



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique



## Université Hadj lakhdar –Batna

Institut de Génie Civil, d'Hydraulique et d'Architecture

Département d'Hydraulique

Mémoire de Magister en Hydraulique  
Option : Hydraulique numérique et environnement

Présenté par  
MERROUCHI FARIDA

Pour obtenir le diplôme de Magister en Hydraulique

---

Etude de la variation des vitesses des écoulements  
instationnaires dans les canaux découverts

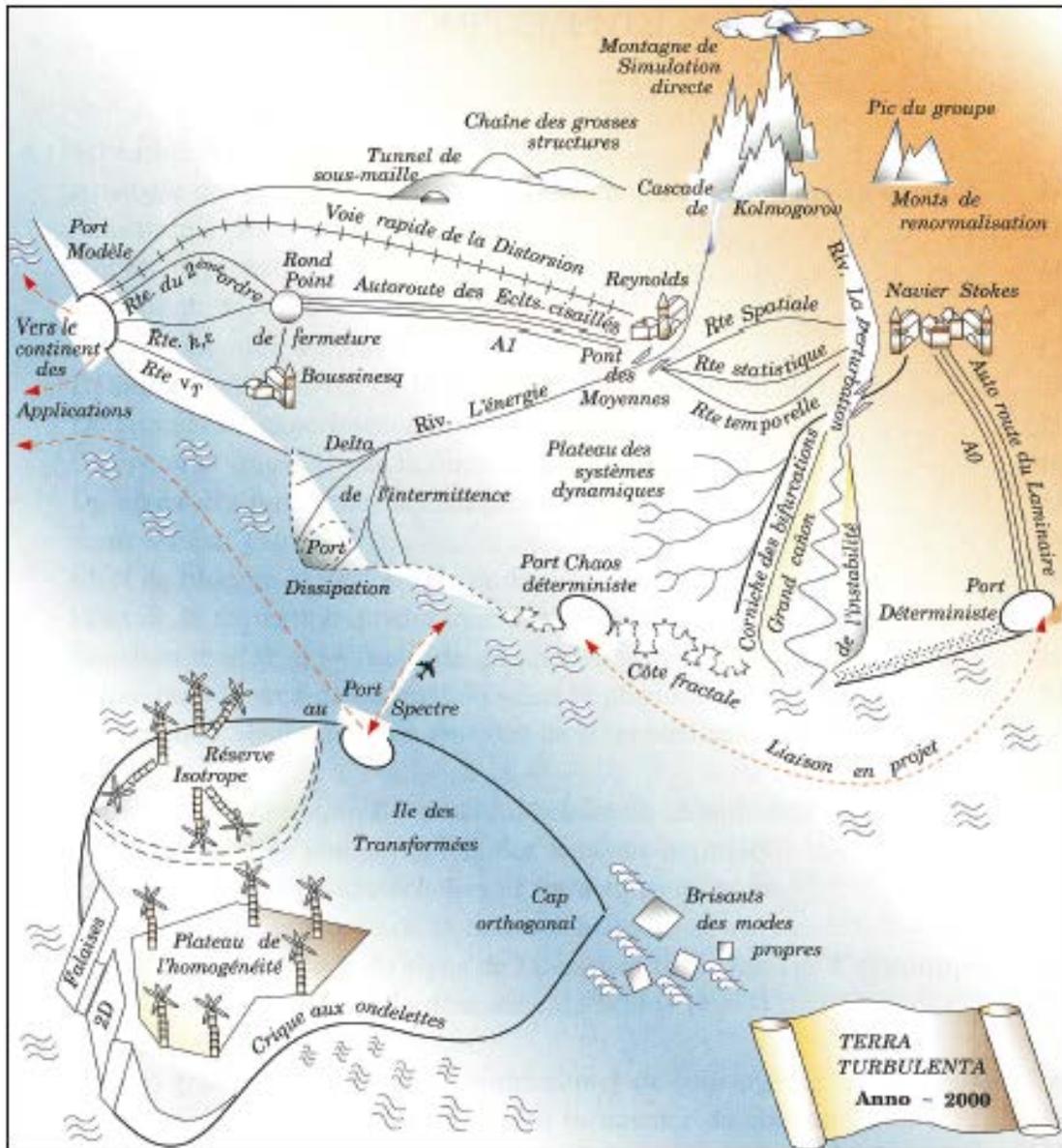
---

Sous la direction de DR.FOURAR ALI  
Mémoire soutenu le 07 / 12 / 2011

Devant le jury composé de :

---

Jury	Grade	Affiliation	Qualité
Dr. LAHBARI NOUREDDINE	Maître de conférence	Univ. BATNA	Président
Dr. FOURAR ALI	Maître de conférence	Univ. BATNA	Rapporteur
Dr. BRIOUA MOURAD	Maître de conférence	Univ. BATNA	Examineur
Dr. BOUZIANE M. TOUFIK	Maître de conférence	Univ. BISKRA	Examineur



## Terra Turbulenta

D'après P. Chassaing

Turbulence en mécanique des fluides (Page 573)

## Avant-propos

Au terme de cette étude, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont permis de mener à bien ce modeste travail

- Je remercie Dieu tout puissant qui m'a donné le courage, la volonté et la patience pour achever ce travail
- Je remercie Monsieur Ali Fourar maître de conférences à l'université de Batna, et président de la poste de graduation option hydraulique numérique et environnement de m'avoir encadré et suivi mon travail avec beaucoup d'intérêt et de sérieux, je le remercie, chaleureusement et je souhaite tout particulièrement lui exprimer toute ma reconnaissance pour m'avoir fait bénéficier de son expérience, de ces nombreux conseils avisés et de sa grande disponibilité.
- Je tiens à remercier Monsieur Noureddine Lahbari maître de conférences et le directeur de l'Institut de génie civil, de l'hydraulique et d'architecture à l'université de Batna pour avoir accepté la présidence du jury de mémoire.
- Je souhaite exprimer toute ma reconnaissance et mon estime aux membres de jury :
  - ❖ Monsieur Brioua Mourad maître de conférences à l'université de Batna
  - ❖ Monsieur Bouziane M. Toufik maître de conférences à l'université de Biskra

Je leur adresse mes profonds remerciements pour avoir accepté de rapporter et d'évaluer ce travail de mémoire, je suis honoré de leur présence qu'ils soient assurés de ma sincère gratitude.

J'adresse mes remerciements à :

- Tous mes enseignants
- Merci à messieurs :
  - J.M.Hervouet ingénieur chercheur senior au groupe de simulation (EDF)
  - Hubert chanson professeur à l'université de Brisbane, Australie.
  - Haddad Djamel maître assistant à l'université de Batna.
- J'adresse mon grand amour à mes parents et ma magnifique famille, mon cœur Inas.

Enfin je remercie tous mes amis et collègues qui m'ont soutenu surtout :

Samia, Fouzi, Ali, Siham, Kamel, Omar, Nawal, Salah, Ammar.

## Résumé

Ce travail s'intéresse particulièrement à l'étude des écoulements instationnaires turbulents dans un canal rectangulaire lisse en présence et en absence des obstacles. L'objectif étant après modélisation mathématique et résolution numérique par le schéma des volumes finis du problème étudié, la connaissance fine des profils des vitesses dans un canal découvert. Le modèle utilisé est le modèle basé sur le système d'équation de Navier-Stokes moyenné (Reynolds) compte tenu du modèle de turbulence isotrope  $K-\epsilon$ . Les résultats numériques obtenus grâce à l'utilisation d'un programme en Fortran 90 version 6.6 concernent les deux cas de la surface libre (monophasique et diphasique).

Mots-clés :

Écoulements à surface libre – turbulence – lois de paroi – modélisation – simulations numériques instationnaires – modèle  $K-\epsilon$  - homogène et isotrope

## Abstract

This work is particularly interested in the study of turbulent unsteady flows in a smooth rectangular channel presence and absence of obstacles. The aim after mathematical modeling and numerical solution by finite volume scheme of the problem studied, the detailed knowledge of velocity profiles in an open channel. The model used is based on the model system Navier-Stokes averaged (Reynolds) given the model of isotropic turbulence  $K-\epsilon$ . The numerical results obtained through the use of a program in Fortran 90 version 6.6 affect both the free surface (monophasic and biphasic).

Keywords:

Free surface flow - turbulence - wall laws - modeling - numerical simulations unsteady -  $K-\epsilon$  -model - homogeneous and isotropic

## ملخص

هذه الدراسة تهتم بشكل خاص في دراسة حركة السوائل و هي في حالة اضطراب تتغير بدلالة الزمن داخل قناة مستطيلة مع انعدام الاحتكاك بوجود و غياب العقبات. والهدف بعد النمذجة الرياضية والحل الرقمي بواسطة طريقة الحجوم المتناهية المستعملة لمحاولة حل المشكلة هي المعرفة المفصلة لتغيرات السرعة بدلالة الزمن في قناة مفتوحة. ويستند هذا النموذج المستخدم على النظام الرياضي النموذجي Navier-Stokes المتوسط (Reynolds) مع الاخذ بعين الاعتبار النموذج الايزوتروبي  $K-\epsilon$ . النتائج الرقمية التي تم الحصول عليها من خلال استخدام برنامج Fortran 90 version 6.6 تؤثر على كل من السطح الحر و النتائج المتحصل عليها أخذت بعين الاعتبار الحالتين وحيد الطور و ثنائي الطور.

كلمات البحث:

حرية تدفق السطح -- الاضطراب -- قوانين الجدار -- النمذجة -- المحاكاة الرقمية متغيرة --  $K-\epsilon$  النموذجي -- متجانس وموحد الخواص

# Table des matières

<b>Introduction Générale.....</b>	<b>1</b>
-----------------------------------	----------

## Premier Chapitre

### Aspect Bibliographique

#### Sur Les Ecoulements Turbulents à Surface Libre

I-1	Introduction.....	5
I-2	Le phénomène turbulent .....	5
I-2-1	Les caractéristiques de la turbulence.....	7
I-2-2	Les effets positifs et négatifs de la turbulence.....	8
a-	Les effets positifs.....	8
b-	Les effets négatifs.....	8
I-2-3	Proposition de définition de la turbulence .....	8
I-3	Exemples d'écoulements turbulents.....	9
I-4	Un regard historique sur la turbulence.....	9
I-5	Les deux points de vue sur la turbulence.....	11
I-6	La transition du laminaire au turbulent.....	12
I-7	Les différentes approches de la turbulence.....	12
I-7-1	Approches directes (DNS).....	12
I-7-2	La simulation des grandes échelles (L.E.S).....	14
I-7-3	Méthode statistique.....	15
I-8	Concept fondamentaux en statistique.....	15
I-8-1	Moyennes.....	15
I-8-1-1	Moyenne temporelle.....	15

I-8-1-2	Moyenne d'ensemble.....	16
I-8-1-3	Moyenne statistique.....	16
I-8-1-4	Moyenne spatiale.....	16
I-8-2	Hypothèses d'ergodicité.....	16
I-8-3	Symétrie homogène et isotropie.....	17
I-8-3-1	La symétrie statistique.....	17
a-	Des écoulements statistiquement stationnaires.....	17
b-	Les écoulements statistiquement homogènes.....	18
c-	Isotropie statistique.....	18
I-8-3-2	les propriétés d'un écoulement turbulent homogène et isotrope.....	18
I-8-4	Modèle de Kolmogorov.....	19
I-8-4-a	Hypothèses pour le modèle de Kolmogorov.....	19
I-8-4-b	Echelle de Kolmogorov.....	19
I-9	Effet de surface libre sur la turbulence.....	21
I-10	Traitement de la turbulence aux parois.....	25
I-10-1	Lois logarithmique de vitesse.....	26
I-11	Distribution de la vitesse.....	27
I-12	Conclusion.....	28

**Deuxième Chapitre**  
**Modélisation Mathématique**  
**Des Écoulements à Surface Libre**

II-1	Introduction.....	30
II-2	Equations de Navier-Stokes à surface libre.....	30
II-2-1	Les équations de base.....	31
II-2-2	Equations de continuité.....	31

II-2-3	Equations de conservation de la quantité de mouvement.....	33
II-2-3-1	Relation constitutive.....	34
II-2-3-2	Hypothèses simplificatrices .....	35
II-3	Equations pour un écoulement turbulent à surface libre.....	36
II-3-1	Description statistique des écoulements turbulents.....	36
II-3-1-a	moyenne d'ensemble et corrélations.....	37
II-3-1-b	Décomposition de Reynolds.....	38
II-3-2	Equations moyennés (Reynolds).....	39
II-3-2-1	Principes.....	39
II-4	Le Problème de la fermeture.....	42
II-4-1	Equations d'évolution des corrélations.....	42
II-4-2	Energie cinétique du mouvement turbulent.....	46
II-4-3	Bilan des équations et des inconnues.....	47
II-5	Les Modèles de turbulence.....	48
II-5-1	Modèles à 0 équations.....	49
II-5-2	Modèle A viscosité turbulente.....	52
a	Modèle du 1 <sup>er</sup> ordre.....	52
b	Modèle du 2 <sup>ème</sup> ordre.....	52
II-6	Rôle et critères de choix des modèles de turbulence.....	53
II-6-1	Modèles du 1 <sup>er</sup> ordre hypothèses de fermeture semi-empirique.....	56
II-6-1-a	Viscosité turbulente.....	56
II-6-1-b	Remarques sur l'hypothèse de Boussinesq.....	56
II-7	Récapitulatif et généralisation des modèles du 1 <sup>er</sup> ordre.....	57
II-7-a	Longueur de mélange.....	58
II-7-a-1	Profils de vitesse sur l'ensemble du canal.....	60
II-7-a-2	Modèle K- $\varepsilon$ : modèle à deux équations.....	61
II-7-a-3	Lien avec le modèle de longueur de mélange.....	64

II-7-a-4	Modélisation des parois dans le cadre du modèle $K-\varepsilon$ .....	65
a-	Variation du modèle $K-\varepsilon$ adaptées a la sous couche visqueuse (modèle « bas Re »).....	65
b-	Condition aux limites sur les parois pour les grands nombres de Reynolds loi paroi.....	66
II-8	Equation pour écoulement turbulent homogène et isotrope à surface libre.....	67
II-9	Conclusion.....	68

**Troisième Chapitre**  
**Approximation Par La Méthode**  
**Des Volumes Finis**

III-1	Introduction.....	70
III-2	Méthode de résolution et convergence.....	70
III-2-1	Modélisation de la surface libre.....	70
III-2-2	Le modèle en diphasique (cas2).....	71
III-3	Le calcul numérique (modélisation et simulation).....	72
III-3-1	Principe.....	72
III-3-2	Avantages.....	73
III-3-3	Inconvénients.....	74
III-4	Modélisation avec la méthode des volumes finis.....	74
III-4-1	Présentation .....	74
III-4-2	La méthode de calcul.....	74
III-4-3	Application à l'intégration d'une équation de transport–diffusion.....	75
III-4-4	Discrétisation des différents termes de l'équation .....	76
III-4-5	Schéma implicite ADI.....	79
III-4-6	Equation de la pression.....	80
III-4-7	Discrétisation de l'équation de pression .....	83
III-4-8	Application.....	83

III-5 Maillage du système et conditions aux limites.....	87
A- Le maillage.....	87
B- Conditions aux limites.....	88
B-I- 1 <sup>er</sup> cas : Surface libre similaire à une paroi solide (écoulement monophasique).....	88
B-I-1 Condition à la paroi.....	88
B-I-2- Condition à la surface libre.....	93
B-II- 2 <sup>ème</sup> Cas : surface libre, l'interface de deux volumes (écoulement diphasique).....	94
a- Conditions Initiales.....	94
b- Conditions aux limites.....	95
b-1 Cas des parois.....	95
b-2 La surface libre.....	96
III-6 Résolution du système d'équation (méthode de Jacobi).....	99
III-7 Conclusion.....	100

## **Quatrième Chapitre**

### **Résultats Et Interprétations**

IV.1 Introduction.....	102
IV.2 En laminaire.....	102
IV.3 En turbulent.....	103
IV.4 En monophasique (1er cas de la surface libre) :.....	104
IV.4.a Sans obstacle.....	105
IV.4.b En présence d'un obstacle .....	109
IV.4.b.1 Paramètres numériques .....	110
IV.4.b.2 Interprétations.....	110
IV.4.c En présence de deux obstacles .....	117
IV.4.d Conclusion des simulations en monophasique .....	121

IV.5	En diphasique .....	121
IV.5.1	Influence de l'air sur la vitesse de l'écoulement .....	121
IV.5.2	Influence des obstacles sur la composante horizontale de la vitesse de l'écoulement.....	135
IV.5.3	Conclusion des simulations en diphasique.....	140
<b>Conclusion Et Perspectives.....</b>		<b>142</b>
<b>Références Bibliographiques.....</b>		<b>145</b>
<b>Annexes</b>		

## Liste des figures

### CHAPITRE : I Aspects bibliographiques sur les écoulements turbulents à surface libre

<b>Figure. I.1</b> : Exemples d'écoulements turbulents.....	6
<b>Figure. I.2</b> : Allure de la vitesse instantanée enregistrée en fonction du temps dans un écoulement turbulent.....	10
<b>Figure. I.3 (a)</b> : Grandeur statistiquement instationnaire.....	17
<b>Figure. I.3 (b)</b> : Grandeur statistiquement stationnaire.....	17
<b>Figure. I.4</b> : Exemples d'écoulements turbulents cisailés à surface libre.....	23
<b>Figure. I.5</b> : Réduction de l'intensité turbulente verticale due à la surface libre (Nezu et Naka-gawa 1993) .....	24
<b>Figure. I.6</b> : Distribution des intensités turbulentes en écoulement (sur fond lisse et rugueux) (Nezu et Naka-gawa 1993).....	27

### CHAPITRE : II Modélisation mathématique des écoulements à surface libre

<b>Figure. II.1</b> : Schéma itératif pour obtenir l'équation d'évolution des corrélations.	42
<b>Figure. II.2</b> : Les problèmes de fermeture des équations.....	48
<b>Figure. II.3</b> : Critères de choix et classification des modèles.....	55

### CHAPITRE : III Approximation par la méthode des volumes finis

<b>Figure. III.1</b> : Le principe du calcul numérique.....	73
<b>Figure. III.2</b> : (a) domaine de calcul.....	76
(b) volume de contrôle.....	76

<b>Figure. III.3</b> : Maillage (sans obstacle).....	87
<b>Figure. III.4</b> : Maillage (avec un seul obstacle).....	87
<b>Figure. III.5</b> : Maillage (deux obstacles situes simultanément de part et d'autre des parois).....	87
<b>Figure. III.6</b> : Maillage et conditions aux limites dans le plan (OXY).....	97

## **CHAPITRE : IV Résultats et interprétations**

<b>Figure. IV.1</b> : Modélisation d'un écoulement laminaire avec notre Programme.....	103
<b>Figure. IV.2</b> : Modélisation d'un écoulement turbulent en charge avec notre Programme.....	103
<b>Figure. IV.3</b> : profil de comparaison entre l'écoulement turbulent modélisé par notre programme et la loi de Poiseuille.....	104
<b>Figure. IV.4</b> : Géométrie du canal.....	105
<b>Figure. IV.5</b> : Distribution de l'énergie cinétique en ( $m^2/s^2$ ) dans un canal sans obstacle cas1).....	105
<b>Figure. IV.6</b> : Distribution de la dissipation de l'énergie cinétique en ( $m^2/s^3$ ) dans un canal sans obstacle (cas1).....	106
<b>Figure. IV.7</b> : Distribution de la pression en ( $N/m^2$ ) dans un canal sans obstacle (cas1).....	106
<b>Figure. IV.8</b> : Répartition des champs des vitesses dans le canal en m/s (cas1 demie entrée).....	107
<b>Figure. IV.9</b> : Répartition des champs des vitesses dans le canal en m/s (cas1 entrée totale).....	107
<b>Figure. IV.10</b> : Les profils des vitesses en (m/s) calculée dans un plan horizontal ...	107
<b>Figure. IV.11</b> : Profil transversal des composantes du tenseur de Reynolds.....	109

<b>Figure. IV.12 :</b> Géométrie du canal.....	110
<b>Figure. IV.13 :</b> Variation temporelle des vitesses en m/s dans un canal avec un seul obstacle (pour T = 10 à 30 s).....	112
<b>Figure. IV.14 :</b> Variation temporelle des vitesses en (m/s) dans un canal avec un seul obstacle (T = 40 s à 65 s).....	114
<b>Figure. IV.15 :</b> Les profils des vitesses en (m/s) calculée dans un plan horizontal....	114
<b>Figure. IV.16 :</b> Distribution de la composante verticale de la vitesse (m/s) dans le canal .....	115
<b>Figure. IV.17 :</b> Distribution de l'énergie cinétique en ( $m^2/s^2$ ) dans un canal avec un seul obstacle .....	115
<b>Figure. IV.18 :</b> Distribution de la dissipation en ( $m^2/s^3$ ) dans un canal avec un seul obstacle .....	116
<b>Figure. IV.19 :</b> Distribution de la pression en ( $N/m^2$ ) dans un canal avec un seul obstacle .....	117
<b>Figure. IV.20 :</b> Géométrie du canal avec deux obstacles .....	118
<b>Figure. IV.21 :</b> Distribution des champs des pressions en ( $N/m^2$ ) dans un canal avec deux obstacles .....	118
<b>Figure. IV.22</b> Vecteurs des vitesses en (m/s) dans un canal avec deux obstacles .....	119
<b>Figure. IV.23</b> Vecteurs des vitesses en (m/s) avant l'obstacle n° 1.....	119
<b>Figure. IV.24</b> Vecteurs des vitesses en (m/s) dans la zone entre deux obstacles (zone de recirculation) .....	119
<b>Figure. IV.25</b> Vecteurs des vitesses en (m/s) après l'obstacle n°2.....	120
<b>Figure. IV.26</b> Distribution de la composante verticale de la vitesse en (m/s) dans le canal .....	120
<b>Figure. IV.27 :</b> Distribution de l'énergie cinétique en ( $m^2/s^2$ ) dans un canal avec deux obstacles .....	120
<b>Figure. IV.28 :</b> Distribution de la dissipation en ( $m^2/s^3$ ) .....	121
<b>Figure. IV.29 :</b> Répartition des vitesses en (m/s) dans le canal (sans obstacle en diphasique).....	123

<b>Figure. IV.30 :</b> Variation temporelle des vitesses en (m/s) (T= 2,5 à 40s) dans un canal (sans obstacle) pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée $=0.75V_{eau}$ m/s .....	125
<b>Figure. IV.31 :</b> Distribution des vitesses en (m/s) dans un canal sans obstacle Pour une vitesse de l'air imposé à l'entrée $= 0.25V_{eau}$ .....	125
<b>Figure. IV.32 :</b> Distribution des pressions en (N/m <sup>2</sup> ) dans un canal sans obstacle pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée $= 0.25$ m/s.....	126
<b>Figure. IV.33 :</b> Distribution de l'énergie cinétique en (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ) dans un canal pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée $= 0.25$ m/s .....	126
<b>Figure. IV.34 :</b> Distribution de la dissipation en (m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup> ) dans un canal pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée $= 0.25$ m/s.....	127
<b>Figure. IV.35 :</b> Variation temporelle des vitesses (T= 2,5 à 50s) dans un canal (sans obstacle) pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée $= 0,5 V_{eau}$ .....	129
<b>Figure. IV.36 :</b> Distribution de la pression en (N/m <sup>2</sup> ) dans un canal sans obstacle pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée $= 0,5 V_{eau}$ .....	130
<b>Figure. IV.37 :</b> Distribution de l'énergie cinétique en (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ) dans un canal (sans obstacle) pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée $= 0,5 V_{eau}$ .....	130
<b>Figure. IV.38 :</b> Distribution de l'énergie cinétique en (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ) dans un canal (sans obstacle) pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée $= 0,5 V_{eau}$ .....	131
<b>Figure. IV.39 :</b> Distribution des vitesses en (m/s) dans un canal sans obstacle pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée $= 0$ m/s .....	131
<b>Figure. IV.40 :</b> Distribution de la pression en (N/m <sup>2</sup> ) dans un canal sans obstacle pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée $= 0$ m/s .....	132
<b>Figure. IV.41 :</b> Distribution de l'énergie cinétique en (m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ) dans un canal sans obstacle pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée $= 0$ m/s.....	132
<b>Figure. IV.42 :</b> Distribution de la dissipation en (m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup> ) dans un canal sans obstacle pour une vitesse de l'air imposé à l'entrée $= 0$ m/s.....	133
<b>Figure. IV.43 :</b> Profil transversal des composantes du tenseur Reynolds.....	133
<b>Figure. IV.44 :</b> Le tenseur des contraintes de Reynolds.....	134

<b>Figure. IV.45</b> Les profils de comparaison des vitesses en (m/s) calculée dans un plan horizontal (pour les 3cas).....	134
<b>Figure. IV.46 :</b> Variation temporelle des vitesses (T= 2,5 à 40s) dans un canal (avec un obstacle).....	136
<b>Figure. IV.47:</b> Répartition des vecteurs des vitesses dans le canal (avec obstacle)...	136
<b>Figure. IV.48:</b> Vecteurs des vitesses à l'amont et à l'aval de l'obstacle.....	137
<b>Figure. IV.49:</b> Vecteurs des vitesses en (m/s) en présence de deux obstacles .....	137
<b>Figure. IV.50:</b> Vecteurs de vitesses en (m/s) à l'aval de l'obstacle n°1.....	137
<b>Figure. IV.51:</b> Vecteurs des vitesses en (m/s) à l'amont de l'obstacle n°2.....	138
<b>Figure. IV.52:</b> Vecteurs des vitesses en (m/s) à l'aval de l'obstacle n°2 .....	138
<b>Figure. IV.53:</b> Les zones de recirculation aux dessus de l'obstacle n°1.....	138
<b>Figure. IV.54:</b> Les zones de recirculation après l'obstacle n°1.....	139
<b>Figure. IV.55:</b> Les zones de recirculation après l'obstacle n°2.....	139
<b>Figure. IV.56:</b> Les vecteurs des vitesses après la zone de recirculation.....	139
<b>Figure. IV.57:</b> Les zones de recirculation entre deux obstacles (vecteurs de vitesse en m/s).....	140
<b>Figure. IV.58:</b> Les lignes de courant dans la zone entre deux obstacles.....	140

## Liste des tableaux

<b>Tableau III.1</b> : Les coefficients à calculer pour le schéma hybride.....	79
<b>Tableau III.2</b> : Termes des équations à discrétiser cas 1 (l'effet de la surface libre et similaire a celui d'une paroi solide).....	85
<b>Tableau III.3</b> : Termes des équations à discrétiser La surface libre est l'interface de deux volumes (volumes d'eau et volume d'air).....	86
<b>Tableau III.4</b> : Conditions aux limites (cas 1).....	98
<b>Tableau III.5</b> : Conditions aux limites (cas 2).....	99
<b>Tableau IV.1</b> : comparaison des longueurs de recirculation pour l'écoulement autour d'un obstacle.....	116
<b>Tableau IV.2</b> : Influence de l'air sur la vitesse horizontale de l'écoulement et le débit d'écoulement .....	122

## Nomenclature

$B$  : Largeur du canal [m]

$b$  : La longueur de la surface libre [m]

$c_f$  : Coefficient de frottement

$c_k$  : La constante de Kolmogorov

$c_1$  : Fraction volumique de l'eau

$c_2$  : Fraction volumique de l'air

$D_k$  : Le spectre de dissipation

$dt$  : Pas de temps [s]

$dx$  : Pas d'espace en  $x$  [m]

$dy$  : Pas d'espace en  $y$  [m]

$dz$  : Pas d'espace en  $z$  [m]

$g$  : Accélération de la pesanteur [ $m/s^2$ ]

$h$  : Hauteur du canal [m]

$I$  : Intensité turbulente

$K$  : Énergie cinétique turbulente [ $m^2/s^2$ ]

$k$  : Constante de Van Karman

$K_s$  : Coefficient de rugosité [m]

$K_s^+$  : Nombre adimensionnel =  $K_s^+ U_t/\sigma$

$L$  : Longueur du canal [m]

$L_t$  : Échelle caractéristique des grands tourbillons (échelle intégrale)

$L_m$  : Longueur de mélange [m]

$\hat{P}$  : Pression fluctuante en régime turbulent [ $N/m^2$ ]

$\bar{P}$  : Pression local moyenne du fluide en régime turbulent [ $N/m^2$ ]

$P$  : Pression local du fluide [ $N/m^2$ ]

$P_e$  : Nombre de Peclet

$P_{ij}$ : Terme de production

$R_e$  : Nombre de Reynolds de l'écoulement

$R_{et}$ : Le nombre de Reynolds de la turbulence

$R_{ij}$ : Contraintes des Reynolds

$S_{ij}$ : Tenseur de taux de déformation

$t$  : Temps [s]

$u$  : Composante de la vitesse suivant l'axe des  $x$  [m/s]

$\hat{u}$  : Composante fluctuante de la vitesse suivant l'axe des  $x$  [m/s]

$\bar{u}$  : Composante de vitesse moyenne en régime turbulent [m/s]

$u^*$ : vitesse de frottement [m/s]

$u^+$  : vitesse adimensionnelle [m/s]

$\overline{\hat{u}_i \hat{u}_j}$  : Composantes du tenseur de Reynolds [ $m^2/s^2$ ]

$v$  : Composante de la vitesse suivant l'axe des  $y$  [m/s]

$\hat{v}$  : Composante fluctuante la vitesse suivant l'axe des  $y$  [m/s]

$\bar{v}$  : Composante de vitesse moyenne en régime turbulent [m/s]

$\nu$  : viscosité cinématique [ $m^2/s$ ]

$\nu_t$  : viscosité cinématique turbulente [ $m^2/s$ ]

$w$  : Composante de la vitesse suivant l'axe des  $z$  [m/s]

$\hat{w}$  : Composante fluctuante de la vitesse suivant l'axe des  $z$  [m/s]

$\bar{w}$  : Composante de la vitesse moyenne en régime turbulent [m/s]

$x_i$  : Coordonnées [m]

$y^+$ : Distance adimensionnelle

$\varepsilon$  : Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente [ $\text{m}^2/\text{s}^3$ ]

$\delta_{ij}$ : Symbole de Kronecker

$\Gamma$  : Coefficient de diffusion [ $\text{kg}/\text{ms}$ ]

$\lambda$  : La 2eme viscosité dynamique moléculaire [ $\text{kg}/\text{ms}$ ]

$\lambda_0$  : Échelle caractéristique de longueur des plus petits tourbillons

$\mu$  : viscosité dynamique moléculaire [ $\text{kg}/\text{ms}$ ]

$\mu_t$  : Viscosité dynamique turbulente [ $\text{kg}/\text{ms}$ ]

$\rho, \rho_0$  : Masse volumique du fluide [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]

$\sigma_{ij}$  : La composante générale d'un tenseur du 2eme ordre (tenseur des contraintes)  
[ $\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}^2$ ]

$\tilde{\tau}_{ij}$  : Tenseur des contraintes visqueux [ $\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}^2$ ]

$\tau_p$  : Frottement sur la paroi [ $\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}^2$ ]

$\Omega_{ij}$  : Tenseur de viscosité

$\xi$  : Variable externe contenant le décalage

### **Remarque :**

La liste si dessus est une notation partielle, les notations qui concernant qu'un seul paragraphe seront spécifiées dans ce dernier.

# Introduction générale

## **Introduction générale**

Depuis longtemps, les fluctuations des vitesses des écoulements turbulents instationnaires à surface libre dans les canaux découverts en absence et en présence des obstacles transversaux ont fait l'objet de nombreuses recherches. En effet l'étude de ces phénomènes liés à la turbulence peut aider à cerner tous aspects de cette problématique. Les solutions techniques envisagées d'une telle étude permettront une maîtrise de la conception des ouvrages hydrauliques y afférents et contribueront à une optimisation des coûts.

Pour tenter de résoudre les problèmes des écoulements turbulents instationnaires la modélisation numérique reste toujours un moyen essentiel. En effet par définition le modèle est un outil qui permet de décrire un phénomène physique. Si celui-ci s'est réalisé on peut par simulation le reconstruire et apporter des informations sur les conditions qui furent nécessaires à son déroulement.

Donc il est nécessaire de se doter des modèles capables de simuler les phénomènes hydrauliques associés à l'écoulement de l'eau à travers le réseau.

A l'heure actuelle, les équations de la mécanique des fluides (Navier-Stokes, Reynolds, Barré de Saint-venant, Euler, etc....) ont donné naissance à de nombreux logiciels qui visent à les résoudre.

L'hydraulique à surface libre traite les écoulements dans les canaux artificiels et naturels ayant une interface eau/air. Les équations de Navier-Stokes moyennées sont les équations les plus utilisées pour modéliser l'écoulement instationnaire turbulent à surface libre.

L'analyse locale de la turbulence dans les écoulements à surface libre s'est surtout développée à partir des années 80 grâce notamment aux progrès des moyens de mesure des vitesses dans l'eau (film chaud, Laser Doppler, Acoustique Doppler,...)

On trouve d'ailleurs une bonne compilation des travaux consacrés aux écoulements à surface libre dans la monographie de Nezu et Nakagawa (1993).

Pour l'étude numérique on trouve des logiciels tels que FLUENT ou CFX qui résolvent les équations de Reynolds et qui sont capables de prendre en charge des écoulements multiphasiques.

La part la plus importante de notre travail porte sur l'étude par voie numérique, la répartition des vitesses des écoulements turbulents à surface libre dans des canaux rectangulaires découverts lisses en absence et en présence des obstacles transversaux.

Dans cette étude par le fait des difficultés à faire converger le modèle de la turbulence qui est très sensible aux conditions aux limites, notre but était de prendre des conditions variables de la surface libre car les effets de cette dernière sur la turbulence ont une importance particulière dans la modélisation des écoulements à surface libre.

Les résultats de ce présent mémoire ont fait l'objet de plusieurs participations dans des conférences internationales.

Nous présentons l'ensemble de notre étude en quatre chapitres

- Le chapitre 1 est consacré à une analyse bibliographique centrée d'abord sur les éléments de la mécanique des fluides qui présente une revue bibliographique détaillée sur les écoulements turbulents, nous discutons ensuite les questions liées à la formulation des lois de paroi et de la surface libre relatives à la vitesse moyenne.
- Le chapitre 2 présente les équations de base (l'équation de Navier-Stokes) pour un écoulement monophasique ensuite l'équation pour un écoulement turbulent instationnaire à surface libre. Nous présentons dans ce chapitre les problèmes de fermeture de ces équations et les modèles de la turbulence à surface libre, enfin nous présentons les équations pour un écoulement homogène et turbulent.
- Le 3<sup>ème</sup> chapitre est consacré dans un premier temps à l'application de la méthode des volumes finis (schémas ADI) pour la résolution des équations de transport, les termes sources et les relations de fermeture qui sont présentées, la forme des équations peut changer du 1<sup>er</sup> cas (monophasique) au 2<sup>ème</sup> cas (diphase), dans un 2<sup>ème</sup> temps on s'intéresse à l'amélioration des conditions aux limites liées à la formulation des lois de parois et de la surface libre.

- Le 4<sup>ème</sup> chapitre a pour objectif de donner les résultats des simulations numériques du système de Reynolds pour les 2 cas en absence et en présence des obstacles.
- Dans la conclusion générale nous avons dégagé les résultats marquants de notre travail ainsi que l'intérêt de quelques orientations futures de notre travail.

# Premier Chapitre

**Aspect bibliographique**

**Sur les écoulements**

**turbulents**

**À Surface Libre**

## **I.1. Introduction**

L'analyse bibliographique développée dans ce chapitre regroupe des résultats d'expérience et de travaux de modélisation de la turbulence relatifs à des écoulements turbulents à surface libre dans les canaux rectilignes de section rectangulaire sans tenir compte des écoulements secondaires.

Les écoulements secondaires trouvent leurs origines dans l'anisotropie de la turbulence (qui n'est pas notre objectif dans ce mémoire) en interaction avec les conditions aux limites qu'imposent la forme de la section et les variations de la rugosité de la paroi.

- Dans la première partie de ce chapitre on va donner des définitions sur la turbulence instationnaire et un regard historique sur ce phénomène, et des concepts fondamentaux en statistique.
- Dans une 2eme partie nous rappelons les formules et les lois de la surface libre.
- Dans la 3eme partie nous rappelons quelques résultats de la formulation des lois de parois dans les écoulements turbulents, au-dessus d'une paroi rugueuse ou lisse.

## **I.2. Le phénomène turbulent**

L'observation la plus banale montre que les écoulements de toute nature ne s'effectuent pas dans la pratique comme le prédisent les descriptions usuelles des modèles : entre les « effets de bord », « les fluctuations browniennes », « les bonnes approximations » et « les valeurs moyennes ». L'expérimentateur peut trouver dans un stock inépuisable les arguments qui justifieront les écarts entre ses mesures et les formules qu'il peut établir sur un plan théorique.

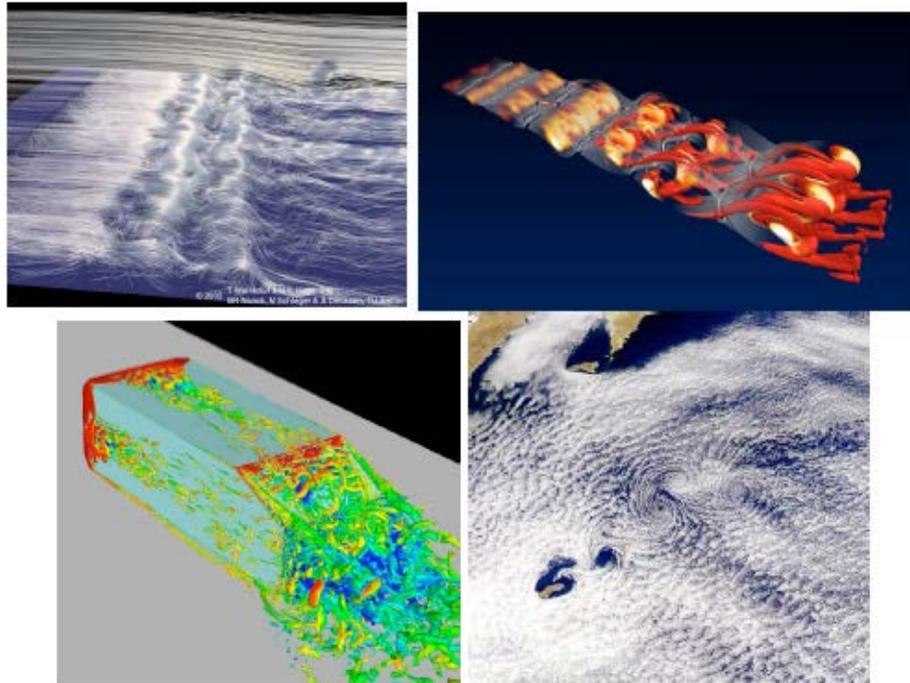
Les écoulements instables, instationnaire qui caractérise par une variation de tous les variables décrivant le mouvement dans le temps forment une gamme très large des écoulements que l'on rencontre dans la nature aussi bien dans les écoulements naturels que dans les écoulements provoqués (industriels) telle que les écoulements turbulents appartiennent à cette catégorie. Cependant tout en conservant ce caractère instable et apparemment désordonné, nombre d'écoulements réels restent globalement

bornés et un bon expérimentateur est capable d'extraire de mesures fluctuantes des conclusions réalistes sur certaines valeurs moyennes ou d'ensemble.

Ces conclusions ont concrètement une signification et peuvent ensuite être utilisées par l'ingénieur.

Un premier point singulier lorsqu'on aborde l'étude de ces écoulements est qu'il est très difficile de les définir de manière exacte, rigoureuse et consensuelle.

- Les écoulements turbulents forment une famille aux contours flous, ils présentent un « air de famille » qui se traduit par certaines similitudes concernant leurs mécanismes physiques dominants mais sont trop divers pour permettre d'en définir le périmètre exact. On peut ici faire une analogie avec la question de la définition d'un jeu selon Wittgenstein [25]. Ceci est illustré par la figure (I.1) qui présente des écoulements à priori très différents mais qui partagent la propriété d'être turbulents.



**Figure .I.1 :** exemples d'écoulements turbulents (de haut en bas, de gauche à droite) : écoulement derrière une marche descendante (Noack), couche de mélange plane (Noack), sillage d'un véhicule simplifié, sillage nuageux à la Guadeloupe[25].

Une conséquence est qu'il est également presque impossible de définir ce que serait la « Turbulence » (avec un T majuscule !?). Derrière le vocable turbulence, souvent utilisé en pratique, les chercheurs et les ingénieurs appartenant aux nombreuses communautés scientifiques qui étudient des écoulements turbulents regroupent des caractéristiques partagées par ces différents écoulements et que possèdent donc un certain degré d'universalité. Ces caractéristiques qui tiennent lieu de critères définitoires pour une définition analytique des écoulements turbulents sont les suivantes.

### I.2.1. Les caractéristiques de la turbulence

- 1- l'écoulement est tridimensionnel<sup>1</sup>
- 2- L'écoulement est instationnaire (Ce qui exclut les écoulements permanents, qui peuvent présenter toutefois des propriétés complexes comme le chaos Lagrangien) [3] , [23] , [24].
- 3- Incertitude (de mesure, de calcul).
- 4- Caractère aléatoire, désordonné, fluctuant, redistribution dans l'espace.
- 5- Augmentation du mélange, forte diffusion des quantités transportées. exemple (le lait et le café, la température dans un fluide, la fumée des cigarettes, ...).
- 6- Imprévisibilité, non déterministe, grande sensibilité aux conditions aux limites CAL, s'il existe de très petites différences à l'état initial elles vont s'amplifier sous l'effet d'interactions non linéaires.
- 7- Le rotationnel du champ de vitesse est non nul est donc pour une vorticité :

$$W = \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \times \vec{u}| \neq 0 \quad (\text{I-1})$$

- 8- L'écoulement présente une grande gamme continue d'échelles dynamiquement actives ceci à pour conséquences la densité spectrale (en fréquence ou en nombre d'onde) d'énergie cinétique (appelé « spectre d'énergie » par abus de langage) est continue, et est non nulle sur plusieurs décades.

---

<sup>1</sup> Le concept de la turbulence bidimensionnel existe. Il est né dans le monde de la recherche océanographique et météorologique, dans lequel on étudie des films fluides (atmosphère, océan) dont la profondeur est très petite devant les autres dimensions. Des études théoriques sur les systèmes unidimensionnels modélisés par l'équation de Burgers sont également menées par les physiciens.

9- L'écoulement est chaotique au sens où une petite perturbation apporté à un écoulement sera continument amplifiée dans le temps. Ceci implique qu'une description strictement déterministe d'un écoulement turbulent est de peu d'intérêt, les champs instantanés issus a différents instants d'un même écoulement (où les champs pris au même instant dans deux écoulements initialement « presque identique ») étant très différents.

Cette propriété implique donc que l'étude des écoulements turbulents doit être réalisée au moyen statistique.

10- Le bruit : les écoulements turbulents sont bruyants du fais des sources acoustiques créés par les fluctuations de pression dans le fluide.

11- Dissipation : la turbulence est fortement dissipative du fait de la présence de forts gradients des vitesses instantanés. Les taux de déformation instantanés deviennent en effet très importants et la dégradation de l'énergie cinétique turbulente en chaleur est alors très forte.

### **I.2.2. Les effets positifs et négatifs de la turbulence**

#### **a- Les effets positifs sont**

- L'augmentation du mélange.
- Réduit la température.

#### **b- Effets négatifs**

- Diffusion de la pollution.

### **I.2.3. Propositions de définition de la turbulence**

Donner une définition succincte et quelque peu précise de la turbulence reste encore en l'état actuel des connaissances une question ouverte. La proposition suivante ne cherche donc pas à clore définitivement le sujet, mais plus simplement à rassembler synthétiquement les éléments essentiels dégagés précédemment. Ainsi peut-on retenir que la turbulence est un mode naturel d'écoulement d'un fluide visqueux ou des mécanismes internes d'échange d'énergie assurent la création et le maintien de toute une hiérarchie de mouvement chaotique répartie continument sur une large gamme d'échelles macroscopiques[5].

### I.3. Exemples d'écoulement turbulent

Dans la nature la plupart des écoulements sont turbulents et ils ne sont que très rarement laminaires. Les écoulements atmosphériques, l'écoulement de l'eau sous un pont, les écoulements dans les tuyaux de notre maison, les écoulements dans les canaux naturels couverts et découverts, le sillage d'un voilier ou d'un avion... sont des exemples d'écoulement turbulent.

### I.4. Un regard historique sur la turbulence

#### I.4.1. Fondation de l'approche théorique des écoulements turbulents

Les équations en effet sont non linéaires, elles contiennent les germes de phénomènes d'instabilités, dont la conséquence la turbulence.

- En 1854 Hagen publia une première description d'un régime d'écoulement que nous appelons aujourd'hui turbulent.
- Saint-venant- interpréta avec une vision étonnamment précoce que les contraintes dans un fluide en écoulement turbulent doivent dépendre de l'intensité de formation des tourbillons.
- 1881-1882 : période où furent produites les équations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (I-2)$$

Que l'on couple généralement avec l'équation de la conservation de la masse (Incompressibilité  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  ).

- 1842-1929 : Joseph Boussinesq : Boussinesq écrivit également que dans les équations de Navier Le coefficient de viscosité « doit dépendre en chaque point non seulement de la température et peut être de la pression, mais encore et surtout de l'intensité de l'agitation moyenne qui s'y trouve produite »[24].

Boussinesq est ainsi l'inventeur du concept de viscosité turbulente et qui est à la base des modélisations de la turbulence les plus répandues.

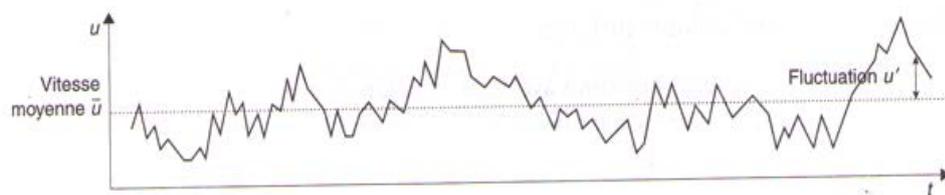
Restait à quantifier la transition entre le régime qualifié par Boussinesq de «régulier » (laminaire) et (régime turbulent).

- 1842-1912 Osborne Reynolds est : Le premier à apporter des éléments quantitatifs et des outils utilisables pour décrire la turbulence. L'expérience historique qui porte son nom permet de mettre en évidence quantitativement la transition à la turbulence dans un écoulement en conduit. Reynolds établit que c'est la combinaison de trois paramètres (vitesse, viscosité, la taille du conduit) sous la forme d'un nombre adimensionnelle qui caractérise cette transition.

Ce paramètre est connu sous le nom de nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho v.d}{\mu} \quad (\text{I-3})$$

- 1824-1907 Lord Keihin semble avoir été l'inventeur du nom de turbulence pour décrire ce régime d'écoulement.
- Reynolds alla plus loin que Boussinesq en introduisant la décomposition devenu classique entre vitesse moyenne ( $\bar{u}$ ) et fluctuation noté ( $u'$ ).



**Figure. I.2 :** Allure de la vitesse instantanée enregistrée en fonction du temps dans un écoulement turbulent[24].

- (1883-1970) Paul Richard Heinrich Blasius : Est surtout connu pour ses travaux sur la couche limite mais aussi pour ses résultats expérimentaux sur les écoulements turbulents dans les conduits.
- (1881-1963) Theodore van Karman qui a laissé son nom aux allées de tourbillons en aval d'un obstacle dans un écoulement ainsi qu'à certaines données sur la couche limite turbulente.

- Prandtl et son élève Blasius ont beaucoup travaillé sur les couches limites laminaires et turbulentes. Prandtl a laissé son nom à un modèle de turbulence simple, mais très bien adapté aux calculs de la couche limite turbulente.
- Tous les expérimentateurs depuis Hagen avaient remarqué que la transition entre le régime laminaire et le régime turbulent s'accompagne d'un changement de lois qui expriment la résistance à l'écoulement ou autrement dit des lois exprimant la perte de charge entre deux points d'un conduit rectiligne d'une longueur donnée  $L$ , en fonction de la vitesse d'écoulement dans ce conduit.
- (1933) J. Nikuradse fut en particulier le premier à étudier de façon systématique l'influence de la rugosité de paroi.
- La synthèse de ces données fut réalisée en 1939 par C.F. Colebrook.
- (1903-1987) Andreï Nicolae – Vich Kolmogorov : un autre père fondateur des idées théoriques sur la turbulence. Il a publié en 1942 les concepts de grands tourbillons et de petits tourbillons caractérisés par des échelles de vitesse et de longueur différentes.
- 1974 date de parution d'un article de B.E. Launder et D.B. Spalding de l'Imperial College de Londres qui proposa à partir des idées de Kolmogorov un modèle pour estimer la viscosité turbulente.
- En 1978 en France l'utilisation pour la 1<sup>ère</sup> fois le modèle  $k - \epsilon$ .
- En 1975 B.E. Launder, J. Reece et W. Rodi publièrent une première proposition d'équations permettant de calculer de façon approchée les tensions de Reynolds  $\overline{u_i u_j}$ .

### I.5. Les deux points de vue sur la turbulence

- L'un cherche à moyenniser directement la turbulence et à lisser le phénomène : c'est le point de vue statistique. On cherche uniquement les grandeurs moyennes et l'énergie cinétique turbulente moyenne. Cependant cette vision de la turbulence est « figée » ou « rationnelle », souvent celle des numériciens [16].
- L'autre cherche à extraire la cohérence dans la turbulence : C'est le point de vue des « structures cohérentes ». On cherche alors l'évolution des structures qui

persistent au milieu du chaos celles qui vont déterminer la physique de l'écoulement, c'est une vision instationnaire fluctuante et plus expérimentaliste de la turbulence[16].

### **I.6. La transition du laminaire au turbulent**

L'apparition de la turbulence a des causes diverses le plus souvent elle est due à l'augmentation du nombre de Reynolds, qui compare les termes de convection (non linéaires) au terme de dissipation visqueuse

$$Re = \frac{U\rho.L}{\mu}$$

Au fur et à mesure le nombre de Reynolds augmente, on observe un changement de topologie de l'écoulement qui correspond à la transition laminaire/turbulent.

*Re* Prend alors des valeurs différentes selon le type d'écoulement.

Mais l'apparition de la turbulence est influencée aussi par les forces extérieures (forces d'Archimède, force de Coriolis ...).

Les mécanismes de la transition du régime laminaire au régime turbulent sont tridimensionnels et complexes.

### **I.7. Les différentes approches de la turbulence**

Il n'existe pas une théorie générale explicative du phénomène de turbulence mais de nombreuses théories partielles et incomplètes.

Parmi ces théories :

#### **I.7.1. Approche directe (DNS)**

La plupart des approches de la turbulence supposent que le mouvement instantané détaillé du fluide est décrit par les équations de Navier – Stokes. Le fluide est alors considéré comme un continuum par rapport à l'échelle moléculaire. Selon ce point de vue on connaît donc les équations de la turbulence.

L'attaque directe des équations Navier – Stokes consisterait à faire un calcul direct du mouvement turbulent pour une ou plusieurs réalisations avec des conditions aux limites aléatoires et faire ensuite un traitement statistique sur les solutions obtenues.

Nous essayons de préciser quantitativement les ressources informatiques nécessaires pour une turbulence tridimensionnelle instationnaire, le nombre  $N^3$  de points de maillage dans un domaine cubique sera proportionnel à  $(\Delta x)^{-3}$ ,  $\Delta x$  est le pas d'espace. Le temps de calcul sera proportionnel à  $N^3/\Delta t$ ,  $\Delta t$  est le pas de temps.

$\Delta x$ , et  $\Delta t$  doivent être de l'ordre des échelles de Kolmogoroff.

$$\begin{cases} \Delta x = n/4 \\ n = (v^3/\varepsilon)^{\frac{1}{4}} \end{cases} \quad (\text{I-4})$$

$$\begin{cases} \Delta t = \tau/4 \\ \tau = (v/\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (\text{I-5})$$

Soit :

$$Re_t = \frac{l\sqrt{k}}{v} \quad (\text{I-6})$$

Où

$n$  : Echelle de longueur de Kolmogoroff

$Re_t$  : Le nombre de Reynolds de la turbulence.

$l$  : Dimension des gros tourbillons énergétiques.

$$l = k^{3/2}/\varepsilon \quad (\text{I-7})$$

Où  $k$  : l'énergie cinétique de la turbulence.

$$\begin{aligned} N^3 &= \left(\frac{L}{\Delta x}\right)^3 \\ &\simeq 64 \left(\frac{l}{n}\right)^3 \\ &= 64 Re_t^{9/4} \end{aligned} \quad (\text{I-8})$$

$L$  : La dimension géométrique caractéristique de l'écoulement était de l'ordre de  $l$ .

Pour un écoulement turbulent dans une conduite et pour  $Re_t = Re / 10$  où :

$Re$  : est le nombre de Reynolds de l'écoulement.

$Re = \frac{U.L}{\nu}$  on trouve pour :

$$Re = 80.000 \text{ et } N^3 = 4.10^{10} (!)$$

On montrerait de même que le temps de calcul est proportionnel à  $Re_t^{11/4}$

Donc on peut dire l'attaque directe des équations de Navier – Stokes en régime turbulent reste possible pour des écoulements en géométrie relativement simple et pour des  $Re$  peu élevés.

### **I.7.2. La simulation des grandes échelles (L.E.S)**

Afin d'augmenter le nombre de Reynolds des simulations numériques, la simulation des grandes échelles (LES pour large Eddy Simulation) ne résout que les échelles de l'écoulement supérieures à une taille de coupure donnée.

On suppose qu'en dessous de cette taille, la turbulence est isotrope et que les tourbillons peuvent être modélisés par une viscosité turbulente supplémentaire.

Cette approche est apparue dans les années 1970 et permet à l'heure actuelle d'effectuer des calculs relativement réalistes à des nombres de Reynolds entre 1000 et 50000 environ.

En pratique on considère que toutes les échelles qui ont une taille inférieure à la taille locale de la maille sont modélisées. Ainsi on appelle le modèle de turbulence le modèle « de sous-maille ». Le nombre de modèles de sous-maille développés depuis les années 70 est très important. Chaque modèle a été développé et valide pour telle ou telle classe d'écoulement, avec chacun des caractéristiques différentes en termes de coût de calcul, de robustesse (non explosion des calculs), de précision (par rapport à des essais), de représentation physique des phénomènes, d'universalité (précision sur plusieurs types d'écoulement)[30].

### I.7.3. Méthode statistique

Cette approche consiste à ne simuler que l'écoulement moyen en temps. Toutes les fluctuations sont filtrées et on modélise ces fluctuations par l'action d'une viscosité turbulente.

Les deux types de moyenne possible sont les suivantes :

- Moyenne d'ensemble : on effectue N fois la même expérience (c'est-à-dire le même écoulement dans le même dispositif expérimental) et on moyenne les données obtenues.
- Moyenne temporelle : on effectue une expérience pendant un temps très long et on moyenne les données obtenues.

Si le temps de moyenne est suffisamment long, en principe les moyennes temporelles sont indépendantes du temps. En revanche si le temps de moyenne est court (pas de temps petit devant le phénomène principal), les moyennes temporelles restent dépendantes du temps. Les moyennes d'ensembles peuvent également être dépendantes du temps, par exemple pour un écoulement à une fréquence principale périodique.

Lorsque les moyennes temporelles et d'ensemble ne coïncident pas, on dit que le système n'est pas ergodique ; lorsque le système évolue lentement par exemple, ou lorsque la moyenne temporelle sera différente en fonction de conditions initiales différentes.

Lorsque les moyennes d'ensembles et les moyennes temporelles sont indépendantes du temps et égales, on dit que le processus est "statistiquement stationnaire".

## I.8. Concepts fondamentaux en statistique

### I.8.1. Moyennes

La moyenne d'une variable  $f(x, t)$  peut être définie de différente manière.

#### I.8.1.1. Moyenne temporelle

Consiste à effectuer une moyenne sur le temps :

$$\bar{f}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(x, t) dt \quad (\text{I-9})$$

En principe la période d'intégration  $t$  doit tendre vers l'infini, mais on ne dispose jamais de l'historique complet des évolutions d'une variable. On se contente d'effectuer la moyenne sur une période  $T$  suffisamment grande par rapport au temps caractéristique des fluctuations  $\text{def}$ .

### I.8.1.2. Moyenne d'ensemble

On mesure cette variable sur un ensemble d'expériences et on forme à chaque instant la moyenne d'ensemble :

$$\overline{f(x, t)} = \frac{1}{N} \sum_{K=1}^N f^K(x, t) \quad (\text{I-10})$$

Le nombre  $N$  doit en principe tendre vers l'infini. On se contente en pratique des valeurs suffisantes pour assurer la stabilité statique de  $\overline{f(x, t)}$ .

La moyenne d'ensemble est très utile sur le plan conceptuel mais elle n'est pas généralement accessible en pratique.

La moyenne d'ensemble est également appelé moyenne de Reynolds.

**Remarque** : si ont fait tendre  $N$  vers l'infini, la moyenne d'ensemble tend vers la moyenne statistique.

### I.8.1.3. Moyenne statistique

$$\overline{f} = \int f P(f) df \quad (\text{I-11})$$

### I.8.1.4. Moyenne spatiale

La moyenne spatiale est définie par

$$\overline{f} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} \int f(x, y, z) dx dy dz \quad (\text{I-12})$$

### I.8.2. Hypothèses d'ergodicités

Les hypothèses d'ergodicités stipulent que, dans le cas d'un écoulement stationnaire, la valeur d'ensemble est la même que la moyenne temporelle :

$$\overline{f} = \lim \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t) dt \quad (\text{I-13})$$

Dans le cas d'un écoulement homogène la valeur moyenne temporelle est la même que la moyenne en espace.

Dans le cas d'un écoulement moyen non permanent, on considère que les statistiques sont relatives à un ensemble de réalisations de la même expérience.

### I.8.3. Symétrie, homogénéité et isotropie

#### I.8.3.1. La symétrie statistique

Certains écoulements turbulents présentent des symétries statistiques, leurs moments statistiques possèdent des symétries particulières. Dans de tel cas l'analyse est souvent grandement simplifiée, un grand nombre de termes des équations de bilan étant identiquement nuls.

Classiquement on distingue :

#### a- Des écoulements statistiquement stationnaires

Qui sont ceux tels que tous les moments statistiques de toutes les variables sont invariantes en temps, dans ce cas-là, on a :

$$\begin{cases} \overline{F_1(x_1, t_1)F_2(x_2, t_2) \dots F_n(x_n, t_n)} = \overline{[F_1(x_1, t_1 + \tau)F_2(x_2, t_2 + \tau)F_n(x_n, t_n + \tau)]} \quad \forall t, n \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (I.14)$$

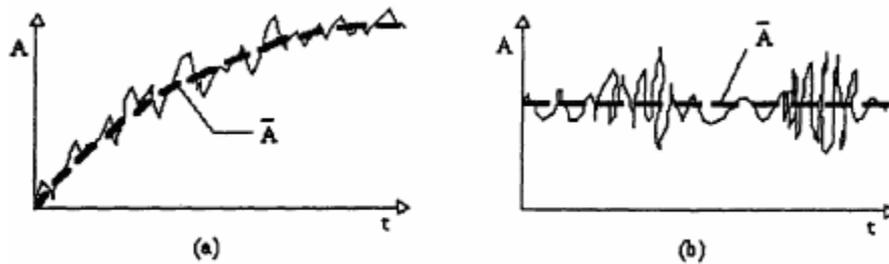


Figure. I.3 : (a) Grandeur statistiquement instationnaire. (b) stationnaire.

### b- Les écoulements statistiquement homogènes

Un écoulement turbulent est dit statistiquement homogène selon une direction  $\vec{e}$  si toutes les moyennes d'ensembles  $(f_1, f_2, f_3 \dots)$  associés à son état sont invariantes vis-à-vis d'une translation dans cette direction, soit :

$$\frac{F_1(\vec{x}_1, t_1)F_2(\vec{x}_2, t_2) \dots F_n(\vec{x}_n, t_n)}{F_1(\vec{x}_1 + \vec{y}, t_1)F_2(\vec{x}_2 + \vec{y}, t_2)F_n(\vec{x}_n + \vec{y}, t_n)} = \quad (I-15)$$

$$\forall \vec{y} \parallel \vec{e}, \forall n$$

Si cette propriété est vérifiée dans toutes les directions on parle de la turbulence homogène.

Dans le cas d'une turbulence homogène on a en particulier :

$\begin{cases} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i} = 0 \\ \bar{F}(\vec{x}) = F(\vec{x}) \end{cases} \quad (I-16)$ <p>Égalité de la moyenne d'ensemble et la moyenne spatiale</p>
--

### c- Isotropie statistique

Un écoulement turbulent est dit statistiquement isotrope si toutes les moyennes d'ensembles associées à son état sont invariantes vis-à-vis d'une rotation quelconque.

#### I.8.3.2. Les propriétés d'un écoulement turbulent homogène et isotrope<sup>2</sup>

- Toutes les moyennes d'ensembles associées à l'état turbulent sont invariantes vis-à-vis de toute translation, rotation par rapport à un axe et symétrie par rapport à un plan.
- Il n'y a pas en pratique de direction privilégiée pour la turbulence.

<sup>2</sup> Les écoulements turbulents rencontrés dans la pratique sont généralement non homogènes et non isotropes. La théorie de l'isotropie local conduit à admettre que la structure fine d'une turbulence non isotrope s'approche de l'isotropie, ce qui justifie l'utilité de la turbulence homogène et isotrope.

- Les conséquences et les simplifications sont importantes :

$$\begin{cases} \overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} \\ \overline{uv} = \overline{uw} = \overline{vw} = 0 \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (\text{I-17})$$

#### I.8.4. Modèle de Kolmogorov

Le modèle de Kolmogorov permet de quantifier les phénomènes observés. Ce modèle repose sur quelques résultats de la turbulence homogène, mais peut être utilisé avec une bonne précision pour décrire de manière générale presque tous les écoulements turbulents.

##### I.8.4.a. Hypothèses pour le modèle de Kolmogorov

Le modèle de Kolmogorov, basé sur l'analyse de Fourier repose sur les hypothèses suivantes :

- L'énergie  $k$  est portée par les plus grands tourbillons qui ne voient pas « l'effet de la viscosité «  $\nu$  ».
- La viscosité n'influence que les plus petits tourbillons responsables de la majeure partie de la dissipation.
- La puissance  $\mathcal{E}$  dissipée par les plus petits tourbillons doit provenir des plus grands tourbillons.
- Il existe une rangée spectrale telle que  $E(k)$  ne dépend que de  $k$  et  $\mathcal{E}$ .

##### I.8.4.b. Echelle de Kolmogorov

$\lambda_0$ : Échelle caractéristique de longueur des plus petits tourbillons.

$\nu$  : Échelle caractéristique de vitesse des plus petits tourbillons.

$\tau = \frac{\lambda_0}{\nu}$  : échelle caractéristique de temps des petits tourbillons.

- On définit les autres échelles relatives à la turbulence.
- $L_t$  : échelle caractéristique des grands tourbillons (échelle intégrale).
- $U = \sqrt{k}$  échelle caractéristique de vitesse d'agitation du fluide.

A la lumière de l'analyse de Fourier, l'analyse dimensionnelle nous permet d'écrire :

- $\mathcal{E} = f(K, L_t)$  où  $L_t = f(K, \mathcal{E})$  indépendamment de  $\nu$
- et d'autre part :  $\lambda_0 = f(\nu, \mathcal{E})$  indépendamment de  $K$

Chacune de ces deux relations (3 paramètres, 2 unités) peut être ramenée à un seul nombre sans dimension.

$$\frac{L_t \mathcal{E}}{K^{3/2}} = \text{constante et } \lambda_0 \left(\frac{\mathcal{E}}{\nu^3}\right)^{1/4} = \text{constante}$$

Donc

$$\begin{cases} L_t \simeq \frac{K^{3/2}}{\mathcal{E}} \\ \lambda_0 \simeq \left(\frac{\nu^3}{\mathcal{E}}\right)^{1/4} \end{cases} \quad (\text{I-18})$$

L'échelle  $\lambda_0$ , qui caractérise la taille des tourbillons à partir de laquelle la viscosité agit fortement et empêche la formation d'échelle plus petite  $\lambda_0$ , est nommée échelle de Kolmogorov (ou petite échelle).

A l'autre extrémité, l'échelle  $L_t$  des tourbillons suffisamment énergétique pour avoir une action sur le mouvement moyen est appelée échelle intégrale (ou échelle des grands tourbillons). En éliminant  $\mathcal{E}$  dans (I-18), on obtient une estimation de l'étendue du spectre avec :

$$\frac{L_t}{\lambda_0} = \left(\frac{\frac{1}{k^2} L_t}{\nu}\right)^{3/4} = R_t^{3/4}$$

Où :  $R_t$  est le nombre de Reynolds turbulent défini par

$$R_t = \frac{\sqrt{k} L_t}{\nu} \quad (\text{I-19})$$

### **Zone inertielle**

Entre  $2\pi / L_t$  et  $2\pi / \lambda_0$  si le nombre de Reynolds turbulent  $R_t$  est assez grand ( $>1000$ ), Il existe un intervalle de nombre d'ondes  $K$  appelé zone inertielle correspondant aux structures qui ne font que transmettre une puissance constante  $\mathcal{E}$ , des grandes échelles vers les petites.

Pour cette zone inertielle qui n'existe que si la turbulence est suffisamment développée pour que l'on y soit à la fois loin de l'échelle de Kolmogorov, la seule relation dimensionnellement correcte que l'on puisse écrire faisant seulement intervenir la puissance qui transite,  $\varepsilon$ , et le nombre d'onde considéré est :

$$E(k) = C_k \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (\text{I-20})$$

Où  $C_k$  est une constante appelée constante de Kolmogorov avec  $C_k \simeq 1,5$ . Dans cette zone le spectre de dissipation s'écrit :

$$D(k) = 2\nu C_k \varepsilon^{2/3} k^{1/3} \quad (\text{I-21})$$

### I.9. Effet de la surface libre sur la turbulence

L'influence de la surface libre est inconnue a priori et peut évoluer, si bien que les volumes finis utilisés doivent être adaptés à chaque pas de temps dans leurs dimensions verticales. De même la distribution de pression n'est plus obligatoirement hydrostatique, à cet effet les différents points de vue sur l'effet de la surface libre sont :

- **J.M. Hervouet**

« Dans les modèles de turbulence pour les écoulements à surface libre, la surface libre peut être traitée à peu près comme une paroi mais avec une contrainte nulle donc une dérivée normale de vitesse tangentielle nulle. Avec les modèles de turbulence plus sophistiqués comme le modèle  $K - \varepsilon$ , il y a plusieurs options qui vont de  $K$  et/ou  $\varepsilon$  imposés avec une théorie basée sur le profil logarithmique des vitesses entre le fond et la surface libre à des dérivées normales de  $K$  et/ou  $\varepsilon$  nulles. S'il y a du vent ça se complique un peu et il faut alors prendre en compte la contrainte due au vent ».

- **Hubert Chanson**

« La surface libre est déformable et sa déformation répond aux fluctuations du champ de vitesse ».

Selon Hubert chanson[12] : En présence d'une surface libre, les écoulements turbulents cisailés sont caractérisés par un entrainement d'air<sup>3</sup> dont la conséquence est la formation d'un mélange de deux fluides (eau –air).

Les interactions entre les structures tourbillonnaires et les bulles ne peuvent donc être négligées.

L'émulsion eau-air devient un fluide diphasique compressible avec une densité égale à :

$$\rho = \rho_w(1 - c) \quad (I-22)$$

Où :

$\rho_w$  : La densité de l'eau

$C$  : Le taux de vide

C'est le mélange des torrents de montagne, l'écume des vagues déferlantes, les écoulements à grande vitesse sur un évacuateur de crues, le brouillard autour d'un jet issu d'un canon d'irrigation et le rouleau de déferlement d'un ressaut dans une rivière figure (I.4). Dans ces écoulements on observe des variations importantes du taux de vide local, entre 0 (100% eau) et 1 (100% air).

De ce fait, les interactions entre les structures tourbillonnaires et les bulles ne peuvent être négligées, et peuvent conduire à des modifications importantes du champ de turbulence.

---

<sup>3</sup> On peut classer les écoulements turbulents à surface libre en deux grandes familles (chanson 1997-2008 BROCCHINI et Pérégrine 2001). D'une part, les écoulements avec entrainement d'air au long d'une interface. L'autre famille d'écoulement turbulent correspond à une aération localisée



**Figure. I.4:** Exemples d'écoulements turbulent cisailés à surface libre - Vague déferlante sur la Plage du Minou (Brest); Evacuateur de crues du barrage de Jiroft (Iran) (Photo de Amir Aghakoochak); Ressaut hydraulique à Dreamworld (Gold Coast), vue vers l'aval; Canon d'irrigation au CEMAGREF (Aix-en-P.)[12].

- **Labiod 2005**

« L'effet de la surface libre est similaire à celui d'une paroi solide »[15].

Les effets de la surface libre sur la turbulence ont une importance particulière dans la modélisation des écoulements à surface libre par comparaison au plan de symétrie d'un écoulement en charge. On distingue deux effets principaux de la surface libre sur la turbulence :

- La redistribution de l'énergie cinétique turbulente sur les composantes sphériques du tenseur de Reynolds.
- La réduction de l'échelle de longueurs des tourbillons porteurs d'énergie.

- L'effet de la surface libre apparu dans la zone située à  $Z/h > 0,6$  est accentué dans le voisinage de la surface libre soit  $Z/h > 0,9$ . Hunt (1984) propose une loi de décroissance en puissance 1/3 dans le voisinage de la surface libre[13]

$$\frac{\omega}{u^*} = 1,34 \left( \frac{\varepsilon h}{u^{*3}} \right)^{\frac{1}{3}} (1 - \xi)^{\frac{1}{3}} \quad (I-23)$$

Notons que dans des écoulements proches du régime critique ( $Fr > 0,7$ ), l'apparition des ondes de surface, peut provoquer une amplification des fluctuations de vitesses et notamment des fluctuations verticales. L'effet de redistribution de la turbulence attribuée à la surface libre peut ainsi être atténué (Nezu et Nakagawa 1993)[22]. La diminution de l'intensité turbulente dans la zone de surface est représentée sur la figure (I.5) où il est également tracé le profil correspondant obtenu en écoulement en charge.

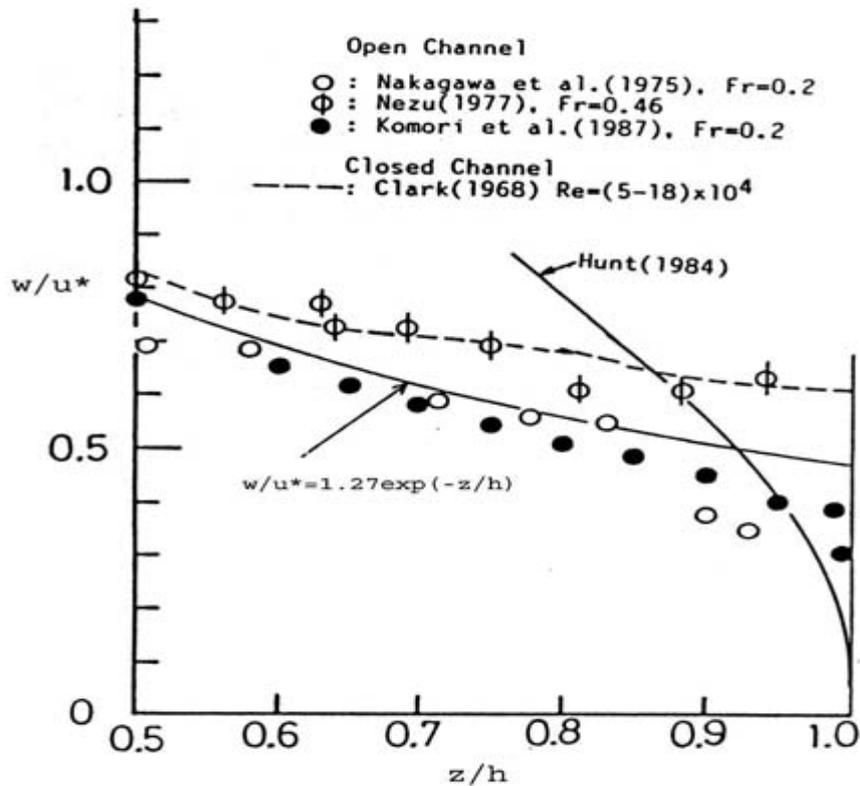


Figure. I.5 : Réduction de l'intensité turbulente verticale due à la surface libre (Nezu et Nakagawa 1993)[22]

La réduction de l'échelle de longueur des tourbillons porteurs d'énergie est la conséquence de leur interaction avec la surface libre qui se traduit par une déformation de celle-ci accompagnée d'une augmentation locale de la pression hydrostatique.

Il en résulte un éclatement des tourbillons énergétiques en tourbillons de tailles plus petites et dissipatifs. Ce mécanisme conduit à une augmentation du taux de dissipation et une diminution de l'énergie turbulente ce qui explique la diminution de la viscosité turbulente de la zone de la surface libre.

### **I.10. Traitement de la turbulence aux parois**

L'écoulement au voisinage des parois est complexe. Il exige une bonne connaissance du phénomène de la couche limite. Néanmoins l'épaisseur de la couche limite est bien trop fine par rapport à l'échelle de notre problème.

Les lois de parois traduisent des propriétés de similitude du champ de vitesse et des composantes du tenseur de Reynolds des écoulements cisailés turbulents en proximité de la paroi, dans une région où l'écoulement est contrôlé par des paramètres caractéristiques de la paroi (La vitesse de frottement, la viscosité, ou/et une échelle caractéristique de la rugosité) figure (I.6).

- La formulation de la loi de paroi présente un double intérêt :
  - Elles doivent permettre de déterminer le frottement à la paroi et éventuellement une échelle équivalente de rugosité à partir de vitesses mesurées au-dessus de la paroi.
  - Il présente l'intérêt de simplifier le choix des conditions aux limites dans les modèles de turbulence développée sur l'approche statistique.
- Rappelons quelques résultats essentiels relatifs plus particulièrement aux écoulements parallèles à surface libre.
- Ainsi dans un canal rectangulaire l'écoulement turbulent au centre du canal pourra être considéré comme proche d'un écoulement parallèle si le rapport de forme du canal (Largeur sur tirant d'eau) est grand et si les parois sont lisses ou de rugosité homogène[34].

### I.10.1. Lois logarithmiques de vitesse

La contrainte totale de cisaillement  $\tau_{xz} = -\rho\overline{uw} + \rho\nu\frac{\partial u}{\partial z}$  varie linéairement suivant la profondeur, soit sous forme adimensionnelle

$$\frac{\tau_{xz}}{\rho u^{*2}} = -\frac{\overline{uw}}{u^{*2}} + Re^{*-1} \frac{du^+}{d\xi} \quad (I-24)$$

Où l'on a posé :

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{z}{h} \\ u^+ = \frac{u}{u^*} \\ Re^* = \frac{u^* h}{\nu} \end{cases} \quad (I-25)$$

La vitesse de frottement  $u^*$  est définie par :

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad (I-26)$$

Où

$\tau_p$  : Le frottement sur la paroi du fond ne contient que la distribution visqueuse

$$\tau_p = \tau_{xz} (z = 0) = \left( \rho\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (I-27)$$

Pour déterminer le profil de vitesse à partir de l'équation (I-24) il faut introduire un modèle de la contrainte turbulente de cisaillement figure (I.6).

- 1- Ce cisaillement est établi dans la zone centrale de l'écoulement ou zone externe, loin de la paroi où les paramètres de contrôle sont  $u^*$  et  $h$
- 2- Concerne la zone de paroi ou la zone interne où les paramètres de contrôle sont  $u^*$  et une longueur  $l_w$  caractéristique de l'état de la paroi.

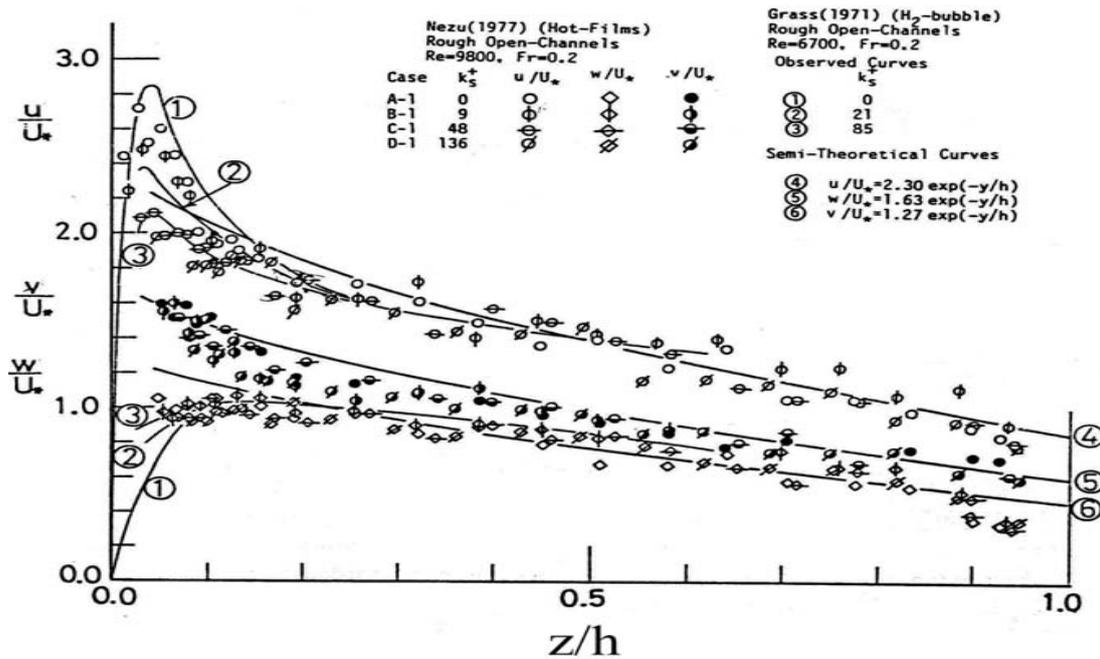


Figure I.6 : Distributions des intensités turbulentes en écoulement sur fond lisse et rugueux (Nezu et Naka-gawa 1993)[22].

### I.11. Distribution de vitesse

La distribution des vitesses dans une section droite a fait l'objet de nombreuses études (Nikuradse 1933) a proposé une loi logarithmique pour décrire la distribution verticale des vitesses longitudinales puis (Coles 1956)[7] a introduit la fonction du sillage. Cette relation décrit bien le profil des vitesses dans le contexte bidimensionnel des canaux larges mais elle est inadaptée lorsque le maximum des vitesses est situé en dessous de la surface libre, ce que les anglo-saxons appellent le « Dip phénomène ». Ce phénomène présenté dès 1883 par (Stearns 1883) se produit dans les canaux étroits soit lorsque le coefficient d'aspect.

$$A_r = b/h < 5$$

Où :

$b$  : La longueur à la surface libre

$h$  : La hauteur d'eau

- Dans la zone interne de la couche limite la loi logarithmique s'écrit :

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{K} \ln \left( \frac{Z}{k_s} \right) - 2,5 \ln \left[ \frac{Z_0}{K_s} \right] \quad (\text{I-28})$$

Où :

$u^*$  : est la vitesse de cisaillement,

$K_s$  : La rugosité

$Z_0$  : Le lit hypothétique proposé par (Einstein et El Samni 1949).

- Dans la région externe la distribution verticale des vitesses peut s'écrire :

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{K} \ln \left( \frac{Z}{K_s} \right) - 2,5 \ln \left( \frac{Z_0}{K_s} \right) + W(\xi) \quad (\text{I-29})$$

Où :

$$W(\xi) = \frac{2\pi}{k} \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \xi \right) \quad (\text{I-30})$$

$W(\xi)$  est la fonction du sillage proposée par (Coles1956)[7].

Du fait de son caractère monotone croissant cette loi ne permet pas de représenter les profils verticaux de vitesse dans les canaux étroits, (Sarma et Al 1983) ont proposé une loi parabolique pour décrire le profil vertical des vitesses longitudinales. Plus récemment (yang et al 2004) et (Maghrebi et Rahim pour 2006) ont étudié plus en détail le « Dip phénomène ». Cependant les lois qu'ils proposent nécessitent toutes un paramétrage qui on limite les applications pratiques.

## I.12. Conclusion

Cette analyse bibliographique avait le double objectif, d'esquisser, d'une part un état de l'art sur quelques aspects caractéristiques de la structure des écoulements turbulents d'une façon générale et les écoulements turbulents à surface libre d'une façon particulière et des problèmes que pose leur modélisation et de justifier d'autre part les orientations de nos travaux.

## Deuxième Chapitre

# Modélisation mathématique des écoulements à surface libre

## **II.1. Introduction**

Un écoulement turbulent continue à obéir aux équations de Navier-Stokes à cause du terme non linéaire de convection, les instabilités sont amplifiées lorsqu'on fait croître la vitesse par rapport à l'effet de la viscosité. La difficulté réside dans le fait que les fluctuations qui apparaissent sont d'échelle trop petite vis-à-vis de la résolution. Bien que déterministes ces fluctuations sont décrites par une quantité d'informations qu'il est trop coûteux et souvent même matériellement impossible de manipuler. Le raisonnement doit donc se faire au niveau de grandeurs moyennes.

Les équations de Saint-Venant décrivent les écoulements à surface libre fondés sur l'intégration des équations de champs suivant la verticale (Saint-Venant 2D), les lois de fermeture de ces modèles sont limitées.

Dans ce chapitre on va rappeler les équations de base, telle que les équations du champ moyen des vitesses et l'équation du transport du tenseur de Reynolds sur lesquelles s'appuient les analyses qui seront développées par la suite.

On se base sur l'approche statistique en un point des écoulements turbulents, les équations de base sont obtenues par prise de moyenne des équations des grandeurs instantanées décomposées en grandeurs moyennes et fluctuantes. L'application de l'opérateur de moyenne aux équations instantanées de Navier et Stokes conduit à établir des équations des champs des grandeurs moyennes et des champs de corrélation d'ordre croissant des grandeurs fluctuantes. Pour la non-linéarité des équations de la mécanique des fluides, la prise de moyenne introduit des champs de corrélation en sur nombre pour lesquels il faut formuler des hypothèses de fermeture.

## **II.2. Equations de Navier –Stockes À surface libre**

Les équations de Navier-Stokes sont composées de l'équation de continuité qui exprime la conservation de la masse du fluide étudié, et des équations de quantité de mouvement, qui résultent en fait de la relation fondamentale de la dynamique des fluides.

### II.2.1. Les équations de base

Soient  $\vec{u}$  le vecteur vitesse dont  $u, v, w$  sont ses composantes dans les directions  $x, y, z$  d'un repère cartésien, respectivement,  $\rho$  : la densité de fluide,  $P$  : la pression.

Il s'ensuit que la masse de fluide  $M$  à l'intérieur d'un volume de contrôle  $\Omega$  au temps  $t$  est donnée par :

$$M(t) = \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad (\text{II-1})$$

Où  $\Omega$  dépend des variables  $x, y, z$  et du temps ;  $d\Omega$  est un élément de  $\Omega$

- L'équation de continuité exige que le taux de variation de la masse totale  $M$  soit nul (la loi de conservation de masse).

$$\frac{d}{dt}(M) = 0 \quad (\text{II-2})$$

- L'équation de la quantité de mouvement qui traduit la deuxième loi de Newton appliquée à la masse  $M$ , est exprimée sous la forme :

$$\frac{d}{dt}(M \vec{u}) = \sum \vec{F}_{ext} \quad (\text{II-3})$$

Le premier membre gauche indique le taux de variation de la quantité de mouvement de la masse  $M$  et  $\sum \vec{F}$  est la somme vectorielle des forces qui s'exercent sur  $M$ . Pour un fluide newtonien, les équations sont dénommés les équations de Navier-Stokes, d'après (Navier C, 1823)[21] et (Stokes, 1845)[33] qui furent les premiers à les formuler.

### II.2.2. Equations de continuité

Considérons un volume matériel  $\Omega_m(t)$ . La masse contenue dans ce volume est :

$$M = \int_{\Omega_m(t)} \rho d\Omega \quad (\text{II-4})$$

Si le volume matériel ne contient ni source, ni puits, la masse qui se trouve dans  $\Omega_m(t)$  est constante et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d(M)}{dt} &= \frac{\partial M}{\partial t} + M_s \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-5})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_m(t)} \rho d\Omega \\ &= \int_{\Omega_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega\end{aligned}\quad (\text{II-6})$$

Le deuxième terme du second membre dans (II-5) représente le flux  $M_S$  net à travers la surface. Ainsi il devient :

$$M_S = \int_{A_m(t)} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA \quad (\text{II-7})$$

Par le théorème de Gauss, le flux aux frontières est alors ramené à une intégrale de volume.

Il s'en suit que (II - 5) s'écrit :

$$\int_{\Omega_m(t)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \right) d\Omega = 0 \quad (\text{II-8})$$

Comme le volume  $\Omega$  est arbitraire l'intégrale en tous points de  $\Omega$  doit donc être nulle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{II-9})$$

Ceci représente l'énoncé de la continuité sous une forme différentielle .En utilisant la notion d'une dérivée particulaire (II-9) devient ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\rho + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \\ &= \frac{d\rho}{dt} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \\ &= 0\end{aligned}\quad (\text{II-10})$$

Les variations de la masse volumique seront dues soit à la température, soit à la présence de substances dans l'eau, sel ou sédiments. Dans tous les cas, nous considérerons désormais que ces variations sont suffisamment faibles pour que l'on puisse utiliser une équation de continuité sous forme incompressible.

D'où :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (\text{II-11})$$

Comparée à la définition (II-11), l'équation de continuité d'un écoulement incompressible est considérablement simplifiée. On obtient à partir de (II-10) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{II-12})$$

L'équation en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-13})$$

### II.2.3. équation de conservation de la quantité de mouvement

Il nous faut maintenant formuler pour un fluide ce qui s'écrit  $\vec{F} = m \frac{d\vec{u}}{dt}$  pour un solide. Cette forme la plus connue de la deuxième loi de Newton doit être en fait écrite plus rigoureusement  $\vec{F} = \frac{d}{dt}(M \vec{u})$  car pour un fluide la masse volumique est a priori variable, l'équivalent de

$\frac{d}{dt}(M\vec{u})$  sera écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \vec{u} d\Omega = \Sigma \vec{F}$$

La force  $\vec{F}$  est une somme des forces extérieures qui s'appliquent directement dans la masse du fluide et de forces dites de contact qui s'appliquent sur sa surface.

$$\text{Les forces de volume} = \int_{\Omega} f_V \rho d\Omega(t) \quad (\text{II-14})$$

(S'agissant des écoulements à surface libre en distinguant l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  et les autres (accélération de Coriolis, etc...).

Les forces de surface agissant sur la surface élémentaire  $dA(t)$  du volume  $\Omega(t)$  peuvent être écrites :

$$\text{Les forces de surface} = \int_{\Sigma} F_s dA(t) \quad (\text{II-15})$$

La loi de la conservation de la quantité de mouvement appliquée à un volume matériel donne :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_m(t)} \rho u_i d\Omega = \int_{\Omega_m(t)} F_i^V d\Omega + \int_{\Sigma} F_i^S dA \quad (\text{II-16})$$

A partir du théorème du transport et de Reynolds cette formule peut être écrite comme suit :

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \right] d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho F_i^V d\Omega + \int_{A(t)} F_i^S dA \quad (\text{II-17})$$

D'après (Aris 1962)[1] le tenseur  $F_i^S$  peut être exprimé en fonction des neuf composantes.

Finalement on peut écrire :  $F_i^S = \sigma_{ij} n_j$

Où :  $\sigma_{ij}$  est la composante générale d'un tenseur du second ordre appelé tenseur des contraintes au point considéré ;  $n_j$  est la normale à la surface  $dA$ . En appliquant le théorème du flux (divergence) ou le théorème d'Ostrogradski<sup>1</sup> pour le dernier terme de l'équation (II-17), cette dernière peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) d\Omega = \int_{\Omega(t)} (\rho F_i^b + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}) d\Omega \quad (\text{II-18})$$

Pour chaque  $\Omega(t)$  nous devons avoir :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_i^b \quad (\text{II-19})$$

C'est la loi de la conservation de la quantité de mouvement.

### II.2.3.1. Relation constitutive

On décompose le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  en deux termes de façon à faire apparaître la pression

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + \tilde{\tau}_{ij} \\ \tilde{\tau}_{ij} = 2\mu(\tilde{\epsilon}_{ij} + \frac{\lambda}{2} \Delta \delta_{ij}) \end{cases} \quad (\text{II-20})$$

Dans un fluide isotrope et Newtonien les efforts visqueux sont proportionnels aux taux de déformation.

---

<sup>1</sup> Pour tout volume  $\Omega$  CD avec  $A$  une surface fermée fictive  $\Sigma$  à l'intérieur de la masse fluide elle enferme le volume fini  $\Omega$  et  $\emptyset$  est un champ scalaire différentiel nous prenons :  $\int \frac{\partial \emptyset}{\partial x_i} d\Omega = \int_A \emptyset \cdot n dA$  avec  $n$  est la normale sur  $A$ .

La forme tridimensionnelle de la loi de Newton de la viscosité pour des écoulements compressibles implique deux constantes de la proportionnalité :

- ✓ La première viscosité dynamique  $\mu$  pour relier les efforts aux déformations linéaires.
- ✓ La deuxième viscosité pour relier les efforts à la déformation volumétrique.

Les neuf composantes du tenseur des contraintes visqueuses dont six sont indépendantes

Où :  $p$  : est la pression,  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  quand  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  quand  $i \neq j$ )  $\tilde{\tau}_{ij}$  : est le tenseur des contraintes visqueuses,  $\tilde{\epsilon}_{ij}$  : est le tenseur de déformations linéaires d'Euler, défini ci-après et  $\Delta$  représente sa trace :

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{II-21})$$

$$\Delta = \tilde{\epsilon}_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (\text{II-22})$$

Pour les gaz  $\lambda$  et  $\mu$  sont liés par la relation de Stockes [31]

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad \text{et donc} \quad \lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

La substitution de (II-20) dans (II-19) donne :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \rho F_i^b \quad (\text{II-23})$$

Ces équations de Navier – Stockes (II-23 et II-13) sont dites « non-hydrostatiques ».

### II.2.3.2. Hypothèses simplificatrices

Les deux forces ; de Coriolis et la force centrifuge dues à la rotation de la terre sur elle-même seront négligés devant la force de gravité puisque notre étude va s'intéresser aux écoulements dans les petits domaines (les canaux découverts) [24] . Finalement le terme des forces de volume (terme source) se réduit à  $f_i^V = g_i$ , où les  $g_i$  sont les composantes du vecteur de la gravité.

- On néglige l'influence du vent.
- La masse volumique est constante.

- L'écoulement est incompressible  $\Delta = 0$  le coefficient  $\lambda$  n'intervient particulièrement pas, en outre si nous considérons la viscosité dynamique moléculaire  $\mu$  constante alors nous pouvons utiliser :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

Cette approximation est valide puisque nous allons approcher des écoulements de fluide turbulent dans lesquels le transport moléculaire est négligeable par rapport au transport turbulent.

- En se plaçant dans le cadre de ces hypothèses certaines simplifications peuvent être apportées aux équations précédentes.
- Nous arrivons finalement à l'écriture suivante des équations en coordonnées cartésiennes

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-13})$$

L'équation de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta(u) + g_x \quad (\text{II-24})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta(v) + g_y \quad (\text{II-25})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta(w) - g_z \quad (\text{II-26})$$

Où  $\nu$  : est la viscosité cinématique du fluide  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

### **II.3. Equation pour un écoulement turbulent à surface libre**

#### **II.3.1. Description statistique des écoulements turbulents**

Une description statistique des écoulements turbulents s'impose lorsqu'on cherche à caractériser leur dynamique et surtout à identifier les propriétés ayant un certain degré d'universalité qui sont nécessaires à l'élaboration de toute théorie physique. On va rappeler des principaux outils mathématiques utilisés pour obtenir cette description. La théorie des probabilités et de la statistique ne seront pas rappelées. On fera simplement ici l'hypothèse que les champs physiques associés à un écoulement turbulent sont suffisamment réguliers et possèdent toutes les propriétés requises pour que les outils mathématiques soient valides (convergence des statistiques).

### II.3.1.a Moyenne d'ensemble et corrélations

On considère des variables muettes  $G_i(x, t)$ , ( $i = 1, N$ ) qui représentent les variables physiques associées à un écoulement turbulent ( $P, U_i, \dots \dots \dots$ ).

On fait l'hypothèse fondamentale que les fluctuations turbulentes sont telles que les variables  $G_i$  peuvent être assimilées à des variables aléatoires, et qu'en conséquence tous les outils statistiques usuels sont pertinents.

Afin de caractériser  $G_i(x, t)$  on considère tout d'abord sa moyenne, définie comme une moyenne d'ensemble  $\bar{G}_i$  :

$$\bar{G}_i(x, t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} (\sum_{k=1, p} G_i^{(k)})(x, t) \quad (\text{II-27})$$

27)

Ou  $G_i^{(k)}$  : la k-nième réalisation indépendante

Pour caractériser les fluctuations de  $G_i$  autour de  $\bar{G}_i$  on utilise la variance :

$$\overline{\hat{G}_i \hat{G}_i}(x, t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} (\sum_{k=1, p} [G_i^{(k)}(x, t) - \bar{G}_i(x, t)][G_i^{(k)}(x, t) - \bar{G}_i(x, t)]) \quad (\text{II-28})$$

Une analyse plus fine du champ fluctuant est obtenue en mesurant les corrélations en deux points ( $x$  et  $y = x + r$ ) et en deux temps ( $t$  et  $\hat{t} = t + \tau$ )

$$\hat{G}_i \hat{G}_i(x, y, t, \hat{t}) = \overline{\hat{G}_i(x, t) \hat{G}_i(y, \hat{t})} \quad (\text{II-29})$$

$$= \overline{\hat{G}_i(x, t) \hat{G}_i(x + r, t + \tau)}$$

$$= \overline{\hat{G}_i \hat{G}_i}(x, r, t, \tau)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{p} (\sum (G_i^k(x, t) - \bar{G}_i(x, t))(G_i^k(y, \hat{t}) - \bar{G}_i(y, \hat{t}))) \quad (\text{II-30})$$

30)

On peut généraliser ce type d'analyse en définissant le moment d'ordre  $q$  en  $N_x$  points et  $N_t$  temps de  $\hat{G}_i$  ( $i$  fixé)

$$\pi(\overline{\hat{\Phi}_i(x_n, t_j)^{pL}})$$

Avec les contraintes suivantes :

$$\sum P_L = q, \quad P_l > 0 \quad \forall L$$

$$n = 1, N_x$$

$$j = 1, N_t$$

### II.3.1.b. Décomposition de Reynolds

Dans son article fondateur de 1884 Osborne Reynolds propose de décomposer chaque variable associée à un champ turbulent comme la somme de sa moyenne et de sa fluctuation :

$$G(x, t) = \bar{G}(x, t) + \hat{G}(x, t) \quad (\text{II-31})$$

$$\bar{G}(x, t) = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} G(x, \dot{t}) d\dot{t} \quad (\text{II-32})$$

La notation  $\int_{\tau}$  dans (II-32) désigne l'intégrale entre les instants  $t - \tau/2$  et  $t + \tau/2$

$\bar{G}$  : La valeur moyenne de  $G$

$\hat{G}$  : Sa fluctuation

L'opérateur de moyenne est un opérateur générique qui doit vérifier les propriétés suivantes (parfois appelées axiomes de Reynolds).

1. Conservation des constantes :

$$\bar{\bar{I}} = \bar{I} = I$$

2. Linéarité :

$$\overline{G_1 + G_2} = \bar{G}_1 + \bar{G}_2$$

$$\overline{(G + \hat{h})} = \bar{G} + \bar{\hat{h}}$$

3. Commutativité avec la différence en espace et en temps :

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial x_k} = \bar{\frac{\partial G}{\partial x_k}} \quad (k = 1, 3)$$

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial t}$$

4. Structure de projecteur :

$$\bar{\bar{G}} = 0 \Leftrightarrow \bar{\bar{G}} = \bar{G}$$

5. La valeur moyenne d'un produit  $g \cdot h$  n'est pas le produit des valeurs moyennes :

$$\overline{(Gh)} = \bar{G} \bar{h} + \overline{G' h'}$$

$$(G \cdot h)' = \bar{G} \bar{h}' + \bar{G}' \bar{h}$$

- Les propriétés sont trivialement vérifiées par la moyenne d'ensemble introduite plus haut.

### II.3.2. Equations moyennées (Reynolds)

#### II.3.2.1. Principes

- La résolution directe des équations de Navier –Stokes ne peut se faire que pour des cas simple et des nombre de Reynolds relativement faibles. Elle nécessite de plus une puissance de calcul considérable.
- Une alternative consiste à s'intéresser seulement aux quantités moyennes (vitesses, pressions, ..) et à obtenir des équations vérifiées par ces quantités (à priori plus facile à résoudre).
- On applique pour cela l'opérateur moyen d'ensemble aux équations du mouvement en pratiquant une décomposition de Reynolds sur les inconnues du problème.
- Les nouvelles équations obtenues sont qualifiées du terme « moyennées » par opposition aux équations de mouvement dites « instantanées »
- Donc on a pour un mouvement d'un fluide Newtonien incompressible régi par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + g_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (\text{II-33})$$

Lorsque l'écoulement est turbulent on introduit dans l'équation précédente la décomposition :

$$u_i = \bar{u}_i + \hat{u}_i$$

$$p = \bar{p} + p'$$

Et on lui applique l'opérateur moyen. Compte tenu des propriétés (II-3-1-b), les termes linéaires se retrouveront à l'identique dans l'équation de la vitesse moyenne. Seul le terme non linéaire de la dérivée particulaire pose quelque difficulté.

On applique la décomposition de Reynolds et on moyenne :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial (\bar{u}_i + \dot{u}_i)}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial (\overline{\bar{u}_i + \dot{u}_i})}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{u}}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\dot{u}}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \bar{\bar{u}}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{L'incompressibilité de l'écoulement moyen}) \quad (\text{II-34})$$

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{L'incompressibilité de l'écoulement fluctuant}) \quad (\text{II-35})$$

Le terme non linéaire dans l'équation (II-33)

$$\begin{aligned} (\bar{u}_j + \dot{u}_j) \frac{\partial (\bar{u}_i + \dot{u}_i)}{\partial x_j} &= \frac{\partial (\bar{u}_j + \dot{u}_j)(\bar{u}_i + \dot{u}_i)}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial [\bar{u}_j \bar{u}_i + \bar{u}_j \dot{u}_i + \dot{u}_j \bar{u}_i + \dot{u}_j \dot{u}_i]}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Appliquant l'opérateur moyen, on a :

$$\overline{\dot{u}_j \bar{u}_i} = \bar{\dot{u}}_j \cdot \bar{u}_i = 0 \quad \text{mais en revanche} \quad \overline{\dot{u}_i \dot{u}_j} \neq 0$$

On reporte ce terme à droite pour laisser la dérivée particulaire en suivant la vitesse moyenne. Les équations de Navier Stocks moyennées, appelées équations de Reynolds s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} - \left( \frac{\partial \bar{\dot{u}_i \dot{u}_j}}{\partial x_j} \right) + g_i \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (\text{II-36})$$

Ces équations moyennées sont identiques à celles appliquées aux valeurs instantanées (II-23), (II-13) à ceci près qu'elles comportent une inconnue supplémentaire provenant d'un terme non-linéaire de convection. Ce terme qui a un caractère clairement tensoriel, est le tenseur des contraintes turbulentes, ou tenseur de Reynolds : la partie fluctuante de l'écoulement n'intervient dans la détermination de l'écoulement moyen que par ces contraintes. Le facteur  $\overline{\dot{u}_i \dot{u}_j}$  est appelé corrélation (on dit aussi « corrélation d'ordre 2 ») des vitesses.

Posons  $R_{ij} = \overline{\dot{u}_i \dot{u}_j}$  c à d :

$$R = \begin{bmatrix} \dot{u}\dot{u} & \dot{u}\dot{v} & \dot{u}\dot{w} \\ \dot{u}\dot{v} & \dot{v}\dot{v} & \dot{v}\dot{w} \\ \dot{u}\dot{w} & \dot{v}\dot{w} & \dot{w}\dot{w} \end{bmatrix} \quad (\text{II-37})$$

Ecrivant l'équation de Navier-Stokes sous la forme vectorielle, avec  $\sigma$  le tenseur des contraintes :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \text{grad}) \vec{U} = \frac{1}{\rho} \text{div}(\sigma) + g \quad (\text{II-38})$$

On obtient (II-36) sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + (\bar{U} \cdot \text{grad}) \bar{U} = \frac{1}{\rho} \text{div}(\bar{\sigma} - \rho R) + g \\ \text{div}(\bar{U}) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-39})$$

R: est la moyenne du produit extérieur des vecteurs fluctuations de vitesse,  $R = \overline{\dot{U} \otimes \dot{U}}$

En plus de la valeur moyenne des contraintes de pression et de la viscosité, il apparaît donc une nouvelle contrainte (R) appelée « tension de Reynolds ».

- Lois de comportement traduisant l'aspect non-Newtonien du mouvement moyen :

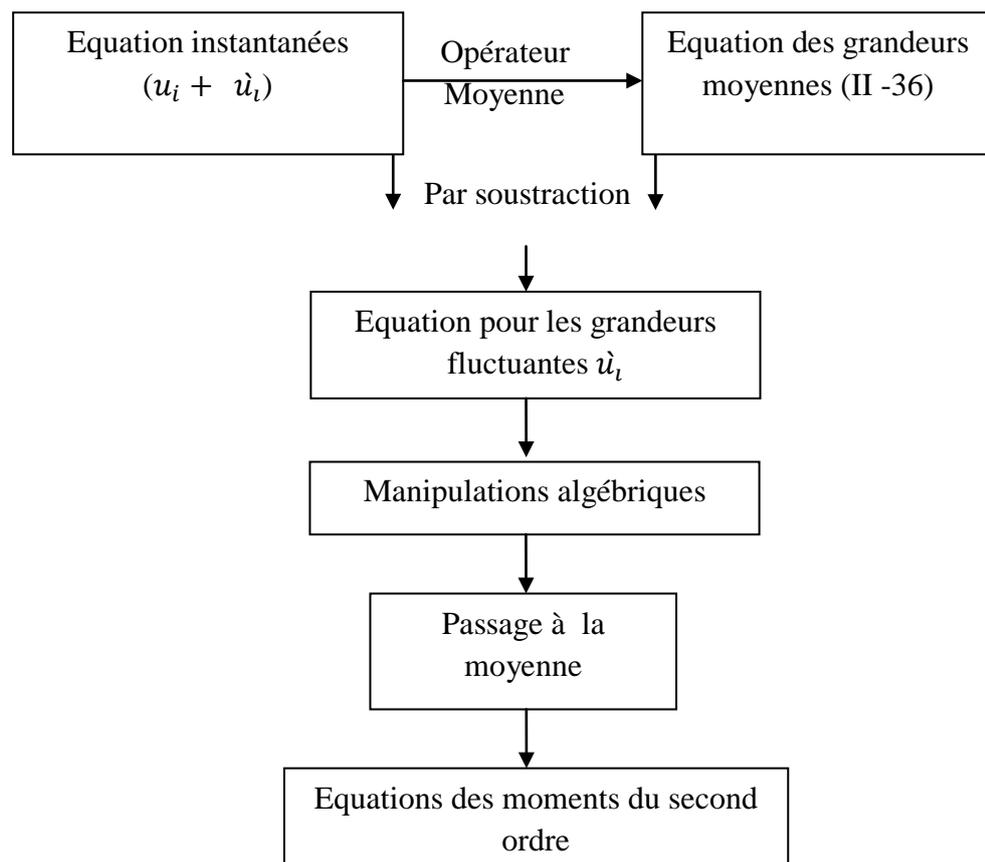
$$\begin{cases} \sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \dot{\tau}_{ij} & \text{loi de Newton} \\ \neq \\ \sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} + R_{ij} & \text{Aspect non - newtonien} \end{cases} \quad (\text{II-40})$$

## II.4. Le problème de la fermeture

Les équations (II-36) concernent un nombre d'inconnues supérieur au nombre d'équations. Il est donc légitime d'examiner comment compléter les équations. Deux voies s'offrent pour cela : soit trouver, à partir des équations de Navier-Stokes, des équations satisfaites par les corrélations ; soit de manière plus empirique, relier le tenseur de Reynolds par une loi phénoménologique aux vitesses moyennes. Cette question, à laquelle aucune des deux réponses envisagées n'est totalement satisfaisante constitue le problème de fermeture.

### II.4.1. Equation d'évolution des corrélations

Pour obtenir une équation satisfaite par les corrélations, en introduisant la décomposition de Reynolds dans les équations instantanées et en soustrayant les équations moyennes correspondantes puis on multiplie l'équation de  $\hat{u}_i$  par  $\hat{u}_j$  et réciproquement on somme et on moyenne c'à d :



**Figure. II .1** : Schéma itératifs pour obtenir l'équation d'évolution des corrélations

### Détails des calculs

On part de l'équation :

$$\rho \left[ \frac{\partial(u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial P}{\partial x_i} = g_i + \mu \Delta u_i \quad (\text{II-41})$$

Pour  $u_i = \bar{u}_i + \dot{u}_i$  et  $u_j = \bar{u}_j + \dot{u}_j$  et  $P = \bar{P} + \dot{P}$  on à :

$$\rho \left( \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\dot{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i + \dot{u}_i)(\bar{u}_j + \dot{u}_j)}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{P}}{\partial x_i} = g_i + \mu \Delta \bar{u}_i + \mu \Delta \dot{u}_i \quad (\text{II-42})$$

$$\rho \left( \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_i \dot{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{P}}{\partial x_i} = g_i + \mu \Delta \bar{u}_i + \mu \Delta \dot{u}_i - \rho \frac{\partial(\dot{u}_i \dot{u}_j)}{\partial x_j} \quad (\text{II-43})$$

Et on à l'équation (II-36)

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} = g_i + \mu \Delta \bar{u}_i + \dot{\sigma}_{ijj}$$

Pour  $\dot{\sigma}_{ij} = -\rho \overline{\dot{u}_i \dot{u}_j}$  (II-44)

Nous soustrayons (II-43) - (II-36), il vient :

$$\rho \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \dot{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \dot{P}}{\partial x_i} = \mu \Delta \dot{u}_i - \rho \frac{\partial(\dot{u}_i \dot{u}_j)}{\partial x_j} - \dot{\sigma}_{ijj} \quad (\text{II-45})$$

En utilisant l'équation (II-45), il est possible de construire les équations pour les corrélations doubles  $\overline{\dot{u}_i \dot{u}_j}$  donc on peut écrire symboliquement (II-36)

Sous la forme :  $\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = f(\bar{U}, \bar{P}, \overline{\dot{U} \otimes \dot{U}})$

Avec la même symbolique, l'équation sur la corrélation double s'écrit :

$$\frac{\partial \overline{\dot{U} \otimes \dot{U}}}{\partial t} = f(\bar{U}, \overline{\dot{U} \otimes \dot{U}}, \overline{\dot{U} \dot{P}}, \overline{\dot{U} \otimes \dot{U} \otimes \dot{U}}) \quad (\text{II-46})$$

Le système d'équations ci-dessus n'est pas fermé car il est apparu de nouvelles inconnues c'est-à-dire que chaque corrélation d'ordre  $m$  fait apparaître dans son équation d'évolution des nouvelles corrélations d'ordre  $m + 1$ .

On a affaire à une suite infinie d'équations et pour résoudre le problème, on est contraint d'introduire une modélisation, appelée « fermeture ».

Pour trouver l'équation d'évolution du tenseur de Reynolds en tenant compte de :

$$\text{div } \bar{U} = 0$$

Ecrivons l'équation (II-45) pour deux indices différent  $i$  (soit  $E_i$ ) et  $k$  (soit  $E_k$ ) et formons les deux combinaisons  $\dot{u}_i E_k + \dot{u}_k E_i$  et on moyenne :

$$\dot{u}_k E_i = \rho \left[ \frac{\partial \dot{u}_i \dot{u}_k}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \dot{u}_j \dot{u}_k)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\dot{u}_i \bar{u}_j \dot{u}_k)}{\partial x_j} \right] + \dot{u}_k \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} = \mu \dot{u}_k \Delta \dot{u}_i - \rho \frac{\partial (\dot{u}_i \dot{u}_j \dot{u}_k)}{\partial x_j} - \dot{u}_k \delta_{ijj} \quad (\text{II-47})$$

$$\dot{u}_i E_k = \rho \left[ \frac{\partial \dot{u}_i \dot{u}_k}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_k \dot{u}_j \dot{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\dot{u}_j \bar{u}_k \dot{u}_i)}{\partial x_j} \right] + \dot{u}_i \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_k} = \mu \dot{u}_i \Delta \dot{u}_k - \rho \frac{\partial (\dot{u}_k \dot{u}_j \dot{u}_i)}{\partial x_j} - \dot{u}_i \sigma_{kjj} \quad (\text{II-48})$$

On somme (II-47) et (II-48) et on moyenne, après quelques calculs simples (et tenant compte de  $(\nabla \cdot \bar{U}) = 0$ ) l'équation de transport des tensions de Reynolds s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial (\overline{\dot{u}_i \dot{u}_k})}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial (\overline{\dot{u}_i \dot{u}_k})}{\partial x_j} \right] = \\ \left[ \underbrace{-\rho \left( \overline{\dot{u}_i \dot{u}_j} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} + \bar{u}_k \dot{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)}_{P_{ij}} \right] + \left[ \underbrace{-\rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{(\dot{u}_i \dot{u}_j \dot{u}_k)} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{\dot{P} \dot{u}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\dot{P} \dot{u}_i} \right)}_{\tau_{ij}} \right] + \\ \left[ \underbrace{\overline{\dot{P} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right)}}_{\phi_{ij}} \right] - \underbrace{2\mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} \right)}_{\varepsilon_{ij}} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left( \overline{\dot{u}_i \dot{u}_k} \right) \end{aligned} \quad (\text{II-49})$$

On peut écrire (II-49) sous la forme suivante :

$$\rho \underbrace{\left[ \frac{\partial(\overline{\dot{u}_i \dot{u}_k})}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial(\overline{\dot{u}_i \dot{u}_k})}{\partial x_j} \right]}_{(1)} =$$

$$-\rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{(\dot{u}_i \dot{u}_j \dot{u}_k)} \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{\dot{P} \dot{u}_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\dot{P} \dot{u}_i} \right) \right] + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left( \overline{\dot{u}_i \dot{u}_k} \right) \quad (a)$$

$$-\rho \left( \overline{\dot{u}_i \dot{u}_j} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} + \overline{(\dot{u}_k \dot{u}_j)} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) + \left[ \left( \overline{\dot{P}} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} \right) + \left( \overline{\dot{P}} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right) \right] \quad (b) \quad (II-50)$$

$$-2\mu \left( \overline{\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j}} \right) \quad (c)$$

$$C'à d (1) = a + b + c$$

En dehors du membre de gauche dans l'équation (II-49) qui représente le transport par le mouvement moyen et du dernier terme à droite qui représente la diffusion moléculaire cette équation comprend quatre termes nouveaux qu'il va falloir interpréter

Il est habituel de classer les termes du second membre de (II-50) en trois catégories(a), (b), (c) :

- (a) - représente des termes de diffusions : ces termes se caractérisent par la simple différentiation des grandeurs concernées dans une direction d'espace et si l'écoulement est adjacent à une zone non turbulente, leur contribution totale est nulle dans le bilan de l'équation.
- (b) - représente des termes de production (positive ou négative, elle peut comprendre aussi bien des termes « sources » que des termes « puits » cette production est due d'abord à une contribution de l'écoulement moyen qui intervient ses dérivées  $\partial \overline{u_k} / \partial x_j$  c'est-à-dire par son cisaillement ; celui-ci représente la part essentielle de la production de turbulence. Une 2<sup>ème</sup> contribution est due à la corrélation pression – déformation du milieu : on peut dire que cette contribution s'annule pour  $\nabla \cdot \dot{u}_i = 0$ .
- (c) - Représente une destruction par dissipation visqueuse.

**Remarque**

Sur un plan plus strictement mathématique l'équation (II-50) ne fournit pas d'information supplémentaire. Cette équation fait apparaître de nouvelles inconnues :

- Corrélations triples  $\overline{\dot{u}_i \dot{u}_j \dot{u}_k}$
- Corrélation pression- vitesse  $\overline{\dot{u}_{ij} \frac{\partial P}{\partial x_j}}$
- Corrélation gradient de vitesse  $\overline{\frac{\partial \dot{u}_i \dot{u}_j}{\partial x_i x_i}}$

Le problème de fermeture est alors repoussé et reste entier.

**II.4.2. Energie cinétique du mouvement turbulent**

Soit  $q^2$  la densité massique d'énergie cinétique du mouvement fluctuant et soit  $K$  sa valeur moyenne (densité volumique moyenne d'énergie cinétique turbulente) :

$$q^2 = \frac{1}{2} \dot{u}_i \dot{u}_i \quad , \quad k = \overline{q^2} \tag{II-51}$$

En sommant les trois composantes diagonales ( $i = 1, j = 1$ ) + ( $i = 2, j = 2$ ) + ( $i = 3, j = 3$ ) on obtient l'énergie cinétique du mouvement fluctuant et le terme  $\phi_{ij}$  de l'équation (II-49) s'annule grâce à :  $\nabla \cdot \dot{U} = 0$ .

Prenons la valeur moyenne de la moitié de la trace de l'équation de  $R_{ij}$  (II-49) il vient :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_i} \frac{\partial k}{\partial x_i} = - \underbrace{\overline{\dot{u}_i \dot{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}}}_{(P)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{2} \overline{\dot{u}_i \dot{u}_i \dot{u}_j} + \frac{1}{\rho} \overline{\dot{u}_j \dot{P}} \right]}_{(diff_t)} - v \underbrace{\left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i} \right)}_{(\epsilon)} + v \Delta k \tag{II-52}$$

On reconnaît à gauche, la dérivée particulière en suivant le mouvement moyen. On peut donner pour les autres termes les interprétations suivantes :

**P** : « production » d'énergie turbulente ou plus exactement transfert d'énergie entre l'écoulement moyen et fluctuant.

**Diff<sub>t</sub>** : « diffusion turbulente » ce terme est une redistribution spéciale de l'énergie du mouvement fluctuant  $\dot{h} = \sum_{i=1}^3 (\frac{1}{2} \dot{u}_i^2) + \dot{p}$ .

Grace à l'incompressibilité on peut aussi écrire ce terme :  $Diff_t = -\frac{1}{\rho} \overline{u_j \frac{\partial(\dot{h})}{\partial x_j}}$

$\nu \Delta k$  : « Diffusion moléculaire » redistribution spatiale due au mouvement brownien en général négligeable devant le précédent.

$\varepsilon$  : Dissipation d'énergie du mouvement turbulent (transformée en chaleur) ce terme est toujours négatif car :

$$\varepsilon = \nu \sum_i \sum_j \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right)^2$$

### Remarque

L'équation (II-52) montre donc :

- Que l'énergie turbulente est produite (aux dépens de l'énergie de l'écoulement moyen) dans les zones où il y a un gradient de vitesse moyenne.
- Que cette énergie peut être transportée d'un point à l'autre (terme  $Diff_t$  et terme  $u_i \frac{\partial k}{\partial x_i}$  qui représente le transport par la vitesse moyenne)
- Qu'elle est dissipée à cause de l'effet de la viscosité (terme  $\varepsilon$ ).

### II.4.3. Bilan des équations et des inconnues

Sur un plan plus strictement mathématique l'équation du tenseur de Reynolds ne fournit pas d'information supplémentaire. Cette équation comporte en effet en second membre des corrélations d'ordre 3 qui sont elles-mêmes de nouvelles inconnues.

Si répétant l'opération, on cherche des équations satisfaites par ces dernières, on introduit des corrélations d'ordre de plus en plus élevé : en fait c'est le caractère artificiel de la décomposition de Reynolds qui introduit un nombre d'inconnues supérieur au nombre d'équations. Il s'agit de problème de fermeture des équations.

Inconnues à calculer	Equations disponibles	Nombre d'équations	Inconnues supplémentaires	Nombre total d'inconnues
Champ de vitesse moyen $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ Pression(1)	(1) continuité (3) N, S moyennée	4	Tension de Reynolds $\overline{\dot{u}_i \dot{u}_j}$ (06) $\frac{\overline{\dot{u}\dot{u}}}{\overline{\dot{v}\dot{v}}}; \frac{\overline{\dot{u}\dot{v}}}{\overline{\dot{v}\dot{w}}}; \frac{\overline{\dot{u}\dot{w}}}{\overline{\dot{w}\dot{w}}}$	10
				
- Champ de vitesse moyen $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ - Pression (1) - Tension de Reynolds $\overline{\dot{u}_i \dot{u}_j}$ $\frac{\overline{\dot{u}\dot{u}}}{\overline{\dot{v}\dot{v}}}; \frac{\overline{\dot{u}\dot{v}}}{\overline{\dot{v}\dot{w}}}; \frac{\overline{\dot{u}\dot{w}}}{\overline{\dot{w}\dot{w}}}$ (6)	(1) continuité (3) Navier-S moyennée (6) Equation des tensions de Reynolds	10	- Corrélation triples $\overline{\dot{u}_i \dot{u}_j \dot{u}_k}$ - Corrélation pression-vitesse - Corrélation gradient de vitesse	35

Figure. II.2 : Les problèmes de fermetures des équations

Le système compte beaucoup d'inconnues notamment à cause de la présence des termes de corrélation triple. Il est donc nécessaire de modéliser les inconnues supplémentaires à l'aide des lois complémentaires n'introduisant pas de nouvelles inconnues.

### II.5. Les modèles de turbulence

Les équations de Reynolds montrent que si une loi phénoménologique relie les contraintes turbulentes aux valeurs moyennes, on disposera alors pour la détermination du champ des vitesses moyennes d'un système comportant un nombre égal d'équations et d'inconnues. Le problème de la fermeture se ramène en fait à la recherche de relations de cette nature ; et ce problème devient le problème essentiel de la turbulence. Contrairement à ce que l'on a pu voir dans les équations de Navier-Stockes, ces relations phénoménologiques ne sont pas intrinsèques, c'est-à-dire qu'elles ne caractérisent pas le milieu lui-même : elles dépendent fortement des problèmes considérés.

Bien que de très nombreux modèles de fermetures soient utilisés actuellement, tous ces modèles ont un caractère empirique, et ne s'appliquent pas aux mêmes situations pratiques.

Il est alors courant d'utiliser :

- Soit des modèles de fermetures du premier ordre qui consistent à modéliser les corrélations en les reliant directement au mouvement moyen, ce sont les modèles reposant sur le concept de la viscosité turbulente.
- Soit des modèles de fermetures du second ordre pour lesquels les équations des corrélations sont résolues après avoir modélisé directement les termes inconnus d'ordre 3.

Nous allons maintenant examiner par ordre de complexité, les différents modèles de turbulence utilisés en hydrodynamique à surface libre.

En nous attardant sur le modèle  $K - \varepsilon$  choisi dans la suite de notre étude.

### II.5.1. Modèles à 0 équation

Ces modèles très simples supposent que la viscosité turbulente est constante ou directement fonction de paramètres connus ou facilement calculables.

#### Viscosité constante

Une viscosité constante peut suffire dans les cas où l'écoulement est gouverné par le gradient de pression et par le transport, en régime de marée par exemple, et surtout pour modéliser la circulation océanique à grande échelle. En dimension 2, cette viscosité constante doit inclure la dispersion.

#### Modèle d'Elder [14]

Le modèle de Elder pour les équations de Saint venant intègre l'effet de la dispersion et préconise deux coefficients différents l'un  $K_l$  suivant l'écoulement (diffusion longitudinale) et l'autre  $K_t$  transversal à l'écoulement (diffusion transversale). Les observations et calculs d'Elder inspirés du profil de vitesse dans la couche logarithmique le conduisent aux valeurs :  $K_l = 6 u^* h$  et  $K_t = 0,6 u^* h$ .  
Où :  $u^*$  est la vitesse de frottement et  $h$  la profondeur.

### Modèle de Nezu et Nakagawa [22]

Ce modèle publié en 1993 s'inspire toujours de l'expression  $v_t = k u^* z$  dans la couche limite au-dessus du fond, mais tient compte aussi du fait que la viscosité turbulente décroît vers 0 vers la surface libre (ce qui suppose une absence de vent).

Nezu et Nakagawa proposent alors :

$$v_t = k u^* z \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (\text{II-53})$$

Ce modèle est surtout utilisé pour la diffusion suivant la verticale.

### Modèles de longueur de mélange

Modèle de longueur de mélange standard :

Ce modèle proposé en 1925 par Prandtl [27] donne la valeur du coefficient de viscosité sous la forme :

$$v_t = l_m^2 \sqrt{2D_{ij}D_{ij}} \quad (\text{II-54})$$

Où :  $D$  est ici le tenseur des taux de déformation du mouvement moyen avec :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II-55})$$

$L_m$  : Est le paramètre de la « longueur de mélange » qui vaut  $K y$  à une distance  $y$  de la paroi avec  $K = 0,41$  (constante de Karman).

Ce modèle est conçu pour décrire le profil de vitesse au voisinage d'une paroi (on va voir en détail ce modèle)

Il existe :

- Modèles de longueur de mélange sur la verticale et un autre pour les jets flottants.
- Modèle classique de Prandtl :
 
$$L_m = k z \quad \text{Si } z \leq 0,2 h \quad (z \text{ est ici la distance au fond et } h \text{ la profondeur})$$

$$L_m = 0,2 k h \quad \text{Si } z \geq 0,2 h$$

- Modèle de Quetin (1977)

$$l_m = \frac{1}{\frac{1}{k_z} + \frac{1}{0,65d}} \quad (\text{II-56})$$

Où:  $d$  est la distance à la surface libre.

**Modèle de Tsanis (1989) [14]**

$$L_m = KZ \quad \text{Si } Z \leq 0,2 h \text{ (} Z \text{ est ici la distance au fond et } h \text{ la profondeur)}$$

Pour :  $0,2 h \leq Z \leq 0,8 h$

$$L_m = 0,2 Kh \quad (\text{II-57})$$

$$L_m = Kd \quad \text{Si } Z \geq 0,8 h \text{ (} d \text{ est toujours la distance à la surface libre)}$$

Dans l'expression de la production de turbulence on ne tient pas compte des gradients horizontaux de  $u$  et de  $v$  et des gradients de  $w$  qui sont négligeables devant les gradients verticaux  $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}$  c'est ainsi qu'une approximation de  $\sqrt{2D_{ij}D_{ij}}$ . On ne peut pas calculer finement l'écoulement autour d'ouvrages avec cette modélisation de la turbulente.

**Modèle de Smagorinski[14]**

Le modèle de Smagorinski n'a de sens qu'en modélisation numérique et se fonde sur le modèle de longueur de mélange .Il fait partie de la catégorie des modèles de sous-maille.

Le principe est le suivant : la turbulence est solution des équations de Navier-Stokes et elle apparaîtrait naturellement dans les solutions numériques si la taille de maillage permettait d'en reproduire tous les mécanismes jusqu'à la dissipation visqueuse de très petit tourbillons. La seule partie des phénomènes turbulents à modéliser dans une simulation numérique est celle qui est inhibée par la taille trop grande des mailles, c'est-à-dire la formation de tourbillons de taille plus petite. L'idée de Smagorinski est d'ajouter à la viscosité moléculaire une viscosité turbulente déduite d'un modèle de longueur de mélange, cette longueur de mélange correspondante à la taille des tourbillons de taille inférieure à celle de la maille.

On arrive donc simplement à la formulation suivante :

$$v_t = c_s^2 \Delta^2 \sqrt{2D_{ij}D_{ij}} \quad (\text{II-58})$$

Où :  $C_s$  est un coefficient adimensionnel à régler et  $\Delta$  la taille des mailles qui peut être détruite en dimension 2 ou 3 de la surface ou du volume des éléments.

Les valeurs de  $C_s$  vont de 0,1 (écoulement en canal) à 0,2 (turbulence isotrope). Ce modèle ne trouve tout son sens qu'en dimension 3. En effet en dimension 2, il ne prend pas en compte la dispersion.

### II.5.2 Modèles à viscosité turbulente

On peut aussi distinguer deux grandes catégories de modélisation :

#### a- (modèle du 1<sup>er</sup> ordre)

Basé sur l'hypothèse de Boussinesq [2] qui consiste à modéliser directement les tensions de Reynolds à l'aide de la viscosité turbulente  $\mu_t$  relativement facile à utiliser mais la qualité de modélisation de  $\mu_t$  influe directement sur la qualité de l'écoulement moyen.

#### b- Modèle du 2<sup>nd</sup> ordre

Les tensions de Reynolds sont calculées directement, la modélisation se porte alors sur des moments d'ordre supérieur. La mise en œuvre est plus délicate mais les résultats sont de meilleures qualités.

On pratique également une distinction selon le nombre d'équation d'évolution supplémentaire du modèle (n'introduisant pas de nouvelles inconnues).

Les principaux types de modèles utilisés dans la pratique sont décrits ci-après :

- a. 0 Equation (longueur de mélange)
- b. Modèle de viscosité de la turbulence
- c. Modèle à une équation de transport :

Ce groupe de modèles tient compte d'une certaine manière d'un effet de mémoire mais ne s'adapte pas aisément à des géométries complexes du fait de la difficulté à choisir correctement  $L$ . De ce fait ils n'atteignent pas un degré d'universalité bien supérieur.

d. Modèle à deux ou à trois équations de transport :

$L$  Étant déterminé par une équation de transport, ces modèles permettent une plus grande généralité et universalité. Ces modèles ont été assez largement utilisés (le modèle  $K - \varepsilon$  est le plus utilisé) dans des configurations variées et offrent un compromis intéressant entre universalité et précision pour une prédétermination globale des écoulements.

e. Modèles de transport des tensions de Reynolds :

Ces modèles permettent de traiter de façon plus exacte l'anisotropie du tenseur de Reynolds. Ils sont potentiellement plus généraux que les précédents mais plus difficiles à mettre au point car plus nombreuses sont les hypothèses de fermeture et les constantes empiriques à déterminer.

f. Modèles algébriques des tensions de Reynolds :

Ils constituent une expression simplifiée des modèles précédents pour le transport des tensions de Reynolds, plus facile à résoudre numériquement, ils sont constitués par un système d'équations algébriques pour les composantes individuelles du tenseur de Reynolds couplé à un modèle à deux équations de transport pour  $K$  et  $\varepsilon$  par exemple.

g. Modèles multi échelles :

Les modèles multi échelles permettent de s'affranchir de l'hypothèse d'équilibre spectral.

## II.6. Rôle et critères du choix des modèles de turbulence

Le but des modèles de turbulence en pratique c'est la prévision numérique des écoulements turbulents, il n'est pas facile d'expliquer la turbulence.

Les modèles de turbulence ne peuvent donner qu'une description approchée et ils ne sont applicables qu'à une certaine classe d'écoulements.

Les qualités que l'on pourra rechercher dans un modèle de turbulence pourront être :

- Le domaine d'application
- La précision des prévisions qu'il permet.
- La simplicité de mise en œuvre
- L'économie en temps de calcul.

Toutefois le modèle le plus universel n'est pas forcément le mieux adapté à un problème précis. Un choix doit être fait pour chaque problème traité en fonction des objectifs.

Le choix d'un modèle de turbulence parmi les nombreuses formulations disponibles dans la littérature scientifique est souvent un problème délicat pour l'utilisateur. Ce choix dépend essentiellement des réponses attendues, c'est à dire du type d'information que l'on désire obtenir et de la variété des écoulements considérés qui dictent ainsi le niveau de complexité de la modélisation et son degré d'universalité.

Donc, il peut être suffisant de connaître seulement le mouvement moyen. Il donne accès aux caractéristiques importantes des écoulements (pertes de charges, frottement, coefficient d'échange).

Les modèles à viscosité turbulente sont plus stables et couramment utilisés. Il est alors possible de définir les performances des prototypes, d'en déterminer les caractéristiques géométriques, les matériaux.

L'utilisation de 0, 1 ou 2 équations de transport dépend alors de la complexité du problème à traiter. Le recours à un empirisme élevé implique des connaissances préalables sur l'écoulement à calculer. Les modèles à 1 ou 2 équations de transport sont plus adaptés aux géométries complexes 3D est à des nombres de Reynolds plus élevés.

- L'introduction d'équation de transport permet de suivre l'évolution de certaines grandeurs caractéristiques de la turbulence (énergie cinétique  $k$ , dissipation  $\varepsilon$ ). Toutefois la connaissance du mouvement turbulent lui-même (champs fluctuants moyennés) peut s'avérer nécessaire dans ce cas l'utilisation de modèles du second ordre est obligatoire.

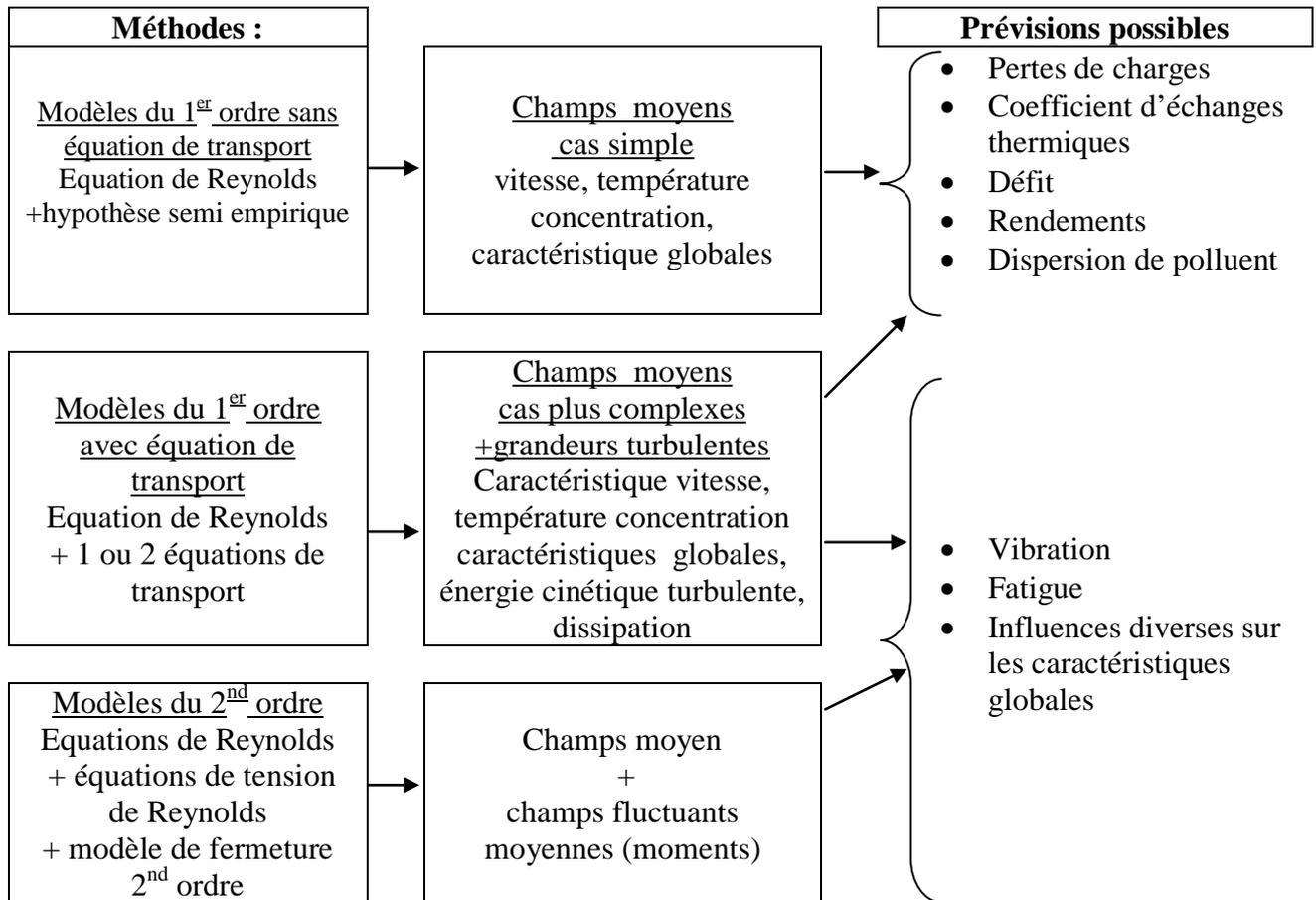


Figure. II. 3 : Critère de choix et classification des modèles

### Remarque sur les modèles 2<sup>nd</sup> ordre

L'hypothèse de Boussinesq[2] et les modèles de fermeture du 1<sup>er</sup> ordre introduisent pour certain écoulement une erreur trop importante. Le principale problème est la mauvaise modélisation des tensions normales  $\overline{u_i u_i}$  dans les zones de recirculation on distingue que  $\overline{u u} \neq \overline{v v}$  alors qu'avec l'hypothèse de Boussinesq on a plutôt  $\overline{u u} = \overline{v v}$

Pour s'affranchir de ces hypothèses, on va tenter de résoudre chacune des équations vérifiées par les 6 termes du tenseur de Reynolds .Il sera alors nécessaire de modéliser certains termes de ces équations (modélisation du second ordre). Cette modélisation est délicate, notamment en raison des termes de corrélation pression-vitesse qui jouent un rôle clé dans la répartition de l'énergie entre les composantes diagonales du tenseur de Reynolds.

## II.6.1. Modèles du 1<sup>er</sup> ordre hypothèses de fermeture semi-empirique

### II.6.1.a. Viscosité turbulente

Une caractéristique de la turbulence est d'augmenter le mélange qui se produit par échanges entre filets fluides, un peu comme le mouvement brownien, représenté par la viscosité dans la loi de comportement d'un fluide newtonien mais avec beaucoup plus d'intensité.

Boussinesq en 1877 [2] a proposé une idée qui consiste à réutiliser la même loi pour le tenseur des contraintes de Reynolds mais avec une viscosité notablement plus accrue,

$\mu_t$  : Appelée viscosité turbulente. Cette quantité scalaire ainsi défini qui dépend à priori de  $x$  et de  $t$  et pour  $\mu_t = \text{const}$  n'est pas en général correct ; les transferts turbulents se font sur de multiples échelles et ne sont pas locaux.

L'objet de cette modélisation est d'obtenir une relation entre  $\mu_t (\vec{x}, t)$  et les autres inconnues du problème afin de fermer le système d'équation à résoudre.

### II.6.1.b. remarques sur l'hypothèse de Boussinesq

La condition d'incompressibilité du champ moyen s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-34})$$

On a:

$$\begin{cases} R_{11} = -\rho \overline{\dot{u}\dot{u}} = 2\mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\ R_{22} = -\rho \overline{\dot{v}\dot{v}} = 2\mu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \\ R_{33} = -\rho \overline{\dot{w}\dot{w}} = 2\mu_t \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{II-59})$$

On a alors dans ce cas :

L'énergie cinétique turbulente serait nulle !

$$k = \frac{1}{2} (\overline{\dot{u}\dot{u}} + \overline{\dot{v}\dot{v}} + \overline{\dot{w}\dot{w}}) = 0 \quad (\text{II-60})$$

Pour éviter ce résultat on retranche couramment la trace du tenseur :

$$\overline{\dot{u}_i \dot{u}_j} = -2\mu_t S_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (\text{II-61})$$

Le dernier terme à droite est nécessaire pour la cohérence de l'équation.

$S_{ij}$ : Est le tenseur de déformation du mouvement moyen donc :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{II-62})$$

Le tenseur de vorticité :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{II-63})$$

On a donc :

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = S_{ij} + \Omega_{ij} \quad (\text{II-64})$$

Le terme de production de l'énergie turbulente  $K$  s'écrit :

$$P = -\overline{\dot{u}_i \dot{u}_j} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = \left( 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} (S_{ij} + \Omega_{ij}) \right) \quad (\text{II-65})$$

$S_{ij}$  et  $\Omega_{ij}$  étant à trace nulle, les produits contractés  $S_{ij} \delta_{ij}$  et  $\Omega_{ij} \delta_{ij}$  sont nuls. De plus comme  $S_{ij}$  est symétrique,  $\Omega_{ij}$  est antisymétrique.

Leur produit est nul. La production se réduit donc à :

$$P = 2 \mu_t S_{ij} S_{ij} \quad (\text{II-66})$$

Revenons maintenant au modèle proposé par l'équation (II-61). La viscosité turbulente  $\mu_t$  n'est pas une propriété du fluide mais une caractéristique de l'écoulement.

L'équation (II-61) ne constitue pas encore un modèle mais un cadre général puisque plusieurs choix sont possibles pour modéliser  $\mu_t$

## II.7. Récapitulatif et généralisation des modèles du 1<sup>er</sup> ordre

- 0 inconnu supplémentaire :

$$v_t = L_m^2 \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad \text{Avec} \quad L_m = f(u_i, x_i, \delta_i, \dots)$$

D'où  $L_m$  : longueur de mélange

- 1 inconnue supplémentaire :  $v_t = L_t k^{\frac{1}{2}}$  avec  $L_t = f(u_i, x_i, \delta_i, \dots)$

Il ya donc :

- Nécessité d'utiliser 1 équation supplémentaire vérifiée par  $K$
- Nécessité de modéliser certains termes dans l'équation de  $K$
- 2 inconnues supplémentaires :  $v = c \frac{k^2}{\varepsilon}$  avec  $c = cte$ 
  - Nécessité d'utiliser 2 équations supplémentaire vérifiées par  $k$  et  $\varepsilon$
  - Nécessité de modéliser certains termes dans l'équation de  $k$  et  $\varepsilon$ .

Le problème se résume maintenant à la détermination de la viscosité turbulente. C'est le choix de la forme de la viscosité turbulente qui différencie les modèles qui utilisent ce concept. En fait, ces modèles sont souvent classés selon le nombre d'équations de transport écrites pour les grandeurs turbulentes afin de déterminer la distribution de la viscosité turbulente. Nous avons choisi de décrire les deux plus connus : le modèle de la longueur de mélange et le modèle  $k - \varepsilon$ .

### **II.7.a. Longueur de mélange**

Avant l'arrivée des ordinateurs permettant de résoudre des équations telles que celle de l'évolution de  $k$ , la grandeur la plus accessible à l'intuition du modélisateur était certainement la longueur caractéristique des grands tourbillons  $L_t$ .

La relation la plus intuitive est :

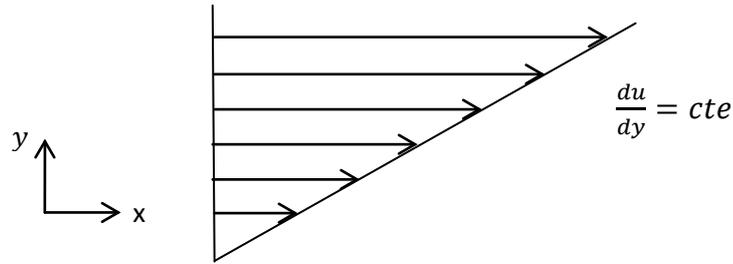
$$v_t = \sqrt{k} L_t \tag{II-67}$$

Dans ce qui suit, on va proposer un modèle pour l'échelle intégrale  $L_t$  telle qu'elle apparaît dans (II-67)

Il s'agit d'une approximation de  $L_t$ . nous l'appellerons longueur de mélange donc

$$L_m = L_t$$

En effet plus que de décrire précisément la taille des tourbillons, il s'agit de trouver la bonne échelle de longueurs à introduire dans (II-67) pour que  $v_t$  représente bien les effets de mélange. Dans ce modèle on suppose que  $P \neq 0$  comme on peut supposer dans le cadre idéal d'une turbulence homogène en présence d'un cisaillement constant.



Pour laquelle l'équation de l'énergie cinétique turbulente :

$$\frac{dk}{dt} \simeq p - \varepsilon \quad (\text{II-68})$$

Pour un écoulement statistique stationnaire on obtient la production  $P \simeq \varepsilon$

Si donc on renonce à résoudre l'équation de l'énergie cinétique turbulente il faut essayer de définir la viscosité turbulente sans faire intervenir  $k$  ni  $\varepsilon$ . En introduisant la relation :

$$P = 2 v_t S_{ij} S_{ij} \quad \text{Puis } P \simeq \varepsilon \quad \text{dans } v_t = \frac{K^2}{\varepsilon}$$

On trouve simplement :

$$v_t = \frac{k}{\sqrt{2S_{ij}S_{ij}}} \quad (\text{II-69})$$

Comparant cette relation

$$v_t \simeq \sqrt{k} L_t$$

Et éliminant  $k \Rightarrow$

$$v_t \simeq L_t^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$$

D'où le modèle

$$v_t = L_m^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (\text{II-70})$$

Pour les écoulements cisailés les plus simples.

La vitesse ne varie que dans une direction perpendiculaire aux lignes de courant.

La formule précédente se simplifie :

On a :  $[ S_{ij} \simeq 0 \text{ Sauf } s_{12} = s_{21} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} ]$

Donc

$$v_t = L_m^2 \left[ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right] \quad (\text{II-71})$$

C'est sous cette forme que Prandtl (1925) [27] à proposer le modèle connu sous le nom de modèle de longueur de mélange.

Ce modèle très simple a rendu de grands services essentiellement pour des calculs des couches limites. Jusqu'au développement des simulations numériques pour un écoulement dans un canal ou une conduite il est naturel que la taille des tourbillons soit limitée précisément par la distance à la paroi de la conduite notée  $y$ .

On ne peut plus supposer que la longueur de mélange est constante, et Prandtl propose alors la relation linéaire :

$$L_m = k y \quad (\text{II-72})$$

D'où :  $k = 0,41$  Est la constante de Von Karman déterminée expérimentalement.

L'expérience montre que la taille des tourbillons cesse d'être limitée par la paroi à partir d'une distance  $y_1 = 0,2d$  où  $d$  : est la largeur de la conduite.

On retrouve le même ordre de grandeur que pour les écoulements libres puisque :

$$L_m = 0,2 k d = 0,08 d \quad (\text{II-73})$$

### II.7.a.1. Profil des vitesses sur l'ensemble du canal

- vitesse débitante et vitesse de frottement [24] :

À partir des lois linéaires (II-74) et logarithmiques (II-75) qui coïncident à  $y^+ = 11$ .

On remarque que le profil des vitesses peut être donné par la loi composite approchée (qui n'est pas très précise dans la zone  $8 < y^+ < 30$ ) :

- la loi linéaire : du profil des vitesses :

$$u^+ = y^+ \quad \text{Où encore} \quad \bar{u} = \frac{y u^*}{\nu} \quad (\text{II-74})$$

- La loi logarithmique du profil des vitesses :

$$u^* = \frac{1}{k} \ln y^+ + c \quad \text{Où} \quad \frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y u^*}{\nu} + c$$

- Pour  $0 < y^+ < 11$   $u^+ = y^+$

$$\text{Soit } \frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{yu^*}{v} \quad (\text{II-75})$$

- Pour  $11 < y^+ < 0,2 e \frac{u^*}{v}$   $u^+ = \frac{1}{0,41} \ln y^+ + 5,2$

$$\text{Soit } \frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{1}{0,41} \ln \frac{yu^*}{v} + 5,2 \quad (\text{II-76})$$

- Pour  $0,2 < \frac{y}{e} < 1$   $\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{\bar{u}_{max}}{u^*} - 8,13 \left(1 - \frac{y}{e}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$\text{Avec } \frac{\bar{u}_{max}}{u^*} = 11,0 + \frac{1}{0,41} \ln \frac{0,2eu^*}{v} \quad (\text{II-77})$$

Enfin en intégrant cette loi composite sur toute la largeur, on trouve la vitesse débitante définie comme le débit divisé par la section  $u = Q / A$  :

$$\frac{u}{u^*} = -\frac{32}{eu^*} + \frac{1}{0,41} \ln \left(\frac{eu^*}{v}\right) + 3,38 \quad (\text{II-78})$$

Cette équation est utile pour déterminer  $u^*$  sachant qu'au départ c'est essentiellement la vitesse débitante qui est connue. En introduisant un nombre de Reynolds bâti sur la vitesse moyenne et sur la demi-distance :  $R_m = \frac{ue}{v}$  et l'inconnu  $\frac{u^*}{u}$  dans la relation (II-78), celle-ci s'écrit en notant que le premier terme à droite de (II-78) est négligeable puisque  $R_m$  est grand :

$$\frac{1}{u^*/u} \cong \frac{1}{0,41} \ln \left[ R_m (u^*/u) \right] + 3,38 \quad (\text{II-79})$$

### II.7.a.2. Modèle $k - \varepsilon$ modèle à deux équations

Le modèle de longueur de mélange suppose que la turbulence est en équilibre, c'est-à-dire :

$$P = \varepsilon$$

Dans le cas d'un écoulement plus complexe, on aura besoin de prendre en compte des déséquilibres ( $P \neq \varepsilon$ ) et le transport par le mouvement moyen ou par la turbulence elle-même, des zones où elle est produite vers les autres zones.

De plus dans les écoulements compliqués, on ne saurait prévoir a priori la forme de la longueur de mélange.

Depuis le milieu des années 70 ; on s'ait résoudre par ordinateur les équations de Navier-Stokes discrétisées sur maillage, en même temps que des équations de transport-diffusion pour une température ou une concentration. Il est donc naturel de décrire la turbulence en chaque point de l'écoulement en transportant des grandeurs physiques qui la caractérisent.

Une de ces grandeurs est la longueur de mélange qu'on ne dispose pas directement de son équation d'évolution.

Au contraire l'équation de l'énergie turbulente  $k$  peut s'établir exactement.

• **L'équation pour  $k$**

Rappelons cette équation déjà présenté en début de ce chapitre :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = - \underbrace{\overline{\dot{u}_m \dot{u}_n} \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_n}}_{(p)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{2} \overline{\dot{u}_i \dot{u}_i \dot{u}_j} + \frac{1}{\rho} \overline{\dot{u}_j \dot{p}} \right]}_{(diff_t)} - \underbrace{\nu \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k} \right)}_{\varepsilon} + \nu \Delta k \quad (\text{II-80})$$

- La modélisation de ces termes est nécessaire pour fermer les équations.
- L'équation (II-80) comporte des termes sources qu'il faudra modéliser .La difficulté principale réside dans le terme de dissipation  $\varepsilon$  qui à l'opposé des autres termes de (II-80) correspond à de très petites échelles.

Le modèle  $k-\varepsilon$  élaboré par Jones et Launder en 1974 [18] est aujourd'hui encore de loin le plus répandu dans les applications pratiques pour l'industrie ou l'environnement.

On va rester dans le cadre des modèles qui utilisent le concept de la viscosité turbulente avec :

$$v_t = c_u \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{II-81})$$

$C_u$  : est une constante. Les deux grandeurs  $k$  et  $\varepsilon$  seront déterminées en chaque point par des équations de transport locales.

Rappelons la signification des divers termes de l'équation (II-80)

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = P + \text{diff}_t + \nu \Delta k - \varepsilon \quad (\text{II-82})$$

- Le premier terme, la production par les gradients de vitesse moyenne peut être calculé directement, puisque la tension de Reynolds est donnée par

$$\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} = -2 \nu_t S_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (\text{II-83})$$

- Le 2<sup>ème</sup> terme peut être écrit comme la divergence d'un vecteur qui caractérise le transport de la turbulence par elle-même.

Les tourbillons transportent la turbulence d'une région où elle est forte vers une région où elle est plus faible.

On modélise ce terme de façon approchée par :

$$\text{Diff}_t = \text{div.} (v_t \text{grad } k) \quad (\text{II-84})$$

- Le troisième terme, la diffusion moléculaire  $\nu \Delta k \simeq 0$  devant le précédent en dehors du voisinage immédiat d'une paroi ( $y^+ > 30$ )
- Le quatrième terme représente la dissipation qui est l'inconnue du modèle

L'équation simplifiée proposée pour  $\varepsilon$  est calquée sur celle de  $k$  avec les mêmes types de mécanismes de production diffusion et destruction.

Le système  $k - \varepsilon$  s'écrit donc :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U} \cdot \text{grad } k = P + \text{div.} (v_t \text{grad } k) - \varepsilon \quad (\text{II-85})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{U} \cdot \text{grad } \varepsilon = \text{div.} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \text{grad } \varepsilon \right) + \frac{\varepsilon}{k} (\varepsilon_{\varepsilon_1} P - c_{\varepsilon_2} \varepsilon) \quad (\text{II-86})$$

Avec 
$$v_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad P = 2\nu_t S_{ij} S_{ij} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{II-87})$$

- Les constantes ( $c_\mu, \sigma_\varepsilon, c_{\varepsilon_1}, \varepsilon_{\varepsilon_2}, \sigma_k$ ) qui apparaissent dans ce modèle sont déterminées en se référant à des données expérimentales pour les écoulements simples (turbulence en décroissance libre, écoulement en canal,...) ces valeurs sont obtenues soit de façon directe, soit par une procédure d'optimisation basée sur des comparaisons des calculs issus du modèle -----> expériences.

- Les valeurs les plus courantes recommandées par Launder et Spalding (1974) [17] :

$$[c_u = 0,09 \quad , \quad \sigma_\varepsilon = 1,3 \quad , \quad c_{\varepsilon_1} = 1,44 \quad , \quad c_{\varepsilon_2} = 1,92 \quad , \quad \sigma_k = 1]$$

Domaine de validité et pertinence du model  $k - \varepsilon$  :

Ce modèle n'est applicable que dans le cas d'une turbulence pleinement développée homogène et isotrope (ce qui est notre cas). Il s'applique loin des parois pour des effets négligeables de la viscosité moléculaires.

Selon les valeurs des constantes empiriques qui sont utilisées dans le modèle  $k - \varepsilon$  on trouve, des résultats de calcul peuvent différer, ce qui constitue la faiblesse de ce modèle.

### **II.7.a.3. Lien avec le modèle de longueur de mélange**

En établissant le modèle de la longueur de mélange  $v_t = L_m^2 \sqrt{2s_{ij}s_{ij}}$  on a vu que l'on fait l'hypothèse de viscosité turbulente, la production s'exprime comme dans (II-87).

$$P = 2v_t s_{ij} s_{ij}$$

Ce qui reste vrai avec le modèle  $k - \varepsilon$  . Eliminant la vitesse de déformation entre ces deux équations.

- La viscosité turbulente du modèle longueur de mélange s'écrit :  $v_t = L_m^3 P^{\frac{1}{2}}$
- La longueur de mélange prédite par le modèle  $k - \varepsilon$  s'obtient en remarquant que les deux modèles donnent la même viscosité turbulente.

Soit :

$$\begin{aligned} v_t &= L_m^3 P^{\frac{1}{2}} \\ &= c_u \frac{k^2}{\varepsilon} \end{aligned}$$

D'où

$$L_m = c_u^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{p} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{II-88}$$

Pour une situation d'équilibre locale ( $P \simeq \varepsilon$ ) On a :

$$L_m = c_u^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \quad (\text{II-89})$$

Cette dernière formule est la base d'une famille de modèles dits « à une équation » où on ne résout que l'équation en  $k$  en utilisant le mode modèle de  $L_m$ . On inverse alors (II-89) pour déterminer la dissipation à introduire dans l'équation de  $k$  soit :

$$\varepsilon = c_u^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L_m} \quad (\text{II-90})$$

Ces modèles donnent de bons résultats dans les cas où l'on sait prescrire la longueur de mélange comme le long d'une paroi (Wolf Stein – Patel) ou encore en simulation des grandes échelles.

La formule (II-90) sert par ailleurs de condition d'entrée des calculs.

#### **II.7.a.4 Modélisation des parois dans le cadre du modèle $k - \varepsilon$**

On a vu qu'il se produit très près de la paroi une transition d'un écoulement turbulent vers un état laminaire limité à une très fine couche qui est la couche visqueuse .Ce phénomène n'a pas été pris en compte dans la détermination des constantes présentée plus haut.

Donc pour modéliser on a deux voies :

##### **a- Variantes du modèle $k - \varepsilon$ adaptées à la sous couche visqueuse (modèles « basse Re »)**

Lorsque les effets de la viscosité moléculaire se font ressentir ailleurs que dans  $\varepsilon$ , on aura recours à une version dite « à bas nombre de Reynolds du model  $k - \varepsilon$  dans laquelle  $c_u$ ,  $c_{\varepsilon_1}$  et  $c_{\varepsilon_2}$  sont des fonctions algébriques du nombre de Reynolds turbulent  $Re_t$  ou de la proximité de la paroi.

**b- Condition aux limites sur les parois pour les grands nombres de Reynolds  
loi de paroi**

La description du domaine fluide demande un grand nombre de points et l'on ne peut pas permettre de raffiner le maillage à proximité des parois (la taille des mailles dans la sous couche visqueuse devrait être de l'ordre de  $\nu/u^*$ ). On utilise alors la technique des lois de parois, c'est-à-dire que le maillage du domaine fluide ne touche pas exactement la paroi solide, le premier point de calcul est situé dans la zone logarithmique du profil des vitesses c'est-à-dire à  $y = 30 (\nu/u^*)$ , ou plus on utilise alors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} v_t &= c_u \frac{k^2}{\varepsilon} \\ &= L_m^2 \frac{du}{dy} \\ &= k y u^* \end{aligned} \tag{II-91}$$

$$k = \frac{u^{*2}}{\sqrt{c_u}} \tag{II-92}$$

Comme condition aux limites des équations de transport  $k$  et de  $\varepsilon$

$u^*$ : La vitesse de frottement est calculée à partir de la vitesse à une certaine distance de la paroi  $\bar{u}(y_1)$  en utilisant le profil de vitesse logarithmique.

$$U^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + c \quad \text{Ou} \quad \frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y u^*}{\nu} + c \tag{II-93}$$

## II.8. Equations pour un écoulement turbulent homogène et isotrope à surface libre

Equation de Reynolds ( $\overline{NVS}$ ) sur les trois axes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho \bar{u}^2 + \frac{\partial}{\partial y} \rho \bar{u} \bar{v} + \frac{\partial}{\partial z} \rho \bar{u} \bar{w} \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \frac{\partial}{\partial x} \rho \overline{\tilde{u}\tilde{u}} - \frac{\partial}{\partial y} \rho \overline{\tilde{u}\tilde{v}} - \frac{\partial}{\partial z} \rho \overline{\tilde{u}\tilde{w}} + \rho g_x \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho \bar{u} \bar{v} + \frac{\partial}{\partial y} \rho \bar{v}^2 + \frac{\partial}{\partial z} \rho \bar{v} \bar{w} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} - \frac{\partial}{\partial x} \rho \overline{\tilde{u}\tilde{v}} - \frac{\partial}{\partial y} \rho \overline{\tilde{v}\tilde{v}} - \frac{\partial}{\partial z} \rho \overline{\tilde{v}\tilde{w}} + \rho g_y$$

$$\frac{\partial \rho \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho \bar{u} \bar{w} + \frac{\partial}{\partial y} \rho \bar{v} \bar{w} + \frac{\partial}{\partial z} \rho \bar{w}^2 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{w} - \frac{\partial}{\partial x} \rho \overline{\tilde{u}\tilde{w}} - \frac{\partial}{\partial y} \rho \overline{\tilde{v}\tilde{w}} - \frac{\partial}{\partial z} \rho \overline{\tilde{w}\tilde{w}} + \rho g_z$$

Ces équations sont couplées avec celle de la conservation de la masse

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

Equations du model  $k - \varepsilon$  :

$$\mu_t = c_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}_i \cdot \text{grad } k = \text{div.}(\text{grad } k) + P - \varepsilon$$

$$\text{D'où } p = \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

$$= 2 v_t s_{ij} s_{ij}$$

$$\text{D'où } s_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \bar{v}_i \cdot \text{grad } \varepsilon = \text{div} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \text{grad } \varepsilon \right) + \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon_1} p - c_{\varepsilon_2} p)$$

$$c_u = 0,09, \quad c_{\varepsilon_1} = 1,44, \quad c_{\varepsilon_2} = 1,92, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1,3$$

Toutes les équations peuvent être mises sous la forme d'une équation générale de convection-diffusion pour la variable  $\phi$  :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\phi u_j)}_1 = \underbrace{\partial(\tau_\phi \frac{\partial\phi}{\partial x_j})}_2 + \underbrace{S_\phi}_3$$

- 1- Termes de convection
- 2- Termes de diffusion
- 3- Terme source

Elles seront résolues grâce à des conditions initiales et aux limites par la méthode des volumes finis utilisée par un programme en fortran qui nous avons sciemment élaboré afin de résoudre les équations (en 2 D) gouvernant le problème.

## II.9. Conclusion

Après déduction des équations de Navier Stokes à partir de l'équation de continuité et de la quantité de mouvement on a transformé ces équations compte tenu du phénomène de la turbulence instationnaire homogène et isotrope pour obtenir les équations de Reynolds. Celles-ci comportent un nouveau terme: le tenseur de Reynolds mais sont insuffisantes pour déterminer toutes les inconnues. Il est donc nécessaire de modéliser ce tenseur en choisissant un modèle de turbulence approprié, cela permettra « la fermeture » du système d'équations.

## Troisième Chapitre

# Approximation par la méthode des volumes finis

### III.1. Introduction

La simulation numérique est considérée comme un moyen efficace et rapide d'étudier différentes configurations d'écoulement. Cette approche présente en effet de nombreux avantages par rapport aux études expérimentales tels l'accès à toutes les grandeurs locales de l'écoulement où la possibilité d'évaluer de nombreuses configurations et géométries sans se préoccuper des aspects de conception mécanique.

Une fois le modèle établi, on fait appel aux méthodes de calcul numérique pour le mettre en pratique. Il y a une interaction entre modèle et implémentation numérique de ce dernier.

Un code permet de mener les calculs induit par le modèle, calculs qui sont le but de la modélisation.

A l'inverse le calcul numérique permet de tester le modèle, de mesurer la sensibilité de ce dernier aux différents paramètres (conditions aux limites, dissipation turbulente), de juger de la pertinence des hypothèses émises.

Dans ce mémoire l'étape la plus importante a été celle de l'écriture de notre propre programme, cette étape a posé beaucoup de difficultés qui ont fait qu'à l'issue de ce mémoire, elle reste partiellement non résolue.

### III.2. Méthode de résolution et convergence

#### III.2.1. Modélisation de la surface libre

Deux effets principaux de la surface libre sur la turbulence :

- La réduction de l'échelle de longueur des tourbillons porteurs d'énergie.
- La redistribution de l'énergie cinétique turbulente sur les composantes sphériques du tenseur de Reynolds (pour le cas 1).

Deux cas ont été traités:

### Cas 1

L'effet de la surface libre est similaire à celui d'une paroi solide[15] dans ce cas il s'avère que la surface libre amortit le mouvement fluctuant en amplifiant les contraintes turbulentes longitudinales et transversales au profit de la contrainte verticale on prend :

- 1- Une dérivée normale de la vitesse tangentielle nulle, absence de contrainte de cisaillement.
- 2- Le champ de vitesse n'est pas nul.

### Cas 2

La surface libre est l'interface de deux volume (volume d'eau et volume d'air) c'est-à-dire le système n'est plus un ensemble de « particule » d'eau mais un volume d'eau et un volume d'air superposés que l'on soumet à la pression atmosphérique. Il est calculé à chaque itération la fraction volumique respective d'air et d'eau, le principe de cette méthode est de définir une fonction caractéristique  $C(x, y, t)$  convectée par l'écoulement.

$$C(x, y, t) = 0 \quad \text{Si la cellule est remplie d'air}$$

$$C(x, y, t) = 1 \quad \text{Si la cellule est remplie d'eau}$$

$$\rho = c(x, y, t)\rho_{eau} + (1 - c(x, y, t))\rho_{air} \quad \text{(III-1)}$$

On résout le système d'équation :

$$\overline{NVS} + k + \varepsilon \quad \text{(III-2)}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{u}\nabla c = 0 \quad \text{(III-3)}$$

### III.2.2 Le modèle en diphasique (cas 2)

Dans ce cas, le régime d'écoulement est également turbulent. Il convient donc de réécrire les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement en tenant compte de la turbulence. Nous pouvons simplement signaler que l'approche utilisée est la même que celle développée en milieu monophasique (1<sup>er</sup> cas, chapitre 2).

On peut dire qu'on a deux phases dont l'une qui est l'eau est continue. La fraction volumique de l'air dépasse rarement en moyenne la valeur de 1%.

Nous avons donc opté pour ce modèle qui ne calcule la turbulence que pour la phase continue et par voie de conséquence on économise deux équations supplémentaires (équation de transport  $K$  et  $\varepsilon$  pour l'air).

Le schéma itératif suivi est le même qu'en monophasique.

### **III.3. Le calcul numérique (modélisation et simulation)**

Le modèle mathématique constitué par une équation différentielle aux dérivées partielles (EDP) ou par un système d'EDP est transformé à l'aide d'une méthode de discrétisation dans un système d'équations algébriques.

#### **III.3.1. Principe**

Le principe de calcul numérique est illustré à la figure (III-1)

Les méthodes de discrétisation les plus connues sont :

- Méthodes des différences finies (MDF)
- Méthodes des éléments finies (MEF)
- Méthodes spectrales (MS)
- Méthodes des volumes finis (MVF)

L'algorithme de résolution numérique implique la méthode d'intégration temporelle et de découplage, comme par exemple : les algorithmes SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC et PISQ,

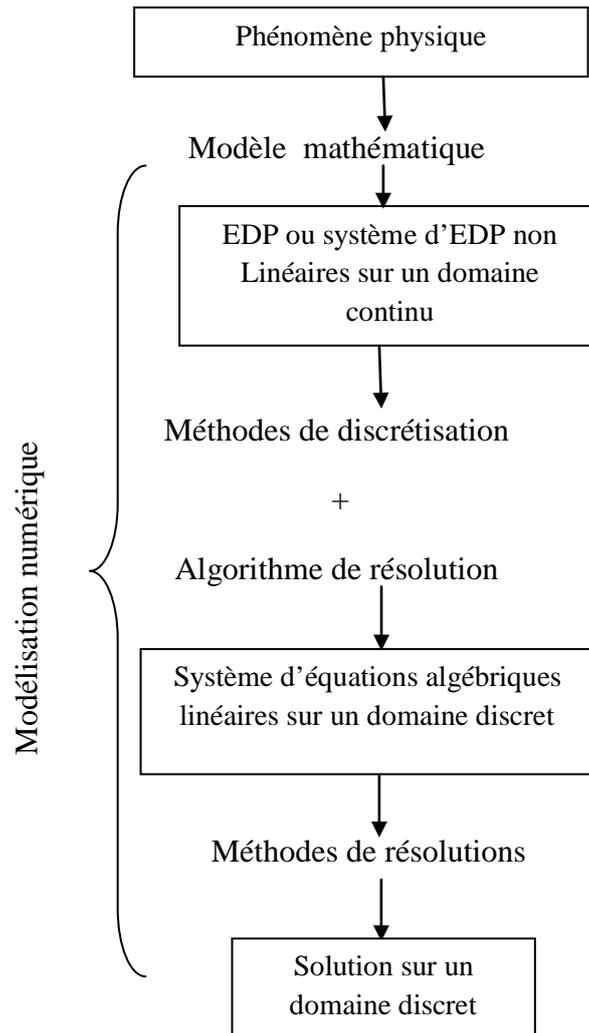


Figure. III .1 : le principe du calcul numérique

### III.3.2. Avantages

Le calcul numérique :

- Permet le calcul d'une solution numérique pour presque tous les problèmes pratiques ayant un modèle mathématique.
- Un coût très faible ayant une tendance à la baisse.
- Présente de la rapidité d'exécution.
- à la possibilité de simuler des conditions réelles exceptionnelles.
- A la possibilité de simuler des conditions idéales.

### III.3.3. Inconvénients

- Tout dépend du modèle mathématique initial.
- Difficulté pour sélectionner la « bonne » solution en cas de solutions multiples au problème mathématique.
- Parfois plus coûteux que l'expérience.

### III.4. Modélisation avec la méthode des volumes finis

#### III.4.1. Présentation

Notre programme de calcul vise à calculer le champ des vitesses dans un canal rectangulaire en écoulement instationnaire à surface libre avec une stratégie de résolution basée sur la méthode des volumes finis.

Voici la trame de ce qui suit, tout d'abord il faut réécrire les équations selon la méthode des volumes finis. On choisira ensuite le schéma temporel qui est ADI. Nous présenterons la méthode de Jacobi pour la résolution des systèmes d'équations.

Tous au long de la programmation de ces méthodes nous aurons besoin d'optimiser notre programme limitant au maximum le nombre de calculs faits à chaque itération.

#### III.4.2. La méthode de calcul

##### Les volumes finis

La méthode a été décrite pour la 1<sup>ère</sup> fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar (Numérical Heat Transfer and fluid flow).

##### Principe

La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle.

La formulation différences finies adoptées ici, consiste en une approche du type volume de contrôle. Son principe est basé sur le fait de proposer un champ de pression qui permet d'obtenir une première approximation du champ de vitesse de l'écoulement. Puis on applique des corrections du champ de pression dans le but de rendre le champ de vitesse résultant conforme avec l'équation de continuité. Cette procédure a été réexaminée par la suite et adaptée à des multiples problèmes de transport-diffusion comme le notre.

Les équations peuvent s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \text{div}(\rho \phi u_j) = \text{div}(\Gamma \cdot \text{grad}(\phi)) + S_\phi \quad (\text{III-4})$$

C a d:

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\phi u_j)}_1 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x_j})}_2 + \underbrace{S_\phi}_3 \quad (\text{III-5})$$

Convection = diffusion + source

### III.4.3. Application à l'intégration d'une équation de transport-diffusion

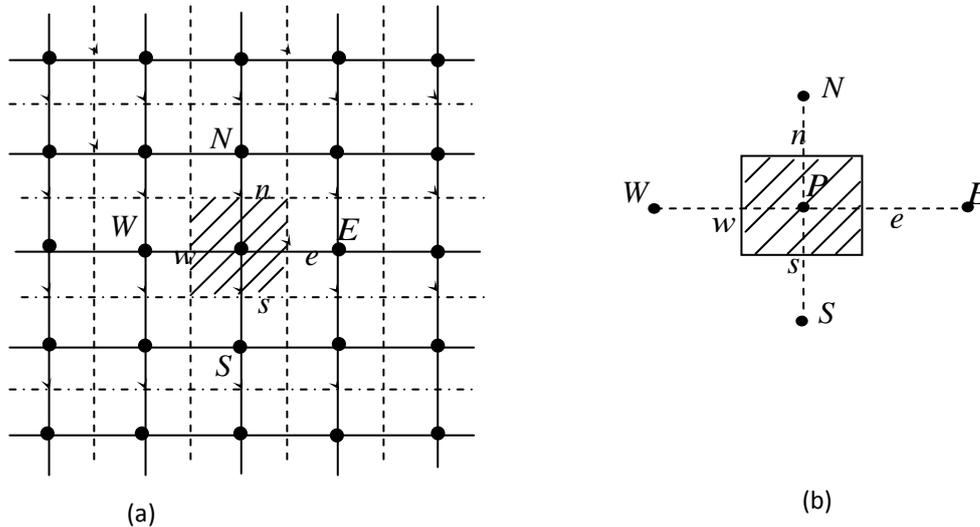
L'évaluation des différentes intégrales de l'équation de transport-diffusion ci-dessous demande que l'on fasse un certain nombre d'approximations de façon à former un système d'équations linéaires liant entre elles les valeurs de la fonction  $\phi$  aux points du maillage  $P_{ij}$ .

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_c} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \phi)}{\partial y} d\Omega dt \\ &= \int_{\Omega_c} \int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y}) + S_\phi \right] d\Omega dt \end{aligned} \quad (\text{III-6})$$

Avec :  $d\Omega = dx dy . 1$

Pour aborder l'intégration de l'équation de transport, nous commençons par définir à l'intérieur du domaine de calcul un maillage constitué d'un réseau de points  $P_{ij}$  Dans un repère cartésien.

L'approche du type volume de contrôle exige que l'on définisse autour du point  $P_{ij}$  un volume élémentaire sur lequel on va intégrer l'équation à la dérivée partielle. Pour deux points voisins les volumes de contrôle respectifs doivent posséder un coté commun. Il s'en suit que la réunion de tous les volumes de contrôle couvre l'ensemble du domaine de calcul.



**Figure. III.2 :** (a) : domaine de calcul  
(b) : volume de contrôle

Cette propriété fondamentale va nous permettre de mettre en évidence des propriétés de conservation des flux locaux et globaux, propriétés d'un grand intérêt en ce qui concerne la résolution numérique des équations.

### III.4.4. Discrétisation des différents termes de l'équation transport-diffusion

- Termes de stockages

$$\int_{\Omega_c} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dt d\Omega = (\rho\phi)|_t^{t+\Delta t} \cdot \Delta x \Delta y$$

$$= ((\rho\phi_p)^{t+\Delta t} - (\rho\phi_p)^t) \Delta x \Delta y \quad \text{(III-7)}$$

• Terme convectif longitudinal

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega_c} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) d\Omega dt &= (\rho u \phi)|_w^e \cdot \Delta y \Delta t \\
 &= ((\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w) \Delta y \Delta t \\
 &= (F_e \phi_e - F_w \phi_w) \Delta t \quad (\text{III-8})
 \end{aligned}$$

Avec :

$$F_e = \rho u_e \Delta y \quad F_w = \rho u_w \Delta y \quad (\text{III-9})$$

• Terme convectif vertical

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega_c} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \phi) \right] d\Omega dt &= (\rho v \phi)|_s^n \Delta x \Delta t \\
 &= [(\rho v \phi)_n - (\rho v \phi)_s] \Delta x \Delta t \\
 &= (F_n \phi_n - F_s \phi_s) \cdot \Delta t \quad (\text{III-10})
 \end{aligned}$$

Avec :

$$F_n = \rho v_n \Delta x \quad , \quad F_s = \rho v_s \Delta x \quad (\text{III-11})$$

• Terme diffusif suivant x

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega_c} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] dx dy dt &= \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) |_w^e \cdot \Delta y \Delta t \\
 &= \left[ \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} |_e - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} |_w \right] \Delta y \Delta t \\
 &= \left( \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) \Delta y \Delta t \\
 &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{\Delta x_{PE}} (\phi_E - \phi_P) - \frac{\Gamma_w \Delta y}{\Delta x_{WP}} (\phi_P - \phi_W) \Delta t \\
 &= (D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)) \cdot \Delta t \quad (\text{III-12})
 \end{aligned}$$

Avec :

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{\Delta x_{PE}} \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{\Delta x_{WP}} \quad (\text{III-13})$$

• Terme diffusif suivant y

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega_c} \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy dt &= \left( \Gamma \frac{\partial}{\partial y} (\phi) \right) \Big|_s^n \cdot \Delta x \Delta t \\
 &= \left[ \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s \right] \Delta x \Delta t \\
 &= \left( \Gamma_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y_{PN}} - \Gamma_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y_{SP}} \right) \Delta x \Delta t \\
 &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{\Delta y_{PN}} (\phi_N - \phi_P) - \frac{\Gamma_s \Delta x}{\Delta y_{SP}} (\phi_P - \phi_S) \Delta t \\
 &= (D_n (\phi_N - \phi_P) - D_s (\phi_P - \phi_S)) \cdot \Delta t \tag{III-14}
 \end{aligned}$$

Avec :

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{\Delta y_{NP}} \quad , \quad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{\Delta y_{SP}} \tag{III-15}$$

• Terme source

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega_c} (S_\phi) d\Omega dt &= S_\phi \Delta x \Delta y \Delta t \\
 &= (S_p \phi_p + S_u) \Delta x \Delta y \Delta t \tag{III-16}
 \end{aligned}$$

(On considère que le terme source  $S_\phi$  est linéaire par rapport à la grandeur  $\phi$ )

Après une substitution dans l'équation transport-diffusion et en appliquant un schéma implicite pour le temps on obtient la forme discrétisée suivante :

$$\begin{aligned}
 a_p^0 (\phi_p^{t+\Delta t} - \phi_p^t) &+ (F_e \phi_e^{t+\Delta t} - F_w \phi_w^{t+\Delta t}) + (F_n \phi_n^{t+\Delta t} - F_s \phi_s^{t+\Delta t}) \\
 &= \left( D_e (\phi_E^{t+\Delta t} - \phi_P^{t+\Delta t}) \right) + \left( D_w (\phi_P^{t+\Delta t} - \phi_W^{t+\Delta t}) \right) + \left( D_n (\phi_N^{t+\Delta t} - \phi_P^{t+\Delta t}) \right) - \\
 &\left( D_s (\phi_P^{t+\Delta t} - \phi_S^{t+\Delta t}) \right) + \left( s_p \phi_p^{t+\Delta t} + s_u \right) \Delta x \Delta y \tag{III-17}
 \end{aligned}$$

Avec :

$$a_p^0 = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \tag{III-18}$$

Pour arriver à une forme finale on doit choisir un schéma de discrétisation des termes convectifs.

Le schéma employé pour la discrétisation est le schéma hybride. Ce schéma dont la précision spatiale est réduite au 1<sup>er</sup> ordre possède les propriétés de transport et de conservation.

Le schéma hybride se réduit à l'approximation du schéma centré CSD lorsque  $|Pe_m| < 2$  mais il devient identique au schéma upwind UDS 1 lorsque  $|Pe_m| > 2$  avec  $Pe = \frac{F}{D}$  ( $Pe$ : le nombre de pecllet).

Après un réarrangement on aura :

$$a_p \phi_p^{t+\Delta t} = a_w \phi_w^{t+\Delta t} + a_e \phi_e^{t+\Delta t} + a_s \phi_s^{t+\Delta t} + a_n \phi_n^{t+\Delta t} + a_p^0 \phi_p^t + S_u \Delta x \Delta y \quad (\text{III-19})$$

Les coefficients  $a_m (m = w, e, s, n)$  sont donnés par :

$\left. \begin{aligned} a_w &= \max\left(f_w, D_w + \frac{f_w}{2}, 0\right) \\ a_e &= \max\left(-f_e, D_e - \frac{f_e}{2}, 0\right) \\ a_s &= \max\left(f_s, D_s + \frac{f_s}{2}, 0\right) \\ a_n &= \max\left(-f_n, D_n - \frac{f_n}{2}, 0\right) \\ a_p &= a_p^0 + a_w + a_e + a_s + a_n - s_p \Delta x \Delta y \end{aligned} \right\}$	(III-20)
--	----------

**Tableau. III.1:** les coefficients à calculer pour le schéma hybride

Il est à noter que cette formulation est valable pour n'importe quelle localisation des interfaces entre les mailles. Elle permet de fournir des solutions physiquement acceptables aux problèmes sans toutefois garantir la précision de la solution obtenue.

### III.4.5. Schéma implicite ADI

La méthode implicite est une méthode qui n'est pas restreinte au critère de stabilité, c'est-à-dire qu'elle est stable pour tout  $\Delta t$  : autrement dit elle est inconditionnellement stable: L'une de ces méthodes implicites est la méthode (ADI):

Elle est très efficace pour la résolution des problèmes des phénomènes de transport, bidimensionnel.

Cette méthode consiste à diviser le pas de temps  $\Delta t$  en deux pas :

Le premier pas  $t \rightarrow t + \Delta t/2$  en prenant l'implicite suivant  $x$  au temps  $(t \rightarrow \Delta t/2)$  et l'explicite suivant  $y$  au temps  $(t)$

$$-aw\phi_{I,j-1}^{1/2} + ap\phi_{I,j}^{1/2} - ae\phi_{I,j+1}^{1/2} = as\phi_{I-1,j}^0 + an\phi_{I+1,j}^0 + ap^0\phi_{I,j}^0 + S_u\Delta x\Delta y \quad (\text{III-21})$$

Le deuxième pas  $t + \Delta t/2 \rightarrow t + \Delta t$  en prenant l'implicite suivant  $y$  au temps  $(t + \Delta t)$  et l'explicite suivant  $x$  au temps  $(t + \Delta t / 2)$

$$-as\phi_{I-1,j}^1 + ap\phi_{I,j}^1 - an\phi_{I+1,j}^1 = aw\phi_{I,j-1}^{1/2} + ae\phi_{I,j+1}^{1/2} + ap^0\phi_{I,j}^{1/2} + S_u\Delta x\Delta y \quad (\text{III-22})$$

**Remarque**

- 0  $\rightarrow t$
- 1/2  $\rightarrow t + \Delta t / 2$
- 1  $\rightarrow t + \Delta t$

**III.4.6. Equation de la pression**

La difficulté principale, lors de la résolution des équations de Navier- Stokes est la vérification de l'équation de continuité à chaque pas de temps. En effet, en se basant sur les équations de quantité de mouvement discrétisées, celles-ci étant pleinement explicites, on pourra se contenter à chaque itération de déduire le champ de vitesse à partir du champ de pression.

Cependant, il y a fort à croire que le champ ainsi calculé ne respecte pas la condition de conservation de la masse. On serait d'autre part dans l'incapacité de déduire l'évolution du champ de pression à partir de la seule équation de continuité. Si l'écoulement est incompressible le champ de pression n'est pas connu, et on a besoin des algorithmes de type couplage pression-vitesse.

L'astuce numérique que nous allons mettre en œuvre pour pallier à cette difficulté repose sur une méthode développée par (Cf. Peyret R. & Taylor T.D. ; 1983)[29], est basé sur un fractionnement du pas de temps. Réécrivons l'équation de conservation de la quantité de mouvement comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho U U)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v U)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial U}{\partial y}\right) + S_U - \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v U)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial v}{\partial y}\right) + S_v - \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{III-23})$$

On décompose le terme de stockage du temps  $t$  à  $t^*$  et  $t^*$  à  $t + \Delta t$ , on trouve:

$$\begin{cases} \frac{\rho U^{t+\Delta t} - \rho U^*}{\Delta t} + \frac{\rho U^* - \rho U^t}{\Delta t} = -\frac{\partial(\rho U U)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v U)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial U}{\partial y}\right) + S_U - \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\rho v^{t+\Delta t} - \rho v^*}{\Delta t} + \frac{\rho v^* - \rho v^t}{\Delta t} = -\frac{\partial(\rho v U)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial v}{\partial y}\right) + S_v - \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{III-24})$$

On pose :

$$\begin{cases} \frac{\rho U^* - \rho U^t}{\Delta t} = -\frac{\partial(\rho U U)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v U)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial U}{\partial y}\right) + S_U \\ \frac{\rho v^* - \rho v^t}{\Delta t} = -\frac{\partial(\rho v U)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial v}{\partial y}\right) + S_v \\ \frac{\rho U^{t+\Delta t} - \rho U^*}{\Delta t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (a) \\ \frac{\rho v^{t+\Delta t} - \rho v^*}{\Delta t} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (b) \end{cases} \quad (\text{III-25})$$

La résolution des deux dernières équations (a) et (b) représente l'étape dite de prédiction, elle permet, l'obtention d'un champ provisoire de vitesse  $U^*$  et  $v^*$  calculé uniquement à partir du champ  $U^t$  et  $v^t$ . Ce champ provisoire ne vérifie à priori pas l'équation de continuité.

On dérive les deux dernières équations respectivement par rapport à  $x$  et par rapport à  $y$ , d'où:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho U^{t+\Delta t} - \rho U^*}{\Delta t}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho v^{t+\Delta t} - \rho v^*}{\Delta t}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) \end{cases} \quad (\text{III-26})$$

On fait la somme on trouve:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho U^{t+\Delta t} - \rho U^*}{\Delta t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho v^{t+\Delta t} - \rho v^*}{\Delta t} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (\text{III-27})$$

$$\left( \left( \frac{\partial(\rho U^{t+\Delta t})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^{t+\Delta t})}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial(\rho U^*)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^*)}{\partial y} \right) \right) / \Delta t = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \quad (\text{III-28})$$

Équation de continuité

$$\left( \frac{\partial(\rho U^{t+\Delta t})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^{t+\Delta t})}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{III-29})$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial(\rho U^*)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^*)}{\partial y} \right) / \Delta t \quad (\text{III-30})$$

La résolution de l'équation de pression (ci-dessus), nécessite évidemment de fixer des conditions aux limites. On choisira une condition de type Neumann sur le gradient de pression au niveau des frontières du domaine :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad (\text{III-31})$$

Après convergence, on recalcule les pressions aux frontières du domaine, en les extrapolant à partir du champ en aval.

La dernière étape de la méthode consiste évidemment à réinjecter le champ de pression, calculé ci-dessus, dans les équations (a) et (b), ce qui permet d'obtenir le champ de vitesse  $U^{t+\Delta t}$ ,  $v^{t+\Delta t}$  celui-ci satisfaisant aussi bien à l'équation de quantité de mouvement qu'à l'équation de continuité. C'est l'étape de projection qui a donné son nom à la méthode :

$$U_{IJ}^{t+\Delta t} = U_{IJ}^{t+\Delta t/2} - \Delta t. (P_{I+1J} - P_{IJ}) / (\rho. \Delta x) \quad (\text{III-32})$$

$$v_{IJ}^{t+\Delta t} = v_{IJ}^{t+\Delta t/2} - \Delta t. (P_{IJ+1} - P_{IJ}) / (\rho. \Delta y) \quad (\text{III-33})$$

Il existe d'autres algorithmes qui résolvent le problème de couplage pression-vitesse comme : Simple, Simplec, Piso

### III.4.7. Discrétisation de l'équation de pression

Ces deux équations ont une forme générale de l'équation de poisson:

$$\nabla(\Gamma. \nabla(\phi)) + S_\phi = 0 \quad (\text{III-34})$$

L'intégration sur le volume de contrôle définie précédemment donne:

$$\int_{\Omega_c} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial}{\partial x} (\phi) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial}{\partial y} (\phi) \right) + S_\phi \right) . d\Omega = 0 \quad (\text{III-35})$$

D'où sa forme discrétisée:

$$ap. \phi_p = aw. \phi_w + ae. \phi_e + as. \phi_s + an. \phi_n + S_\phi. \Delta x. \Delta y \quad (\text{III-36})$$

Où les différents coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} aw = D_w \\ ae = D_e \\ as = D_s \\ an = D_n \\ ap = D_w + D_e + D_s + D_n - S_p \Delta x \Delta y \end{array} \right. \quad (\text{III-37})$$

### III.4.8. Application

Nous intéressons ici à la résolution de notre modèle mathématique évoqué qui est relatif aux différentes équations de transport dans un canal de section rectangulaire à surface libre.

Cas étudiés:

- 1- Canal sans obstacle.
- 2- Canal avec un seul obstacle.
- 3- Canal avec deux obstacles situés simultanément de part et d'autre des parois.

Variations des cas étudiés pour les deux formes de la surface libre.

Ces équations sont :

- Equation de mouvement pour déterminer les composantes de vitesses  $u, v$ .
- Deux équations de transport pour la fermeture du modèle de turbulence :
  - L'énergie cinétique turbulente
  - taux de la dissipation d'énergie cinétique turbulente

Nous pouvons écrire ces équations sous la forme générale suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi)}_1 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial}{\partial x}(\phi)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial}{\partial y}(\phi)\right)}_2 + \underbrace{S_\phi}_3$$

- 1- Terme de convection
- 2- Terme de diffusion
- 3- Terme de source

Les expressions des termes de diffusivité, de source varient en fonction des types d'équations résolues

Le terme de gradient de pression, qui ne peut être classé ni comme un terme de convection ni comme un terme de diffusion est en général inclus dans le terme de source pour les trois équations de la dynamique. Ensuite les équations précédentes sont réécrites dans le repère rapporté au maillage.

Pour nous donner une idée de la forme des termes à discrétiser, nous allons fournir dans le tableau suivant, la valeur de  $\rho, \phi, \Gamma_\phi$  et  $S_\phi$  pour chaque une des équations en présence.

Cas 1 : l'effet de la surface libre est similaire à celui d'une paroi solide (eau)

Equation de continuité	
$\rho$	$\rho_{eau}$
$\emptyset$	$u_i$
$\Gamma_{\emptyset}$	0
$S_{\emptyset}$	0
Equation de quantité de mouvement	
$\rho$	$\rho_{eau}$
$\emptyset$	$u_i$
$\Gamma_{\emptyset}$	$\mu + \mu_t$ ou $\mu + c_{\mu} \frac{\rho k^2}{\varepsilon}$
$S_{\emptyset}$	$-\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ c_u \frac{\rho k^2}{\varepsilon} + \mu \right] \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$
Equation de l'énergie cinétique turbulente	
$\rho$	$\rho_{eau}$
$\emptyset$	$k$
$\Gamma_{\emptyset}$	$\frac{c_{\mu} \rho k^2}{\sigma k \varepsilon}$
$S_{\emptyset}$	$\left( c_{\mu} \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon$
Equation du taux de dissipation	
$\rho$	$\rho$
$\emptyset$	$\varepsilon$
$\Gamma_{\emptyset}$	$\frac{c_{\mu} \rho k^2}{\varepsilon \sigma_{\varepsilon}}$
$S_{\emptyset}$	$c_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} \left[ \left( c_u \frac{\rho k^2}{\varepsilon} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - c_{\varepsilon_2} \frac{\rho \varepsilon^2}{k} \right]$

Tableau. III.2 : Termes des équations à discrétiser (cas 1)

**Cas 2 : La surface libre est l'interface de deux volumes (volumes d'eau et volume d'air)**

Equation de continuité n°1	
$\rho$	$\rho_{01}$
$\emptyset$	$c_1$
$\Gamma_{\emptyset}$	0
$S_{\emptyset}$	0
Equation de continuité n°2	
$\rho$	$\rho_{02}$
$\emptyset$	$c_2$
$\Gamma_{\emptyset}$	0
$S_{\emptyset}$	0
Equation de quantité de mouvement	
$\rho$	$c_1\rho_{01} + c_2\rho_{02}$
$\emptyset$	$u_i$
$\Gamma_{\emptyset}$	$[(c_1u_1 + c_2u_2) + [c_1c_u\rho_{01}\frac{k^2}{\varepsilon} + c_2c_u\rho_{02}\frac{k^2}{\varepsilon}]]$
$S_{\emptyset}$	$-\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}[(c_1\rho_{01} + c_2\rho_{02})k] + \frac{\partial}{\partial x_j}[(c_1\mu_1 + c_2\mu_2) + c_1c_\mu\rho_{01}\frac{k^2}{\varepsilon} + c_2c_\mu\rho_{02}\frac{k^2}{\varepsilon}]\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$
Equation de l'énergie cinétique turbulente	
$\rho$	$c_1\rho_{01} + c_2\rho_{02}$
$\emptyset$	$k$
$\Gamma_{\emptyset}$	$\frac{c_1c_\mu\rho_{01}\frac{k^2}{\varepsilon}}{\sigma_k} + \frac{c_2c_\mu\rho_{02}\frac{k^2}{\varepsilon}}{\sigma_k}$
$S_{\emptyset}$	$[(c_1c_\mu\rho_{01}\frac{k^2}{\varepsilon}) + (c_2c_\mu\rho_{02}\frac{k^2}{\varepsilon})]\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - (c_1\rho_{01} + c_2\rho_{02})\varepsilon$
Equation du taux de dissipation	
$\rho$	$c_1\rho_{01} + c_2\rho_{02}$
$\emptyset$	$\varepsilon$
$\Gamma_{\emptyset}$	$\frac{c_1c_\mu\rho_{01}\frac{k^2}{\varepsilon}}{\sigma_\varepsilon} + \frac{c_2c_\mu\rho_{02}\frac{k^2}{\varepsilon}}{\sigma_\varepsilon}$
$S_{\emptyset}$	$c_{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon}{k}\left[(c_1c_\mu\rho_{01}\frac{k^2}{\varepsilon} + c_2c_\mu\rho_{02}\frac{k^2}{\varepsilon})\right]\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - c_{\varepsilon_2}(c_1\rho_{01} + c_2\rho_{02})\frac{\varepsilon^2}{k}$

**Tableau. III.3 :** termes des équations à discrétiser (cas 2)

**Remarque :** ces modèles représentent les modèles génériques sert qui résolues compte tenu les conditions émises au début de ce chapitre (pour le cas 2).

Concernant l'équation de pression  $\phi = P$  qui a la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial (\phi)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial (\phi)}{\partial y} \right) + S_{\phi} = 0 \quad (\text{III-38})$$

- Equation de pression  $\phi = P$

$$\Gamma = 1$$

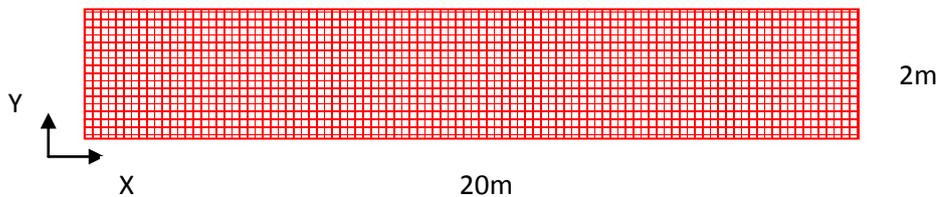
$$S_{\phi} = - \left[ \frac{\partial(\rho.u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho.v)}{\partial y} \right] / \Delta t \quad (\text{III-39})$$

### III.5. Maillage du système et conditions aux limites

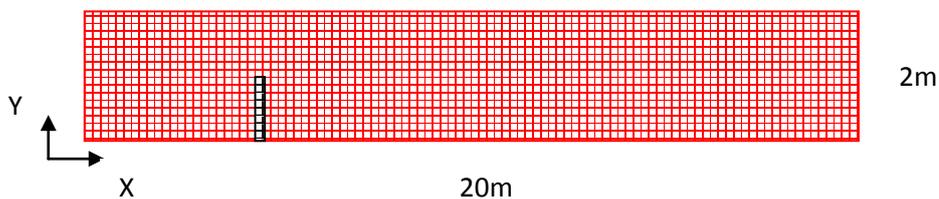
#### A- Le maillage

Sert à une représentation discrète d'une variable. La solution numérique s'appuie sur ce maillage qui a donc de ce fait une grande importance.

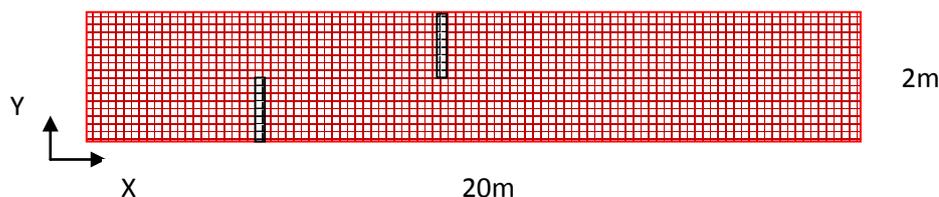
Dans notre étude nous avons choisi le maillage rectangulaire présenté dans les figures (III .3, III .4, III .5).



**Figure. III .3 :** Maillage (sans obstacle)



**Figure. III .4 :** Maillage (avec un seul obstacle)



**Figure. III. 5 :** Maillage (deux obstacles situes simultanément de part et d'autre des parois)

## **B- Conditions aux limites**

### **B.I 1<sup>er</sup> cas surface libre similaire à une paroi solide (écoulement monophasique)**

Avant discuter les conditions aux limites il serait utiles de récapituler les exigences du modèle  $K - \varepsilon$  :

- La turbulence est presque homogène.
- Les distributions spectrales des quantités turbulentes sont semblables.
- La diffusion est du type gradient avec des nombres de Prandtl effectifs constants.
- Nombre de Reynolds élevés

Puisque les paramètres des modèles ne sont pas vraiment universels mais sont des fonctions des paramètres caractéristiques d'écoulements. Plusieurs tentatives ont été faites d'augmenter l'application du modèle  $K - \varepsilon$  en modifiant ces paramètres empiriques pour convenir aux conditions spécifiques de différents types d'écoulements. Une de faiblesse du modèle standard  $K - \varepsilon$  est qu'il est incapable de prédire la génération de turbulence dans les régions où l'écoulement n'y est pas pleinement turbulent[5].

La version standard de  $K - \varepsilon$  valide pour les écoulements turbulents loin des parois. La présence de paroi et la surface libre change le caractère de la turbulence, en atténuant la turbulence dans la région près de la paroi, puisque dans la partie externe de cette région la turbulence produit rapidement un fort gradient de vitesse moyenne[15].

- Les conditions aux limites portées sur  $u, k, \varepsilon, p$ , elles sont exprimées à la paroi du fond, à la surface libre, à l'obstacle.

#### **B.I.1 Condition à la paroi**

La présence correcte de l'influence de la paroi sur les écoulements turbulents est un aspect important pour simuler des écoulements délimités par la paroi.

Il y a deux approches principales pour modéliser la région de proche paroi.

Dans l'une des approches appelées « fonction de paroi » les effets intérieurs affecter par la viscosité ne sont pas modelés. Pour cela les formules semi-empiriques (fonction de paroi) sont utilisées pour liées la couche limite visqueuse et la région entièrement turbulente.

Dans l'autre approche les modèles de turbulence au faible nombre de Reynolds sont développés pour simuler l'écoulement de la région proche-paroi.

Dans la plupart des écoulements à nombre de Reynolds élevés, l'approche par la fonction de paroi donne des résultats raisonnables sans exigences excessives vis-à-vis des ressources de calcul.

Pour les bas nombres de Reynolds le modèle  $K - \varepsilon$  exige les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} K = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial n} = 0 \\ \varepsilon = \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n} \right)^2 \end{array} \right. \quad \text{(III-40)}$$

Où :

$n$  : Est la normal à la paroi

Une certaine petite modification du nombre de Reynolds au modèle  $K - \varepsilon$  ont été proposés par Chen et Patel (1988) ; Wilcox(1993) ; Hrenya et Sinclair(1995). Dans les approches par les fonctions de paroi, un profil universel de vitesse supposé existe prend la forme suivante :

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + B = \frac{U_t}{u_\tau} \quad \text{(III-41)}$$

Où

$y^+$  : est la distance (adimensionnelle) à la paroi

$K$  : est la constante de Van Karman (= 0,41)

$B$  : est une constante empirique lié à l'épaisseur de la sous-couche visqueuse et dépend de la rugosité de la paroi ( $B = 5,2$  dans une couche limite plan et régime lisse).

$u^+$  et  $y^+$  sont définis comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^+ = \frac{u_t}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} \\ y^+ = \frac{\rho n_p \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}{\mu} \\ \text{D'où} \\ u_t = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \end{array} \right. \quad \text{(III-40)}$$

(Pour  $30 < y^+$  et  $y < 0,1 \cdot \delta$  Où  $\delta$  : l'épaisseur de la couche limite).

$n_p$  : est la distance normale au point  $P$  à la paroi.

$u_t$  : La composante tangentielle de vitesse à la paroi

$u^+$  : La vitesse au voisinage de la paroi ;

$u_\tau$  : Est une vitesse associe au cisaillement

En outre, on n'assume que l'écoulement dans un équilibre local, qui signifie que la production et la dissipation sont presque égales.

Ces suppositions permettent alors l'utilisation de la résolution à la paroi. En fait l'approche de loi de paroi exige que la distance adimensionnelle sur nœud voisin de la grille de la paroi, doive être plus grande que 30 ( $y^+ > 30$ ).

Pour un tel cas la contrainte de cisaillement de paroi peut être liée au composante tangentielle de la vitesse à la grille comme :

$$\tau_w = \frac{k\rho C_u^{\frac{1}{4}} \sqrt{kU_t}}{\ln(y^+.E)} \quad (\text{III-41})$$

Pour l'énergie cinétique turbulente  $K$ , le gradient normal à la paroi est habituellement égal à zéro.

En suppose que l'échelle de longueur près de la paroi,  $L$  est donné par :

$$L = \frac{kn_p}{\frac{3}{C_u^{\frac{4}{3}}}} \quad (\text{III-42})$$

En suppose qu'il y a un équilibre entre la production et la dissipation, le taux de dissipation de l'énergie turbulente au nœud à coté de la paroi (indice  $P$ , situé à une distance normal  $n_p$  de la paroi) peut être calculé à partir de :

$$\varepsilon_p = \frac{\frac{3}{C_u^{\frac{4}{3}}} k_p^{\frac{3}{2}}}{k n_p} \quad (\text{III-43})$$

D'où :  $n_p = y_p$

Il convient de noter que l'approche de loi de paroi est valide seulement quand le premier point de la grille à coté de la paroi (le nœud  $P$ ) est dans la région logarithmique, pour des écoulements séparés dans les régions de recirculation, de séparation et ré-attachement cette condition ne peut pas être valide pour rectifier ceci dans certaine mesure plusieurs fonctions de paroi ont été proposés (voir par exemple Amance (1984)).

Quand l'approche de fonction de paroi n'est pas applicable au dessus d'une grande partie des frontières de paroi bas nombre de Reynolds des modèles de la turbulence devraient être employé pour résoudre les détails plus fines des écoulements proches des parois.

**Remarque** L'inconvénient de cette modélisation est qu'aux point de séparation  $U_t = 0$  pour combler ce point faible, nous avons utilisé pour nos calculs le modèle de loi de paroi dans lequel  $u^+$  est remplacé par  $u^*$  qui a la particularité de ne tendre pas vers 0 quand  $U_t \approx 0$  (car il est défini en fonction de  $K$ , or en écoulement turbulent  $K$  n'atteint jamais 0) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* = c_u^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{2}} \\ \text{Avec} \\ u_\tau = \frac{U_t}{\frac{1}{k} \ln(y)^* + c} \end{array} \right. \quad (\text{III-44})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_w = \rho u_\tau u^* \\ \text{Et} \\ y^* = \frac{\rho \Delta y u^*}{\mu} \end{array} \right. \quad (\text{III-45})$$

L'inconvénient de ce type de modélisation est la dépendance des résultats vis-à-vis de la distance aux parois et donc leur sensibilité par rapport au maillage dans ces régions.

$y^*$  Est alors remplacé par  $\check{y}^* = \max(y^*, 11,6)$  où 11,6 étant la valeur limite entre les deux types de profil de vitesse ; la zone logarithmique et la sous-couche visqueuse ( $y^+ < 10$ ). Ainsi,  $y^*$  reste toujours supérieur à 11,6 ce qui garanti que les points du maillage sont situés hors de la sous couche visqueuse.

### Impact sur le maillage

Afin de prédire correctement l'écoulement turbulent dans la couche limite il faut y réaliser un maillage avec un nombre suffisants de nœuds (au moins 10). D'autre part les caractéristiques de l'écoulement ayant leurs importances sur l'échelle, il faut donc estimer approximativement  $\Delta y$  pour un  $y^+$  donné. Pour cela on fait le rapprochement

avec un écoulement de vitesse moyenne  $u$  sur une plaque plane de longueur  $L =$  la longueur du profil et dont le nombre de Reynolds est  $Re_l = \frac{\rho u_\infty L}{\mu}$  et le coefficient de frottement (dû à l'effort tranchant sur les parois) à l'abscisse  $x$  est :

$$c_f = \frac{2\rho u_t^2}{\rho u^2}$$

$$= 0,025 Re_x^{-\frac{1}{7}} \quad (\text{III-46})$$

En définissant  $\Delta y^+$  de la manière suivante :

$$\Delta y^+ = \frac{\Delta y u_t}{\sigma} \quad (\text{III-47})$$

On déduit :

$$\Delta y = L \Delta y^+ \sqrt{80} \frac{Re_x^{\frac{1}{14}}}{Re_L} \quad (\text{III-48})$$

Pour se fixer les idées, on peut considérer que  $x \approx L$  on aura alors :

$$\Delta y = L \Delta y^+ \sqrt{80} Re_L^{-\frac{13}{14}} \quad (\text{III-49})$$

**Remarque :** avec le développement de l'outil informatique on peut raffiner tout le domaine de calcul.

### B.I.2 Condition à la surface libre

En l'absence de contrainte de cisaillement induite par un flux d'air à l'interface. La surface libre peut-être considérée comme un plan de symétrie c.-à-d. : si l'on ne prend pas la déformation de la surface libre les conditions limites imposées sont les suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0 \quad (\text{III-50})$$

La composante de la vitesse perpendiculaire à la surface libre est nulle, soit :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

(Avec  $\vec{n}$  sortant normal à la limite .cela signifie qu'il n'y a pas de flux convectif à travers la surface libre).

Cette hypothèse ne constitue qu'une approximation. En effet Hussain-Rodi ont remarqué que la présence de la surface libre réduit l'échelle de longueur turbulente et augmente ainsi le taux de dissipation.

Par suite la condition de symétrie ne peut être appliquée au taux de dissipation  $\varepsilon$ .

Plusieurs auteurs ont fait des recherches sur ce problème on a choisi la formule de Celik et Rodi (1984) [4].

$$\varepsilon_w = \frac{kw^3}{\alpha h} \quad (\text{III-51})$$

$\alpha$  : est un coefficient déterminé empiriquement  $\alpha \cong 0,18$

$h$  : La hauteur d'eau dans le canal

### **Remarque**

La plupart des travaux effectués dans le domaine de la mécanique des fluides numérique [Chatellier P., 1991][6], [Moureh J., 1992][19], [Djebbar R., 1996][9], [Naude I., 1998][20] utilisent ce type de condition aux limites pour modéliser le comportement du milieu à l'interface eau/air.

## **B.II. 2<sup>ème</sup> Cas surface libre, l'interface de deux volumes (écoulement diphasique)**

### **a- Conditions initiales**

Il est nécessaire de donner des vitesses initiales de l'écoulement dans différents domaines fluides (au niveau des volumes d'eau et d'air), ainsi que les valeurs initiales pour la turbulence, la pression et la fraction volumique (position initial de la surface libre)

On a varié la vitesse de l'air par rapport à la vitesse d'eau et on a traité ce cas seulement dans un canal sans obstacle et on a fixé une vitesse de l'air égal à 0(m/s) pour les autres cas.

### b- Conditions aux limites

Une fois que nous avons représenté la géométrie du système étudié, nous devons fixer les conditions aux limites du système sur les valeurs de la pression

$$P = P_{atm} \quad (\text{à l'entrée et à la sortie et au niveau de la surface libre})$$

$$v = 2 \text{ m/s} .$$

Les valeurs  $k$  et  $\varepsilon$  sont calculées comme suit (Versteeg, Malasekra) [11]

$$K = \frac{3}{2} (U.I)^2 \quad (\text{III-52})$$

D'où :

$I$  : l'intensité turbulente est obtenue de façon empirique comme suit

$$I = 0,16 R_e^{-\frac{1}{8}} \quad (\text{III-53})$$

$$\varepsilon = \left( \frac{c_u^{\frac{3}{4}} k^{\frac{3}{2}}}{l} \right) \quad (\text{III-54})$$

Où  $l$  : est une quantité physique liée à la taille des grandes tourbillons qui contiennent l'énergie dans les écoulements turbulents.

$$l = 0,07 L \quad (\text{III-55})$$

Où  $L$  : est la longueur caractéristique dans le cas d'un canal de section transversale non circulaire on prend le diamètre hydraulique

$$L = D_h$$

#### b-1: Cas des parois

- Condition sur la paroi

$$U_i = 0 \quad \text{Et} \quad K = 0 \quad (\text{III-56})$$

- Condition sur la sous-couche visqueuse (laminaire et la couche intermédiaire)

$$y^* = \frac{\rho c_u^{\frac{1}{4}} k_p^{\frac{1}{2}} y_p}{\mu} \quad (\text{III-57})$$

$$u^* = \frac{u_p c_u^{\frac{1}{4}} k_p^{\frac{1}{2}} \rho}{\tau_w} \quad (\text{III-58})$$

Où :

$u_p$  : représente la vitesse moyenne du fluide au point  $P$  situé à la distance  $y_p$  du point à la paroi.

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0 \quad (\text{III-59})$$

$$\varepsilon_p = \frac{c_\mu^{\frac{3}{4}} k_p^{\frac{3}{2}}}{k y_p} \quad (\text{III-60})$$

Cette modélisation concernant les parois est basée sur les études de Launder et Spalding[17],

- Finalement on peut dire, vue aux difficultés à faire converger le modèle de la turbulence  $K - \varepsilon$  qui est très sensible aux conditions aux limites on a varié la condition de la surface libre. Mais la majorité de notre travail a été effectué pour le 1<sup>er</sup> cas de la surface libre (monophasique).

### **b-2: La surface libre**

En écoulement diphasique, notre domaine de calcul sera constitué d'un volume d'eau et d'un volume d'air situé dans la partie supérieure du canal. Aucune contrainte ne sera fixée au niveau de la surface libre, qui pourra donc se déformer.

La condition limite sera imposée sur la partie supérieure du domaine, constituée d'air et soumise à la pression atmosphérique. Elle sera donc définie comme étant une pression de sortie.

## Récapitulation

### a)-Conditions initiaux

$$P = (t = 0, x, y) = Pa$$

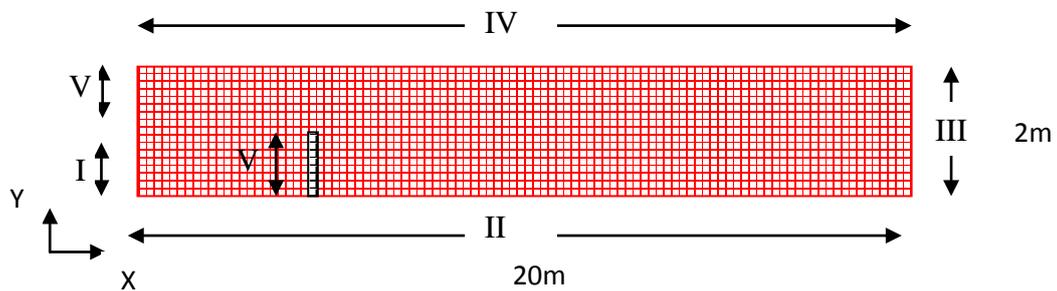
$$U = (t = 0, x, y) = 0$$

$$v = (t = 0, x, y) = 0$$

$$K = (t = 0, x, y) = 0$$

$$\varepsilon = (t = 0, x, y) = 0$$

### b)-Conditions aux limites



**Figure. III. 6 :** Maillage et conditions aux limites dans le plan OXY

I : entrée du canal

II : paroi du canal

III : sortie du canal

IV : surface libre

V : mur (obstacle)

1<sup>er</sup> cas

	$U$	$v$	$K$	$\varepsilon$	$P$
I	$U = u_0$	$v = v_0$	$K = k_0$	$\varepsilon = \varepsilon_0$	$P = P_0$
II	$U = 0$	$v = 0$	$K = 0$	$\varepsilon = \varepsilon_p$	$\frac{\partial P}{\partial n} = 0$
III	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial k}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0$	$P = P_{atm}$
IV	$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$	$v = 0$	$\frac{\partial k}{\partial x} = 0$	$\varepsilon = \varepsilon_\omega$ Où $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$
V	$U = 0$	$v = 0$	$K = 0$	$\varepsilon = \varepsilon_p$	$\frac{\partial P}{\partial n} = 0$

**Tableau. III.4 :** conditions aux limites (cas 1)

$$\varepsilon_p = \frac{c_u^{\frac{3}{4}} K_P^{\frac{3}{2}}}{Kn_p}$$

$$\varepsilon_\omega = \frac{k_\omega^{\frac{3}{2}}}{\alpha h}$$

$\alpha \cong 0,18$  ,  $h$  : Hauteur d'eau dans le canal

2<sup>ème</sup> cas

	$U$	$v$	$K$	$\varepsilon$	$P$	$v_{air}$	C
I	$U = u_0$	$v = v_0$	$K = K_0$	$\varepsilon = \varepsilon_0$	$P = P_{atm}$	0 $\frac{1}{4}v_{eau}$	1
II	$U = 0$	$v = 0$	$K = 0$	$\varepsilon = \varepsilon_p$	$\frac{\partial P}{\partial n} = 0$	$v = 0$	1
III	$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial k}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0$	$P = P_{atm}$	$v = 0$	0
IV	$U = 0$	$v = 0$	$K = \frac{3}{2} (U.I)^2$	$\varepsilon = \frac{c_u^{\frac{3}{4}} k^{\frac{3}{2}}}{l}$	$P = P_{atm}$	$v = 0$	0
V	$U = 0$	$v = 0$	$K = 0$	$\varepsilon = \varepsilon_p$	$\frac{\partial P}{\partial n} = 0$	$v = 0$	1

Tableau. III.5 : conditions aux limites (cas 2)

$$\text{Où } \varepsilon_p = \frac{c_u^{\frac{3}{4}} K_p^{\frac{3}{2}}}{K n_p}$$

**III.6. Résolution de système d'équation (méthode de Jacobi)**

Afin de discrétisation de l'équation de transport et de poison, on trouve la relation générale qui a la forme suivante :

$$a_p \phi_{ij} = (a_w \phi_{i-1,j} + a_e \phi_{i+1,j} + a_s \phi_{i,j-1} + a_n \phi_{i,j+1} + b_{ij}) \quad \text{(III-61)}$$

La méthode de Jacobi consiste à estimé une solution,  $\phi_{i,j}^k$  dans l'itération  $k$ ,  
Pour calcul  $\phi_{i,j}^{k+1}$  à partir :

$$\phi_{ij}^{k+1} = (a_w \phi_{i-1,j}^k + a_e \phi_{i+1,j}^k + a_s \phi_{i,j-1}^k + a_n \phi_{i,j+1}^k + b_{ij}) / a_p \quad \text{(III-62)}$$

La condition de convergence est :

$$\phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^k \leq \varepsilon \quad \text{(III-63)}$$

Si la condition n'est pas correcte on pose que  $\phi_{i,j}^k = \phi_{i,j}^{k+1}$ , et on recalcule à la même formule jusqu'à vérifier la condition de convergence.

Pour calculer tous les champs concernant le modèle du canal découvert, on a réalisé un programme qui contient :

- Programme principale

Et trois sous-routines (voir annexe)

- Sous-routine de transport
- Sous-routine de pression
- Sous-routine de vitesse

### III.7. Conclusion

Nous avons tout d'abord présenté et justifié la méthode de volume finis (schéma ADI) utilisé pour mener à bien nos simulations. Cela permis une meilleure compréhension des calculs mis en œuvre notamment en ce qui concerne les processus itératifs et de discrétisation spatiale et temporelle.

Pour pouvoir modéliser l'hydrodynamique des canaux découverts à section rectangulaire constante nous devons effectuer trois choix fondamentaux.

Ces choix concernent :

- Le modèle de turbulence
- Les conditions aux limites
- La représentation de la géométrie du canal et le maillage du domaine de calcul

Dans le chapitre suivant, nous présentons les résultats du modèle en monophasique puis nous étudierons l'influence des obstacles sur les caractéristiques de l'écoulement puis en diphasique.

**Quatrième Chapitre**

**Résultats  
Et  
Interprétations**

### IV.1. Introduction

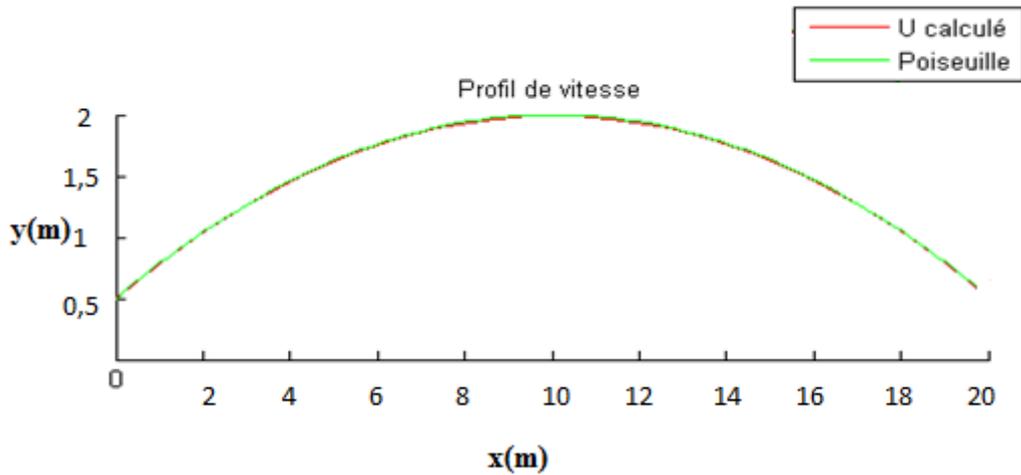
On va exposer ici les résultats que nous avons obtenus grâce à notre modélisation et notre programme. Nous nous sommes livrés à une batterie de tests pour valider certains modules du programme, et évaluer l'influence d'un paramètre (la condition de la surface libre) sur les résultats de la modélisation.

- Premièrement on va présenter les résultats obtenus par notre programme pour les écoulements laminaires à surface libre, ensuite les écoulements turbulents en charge cette phase pour tester la capacité du programme.
- Deuxièmement on va présenter les résultats de l'écoulement turbulent cas1 (monophasique eau seul), après on va étudier l'influence des obstacles sur la vitesse horizontale de l'écoulement dans le canal.
- Enfin les résultats des simulations (cas2) en diphasique (eau+ air).

### IV.2. En laminaire

Pour valider le module du programme chargé du calcul les profils de vitesse, pression, énergie cinétique turbulente, les profils de tensions, la dissipation, nous avons modélisé un écoulement laminaire. Les 6 corrélations de vitesse fluctuante sont donc nulles. Le profil de vitesse, pris au milieu de la section n'est donc pas influencé par les conditions aux limites de paroi et de la surface libre qui sont d'ailleurs modélisés comme une absence des contraintes (parois lisses sans frottements).

$U = 2\text{m/s}$     $h = 2\text{m}$     $L = 20\text{m}$



**Figure. IV.1 :** Modélisation d'un écoulement laminaire avec notre programme

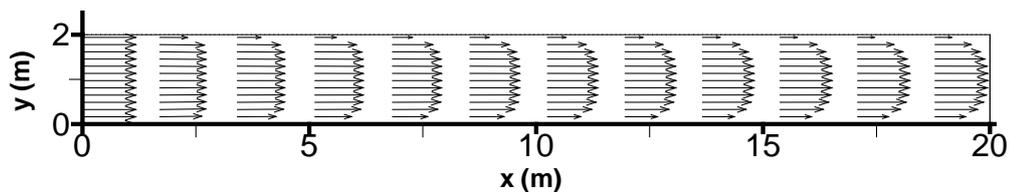
### IV.3. En turbulent

Ayant eu beaucoup de difficultés à faire converger le modèle qui est très sensible aux conditions aux limites. On a travaillé sur des écoulements à pleines sections sans surface libre.

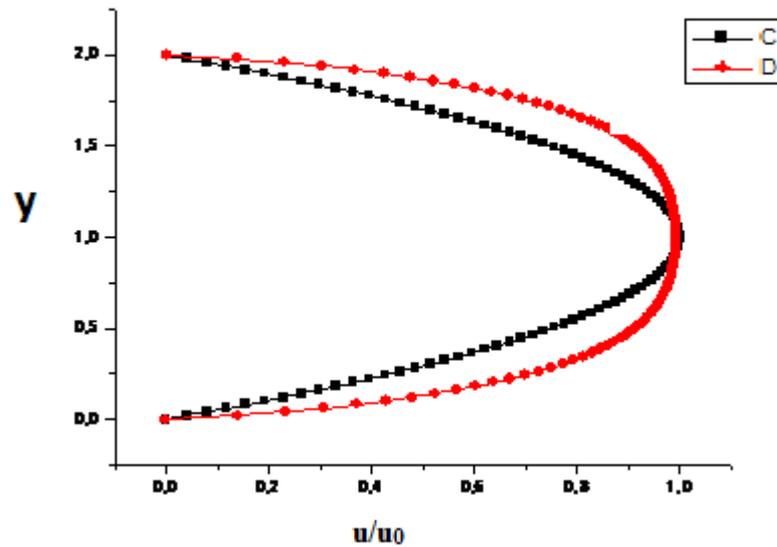
Notre but était de valider cette étape pour passer à la surface libre.

Voici les résultats de notre simulation avec les mêmes paramètres que pour les modélisations précédentes.

$V = 2\text{m/s}$     $h = 2\text{m}$     $L = 20\text{m}$

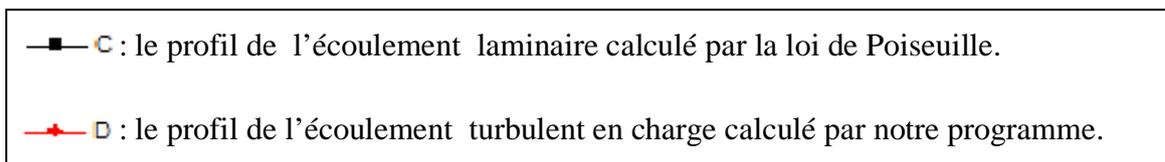


**Figure. IV 2 :** Modélisation d'un écoulement turbulent en charge avec notre programme



**Figure. IV .3 :** profil de comparaison entre l'écoulement turbulent modélisé par notre programme et la loi de Poiseuille

D'où



On voit très clairement que  $U_{max}$  ressemble beaucoup à la solution laminaire, ce qui est normal car il n'y a pas de Dip – phénomène lorsqu'il n'y a pas de surface libre. Le maximum de vitesse est alors bien au centre de la section voir figure (IV.3), figure (IV.2) On peut voir aussi la présence de la symétrie au niveau des résultats. Nos résultats sont donc cohérents.

#### IV.4. En monophasique (1er cas de la surface libre)

Nous constatons :

- Le caractère le plus remarquable de la turbulence est son imprédictibilité qui fait que à un instant et on un point donné il est impossible de prévoir la valeur exacte du champ de vitesse ou même de la pression.

- L'écoulement est organisé en une multitude des tourbillons dont la taille maximum et pour l'instant est inconnue.

#### IV.4.a. Sans obstacle

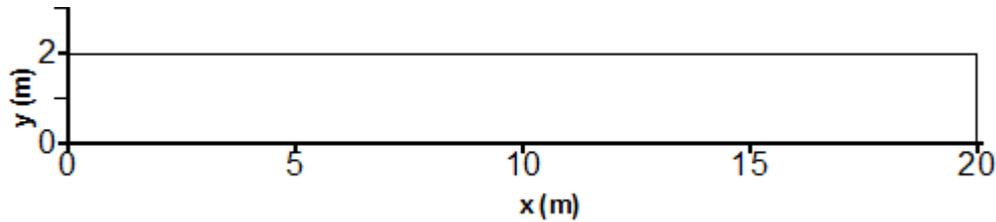


Figure. IV.4 : Géométrie du canal

On constate qu'on a la réduction de l'échelle des longueurs des tourbillons porteurs d'énergie est la conséquence de leur interactions avec la surface libre accompagné d'une augmentation locale de la pression.

Il en résulte un éclatement des tourbillons énergétiques en tourbillons de tailles plus petites et dissipatifs surtout en présence de l'obstacle (voir figure (IV.9), (IV.10)). Ce mécanisme conduit à une augmentation du taux de dissipation et une diminution de l'énergie turbulente, donc on peut dire une diminution de la viscosité turbulente dans la zone de la surface libre figure (IV -5) et figure (IV -6).Ce qui est en accord avec la littérature spécialisée[15].

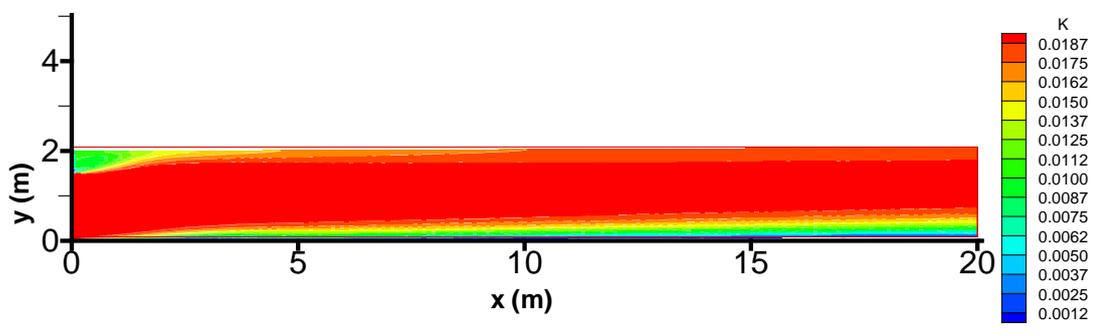
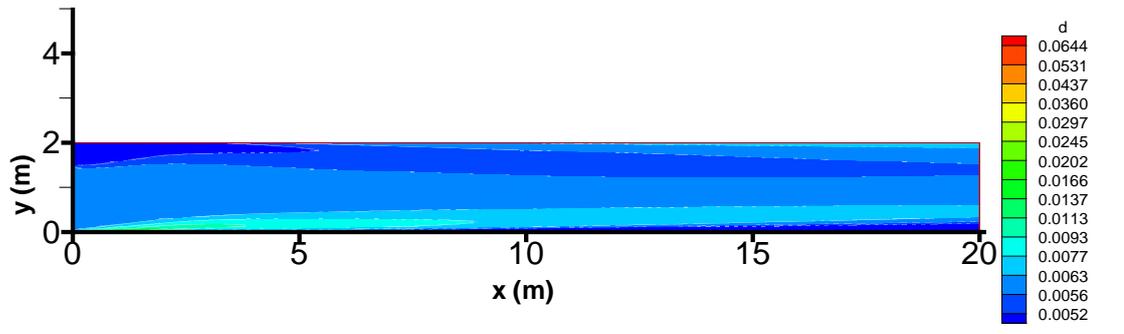
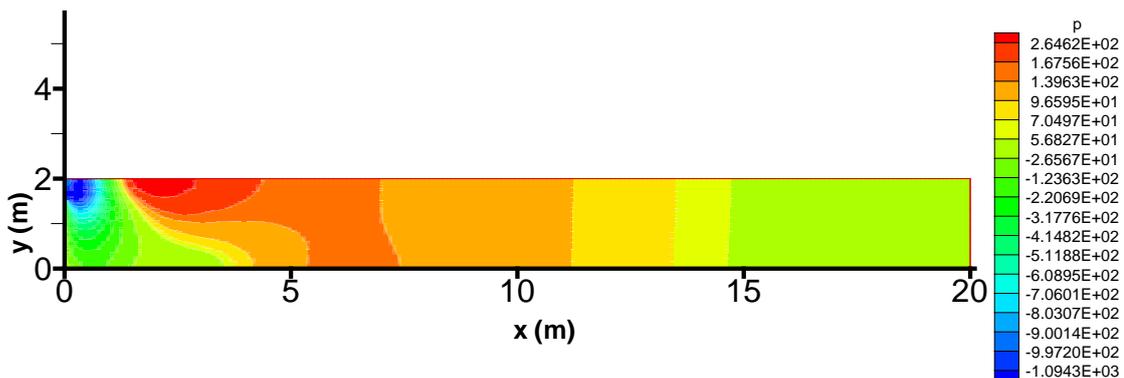


Figure. IV.5 : Distribution de l'énergie cinétique en ( $m^2/s^2$ ) dans un canal sans obstacle (cas1)



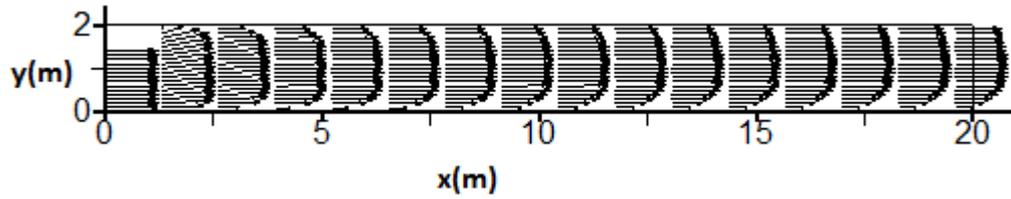
**Figure. IV.6 :** Distribution de la dissipation de l'énergie cinétique en ( $\text{m}^2/\text{s}^3$ ) dans un canal sans obstacle (cas1)

La distribution des champs de pression présentée dans la figure (IV.7), nous montre presque la linéarité de cette grandeur scalaire le long du canal ainsi on peut voir clairement que le profil de pression en absence de l'obstacle montre un léger gradient négatif de pression dans le sens de l'écoulement. Ce gradient est dû au développement de la couche limite sur les parois du canal. Ce gradient est très faible par rapport au gradient en présence de l'obstacle.

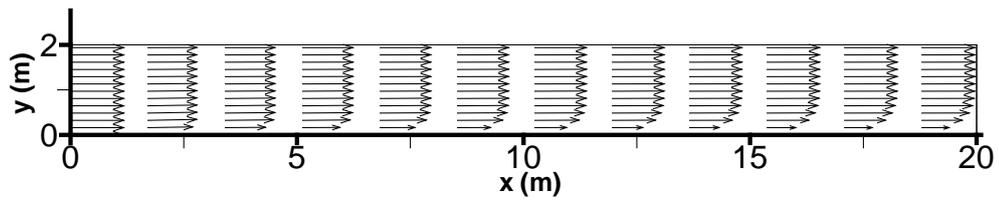


**Figure. IV.7 :** Distribution de la pression en ( $\text{N}/\text{m}^2$ ) dans un canal sans obstacle (cas1)

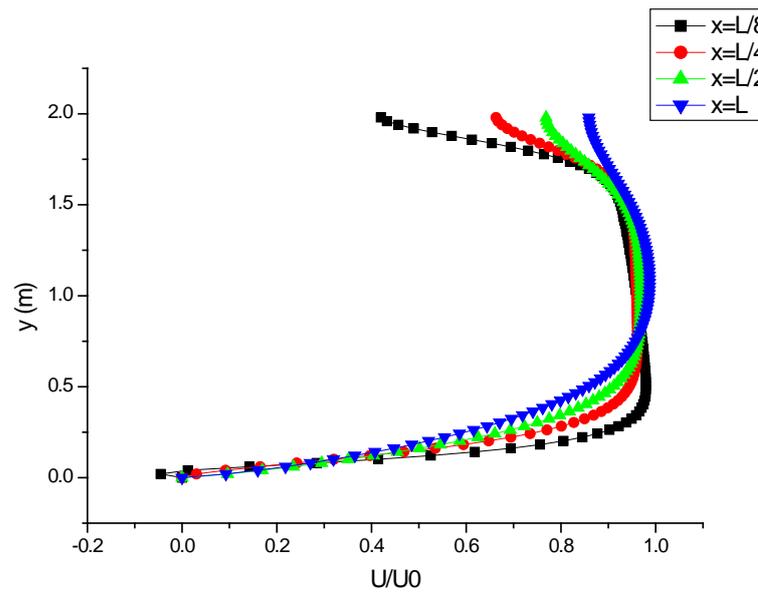
- Pour un flux partiel nous pouvons observer assez nettement des vitesses faibles près des parois et la valeur maximale aux dessous de la surface libre figure(IV.8) par contre pour une ouverture totale la valeur maximale du flux se situe au niveau de la surface libre Figure(IV.9).



**Figure. IV.8 :** Répartition des champs de vitesse dans le canal en m/s  
(cas1demi\_entrée)



**Figure. IV.9 :** Répartition des champs de vitesse dans le canal en m/s (cas1 entrée totale)



**Figure. IV.10 :** Les profils des vitesses en (m/s) calculée dans un plan horizontal

- A la sortie du canal la vitesse prend sa valeur maximale au centre du canal, et nulle à la paroi, l'énergie cinétique turbulente et la dissipation sont maximum près de la paroi et s'annulent à la paroi, on observe bien l'augmentation de la valeur de K au voisinage de la paroi (figure (IV.5), (IV.6))
- Sur la figure (IV .10) on peut voir les profils des vitesses à l'entrée et au centre et à la sortie du canal où on peut constater deux zones importantes.
- La première située près de la paroi et la deuxième au niveau de la surface libre. La figure montre bien qu'il y a un effet inverse sur les profils des vitesses dans les deux zones.
- Au niveau de la surface libre pour:

$y = 2m$ , la valeur de la vitesse dans le point située à une distance  $x = \frac{L}{8}$

$$\frac{U}{U_0} = 0,41$$

- Pour  $x = L$

$$\frac{U}{U_0} = 0,859$$

- Au niveau des parois :

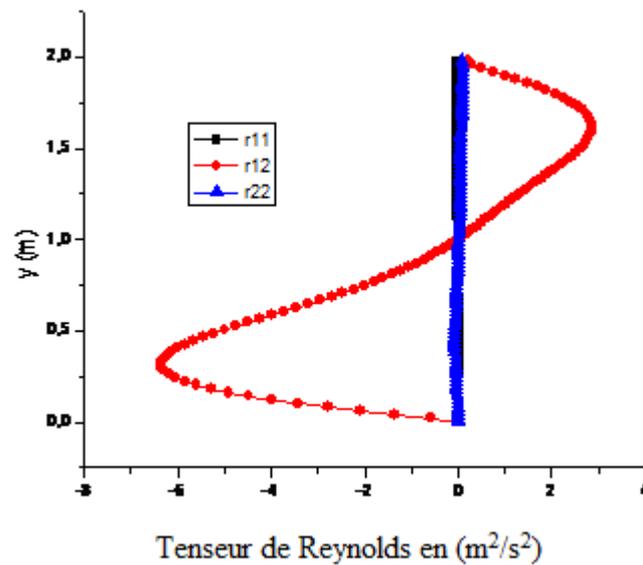
$y = 0,25m$ , la valeur de la vitesse dans le point située à une distance  $x = \frac{L}{8}$

$$\frac{U}{U_0} = 0,87$$

- Pour  $x = L$

$$\frac{U}{U_0} = 0,586$$

- Nos résultats sont conformes aux études antérieures provenant de la littérature.



**Figure. IV.11** Profil transversal des composantes du tenseur Reynolds

La variation des trois composantes du tenseur de Reynolds est représentée sous forme de profil présenté ci-dessus figure (IV.11). Cette figure montre que la composante tangentielle du tenseur de Reynolds ( $r_{12}$ ) est la plus grande par rapport aux deux autres composantes ( $r_{11}$ ,  $r_{22}$ ) pour les zones proches de la surface libre. Mais les valeurs diminuent en s'éloignant de la surface libre et en se déplaçant vers la paroi, des valeurs négatives peuvent être aussi observées figure (IV.11). L'effet de la turbulence se manifeste nettement à travers le profil transversal de cette composante. (Pour le deuxième cas on est arrivé à la même interprétation mais avec des valeurs plus grandes ce qui nous conduit à dire que l'influence de l'air sur la composante tangentielle du tenseur de Reynolds est non négligeable.

#### IV.4.b. En présence d'un obstacle

La présence d'un obstacle au fond peut provoquer des changements du régime de l'écoulement en aval de l'obstacle. Il sera donc intéressant de voir la variation temporelle des champs de vitesse dans le canal découvert.

L'obstacle est situé à une distance de 5m à partir de l'entrée du canal. Sa hauteur est de 1m. Les dimensions du canal sont respectivement de 20m de long et 2m de hauteur figure. (IV.12).

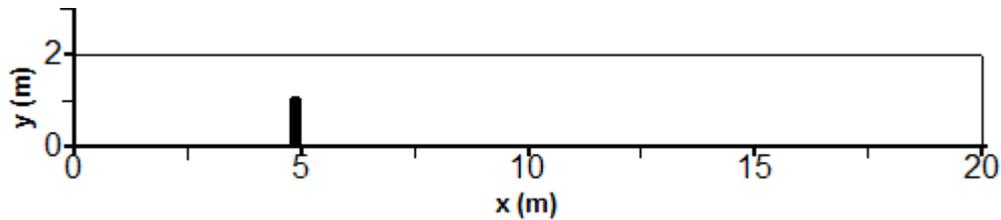


Figure. IV.12 : Géométrie du canal

#### IV.4.b.1. Paramètres numériques

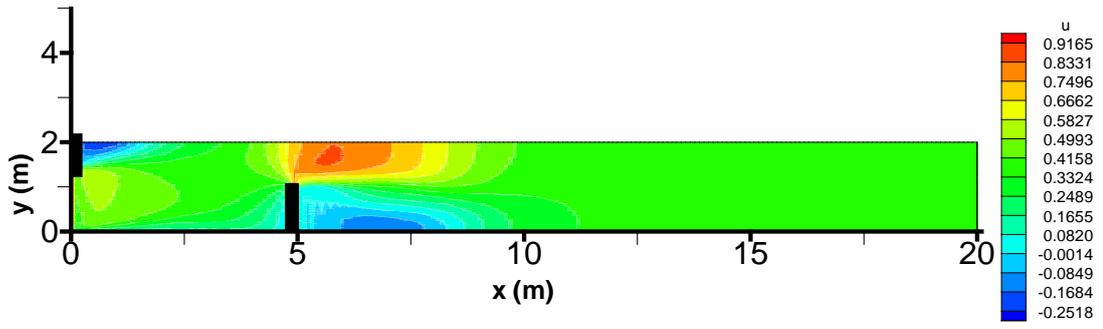
Le domaine de calcul est discrétisé pour tous les cas par une grille de  $200 \times 100$  (20000) carrés avec un pas d'espace dans la direction des  $x$ ;  $\Delta x = 0,1$  et dans la direction des  $y$ ;  $\Delta y = 0,02$  Le pas de temps  $\Delta t = 0,1s$

Le temps de l'écoulement est de 65s.

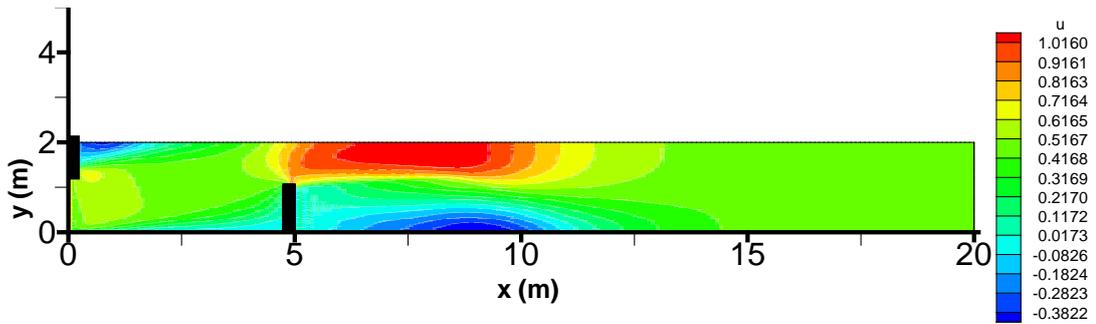
#### IV.4.b.2. Interprétations

a) Il est très claire que le temps nécessaire pour voir un régime établi stationnaire est très long du fait que l'écoulement est à chaque fois renouvelé totalement, ceci provient du fait que les tourbillons créés sur la surface libre et au dessus de l'obstacle sortent très rapidement et ralentissent, c à dire : des petites circulations.

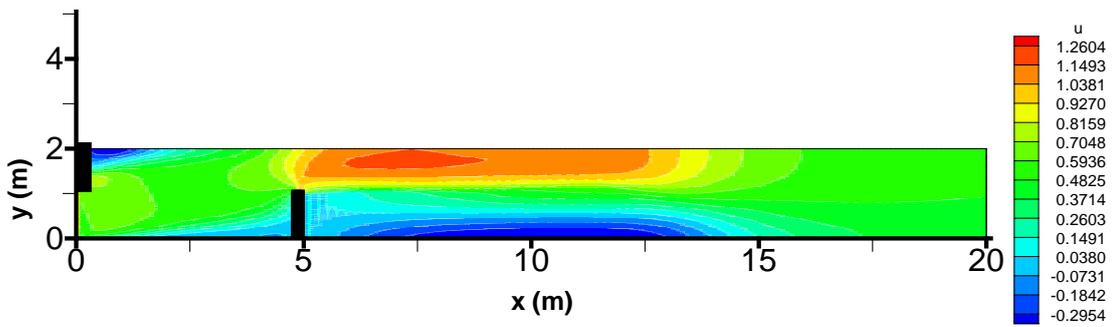
Un exemple de résultat est montré sur la figure (IV -13) où l'on voit qu'au delà de  $T=40s$  l'écoulement à été renouvelé totalement sans voir le régime établie stationnaire. La connaissance de se temps typique et de la valeur moyenne de la vitesse  $U$  donne une idée sur la taille des plus grosses tourbillons contenues dans l'écoulement.



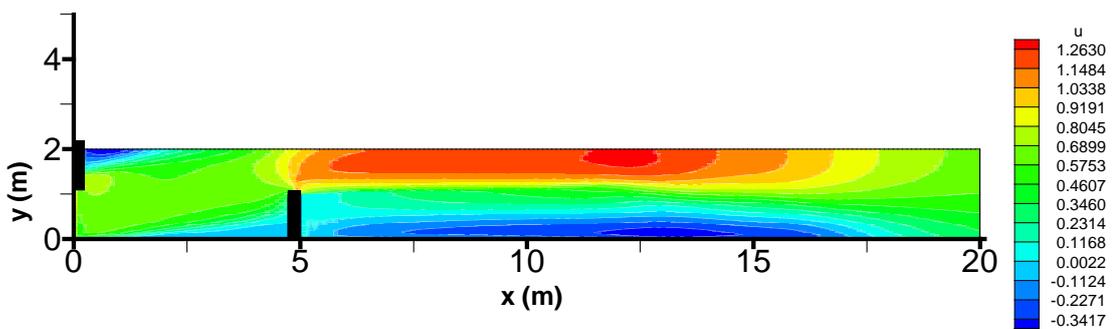
T=10s



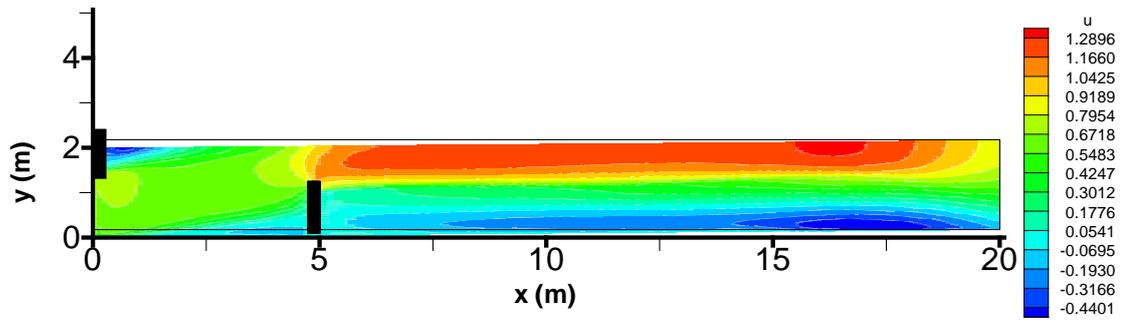
T=15s



T=20s

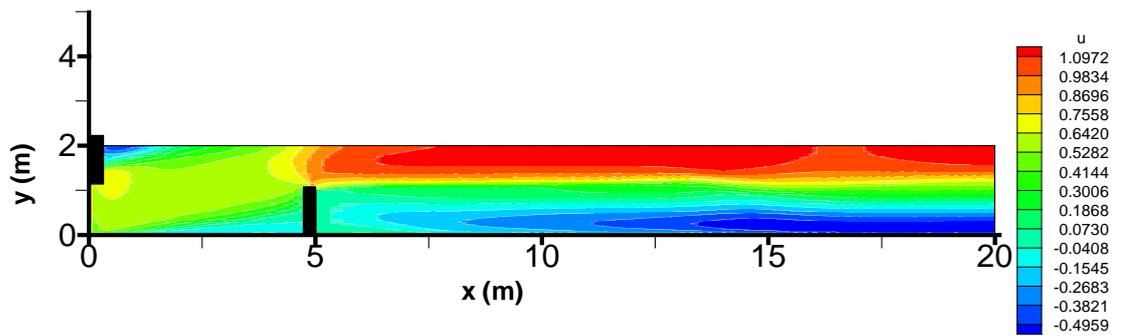


T=25s

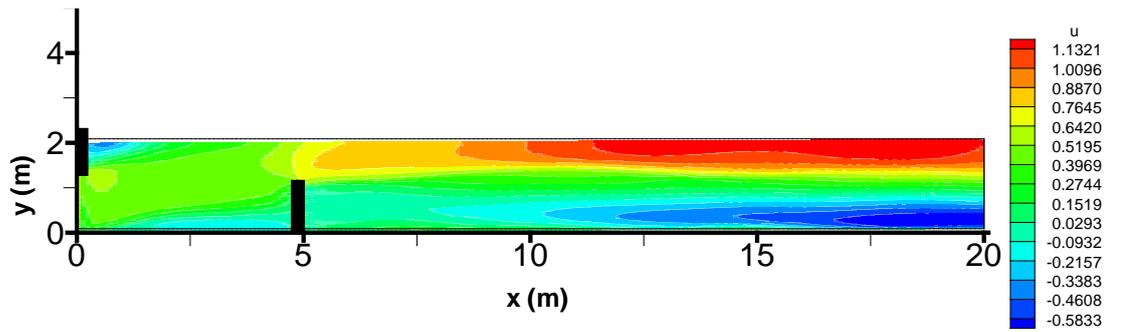


T=30s

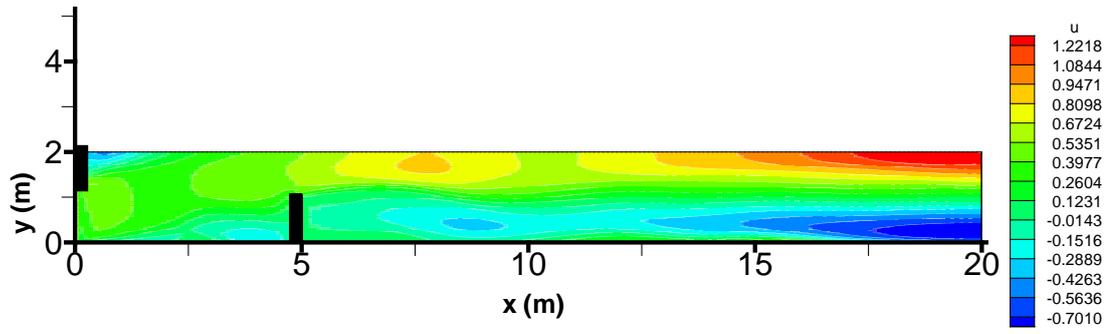
Figure. IV.13 : Variation temporelle des vitesses en m/s dans un canal avec un seul obstacle (pour T = 10 ÷ 30 s)



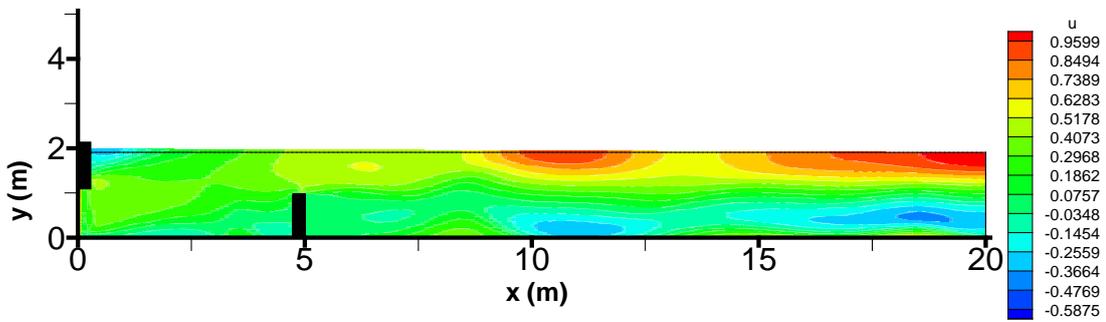
T=35s



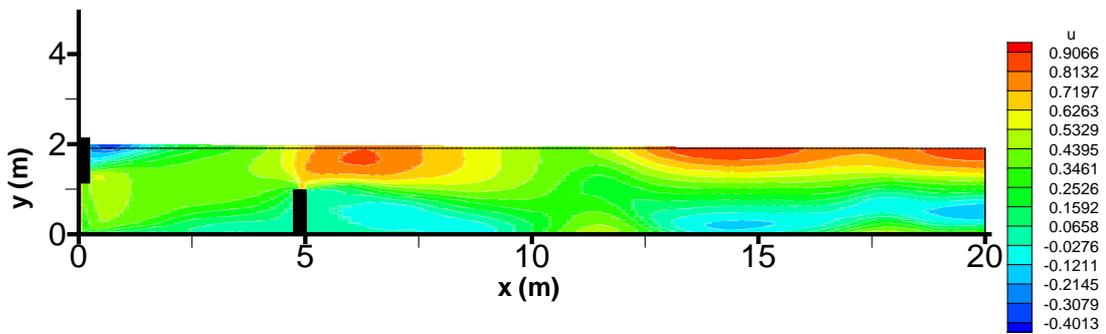
T=40s



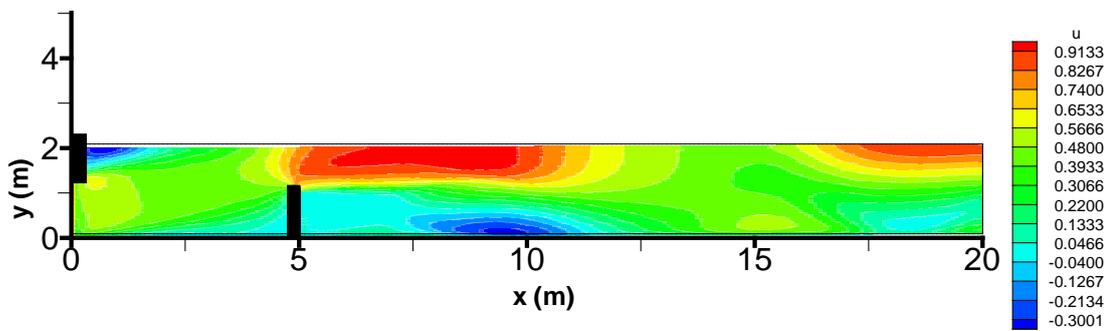
T=45s



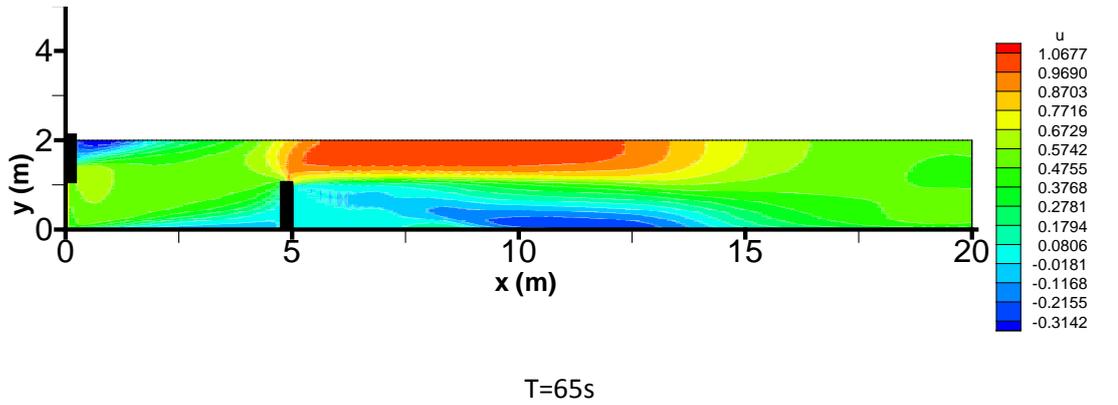
T=50s



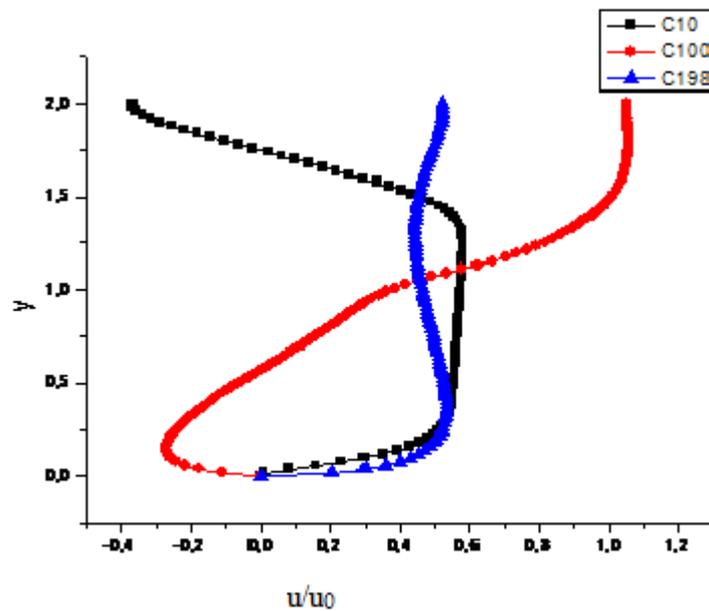
T=55s



T=60s



**Figure. IV.14 :** Variation temporelle des vitesses en (m/s) dans un canal avec un seul obstacle (T = 40 s ÷ 65 s)



**Figure. IV.15 :** Les profils de vitesse en (m/s) calculée dans un plan horizontal

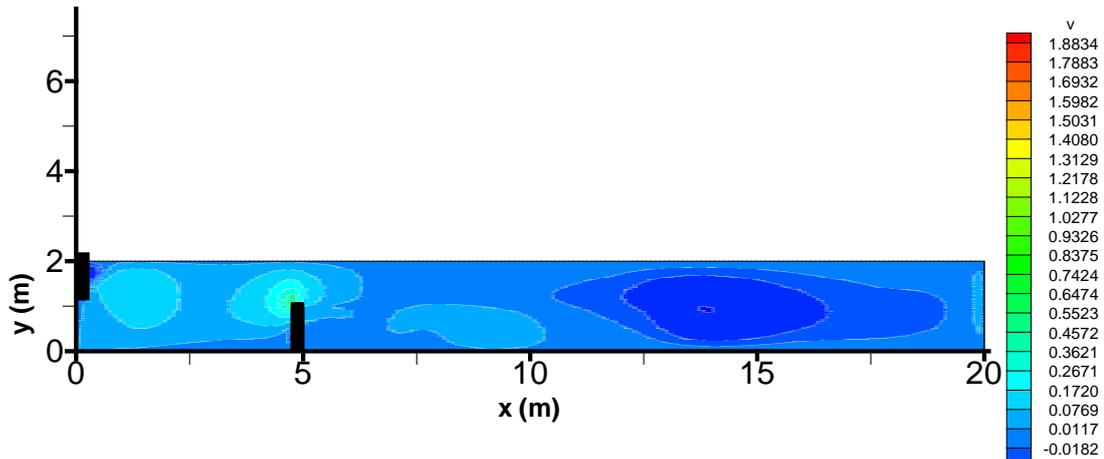


Figure. IV.16 : Distribution de la composante verticale de la vitesse (m/s) dans le canal

b) pour la zone de l'écoulement directement au dessus de l'obstacle la pénétration de la recirculation au dessus de l'obstacle est respectée, on peut la voir aussi après l'obstacle. Avec le modèle  $k - \varepsilon$  on a une surestimation de la composante horizontale de la vitesse ce qui conduit a une augmentation de l'énergie cinétique turbulente.

(Dragent, 1996)[10] a également ce même type de résultat ; à l'amont de l'obstacle provoquant une augmentation du mélange turbulent dans les couches cisailées est donc une augmentation du taux d'entrainement du sillage figure (IV. 17) (IV -18)

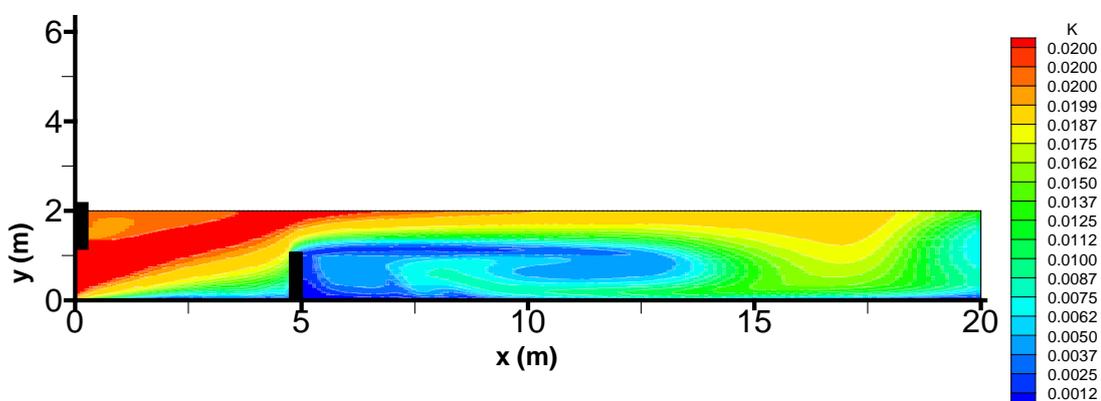
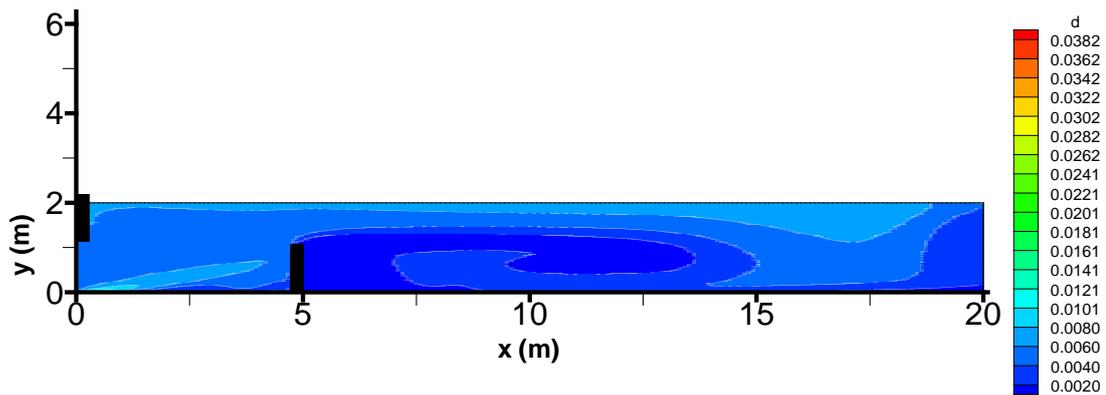


Figure. IV.17 : Distribution de l'énergie cinétique en ( $m^2/s^2$ ) dans un canal avec un seul obstacle



**Figure. IV.18 :** Distribution de la dissipation en ( $m^2/s^3$ ) dans un canal avec un seul obstacle

c) à l’aval de l’obstacle se forme une zone de recirculation où l’écoulement la referme pour revenir vers l’obstacle et former ainsi un tourbillon.

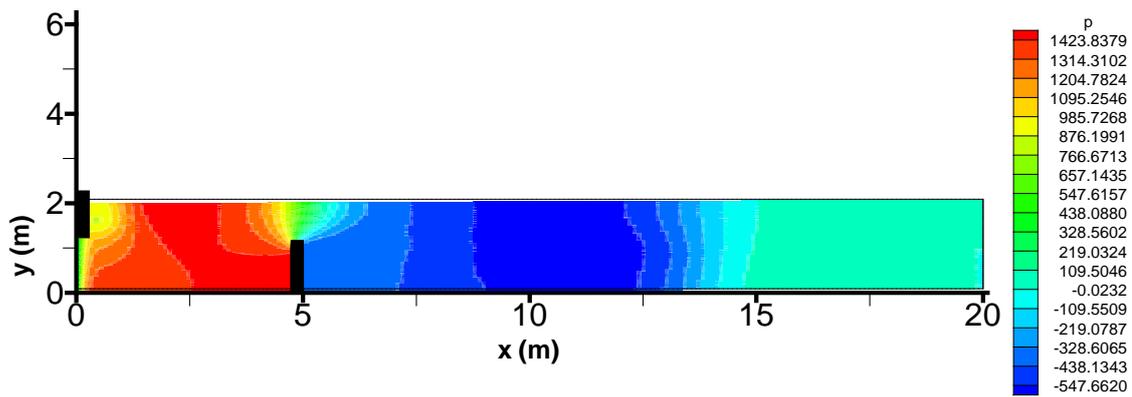
Compte tenu de la valeur de la longueur de recirculation qui est évalué dans la littérature à 10 fois la hauteur de l’obstacle [28] ce qui correspond à notre cas

	Expériences	$K - \varepsilon$
Longueur de la recirculation aval	10H	10H
Hauteur de la recirculation amont	0,65H	0,59H

**Tableau IV -1 :** comparaison des longueurs de recirculation pour l’écoulement autour d’un obstacle

**Remarque :** Malgré le caractère trop diffusif du modèle  $k - \varepsilon$  qui est toujours sous estimé la longueur de recirculation, mais on est arrivé à des bons résultats(en aval de l'obstacle), car on a amélioré les conditions aux limites aux parois.

**d)** le profil de pression en présence de l'obstacle est présenté sur la figure (IV -19) où on peut constater que le gradient de pression est négatif au dessus de l'obstacle et à l'aval de ce dernier qui correspond à une accélération de l'écoulement entre la surface libre et l'obstacle crée par la diminution de la section due à la présence de l'obstacle (conservation de débit).



**Figure. IV.19 :** Distribution de la pression en ( $N/m^2$ ) dans un canal avec un seul obstacle

La dépression est bien sûr liée à la présence du sillage aval de l'obstacle.

#### IV.4.c. En présence de deux obstacles

- On à les mêmes paramètres numériques
- Le même canal mais avec deux obstacles, figure(IV.20)

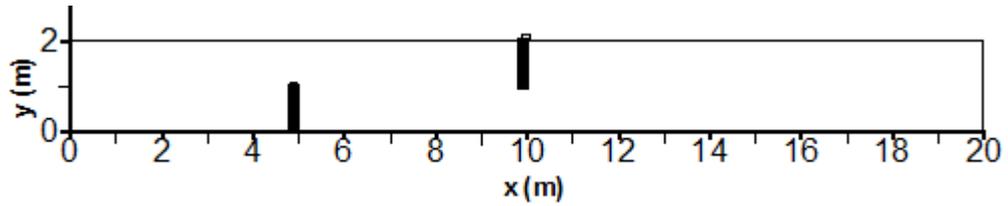


Figure. IV.20 : Géométrie du canal avec deux obstacles

- Le profil de pression en présence de deux obstacles est présenté dans la figure (IV .21). On peut dire qu'on a un gradient de pression positif juste à l'amont de l'obstacle n°1

Le gradient positif devient plus important juste à l'amont de l'obstacle n°2 donc on a deux zones des surpressions (sur des petites distances) et un léger gradient de pression négative dans la zone qui se trouve entre les deux obstacles et après l'obstacle n°2. Ce qui traduit le ralentissement devant l'obstacle jusqu'au point d'arrêt amont, ce qui est cohérent avec la relation de Bernoulli, bien qu'elle néglige les effets visqueux.

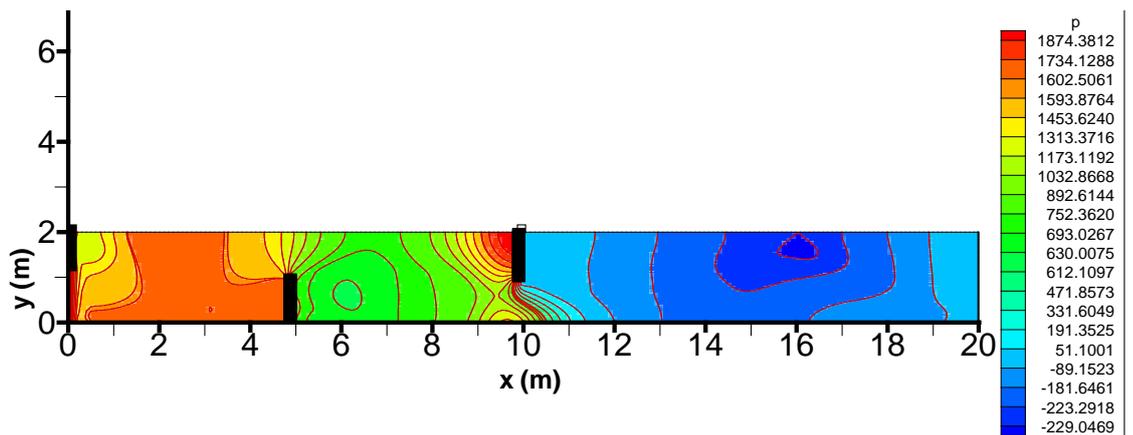


Figure. IV.21 : Distribution de la pression en ( $N/m^2$ ) dans un canal avec deux obstacles

- Il ya trois zones de recirculation sans tenir compte la zone à l'entrée du canal. La région de U négatif est clairement identifiée dans la zone entre les deux obstacles et à l'amont de l'obstacle n°1 et à l'aval de l'obstacle n°2.

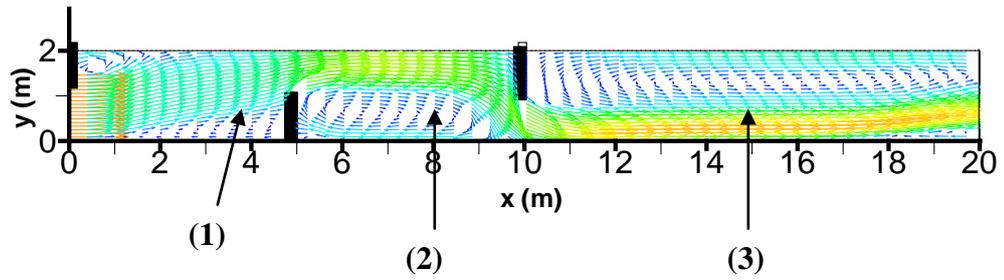


Figure. IV.22 : Vecteurs des vitesses en (m/s) dans un canal avec deux obstacles

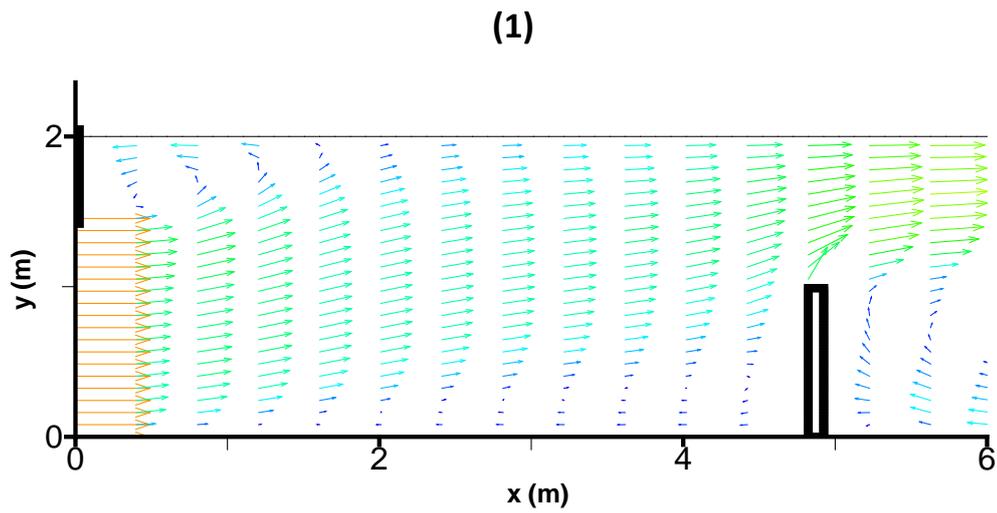


Figure. IV.23 : Vecteurs des vitesses en (m/s) avant l'obstacle n° 1

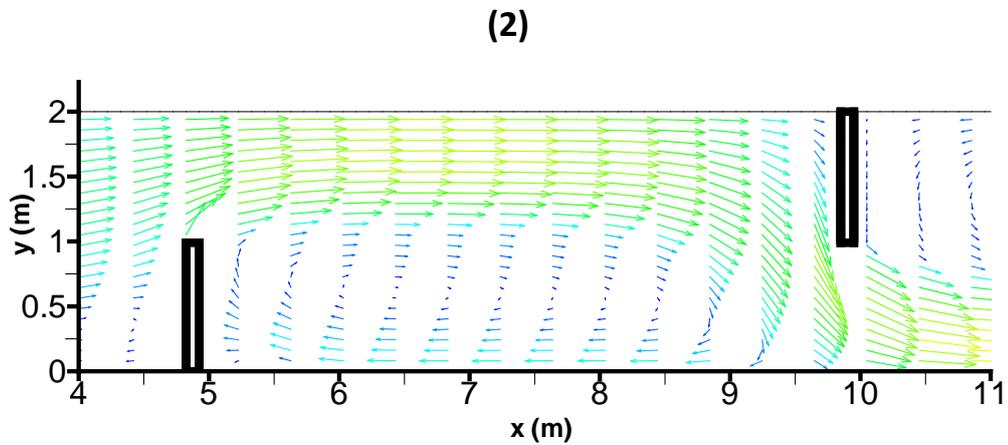


Figure. IV.24 : Vecteurs des vitesses en (m/s) dans la zone entre deux obstacles (zone de recirculation)

(3)

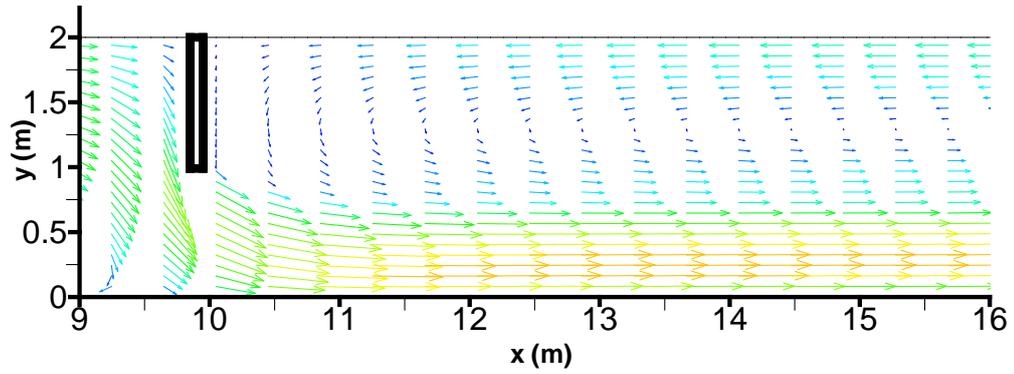


Figure. IV.25 : Vecteurs des vitesses en (m/s) après l'obstacle n°2

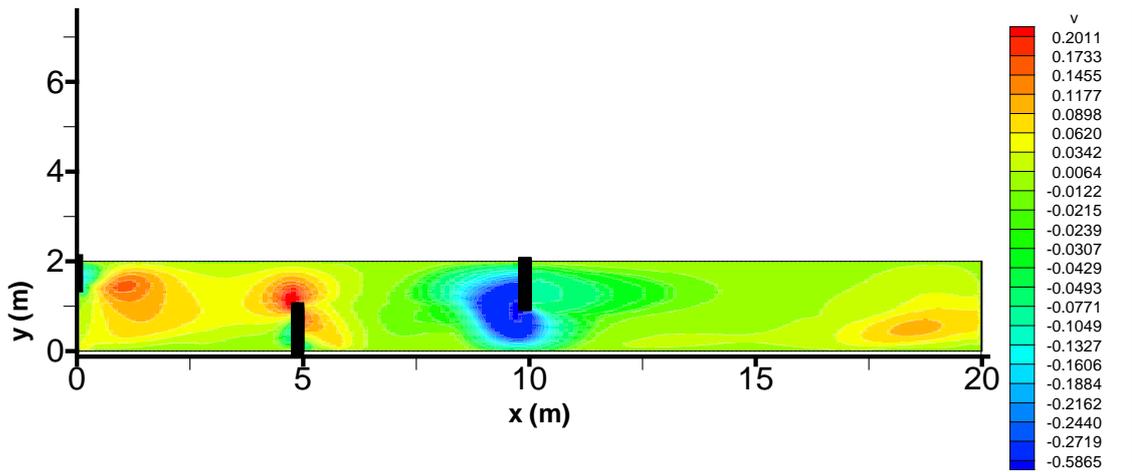


Figure. IV.26 : Distribution de la composante verticale de la vitesse en (m/s) dans le canal

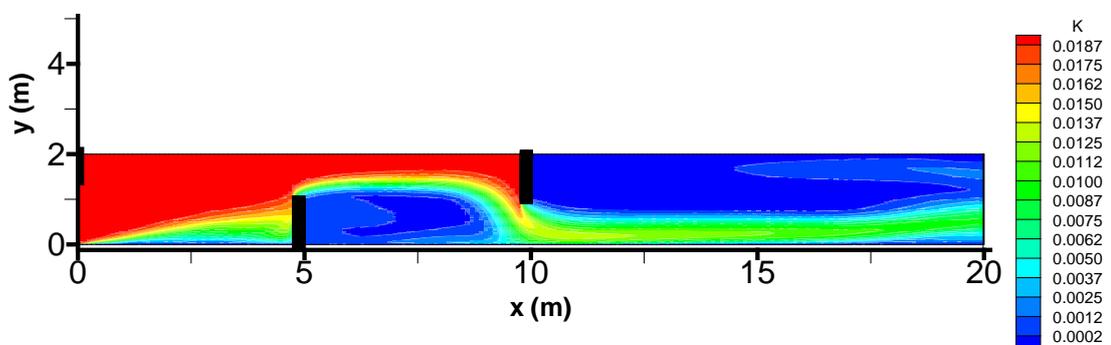


Figure. IV.27 : Distribution de l'énergie cinétique en ( $m^2/s^2$ ) dans un canal avec deux obstacles

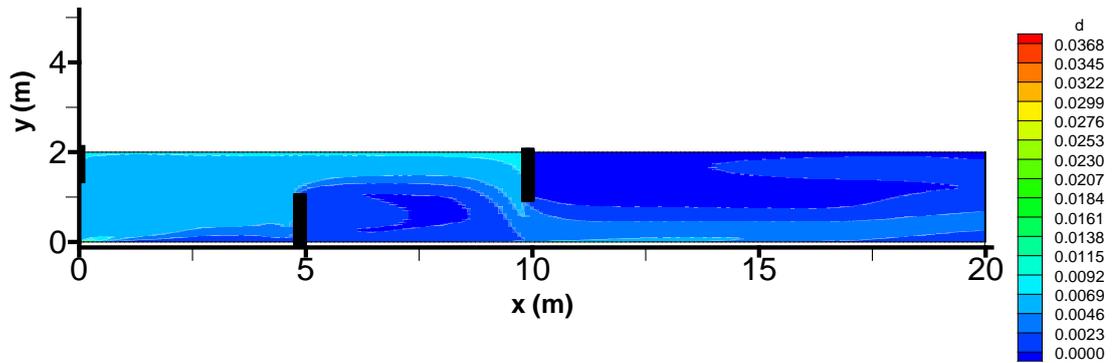


Figure. IV.28 : Distribution de la dissipation en ( $\text{m}^2/\text{s}^3$ )

#### IV.4.d. Conclusion des simulations en monophasique

La présence des obstacles permet d'obtenir des vitesses de circulations moins importantes. Mais avec le modèle  $k-\varepsilon$  on a une sur estimation de la composante horizontale de la vitesse ce qui conduit à une augmentation de l'énergie cinétique turbulente et un meilleur résultat pour la longueur de recirculation.

- Sans obstacle on est arrivé à des résultats assez illustratifs. Ces résultats qui sont obtenus pour les écoulements monophasiques doivent être confirmés en diphasique.

#### IV.5. En diphasique

##### IV.5.1. Influence de l'air sur les vitesses de l'écoulement

Nous avons simulé l'écoulement turbulent instationnaire dans un canal découvert en régime monophasique puis en diphasique et avons étudié l'influence des obstacles sur la vitesse de l'écoulement ainsi que la variation de la vitesse de l'air à l'entrée du canal toujours dont l'objectif consiste à voir le taux de variation et l'influence de l'air sur la valeur de la composante horizontale de l'écoulement.

Le tableau suivant compare les résultats de nos simulations

	Simulation				Littérature [26]
	Monophasique	Diphasique	Variation absolue de $V_m$ ou $Q_m$	Variation relative de $V_m$ ou $Q_m$	Variation relative de $V_m$
$Q_m$ : ( $m^3/s$ )	40	39.4	0.6	-3.5%	Entre -2 et -3%
$V_m$ (m/s)	1	0,985	0,015		

**Tableau IV -2** : Influence de l'air sur la vitesse horizontale de l'écoulement et le débit d'écoulement

D'où :  $V_m$  : la vitesse moyenne en m/s

$Q_m$  : le débit moyen en  $m^3/s$

Les simulations montrent que l'influence de l'air sur la vitesse de l'écoulement est non négligeable. Le temps de l'écoulement, pour voir le régime établi stationnaire est court par rapport au premier cas ( $T = 40s$ ).

Cette influence de l'air est à l'origine de la décroissance de la valeur de la vitesse max qui ne se trouve plus au centre du canal lorsque l'aération commence à produire son effet (voir figure (IV. 29), figure (IV.30)) [pour une vitesse de l'air= $0.75V_{eau}$ ]. La littérature a également ce même type de résultat [26].

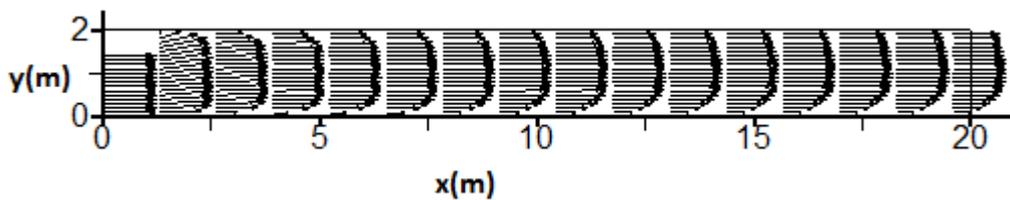
Par contre pour les autres cas ( $V_{air} = (0, 0.25V_{eau}, 0.5V_{eau})$  m/s) on a trouvé que l'influence de l'air sur la vitesse horizontal était négligeable dans les zones près de paroi, au centre, dans la littérature (Dasilva 1994) [8] (site expérimental de Milly La Forêt) a également ce même type de résultat avait trouvé que l'influence de l'air sur la

vitesse horizontal était négligeable. Mais au niveau de la surface libre on a une grande variation de la vitesse horizontale.

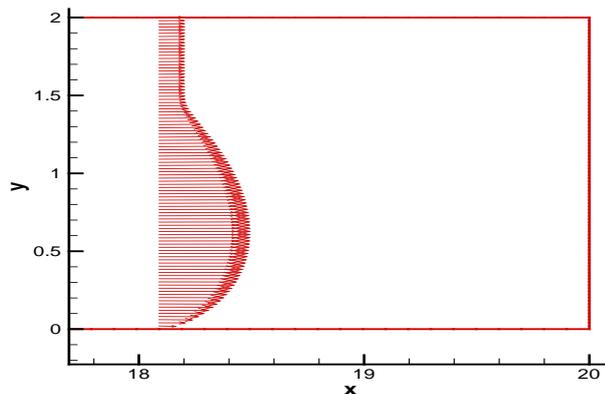
Enfin on ne peut pas baser sur les conclusions de cette auteur ne peuvent être pas généralisées. Elle a bien étudié un chenal circulaire.

Nos résultats devraient être vérifiés par des mesures ou par des logiciels.

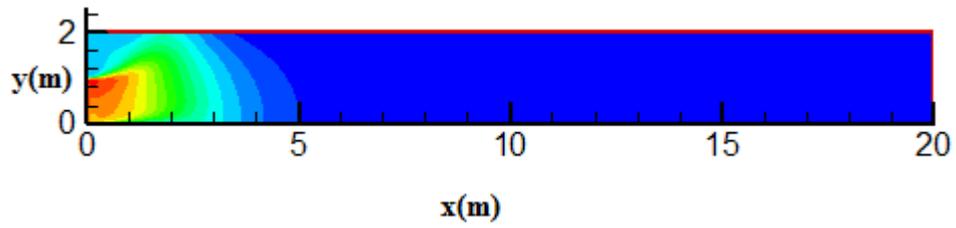
L'étude de l'influence de l'air sur les vitesses horizontales de l'écoulement est donc encore un point à approfondir.



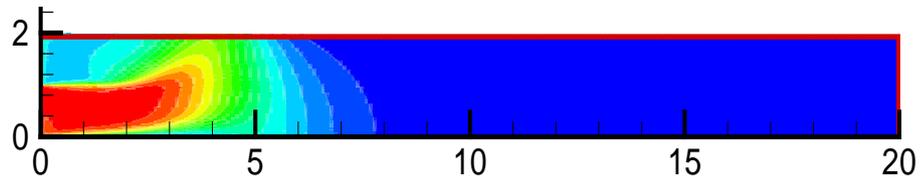
**Figure. IV.8 :** Répartition des champs vitesses en (m/s) dans le canal (sans obstacle en monophasique)



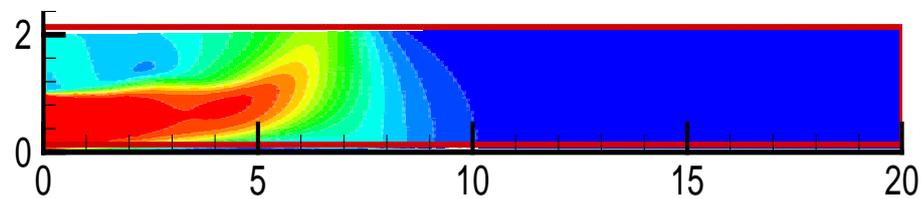
**Figure. IV.29 :** Répartition des vitesses en (m/s) dans le canal (sans obstacle en diphasique)



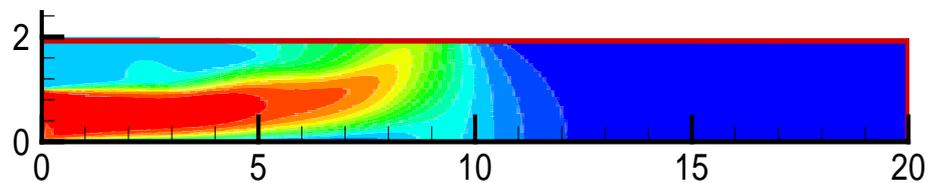
$T=2.5$  s



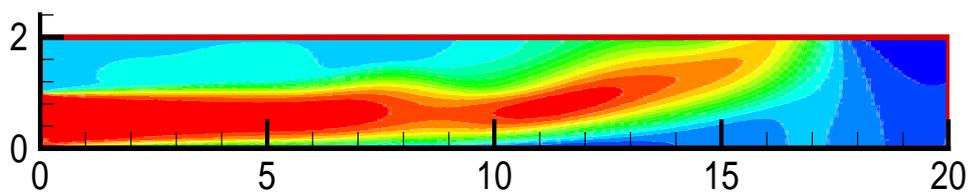
$T=5.0$  s



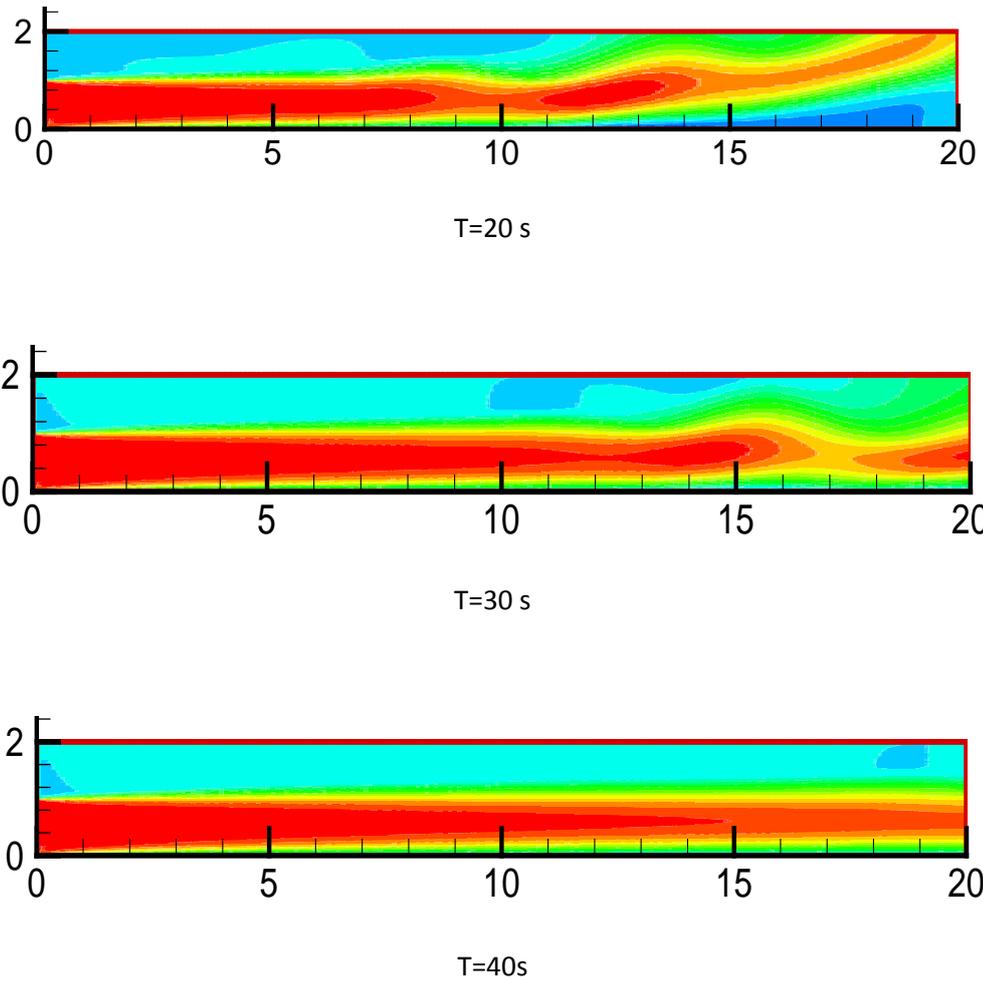
$T=7.5$  s



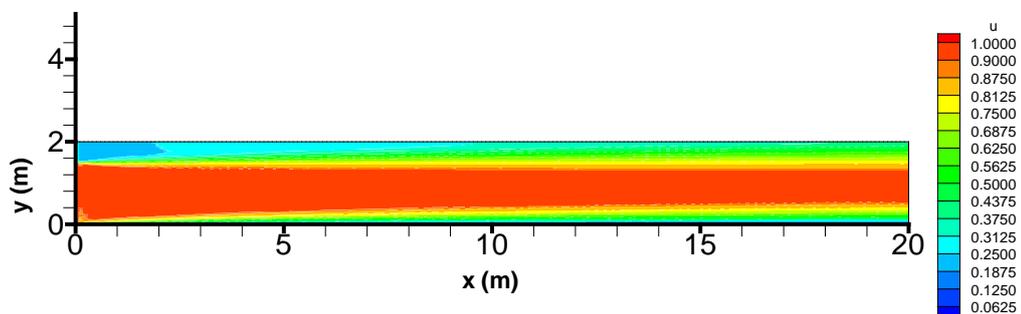
$T=10$  s



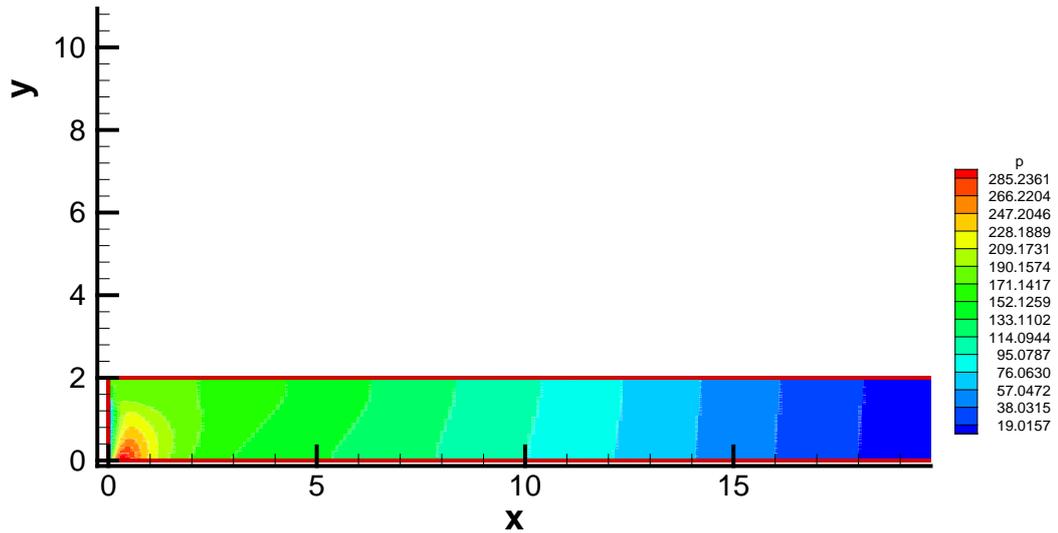
$T=15$  s



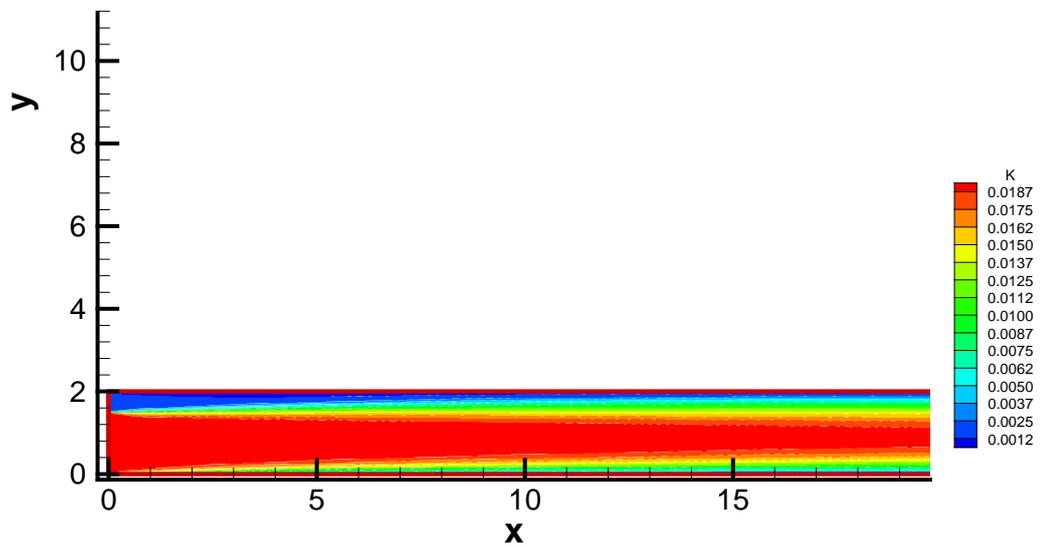
**Figure. IV.30 :** Variation temporelle des vitesses en (m/s) ( $T= 2,5-40s$ ) dans un canal (sans obstacle) pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée  $=0.75V_{\text{eau}}$  m/s



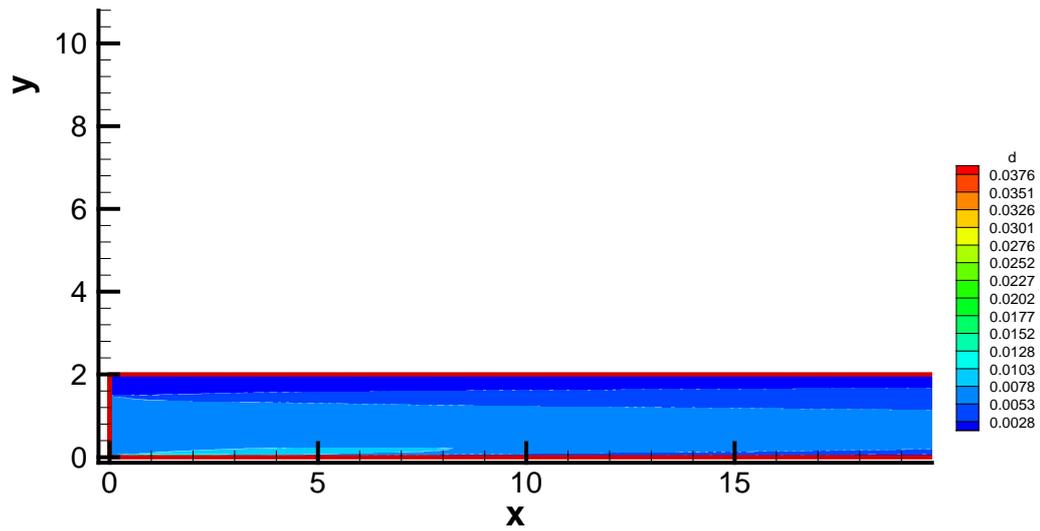
**Figure. IV.31 :** Distribution de la vitesse en (m/s) dans un canal sans obstacle  
Pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée  $= 0.25V_{\text{eau}}$



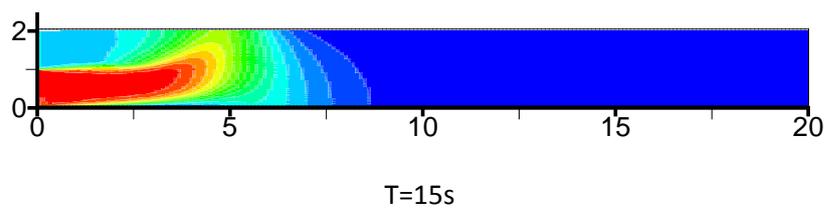
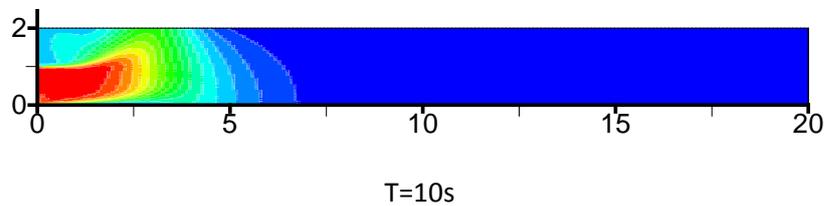
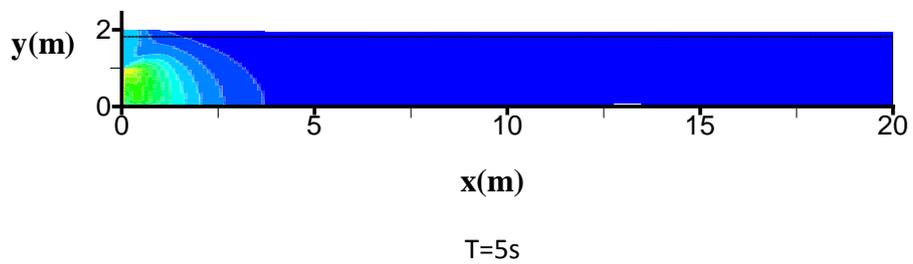
**Figure. IV.32 :** Distribution de la pression en ( $N/m^2$ ) dans un canal sans obstacle pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée = 0.25 m/s

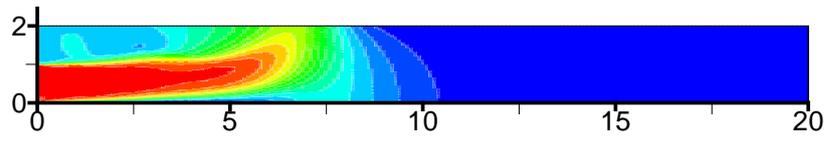


**Figure. IV.33 :** Distribution de l'énergie cinétique en ( $m^2/s^2$ ) dans un canal pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée = 0.25 m/s

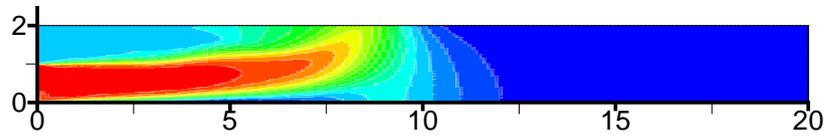


**Figure. IV.34 :** Distribution de la dissipation en ( $\text{m}^2/\text{s}^3$ ) dans un canal pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée = 0.25 m/s

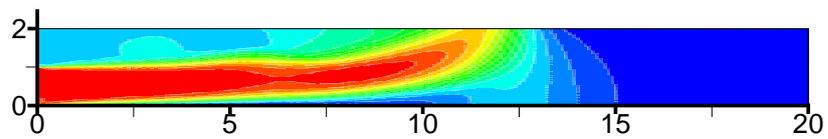




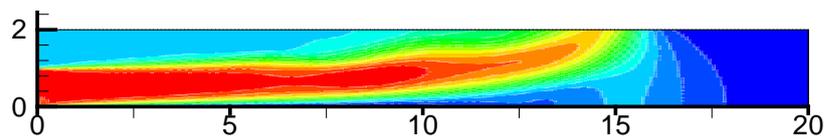
T=20s



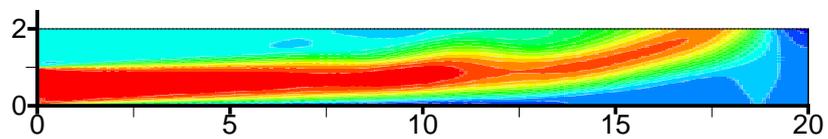
T=22s



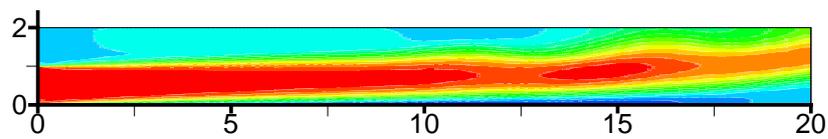
T= 25s



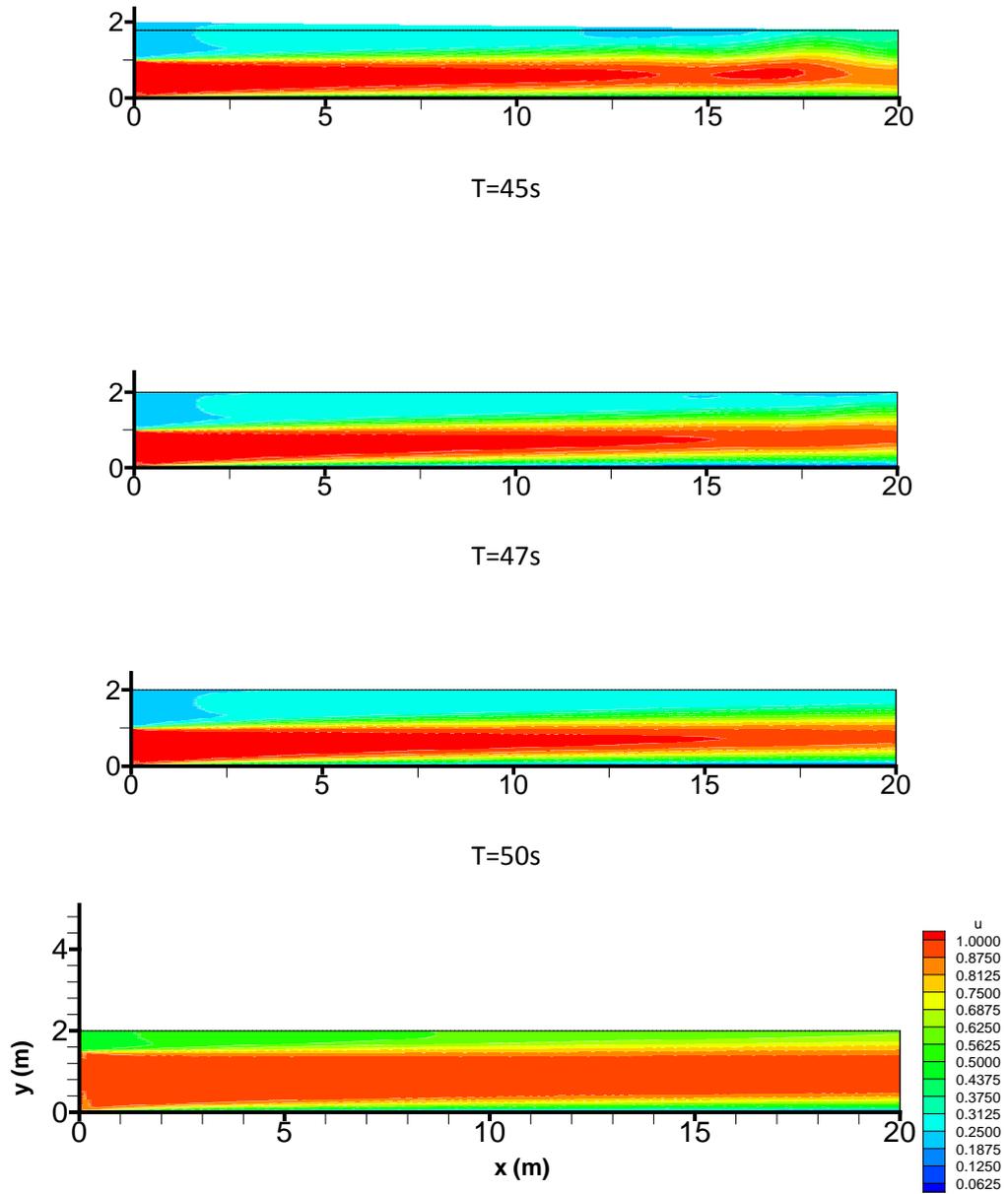
T=30s



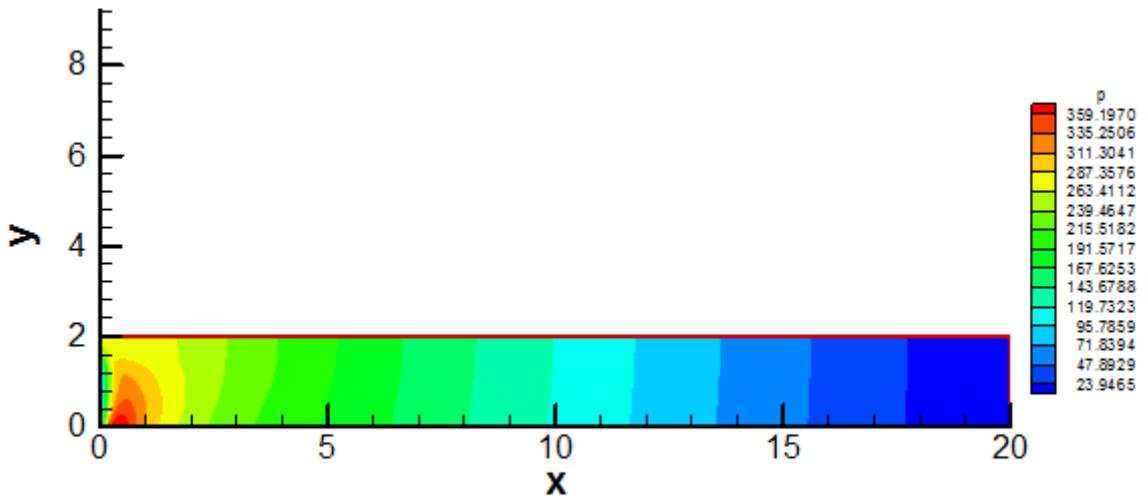
T=35s



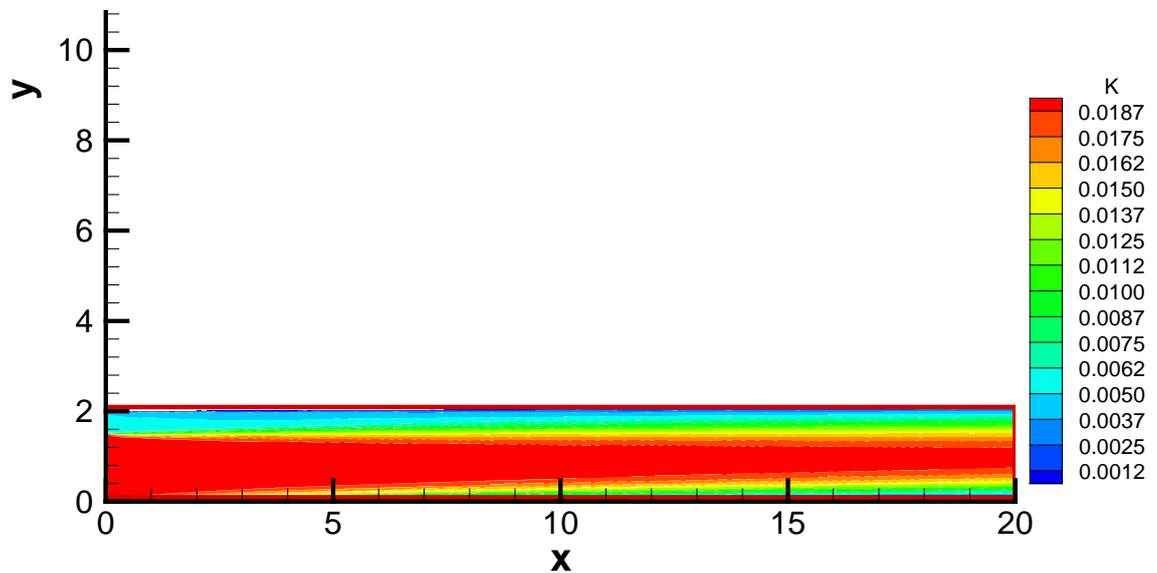
T=40s



**Figure. IV.35 :** Variation temporelle de la vitesse ( $T= 2,5-50s$ ) dans un canal (sans obstacle) pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée =  $0,5 V_{eau}$



**Figure. IV.36** Distribution de la pression en (N/m<sup>2</sup>) dans un canal sans obstacle pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée =  $0,5 V_{eau}$



**Figure. IV.37** : Distribution de l'énergie cinétique en (m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>) dans un canal (sans obstacle) pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée =  $0,5 V_{eau}$

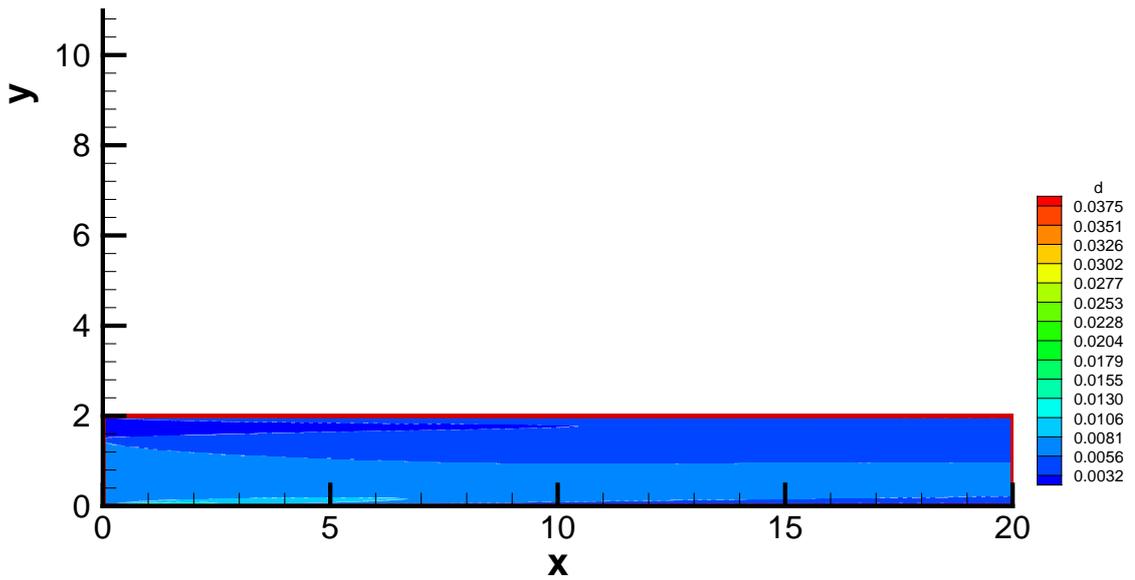


Figure. IV.38 : Distribution de l'énergie cinétique en ( $m^2/s^2$ ) dans un canal (sans obstacle) pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée =  $0,5 V_{eau}$

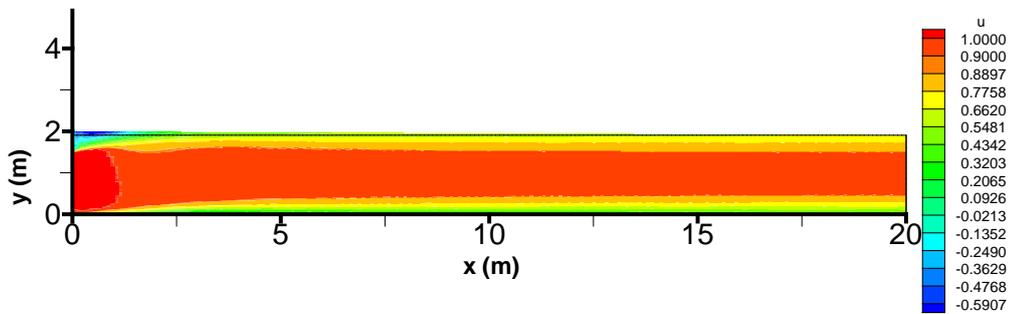
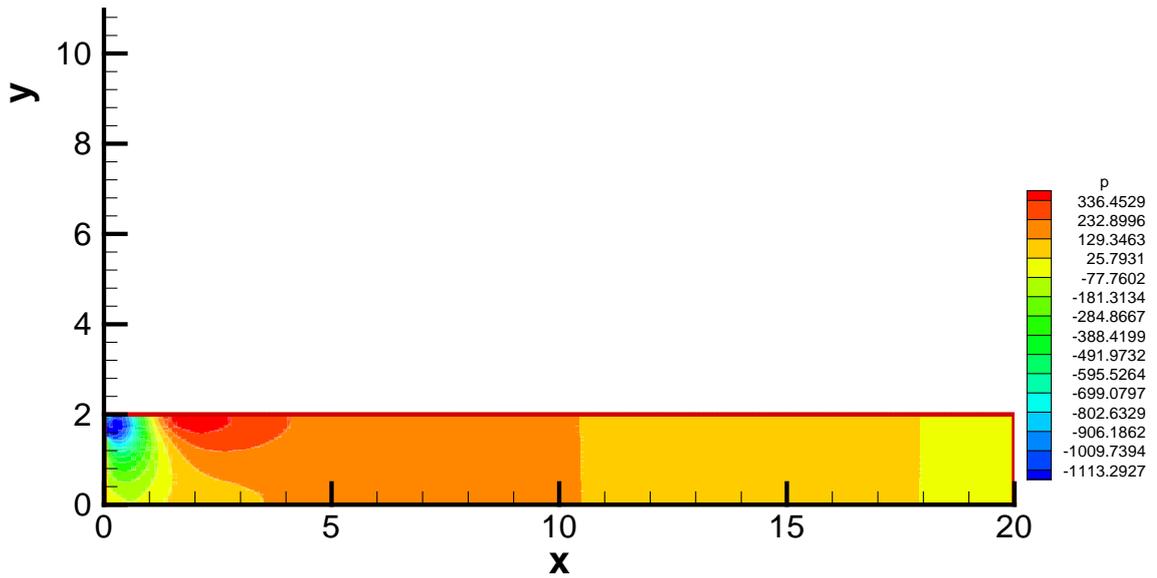
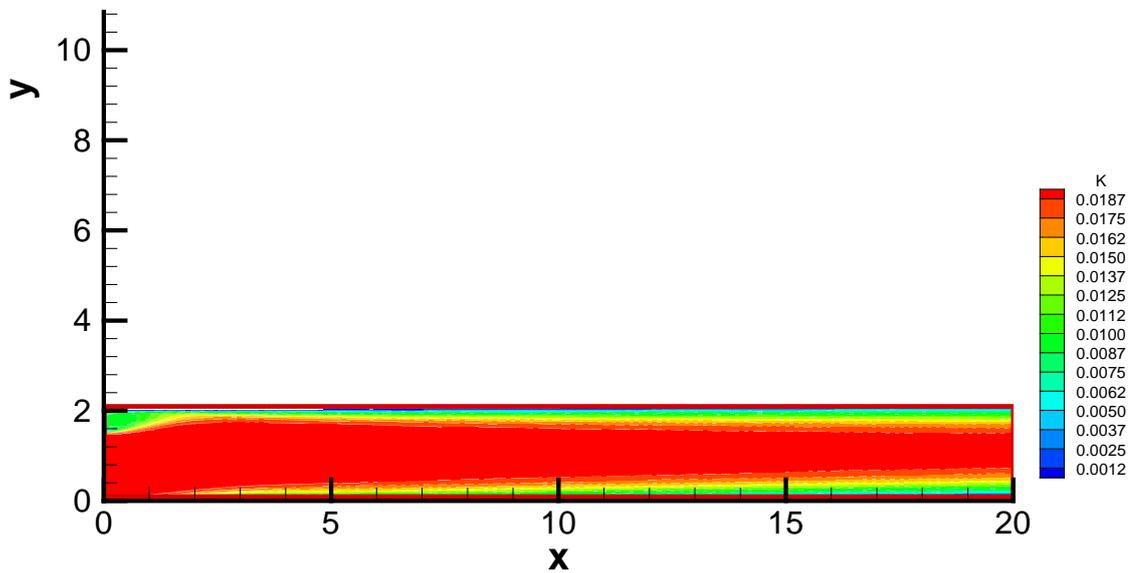


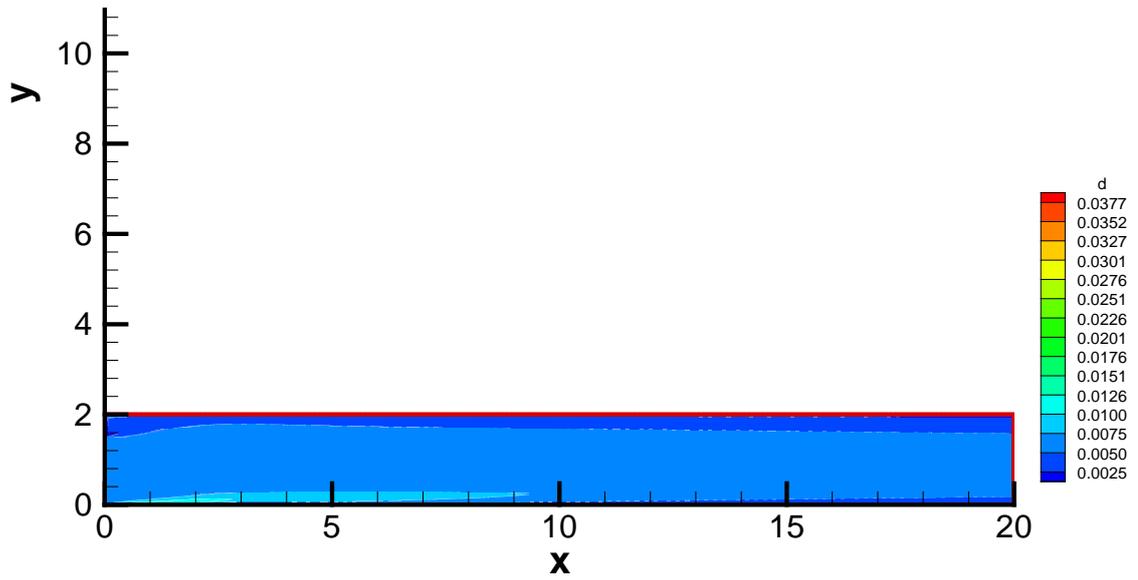
Figure. IV.39 Distribution de la vitesse en (m/s) dans un canal sans obstacle pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée = 0 m/s



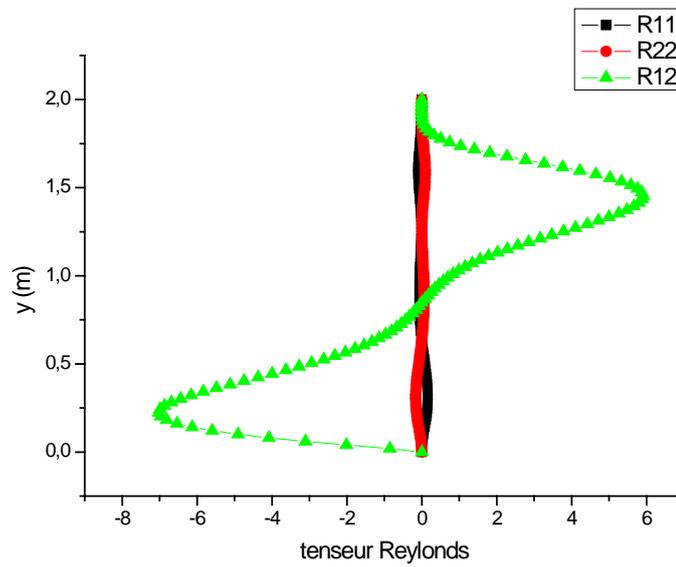
**Figure. IV.40 :** Distribution de pression en ( $\text{N/m}^2$ ) dans un canal sans obstacle pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée = 0 m/s



**Figure. IV.41 :** Distribution de l'énergie cinétique en ( $\text{m}^2/\text{s}^2$ ) dans un canal sans obstacle pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée = 0 m/s



**Figure. IV.42 :** Distribution des champs de la dissipation en ( $\text{m}^2/\text{s}^3$ ) dans un canal sans obstacle pour une vitesse de l'air imposée à l'entrée = 0 m/s



**Figure. IV.43 :** Profil transversal des composantes du tenseur Reynolds

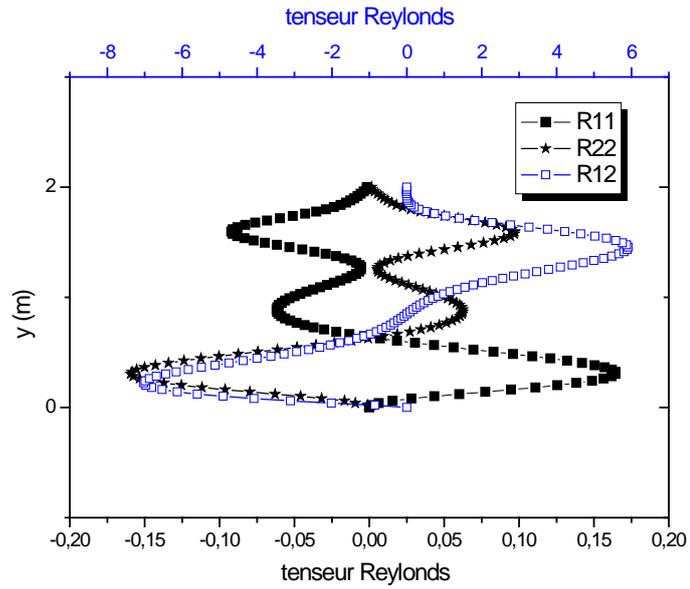


Figure. IV.44 : Le tenseur des contraintes de Reynolds

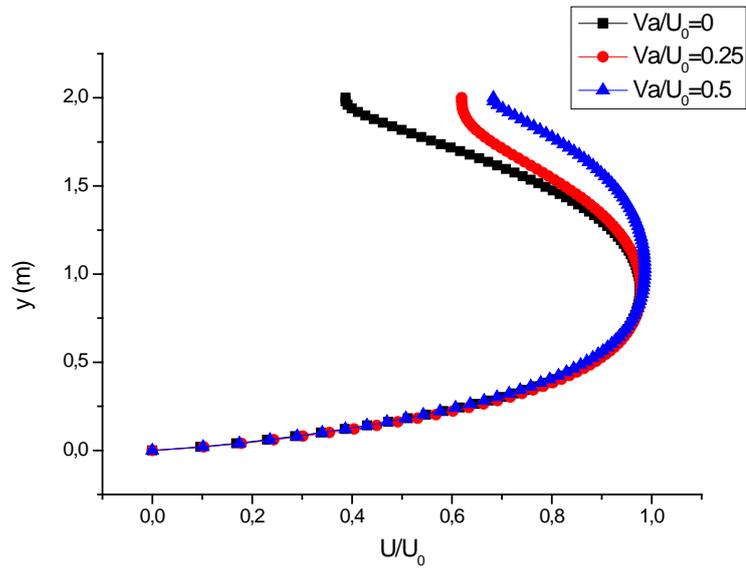
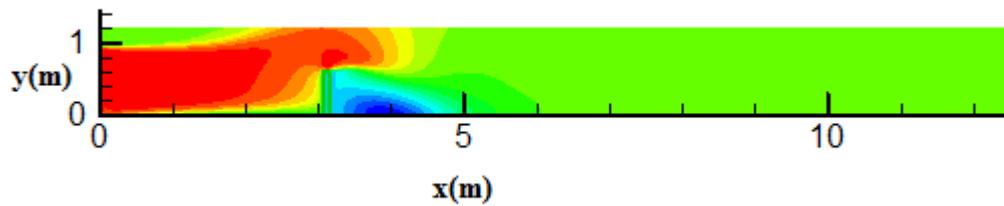


Figure. IV.45 Les profils de comparaison de vitesse en (m/s) calculée dans un plan horizontal (pour les 3cas)

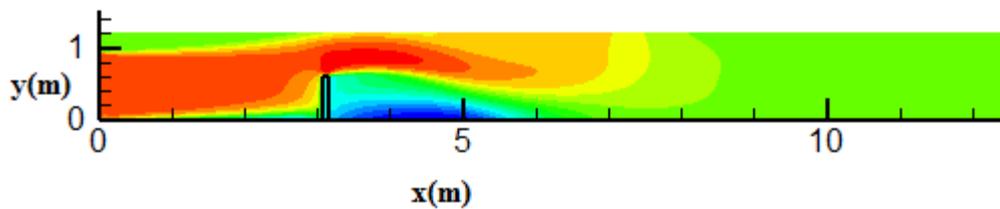
### IV.5.2. Influence des obstacles sur la composante horizontale de la vitesse de l'écoulement:

Lorsqu'on examine les champs de vitesse résultants dans les deux sections perpendiculaires à l'écoulement, nous pouvons observer deux zones des recirculations entre les deux obstacles, l'une importante située avant l'obstacle n°2 et l'autre est plus petite après l'obstacle n°1.

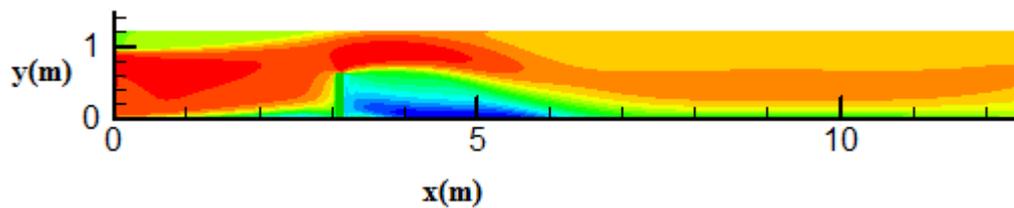
La longueur de recirculation est inférieure à  $10 H$  ce qui explique la sous estimation du modèle  $K-\varepsilon$  qui est du à son caractère trop diffusive, près des obstacles la composante verticale de la vitesse subsiste, partout ailleurs, la vitesse de l'eau est horizontale.



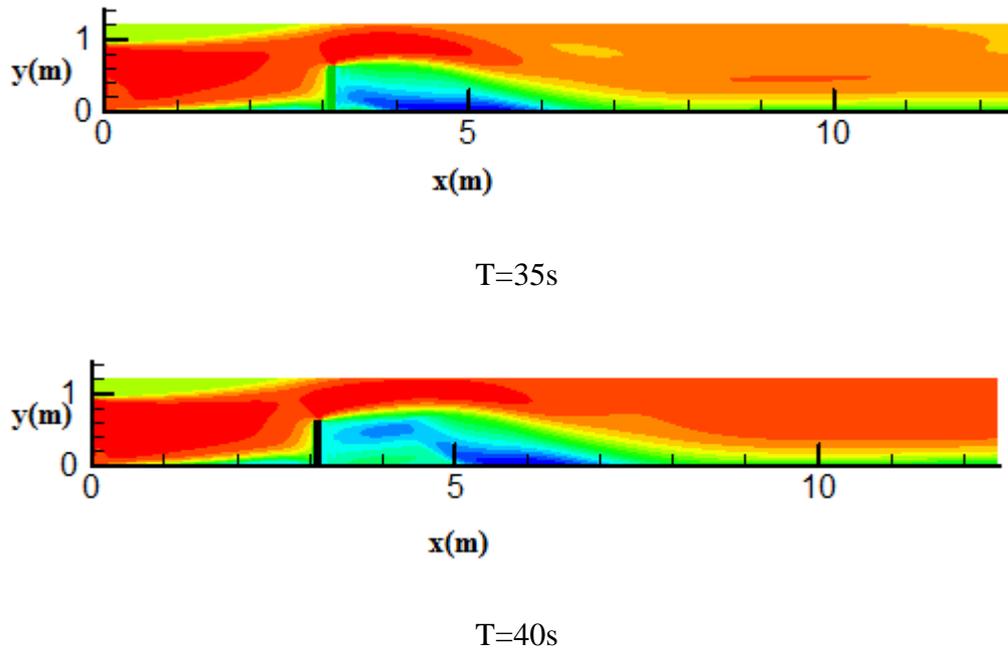
$T=2,5 \text{ s}$



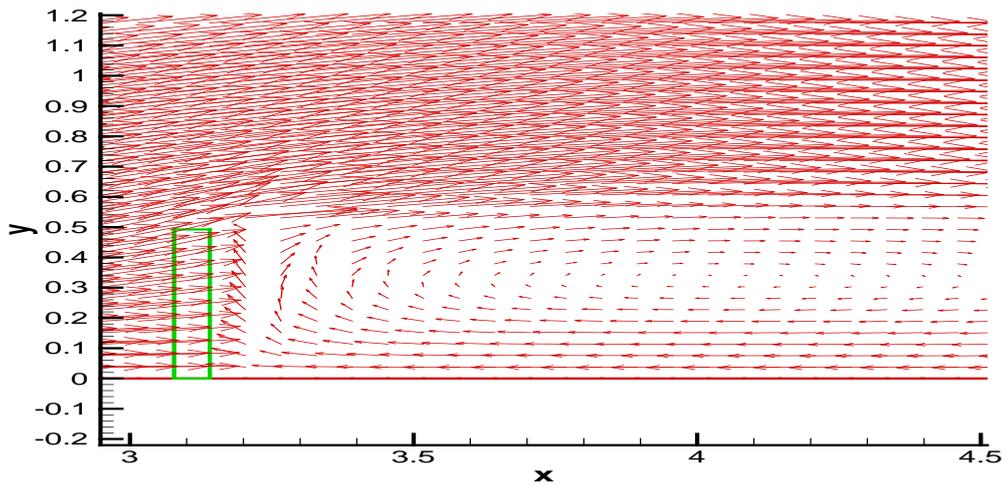
$T=20 \text{ s}$



$T=30 \text{ s}$



**Figure. IV.46 :** Variation temporelle de vitesse ( $T= 2,5-40s$ ) dans un canal (avec un obstacle)



**Figure. IV.47:** Répartition des vecteurs de vitesse dans le canal (avec obstacle)

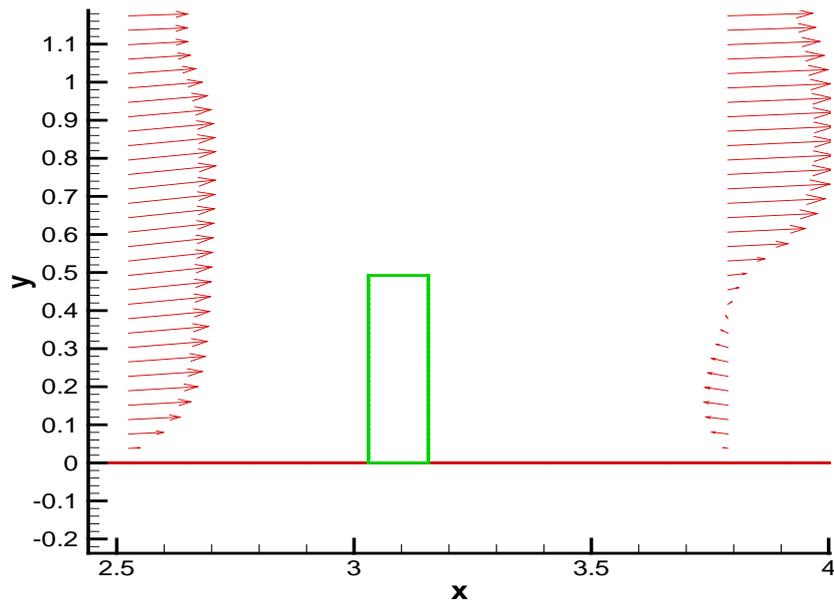


Figure. IV.48: Vecteurs de vitesse à l'amont et à l'aval de l'obstacle

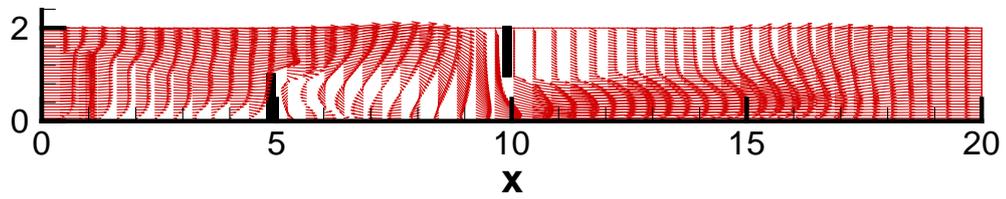


Figure. IV.49: Vecteurs de vitesse en (m/s) en présence de deux obstacles

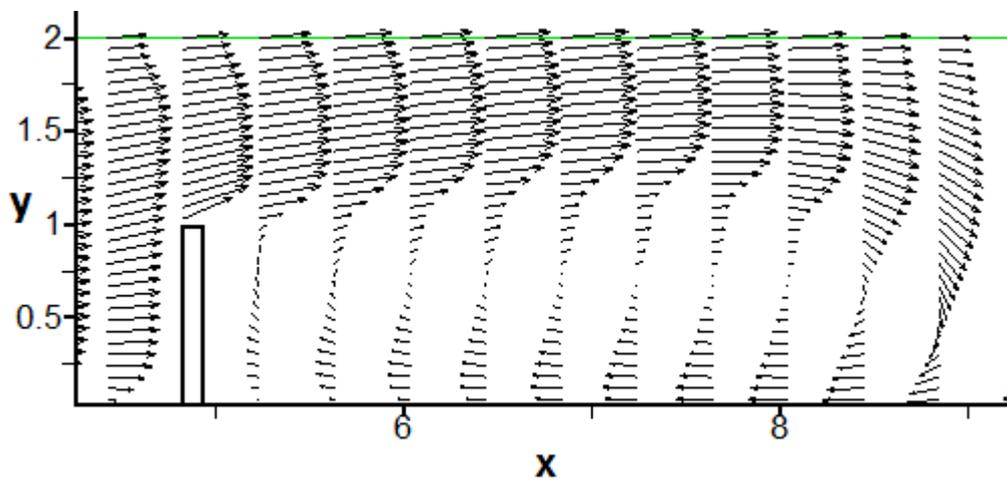


Figure. IV.50: Vecteurs de vitesse en (m/s) à l'aval de l'obstacle n°1

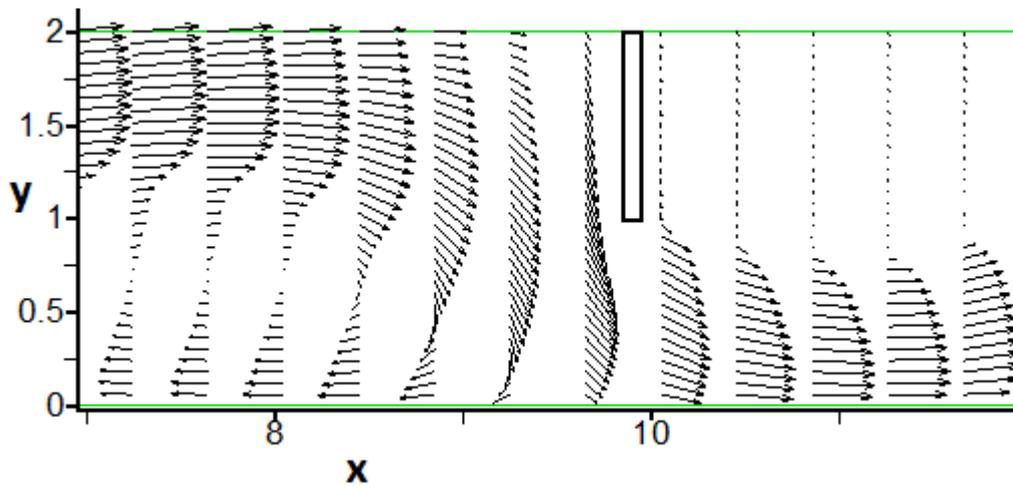


Figure. IV.51: Vecteurs de vitesse en (m/s) à l'amont de l'obstacle n°2

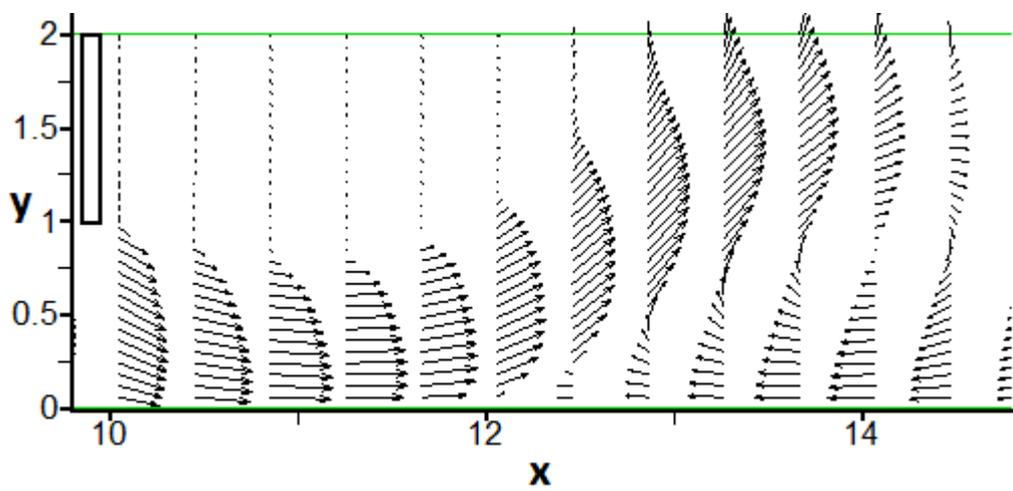


Figure. IV.52: Vecteurs de vitesse en (m/s) à l'aval de l'obstacle n°2

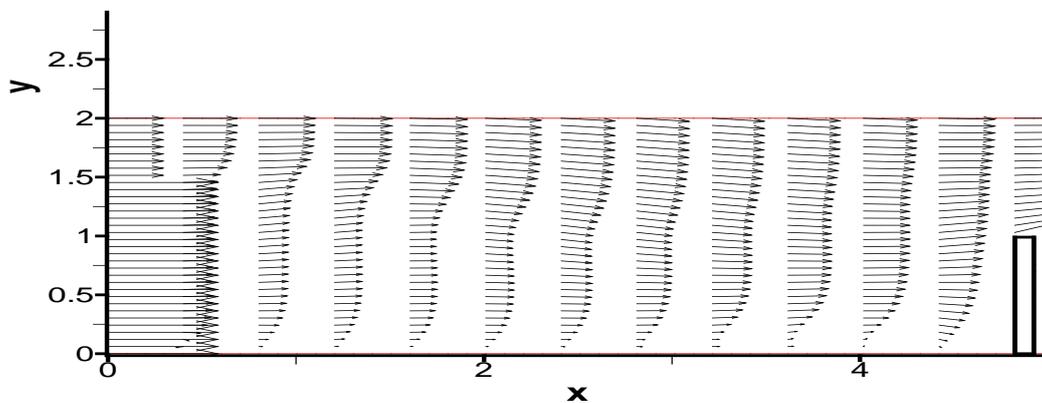


Figure. IV.53: Les zones de recirculation aux dessus de l'obstacle n°1

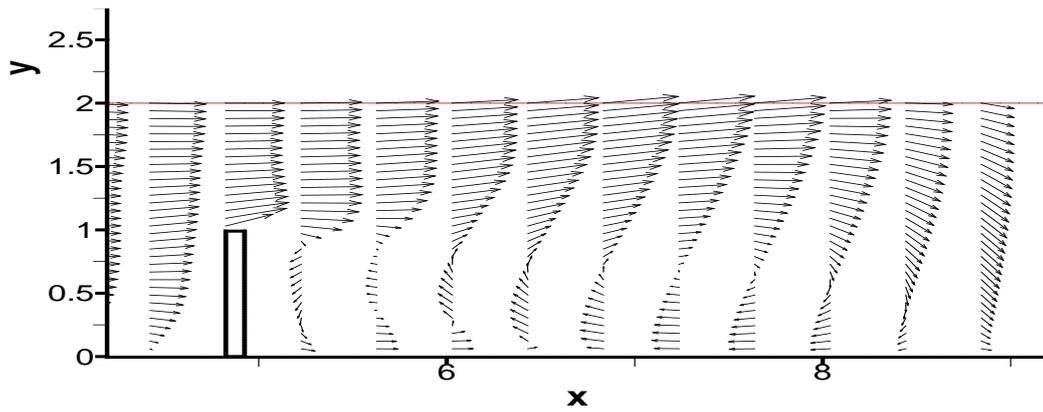


Figure. IV.54: Les zones de recirculation après l'obstacle n°1

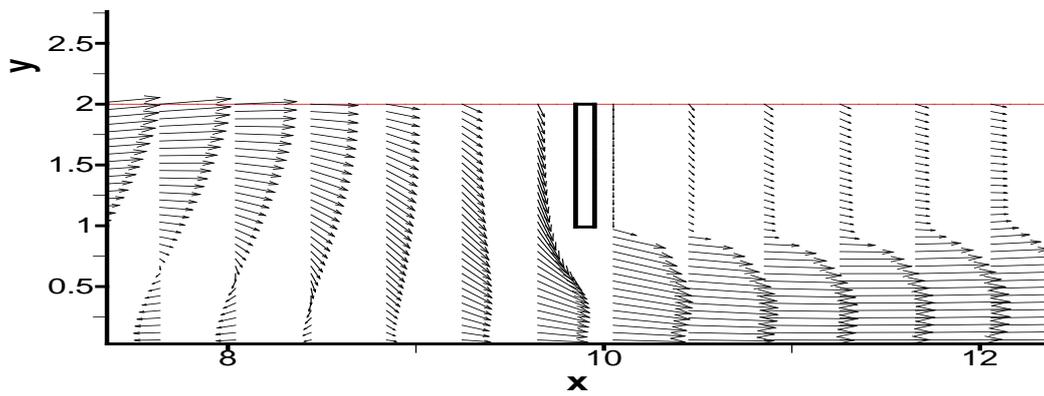


Figure. IV.55: Les zones de recirculation après l'obstacle n°2

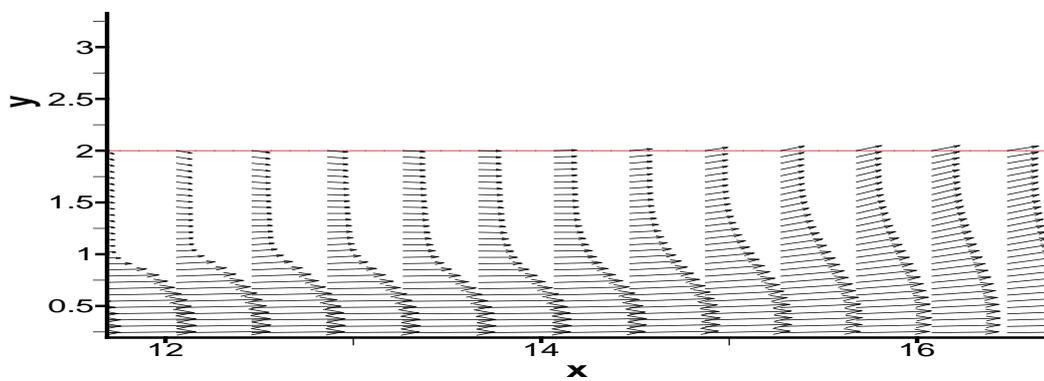
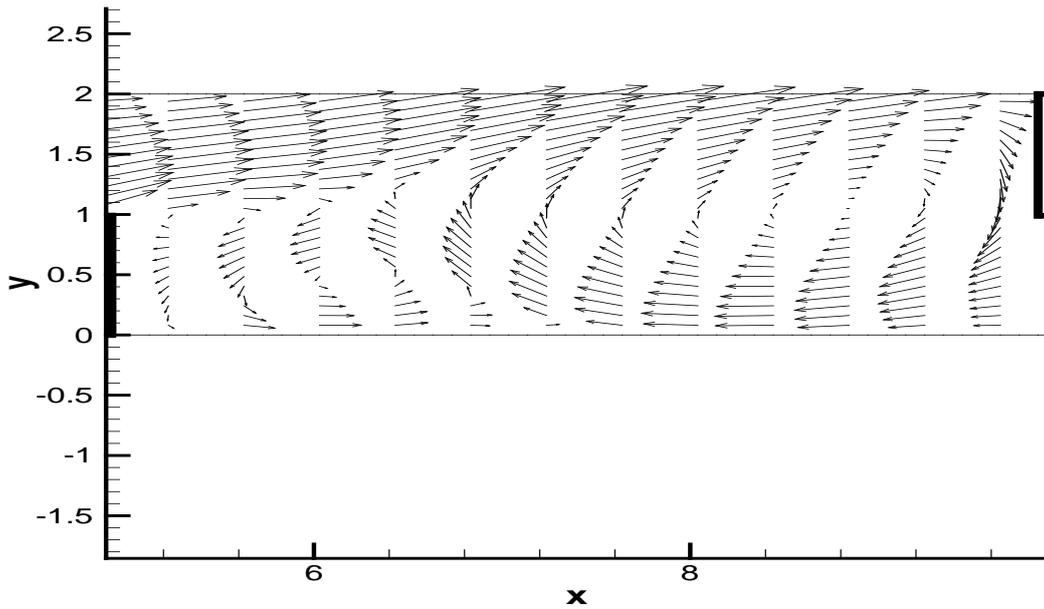
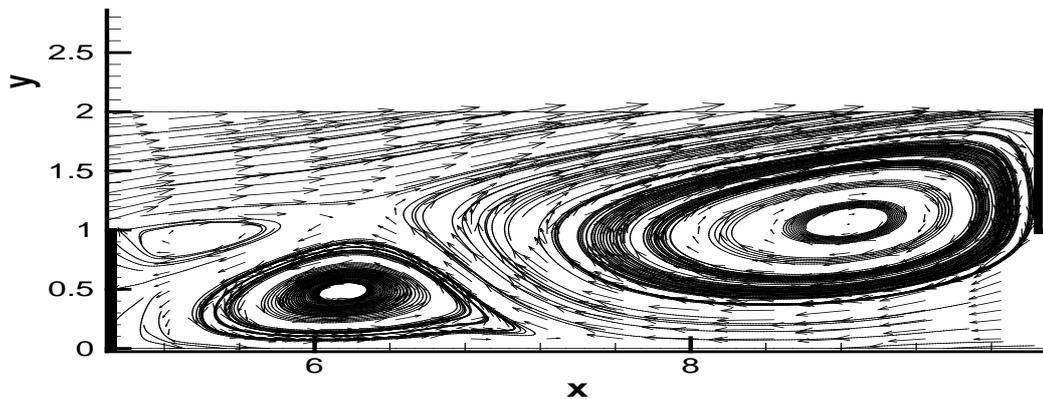


Figure. IV.56: Les vecteurs de vitesse après la zone de recirculation



**Figure. IV.57:** Les zones de recirculation entre deux obstacles (vecteurs de vitesse en m/s)



**Figure. IV.58:** Les lignes de courant dans la zone entre deux obstacles

### IV.5.3. Conclusion des simulations en diphasique

- Nous avons dans un premier temps étudié le couplage entre l'eau et l'air dans un canal sans obstacle.
- Pour les régions loin de l'interface les mêmes résultats obtenus sont presque les mêmes qu'en écoulement monophasique pour une vitesse d'air égale à 0,75 de la vitesse d'eau par contre pour les autres variations on a presque une influence

négligeable dans les zones près de paroi par contre une grande variation au niveau de la surface libre et les zones proches de cette dernière.

- Dans un second temps on a étudié l'influence des obstacles sur la composante horizontale de l'écoulement dont l'objectif est toujours d'améliorer les vitesses de l'écoulement horizontal dans le canal.
- Des zones de recirculations à faibles vitesses ont été définies, celle-ci sont situées dans l'alignement de l'obstacle et elles s'étendent jusqu'au seuil aval, quand le profil de vitesse présente une pente infinie, il y a décollement de la couche limite. Après le point de décollement la couche limite devient turbulent, les forces de viscosité ne sont plus assez importantes pour assurer le contournement normal de l'objet, il se forme un « sillage » ou une zone de recirculation, le sillage est en effet responsable d'une dissipation d'énergie très importante.

Malgré que ces résultats sont tout à conformes à la littérature spécialisée [8], [26], ils doivent néanmoins être confirmés en les comparant avec d'autres mesures expérimentales.

# Conclusion Et Perspectives

## Conclusion et perspectives

Dans de nombreux cas d'hydraulique ou de mécanique des fluides on observe le mélange de plusieurs fluides (newtoniens ou non newtoniens) dans des proportions extrêmement variées. Cette étude s'est focalisée à juste titre sur le couplage entre la turbulence et la surface libre. Dans ce travail nous sommes penchés à juste titre sur l'étude numérique d'un écoulement à surface libre pariétal turbulent dans un canal rectangulaire horizontal en régime monophasique (cas1) et diphasique (cas2) en absence et en présence des obstacles, on a par conséquent considéré un écoulement bidimensionnel d'un fluide newtonien homogène et incompressible.

La formulation mathématique de ce type d'écoulement est déduite de l'écriture des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

En ce qui concerne le régime turbulent, la décomposition de Reynolds des équations rend le système d'équations ouvert et par conséquent pour effectuer sa fermeture on a été amené à adopter un modèle de turbulence capable de traiter des géométries complexes à grand nombres de Reynolds. A cet effet on a opté pour le modèle de fermeture k- $\epsilon$ , qui fait partie de cette catégorie de modèles élaborés par Jones et Launder en 1974. Ce modèle qui tient compte du transport des quantités turbulentes en leur associant des équations de transports différentielles et largement utilisés. Étant en plus très général, plus connu, plus utilisé par les codes de calcul par le fait de son efficacité.

Malgré tous ses avantages qui le caractérisent, ce modèle a malheureusement montré son incapacité à décrire les phénomènes qui prennent naissance au voisinage des parois solides. C'est pourquoi il est souvent associé à une loi de paroi qui permet de ne pas mener la résolution des équations de bilan jusqu'à cette paroi.

- Pour le cas diphasique nous avons conclu que la présence de l'air est responsable à une variation non négligeable des vitesses de l'écoulement dans le canal.

Par ailleurs, nous avons mis en évidence l'influence de la phase air sur la phase liquide (nos résultats sont conformes à ce qui est annoncé dans la littérature spécialisée) pour les deux cas.

- Les résultats que nous avons obtenus en monophasique doivent donc être confirmés en comparant les résultats de nos simulations avec des mesures expérimentales. Ils peuvent aussi être complétés par d'autres études, telles que l'influence de la pente, et de la variation de la rugosité sur la répartition de la vitesse d'écoulement.
- Nous nous sommes contentés, à partir du cas monophasique de construire un modèle reproduisant divers phénomènes physiques propres aux milieux diphasiques constitués d'une phase liquide et d'une phase air. Cependant, tous les phénomènes recensés dans l'étude bibliographique, n'ont pas été modélisés (exemple la rugosité, les écoulements secondaires, ...)

Il est donc indispensable de reprendre cette étude en 3D et de valider le modèle en écoulement diphasique à l'aide des mesures réelles de la vitesse en présence de l'air.

# Références Bibliographiques

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

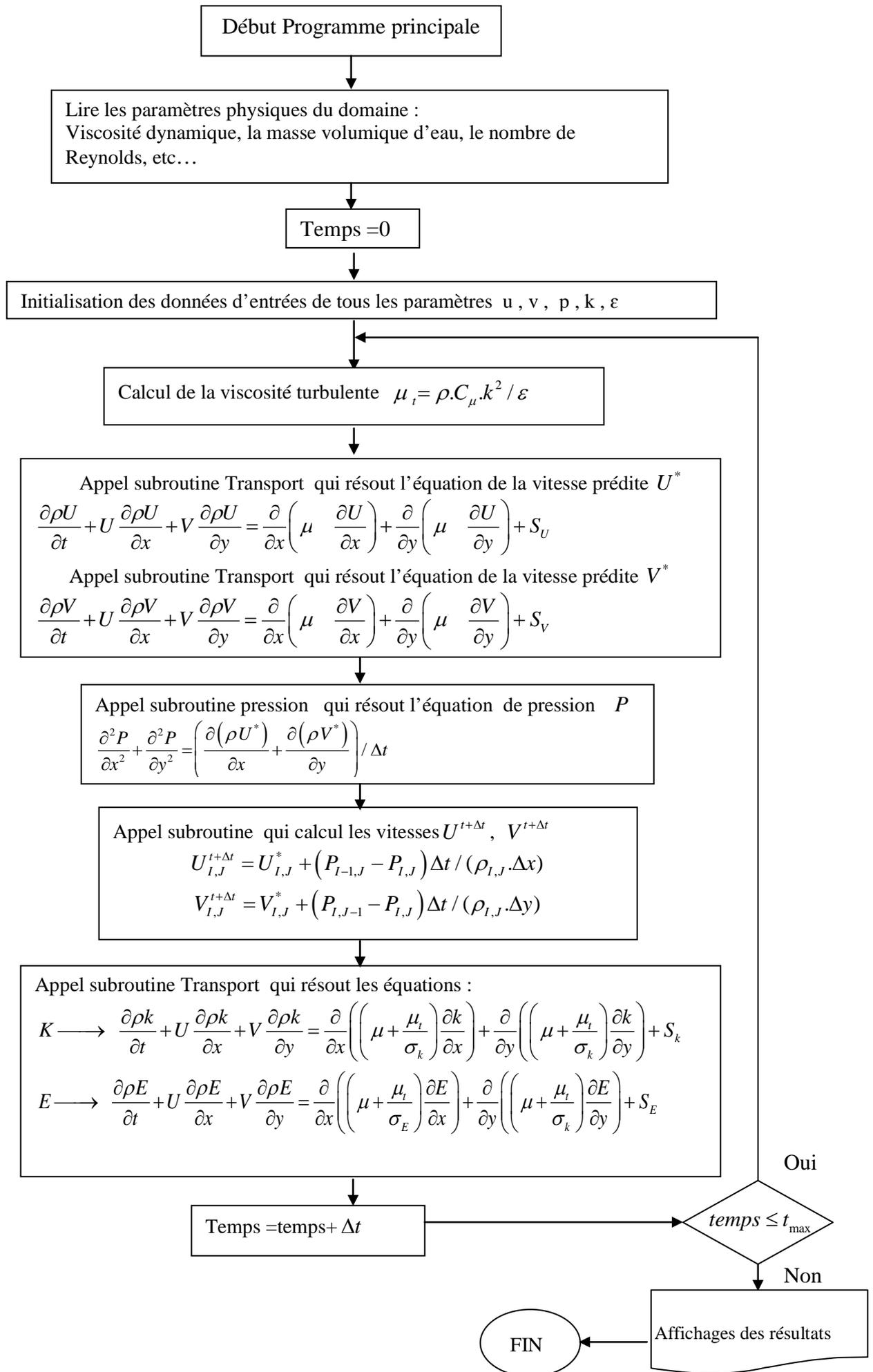
- [1] Aris, R. (1962). « Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics » Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc. Reprinted, Dover, New York, 1997.
- [2] Boussinesq, j. (1877). « Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section ». Paris, Gautier, Villars.
- [3] Candel, S. (1995). « Mécanique des fluides ». Edition Dunod. Paris
- [4] Celik I. and Rodi W. (1984). « Simulation of free surface effects in turbulent channel flows ». Physico chemical hydrodynamics, 5(3/4).
- [5] Chassaing P (2000). « Turbulence en mécanique des fluides des : Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur ». Edition Cépadués, col Polytech de l'I.N.P de Toulouse.
- [6] Chatelier P. (1991). « Simulation de l'hydrodynamique des chenaux d'oxydation par l'utilisation des équations de Navier -Stokes associées au modèle  $k - \epsilon$  : évaluation de la vitesse de circulation ». Thèse de doctorant INSA Toulouse, 220P
- [7] Cole D. (1965) .« The law of the wake in the turbulent boundary layer ». Journal of fluid mechanics, 1,191.226
- [8] Dasilva, Deronzier G.(1994). « Éléments d'optimisation du transfert d'oxygène par fines bulles et agitateur séparé en chenal d'épuration ». Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 126 P
- [9] Djebbar R. (1996). « Contribution à l'étude par des approche globales et locales de l'hydrodynamique des dispersions dans une cuve agitée mécaniquement ». Thèse de doctorat INSA Toulouse. 180 P
- [10] Dragent C. (1996). « Contribution à la modélisation de la dispersion de polluants : Etude de sillages autour d'obstacles de forme parallépipédique ». Thèse de INP de Toulouse.
- [11] H.K Versteeg and Molasekera. W (1995). « An introduction to computational fluid dynamics, the finite volume method Longman group » Ltd
- [12] Hubert. C. (2008). « Métrologie des écoulements cisailés à surface libre en présence de mélange gaz liquide » Congrès francophone de techniques laser CFTL
- [13] Hunt j. C.R. (1984). «Turbulence structure and turbulent diffusion near gas – liquid interfaces: Gas transfer at water surface ». Eds .W. Brutsaert and G.H Jirka, Reidel Pub, 67-82
- [14] J-M.Hervouet.(2003). «Hydrodynamique des écoulements à surface libre: modélisation numérique par éléments finis». ISBN 2-85978-379-2, presse de l'école nationale des ponts et chaussées France.

- [15] Labiod C. (2005) . « Ecoulement à surface libre sur fond de rugosité inhomogène ». Thèse de doctorat, Science de la terre et de l'environnement, Toulouse, I.N.P.T.I.N.F.T, n° 2242.
- [16] Laetitia D. (2005). « Introduction à la simulation numérique des écoulements turbulents » direction de la recherche de l'innovation automobile.
- [17] Lander B, Spalding D, (1974). «The numerical computation of turbulent flows ». Computational methods in applied mechanical engineering. vol3, PP269-289
- [18] Lander B, Spalding D. (1972). «Lectures in mathematical models of turbulence». Academic Press, London England
- [19] Moureh J et Bertrand J. (1992). Approche numérique tridimensionnelle de l'agitation mécanique en régime turbulent ». Thèse de doctorat, INP Toulouse, 200P
- [20] Naude I. (1998). « Simulation des écoulements en cuve agitée. Contribution à l'optimisation du choix d'un agitateur». Thèse de doctorat, INP Toulouse, 250P
- [21] Navier C. (1823). « Mémoire sur les lois du mouvement des fluides». Mémoires de l'académie de sciences.
- [22] Nezu I. and Nakagawa H. (1993). «Turbulence in open channel flows». IAHR monograph series, A.A, Balkama, Rotterdam the Netherlands.
- [23] Piere A. Bois. (2000). « Introduction à la mécanique théorique des fluides». Université de Lille. Editions Ellipses ISBN2-7298-7991-9
- [24] Piere L, Jean. P, Chabard, Pascal E, Dominique L. (1998). «Mécanique des fluides appliquée. Ecoulement incompressibles dans les circuits, canaux et rivières autour de structures et dans l'environnement». Presses des ponts et chaussées Frances.
- [25] Pierre S. (2009). «Turbulence, ondes et tourbillons», Institut jean d'Alembert. U. Piere et Marie curie Paris (6).
- [26] Pierre T. (2003) « Simulation de l'hydrodynamique des réacteurs biologiques à culture libre ». Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme d'ingénieur des travaux ruraux de l'ENGEES, école nationale du génie de l'eau et de l'environnement de Strasbourg.
- [27] Prandtl. (1925). « Wberein neues fermebystem fur die ausgebildete turbulenz ». Narch. Akad. Wissenshft in gattungen. Edvander loek 1945.
- [28] Quillons et Dartur. D. (1997).« Three dimensional computations of flow around groyne » journal of hydraulique engineering vol 123 n p962-970
- [29] Roland S. (1998). « les écoulements turbulents modélisation et simulation ». Editions 2Revue et augmentée, Editions Heruts Paris

- [30] Sagant P. « Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements incompressibles ».
- [31] Schlichting. H(1979). « Boundary-layer theory » .7th edn, McGraw-Hill, New York,
- [32] Sini ger R.O, Hager W.H, (1979). « Boun dary – layer theory ». 7 th edi, MCGraw- Hill, New yark.
- [33] Stokes G. (1845). « On the theories of the internal friction of fluids motion and of the equilibrium and motion of elastic solids». Trous Cambridge phil Sac. 1845, 8,287-35
- [34] Zaouali S. (2008). « Structure et modélisation d'écoulements à surface libre dans des canaux de rugosité inhomogène ». Thèse de doctorat. INP de Toulouse.

# Annexes

## Organigramme (Cas1)



## SUBROUTINE TRANSPORT

Cette subroutine à pour résoudre l'équation de transport

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho U \phi}{\partial x} + \frac{\partial \rho V \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial}{\partial x} (\phi) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial}{\partial y} (\phi) \right) + s_p \cdot \phi + s_u$$

Début de subroutine transport

Appel subroutine a\_wesn qui calcul les coefficients  
Concernant la méthode des volumes finis :

////////////////////////////////// principe du schéma ADI ////////////////////////////////////  
////////////////////////////////// Implicite suivant x ////////////////////////////////////

```
DO I=2,NI-1,1
    DP(1)=AP(I,1) ; DS(1)=-AE(I,1); B(1)=SU(I,1)
    DO J=2,NJ-1,1
        DI(J-1)=-AW(I,J)
        DP(J)=AP(I,J)
        DS(J)=-AE(I,J)
        B(J) =(AP0(I,J)*PHI(I,J))+(AN(I,J)*PHI(I+1,J))+
            (AS(I,J)*PHI(I-1,J)) + (SU(I,J)*DX*DY)
    END DO
    DI(NJ-1)=-AW(I,NJ) ; DP(NJ)=AP(I,NJ) ; B(NJ)=SU(I,NJ)
    CALL SOLUTION(NJ,DI,DP,DS,B,X)
    DO J=1,NJ,1
        PHIC(I,J)=X(J)
    ENDDO
END DO
```

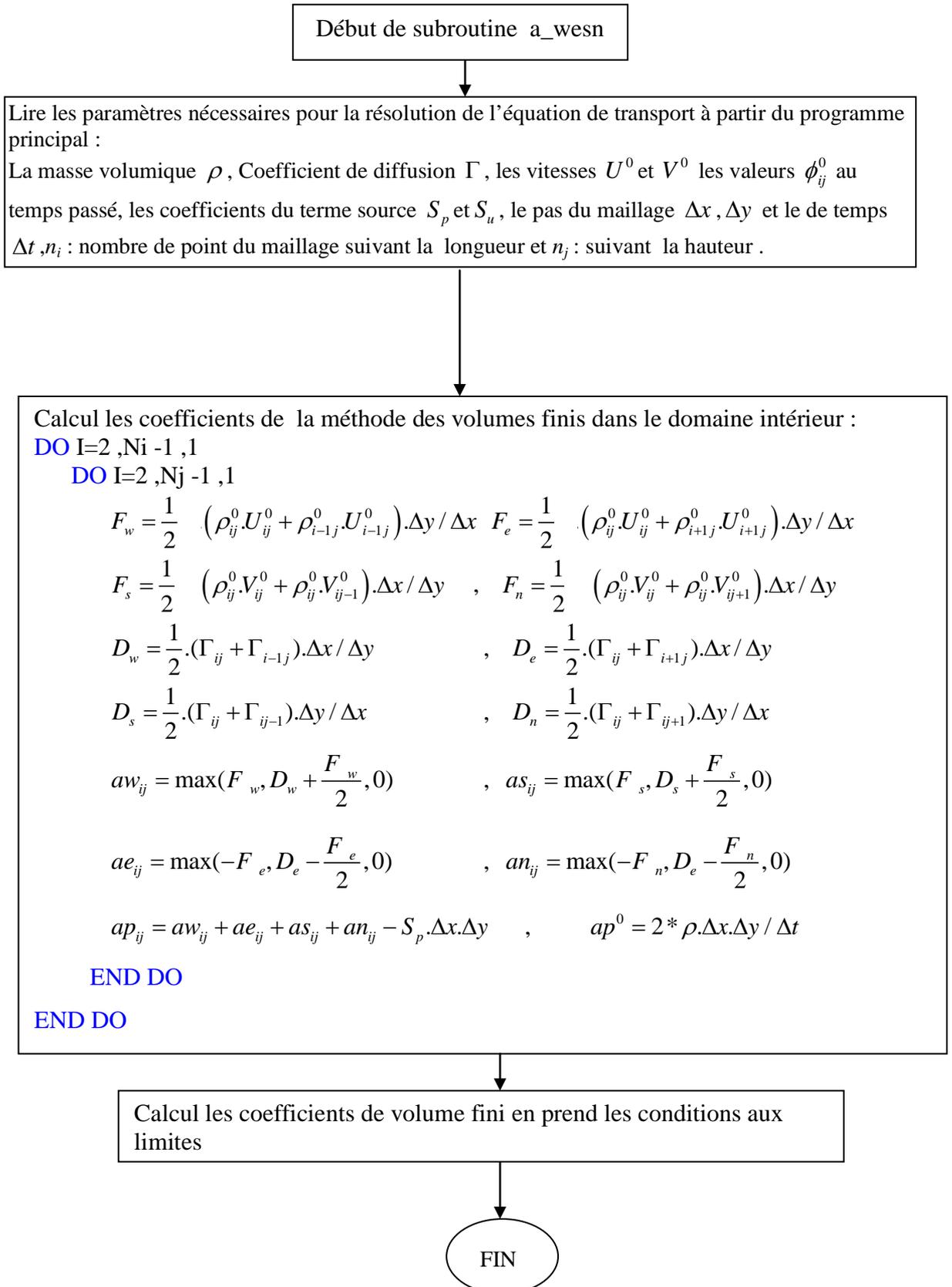
////////////////////////////////// Implicite suivant y ////////////////////////////////////

```
DO J=2,NJ-1,1
    DP(1)=AP(1,J) ; DS(1)=-AN(1,J) ; B(1)=SU(1,J)
    DO I=2,NI-1,1
        DI(I-1)=-AS(I,J)
        DP(I)= AP(I,J)
        DS(I)= -AN(I,J)
        B(I) =(AP0(I,J)*PHIC(I,J))+(AE(I,J)*PHIC(I,J+1))+&
            (AW(I,J)*PHIC(I,J-1)) + (SU(I,J)*DX*DY)
    END DO
    DI(NI-1)=-AS(NI,J) ; DP(NI)=AP(NI,J) ; B(NI)=SU(NI,J)
    CALL SOLUTION(NI,DI,DP,DS,B,X)
    DO I=1,NI,1
        PHIC(I,J)=X(I)
    ENDDO
END DO
```

FIN

## SUBROUTINE A\_WESN

Cette subroutine à pour calculer les coefficients concernant la méthode des volumes finis



## SUBROUTINE SOLUTION

cette subroutine à pour résoudre le système tri diagonal par la méthode de gausse

$$\begin{cases} Dp_{(1)} \cdot \Phi_{(1)} + Ds_{(1)} \cdot \Phi_{(2)} = V_{(1)} \\ Di_{(I)} \cdot \Phi_{(I-1)} + Dp_{(I)} \cdot \Phi_{(I)} + Ds_{(I)} \cdot \Phi_{(I+1)} = V_{(I)} & ; I = 2 \rightarrow N-1 \\ Di_{(N-1)} \cdot \Phi_{(I-1)} + Dp_{(N)} \cdot \Phi_{(N)} = V_{(N)} \end{cases}$$

**SUBROUTINE SOLUTION(N,DI,DP,DS,V,PHI)**

**REAL DI(N),DP(N),DS(N),V(N),PHI(N)**

!-----

**DO** I=1,N-1

R= DI(I)/DP(I)

DP(I+1)=DP(I+1)-(R\*DS(I))

V(I+1)=V(I+1)- (R\*V(I))

**END DO**

!-----

PHI(N)=V(N)/DP(N)

**DO** I=N-1,1,-1

PHI(I)=(V(I)-(DS(I)\*PHI(I+1)))/DP(I)

**END DO**

**END**

## SUBROUTINE PRESSION

Le but de cette subroutine est la résolution de l'équation de pression

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + S_p \cdot P + S_u = 0$$

Début de subroutine pression

Lire les paramètres nécessaires pour la résolution de l'équation de pression à partir du programme principale:

Coefficient  $\Gamma$ , les deux terme source  $S_p$  et  $S_u$ , le pas du maillage  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $Ni$  nombre de point du maillage suivant la longueur,  $Nj$  suivant la hauteur,  $P_{ij}^0$  champ de pression estimé.

Calcul les coefficients concernant la méthode des volumes finis :

$$D_w, D_e, D_s, D_n$$

$$aw = D_w, \quad as = D_s, \quad ae = D_e, \quad an = D_n$$

$$ap = aw + ae + as + an - S_p \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

La première itération  $k = 1$

Estimation de la solution de l'équation de pression au temps précédent :

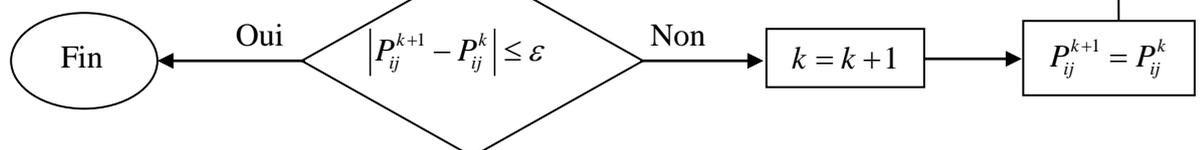
$$P_{ij}^k = P_{ij}^0$$

Résolution numérique de l'équation de Pression par la méthode itérative de Jacobi :

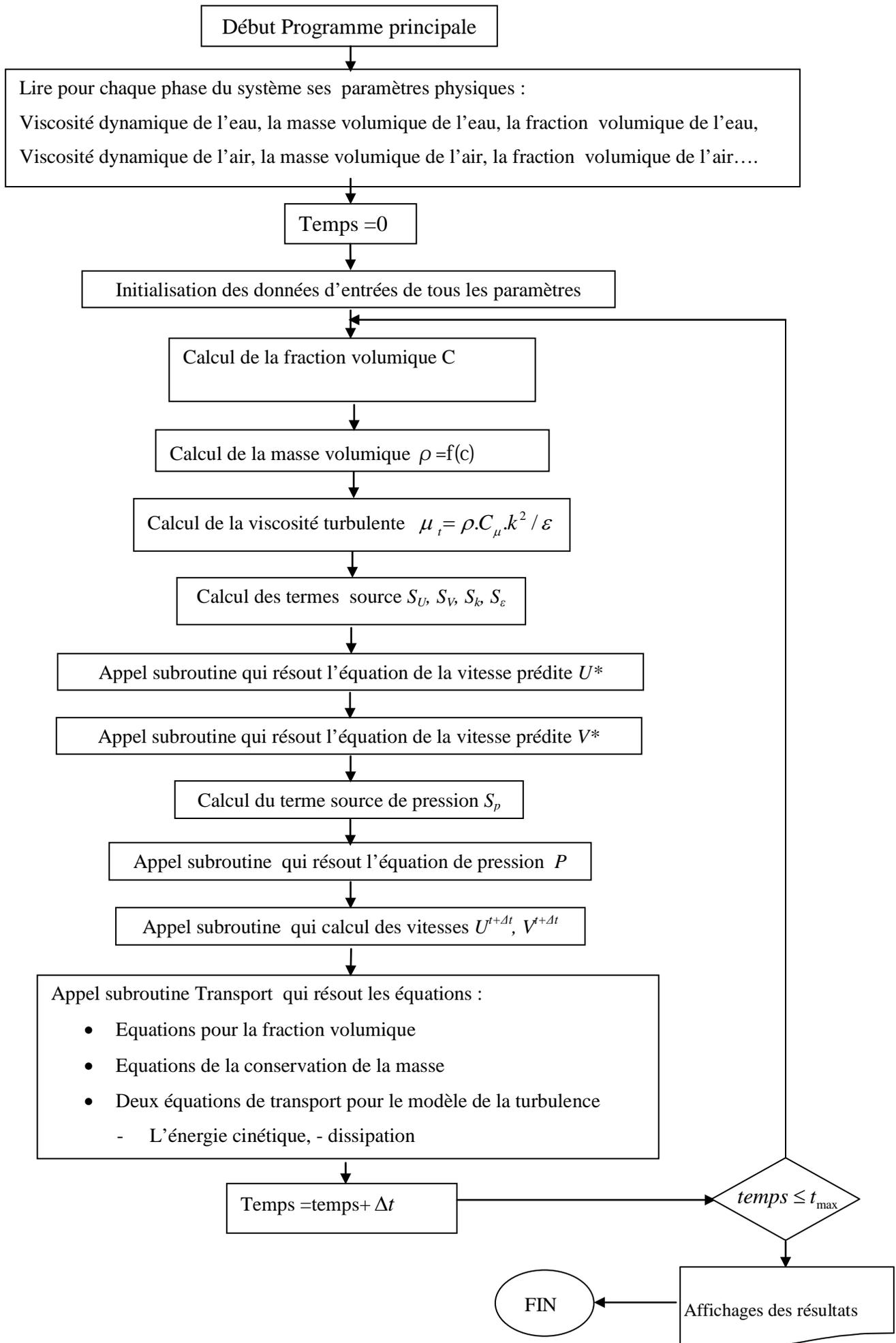
Pour  $2 \leq i \leq Ni - 1$  et  $2 \leq j \leq Nj - 1$  on calcul :

$$P_{ij}^{k+1} = (aw_{ij} P_{i-1,j}^k + ae_{ij} P_{i+1,j}^k + as_{ij} P_{i,j-1}^k + an_{ij} P_{i,j+1}^k + S_u \cdot \Delta x \cdot \Delta y) / ap_{ij}$$

Calcul des conditions aux limites pour les quatre côtés de domaine



## Organigramme (Cas2)



Début de subroutine transport

Lire les paramètres nécessaires pour la résolution de l'équation de transport à partir du programme principale :  
 La masse volumique  $\rho$ , coefficient de diffusion  $\Gamma$ , les vitesses  $U^0$  et  $V^0$  et les valeurs  $\phi_{i,j}^0$  au temps passé, les coefficients du terme source  $S_p$  et  $S_u$ , le pas du maillage  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et le temps  $\Delta t$ ,  $n_i$  nombre de point du maillage suivant la longueur et  $n_j$  : suivant la hauteur.

Calcul des coefficients concernant la méthode des volumes finis:  
 Pour  $2 \leq i \leq n_i - 1$  et  $2 \leq j \leq n_j - 1$  on calcule :

$$F_w = \frac{1}{2} (\rho_{ij}^0 \cdot U_{ij}^0 + \rho_{i-1,j}^0 \cdot U_{i-1,j}^0) \cdot \Delta y / \Delta x \quad F_e = \frac{1}{2} (\rho_{ij}^0 \cdot U_{ij}^0 + \rho_{i+1,j}^0 \cdot U_{i+1,j}^0) \cdot \Delta y / \Delta x$$

$$F_s = \frac{1}{2} (\rho_{ij}^0 \cdot V_{ij}^0 + \rho_{ij}^0 \cdot V_{ij-1}^0) \cdot \Delta x / \Delta y \quad , \quad F_n = \frac{1}{2} (\rho_{ij}^0 \cdot V_{ij}^0 + \rho_{ij}^0 \cdot V_{ij+1}^0) \cdot \Delta x / \Delta y$$

$$D_w = \frac{1}{2} (\Gamma_{ij} + \Gamma_{i-1,j}) \cdot \Delta x / \Delta y \quad , \quad D_e = \frac{1}{2} (\Gamma_{ij} + \Gamma_{i+1,j}) \cdot \Delta x / \Delta y$$

$$D_s = \frac{1}{2} (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ij-1}) \cdot \Delta y / \Delta x \quad , \quad D_n = \frac{1}{2} (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ij+1}) \cdot \Delta y / \Delta x$$

$$aw_{ij} = \max(F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0) \quad , \quad as_{ij} = \max(F_s, D_s + \frac{F_s}{2}, 0)$$

$$ae_{ij} = \max(-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0) \quad , \quad an_{ij} = \max(-F_n, D_n - \frac{F_n}{2}, 0)$$

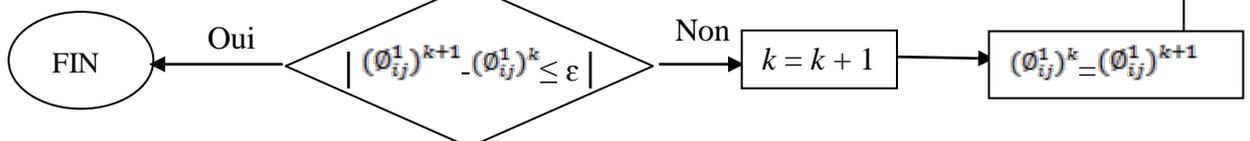
$$ap_{ij} = aw_{ij} + ae_{ij} + as_{ij} + an_{ij} - S_p \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad , \quad ap^0 = 2 * \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y / \Delta t$$

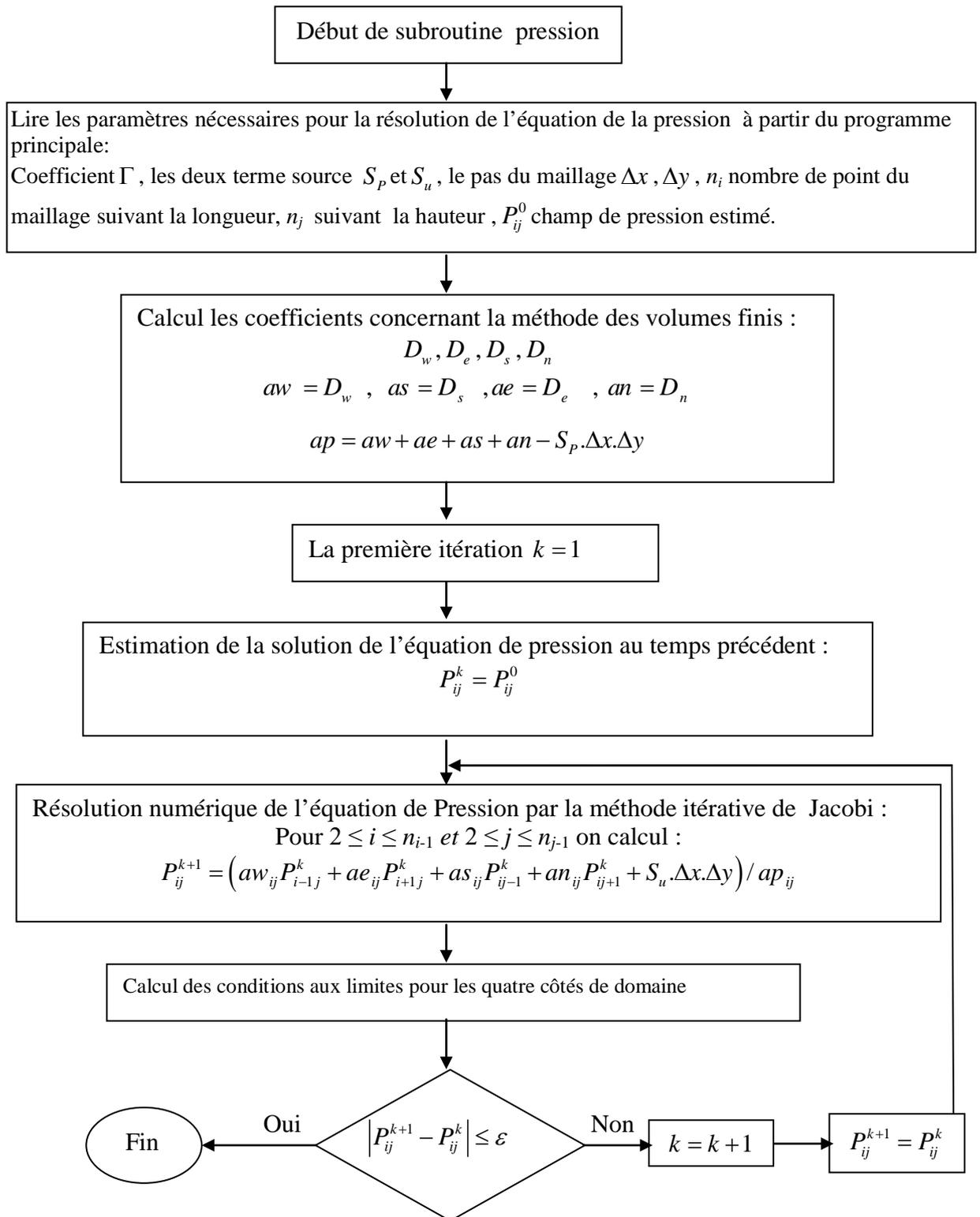
La première itération  $k = 1$

Estimation de la solution de l'équation de transport au temps précédent :  $(\phi_{i,j}^1)^k = \phi_{i,j}^0$

Résolution numérique de l'équation de transport par la méthode itérative de Jacobi :  
 Pour  $2 \leq i \leq n_i - 1$  et  $2 \leq j \leq n_j - 1$  on calcul :  
 $(\phi_{ij}^1)^{k+1} = (a_w (\phi_{i-1,j}^1)^k + a_e (\phi_{i+1,j}^1)^k + a_s (\phi_{i,j-1}^1)^k + a_n (\phi_{i,j+1}^1)^k + a_p^0 + S_u \cdot \Delta x \Delta y) / a_{ij}$   
 $(\phi_{ij}^1)^k$  : C'est la valeur au temps suivant dans l'itération  $k$ .  
 $(\phi_{ij}^1)^{k+1}$  : C'est la valeur au temps suivant dans l'itération  $k+1$ .

Calcul des conditions aux limites pour les quatre côtés du domaine





Début de subroutine vitesse

Lire les paramètres nécessaires pour recalculer les vitesses au temps  $t + \Delta t$  à partir du programme :

La masse volumique  $\rho$ , les vitesses  $U^{t+1/2\Delta t}$  et  $V^{t+1/2\Delta t}$  au et le champ de pression  $P_{ij}$ ,

Le pas du maillage  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et le temps  $\Delta t$ ,  $n_i$  : nombre de point de maillage suivant la longueur et  $n_j$  : nombre de point du maillage suivant la hauteur

Pour  $2 \leq i \leq n_{i-1}$  et  $2 \leq j \leq n_{j-1}$  on calcul :

La vitesse horizontale :

$$U_{I,J}^{t+\Delta t} = U_{I,J}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} + (P_{I-1,J} - P_{I,J}) \frac{\Delta t}{\rho_{I,J} \cdot \Delta x}$$

La vitesse verticale :

$$V_{I,J}^{t+\Delta t} = V_{I,J}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} + (P_{I,J-1} - P_{I,J}) \frac{\Delta t}{\rho_{I,J} \cdot \Delta y}$$

Calcul des conditions aux limites pour les quatre côtés de domaine

Fin

## Résumé

Ce travail s'intéresse particulièrement à l'étude des écoulements instationnaires turbulents dans un canal rectangulaire lisse en présence et en absence des obstacles. L'objectif étant après modélisation mathématique et résolution numérique par le schéma des volumes finis du problème étudié, la connaissance fine des profils des vitesses dans un canal découvert. Le modèle utilisé est le modèle basé sur le système d'équation de Navier-Stokes moyenné (Reynolds) compte tenu du modèle de turbulence isotrope  $K-\epsilon$ . Les résultats numériques obtenus grâce à l'utilisation d'un programme en Fortran 90 version 6.6 concernent les deux cas de la surface libre (monophasique et diphasique).

## Abstract

This work is particularly interested in the study of turbulent unsteady flows in a smooth rectangular channel presence and absence of obstacles. The aim after mathematical modeling and numerical solution by finite volume scheme of the problem studied, the detailed knowledge of velocity profiles in an open channel. The model used is based on the model system Navier-Stokes averaged (Reynolds) given the model of isotropic turbulence  $K-\epsilon$ . The numerical results obtained through the use of a program in Fortran 90 version 6.6 affect both the free surface (monophasic and biphasic).

هذه الدراسة تهتم بشكل خاص في دراسة حركة السوائل و هي في حالة اضطراب تتغير بدلالة الزمن داخل قناة مستطيلة مع انعدام الاحتكاك بوجود و غياب العقبات. والهدف بعد النمذجة الرياضية والحل الرقمي بواسطة طريقة الحجوم المتناهية المستعملة لمحاولة حل المشكلة هي المعرفة المفصلة لتغيرات السرعة بدلالة الزمن في قناة مفتوحة. ويستند هذا النموذج المستخدم على النظام الرياضي النموذجي Navier-Stokes المتوسط (Reynolds) مع اخذ بعين الاعتبار النموذج الايزوتروبي  $K-\epsilon$ . النتائج الرقمية التي تم الحصول عليها من خلال استخدام برنامج Fortran 90 version 6.6 تؤثر على كل من السطح الحر و النتائج المتحصل عليها اخذت بعين الاعتبار الحالتين وحيد