des approximations de la nature, et chacune complémente l'autre.

L'influence de l'anisotropie du matériau, les conditions aux limites réelles et d'autres facteurs contribuent à l'erreur.

## 2.2 Principes fondamentaux d'analyse

Pour connaître la distribution des contraintes, des déformations et des déplacements d'un corps élastique soumis à un système de forces, on doit utiliser certaines conditions liées aux lois physiques, les propriétés des matériaux et la géométrie. Ces principes fondamentaux d'analyse, aussi appelés les trois aspects des problèmes de la mécanique des solides, sont les suivants :

1. Les conditions d'équilibre. Les équations de la statique doivent être satisfaites dans tous le corps.

$$\sigma_{ij,j} = \mathbf{b}_i \quad (2.1)$$

2. Les relations contraintes-déformation. Les propriétés du matériau (relations constitutive, par exemple, la loi de Hooke) doivent être conformes au comportement du matériau.

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad (2.2)$$

3. Les conditions de compatibilité. La géométrie de la déformation et la distribution de la déformation doivent être consistant avec la préservation de la continuité de la matière. (La question de compatibilité n'est pas toujours évoquée dans l'analyse de la mécanique des matériaux)

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (2.3)$$

4. En plus, les champs de contraintes, déformations et déplacements doivent être conformes aux conditions de chargements imposées aux limites (bords). Ceci est connu sous la satisfaction des conditions aux limites pour un problème particulier. Si le problème est dynamique, les équations d'équilibre deviennent plus générales, et la conservation de l'énergie peut être un problème supplémentaire. Les conditions décrites sont utilisées pour aboutir aux équations connues de l'élasticité. Dans le cas des problèmes tridimensionnels en

élasticité, il est nécessaire de déterminer les 15 quantités suivantes : six composantes de contraintes, six composantes de déformation et trois composantes des déplacements.

5. Ces composantes doivent satisfaire les quinze équations gouvernantes dans tout le corps en plus des conditions aux limites : trois équations d'équilibre, six relation contrainte-déformation et six relations déformation- déplacement suivants

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

Il est à noter que les équations de compatibilité sont obtenues des relations déformation-déplacement qui sont déjà inclus dans les précédentes descriptions. Donc si les quinze expressions sont satisfaites, celles de compatibilité vont aussi l'être. Les problèmes tridimensionnels en élasticité sont souvent très complexes. Il n'est pas toujours possible d'utiliser la méthode de solution directe en traitant les équations générales et les conditions aux limites données. Dans beaucoup d'applications en ingénierie, plusieurs justifications peuvent être trouvées afin de simplifier les hypothèses vis-à-vis des états de contrainte et de déformation. En prenant en compte certaines particularités de géométrie de structures (l'une des dimensions est supérieure aux deux autres) on peut réduire la complexité, en réduisant le problème à seulement deux dimensions.

## 2.3 États plans de déformation

Considérons une barre tubulaire longue soumise à une pression interne et encadrée aux deux extrémités (Fig :2.1). Supposons que les forces sont fonction de  $x$  et  $y$  seulement. Par conséquent nous prédisons d'avoir les mêmes déformations pour toutes les sections transversales  $y$  compris celles des extrémités. Selon la nature de cette structure, il est permis d'avoir des déformations selon  $x$  et  $y$  mais pas selon  $z$ .  $w = 0$  pour  $z = L/2$ . Pour des raisons de symétrie toutes les sections on a :  $w = 0$ . Donc les déformations dépendent seulement de  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (2.5)$$

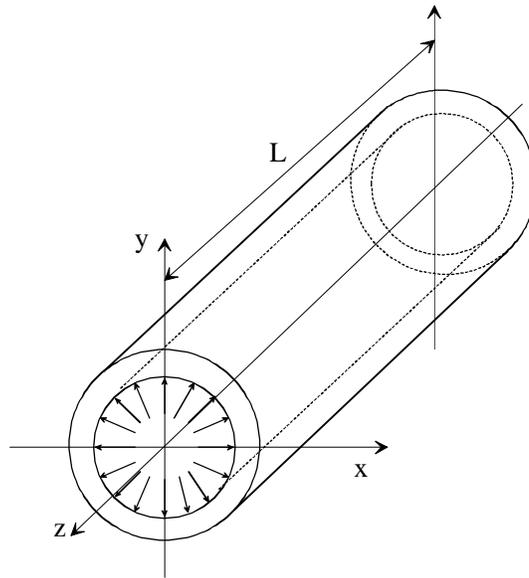


FIGURE 2.1 – Déformation plane dans une barre tubulaire

$$\begin{cases} \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Les dernières expressions dépendent de  $\frac{\partial u}{\partial z}$  et  $\frac{\partial v}{\partial z}$  qui vont disparaître, du moment que  $w$  et ses dérivés sont nulles. L'état de déformation plane est ainsi décrit, où chaque point reste dans son plan transversal suivant l'action de la force. On développe ainsi le comportement des solides sous une déformation plane.

Si nous substituons :  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  ans les relations contraintes-déformations, nous avons :

$$\begin{cases} \sigma_x = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x + \lambda \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \sigma_y = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y + \lambda \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{xy} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = \lambda \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.8)$$

Puisque  $\sigma_z$  ne figure pas dans les autres relations gouvernantes de l'état plan de déformation, il peut être calculé indépendamment en appliquant la relation (2.8) les relations déformation-déplacement deviennent :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{(1-\nu^2)}{E} \cdot (\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{(1-\nu^2)}{E} \cdot (\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_x) \\ \gamma_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \end{cases} \quad (2.9)$$

Dans la mesure où ces contraintes sont fonction seulement de  $x$  et  $y$ , les deux premières équations d'équilibre donnent pour le cas de la déformation plane :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

La troisième étant vérifiée si  $F_z = 0$ . Dans le cas de la déformation plane, il n'y a pas de forces axiales.

Une restriction similaire est imposée sur les forces de surface. En effet, la déformation plane résultante dans un corps prismatique si les forces de surface  $P_x$  et  $P_y$  sont toutes deux fonctions de  $x$  et  $y$  et  $P_z = 0$ . Sur la surface latérale  $n = 0$  (Fig :2.2). Les conditions aux limites, sont données par :

$$\begin{cases} P_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m \\ P_y = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m \end{cases} \quad (2.11)$$

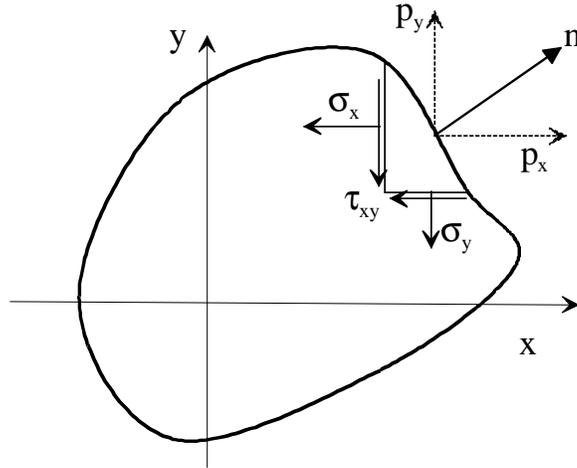


FIGURE 2.2 – Forces de surface pour une problème d'élasticité plane

Dans le cas de la déformation plane, les huit quantités suivantes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $u$  et  $v$  doivent être déterminées pour satisfaire les relations (2.5), (2.7) et (2.10) et les conditions aux limites (2.11). Dans un point donné les trois composantes de la déformation bi-dimensionnelle (2.5) sont fonction seulement des deux déplacements  $u$  et  $v$ , et de facto les relations de compatibilité existant entre les déformations sont :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.12)$$

Cette relation doit être satisfaite pour les composantes de la déformation reliées aux déplacements comme dans les relations (2.5) : La condition exprimée dans la relation (2.12) peut être transformée en une autre dépendant seulement des contraintes en substituant les relations déformation-contrainte et en employant les équations d'équilibre. En utilisant les équations (2.9) et (2.12), nous avons :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} [(1-\nu) \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_y] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1-\nu) \cdot \sigma_y - \nu \cdot \sigma_x] = 2 \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (a)$$

La première et la deuxième équation de la relation (2.10) seront différenciées par rapport à  $x$  et  $y$  respectivement tout en les rajoutant, mène a :

$$2 \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right)$$

Finalement en substituant cette relation dans l'équation (a) on a :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu} \cdot \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right) \quad (2.13)$$

On a maintenant trois équation (2.10) et (2.13) faisant apparaître trois inconnues  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ . Cet ensemble d'équations ensemble avec les conditions aux limites (2.11) est utilisé pour solutionner les problèmes plans de déformation. Pour une situation donnée, après avoir déterminé les contraintes, les relations (2.10) et (2.5) donnent les déformations et déplacements respectivement.

## 2.4 États plans de contrainte

Pour illustrer le cas des états de contrainte planes, considérons une plaque mince comme montré sur la Figure : (2.3), où les forces sont distribuées uniformément sur l'épaisseur, parallèlement au plan de la plaque. Cette géométrie est l'opposé de celle de la Fig : (2.1). En effet considérons le fait que  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  soient nuls sur les deux faces de la plaque. A cause de la minceur de la plaque, les contraintes peuvent être approximées. On considère la force de volume  $F_z = 0$  et  $F_x$  et  $F_y$  chacune d'elles fonction de  $x$  et  $y$  seulement. Par conséquent, les contraintes sont données par :

$$\begin{aligned} \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \\ \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (a)$$

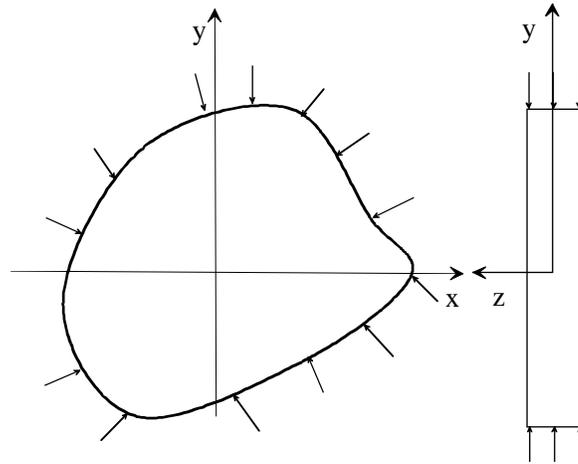


FIGURE 2.3 – Plaque mince sous contrainte plane

Les contraintes différentes de zéro, restent constantes à travers l'épaisseur de la plaque et sont fonction seulement de  $x$  et  $y$ . Cette situation décrit l'état plan de contraintes. Les relations (2.10) et (2.11) décrivent les équations d'équilibre et les conditions aux limites dans ce cas de situation, comme pour l'état de déformation plane. En utilisant (a), nous avons :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}\end{aligned}\quad (2.14)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.15a)$$

En prenant  $\sigma_x + \sigma_y$  des deux premières équations des relations (2.14) et en insérant le résultat dans (2.15a), on obtient :

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (2.15b)$$

Les équations (2.15a) et (2.15b) définissent, les déformations principales hors du plan en fonction des contraintes ( $\sigma_x, \sigma_y$ ) ou déformations ( $\varepsilon_x + \varepsilon_y$ ) dans le plan.

Puisque  $\varepsilon_z$  n'existe pas dans les expressions gouvernant les contraintes planes, elle peut être obtenue indépendamment à partir de (2.15a) et (2.15b) ; puis  $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$  peut être appliquée pour calculer  $w$ . Donc ne sont considérées que  $u$  et  $v$  comme variables indépendantes dans les équations gouvernantes. Dans le cas des contraintes planes, les relations de base déformation-contrainte sont aussi données par (2.5). Les relations gouvernant le cas des contraintes planes vont être réduites, comme dans le cas plan des déformations, à trois équations dépendant seulement des contraintes. Puisque (2.5) s'applique aux deux cas plans, les conditions de compatibilité représentées par (2.14) s'appliquent aux deux cas. La dernière expression peut être écrite comme suit, en substituant les déformations à partir de (2.14) et en utilisant (2.10)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \cdot \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right) \quad (2.16)$$

Cette équation de compatibilité, avec les équations d'équilibre, représentent une forme utile des équations gouvernant les problèmes de contrainte plane. Pour résumer les situations bi-dimensionnelles abordées, les équations d'équilibre (2.10), ainsi que ceux de compatibilité (2.13) pour la déformation plane et (2.16) pour les contraintes planes et les conditions aux limites (2.11), fournissent un système d'équations suffisantes pour la détermination complète de la répartition des contraintes. Il peut être démontré qu'une solution satisfaisant à toutes ces équations est, pour un problème donné, unique, c'est-à-dire la seule solution à ce problème. En l'absence de forces de volume ou dans le cas où ces forces sont constantes, les équations de compatibilité pour les déformations et contraintes planes sont les mêmes. Dans ces cas, les équations qui régissent la distribution des contraintes ne contiennent pas de constantes élastiques. Si on donne la même géométrie et le même chargement pour deux barres l'une en acier et l'autre en bronze elles afficheront la même distribution de contraintes. Il est intéressant de noter qu'en comparant les équations (2.9) et (2.14) on peut former le Tableau (2.1), qui facilite la conversion d'une solution en contrainte plane vers une solution en déformation plane, et vice versa. Par exemple, les états de contrainte plane et déformation plane prévalent dans une poutre mince et une autre large, respectivement. Par conséquent, dans une poutre mince le  $E \cdot I$  va être remplacé par  $EI/(1-\nu^2)$  pour une poutre large. La rigidité pour le dernier cas, pour  $\nu = 0.3$  ; est de 10% plus grande, cela est dû au déplacement latéral.

| Solution          | Convertir vers    | $E$ est remplacé par                | $\nu$ est remplacé par |
|-------------------|-------------------|-------------------------------------|------------------------|
| Contrainte plane  | Déformation plane | $\frac{E}{1-\nu^2}$                 | $\frac{\nu}{1-\nu}$    |
| Déformation plane | Contrainte plane  | $\frac{(1+2\nu)\cdot E}{(1+\nu)^2}$ | $\frac{\nu}{1+\nu}$    |

TABLE 2.1 – Conversion entre les solutions des états plans de contrainte et de déformation

## 2.5 Fonction de contrainte d'AIROY

Les solutions des problèmes bidimensionnels en élasticité passent par la résolution des équations différentielles de l'équilibre (2.10), et avec les équations de compatibilité (2.13) ou (2.16) et les conditions aux limites (2.11). Si on suppose que les forces de volume  $F_x$  et  $F_y$  sont négligeables, ces équation se réduisent à

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (a)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (b)$$

Les équations d'équilibre sont identiquement satisfaites en utilisant une fonction  $\Phi(x, y)$ , introduite par G. B. Airy, en relation avec les contraintes :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.17)$$

Si nous remplaçons (2.17) dans (b), on a :

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \nabla^4 \Phi = 0 \quad (2.18)$$

C'est la formulation d'un problème bidimensionnel, dans lequel les forces de volumes sont absentes on doit par conséquent trouver une solution pour l'équation bi-harmonique, qui doit bien sur satisfaire les conditions aux limites.

Il est à noter que dans le cas de contraintes planes nous avons  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  et  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  sont indépendantes de  $z$ . Par conséquent  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  et  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  et  $\gamma_{xy}$  sont indépendants de  $z$ . On peut aussi avoir, en considérant (2.18), les équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0 \quad (c)$$

De toute évidence, ces conditions supplémentaires ne seront pas satisfaites dans le cas de contrainte plane en solutionnant (2.18) seule. Par conséquent, une telle solution d'un problème de contraintes planes à un caractère approximatif. Cependant, on peut montrer que pour des plaques minces l'erreur introduite est négligeable.

Il est également important de noter que, si les extrémités du cylindre représentés sur la Figure.(2.1) sont libres de se mouvoir, nous pouvons supposer que la déformation longitudinale soit constante. Un tel état est appelé déformations planes généralisées. Donc, nous avons maintenant :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{(1-\nu^2)}{E} \cdot \left( \sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_y \right) - \nu \cdot \varepsilon_z \\ \varepsilon_y &= \frac{(1-\nu^2)}{E} \cdot \left( \sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_x \right) - \nu \cdot \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}\end{aligned}\quad (2.19)$$

et

$$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) - E \cdot \varepsilon_z \quad (2.20)$$

En introduisant (2.19) dans (2.12) et en simplifiant, nous obtenons encore une fois (2.18) comme équation différentielle gouvernante. Ayant déterminé  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ , la valeur constante de  $\varepsilon_z$  peut être trouvée à partir de la condition que la résultante des forces dans la direction  $z$  qui agissent sur les extrémités du cylindre est nulle. Donc :

$$\iint \sigma_z dx dy = 0 \quad (d)$$

Où  $\sigma_z$  est donnée par (2.20)

# Chapitre 3

## Revue de littérature sur les éléments finis membranaires basés sur l'approche en déformation et Condensation statique

### 3.1 Introduction

Une revue de littérature sur l'approche en déformation ainsi que des aspects qui conduisent à la compréhension de cette approche constituent la matière première de ce chapitre. L'autre partie concerne la définition générale de la technique de condensation statique.

### 3.2 Domaines d'application

Les applications de la MEF se scindent en trois catégories, selon la nature du problème à résoudre. Dans la première catégorie, on y trouve les problèmes d'équilibre ou les problèmes indépendants de temps. C'est le domaine de la mécanique des solides où nous avons besoin de connaître les déplacements et les contraintes pour un chargement mécanique (ou thermique) donné. La majorité des applications de la MEF sont dans cette catégorie. Dans la deuxième catégorie, on trouve les problèmes appelés problèmes de valeurs propres. Ceux-ci sont des problèmes stationnaires dont la solution nécessite souvent la détermination des fréquences naturelles et les modes de vibration des solides et des fluides. Dans la troisième catégorie, il existe une multitude de problèmes « du temps dépendant » ou de propagation de la mécanique du mi-

lieu continu. Cette catégorie est composée de problèmes qui peut paraître lorsque la dimension temps est intégrée aux problèmes des deux premières catégories. Mais, le fait que cette méthode peut être employée pour résoudre un problème donné ne signifie pas que c'est la technique de solution la plus pratique. Souvent plusieurs techniques fiables sont disponibles pour résoudre ces problèmes. Chaque technique à ses mérites et aucune méthode ne peut prétendre être "la meilleure". Les domaines d'applications de la MEF s'étend à toutes les disciplines de l'ingénierie, mais reste que les ingénieurs civils, mécaniques et spatiaux sont les utilisateurs les plus fréquents de cette méthode.

### 3.3 Etapes de la M.E.F

A partir du milieu des années 1970, des programmes d'éléments finis ont joué un rôle important dans la croissance remarquable de la conception assistée par ordinateur (C.A.O). Avec les pressions économiques continues pour l'amélioration de la productivité en ingénierie, on verra dans l'avenir un rythme accéléré de la MEF dans la conception des processus. Cette méthodologie reste toujours passionnante et une partie importante dans « la caisse à outils » de l'ingénieur.

1. **Discrétiser le milieu** : La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous domaines, donc avant toute application il faut diviser le domaine à étudier en éléments. chaque élément est défini géométriquement par un nombre de noeuds bien déterminé qui constituent en général ses sommets, Le résultat du procédé de discrétisation doit contenir deux données essentielles qui sont les coordonnées des noeuds et les connectivités des éléments.
2. **Choisir les fonctions d'Interpolation** : La deuxième étape est d'affecter les noeuds pour chaque élément et choisir ensuite la fonction d'interpolation pour représenter la variation du champ sur tout l'élément. Le champ de variables peut être un scalaire, un vecteur, ou un tenseur d'ordre supérieur. Souvent, des polynômes sont choisis comme fonctions d'interpolation pour le champ, parce qu'ils sont faciles à intégrer et à différencier. Le degré du polynôme choisi dépend du nombre de noeuds affectés à l'élément, de la nature et le nombre d'inconnues pour chaque noeud, et de certains critères de continuité imposés aux noeuds et au long des frontières de l'élément.
3. **Trouver les propriétés de l'élément** : Une fois que le modèle d'élément fini est établi (c'est-à-dire une fois que les éléments et leurs fonctions d'interpolation ont été choisis),

nous sommes prêts à déterminer les matrices exprimant les propriétés des éléments individuellement (matrices de rigidité). Pour cette tâche nous pouvons employer l'une des trois approches suivantes : l'approche directe, l'approche variationnelle, ou l'approche des résidus pondérés (qui seront détaillés dans la section suivante).

4. **Assembler les propriétés des éléments pour obtenir les systèmes d'équations** : Pour trouver les propriétés du système complet modelé par le réseau d'éléments, nous devons "assembler" les rigidités de tous les éléments. Autrement dit, on combine les matrices exprimant le comportement des éléments et on forme la matrice exprimant le comportement du système entier. Les équations matricielles du système ont la même forme que les équations pour chacun des éléments, sauf qu'elles contiennent beaucoup plus de termes puisqu'elles incluent tous les noeuds. La procédure de base pour l'assemblage est due au fait qu'au niveau de chaque nœud (où de différents éléments sont connectés), la valeur de la variable du champ est la même pour chacun de ces éléments. Une particularité unique de la MEF consiste en ce que les équations du système global sont produites par l'assemblage d'équations individuelles de chaque élément.
5. **Imposer les conditions aux limites** : Avant que le système d'équations ne soit prêt pour la résolution, il doit prendre en compte les conditions aux limites du problème. A ce stade on impose aussi bien les valeurs nodales des variables dépendantes connues que les charges ou forces nodales.
6. **Résoudre le système d'équations** : Le processus d'assemblage donne un ensemble d'équations simultanées que nous résolvons pour obtenir les valeurs nodales inconnues du problème. Si le problème décrit une forme d'équilibre, donc nous devons résoudre un ensemble d'équations algébriques linéaires ou non-linéaires. Si le problème est autre, les inconnues nodales sont fonction du temps et nous devons résoudre un ensemble d'équations différentielles ordinaires linéaires ou non-linéaires.
7. **Procéder a des calculs supplémentaires si nécessaire** : Quelques fois on utilise les solutions du système d'équations pour calculer d'autres paramètres qui sont importants. Par exemple, dans un problème de mécanique des structures les inconnues nodales sont les déplacements, de ces déplacements nous pouvons calculer les déformations et les contraintes. De la même façon, dans un problème de conduction de chaleur, les inconnues nodales sont les températures et à partir de celles-ci nous calculons les flux de chaleur dans les éléments.

### 3.4 Les modèles éléments finis

On recense, en générale quatre modèles utilisés dans la méthode des éléments finis. Le plus répandu est celui en déplacement qui est aussi le plus utilisé. Dans ce modèle le but c'est d'exprimer le déplacement, en tout point d'un solide, ceci est réalisé en formulant le déplacement comme une combinaison linéaire de fonctions de forme. Une matrice de rigidité approximative peut être trouvée pour chaque élément, liant toutes les forces aux déplacements des nœuds. Les déplacements peuvent être par conséquent calculés, ainsi que les contraintes dans l'élément, une fois les déplacements nodaux sont connus. L'approximation du champ de déplacements pour résoudre les problèmes d'élasticité est toujours continue, mais ce n'est en général pas le cas des dérivées partielles de cette approximation. Dans les problèmes pratiques, on désire en général connaître les contraintes, on doit au préalable calculer d'abord les composantes de la déformation et utiliser ensuite les équations de constitution pour calculer ces contraintes. Les dérivées partielles de l'approximation des composantes de déplacement peuvent cependant poser de sérieux problèmes d'interprétation aux valeurs nodales. Les contraintes et les déformations seront approximatives et discontinues aux frontières de l'élément. Les déplacements sont approximatifs mais continus aux frontières de l'élément. L'approximation en déplacements minimise l'énergie potentielle totale. Les éléments de déplacement pur sont cinématiquement admissibles, ils assurent la continuité des déplacements à l'intérieur de l'élément et d'un élément à l'autre. Dans ce cas, le champ de contraintes, déduit du champ de déplacements, vérifie les équations d'équilibre en moyenne mais pas localement. Les conditions de stationnarité de la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale (3.1) forment la formulation faible du problème.

$$-\int_{\partial\Omega} t_i \cdot u_i dS - \int_{\Omega} f_i \cdot u_i d\Omega + \int_{\Omega} \Psi d\Omega = \Pi \quad (3.1)$$

à l'opposé du premier modèle, existe un autre dont le champ est basé sur les forces, il est souvent appelé modèle équilibre. Le principe de ce modèle consiste dans un premier temps à choisir une forme paramétrique simple du champ de contraintes vérifiant les équations différentielles de l'équilibre. On définit ainsi un ensemble de solutions admissibles. Pour imposer la réciprocité des tractions de surface à la frontière de deux éléments, il est nécessaire de choisir des connecteurs définissant univoquement ces tractions d'interface. Dans un second temps on recherche, dans cet ensemble de solutions, celle qui rend l'énergie potentielle complémentaire totale minimum. Pour cela on annule la variation première de la fonctionnelle (3.2) par rapport

aux paramètres définissant le champ de contraintes.

$$-\int_{\partial\Omega} u_i \cdot T_i dS - \int_{\Omega} u_i \cdot f_i d\Omega + \int_{\Omega} \Psi^* d\Omega = \Pi \quad (3.2)$$

Le modèle en équilibre n'a pas connu le même succès que le modèle en déplacement, en partie à cause de sa grande complexité. Les éléments du modèle d'équilibre pur sont statiquement admissibles et assurent la continuité de contraintes à l'intérieur de l'élément et d'un élément à l'autre. Le champ de déplacement est déduit du champ de contrainte, où les conditions de compatibilité ne sont vérifiées qu'en moyenne et non localement.

Si on combine les deux modèles précédents, on peut avoir des champs mixtes : déplacement forces. La formulation et la mise au point devient longue et coûteuse ; mais en contrepartie les éléments qui en découlent sont d'excellente qualité. On utilise parfois ce modèle pour corriger certains défauts du modèle de déplacement. Il existe enfin un quatrième modèle qui peut être défini par deux interpolations indépendantes, l'une portant sur le champ intérieur de l'élément, l'autre sur le champ décrivant la frontière. Les paramètres inconnus du champ intérieur sont exprimés en fonction des paramètres nodaux du champ de bord. On cherche à minimiser la différence entre les deux champs. Ces derniers peuvent être du même type (déplacement- déplacement) ou de types différents (déplacement- contrainte). En général ce modèle donne des résultats meilleurs que le modèle déplacement surtout au niveau des contraintes.

## 3.5 Approche en déformation

### 3.5.1 Définition

On commence à choisir d'abord un champ de déformations, puis on passe au champ des déplacements par intégration. La procédure pour aboutir à la résolution du problème suit ensuite les mêmes étapes que celles du modèle en déplacement. On note ici lors de l'évaluation de la matrice de rigidité, l'intégration est analytique et c'est spécifique à l'approche en déformation. Grâce à cette approche on obtient un calcul exact des termes représentant les modes rigides. En fin de compte on doit vérifier les équations de compatibilités :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} \quad (3.3)$$

Les termes des polynômes des champs des déplacements sont d'un ordre élevé malgré la non introduction de degrés de liberté supplémentaires ni de nœuds intermédiaires. Les éléments basés sur la dite approches sont non-conformes mais conduisent généralement à des résultats très encourageants. En plus, la convergence obtenue est rapide, lorsque les résultats sont comparés avec ceux donnés par des éléments basés sur le modèle en déplacement ayant le même nombre de d.d.l.

### **3.5.2 Avantages du modèle en déformation**

L'utilisation du modèle en déformation apporte de nombreux avantages en termes de comportement des structures. En effet, on tire profit des bonnes adaptations pour la description exacte des mouvements : corps rigides et déformations constantes. Ainsi, les éléments développés permettront d'augmenter la performance des résultats, avec seulement un nombre limité d'éléments. Les avantages des éléments à modèle en déformation sont ([6, 7]) :

- Satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergence liés directement aux déformations (mode de déformation constante et mode de corps rigide).
- Découplage plus facile des différentes composantes des déformations (un champ de déplacements découplés engendre des déformations couplées).
- Possibilité d'enrichir le champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans l'introduction de nœuds intermédiaires ni de degrés de liberté supplémentaires.

## **3.6 Contribution de l'approche en déformation dans l'analyse des structures**

Les éléments basés sur la déformation ont de très nombreuses applications, a commencer par les structures courbes, telles que : coques cylindriques, arcs, hémisphères, etc. Comme on peut les retrouver dans les structures planes minces et épaisses, plaque, murs, etc. Le but recherché le plus souvent en choisissant un élément basé sur la déformation parmi d'autres est le gain appréciable en matière du nombre d'éléments, et ce, pour un même nombre de noeuds. D'autres applications visent plutôt une augmentation de la fiabilité des éléments. Pour les structures telles que les poutres a parois minces, l'élément utilisé permet d'approcher les solutions analytiques, tout en utilisant un nombre minimum d'éléments. Dans ce cas on emploi des éléments membranaires basé sur ce modèle, ce qui permet d'améliorer les points faibles de l'élément traditionnel

basé sur les déplacements, pour un même nombre de nœuds, à savoir la sur rigidité et la linéarité à la flexion. L'utilisation de ce modèle peut améliorer plusieurs propriétés. Plusieurs investigations ont d'ailleurs été effectuées dans ce sens. Les conditions d'équilibre et de compatibilité peuvent être satisfaites selon le type d'élément utilisé. Ce dernier variera en fonction des géométries des structures.

### 3.7 Revue de littérature

L'approche basée sur la déformation a vu le jour en 1971 à l'université de Cardiff au Royaume Uni. Le souci était de développer des éléments performants avec un nombre réduit de nœuds. Le pari était gagné, et on a vu la naissance de l'une des approches les plus utilisées en sciences de l'ingénieur. Le tout début était avec Ashwell et al [8, 9] qui dans des études uni et bidimensionnel sur les structures courbes, circulaires et en coques, ont pu utiliser des fonctions de déformation indépendantes pour développer des éléments avec un nombre réduit et des résultats performants. Sabir et Ashwell [10] dans la même période ont montré l'efficacité des éléments basés sur l'approche en déformation à travers les testes conduits sur les oscillations libres dans le plan des anneaux circulaires. Dans l'année suivante Sabir et Lock [11] dans une analyse des coques cylindriques et au même titre Ashwell [12] améliore ses éléments et aboutit a des résultats très encourageant soit pour les déplacements ou pour les contraintes en testant un cylindre pincé libre sur ses cotés. Dans le travail de recherche de ce dernier auteur une analyse sur les arcs circulaires dans le domaine géométriquement non-linéaire a montré que les éléments utilisés sont supérieurs aux éléments classiques. Des éléments arcs se déformant hors du plan de courbure [13, 14] ont été développés comme extension des travaux précédents. Les éléments de coques ont eu aussi leur part a travers des travaux [15] pour les charges concentrées et le calcul des contraintes aux voisinages de ces charges, et pour les coques minces soumises a des forces radiales ou des moments concentrés, des résultats qui correspondent aux solutions théoriques sont atteints. Puis venu le tour aux éléments rectangulaires et quadrilatéraux de coque cylindriques avec les recherches de Sabir et Cherchafi [16] . Ensuite un intéressement aux problèmes généraux de l'élasticité plane [17], avec le développement d'éléments rectangulaires avec pour chaque nœud deux degrés de liberté satisfaisant le MCR, les déformations constantes, les équations de compatibilités, et pour d'autres versions la satisfaction de l'équilibre local. L'introduction de la rotation dans le plan, comme d.d.l supplémentaire était la grande innovation, a travers les travaux de Sabir et Chow [18] pour l'analyse du flambement des panneaux plans avec ou-

vertures circulaires et carrées. Ce même type d'éléments a été utilisé [19] pour l'analyse des voiles avec ouvertures. Il faut dire que l'approche se voyait s'élargir à travers le nombre de plus en plus croissant d'articles et de travaux. Les résultats donnés à chaque fois sont plus qu'encourageant. L'année d'après, des éléments rectangulaires et triangulaires [20] ayant des rotations dans le plan au niveau des nœuds, ont été développés et améliorent ceux précédents. Durant la même année, un intérêt aussi pour l'analyse des structures présentant des formes circulaires, des éléments secteurs en coordonnées polaires sont développés [21]. L'année de suite, et toujours avec les éléments secteurs présentant 2 d.d.l. par nœud et pour l'analyse des problèmes en élasticité plane utilisant les coordonnées polaires, différents tests avec différents rapports de forme (aspect ratio) sur des cylindres épais sous pression interne ont été menés [22]. De très bons résultats ont été atteints avec seulement un nombre limité d'éléments. Durant la même année, Bouzrira a développé un élément secteur [23] en introduisant des rotations dans le plan (12ddl/ élément). Ce même élément fut modifié et amélioré par Djoudi [24], en modifiant les fonctions de déformations et en proposant de rendre indépendantes celles qui représentent le cisaillement. La technique de condensation statique fut introduite pour la première fois grâce aux travaux de Sabir et Sfendji [25], cette technique a trouvé le bon terrain pour donner des résultats qui ne vont que vers l'amélioration concernant les éléments rectangulaires et triangulaires, il est à noter aussi que pour ces mêmes éléments, les équations différentielles d'équilibre ont été vérifiées et les résultats donnés ne font qu'améliorer les éléments qui les précédaient. Sabir et Djoudi, [26] ont formulé des éléments très performants pouvant analyser les plaques et les coques subissant de grandes déformations (non linéarité géométrique). Les mêmes auteurs et durant la même année, ont développé des éléments finis pour la modéliser les coques présentant de simple et double courbures, pour des épaisseurs constantes et variables [27]. Pour l'année qui suit Sabir et Moussa [28], donnent naissance à des éléments destinés pour l'analyse des silos, puis ont développé des éléments [29] pour les toits en coque sous forme de flûte conique. L'analyse des plaques avec ouvertures et soumises à des forces dans le plan, avec calcul des fréquences naturelles était le domaine qu'a choisi investir les chercheurs Sabir et Davis [30, 31], Belarbi et Charif [32] ont amélioré des éléments secteurs déjà existants en incorporant des rotations dans le plan avec 12 ddl/ élément. Durant la même année, ces mêmes auteurs [33] développèrent pour la première fois des éléments tridimensionnels pour l'analyse des plaques en flexion, minces et épaisses, de très bonnes performances ont été enregistrées. Durant la même année et celles des trois suivantes, des travaux de recherches considérables ont

étés réalisés, en développant et en améliorant plusieurs éléments de différents types pour l'analyse des problèmes de l'élasticité linéaire et non linéaire [34], [6] et [7]. Des éléments destinés à la modélisation des structures multi-cylindriques ont été développés par Assan[35]. Le domaine tridimensionnel est revisité par le développement d'élément adéquat pouvant vérifier les équations différentielles d'équilibre, avec un penchant particulier pour le calcul des contraintes [36, 37]. Les éléments rectangulaires avec d.d.l supplémentaires de rotation dans le plan ont été améliorés [38]. La non-linéarité et le régime dynamique ont eu leurs parts à travers les travaux de Djoudi et Bahai [39], pour l'analyse des coques, de très bons résultats ont été obtenus. Les mêmes auteurs [40] se sont ensuite intéressés à l'analyse des vibrations des panneaux cylindriques avec ouvertures et l'influence de ces ouvertures sur le comportement dynamique des panneaux. Belouar et Guenfoud [41] ont développé de nouveaux éléments rectangulaires modélisant la flexion des plaques. Des améliorations sont apportés à l'élément triangulaire avec rotation dans le plan ont été conduits par Belarbi et Bourezane [42]. Belarbi et Maalem, développèrent un élément rectangulaire améliorant les précédent et destiné à solutionner les problèmes de l'élasticité plane, cet élément utilise la condensation statique [43]. Les éléments secteurs reparaissent avec les travaux de Bourezane [44].

Ce fut autour de Belarbi [45], en 2005 de développer un élément rectangulaire avec 2 ddl par nœud avec une condensation pour l'élasticité plane. Après cela, en 2007 et vu l'intéressement croissant pour la technique de condensation Hamadi [46], sort avec un élément membranaire quadrilatère et qui satisfait les équations d'équilibre. Après trois années, le même auteur [47] travaille sur le développement des éléments tridimensionnels avec condensation. Les performances de l'approche en déformation se multiplièrent et avec elle les performances des éléments tridimensionnels, qui furent résumés par Maalem [48]. L'année suivante c'est autour de Bourezane [49] de développer un élément pour la modélisation des coques. Profitant des bonnes performances de la technique de condensation appliquée aux éléments de l'approche en déformation, un nouveau élément triangulaire a vu le jour grâce à Himmour [50] pour la flexion des plaques, il est doté d'un quatrième nœud fictif, les résultats sont très encourageant. Durant la même année 2012, et pour les problèmes statiques linéaires un autre élément rectangulaire membranaire avec rotation dans le plan (drilling rotation) fut développé par Rebiai [51] et donnait d'excellents résultats, même pour les formes irrégulières, il n'est nullement affecté par le phénomène de distorsion. à la fin de la même année, et pour les problèmes de flexion de plaques, Hamadi et Al [52] formulaient un nouvel élément très performant. L'année qui suit, un retour

pour les éléments tridimensionnels, cette fois-ci Belouinar [53] et pour les problèmes de flexion, élargie la bibliothèque des éléments finis basés sur la dite approche. Un autre élément membranaire triangulaire pour l'élasticité plane, a vu le jour grâce à Bourzane [54]. Hamadi et Al [55] durant l'année 2014, ont retracé à travers des applications l'efficacité des éléments destinés à modéliser les structures en flexion. Le domaine non linéaire a eu sa part à travers les travaux de Rebiai [56], par développement d'un élément quadrilatéral avec comme d.d.l supplémentaire la rotation dans le plan, l'élément n'est pas affecté par les problèmes de distorsion et les résultats sont très concluants. En l'an 2015, il y a eu utilisation de la fonction des contraintes d'Airy par Himmeur et al [57] a permis l'apparition d'un nouvel élément triangulaire possédant un nœud fictif et une rotation dans le plan pour la modélisation des poutres en flexion, comme à l'accoutumé, de très bons résultats sont obtenus. Enfin cette étude menée sur de l'état de l'art dans ce domaine, ne prétend pas qu'elle soit exhaustive, mais mérite d'être complétée.

### 3.8 Avenir de la méthode

Le bref historique sur la MEF nous a montré que son premier développement était sporadique. Mathématiciens, physiciens et ingénieurs ont eu tous affaire avec les concepts des éléments finis, mais ne se sont pas rendus compte aussitôt de la diversité de ses potentialités. Après 1960 cette situation a changé et le rythme de développement a manifestement augmenté, vers 1972 la MEF était devenue l'un des domaines les plus actifs pour la résolution des problèmes des milieux continus et elle reste la méthode dominante de nos jours. Les éléments finis développés, prennent souvent quelques mois, voir quelques années pour passer du monde académique universitaire au monde industriel commercial. On peut prévoir donc à travers les publications et articles universitaires ce qui passera dans l'avenir proche au niveau de l'industrie. Bien que la MEF puisse être employée pour résoudre beaucoup de problèmes complexes, il existe toujours quelques problèmes pratiques qu'il est difficile de résoudre parce qu'il nous manque une théorie adéquate, ou parce que nous manquons de données appropriées (sur les matériaux par exemple). Du point de vue d'un praticien, cette méthode, comme toute autre technique d'analyse numérique, peut faire toujours l'objet d'une amélioration pour la rendre plus efficace et plus facile à utiliser. Comme la méthode est appliquée à des problèmes de plus en plus grands et complexes, il devient important que le processus de résolution soit économique. La croissance rapide dans les domaines de l'ingénierie et de la technologie des ordinateurs va sans doute continuer à avoir des effets significatifs sur l'évolution de la méthode.

## 3.9 Condensation statique

La condensation statique est une technique qui permet de libérer des degrés de liberté d'un élément (introduction d'articulations, plateaux glissants,...) en agissant sur son système d'équation d'équilibre (réduction de la matrice de rigidité, des vecteurs de charges,...) avant (ou après) l'assemblage de la structure (globale). Elle peut être considérée comme une méthode de calcul agissant au niveau de l'élément. L'idée fondamentale de base est de résoudre un certain nombre d'équations en fonction d'autres équations. On part de la relation donnant les forces internes (au niveau élémentaire) .

Un élément fini peut contenir des nœuds qui ne peuvent être connectés aux autres nœuds, d'autres éléments qui lui sont voisins, ces nœuds on les appelle nœuds internes. Étant isolés, les d.d.l internes peuvent être soustraits à l'assemblage en les éliminant préalablement au niveau de la relation « force-déplacement » de l'élément. Cette opération purement algébrique s'appelle condensation, "sous- structuration" ou encore méthode de supers éléments, utilisable tant en analyse statique que dynamique. La technique de condensation est couramment utilisée dans la méthode des éléments finis, chaque fois qu'on désire éliminer des degrés de liberté.

Les degrés de liberté du modèle initial sont séparés en degrés de liberté de jonction ou maîtres et degrés de libertés internes ou esclaves qui vont être éliminés Originellement introduit dans l'aéronautique dans les années 60 le concept de sous-structuration répondait à trois motivations [58] :

- faciliter la division du travail : des sous-structures avec des fonctions différentes (fuselage, ailes, train d'atterrissage...) pouvaient être traitées par des groupes d'experts différents. Chaque groupe pouvait à loisir améliorer, raffiner... sa partie tant que l'interface avec les autres parties restait inchangée.
- profiter de la répétition : en remarquant qu'une même structure peut contenir plusieurs sous- structures identiques, il est possible de diminuer le temps d'étude (par exemple symétrie des ailes...) .
- contourner les limitations des ordinateurs : les ordinateurs de l'époque atteignaient vite leurs limites (par exemple en terme de taille mémoire). Diviser une structure complexe, que l'on était incapable de calculer en une seule fois, permettait de sauvegarder des résultats sous-structure par sous-structure puis d'effectuer « l'assemblage » des résultats.

Si les deux premiers points sont toujours d'actualité, le troisième l'est moins, surtout depuis le recourt aux algorithmes parallèles. C'est d'ailleurs le développement de procédures pour le

calcul parallèle qui a conduit les mathématiciens appliqués au concept de sous-domaines, alors qu'ils devaient grouper des éléments pour des raisons de calcul .

### 3.9.1 Description

Un super-élément [58, 59] : est un groupement d'éléments qui, après assemblage, peuvent être vus comme un élément individuel du point de vue du calcul. Cet assemblage peut être requis pour des raisons de modélisation ou de calcul. Pour constituer un super-éléments, les éléments groupés ne peuvent être pris au hasard. Ils doivent au moins constituer une « structure » en eux-mêmes. Il existe deux voies duales pour considérer ce processus. L'approche descendante consiste à considérer un super-élément comme constitué d'un ensemble d'éléments. On parle alors de macro-élément. L'approche ascendante consiste à considérer un super-élément comme un sous-ensemble d'une structure complète. On parle alors de sous-structure. Finalement, quand parle-t-on de sous-structure ou de macro-élément ? En fait, il n'y a pas de règle, et le terme générique de super-élément couvre tout le spectre depuis l'élément individuel jusqu'à la structure complète.

En tant qu'assemblage de plusieurs éléments, un super-élément possède :

- des degrés de liberté internes : qui ne sont pas connectés à des éléments n'appartenant pas au super-élément considéré. Les nœuds ayant des degrés de liberté internes sont dits nœuds internes.
- des degrés de liberté aux frontières : qui sont connectés à au moins une entité (élément, super-élément) n'appartenant pas au super-élément considéré.

L'opération consistant à éliminer tous les degrés de liberté internes est appelée condensation statique ou simplement condensation. Regardons ce qui se passe d'un point de vue matriciel. Pour cela, considérons que nous ayons à résoudre le système :

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (3.4)$$

Le vecteur  $\{\mathbf{u}\}$  se compose des composantes internes  $\{\mathbf{u}_i\}$  et des composantes de frontière  $\{\mathbf{u}_f\}$  de sorte que le système, une fois réordonné s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fi} \\ \mathbf{K}_{if} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_f \\ \mathbf{F}_i \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Si la matrice  $[\mathbf{K}_{ii}]$  n' est pas singulière, alors la seconde équation peut être résolue en terme de variables internes en :

$$\{\mathbf{u}_i\} = [\mathbf{K}_{ii}]^{-1}(\{\mathbf{F}_i\} - [\mathbf{K}_{if}]\{\mathbf{u}_f\}) \quad (3.6)$$

En reportant cela dans la première équation, on obtient le système avec matrice de rigidité condensée :

$$[\mathbf{K}_c]\{\mathbf{u}_f\} = \{\mathbf{F}_f\} \quad (3.7)$$

avec :

$$[\mathbf{K}_c] = [\mathbf{K}_{ff}] - [\mathbf{K}_{fi}][\mathbf{K}_{ii}]^{-1}[\mathbf{K}_{if}] \quad (3.8a)$$

et :

$$\{\mathbf{F}_f\} = \{\mathbf{F}_f\} - [\mathbf{K}_{fi}][\mathbf{K}_{ii}]^{-1}\{\mathbf{F}_i\} \quad (3.8b)$$

Après condensation, on peut donc bien considérer le super-élément, d' un point de vue calculatoire, comme un élément individuel.

La condensation statique est une opération matricielle appelée inversion partielle ou élimination partielle ou pseudo-inversion .

### 3.9.2 Implémentation de la condensation statique :

#### 3.9.2.1 Méthodes matricielles directes :

Cette méthode est la plus simple a appliquer, elle ne demande que l' utilisation des opérations matricielles, elle peut être coûteuse dans le temps calcul, il est nécessaire de réarranger inconnues (les ddl' s internes seuls, les ddl' s d frontière seuls) :

**3.9.2.1.1 Condensation de  $[\mathbf{K}]$  et  $\{\mathbf{F}\}$  avec réduction de leurs dimensions :** Ceci est fait en appliquant directement le équations (3.8a),(3.8b ),c'est la méthode qu'on a utilisée dans le programme **R4MM** (Annex : B) , la matrice  $[\mathbf{K}]$  sera réduit vers  $[\mathbf{K}_c]$  .

**3.9.2.1.2 Condensation de [ K ] et { F } sans réduction de leurs dimensions :** Il s'agit de transformer le système (3.4) et l'équation (3.5) de façon à conserver les tailles initiales des matrices après l'opération de condensation :

pour la nouvelle matrice [K] :

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}] - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{fi} & \mathbf{K}_{ji} \end{bmatrix} [\mathbf{K}_{ii}]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{fi} \\ \mathbf{K}_{ji} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

et pour le vecteur {F} :

$$\{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{F}\} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{fi} \\ \mathbf{K}_{ji} \end{bmatrix} [\mathbf{K}_{ii}]^{-1} \{\mathbf{F}_i\} \quad (3.10)$$

### 3.9.2.2 Méthode d'élimination de Gauss :

Cette méthode est utilisée par élimination des variables à condenser sans changer la forme de la matrice, le réarrangement des degrés de liberté n'est pas nécessairement requis, il existe plusieurs façons pour les appliquer, elle peut prendre en considération la symétrie de la matrice, des algorithmes plus fiables pour la bonne gestion de la mémoire et la réduction du temps de calcul ont été décrits par [59]

### 3.9.3 Remonter aux degrés de liberté internes

Une fois le système condensé résolu [58], on obtient les valeurs aux nœuds internes en réutilisant la formule (3.6) cette formule est utilisée pour le calcul des contraintes dans l'élément

# Chapitre 4

## Validation et Applications de l'élément R4MM

### 4.1 Construction de l'élément R4MM

#### 4.1.1 Introduction

L'approche en déformation remonte aux années 70, elle a été d'abord appliquée dans l'analyse des coques et des structures courbées. Plus tard, il s'est avéré qu'elle peut efficacement modéliser les problèmes de l'élasticité générale. Les modes de corps rigide sont exactement vérifiés grâce à aux principes de cette approche. Les fonctions de forme ne sont pas indépendantes mais liées conformément aux relations cinématiques déplacement-déformation. Dans l'analyse de structures soumises à des forces dans le plan, on utilise des éléments membranaires, qui sont parmi les éléments les simples à développer. Ils possèdent en générale les deux déplacements  $u$  et  $v$  en translation par nœud. Les contraintes pour ce cas sont  $(\sigma_x, \sigma_y$  et  $\tau_{xy})$ , si le plan choisi est  $(x, y)$ . Les contraintes dans la direction perpendiculaire au plan de la structure sont supposées être nulles. Les éléments de membranes sont employés en générale pour modéliser les structures minces ou en feuillet et mêmes les coques soumises aux actions membranaires.

#### 4.1.2 Développement analytique

L'élément de membrane développé (Figure 4.1) **R4MM** est donc utilisé pour modéliser des structures minces chargées dans leur plan. L'élément, possède les deux degrés de liberté  $u$  et

$v$ , et utilise le concept de la condensation statique [60]. L'efficacité des éléments basés sur l'approche en déformation a été maintes fois démontrée et la convergence des résultats pour les contraintes et les déplacements a atteint un haut degré de précision, en comparaison avec les éléments de premier ordre rectangulaires plans. L'élément est de forme rectangulaire, les inconnues recherchées sont les deux déplacements ( $u, v$ ), les trois déformations ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  et  $\gamma_{xy}$ ) et les trois contraintes ( $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ ) par nœud.

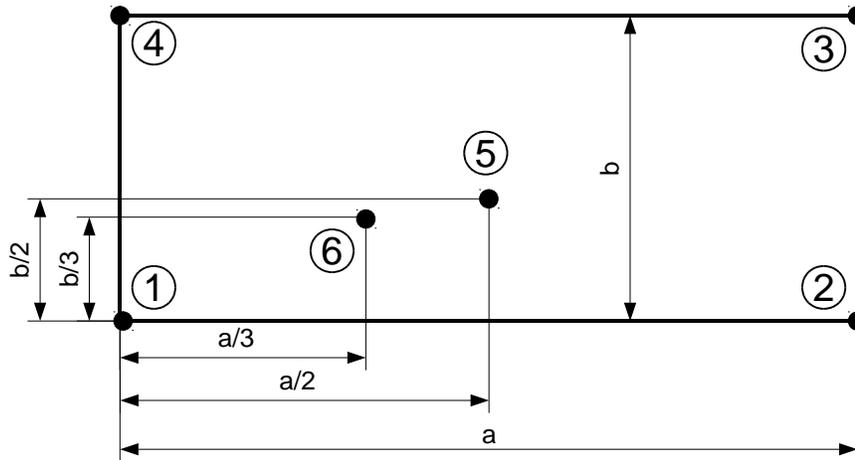


FIGURE 4.1 – Géométrie, numérotation et disposition des nœuds de l'élément **R4MM**

Le mouvement de corps rigide (translation et rotation) peut être représenté par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} u &= a_1 - a_3 \cdot y \\ v &= a_2 + a_3 \cdot x \end{aligned} \quad (4.1)$$

L'élément possédant douze d.d.l. , le champ de déplacement doit donc contenir douze coefficients indépendants, trois ont été utilisés pour la représentation du MCR équations (4.1), le reste se repartie sur le champ des déformations de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_4 + a_5 \cdot x + a_6 \cdot y + a_7 \cdot x \cdot y \\ \varepsilon_y &= a_8 + a_9 \cdot x + a_{10} \cdot y + a_{11} \cdot x \cdot y \\ \gamma_{xy} &= a_{12} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dans les équations (4.2), les coefficients  $a_4$ ,  $a_8$  et  $a_{12}$  sont les termes correspondant aux états constants des déformations. En intégrant les équations précédentes et en les rajoutant aux relations (4.1) on a :

$$\begin{aligned} u &= a_1 - a_3y + a_4x + a_5 \frac{x^2}{2} + a_6xy + a_7 \frac{x^2y}{2} - a_9 \frac{y^2}{2} - a_{11} \frac{y^3}{6} + a_{12} \frac{y}{2} \\ v &= a_2 + a_3x - a_6 \frac{x^2}{2} - a_7 \frac{x^3}{6} + a_8y + a_9xy + a_{10} \frac{y^2}{2} + a_{11} \frac{xy^2}{2} + a_{12} \frac{x}{2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Où  $u$  et  $v$  sont les déplacements suivant les directions  $x$  et  $y$  respectivement, le M.C.R est représenté par les termes associés aux constants  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  quant aux déformations, elles sont représentées par le reste des constantes. Le champ développé doit bien sur vérifier les équations de compatibilité planes.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (4.4)$$

### 4.1.3 Évaluation de la matrice $[K_0]$

L'évaluation de la matrice élémentaire de rigidité passe a travers l'évaluation de l'expression suivante :

$$[K_e] = \left[ [A]^{-1} \right]^T \cdot [K_0] \cdot [A]^{-1} \quad (4.5)$$

avec :

$$[K_e] = t \cdot \int \int_S [Q]^T \cdot [D] \cdot [Q] dx dy \quad (4.6)$$

Pour  $[Q]$ ;  $[D]$ ;  $[A]$ ;  $[A]^{-1}$ ; et  $[K_0]$  voir Annexe (A)

Il est a noter que la matrice de rigidité résultante, possède trois valeurs propres nulles qui sont nécessaires pour la satisfaction des mouvements généraux de corps rigides. Sachant que les matrices  $[A]$  et  $[A]^{-1}$  peuvent être évaluées numériquement, on se rend compte facilement que la clé du problème serai l'évaluation analytique de l'intégrale (4.6).

## 4.2 Validations

Les chercheurs ont établi plusieurs tests pathologiques pour valider n'importe quel élément. Ces tests sont en mesure de détecter les paramètres qui peuvent affecter la précision de l'élément.

### 4.2.1 Patch-test pour un seul élément

Le but de ces tests est de voir si l'élément est capable de représenter le mouvement de corps rigide et la dilatation pure [45]. Pour cela il suffit de vérifier, suivant les cas, si les résultats des déplacements et contraintes du présent élément s'accordent avec les résultats analytiques.

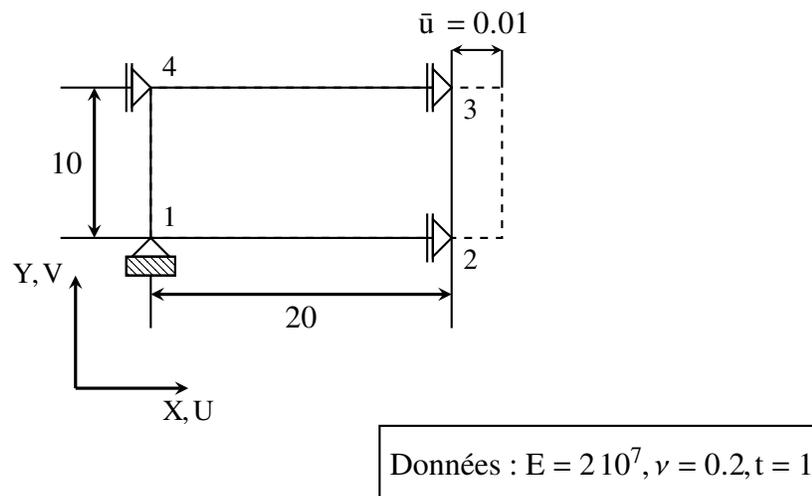


FIGURE 4.2 – Patch test d'un élément fini en dilatation

| Nœud | Quantité    | Analytique | R4MM                               | ABAQUS                   | SAP2000                |
|------|-------------|------------|------------------------------------|--------------------------|------------------------|
| 1    | $\sigma_x$  | 10000      | <b>10000</b>                       | 10000                    | 10000                  |
|      | $\sigma_y$  | 0          | $\mathbf{0.26647 \cdot 10^{-10}}$  | $2.71216 \cdot 10^{-12}$ | $8.486 \cdot 10^{-13}$ |
|      | $\tau_{xy}$ | 0          | $\mathbf{-0.39531 \cdot 10^{-08}}$ | $2.13179 \cdot 10^{-13}$ | $1.21 \cdot 10^{-12}$  |
| 4    | $\sigma_x$  | 1000       | <b>10000</b>                       | 10000                    | 10000                  |
|      | $\sigma_y$  | 0          | $\mathbf{-0.32604 \cdot 10^{-08}}$ | $2.42386 \cdot 10^{-12}$ | $1.925 \cdot 10^{-12}$ |
|      | $\tau_{xy}$ | 0          | $\mathbf{-0.39531 \cdot 10^{-08}}$ | $6.90323 \cdot 10^{-13}$ | $2.543 \cdot 10^{-13}$ |
| 2    | $u$         | 0.01       | <b>0.01</b>                        | 0.01                     | 0.01                   |
|      | $v$         | 0          | $\mathbf{-0.15026 \cdot 10^{-13}}$ | $2.29193 \cdot 10^{-18}$ | 0.0                    |
| 3    | $u$         | 0.01       | <b>0.01</b>                        | 0.01                     | 0.01                   |
|      | $v$         | -0.001     | <b>-0.001</b>                      | -0.001                   | -0.001                 |

TABLE 4.1 – Déplacements et contraintes nodales d'un seul élément en dilatation

Les résultats analytiques sont atteints, ce test est vérifié.

## 4.2.2 Patch-tests pour plusieurs éléments

### 4.2.2.1 Déplacements suivant l'axe x

| Déplacement | Résultat Analytique | R4MM                              | ABAQUS                   | SAP2000 |
|-------------|---------------------|-----------------------------------|--------------------------|---------|
| $u$         | 10                  | <b>10</b>                         | 10                       | 10      |
| $v$         | 0                   | $\mathbf{-0.34920 \cdot 10^{10}}$ | $4.57163 \cdot 10^{-16}$ | 0       |

TABLE 4.2 – Déplacements du nœud central (cas de chargement 1)

| Déplacement | Résultat Analytique  | R4MM                          | ABAQUS  | SAP2000 |
|-------------|----------------------|-------------------------------|---------|---------|
| $u$         | 0.004                | <b>0.004</b>                  | 0.004   | 0.004   |
| $v$         | $-4.0 \cdot 10^{-4}$ | $\mathbf{-4.0 \cdot 10^{-4}}$ | -0.0004 | -0.0004 |

TABLE 4.3 – Déplacements du nœud central (cas de chargement 2)

Pour les deux chargements[45], les déplacements du nœud central sont conformes aux solutions analytiques. L'élément passe positivement ce patch-test.

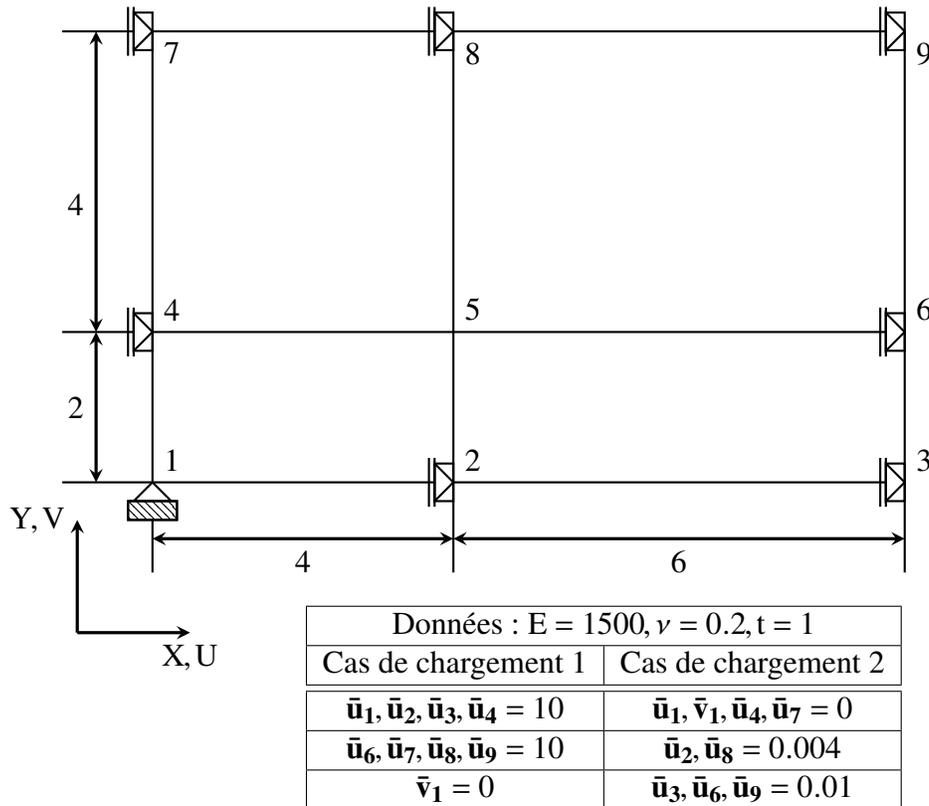


FIGURE 4.3 – Patch-test : plaque soumise à des déplacements imposés suivant x (les 2 cas de chargement)

#### 4.2.2.2 Déplacements suivant l'axe y

| Déplacements | Résultat Analytique | R4MM                      | ABAQUS                    | SAP2000                |
|--------------|---------------------|---------------------------|---------------------------|------------------------|
| $u$          | 0                   | $-0.21765 \cdot 10^{-10}$ | $-8.88178 \cdot 10^{-16}$ | $1.754 \cdot 10^{-15}$ |
| $v$          | 10                  | <b>10</b>                 | 10                        | 10                     |

TABLE 4.4 – Déplacements du nœud central (cas de chargement 1)

| Déplacements | Résultat Analytique | R4MM       | ABAQUS     | SAP2000    |
|--------------|---------------------|------------|------------|------------|
| $u$          | -0.0013333          | -0.0013333 | -0.0013333 | -0.0013333 |
| $v$          | 0.0033333           | 0.0033333  | 0.0033333  | 0.0033333  |

TABLE 4.5 – Déplacements du nœud central (cas de chargement 2)

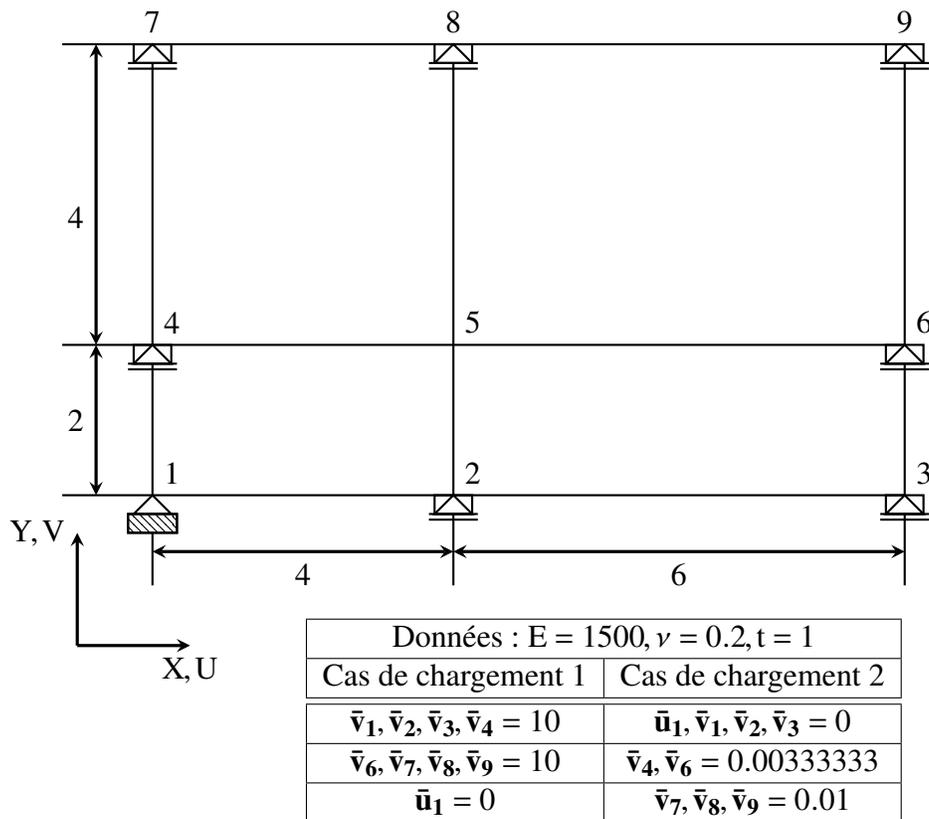


FIGURE 4.4 – Patch-test : plaque soumise à des déplacements imposés suivant  $y$  (les 2 cas de chargement)

A travers ces résultats, tous les patch-tests sont franchis positivement, l'élément est capable de représenter le mouvement de corps rigide et la dilatation pure.

## 4.3 Applications

### 4.3.1 Poutre console mince soumise à une force à l'extrémité (Macneal)

Comme première application, nous choisissons une poutre console mince élancée soumise à une force à l'extrémité [61]. Le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  ont respectivement les valeurs suivantes :  $1.0 \cdot 10^7$  et 0.3. La géométrie et le chargement sont montrés sur la Figure (4.5).

Lorsque le nombre de maille est « un » suivant l'axe  $-y$ - et jusqu'à 12 mailles suivant l'axe  $-x$ - le résultat donné par le **R4MM** est non seulement celui analytique mais reste le même, c'est une très bonne performance. Pour un maillage de 1x6, le résultat est meilleur que le fameux **R4BM** [62] qui présente une seule condensation et ceux donnés par **ABAQUS** et **SAP2000**.

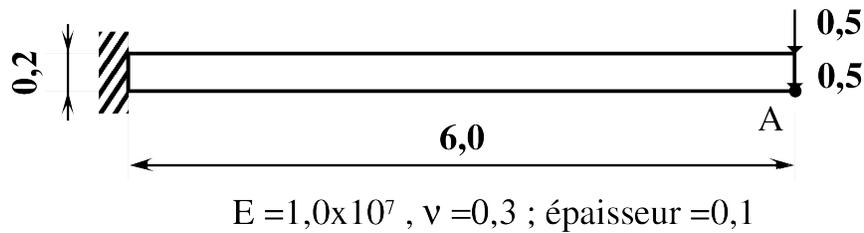


FIGURE 4.5 – Poutre console mince soumise à une force à l'extrémité

| <b>Flèche normée à l'extrémité</b> |             |               |               |                |
|------------------------------------|-------------|---------------|---------------|----------------|
| <b>Maillage</b>                    | <b>R4MM</b> | <b>R4BM</b>   | <b>ABAQUS</b> | <b>SAP2000</b> |
| 1X1                                | <b>1</b>    | /             | 0.750         | 0.750          |
| 1X2                                | <b>1</b>    | /             | 0.937         | 0.937          |
| 1X3                                | <b>1</b>    | /             | 0.972         | 0.972          |
| 1X6                                | <b>1</b>    | 0.992         | 0.993         | 0.993          |
| 1X8                                | <b>1</b>    | /             | 0.996         | 0.996          |
| 1X10                               | <b>1</b>    | /             | 0.997         | 0.997          |
| 1X12                               | <b>1</b>    | /             | 0.998         | 0.998          |
| <b>Sol.Analytique</b>              |             | <b>1.1081</b> |               |                |

TABLE 4.6 – Flèche normée au point A d'une poutre console mince soumise à une force à l'extrémité

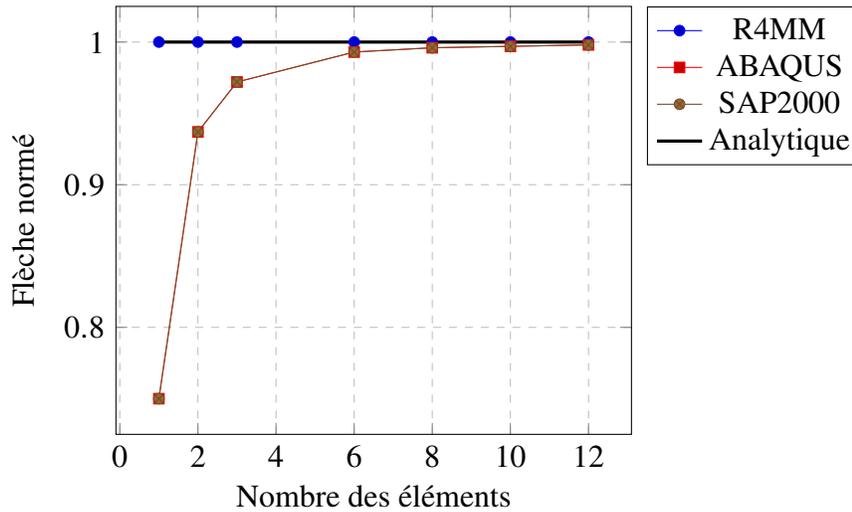


FIGURE 4.6 – Flèche normée au point A d’une poutre console mince soumise à une force à l’extrémité : convergence d l’élément **R4MM** comparé avec **SAP2000** et **ABAQUS**

### 4.3.2 Poutre console mince soumise à une flexion pure à l’extrémité (Macneal)

La même poutre exposée dans l’application précédente, avec exactement les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques, est reprise ici, sauf qu’au bout on à un moment à la place d’une force. Le but reste de calculer la flèche au bout.

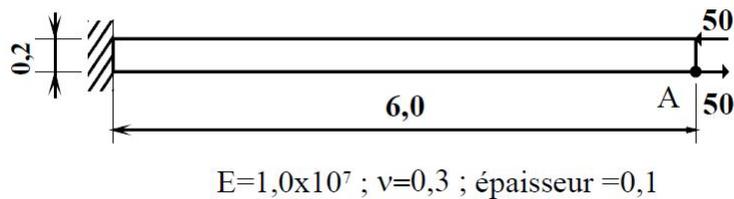
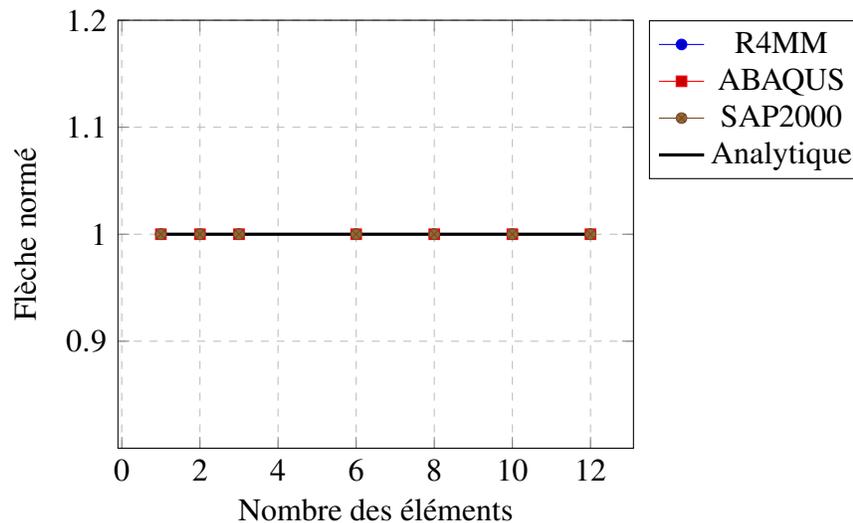


FIGURE 4.7 – Poutre console soumise à une flexion pure

| Flèche normée à l'extrémité |      |              |        |         |
|-----------------------------|------|--------------|--------|---------|
| Maillage                    | R4MM | R4BM         | ABAQUS | Sap2000 |
| 1X1                         | 1    | /            | 1      | 1       |
| 1X2                         | 1    | /            | 1      | 1       |
| 1X3                         | 1    | /            | 1      | 1       |
| 1X6                         | 1    | 1            | 1      | 1       |
| 1x8                         | 1    | 1            | 1      | 1       |
| 1X10                        | 1    | 1            | 1      | 1       |
| 1X12                        | 1    | 1            | 1      | 1       |
| <b>Sol.Analytique</b>       |      | <b>0.270</b> |        |         |

TABLE 4.7 – Flèche normée au point A, d'une poutre console soumise à la flexion pure

FIGURE 4.8 – Flèche normée au point A d'une poutre console mince soumise au flexion pure à l'extrémité : convergence d l'élément **R4MM** comparé avec **SAP2000** et **ABAQUS**

Comme pour le cas précédent la valeur analytique de la flèche est atteinte au premier maillage (1x1) et reste stable jusqu'au maillage (1x12). Le même constat est signalé pour le **R4BM**, **ABAQUS** et **SAP2000**.

### 4.3.3 Poutre console mince soumise à une force parabolique à l'extrémité (Poutre d'Allman)

Une autre application concernant une poutre mince disposée en console et soumise à une force parabolique à l'extrémité, avec comme caractéristiques géométriques et mécaniques :  $L = 48$  ;  $H = 12$  ;  $e = 1$  ;  $E = 3 \cdot 10^4$  ;  $\nu = 0,25$  ,  $P = 40$ .

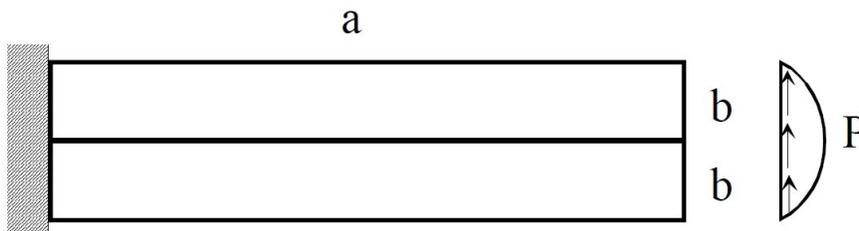


FIGURE 4.9 – Poutre console soumise à une force parabolique à l'extrémité

| Flèche normée à l'extrémité |             |               |        |         |
|-----------------------------|-------------|---------------|--------|---------|
| Maillage                    | R4MM        | R4BM          | ABAQUS | SAP2000 |
| 2X1                         | <b>0.99</b> | 0.75          | 0.753  | 0.757   |
| 2X2                         | <b>1.15</b> | 0.919         | 0.932  | 0.932   |
| 2X3                         | <b>1.06</b> | 0.958         | 0.967  | 0.967   |
| 2X4                         | <b>1.03</b> | 0.972         | 0.98   | 0.98    |
| 2x8                         | <b>1.01</b> | 0.988         | 0.996  | 0.996   |
| <b>Sol.Analytique</b>       |             | <b>0,3558</b> |        |         |

TABLE 4.8 – Flèche normée pour la poutre console soumise à une force parabolique à l'extrémité

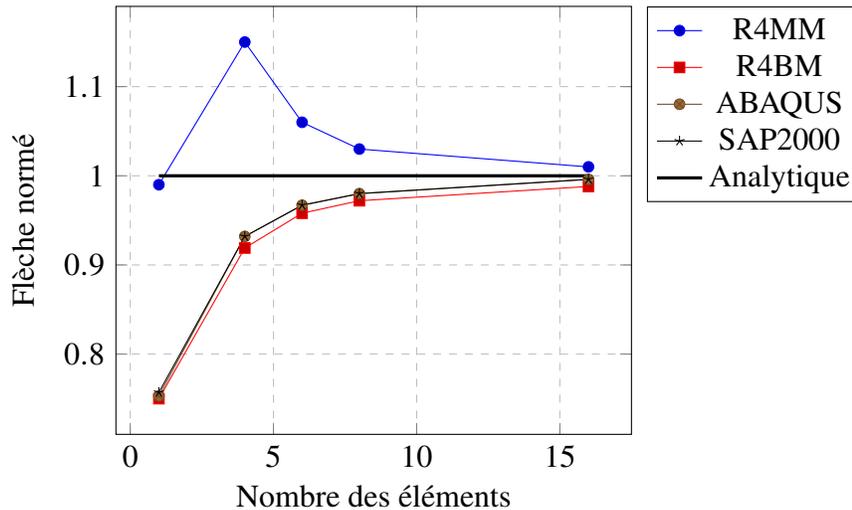


FIGURE 4.10 – Convergence de la flèche d’une poutre console soumise à une force parabolique à l’extrémité Allman

Pour ce cas de figure et pour un simple maillage  $1 \times 1$ , on est presque avec la solution analytique (0,99); en prenant un maillage de  $2 \times 2$ , on s’éloigne de 15% de la solution analytique puis en raffinant plus ( $2 \times 3$ ), ( $2 \times 4$ ) et ( $2 \times 8$ ) on revient vers la solution analytique du côté supérieur. Les résultats des déplacements à l’extrémité donnés par l’élément à simple condensation le **R4BM**, ainsi que ceux donnés par **ABAQUS** et **SAP2000** convergent vers la solution analytique dans sa partie inférieure.

#### 4.3.4 Poutre console mince avec différentes largeurs soumise à une force à l’extrémité

Une quatrième application reprise de chez [20], il s’agit d’une poutre console mince avec différentes largeurs (trois : large, modérément large et fine). Dans les trois cas la console a épaisseur de  $b = 0,0625$  m et une longueur  $L = 10$  m les propriétés du matériau sont les suivantes :  $E = 10^5$  N/mm<sup>2</sup> et  $\nu = 0.2$ . et soumise à une force à l’extrémité  $P = 100$  N Il s’agit de calculer la flèche à l’extrémité. Figure (4.11).

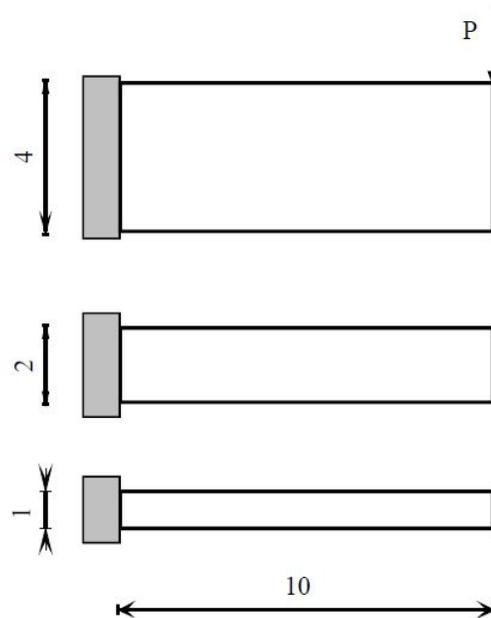


FIGURE 4.11 – Poutres consoles soumises à une force à l'extrémité

| Flèche normée à l'extrémité |             |              |        |         |
|-----------------------------|-------------|--------------|--------|---------|
| Maillage                    | R4MM        | R4BM         | ABAQUS | Sap2000 |
| 1X1                         | <b>0.98</b> | /            | /      | /       |
| 2X2                         | <b>1.15</b> | 0.922        | 0.923  | 0.923   |
| 2X4                         | <b>1.06</b> | 0.932        | 0.932  | 0.932   |
| 6x6                         | <b>1.28</b> | 0.989        | 0.989  | 0.989   |
| 8x8                         | <b>1.3</b>  | 0.993        | 0.993  | 0.993   |
| 10x12                       | <b>1.24</b> | /            | 0.996  | 0.996   |
| 10x16                       | <b>1.18</b> | 0.995        | 0.996  | 0.996   |
| 12x12                       | <b>1.32</b> | 0.996        | 0.996  | 0.996   |
| <b>Sol.Analytique</b>       |             | <b>1.105</b> |        |         |

TABLE 4.9 – Fleche d'une poutre console soumise à une force à l'extremité ( $L/b=2,5$ )

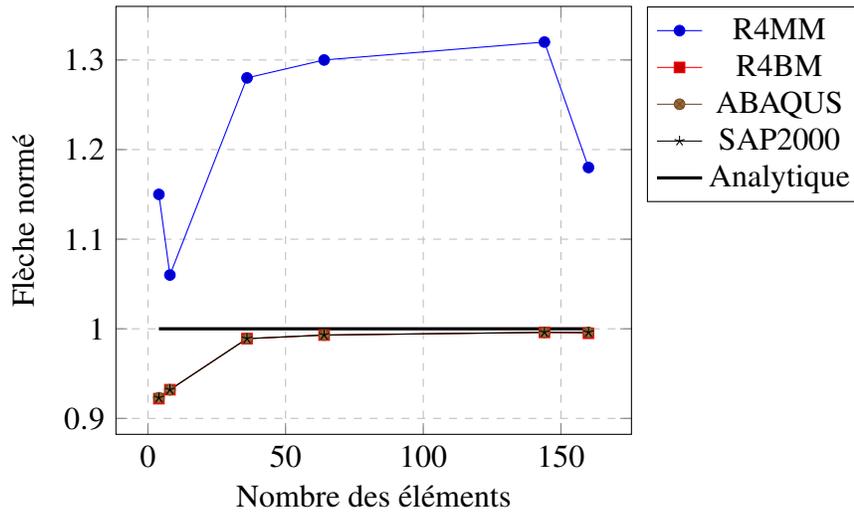


FIGURE 4.12 – Convergence de la fleche d’une poutre console soumise à une force à l’extrémité ( $L/b = 2,5$ )

| Flèche normée à l’extrémité |             |       |        |         |
|-----------------------------|-------------|-------|--------|---------|
| Maillage                    | R4MM        | R4BM  | ABAQUS | SAP2000 |
| 1X1                         | <b>0.99</b> | /     | /      | /       |
| 2X2                         | <b>1.17</b> | 0.925 | 0.926  | 0.926   |
| 2X4                         | <b>1.04</b> | 0.926 | 0.926  | 0.926   |
| 6x6                         | <b>1.27</b> | 0.989 | 0.989  | 0.989   |
| 8x8                         | <b>1.28</b> | 0.993 | 0.993  | 0.993   |
| 10x12                       | <b>1.2</b>  | /     | 0.997  | 0.997   |
| 10x16                       | <b>1.11</b> | 0.995 | 0.998  | 0.998   |
| 12x12                       | <b>1.29</b> | 0.996 | 0.997  | 0.997   |
| <b>Sol.Analytique</b>       | <b>8.21</b> |       |        |         |

TABLE 4.10 – Fleche d’une poutre console soumise à une force à l’extrémité ( $L/b=5$ )

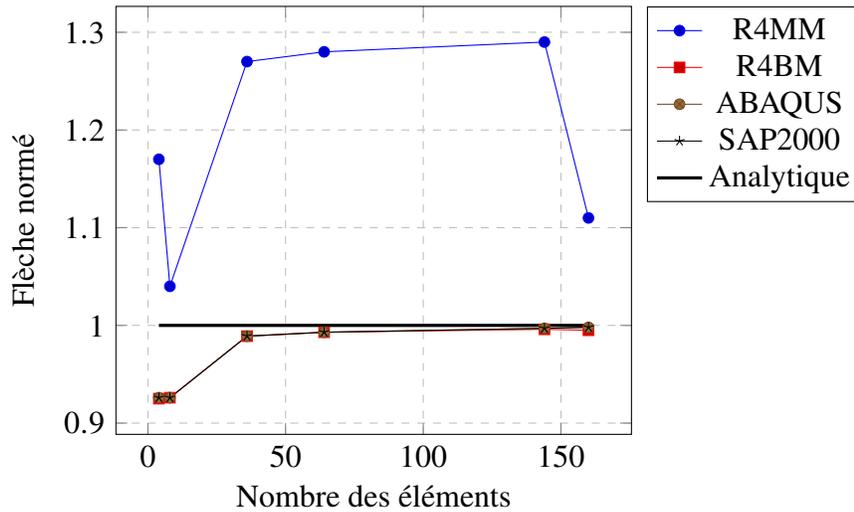


FIGURE 4.13 – Convergence de la fleche d’une poutre console soumise à une force à l’extrémité ( $L/b = 5$ )

| Flèche normée à l’extrémité |              |       |        |         |
|-----------------------------|--------------|-------|--------|---------|
| Maillage                    | R4MM         | R4BM  | ABAQUS | Sap2000 |
| 1X1                         | <b>1</b>     | /     | /      | /       |
| 2X2                         | <b>1.17</b>  | 0.924 | 0.925  | 0.925   |
| 2X4                         | <b>1.04</b>  | 0.922 | 0.923  | 0.923   |
| 6x6                         | <b>1.27</b>  | 0.986 | 0.987  | 0.987   |
| 8x8                         | <b>1.28</b>  | 0.99  | 0.991  | 0.991   |
| 10x12                       | <b>1.2</b>   | /     | 0.994  | 0.994   |
| 10x16                       | <b>1.11</b>  | 0.993 | 0.996  | 0.996   |
| 12x12                       | <b>1.29</b>  | 0.994 | 0.994  | 0.994   |
| <b>Sol.Analytique</b>       | <b>64.52</b> |       |        |         |

TABLE 4.11 – Fleche d’une poutre console soumise à une force à l’extrémité ( $L/b=10$ )

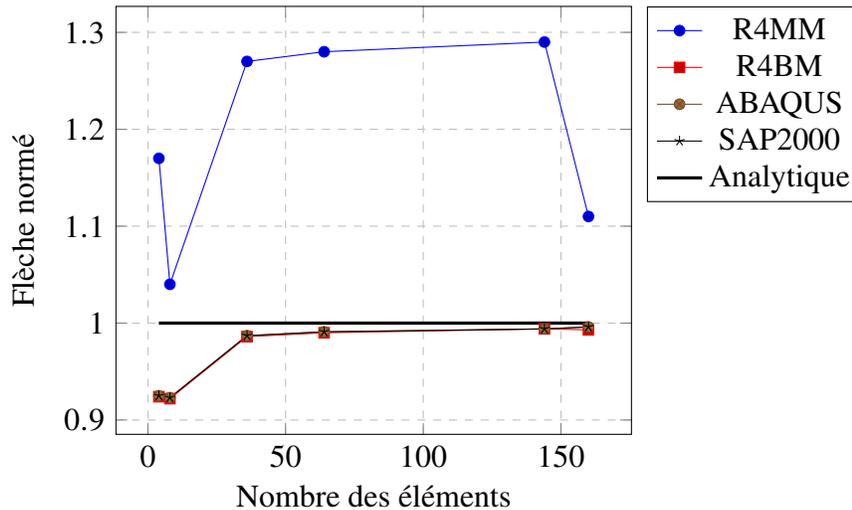


FIGURE 4.14 – Convergence de la fleche d’une poutre console soumise à une force à l’extrémité ( $L/b = 10$ )

Pour les résultats des flèches aux bouts, des trois poutres consoles, large ( $L/b=2,5$ ), modérément large ( $L/b=5$ ) et fine ( $L/b=10$ ) la solution théorique est presque atteinte (99%) pour un maillage primaire de (1x1), malheureusement, les résultats s’éloignent (perturbation) lorsqu’on raffine le maillage. Quant aux autres résultats, ils sont pratiquement les mêmes et la convergence est monotone

#### 4.3.5 Poutre large simplement appuyée, chargée au milieu

Une poutre proposée par Sabir [21] dont le rapport ( $L/h$ ) est égal a quatre, simplement appuyée, et chargée au milieu  $P = 40$  KN. Les caractéristiques mécaniques sont les suivantes :  $E = 20 \cdot 10^6$  kN/m<sup>2</sup> et  $\nu = 0,2$  et dont l’épaisseur est de 0.5m . On cherche a calculer les contraintes normales et tangentielles aux points A et B respectivement. Figure (4.15).

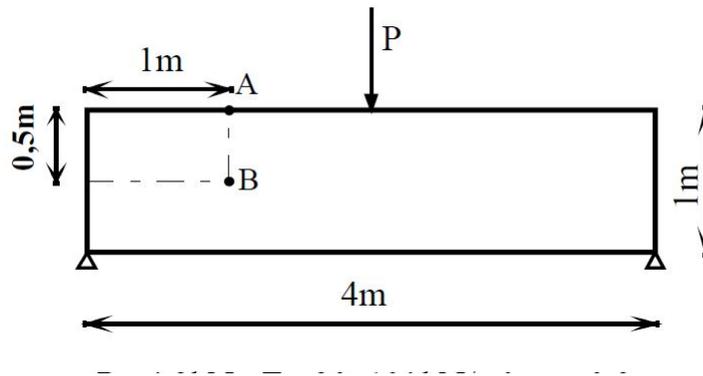


FIGURE 4.15 – Poutre Large simplement appuyée chargée au milieu

| Contrainte Normale normée au point A |                |        |        |         |
|--------------------------------------|----------------|--------|--------|---------|
| Maillage                             | R4MM           | R4BM   | ABAQUS | SAP2000 |
| 4X12                                 | <b>0.99815</b> | 1.2592 | 0.991  | 0.992   |
| 6X12                                 | <b>0.98867</b> | 1.007  | 1.003  | 1.003   |
| 8X12                                 | <b>0.98823</b> | 0.9889 | 0.984  | 0.984   |
| 10X20                                | <b>0.98211</b> | 0.9956 | 0.991  | 0.991   |
| <b>Sol.Analytique</b>                | <b>25.2</b>    |        |        |         |

TABLE 4.12 – Contrainte normale au point A pour la Poutre Large simplement appuyée chargée au milieu

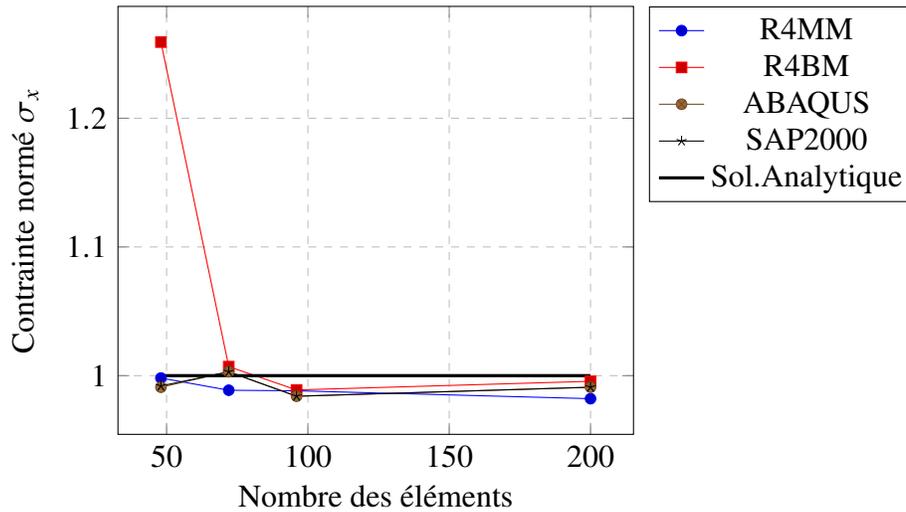


FIGURE 4.16 – Contrainte normale au point A pour la Poutre Large simplement appuyée chargée au milieu

| Contrainte Tangentielle normée au point B |                |        |        |         |
|---|----------------|--------|--------|---------|
| Maillage                                  | R4MM           | R4BM   | ABAQUS | SAP2000 |
| 4X12                                      | <b>0.91073</b> | 0.9577 | 0.912  | 0.91    |
| 6X12                                      | <b>0.96077</b> | 0.9652 | 0.965  | 0.965   |
| 8X12                                      | <b>0.98106</b> | 0.9784 | 0.978  | 0.978   |
| 10x20                                     | <b>0.98928</b> | 0.9868 | 0.987  | 0.987   |
| <b>Sol.Analytique</b>                     | <b>6,3</b>     |        |        |         |

TABLE 4.13 – Contrainte tangentielle au point B pour la Poutre Large simplement appuyée chargée au milieu

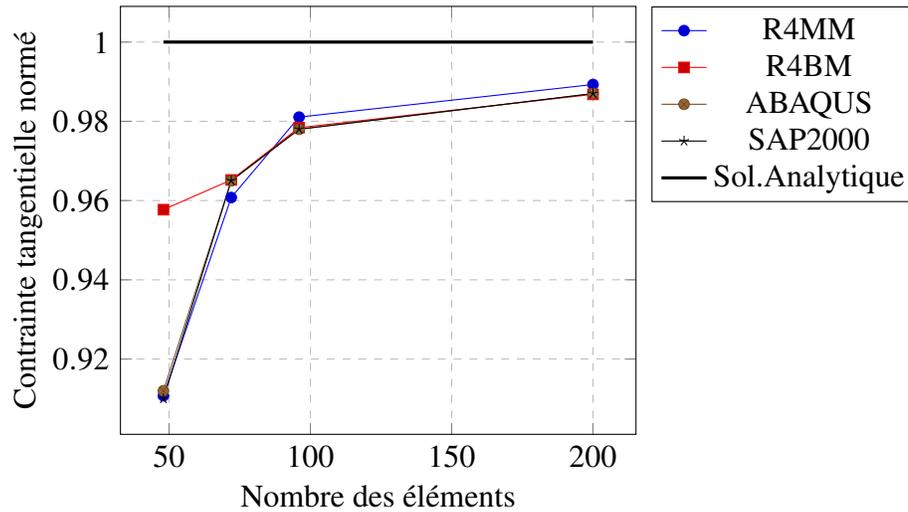


FIGURE 4.17 – Contrainte tangentielle au point  $B$  pour la Poutre Large simplement appuyée chargée au milieu

Pour le coté contraintes normales au quart de la longueur au point  $A$  (extrémité où elle est maximale) de la poutre simplement appuyée et chargée au milieu, les résultats sont relativement stable autour de la solution analytique, pour un maillage de 48 éléments, l'élément **R4MM** donne un résultat meilleur que celui du **R4BM**. D'autre part pour les contraintes tangentielles au quart de la longueur au point  $B$  (milieu de la section où elle est maximale) de la même poutre, les résultats s'approchent étroitement de la solution analytique. Pour les maillages de 96 et 200 éléments le **R4BM** est meilleur.

# Conclusions et Recommandations

Les éléments finis basés sur l'approche en déformation ont été revues. Une étude sur les propriétés qui se rattachent à cette approche a été réalisée. Pour l'analyse des problèmes plans de l'élasticité linéaire, un nouvel élément rectangulaire, nommé **R4MM** basé sur la même approche, est développé. Partant d'une idée, qui n'a pas été réalisée auparavant, c'est celle de pratiquer une double condensation statique au présent élément, possédant pour chaque nœud, deux degrés de liberté de translation. La construction de la matrice de rigidité élémentaire est devenue possible grâce à une intégration analytique. Des efforts considérables ont été menés pour injecter le programme de la condensation de l'élément développé dans le code de calcul de type universitaire le « **ALGMEF** ». Cette intégration s'est fait de deux manières, la méthode directe et la méthode de Gauss. Le programme est adapté aux états plans de déformations et de contraintes et reste très largement popularisé par ses différentes versions développées selon les cas analysés, par différents auteurs. Pour la validation de l'élément tous les patch-tests ont été passés sans grande difficulté. A travers des exemples très précis et bien choisis, on montre l'effet de la double condensation lorsqu'on affine le maillage. Pour un maillage unique, l'élément montre une performance qui est très concluante, on atteint les solutions analytiques au premier coup, loin derrière les résultats donnés par les logiciels **ABAQUS** et **SAP2000** ainsi que l'élément membranaire basé sur l'approche en déformation avec une condensation simple. Malheureusement ceci n'est plus valable lorsqu'on affine le maillage. En effet l'élément montre une perturbation dans la convergence. à la fin nous estimons, que l'idée de la double condensation statique au sein du même élément, ouvre la voie d'envisager peut être d'autres formulations qui permettront une convergence monotone, surtout que l'on a atteint les solutions analytiques pour un maillage primaire.

# Bibliographie

- [1] H. Oudin, Méthode des éléments finis, Nante (France),, 2008. 1
- [2] SAP2000, Documentation du logiciel SAP2000. 4
- [3] ABAQUS, Documentation du logiciel ABAQUS. 5
- [4] M. T. Belarbi, Développement d'Algorithmes et Élément dans la Méthode des Éléments Finis(Thèse de Magistère), Annaba,, 1990. 7, 64
- [5] S. Timoshenko, J. Goodier, [Theory of Elasticity](#), McGraw-Hill book Company, 1951.  
URL <https://books.google.dz/books?id=ialLYAAACAAJ> 8
- [6] M. T. Belarbi, A. Charif, Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses, Revue européenne des éléments finis 8 (2) (1999) 135–157. 24, 27
- [7] M. Belarbi, Développement de nouveaux éléments finis basés sur le modèle en déformation. application linéaire et non linéaire, Thèse de doctorat d'état, Université de Constantine (2000). 24, 27
- [8] D. Ashwell, A. Sabir, T. Roberts, [Further studies in the application of curved finite elements to circular arches](#), International Journal of Mechanical Sciences 13 (6) (1971) 507–517. doi:10.1016/0020-7403(71)90038-5.  
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020740371900385>  
25
- [9] D. Ashwell, A. Sabir, [Limitations of certain curved finite elements when applied to arches](#), International Journal of Mechanical Sciences 13 (2) (1971) 133–139. doi:10.1016/0020-7403(71)90017-8.

URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020740371900178>  
25

- [10] A. Sabir, D. Ashwell, A comparison of curved beam finite elements when used in vibration problems, *Journal of Sound and Vibration* 18 (4) (1971) 555–563. 25
- [11] A. Sabir, A. Lock, A curved, cylindrical shell, finite element, *International Journal of Mechanical Sciences* 14 (2) (1972) 125–135. 25
- [12] D. Ashwell, A. Sabir, A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions, *International Journal of Mechanical Sciences* 14 (3) (1972) 171–183. doi:10.1016/0020-7403(72)90074-4.  
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020740372900744>  
25
- [13] A. Sabir, The application of the finite element method to the buckling of rectangular plates and plates on elastic foundations, *Stavebnicky Casopsis Sav*, XXI 10 (1973) 689–712. 25
- [14] A. Sabir, Stiffness matrices for general deformation (out of plane and in-plane) of curved beam members based on independent strain functions, *The Math. Finite Elements and Appl. II* 34 (1975) 411–421. 25
- [15] A. Sabir, D. Ashwell, Diffusion of concentrated loads into thin cylindrical shells, *The mathematics of finite elements and applications III* (1979) 381–389. 25
- [16] A. Sabir, T. Charchafchi, Curved rectangular and quadrilateral shell element for cylindrical shell, *The Mathematics of Finite Elements and Application* 4 (1982) 231–239. 25
- [17] A. Sabir, A new class of finite elements for plane elasticity problems, in : *CAFEM7 7<sup>th</sup> Int. Conf. Struct. Mech in reactor technology Chicago*, 1983. 25
- [18] A. Sabir, F. Chow, Elastic buckling of flat panels containing circular and square holes, *Granada Publishing Ltd*, (1983) 311–321. 25
- [19] A. Sabir, Strain based finite elements for the analysis of shear walls, in : *Proc. Third Int. Conf. Tall Buildings*, 1984, pp. 447–453. 26
- [20] A. Sabir, A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom, in : *Proceedings of the Second International Conference on Variational Methods in Engineering*, Brebbia CA ed., Southampton University, 1985, pp. 17–25. 26, 44

- [21] A. Sabir, F. Ramadhani, A shallow shell finite element for general shell analysis, in : Variational methods in engineering, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference, University of Southampton England, 1985. 26, 48
- [22] A. Sabir, F. Chow, Elastic buckling of plates containing eccentrically located circular holes, Thin-walled structures 4 (2) (1986) 135–149. 26
- [23] C. Bouzrira, Strain based sector with drilling rotation, Master degree, University college of Cardiff (U.K). 26
- [24] M. S. Djoudi, Strain based finite elements for linear and geometrically non-linear analysis of structures., Ph.D. thesis, University of Wales. Cardiff (1990). 26
- [25] A. Sabir, A. Sfenjji, Triangular and rectangular plane elasticity finite elements, Thin-walled structures 21 (3) (1995) 225–232. 26
- [26] A. Sabir, M. Djoudi, Shallow shell finite element for the large deflection geometrically nonlinear analysis of shells and plates, Thin-walled structures 21 (3) (1995) 253–267. 26
- [27] M. Djoudi, A. Sabir, [Finite element analysis of singly and doubly curved dams of constant or variable thickness](#), Thin-Walled Structures 21 (3) (1995) 279–289, finite Elements for Thin-Walled Structures. doi:10.1016/0263-8231(94)00007-M.  
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/026382319400007M>  
26
- [28] A. Sabir, A. Mousa, Finite-element analysis of cylindrical-conical storage tanks using strain-based elements, Structural engineering review 8 (4) (1996) 367–374. 26
- [29] A. Sabir, A. Mousa, Analysis of fluted conical shell roofs using the finite-element method, Computers & structures 64 (1) (1997) 239–251. 26
- [30] A. Sabir, G. Davies, Natural frequencies of plates with square holes when subjected to in-plane uniaxial, biaxial or shear loading, Thin-walled structures 28 (3) (1997) 321–335. 26
- [31] A. Sabir, G. Davies, Natural frequencies of square plates with reinforced central holes subjected to inplane loads, Thin-walled structures 28 (3) (1997) 337–353. 26
- [32] M. T. Belarbi, A. Charif, Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan, Revue européenne des éléments finis 7 (4) (1998) 439–458. 26

- [33] M. Belarbi, A. Charif, Nouvel hexaèdre simple « sbh8 » pour l'étude des plaques minces et épaisses, Les annales Maghrébines de l'Ingénieur, Vol.12, N0 Hors série, extrait de l'acte du 6ème Colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur CMMNI6, Tunis 24-26 Nov 2 (1998) 632–627. 26
- [34] M. Belarbi, C. A, Nouveau quadrilatère « sbq4 » avec drilling rotation, in : Conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquées et les Sciences de l'Ingénieur CIMASI'98 27-29 octobre, Casablanca, Vol. Vol. 2, 1998., pp. 136–141. 27
- [35] A. Assan, [Analysis of multiple stiffened barrel shell structures by strain-based finite elements](#), Thin-Walled Structures 35 (4) (1999) 233–253. doi: 10.1016/S0263-8231(99)00030-0.  
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823199000300> 27
- [36] T. Maalem, Investigation numérique des problèmes de flexion de plaque par un élément fini parallélépipédique basé sur le modèle en déformation, thèse de Magistère, Université de Constantine. 27
- [37] M. T. Belarbi, T. Maalem, A new parallelepiped finite element for thin and thick plates, in : First International Conference of Civil Engineering Science, ICCES, October 7-8, Assiut, Egypt, 2003. 27
- [38] A. Mousa, S. Tayeh, A rectangular finite element for plane elasticity with in-plane rotation, in : Proceedings of the sixth conference on Computational structures technology, Civil-Comp press, 2002, pp. 45–46. 27
- [39] M. Djoudi, H. Bahai, [A shallow shell finite element for the linear and non-linear analysis of cylindrical shells](#), Engineering Structures 25 (6) (2003) 769–778. doi:10.1016/S0141-0296(03)00002-6.  
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029603000026> 27
- [40] M. Djoudi, H. Bahai, [A cylindrical strain-based shell element for vibration analysis of shell structures](#), Finite Elements in Analysis and Design 40 (13-14) (2004) 1947–1961. doi:10.1016/j.finel.2003.11.008.  
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168874X04000368> 27

- [41] L. Belounar, M. Guenfoud, [A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending](#), *Thin-Walled Structures* 43 (1) (2005) 47–63. doi:10.1016/j.tws.2004.08.003.  
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026382310400151X> 27
- [42] M. T. Belarbi, A. Khelassi, et al., A new rectangular finite element for plane elasticity analysis, *Courrier du Savoir* 6. 27
- [43] M. T. Belarbi, T. Maalem, On improved rectangular finite element for plane linear elasticity analysis, *Revue Européenne des éléments* 14 (8) (2005) 985–997. 27
- [44] M. Bourezane, Utilisation of the strain model in the analysis of structures, Ph.D. thesis, Université de Biskra (2006). 27
- [45] M. T. Belarbi, M. Bourezane, [On improved sabir triangular element with drilling rotation](#), *Revue Européenne de Génie Civil* 9 (9-10) (2005) 1151–1175. arXiv: <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/17747120.2005.9692805>, doi: 10.1080/17747120.2005.9692805.  
URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/17747120.2005.9692805> 27, 36, 37
- [46] H. Djamel, M. Mekki, B. Lamine, An improved quadrilateral element for general plane elasticity problems, in : Al-Azhar engineering ninth international conference, 2007. 27
- [47] D. Hamadi, T. Maalem, Presentation of an efficient parallelepiped finite element based on the strain approach" sbp8C, in : Proceedings of the World Congress on Engineering, Vol. 3, 2010. 27
- [48] T. Maalem, Performances of the 3d strain based finite elements, *Courrier du Savoir* 11. 27
- [49] B. Messaoud, Cylindrical element based on strain approach, *Computer Methods in Mechanics*. 27
- [50] M. Himeur, M. Guenfoud, Bending triangular finite element with a fictitious fourth node based on the strain approach, *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique* 20 (7-8) (2011) 455–485. 27

- [51] C. Rebiai, L. Belouar, [A new strain based rectangular finite element with drilling rotation for linear and nonlinear analysis](#), Archives of Civil and Mechanical Engineering 13 (1) (2013) 72–81. doi:10.1016/j.acme.2012.10.001.  
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1644966512001185> 27
- [52] D. S. Hamadi D., O. A, Formulation of a new plate bending finite element based on the strain approach, international conference on applied and computational mathematics. 27
- [53] L. Belouar, K. Guerraiche, [A new strain based brick element for plate bending](#), Alexandria Engineering Journal 53 (1) (2014) 95–105. doi:10.1016/j.aej.2013.10.004.  
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S11110016813001002> 28
- [54] M. Bourezane, A new strain based triangular element with drilling rotation, in : Proceedings of the World Congress on Engineering, Vol. 1, 2013. 28
- [55] D. Hamadi, S. Abderrahmani, T. Maalem, O. Temami, Efficiency of the strain based approach formulation for plate bending analysis. 28
- [56] C. Rebiai, L. Belouar, [An effective quadrilateral membrane finite element based on the strain approach](#), Measurement 50 (2014) 263–269. doi:10.1016/j.measurement.2013.12.043.  
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263224114000049> 28
- [57] M. Himeur, A. Zergua, M. Guenfoud, A finite element based on the strain approach using airy's function, Arabian Journal for Science and Engineering 40 (3) (2015) 719–733. doi:10.1007/s13369-014-1543-3. 28
- [58] V. Manet, Méthode des éléments finis. 29, 30, 32
- [59] S. Jean-Luc, La condensation statique dans felina, Rapport interne, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, ICS (1991). 30, 32
- [60] K. Bathe, [Finite Element Procedures](#), Prentice-Hall International Series in, Prentice Hall, 1996.  
URL <https://books.google.dz/books?id=wKRRAAAAMAAJ> 34

- [61] R. H. Macneal, R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, *Finite elements in Analysis and Design* 1 (1) (1985) 3–20. 39
- [62] T. Maalem, Contribution du modèle en déformation dans l'analyse des structures complexes, Thèse de doctorat, Université El Hadj Lakhdar de Batna (2007). 40
- [63] Benmeddour.H, Ounis.S, Des applications de la mef dans les structures à comportements membranaire et flexionnel, Mémoire de fin d'étude, Université Elhadj Lakhdhar Batna (2008). 64

# Annexe A

## Matrices utilisées pour le développement de l'élément R4MM

### A.1 Matrice de prés rigidité $[K_0]$

$$[K_0] = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & abD11 & \frac{a^2bD11}{2} & \frac{ab^2D11}{2} & \frac{a^2b^2D11}{4} & abD12 & \frac{a^2bD12}{2} & \frac{ab^2D12}{2} & \frac{a^2b^2D12}{4} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{a^2bD11}{2} & \frac{a^3bD11}{3} & \frac{a^2b^2D11}{4} & \frac{a^3b^2D11}{6} & \frac{a^2bD12}{2} & \frac{a^3bD12}{3} & \frac{a^2b^2D12}{4} & \frac{a^3b^2D12}{6} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{ab^2D11}{2} & \frac{a^2b^2D11}{4} & \frac{ab^3D11}{3} & \frac{a^2b^3D11}{6} & \frac{ab^2D12}{2} & \frac{a^2b^2D12}{4} & \frac{ab^3D12}{3} & \frac{a^2b^3D12}{6} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{a^2b^2D11}{4} & \frac{a^3b^2D11}{6} & \frac{a^2b^3D11}{6} & \frac{a^3b^3D11}{9} & \frac{a^2b^2D12}{4} & \frac{a^3b^2D12}{6} & \frac{a^2b^3D12}{6} & \frac{a^3b^3D12}{9} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & abD12 & \frac{a^2bD12}{2} & \frac{ab^2D12}{2} & \frac{a^2b^2D12}{4} & abD22 & \frac{a^2bD22}{2} & \frac{ab^2D22}{2} & \frac{a^2b^2D22}{4} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{a^2bD12}{2} & \frac{a^3bD12}{3} & \frac{a^2b^2D12}{4} & \frac{a^3b^2D12}{6} & \frac{a^2bD22}{2} & \frac{a^3bD22}{3} & \frac{a^2b^2D22}{4} & \frac{a^3b^2D22}{6} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{ab^2D12}{2} & \frac{a^2b^2D12}{4} & \frac{ab^3D12}{3} & \frac{a^2b^3D12}{6} & \frac{ab^2D22}{2} & \frac{a^2b^2D22}{4} & \frac{ab^3D22}{3} & \frac{a^2b^3D22}{6} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{a^2b^2D12}{4} & \frac{a^3b^2D12}{6} & \frac{a^2b^3D12}{6} & \frac{a^3b^3D12}{9} & \frac{a^2b^2D22}{4} & \frac{a^3b^2D22}{6} & \frac{a^2b^3D22}{6} & \frac{a^3b^3D22}{9} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & abD33
 \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

## A.2 Matrice $[Q]$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x \cdot y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x \cdot y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

## A.3 Matrice $[D]$

$$[D] = \begin{bmatrix} D11 & D12 & 0 \\ D12 & D22 & 0 \\ 0 & 0 & D33 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

avec :

$$D11 = \frac{E \cdot (1 - \gamma \cdot \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - \nu - \gamma \cdot \nu)}$$

$$D12 = \frac{\nu \cdot D11}{1 - \gamma \cdot \nu}$$

$$D22 = D11$$

$$D33 = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

avec :

$\gamma = 0$  pour un état plan des contraintes.

$\gamma = 1$  pour un état plan des déformations

## A.4 Matrice [A]

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & \frac{a^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & -\frac{a^2}{2} & -\frac{a^3}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 1 & 0 & -b & a & \frac{a^2}{2} & a \cdot b & \frac{a^2 \cdot b}{2} & 0 & -\frac{b^2}{2} & 0 & -\frac{b^3}{6} & \frac{b}{2} \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & -\frac{a^2}{2} & -\frac{a^3}{6} & b & a \cdot b & \frac{b^2}{2} & \frac{a \cdot b^2}{2} & \frac{a}{2} \\ 1 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b^2}{2} & 0 & -\frac{b^3}{6} & \frac{b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & \frac{b^2}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{b}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a^2}{8} & \frac{a \cdot b}{4} & \frac{a^2 \cdot b}{16} & 0 & -\frac{b^2}{8} & 0 & -\frac{b^3}{48} & \frac{b}{4} \\ 0 & 1 & \frac{a}{2} & 0 & 0 & -\frac{a^2}{8} & -\frac{a^3}{48} & \frac{b}{2} & \frac{a \cdot b}{4} & \frac{b^2}{8} & \frac{a \cdot b^2}{16} & \frac{a}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{b}{3} & \frac{a}{3} & \frac{a^2}{18} & \frac{a \cdot b}{9} & \frac{a^2 \cdot b}{54} & 0 & -\frac{b^2}{18} & 0 & -\frac{b^3}{162} & \frac{b}{6} \\ 0 & 1 & \frac{a}{3} & 0 & 0 & -\frac{a^2}{18} & -\frac{a^3}{162} & \frac{b}{3} & \frac{a \cdot b}{9} & \frac{b^2}{18} & \frac{a \cdot b^2}{54} & \frac{a}{6} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A.5 Matrice [A]<sup>-1</sup>

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & \frac{a^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & -\frac{a^2}{2} & -\frac{a^3}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 1 & 0 & -b & a & \frac{a^2}{2} & a \cdot b & \frac{a^2 \cdot b}{2} & 0 & -\frac{b^2}{2} & 0 & -\frac{b^3}{6} & \frac{b}{2} \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & -\frac{a^2}{2} & -\frac{a^3}{6} & b & a \cdot b & \frac{b^2}{2} & \frac{a \cdot b^2}{2} & \frac{a}{2} \\ 1 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b^2}{2} & 0 & -\frac{b^3}{6} & \frac{b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & \frac{b^2}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{b}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a^2}{8} & \frac{a \cdot b}{4} & \frac{a^2 \cdot b}{16} & 0 & -\frac{b^2}{8} & 0 & -\frac{b^3}{48} & \frac{b}{4} \\ 0 & 1 & \frac{a}{2} & 0 & 0 & -\frac{a^2}{8} & -\frac{a^3}{48} & \frac{b}{2} & \frac{a \cdot b}{4} & \frac{b^2}{8} & \frac{a \cdot b^2}{16} & \frac{a}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{b}{3} & \frac{a}{3} & \frac{a^2}{18} & \frac{a \cdot b}{9} & \frac{a^2 \cdot b}{54} & 0 & -\frac{b^2}{18} & 0 & -\frac{b^3}{162} & \frac{b}{6} \\ 0 & 1 & \frac{a}{3} & 0 & 0 & -\frac{a^2}{18} & -\frac{a^3}{162} & \frac{b}{3} & \frac{a \cdot b}{9} & \frac{b^2}{18} & \frac{a \cdot b^2}{54} & \frac{a}{6} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

**A.6 Matrice du champs R4MM**

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & \frac{x^2}{2} & x \cdot y & \frac{x^2 \cdot y}{2} & 0 & -\frac{y^2}{2} & 0 & -\frac{y^3}{6} & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & x & 0 & 0 & -\frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{6} & y & x \cdot y & \frac{y^2}{2} & \frac{x \cdot y^2}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

**A.7 Déterminant de la matrice [A]**

$$|A| = -\frac{a^9 \cdot b^9}{209952} \quad (\text{A.7})$$

# Annexe B

## Programme R4MM

Le programme utilisé pour l'implémentation de la formulation de l'élément **R4MM** a été inspiré par la bibliothèque **ALGMEF** [4] développé par MR BELARBI ,on a basé sur la version **REC4** modifié par Benmedour et Ounis [63] qui utilise un l'élément fini rectangulaire classique de l'élasticité plane .

Les changement qu'on a appliqué au programme **REC4** :

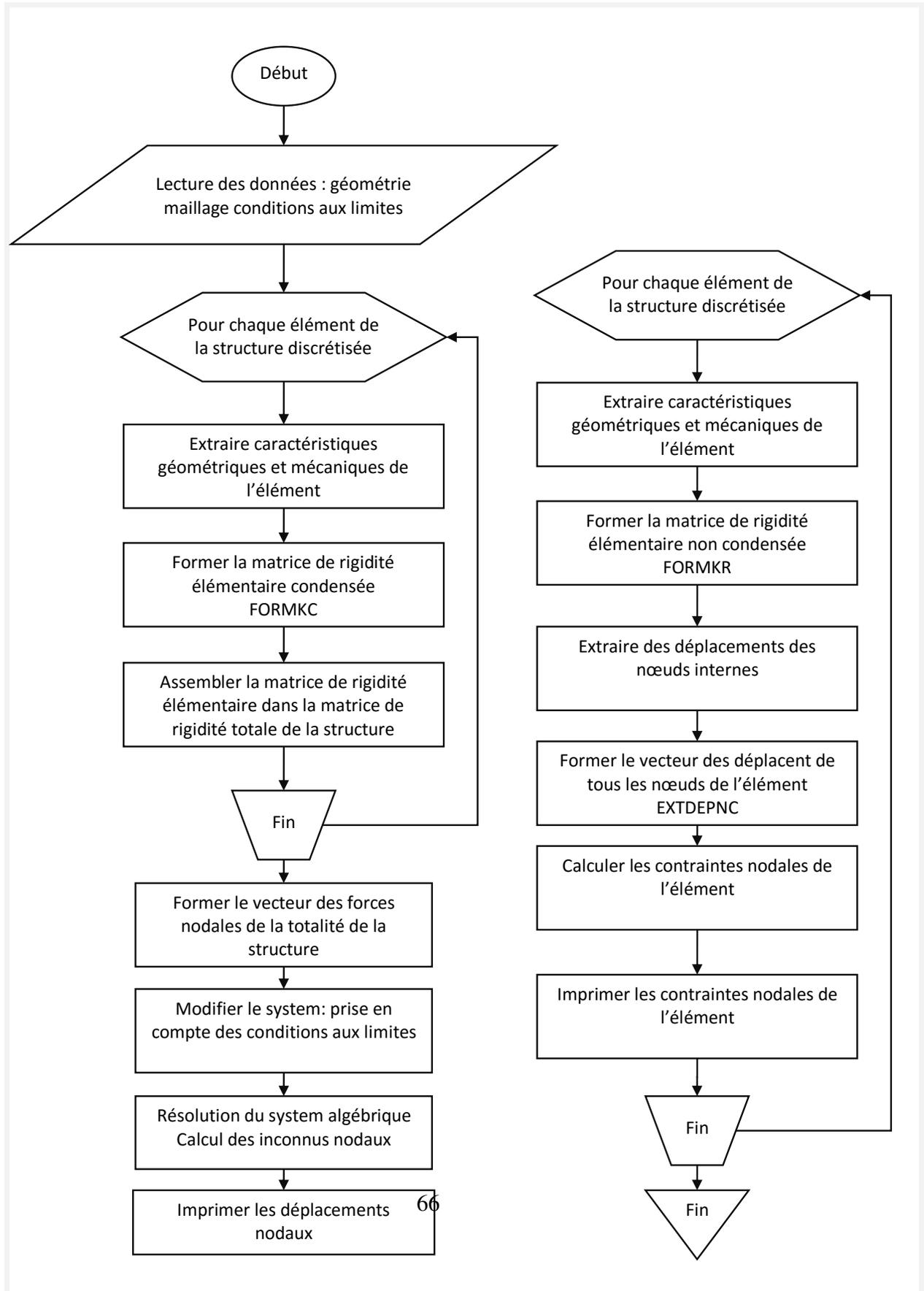
- Introduction de la condensation statique - la méthode directe - les formules (3.6),(3.8a) on supposant que le vecteur for nodales de l'élément avant condensation soit nul (pas des forces équivalentes de surface et de volume). en plus de çà la double condensation
- regroupement des sous-routines dans des blocs
- Introduction de la nouvelle formulation de l'élément **R4MM**,champs ;matrice de rigidité....
- Extraction de contraintes dans l'élément tenant compte de la condensation .

Suivit par les organigrammes , les modifications portés sur le programme **REC4** sont résumé dans le tableau suivant :

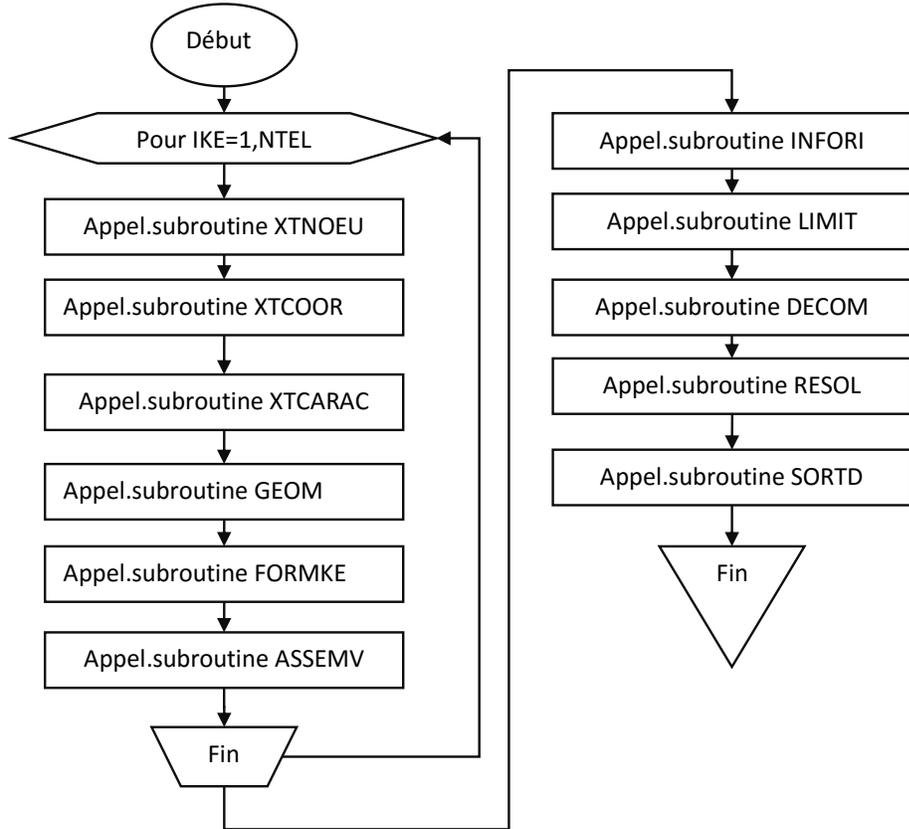
Listes de modifications portées sur le programme Rec4 (Ben Meddour) :

|              |   |
|--------------|---|
| FORMKE       | Former la matrice de rigidité élémentaire condensée   |
| FORMKR       | Calcul de la matrice de rigidité de l'élément (réel) avant condensation $[K^e] = t ([A]^{-1})^T [K_0^e] [A]^{-1}$   |
| FORMKC       | Appliquer la formule de condensation afin d'extraire la matrice élémentaire condensée :<br>$[K_c^e] = [K_{jj}^e] - [K_{ji}^e][K_{ii}^e]^{-1}[K_{ij}^e]$   |
| FORMKO       | Calcul de la matrice de prés rigidité $[K_0^e] = \iiint_V [Q]^T [D] [Q] dV$   |
| EXTDEPNC     | Forme la matrice $[K^e]$<br>Extraire les DDL s de jonctions $\{u_j^e\}$<br>Extraire des composantes du vecteur déplacement élémentaire $\{u^e\}$  |
| FORMDEPNC    | Calcul des déplacements internes :<br>$\{u_i^e\} = -[K_{ii}^e]^{-1}[K_{ij}^e]\{u_j^e\}$ Forme le vecteur de déplacement élémentaire<br>$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} \{u_i^e\} \\ \{u_j^e\} \end{Bmatrix}$ Le but est de l'utiliser pour avoir les champs élémentaires des contraintes<br>$\{\sigma^e(x, y)\} = [D][Q][A]^{-1}\{u^e\}$ |
| MAT_MULT     | Effectue le produit matriciel   |
| MAT_VEC_MULT | Produit d'une matrice par un vecteur  |
| NUL_MAT      | Vider une matrice   |
| NUL_VEC      | Vider un vecteur  |

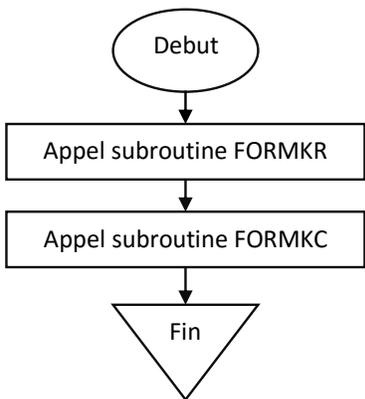
Description du fonctionnement du Programme R4MM



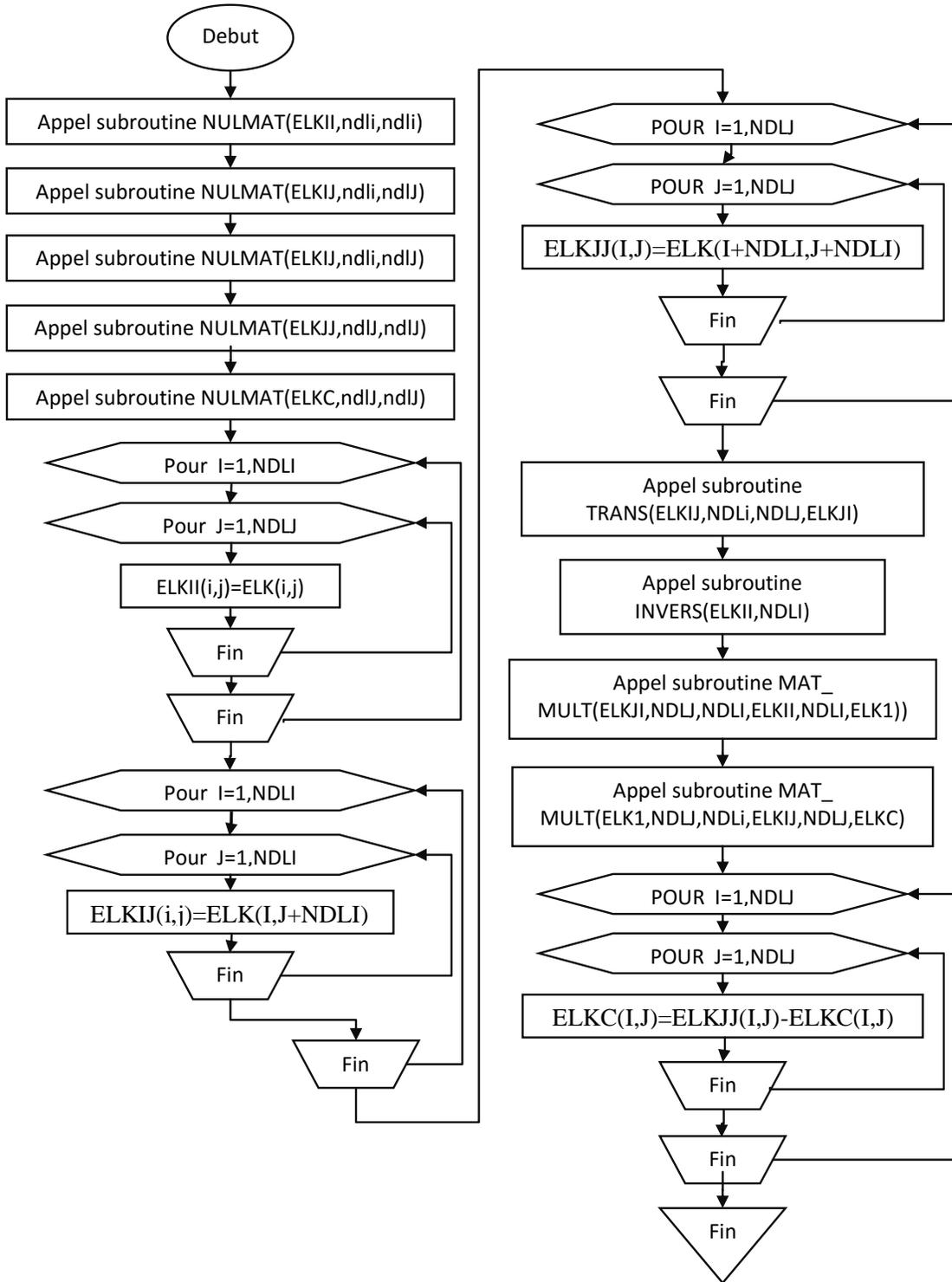
Subroutine DEPLACEMENT(ICON,COOR,PHYS,SECT,DEPI,VDEPI,FORI,VFOR,RIGID,CHARG,DEPLA)



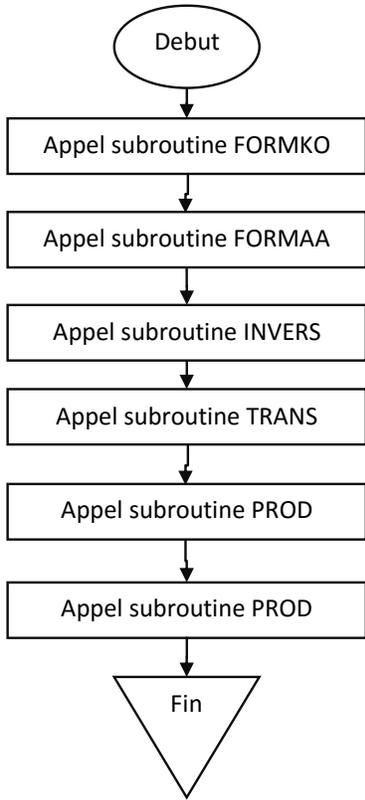
SUBROUTINE FORMKE(ELKC,ELA,ELB,ELE,ELV,ELEP)



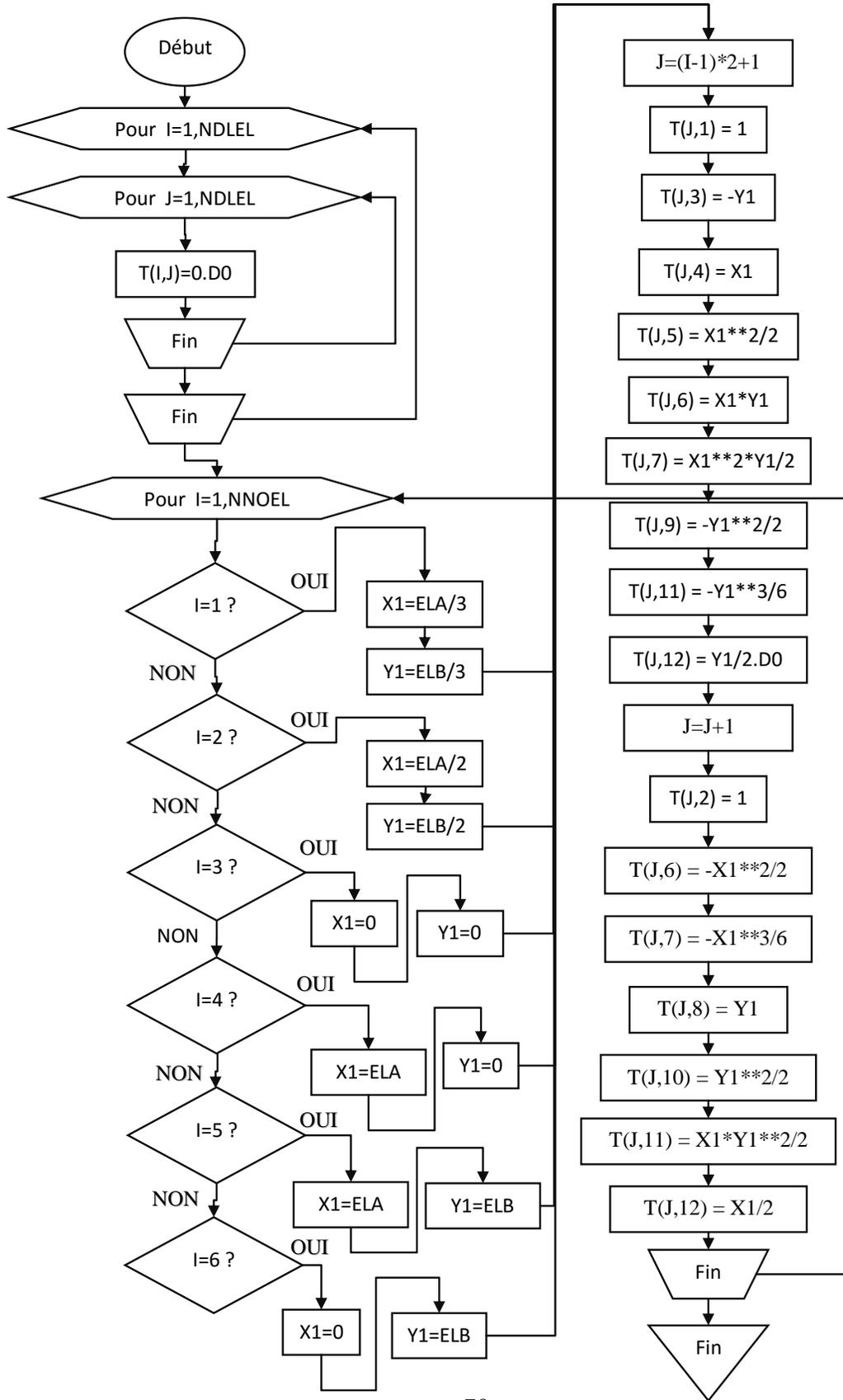
SUBROUTINE FORMKC(ELK,ELKC)



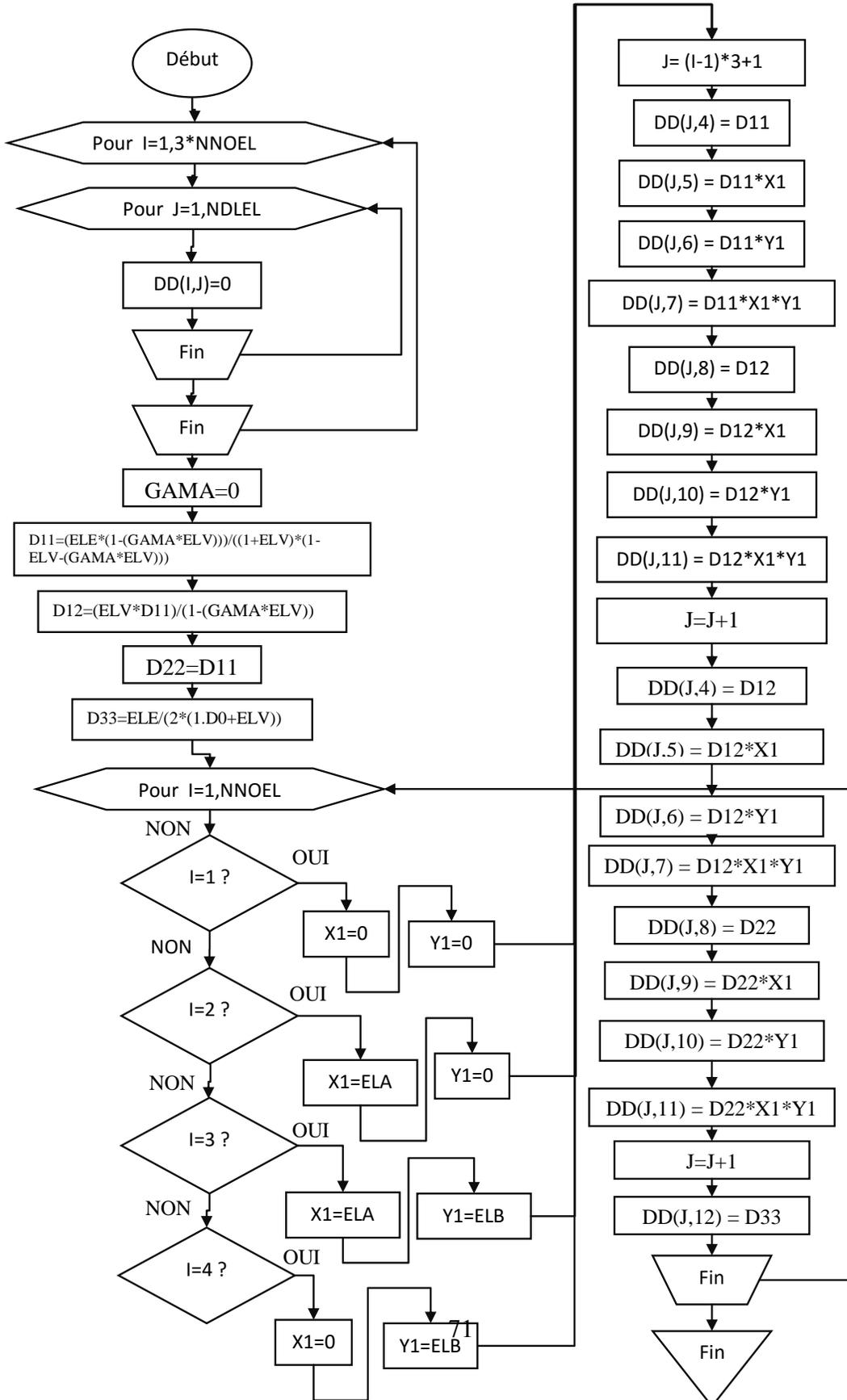
SUBROUTINE FORMKR(ELK,ELA,ELB,ELE,ELV,ELEP,NDLEL,NNOEL)



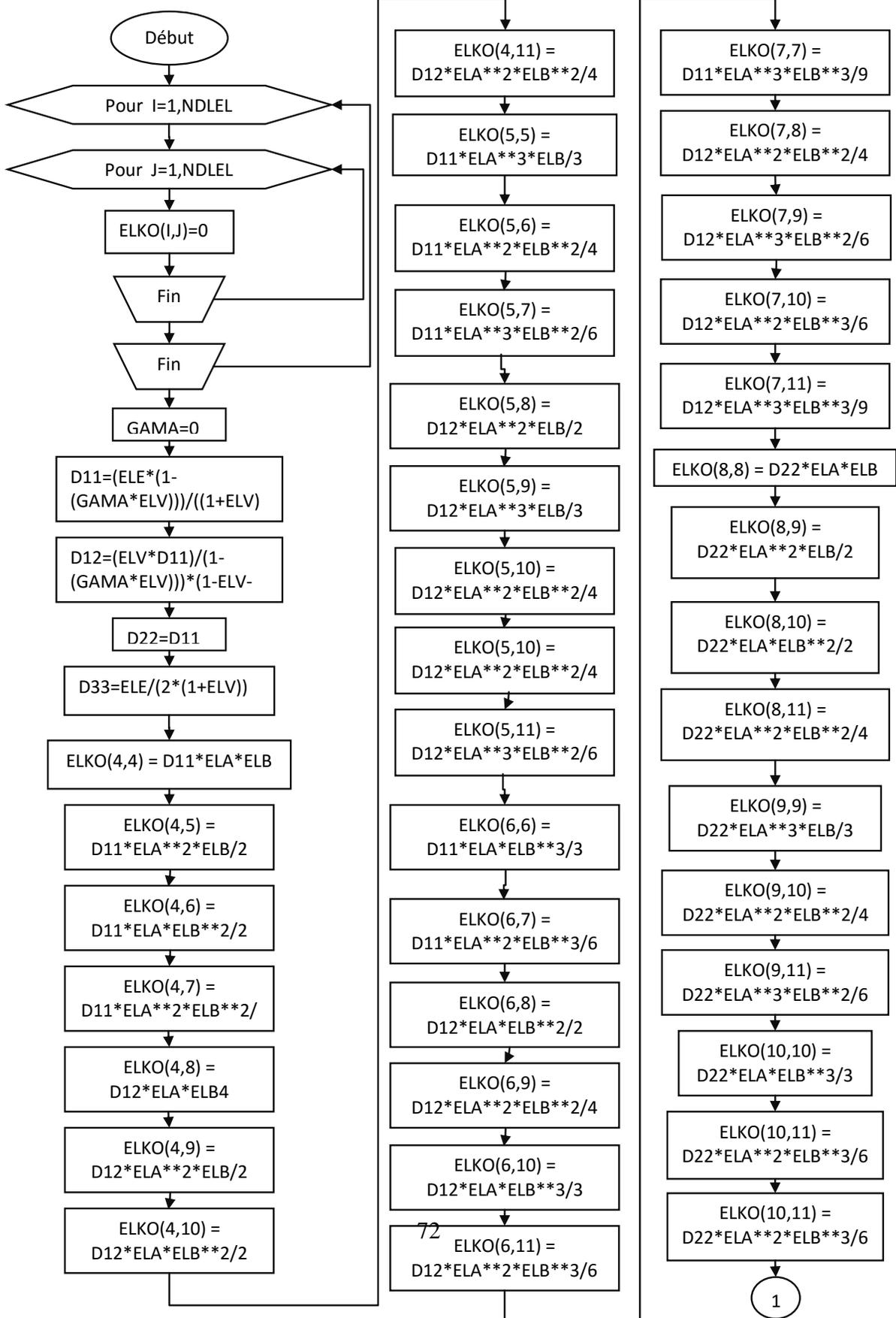
SUBROUTINE FORMAA(T,ELA,ELB,NDLEL,NNOEL)

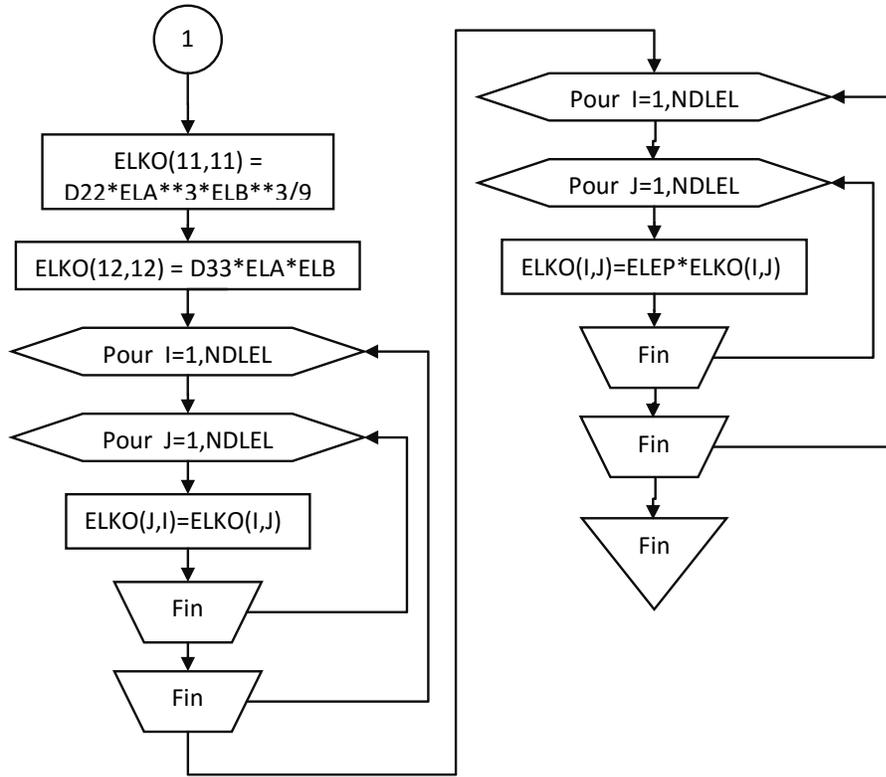


SUBROUTINE FORMD(ELA,ELB,ELE,ELV,NDLEL,NNOEL,DD)

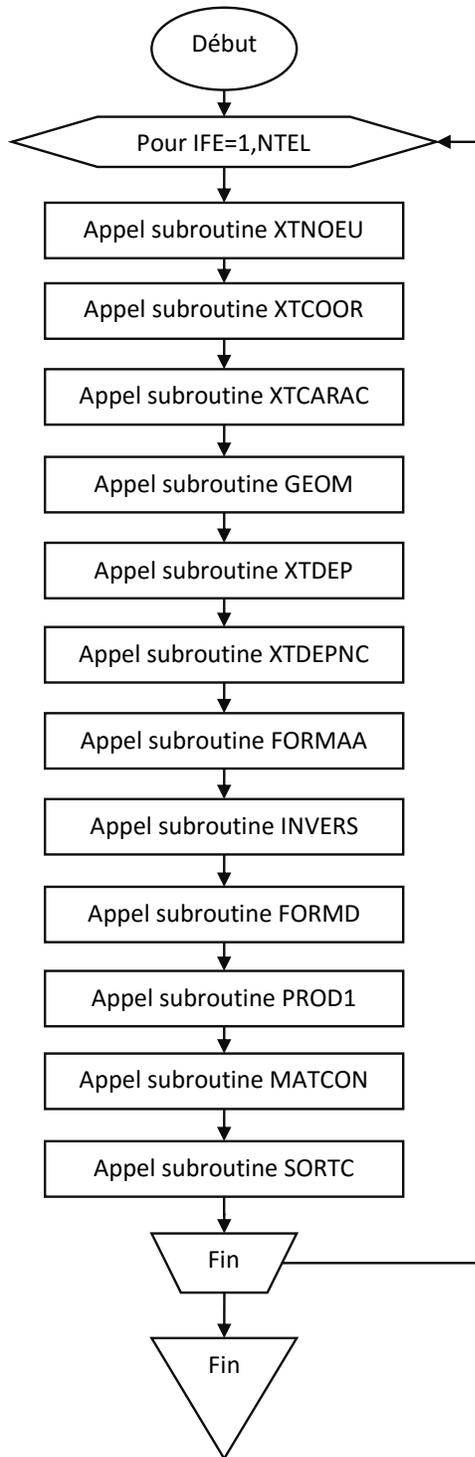


SUBROUTINE FORMKO(ELKO,ELA,ELB,ELE,ELV,ELEP,NDLEL)





SUBROUTINE XTDEPNC(ELDG,ELDGNC,ELA,ELB,ELE,ELV,ELEP)



SUBROUTINE FORMDEPNC(ELK,ELD,ELDNC)

