

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Batna
Faculté des Sciences de l'Ingénieur

Thèse
Préparée au
Département de Génie Civil
Présentée par

LAHBARI Nouredine

Pour l'obtention du titre de

Docteur d'Etat

Spécialité Mécanique des Structures

***Etude de la Stabilité des Plaques et Coques Métalliques
par la Méthode des Eléments finis***

Soutenue le 15 décembre 2007

Devant le jury composé de :

Dr HOUARI Hacene	Professeur	U. Constantine	Président
Dr ZEDIRA Hamma	Maître de Conférence	C.U. Khenchela	Rapporteur
Dr KARECH Toufik	Maître de Conférence	U. Batna	Examineur
Dr CHEBILI Rachid	Maître de Conférence	U. Biskra	Examineur
Dr MAZOUZ Hamoudi	Maître de Conférence	U. Batna	Examineur

TABLE DES MATIERES

<i>Résumé</i>	
<i>Abstract</i>	
<i>Introduction</i>	01
<i>Chapitre 1</i>	

Etude bibliographique

1-1 Bibliographie des éléments finis de membrane	04
1-2 Bibliographie des éléments finis de plaque	05
1-3 Bibliographie des éléments finis de coque	11

Chapitre 2

Formalisme conceptuel de la stabilité

2-1 Stabilité des plaques	15
2-1-1 Introduction	15
2-1-2 Système de forces dans une plaque rectangulaire	15
2-1-3 Equations non linéaires de stabilité	18
2-1-3-1 Relations cinématiques	18
2-1-3-2 Relations constitutives	23
2-1-3-3 Equations d'équilibre	24
2-1-4 Equations de la stabilité linéaire	28
2-1-5 Application de la méthode énergétique à l'analyse du flambement de plaque	30
2-1-6 Equations de l'élément fini des plaques minces	32
2-1-7 Analyse de la valeur propre par élément fini	37
2-2 Stabilité des coques	38
2-2-1 Introduction	38
2-2-2 Géométrie d'une coque mince	39
2-2-3 Système de forces internes dans une coque mince	41
2-2-4 Comportement structural des coques	44
2-2-5 Aperçu sur le flambement de coque	45
2-2-6 Théories de flambement des coques	47
2-2-7 Analyse de la stabilité des coques cylindriques	48
2-2-7-1 Théorie non linéaire de la stabilité	50
2-2-7-1-1 Relations cinématiques	50
2-2-7-1-2 Relations constitutives	53
2-2-7-1-3 Equations d'équilibre	54
2-2-7-2 Théorie de la stabilité linéaire	58
2-2-7-3 Analyse de la stabilité des coques par élément fini	61

Chapitre 3

Méthodologies Numériques

3-1 Définition des paramètres à l'étude	66
3-1-1 Dimensions géométriques	66
3-1-2 Types de chargement	68
3-2 Outils numériques	70
3-2-1 Techniques de calculs éléments finis	70
3-2-2 Code ABAQUS	71

Chapitre 4

Expérimentations numériques

4-1 Plaques	83
4-1-1 Compression uniaxiale	83
4-1-1-1 Deux côtés simplement appuyés	83
4-1-1-2 Un côté simplement appuyé l'autre libre	102
4-1-1-3 Deux côtés encastres	113
4-1-1-4 Un côté encastres l'autre libre	120
4-1-2 Compression biaxiale	129
4-1-3 Cisaillement	136
4-1-3-1 Tous les côtes simplement appuyés	136
4-1-3-2 Deux côtes encastres et deux côtes simplement appuyés	149
4-1-3-3 Tous les côtes encastres	157
4-2 Coques	166
4-2-1 Compression axiale uniforme	166
4-2-1-1 Les deux extrémités simplement appuyées	166
4-2-1-2 Une extrémité encastree, l'autre simplement appuyée	169
4-2-1-3 Une extrémité encastree, l'autre libre	171
4-2-2 Compression axiale avec pression extérieure	173
4-2-2-1 Les deux extrémités simplement appuyées	173
4-2-2-2 Une extrémité encastree, l'autre simplement appuyée	175
4-2-2-3 Une extrémité encastree, l'autre libre	177
Conclusions, recommandations et perspectives	180
Bibliographie	182

Chapitre 1

Etude bibliographique

1-1 Bibliographie des éléments finis de membrane

1-2 Bibliographie des éléments finis de plaque

1-3 Bibliographie des éléments finis de coque

Etude bibliographique

1.1. Bibliographie des éléments finis des membranes

Le premier élément de membrane quadrilatéral isoparamétrique (Q4) a été développé par Taig et Kerr [61]. Cet élément de type déplacement est compatible, mais il est trop rigide surtout dans le cas de flexion dominante à cause de la mauvaise présentation de la déformation de cisaillement dans le plan de l'élément. Depuis 1965, beaucoup d'efforts ont été faits pour améliorer l'élément de Taig en utilisant des principes variationnels variés ou en utilisant des champs de déplacements incompatibles. Une contribution importante a été faite par Wilson et al [74] qui ont introduit deux modes incompatibles supérieurs pour améliorer l'élément Q4, mais cet élément ne passe les patch-tests de déformations constantes que dans le cas de maillages réguliers. Taylor et al [165] ont proposé une modification de l'élément de Wilson afin de passer les patch-tests quand le maillage est distordu. L'avantage d'éléments incompatibles mais convergents a alors été prouvé.

Le premier élément de type mixte hybride a été proposé par Pian [138]. Bergan et Hansen [38] ont présenté l'approche appelée « Individual Element Test » (IET) où les conditions de patch-tests décrites par Irons et Razzaque [102] ont été utilisées pour une formulation directe de la matrice de rigidité. Bergan et Nygard [39] ont étendu l'approche IET qui a conduit à la formulation libre (FF) (Free Formulation). Park et Stanley [136] ont décrit et évalué la formulation naturelle (ANS) (Assumed Natural Elements). Tang et al [164] ont formulé des éléments « quasi conformes ». Pian et al [139] ont présenté une nouvelle formulation d'élément de type mixte hybride. Simo et al [155] ont proposé l'élément EAS (Enhanced Assumed Strain Element) basé sur un principe variationnel généralisé. Chen et Cheung [56] ont présenté un autre principe variationnel mixte basé sur la théorie de Pian et Sumihara [139] et proposé l'élément de type hybride en contraintes où les approximations des contraintes et des déformations sont choisies telles qu'une condition d'orthogonalité soit satisfaite. Par cette approche, les éléments classiques de type hybride en contraintes sont simplifiés. Zhao et al [177] ont donné une autre formulation généralisée de l'élément Q4 et l'équivalence avec un élément de type hybride en contraintes a été prouvée sous certaines conditions. Très récemment, Zhong et Zeng [180] ont présenté un autre élément quadrilatéral appelé « Rational Element ». Dans la formulation, les champs de déplacements u, v sont décrits par une combinaison de huit solutions de base pour le problème d'élasticité plane dans un élément. L'approximation des déplacements est incompatible, mais avec des modifications cet

élément peut passer les patch-tests de contraintes constantes et une précision en contraintes et en déplacements supérieure à celle de l'élément Q4 de base peut être observée.

Maus [124] a présenté aussi trois types d'éléments quadrilatéraux où les mêmes champs de déplacements sont utilisés pour obtenir les vecteurs des forces et les vecteurs des déplacements correspondant aux variables nodales. La matrice de rigidité élémentaire est établie directement par la multiplication des vecteurs des forces et des déplacements. Une procédure assurant la symétrie de la matrice de rigidité est décrite dans l'article. Ces éléments ont une formulation un peu compliquée.

Dans l'article historique sur les éléments finis, Turner et al [170] ont décrit un élément rectangulaire incompatible où un champ de déplacements quadratiques est obtenu à partir d'un champ de contraintes linéaires à 5 paramètres. Les équations d'équilibre et l'équation de compatibilité pour le problème d'élasticité en contraintes planes sont satisfaites dans un élément qui peut ainsi être vu comme un élément hybride en contraintes à déplacements incompatibles.

Les éléments RQ4Z et RQ4B présentés par Zheng et Batoz [178] sont basés aussi sur un champ de contraintes à 5 paramètres mais ils sont généralisés au cas de l'élément quadrilatéral et des modifications sont introduites pour satisfaire les patch-tests.

Les deux éléments RQ4Z et RQ4B ne sont pas indépendants du choix des axes des coordonnées. Pour surmonter cette imperfection, deux nouveaux éléments quadrilatéraux à 5 nœuds RQ5Z et RQ5B ont été formulés et testés. Ces deux éléments sont basés sur un champ de déplacements quadratiques complets et satisfont au critère d'invariance par rapport au système de coordonnées. De meilleurs résultats que ceux obtenus avec les éléments RQ4Z et RQ4B sont toujours observés. Pour généraliser cette famille d'éléments, deux nouveaux éléments ont été établis de la même manière : un élément pentagonal à 5 nœuds et 10 degrés de liberté RP5 et un élément hexagonal à 6 nœuds et 12 degrés de liberté RH6.

1.2. Bibliographie des éléments finis de plaque

Un très grand nombre d'éléments finis de plaque en flexion a été développé. Les éléments finis de plaque peuvent se classer en trois types : éléments de type Kirchhoff, éléments de type Reissner/Mindlin, éléments de type Kirchhoff discret. A cause de l'exigence de continuité C, les éléments de plaque de type Kirchhoff sont relativement difficiles à formuler. Le premier élément de plaque triangulaire de type Kirchhoff à un déplacement w et deux rotations aux nœuds sommets a été proposé par Zienkiewicz [182]. Mais cet élément ne peut pas passer les patch-tests parce que la continuité de la rotation normale n'est pas satisfaite. Des modifications par Bergan [41] et Specht [157] ont été proposées pour surmonter cet

inconvenient. Afin d'éviter la difficulté de la continuité C , beaucoup de chercheurs ont formulé des éléments de plaque basés sur la théorie de Reissner/Mindlin où la continuité C est seulement requise pour l'approximation des déplacements et rotations [64,135]. Les éléments de plaque isoparamétriques basés sur la théorie de Reissner/Mindlin donne une mauvaise solution quand l'intégration de Gauss complète est employée. Cela est dû à la mauvaise représentation des déformations de cisaillement transversal (ce qui conduit au blocage en cisaillement transversal). Des traitements pour éviter le blocage en cisaillement transversal ont été proposés :

- Introduction des modes incompatibles supérieurs (Taylor et al. [165]).
- Intégration réduite ou sélective (Zien. [181], Pugh. [145])
- Construction de champ de déformation de cisaillement de substitution (Hinton et Huang [93], Donea et Lamain [71], Bathe et Dvorkin [12]).

Les éléments de plaque de type Kirchhoff discret ont été formulés par Dhatt [66], Stricklin et al. [158], Wempner et al. [171], Fried et Yang [82] et Batoz et al. [20] depuis 1968. L'énergie de cisaillement transversal est ignorée et l'hypothèse de Kirchhoff est introduite de façon discrète (en certains points, sur les côtés d'un élément ou sur l'aire d'un élément). Beaucoup d'autres auteurs ont également apporté leurs contributions à ce type d'éléments tels Bathe et al. [12,15], Garnet et Pifko [85], Gallagher et al. [84], Carpenter et al. [50] et Talbot et Dhatt [162]. Un grand nombre d'éléments de plaque triangulaires à 9 degrés de liberté (ddl) a été formulé tels DKT (Discrete Kirchhoff Triangle), HSM (Hybrid Stress Model), HCT (Hsieh-Clough-Toucher), SRI (Mindlin Selective Reduced Integration) [Batoz et al. 20], les éléments proposés par Wu [175], et par Bergan et al. [39] et Felippa et al. [77] où la formulation libre FF (Free Formulation) s'emploie, l'élément MIN3 par Tessler et Hughes [167], l'élément A-9 par Razzaque [146] et Fricker [81], les éléments TRUNC et TRUMP par Argyris et al. [6] basés sur l'approche naturelle, l'élément TRIA3 par Mac Neal [120] et l'élément DST par Batoz et Lardeur [25]. L'élément TLLL [127] (dit aussi « Morley Triangle ») à 6 ddl est établi en utilisant la théorie de Kirchhoff et un champ de déplacement quadratique. Cet élément est incompatible mais convergent. Il peut être vu comme l'élément de plaque triangulaire le plus simple. La matrice de rigidité élémentaire de l'élément TLLL est identique à celle de l'élément HSM et de l'élément DKT6 (voir Batoz et Dhatt [16]). Un nombre également important d'éléments de plaque quadrilatéraux à 12 ddl a été présenté. L'élément de type

Kirchhoff discret DKQ est formulé par Batoz et Ben Tahar [21]. L'élément de type hybride en contraintes HSQK1 (Hybrid Stress Quadrilateral) est formulé par Sze et Choww [160].

Des éléments basés sur la théorie de Reissner/Mindlin sont présentés par Bathe et Dvorkin [12], par Pugh, Hinton et Zienkiewicz [145], par Mac Neal [120], par Saleeb et Chang [151], par Donea et Lamain [71], par Prathap et al. [143] et par Ibrahimbegovic [99]. La plupart des éléments triangulaires de plaque de type Kirchhoff Discret (DK) est présenté dans le tableau 2.1. La vitesse de convergence a été étudiée théoriquement dans [42]. Des auteurs ont proposé des modifications pour améliorer l'élément DKT9 au prix d'une plus grande complexité de la formulation ou par l'introduction de coefficients ajustables [22,105,106,107]. Un autre élément à 9ddl est formulé dans [26] en utilisant des modes orthogonaux incompatibles. En 1986 Dhatt et al. [67,68] ont développé l'élément DKTP ayant 12 ddl (w aux nœuds milieux et w, θ, θ aux nœuds sommets). D'autres éléments avec les nœuds appelés Loof ont été proposés par Irons [103], par Meek et Tan [125] et par Poulsen et Damkilde [142]. La plupart des éléments quadrilatéraux de plaque de type DK est présenté dans le tableau 2.2. Le plus populaire est certainement l'élément à 12 ddl (4 nœuds, 3 ddl par nœud) DKQ12 présenté en 1981 par Batoz et Ben Tahar [21] qui ont généralisé un élément rectangulaire appelé QC proposé par Dhatt en 1971 [69]. Des auteurs tels que Lyons [118], Crisfield [59,60] ont aussi développé des éléments quadrilatéraux de type DK à 12 ddl. Comme pour l'élément triangulaire DKT9 des auteurs ont proposé des améliorations [56,108]. L'élément DKQP à 16 ddl (w aux nœuds milieux) a été formulé en 1986 par Dhatt et al. [68]. Une version de plaque de « Semiloof shell element » de Irons [103] peut aussi être définie. Il a un déplacement w aux nœuds sommets et aux nœuds milieux et deux rotations tangentielles sur chaque côté. L'élément de plaque quadrilatéral de type DKT6 (ou Morley) semble ne pas avoir été formulé sauf la version de plaque de l'élément de coque SLICK [103]. Un élément de plaque quadrilatéral DK8 a été développé par Batoz et Zheng [31]. Cet élément est à 8 nœuds et à 8 degrés de liberté (ddl) et du même type que l'élément triangulaire de Morley. Deux autres éléments de plaque pentagonal DKP10 et hexagonal DKH12 ont été ensuite développés en généralisant la formulation de l'élément quadrilatéral DKQ8.

Nous devons indiquer que la plupart des éléments de plaque de type DK sont des cas particuliers d'éléments plus généraux basés sur des formulations mixtes ou sur des formulations avec déformations de substitution en tenant compte du cisaillement transverse (utilisant la théorie de plaque Reissner/Mindlin). Si l'effet de cisaillement transverse est négligé les éléments appelés DST-BL dans [25], DKMT dans [111], DMT dans [1], DRM

dans [134,182], TLQL dans [132,133] dégénèrent tous vers l'élément DKT9 [9]. Les éléments appelés DMQ dans [1], DKQT dans [110], QLQL dans [133,134] dégénèrent tous vers l'élément DKQ12 [21]. L'élément TLLL [132,134] conduit à l'élément DKT6 [30].

L'estimation d'erreur et l'adaptativité des maillages ont été proposés par :

- Onate et Castro [133] utilisant l'élément TLQL (DKT avec l'effet de cisaillement)
- Boudi et Beckers et Zhong [48] utilisant l'élément DKQ
- Hinton et al. [93] utilisant l'élément de coque à facettes planes DKT12 (ou de Morley)

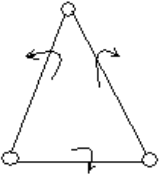
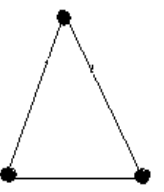
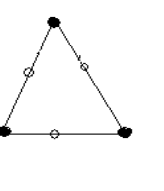
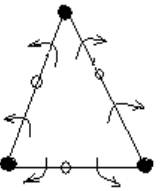
Géométrie	Variables	Nom	Auteurs (année)	Observation
 <p>6 d d l</p>	W_0 θ_s	DKT6	Batoz (1991 ,1992)	β_x, β_y demi C^0 (équivalent à Morley et à HSM6)
 <p>9 d d l</p>	w, θ_x, θ_y	DKT9	Stricklin et al (1969) Dhatt et al(1969) Batoz et al (1981)	β_s quadratique , β_n linéaire
		IDKT	Jeyo-chandraboze kirkhope (1985,1986)	Fonction bulle+ dérivées lissées
		DKT-BK	Batoz-katili (1991)	β_x et β_y linéaire+3 modes orthogonaux incompatibles
		RDKT	Chen wanji/Cheung (1982)	Matrice de déformation constante améliorée+ paramètre ajustable
 <p>12 d d l</p>	w, θ_x, θ_y W_0	DKTP	Dhatt et al (1986)	β_s cubique , β_n linéaire
 <p>12 d d l</p>	W_0 θ_s	Semi lof DKL DKTL	Irons (1976) Meek/Tan (1985) Poulsen/damilde (1996)	

Tableau 2-1 : Eléments triangulaires de plaque de type Kirchhoff Discret

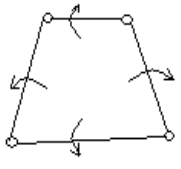
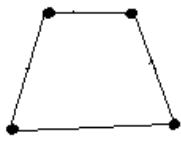
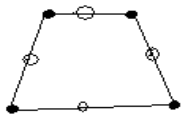
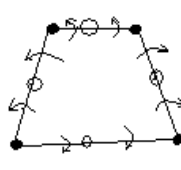
Géométrie	Variables	Nom	Auteurs (année)	Observation
 8ddl	W_o θ_s	SLICK	Nagtegaal/Slater (1981)	Rotation incompatibles
		DK8	Batoz et al (1998)	Rotation incompatibles +formulation libre
 12ddl	$\bullet W, \theta_x, \theta_y$	Isoflex	Lyons (1977)	W, β_x, β_y quadratique+ 15 contraintes
		DKQ	Batoz/Ben Tahar (1982)	β_s quadratique, β_n linéaire
		—	Crisfield (1983)	W quadratique (serndip/ β_s quadratique
		IDKQ	Jeyachandrabose et al (1987)	β_n linéaire+ fonction bulle+ dérivées lissées
		RDKQ	Chen Wanji/ Cheung (1997)	
 16ddl	$\bullet W, \theta_x, \theta_y$ W_o	DKQP	Dhatt et al (1986)	β_s cubique β_n linéaire
 16dll	W_o θ_s	Semiloof	Irom (1971) Rozzaque (1981)	

Tableau 2-2 : Eléments quadrilatéraux de plaque de type Kirchhoff Discret

1.3. Bibliographie des éléments finis des plaques/coques

La formulation des éléments finis de plaque/coque est un sujet très important et relativement difficile. Un très grand nombre d'articles sur les éléments finis de plaque/coque a été publié [16]. Les éléments finis de coque se classent en trois types : éléments courbes géométriquement surbaissés ou non (approche curviligne), éléments isoparamétriques dégénérés (approche 3D dégénérée) et éléments plats (approche par facettes planes). Les éléments basés sur les théories de coque classique peuvent donner une meilleure approximation de la forme réelle des coques et présenter le couplage de membrane-flexion dans un élément. Mais des difficultés importantes doivent être surmontées pour la représentation correcte des mouvements de corps rigide et éviter les problèmes de blocage en membrane et en cisaillement transverse au moins pour les champs de déplacements et rotations de bas degré. Ce type d'éléments et leurs applications en milieu industriel sont assez limitées en comparaison avec les éléments en description cartésienne des déplacements.

L'approche tridimensionnelle dégénérée (Approche Cartésienne) a été proposée par Ahmad, Irons et Zienkiewicz [2]. Elle permet de discrétiser directement les équations tridimensionnelles de la mécanique des solides, en introduisant généralement les mêmes hypothèses que celles utilisées dans la théorie classique de coque de type Reissner/Mindlin (les normales à la surface moyenne restent droites et on tient compte de l'hypothèse des contraintes planes). Un très grand nombre d'articles et documents a été publié sur les éléments de coque dits isoparamétriques ou tridimensionnels dégénérés.

Différentes techniques telles que l'intégration sélective ou réduite, la substitution des déformations de membrane et de cisaillement transverse, les modèles mixtes ont été proposés pour éviter le blocage en membrane et en cisaillement [110].

La première analyse des coques par éléments finis a été réalisée par un assemblage d'éléments de coque à facettes planes. La matrice de rigidité est obtenue par combinaison d'éléments de membrane et de plaque au niveau élémentaire. Le couplage membrane-flexion est mis en évidence après transformation des variables nodales locales dans le repère global. La convergence de ce type d'éléments a été analysée dans [43,76,106,153,183].

Géométrie	Variables	Nom	Auteurs (année)	Observation
-----------	-----------	-----	-----------------	-------------

Compte tenu de la simplicité de la formulation, l'efficacité de calcul et la flexibilité pour les applications (coques et plaques plissées), les éléments de coque à facettes planes sont très utilisés en pratique.

De nombreux éléments de coque à facettes planes ont été présentés tels que l'élément T12 [63,183], l'élément DKT 18 [12], DKT 27 [67], DKT27C [67], HCT18 [58], HSM18 [58] et TRUNC [6]. Différents auteurs ont fait une revue des éléments plats (voir [16, 51, 96, 98, 128, 130, 171, 176]). Dans le tableau 3.1 nous présentons des éléments triangulaires plats de la famille Kirchhoff Discret. L'élément de coque le plus simple, ici appelé DKT12 [16] résulte de la superposition de l'élément de membrane CST avec l'élément de flexion DKT6. Cet élément à déformations constantes de membrane et de flexion est équivalent à l'élément de coque de Morley [127]. L'élément DKT18 est la superposition de l'élément CST avec l'élément de plaque DKT9. Six degrés de liberté par nœud sommet sont définis et de petites rigidités associées aux rotations autour de la normale à chaque facette sont nécessaires pour éviter la singularité de la matrice de rigidité globale dans certaines situations (voir [15,16]). Un élément de membrane triangulaire avec degrés de liberté de rotation peut aussi être employé pour améliorer le comportement de membrane dans certaines situations mais au risque d'introduire un blocage en membrane [16,50]. Un élément triangulaire performant est obtenu par la superposition de l'élément de membrane LST avec l'élément DKTP. L'élément DLTP ou DLT [67, 68, 75, 162] à six ddl aux nœuds sommets et trois aux nœuds milieux. Un autre élément à 24 ddl a été formulé dans [142]. Il est dans la catégorie des éléments de type semi-Loof (seuls 3 déplacements aux nœuds sommets et aux nœuds milieux et 2 rotations autour de chaque côté).

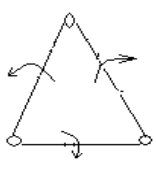
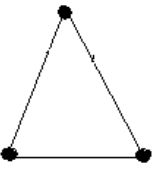
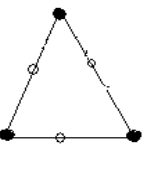
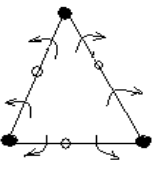
 <p>12 d d l</p>	$\circ u, v, w$ θ_s	DKT12	Batoz(1991,1992)	DKT6+CST
 <p>18 d d l</p>	$\bullet u, v, w$ $\theta_x, \theta_y, \theta_z$	DKT18	Batoz/Dhatt(1972) Bathe et al(1981)	DKT9+CST
		DRL18	Carpenter et al (1985)	DKT9+Allman : Membrane avec rotation autour de la normale
 <p>27 d d l</p>	$\circ u, v, w$ $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ $\bullet u, v, w$	DLTP	Dhatt et al (1986) Fafard et al(1989)	DKTP+LST+ petite rigidité (autour de θ_z)
		DLT	Talbot/Dhatt(1987)	Idem
 <p>24 d d l</p>	$\circ u, v, w$ θ_s		Poulsen/Damkilde (1996)	

Tableau 3-1 : Eléments triangulaires de coques par facette plane de type Kirchhoff Discret

Chapitre 2

Formalisme conceptuel de la stabilité

- 2-1 Stabilité des plaques
 - 2-1-1 Introduction
 - 2-1-2 Système de forces dans une plaque rectangulaire
 - 2-1-3 Equations non linéaires de stabilité
 - 2-1-3-1 Relations cinématiques
 - 2-1-3-2 Relations constitutives
 - 2-1-3-3 Equations d'équilibre
 - 2-1-4 Equations de la stabilité linéaire
 - 2-1-5 Application de la méthode énergétique à l'analyse du flambement de plaque
 - 2-1-6 Equations de l'élément fini des plaques minces
 - 2-1-7 Analyse de la valeur propre par élément fini
- 2-2 Stabilité des coques
 - 2-2-1 Introduction
 - 2-2-2 Géométrie d'une coque mince
 - 2-2-3 Système de forces internes dans une coque mince
 - 2-2-4 Comportement structural des coques
 - 2-2-5 Aperçu sur le flambement de coque
 - 2-2-6 Théories de flambement des coques
 - 2-2-7 Analyse de la stabilité des coques cylindriques
 - 2-2-7-1 Théorie non linéaire de la stabilité
 - 2-2-7-1-1 Relations cinématiques
 - 2-2-7-1-2 Relations constitutives
 - 2-2-7-1-3 Equations d'équilibre
 - 2-2-7-2 Théorie de la stabilité linéaire
 - 2-2-7-3 Analyse de la stabilité des coques par élément fini

Formalisme conceptuel de la stabilité

2-1 Stabilité des plaques rectangulaires

2-1-1 Introduction :

Une plaque mince est par définition un élément fléchi à 2 dimensions dont l'épaisseur est très petite par rapport aux deux autres dimensions. Un plan passant au milieu de l'épaisseur de la plaque est appelé plan moyen.

Les éléments de plaque mince sont utilisés dans différentes structures : ils peuvent être un élément d'une structure complexe ou peuvent eux-mêmes constituer la partie majeure d'une structure. Des exemples d'éléments de plaque sont les murs de conteneurs, de silos et de planchers réservoirs, les âmes de poutres, les planches plats, les éléments plats de voitures et d'avions et les palplanches. Les éléments de plaques peuvent être homogènes et isotropes ou peuvent être raidis et /ou ont une construction composite.

Dépendant du mode d'application, une plaque peut être soumise à de différentes forces aussi bien latérales que dans le plan. Sous certaines conditions, un chargement appliqué dans le plan peut engendrer le flambement ; le flambement des plaques peut être global dans certains cas telles que les plaques laminées composées ou peut avoir une nature localisée ; « delamination buckling » des plaques composées est un exemple de flambement local.

Pour les plaques minces, le flambement est un phénomène qui peut influencer sur la capacité portante des éléments de plaque ; ainsi donc il doit être pris en considération lors de l'étude de plaque.

2-1-2 Système de forces dans une plaque rectangulaire

Nous considérons une plaque rectangulaire orthogonale avec a et b comme côtés et épaisseur h . Nous sélectionnons un système de coordonnées cartésiennes x, y, z . Les axes x et y sont placés dans le plan moyen de plaque et orientés le long des bords de la plaque. L'axe z est choisi perpendiculaire au plan moyen de la plaque c'est-à-dire normal au plan x, y .

Le figure 1-a montre une plaque sous un chargement de latéral dans le plan (normal et cisaillement). Les figures 1b et 1c montrent, en combinaison, les résultantes des forces intérieures dans un élément de cette plaque dans sa configuration déformée, nous avons à considérer l'état déformé de la plaque puisque la théorie de stabilité suppose l'existence d'un état d'équilibre non plat, le système résultant de forces dans une plaque consiste en :

-Des forces normales dans le plan et des forces de cisaillement : N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}

-Des moments de flexion : M_x, M_y

-Des couples de torsion : M_{xy}, M_{yx}

-Les forces de cisaillement transversales (ou hors plan) : Q_x, Q_y

Toutes ces quantités sont mesurées par unité de largeur de la plaque ainsi les forces intérieures ont des unités de forces par unité de largeur ; les moments intérieurs ont des unités de moment par unité de largeur.

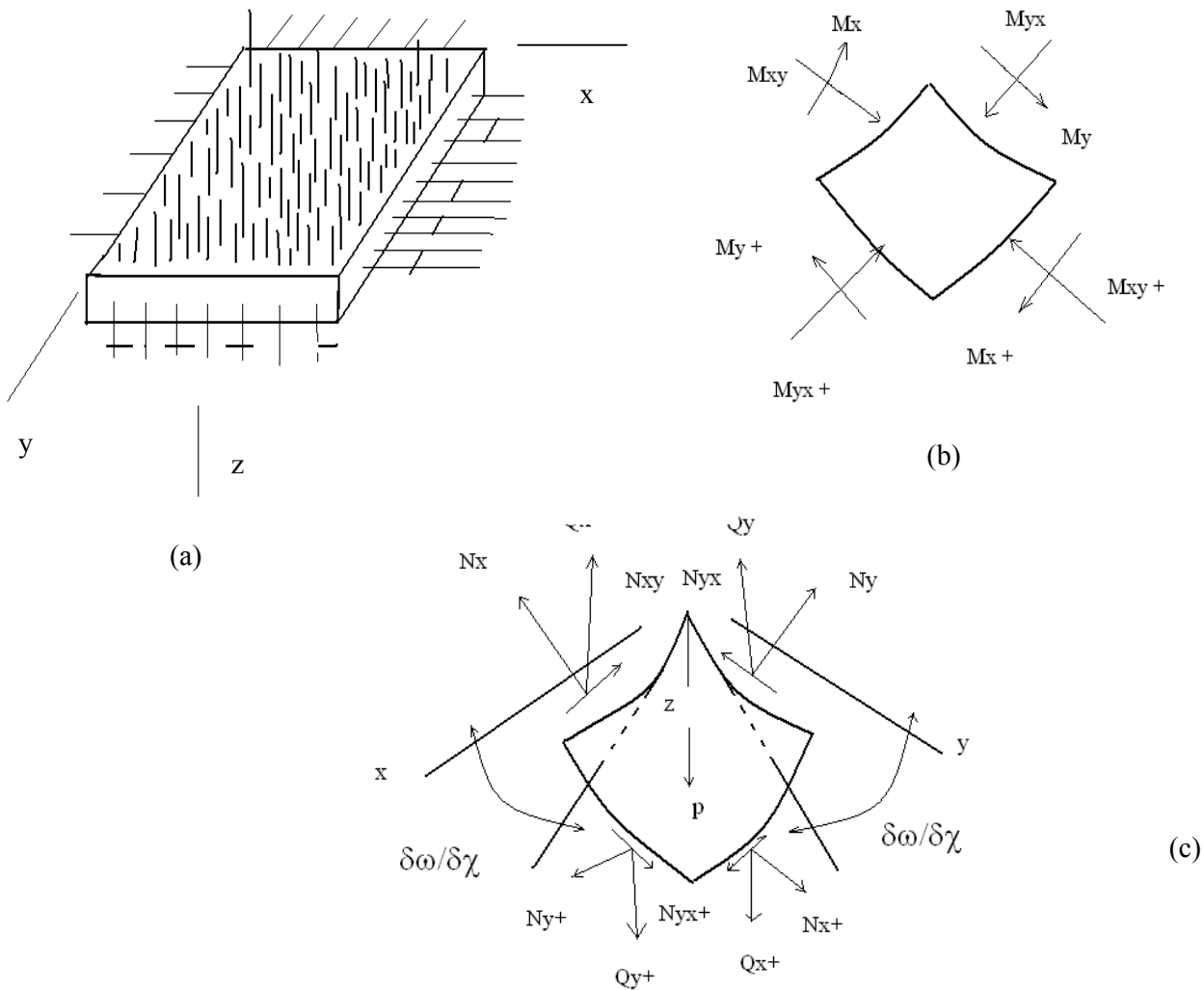


Figure 1 : (a) une plaque rectangulaire , (b) et (c) résultantes des forces internes dans la plaque

Le système de forces internes, défini ici, est la résultante du champ de contraintes dans cette plaque. La figure 2 montre un élément de la plaque; sur cet élément, les contraintes internes non nulles sont montrées. D'autres composantes de contraintes, qui ne sont pas montrées sur cette figure, sont négligées dans la théorie classique des plaques et son extension à la théorie de la stabilité des plaques. Les contraintes internes, d'une part, et leurs forces résultantes correspondantes, d'une autre part, ont une relation les unes aux autres ; l'application de l'équivalence statique engendre les relations désirées.

En conséquence, en utilisant l'équivalence statique et en se referant à la figure2, nous obtenons.

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x dz & N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_y dz \\
 N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{xy} dz & N_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{yx} dz \\
 Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{xz} dz & Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{yz} dz \\
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{xz} z dz & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{yz} z dz \\
 M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{xy} z dz & M_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{yx} z dz
 \end{aligned} \tag{2-1}$$

Dû à la condition de l'équilibre rotationnel d'un élément infinitésimal, nous devons avoir $\bar{\sigma}_{xy} = \bar{\sigma}_{yx}$.

Ainsi à partir des relation (2-1) il on résulte que $N_{xy} = N_{yx}$ et $M_{xy} = M_{yx}$. Dans le cas général, les contraintes et leurs contraintes résultantes sont fonctions des variables x et y des coordonnées dans le plan.

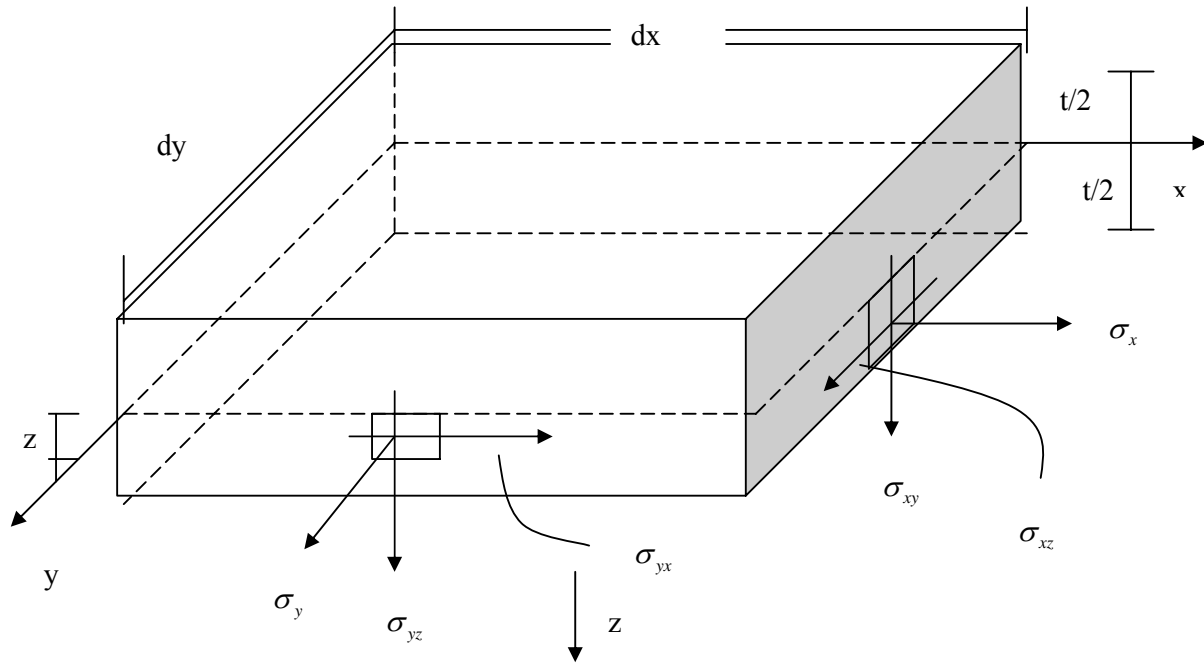


Figure 2 : contraintes sur un élément infinitésimal de la plaque

2-1-3 Equations non linéaires de stabilité

Ces équations peuvent être utilisées dans l'analyse des déformations relativement larges des plaques sous un chargement latéral et également pour l'analyse non linéaire de la stabilité des plaques sous un chargement dans le plan. La version linéarisée de ces équations sera utilisée pour l'analyse linéaire de la stabilité des plaques.

2-1-3-1 Relations cinématiques

Le champ de déplacement en n'importe quel point d'une plaque mince, situé à une distance x et y de l'origine du plan x, y et à une distance z du plan moyen de la plaque, a trois composantes le long des directions x, y et z et sont notées $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, respectivement.

En utilisant les hypothèses de Kirchhoff une relation peut être engendrée entre la partie flexionnelle des composantes du déplacement en plan (u^*, v^*), dans une couche située à une distance z du plan moyen, et la pente de la déformation latérale. La figure 3 montre l'effet de la flexion de la plaque sur de tels déplacements en plan.

Le déplacement total en plan d'un point situé à une distance z du plan moyen est la somme de l'allongement/raccourcissement et le déplacement en plan du à la flexion.

En utilisant les hypothèses de Kirchhoff et se référant la figure 3 nous pouvons exprimer les composantes du déplacement en un point arbitraire à une distance z du plan moyen en termes de composantes de déplacement du point correspondant situé sur le plan moyen (u, v, w) et les composantes du déplacement en plan du à la flexion comme suit :

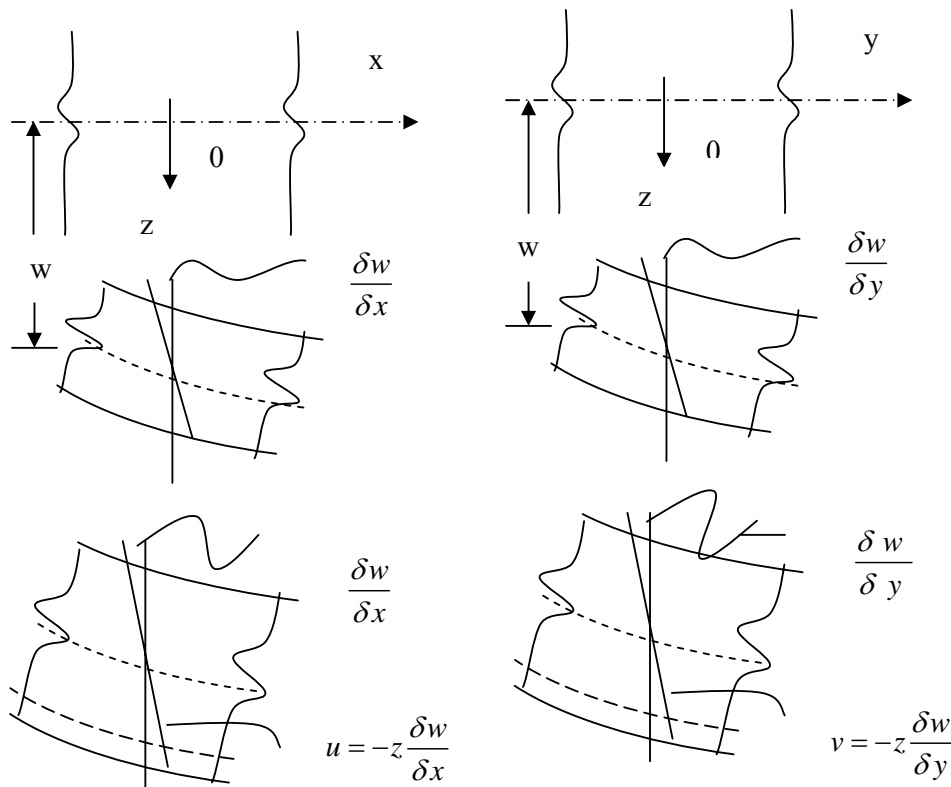


Figure 3 : Sections de la plaque déformée montrant les rotations et les déplacements dans
Les directions x et y

En se referant à la figure 3 nous pourrons exprimer les composantes du déplacement d'un point arbitraire en termes de déplacement latéral du plan moyen comme :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u + z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ \bar{v} &= v + z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ \bar{w} &= w \end{aligned} \quad (2-2)$$

Les composantes du déplacement d'un point arbitraire de la plaque sont liées aux composantes de déformation par une série de relations non linéaires. Ces relations sont :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\delta \bar{u}}{\delta x} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta^2 \bar{u}}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \bar{v}}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \bar{w}}{\delta x^2} \right\} \\ \varepsilon_y &= \frac{\delta \bar{v}}{\delta y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2 \bar{u}}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \bar{v}}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \bar{w}}{\delta y^2} \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\delta \bar{u}}{\delta y} + \frac{\delta \bar{v}}{\delta x} + \left(\frac{\delta \bar{u}}{\delta x} \cdot \frac{\delta \bar{u}}{\delta y} + \frac{\delta \bar{v}}{\delta x} \cdot \frac{\delta \bar{u}}{\delta y} + \frac{\delta \bar{w}}{\delta x} \cdot \frac{\delta \bar{w}}{\delta y} \right)\end{aligned}\quad (2-3)$$

A cause de l'importance du déplacement latéral et ses gradients, c'est -a dire les rotations de la section, dans l'analyse de la stabilité, nous supposons que les carrés des gradients des composantes du déplacement en plan (u et v) peuvent être négligés comparativement avec la première puissance de leurs gradients et le gradient de w. Cette supposition est particulièrement justifiée dans le domaine où l'accent est mis sur les effets du second degré découlant de la déformation latérale de la plaque. Avec cette supposition les relations (2-3) se simplifient et deviennent :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \frac{\delta \bar{u}}{\delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \bar{w}}{\delta x} \right)^2 \\ \bar{\varepsilon}_y &= \frac{\delta \bar{v}}{\delta y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \bar{w}}{\delta y} \right)^2 \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \frac{\delta \bar{u}}{\delta y} + \frac{\delta \bar{v}}{\delta x} + \frac{\delta \bar{w}}{\delta x} \cdot \frac{\delta \bar{w}}{\delta y}\end{aligned}\quad (2-4)$$

Et les relations (2-4) se réécrivent :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x + z\rho_x \\ \bar{\varepsilon}_y &= \varepsilon_y + z\rho_y \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \gamma_{xy} + 2z\rho_{xy}\end{aligned}\quad (2-5)$$

où

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{1}{2} \beta_x^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{1}{2} \beta_y^2\end{aligned}\quad (2-6)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \right) + \beta_x \cdot \beta_y$$

et

$$\begin{aligned} \beta_x &= -\frac{\delta w}{\delta x} \\ \beta_y &= -\frac{\delta w}{\delta y} \\ \rho_x &= \frac{\delta \beta_x}{\delta x} \\ \rho_y &= \frac{\delta \beta_y}{\delta y} \\ \rho_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \beta_x}{\delta y} + \frac{\delta \beta_y}{\delta x} \right) \end{aligned} \tag{2-7}$$

En combinant les relations (2-7), nous obtenons

$$\begin{aligned} \rho_x &= -\frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta w}{\delta x} \right) \\ \rho_y &= -\frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta w}{\delta y} \right) \\ \rho_{xy} &= -\frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta w}{\delta y} \right) \end{aligned} \tag{2-8}$$

La figure 4 présente une démonstration graphique des rotations de la section et les changements dans ces rotations ; le dernier étant les changements dans la courbure. Le changement dans la courbure et la torsion relative de la section peuvent être interprétés au moyen de la figure 4.

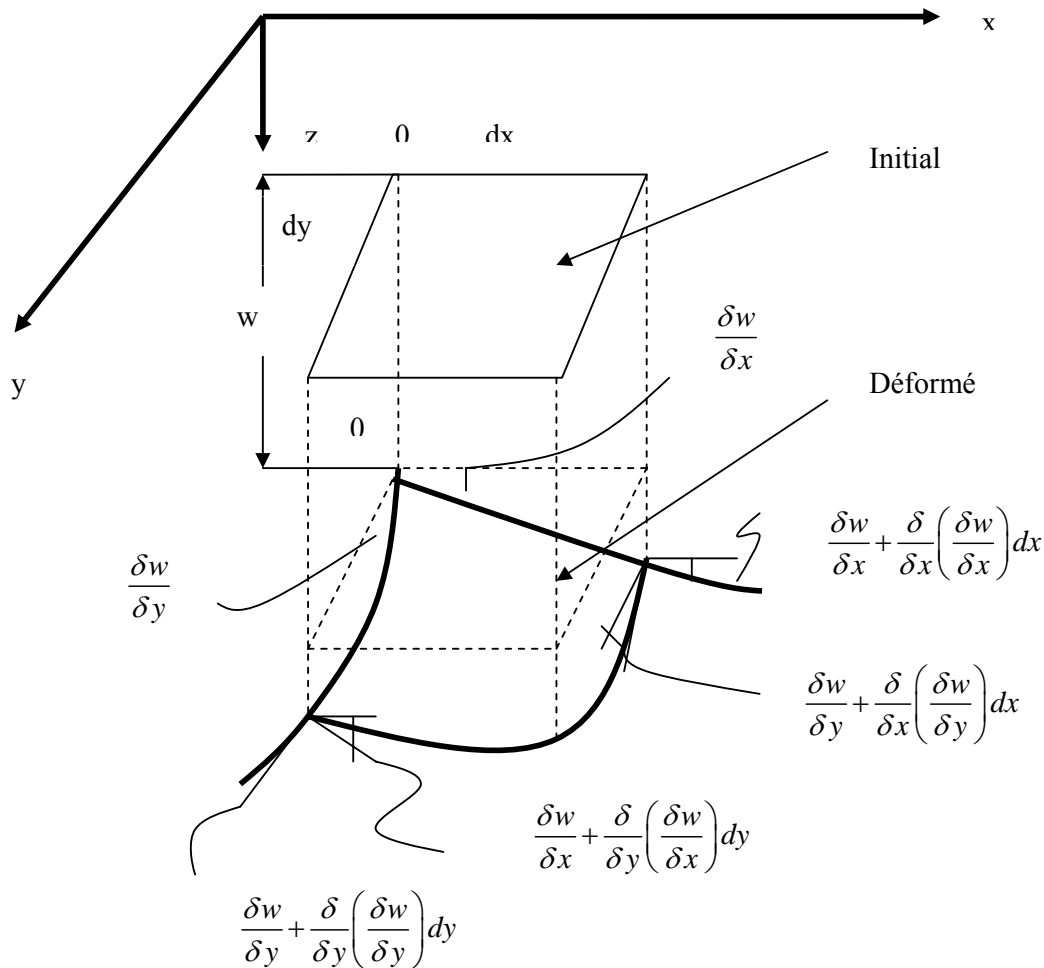


Figure 4 : un élément de plaque non déformé et déformé montrant les rotations et la torsion relative des faces de l'élément

En se référant à la figure 4 et d'un point de vue physique, les différents symboles qui ont été introduits dans les relations (2-4) à (2-6) ont l'interprétation suivante :

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$: composantes de déformation des points situés sur le plan moyen

β_x et β_y : rotation de la section de la surface déformée du plan moyen autour des axes x et y respectivement

ρ_x et ρ_y : courbure de la plaque déformée, ils représentent les changements de la pente de la déformation latérale dans les direction x et y respectivement

ρ_{xy} : torsion de la section relative à une section parallèle infinitésimalement adjacente.

2-1-3-2 Relations constitutives

Nous assumons que la matériau de la plaque est isotrope et linéairement élastique de manière à ce que les relations contrainte-déformation linéaires peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \frac{1}{E} \left[\bar{\sigma}_x - \nu(\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z) \right] \\ \bar{\varepsilon}_y &= \frac{1}{E} \left[\bar{\sigma}_y - \nu(\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_x) \right] \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \bar{\sigma}_{xy}\end{aligned}\quad (2-9)$$

Ces relations peuvent être également écrites en termes de contraintes. Avec la supposition précédente que la contrainte normale transversale σ_{zz} est très petite et négligeable, les relations contrainte- déformation s'écriront :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{(1-\nu)^2} \cdot \gamma_{xy}\end{aligned}\quad (2-10)$$

Si ces relations dites de contrainte plane généralisée sont substituées dans les relations (2-1) et avec l'utilisation de (2-5), nous obtenons :

$$\begin{aligned}N_x &= C(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ N_y &= C(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ N_{xy} &= C \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \gamma_{xy}\end{aligned}\quad (2-11)$$

et

$$\begin{aligned}M_x &= D(\rho_x + \nu \rho_y) \\ M_y &= D(\rho_y + \nu \rho_x) \\ M_{xy} &= D(1-\nu) \rho_{xy}\end{aligned}\quad (2-12)$$

Au moyen de (2-6), ces relations peuvent être exprimées comme :

$$M_x = -D \left[\frac{\delta}{\delta x} \cdot \left(\frac{\delta w}{\delta x} \right) + \nu \cdot \left(\frac{\delta}{\delta y} \cdot \frac{\delta w}{\delta y} \right) \right] \quad (2-13-a)$$

$$M_y = -D \left[\frac{\delta}{\delta y} \cdot \left(\frac{\delta w}{\delta y} \right) + \nu \cdot \left(\frac{\delta}{\delta x} \frac{\delta w}{\delta x} \right) \right] \quad (2-13-b)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \cdot \frac{\delta}{\delta x} \cdot \left(\frac{\delta w}{\delta y} \right) \quad (2-13-c)$$

ou :

$$C = E \frac{h}{1-\nu^2} \quad \text{: rigidité membranaire}$$

$$D = E \frac{h^3}{12(1-\nu)} \quad \text{: rigidité flexionnelle} \quad (2-14)$$

2-1-3-3 Equations d'équilibre :

Pour un élément typique de plaque il existe six équations d'équilibre qui consistent en trois équations de force et trois équations de moment. Pour les analyses non linéaires et de stabilité, les équations d'équilibre pour l'état déformé doivent être écrites.

La figure 5 montre un élément déformé avec les forces internes normales en plan et les forces de cisaillement.

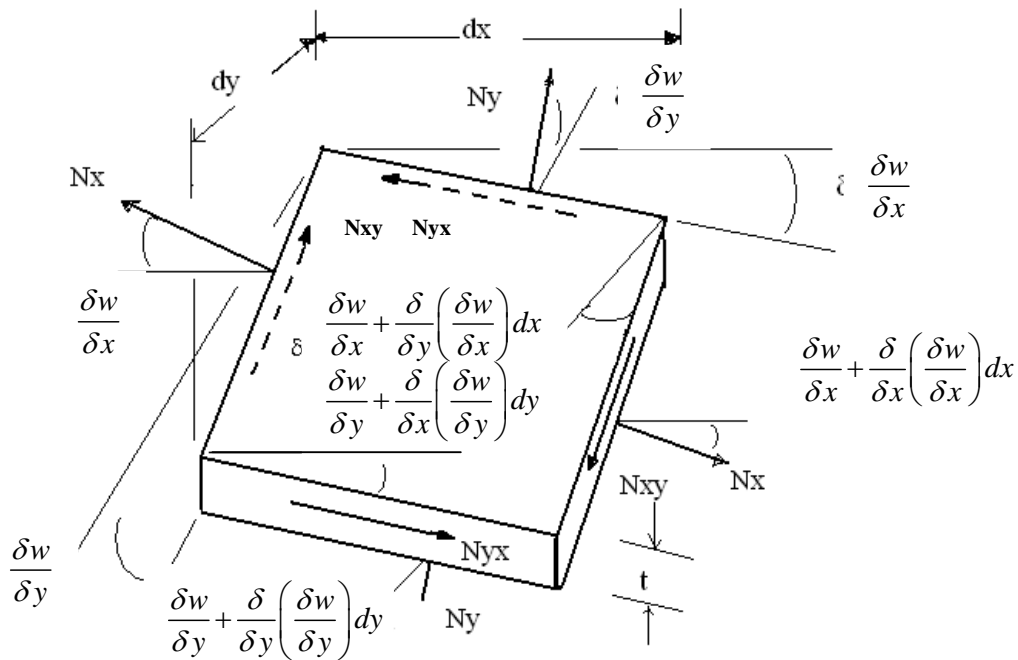


Figure 5 : élément de plaque déformé avec les forces en plan et les rotations des sections

La figure 6 montre les sections de cet élément déformé dans les directions x et y, cette figure met en relief l'effet de la déformation sur le changement dans la direction des forces internes d'une section à une section adjacente.

Le chargement appliqué peut, en général, consister en un changement distribué latéral $p(x,y)$ un chargement concentré latéral et un chargement en plan

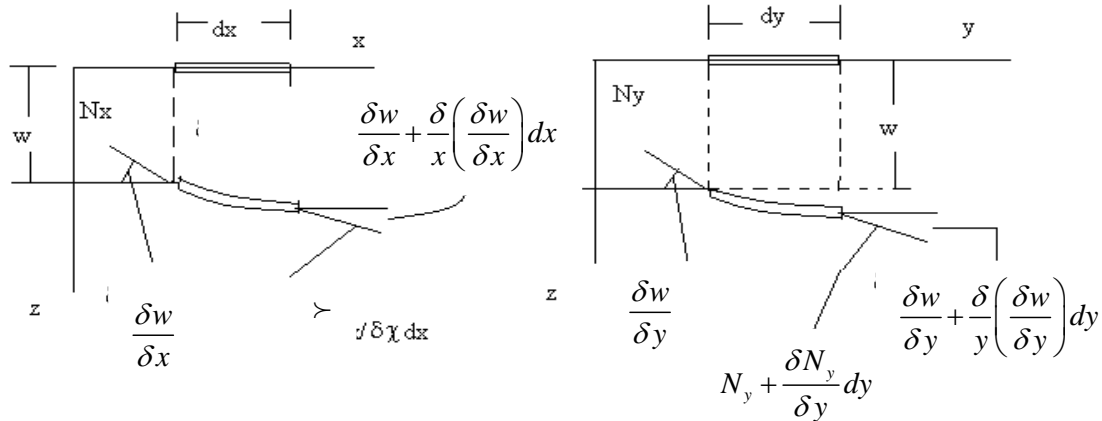


Figure 6 : Section de l'élément plaque dans les directions x et y

En utilisant les diagrammes des forces des figure 5 et 6, nous pouvons écrire l'équilibre des forces dans les directions x, y et z. Une fois réalisé et après un certain réarrangement des termes, nous obtenons ce qui suit :

Equilibre des forces dans la direction x

$$\frac{\delta N_x}{\delta x} + \frac{\delta N_{yx}}{\delta y} = 0 \quad (2-15)$$

Equilibre des forces dans la direction y

$$\frac{\delta N_y}{\delta y} + \frac{\delta N_{yx}}{\delta x} = 0 \quad (2-16)$$

Equilibre des forces dans la direction z

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{\delta N_x}{\delta x} + \frac{\delta N_{yx}}{\delta y}\right)\beta_x - \left(\frac{\delta N_{yx}}{\delta x} + \frac{\delta N_y}{\delta y}\right)\beta_y - N_x \frac{\delta\beta_x}{\delta x} \\
 & -\frac{\delta N_{xy}}{\delta y} \cdot \frac{\delta\beta_y}{\delta x} - \frac{\delta N_{yx}}{\delta y} \cdot \frac{\delta\beta_x}{\delta y} - \frac{\delta N_y}{\delta y} \cdot \frac{\delta\beta_y}{\delta y} + \frac{\delta Q_x}{\delta x} + \frac{\delta Q_y}{\delta y} = -p
 \end{aligned} \tag{2-17}$$

Les équations d'équilibre des moments peuvent être écrites commodément .Selon l'équation (2-13c) $M_{xy} = M_{yx}$, nous notons que l'équilibre des moments par rapport à l'axe z est identiquement satisfait. Les 2 équations restantes des moments sont :

Equation d'équilibre des moments par rapport à l'axe x

$$-\frac{\delta M_{xy}}{\delta x} - \frac{\delta M_y}{\delta y} + Q_y = 0 \tag{2-18}$$

Equation d'équilibre des moments par rapport à l'axe y

$$\frac{\delta M_{yx}}{\delta y} - \frac{\delta M_x}{\delta x} - Q_x = 0 \tag{2-19}$$

Les relations (2-18) et (2-19) peuvent être réécrites comme :

$$Q_x = \frac{\delta M_x}{\delta x} + \frac{\delta M_{xy}}{\delta x} \tag{2-20}$$

$$Q_y = \frac{\delta M_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta M_y}{\delta y} \tag{2-21}$$

En combinant les équations (2-17), (2-20) et (2-21) et en utilisant les équations d'équilibre en plan (2-15) et (2-16) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + 2 \frac{\delta^2 M_{xy}}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} - N_x \frac{\delta\beta_x}{\delta x} \\
 & -N_{xy} \left(\frac{\delta\beta_y}{\delta x} + \frac{\delta\beta_x}{\delta y} \right) - N_y \frac{\delta\beta_y}{\delta y} = -p
 \end{aligned} \tag{2-22}$$

Si nous substituons les relations cinétiques constitutives (2-11) dans les équations combinées d'équilibre (2-22), nous obtenons :

$$-\left(N_x \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta w^2} + 2N_{xy} \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} + N_y \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right) = P \tag{2-23}$$

$$\nabla^4 w = \frac{\delta^4 w}{\delta x^4} + \frac{2\delta^4 w}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 w}{\delta y^4} \tag{2-24}$$

Pour additionner les résultats par l'intermédiaire des manipulations précédentes, nous avons obtenu les équations non linéaires gouvernantes suivantes pour les plaques minces élastiques :

$$\frac{\delta N_x}{\delta x} + \frac{\delta N_{yx}}{\delta y} = 0 \quad (2-25-a)$$

$$\frac{\delta N_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta N_y}{\delta y} = 0 \quad (2-25-b)$$

$$D\nabla^4 w - \left(N_x \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + 2N_{xy} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} + N_y \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right) = p \quad (2-25-c)$$

Dans les dérivées précédentes, nous avons utilisé l'approche de la mécanique vectorielle pour trouver les équations différentielles (champ). Pour arriver à ces équations et aussi pour résoudre généralement les problèmes de flexion non linéaire et de stabilité de plaque, une approche alternative, c'est-à-dire l'approche variationnelle (énergie), peut être utilisée. A cet effet nous aurons besoin des expressions pour l'énergie totale fonctionnelle de la plaque ; l'énergie totale fonctionnelle est la somme de l'énergie de déformation et du travail effectué par les forces appliquées. L'expression générale de l'énergie de déformation d'un corps élastique linéaire est :

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x + \bar{\sigma}_y \bar{\varepsilon}_y + \bar{\sigma}_z \bar{\varepsilon}_z + \bar{\sigma}_{xy} \bar{\gamma}_{xy} + \bar{\sigma}_{yz} \bar{\gamma}_{yz} + \bar{\sigma}_{zx} \bar{\varepsilon}_{zx}) dx dy dz \quad (2-26)$$

Si nous adaptons ces relations pour les plaques, la forme spéciale serait :

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iiint (\bar{\varepsilon}_x^2 + \bar{\varepsilon}_y^2 + 2\nu \bar{\varepsilon}_x \bar{\varepsilon}_y + \frac{1}{1-\nu} \bar{\gamma}_{xy}^2) dx dy dz \quad (2-27)$$

Cette énergie de déformation est composée de deux parties ; l'énergie du champ de contraintes en plan U_m et l'énergie des forces de flexion U_b . Ainsi on peut écrire :

$$U = U_m + U_b \quad (2-28)$$

où

$$U_m = \frac{C}{2} \iiint (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{1-\nu} \gamma_{xy}^2) dx dy \quad (2-29)$$

et

$$U_b = \frac{D}{2} \iiint [\rho_x^2 + \rho_y^2 + 2\nu \rho_x \rho_y + 2(1-\nu) \rho_{xy}^2] dx dy \quad (2-30)$$

Ces expressions ensemble avec l'expression du travail effectué par les forces appliquées peuvent être combinées algébriquement pour donner l'énergie potentielle totale de la plaque.

Les équations de champ gouvernantes et les conditions aux limites associées pour les plaques peuvent être obtenues en posant la première variation de l'énergie potentielle totale égale à

zéro . Ces expressions peuvent être également utilisées pour une analyse approximative de la stabilité par les méthodes variationnelles.

2-1-4 Equations de la stabilité linéaire

Les plaques minces sous un chargement en plan peuvent toujours avoir une configuration d'équilibre plane ; dans ce mode de déformation, la plaque subit une déformation en plan sans aucun déplacement latéral. Avec l'augmentation de la magnitude du chargement en plan appliqué, la plaque retient sa configuration d'équilibre plane , mais subit plus de déformation en plan ; à un certain chargement elle peut atteindre un point de bifurcation le long de son chemin d'équilibre .

Au-delà du point de bifurcation, la configuration plane deviendrait instable ; à ce stade la plaque peut présenter une déformation de flexion. La forme fléchie de la plaque, comme comparée avec sa configuration plane critique, est un état d'équilibre stable. La charge causant la transition de l'état plane instable à l'état stable déformé latéralement est la charge de flambement ou la charge de bifurcation de la plaque .

En supposant qu'un point de bifurcation existe, pour l'analyse de la stabilité de plaques initialement planes sous un chargement en plan, nous pouvons utiliser une analyse de stabilité linéaire ; cette approche est basée sur le nommé critère d'équilibre adjacent. Selon ce critère, au point de bifurcation, deux conditions d'équilibre infinitésimalement adjacentes peuvent exister : une configuration plane et une autre légèrement fléchie.

Ces deux états d'équilibre sont gouvernés par les équations (2-25).

Si (u_0, v_0, w_0) représentent la configuration plane et si (u_1, v_1, w_1) représentent la configuration légèrement fléchie (perturbée) dans l'état planaire, le déplacement latéral w_0 et ses dérivées sont nuls; d'où pour un état d'équilibre adjacent arbitraire , c'est-à-dire pour une perturbation au voisinage de l'état d'équilibre plane initial , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 \\ v &= v_0 + v_1 \\ w &= w_1 \end{aligned} \tag{2-31}$$

Il est à noter que ce processus de perturbation ne doit pas être appliqué seulement au champ de déplacement, mais aussi aux autres variables dépendantes telles que les déformations dépendantes des forces appliquées. Le champ de force relatif à la configuration planaire $(N_{x0}, N_{y0}, N_{xy0} = N_{yx0})$ est gouverné par les équations d'équilibre originales (2-25 a, b).

$$\frac{\delta N_{x0}}{\delta x} + \frac{\delta N_{yx0}}{\delta y} = 0 \quad (2-32-a)$$

$$\frac{\delta N_{xy0}}{\delta x} + \frac{\delta N_{y0}}{\delta y} = 0 \quad (2-32-b)$$

Dans un cas général $N_{x0}, N_{y0}, N_{xy0} = N_{yx0}$ sont fonction des coordonnées variables x et y. Les équations (2-30) peuvent être résolues par plusieurs moyens incluse la méthode des fonctions de contrainte; Ainsi le champ de forces en plan internes peut être déterminé indépendamment . Pour l'état légèrement fléchi, nous introduisons la perturbation suivante sur les forces en plan :

$$\begin{aligned} N_x &= N_{x0} + N_{x1} \\ N_y &= N_{y0} + N_{y1} \\ N_{xy} &= N_{xy0} + N_{xy1} \end{aligned} \quad (2-33)$$

Les équations (2-25) gouvernent également aussi bien le comportement en équilibre de plaque dans son état plan que dans sa configuration légèrement fléchie arbitrairement.

Ainsi le champ de déplacement (u, v, w) et le champ de force ($N_x, N_y, N_{xy} = N_{yx}$) à n'importe quel état déformé sont également gouvernés par ces relations. Si nous substituons les relations (2-31) et (2-33) dans (2-25) , et si nous soustrayons les relations (2-32) des équations résultantes , nous obtenons les équations perturbées suivantes :

$$\frac{\delta N_{x1}}{\delta x} + \frac{\delta N_{yx1}}{\delta y} = 0 \quad (2-34-a)$$

$$\frac{\delta N_{xy1}}{\delta x} + \frac{\delta N_{y1}}{\delta y} = 0 \quad (2-34-b)$$

$$D\nabla^4 w - \left(N_{x0} \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + 2N_{xy0} \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} + N_{y0} \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right) = 0 \quad (2-34-c)$$

L'équation (2-34c) est une équation différentielle partielle du quatrième ordre du déplacement latéral w. Dans cette équation , les coefficients des dérivées du second ordre sont les forces en plan internes ; par la solution de l'équation (2-32) , ces forces sont à priori connues comme des fonctions de x et y ; ainsi elles apparaissent comme des coefficients connus dans l'équation (2-34c) .L'équation gouvernante (2-34c) doit être accompagnée par les conditions aux limites appropriées ; elles sont deux conditions aux limites en chaque point le long de chaque extrémité de la plaque ; les conditions aux limites peuvent être sous forme

géométrique (conditions sur le déplacement et ses dérivées premières) ou naturelle (conditions sur le moment fléchissant et la force de cisaillement)

2-1-5 Application de la méthode énergétique à l'analyse du flambement de plaque

Les principes variationnels et leurs méthodes énergétiques relatives peuvent être utilisés efficacement pour l'analyse de la stabilité des plaques.

En utilisant les relations énergétiques (2-26) à (2-30), nous écrivons l'expression de l'énergie de déformation d'une plaque rectangulaire ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) comme :

$$U = \frac{1}{2} \cdot K \int_0^a \int_0^b \left[N_x \varepsilon_x + 2N_{xy} \gamma_{xy} + N_y \varepsilon_y + M_x \rho_x + 2M_{xy} \rho_{xy} + M_y \rho_y \right] dx dy \quad (2-35)$$

Si nous substituons les relations constitutives (2-11) à (2-13) dans cette expression, nous obtenons l'expression suivante pour l'énergie de déformation d'une plaque rectangulaire.

$$U = \frac{1}{2} \cdot K \int_0^a \int_0^b \left[(\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu) \left[\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \right]^2 - \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right] dx dy \quad (2-36)$$

Pour la formulation énergétique et ses applications, nous avons également besoin de l'expression du travail effectué par les forces appliquées. Pour l'analyse de stabilité nous supposons que le chargement appliqué consiste en des forces en plan normales et des forces de cisaillement. En calculant le travail des forces en plan, nous admettons que la rigidité en plan de la plaque est très élevée et donc la déformation est due seulement à la flexion.

L'expression du travail réalisé par les forces en plan peut être décrite comme suit :

- Pour déterminer l'expression du travail effectué par les forces normales en plan N_x et N_y le produit de ces forces et le raccourcissement des extrémités de l'élément plaque dans les directions x et y doit être formé et puis intégré sur l'aire de la plaque.

En suivant les mêmes dérivations comme dans le cas d'une barre unidimensionnelle et en se référant à la figure 5, nous pouvons noter facilement que les raccourcissements de l'élément

plaque dans les directions x et y sont égaux à $\left(\frac{\delta w}{\delta x} \right)^2 dx$ et $\left(\frac{\delta w}{\delta y} \right)^2 dy$; ceux-ci doivent être

multipliés par les forces correspondantes, c'est-à-dire $N_x dx$ et $N_y dy$ respectivement.

Le travail des forces de cisaillement en plan intérieures $N_{xy} dx$ et $N_{yx} dy$ est calculé en déterminant en premier lieu les composantes verticales de ces forces et puis en multipliant ces composantes par les déplacements verticaux correspondants.

En se référant à la figure 5, nous remarquons que les composantes verticales sont $(N_{xy}dx)\left(\frac{\delta w}{\delta y}\right)$ et $(N_{yx}dy)\left(\frac{\delta w}{\delta x}\right)$. Celles-ci doivent être multipliées par les déplacements

verticaux correspondants ; les derniers sont $\left(\frac{\delta w}{\delta y}\right)$ et $\left(\frac{\delta w}{\delta x}\right)$

En additionnant les composantes du travail effectué par les forces en plan et en intégrant l'expression du travail infinitésimal sur la surface de la plaque, nous obtenons

$$W = -\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[N_x \left(\frac{\delta w}{\delta x} \right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\delta w}{\delta x} \right) \left(\frac{\delta w}{\delta y} \right) + N_y \left(\frac{\delta w}{\delta y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2-37)$$

L'énergie potentielle totale de la plaque est la somme algébrique de l'énergie de déformation et du travail effectué par les forces appliquées, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} . K \int_0^a \int_0^b \left[(\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu) \left[\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \right]^2 - \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right] dx dy \\ - \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[N_x \left(\frac{\delta w}{\delta x} \right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\delta w}{\delta x} \frac{\delta w}{\delta y} \right) + N_y \left(\frac{\delta w}{\delta y} \right)^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (2-38)$$

Les forces en plan peuvent, dans le cas général, être indépendantes l'une de l'autre et fonction des coordonnées x et y.

Considérons le cas d'une plaque soumise à un chargement en plan uniformément distribué appliqué le long de ses extrémités.

Pour un chargement uniformément distribué sur les côtés, les forces en plan internes sont constantes à travers toute la plaque ; dans ce cas, elles peuvent être prises à partir de la seconde intégrale de l'expression (2-38).

Dans un cas particulier de chargement uniformément distribué sur les côtés, les composantes du chargement appliqué peuvent être proportionnelles l'une à l'autre ; pour le cas de chargement proportionnel, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} N_x &= \alpha N \\ N_y &= \beta N \\ N_{xy} &= \gamma N \end{aligned} \quad (2-39)$$

Où N est un paramètre de charge commun et α, β et γ sont les constantes de proportionnalité .

Dans le cas de chargement proportionnel, une formulation énergétique alternative peut être offerte. Nous pouvons exprimer la relation énergétique sous la forme du quotient de Rayleigh ; dans ce cas le quotient de Rayleigh est défini comme

$$N = \frac{K \int_0^a \int_0^b \left[(\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu) \left[\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \right]^2 - \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right] dx dy}{\int_0^a \int_0^b \left[\alpha \left(\frac{\delta w}{\delta x} \right)^2 + 2\beta \left(\frac{\delta w}{\delta x} \cdot \frac{\delta w}{\delta y} \right) + \gamma \left(\frac{\delta w}{\delta y} \right)^2 \right] dx dy} \quad (2-40)$$

Du point de vue physique, le numérateur de cette expression est l'énergie de déformation et son dénominateur est proportionnel au travail effectué par le chargement proportionnel appliqué. Dans ce cas, la méthode énergétique pour le calcul du mode de flambement de la plaque se réduit à trouver les valeurs stationnaires du quotient de Rayleigh.

Le quotient de Rayleigh défini ici peut être simplifié davantage.

Il peut être montré que seule la première partie du numérateur dans le quotient de Rayleigh participe dans le processus de découverte des valeurs extrêmes du quotient de Rayleigh ; le second terme apparaît avoir une contribution triviale. D'où pour convenance, nous supprimons cette partie ineffective pour obtenir une version plus simplifiée du quotient de Rayleigh qui sera :

$$N = \frac{K \int_0^a \int_0^b (\nabla^2 w)^2 dx dy}{\int_0^a \int_0^b \left[\alpha \left(\frac{\delta w}{\delta x} \right)^2 + 2\beta \left(\frac{\delta w}{\delta x} \cdot \frac{\delta w}{\delta y} \right) + \gamma \left(\frac{\delta w}{\delta y} \right)^2 \right] dx dy} \quad (2-41)$$

La prochaine étape de l'application d'une méthode variationnelle directe (énergie) consisterait en la substitution d'une fonction rapprochée appropriée du champ de déplacement $w(x, y)$; la fonction rapprochée est normalement choisie sous forme d'une série de fonctions pondérées connues avec des coefficients de pondération inconnus.

Pour exprimer la condition stationnaire du fonctionnel représenté par le quotient de Rayleigh, les dérivées de la fonction du quotient de Rayleigh résultante par rapport à ces coefficients doivent être posées égales à zéro ; à travers cette procédure, nous obtenons un ensemble d'équations simultanées algébriques linéaires ; la solution de ces équations donne les coefficients de pondération inconnus.

2-1-6 Equations de l'élément fini pour des plaques minces

Il existe plusieurs types d'éléments finis pour les plaques minces ; ces types incluent les éléments quadrilatéraux avec 4 nœuds (aux coins), les éléments triangulaires avec trois nœuds, quadrilatéraux et triangulaires avec des nœuds additionnels au milieu de leurs côtés et en leur milieu , et éléments plaques isoparamétriques . Dans cette section, nous allons dériver l'équation de l'élément pour un élément plaque quadri latéral

Considérons un élément plaque mince rectangulaire sous des forces en plan ; un chargement latéral peut être également inclus dans cette discussion. La figure 7 montre un élément rectangulaire à 4noeuds ayant comme côtés 2a et 2b. A chaque nœud de cet élément, nous associons trois variables nodales ; une de ces variables est le déplacement latéral et les deux autres sont les rotations de la section autour des axes x et y.

Ce type d'élément a au total 12 degrés de liberté nodaux .Une forme plus générale de cet élément serait un élément quadrilatéral En utilisant la théorie classique des plaques rectangulaires nous pouvons exprimer les composantes du déplacement en plan en un plan situé à une distance z du plan moyen de la plaque en termes des composantes du déplacement du plan moyen (u, v) et de la rotation du plan moyen. Ces expressions sont :

$$\bar{u} = u - z \cdot \frac{\delta w}{\delta x} \quad \bar{v} = v - z \cdot \frac{\delta w}{\delta y} \quad (2-42)$$

A ce stade nous utilisons les dérivées des paragraphes précédents pour exprimer la relation effort – déplacement non linéaire comme :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x &= \frac{\delta \bar{u}}{\delta x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\delta \bar{w}}{\delta x} \right)^2 \\ \bar{\varepsilon}_y &= \frac{\delta \bar{v}}{\delta y} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\delta \bar{w}}{\delta y} \right)^2 \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \frac{\delta \bar{u}}{\delta y} + \frac{\delta \bar{v}}{\delta x} + \frac{\delta \bar{w}}{\delta x} \cdot \frac{\delta \bar{w}}{\delta x} \end{aligned} \quad (2-43)$$

Les relations effort – déplacement correspondantes pour les points situés dans le plan moyen sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\delta w}{\delta x} \right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\delta w}{\delta y} \right)^2 \end{aligned} \quad (2-44)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \right) + \frac{\delta w}{\delta x} \cdot \frac{\delta w}{\delta y}$$

La forme linéarisée de ces relations peut être exprimée comme :

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \{\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\gamma}_{xy}\} = \left\{ \frac{\delta \bar{u}}{\delta x}, \frac{\delta \bar{v}}{\delta y}, \frac{\delta \bar{v}}{\delta x} + \frac{\delta \bar{u}}{\delta y} \right\} \quad (2-45)$$

Les relations contrainte – déformation linéaires sont :

$$\{\sigma\} = [E] (\{\bar{\varepsilon}\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (2-46)$$

Où σ_0 est la contrainte initiale de pré-flambement et ε_0 est la déformation initiale. La matrice $[E]$ est la matrice élasticité, elle englobe les propriétés du matériau des plaques ; cette matrice carrée est d'ordre trois.

Il est à noter que la déformation initiale et/ou les contraintes peuvent être engendrées d'effets autre que ceux du chargement appliqué ; par exemple dans les problèmes thermoélastiques , ceux-ci peuvent être dus aux effets thermiques . En relation avec la stabilité élastique, les effets thermiques peuvent causer le flambement.

Maintenant, nous écrivons le vecteur déplacement nodal pour l'élément plaque comme :

$$\{di\} = \{w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}\} = \{w_i, -(\delta w / \delta x)_i, (\delta w / \delta y)_i\} \quad (2-47)$$

De plus réécrivons les relations résultantes force - contrainte en plan :

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \quad (2-48)$$

Nous définissons également le vecteur couple de torsion- moment de flexion :

$$\{M\} = \{M_x, M_y, M_{xy}\} \quad (2-49)$$

Et le vecteur torsion – courbure

$$\{\rho\} = \left\{ -\frac{\delta^2 w}{\delta x^2}, -\frac{\delta^2 w}{\delta y^2}, \frac{2\delta^2 w}{\delta x \delta y} \right\} \quad (2-50)$$

A ce stade nous introduisons l'approximation élément fini ; nous exprimons la composante du déplacement latéral comme :

$$w = \{X\}^T \{c\} \quad (2-51)$$

Où $\{c\}$ est un vecteur coefficient et $\{X\}$ est le vecteur des fonctions approchées ; le dernier vecteur est :

$$\{X\}^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3] \quad (2-52)$$

Pour dériver l'équation pour l'élément plaque, une formulation énergétique, similaire à celle performée pour les poutres -poteaux ,peut être adaptée. Une telle formulation avec l'aide des expressions ci-dessus utiliserait les fonctions de forme pour arriver à l'équation de l'élément.

En premier lieu nous exprimons le champ de déplacement en termes de fonction de forme comme :

$$w = \{N\}^T \{d\} \quad (2-53)$$

Où $\{N\}$ est le vecteur des fonctions de forme ; il est représenté par :

$$\{N\}^T = [\{N_1\}^T \{N_2\}^T \{N_3\}^T \{N_4\}^T] \quad (2-54)$$

Où

$$\begin{aligned} \{N_1\}^T &= TV / 32. [2TV - 2SU - 4ST - 4UV, -4aST, -4bVU] \\ \{N_2\}^T &= SV / 32. [2SV - 2TU - 4ST - 4VU, -4aST, 4bVU] \\ \{N_3\}^T &= SV / 32. [2SU - 2TV + 4ST + 4VU, -4aST, 4bVU] \\ \{N_4\}^T &= TU / 32. [2TU - 2SV + 4ST + 4VU, -4aST, -4bVU] \end{aligned} \quad (2-55)$$

Dans lesquelles :

$$S = \frac{x+a}{a} \quad T = \frac{x-a}{a} \quad U = \frac{y+b}{b} \quad V = \frac{y-b}{b} \quad (2-56)$$

Le vecteur des rotations peut être dérivé de (2-53) ; sa forme est :

$$\left\{ \frac{\delta w}{\delta x}, \frac{\delta w}{\delta y} \right\} = [G_{2nx}] \{d_{nx1}\} \quad (2-57)$$

En substituant (2-53) dans (2-50), nous obtenons

$$\{\rho\} = [B] \{d\} \quad (2-58)$$

où

$$[B] = \begin{Bmatrix} \frac{\delta^2}{\delta x^2} \\ \delta^2 / \delta y^2 \\ \delta^2 / \delta x \delta y \end{Bmatrix} [N] \quad (2-59)$$

Nous définissons également la matrice de la rigidité de la section transversale comme :

$$[D] = E \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (2-60)$$

Avec ces préalables, nous écrivons maintenant l'expression pour l'énergie potentielle totale

$$\begin{aligned} \Pi = & \iint \{\rho\}^T \langle [D](1/2\{\rho\} - \{\rho_0\}) + \{M_0\} \rangle dx dy + \\ & \frac{1}{2} \iint \left\langle \begin{bmatrix} \frac{\delta w}{\delta x} \\ \frac{\delta w}{\delta y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\delta w}{\delta y} \\ \frac{\delta w}{\delta x} \end{bmatrix} \right\rangle dx dy - \\ & \iint q w dx dy - [d]^T \{P + M\} \end{aligned} \quad (2-61)$$

La dernière ligne de cette relation est le travail effectué par les forces latérales distribuées et les forces nodales concentrées. Substituant les expressions (2-57) et (2-58) dans cette relation, nous obtenons :

$$\Pi = \frac{1}{2} \{d\}^T ([K_E] + [K_G]) \{d\} - \{d\}^T \{F\} \quad (2-62)$$

Si nous posons la première variation du potentiel total par rapport aux variables nodales égale à zéro, nous obtenons :

$$\partial \{d\}^T [([K_E] + [K_G]) \{d\} - \{F\}] = 0 \quad (2-63)$$

A partir de laquelle pour des variations arbitraires des variables nodales, nous concluons que :

$$([K_E] + [K_G]) \{d\} = \{F\} \quad (2-64)$$

L'expression de la matrice d'élasticité classique $[K_E]$ est :

$$[K_E] = \iint [B]^T [D] [B] dx dy \quad (2-65)$$

L'énergie de déformation des forces en plan (membranaire) sur la déformation du plan moyen est :

$$\frac{1}{2} \iint \left\langle \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta w} \\ \frac{\delta w}{\delta y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\delta w}{\delta x} \\ \frac{\delta w}{\delta y} \end{bmatrix} \right\rangle \quad (2-66)$$

Où N_x, N_y et N_{xy} sont les forces résultantes en plan. Cette partie d'énergie donne la matrice géométrique de l'élément plaque ; cette matrice paraît être

$$[K_G] = \iint (\{G\}^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \{G\}) dx dy \quad (2-67)$$

Pour ce qui appelé élément plaque isoparamétrique, les fonctions de forme peuvent être exprimées en termes de deux variables $-1 \leq \xi \leq 1$ et $-1 \leq \eta \leq 1$ d'où au lieu de (2-57) nous avons :

$$\begin{cases} \delta w / \delta \xi \\ \delta w / \delta \eta \end{cases} = [G_I]_{2 \times n} \{d\}_{n \times 1} \quad \begin{cases} \delta w / \delta x \\ \delta w / \delta y \end{cases} = [J]^{-1} \begin{cases} \delta w / \delta \xi \\ \delta w / \delta \eta \end{cases} \quad (2-68)$$

Donc

$$[K_G] = \iint (\{G_I\}^T \{J\}^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \{J\}^{-1} \{G_I\}) J dx dy \quad (2-69)$$

Où $\{J\}$ est le Jacobien de la transformation isoparamétrique .

2-1-7 Analyse de la valeur propre par élément fini

Ayant formulé les équations de l'élément, nous pouvons assembler ces équations pour dériver le système d'équation.

Le processus d'assemblage consiste à mettre ensemble les différentes équations pour arriver au système d'équations. Dans ce processus, les variables locales, définies dans le système de coordonnées locales (élément) doivent être exprimées en termes de variables globales, c'est-à-dire les variations nodales définies dans le système de coordonnées globales ; à cet effet, les relations de transformation entre les systèmes de coordonnées locales et globales doivent être utilisées.

Le système d'équations pour un problème de valeur propre de flambement est normalement de la forme suivante :

$$([K_{ES}] + \lambda [K_{OGS}]) \{ds\} = 0 \quad (2-70)$$

Ou λ est le paramètre de chargement libre, il joue le rôle de la valeur propre ; pour un chargement non proportionnel, il peut avoir plus de paramètres libres. Les matrices $[K_{ES}]$ et $[K_{OGS}]$ sont les matrices de rigidité du système ; $[K_{ES}]$ est la matrice élasticité, elle dépend des paramètres matériel et géométrique, mais ne dépend pas du chargement appliqué $[K_{OGS}]$ est la matrice géométrique du système, elle dépend des effets du second ordre dus à l'application de la valeur unitaire des forces axiales.

La solution du problème de la valeur propre (2-70) donne les valeurs propres (les charges de flambement) et les fonctions propres correspondantes (les modes de flambement) de la structure discrétisée. Dans les calculs numériques pour trouver les valeurs propres, différentes stratégies numériques, inclus les schémas itératifs, peuvent être utilisées.

2-2 Stabilité des coques

2-2-1 Introduction

Les coques minces sont des structures à surface courbe qui ont une courbure simple et double . Les structures en coque peuvent être utilisées d'une manière efficace et économique dans différentes filières d'ingénierie et d'architecture . Les exemples de telles applications sont les toitures en coque , les silos , les structures de contenance , les vaisseaux pressurisés , les structures marines de type coque et les navettes spatiales . Les formes de coque peuvent être trouvées abondamment dans la nature.

Récemment avec l'avènement des différents matériaux en fibre renforcée ou en composé laminé, le domaine d'application et la portée de l'efficacité structurale ont énormément augmenté. Durant les années récentes une variété de structures composites ayant des formes de coques raidies a été conçue et construite avec succès.

L'épaisseur des structures en coque est généralement très petite par rapport aux autres dimensions ; d'où les coques minces soumises à des forces compressives peuvent être exposées au flambement. Dans tels cas, les chargements qui produisent les modes d'instabilité de rupture sont plus petits de plusieurs ordres que les forces causant la rupture du matériau dans une structure. Un mode spécial d'instabilité de coque est le flambement ; le flambement d'une coque peut arriver sous certaines conditions de chargement statique ou dynamique.

Pour réaliser une performance sûre, l'épaisseur aussi bien que les éléments raidisseurs d'une coque mince sont normalement conçus sur la base du critère de stabilité et non pas sur celle des exigences de la résistance du matériau. Dans cet ordre d'idées l'analyse de la stabilité de coques minces a acquit une importance primordiale dans différents problèmes relatifs au calcul des coques.

2-2-2 Géométrie d'une coque mince

Une coque est normalement identifiée par une géométrie simplement ou doublement courbée. La géométrie d'une coque mince est définie par la prescription de sa surface moyenne et l'épaisseur de la coque en différents points de sa surface. La surface passant par la ligne moyenne de l'épaisseur de la coque en chaque point est, par définition, appelée la surface

moyenne de la coque. Si l'épaisseur de la coque est très petite par rapport au rayon de courbure de la surface moyenne, la coque est considérée comme mince.

Le rapport épaisseur-rayon, ou des fois le rapport épaisseur- portée avoisine 1/200 pour les coques en béton armé et 1/300 pour les coques métalliques ou composites.

Pour caractériser plus précisément la géométrie d'une coque, considérons une surface arbitraire dans l'espace, figure 8. En n'importe quel point A sur cette surface, un plan tangent à la coque peut être imaginé. Une normale au plan tangent, en ce point serait considérée normale à la surface en ce point. Nous pouvons faire passer un nombre infini de plans intersectants qui englobent la normale à la surface à travers le point A. De tels plans sont normaux au plan tangent en ce point et ainsi ils pourraient être considérés normaux à la surface moyenne de la coque.

Les courbes planes formées par les plans intersectants qui englobent les vecteurs normaux à la surface sont appelées les sections normales de la surface en ce point. Evidemment chacune de ces courbes aurait une courbure locale et un rayon de courbure correspondant (quantitativement, l'inverse de la courbure) en ce point. En dehors de ces plusieurs courbes planes, formées par l'intersection, il existe deux courbes particulières ; une de ces courbes qui a une valeur minimale de courbure (K_1) ; une autre courbe a une valeur maximale de courbure (K_2).

Les deux courbes planes, formées par les sections planes normales, sont appelées les sections principales ; leurs courbures, notées K_1 et K_2 , sont appelées courbures principales de la surface en A. Il peut être montré que ces deux sections principales intersectantes sont toujours orthogonales l'une par rapport à l'autre.

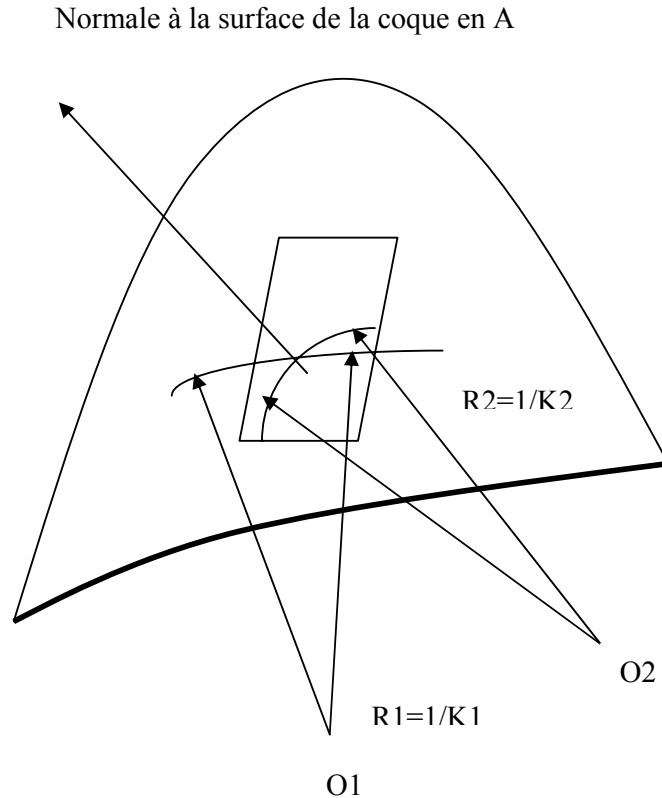


Figure 8 : une surface arbitraire, le plan tangent ,la normale à la surface et deux courbes principales

Le produit des deux courbures principales, $K = K_1 K_2$, est une quantité algébrique qui, par définition, est appelée la courbure de Gauss de la surface en un point A. Si $K_2 = 0$, $K_1 \neq 0$, alors la surface est dite à une seule courbure ou courbure de Gauss nulle. Si $K > 0$, la surface est dite à courbure de Gauss positive ; si $K < 0$ la surface à une courbure de Gauss négative. Ayant les équations paramétriques d'une surface, on peut obtenir facilement les expressions pour les courbures principales, K_1 et K_2 .

Sur la base de la définition de la courbure de Gauss, on peut faire une autre classification utile des surfaces dépendant de la quantité $K = K_1 K_2$ si elle est positive, négative ou zéro en un point, la surface est respectivement appelée une surface synclastique, une surface anticlastique ou une surface avec courbure de Gauss nulle en ce point.

Une autre classification des surfaces peut être faite sur les bases de leur développabilité géométrique. Selon cette distinction, les surfaces des coques sont soit développables ou non développables. Les surfaces développables sont, par définition, celles qui peuvent être « développées » en une forme plane sans couper et/ou allonger (étirer) leur surface moyenne.

Une surface non développable, d'autre part, est une surface qui doit être coupée et/ou étirée dans le but d'être développée dans une forme plane.

Les surfaces à double courbure sont généralement non développables, alors que les surfaces avec une seule courbure sont toujours développables. D'où les surfaces avec une courbure de Gauss positive et négative (c'est-à-dire les surfaces synclastiques et anticlastiques) sont développables, alors que celles avec une courbure de Gauss nulle sont non développables.

La classification des surfaces de coque en développables et non développables présente une certaine signification structurale. D'un point de vue physique, les coques avec des surfaces non développables requièrent plus d'énergie externe pour « s'allonger » c'est-à-dire se rompre en une forme plane que les coques développables. Donc on peut conclure que les coques non développables sont, en général, plus résistantes et plus stables que les coques développables correspondantes.

Un troisième type de classification de surfaces, qui est très utile dans l'analyse et le calcul des coques, est la catégorisation de différentes surfaces en surfaces de révolution, surfaces translationnelles et surfaces réglées.

2-2-3 Système de forces internes dans une coque mince

Dans une structure coque soumise à un chargement extérieur, à des variations de température, des tassements de support et des contraintes de déformation, certaines contraintes internes peuvent se développer.

Pour identifier les forces internes dans une coque, nous considérons une coque mince d'épaisseur h . Nous sélectionnons un système local de coordonnées cartésiennes x, y, z , figure 9. Les axes x et y sont orientés le long des directions mutuellement orthogonales de la courbure principale ; l'axe z est pris normal à la surface de la coque, c'est-à-dire normal à la tangente de la surface de la coque définie par le plan xy . La figure 9 montre un élément infinitésimal de la coque qui peut être découpé en l'intersectant avec deux paires de sections planes principales qui sont situées aux longueurs d'arc ds_x et ds_y séparément. Deux plans intersectants, sont à partir de chaque paire, les normales à la coque au point d'angle commun. Les courbures planes résultantes de l'intersection sont les sections principales et sont donc perpendiculaires l'une à l'autre. Les courbures planes principales ont des rayons de courbure principales qui, sur cette figure, sont désignés par r_x et r_y .

Comme on le constate, l'état général de contraintes dans un élément de coque consiste en des contraintes normale et de cisaillement situées sur la surface de la coque, aussi bien que les contraintes de cisaillement transversal. Dans les coques minces, la composante de la contrainte normale dans la direction z , comparée avec les autres composantes des contraintes internes, est très petite et négligée dans les théories classiques des coques.

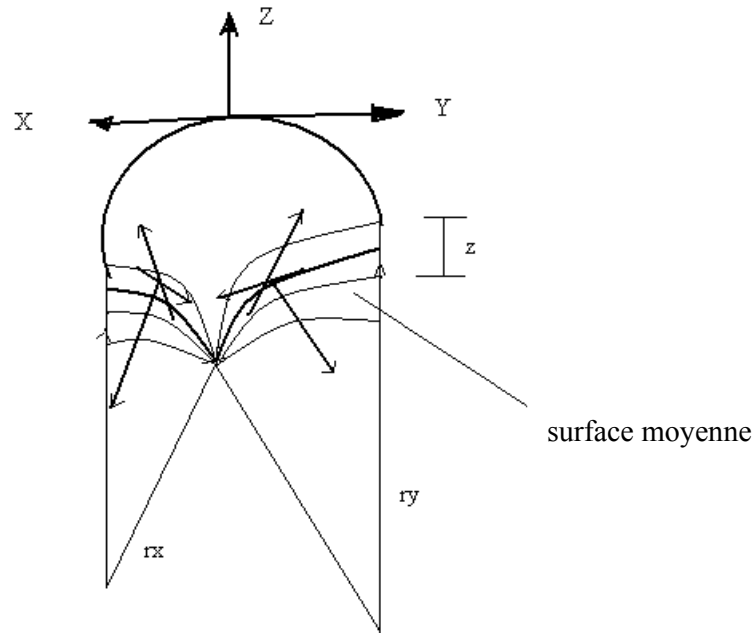


Figure 9 : les composantes de contrainte sur une couche d'un élément coque

Les contraintes internes dans n'importe quelle section de la coque sont statiquement équivalentes à un système de forces résultantes dans cette section. D'un point de vue statique, le système de forces résultantes en n'importe quelle section consiste en un vecteur force et un vecteur moment. Ces vecteurs forces internes peuvent être transformés en composantes qui ensemble, constituent le système de forces internes dans la coque. La figure 10 montre les composantes des forces internes résultantes dans un élément de coque. Comme il est montré sur la figure 10, les forces internes dans une coque consistent en :

- des forces normales et tranchantes en plan : N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} ,
- des moments de flexion : M_x, M_y
- des moments de torsion : M_{xy}, M_{yx}
- des forces de cisaillement transversal ou hors plan : Q_x, Q_y

Toutes ces quantités sont exprimées par unité de largeur de la coque ; ainsi les forces internes ont des unités de force par unités de la largeur et les moments internes ont des unités de moment par unité de largeur.

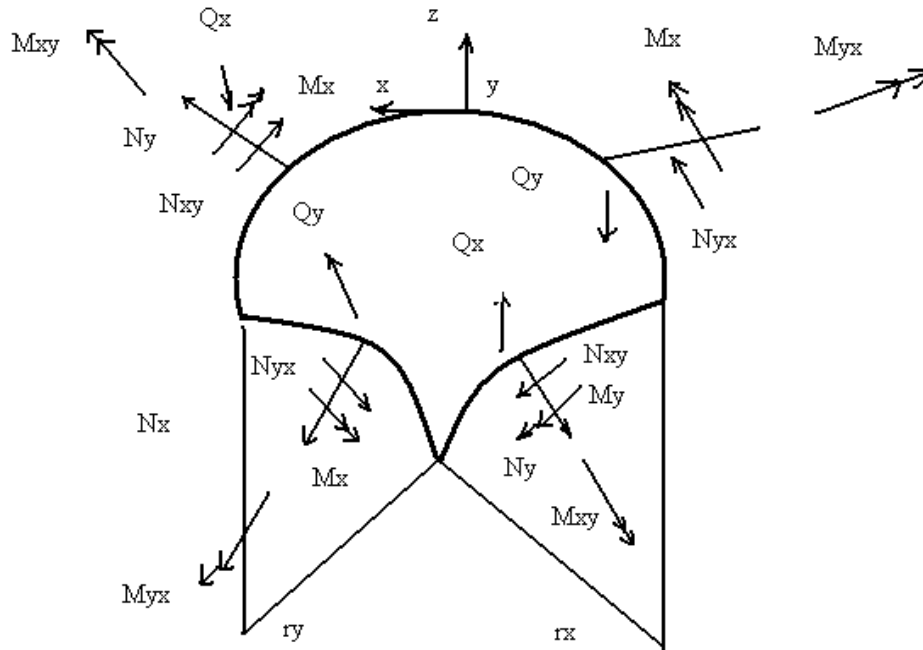


Figure 10 : un élément coque montrant le rayon de courbure principal et la résultante des contraintes internes

Les contraintes internes et leurs forces résultantes correspondantes peuvent être apparentées les unes aux autres. L'application de l'équivalence statique donne ces relations. Ainsi en utilisant l'équivalence statique, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x(1+z/a)dz & N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_y(1+z/a)dz \\
 N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{xy}(1+z/a)dz & N_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{\theta x}(1+z/a)dz \\
 Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{xz}(1+z/a)dz & Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{\theta z}(1+z/a)dz & (2-71)
 \end{aligned}$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x (1 + z/a) z dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_y (1 + z/a) z dz$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{xy} (1 + z/a) z dz$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{yx} (1 + z/a) z dz$$

Puisque, du à l'équilibre rotationnel d'un élément infinitésimal, $\bar{\sigma}_{xy}$ et $\bar{\sigma}_{yx}$, alors il s'en suit à partir des relations ci-dessus que $N_{xy} = N_{yx}$ et $M_{xy} = M_{yx}$. Les contraintes et leurs résultantes de contraintes sont fonction des variables de coordonnées x et y.

2-2-4 Comportement structural des coques

Les structures en coque supportent les forces extérieures d'une manière efficace en vertu de leurs formes géométriques. Généralement parlant, les coques, ayant une courbure spatiale, sont plus résistantes et plus rigides que les autres types de structures. Pour cette raison, les coques sont considérées comme des structures de forme résistante.

Les forces internes en chaque point de la coque peuvent être placées en un ou deux groupes de champs de forces : forces membranaires et forces flexionnelles. Les forces membranaires, comme leur nom l'indique, sont les forces internes résultantes qui se situent à l'intérieur de la surface moyenne de la coque. Le champ de forces membranaires engendre l'élongation ou la contraction de la coque, comme une membrane, sans produire aucune flexion et/ou des changements de la courbure locale. Le champ de forces membranaires consiste en deux forces résultantes normales membranaires et une force de cisaillement membranaire. Le deuxième groupe de forces internes est appelé forces flexionnelles, puisqu'elles engendrent une flexion et une torsion des sections transversales de la coque. Le champ de forces flexionnelles consiste en des moments de flexion, des couples de torsion et des forces de cisaillement transversal. Dans cette terminologie M_x, M_y représentent les moments de flexion et M_{xy}, M_{yx} représentent les couples de torsion, Q_x, Q_y représentent les forces de cisaillement hors plan.

Pour résumer :

-Champ de forces membranaires : N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} ,

-Champ de forces flexionnelles : $M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, Q_x, Q_y$

Le champ de forces membranaires est, évidemment, associé avec les contraintes normales et de cisaillement membranaires ; les contraintes internes membranaires sont supposées uniformément distribuées à travers l'épaisseur de la coque. Une coque dans laquelle seul le

champ de forces membranaires domine est dit avoir un comportement membranaire. La théorie résultante est appelée la théorie membranaire des coques.

Les structures en coque reprennent les forces extérieures appliquées essentiellement par le mécanisme de l'action membranaire. Dans certaines régions de la coque un champ de forces flexionnelles peut se développer pour satisfaire un équilibre spécifique ou des exigences de déformation. L'intervalle d'influence du champ flexionnel est, cependant, local et confiné au voisinage du chargement et des discontinuités géométriques et la coque est virtuellement libre des actions de flexion ; la coque membrane peut être en traction ou en compression.

2-2-5 Aperçu sur le flambement de coque

Sous certaines conditions de chargement, le chemin de l'équilibre de pré-flambement des coques minces élastiques peut devenir instable et en conséquence la coque peut subir une déformation de flambement et de post flambement. L'occurrence du flambement dans les coques minces est probable puisque le rapport d'épaisseur est très petit et certainement plus petit que d'autres éléments structuraux.

La réponse des coques minces aux forces compressives est principalement très différente du comportement d'autres éléments structuraux tels que les montants, les poteaux – poutres et les plaques. La sensibilité à l'imperfection est un des caractères qui décrit le comportement d'une coque mince par rapport au comportement d'autres éléments structuraux.

Qualitativement parlant, les sources de flambement de coque peuvent être :

- a- action des forces compressives (directe ou indirecte comme dans la flexion),
- b- champ de compression local ou global,
- c- conversion de l'énergie membranaire emmagasinée en énergie de flexion ; puisque la rigidité membranaire est plus élevée que la rigidité flexionnelle ainsi des déformations de flexion relativement grandes sont requises pour cette conversion ; en conséquence un événement drastique sous forme de flambement peut avoir lieu .

Les coques réellement réalisées et/ou érigées ne sont jamais géométriquement parfaites. En outre un chargement idéalement parfait ne peut jamais être réalisé. Ceci est également le cas avec les autres formes structurales ; cependant il arrive souvent que les imperfections

géométriques et de chargement peuvent avoir une influence décisive sur la capacité portante des coques alors qu'elles peuvent avoir une importance mineure pour les autres structures .

Les imperfections géométriques incluent tous les écarts dans la forme de l'élément de structure par rapport à la configuration géométrique idéalement supposée. Ainsi, un poteau légèrement courbé, en comparaison avec une barre parfaitement droite, est considéré imparfait

Dans le cas des coques, l'imperfection géométrique est marquée par l'écart de la géométrie de la surface moyenne par rapport à la forme idéale conçue.

Les imperfections de chargement sont les écarts probables de magnitudes et/ou des directions des forces appliquées par rapport aux valeurs supposées et/ou directions.

Par exemple une force axiale excentrique sur un poteau droit peut être considérée comme un chargement imparfait. Les imperfections géométriques et de chargement peuvent être quantifiées par ce qui sont appelées les paramètres d'imperfection ; par exemple, dans le problème de poteau, l'excentricité de la force axiale pourrait être choisie comme un paramètre d'imperfection.

Les expériences réalisées sur les poteaux et les plaques, sous des forces conservatives compressives en plan, ont montré que de tels éléments sont relativement insensibles aux imperfections légères géométriques et de chargement. Ceci n'est pas le cas dans les problèmes de coque.

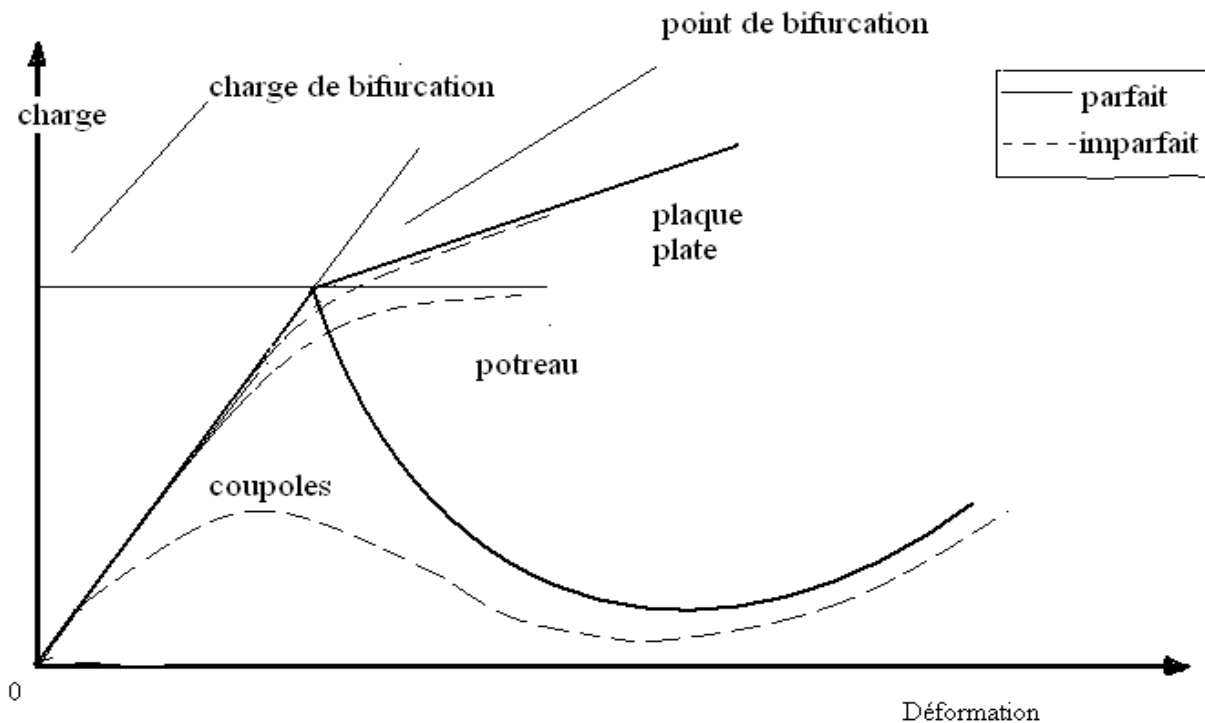


Figure 11 : représentation schématique du comportement au flambement de différents éléments structuraux

Les expériences de flambement conduites sur les coques ont montré que certaines coques sont très sensibles aux imperfections géométriques et de chargement. Les charges de flambement des échantillons de coque au laboratoire sont normalement plus petites que les charges critiques qu'un système parfait pourrait supporter.

La sensibilité à l'imperfection des coques a des implications importantes dans l'analyse et le calcul. Pour obtenir une estimation réaliste de la résistance au flambement des coques, les imperfections géométriques et de chargement doivent être prises en ligne de compte.

Le comportement comparatif des barres, plaques et des formes de coques est schématiquement montré sur la figure 11. Dans ces courbes, les graphes des variations dans la charge de flambement en fonction de certaines mesures du paramètre d'imperfection sont tracés. Sur la figure 11, les lignes continues représentent le système parfait alors que les courbes en lignes interrompues montrent le comportement du système imparfait correspondant. Comme nous le constatons, les éléments de type barre et plaque sont virtuellement insensibles aux imperfections. La figure 11 montre également que pour les problèmes de barre et de plaque, il n'y a de chemin secondaire (forme flambée) d'équilibre à un chargement plus petit que la charge critique, c'est-à-dire pour ces éléments la branche de post flambement ne descend jamais au-dessous du chemin de pré-flambement primaire ; ceci veut dire que la perte de rigidité après flambement n'est pas assez importante pour causer la forme flambée à être maintenue à des niveaux de chargement inférieurs. Ceci n'est pas le cas dans certaines formes de coques.

La figure 11 montre que, pour certaines coques sous un certain chargement, la perte de rigidité après flambement est tellement importante que les formes flambées peuvent être maintenues dans un équilibre statique seulement par le retour du système à un état de chargement précoce ; qui peut être plus petit de plusieurs ordres de magnitude que la charge de flambement.

2-2-6 Théories de flambement des coques

Le pré- flambement, le flambement et le comportement post flambement des coques forment des parties inséparables d'un processus unique qui est le comportement de la stabilité des coques. Dans certains cas, le pré-flambement et la réponse post flambement des coques englobent de larges déformations et/ou rotations. Dans de telles occasions, une théorie linéaire des coques ne serait pas suffisante pour prédire le comportement complet et le recours aux théories non linéaires doit être fait. Toutefois, dans plusieurs cas, l'analyse de la stabilité des coques au moyen de théories linéaires fournit des informations utiles au sujet du comportement de la stabilité des coques . Particulièrement les expressions analytiques de forme fermée, démontrant les effets combinés entre les différents paramètres affectant le comportement de la stabilité, peuvent être utiles pour l'obtention d'une estimation de la capacité portante de la coque.

Le but de ce qui est appelée l'analyse linéaire de la stabilité des coques est la détermination des charges de bifurcation et les configurations flambées correspondantes. Dans l'analyse linéaire de la stabilité, l'existence d'un point de bifurcation et d'un état d'équilibre adjacent est supposée. La méthodologie générale de l'analyse linéaire de la stabilité de flambement des coques peut être résumée comme suit :

(a)- un état d'équilibre déformé infinitésimalement proche à la configuration initiale non déformée est considéré. L'état d'équilibre non déformé est supposé coïncider avec l'état membranaire de la coque. L'état membranaire est de type flexion libre ; dans des analyses linéaires de flambement plus simplifiées, la rotation membranaire est négligée.

(b)- les équations cinétiques, constitutives et d'équilibre pour un élément coque dans un état d'équilibre indéformé et dans un autre déformé (perturbé) sont formulées. L'état déformé adjacent est également un état d'équilibre, d'où les équations d'équilibre peuvent être écrites pour une telle configuration d'équilibre. Pour une analyse élastique de stabilité, un comportement élastique linéaire du matériau est supposé.

(c)- une fois les équations gouvernantes formulées, une série d'équations différentielles partielles homogènes simultanées est obtenue ; dans ces relations la charge critique de flambement apparaît comme un paramètre libre inconnu.

Le problème de stabilité décrit par ces équations est mathématiquement un problème aux valeurs propres. Un problème aux valeurs propres est un problème qui possède seulement une solution triviale à moins que le paramètre libre acquiert certaines valeurs ; avec ces valeurs, le problème homogène peut avoir une ou des solutions non triviales.

Les valeurs du paramètre résultant en une solution non triviale sont appelées les valeurs caractéristiques ; les solutions non nulles correspondantes sont appelées les fonctions propres ou fonctions caractéristiques (vecteurs propres).

D'un point de vue physique, la solution triviale correspond à la configuration pré-flambement (membrane). Les valeurs propres sont les valeurs des charges critiques de flambement ; les fonctions propres sont les modes de flambement du problème.

La méthodologie décrite ici peut être utilisée pour établir les théories linéaires de stabilité des coques avec différentes géométries.

2-2-7 Analyse de la stabilité des coques cylindriques

Une surface cylindrique est générée en faisant glisser une courbe engendrant un plan (le plan duquel reste parallèle à un plan fixe) le long d'une ligne droite appelée directrice du cylindre. La courbe engendrée d'une coque cylindrique peut être un profil fermé (comme dans les tubes

) ou ouvert (comme dans les voûtes) . Dans le cas particulier d'un profil circulaire , c'est à dire à courbure constante , la coque résultante est appelée coque cylindrique circulaire , figure 12 .

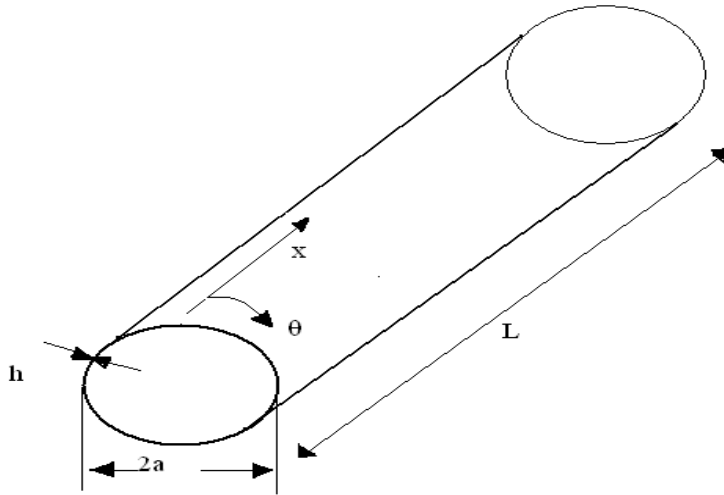


Figure 12 : coque cylindrique circulaire avec son système de coordonnées .

Les formes des coques cylindriques sont utilisées comme des structures de contenance pour les installations d'eau et de gaz, les silos circulaires, les conduites, les vases de pression ; elles sont également utilisées dans les véhicules terrestres et spatiaux, les toitures de coque voûtée de différents types et dans les structures marines et les plateformes des offshores.

La surface moyenne d'une coque cylindrique est une surface avec seule courbure, d'où sa courbure de Gauss est nulle ; cependant la courbure de la courbe génératrice peut varier le long de la courbe profile. N'importe quel point de la surface moyenne d'une coque cylindrique peut être identifié par deux paramètres de coordonnées. Ces deux paramètres sont la distance longitudinale à partir d'une origine choisie arbitrairement et l'angle θ entre la normale à la coque en ce point et une normale de référence à une certaine origine choisie , figure 12 .

La figure 13 montre un élément d'une coque cylindrique avec le chargement appliqué et les résultantes des forces internes.

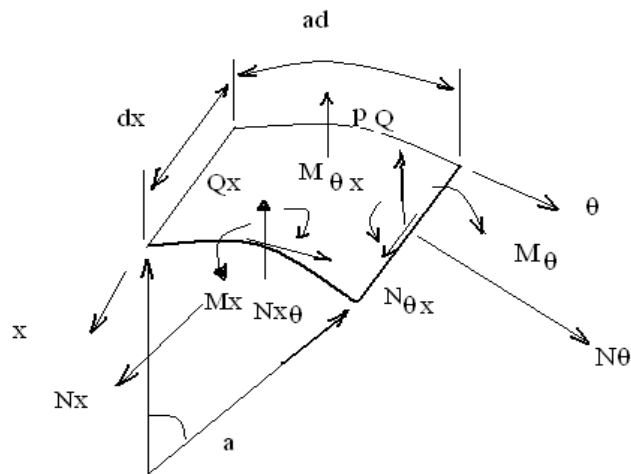


Figure 13 : un élément d'une coque cylindrique montrant les forces internes et les variables de coordonnées x et θ

2-2-7-1 Théorie de la stabilité non linéaire

Nous allons dériver les équations gouvernantes non linéaires pour les coques cylindriques circulaires. Ces équations peuvent être utilisées pour l'analyse non linéaire des coques cylindriques circulaires sous un chargement aussi bien axial, torsionnel, latéral comme sous un chargement combiné. La version linéarisée de ces équations sera utilisée pour l'analyse linéaire du flambement des coques cylindriques.

2-2-7-1-1 Relations cinématiques

Le champ de déplacement en n'importe quel point d'une coque, situé à une distance x et θ de l'origine des axes x - θ et à une distance z du plan moyen de la coque, a trois composantes qui sont $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, dans les directions x, θ, z respectivement.

Pour établir une théorie pour les coques cylindriques minces, nous utilisons les hypothèses de Kirchhoff et qui sont :

- a- les sections planes normales au plan moyen non déformé restent planes et restent également normales à la surface déformée durant la déformation ; la dernière hypothèse implique que nous négligeons les déformations de cisaillement.
- b- la composante de la contrainte normale transversale σ_{zz} est petite comparée aux autres composantes des contraintes, alors elle peut être négligée dans les relations contrainte-déformation

En utilisant les hypothèses de Kirchhoff, nous pouvons exprimer les composantes de déplacement en un point arbitraire situé à une distance z de la surface moyenne de la coque en

termes des composantes du déplacement (u, v, w) du point correspondant situé sur la surface moyenne et les rotations de la section (β_x et β_y) comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u + z\beta_x \\ \bar{v} &= v + z\beta_\theta \\ \bar{w} &= w\end{aligned}\quad (2-72)$$

Pour dériver les relations effort – déplacement , nous utilisons les relations cinétiques non linéaires des corps continus ; nous adaptions ces résultats à un corps de coque cylindrique mince ; nous utilisons les relations écrites pour les plaques pour dériver les relations cinématiques pour les coques cylindriques . Après certaines manipulations, les relations effort – déplacement non linéaires générales pour les coques circulaires dans les coordonnées polaires peuvent être exprimées comme :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \frac{\delta\bar{u}}{\delta x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2\bar{u}}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\bar{v}}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\bar{w}}{\delta x^2} \right) \\ \bar{\varepsilon}_\theta &= \frac{\delta\bar{v}}{a\delta\theta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} \left(\frac{\delta^2\bar{u}}{\delta\theta^2} + \frac{\delta^2\bar{v}}{\delta\theta^2} + \frac{\delta^2\bar{w}}{\delta\theta^2} \right) \\ \bar{\gamma}_{x\theta} &= \frac{\delta\bar{u}}{a\delta\theta} + \frac{\delta\bar{v}}{\delta x} + \frac{1}{a} \left(\frac{\delta\bar{u}}{\delta x} \cdot \frac{\delta\bar{u}}{\delta\theta} + \frac{\delta\bar{v}}{\delta x} \cdot \frac{\delta v}{\delta\theta} + \frac{\delta\bar{w}}{\delta x} \cdot \frac{\delta\bar{w}}{\delta\theta} \right)\end{aligned}\quad (2-73)$$

On suppose que les carrés des gradients des composantes du déplacement en plan (u et v) peuvent être négligés comparés à la puissance une de ces gradients. Cette supposition est particulièrement justifiée sur le terrain du fait que nous faisons valoir les effets du second ordre provenant du déplacement radial de la coque. Avec cette supposition les relations (2-72) se simplifient en :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \frac{\delta\bar{u}}{\delta x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2\bar{w}}{\delta x^2} \\ \bar{\varepsilon}_\theta &= \frac{\delta\bar{v}}{a\delta\theta} + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{\delta^2\bar{w}}{\delta\theta^2} \\ \bar{\gamma}_{x\theta} &= \frac{\delta\bar{u}}{a\delta\theta} + \frac{\delta\bar{v}}{\delta x} + \frac{1}{a} \cdot \frac{\delta\bar{w}}{\delta x} \cdot \frac{\delta\bar{w}}{\delta\theta}\end{aligned}\quad (2-74)$$

Ces relations contiennent encore les termes non linéaires ayant un rapport avec la composante radiale du déplacement ; ceci est essentiel pour une analyse non linéaire de flambement de coque. Nous récrivons les relations (2-73) comme :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x + z\rho_x \\ \bar{\varepsilon}_\theta &= \varepsilon_\theta + z\rho_\theta \\ \bar{\gamma}_{x\theta} &= \gamma_{x\theta} + 2z\rho_{x\theta}\end{aligned}\quad (2-75)$$

où

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{1}{2}\beta_x^2, & \beta_x &= -\frac{\delta w}{\delta x} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\delta v}{a\delta\theta} + \frac{w}{a} + \frac{1}{2}\beta_\theta^2, & \beta_\theta &= -\frac{\delta w}{a\delta\theta} \\ \gamma_{x\theta} &= \left(\frac{\delta u}{a\delta\theta} + \frac{\delta v}{\delta x}\right) + \beta_x\beta_\theta \\ \rho_x &= \frac{\delta\beta_x}{\delta x}, & \rho_\theta &= \frac{\delta\beta_\theta}{\delta\theta}, & \rho_{x\theta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\beta_x}{a\delta\theta} + \frac{\delta\beta_\theta}{\delta x}\right)\end{aligned}\quad (2-76)$$

Les différents symboles introduits ici ont l'interprétation suivante :

$\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \gamma_{x\theta}$: Composantes de déformation dans la surface moyenne

β_x et β_θ : Rotations de la surface déformée de la surface moyenne autour des axes x et θ respectivement.

ρ_x et ρ_θ : Courbures de la coque déformée ; elles représentent les chargements de la pente de la déformation latérale dans les directions x et θ respectivement.

$\rho_{x\theta}$: Torsion de la section relative à une section parallèle infinitésimalement adjacente.

La figure 14 montre les éléments déformé (OABC) et non déformé (O'A'B'C') d'une coque cylindrique, dans cette figure, la composante du déplacement radial et les rotations des côtés de l'élément sont montrées .

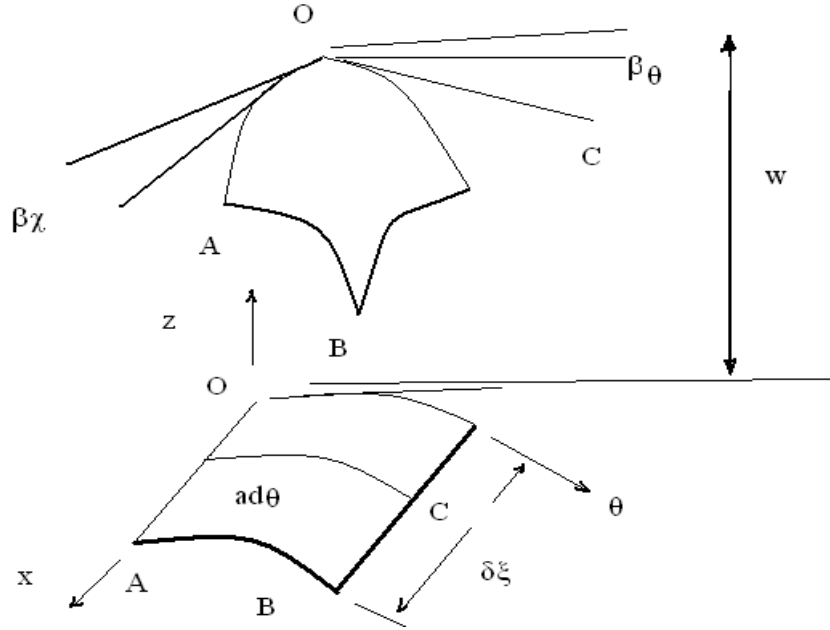


Figure 14 : déplacement radial et rotation de la section dans un élément de coque cylindrique déformé

2-2-7-1-2 Relations constitutives

Nous supposons que le matériau de la coque est isotrope et linéairement élastique, d'où nous pouvons écrire les relations linéaires contrainte – déformation

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \frac{1}{E} [\bar{\sigma}_x - \nu(\bar{\sigma}_\theta + \bar{\sigma}_z)] \\ \bar{\varepsilon}_\theta &= \frac{1}{E} [\bar{\sigma}_\theta - \nu(\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_x)] \\ \bar{\gamma}_{x\theta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \bar{\sigma}_{x\theta}\end{aligned}\quad (2-77)$$

Dans ces relations, E est le module de Young et ν est le coefficient de Poisson du matériau. En utilisant ces relations, nous pouvons exprimer réciproquement les composantes de contrainte en termes de composantes de déformations comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_x + \nu\bar{\varepsilon}_\theta) \\ \bar{\sigma}_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_\theta + \nu\bar{\varepsilon}_x) \\ \bar{\sigma}_{x\theta} &= \frac{E}{2(1-\nu)} \bar{\gamma}_{x\theta}\end{aligned}\quad (2-78)$$

Si nous substituons ces relations de contrainte plane généralisées dans les relations (2-71) et nous utilisons (2-75), nous obtenons :

$$\begin{aligned} N_x &= C(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta) \\ N_\theta &= C(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x) \\ N_{x\theta} &= C\frac{1-\nu}{2}\gamma_{x\theta} \end{aligned} \quad (2-79)$$

et

$$\begin{aligned} \rho_x &= D(\rho_x + \nu\rho_\theta) \\ \rho_\theta &= D(\rho_\theta + \nu\rho_x) \\ \rho_{x\theta} &= D(1-\nu)\rho_{x\theta} \end{aligned} \quad (2-80)$$

Ces relations peuvent, avec l'aide de (2-76), être exprimées comme :

$$\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \nu\frac{\delta^2 w}{\delta \theta^2}\right) \\ M_\theta &= -D\left(\frac{\delta^2 w}{\delta \theta^2} + \nu\frac{\delta^2 w}{\delta x^2}\right) \\ M_{x\theta} &= -D(1-\nu)\frac{\delta^2 w}{\delta x\delta\theta} \end{aligned} \quad (2-81)$$

Dans ces relations

$$C = E\frac{h}{1-\nu^2}, \quad D = E\frac{h^3}{12(1-\nu)} \quad (2-83)$$

D'un point de vue physique C est la rigidité membranaire et D est la rigidité flexionnelle de la coque.

2-2-7-1-3 Equations d'équilibre

Pour un élément typique de coque, il y a six équations d'équilibre ; trois équations de forces et trois équations de moments. Pour une analyse non linéaire et une analyse de stabilité, nous devons écrire les équations d'équilibre pour l'état déformé ; un diagramme de forces après déformation, devrait inclure les résultantes des forces internes, leurs variations partielles dans les directions x et θ et les gradients de déformation.

Le chargement appliqué peut consister en un chargement de surface distribué et un chargement d'extrémité, axial et/ou torsionnel. Un cas particulier de chargement de surface

est le chargement radial noté $p(x, \theta, z)$; un type plus spécifique de chargement radial que nous considérerons est la pression latérale distribuée p . En utilisant les diagrammes des forces de l'élément de coque déformé, nous pouvons écrire l'équilibre des forces dans les directions x , θ et z . Après certains réarrangements, nous obtenons ce qui suit :

Equilibre des forces dans la direction x :

$$a \frac{\delta N_x}{\delta x} + \frac{\delta N_{x\theta}}{\delta \theta} = 0 \quad (2-84)$$

Equilibre des forces dans la direction θ :

$$a \frac{\delta N_{x\theta}}{\delta x} + \frac{\delta N_\theta}{\delta \theta} = 0 \quad (2-85)$$

Equilibre des forces dans la direction z :

$$\begin{aligned} & - \left(a \frac{\delta N_x}{\delta x} + \frac{\delta N_{\theta x}}{\delta \theta} \right) \beta_x - \left(a \frac{\delta N_{x\theta}}{\delta x} + \frac{\delta N_\theta}{\delta \theta} \right) \beta_\theta - a^2 N_x \frac{\delta \beta_x}{\delta x} \\ & - a^2 N_{\theta x} \frac{\delta \beta_\theta}{\delta x} - a N_{x\theta} \frac{\delta \beta_x}{\delta \theta} - a N_\theta \frac{\delta \beta_\theta}{\delta \theta} + a \frac{\delta Q_x}{\delta x} + \frac{\delta Q_\theta}{\delta \theta} = -pa \end{aligned} \quad (2-86)$$

Les équations de moment d'équilibre peuvent être également écrites commodément. En se référant aux relations (2-71), nous concluons que $M_{x\theta} = M_{\theta x}$; d'où l'équilibre des moments par rapport à l'axe z est identiquement satisfait. Les deux moments restants sont :

Equation d'équilibre des moments par rapport à l'axe x :

$$-a \frac{\delta M_{x\theta}}{\delta x} - \frac{\delta M_\theta}{\delta \theta} + a Q_\theta = 0 \quad (2-87)$$

Equation d'équilibre des moments par rapport à l'axe θ :

$$\frac{\delta M_{x\theta}}{\delta \theta} + a \frac{\delta M_x}{\delta x} - a Q_x = 0 \quad (2-88)$$

Les relations (2-86) et (2-87) peuvent être réécrites comme :

$$a Q_\theta = a \frac{\delta M_{x\theta}}{\delta x} + \frac{\delta M_\theta}{\delta \theta} \quad (2-89)$$

$$a Q_x = a \frac{\delta M_x}{\delta x} + \frac{\delta M_{\theta x}}{\delta \theta} \quad (2-90)$$

En combinant les équations (2-85), (2-88) et (2-89) et en utilisant les équations d'équilibre (2-83) et (2-84), nous obtenons :

$$D\nabla^4 w + \frac{1}{a} N_\theta - \left[N_x \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{2}{a} N_{x\theta} \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta \theta} + \frac{1}{a^2} N_\theta \frac{\delta^2 w}{\delta \theta^2} \right] = p \quad (2-91)$$

où

$$\nabla^4 w = \frac{\delta^4 w}{\delta x^4} + \frac{2}{a^2} \cdot \frac{\delta^4 w}{\delta^2 x \delta^2 \theta} + \frac{1}{a^4} \cdot \frac{\delta^4 w}{\delta \theta^4} \quad (2-92)$$

Nous avons obtenu jusqu'ici les équations gouvernantes non linéaires suivantes pour les coques élastiques minces :

$$a \frac{\delta N_x}{\delta x} + \frac{\delta N_{\theta x}}{\delta \theta} = 0 \quad (2-93-a)$$

$$a \frac{\delta N_{x\theta}}{\delta \theta} + \frac{\delta N_\theta}{\delta \theta} = 0 \quad (2-93-b)$$

$$D \nabla^4 w + \frac{1}{a} N_\theta - \left[N_x \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{2}{a} N_{x\theta} \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta \theta} + \frac{1}{a^2} N_\theta \frac{\delta^2 w}{\delta \theta^2} \right] = p \quad (2-93-c)$$

Dans les dérivations précédentes, nous avons utilisé l'approche de la mécanique vectorielle pour trouver les équations différentielles, et également pour résoudre certains problèmes de flambement d'une manière efficace. Une approche alternative, c'est-à-dire l'approche variationnelle (énergie) peut être utilisée. A cet effet, nous aurons besoin des expressions de l'énergie totale fonctionnelle de la coque qui représente la somme de l'énergie de déformation et du travail effectué par les forces appliquées. L'expression générale de l'énergie de déformation pour un continu dans un système de coordonnées polaires peut être écrite comme :

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\bar{\sigma}_x \bar{\varepsilon}_x + \bar{\sigma}_\theta \bar{\varepsilon}_\theta + \bar{\sigma}_z \bar{\varepsilon}_z + \bar{\sigma}_{x\theta} \bar{\gamma}_{x\theta} + \bar{\sigma}_{\theta z} \bar{\gamma}_{\theta z} + \bar{\sigma}_{zx} \bar{\gamma}_{zx}) a dx d\theta dz \quad (2-94)$$

Nous pouvons spécifier cette relation pour les coques par la forme spéciale qui serait :

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iiint (\bar{\varepsilon}_x^2 + \bar{\varepsilon}_\theta^2 + 2\nu \bar{\varepsilon}_x \bar{\varepsilon}_\theta + \frac{1}{1-\nu} \bar{\gamma}_{x\theta}^2) a dx d\theta dz \quad (2-95)$$

L'énergie de déformation est composée de deux parties : l'énergie du champ membranaire , U_m et l'énergie du champ flexionnel U_f . Alors nous pouvons écrire

$$U = U_m + U_f \quad (2-96)$$

où

$$U_m = \frac{C}{2} \iiint (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \frac{1}{1-\nu} \gamma_{x\theta}^2) a dx d\theta \quad (2-97)$$

et

$$U_f = \frac{D}{2} \iiint (\rho_x^2 + \rho_\theta^2 + 2\nu \rho_x \rho_\theta + 2(1-\nu) \rho_{x\theta}^2) a dx d\theta \quad (2-98)$$

Ces expressions ensemble avec l'expression du travail réalisé par les forces appliquées peuvent être combinées pour donner l'énergie potentielle totale de la coque.

Les équations de champ gouvernantes et les conditions aux limites associées pour la coque peuvent être obtenues en posant la première variation de l'énergie potentielle totale égale à zéro.

A ce stade, nous effectuons la non dimensionnalisation de variables en divisant les quantités de longueur et les composantes du déplacement par la valeur « a ». On aura alors :

- déplacements adimensionnels = (déplacements actuels)/a
- force adimensionnelle (par unité de largeur)= (force actuelle)/Ea.
- Autres quantités adimensionnelles sont :

$$\text{Coordonnée de la longueur } \bar{x} = \frac{x}{a}$$

$$\text{Rapport d'épaisseur } r = \frac{h}{a}$$

$$\text{Rapport de longueur } l = \frac{L}{a}$$

Les équations gouvernantes non linéaires de la stabilité des coques cylindriques peuvent être exprimées en termes de deux variables dépendantes adimensionnelles, le déplacement radial adimensionnel \bar{w} et une fonction contrainte \bar{F} . Les variables dépendantes du problème sont la coordonnée de longueur \bar{x} et la coordonnée circulaire θ . Nous définissons une fonction contrainte \bar{F} qui possède les relations suivantes avec les résultantes des forces membranaires ($N_x, N_\theta, N_{x\theta}$) :

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\delta \bar{F}^2}{\delta \theta} \\ N_\theta &= \frac{\delta \bar{F}^2}{\delta x^2} \\ N_{x\theta} &= \frac{\delta \bar{F}^2}{\delta x \delta \theta} \end{aligned} \quad (2-98)$$

Avec cette définition, les deux équations d'équilibre membranaire (2-83) et (2-84) sont indistinctement satisfaites.

En termes de déplacement radial et de la fonction contrainte, les équations de stabilité non linéaires couplées pour des coques cylindriques circulaires minces sous une pression extérieure sont :

- l'équation d'équilibre de déplacement

$$L_1(\bar{w}, \bar{F}) \equiv \frac{r^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^4 \bar{w} + \frac{\delta \bar{F}^2}{\delta x^2} - \left(\frac{\delta^2 \bar{F}}{\delta \theta^2} \cdot \frac{\delta^2 \bar{w}}{\delta x^2} \right. \\ \left. - \frac{2\delta^2 \bar{F}}{\delta x \delta \theta} \cdot \frac{\delta^2 \bar{w}}{\delta x \delta \theta} + \frac{\delta^2 \bar{F}}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 \bar{w}}{\delta \theta^2} \right) - p = 0 \quad (2-99)$$

-la relation de compatibilité

$$L_2(\bar{w}, \bar{F}) \equiv \frac{1}{r} \nabla^4 \bar{F} + \frac{\delta^2 \bar{w}}{\delta x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2 \bar{w}}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 \bar{w}}{\delta x^2} \right. \\ \left. - 2 \frac{\delta^2 \bar{w}}{\delta x \delta \theta} \cdot \frac{\delta^2 \bar{w}}{\delta x \delta \theta} + \frac{\delta^2 \bar{w}}{\delta \theta^2} \cdot \frac{\delta^2 \bar{w}}{\delta x^2} \right) = 0 \quad (2-100)$$

Pour une courbure initial infinie, ces équations se réduisent à des équations non linéaires pour l'analyse des grandes déformations des plaques ; ces dernières sont référées comme étant les équations de la plaque de Von Karman .

2-2-7-2 Théorie du flambement linéaire des coques cylindriques

La déformation de pré-flambement des coques est , en général , non rotation libre ; ceci veut dire que les coques cylindriques sous un chargement appliqué peuvent se déformer aussi bien par l'effet de la flexion que par l'effet de membrane . En conséquence une analyse de stabilité des coques cylindriques avec un chargement arbitraire, des conditions aux limites et des imperfections géométriques et/ou de chargement exigerait, en principe, l'utilisation d'une théorie non linéaire. Dans certains cas particuliers, cependant, l'utilisation de la théorie de flambement linéaire peut être justifiée ; une telle théorie fournirait des informations utiles au sujet du comportement au flambement de la coque.

Les coques cylindriques élastiques sous un chargement à l'extrémité et une pression latérale peuvent avoir une configuration d'équilibre de pré-flambement cylindrique. Avec des conditions aux limites convenables , une coque chargée de cette manière subit un déplacement radial et un autre axial , mais ne subit pas de rotation ni déformation de flexion . Avec l'augmentation du chargement appliqué, la configuration circulaire de la coque peut devenir instable et la coque peut subir en plus une déformation de flexion.

En se basant sur ces arguments dans l'analyse linéaire des coques, nous supposons que la déformation de pré-flambement de la coque peut être obtenue par la théorie des membranes.

La forme fléchie de la coque comme comparée à sa configuration circulaire critique, est un état d'équilibre stable. La charge causant la transition de l'état plan instable à un état déformé latéralement stable est la charge de flambement ou la charge de bifurcation de la coque. Pour

l'analyse de la stabilité des coques cylindriques initialement circulaires sous un chargement en plan nous pouvons utiliser une analyse de stabilité linéaire basée sur ce qui est appelé le critère d'équilibre adjacent. Selon ce critère, au point de bifurcation, deux conditions d'équilibre infinitésimalement adjacentes peuvent exister : une configuration plane et une autre légèrement fléchie déformée. Tous ces deux états d'équilibre sont gouvernés par les équations (2-92). Si (u_0, v_0, w_0) représentent la configuration plane et (u_1, v_1, w_1) représentent la configuration légèrement fléchie déformée (perturbée), pour un état d'équilibre adjacent arbitraire, c'est-à-dire pour une perturbation au voisinage de l'état d'équilibre initial, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 \\ v &= v_0 + v_1 \\ w &= w_0 + w_1 \end{aligned} \quad (2-101)$$

Il est à noter que ce processus de perturbation ne doit pas être appliqué seulement au champ de déplacement, mais aussi aux autres variables dépendantes telle que la variable déformation – chargement .

Le champ de forces relatif à la configuration membranaire de pré-flambement $(N_{x_0}, N_{\theta_0}, N_{x\theta_0} = N_{\theta x_0})$ est gouverné par les équations d'équilibre original

$$\frac{\delta N_{x_0}}{\delta x} + \frac{\delta N_{\theta x_0}}{\delta \theta} = 0 \quad (2-102-a)$$

$$\frac{\delta N_{x\theta_0}}{\delta x} + \frac{\delta N_{\theta}}{\delta \theta} = 0 \quad (2-102-b)$$

Dans un cas général $N_{x_0}, N_{\theta_0}, N_{x\theta_0} = N_{\theta x_0}$ sont fonction des variables de coordonnées x et y .

Les équations (2-102) peuvent être résolues par différents moyens incluse la méthode de la fonction contrainte ; comme résultat, le champ de forces membranaires internes peut être déterminé. Pour l'état flambé, nous introduisons la perturbation suivante sur les forces membranaires de pré-flambement :

$$\begin{aligned} N_x &= N_{x_0} + N_{x_1} \\ N_\theta &= N_{\theta_0} + N_{\theta_1} \\ N_{x\theta} &= N_{x\theta_0} + N_{x\theta_1} \end{aligned} \quad (2-103)$$

Les équations (2-92) gouvernent également le comportement de la coque dans sa configuration flambée ; ainsi le champ de déplacements (u, v, w) et le champ de forces $(N_{x_0}, N_{\theta_0}, N_{x\theta_0} = N_{\theta x_0})$ seront également gouvernés par ces équations.

Si nous substituons les relations (2-98) et (2-100) dans (2-92) et si nous soustrayons les relations (103) des équations résultantes et si nous négligeons les rotations de pré-flambement, nous obtenons les équations perturbées suivantes :

$$\left(\frac{\delta w_0}{\delta x} \quad \text{et} \quad \frac{\delta w_0}{\delta \theta} \right)$$

$$\frac{\delta N_{x_1}}{\delta x} + \frac{\delta N_{\theta x_1}}{\delta \theta} = 0$$

$$\frac{\delta N_{x\theta_1}}{\delta \theta} + \frac{\delta N_{\theta_1}}{\delta \theta} = 0 \quad (2-104)$$

$$Dv^4 w + \frac{1}{a} N_{\theta_1} - \left[N_{x_1} \frac{\delta^2 w^2}{\delta x} + \frac{2}{a} N_{x\theta_1} \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta \theta} + \frac{1}{a^2} N_{\theta_1} \frac{\delta^2 w}{\delta \theta^2} \right] = 0$$

En ignorant les termes de rotation non linéaires et de pré-flambement dans les relations cinématiques (2-76), nous obtenons les relations cinématiques linéarisées suivantes pour les l'état de pré-flambement et pour l'état perturbé.

Pour l'état de pré-flambement

$$\varepsilon_{0x} = \frac{\delta u_0}{\delta x}$$

$$\varepsilon_{0\theta} = \frac{1}{a} \left(\frac{\delta v_0}{\delta \theta} + w_0 \right) \quad (2-105)$$

$$\gamma_{0x\theta} = \left(\frac{1}{a} \frac{\delta u_0}{\delta \theta} + \frac{\delta v_0}{\delta x} \right)$$

Pour l'état perturbé

$$\varepsilon_{1x} = \frac{\delta u_1}{\delta x}$$

$$\varepsilon_{1\theta} = \frac{1}{a} \left(\frac{\delta v_1}{\delta \theta} + w_1 \right) \quad (2-106)$$

$$\gamma_{1x\theta} = \left(\frac{1}{a} \frac{\delta u_1}{\delta \theta} + \frac{\delta v_1}{\delta x} \right)$$

Les relations constitutives pour l'état pré-flambé sont dérivées à partir de (2-79) pour être :

$$N_{0x} = C(\varepsilon_{0x} + \nu \varepsilon_{0\theta})$$

$$N_{0\theta} = C(\varepsilon_{0\theta} + \nu \varepsilon_{0x}) \quad (2-107)$$

$$N_{0x\theta} = C \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \gamma_{0x\theta}$$

Les relations constitutives pour l'état perturbé sont :

$$\begin{aligned}
 N_{1x} &= C(\varepsilon_{1x} + \nu\varepsilon_{1\theta}) \\
 N_{1\theta} &= C(\varepsilon_{1\theta} + \nu\varepsilon_{1x}) \\
 N_{1x\theta} &= C \cdot \frac{1-\nu}{2} \cdot \gamma_{1x\theta}
 \end{aligned} \tag{2-108}$$

Si nous substituons les relations (2-76) dans (2-80) et si nous substituons les relations force – déplacement dans les équations d'équilibre (2-104) , nous obtenons une série d'équations différentielles partielles couplées sur les composantes du déplacement (u_1, v_1, w_1) relatives au champ perturbé . Ces équations ont été partiellement découplées par Donnel ; ainsi elles sont appelées les équations de stabilité de Donnel qui sont :

$$\begin{aligned}
 \nabla^4 u_1 &= -\frac{\nu}{a} \frac{\delta^3 w_1}{\delta x^3} + \frac{1}{a^3} \frac{\delta^3 w_1}{\delta x \delta^2 \theta} \\
 \nabla^4 v_1 &= -\frac{2+\nu}{a} \frac{\delta^3 w_1}{\delta x^2 \delta \theta} - \frac{1}{a^4} \frac{\delta^3 w_1}{\delta \theta^3} \\
 D\nabla^8 w + \frac{1-\nu}{a^2} C \frac{\delta^3 w_1}{\delta x^3} \\
 -\nabla^4 \left[N_{x_0} \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \frac{2}{a} N_{x\theta_0} \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta \theta} + \frac{1}{a^2} N_{\theta_0} \frac{\delta^2 w}{\delta \theta^2} \right] &= 0
 \end{aligned} \tag{2-109}$$

Comme nous notons , la troisième équation est une équation homogène découplée en w_1 seule Ayant résolu le problème membranaire pré-flambé , dans cette équation , $N_{x_0}, N_{x\theta_0}, et N_{\theta_0}$ apparaissent comme des fonctions connues ; elles sont gouvernées par les équations (2-99) et peuvent être obtenues indépendamment avant l'analyse de flambement .

Pour que la formulation soit complète, les équations gouvernantes (2-109) doivent être accompagnées de conditions aux limites appropriées.

Les équations (2-109) peuvent être utilisées pour l'analyse de la stabilité des coques cylindriques sous différents types de chargement à l'extrémité ; compression axiale, moment de torsion appliqué, flexion pure et la combinaison de ces effets peut être effectuée par cette équation. Il est à noter que la théorie, donnée ci-dessus, traite le comportement au flambement linéaire des coques parfaites. Cette théorie n'incorpore pas les imperfections géométriques, les rotations de pré-flambement et d'autres effets non linéaires.

2-2-7-3 Analyse du flambement des coques par élément fini :

L'analyse de la stabilité des coques peut être conduite par différents moyens et méthodes ; certaines peuvent être plus réalistes que d'autres ; certaines peuvent être très compliquées alors que d'autres plus simples mais pas très utiles .

Pour l'analyse de la stabilité des coques par la méthode des éléments finis, nous pouvons adopter un des schémas suivants :

(A) schéma de bifurcation linéaire ; ses étapes sont :

- (a) solution d'un problème d'équilibre linéaire (pré-flambement),
- (b) solution d'un problème aux valeurs propres.

(B) Analyse non linéaire incrémentale ou technique incrémentale – itérative ou problème aux valeurs propres étendu, ses étapes sont :

- (a) calcul de la réponse à un état arbitraire pris comme état nul,
- (b) solution du problème de valeur propre linéaire pour le champ de déplacement croissant,
- (c) utilisation de ces résultats dans des itérations additionnelles ; la solution doit se rapprocher du point de bifurcation non linéaire,
- (d) itération jusqu'à la région de post flambement.

Les avantages et les inconvénients de l'approche de valeur propre étendue sont :

- inclusion des effets de pré-flambement linéaire,
- estimations intermittentes de la charge de rupture,
- possibilité de description des modes de flambement secondaires ; par exemple, la détermination des ondes de flambement courtes superposées sur un état de pré-rupture régulier ; un exemple de celui-ci est l'analyse de flambement d'un tube de longueur finie ; dans de tels cas deux discrétisations différentes peuvent être utilisées.
- Possibilité d'existence de pièges dans la convergence vers la vraie solution

(C) Analyse non linéaire basée sur la théorie des grandes déformations.

La figure 15 résume le phénomène d'instabilité au flambement comme apparenté aux coques minces.

Une courte description de cette figure est donnée .Cette description se rapporte aux chiffres désignés sur la figure 15 ; à ce sujet les points cruciaux sont référés comme étant des états

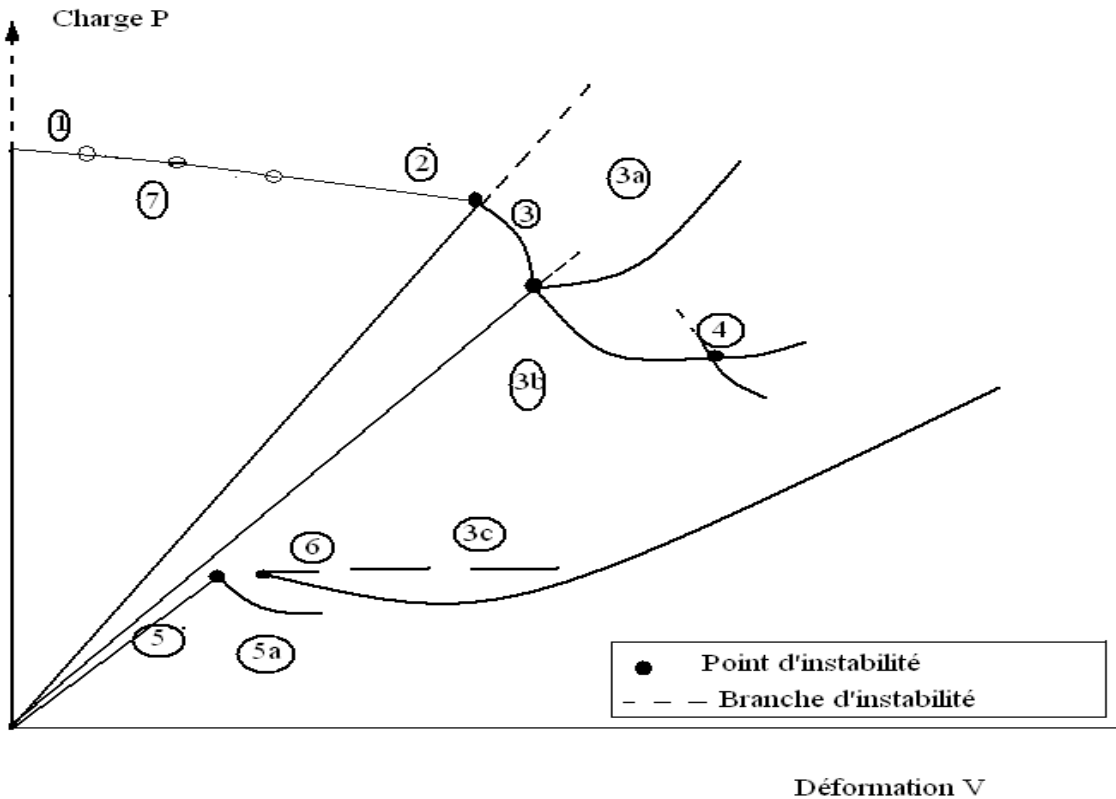


Figure 15 : phénomène de flambement des coques et les stratégies d'analyse numérique

- Etat 1 : Flambement par bifurcation, résultat de l'analyse de valeur propre linéaire classique.
- Etat 2 : Point de bifurcation, analyse de valeur propre étendue (qui prend en considération la déformation de pré-flambement linéaire)
- Etat 3 : Point de bifurcation, analyse de valeur propre étendue (qui prend en considération la déformation de pré-flambement non linéaire)
- Branche 3a : comportement post-flambement avec augmentation de la capacité portante.
 - Branche 3b : comportement post-flambement avec diminution de la capacité portante
- Etat 4 : Point de bifurcation secondaire
- Etat 5 : Point de bifurcation, un comportement réel possible
- Branche 5a : comportement post-flambement, diminution de la capacité portante

Etat 6 : Equilibre limite flambement par cloquage

Etat 7 : Séquence des valeurs propres, processus de l'analyse de valeur propre linéaire incrémentale.

Chapitre 3

Méthodologies Numériques

3-1 Définition des paramètres à l'étude

3-1-1 Dimensions géométriques

3-1-2 Types de chargement

3-2 Outils numériques

3-2-1 Techniques de calculs éléments finis

3-2-2 Code ABAQUS

Méthodologies Numériques

3-1 - Définition des paramètres à l'étude

Dans cette étude et dans le but de recueillir les informations inhérentes et nécessaires au problème de stabilité des plaques et des coques il a été procédé à l'analyse de différentes variantes tout en insistant sur les paramètres suivants :

- dimensions des éléments
- type de chargement
- conditions de fixation
- type d'élément
- maillage

qu'il convient d'expliciter .

3-1-1 Plaque

3.1.1.1 Dimensions géométriques

La largeur de toutes les plaques étant fixée à 5 m.

Les longueurs varient de 1,0 m à 25,0 m selon les conditions d'appui et sont données dans les tableaux. Les épaisseurs retenues sont : 4, 6, 10,14, et 20 mm.

Tableau 3.1 : compression uniaxiale . 2 côtés simplement appuyés

a(m)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
b(m)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Tableau 3.2 : compression uniaxiale . 1 côté libre, l'autre simplement appuyé

a(m)	2,5	5	6	7	8	9	10	12,5	15	20	25
b(m)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Tableau 3.3 : compression uniaxiale : 1 côté encastré et l'autre libre

a(m)	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	11	12
b(m)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Tableau 3.4 : compression uniaxiale : les deux côtés encastrés

a(m)	2	2,5	3,5	4	4,5	5
b(m)	5	5	5	5	5	5

Tableau 3.5 : compression uniaxiale : 1 côté encastré et l'autre simplement appuyé

a(m)	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	11	12
b(m)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Tableau 3.6 : compression biaxiale : tous les côtés simplement appuyés

a(m)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
b(m)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Tableau 3.7 : Cisaillement : tous les côtés simplement appuyés

a(m)	5	6	7	7,5	8	9	10	12,5	15	20
b(m)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Tableau 3.8 : cisaillement : 2 côtés encastrés (b=0 et b=b) et 2 côtés simplement appuyés

a(m)	5	7,5	10	12,5	15	∞
b(m)	5	5	5	5	5	5

Tableau 3.9 : cisaillement : tous les côtés encastrés

a(m)	5	7,5	10	12,5	∞
b(m)	5	5	5	5	5

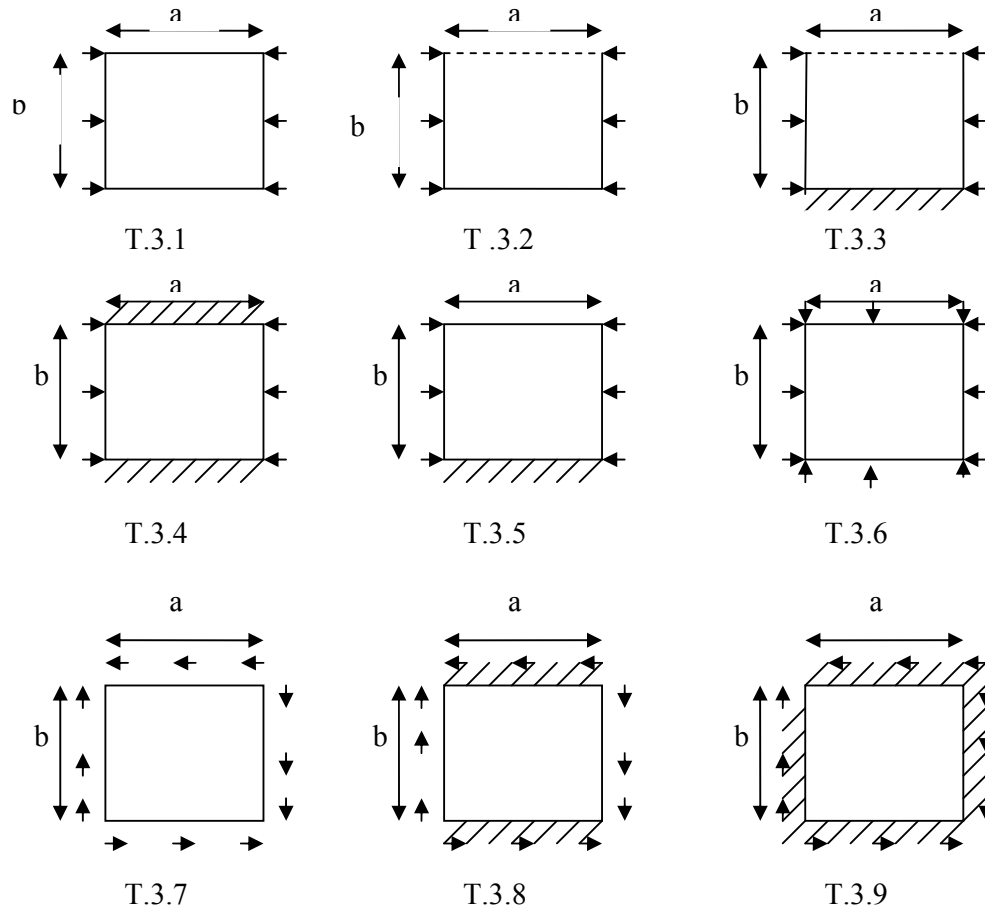


Figure 3.1 : Plaques se rapportant aux tableaux donnant les dimensions retenues dans les analyses

3.1.1.2 Types de chargement

Trois types de chargement ont été considérés dans cette étude. Il s'agit :

- compression uniaxiale – chargement appliqué sur toute la largeur de la plaque
- compression biaxiale – chargement appliqué sur les quatre côtés de la plaque
- cisaillement – chargement appliqué sur les côtés de la plaque dans son plan

La charge appliquée est de 500 kN

3.1.1.3 Conditions de fixation

A chaque type de chargement, un certain nombre de conditions de fixation a été imposé. Ainsi il a été retenu ce qui suit :

- pour la compression uniaxiale : cinq situations à savoir :
 - deux côtés simplement appuyés

- deux côtés encastrés
- un côtés encastré, l'autre libre
- un côtés encastré, l'autre simplement appuyé
- un côté simplement appuyé, l'autre libre

Il est à noter que les côtés, où s'applique le chargement, sont simplement appuyés .

-pour la compression biaxiale ; une seule situation est prescrite, en l'occurrence, les quatre côtés sont simplement appuyés .

-pour le cisaillement : trois situations ont été prévues, il s'agit de :

- tous les côtés simplement appuyés
- deux côtés encastrés et deux simplement appuyés
- tous les côtés encastrés

3.1.1.4 Types d'éléments

Les types d'éléments qui ont fait l'objet d'une attention particulière dans cette étude sont principalement des éléments quadrilatéraux .

Les éléments S4R (éléments à 4 nœuds avec intégration réduite) permettent une solution robuste et précise pour tous les cas de charges pour les coques minces et épaisses . Le changement de l'épaisseur en fonction des déformations dans le plan est pris en compte dans la formulation. Ces éléments ne souffrent ni du blocage en cisaillement ni de la présence de modes hourglassing .

3-1-2 Coque

Ici deux types de coques sont traités avec des paramètres communs avec ceux utilisés pour les plaques. Il s'agit des coques suivantes :

- Coques cylindriques ayant les dimensions suivantes :
 - diamètre extérieur = 4mètres
 - épaisseur = 20millimètres
 - hauteurs = 2, 4, 6, 8, 10, 16, et 20 mètres

1^{er} type : coque soumise à compression axiale uniforme seule

$$N = 500 \text{ kN/m}$$

2^{ème} type : coque soumise à compression axiale uniforme avec pression extérieure

$$N = 500 \text{ kN/m}$$

$$Q = 100 \text{ kN/m}$$

Les conditions de fixation considérées pour les deux types sont :

- les deux extrémités simplement appuyées
- une extrémité simplement appuyée, l'autre encastrée
- une extrémité encastrée, l'autre libre

Quant au maillage, il a été fait application uniquement des mailles de 0.5.

Dans le but de généraliser l'étude, les hauteurs sont prises de manière à inclure les différentes coques cylindriques (courtes, moyennes et longues) et ceci selon le paramètre de Batdorf qui classe les cylindres comme suit :

- Z inférieur à 2.85 : cylindre court
- Z supérieur à 2.85 : cylindre moyen
- Z très grand : cylindre long

3-2 -Outils numériques

3-2-1- Techniques de calculs éléments finis

Dans plusieurs cas les solutions analytiques, c'est-à-dire les expressions de forme paramétrique fermée, aux problèmes d'instabilité sont difficiles à obtenir. Les non linéarités géométrique et matérielle, les géométries compliquées, les changements et/ou les conditions aux limites sont des situations dans lesquelles, en général, deviennent elles mêmes des solutions de forme non fermée. Pour ces cas les solutions numériques doivent être atteintes. La méthode des éléments finis fournit une de ces classes des méthodologies numériques.

La méthode des éléments finis traite la solution d'un modèle discrétisé d'un système continu sous un autre aspect. Dans cette méthode, les systèmes continus sont divisés en parties discrètes de dimensions finies ; ces parties sont appelées éléments finis. Les éléments finis sont assemblés ensemble pour former un système qui est supposé approcher l'entité continue réelle. Il est ainsi conçu que la solution du système discret simulerait le comportement du système réel. Les étapes que comportent la modélisation et le calcul par éléments finis sont :

(a)- Modélisation physique du système qui englobe :

- modélisation de l'élément : classification des éléments de structure en plaque et coque
- Effets environnementaux : identification du chargement
- Conditions aux limites
- Modèles du comportement structural : stabilité

(b)-Discrétisation du système : choix du type et de la taille de l'élément, génération de la maille et prescription des propriétés géométriques et matérielles

(c)- Dérivation des équations de l'élément

- (d)- Assemblage des éléments ; dérivation du système d'équations
- (e)- Solution du système d'équations
- (f)- Post traitement : détermination des variables secondaires et présentation des résultats
- (g)- Interprétation des résultats des éléments finis.

L'analyse de la stabilité par les éléments finis est parmi les calculs numériques les plus compliqués. Cette caractéristique est due au fait que les problèmes de stabilité sont, en nature, des problèmes non linéaires; ainsi des difficultés avec les problèmes géométriquement et matériellement non linéaires peuvent être rencontrés dans l'analyse de la stabilité par la méthode des éléments finis.

L'analyse de la stabilité adaptée s'inspire du schéma de bifurcation linéaire dont les étapes sont :

- solution du problème de l'équilibre linéaire (pré-flambement)
- solution du problème aux valeurs propres

3-2-2 CODE ABAQUS

Pour les simulations numériques des essais nous utilisons le code éléments finis 3D ABAQUS développé aux états unis d'Amérique par la société HIBBIT & KARLSSON .

Les techniques de calcul de flambage utilisées dans ce code se présentent comme suit sachant que la procédure BUCKLE est utilisée pour obtenir les estimations de la valeur propre de flambement

A- Aperçu :

L'analyse de la valeur propre du flambement :

- est généralement utilisée pour estimer la charge critique (bifurcation) de structures rigides ;
- est une procédure de perturbation linéaire ;
- peut être la première étape dans l'analyse d'une structure non chargée , ou peut être performée après que la structure soit chargée – si la structure a été préchargée , la charge de flambement à partir de l'état préchargé est calculée ;
- peut être utilisée dans l'investigation de la sensibilité à l'imperfection d'une structure ;
et
- ne peut pas être utilisée dans un modèle contenant des sous structures.

B- Valeur propre générale de flambement

Dans un problème aux valeurs propres de flambement nous recherchons les charges pour lesquelles la matrice de rigidité du modèle devient singulière de manière à ce que le problème $K^{MN}v^M = 0$ ne présente pas de solutions triviales. K^{MN} est la matrice de rigidité tangente quand les charges sont appliquées, et les v^M sont des solutions de déplacement non triviales. Les charges appliquées peuvent être des pressions, des forces concentrées, des déplacements prescrits non nuls et/ou un chargement thermique. La valeur propre de flambement est généralement utilisée pour estimer les charges critiques de flambement des structures rigides (valeur propre de flambement classique). Les structures rigides supportent leurs charges de calcul principalement par une action axiale ou membranaire plutôt que par une action flexionnelle. Leur réponse englobe toujours une très petite déformation avant flambement. Un simple exemple d'une structure rigide est le poteau d'Euler, qui répond très rigidement à une charge axiale de compression jusqu'à ce qu'une charge critique est atteinte, quand il fléchit soudainement et montre une rigidité plus petite. Cependant et même quand la réponse d'une structure est non linéaire avant la rupture, une analyse générale de valeur propre de flambement peut fournir des estimations utiles des modes de rupture.

C- Etat de base

Les charges de flambement sont calculées relativement à l'état de base de la structure. Si la procédure BUCKLE est la première étape dans une analyse, les conditions initiales forment l'état de base; en d'autres mots, l'état de base est l'état courant du modèle à la fin de la dernière étape de l'analyse générale. Ainsi l'état de base peut inclure des précharges (charges « permanentes »), P^N . Les précharges sont généralement nulles dans les problèmes, classiques de valeur propre de flambement.

Si une non linéarité géométrique était incluse dans les étapes de l'analyse générale avant l'analyse de valeur propre de flambement (en insérant le paramètre NLGEOM dans l'option *STEP), la géométrie de l'état de base est la géométrie déformée à la fin de la dernière étape de l'analyse générale. Si le paramètre NLGEOM était omis, la géométrie de l'état de base est la configuration originale du corps.

D- Le problème aux valeurs propres

Un modèle de chargement incrémental, Q^N , est défini dans l'étape BUCKLE . La magnitude de ce chargement n'est pas importante, elle sera échelonnée par les multiplicateurs de charge, λ_i , trouvés dans le problème aux valeurs propres :

$$(K_0^{NM} + \lambda_i K_{\Delta}^{NM}) v_i^M = 0$$

Où K_0^{NM} est la matrice de rigidité correspondant à l'état de base, qui englobe les effets des précharges, P^N (s'il y a),

K_{Δ}^{NM} est la matrice de rigidité de charges et de la contrainte initiale différentielle due au modèle de chargement incrémental, Q^N ,

λ_i sont les valeurs propres ,

\mathcal{G}_i^M sont les modes de flambement (vecteurs propres),

M et N réfèrent aux degrés de liberté M et N du modèle entier , et

i réfère au i ème mode de flambement.

Les charges critiques de flambement sont alors $P^N + \lambda_i Q^N$. Normalement la plus petite valeur de λ_i est la plus intéressante. Le modèle de la précharge, P^N , et le modèle de la charge de perturbation, Q^N , peuvent être différents .Par exemple, P^N pourrait être le chargement thermique causé par des changements de température, alors que Q^N est causé par l'application d'une pression .

Les modes de flambement, \mathcal{G}_i^M , sont des vecteurs normalisés et ne représentent pas les magnitudes réelles de déformation à la charge critique . Ils sont normalisés de manière à ce que la composante maximale du déplacement a une magnitude de 1.0. Si toutes les composantes du déplacement sont nulles, la composante maximale de rotation est normalisée à 1.0. Ces modes de flambement sont le plus souvent les résultats les plus utiles dans une analyse aux valeurs propres, puisqu'ils prédisent le mode probable de rupture de la structure.

ABAQUS/Standard peut extraire les valeurs et les vecteurs propres à partir de matrices symétriques seulement ; donc P^N et K_{Δ}^{NM} sont symétrisées. Si les matrices ont des parties non symétriques significatives, le problème de valeur propre ne peut pas être exactement ce que l'utilisateur s'attend à résoudre.

E- Sélection de la méthode d'extraction de la valeur propre

ABAQUS/Standard offre les méthodes LANCZOS et d'itération de sous espace pour l'extraction de la valeur propre.

La méthode LANCZOS est généralement plus rapide quand un grand nombre de modes propres est requis pour un système avec plusieurs degrés de liberté. La méthode de l'itération de sous espace peut être plus rapide quand seulement un petit nombre de modes propres est requis (moins de 20).

Utiliser le paramètre optionnel EIGENSOLVER dans l'option BUCKLE pour sélectionner la procédure de l'extraction de la valeur propre. Ce paramètre peut avoir une des deux valeurs : SUBSPACE ou LANCZOS.

Spécifier le nombre désiré de valeurs propres sur la ligne des données de l'option BUCKLE ; ABAQUS/Standard choisira un nombre approprié de vecteurs pour la procédure d'itération de sous espace ou une taille appropriée du bloc pour la méthode LANCZOS (malgré que ce choix peut être outre passé sur la ligne des données, si désiré).

Une surestimation significative du nombre réel de valeurs propres peut créer de très larges fichiers. Si le nombre réel de valeurs propres est sous estimé, ABAQUS/Standard émettra un message d'avertissement correspondant

En général, la taille du bloc pour la méthode LANCZOS doit être aussi grande que la plus grande multiplicité de valeurs propres espérées (c'est-à-dire le plus grand nombre de modes avec la même valeur propre). Une taille de bloc plus grande que 10 n'est pas recommandée. Si le nombre de valeurs propres requis est n , la taille du bloc par défaut est le minimum de (7, n). Le nombre des étapes du bloc LANCZOS est souvent déterminé par ABAQUS/Standard mais peut être changé sur la ligne des données.

Si la technique de l'itération de sous espace est requise, l'utilisateur peut également spécifier la valeur propre maximale d'intérêt sur la ligne des données ; ABAQUS/Standard extraira les valeurs propres jusqu'à ce que les valeurs propres jusqu'à ce que le nombre requis des valeurs propres soit extrait ou bien la dernière valeur propre extraite dépasse la valeur propre maximale d'intérêt .

Si la méthode LANCZOS est requise, l'utilisateur peut aussi spécifier les valeurs propres minimales et/ou maximales d'intérêt sur la ligne des données ; ABAQUS/Standard extraira les valeurs propres jusqu'à ce que le nombre requis des valeurs propres soit extrait dans l'intervalle donné ou bien toutes les valeurs propres dans l'intervalle donné ont été extraites.

F- Usage :

Les 2 premières options équivalentes

*BUCKLE

*BUCKLE, EIGENSOLVER = SUBSPACE

*BUCKLE, EIGENSOLVER = LANCZOS

Limitations associées avec l'application de la méthode LANCZOS à une analyse de flambement .La méthode LANCZOS ne peut pas être utilisée pour les analyses de flambement dans les quelles la matrice de rigidité est indéfinie , comme dans les cas suivants :

- un modèle contenant des éléments hybrides ou des éléments connecteurs
- un modèle contenant des couplant distribuées, défini par soit l'option *COUPLING ou par les éléments couplant distribuant (D coup 2D et D coup 3D)
- un modèle contenant des paires de contact ou des éléments de contact
- un modèle qui a été préchargé au-delà de la charge de bifurcation (flambement)
- un modèle qui présente des modes de corps rigide. Dans tels cas ABAQUS/Standard émettra un message erreur et termine l'analyse.

G- Ordre de calcul et formation des matrices de rigidité

Dans une étape *BUCKLE ABAQUS/Standard performe en premier lieu une analyse statique de perturbation pour déterminer les contraintes incrémentales, $\Delta\sigma$, dues à Q^N . Si l'état de base n'inclue pas NLGEOM, la matrice de rigidité utilisée dans cette analyse statique de perturbation est la

rigidité élastique tangente . Si l'état de base inclue NLGEOM, les termes de la contrainte initiale et de la rigidité de charge (dues à la précharge P^N) sont inclus . La matrice de rigidité K_{Δ}^{NM} correspondant à $\Delta\sigma$ et Q^N et est alors formée à la ligne. Dans la portion de l'extraction de la valeur propre de l'étape *BUCKLE, la matrice de rigidité K_0^{NM}

correspondant à la géométrie de l'état de base est formée . Les termes de la contrainte initiale et de la rigidité de charge dus à la précharge, P^N ; sont toujours inclus indifféremment de l'utilisation du paramètre NLGEOM et sont calculés en se basant sur la géométrie de l'état de base .

Lors de la formation des matrices de rigidité K_0^{NM} et K_{Δ}^{NM} , toutes les conditions de contact sont fixées dans l'état de base.

H- Modes de flambement avec des valeurs propres rapprochées

- Certaines structures présentent plusieurs modes de flambement avec des valeurs propres très rapprochées qui peuvent engendrer des problèmes numériques. Dans ces cas il est souvent souhaitable d'appliquer une précharge suffisante , P^N , pour charger la structure juste en dessous de la charge de flambement avant de performer l'extraction de la valeur propre .

Si $P^N = \mu Q^N$ - où μ est un scalaire constant et la structure est « rigide » et élastique – et si le problème est linéaire, $K_0^{NM} = \mu K_{\Delta}^{NM}$ et les charges de flambement sont données par $(\mu + \lambda_i)Q^N$. Le processus est équivalent à l'extraction de la fréquence propre dynamique avec (décalage) μ . La structure ne doit pas être préchargée au dessus de la charge de flambement. Dans ce cas le processus de l'itération sous espace ne parvient pas à converger ou produit des résultats incorrects. Dans ce cas la méthode LANCZOS ne peut pas être utilisée. Dans plusieurs cas des séries de valeurs propres très rapprochées indiquent que la structure est sensible à l'imperfection. Une analyse de valeur propre de flambement ne donnera pas des prédictions précises de la charge de flambement pour les structures sensibles à l'imperfection ; la procédure statique de RICKS doit être alors utilisée.

I- Comprendre les valeurs propres négatives

Des fois des valeurs propres négatives sont signalées dans une analyse de valeur propre de flambement. Dans la plupart des cas de telles valeurs propres négatives indiquent que la structure flamberait si la charge était appliquée dans la direction opposée. Un exemple classique est celui d'une plaque sous un chargement de cisaillement ; la plaque flambera pour la même valeur positive et négative de l'effort de cisaillement appliqué. Le flambement sous un chargement inverse peut également arriver dans des situations où il ne peut être attendu.

De tels modes de flambement négatifs « physique » sont souvent facilement compris une fois montrés et peuvent être souvent évités en appliquant une précharge avant l'analyse de flambement. Les valeurs propres négatives correspondent des fois à des modes de flambement

qui ne peuvent pas être compris facilement en termes de comportement physique , particulièrement si une précharge est appliqué et qui engendre une non linéarité géométrique signifiante . Dans ce cas une analyse charge - déplacement géométriquement non linéaire doit être performée.

J- Conditions initiales

Les valeurs initiales des quantités telles que contrainte, température, variables de champ et les variables dépendant de la solution peuvent être spécifiées pour une analyse de valeur propre de flambement. Si l'étape *BUCKLE est la première étape dans l'analyse, ces conditions initiales forment l'état de base de la structure.

K- Conditions aux limites

Les conditions aux limites peuvent être appliquées à n'importe quels degrés de liberté de déplacement ou de rotation ou degrés de liberté de gauchissement dans les éléments poutres à parois minces. Une condition aux limites prescrite différente de zéro dans une étape de l'analyse générale précédant l'analyse de valeur propre de flambement peut être utilisée pour précharger la structure. Les conditions aux limites différentes de zéro prescrites dans une étape de valeur propre de flambement contribueront à la contrainte incrémentale $\Delta\sigma$, ainsi elles contribueront à la rigidité de contrainte initiale différentielle. Quand les conditions aux limites différentes de zéro sont prescrites, l'utilisateur doit interpréter le problème de valeur propre avec attention. Les conditions aux limites différentes de zéro prescrites seront traitées comme des encastremets (c'est-à-dire comme si elles étaient fixées) durant l'extraction de la valeur propre. En conséquence, sauf si les conditions aux limites prescrites sont ôtées de l'extraction de la valeur propre en utilisant *BOUNDARY, LOAD CASE =2, les formes modales peuvent être altérées par ces conditions aux limites.

Les définitions d'amplitude ne peuvent pas être utilisées pour faire varier les magnitudes des conditions aux limites prescrites durant une analyse de valeur propre de flambement.

Le paramètre LOAD CASE sur l'option *BOUNDARY est utilisé pour sélectionner les conditions aux limites symétriques et antisymétrique dans une étape de *BUCKLE.

K-1 – Combinaisons des conditions aux limites

Les formes modales du flambement dépendent aussi bien des contraintes dans l'état de base que des contraintes incrémentales dues au chargement de perturbation dans l'étape de *BUCKLE. Ces contraintes sont influencées par les conditions aux limites utilisées dans chaque étape . Dans une analyse générale de valeur propre de flambement les types suivants de conditions aux limites peuvent influencer les contraintes :

- 1- Les conditions aux limites dans l'état de base
- 2- Les conditions aux limites utilisées pour calculer les contraintes de perturbation linéaires $\Delta\sigma$. Ces conditions aux limites peuvent être :
 - a- soit les conditions aux limites spécifiées par l'option *BOUNDARY, LOAD CASE=1 utilisée dans l'étape *BUCKLE,
 - b- ou bien les conditions aux limites à partir de l'état de base si les options *BOUNDARY, LOAD CASE = 1 ne sont pas spécifiées dans l'étape *BUCKLE,
 - c- ou encore les conditions aux limites de l'état de base existent
- 3- Les conditions aux limites utilisées pour l'extraction de la valeur propre. Ces conditions aux limites seront :
 - a- soit les conditions aux limites spécifiées par *BOUNDARY, LAOD CASE =2
 - b- ou bien les conditions aux limites spécifiées par *BOUNDARY, LAOD CASE =1 si *BOUNDARY, LAOD CASSE=2 n'est pas spécifiée dans l'étape *BUCKLE
 - c- ou encore les conditions aux limites à partir de l'état de base si l'option *BOUNDARY n'est pas utilisée dans l'étape *BUCKLE

Le tableau suivant résume l'utilisation des conditions aux limites durant une étape de valeur propre de flambement.

Conditions aux limites définies par l'utilisateur		Conditions aux limites utilisées par ABAQUS	
Etat de base	Etat *BUCKLE	Perturbation linéaire	Extraction de valeur propre
B	0	B	B
0	1	1	1
0	2	2	2
B	1	1	1
B	2	B	2
0	1,2	1	2
B	1,2	1	2

B=conditions aux limites de l'état de base ; 0=pas de conditions aux limites spécifiées
1=conditions aux limites appliquées avec l'utilisation de LOAD CASSE=1

2=conditions aux limites appliquées avec l'utilisation de LOAD CASE=2

Quand *BOUNDARY, LAOD CASE =2 est utilisée, toutes les conditions aux limites à imposer durant l'extraction de la valeur propre doivent être spécifiées.

K-2 – Flambement des structures symétriques

Les formes modales de flambement des structures symétriques soumises à des chargements symétriques sont soit symétriques ou antisymétriques. Dans tels cas il est souvent plus efficace de modéliser seulement une partie de la structure et puis performer l'analyse de flambement deux fois pour chaque plan de symétrie : une fois avec les conditions aux limites symétriques et une fois avec les conditions aux limites antisymétriques .

Le schéma de la charge d'exploitation est d'habitude symétrique, donc des conditions aux limites symétriques sont requises pour le calcul des contraintes de perturbation utilisées dans la formation de la matrice de rigidité de contrainte initiale . Les conditions aux limites.

symétriques sont appliquées en utilisant le paramètre LOAD CASE=1 (défaut) sur l'option *BOUNDARY. Les conditions aux limites doivent être changées en antisymétriques pour l'extraction de la valeur propre pour obtenir les modes antisymétriques. Les conditions aux limites antisymétriques sont appliquées en utilisant le paramètre LOAD CASE=2 sur l'option *BOUNDARY. «flambement de coque cylindrique sous une pression axiale uniforme » , illustre un tel cas .

Le paramètre OP=NEW est requis quand LOAD CASE =2 est appliqué dans l'étape *BUCKLE ; cependant, les conditions aux limites utilisant LOAD CASE=1 dans l'étape peuvent utiliser soit OP=NEW ou OP=MOD.

Si le modèle englobe plus d'un plan de symétrie, il pourrait être nécessaire d'étudier toutes les permutations des conditions aux limites symétriques et antisymétriques pour chaque plan de symétrie.

K-3- Usage

Les deux premières options sont équivalentes :

*BOUNDARY

*BOUNDARY , LAOD CASE=1

*BOUNDARY, LAOD CASE=2, OP=NEW

Flambement asymétrique des structures axisymétriques à la ligne. Les structures axisymétriques soumises à un chargement de compression s'effondrent souvent dans des modes non axisymétriques. Ces modes ne peuvent pas être trouvés purement avec une

modélisation axisymétrique telle que celle fournie par les éléments coques SAX1 et SAX2 ou par les éléments continus CAX4 ou CAX8. De telles analyses doivent être effectuées avec des éléments coques ou continus tridimensionnels.

L- Charge

Les types de chargement suivants peuvent être prescrits dans une analyse de valeur propre de flambement :

- les forces nodales concentrées peuvent être appliquées aux degrés de liberté de déplacements (1-6) utilisant l'option *CLOAD .
- les forces de pression distribuées ou des forces de corps peuvent être appliquées en utilisant l'option *DLOAD .

La rigidité de charge peut avoir un effet significatif sur la charge critique de flambement ; en conséquence, ABAQUS/Standard prendra en considération la rigidité de charge due aux précharges lors de la résolution du problème de la valeur propre de flambement. Il est important que la structure ne soit pas préchargée au dessus de la charge critique de flambement .

N'importe quelle charge appliquée durant l'analyse *BUCKLE est appelée charge d'exploitation. La charge incrémentale Q^N décrit le gabarit de la charge pour laquelle la sensibilité de flambement est recherchée ; son magnitude n'est pas importante. Cette définition de chargement incrémental représente les charges de perturbation linéaire. Les forces partielles (telles que les charge concentrées appliquées en utilisant *CLOAD , FOLLOWER ou les forces de pression) conduisent à une rigidité de charge asymétrique . Puisque l'extraction de la valeur propre dans ABAQUS/Standard peut être réalisée uniquement sur des matrices symétriques ; l'analyse de valeur propre avec les charges partielles peut ne pas donner des résultats corrects. Les définitions d'amplitude ne peuvent pas être utilisées durant une analyse *BUCKLE.

M- Champs prédéfinis

Dans une étape *BUCKLE les températures nodales peuvent être spécifiées en utilisant l'option *TEMPERATURE. Les températures spécifiées causeront une déformation thermique durant l'analyse de perturbation statique si un coefficient de dilatation thermique est donné pour le matériau , et des contraintes incrémentales $\Delta\sigma$ seront générées . Ainsi ABAQUS/Standard peut analyser le flambement du à la contrainte thermique. La température spécifiée n'affectera pas les propriétés du matériau qui dépendent de la température lors de l'étape *BUCKLE ; les propriétés du matériau sont basées sur la

température dans l'état de base. Les définitions d'amplitude ne peuvent pas être utilisées pour faire varier les magnitudes des températures prescrites durant l'analyse de valeur propre de flambement.

N- Options du matériau

Durant une analyse de valeur propre de flambement, la réponse du modèle est définie par sa rigidité élastique linéaire dans l'état de base. Toutes les propriétés non linéaires et/ou inélastiques du matériau aussi bien que les effets englobant le temps ou le taux de déformation sont négligées lors d'une analyse de valeur propre de flambement. Dans une valeur propre de flambement classique la réponse dans un état de base est également linéaire. Si des propriétés élastiques dépendant de la température sont utilisées, l'analyse *BUCKLE ne justifiera pas les changements dans la matrice de rigidité dus aux changements de température. Les propriétés du matériau de l'état de base seront utilisées. Les propriétés acoustiques, les propriétés thermiques (sauf pour la dilatation thermique), les propriétés de la diffusion de masse, les propriétés électriques et les propriétés de flux de fluide ne sont pas actives durant une analyse de valeur propre de flambement.

O- Eléments

N'importe quels éléments contrainte/déplacement dans ABAQUS/Standard (inclus ceux avec des degrés de liberté de pression ou de température) peuvent être utilisés dans une analyse de valeur propre de flambement , à l'exception que les éléments hybrides et de contact qui ne peuvent pas être utilisés avec la méthode LANCZOS.

P- Résultats (output)

Les valeurs des valeurs propres, λ_i , seront portées dans un fichier de résultats imprimés . Si les résultats des contraintes , des déformations , des forces de réaction ,etc... sont requis , cette information sera imprimée pour chaque valeur propre ; ces quantités sont des valeurs de perturbation et représentent les formes modales non pas les valeurs absolues. Les formes modales de flambement peuvent être schématisées dans le module de visualisation de ABAQUS/CAE.

Chapitre 4

Expérimentations numériques

4-1 Plaques

4-1-1 Compression uniaxiale

4-1-1-1 Deux côtés simplement appuyés

4-1-1-2 Un côté simplement appuyé et l'autre libre

4-1-1-3 Deux côtés encastés

4-1-1-4 Un côté encasté et l'autre libre

4-1-2 Compression biaxiale

4-1-3 Cisaillement

4-1-3-1 Tous les côtés simplement appuyés

4-1-3-2 Deux côtés encastés et deux simplement appuyés

4-1-3-3 Tous les côtés encastés

4-2 Coques

4-2-1 Compression axiale seule

4-2-1-1 Les deux extrémités simplement appuyées

4-2-1-2 Une extrémité simplement appuyée, l'autre encastée

4-2-1-3 Une extrémité encastée, l'autre libre

4-2-2 Compression avec pression extérieure

4-2-2-1 Les deux extrémités simplement appuyées

4-2-2-2 Une extrémité simplement appuyée, l'autre encastée

4-2-2-3 Une extrémité encastée, l'autre libre

Pour les simulations numériques nous utilisons le code éléments finis ABAQUS. La simulation Eléments Finis permet de retrouver des résultats précis en ce qui concerne les modes de flambage et les charges critiques.

4-1 Plaques

Les différents résultats obtenus sont présentés dans les tableaux qui suivent avec les graphes et les premiers modes de flambement correspondants.

4-1-1 Compression uniaxiale

4-1-1-1 Deux côtés simplement appuyés

1^{er} cas : $t = 4 \text{ mm}$, maillage = 0,1 , élément S4

a/b	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
F _{cr} (kN)	13.18	6.30	3.9	2.92	2.40	2.11	1.97	1.90	1.89	1.92	1.97	2.05	2.14	2.24

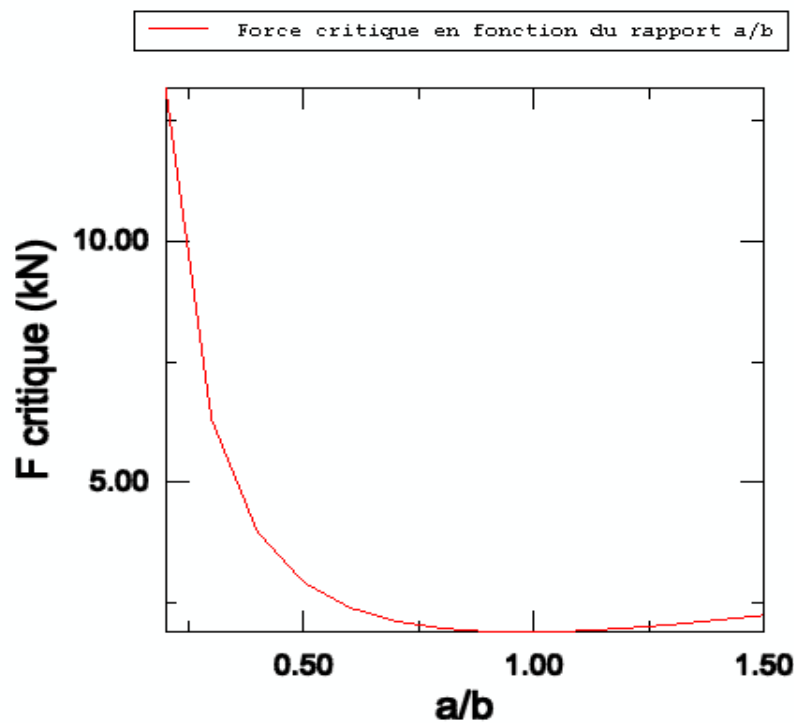
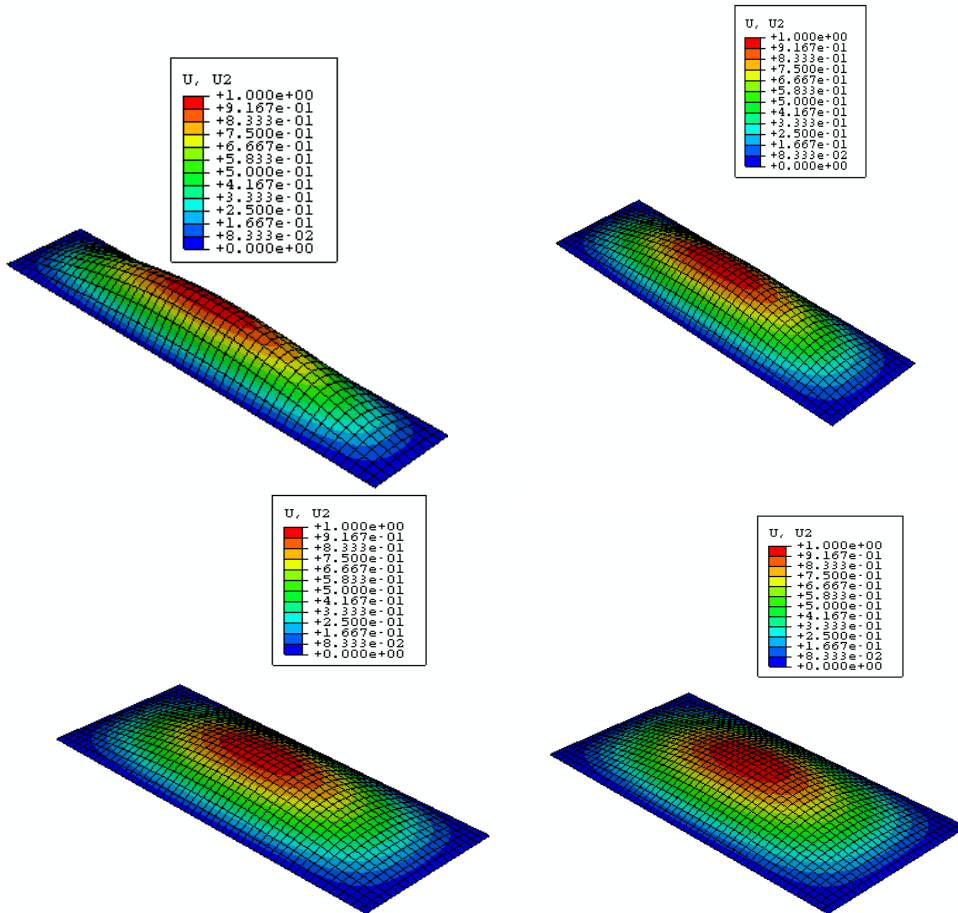
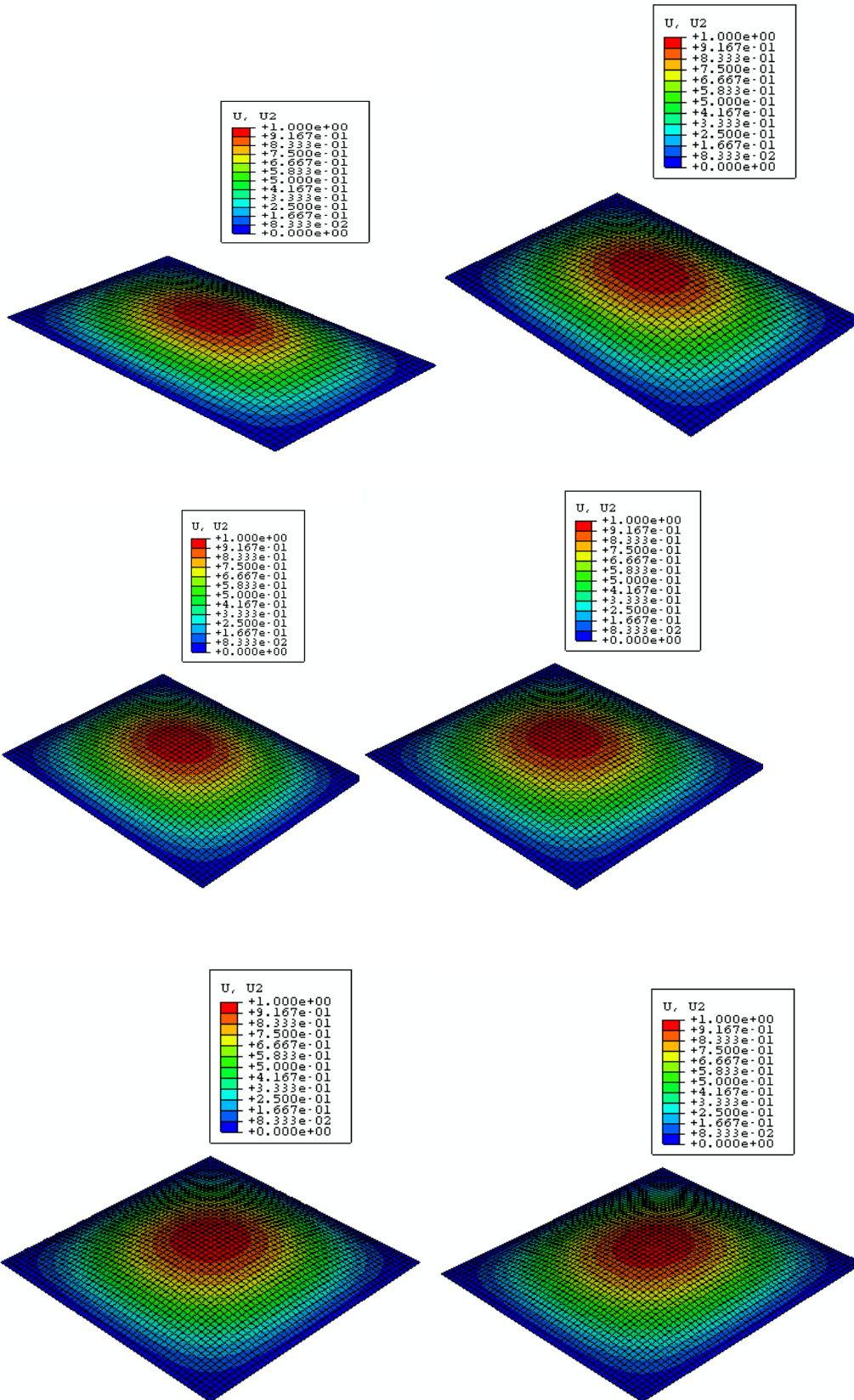
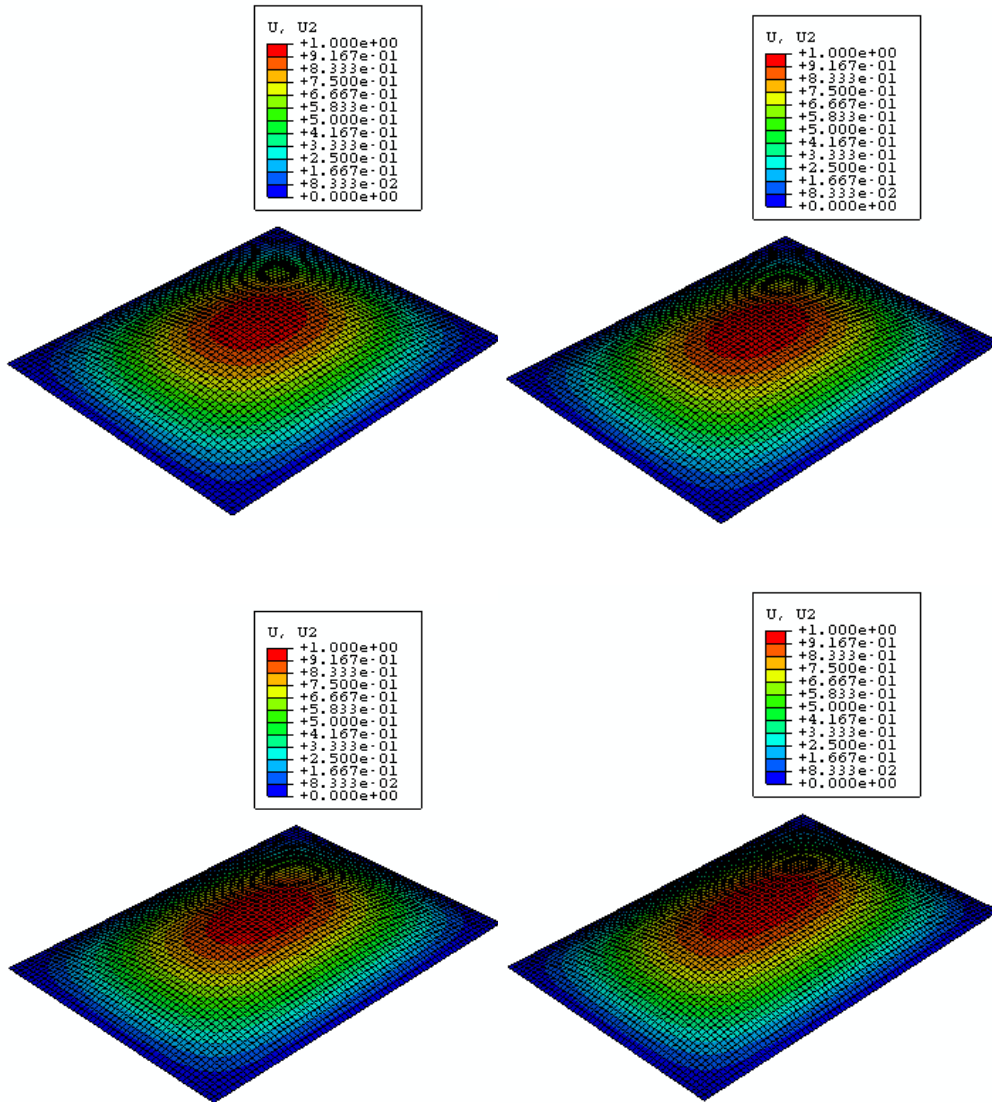


Figure 4.1 : F critique $t = 4\text{mm}$ $M = 0.1$ S4







Premiers modes de flambement

2^{ème} cas : $t = 4 \text{ mm}$, maillage = 0,5 , élément S4

a/b	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
F cr (kN)	20.4	7.41	4.29	2.02	2.47	2.17	2.01	1.94	1.93	1.96	2.02	2.10	2.19	2.30

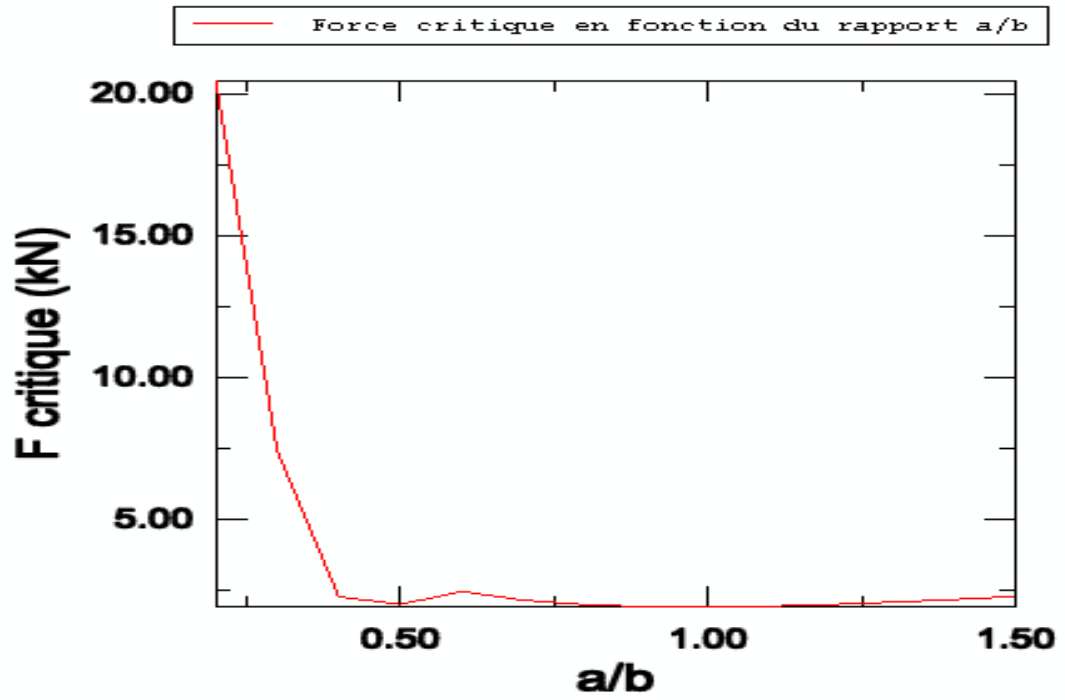
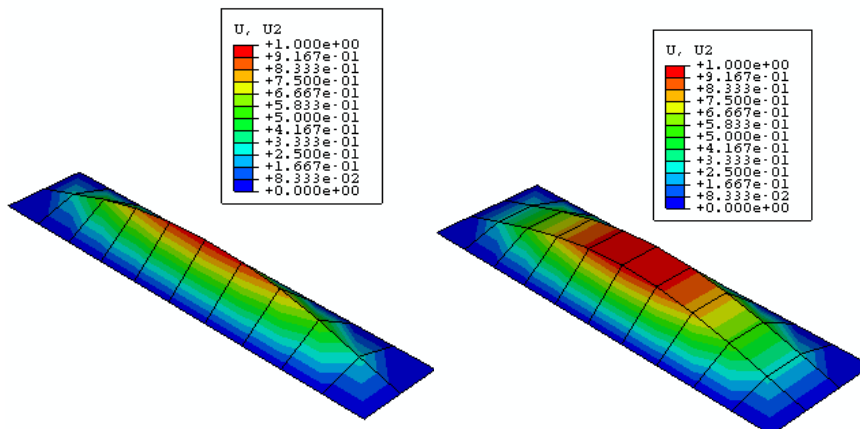
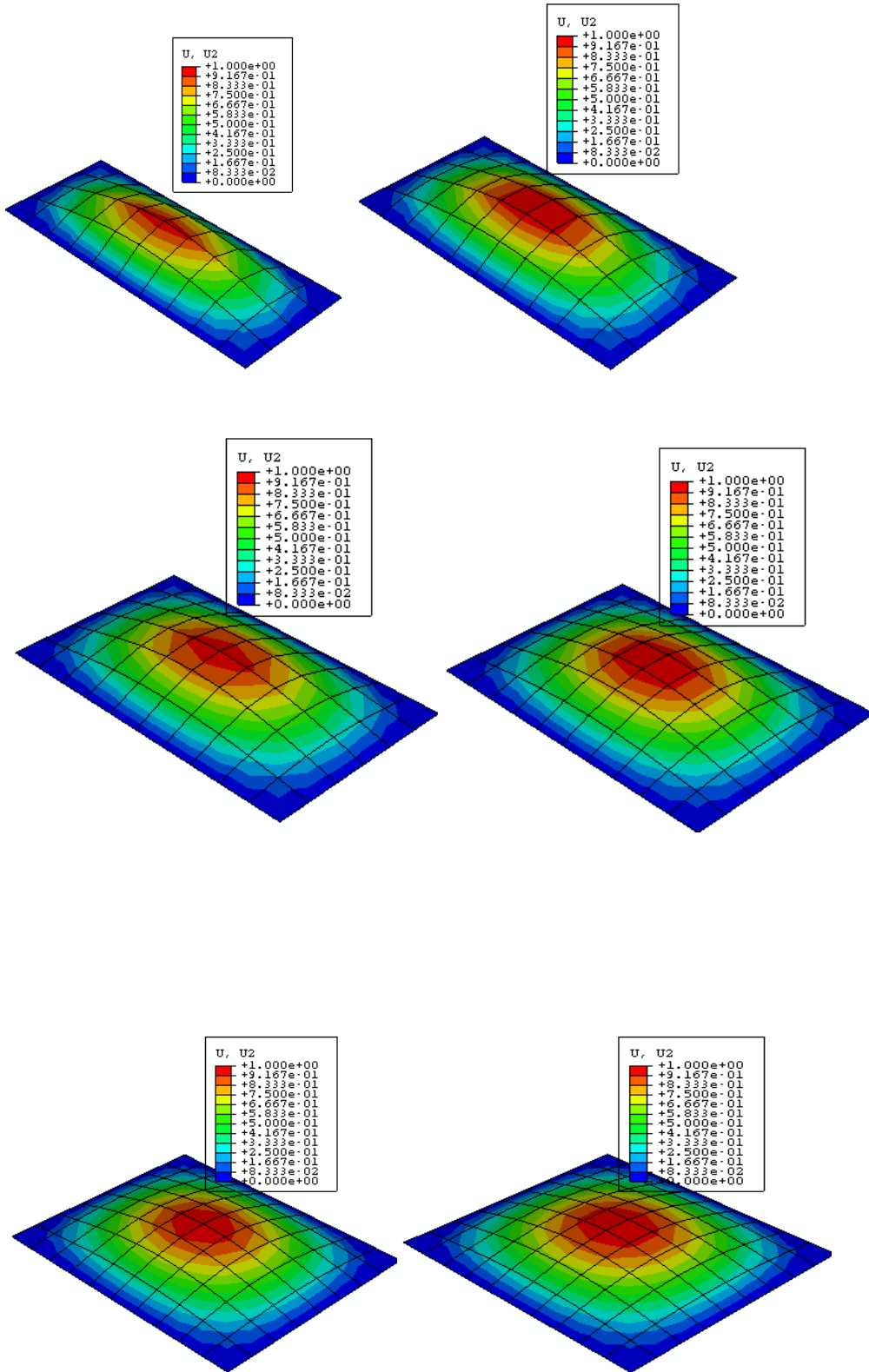
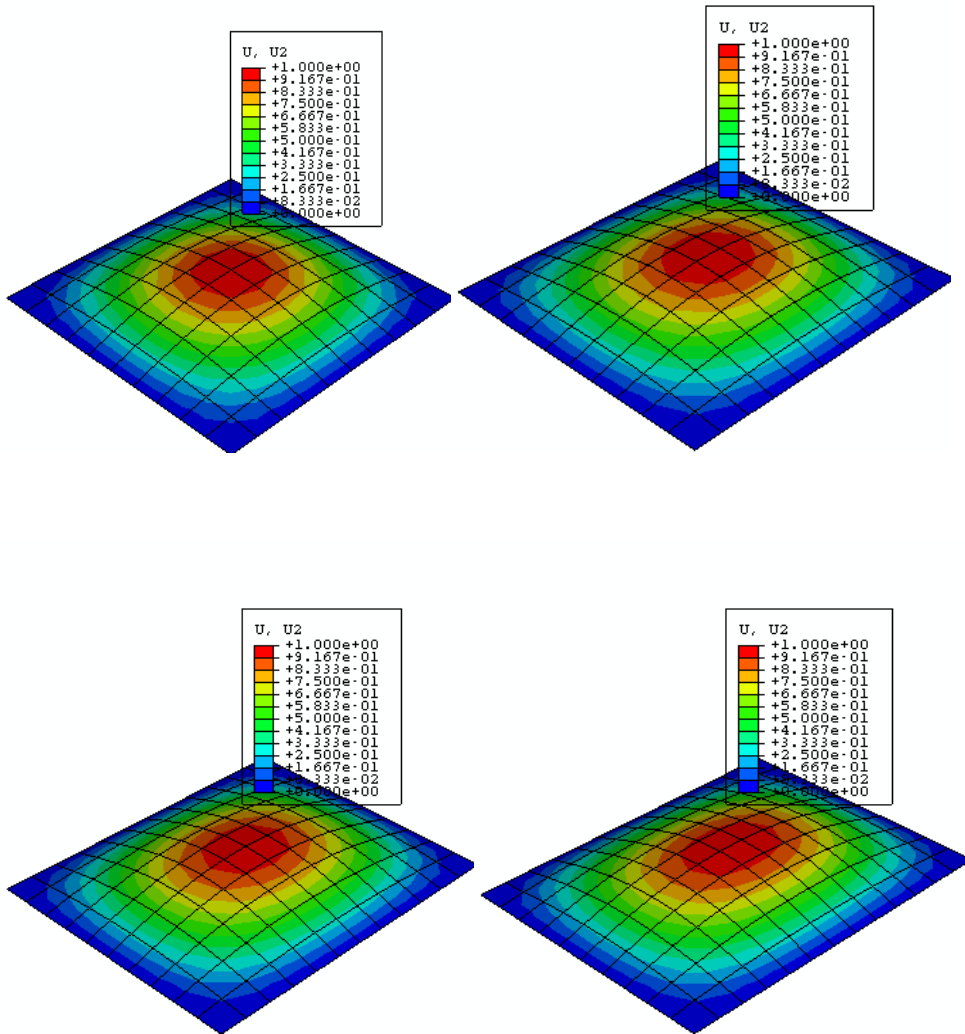
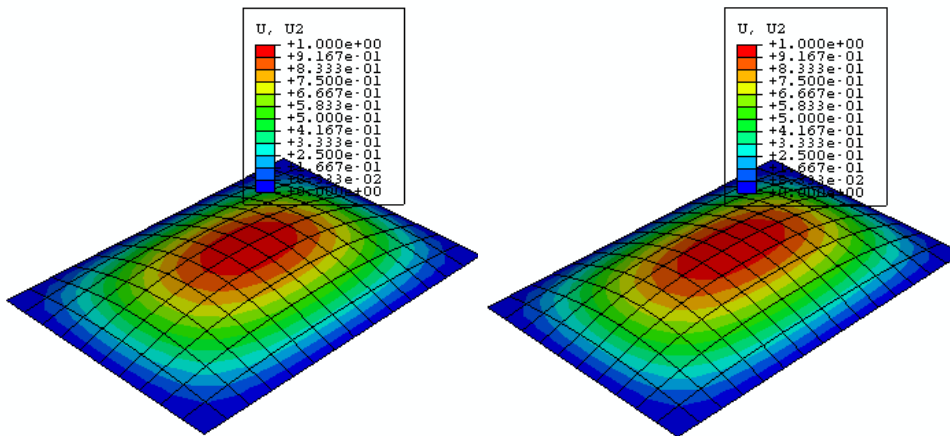


Figure 4.2 : F critique t = 4 mm M = 0.5 S4









Premiers modes de flambement

3^{ème} cas : $t = 10 \text{ mm}$, maillage 0,1 , élément S4

a/b	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
F cr (kN)	205.9	92.3	61.9	45.7	37.5	33.1	30.8	29.7	29.5	30.	30.8	32.	33.4	35.

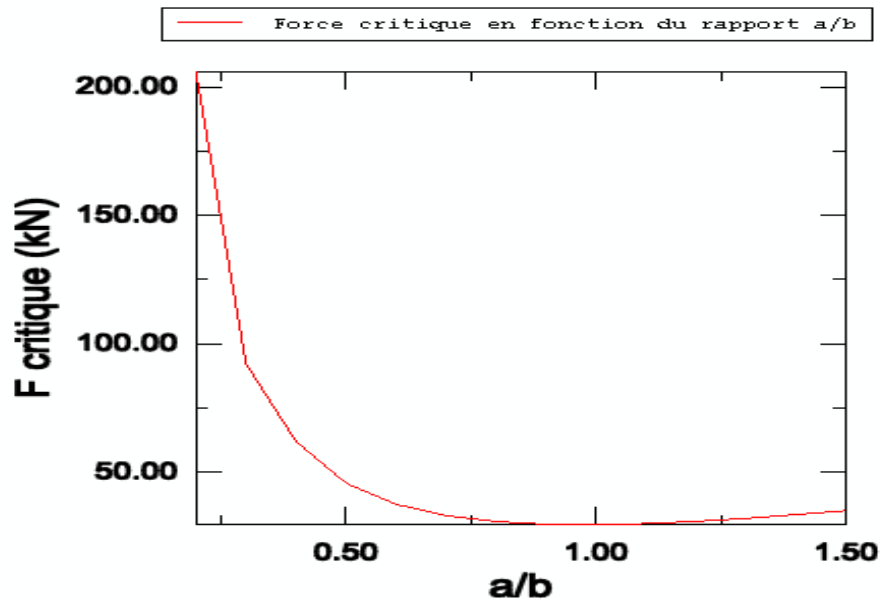
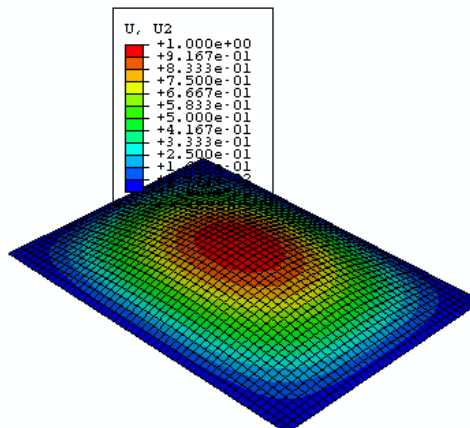
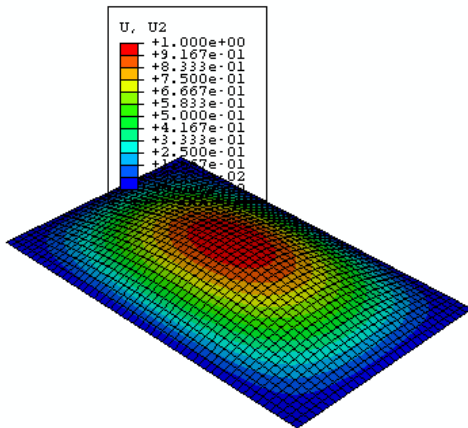
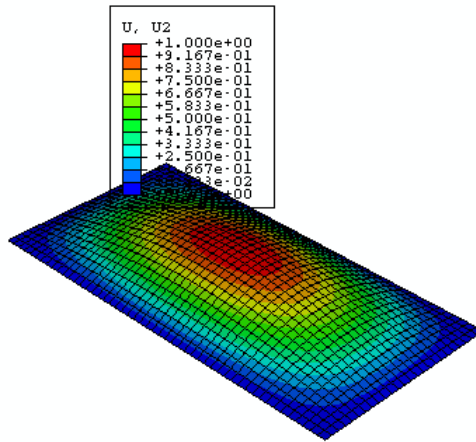
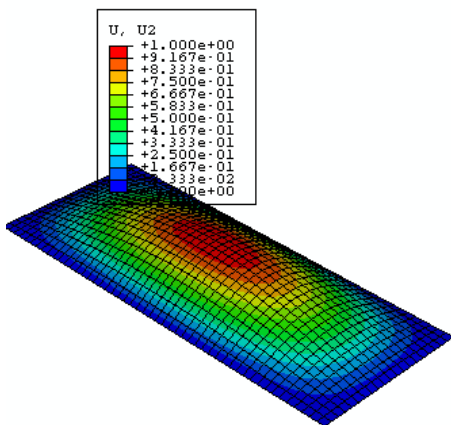
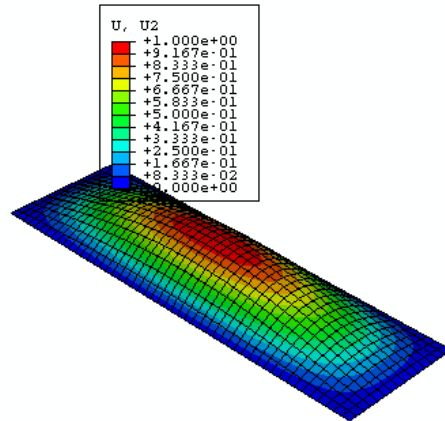
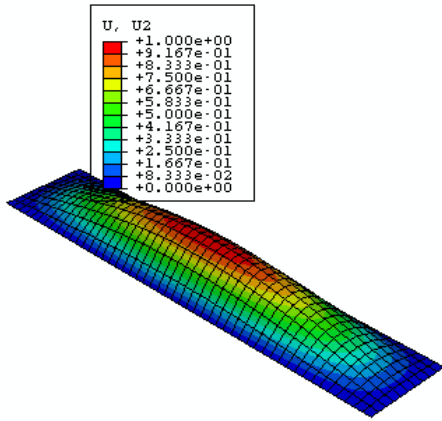
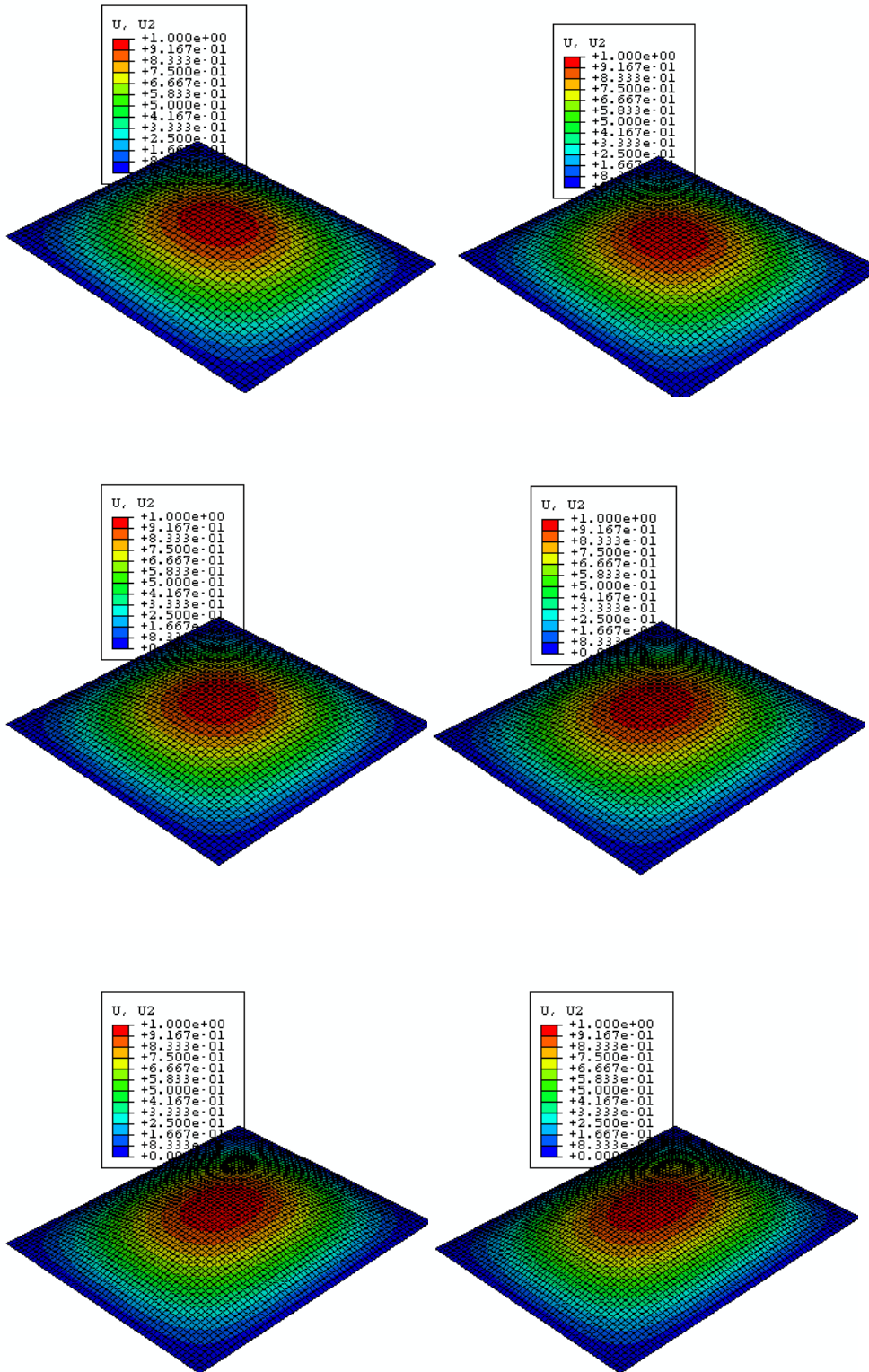
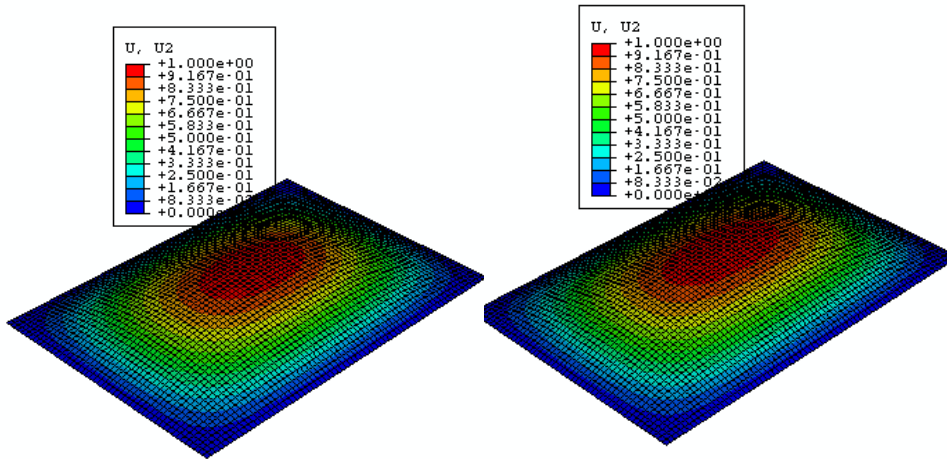


Figure 4.3 : F critique $t = 10 \text{ mm}$ $M = 0.1$ S4







Premiers modes de flambement

4^{ème} cas : $t = 10 \text{ mm}$, maillage 0,5 , élément S4

a/b	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
F cr (kN)	319.6	115.9	67.1	47.9	38.7	33.9	31.4	30.3	30.2	30.6	31.5	32.8	34.3	36.

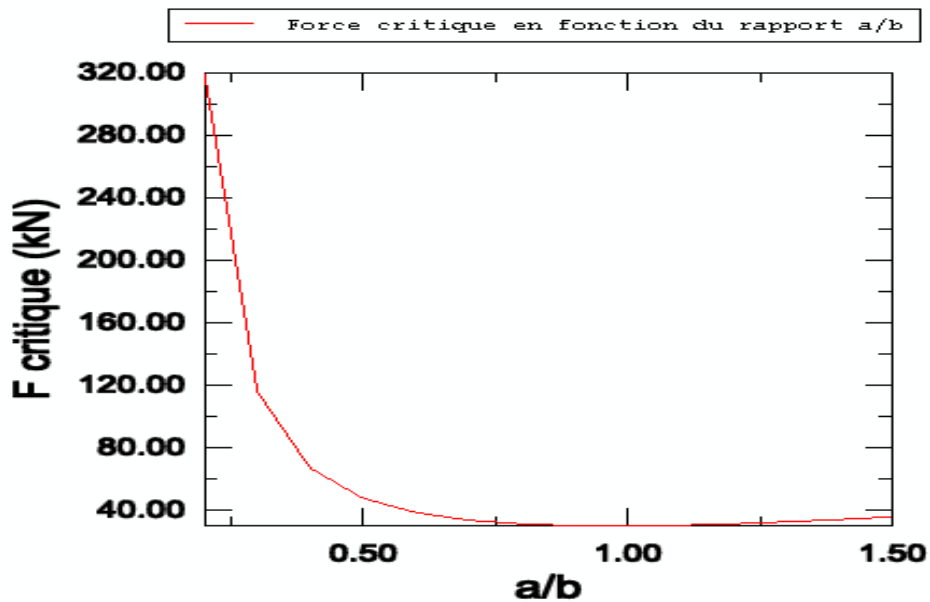
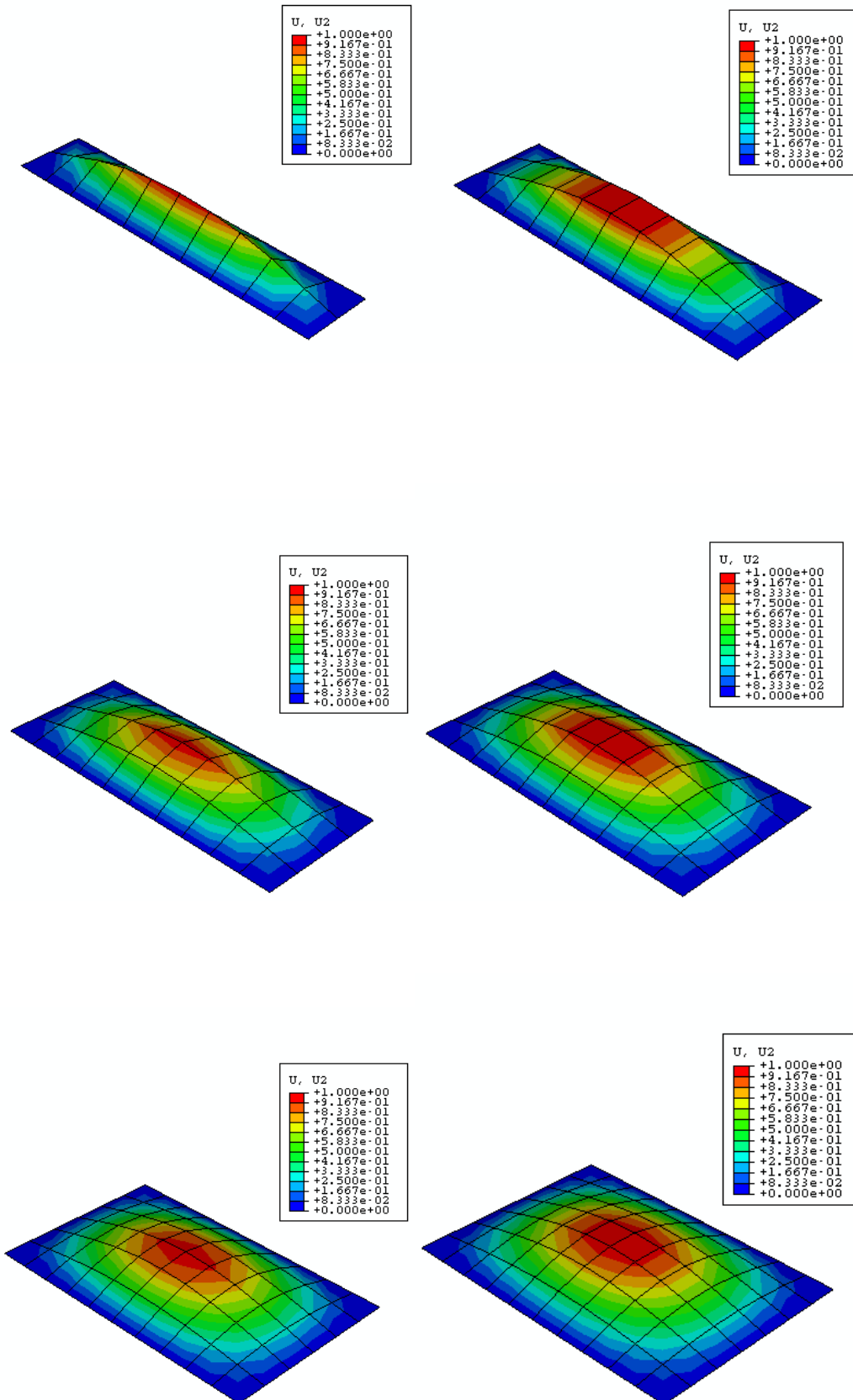
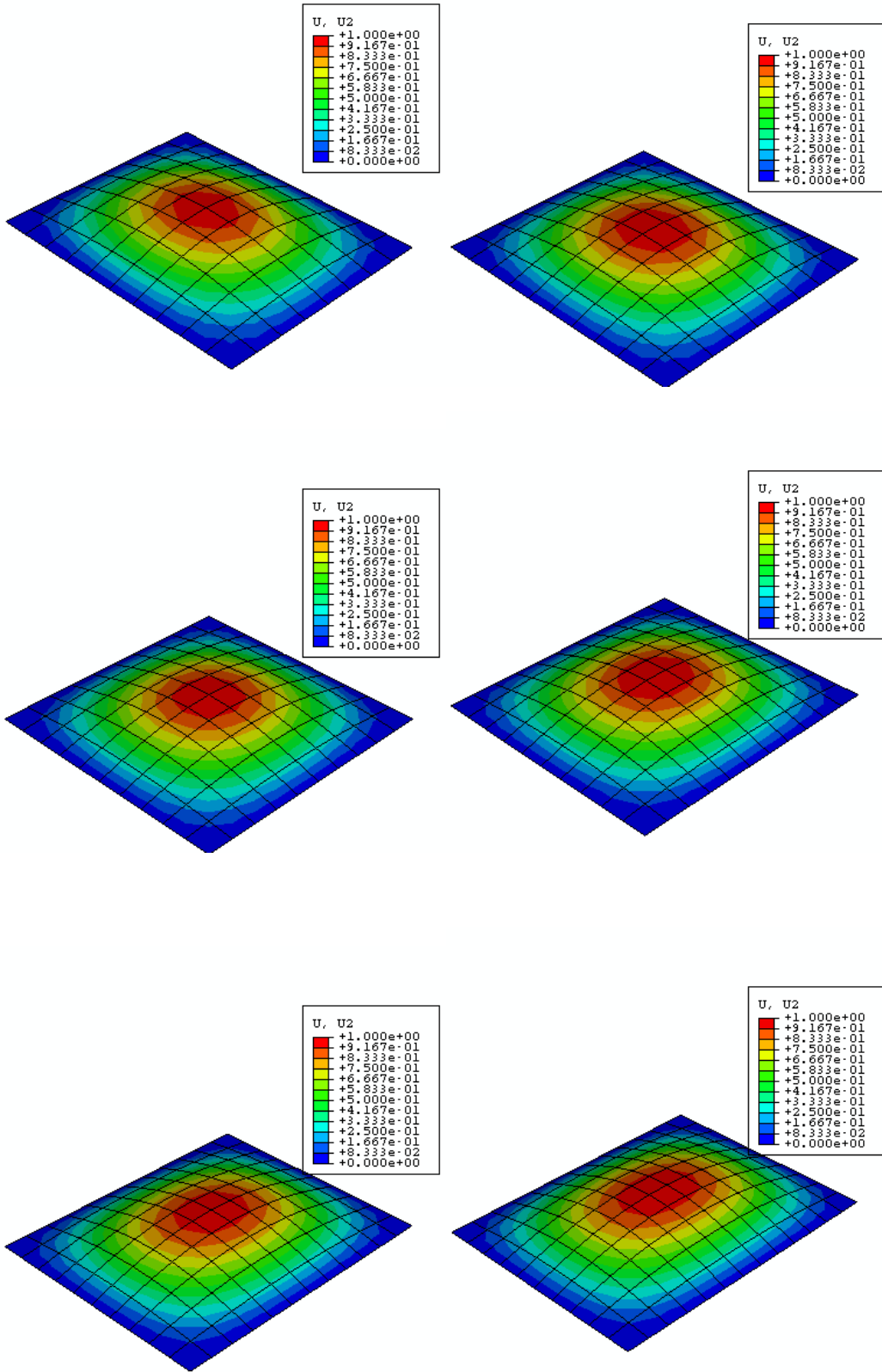
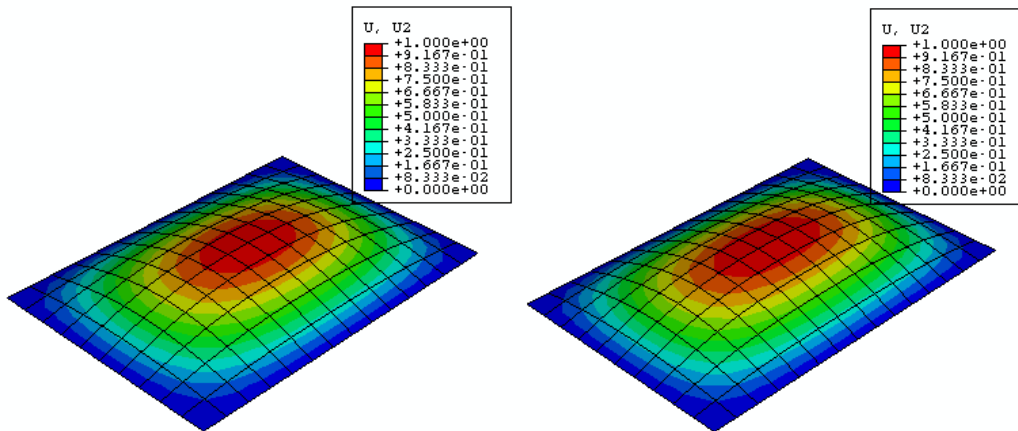


Figure 4.4 : F critique $t = 10 \text{ mm}$ $M = 0.5$ S4







Premiers modes de flambement

5^{ème} cas : $t = 20 \text{ mm}$, maillage 0,1 , élément S4

a/b	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
F _{cr} (kN)	1645.7	787.7	495.7	365.9	300	246.3	246.3	238.	236.6	239.9	246.8	256.3	267.7	280.2

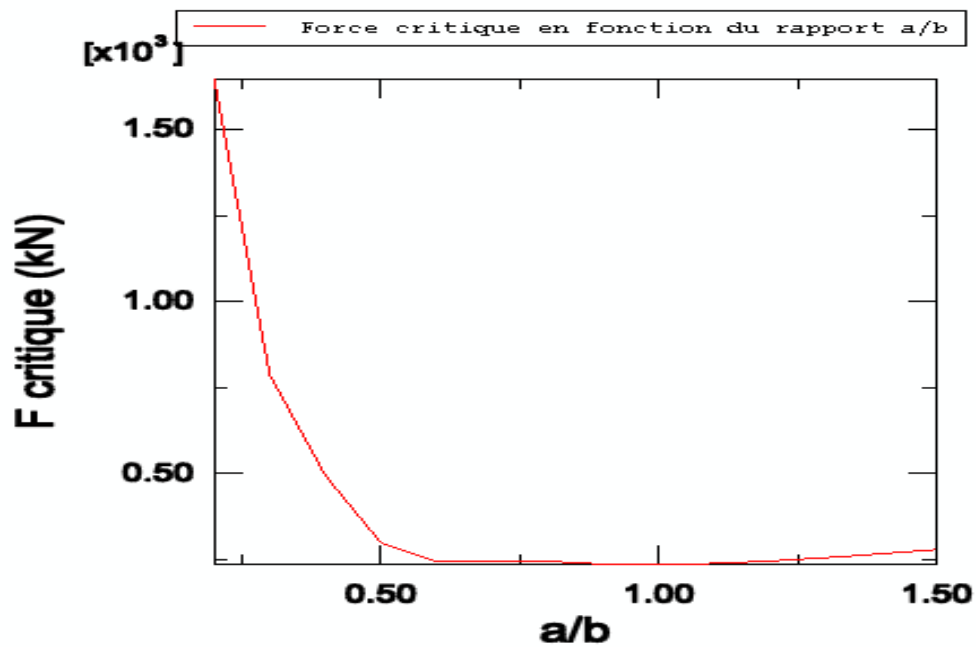
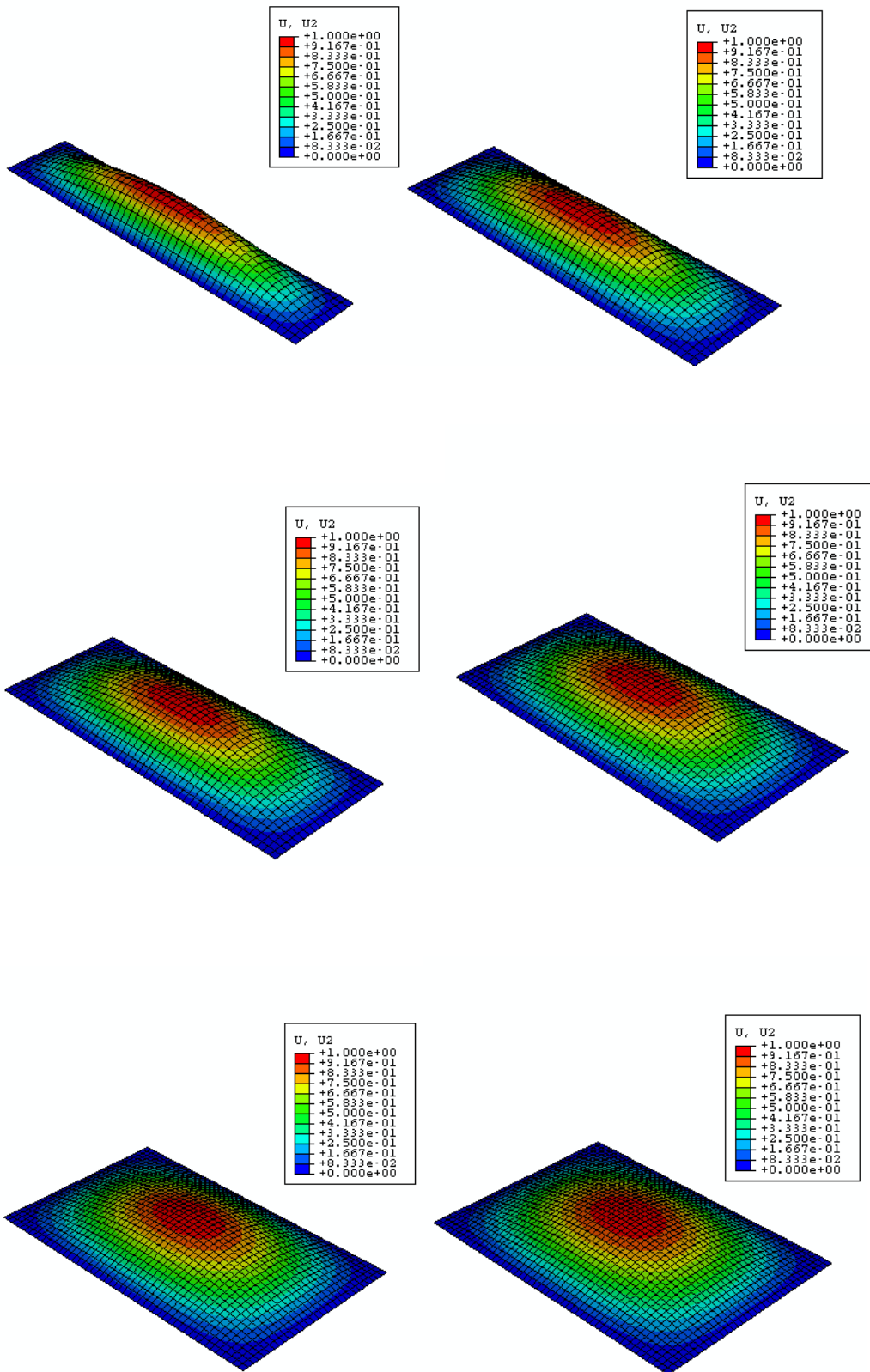
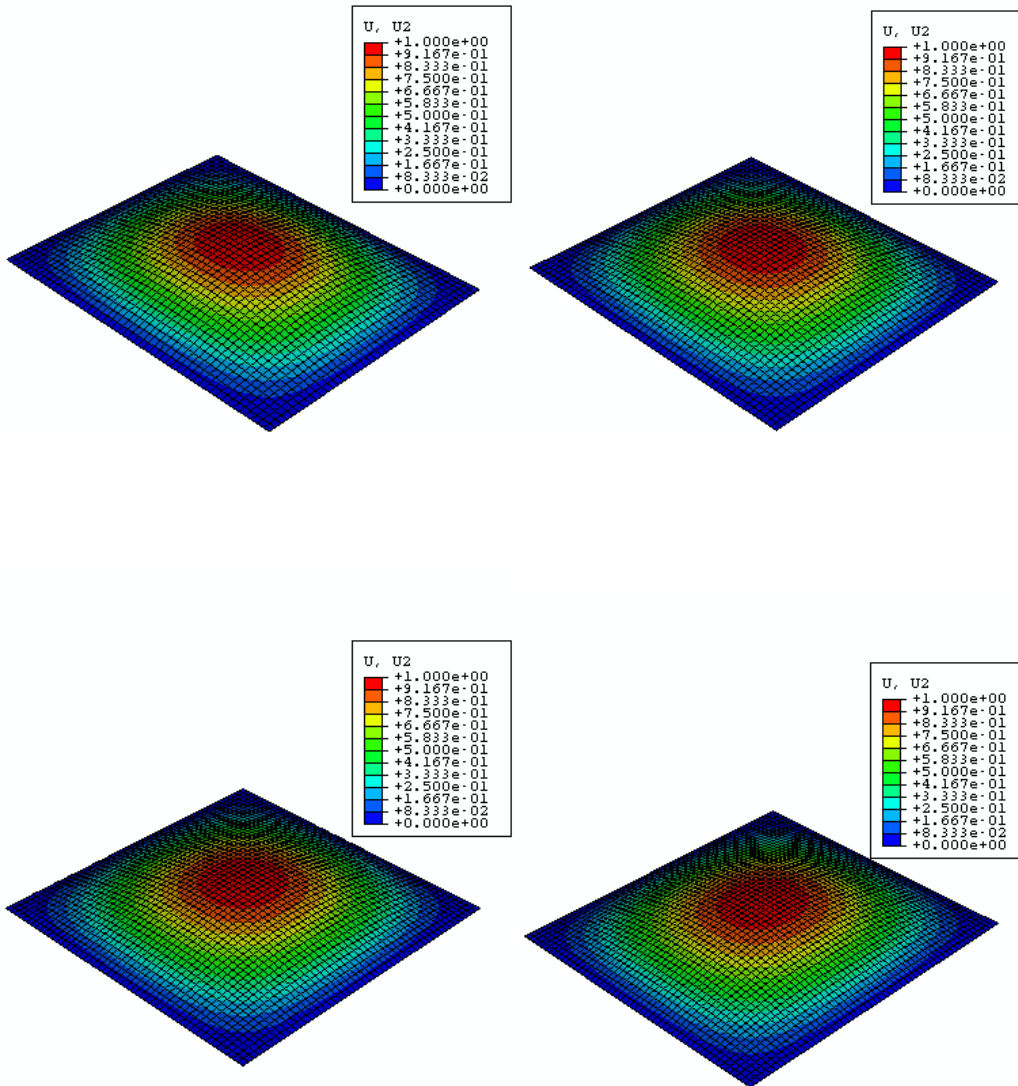
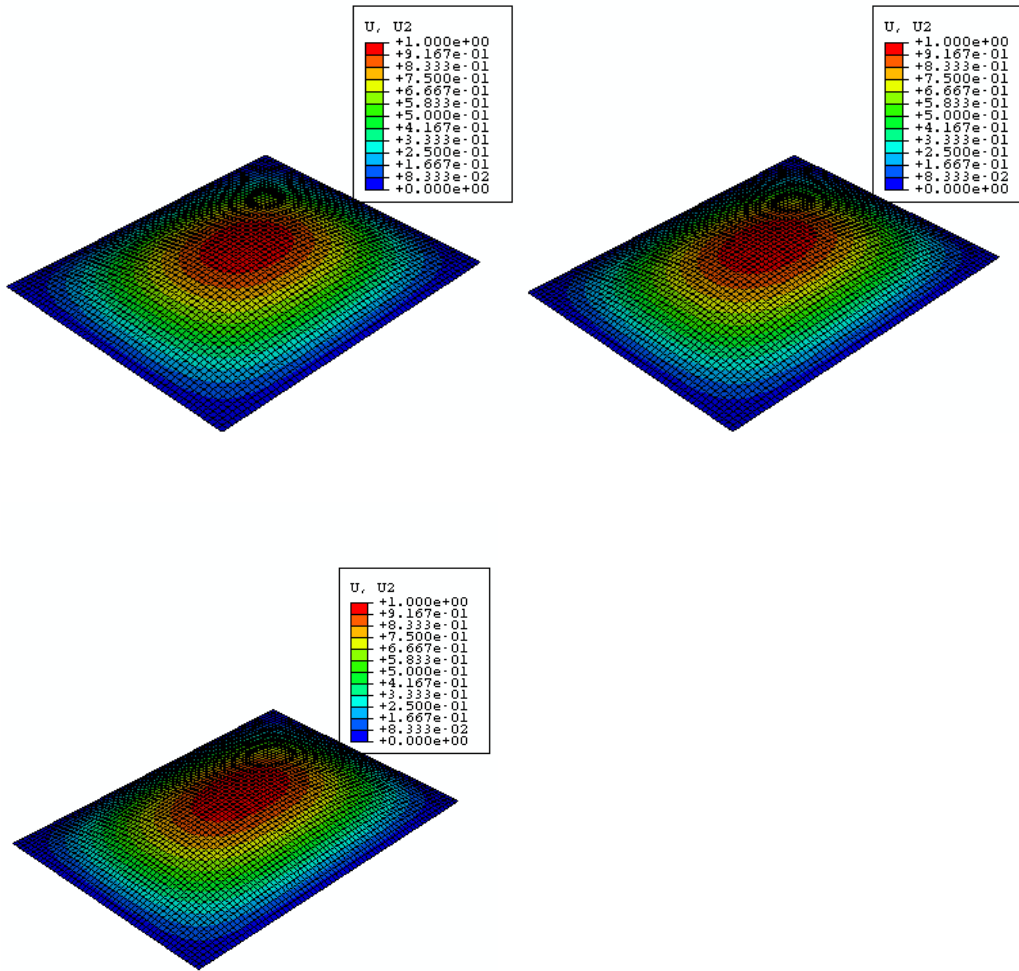


Figure 4.5 : F critique $t = 20 \text{ mm}$ $M = 0.1$ S4







Premiers modes de flambement

6^{ème} cas : $t = 20 \text{ mm}$, maillage 0,5 , élément S4

a/b	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
F _{cr} (kN)	2553.6	926.8	536.9	383.3	309.5	271.3	251.6	242.9	241.5	245.2	252.6	262.6	274.9	288.2

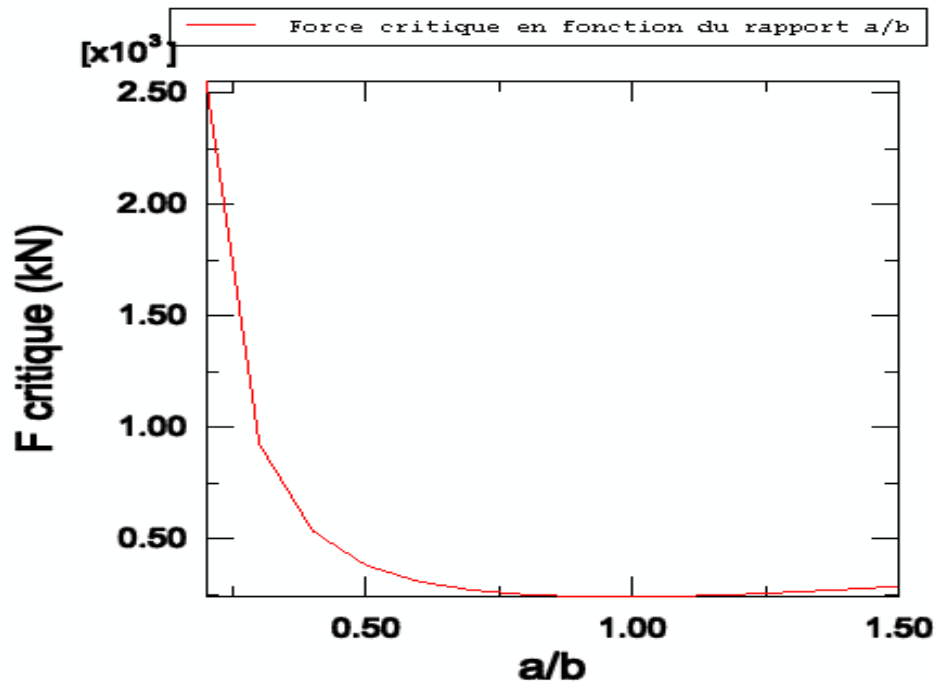
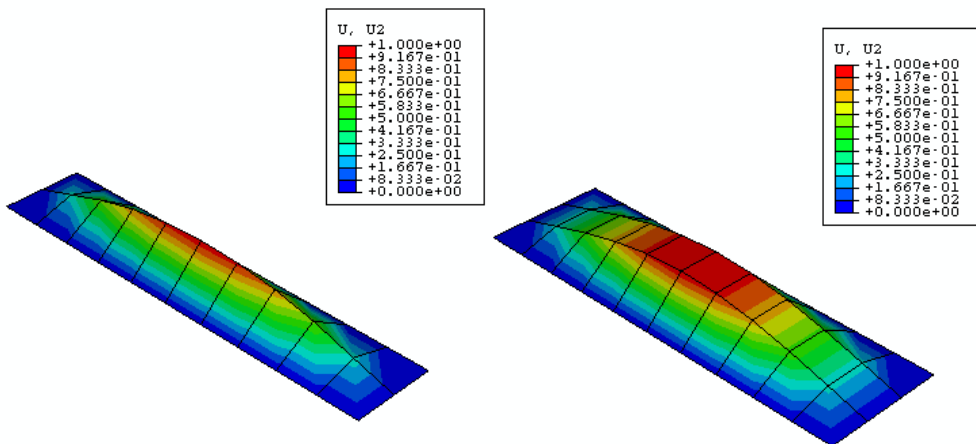
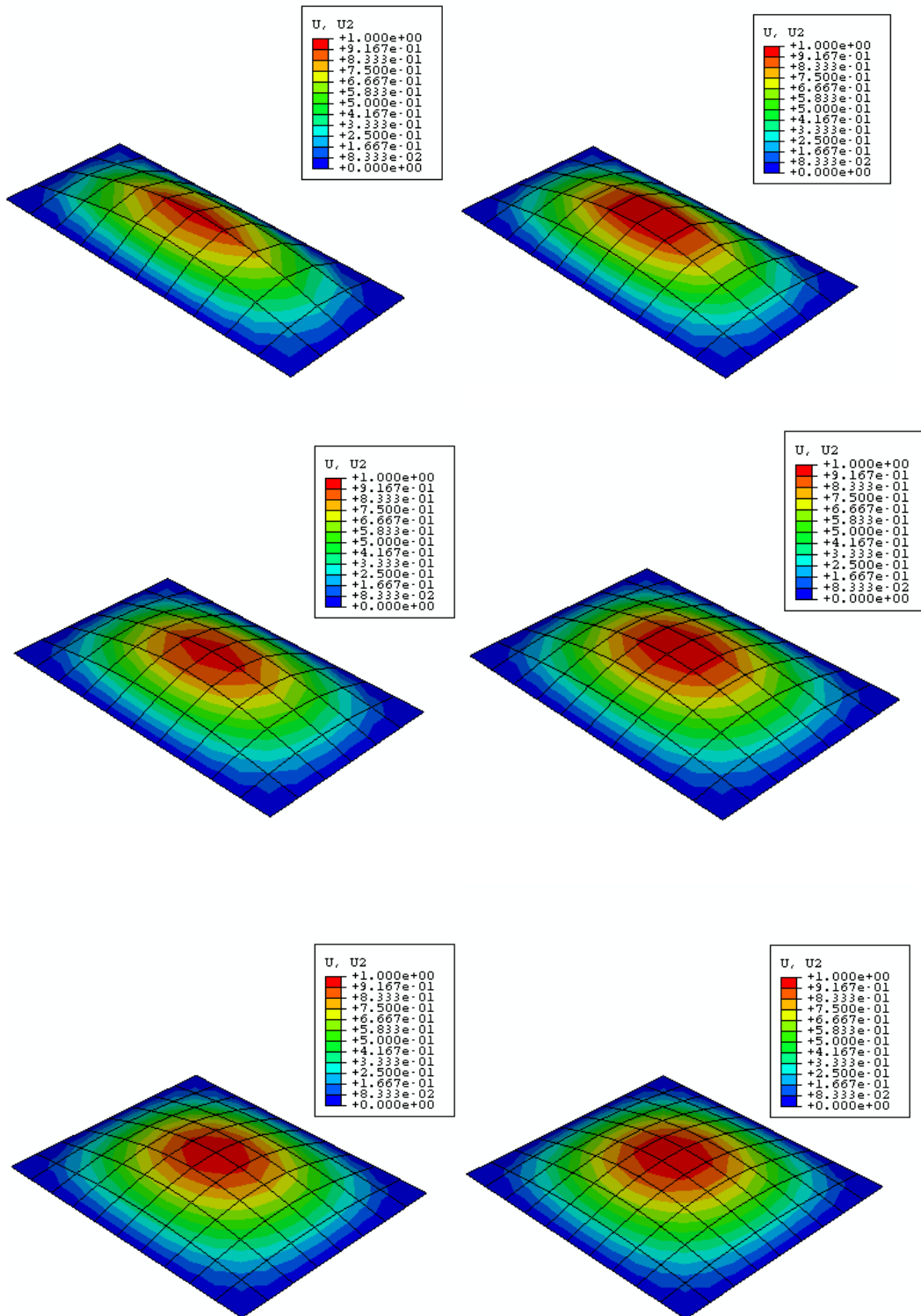
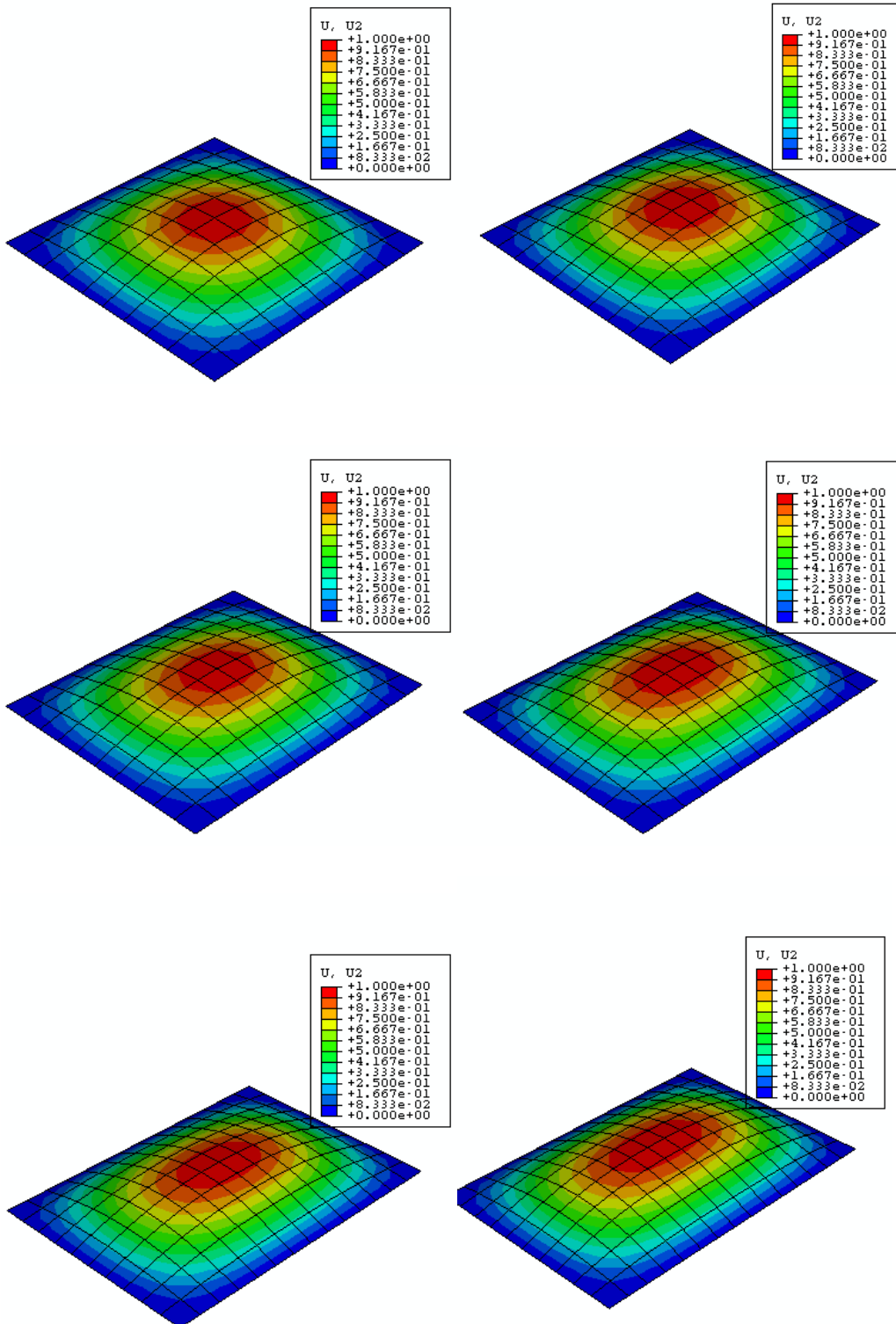


Figure 4.6 : F critique t = 20 mm M = 0.5 S4







Premiers modes de flambement

4-1-1-2 Un côté simplement appuyé et l'autre libre

7^{ème} cas : $t = 4\text{mm}$, maillage 0.1 , éléments S4

a/b	0.5	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.5	3	4	5
F cr (kN)	2.14	0.70	0.56	0.48	0.42	0.39	0.37	0.34	0.333	0.332	0.336

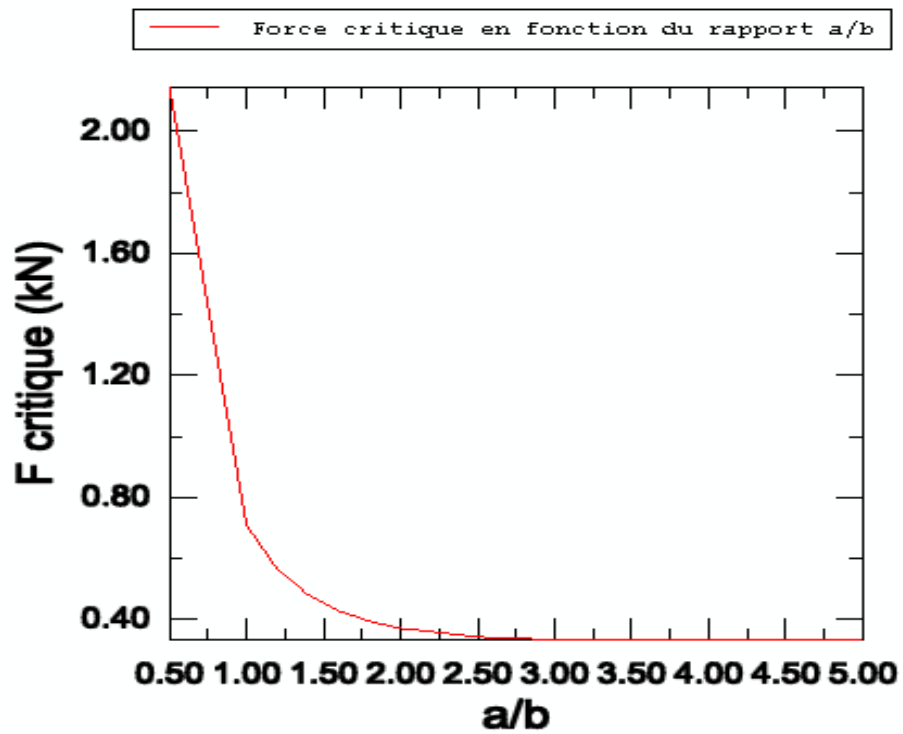
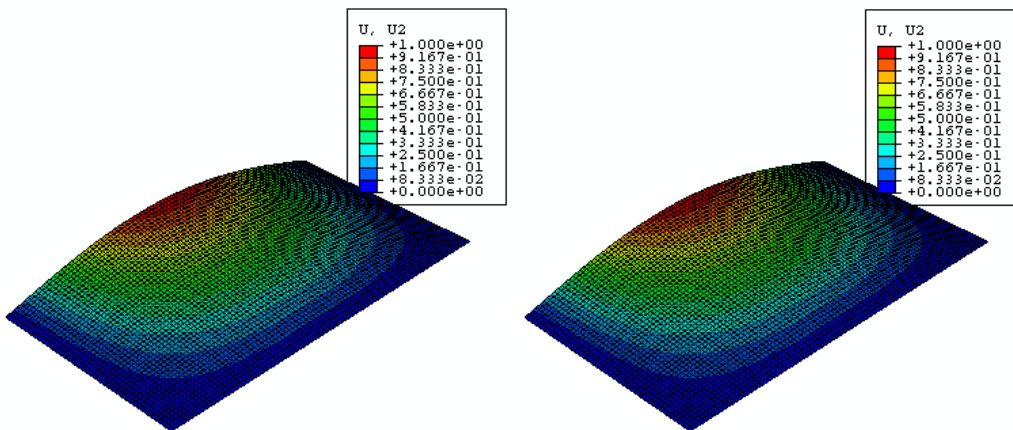
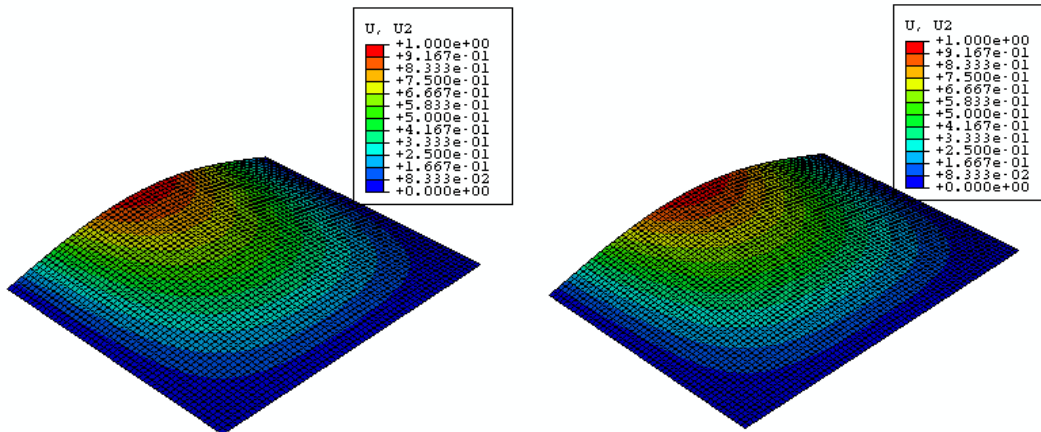
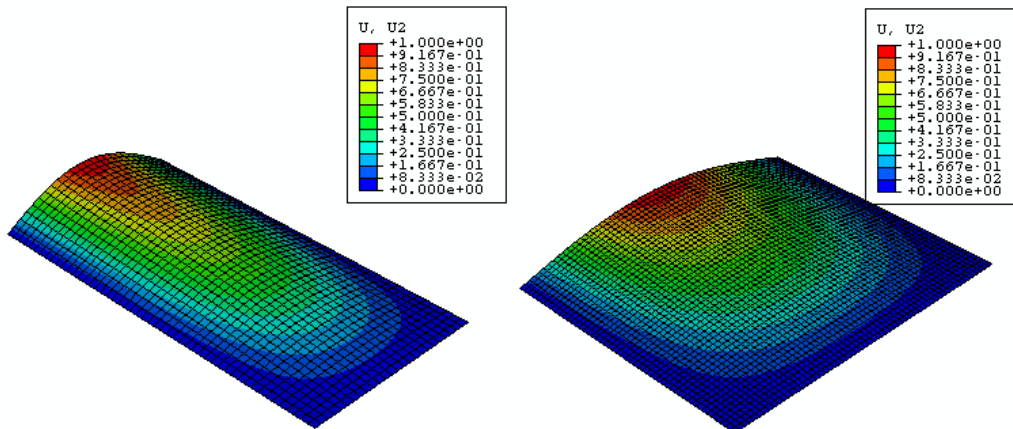
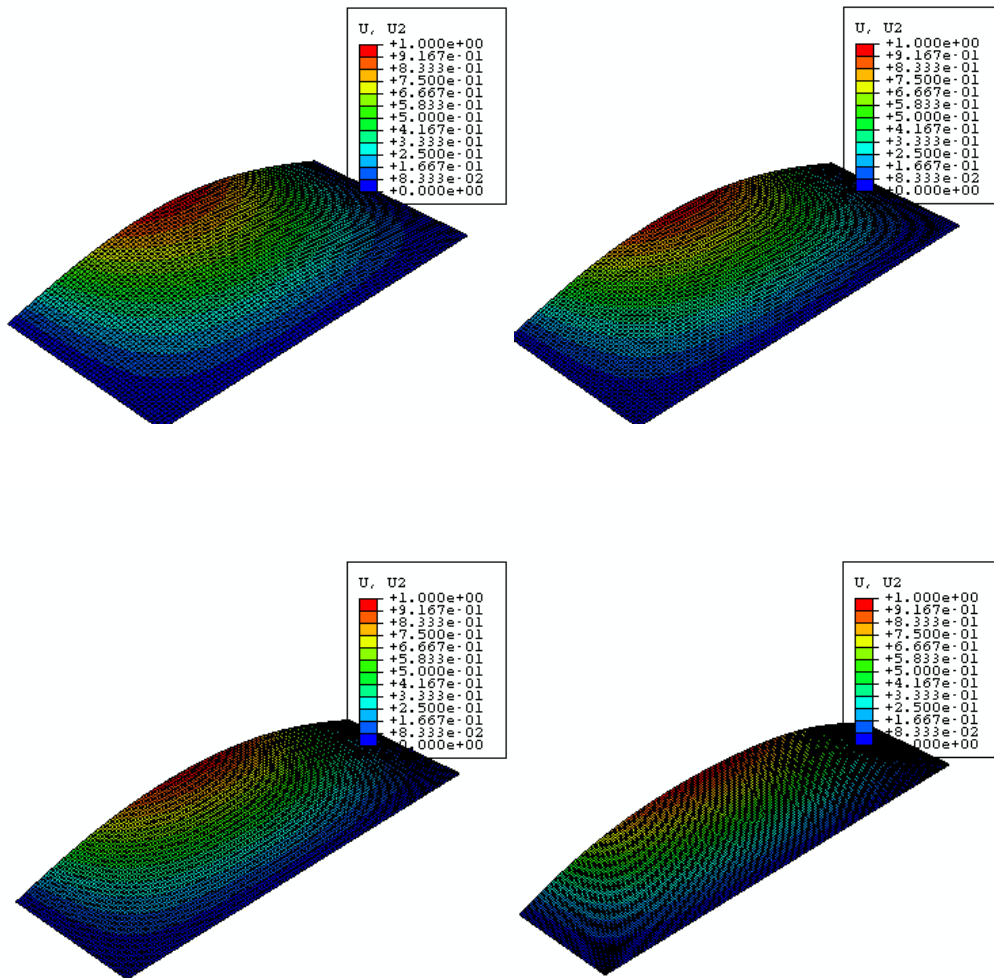


Figure 4.7 : F critique $t = 4\text{ mm}$ $M = 0.1$ S4





Premiers modes de flambement

8^{ème} cas : $t = 4 \text{ mm}$, maillage 0.5 , élément S4

a/b	0.5	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.5	3	4	5
F _{cr} (kN)	2.27	0.71	0.56	0.48	0.49	0.39	0.37	0.34	0.334	0.334	0.337

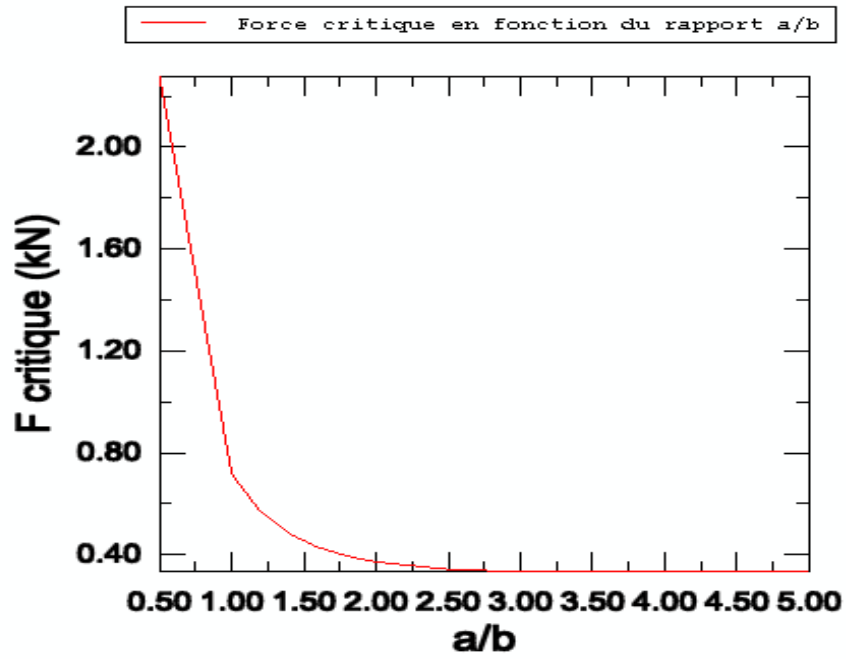
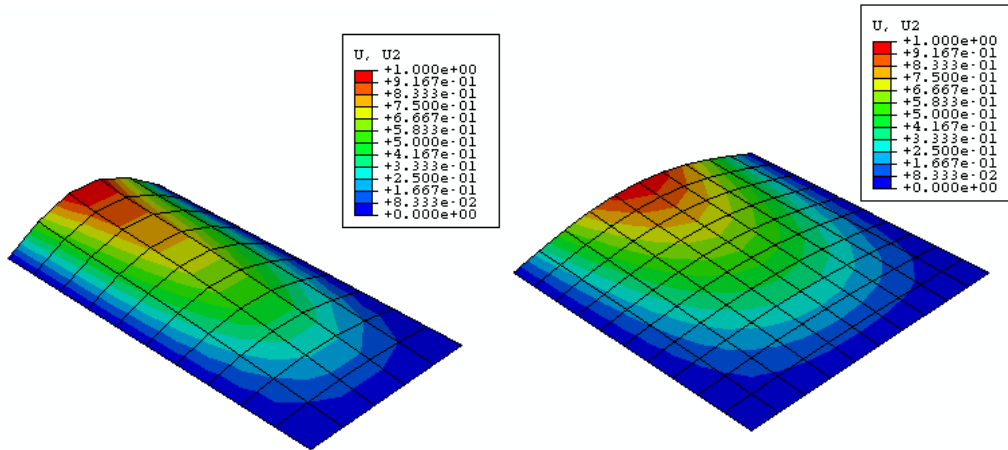
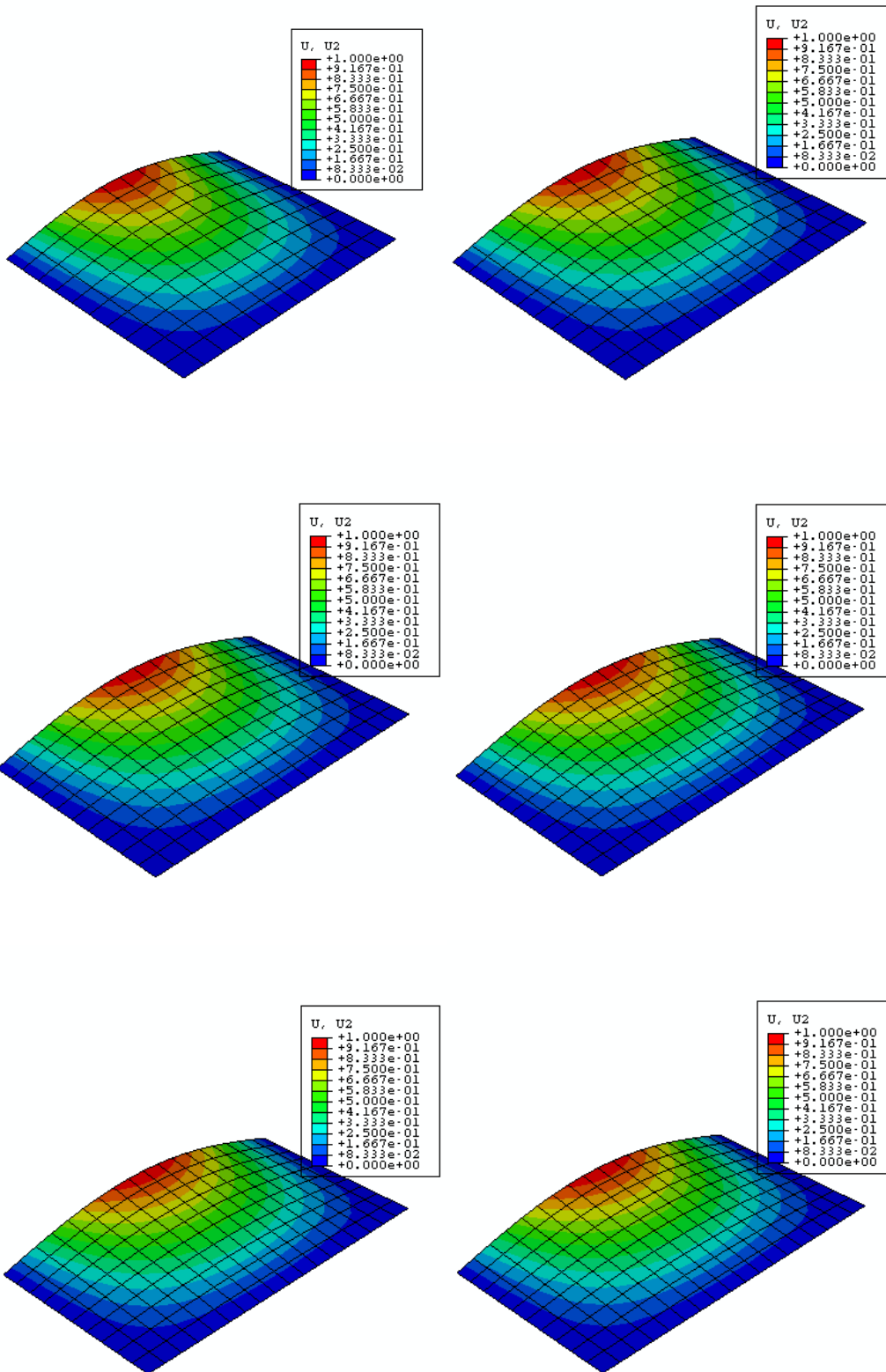
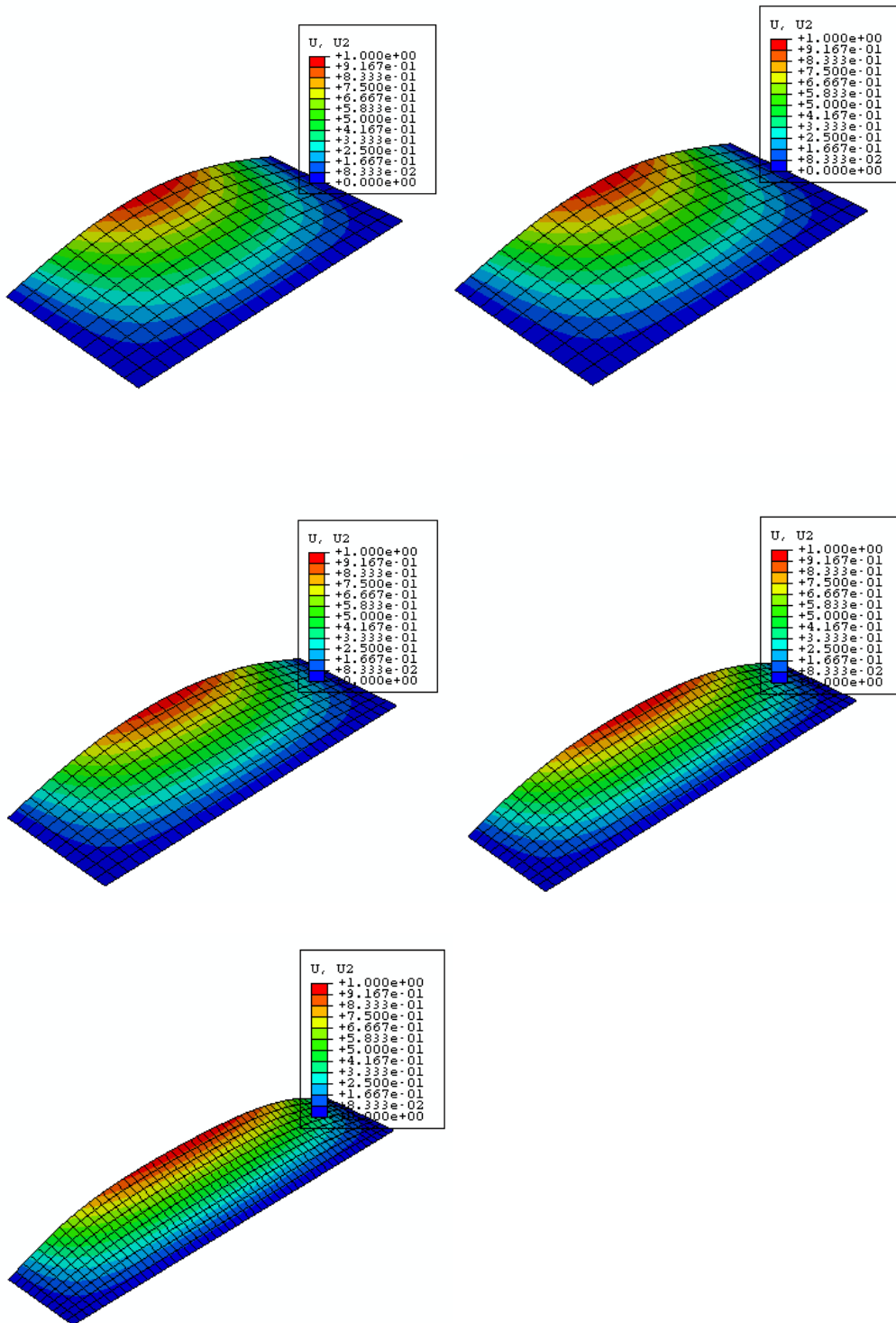


Figure 4.8 : F critique t = 4 M = 0.5 S4







Premiers modes de flambement

9^{ème} cas : $t = 20 \text{ mm}$, maillage 0.1 , élément S4

a/b	0.5	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.5	3	4	5
F cr (kN)	268.	88.4	70.5	59.9	53.3	49.1	46.3	42.7	41.6	41.5	54.

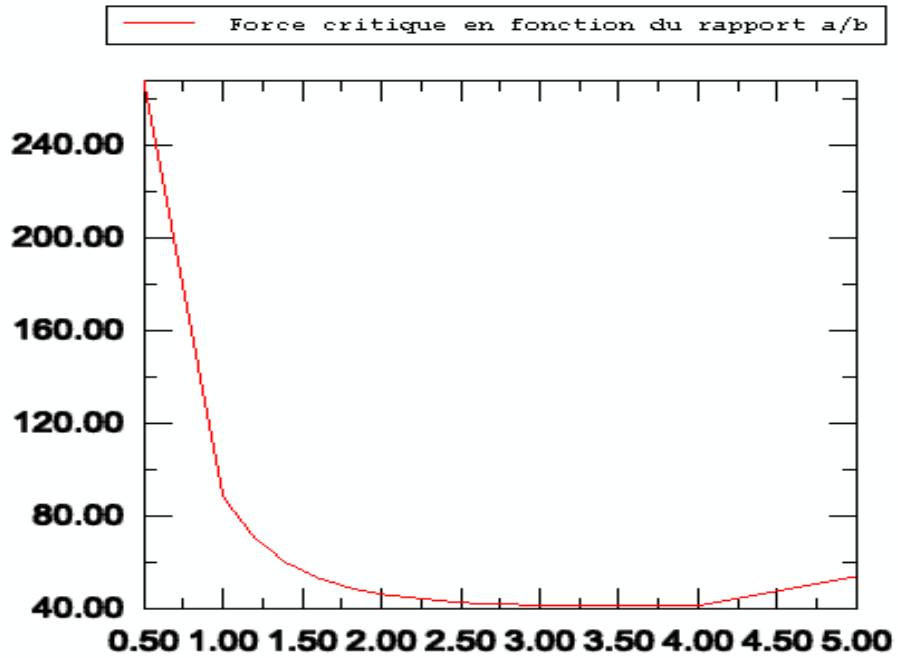
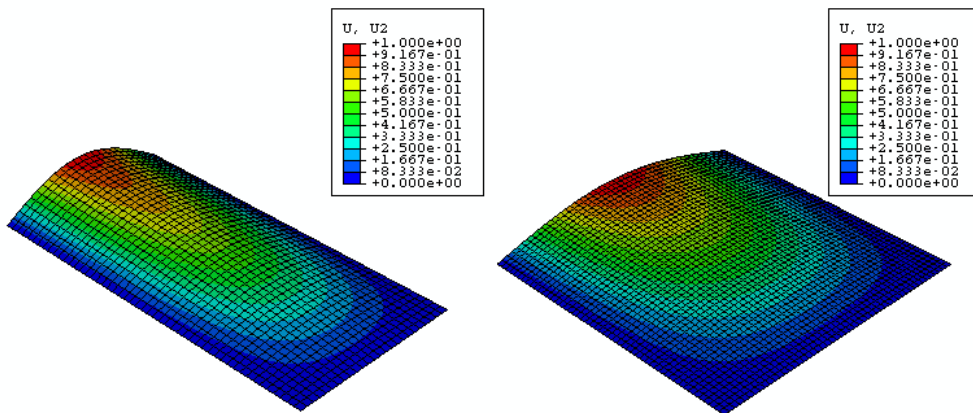
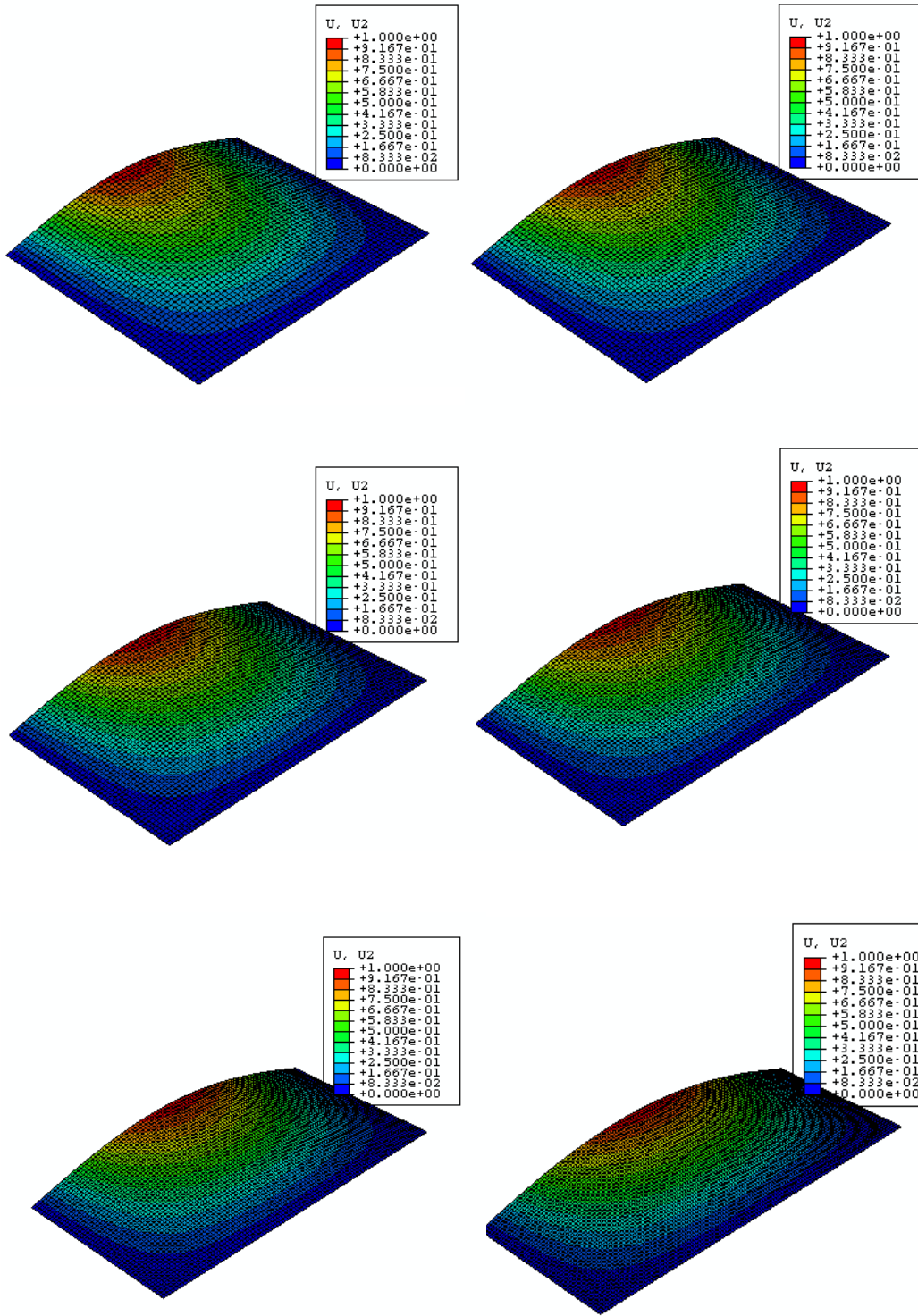
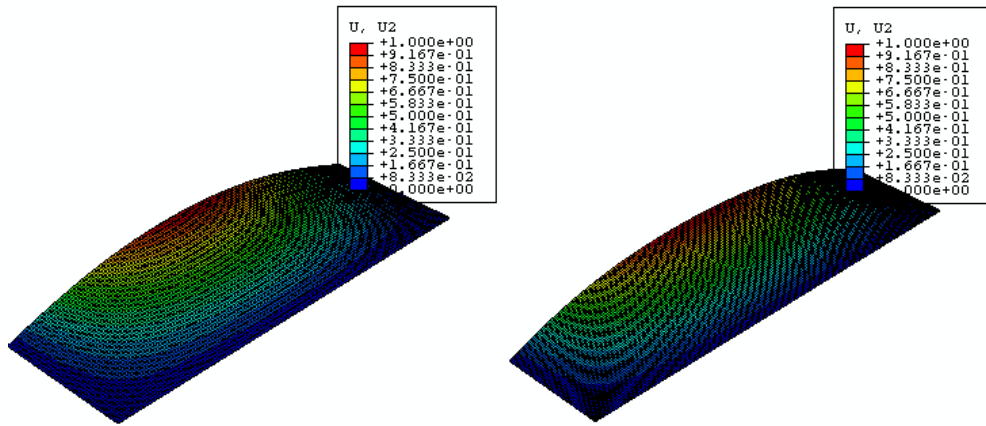


Figure 4.9 : F critique $t = 20 \text{ mm}$ $M = 0.1$ S4







Premiers modes de flambement

10^{ème} cas : $t = 20 \text{ mm}$, maillage 0.5 , élément S4

a/b	0.5	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.5	3	4	5
F cr (kN)	284.6	89.63	71.15	60.37	53.68	49.37	46.53	42.94	41.79	41.75	42.17

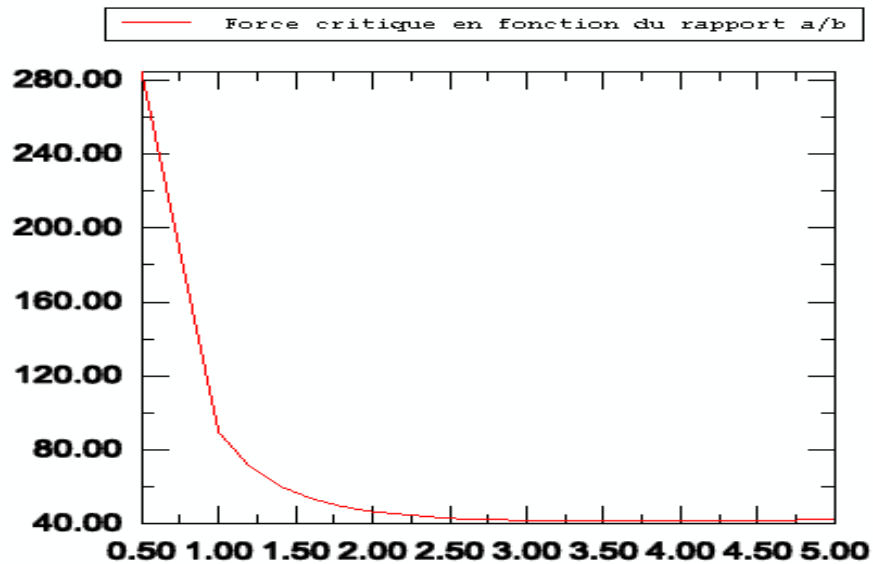
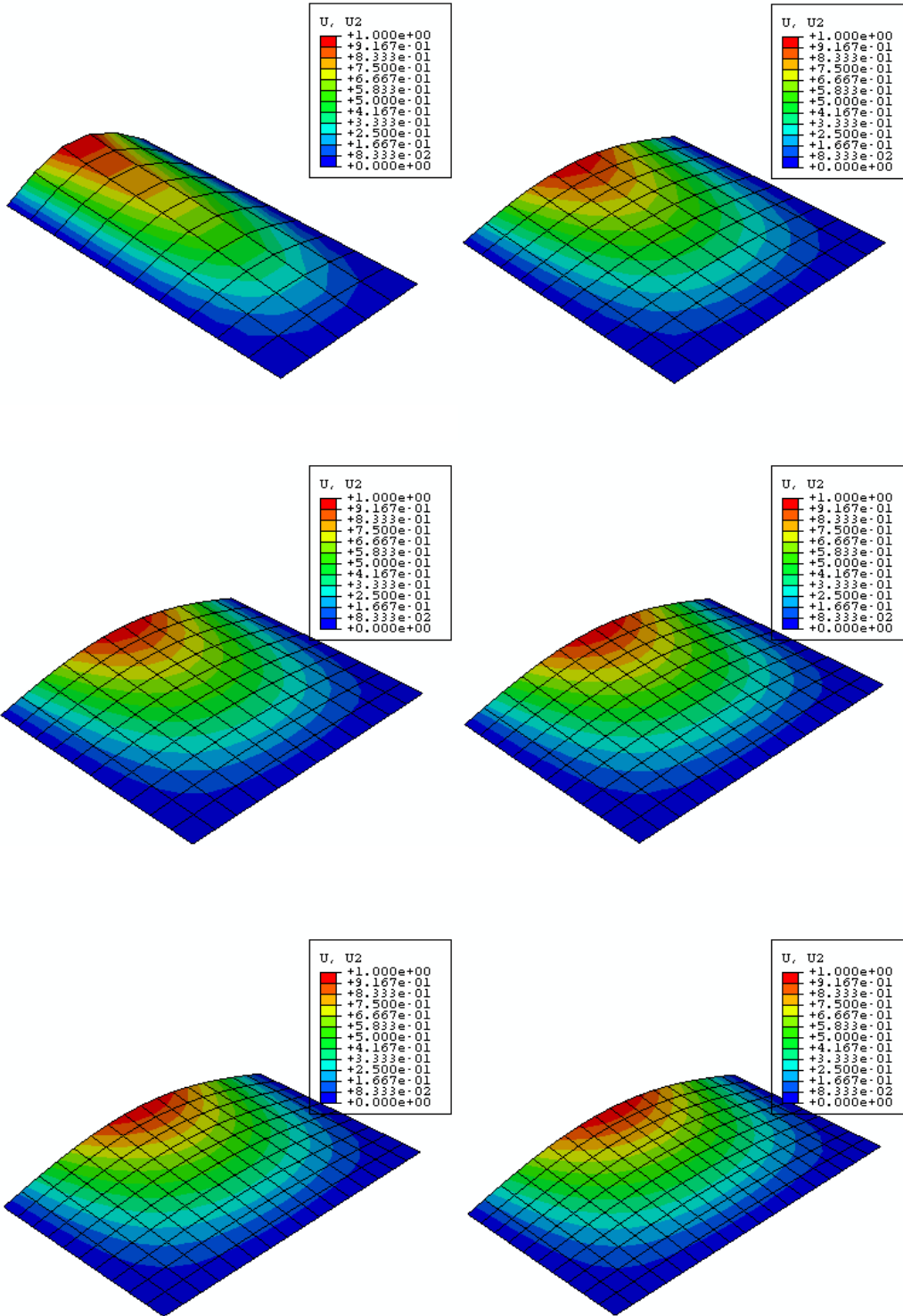
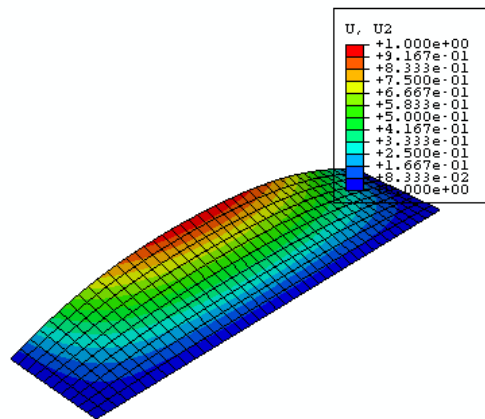
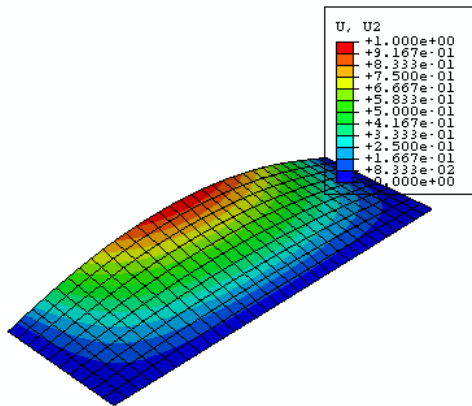
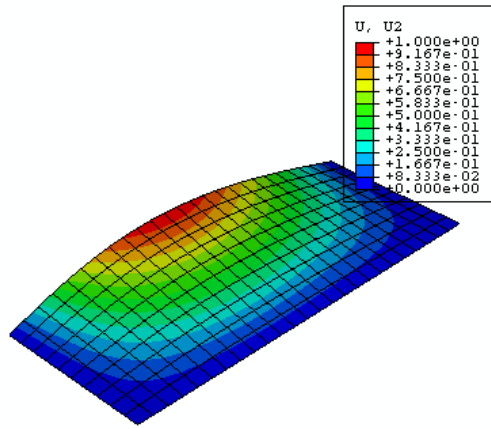
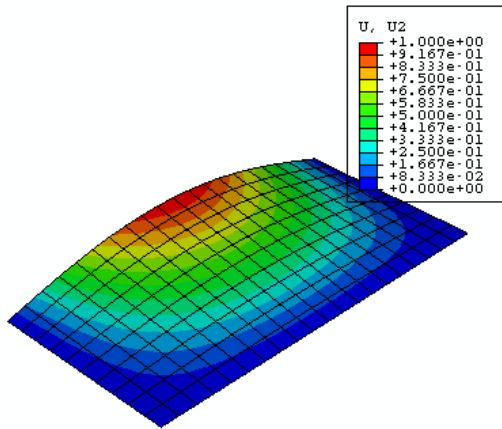
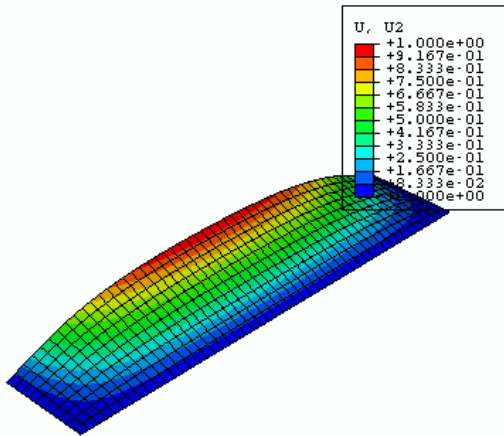


Figure 4.10 : F critique $t=20\text{mm}$ $M=0.5$ S4







Premiers modes de flambement

4-1-1-3 Deux côtés encastrés

11^{ème} cas : $t = 4 \text{ mm}$, maillage 0.1 , élément S4

a/b	0.4	0.5	0.7	0.8	0.9	1
F cr (kN)	4.4038	3.547	3.2219	3.3782	3.657	4.0238

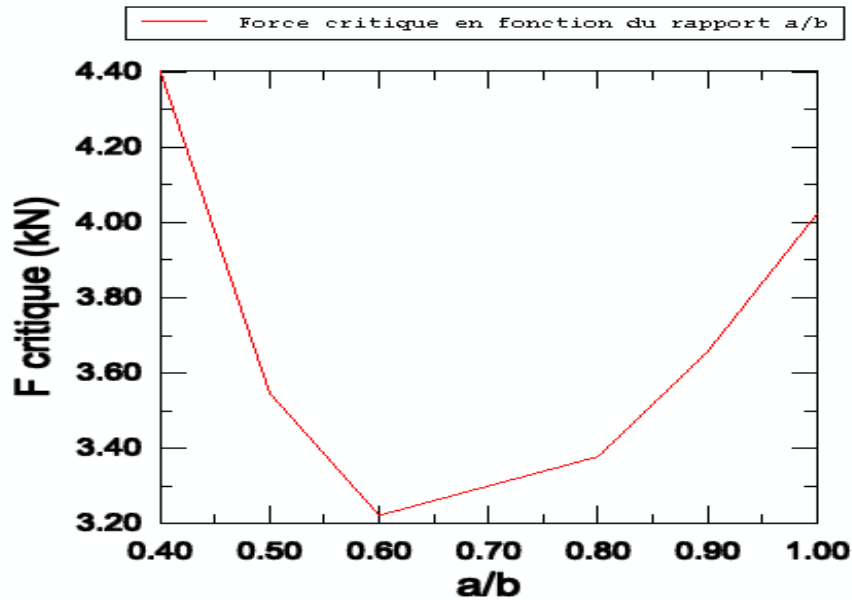
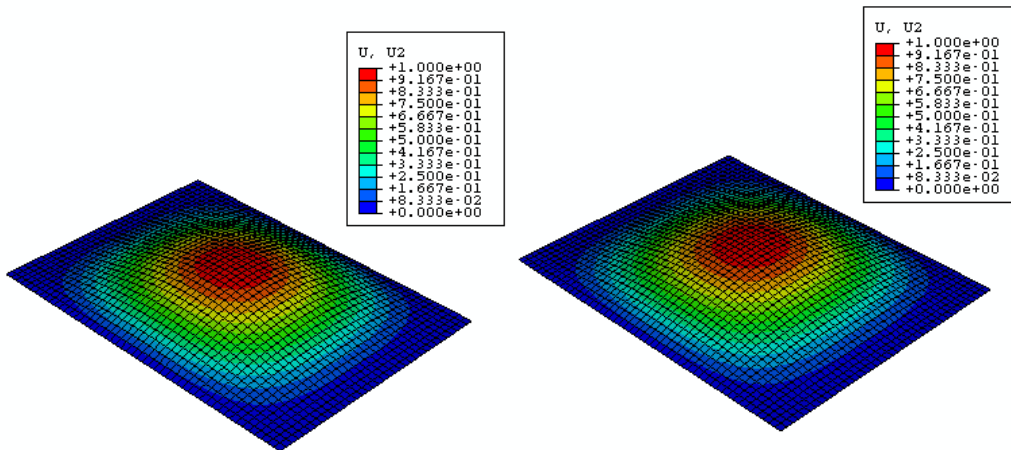
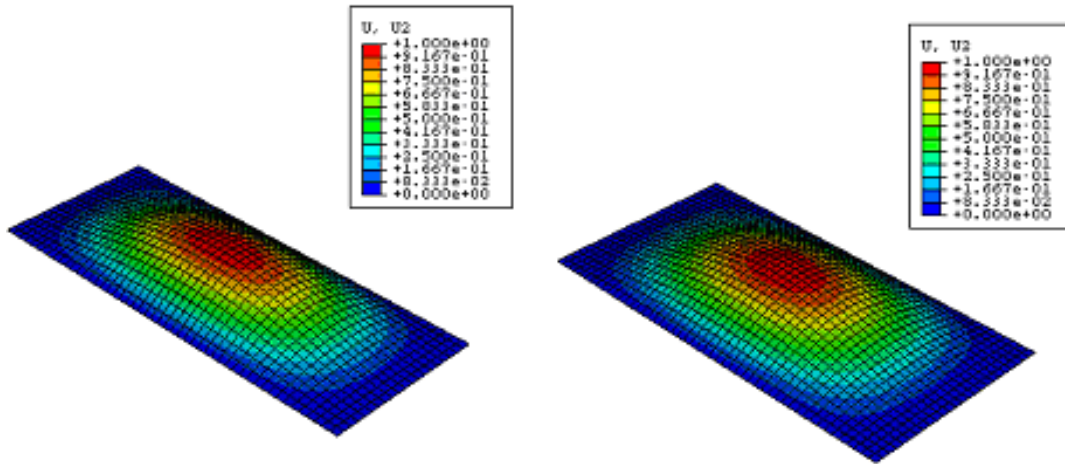
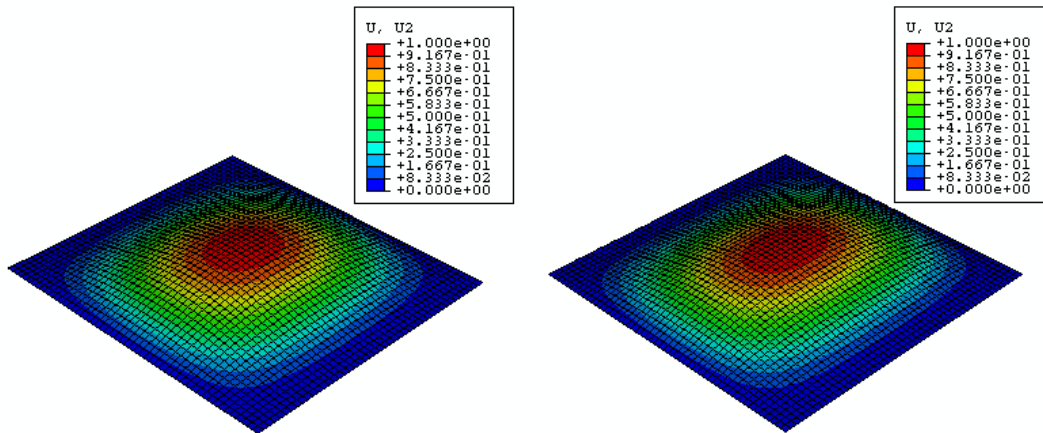


Figure 4.11 : F critique $t = 4 \text{ mm}$ $M = 0.1$ S4





Premiers modes de flambement

12^{ème} cas : $t = 4 \text{ mm}$, maillage 0.5 , élément S4

a/b	0.4	0.5	0.7	0.8	0.9	1
F _{cr} (kN)	4.718	3.68809	3.3202	3.496	3.808	4.217

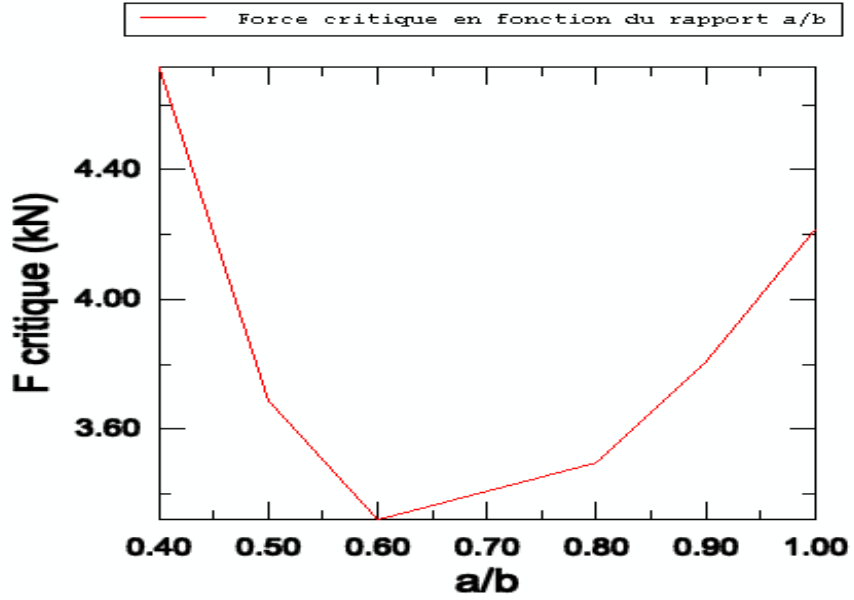
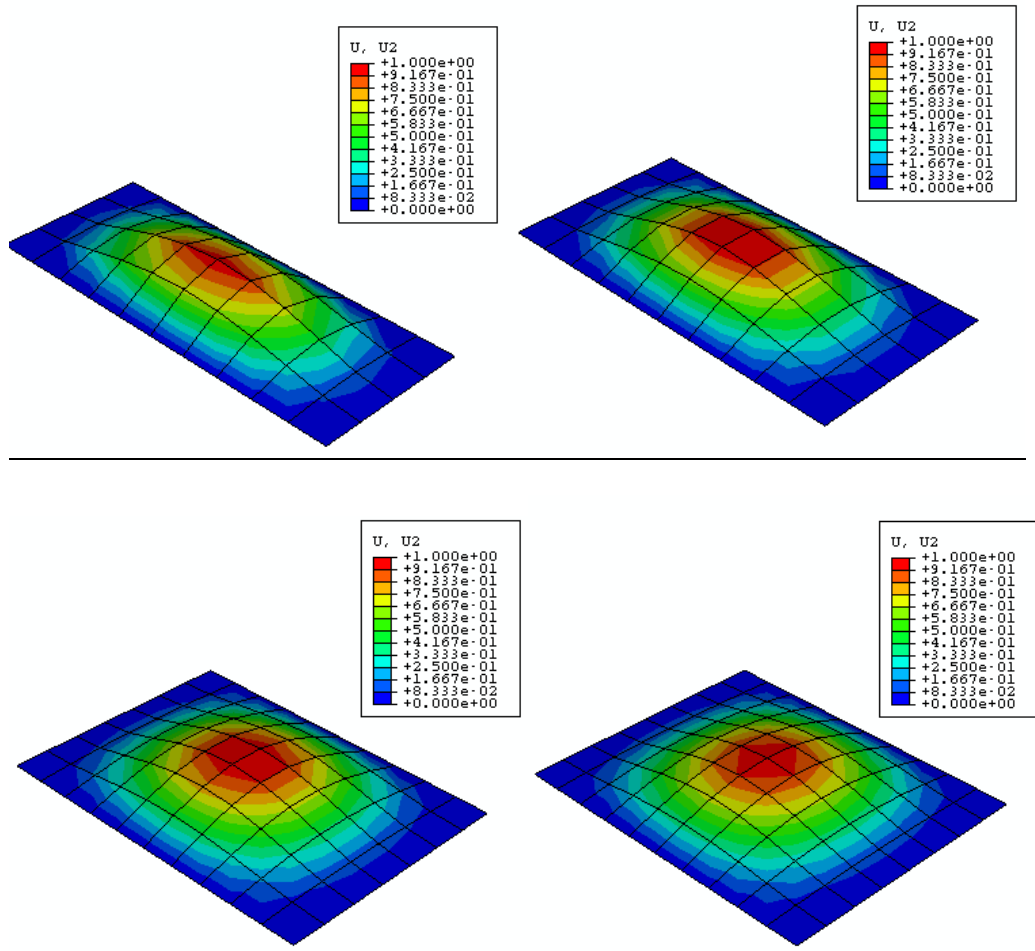
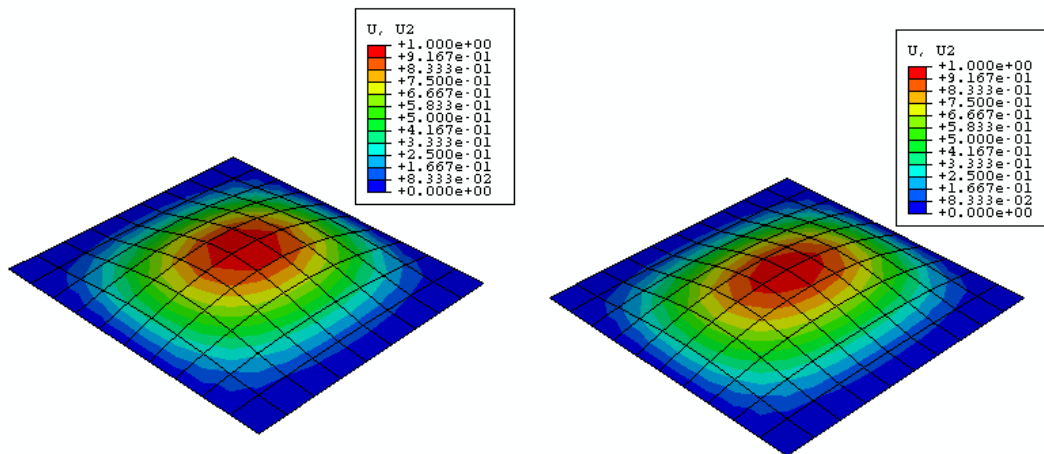


Figure 4.12 : F critique t=4mm M=0.1 S4





Premiers modes de flambement

13^{ème} cas : $t = 20 \text{ mm}$, maillage 0.1 , élément S4

a/b	0.4	0.5	0.7	0.8	0.9	1
F cr (kN)	550.3	443.4	402.72	422.27	457.21	503

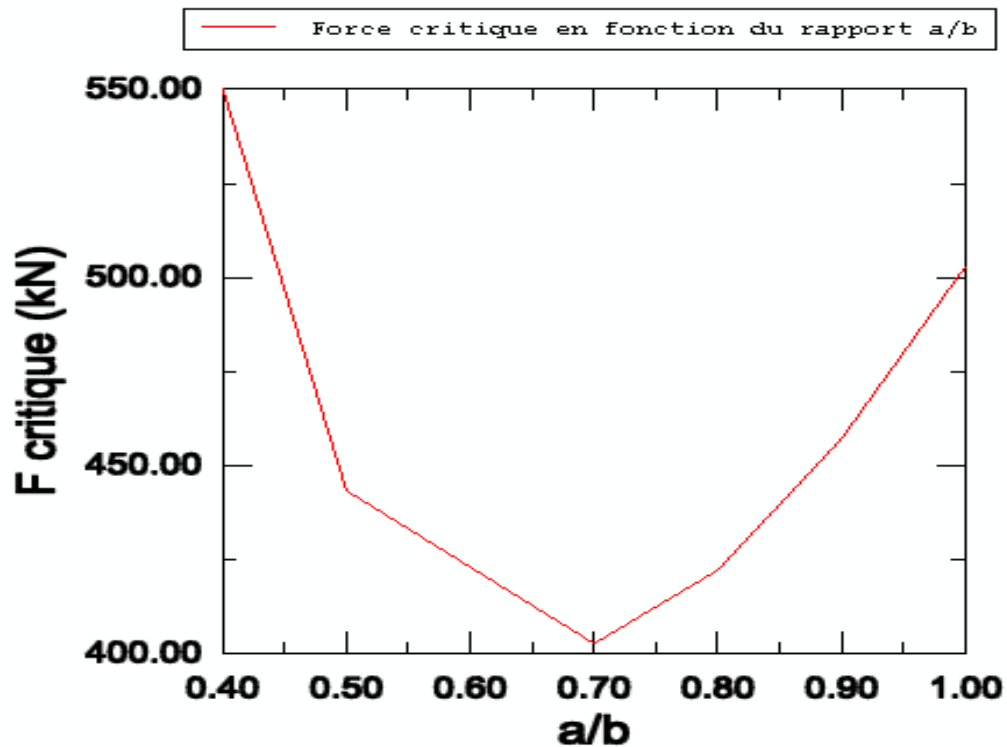
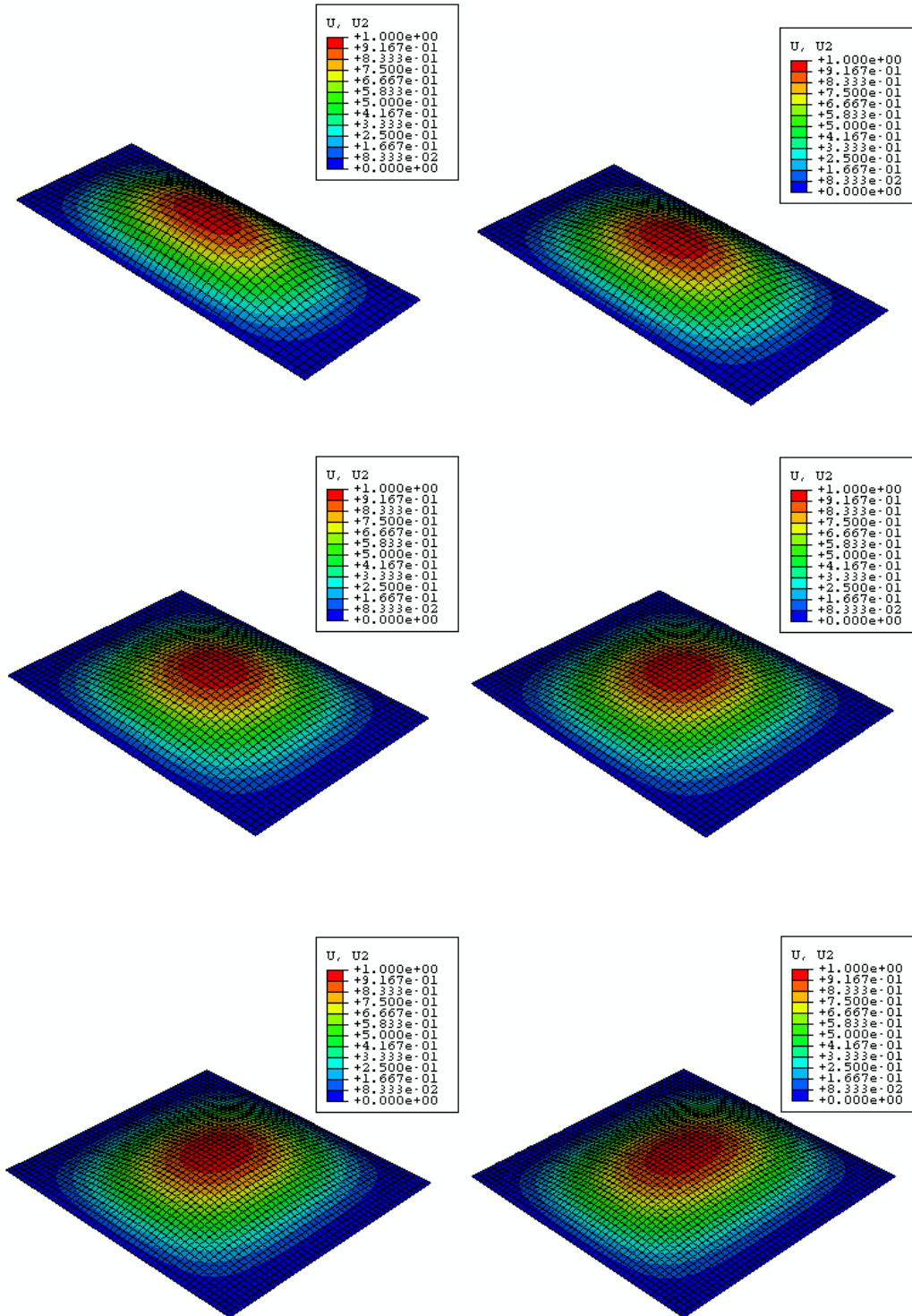


Figure 4.13 : F critique t=20mm M=0.1 S4



Premiers modes de flambement

14^{ème} cas : $t = 20 \text{ mm}$, maillage 0.5 , élément S4

a/b	0.4	0.5	0.7	0.8	0.9	1
F cr (kN)	589.5	460.875	414.94	436.965	475.915	527.05

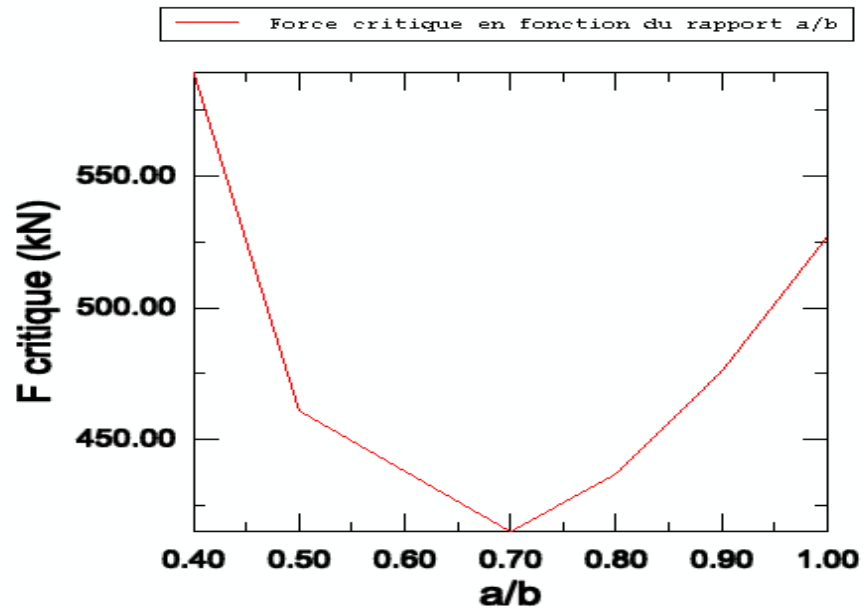
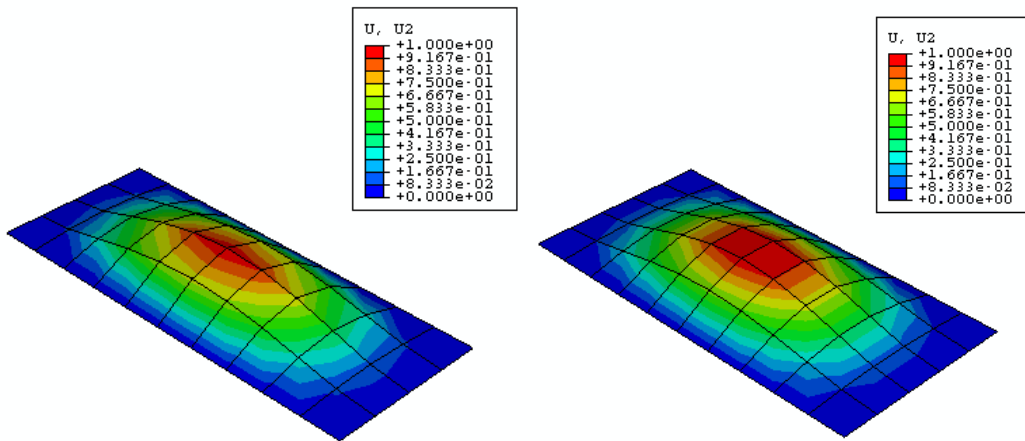
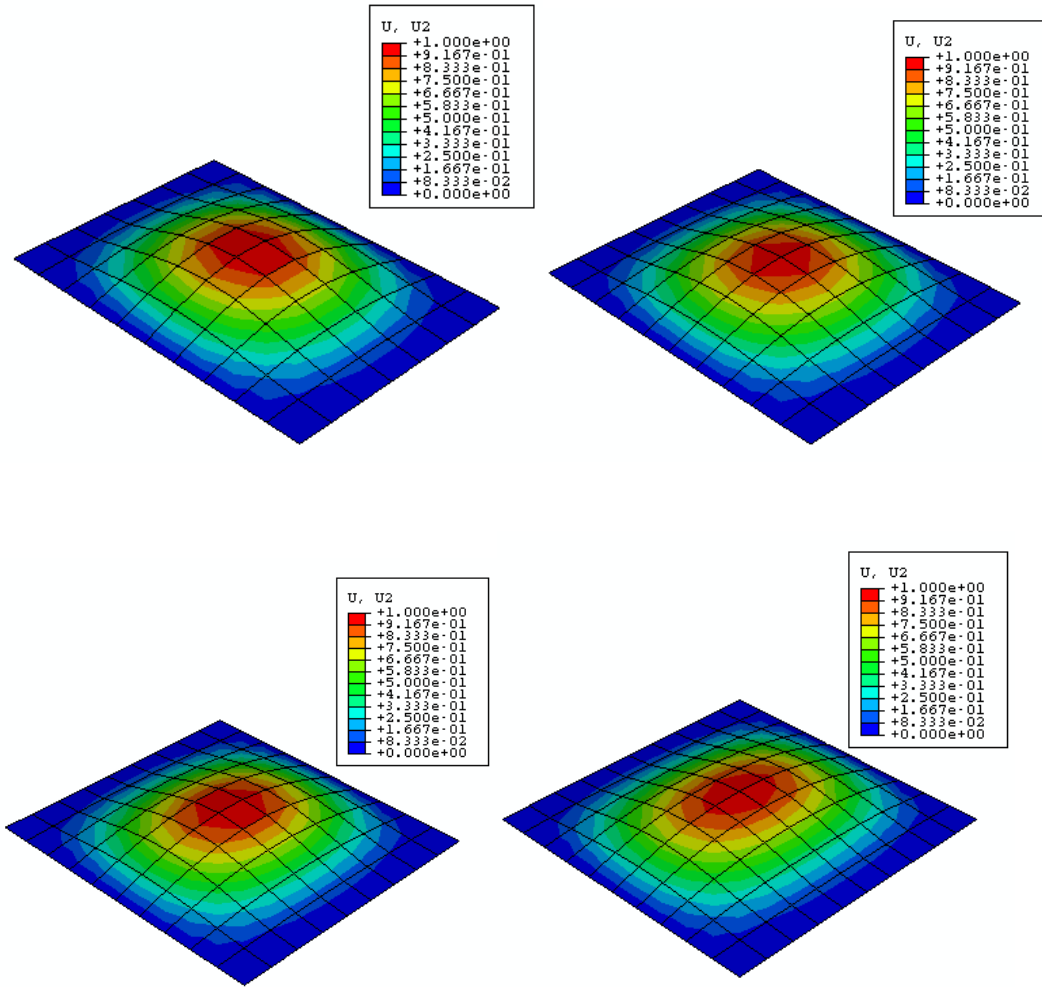


Figure 4.14 : F critique $t=20\text{mm}$ $M=0.5$ S4





Premiers modes de flambement

4-1-1-4 Un côté encastré et l'autre libre

15^{ème} cas : $t = 4 \text{ mm}$, maillage 0.1 , élément S4

a/b	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4
F _{cr} (kN)	0.84	0.73	0.69	0.68	0.71	0.75	0.81	0.87

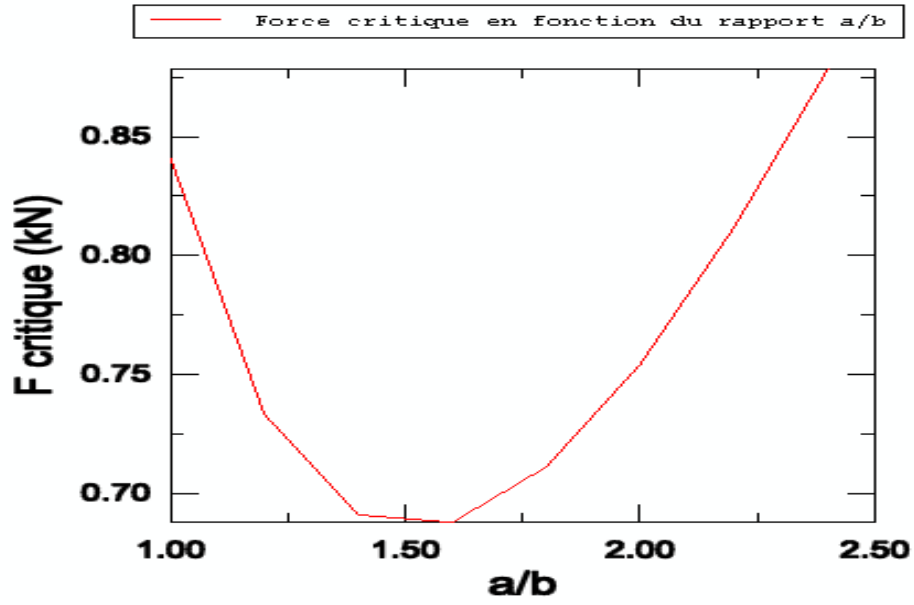
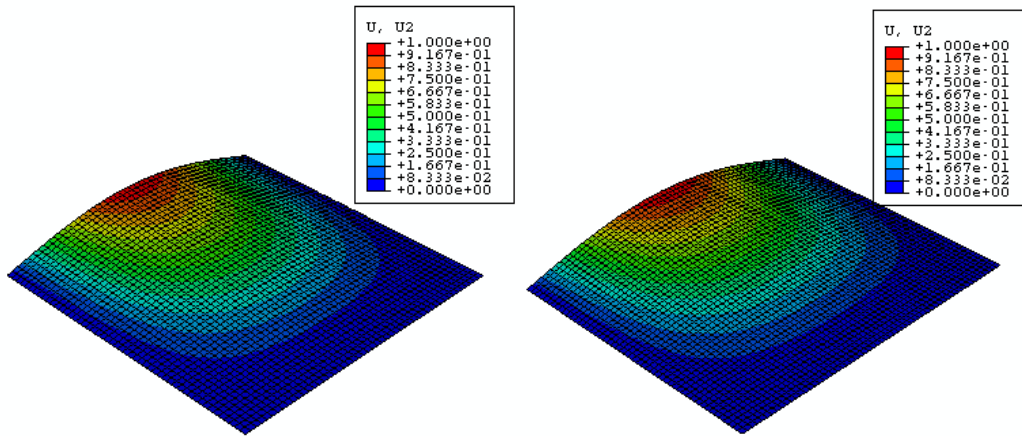
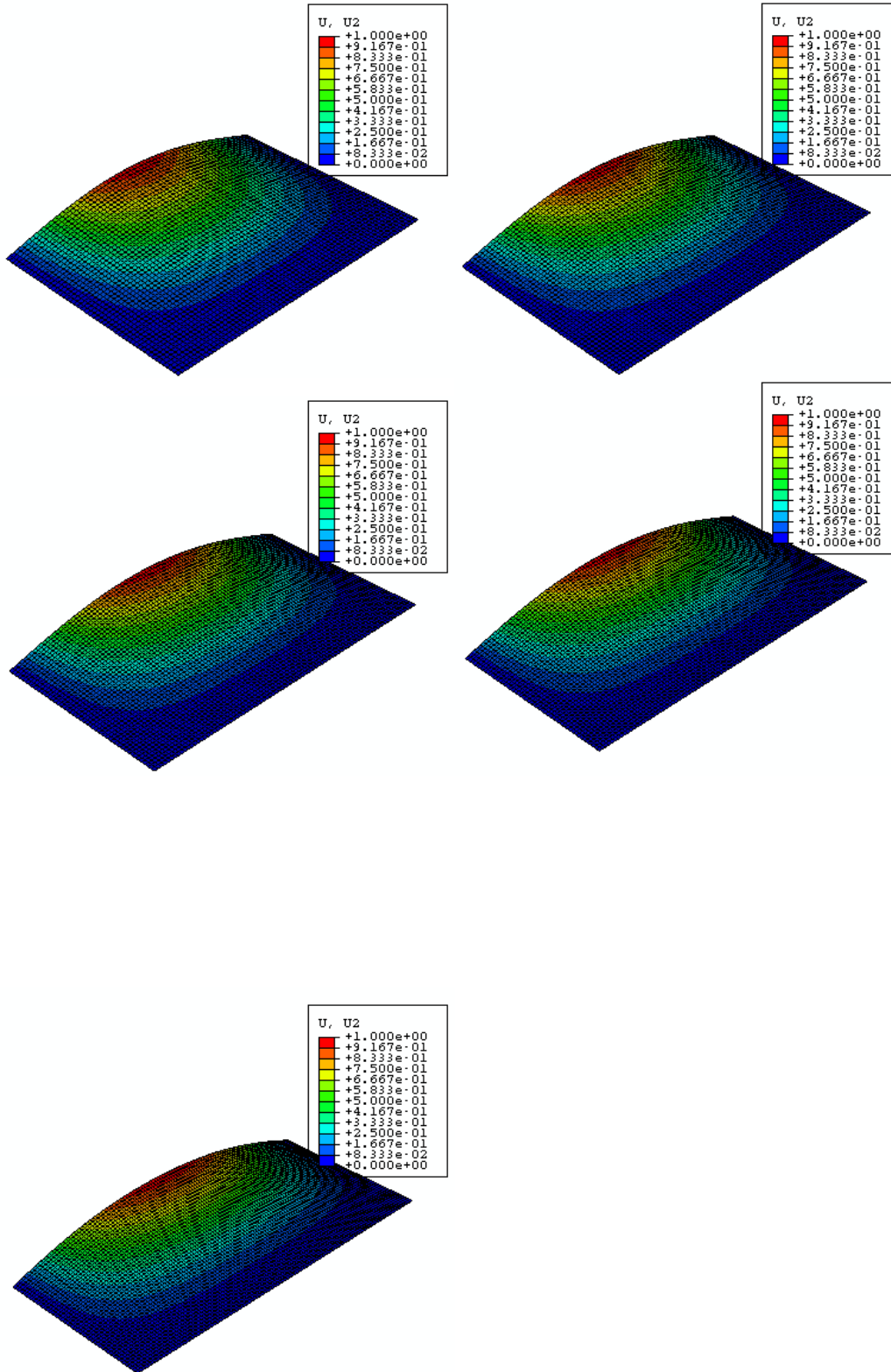


Figure 4.15 : F critique t=4mm M=0.1 S4





Premiers modes de flambement

16^{ème} cas : $t = 4 \text{ mm}$, maillage 0.5 , élément S4

a/b	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4
F _{cr} (kN)	0.849	0.738	0.694	0.690	0.714	0.757	0.815	0.883

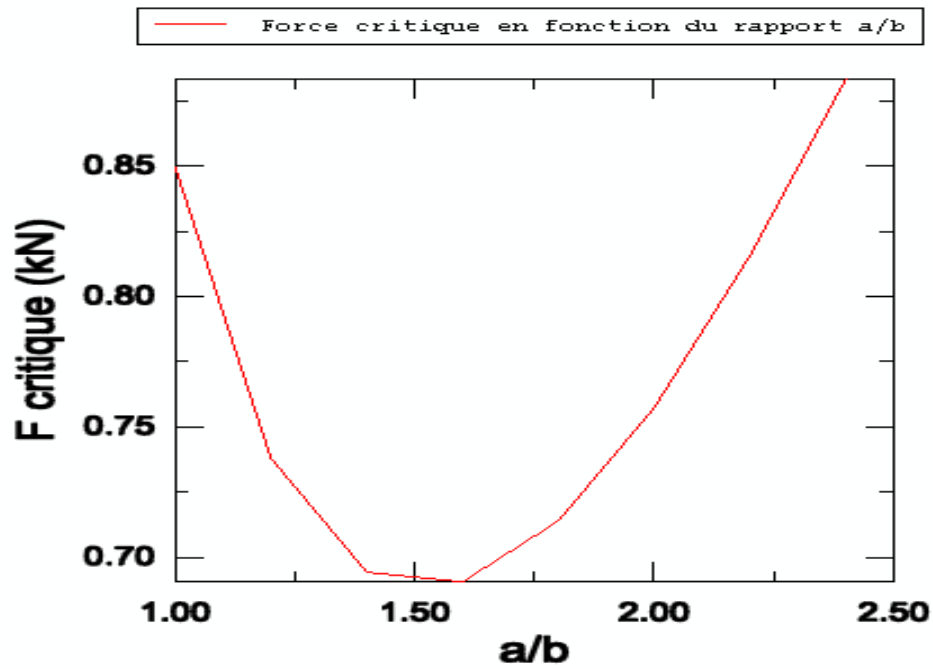
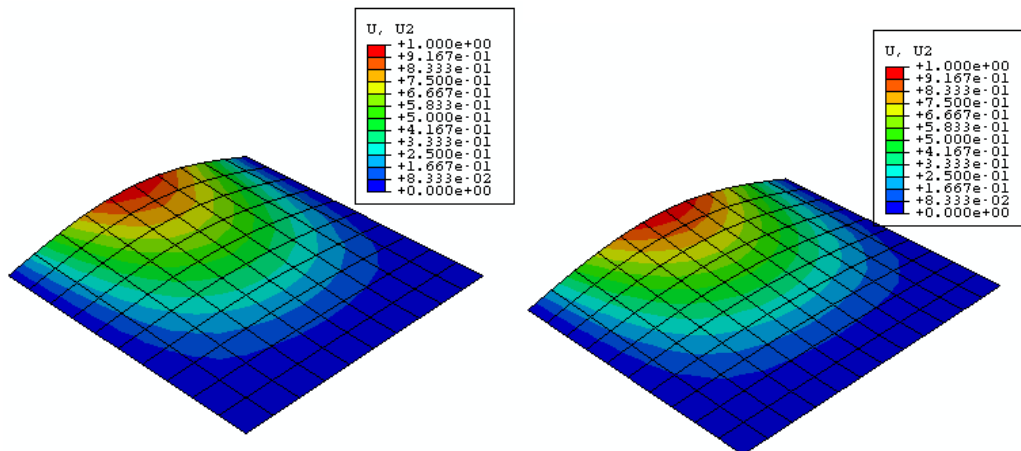
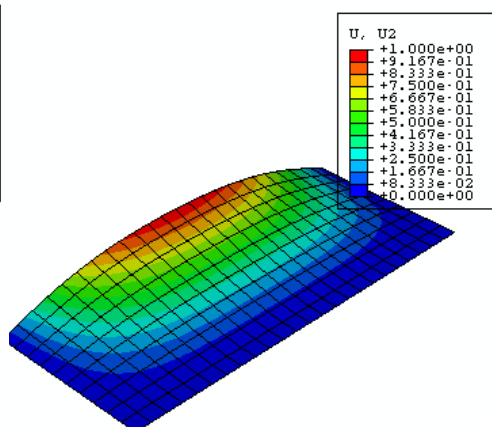
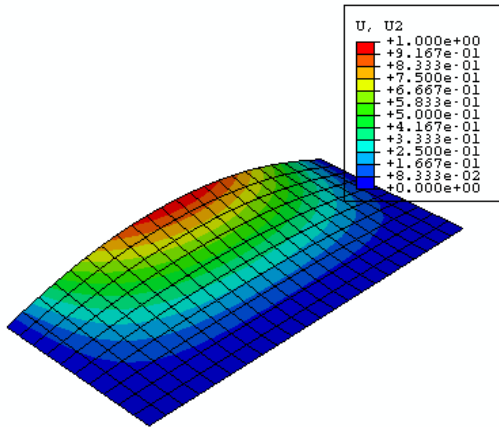
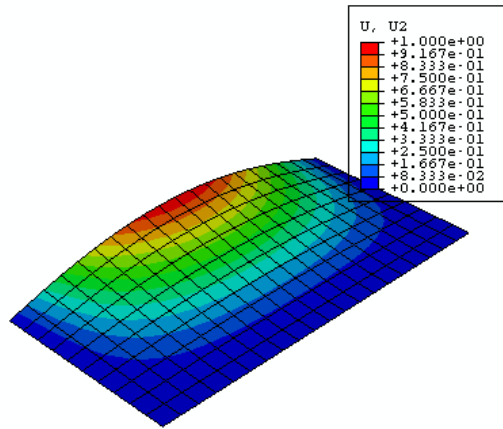
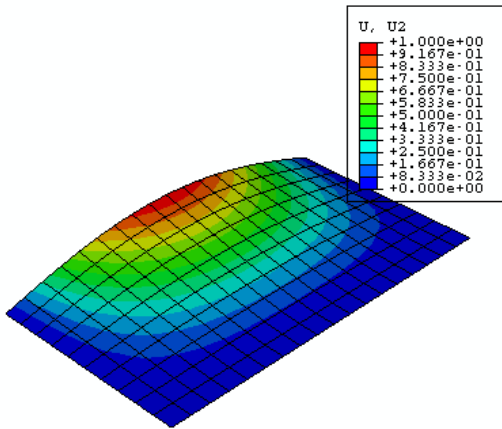
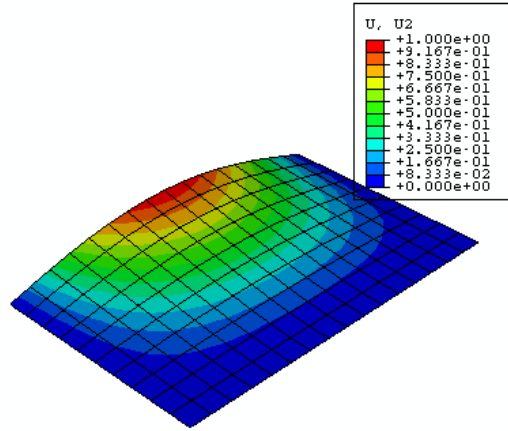
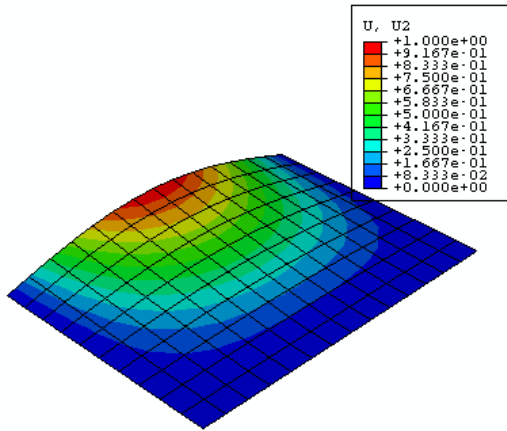


Figure 4.16 : F critique $t=4\text{mm}$ $M=0.5$ S4





17^{ème} cas : $t = 20 \text{ mm}$, maillage 0.1 , élément S4

a/b	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4
F _{cr} (kN)	105.05	91.625	86.355	85.965	88.88	94.25	101.46	109.77

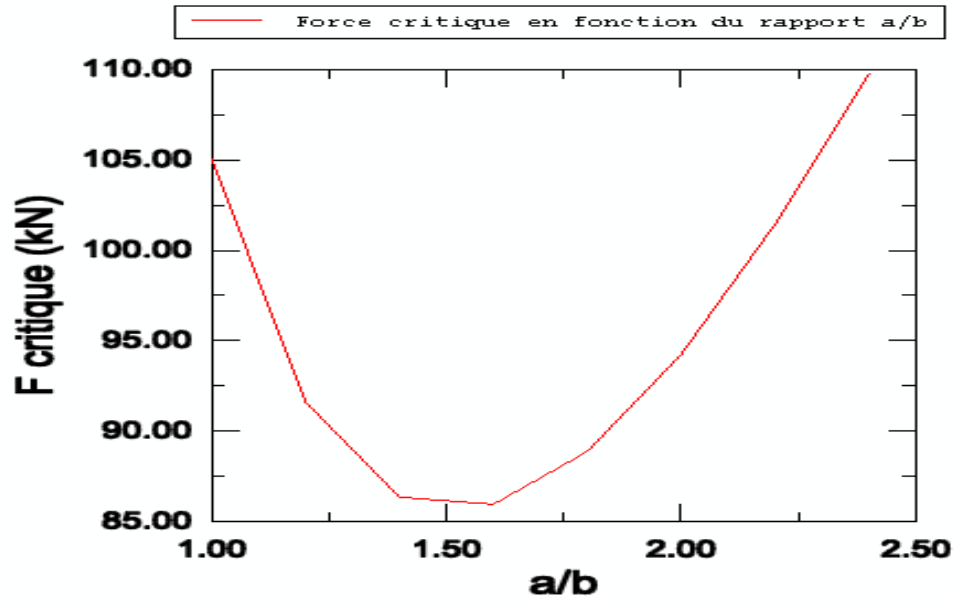
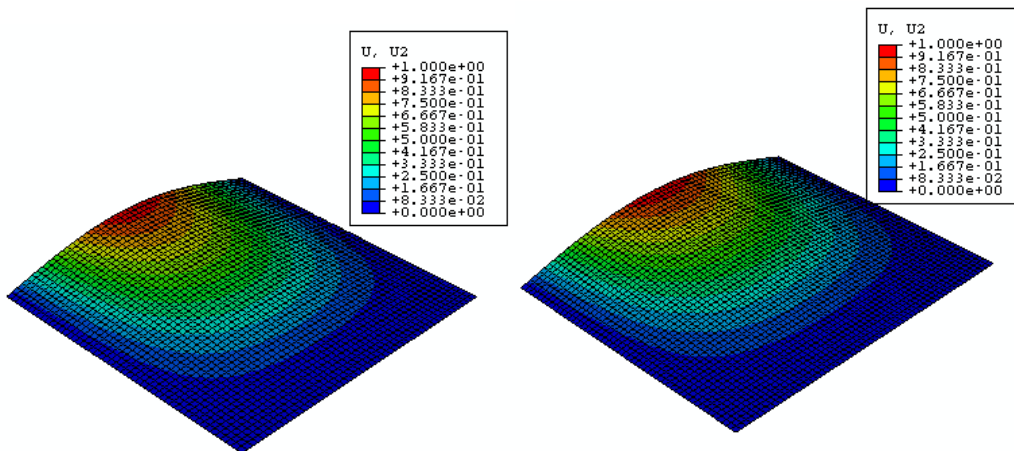
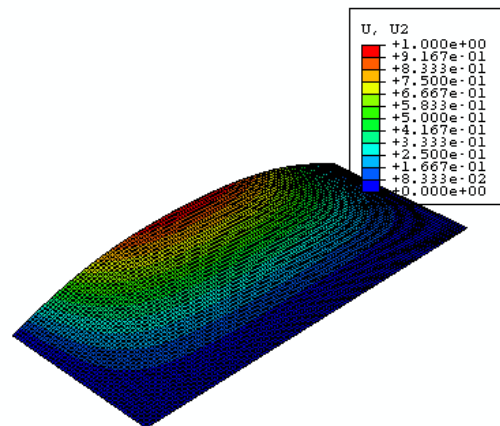
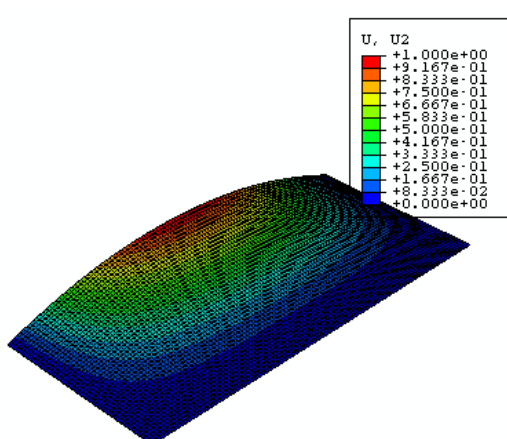
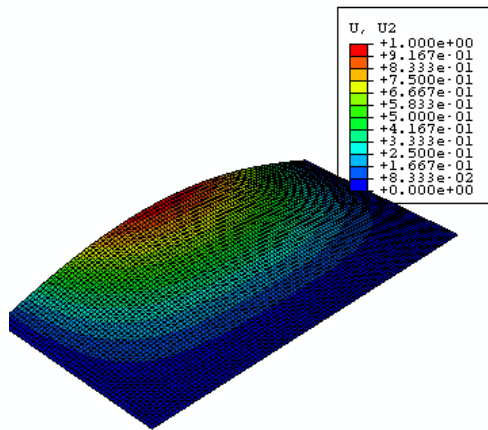
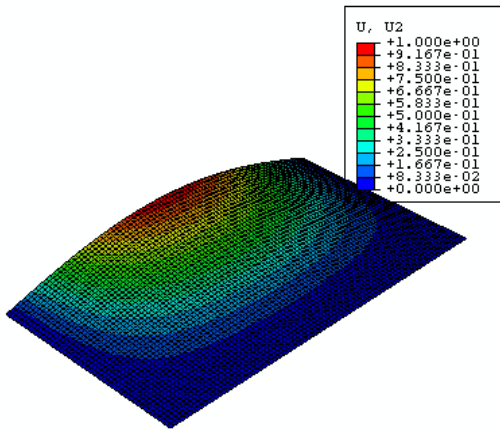
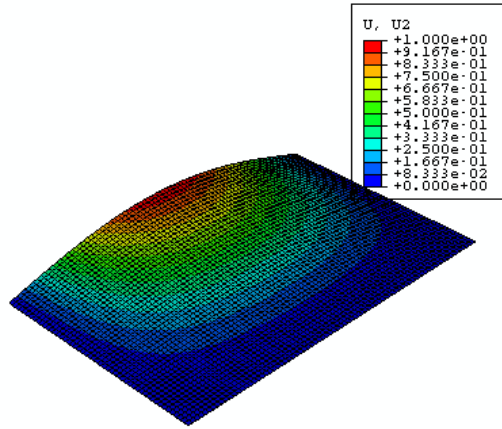
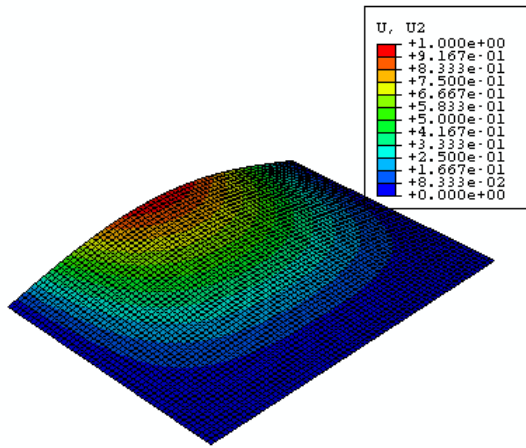


Figure 4.17 : F critique t=20mm M=0.1 S4





18^{ème} cas : $t = 20 \text{ mm}$, maillage 0.5 , élément S4

a/b	0,5	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,5	3	4	5
Fcr (kN)	284,65	89,635	71,153	60,375	53,685	49,373	46,531	42,945	41,792	41,757	41,177

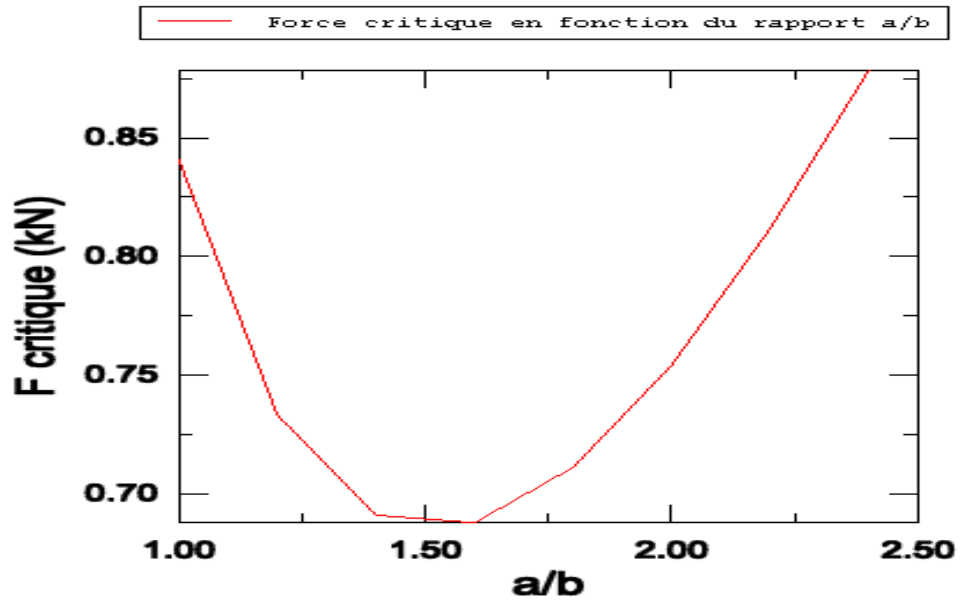
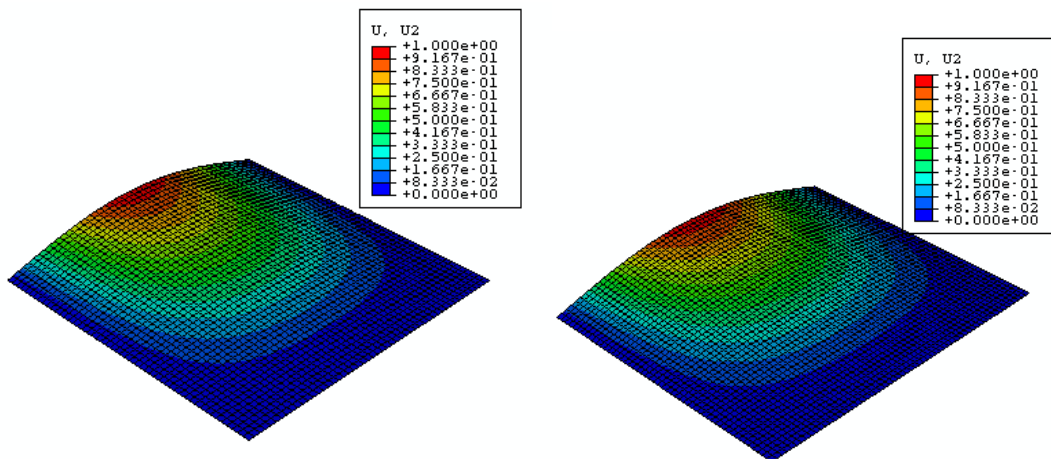
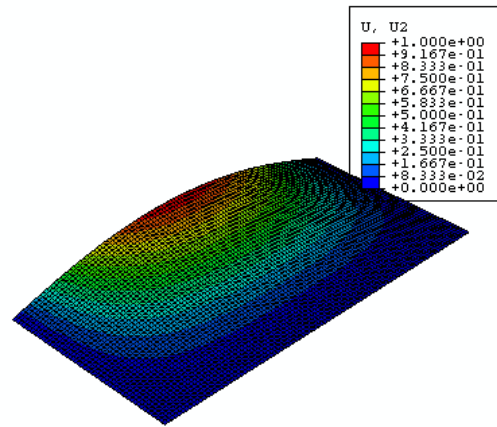
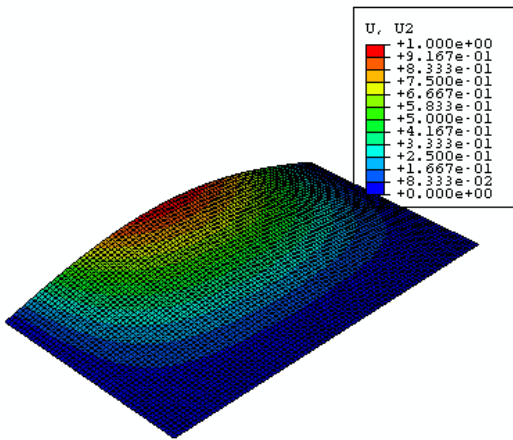
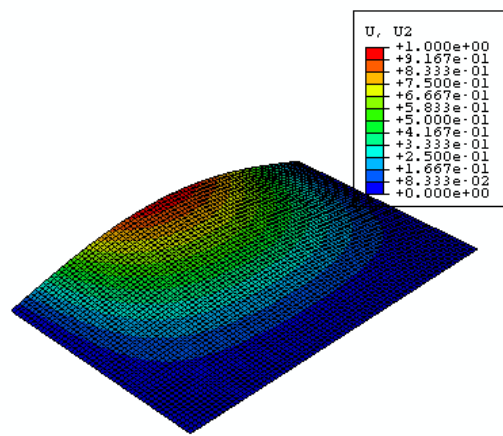
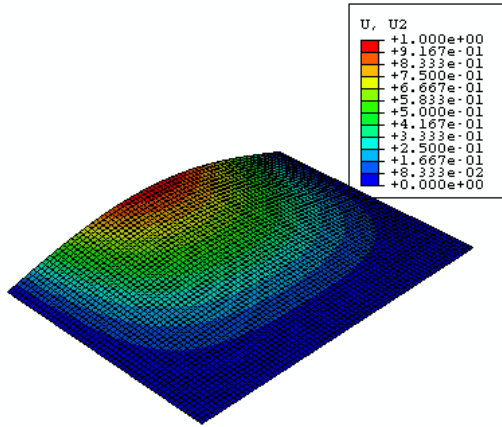
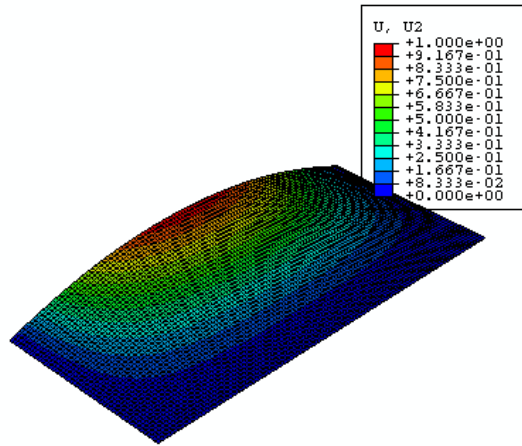


Figure 4.18 : F critique t=20mm M=0.5 S4







Premiers modes de flambement

4-2 Compression biaxiale

19^{ème} cas : $t = 4 \text{ mm}$, maillage 0.1 , élément S4

a/b	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4
F cr (kN)	13.265	4.0127	2.30866	1.668225	1.3261	1.10933	0.9618

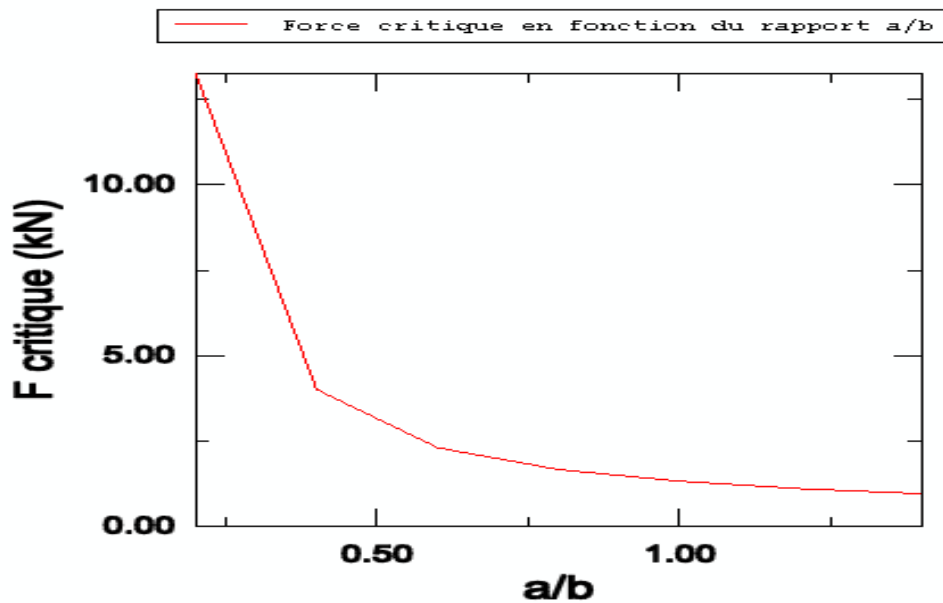
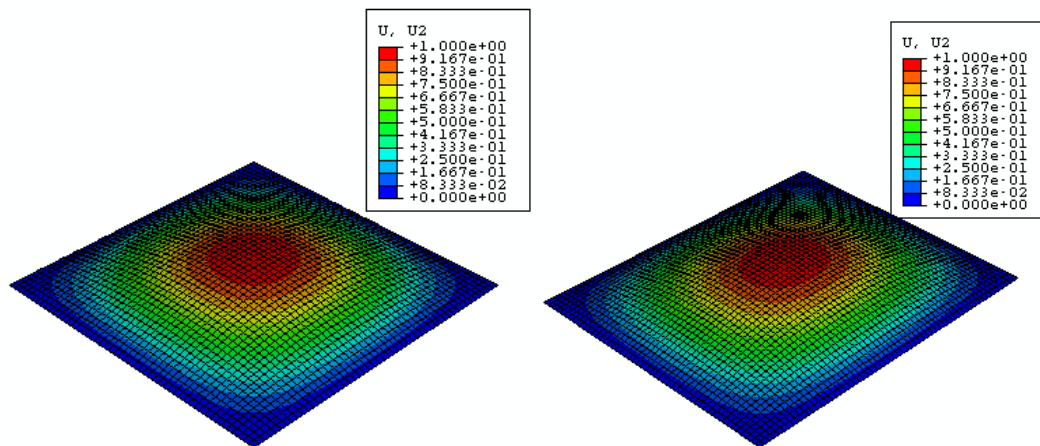
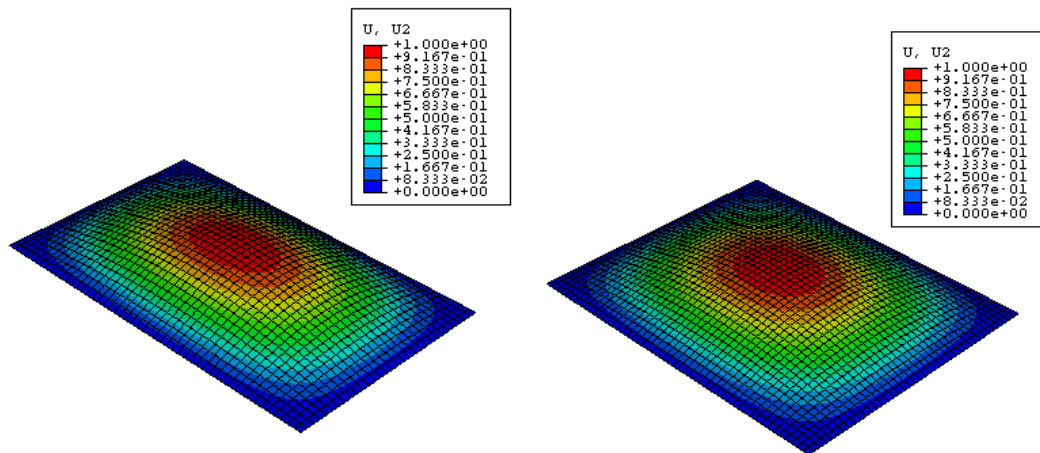
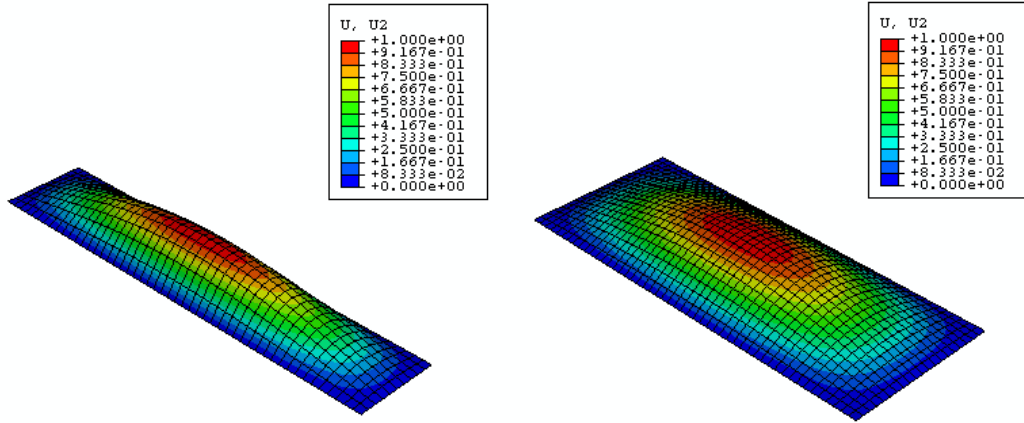
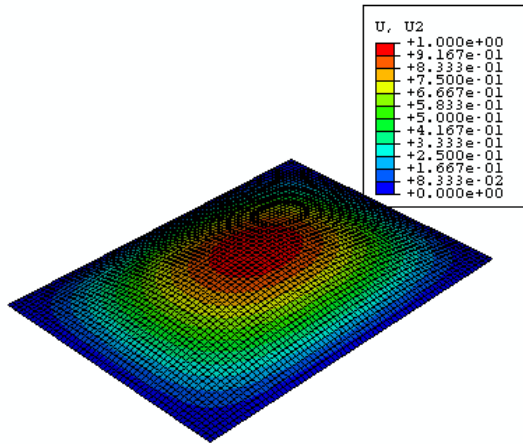


Figure 4.19 : F critique t=4mm M=0.1 S4





Premiers modes de flambement

20^{ème} cas : $t = 4$, maillage 0.5 , élément S4

a/b	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4
F cr (kN)	20.6694	4.38327	2.404255	1.714725	1.3551	1.129585	0.97723

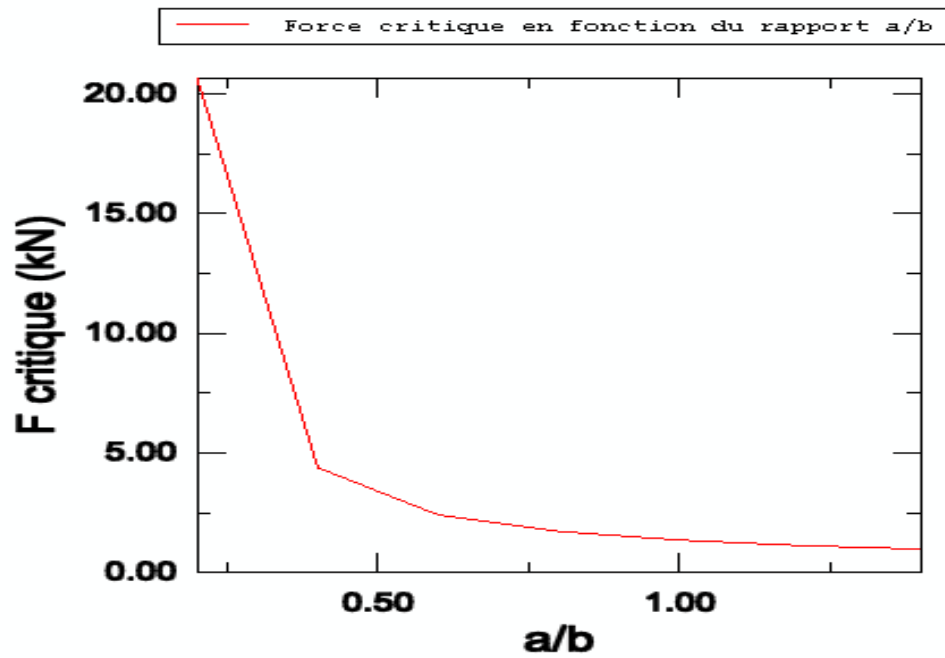
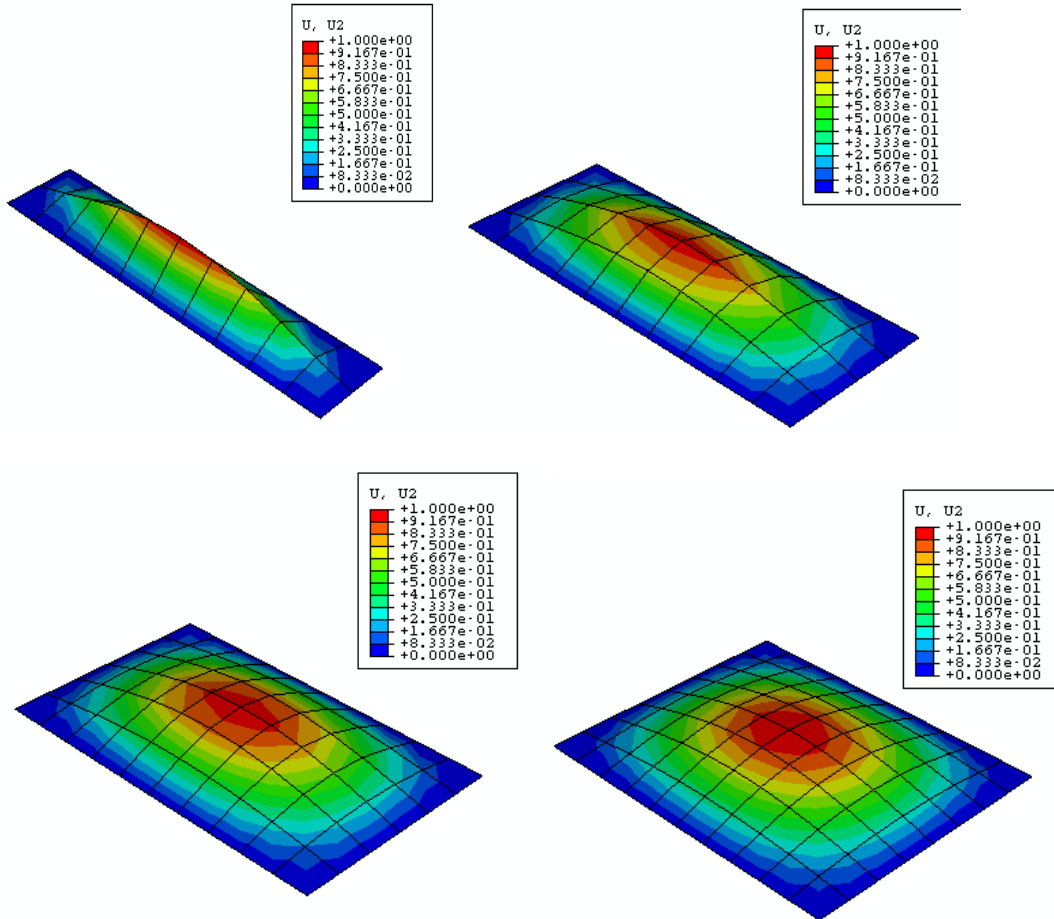


Figure 4.20 : F critique $t=4\text{mm}$ $M=0.5$ S4



Premiers modes de flambement

21^{ème} cas : $t = 20 \text{ mm}$, maillage 0.1 , élément S4

a/b	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4
F cr (kN)	1656.25	501.45	288.535	208.505	165.75	138.655	120.22

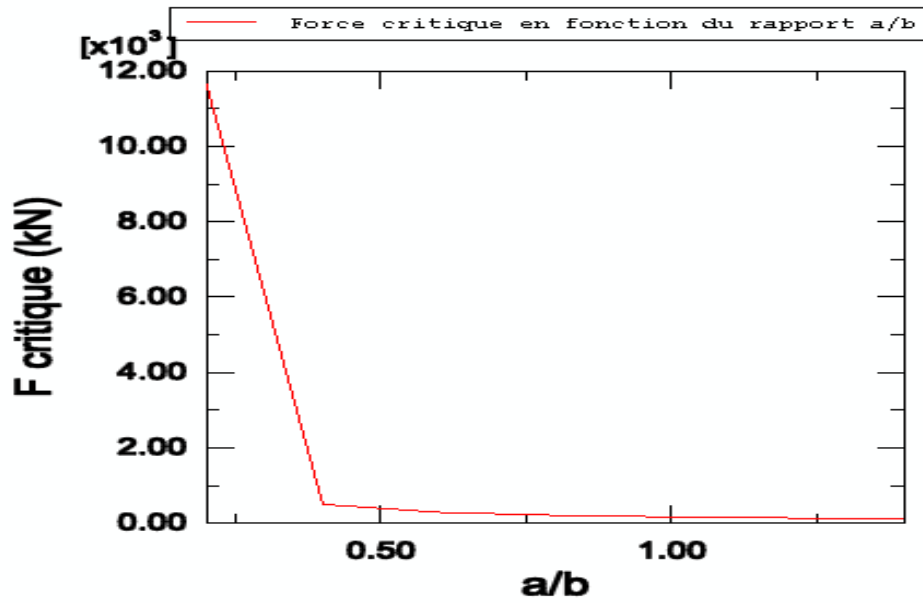
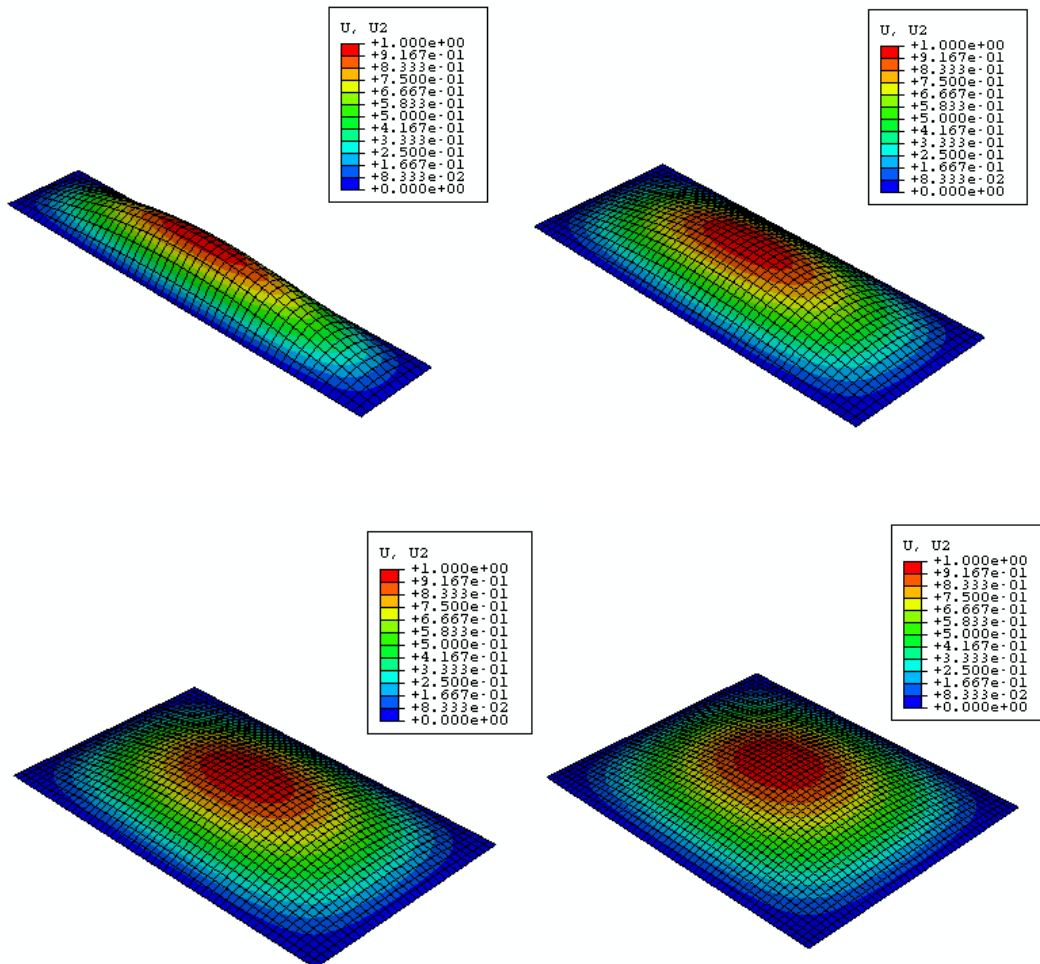
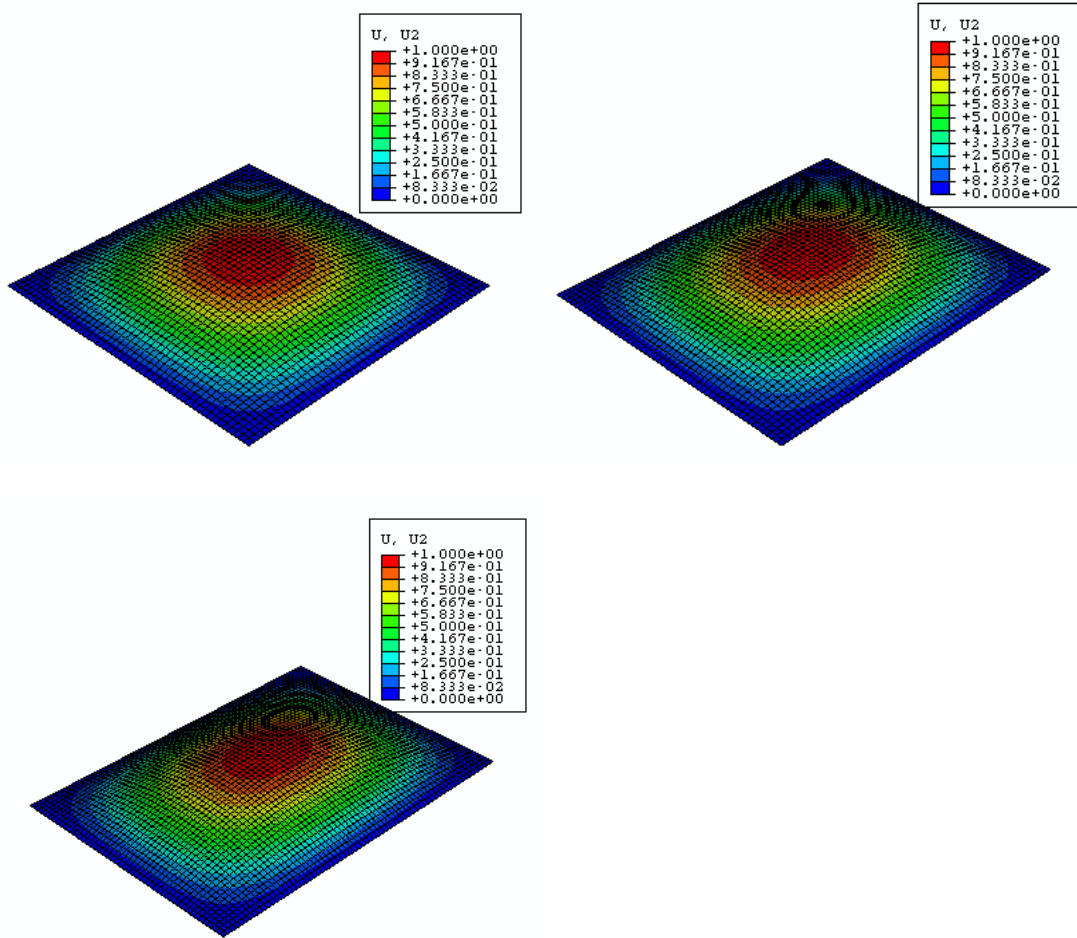


Figure 4.21 : F critique t=20mm M=0.1 S4





Premiers modes de flambement

22^{ème} cas : $t = 20 \text{ mm}$, maillage 0.5 , élément S4

a/b	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4
F cr (kN)	2579.05	547.7	300.48	214.315	169.375	141.19	122.145

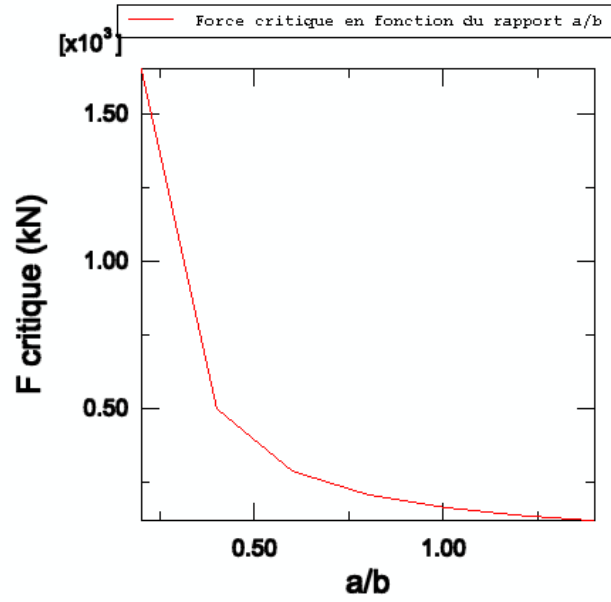
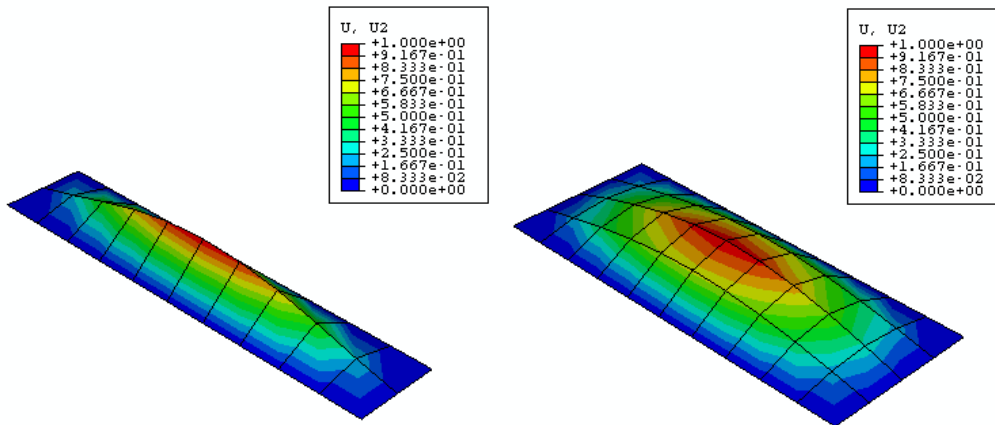
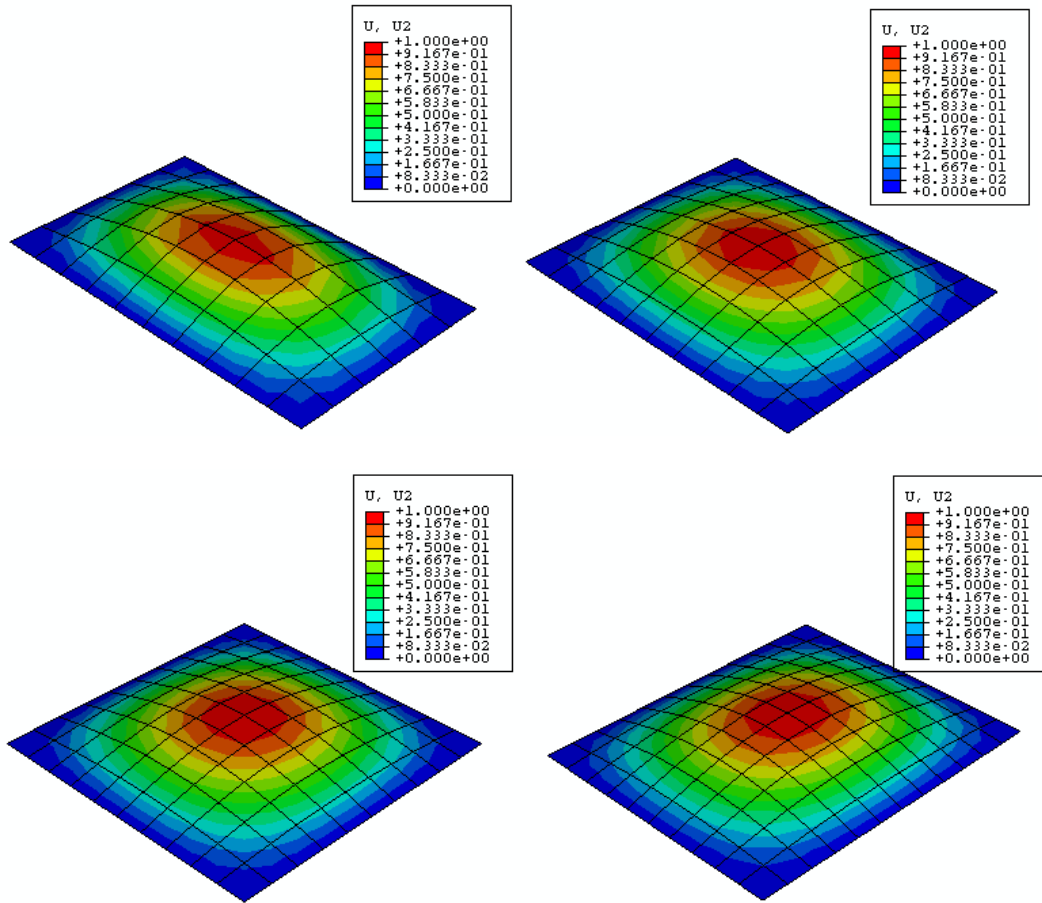


Figure 4.22 : F critique t=20mm M=0.5 S4





Premiers modes de flambement

4-1-3 Cisaillement

4-1-3-1 Tous les côtés simplement appuyés

23 ème cas : $t=4\text{mm}$ maillage : 0.1 élément S4

a/b	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,5	3	4
$F_{cr} \times 10^{29}$ (kN)	-5,54	-4,66	-4,13	3,8	-3,59	-3,45	-3,28	3,22	-3,18

— force critique en fonction du rapport a/b

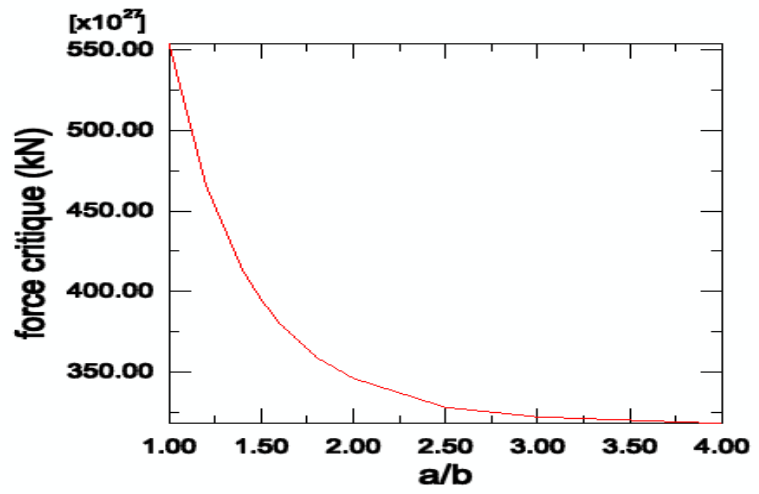
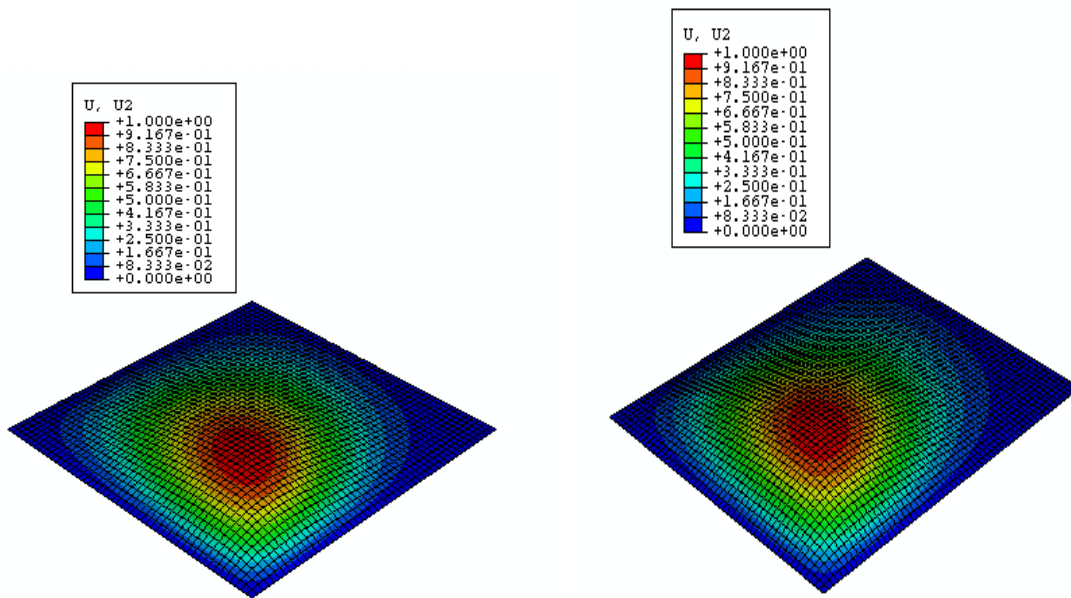
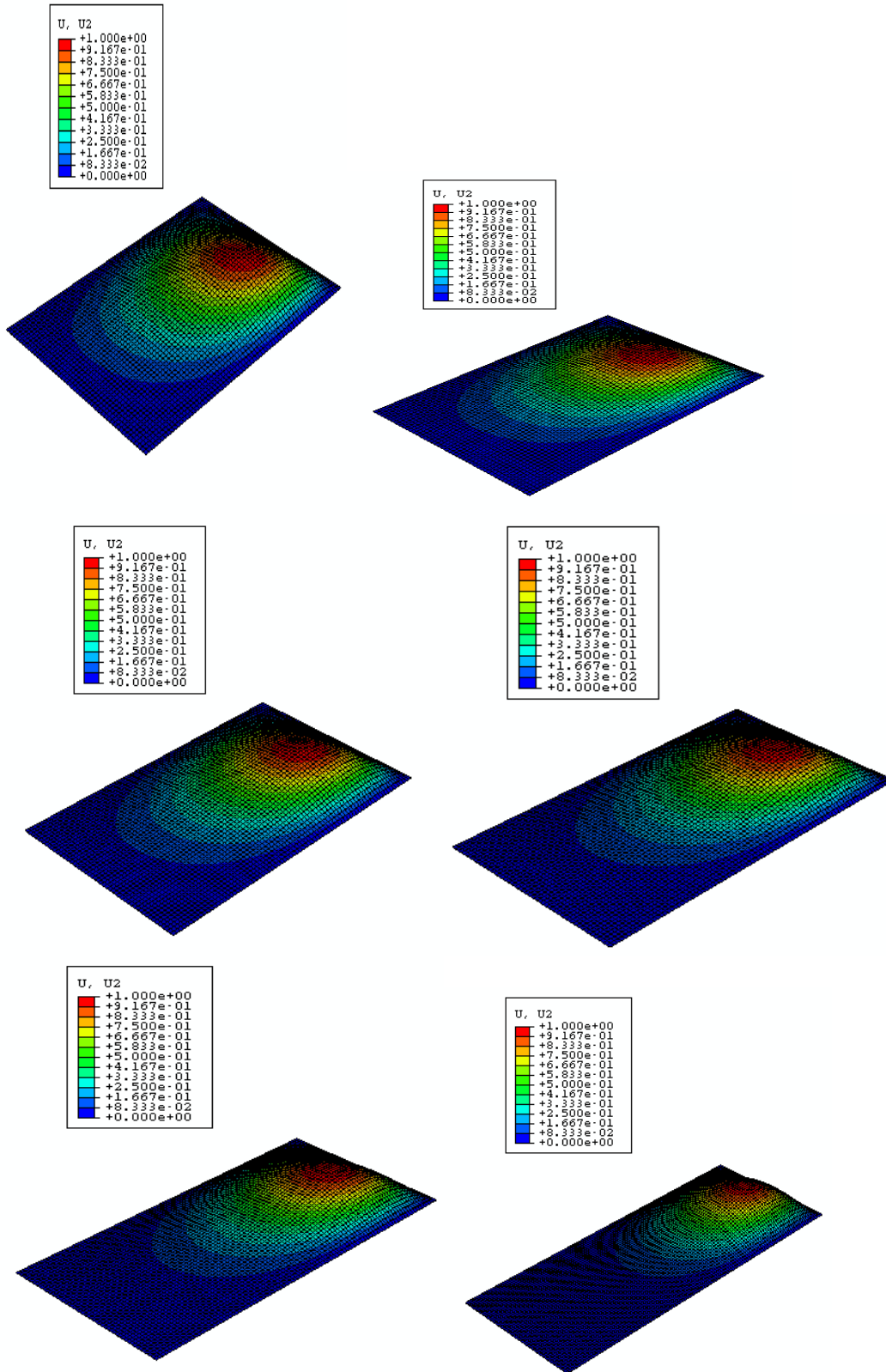
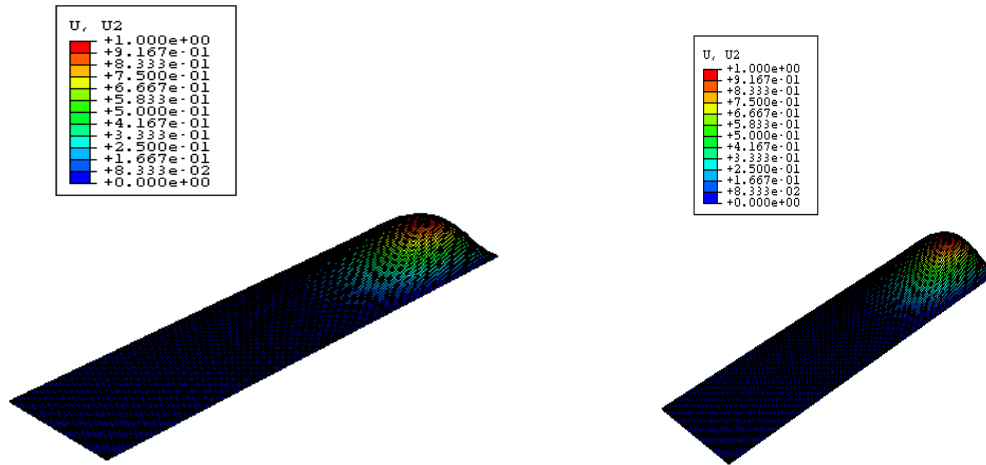


Figure 4-23 : t=4mm M :0.1 S4







Premiers modes de flambement

24^{ème} cas : t=4mm maillage : 0.5 élément S4

a/b	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.5	3	4
Fcr × 10 ²⁸ (kN)	-13.0	10.5	-9.09	-8.25	7.74	-7.41	6.99	-6.84	6.76

— force critique en fonction du rapport a/b

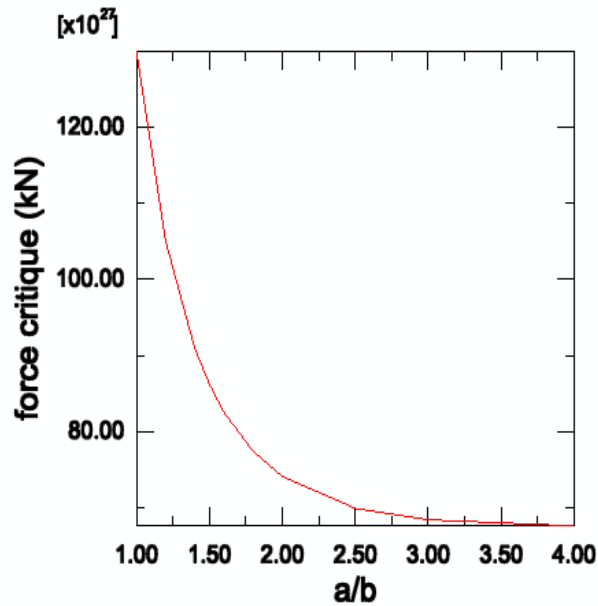
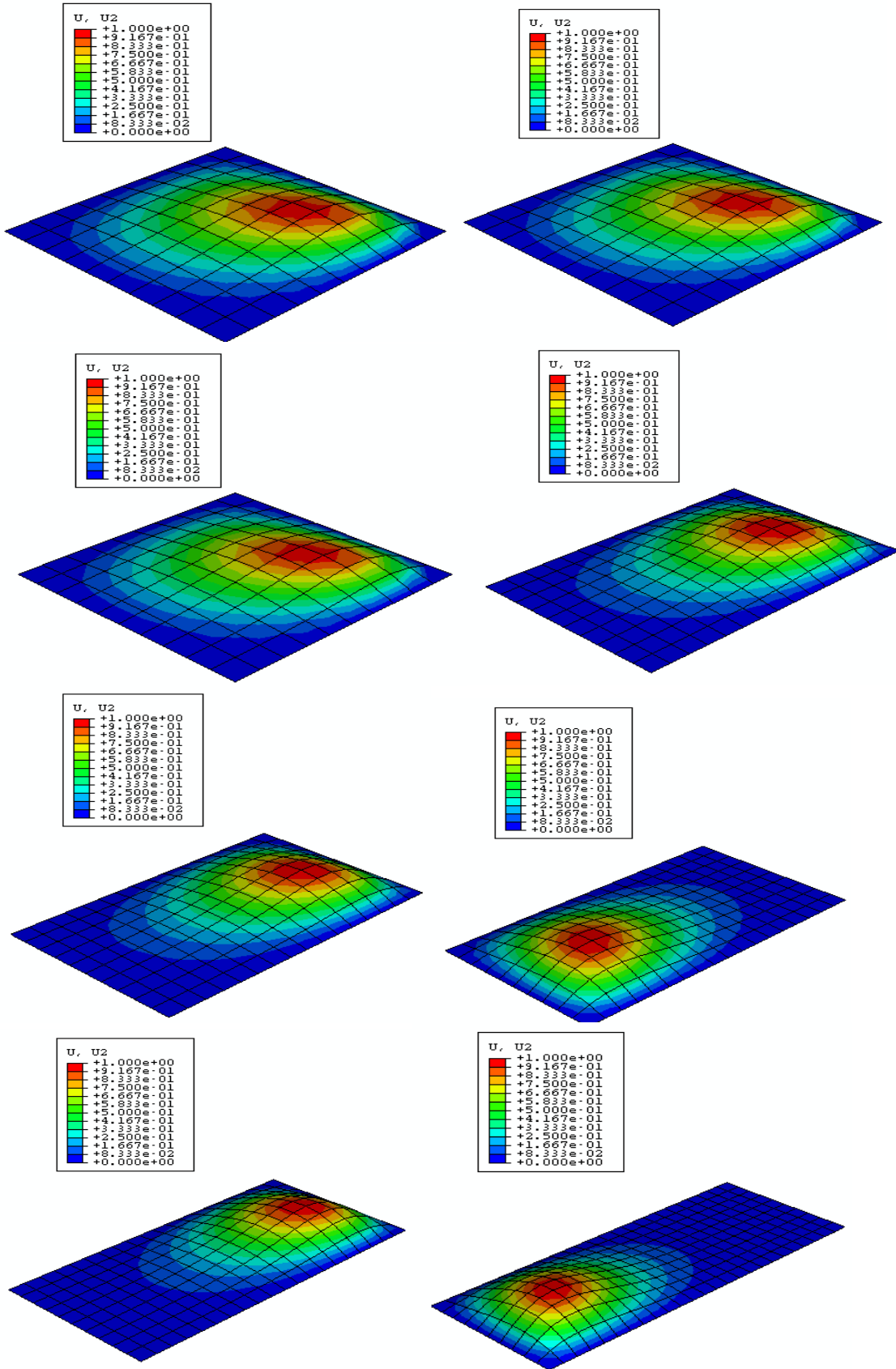
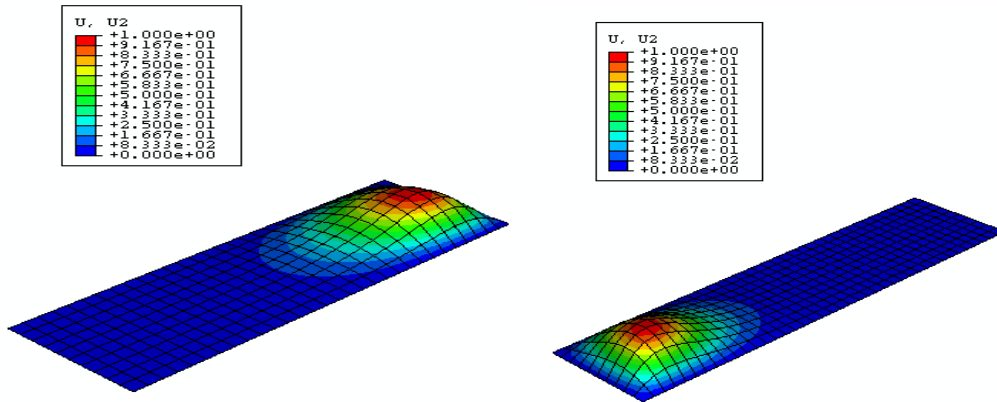


Figure 4-24 : t=4mm M :0.5 S4





Premiers modes de flambement

25^{ème} cas : t=10mm maillage : 0.1 élément S4

a/b	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.5	3	4
Fcr × 10 ³⁰ (kN)	3.46	2.91	2.58	-2.37	2.24	-2.16	-2.05	2.01	-1.99

— force critique en fonction du rapport a/b

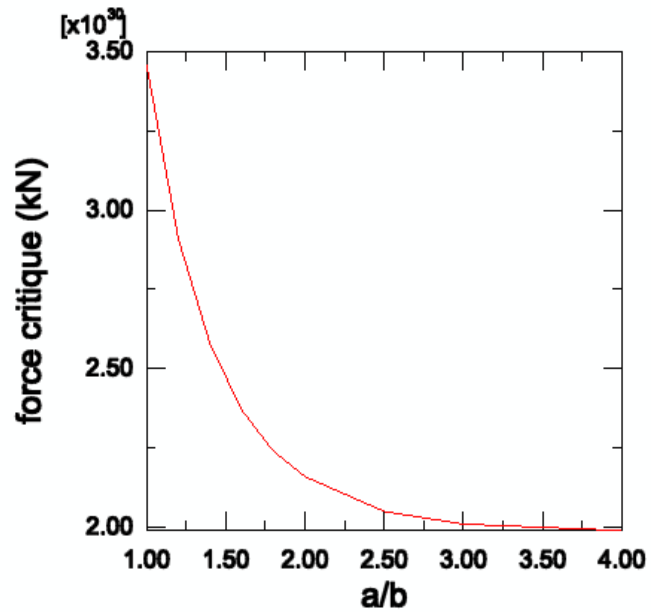
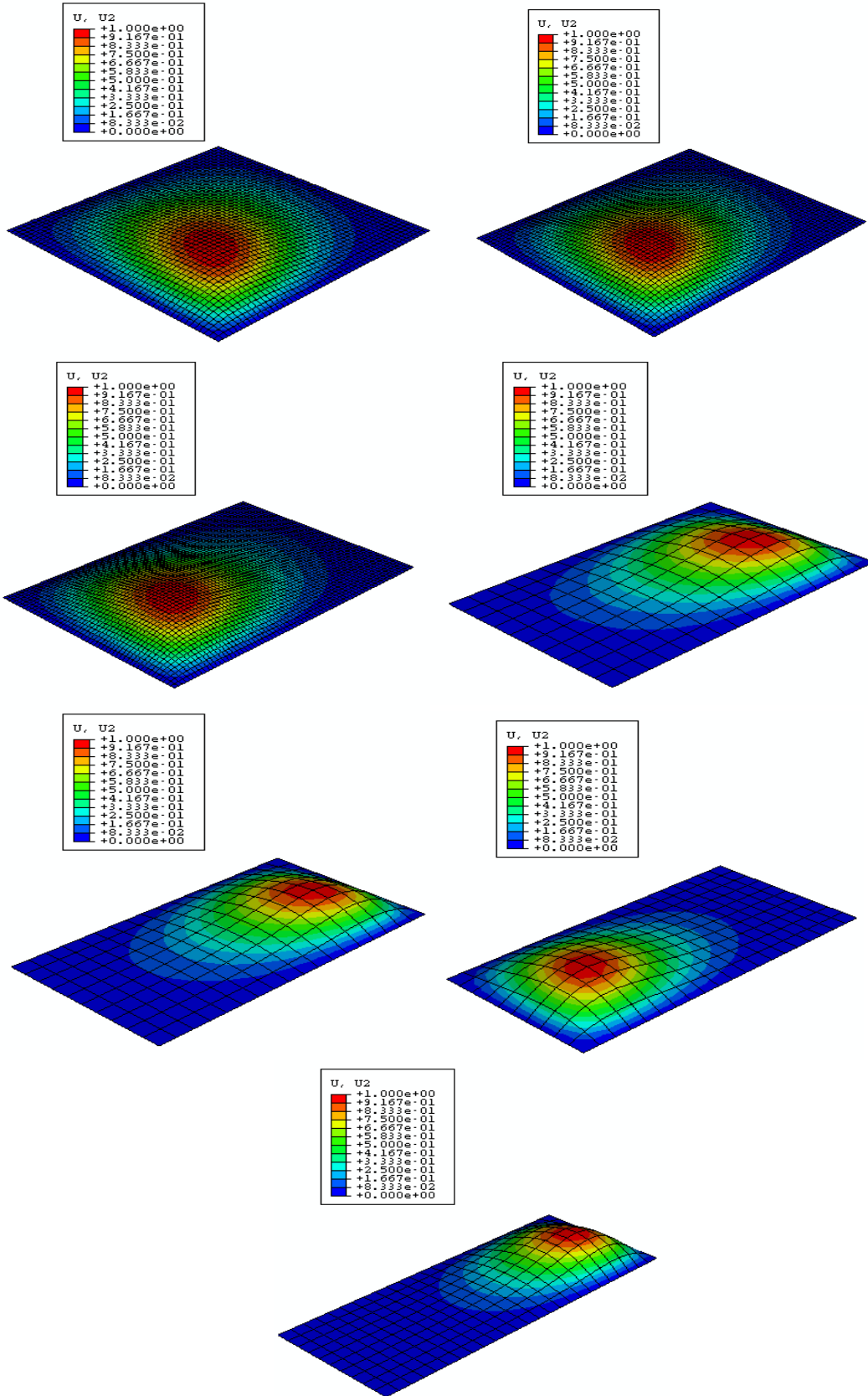
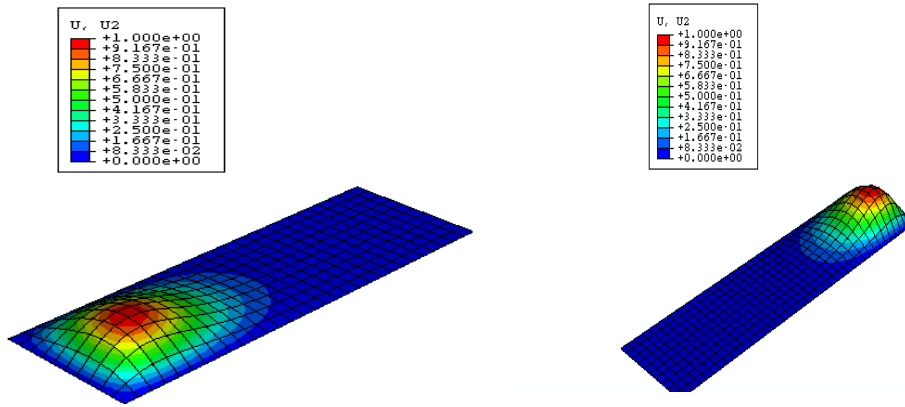


Figure 4-25 : t=10mm M :0.1 S4





Premiers modes de flambement

26^{ème} cas : t=10mm maillage : 0.5 élément S4

a/b	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,5	3	4
Fcr × 10 ²⁹ (kN)	-8.13	6.56	5.68	-5.16	-4.83	4.63	4.37	4.27	4.23

— force critique en fonction du rapport a/b

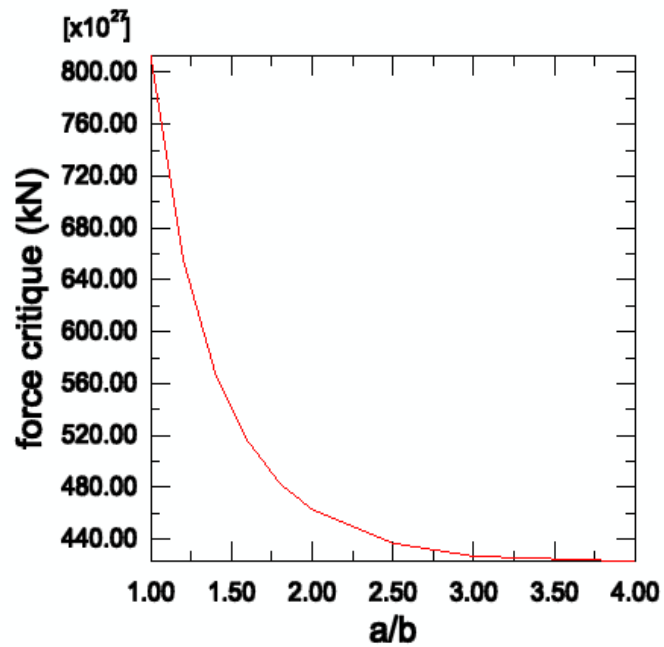
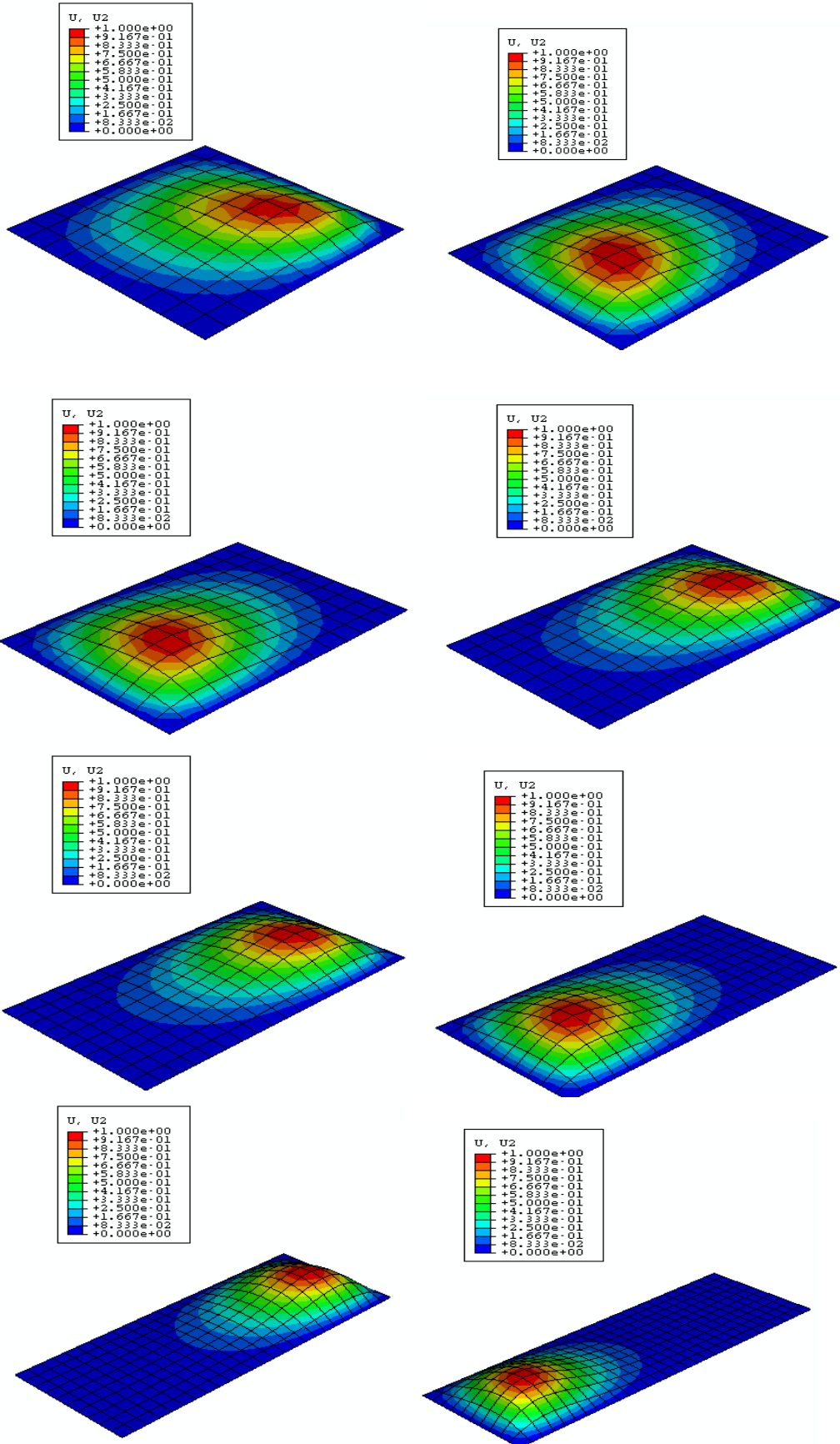
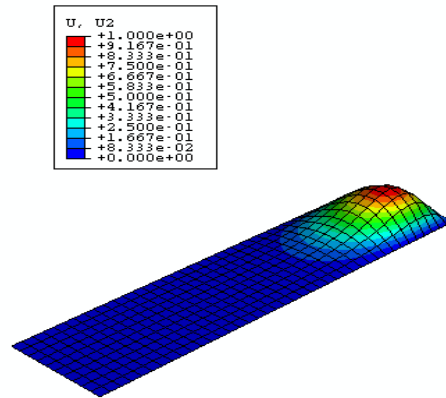


Figure 4-26 : t=10mm M :0.1 S4





Premiers modes de flambement

27^{ème} cas : t=20mm

maillage : 0.1

élément S4

a/b	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.5	3	4
$F_{cr} \times 10^{30}$ (kN)	13.8	-11.6	-10.3	-9.49	-8.97	-8.63	-8.20	8.04	-7.95

— force critique en fonction du rapport a/b

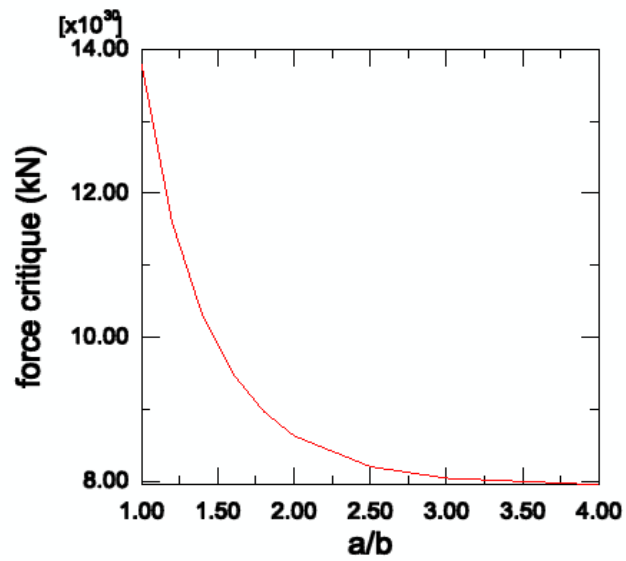
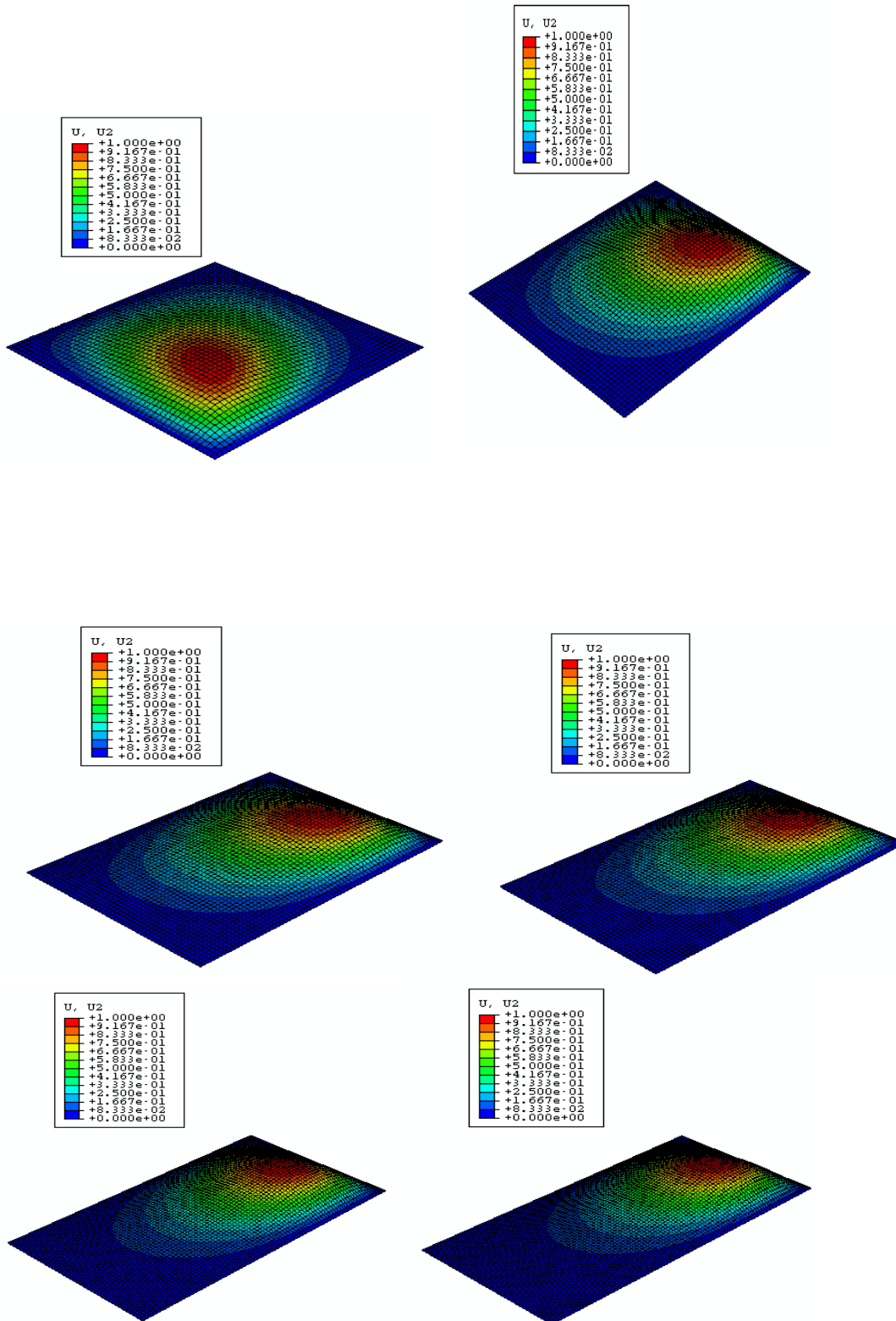
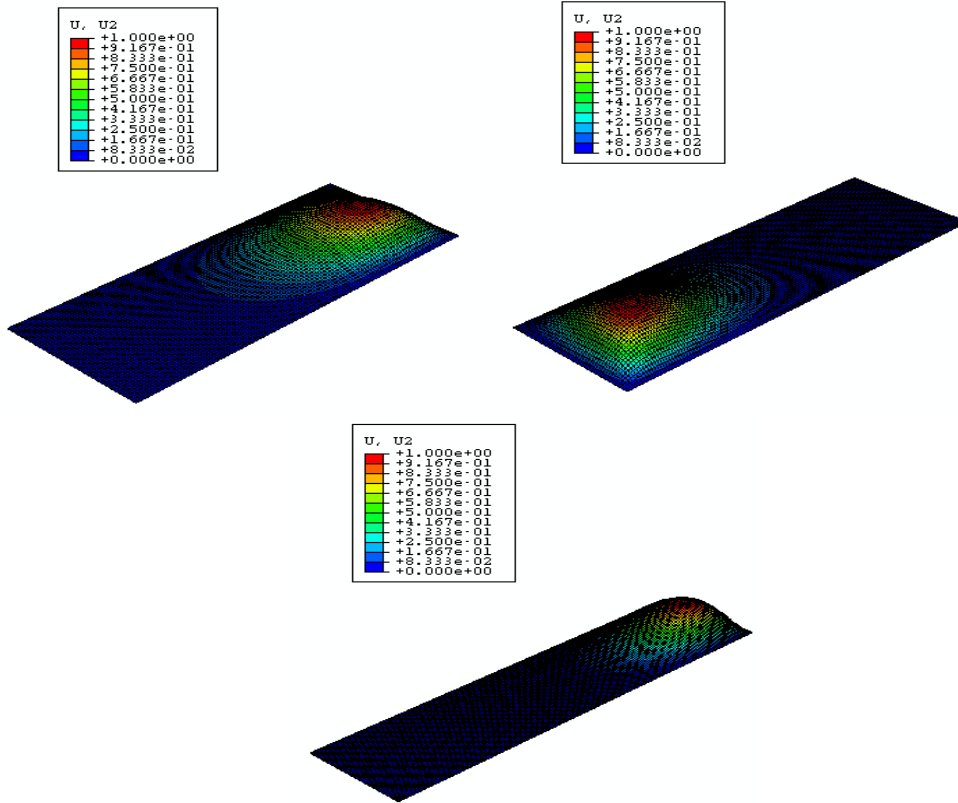


Figure 4-27 : t=20mm M :0.1 S4





Premiers modes de flambement

28^{ème} cas : t=20mm

maillage : 0.5 élément S4

a/b	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.5	3	4
$F_{cr} \times 10^{30}$ (kN)	3.25	-2.62	2.27	2.06	1.93	1.85	-1.74	1.71	-1.69

— force critique en fonction du rapport a/b

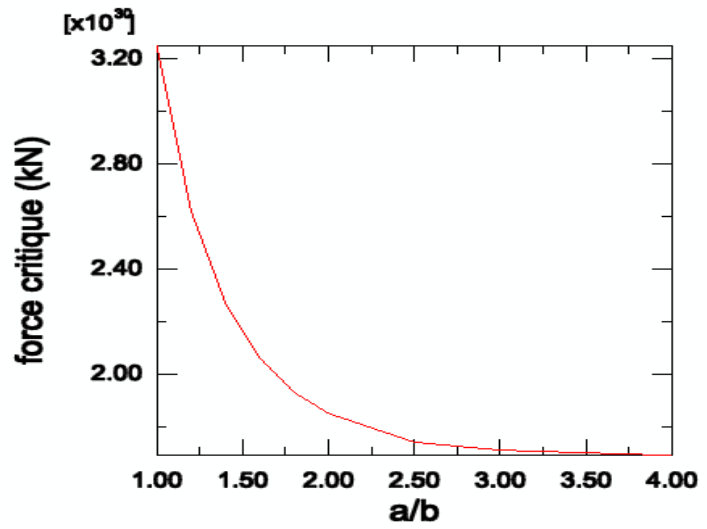
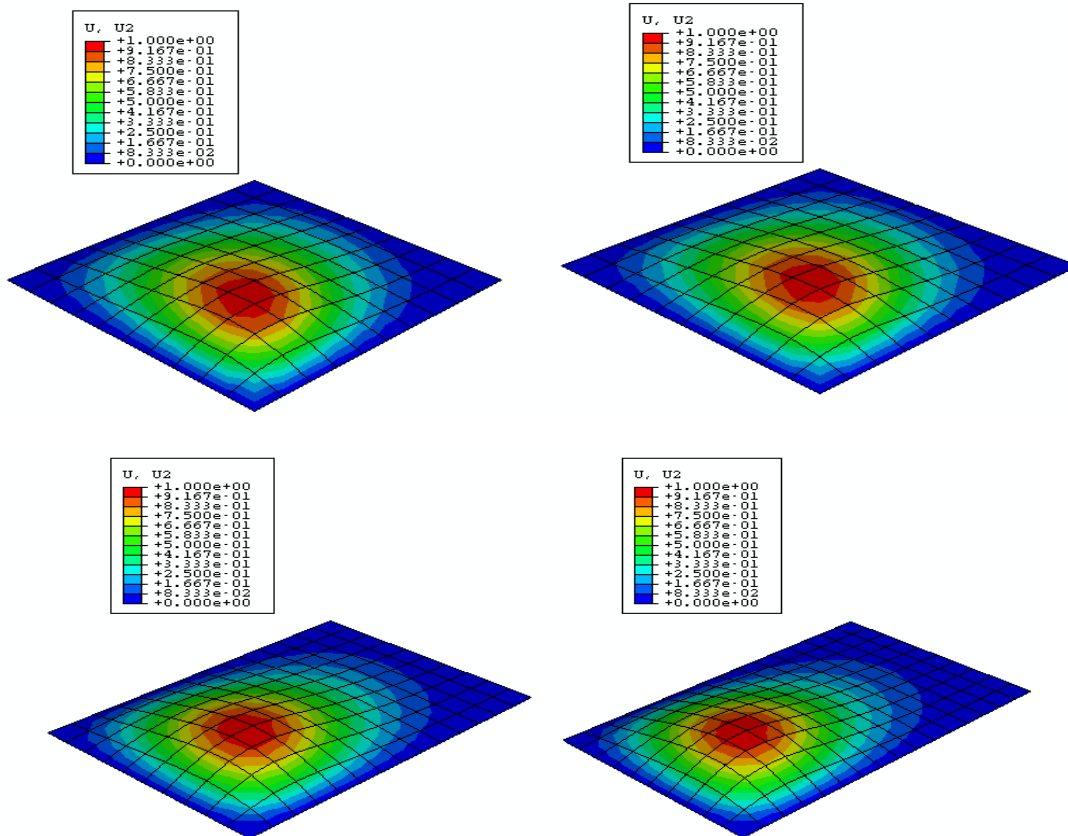
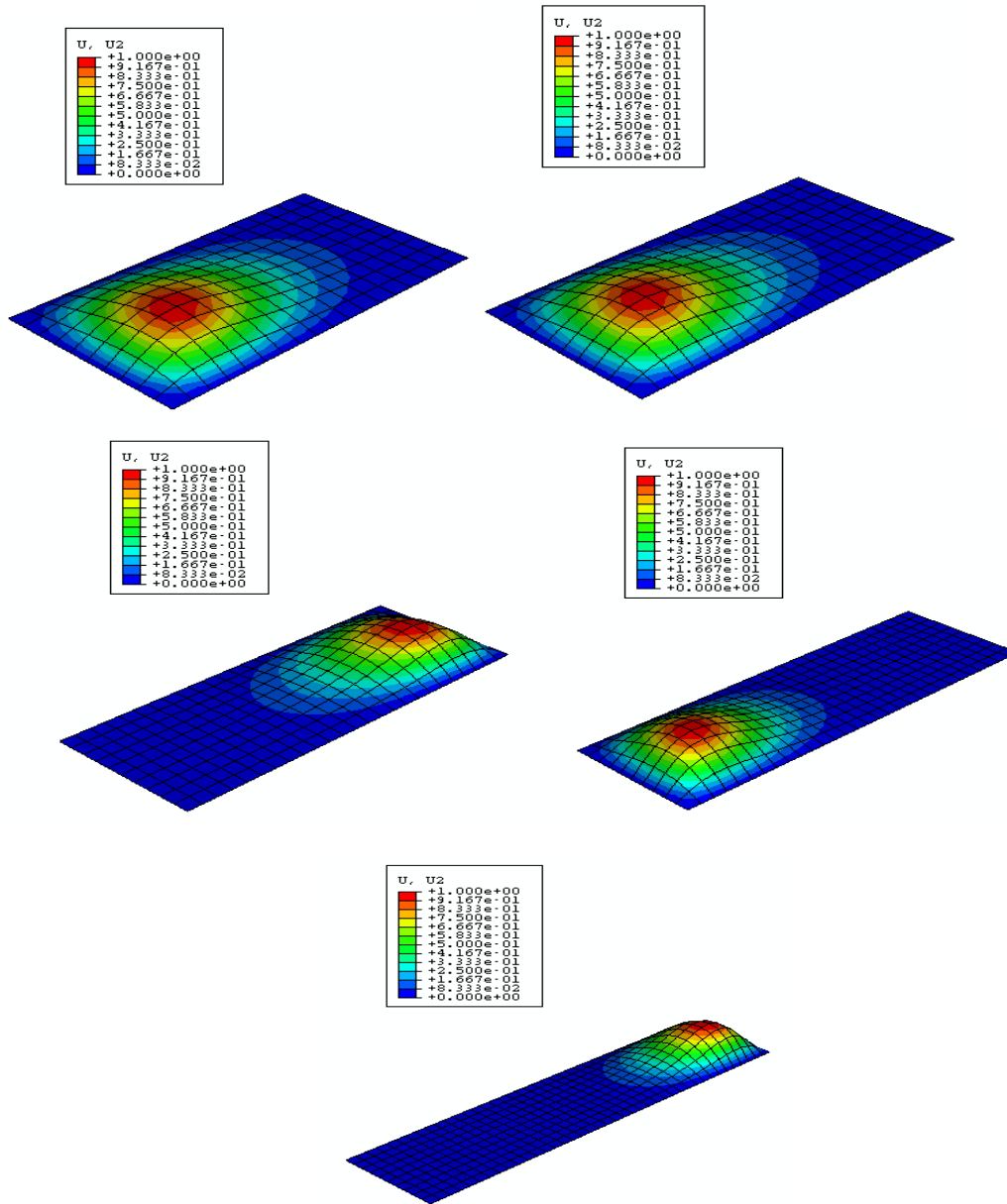


Figure 4-28 : t=20mm M :0.5 S4





Premiers modes de flambement

4-1-3-2 Deux côtés encastrés et deux simplement appuyés

29^{ème} cas : $t=4\text{mm}$ maillage : 0.1 élément S4

a/b	1	1,5	2	2,5	3
$F_{cr} \times 10^{29}$ (kN)	9.31	6.99	6.26	6.00	5.90

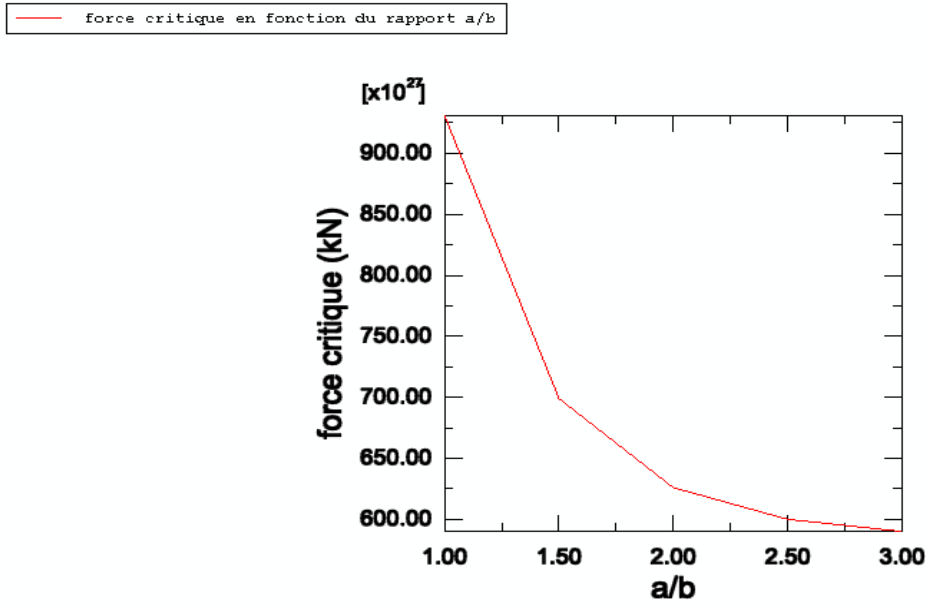
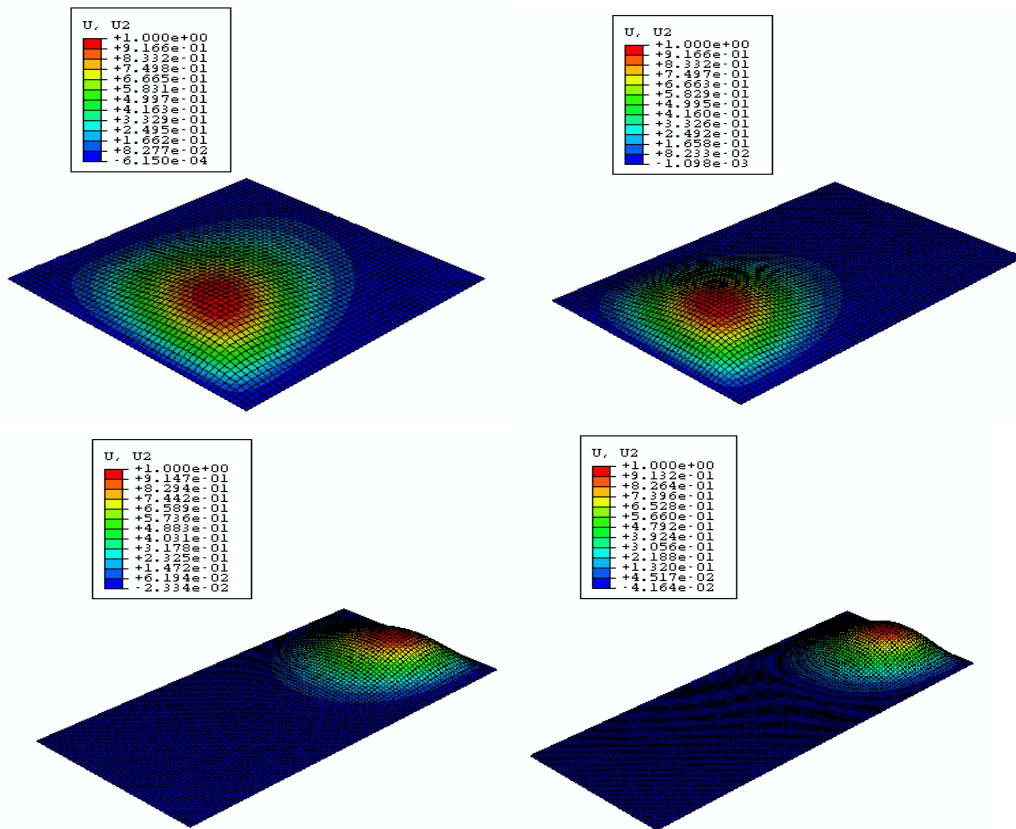


Figure 4-29 : t=4mm M :0.1 S4



Premiers modes de flambement

30^{ème} cas : t=4mm maillage : 0.5 élément S4

a/b	1	1,5	2	2,5	3
Fcr×10 ²⁹ (kN)	-2.48	1.53	-1.35	1.28	-1.26

— force critique en fonction du rapport a/b

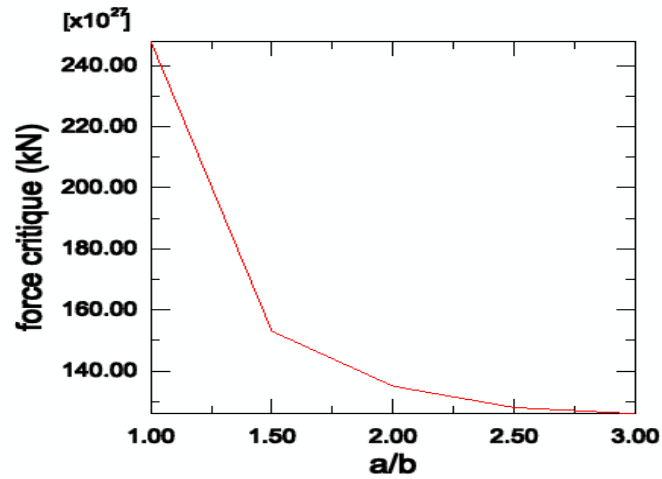
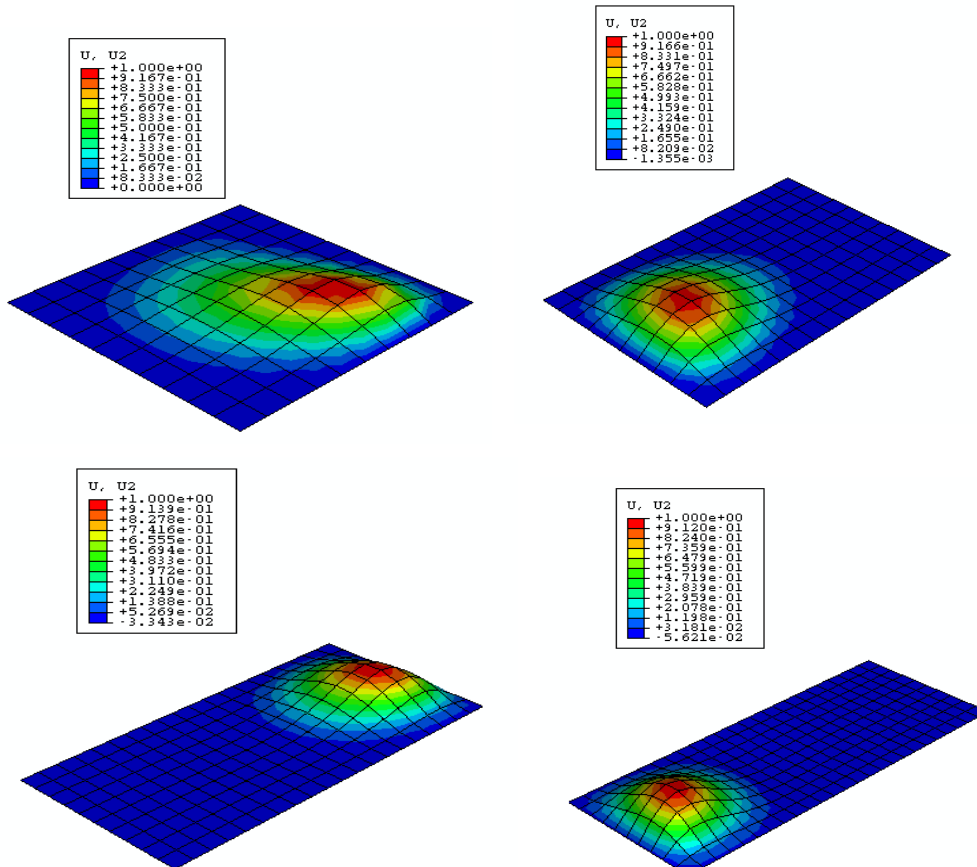
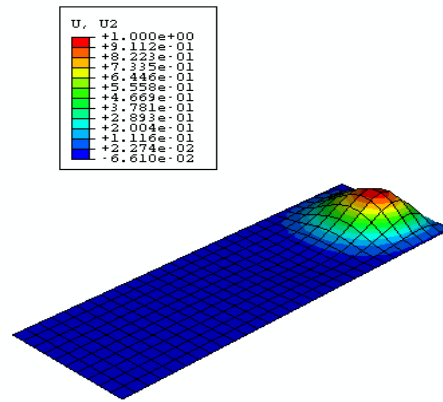


Figure 4-30 : t=4mm M :0.5 S4





Premiers modes de flambement

31^{ème} cas : t=10mm maillage : 0.1 élément S4

a/b	1	1,5	2	2,5	3
Fcr × 10 ³⁰ (kN)	5.82	4.36	-3.91	-3.74	3.68

— force critique en fonction du rapport a/b

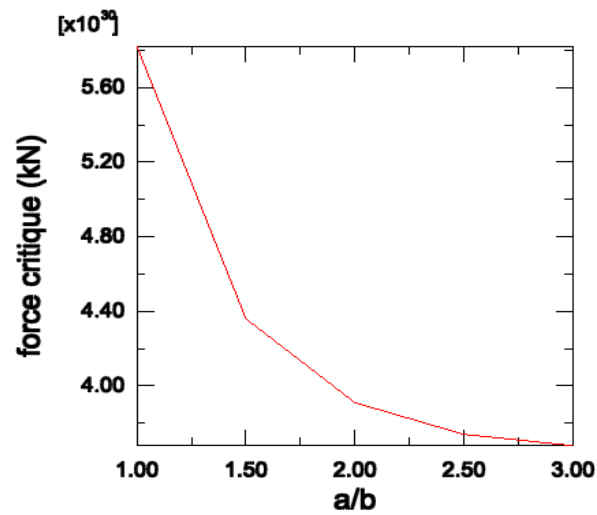
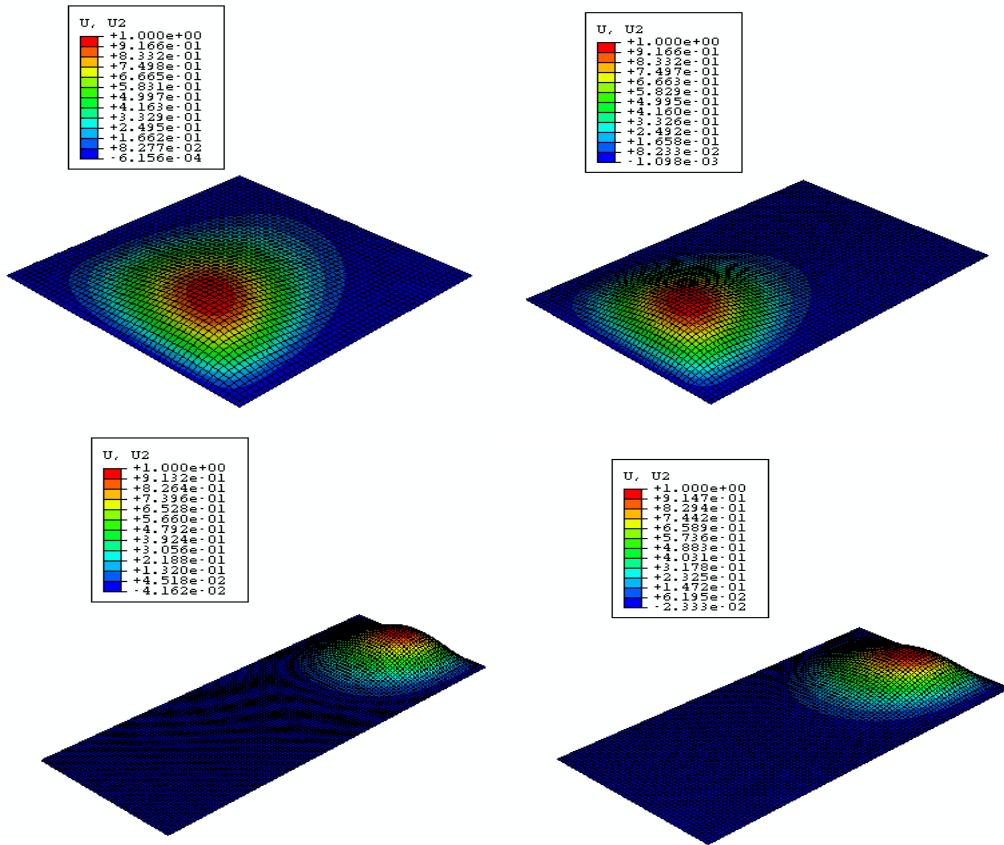


Figure 4-31 : t=10mm M :0.1 S4



Premiers modes de flambement

32^{ème} cas : $t=10\text{mm}$ maillage : 0.5 élément S4

a/b	1	1,5	2	2,5	3
$F_{cr} \times 10^{29}$ (kN)	1.36	-9.58	8.45	-8.06	7.91

— force critique en fonction du rapport a/b

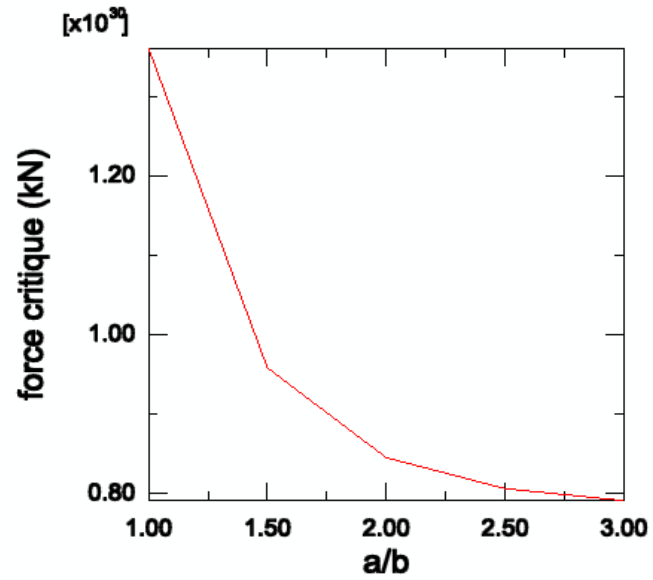
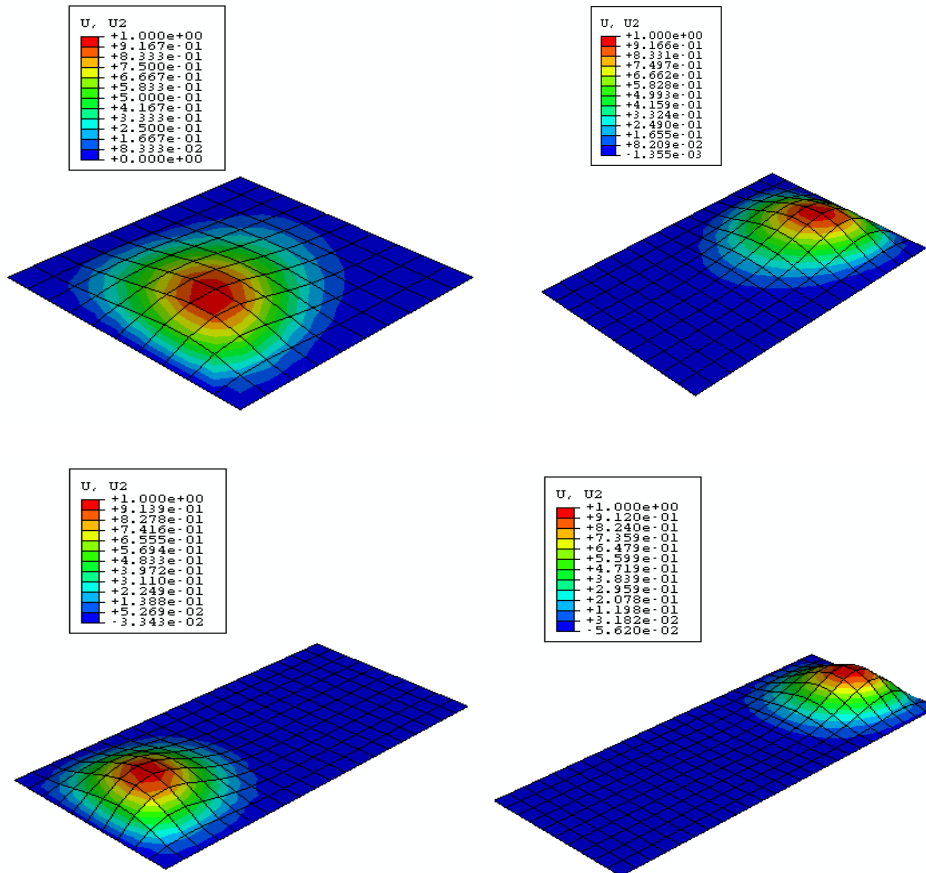
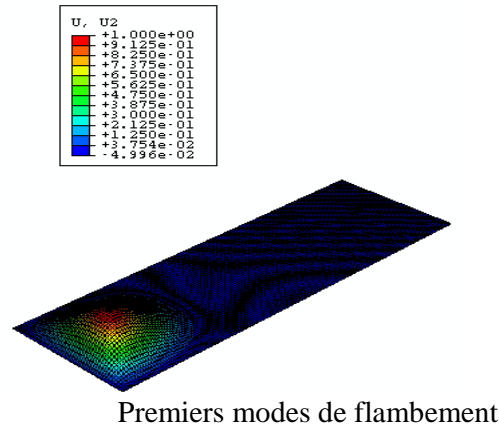


Figure 4-32 : t=10mm M :0.5 S4





33^{ème} cas : t=20mm maillage : 0.1 élément S4

a/b	1	1,5	2	2,5	3
Fcr × 10 ³¹ (kN)	-2.9	1.7	-1.56	-1.49	1.47

— force critique en fonction du rapport a/b

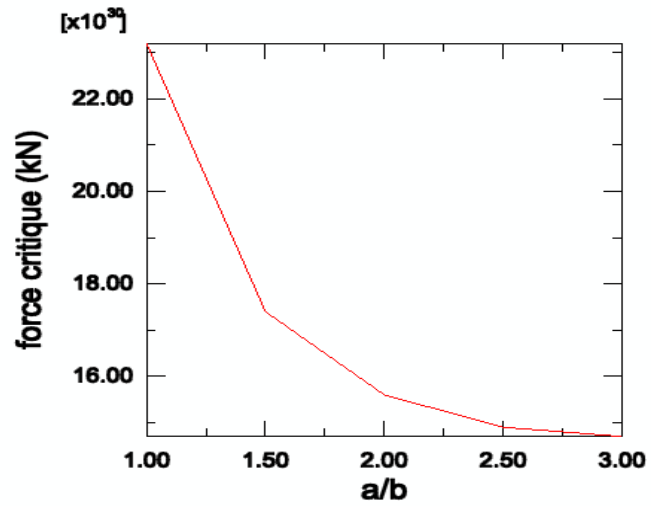
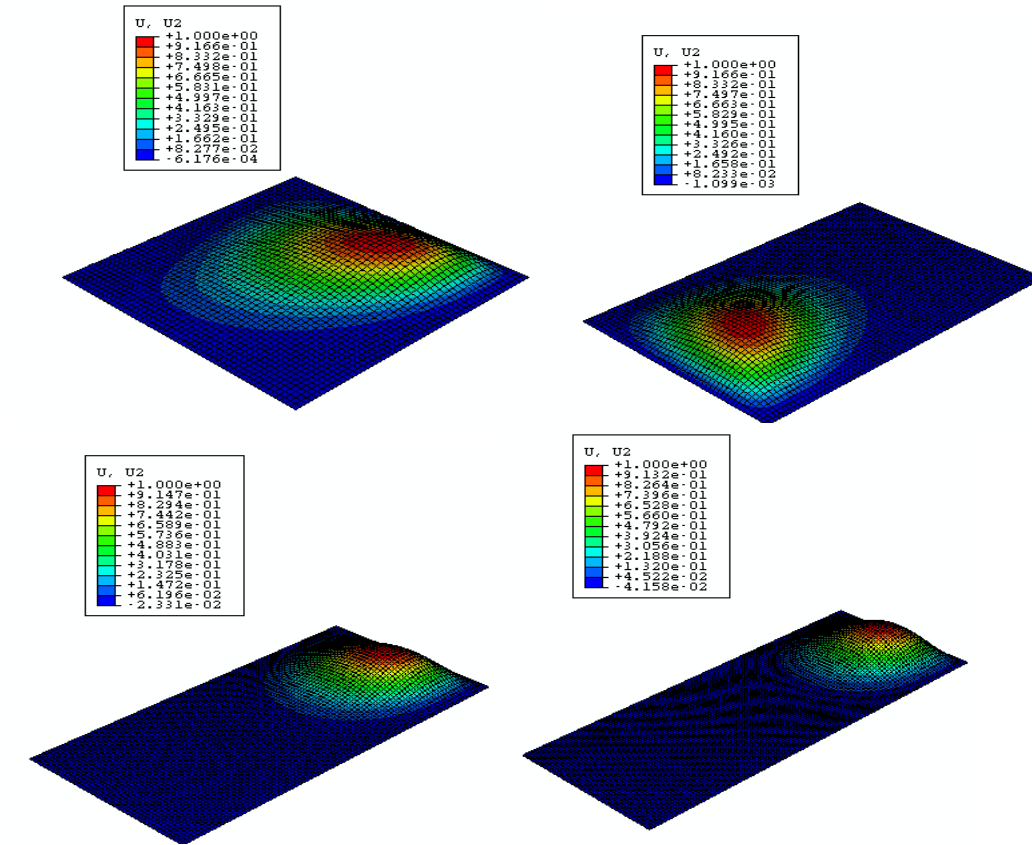


Figure 4-33 : t=20mm M :0.1 S4



Premiers modes de flambement

34^{ème} cas : t=20mm maillage : 0.5 élément S4

a/b	1	1,5	2	2,5	3
F _{cr} × 10 ³⁰ (kN)	5.43	3.83	3.37	3.22	3.16

— force critique en fonction du rapport a/b

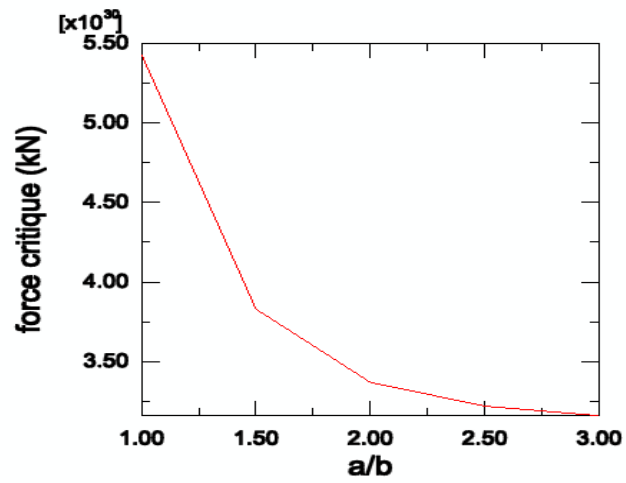
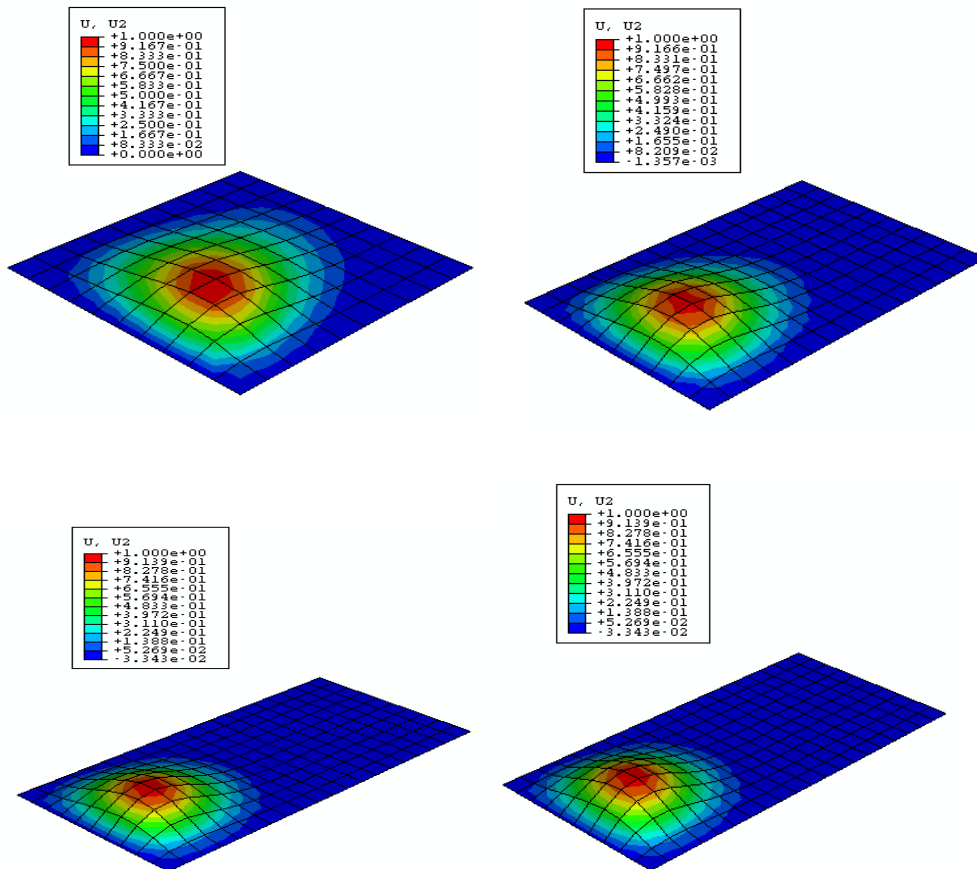
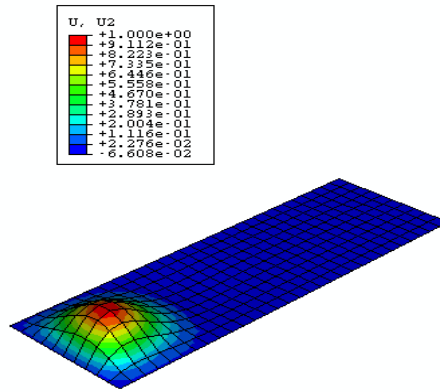


Figure 4-34 : t=20mm M :0.5 S4





Premiers modes de flambement

Tous les côtés encastés

35^{ème} cas : t=4mm maillage : 0.1 élément S4

a/b	1	1,5	2	2,5
Fcr × 10 ²⁹ (kN)	-15.2	11.1	-9.71	-9.26

— force critique en fonction du rapport a/b

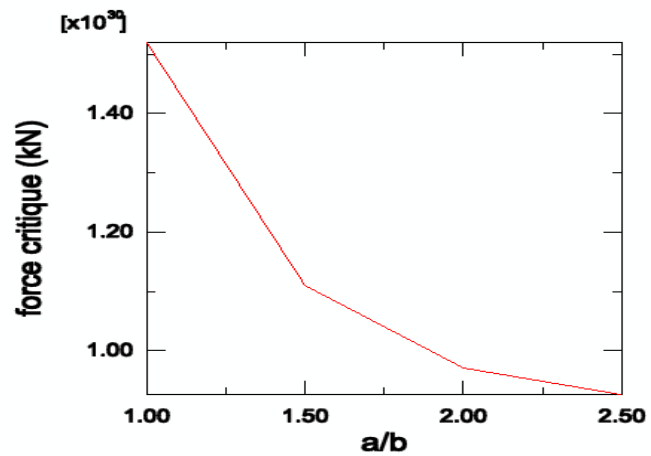
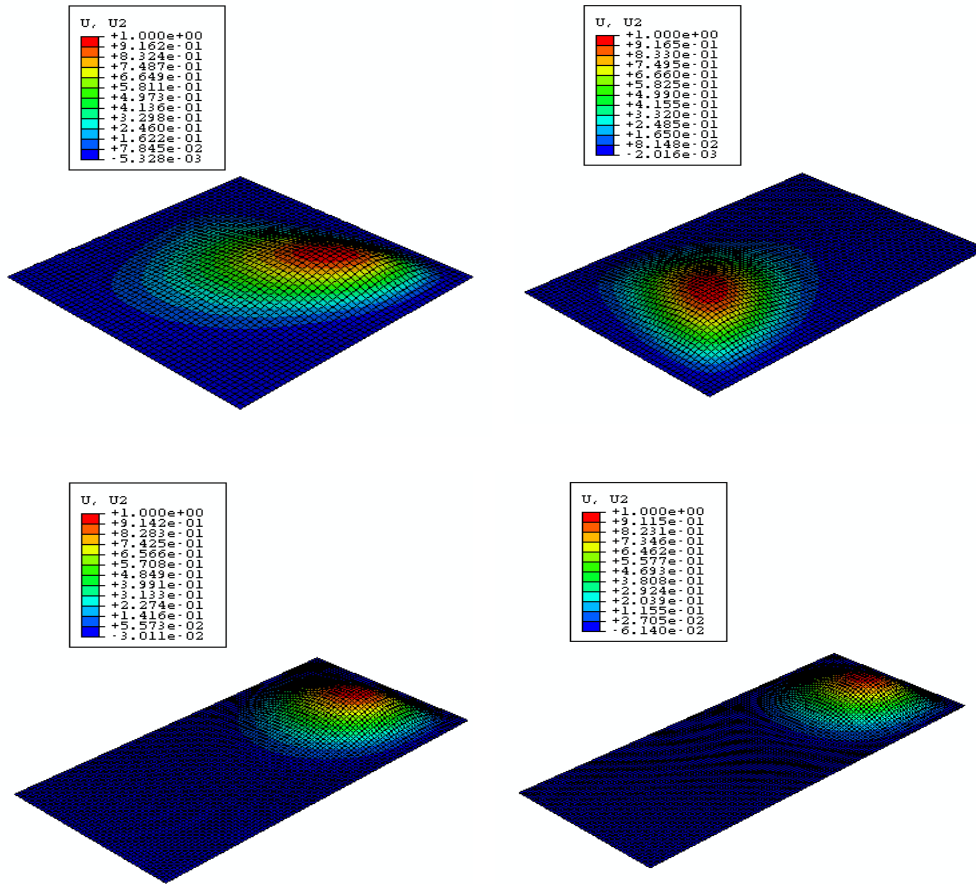


Figure 4-35 : t=4mm M :0.1 S4



Premiers modes de flambement

36^{ème} cas : t=4mm maillage : 0.5 élément S4

a/b	1	1,5	2	2,5
Fcr×10 ²⁹ (kN)	-3.67	2.48	2.12	-2.007

— force critique en fonction du rapport a/b

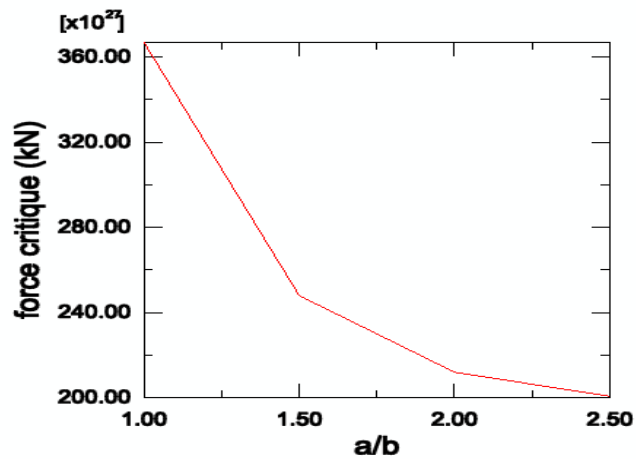
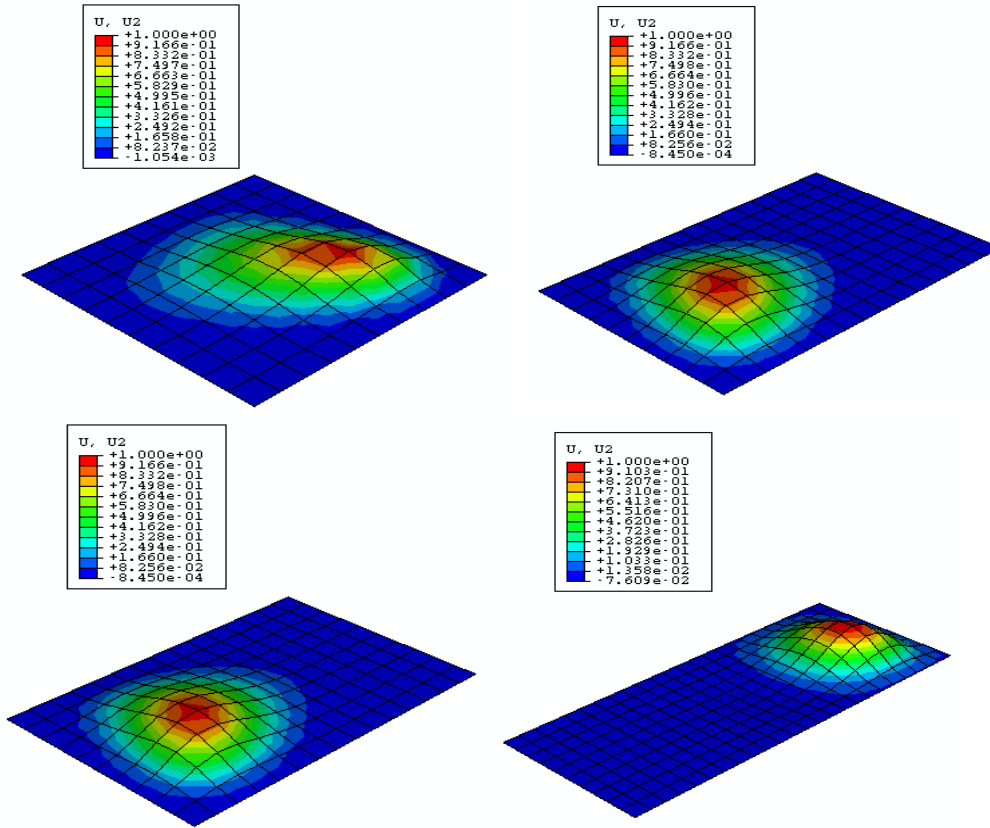


Figure 4-36 : t=4mm M :0.5 S4



Premiers modes de flambement

37^{ème} cas : t=10mm maillage : 0.1 élément S4

a/b	1	1,5	2	2,5
F _{cr} × 10 ³⁰ (kN)	-9.54	6.95	-6.03	-5.78

— force critique en fonction du rapport a/b

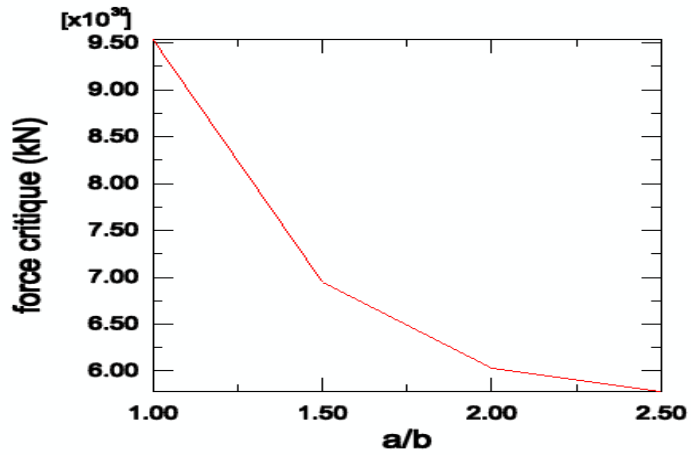
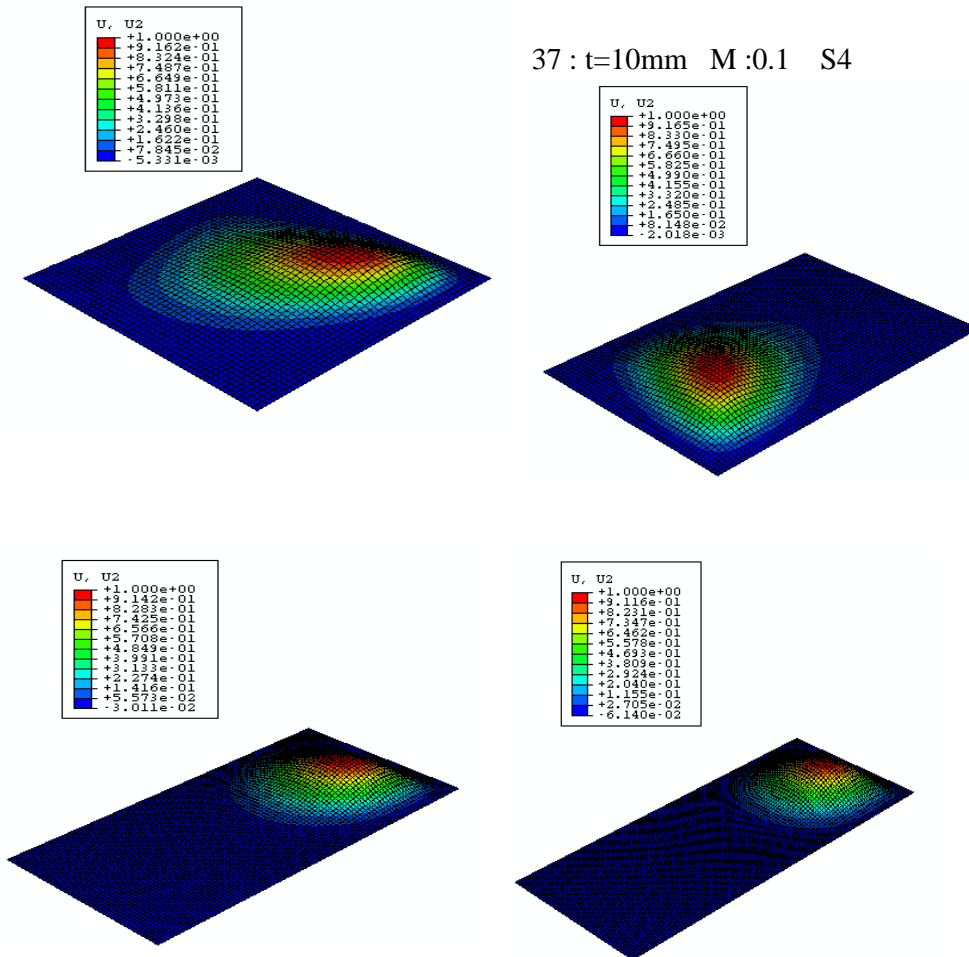


Figure 4-



Premiers modes de flambement

38^{ème} cas : t=10mm maillage : 0.5 élément S4

a/b	1	1,5	2	2,5
$F_{cr} \times 10^{30}$ (kN)	2.29	1.54	-1.32	1.25

— force critique en fonction du rapport a/b

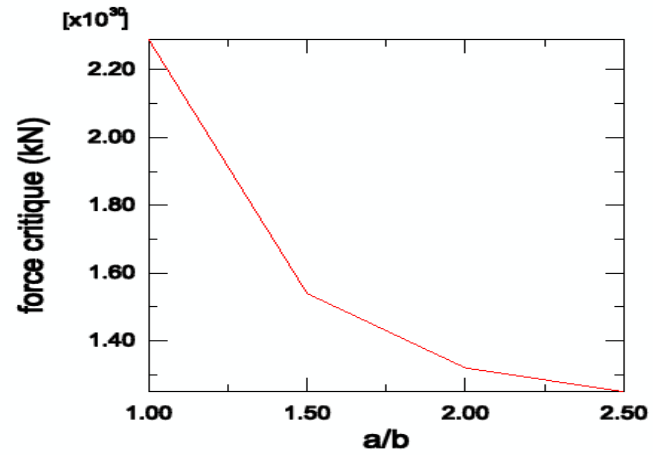
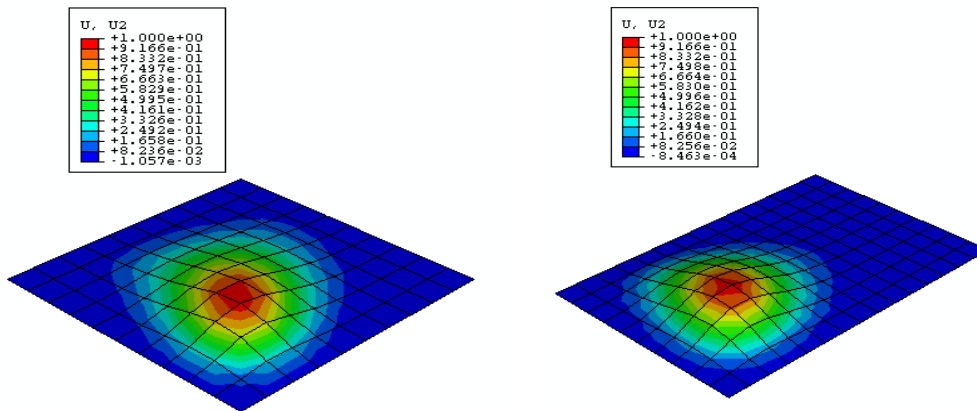
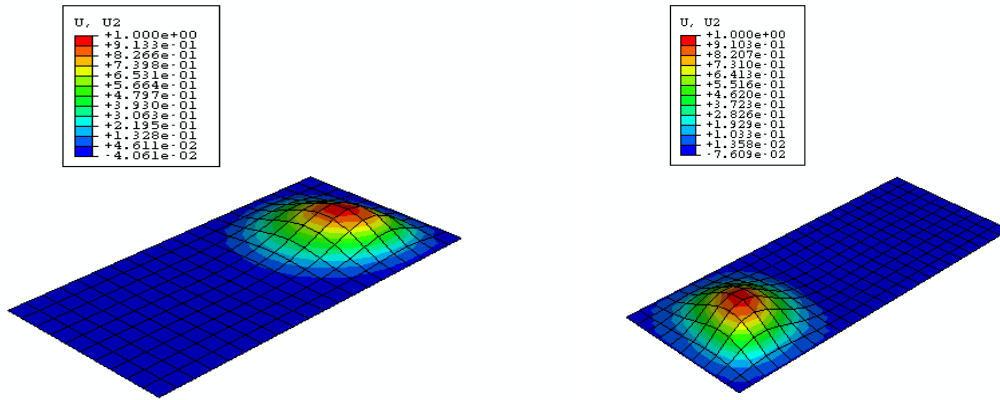


Figure 4-38 : $t=10\text{mm}$ M :0.5 S4





Premiers modes de flambement

39^{ème} cas : $t=20\text{mm}$ maillage : 0.1 élément S4

a/b	1	1,5	2	2,5
$F_{cr} \times 10^{31}$ (kN)	-3.81	2.77	-2.42	-2.31

— force critique en fonction du rapport a/b

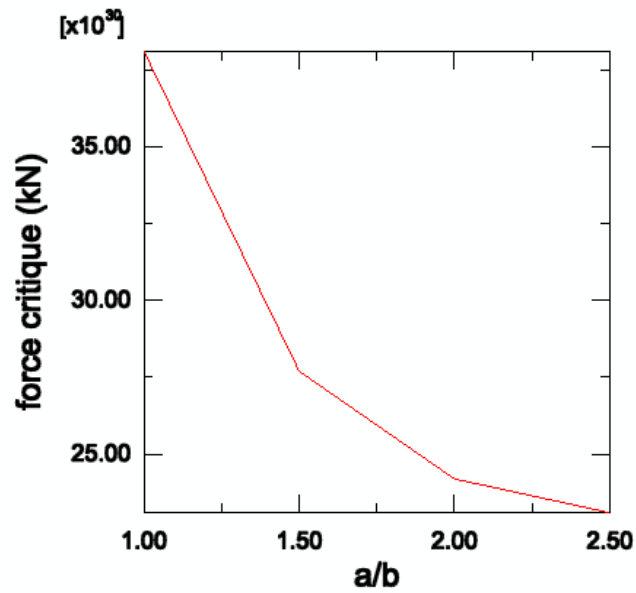
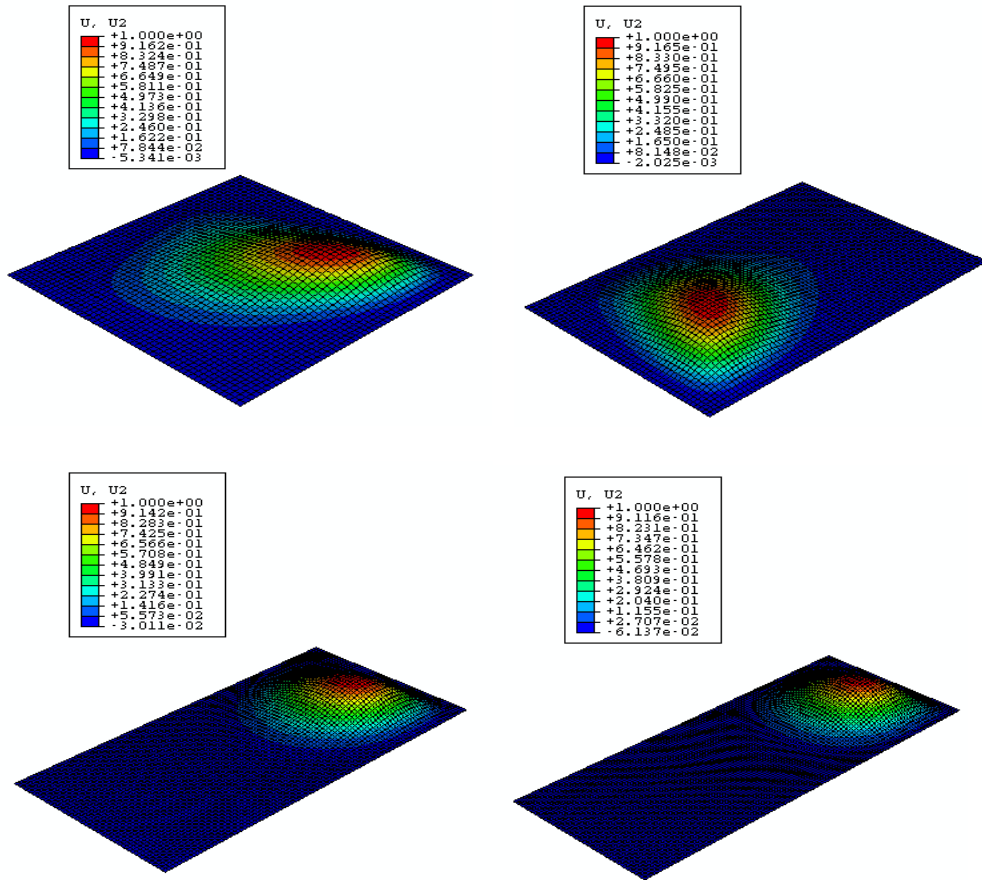


Figure 4-39 : $t=20\text{mm}$ M : 0.1 S4



Premiers modes de flambement

40^{ème} cas : $t=20\text{mm}$ maillage : 0.5 élément S4

a/b	1	1,5	2	2,5
$F_{cr} \times 10^{30}$ (kN)	9.18	-6.19	-5.29	-5.01

— force critique en fonction du rapport a/b

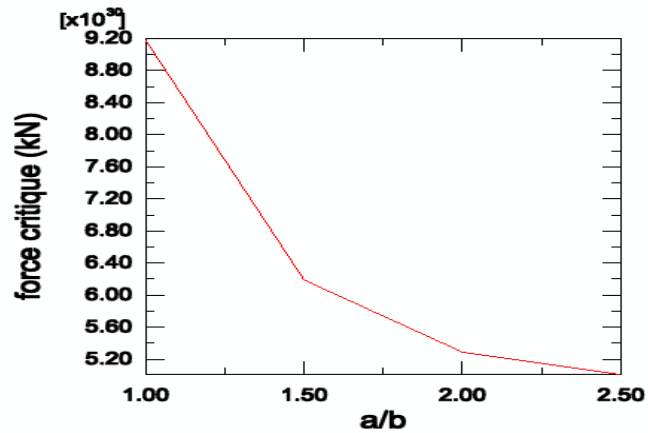
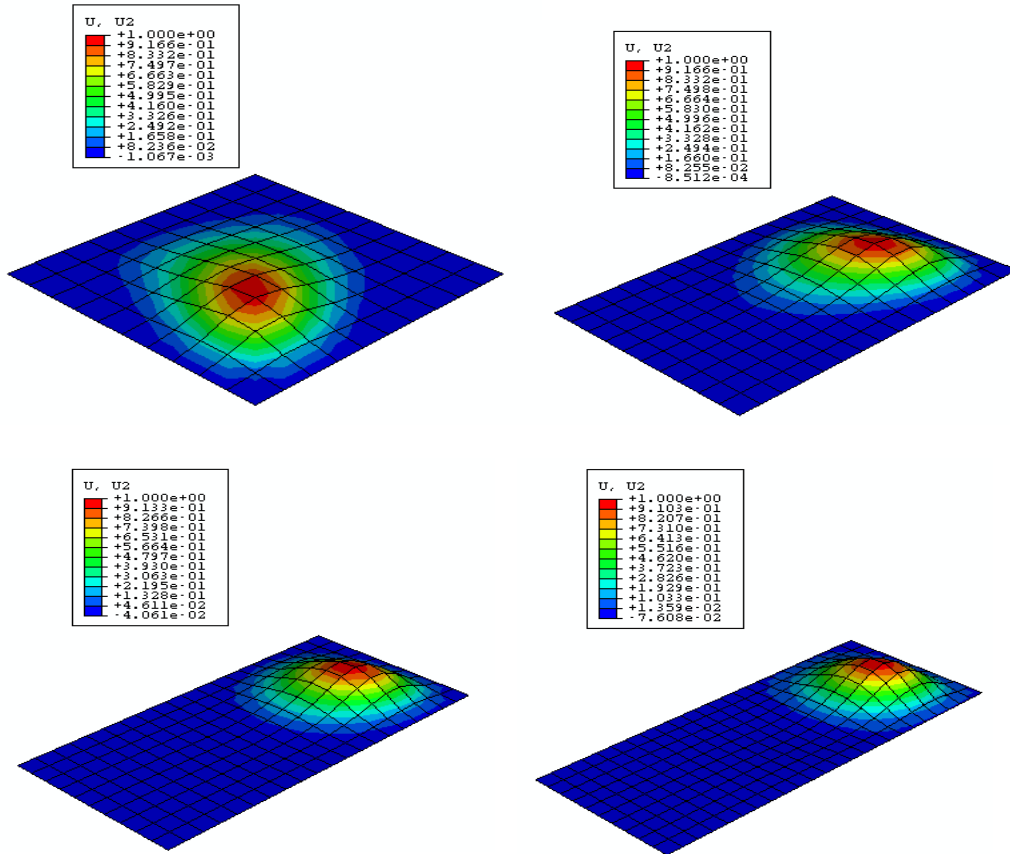


Figure 4-40 : t=20mm M :0.5 S4



Premiers modes de flambement

Cette étude nous a permis d'aboutir à un certain nombre de remarques et conclusions que nous citons.

La plaque se trouve à un état critique s'il existe un vecteur non nul cinématiquement admissible et le critère de stabilité implique que la plus petite valeur propre est nulle.

Le critère de stabilité est un problème aux valeurs propres dit de stabilité linéaire.

A chaque valeur propre correspond une charge critique de flambement de la structure étudiée.

Le système aux valeurs propres donne des charges critiques d'autant plus exactes que la structure admettra, dans le domaine étudié, de faibles déplacements et rotations.

Une meilleure estimation de ces charges peut toutefois être apportée en augmentant le degré du développement à l'ordre 2, aboutissant ainsi à la résolution d'un système aux valeurs propres de type quadratique.

Ceci concerne le comportement des structures plaques ne comportant aucun défaut. Cela a abouti à la définition des différentes courbes classiques et auxiliaires par des méthodes impliquant un minimum d'imperfection et de perturbation, les plus proches possible des courbes théoriques.

La réalité des pièces de construction est bien différente. En effet, ces structures comportent de nombreux défauts de forme, d'homogénéité structurale, d'homogénéité des caractéristiques mécaniques (module de Young, limite élastique...).

Ces défauts ont pour effet de changer considérablement dans certains cas leurs comportements.

Leur influence s'exerce principalement sur les états critiques de type bifurcation et le comportement pré et post-flambement associé sont également influencés par ces défauts.

Les modifications apportées peuvent être de différentes natures :

- diminution de la charge critique de bifurcation ou limite,
- disparition de la charge critique de bifurcation et remplacement par une charge limite,
- disparition totale de la charge critique de bifurcation ou limite,
- modification du mode de flambement.

Ces différentes possibilités dépendent du type de plaque, de son chargement, des conditions aux limites mais aussi de la taille et type des défauts. De plus, elles ne sont pas exhaustives et peuvent être plus perturbantes. De telles structures imparfaites peuvent être directement étudiées si l'on connaît les défauts. Dans le cas contraire pour les défauts de type géométrique nous proposons à ce qu'une analyse complète des comportements possibles de la structure parfaite soit réalisée. En particulier il est obligatoire de déterminer, non pas la seule plus petite charge critique (et le mode associé), mais aussi les cinq ou dix premières.

Les différents modes associés donnent aussi une bonne idée des défauts géométriques à fort risque. Ce risque peut être évalué dans une seconde étape pour chacun des modes. Ceci s'effectue par études successives du comportement non linéaire de la plaque.

4-2 .Coques

Dans cette étude, nous avons analysé le flambement des coques avec des géométries spécifiques. Ces analyses étaient basées principalement sur l'analyse linéaire de la stabilité du flambement global de type bifurcation des coques et chargements spécifiques. Plusieurs autres problèmes d'une importance capitale sont à prendre en charge.

Le phénomène de flambement des coques minces inclue les évènements suivants :

- (1) flambement par bifurcation à partir de l'état non déformé de pré-flambement,
- (2) flambement par bifurcation à partir de l'état déformé de pré-flambement dans les cas où les effets non linéaires de pré-flambement sont si importants.

Les cas de ce type d'instabilité comprennent :

- (*) flambement par bifurcation du aux effets d'extrémités et à la compression circonférentielle locale
- (3) rupture au point d'équilibre limite, c'est-à-dire le point maximum le long du chemin charge-déformation.

Cette étude a porté sur le comportement de coques cylindriques circulaires sous une compression axiale uniforme d'une part et sous un chargement combiné constitué d'une compression et d'une pression extérieure uniforme .

La hauteur des coques varie de 2 mètres à 20 mètres alors que le diamètre étant constant d'une valeur de 4 mètres . L'épaisseur , également constante , est prise égale à 20 millimètres .

Un seule maillage est considéré , il s' agit de $M = 0.5$

4-2-1 Compression axiale seule

4-2-1-1 Deux extrémités simplement appuyées

L/a	0.5	1	1.5	2	2.5	4	5
$F_{cr} \times 10^{17}$ (kN)	6.91	-6.77	-6.88	-6.94	-6.97	-6.98	-6.98

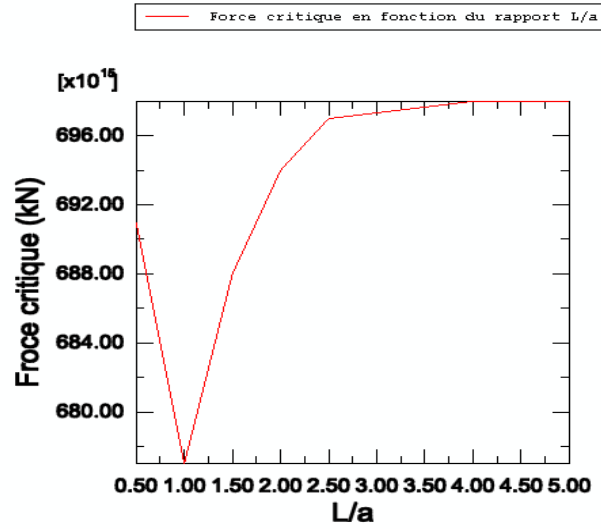
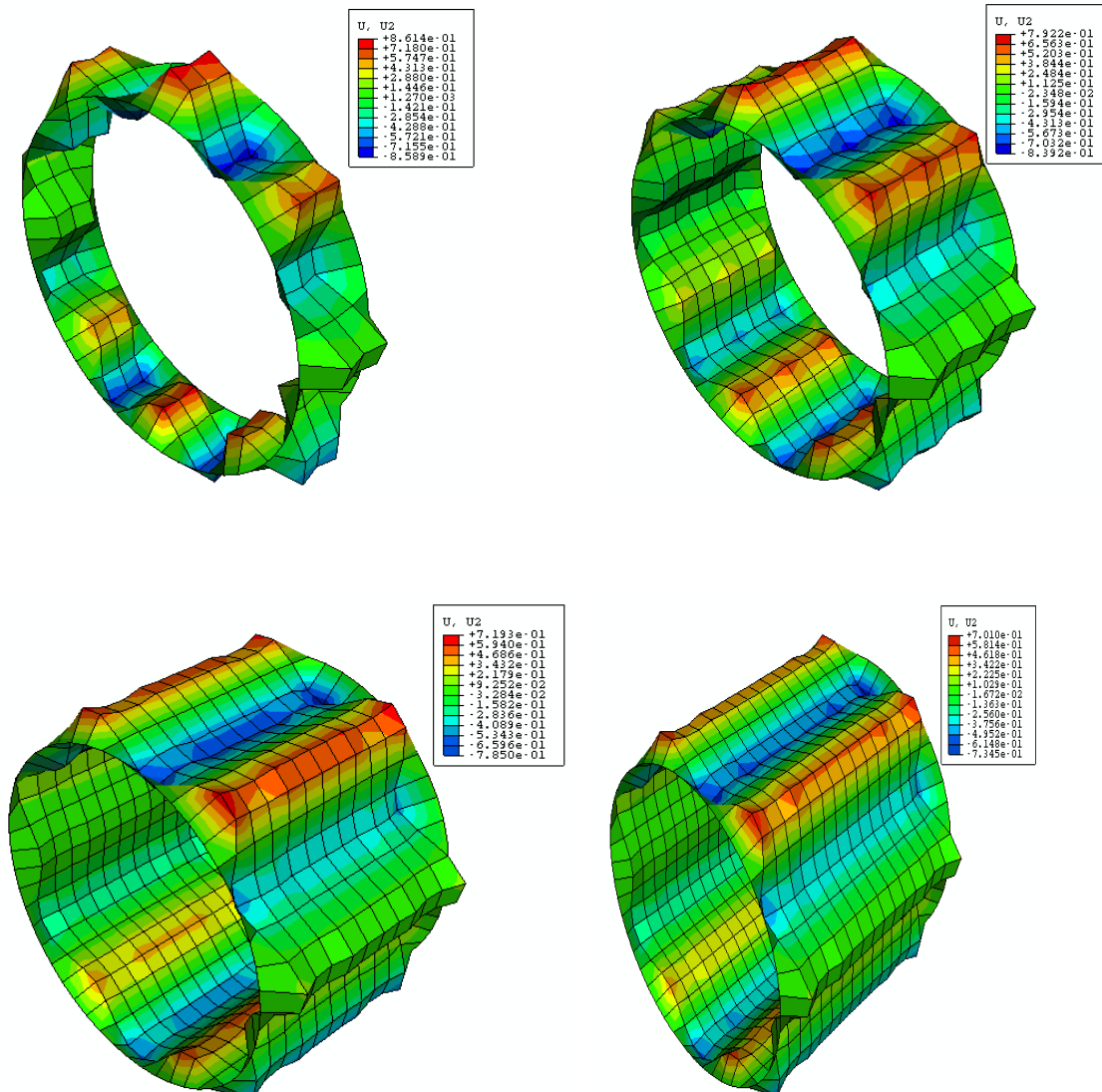
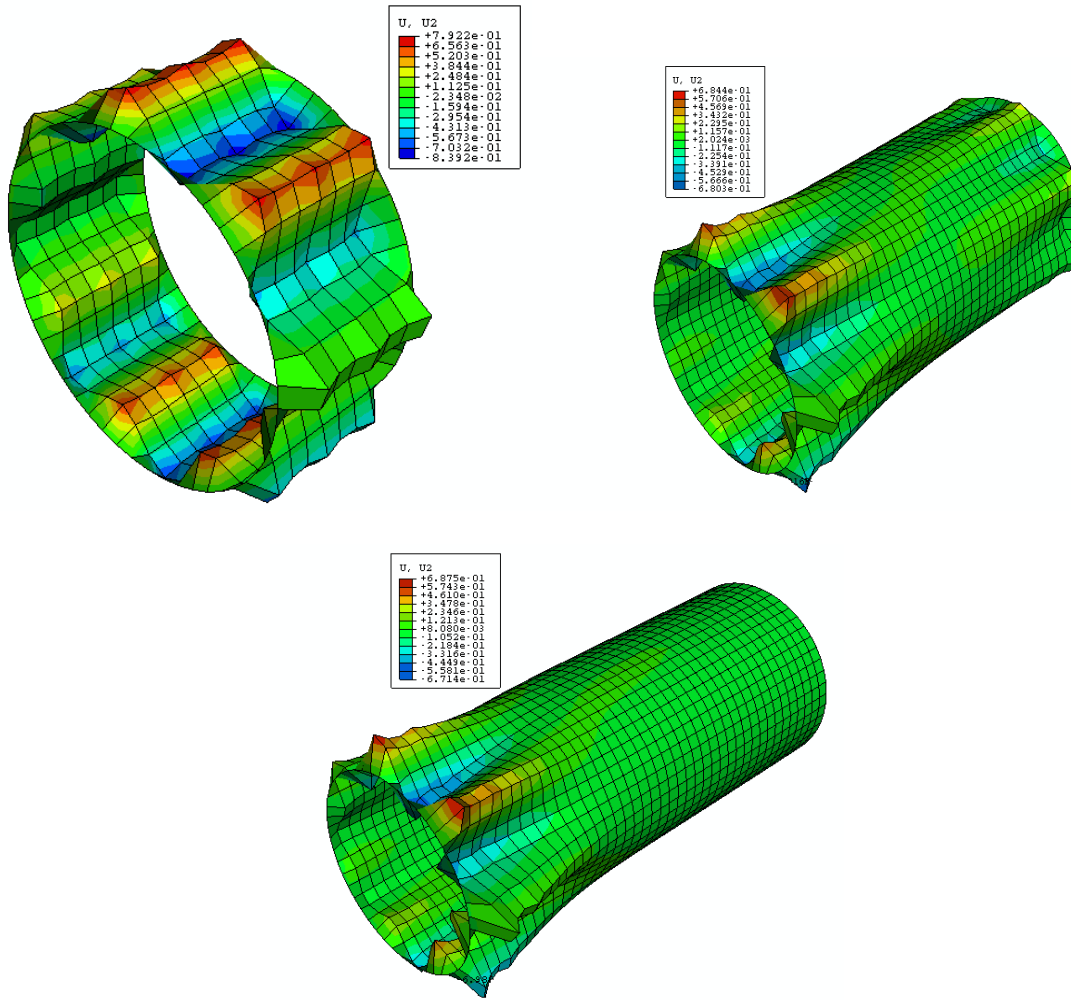


Figure 4-41 : t=20mm M :0.5 S4





Premiers modes de flambement

4-2-1-2 Une extrémité simplement appuyée , l'autre encastree

L/a	0.5	1	1.5	2	2.5	4	5
$F_{cr} \times 10^{17}$	7.66	-7.03	-6.98	-6.98	6.98	6.98	-6.98
(kN)							

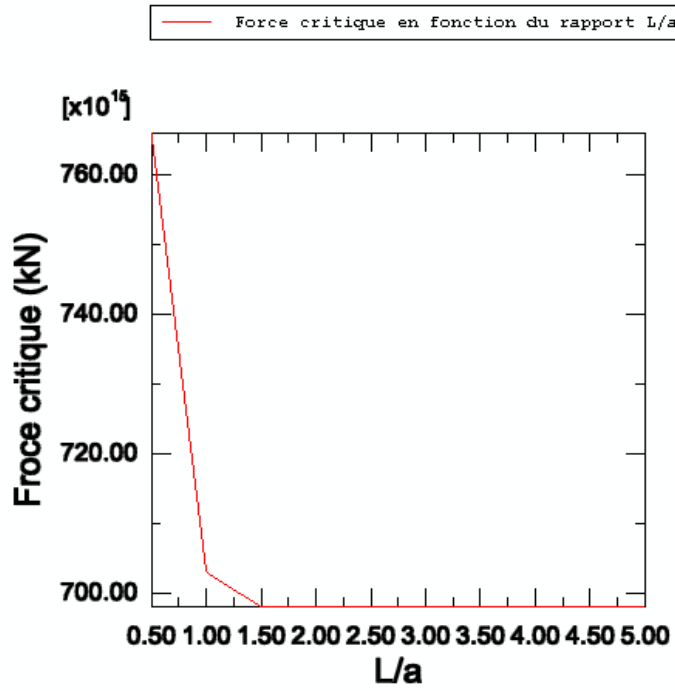
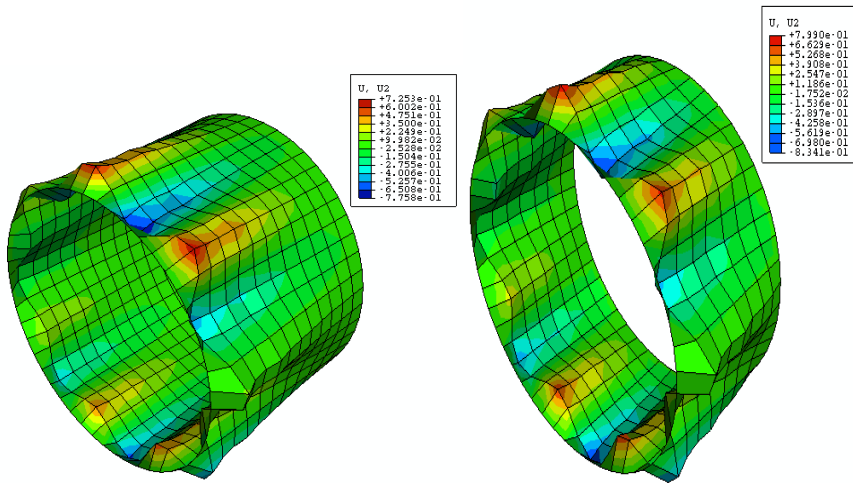
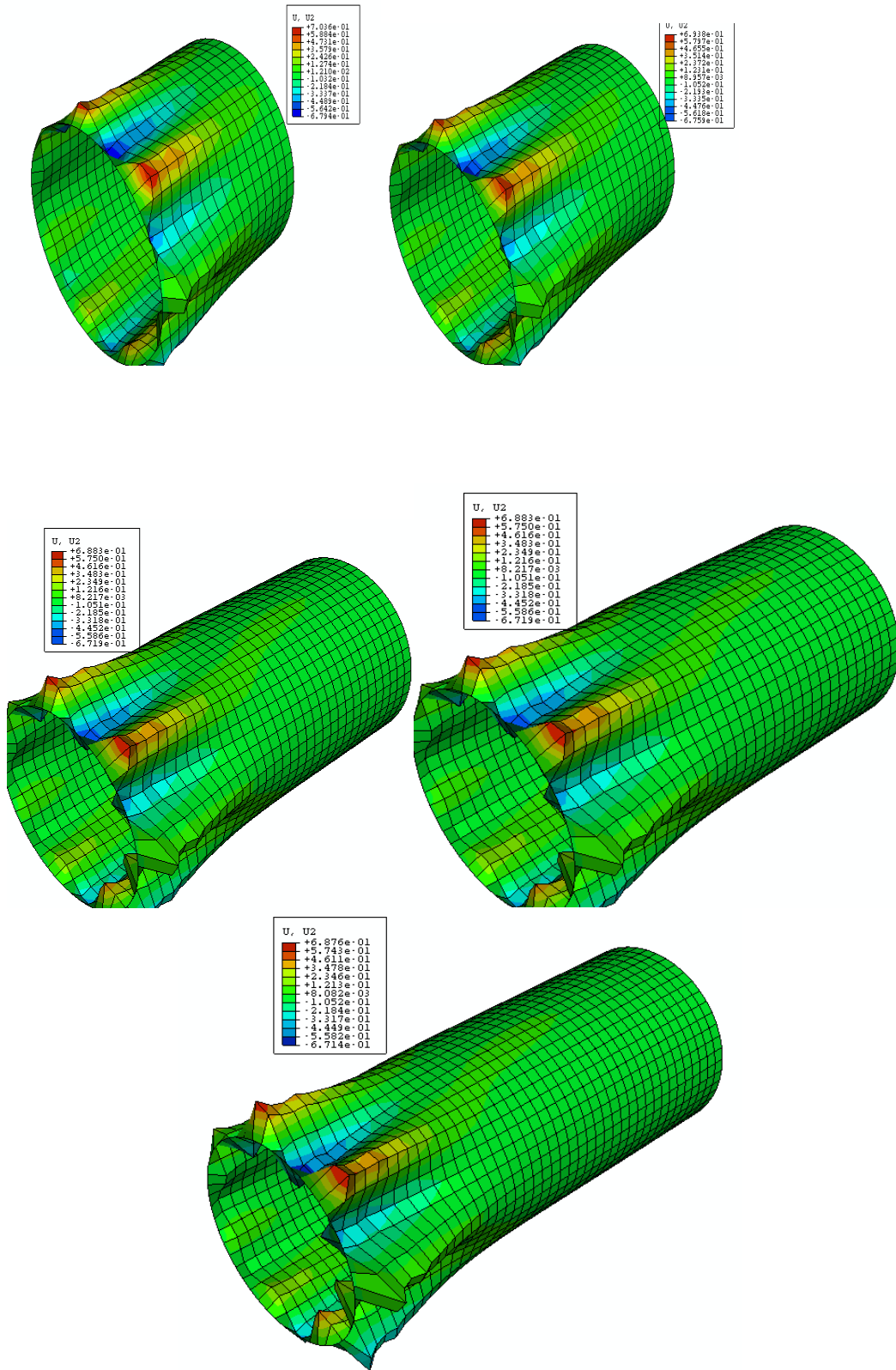


Figure 4-42 : t=20mm M :0.5 S4





Premiers modes de flambement

4-2-1-3 Une extrémité encastrée , l'autre libre

L/a	0.5	1	1.5	2	2.5	4	5
Fcr (kN)	21.06	13.65	10.92	9.41	8.21	-6.52	5.53

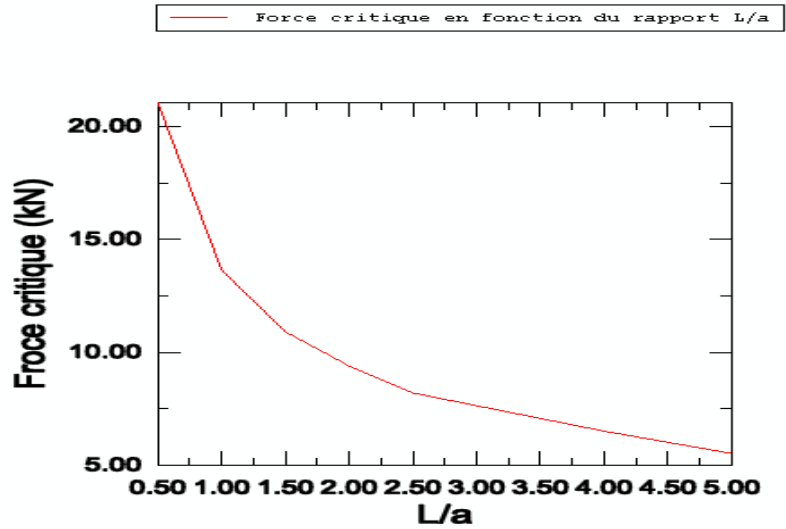
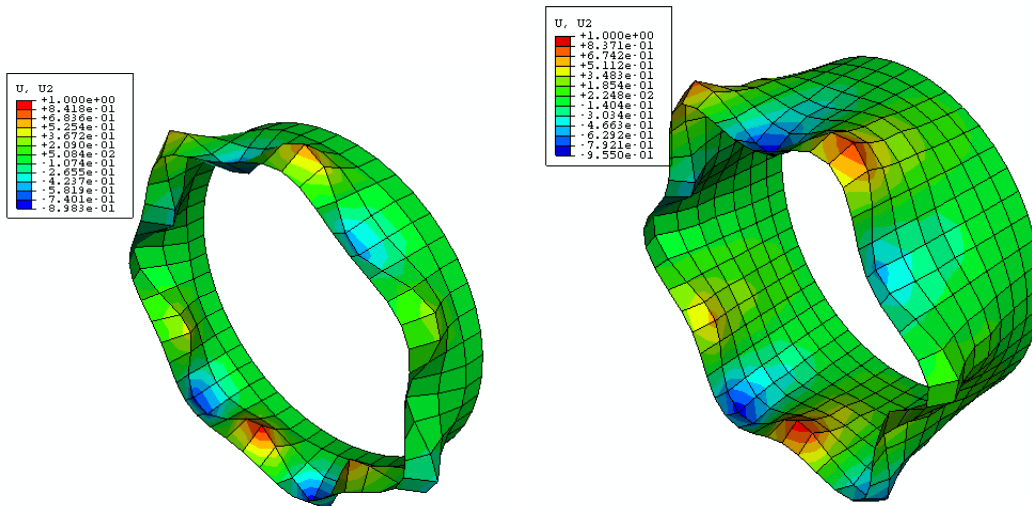
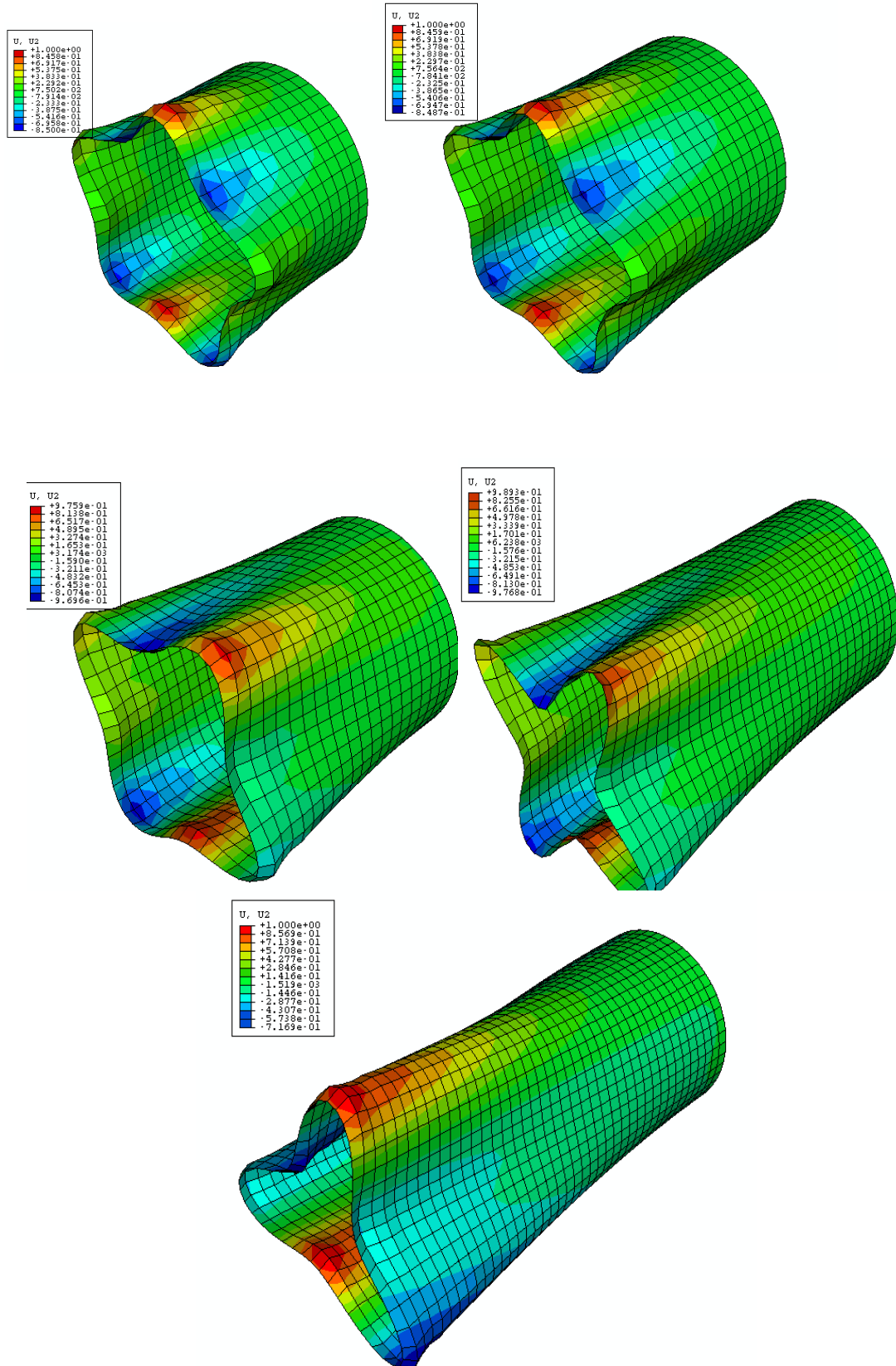


Figure 4-43 : t=20mm M :0.5 S4





Premiers modes de flambement

4-2-2 Compression axiale avec pression extérieure

4-2-2-1 Deux extrémité simplement appuyées

L/a	0.5	1	1.5	2	2.5	4	5
Fcr (kN)	14.54	6.32	3.91	2.83	2.25	1.33	1.10

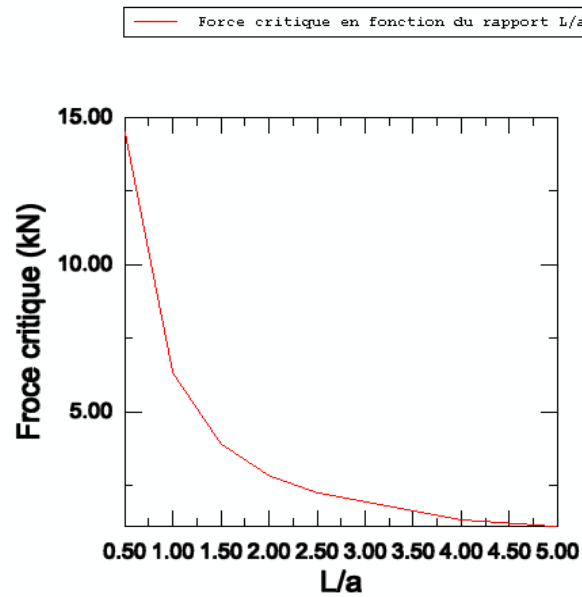
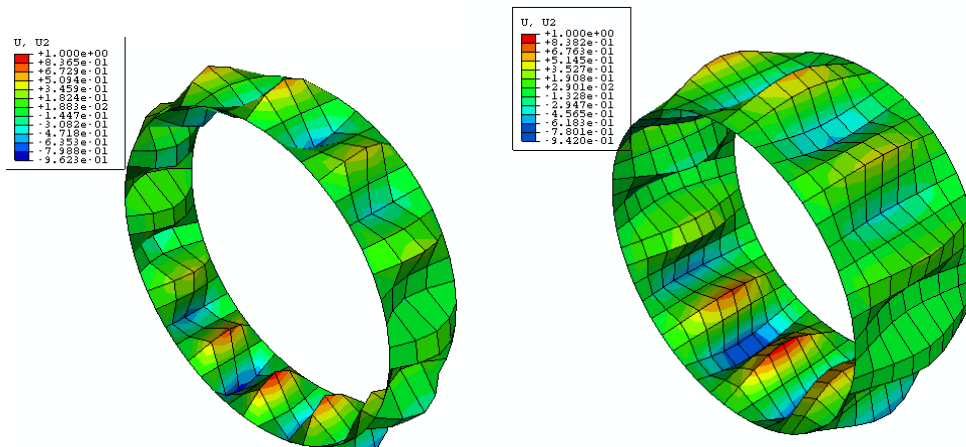
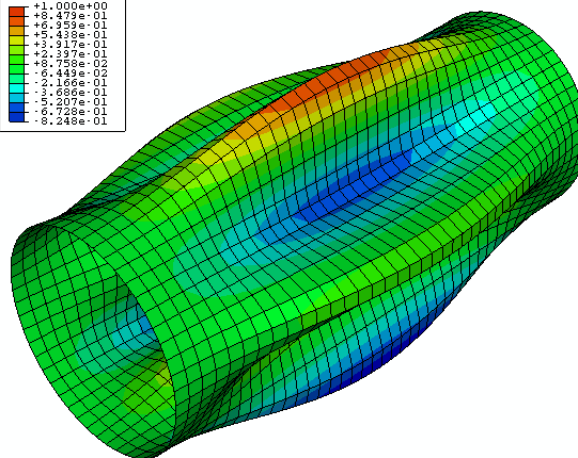
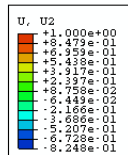
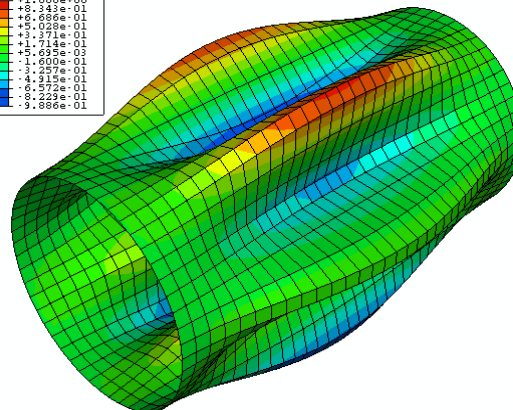
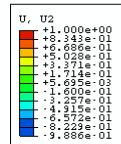
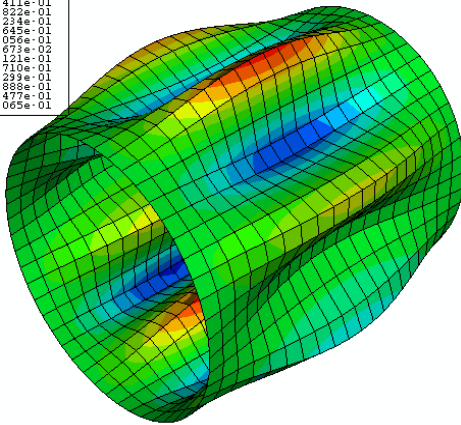
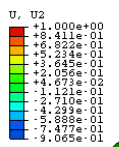
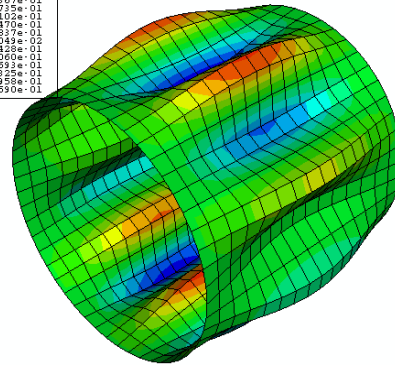
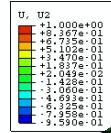
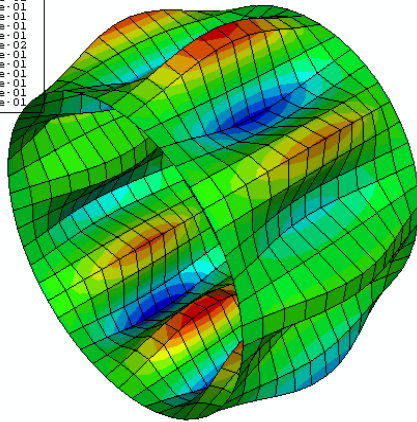
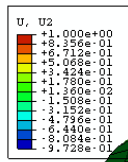


Figure 4-44 : t=20mm M :0.5 S4





Premiers modes de flambement

4-2-2-2 Une extrémité simplement appuyée , l'autre encastrée

L/a	0.5	1	1.5	2	2.5	4	5
Fcr (kN)	15.29	6.39	3.93	2.84	2.26	1.33	1.11

— Force critique en fonction du rapport L/a

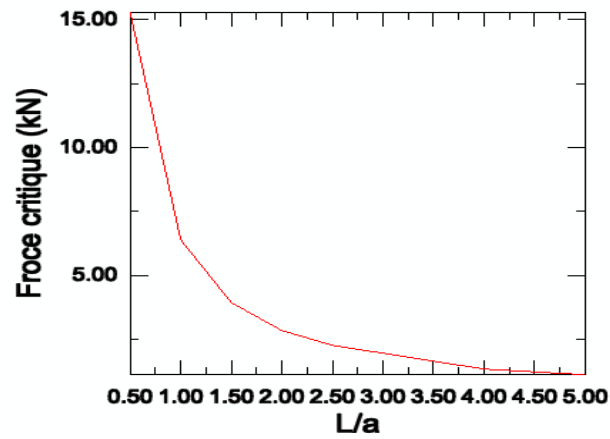
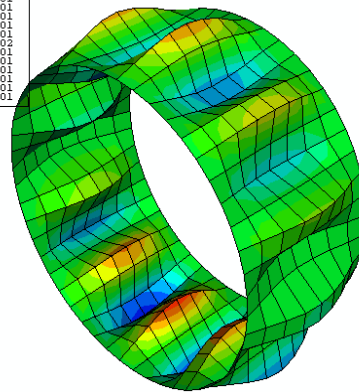
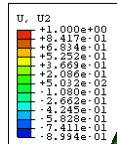
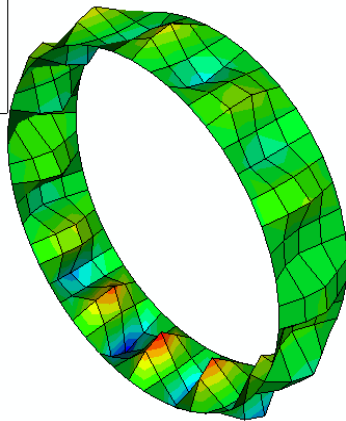
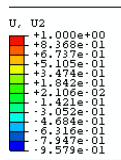
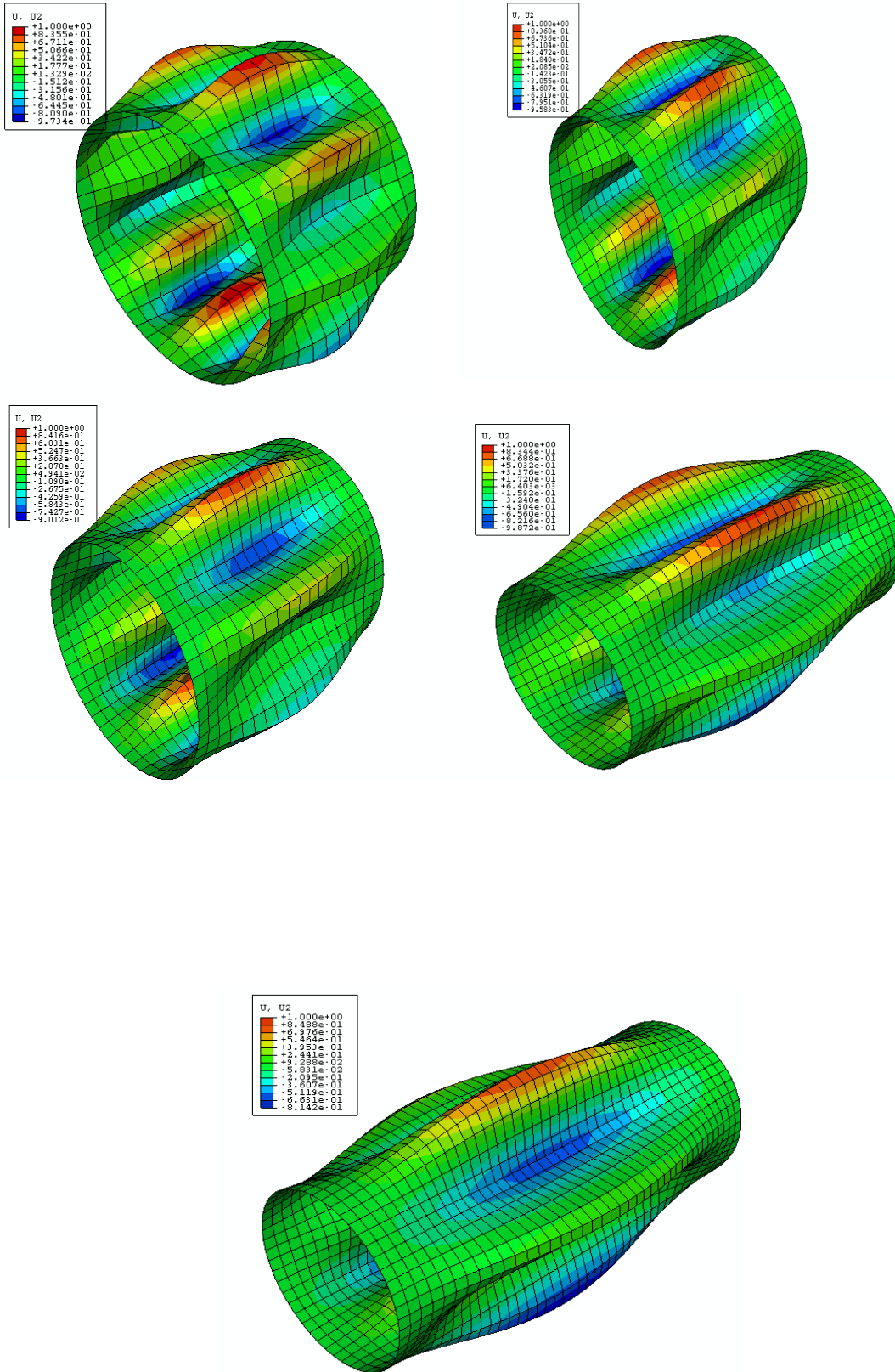


Figure 4-45 : t=20mm M :0.5 S4





Premiers modes de flambement

4-2-2-3 Une extrémité encastree , l'autre libre

L/a	0.5	1	1.5	2	2.5	4	5
Fcr (kN)	5.36	2.39	1.49	1.13	0.848	0.512	0.435

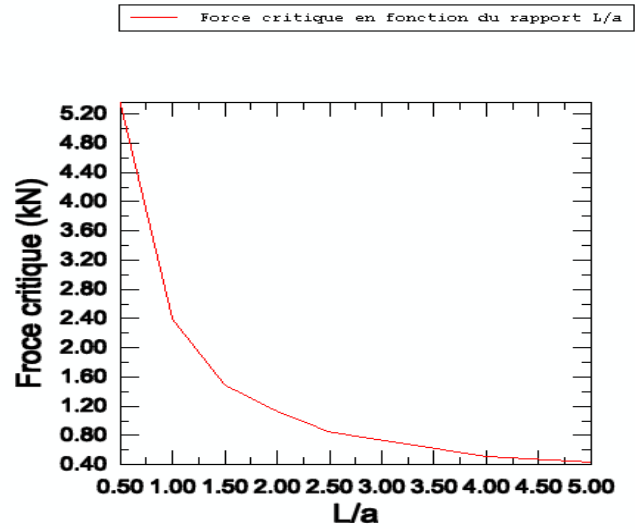
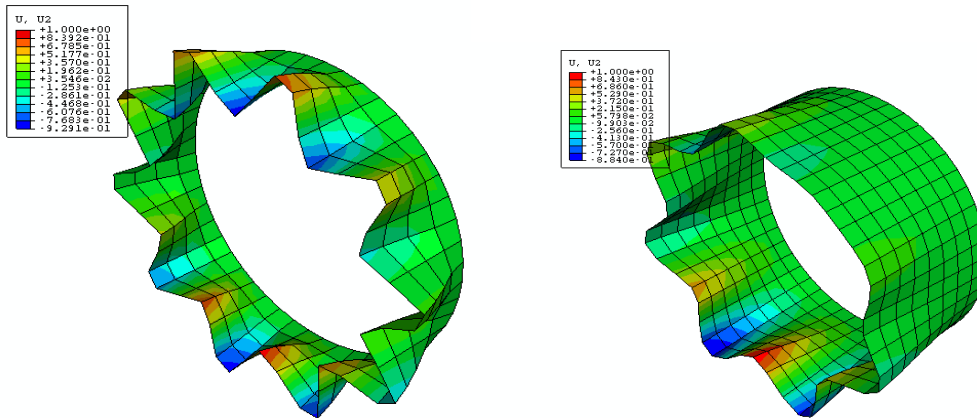
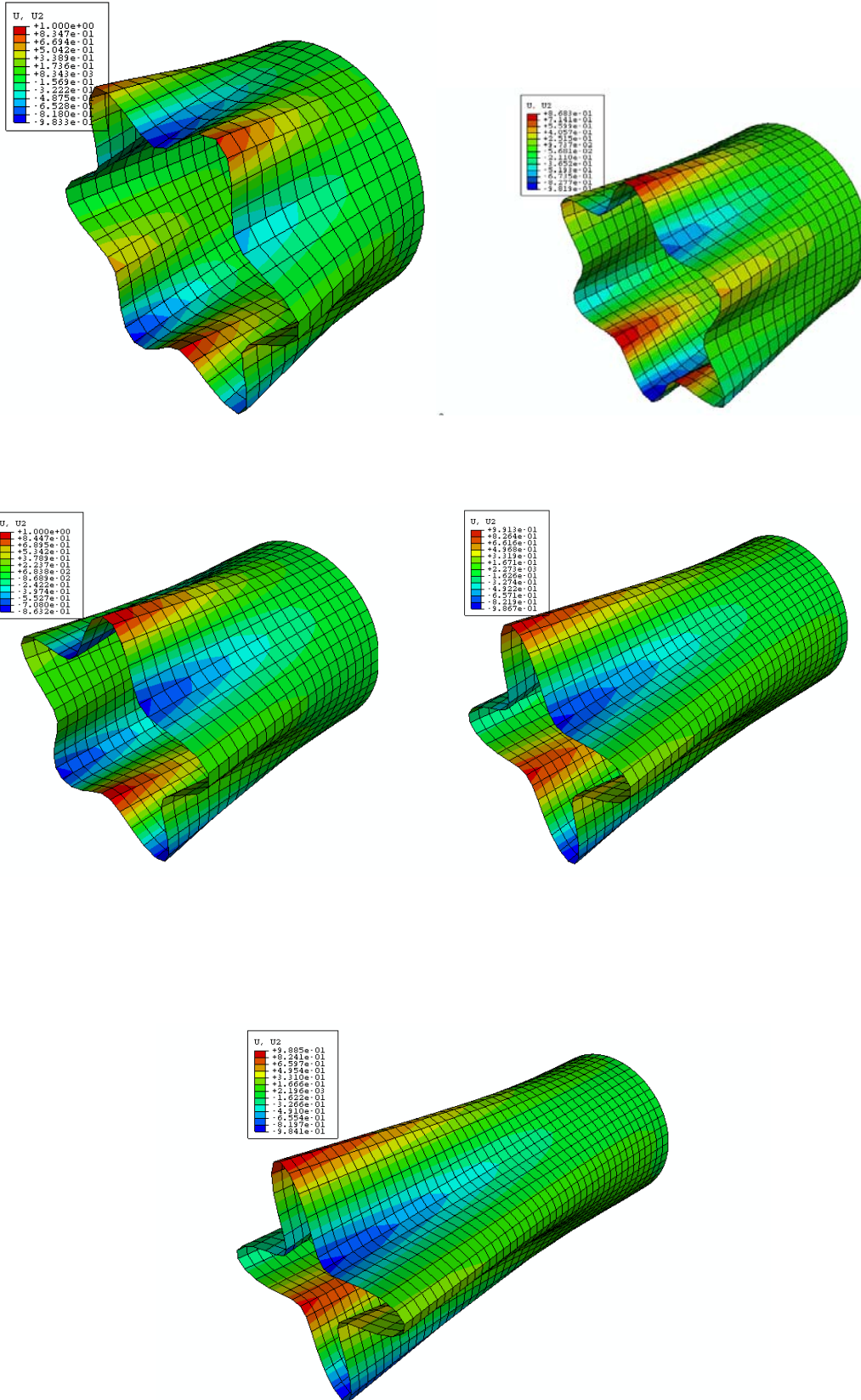


Figure 4-46 : t=20mm M :0.5 S4





Premiers modes de flambement

Les théories linéaires de flambement des coques basées sur un système parfait prédisent un comportement qui n'est pas matérialisé . Les théories de la stabilité linéaire sont capables de prédire le flambement « threshold » et en particulier le point de bifurcation . Dans certains systèmes , par exemple , dans les systèmes imparfaits , le point de bifurcation n'existe pas essentiellement ; dans de tels systèmes la coque peut être chargée jusqu'à rupture sans montrer aucune bifurcation . Dans d'autre cas la bifurcation peut suivre un équilibre d'état limite. Dans certaines structures coques comportant une imperfection suffisamment large , la structure peut passer d'un état d'équilibre non flambé à un état d'équilibre flambé non adjacent même avant que la charge critique classique de flambement donnée par les théories linéaires ne soit atteinte .

La stabilité des coques cylindriques circulaires sous une pression extérieure uniforme peut être résumée comme suit :

- Le mode de flambement des coques cylindriques est caractérisé par des ondes axiales longitudinales et relativement peu d'ondes circonférentielles ; cette caractéristique résulte en une sensibilité modérée des charges de flambement aux imperfections géométriques initiales .
- Les cylindres sous une pression hydrostatique externe uniforme ne sont pas tout à fait sensibles aux imperfections initiales comme les cylindres sous une pression axiale uniforme .
- Le comparaison des résultats pour différentes conditions de fixation montre que la liaison de la rotation méridionale n'augmente pas la pression hydrostatique critique d'une manière significative sauf si les cylindres sont courts . Cependant pour des cylindres moyens la liaison axiale augmentera la pression de flambement d'une manière significative .

Conclusions, Recommandations et Perspectives

Le comportement et le calcul des structures est une opération de recherche très liée à celle des méthodes numériques et principalement à la méthode des éléments finis. Cette opération a fait l'objet de nombreux articles et communications depuis presque un demi siècle et comporte essentiellement deux aspects à savoir :

- L'aspect modélisation relatif au développement et l'évaluation de nouveaux modèles, outils et méthodes pour le calcul des structures de types poutres, plaques et coques isotropes ou composites en présence de non- linéarités géométriques ou matérielles.

- L'aspect simulation relatif aux applications des outils de modélisation pour l'étude du comportement des structures impliquant des non- linéarités diverses (grands déplacements, grandes déformations, conditions aux limites évolutives) et pour la simulation de la mise en forme de produits à parois minces.

La formulation et l'évaluation de modèles éléments finis pour l'analyse des structures constituent l'un des axes de recherche important de la modélisation des solides et des structures.

Ainsi l'étude des instabilités de type flambement des plaques et coques métalliques constitue un problème qui peut être traité par la méthode des éléments finis en termes de problème aux valeurs propres.

La simulation éléments finis, réalisée avec le code ABAQUS, permet de retrouver cette instabilité. Il d'agit de déterminer les différents modes et charges critiques de flambement de type limite ou bifurcation et l'ensemble des comportements pré et post- critiques des structures plaques te coques. De plus le code ABAQUS utilise les méthodes de Lanczos qui diminuent le temps calcul et la taille mémoire.

Cette thèse ne prétend pas être complète pour résoudre tous les problèmes d'analyse des instabilités type flambement des plaques et coques. Pour améliorer davantage le travail présenté et le rendre plus fructueux, il est recommandé d'approfondir davantage les thèmes suivants :

- > généralisation aux plaques et coques composites (recherche des solutions analytiques d'élasticité plane orthotrope, voire anisotrope) ;

- étendre la validité des modèles au cas des grandes déformations (pris en compte de la plasticité) ;
- prise en compte du gauchissement pour les éléments coques (analyse des structures de formes quelconques, analyse non- linéaire géométrique avec grands déplacements et grandes rotations,...) ;
- étude de la possibilité d'un couplage entre modes de vibration et modes de flambage pour les structures plaques et coques soumises à un chargement dynamique;
- introduction des imperfections initiales et prise en compte de la sensibilité des structures plaques et coques à ces imperfections ;

Bibliographie

- [1] Aalto J., "From Kirchhoff to Mindlin plate elements," *Communication in Applied Numerical Methods*, 4, (1988), 231-241
- [2] Ahmed, S., Irons, B.M., and Zienkiewicz, O.C., "Analysis of thin shells structures by curved finite elements," *IJNME*, (1970), 2, 419-451
- [3] Ammar S., Dhatt G. & Fafard M., "Exact stability model of space frames," *Comput. & Struct.*, Vol. 6, N° 1, P59-71, 1996.
- [4] Ammar S., Dhatt G. & Fafard M., « Méthode asymptotique appliquée à la résolution de problèmes non linéaires en grandes rotations et grands déplacements, » *Rapport GCS-97.01*, Université Laval, Québec, 1997.
- [5] Argyris, J.H., Haas, M., Mlejnek, H.P. and Schmolz, P.K., "TRUNC for shell-An element possibly to the taste of Bruce IRONS," *IJNME*, 22, (1986), 93-115.
- [6] Argyris J.H., Dunne P.C., Malejannakis G.A. & Schelkle E., "A simple triangular facet shell element with applications to linear and non-linear equilibrium and stability problems," *CMAME*, Vol. 11, P. 97-131, 1977.
- [7] Attard M.M., "Lateral buckling analysis of beams by the FEM," *Comput. Struct.*, 23, 217-231 (1985)
- [8] Ayed R., « Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement, » *Thèse de Doctorat*, Université de Technologie de Compiègne, 1993.
- [9] Ayed R., Batoz J.L., Dhatt G. and Katili I., "A study of recent triangular elements for thin and thick plates. in *New Advances in Computational Structural Mechanics*" Ed. P. Ladevèze and O.C. Zienkiewicz, (1992), 273-288
- [10] Barsoum R.W. and Gallagher R.H., "Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems," *IJNME*, 2, 335-352 (1970).
- [11] Bathe, K.J., Dvorkin E. and Ho, L.W., "Our discrete Kirchhoff and isoparametric shell elements for non-linear analysis". *An assesment. Computers and Structures*, 1689-98, (1983).
- [12] Bathe, K.J. and Dvorkin, E.H., "A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate bending theory and mixed interpolation," *IJNME*, 21, 367-383, (1985).
- [13] Bathe, K.J., "Finite element procedures in engineering analysis," Prentice-Hall, New Jersey, (1982)
- [14] Bathe, K.J. Wilson E.L. and Paterson F.E., *SAP IV*, "A structural analysis program for static and dynamic response of linear systems," Report No. EERC 73-11, University of California, Berkeley, June, (1973)
- [15] Bathe, K.J. and Ho, L.W., "A simple and effective element for the analysis of general shell Structures" *.Computers and Structures*, 13, 673-681, (1981).
- [16] Batoz, J.L. et Dhatt, G., « Modélisation des structures par éléments finis, » Vol. 2, *Poutres et plaque*, Hermès, Paris (1992).
- [17] Batoz, J.L. Hammadi, F. Zheng, C.L. and Zheng, W.X., "On the linear analysis of plates and shells using a new sixteen dof flat shell element", *Advances in finite element procedures*

- and techniques edited by B.H.V. Topping , civil-comp press , Edinburgh , Scotland , UK , 31-41(1998) (publié dans computers&structures)
- [18] Batoz,J.L.Zheng,C.L.Hammadi, F.Formulation,"Evaluation and application of new triangular, quadrilateral,pentagonal and hexagonal discrete Kirchhoff plate/shell elements," IJNME ECCM'99, European Conference on Computational Mechanics,Aug.31-Sep.3,München,Germany,20pages(1999).
- [19] Batoz, J.L. Hammadi,F.Zheng C.L.and Zheng,W.X,"Formulation and evaluation of incompatible rational quadrilateral membrane elements," Int.J.Structural Engineering and Mechanics,Vol.9,No.2,p51-68.(2000)
- [20] Batoz, J.L.; Bathe, K.J., and Ho, L.W.,"A study of three-node triangular plate bending elements". IJNME, 15,(1980) , 1711-1812
- [21] Batoz, J.L., and Ben Tahar, M., "Evaluation of a new thin plate quadrilateral element". IJNME, 18,(1982), 1965-1678
- [22] Batoz, J.L.and Dhatt, G.,"An evaluation of two simple and effective triangular and quadrilateral, plate bending elements,". New and Future Developments in Commercial Finite Method, Los Angeles , (1981), 352-368
- [23] Batoz, J.L.,and Dhatt, G.,"Development of Two Simple Shell Elements,". AIAA, 10, 237-238,(1972).
- [24] Batoz, J.L.,"An Explicit Formulation for an Efficient Triangular Plate Bending Elements,".IJNME,18, 1077-1089,(1982).
- [25] Batoz, J.L.and Lardeur, P.," A Discrete Shear Triangular Nine dof Element for the Analysis of Thick to thin Plate,". IJNME, 28,(1989),533-560
- [26] Batoz, J.L. and Katili, I.,"On a simple triangular Reissner/Mindlin plate element based on incompatible modes and discrete constraints,". IJNME,35,1603-1632,(1992).
- [27] Batoz, J.L., Guo Y.Q. and Mercier, F.,"The inverse approach with simple traingular shell elements for large strain predictions of sheet metal forming parts,". Engineering Computations, 15,864-892,(1997).
- [28] Batoz, J.L., Guo Y.Q.and Shakourzadeh,H.,"Analyse non linéaire de coques minces élasto-plastiques avec l'élément DKT12, ». Revue Européenne des Eléments Finis, 7,223-239,(1998).
- [29] Batoz, J.L. and Dhatt, G.," Revue et bilan des éléments de plaques de type Kirchhoff-discret, ».Calcul des Structures et Intelligence Artificielle,Editions Pluralis, Giens,2,137-160 (1998).
- [30] Batoz, J.L.and Dhatt, G.,"Modélisation des structures par éléments finis,". Vol. 3, Coques, (1992), Hermes Editeur, Paris
- [31] Batoz, J.-L., Zheng, C.L., Hammadi, F., « Formulation et évaluation d'éléments finis de coques pentagonaux et hexagonaux, 4ème Colloque National en Calcul des Structures, ». 643-648 , Giens , mai , 1999, France
- [32] Batoz, J.L.and Dhatt. G.(1990), « Modélisation des Structures par Eléments Finis, » Vol.1,Solides Elastiques, Hermès , Paris
- [33] Batoz, J.L.& Jameux J.P., « Post-flambement et grands déplacements d'arc plan, » Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, 1985.
- [34] Batoz, J.L., « Analyse non linéaire des coques minces élastiques de formes arbitraires par éléments triangulaires courbés, »Thèse de Doctorat es sciences, Département de Génie Civil, Université Laval, Québec, Mars 1977.
- [35] Batoz, J.L., »Développements de nouveaux éléments simples courbés pour le calcul des coques minces surbaissées, » Thèse de Maîtrise, Université Laval, Québec , 1971.

- [36] Batoz J.L., Zheng C.L., Hammadi F., »Formulation et évaluation d'éléments finis de coques à cinq et six cotés, » 14^{ème} Congrès Française de Mécanique AUM-AFM,30 aout-3 sept, Toulouse,1999,France.6pages(CD-ROM)
- [37] Bazeley, G.P., Cheung, Y.K., Irons , B.M. and Zienkiewicz., O.C. (1965), « Triangular elements in plates bending-conforming and non-conforming solutions »,Proc. Conf.On Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, Wright-Patterson Air Force Base,547-576.
- [38] Bergan, P.G.and Hanssen, L.(1975), "Anew approach for deriving 'good' finite elements,". MAFELAPII Conference, Brunel University.(1976), The Mathematics of Finite Elements and Applications, volume II , ed by J.R. Whitemam, Academic Press, London, 483-497.
- [39] Bergan, P.G. and Nygard, M.K., "Finite elements with increased freedom in closing shape functions,". IJNME,20,643-664(1984).
- [40] Bergan, P.G.(1980),"Finite elements based on energy orthogonal fuctions,". IJNME,15,1541-1555.
- [41] Bergen, P.G.& Felippa C.A., "A triangular membrane element with rotational degrees of freedom,". CMAME,50,25-69,(1985).
- [42] Bernadou, M., "Finite elements methods for thin shell problems,". Johan Wiley ,(1996).
- [43] Bernadou, M., Ducatel, Y, and Trouvé, P., "Approximations of general shell problems by flat plate elements,". Computational Mechanics, Part 15,175-208,(1989).
- [44] Bézine, G., "A mixed boundary integral finite element approach to plate vibration problem,".Mech. Res. Commun., 7,141-150,(1980).
- [45] Bleich F., Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, New York, 1952.
- [46] Belytschko T., Stolarski H.& Carpenter N.,A C^0 trianular plate elements with one-point quadrature, IMNE,Vol.20,p.787-802.1984.
- [47] Bouabdallah M.S/& Batoz J.L., »Adaptation d'éléments finis volumiques pour l'analyse des plaques et coques, ». Rapport interne, LG2MS/UTC,Novembre1994.
- [48] Boudi E.M., Beckers P.and Zheng H.G., »Estimateurs d'erreur pour les éléments de plaques basés sur la théorie discrétisée de Kirchhoff, ». STRUCOME, Paris, 600-611,(1994)
- [49] Brendel B., Ramm E., "Linear and nonlinear stability analyse of cylindrical shells,". Computers & Structures, Vol.12,p.549-558, (1980)
- [50] Carpenter, N., Stolarski H.and Belytschko, T., "A flat triangular shell element with improved membrane interpolation,". CMAME,1,161-168,(1985).
- [51] Casadei F., "A bibliographic study of finite elements for elasto-plastic analysis of 3D shell like structures subjected to static and dynamic loading,". Technical report N°1-06-C. Commission of the European Communities,Joint Research Center, Ispra, Italy,86-79,(1986).
- [52] Chajes A., "Principle of Structural Stability," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.,1952.
- [53] Chen W.F.and Atsuta T., "Theory of Beam-Columns," Vol.2,Space Behavior and Design, McGraw-Hill, New York, 1977.
- [54] Chen H.and Blandford G.E., "Thin-walled space frames. I: large-deformation analysis theory," J. Struct. Eng. ASCE. 117, 2499-2520(1991).
- [55] Chen H.and Blandford G.E., "Thin-walled space farmes. II: algorithmic details and applications," J. Struct. Eng. ASCE. 117, 2521-2520(1991).
- [56] Chen Wanji and Cheung Y.K., "Refined Quadrilateral Discrete Kirchhoff thin plate bending elemet,". IJNME,40,3937-3953,(1997).
- [57] Chen Wanji and Y.K., "Cheung: Refined Triangular Discrete Kirchhoff plate element for thin plate bending,".vibration and bucking analysis.IJNME,41,1507-1525,(1998).
- [58] Clough, R.W.and Jonson, C.P., "A finite element approximation for the analysis of thin shell,". IJSS,4,43-60,(1968).

- [59] Crisfield M.A., "A four-noded thin plate bending element using shear constraints-a modified version of Lyons element," CMAME, 38, 93-120, (1983).
- [60] Crisfield M.A., "Finite element and solution procedures for structural analysis," Pineridge Press, Swansea, U-K., (1986).
- [61] Cook, R.D., "A plane hybrid element with rotational d.o.f and adjustable stiffness," IJNME, 24, 1499-1508, (1986).
- [62] Chen, W. And Cheng, Y.K., 1986., "A new approach for the hybrid element method," IJNME, 24, 1697-1709.
- [63] Dawe D.J., "Shell analysis using a simple facet element," Journal for Strain Analysis, 7, 226-270 (1972).
- [64] Destuynder P. And J.C. Nedelec., »Approximation numerique du cisaillement transverses dans les plaques minces en flexion, ». Numer.Math., 48, 281-302, (1986)
- [65] Dhatt, G., "Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchhoff hypothesis," Proc. ASCE Symp. On applications of FEM in Civil Engineering, Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn., 13-14 (1967).
- [66] Dhatt, G., "An efficient triangular shell element," AIAA Journal, 8, (1970), 2100-2102
- [67] Dhatt, G., Marcotte, L., and Matte, Y., "A new triangular discrete Kirchhoff plate shell element," IJNME, 23, (1986), 453-470
- [68] Dhatt, G., Marcotte, L., Matte, Y. and Talbot, M., "Two new discrete Kirchhoff plate shell elements," 4th Symp. On Num. Meth. In Eng., Atlanta, Georgia, (1986), 599-604.
- [69] Dhatt, G. And Venkatasubbu., "Finite Element Analysis Of Containment Vessels". Proc. 1st Conf. SMIRT, Berlin, Germany, 5, (1971), paper J 3/6.
- [70] Domissy E., »Formulation et Evaluation d'Eléments Finis Volumiques Pour l'Analyse Linéaire et Non Linéaire des Coques, ». Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1997.
- [71] Donea, J., and Lamain, L. G., "A Modified Representation of Transverse Shear in C^0 Quadrilateral Plate Elements," CMAME, 63, (1987), 183-207
- [72] Dvorkin E. N., Onate E. And Oliver J., "On a non-linear formulation for curved Timoshenko beam elements considering large displacement/rotation increments," IJNME, 26, 1597-1613 (1988).
- [73] Eriksson A., "On linear constraints for Newton-Raphson corrections and critical point searches in structural finite element problems," IJNME, Vol. 28, p. 1317-1334, (1989).
- [74] Fafard M., "Calcul automatique des configurations pré et post-flambement en calcul non linéaire des structures, Thèse de Doctorat, Université Laval, Québec, Canada, Juillet 1987.
- [75] Fafard M., Dhatt G. and Batoz J. L., "A new discrete Kirchhoff plate/shell element with updated procedures," Computers & Structures Vol. 31, p. 591-606, (1989).
- [76] Felippa C. A., Haugen B. And Militello C., "From the individual element test to finite element templates: evolution of patch test," IJNME, 38, p. 199-229, (1995).
- [77] Felippa C. A. And Bergan P. G., "A triangular bending element based on an energy-orthogonal free formulation," CMAME, 61, p. 129-160, (1987).
- [78] Felippa C. A. And Militello C., "Developments in variational methods for high performance plate and shell elements. In Analytical and Computational Models for Shells," CED, ASME, Eds Noor et al., 3, p. 191-215, (1989).
- [79] Frey F., "L'analyse statique non-linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application à la construction métallique, » Thèse de Doctorat, Université de Liège (1978).
- [80] Frey F., "Shell finite elements with six degrees of freedom per node, Analytical and Computational Models of Shells," Noor, Belytschko & Simo (eds), CED Vol.3, ASME, p. 292-316, (1989).

- [81] Fricker A. J., "An improved three-noded triangular element for plate bending," *IJNME*, 21, p. 105-114, (1985).
- [82] Friedl I. And Yang S.K., "Triangular nine-degree-of-freedom C^0 plate bending element of quadratic accuracy," *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, 31, p.303-312, (1978).
- [83] Friedl N., Rammerstorfer F.G. and Fischer F.D., "On the buckling of plates under global tension," *CST98, Advances in Finite Element Procedures and techniques*, Edited by B.H.V. Topping, Civil-Comp press, Edinburgh, Scotland, UK, 1, p.73-77, (1998).
- [84] Gallagher R.H. and Bhasyam G.R., "A triangular shear flexible finite for moderate thick laminated composite plates," *CMAME*, 40, p.309-326, (1983).
- [85] Garnet. H. And Pifko, A.B. "An efficient triangular plate bending finite element for crash simulation," *Computers & Structures*, 16, p.371-379, (1983).
- [86] Goodier J.N., "The buckling of compressed bars by torsion and flexure, Bulletin 27," Cornell University Engineering Experimental Station, (1941).
- [87] Gruttman F., Wagner W. & Wriggers P., "A nonlinear quadrilateral shells with drilling degrees of freedom," *Archives Appl. Mech.*, Vol.62, p.1-13, (1992).
- [88] Guo Y.Q., « Analyse statique non-linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application à la construction métallique, » Thèse de Doctorat, Univ. De Liège, (1978).
- [89] Hammadi F., Batoz J.L., «Eléments de coques de type Kirchhoff discret a cinq degrés de liberté par noeud pour l'analyse linéaire et non linéaire géométrique, ». *CIMASI'96*, Casablanca Maroc, (1996), 14-15.
- [90] Hammadi F. And Batoz J.L., «Formulation et évaluation d'un élément de coque à continuité C^0 de la géométrie pour l'analyse non linéaire géométrique, ». *CIMASI'98*, Casablanca, Maroc, 2, p.916-919
- [91] Hammadi F., «Formulation et évaluation d'éléments finis à continuité C^0 de la géométrie pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques, » Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, (1998).
- [92] Hibbit H.D., Marcal P.V. and Rice J.R., "A finite element formulation for problems of large strain and large displacement," *IJSS*, Vol.6, No.8, (1970), 1069-1086
- [93] Hinton E., Ozakca M. And Rao N.V.R., "Adaptive analysis of thin shells using facet elements," *IJNME*, 32, p.1283-1301, (1991).
- [94] Hinton, E. And Huang H.C., "A family of quadrilateral mindlin plate elements with substitute shear strain fields," *Computers & Structures*, 23, p.409-431, (1986).
- [95] Horrigmoe G., Finite element instability analysis of free-form shells. Report N°77-2, N.I.T, University. Of Trondheim, Norway, (1977).
- [96] Hrabok M.M. and Hrudey T.M., "A review and catalogue of plate bending finite elements," *Computers & Structures*, 19, p.479-495, (1984).
- [97] Hughes T.J.R. and Hinton E., "Finite element methods for plate and shell structures," *Element Technology*, Pineridge Press International, Vol.1 and 2, (1986).
- [98] Hughes T.J. & Liu W.K., "Nonlinear finite element analysis of shells: Part I: Three dimensional shells," *CMAME*, Vol.26, p.331-362, (1981), "Part II: Two dimensional shells," *CMAME*, Vol.27, p.167-181, (1981).
- [99] Ibrahimbegovic A., "Stress resultant geometrically exact shell theory for finite rotations and its finite element implementation," *Applied Mechanics Review*, Vol.50, N°4, p.199-226, April (1997).
- [100] Irie, T., Yamada, G. and Kobayashi, Y., "Natural frequencies of folded plates," *J. Sound Vib.*, 9(5), p.131-135, (1984).
- [101] Irie, T., Yamada, G. and Kobayashi, Y., "Free vibration of a cantilever folded plate," *J. Acoust. Soc. Am.*, 76(6), p.1743-1748, (1984).

- [102] Irons, B.M. and Razzaque, A., "Experiences with the patch test for convergence of finite elementd, The Mathematical Formulations of the Finite Element Method with Applications to partial Differential Equations," Edition A.K. Aziz, Academi press, New York, p.551-587, (1972).
- [103] Irons, B.M., "The semi-loof shell elements. Finite Elements for thin shells and Curved Members," Aswell and al. Eds, Wiley, N-Y, p.197-222, (1976).
- [104] Irons, B.M. and S. Ahmad, "Techniques of Finite Elements,". Ellis Horwood, Chichester, (1980).
- [105] Jeyachandrabose C. and Kirkhope J., "An alternative explicit formulation for the DKT plate bending element," IJNME, 21, p.1289-1293, (1985).
- [106] Jeyachandrabose C. and Kirkhope J., "Construction of new efficient three node triangular thin plate bending elements," Computers and Structures, 23, p.587-603, (1986).
- [107] Jeyachandrabose C. and Kirkhope J. and Meckisho L., "an improved discrete Kirchhoff quadrilateral thin plate bending element," IJNME, 24, p.635-654, (1987).
- [108] Katili I., "A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields Part 1: An extended DKT element for thick plate bending analysis," IJNME, 36, p.1859-1883, (1993), "Part 2: An extended DKQ element for thick plate bending analysis," IJNME, 36, p.1885-1908, (1993).
- [109] Katili I., »Formulation et évaluation de deux nouveaux éléments finis pour l'analyse linéaire des plaques et coques de forme quelconque, « Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, (1997).
- [110] Kerber T., »Revue des éléments finis de coques au travers des phénomènes de verouillage et de leurs remédes, ». La Recherche Aérospatiale, p.45-76, (1990).
- [111] Kim M.Y., Chang S.P. and Kim S.B., "Spatial stability and free vibration of shear flexible thin-walled slastic beams. I: analytical approach," IJNME, 37, p.4097-4115, (1994).
- [112] Kim M.Y., Chang S.P. and Kim S.B., "Spatial stability and free vibration of shear flexible thin-walled elastic beams. II: numerical approach", IJNME, 37, p.4117-4140, (1994).
- [113] Kim M.Y., Chang S.P. and Kim S.B., "Spatial stability analysis of thin-walled space farmes," IJNME, 39, p.499-525, (1988).
- [114] Kittipornchai S. and Trahair N.S., "Buckling properties of monosymmetric I-beams," J. Struct. Div. ASCE, 106(ST5), p.941-958, (1980).
- [115] Lindberg G.M., Olson M.D. & Cowper G.R., "New development in the finite element analysis of shells," Q. Bull Div. Mech. Eng. And Nat. Aeronautical Establishment, National Reseach Council of Canada, Vol.4, (1969).
- [116] Liu, W.H. and Huang, C.C., "Vibration analysis of elastic plate structures by boundary element method," Eng. Anal. Boundry elements. 5(4), p.182-188, (1988).
- [117] Liu, W.K., Law E.S., Lam D. & Belytschko T., "Resultant-stress degerated-shell element," CMAME, Vol.55, p.259-300, (1986).
- [118] Lyons L.P.R., "A general finite element system with special reference to the analysis of cellular structures,". Ph.D. Thesis, Imperial College, London, (1977).
- [119] MacNeal, R.J., "The evolution of lower order plate and shell elements in MSC/Nastran, Finite Element Methods for Plate and Shell Structures," Vol. I, Pineridge Press, Swansea, p.85-127, (1986).
- [120] MacNeal, R., "A simple quadrilateral shell element,". Computers and Structures, 8, p. 175-183, (1978).
- [121] MacNeal, R. and Harder, R.L., "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy,". Finite Element Analysis Design, 1, p.3-20, (1985).

- [122] Mahé M., »Analyse non linéaire des coques par éléments finis isoparmétriques dégénérés avec intégration explicite dans l'épaisseur, » E.N.S.A.E., Toulouse,(1991).
- [123] Mattiasson K., »Numerical results form large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals», IJNME, Vol.17,p.145-153,(1981).
- [124] Maus, S.T., »A simple method of stiffness matrix formulation based on single element test,» Structural Engineering and Mechancis, Vol.7, No.2, p.203-316,(1999).
- [125] Meek J.L. and Tan H.S., »a Discrete Kirchhoff plate bending element with loof nouds,». Computers and Structures, 21, p.1197-1212,(1985).
- [126] Mehdi Farshad, »Stability of Structures,» Elsevier,(1994).
- [127] Morley, L.S.D., »The constant moment plate bending element,». Journal of Strain Analysis, 6, p.20-24,(1971).
- [128] Nagtegaal J.G. and Slater J.G., »A simple non-compatible thin shell element based on Discrete Kirchhoff Theory,». Nonlinear Finite Element Analysis of Plate and Shells, ASME, AMD, 48, p.167-192,(1981).
- [129] Noor A.K., »Bibliography of monographs and surveys on shells,». Applied Mech. Review, 43, p.223-224,(1990).
- [130] Noor A.K. T. Belytschko and J.C. Simo; Eds, » Analytical and computational models of shells,». ASME, CED-vol.3,(1989).
- [131] Oden J.T., »Finite elements of nonlinear contunua,». McGraw-Hill, London,(1970).
- [132] Onate E., »A review of some finite element families for thick and thin plate and shell analysis,». Recent Developments in Finite Element Analysis, Hughes et al., Eds, CIMNE, Barcelona, Spain, p.98-111,(1994).
- [133] Onate E. and Castro J., »Derivation of plate elements shear strain fields,». In New Advances in Computational Structural Mechanics, Ladvèze and Zienkiewicz, Eds, Elsevier, p.273-288. (1992).
- [134] Onate E., Zarate F. and Flores F., »A simple triangular element for nthick and thin plate and shell analysis,». IJNME, 37, p.2569-2582,(1994).
- [135] Papadopoulos P. and Taylor R., »A triangular element based on Reissner-Mindlin plate theory,». IJNME, 30, p.1029-1049,(1990).
- [136] Park, K.C. and Stanley, G.M., »A curved C^0 shell element based on assumed natural-coordinate strains,» Journal of Applied Mechanics, 53, p.51-54,(1986).
- [137] Peng X. and Crisfield M., »A consistent corotational formulation for shells using the constant stress/constant moment triangle,». IJNME, 35, p.1829-1847,(1992).
- [138] Pian, T.H.H. »Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions,» AIAA J-2, p.1333-1376,(1964).
- [139] Pian, T.H.H. and Sumihara, K. »Rational approach for assumed stress finite element,» IJNME, 20, p.1685-1695,(1984).
- [140] Piltner R. and Taylor, R.L. »A systematic construction of B-bar functions for linear and non-linear mixed-enhanced finite elements for plane elasticity problems,» IJNME, 44, p. 615-639,(1999).
- [141] Polit O., »Développement d'éléments finis de plaques semi-épaisses et de coques semi-épaisses à doubles courbures,» Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI,(1992).
- [142] Poulsen P.N. and Damkilde L., »A flat triangular shell element with loof modes,». IJNME, 39, p.3867-3887,(1996).
- [143] Prathap, G. and Wiswanath, S., »An optimally integrated four node quadrilateral plate bending element,». IJNME, 19, p.831-840,(1983).
- [144] Providakis C.P. and Beskos D.E., »Free and forced vibrations of plates by boundary and interior elements,» IJNME, 28, p.1977-1994,(1989).

- [145] Pugh, E.D.L., Hinton, E. and Zienkiewicz, O.C., "A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration," *IJNME*, 12, p.1059-1079, (1978).
- [146] Razzaque, A. "Program for triangular bending elements with derivative smothing," *IJNME*, 6, p.333-343, (1973).
- [147] Roelandt, J.M., Liu X.J., Batoz, J.L. and Jameux, J.P., "Axisymmetric and general shell elements for large transformations(Formulation and applications)," *MECAMAT'91, Int. Seminar on large Plastic Deformations, Fundamental Aspects and Applications to Metal Forming, Fontainebleau, France*, p.457-463, (1991).
- [148] Roelandt J. M. And Batoz J. L., "Shell finite element for deep drawing problems: computational aspects and results," *IUTAM Symposium on Finite Inelastic Deformations, Theory and Application, Hannover, D. Besdo, E. Stein (Eds), © Springer-Verlag*, p.423-430 (1991).
- [149] Sabber A.R. and Lock A.C., "The application of finite elements to large deflection geometrically non linear behavior of cylindrical shells," In C. A. Brebbia and H. Tottenham (Eds.), *Variational Methods in Engineering*, Southampton Univ., Press, p.766-775, (1973).
- [150] Saleeb A. F. And Chang T. Y., " An efficient quadrilateral element of plate bending analysis," *IJNME*, p.1123-1155, (1987).
- [151] Samuelsson A., " The global constant strain condition and the patch test. *Energy Methods in Finite Element Analysis*," John Wiley, p. 47-52, (1979).
- [152] Scordelis A.C. and Lo K.S., "Computer analysis of cylindrical shells," *J. Amer. Concrete Institute*, Vol.61, p.539-561, (1969).
- [153] Shaw D. and Huang Y.H. Buckling behavior of a central cracked thin plate under tension, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.35, No.6, p.1019-1027, (1990).
- [154] Shigeru Shimizu and Shunya Toshida, "Buckling of plates with a hole under tension," *Thin-Walled Structures* 12, p.35-49, (1991).
- [155] Simo, J.C. and Kerr, R., "A class of mixed assumed strain methods and the methods of incompatible modes" *IJNME*, 29, p.1595-1638, (1990).
- [156] Simo J.C., Fox D.D. and Rifai S., "On a stress resultants geometrically exact shell model, Part III: The computational aspects of the non-linear theory," *CMAME*, Vol.79, p.21-70, (1990).
- [157] Specht, B. "Modified shape functions for the three nodes plate bending element passing the patch-test," *IJNME*, 26, p.705-715, (1988).
- [158] Stricklin, J.A., Haisler, W., Tisdale, P. and Gunderson, R., "A rapidly converging triangular plate element," *AIAA journal*, 7, p.180-181, (1969).
- [159] Surana K.S., "Geometrically nonlinear formulations for curved shell elements," *IJNME*, Vol.19, p.581-615, (1983).
- [160] Sze, K.Y. and Chow, C.L., "An efficient hybrid quadrilateral Kirchhoff plate bending element," *IJNME*, 32, p.149-169, (1991).
- [161] Taig, I.C. and Kerr, "Some problems in the discrete element representation of aircraft structure," *Matrix Method of the Structural Analysis*, Pergamon Press, London p.267-315, (1964).
- [162] Talbot, M. and Dhatt, G., "Three discrete Kirchhoff elements for shell analysis, with large geometrical non linearities and bifurcations," *Engineering Computations*, 4, p.15-22, (1987).
- [163] Tanaka, M., Matsumoto, T., and Shiozaki, A., "Application of boundary domain element method to the free vibration problem of plate structures," *Computers & Structure* Vol.66, No. 6, p.725-735, (1998).
- [164] Tang, L.M., Chen, W.J. and Liu, Y.X., "Formulation of quasi-conforming element and Hu-Washizu principle," *Computes & Structures*, 19, p.247-250, (1984).
- [165] Taylor, R.L., Beresford, P.J. and E.L. Wilson, "A non-conforming element for stress analysis," *IJNME*, 10, p.1211-1219, (1976).

- [166] Tessler, A., "Shear deformable bending elements with penalty relaxation," *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures, Vol.I*, Pineeridge Press, Swansea, p.226-290, (1986).
- [167] Tessler A. and Hughes, T.J.R., "A three-node Mindlin plate element with improved transverse shear," *CMAME*, 50, p.71-101, (1985).
- [168] Timoshenko S. and Gere J.M., "Mechanics of materials," Van Nostrand Reinhold, New-York, (1972).
- [169] Timoshenko S.P. and Gere J.M., "Theory of Elastic Stability," 2nd edn., McGraw-Hill, New York, (1961).
- [170] Turner, M., Clough, R., Martin, H. and Topp, L., "Stiffness and deflection analysis of complex structures," *J. Aeronaut. Sci.*, 23, p.1805-1823, (1956).
- [171] Wempner, G.A., Oden, J.T., and Kross, D.A., "Finite element analysis of thin shells," *Engng. Mech. Div. Proc. ASCE, EM6*, 94, p.1273-1294, (1968).
- [172] Wempner, G.A., "Finite elements-finite rotations and small strains of flexible shells," *IJSS*, 5, p.117-153, (1990).
- [173] Wempner, G., "Mechanics and finite element of shells," *Applied Mechanics Review, ASME*, 42, p.129-142, (1990).
- [174] Wilson, E.L.; Taylor, R.L., Doherty, W.P. and Ghaboussi, J., "Incompatible displacement models," *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, Academic Press, New York, p.43-57, (1973).
- [175] Wu, C.C., "Some problems of a plate bending hybrid model with shear effect," *IJNME*, 18, p.1077-1089, (1982).
- [176] Yang H.T.Y., Saigal S. and Liaw D.G., "Advances of thin shell finite elements and some applications-version:1," *Computer and Structures*, 35, p.481-504, (1990).
- [177] Zhao, P., Pian, T.H.H. and Sheng, T., "A new formulation of isoparametric finite elements and the relationship between hybrid stress element and incompatible element," *IJNME*, 40, p. 15-27, (1997).
- [178] Zheng C.L., Hammadi F., Batoz J.L., "Formulation and evaluation of a new family of discrete Kirchhoff plate/shell elements," *EUROMECH, 4th European Solid Mechanics Conference (ESMC4)*, June 26-30, (2000), Metz, France.
- [179] Zheng, C., "Formulation et évaluation d'une nouvelle famille d'éléments finis incompatibles de membranes, plaques et coques de type Kirchhoff discret" Thèse de Doctorat, Université de Technologie Compiègne, (1993).
- [180] Zhong, W.X. and Zeng, J., "Rational Finite Elements," *Journal of computational structural mechanics and application, in chinese*, 13, p.1-8, (1996).
- [181] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Too, J.M., "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells," *IJNME*, 3, p.275-290, (1971).
- [182] Zienkiewicz O.C., Taylor R., Papadopoulos P. and Onate E., "Plate bending elements with discrete constraints: new triangular elements," *Computer and Structures*, 35, p.505-522, (1990).
- [183] Zienkiewicz, O.C. and Taylor R., "The FEM. 4th Edition, Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non linearity," Mac Graw Hill, Vol 2, (1991).
- IJNME : International Journal for Numerical Methods in Engineering
CMAME : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering
AIAA : American Institute of Aeronautics and Astronautics
IJSS : International Journal for Solids and Structures