



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique



Université Hadj lakhdar –Batna

Institut de Génie Civil, d'Hydraulique et d'Architecture

Département d'hydraulique

Mémoire de Magister en Hydraulique

Option : Hydraulique numérique et environnement

Présenté par
Samia Boudjellal

Pour obtenir le diplôme de Magister en Hydraulique

INTEGRATION NUMERIQUE DES ECOULEMENTS BRUSQUEMENT INSTATIONNAIRES DANS LES CANAUX A SURFACE LIBRE

Sous la direction de Mr : Ali FOURAR
Devant le jury composé de :

Jury	Grade	Affiliation	Qualité
Nourdine LAHBARI	MCA	Université de.Batna	Président
Ali FOURAR	MCA	Université de.Batna	Rapporteur
M.Toufik BOUZIANE	MCA	Université de Biskra	Examineur
Mourad BRIOUA	MCA	Université de.Batna	Examineur

REMERCIEMENT

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné courage, patience et force durant toutes ces années d'étude.

Mes premiers remerciements vont à Monsieur Ali FOURAR, Maître de conférences à l'université de Batna, qui a proposé et dirigé ce travail et m'a accordé toute sa confiance. Sa gentillesse, sa rigueur scientifique, plus qu'un encadreur je tiens à lui exprimer mon entière gratitude.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Nourdine LAHBARI, Maître de conférences à l'université de Batna, pour son encouragement. Et qui m'a fait l'honneur de présider mon jury.

Je remercie sincèrement Monsieur, M.Toufik BOUZIANE, Maître de conférences à l'université de Biskra, je suis très sensible au fait qu'il consacré une partie de son temps à examiner mon travail.

Je tiens à témoigner ma grande reconnaissance à Monsieur Mourad BRIOUA Maître de conférences à l'université de Batna, pour avoir accepté de participer à ce jury. Je tiens également à le remercier.

Mes vifs remerciements s'adressent à Messieurs J-m.HERVOUET Ingénieur chercheur senior au groupe simulation EDF et h.CHANSON Professeur à l'université de Brisbane, Australie pour l'aide qu'ils m'ont apporté notamment pour la documentation.

Mes remerciements vont aussi plus particulièrement à Mr D.HADDAD pour son aide, Mme DJOUIMAA, pour ses conseils précieux , à tous mes enseignants au Département d'Hydraulique, mes collègues Farida, Nawel (laboratoire), et Radhia son oublier Fouzi ,Zina à toutes mes amies et collègues de post-graduation.

Je ne saurais, enfin oublier de remercier chaleureusement mon très cher frère Mohamed et ma très chère soeur Nassima pour leur soutien moral, ainsi que toute ma famille.

Table des matières

Nomenclature	
Introduction générale	2
CHAPITRE I: Ecoulements transitoire à surface libre	
I. Introduction	5
I.1. Types d'écoulements	5
I.1.a. Les écoulements stationnaires	5
I.1.b. Les écoulements instationnaires	6
I.1.1. variabilité dans le temps	6
I.1.2. variabilité dans l'espace	7
I.2. Régime Fluvial ou torrentiel	7
I.2.1. Le phénomène physique	9
I.3. Ecoulements transitoires à surface libre	9
I.3.1. Définition	9
I.3.2. Les phénomènes transitoires	9
I.3.2.a. Régime graduellement varié	9
I.3.2.b. Régime rapidement varié	9
I.3.3. La géométrie des canaux et grandeurs hydraulique	10
I.4. Cas d'un écoulement transitoire à surface libre	11
I.4.1. Le ressaut hydraulique	11
I.4.2. Hauteurs conjuguées du ressaut	12
I.4.2.1. Equation de Belanger	12
I.4.2.2. Equation de Hager et Bremen	14
I.4.3. Le rendement du ressaut	14
I.5. Simulation d'un ressaut hydraulique dans un canal	16
I.5.1. L'utilité du ressaut hydraulique	17
I.5.2. Problèmes réels rencontrés	17
CHAPITRE II: Modèle mathématique	
II.1. Introduction	19
II.2. géométrie du domaine	19
II.3. Equations de Navier-Stokes à surface libre	20
II.3.1. Les équations de base	20
II.3.1.1. Equation de continuité	21
II.3.1.2. Equation de quantité de mouvement	22
II.4. Equation de Saint-Venant	25
II.4.1. Présentation	25
II.4.2. Hypothèse, approximation et règle de calcul	25
II.4.2.1. Pression hydrostatique	25
II.4.2.2. Imperméabilité de la surface libre et du fond	26
II.4.2.3. Règle de Leibnitz	26
II.5. Moyenne des équations de Navier-Stokes	27
II.5.1. Principe	27
II.5.2. Moyenne de l'équation de continuité	27
II.5.3. Moyenne de l'équation de quantité de mouvement	28

II.5.3.1. Dérivée en temps	28
II.5.3.2. Terme de diffusion	28
II.5.3.3. Terme de convection	29
II.5.4. Gradient de pression	31
II.6. Conclusion	32
CHAPITRE III: Résolution numérique	
III.1. Introduction	34
III.2. La méthode numérique	34
III.3. Résolution numérique de l'équation de transport	35
III.3.1. Méthode des volumes finis (MVF)	35
III.3.2. Principe	35
III.3.3. Equation de transport	36
III.3.4. Discrétisation des différents termes	36
III.3.4.1. Terme de stockage	37
III.3.4.2. Terme convectif longitudinal	37
III.3.4.3. Terme convectif vertical	37
III.3.4.4. Terme diffusif suivant x.	37
III.3.4.5. Terme diffusif suivant y.	38
III.3.4.6. Terme Source	38
- schéma hybride	39
- schéma Implicite ADI	40
III.4. Résolution du couplage vitesse-hauteur	40
III.5. Présentation du maillage et des conditions aux limites	43
III.5.1. Conditions initiales	44
III.5.2. Conditions aux limites	44
III.5.2.1. Frontières solides	44
III.5.2.2. Conditions aux parois non glissantes	44
III.5.2.3. Conditions aux parois glissantes	45
III.6. résolution de l'équation (méthode de gauss)	45
III.6 Conclusion	45
CHAPITRE IV: Résultats et discussions	
IV.1. Introduction	48
IV.2. Résultats d la simulation	48
IV.2.1. Cas de l'ouverture brusque d'une vanne dans un canal rectangulaire	48
IV.2.2. Cas de la présence d'un divergent dans un canal rectangulaire	55
IV.2.3. Cas de La présence d'un déversoir à l'entrer du canal rectangulaire	59
IV.3. Interprétation des résultats	61
IV.4. Conclusion	62
Conclusion générale	63
Bibliographie	64

INTRODUCTION GENERALE



La compréhension et la prévision du comportement de l'écoulement à surface libre a un intérêt stratégique. La prévision des crues et les délinéations ; la conception des ouvrages de protection contre les crues, des évacuateurs de crues et des canaux de déviation et l'évaluation de l'impact de rupture de barrage sont autant de sujets, parmi beaucoup d'autres, qui requièrent de façon cruciale une bonne maîtrise des phénomènes de l'hydraulique et de la mécanique des fluides. Des approches de maîtrise passent d'abord par l'étude de ces phénomènes sur des maquettes et des modèles physiques. Ces derniers, et avec le développement intensif des moyens de calcul, ont progressivement cédé du terrain face à la modélisation numérique. Aujourd'hui, l'ordinateur est devenu un outil incontournable d'investigation numérique et les modèles physiques, bien qu'ils restent indispensables dans quelques domaines clés comme les évacuateurs de crue et la stabilité des digues, sont devenus sur d'autres sujets des outils de validation.

Les écoulements brusquement instationnaires qui ont lieu lors de l'ouverture brusque d'une vanne, dans le cas d'un divergent ou d'un déversoir se caractérisent par une surélévation brusque et par une agitation marquée et de grandes pertes d'énergie. Ces écoulements peuvent se manifester de différentes manières compte tenu du nombre de Froude. Leurs caractéristiques hydrauliques commencent à varier très faiblement, ensuite elles s'accroissent jusqu'à générer de petits tourbillons superficiels. Ce phénomène devient pulsatoire et une grande turbulence prend sa valeur maximale soit près du fond soit en surface. Des pulsations donnent naissance à des ondes de période irrégulières et ces ondes peuvent se propager sur de très longues distances entraînant dans leurs sillages des transports de différentes natures, conséquence des contraintes sur le fond exercées par ces écoulements à très grandes vitesses.

Les écoulements instationnaires dans les canaux et rivières regroupent un certain nombre de phénomènes naturels très complexes, en particulier la propagation des ondes quelles soient de gravité ou de crues. Les écoulements à surface libre distinctement des écoulements en charge sont régis par le seul équilibre dynamique des forces de gravité et d'inertie. L'effet des frottements est à priori négligé [1].

Dans la présente étude, l'accent sera mis prioritairement sur le comportement dynamique de l'écoulement dans un canal à surface libre. Le cas particulier des écoulements transitoires sera étudié.

L'intégration numérique des équations aux dérivées partielles gouvernantes nous permettra de mieux comprendre le phénomène étudié.

Notre travail s'intéresse à la détermination des profils des vitesses et des hauteurs dans un canal rectangulaire à surface libre par un programme de simulation rédigé en langage Fortran 90 version 6.6.

Ce mémoire regroupe en plus d'une introduction générale, quatre parties rédigées sous forme de chapitres

Dans le chapitre I, nous présentons une synthèse bibliographique sur les écoulements à surface libre stationnaire et instationnaire avec le cas particulier d'un écoulement transitoire dans un canal rectangulaire.

Dans Le chapitre II, plusieurs modèles mathématiques sont développés pour décrire l'écoulement des liquides. Les plus généraux sont les équations de Navier-Stokes, utilisées pour prédire le comportement des fluides compressibles en trois dimensions. Dans les écoulements à surface libre, les modèles les plus utilisés sont les équations de Saint-Venant qui constituent la base de notre étude, sont obtenues à partir d'une intégration verticale des équations de Navier-Stokes en utilisant un certain nombre d' hypothèses.

Au chapitre III, nous présentons une méthode des volumes finis (MVF) du second ordre en temps et en espace pour la résolution des équations de Barré de Saint Venant 2D, qui on été utilisés pour d'écrire le problème de ce travail.

Le chapitre IV, est consacré à l'interprétation des résultats relatifs à une simulation numérique. Ces résultats concernent les profils des vitesses et des hauteurs obtenues grâce à cette simulation numérique.

.Nous terminerons par une conclusion générale qui englobera les principaux résultats auxquels ce travail a permis d'aboutir.

CHAPITRE I

LES ECOULEMENTS TRANSITOIRES A SURFACE LIBRE

I. Introduction

On désigne par écoulements à surface libre les écoulements dans lesquels le fluide qui s'écoule est en contact avec l'atmosphère. Cette configuration apparaît dans les canaux, les rivières ou les grandes étendues d'eau comme les lacs, les mers ou les océans. Par opposition, les écoulements dits "en charge" sont ceux dans lesquels le fluide emplit complètement la canalisation. Dans les écoulements à surface libre, la difficulté majeure est de déterminer les caractéristiques de la surface libre: position, forme et vitesse. Nous allons considérer, dans ce chapitre le cas des écoulements transitoires à surface libre dans un canal de section rectangulaire constante et plus particulièrement le phénomène de Ressaut hydraulique [1].

I.1. Types d'écoulements

Les écoulements à surface libre sont les écoulements qui s'écoulent sous l'effet de la gravité en étant en contact partiel avec un contenant (canal) et avec l'air dont la pression est généralement à surface libre. Contrairement aux écoulements en charge, la section d'écoulement devient une caractéristique de l'écoulement et non plus seulement de la géométrie du contenant.

Les canaux en question peuvent être constitués aussi bien par :

- Les canaux naturels : i.e. les cours d'eau qui existent naturellement sur (ou sous) terre, tels que les ruisselets, torrents, rivières, fleuves et estuaires ;
- Les canaux artificiels : i.e. les cours d'eau réalisés par l'homme sur (ou sous) terre tels que : les canaux découverts construits au ras du sol (canaux de navigation, d'adduction et d'évacuation, d'irrigation et de drainage) ou les canaux couverts dans lesquels les liquides ne remplissent pas toute la section (tunnels hydrauliques, aqueducs, drains, égouts).

Un canal dont la section ne varie pas et dont la pente longitudinale et la rugosité restent constantes h la hauteur d'eau peut cependant varier ∂h est appelé canal prismatique ; Sinon, on l'appelle canal non prismatique [2].

On distingue deux types d'écoulements :

- ✚ *a-Les écoulements stationnaires* dont les caractéristiques hydrauliques restent invariables dans le temp.
- ✚ *b-Les écoulements instationnaires* les caractéristiques hydrauliques varient dans le temp.

I.1.1. Variabilité dans le temps

Le mouvement est permanent si les vitesses U et la profondeur h restent invariables dans le temps en grandeur et en direction. Le mouvement est non permanent dans le cas contraire (figure I.1).

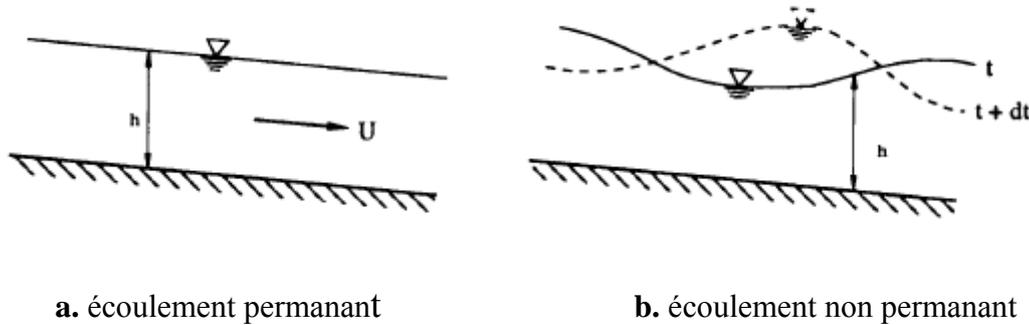


Figure I.1: types d'écoulements

I.1.2. Variabilité dans l'espace

Le mouvement est uniforme si les paramètres caractérisant l'écoulement restent invariables dans les diverses sections du canal. La ligne de la pente du fond est donc parallèle à la ligne de la surface libre (figure I.2).

-Le mouvement est non uniforme ou varié si les paramètres caractérisant l'écoulement changent d'une section à l'autre. La pente de la surface libre diffère de celle du fond.

-Un écoulement non uniforme peut être accéléré ou décéléré suivant que la vitesse croît ou décroît dans le sens du mouvement.

-Lorsque le mouvement est graduellement varié, la profondeur ainsi que les autres paramètres varient lentement d'une section à l'autre.

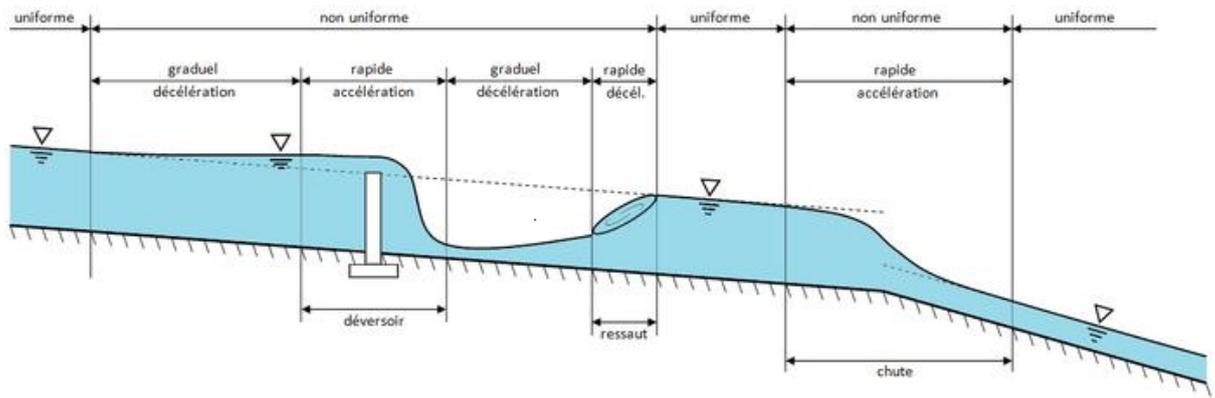


Figure I. 2 : Schéma des écoulements permanents, uniformes et variés dans un canal à surface libre

-Lorsque le mouvement est rapidement varié, les paramètres caractérisant l'écoulement changent brusquement, parfois avec des discontinuités. Cela se manifeste en général au voisinage d'une singularité, telle qu'un seuil, un rétrécissement, un ressaut hydraulique ou une chute brusque.

De plus, en fonction du nombre de Froude, Fr , l'écoulement peut avoir un comportement

Torrentiel ($Fr > 1$), critique ($Fr = 1$) ou fluvial ($Fr < 1$) [2].

I.2. Régime fluvial ou torrentiel

I.2.1. Le phénomène physique

Supposons un canal à section constante, à pente constante et avec une hauteur h et un débit constant Q (figure I.3). On crée une perturbation grâce à une vanne que l'on ferme et que l'on ouvre très rapidement [3].

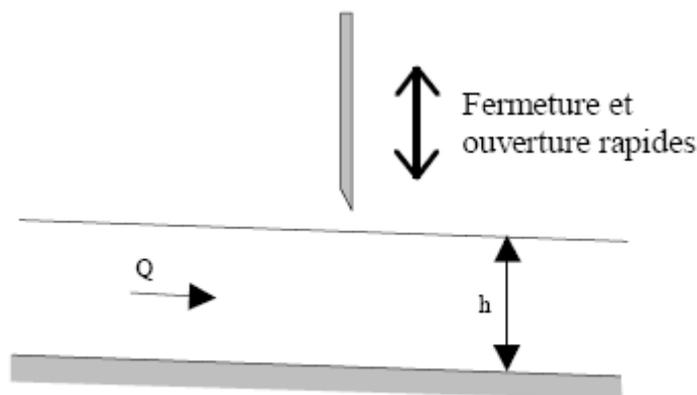
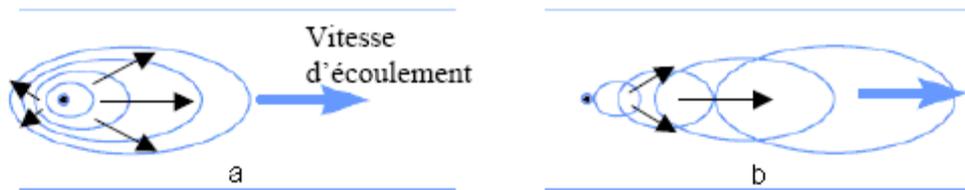


Figure I.3 : Présentation du phénomène physique

Au niveau de la surface libre, il se crée deux ondes (ondes de gravité). L'une se propage toujours vers l'aval et l'autre se propage vers l'amont si la vitesse dans le canal est inférieure à la vitesse de l'onde de gravité ; elle s'oriente vers l'aval dans le cas contraire (figure I.4).



a. Ecoulement Fluvial

b. Ecoulement Torrentiel

Figure I.4 : Le comportement des ondes selon les régimes d'écoulement

Dans le cas où la vitesse du fluide est supérieure à la vitesse de l'onde c , l'amont n'est pas influencé par les conditions hydrauliques à l'aval (régime torrentiel) ; alors que, dans le cas contraire, on a une remontée de l'onde qui va perturber l'amont (régime fluvial), ce Phénomène est appelé influence aval.

Dans la figure I.5, nous présentons l'approximation du nombre de Froude et de la hauteur critique.

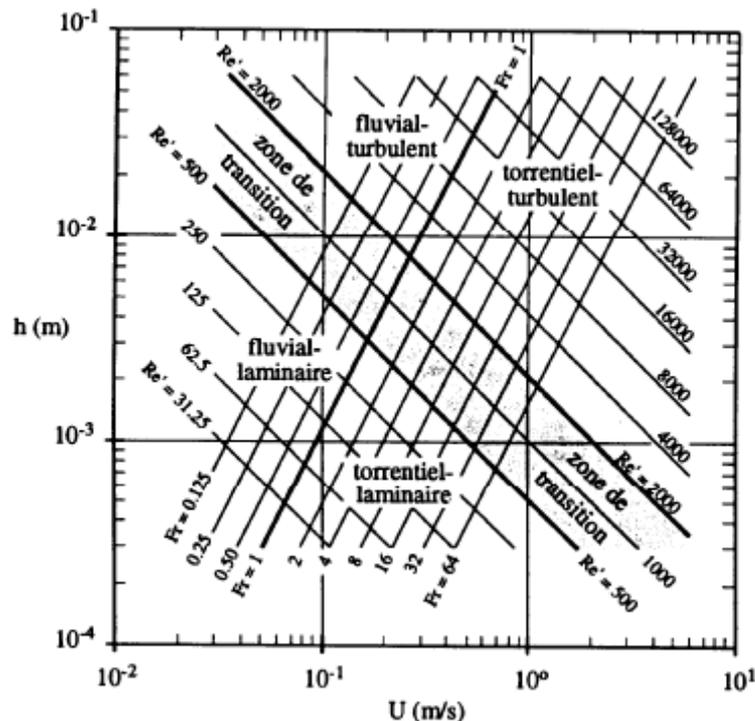


Figure I.5: Approximation du nombre de Froude et de la hauteur critique

Le nombre de Froude est défini par :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gD_H}}$$

- Ecoulement fluvial : $Fr < 1 \leftrightarrow h > h_c$
- Ecoulement critique : $Fr = 1 \leftrightarrow h = h_c$
- Ecoulement torrentiel: $Fr > 1 \leftrightarrow h < h_c$

I.3. Ecoulements transitoires à surface libre

I.3.1. Définitions

L'écoulement transitoire est une surélévation brusque de la surface libre d'un écoulement qui se produit lors du passage du régime torrentiel au régime fluvial. Il est accompagné d'une agitation marquée et de grandes pertes d'énergie.

I.3.2. Les phénomènes transitoires

Dans les écoulements à surface libre, les phénomènes transitoires sont systématiquement présents du fait de la variabilité intrinsèque des débits. Ils se traduisent par une variation, qui peut être brutale dans certains cas de la hauteur d'eau due à la propagation d'une onde de gravité ou d'un ressaut hydraulique. En effet, lors du démarrage d'une pompe ou de l'ouverture d'une vanne, une onde peut rapidement se propager dans le canal [10].

I.3.2.a. régime graduellement varié : régime d'écoulement où la variation de hauteur dans la direction d'écoulement est très faible, typiquement si L désigne une longueur d'écoulement et Les équations de Saint-Venant ou le calcul différentiel des courbes de remous ne sont valables que pour ce régime

I.3.2.b. régime rapidement varié : régime d'écoulement où la variation de hauteur dans la direction d'écoulement est très importante, typiquement si L désigne une longueur d'écoulement et ∂h une variation de hauteur, à l'approche d'une singularité ou bien en cas de ressaut hydraulique, l'écoulement peut entrer dans un régime rapidement varié.

La figure I.6 illustre la variation du régime d'écoulement

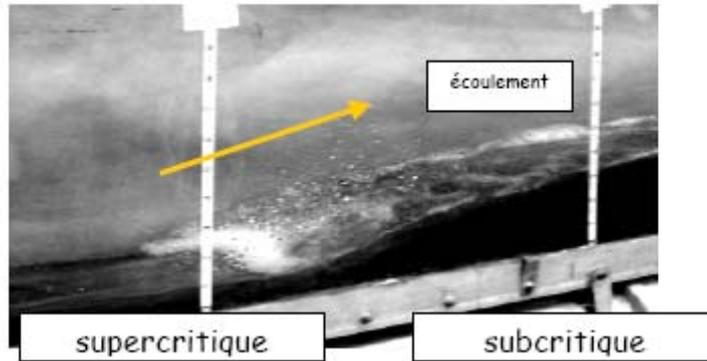


Figure I.6 : Variation du régime d'écoulement supercritique à subcritique [3].

I.3.3. La géométrie des canaux et grandeurs hydrauliques

Dans ce paragraphe, on définit les grandeurs hydrauliques permettant d'établir les équations caractérisant le comportement hydraulique des écoulements à surface libre. Le canal, dont la section transversale ne varie pas et dont la pente est nulle, est dit canal prismatique. Les différentes grandeurs sont les suivantes (figure I.7) :

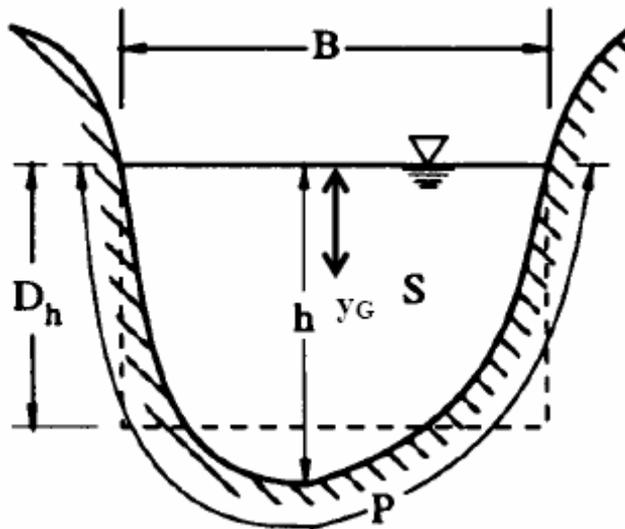


Figure I.7 : Grandeur géométrique dans un canal [3].

- La surface mouillée S (m^2), dite aussi section, est la portion de la section transversale occupée par le fluide.
- La largeur au miroir est la longueur de la zone de contact entre l'eau et l'air au sein d'une section. $B = \frac{dS}{dh}$
- Le périmètre mouillé P (m) d'une section est la longueur de la zone de contact entre l'eau et le canal au sein de la section mouillée.

- Le rayon hydraulique R_h (m) est défini comme étant le rapport de la surface mouillée

par le périmètre mouillé. $R_h = \frac{S}{P}$

- La profondeur hydraulique est donnée par le rapport de la surface mouillée par la

largeur au miroir. $D_h = \frac{S}{B}$

-Le débit Q (m^3/s) dans une section est défini comme étant le volume du liquide écoulé à travers cette section pendant une unité de temps.

-La vitesse moyenne de l'écoulement dans une section u (m/s) est le rapport du débit Q par la section normale de l'écoulement.

- La cote z est le niveau du lit du canal par rapport à un plan horizontal de référence fixe.

- La charge H dans une section est donnée par :

$$H = z + h + \frac{u^2}{2g}$$

- La charge spécifique dans une section est :

$$H_s = h + \frac{u^2}{2g}$$

I.4. Cas d'un écoulement transitoire à surface libre

I.4.1. Le Ressaut hydraulique

Le ressaut hydraulique se caractérise par une variation importante et croissante de la hauteur d'eau de l'amont vers l'aval du phénomène sur une courte distance. Le ressaut se produit lors du passage du régime torrentiel au régime fluvial. Dans la plupart des cas, une agitation importante de la surface libre permet rapidement de localiser le phénomène, comme par exemple dans le cas d'un ressaut fort.

Le ressaut hydraulique est l'un des phénomènes les plus complexes en hydraulique à surface libre. Les connaissances actuelles sur ce phénomène ne sont pas encore suffisamment étendues pour que l'écoulement interne soit parfaitement compris [4-10].

I.4.2. Hauteurs conjuguées du ressaut

I.4.2.1. Equation de Bélanger

L'écoulement à l'amont du ressaut (à l'origine o) est caractérisé par une profondeur h_1 et une vitesse moyenne V_1 . L'équation de continuité permet d'écrire :

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} \quad (I.1)$$

Ou A_1 l'aire de la section mouillée initiale qui s'exprime par

$$A = bh_1 \quad (I.2)$$

b étant la largeur du canal rectangulaire.

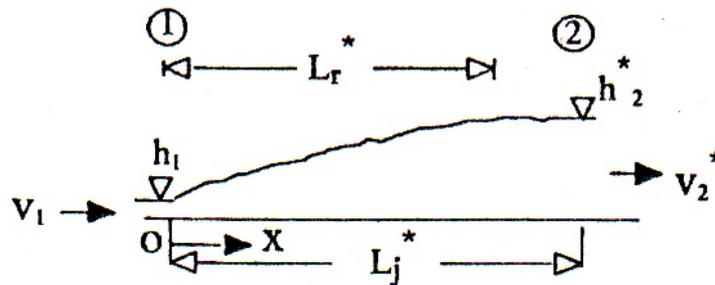


Figure 1. 8: Ressaut classique

Comme nous l'avons déjà dit le ressaut est régi par l'équation de la quantité de mouvement appliquée entre ses sections initiale et finale; c'est en fait la seconde loi de Newton qui est appliquée, énonçant que la variation de la quantité de mouvement s'opérant entre les sections 1 et 2 est égale à la somme des forces extérieures agissant sur la masse liquide en mouvement.

L'application de cette loi a nécessité quatre hypothèses simplificatrices:

- La répartition des pressions dans la section finale et initiale est hydrostatique.
- la distribution des vitesses y est uniforme.
- La perte de charge par frottement est négligeable.
- La résistance de l'air est négligeable.

On outre, en raison du fait que le ressaut évolue dans un canal de pente nulle, la composante tangentielle du poids propre de la masse liquide considérée est également nulle.

Ainsi, les forces extérieures appliquées à la masse liquide en mouvement se résument aux forces de pression hydrostatiques F_1 et F_2 s'exerçant sur les sections 1 et 2. Ces forces s'écrivent:

$$F_1 = \bar{\omega} \bar{h}_1 A_1 \quad (I.3)$$

$$F_2 = \bar{\omega} \bar{h}_2 A_2 \quad (I.4)$$

$\bar{\omega}$ Désigne le poids spécifique du liquide \bar{h}_1 et \bar{h}_2 . sont respectivement la position du centre de gravité des sections A_1 et A_2 par rapport à la surface libre de l'écoulement dans ces sections. On peut ainsi écrire que $\bar{h}_1 = \frac{h_1}{2}$ et $\bar{h}_2 = \frac{h_2}{2}$.

Sachant que $\rho.Q.V$ représente la quantité de mouvement, l'application de la loi de Newton mène à écrire:

$$\bar{\omega} b \frac{h_1^2}{2} + \rho Q V_1 = \bar{\omega} b \frac{h_2^2}{2} + \rho Q V_2 \quad (I.5)$$

Où $\bar{\omega} = \rho g$, ρ est la masse volumique du liquide et g l'accélération de la pesanteur

En tenant compte des relations (I.1) et (I.2) et sachant que le nombre de Froude caractérisant l'écoulement à l'amont du ressaut est tel que :

$$IF_1^2 = \frac{Q^2}{(g b^2 h_1^3)} \quad (I.6)$$

La relation (I.5) conduit à écrire :

$$Y^* = \frac{h_2}{h_1} = 0.5 \left[\left(1 + 0.8 IF_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \quad (I.7)$$

La relation (I.7) est connue sous le nom d'équation de Bélanger (1828), et permet d'évaluer le rapport Y^* des hauteurs conjuguées du ressaut en fonction du nombre de Froude IF_1 . Hager et sinniger (1985), [4] proposent une relation approchée applicable pour les nombres de Froude $IF_1 > 2$:

$$Y^* = \frac{h_2}{h_1} = \sqrt{2} IF_1 - \frac{1}{2} \quad (I.8)$$

I.4.2.2. Approche de Hager et Bremen

Hager et Bremen [5] ont tenté d'évaluer analytiquement le rapport Y des pertes de charge sont calculées en vertu de l'équation de Blasius.

En introduisant le rapport d'aspect $W = \frac{h_1}{b}$ (W est ainsi la hauteur initiale du ressaut relative à la largeur du canal rectangulaire) ainsi que le nombre de Reynolds IR_1^* caractérisant l'écoulement dans la section initiale du ressaut, les auteurs proposent la relation suivante :

$$Y = Y_0 \left[1 - 3.25 \cdot W \exp(IF_1 / 7) (\log IR_1^*)^{-3} \right] \quad (I.9)$$

$$Y_0 = Y^* \left[1 - 0.70 (\log IR_1^*)^{-2.5} \exp(IF_1 / 8) \right] \quad (I.10)$$

$$IR_1^* = \frac{Q}{b\nu}$$

ν est la viscosité cinématique du liquide. Les équations (I.9) (I.10) montrent que le rapport Y des hauteurs conjuguées du ressaut dépend ainsi non seulement du nombre de Froude IF_1 mais aussi du rapport d'aspect w ainsi que de la viscosité cinématique du liquide, représentée à travers le nombre de Reynolds IR_1^* .

Les auteurs Hager et Bremen estiment que la relation (I.7) peut être appliquée lorsque $IR_1^* > 10^5$ correspondant à $IF_1 < 12$ et à un débit unitaire $q = Q/b > 100$ l/s.

Ces deux dernières conditions sont généralement atteintes en pratique et l'on peut alors conclure que l'application de la relation (I.7) de Bélanger est suffisante.

I.4.3. Rendement du ressaut

La figure suivante montre la ligne de charge totale le long de la longueur L_j^* sur laquelle s'étend le ressaut classique

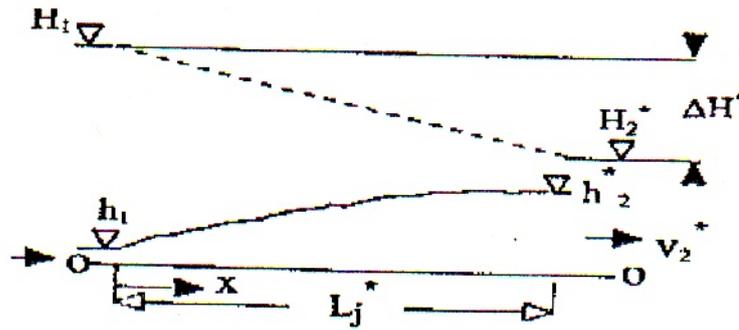


Figure I.9 : La ligne de charge totale le long du ressaut classique

En se référant au plan au plan 0-0, la charge totale dans la section initiale du ressaut s'écrit :

$$H_1 = h_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} \quad (\text{I.11})$$

$$H_2^* = h_2^* + \alpha_2 \frac{V_2^{*2}}{2g} \quad (\text{I.12})$$

α désigne le facteur de correction de l'énergie cinétique dont on admet que la valeur est égale à l'unité.

La perte de charge ΔH^* due au ressaut est la différence des charges totales initiale et finale :

$$\Delta H^* = H_1 - H_2^* \quad (\text{I.13})$$

En raison du caractère permanent de l'écoulement, l'équation de continuité reste en vigueur et l'on peut écrire:

$$Q = V_1 A_1 = V_2^* A_2^* \quad (\text{I.14})$$

Où $A_1 = bh_1$ et $A_2^* = bh_1^*$ en tenant compte des relations (I.11), (I.12) et (I.13), (I.14) s'écrit :

$$\Delta H^* = (h_1 - h_2^*) + (h_1^{-2} - h_2^{*-2}) \cdot (q^2 / 2g) \quad (\text{I.15})$$

$q = Q/b$ est le débit unitaire dont l'expression peut être déduite de l'équation de la quantité de mouvement définie par (I.5):

$$q^2/2g = (h_1 h_2^{*2} + h_1^2 h_2^*)/4 \quad (\text{I.16})$$

ainsi, l'équation (I.15) s'écrit sous sa forme définitive:

$$\Delta H^* = (h_2^* + h_1)^3 / (4h_2^* h_1) \quad (\text{I.17})$$

La relation (I.17) exprime la perte de charge due au ressaut classique en fonction des hauteurs conjuguées de celui-ci.

On exprime souvent la capacité de dissipation du ressaut par le rapport $\eta^* = \Delta H^* / H_1$ qui représente en fait son rendement.

I.5. Simulation d'un Ressaut hydraulique dans un canal

Au niveau d'un ressaut, la courbure de la ligne d'eau est trop importante (figure I.10). On utilise alors le théorème de quantité de mouvement de part et d'autre du ressaut (sur un volume de contrôle) pour simplifier le problème et déduire les caractéristiques du ressaut. Notons que l'écoulement va de la gauche vers la droite et il faut se souvenir que dans ce sens d'écoulement, un ressaut provoque une augmentation de hauteur, jamais une diminution (en effet le ressaut est associé à une dissipation d'énergie, Donc à un ralentissement de l'écoulement).



Figure I.10: simulation d'un ressaut [3].

I.5.1. L'utilité du ressaut hydraulique

Un ressaut hydraulique est souvent utilisé dans les constructions hydrauliques comme dissipateur d'énergie.

Pour les grandes vitesses $Fr > 1$, les canaux à fond mobile s'éroderaient ; par conséquent, une protection du lit par un radier artificiel, appelé bassin d'amortissement, s'impose. La longueur du ressaut (pour tout les débits possibles) y est contenue, de sorte qu'une vitesse raisonnable, $Fr < 1$, quitte le bassin.

Un ressaut peut aussi être utilisé comme mélangeur du fait de son action violente dans les rouleaux qui brassent l'eau avec l'air ou avec un autre fluide contenant des produits chimiques ajouté [6].

I.5.2. Problèmes réels rencontrés

Les équations de Barré de Saint Venant permettent de résoudre tous les problèmes d'hydraulique transitoires dès lors que la courbure des filets liquides n'est pas trop forte et que la pression reste hydrostatique [3].

CHAPITRE II

MODELISATION MATHEMATIQUE

II.1.Introduction

Les équations dites “de Barré de Saint-Venant”, occupent encore aujourd’hui une place primordiale dans les études en hydraulique maritime ou fluviale. Ces équations décrivent les écoulements à surface libre en eaux peu profondes, d’où leur appellation anglaise “Shallow Water Equations”. Elles sont obtenues à partir d’une intégration verticale des équations de Navier-Stokes en utilisant un certain nombre d’hypothèses [(Hervouet J.M., 2003), (Hervouet J.M., 2001)] [7]. Thual (Thual O., 2003b) [8]. C’est pourquoi, pour une compréhension plus approfondie sur les hypothèses et les conditions auxquelles les équations de Saint-Venant sont intégrées, nous allons d’abord présenter les équations de Navier-Stokes.

II.2. géométrie du domaine

Le domaine d’étude Ω dans le repère $R=(O, x, y, z)$ (Oz suivant la verticale) est limité en bas par le fond d’équation $z=Z_f(x, y)$ et en haut par la surface libre d’équation $z=Z_s(x, y, t)$.il est borné latéralement par un cylindre vertical d’intersection Γ avec tout plan de cote constante.Le disque horizontal de frontière est noté Ω_0 .Le domaine de calcul est ainsi défini par (figure II.1).

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 \text{ tels que } (x, y) \in \Omega_0 \text{ et } Z_f(x, y) \leq z \leq Z_s(x, y)\}$$

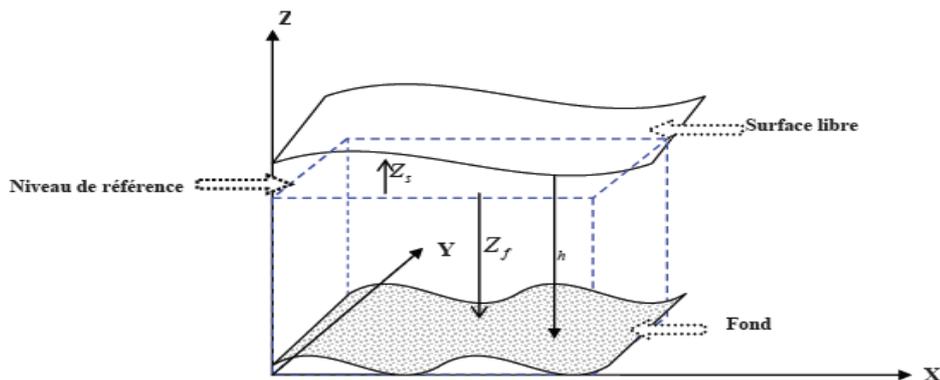


Figure II.1: géométrie du domaine

La pesanteur est orientée dans le sens des z

La hauteur d'eau, ou profondeur, sera notée h est égale à $Z_s - Z_f$.

Le fond est une donnée, la hauteur d'eau est en général une inconnue.

Le temps sera noté t .

Normales au fond et à la surface libre:

La surface libre est une fonction univoque des coordonnées x et y , ce qui exclut des formes de vagues proches du déferlement, et varie avec le temps. son équation est de la forme $z = Z_s(x, y, t)$, ce qui peut s'écrire aussi: $\Phi(x, y, z, t) = 0$ Avec :

$$\Phi(x, y, z, t) = z - Z_s(x, y, t) \quad (\text{II.1})$$

II.3. Equation de Navier-Stokes à surface libre

Les équations de Navier-Stokes sont composées de l'équation de continuité, qui exprime la conservation de la masse de fluide, et l'équation de la quantité de mouvement qui est en fait issue de la relation fondamentale de la dynamique des fluides.

II.3.1. Les équations de base

Soient \vec{U} le vecteur vitesse dont U , V et W sont des composantes dans les directions x , y et z d'un repère cartésien, respectivement ; ρ la densité; P la pression. il s'ensuit que la masse de fluide M à l'intérieur d'un volume de contrôle Ω au temps t est donnée par

$$M(t) = \int_{\Omega} \rho \, d\Omega \quad (\text{II.2})$$

Où Ω dépend des variables x , y et z et du temps t ; $d\Omega$ est un élément de Ω

L'équation de continuité exige que le taux de variation de la masse totale M soit nul. (La loi de conservation de masse)

$$\frac{d}{dt}(M) = 0 \quad (\text{II.3})$$

L'équation de la quantité de mouvement qui traduit la deuxième loi de Newton appliquée à la masse M est exprimée sous la forme

$$\frac{d}{dt}(M\vec{U}) = \Sigma \vec{F} \quad (\text{II.4})$$

Le premier membre gauche indique le taux de variation de la quantité de mouvement de la masse M , et $\Sigma \vec{F}$ est la somme vectorielle des forces qui s'exercent sur M pour un fluide Newtonien, les équations sont dénommées les équations de Navier-Stokes, d'après Navier (Navier C., 1823) et Stokes (Stokes G., 1845) qui furent les premiers à les formuler [7]

II.3.1.1. Equations de continuité :

La conservation de la masse de fluide contenue dans le domaine Ω s'exprime comme :

$$\frac{d}{dt}(M) = \frac{\partial M}{\partial t} + M_s \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega \quad (\text{II.6})$$

Le deuxième terme du second membre dans (II.5) représente le flux M_s net à travers la surface Γ . Ainsi il devient :

$$M_s = \int_{\Gamma} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (\text{II.7})$$

Par le théorème de Gauss, le flux aux frontières est alors ramené à une intégrale de volume. il s'en suit que (II.5) s'écrit

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) \right) d\Omega = 0 \quad (\text{II.8})$$

Comme le volume Ω est arbitraire, l'intégrale sur tous points de Ω doit donc être nulle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (\text{II.9})$$

Ceci représente l'énoncé de la continuité sous forme différentielle. En utilisant la notion d'une dérivée particulaire, (II.8) devient ainsi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) = 0 \quad (\text{II.10})$$

Si la densité de fluide reste constante, on a par définition un écoulement incompressible, d'où

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.11})$$

Comparée à la définition (II.11) l'équation de continuité d'un écoulement incompressible est considérablement simplifiée. On obtient à partir de (II.9)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (\text{II.12})$$

II.3.1.2. Equations de quantité de mouvement :

L'équation de la quantité de mouvement qui traduit la deuxième loi de Newton appliquée à la masse M , est exprimée sous la forme :

$$\frac{d}{dt}(M\vec{u}) = \sum \vec{F}$$

Le premier membre gauche indique le taux de variation de la quantité de mouvement de la masse M et $\sum \vec{F}$ est la somme vectorielle des forces qui s'exercent sur M . Pour un fluide newtonien les équations sont dénommées les équations de Navier-Stokes, d'après (Navier C, 1823) et (Stokes, 1845) qui furent les premiers à les formuler.

Comme pour la masse, le premier membre de (II.3) s'écrit:

$$\frac{d}{dt}(M\vec{U}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho \vec{U} d\Omega \right) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) d\Gamma B \quad (\text{II.13})$$

Par le théorème de Gauss, il s'en suit que (II.13) s'écrit

$$\frac{d}{dt}(M\vec{U}) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{U}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{U} \otimes \vec{U}) \right) d\Omega \quad (\text{II.14})$$

Les forces \vec{F} qui accélèrent le fluide dans le domaine Ω sont les forces massiques \vec{F}_M et les forces surfaciques \vec{F}_S . Notons que des forces internes peuvent également être induites par des sources extérieures. Une force massique quelconque, \vec{F}_M peut s'écrire sous la forme

$$\vec{F}_M = \int_{\Omega} \rho \vec{\gamma} d\Omega \quad (\text{II.15})$$

Où $\vec{\gamma}$ a la dimension d'une accélération. Les forces de ce type sont par exemple la pesanteur \vec{g} , la force de Coriolis \vec{f}_c et etc.

$$\vec{\gamma} = \vec{g} + \vec{f}_c = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} \quad (\text{II.16})$$

Où $\vec{\Omega}$ est le vecteur de rotation terrestre.

Les forces surfaciques sont représentées par les tenseurs des contraintes. Sur la surface Γ , le tenseur σ fournit la contribution \vec{F}_S ou

$$\vec{F}_S = \int_{\Gamma} \vec{n} \cdot \overline{\overline{\sigma}} d\Gamma = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\sigma}} d\Omega \quad (\text{II.17})$$

Pour un fluide newtonien et incompressible, le tenseur des contraintes visqueuses s'exprime sous la forme

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + 2\rho\nu\overline{\overline{D}} \quad (\text{II.18})$$

Où p est la pression, $\overline{\overline{I}}$ est le tenseur unitaire, ν est le coefficient de viscosité cinématique (en m^2/s)

$$\overline{\overline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

$\overline{\overline{D}}$ est le tenseur des taux de déformation:

$$\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) & \frac{\partial W}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

Le cas particulier de l'écoulement incompressible et à coefficient de viscosité cinématique ν constant conduit à une simplification considérable. On obtient

$$\frac{d}{dt}(m\vec{U}) = \rho \frac{d\vec{U}}{dt} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{\gamma} + \rho\nu\Delta\vec{U} \quad (\text{II.21})$$

L'équation de quantité de mouvement en forme "non conservative" s'écrit :

$$\frac{\partial(\vec{U})}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{\gamma} + \nu\Delta\vec{U} \quad (\text{II.22})$$

La variation de la masse volumique est due soit à la température, soit à la présence de substances dans l'eau, sel ou sédiments. Dans tous les cas, nous considérerons que cette variation est suffisamment faible pour que l'on puisse utiliser seulement la forme incompressible de l'équation de continuité. Nous arrivons finalement à l'écriture suivante des équations en coordonnées cartésiennes

Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.23})$$

Equation de quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu\Delta(U) + fV \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial VU}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial VW}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu\Delta(V) - fU \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

II.4. Equations de Saint-Venant

II.4.1. Présentation

A L'heure actuelle, les équations de la mécanique des fluides (Navier-Stokes, Reynolds, Barré de Saint-Venant, Euler, etc...) ont donné naissance à de nombreux logiciels qui visent caractère 1D, 2D ou 3D, L'hydraulique à surface libre traite les écoulements dans les canaux artificiels et naturel ayant une interface eau/air soumise à la pression atmosphérique .les équations de Barré de Saint-Venant (1871) sont les équations les plus utilisées pour modéliser les écoulements instationnaires et graduellement ou brusquement varié à surface libre [8].

La principale opération donnant les équations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes est une moyenne sur la verticale; toutes fois l'existence de termes non linéaires oblige à quelque hypothèses et approximations.

- La pente du canal est nulle.
- Les forces de frottements sont négligeables.
- La répartition des pressions est hydrostatique

II.4.2. Hypothèses, approximations et règles de calcul

II.4.2.1. Pression hydrostatique

L'accélération due à la pression équilibre la gravité.On dit dans ce cas que la pression est hydrostatique.Ceci va de pair avec de faibles mouvements dans le sens vertical.

Cette hypothèse traduire la pression en termes de hauteur d'eau.

La pression $p(x, y, z, t)$ n'étant donc due qu'au poids de la colonne d'eau au dessus du point de coordonnées (x, y, z) on a:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g = 0 \quad (\text{II.25})$$

Soit:

$$P(x, y, z) = -\rho g z + cste \quad (\text{II.26})$$

La constante est choisie de telle sorte que $p(x, y, Z_s) = p_{atm}$, où Z_s est la cote de la surface libre et p_{atm} la pression atmosphérique. Si le gradient de la pression atmosphérique n'est pas nul, on en tiendra compte sous forme de terme source. Pour simplifier, nous écrirons donc dans ce qui suit :

$$P(x, y, z, t) = \rho g(Z_s - Z) \quad (II.27)$$

On a en particulier au fond: $P(x, y, z, t) = \rho g(Z_s - Z_f) = \rho g h$, h étant la hauteur d'eau.

II.4.2.2. Imperméabilité de la surface et du fond

On suppose qu'il n'y a pas de transfert de masse d'eau à travers le fond et la surface, nous pouvons donc écrire :

$$\frac{\partial Z_s}{\partial t} + U^s \frac{\partial Z_s}{\partial x} + V^s \frac{\partial Z_s}{\partial y} - W^s = 0 \quad (II.28)$$

et :

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + U^f \frac{\partial Z_f}{\partial x} + V^f \frac{\partial Z_f}{\partial y} - W^f = 0 \quad (II.29)$$

II.4.2.3. Règle de Leibnitz

La dérivée d'une intégrale à bornes variables fait apparaître une dérivée à l'intérieur de l'intégrale et des termes de flux suivant la formule:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} F dz = \int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial F}{\partial x} dz + F(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} - F(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad (II.30)$$

Si l'on pose :

$$f = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{Z_s} F dz$$

f Représente la moyenne de F sur la verticale. On aura, en appliquant la formule précédente à par rapport à x , y et z :

$$\vec{grad}(hf) = \int_{Z_f}^{Z_s} \vec{grad}(F) dz - F(x, y, Z_s) \vec{n}_s - F(x, y, Z_f) \vec{n}_f \quad (II.31)$$

Ou \vec{n}_s et \vec{n}_f sont, des vecteurs qui ne sont pas unitaires, orientés vers le haut pour le premier, vers le bas pour le second.

On trouvera de même pour un vecteur :

$$\operatorname{div}(h\vec{f}) = \int_{Z_f}^{Z_s} \operatorname{div}(\vec{F}) dz - \vec{F}(x, y, Z_s) \cdot \vec{n}_s - \vec{F}(x, y, Z_f) \cdot \vec{n}_f \quad (\text{II.32})$$

Pour une dérivée en temps, et en tenant compte du fait que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_s}{\partial t} - \vec{U}^s \cdot \vec{n}_s &= 0 \\ \frac{\partial Z_f}{\partial t} - \vec{U}^f \cdot \vec{n}_f &= 0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\frac{\partial(hf)}{\partial t} = \int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial f}{\partial t} dz + F(x, y, Z_s) \vec{U}^s \cdot \vec{n}_s + F(x, y, Z_f) \vec{U}^f \cdot \vec{n}_f \quad (\text{II.33})$$

II.5. Moyenne des équations de Navier-Stokes

II.5.1. Principe

Les équations de Navier-Stokes à masse volumique constante et avec pression hydrostatique vont maintenant être moyennées sur la verticale, par intégration depuis le fond jusqu' à la surface. Outre la hauteur d'eau déjà définie [9]

$$u = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{Z_s} U dz \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{Z_s} V dz \quad (\text{II.34})$$

Ces moyennes sur la verticale des composantes horizontales du vecteur vitesse seront appelées vitesses moyennes ou "composante du vecteur vitesse moyennes"

II.5.2. Moyenne de l'équation de continuité

L'équation de continuité devient :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (\text{II.35})$$

En utilisant la règle de Leibnitz il vient:

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} U dz - U(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} + U(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} V dz - V(x, y, Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial y} + V(x, y, Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} + W(Z_s) - W(Z_f) \quad (\text{II.36})$$

Soit compte tenu des conditions d'imperméabilité:

$$\frac{\partial}{\partial x} (hu) + \frac{\partial}{\partial y} (hv) + \frac{\partial Z_s}{\partial t} - \frac{\partial Z_f}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.37})$$

Ou enfin:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(h\vec{u}) = 0 \quad (\text{II.38})$$

II.5.3. Moyenne de l'équation de quantité de mouvement

Nous moyennons l'équation de quantité de mouvement, trouvée précédemment:

$$\frac{\partial(\vec{U})}{\partial t} + \vec{U} \nabla \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}(p) + \frac{1}{\rho} \text{div}(\underline{\underline{\tau}}) + \vec{g} + \vec{F} \quad (\text{II.39})$$

Et appliquons l'hypothèse de pression hydrostatique en écrivant que $p = \rho g(Z_s - z)$.

II.5.3.1. Dérivée en temps

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial U}{\partial t} dz = \frac{\partial(hu)}{\partial t} - U(Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial t} + U(Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial t} \quad (\text{II.40})$$

II.5.3.2. Termes de diffusion

Pour le terme de diffusion $\frac{1}{\rho} \text{div}(\underline{\underline{\tau}})$, nous supposons que la masse volumique ne varie pas suivant la verticale, elle peut alors être sortie des intégrales et la formule de Leibnitz donne :

$$\frac{1}{\rho} \int_{Z_f}^{Z_s} \text{div}(\underline{\underline{\tau}}) dz = \frac{1}{\rho} \text{div} \left(\int_{Z_f}^{Z_s} \tau dz \right) + \frac{1}{\rho} \tau \vec{n}_s + \frac{1}{\rho} \tau \vec{n}_f \quad (\text{II.41})$$

Les deux derniers termes de l'équation (II.41) représentent les contraintes à la surface et au fond dues au vent ou au frottement sur le fond. .

Les deux composantes de $\frac{1}{\rho} \text{div}(\int_{\underline{z}}^{\underline{z}_s} \underline{\tau} dz)$ sont respectivement:

$$\frac{1}{\rho} \text{div} \left(\int_{z_f}^{z_s} \mu \overrightarrow{\text{grad}}(U) dz \right)$$

$$\frac{1}{\rho} \text{div} \left(\int_{z_f}^{z_s} \mu \overrightarrow{\text{grad}}(V) dz \right)$$

Avant d'arriver à la forme finale de nos termes de diffusions, il va nous falloir

considérer que $\int_{z_f}^{z_s} \mu \overrightarrow{\text{grad}}(U) dz$ est peu différent de $h \mu \overrightarrow{\text{grad}}(u)$.

$\frac{1}{\rho} \text{div} \left(\int_{z_f}^{z_s} \underline{\tau} dz \right)$ est finalement pris égal au vecteur de composantes:

$\frac{1}{\rho} \text{div}(h \mu \overrightarrow{\text{grad}}(u))$ et $\frac{1}{\rho} \text{div}(h \mu \overrightarrow{\text{grad}}(v))$, ou encore, en considérant que la masse

volumique est constante pour le calcul de ce terme: $\text{div}(h \mu \overrightarrow{\text{grad}}(u))$ et $\text{div}(h \mu \overrightarrow{\text{grad}}(v))$.

II.5.3.3. Termes de convection

Ce sont pour l'équation de U:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} \quad (\text{II.42})$$

Que l'on peut aussi mettre sous la forme :

$$\frac{\partial(UU)}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} + \frac{\partial(UW)}{\partial z} \quad (\text{II.43})$$

Grâce à l'équation de continuité. calculons la moyenne de chacun de ces 3 termes sur la Verticale :

Le plus simple est le troisième terme

$$\int_{Z_f}^{Z_s} U(x, y, z)W(x, y, z)dz = U(x, y, Z_s)W(x, y, Z_s) - U(x, y, Z_f)W(x, y, Z_f) \quad (\text{II.44})$$

Nous avons ensuite:

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial U^2}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} U^2 dz - U^2(Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial x} + U^2(Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad (\text{II.45})$$

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \frac{\partial(UV)}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} UV dz - U(Z_s)V(Z_s) \frac{\partial Z_s}{\partial y} + U(Z_f)V(Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} \quad (\text{II.46})$$

Ces termes font apparaître des non linéarités, développons par exemple l'expression en UV:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} UV dz = \frac{\partial}{\partial y} \int (u + U - u)(v + V - v) dz = \frac{\partial}{\partial y} (huv) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (U - u)(V - v) dz$$

Le terme $\frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} (U - u)(V - v) dz$ n'est pas nul lorsqu'il y a des hétérogénéités de vitesse

sur la verticale. ces termes, dits de dispersion, sont en général interprétés comme une diffusion supplémentaire. En effet ils prennent en compte des fluctuations autour d'une moyenne (spatiale) et sont à ce titre analogues aux tensions de Reynolds. En réalité ces termes proviennent du fait que le transport des grandeurs physiques se fait par le courant réel et non par le courant moyenné sur la verticale. Suivant la profondeur, toutes les particules ne sont pas entraînées à la même vitesse alors que dans les équations de Saint-Venant on choisit un courant moyen. nous adopterons ici un traitement sous forme de diffusion, avec un tenseur qui s'ajoutera naturellement au tenseur de Reynolds. En effet, si l'on pose

$u'' = U - u$ et $v'' = V - v$, ces termes de dispersion sont, respectivement suivant x et suivant y:

$$\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} u'' u'' dz + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} u'' v'' dz \quad (\text{II.47})$$

$$\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_s} u'' v'' dz + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_s} v'' v'' dz \quad (\text{II.48})$$

Sous cette forme, on voit que le tenseur $u''_i u''_j$ s'ajoute naturellement au tenseur des contraintes. Une façon de le prendre en compte consistera à modifier la valeur de la viscosité ν , ou en écoulement turbulent ν_t , pour la remplacer par une viscosité effective intégrant le phénomène de dispersion.

II.5.4. Gradient de pression

Pour les gradients de pression en x et en y, nous écrivons:

$$\int_{z_f}^{z_s} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} [\rho g (Z_s - z)] dz = -hg \frac{\partial Z_s}{\partial x}$$

et:

$$\int_{z_f}^{z_s} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} [\rho g (Z_s - z)] dz = -hg \frac{\partial Z_s}{\partial y}$$

Ceci n'est vrai que si la masse volumique ne varie pas suivant l'horizontale. les variations de masse volumique seront prises en compte avec les termes sources de flottabilité.

La somme de tous ces termes, dont de nombreux disparaissent en raison de l'imperméabilité du fond et de la surface libre, donne les équations suivantes [7].

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(huu) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = -gh \frac{\partial Z_s}{\partial x} + hF_x + \text{div}(h v_e \overrightarrow{\text{grad}}(u)) \quad (\text{II.49})$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hvv) = -gh \frac{\partial Z_s}{\partial y} + hF_y + \text{div}(h v_e \overrightarrow{\text{grad}}(v)) \quad (\text{II.50})$$

Où F_x et F_y sont les forces dues au vent et les forces de Coriolis qui sont négligeable

Donc :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(h\bar{u}) = 0 \quad (\text{II.51})$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(huu) + \frac{\partial}{\partial y}(huv) = -gh \frac{\partial Z_s}{\partial x} + \text{div}(h v_e \overrightarrow{\text{grad}}(u)) \quad (\text{II.52})$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(huv) + \frac{\partial}{\partial y}(hvv) = -gh \frac{\partial Z_s}{\partial y} + \text{div}(h v_e \overrightarrow{\text{grad}}(v)) \quad (\text{II.53})$$

Ces équations constituent les équations de Barré de Saint-Venant bidimensionnelles.

II.6. Conclusion

La modélisation mathématique concerne à la fois les écoulements transitoires générés par l'ouverture brusque d'une vanne, ou dans les cas d'un divergent et d'un déversoir placés à l'extrémité amont d'un canal rectangulaire produisant la variation de la profondeur d'eau et de la vitesse en fonction du temps en différentes sections du canal.

L'application des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement aboutit à un système de deux équations aux dérivées partielles [10], de type hyperbolique qui est résolu numériquement par la méthode des volumes finis.

CHAPITRE III

RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE SAINT VENANT

III.1. Introduction

Pour résoudre un problème physique posé sous la forme d'une équation différentielle, ou aux dérivées partielles, par un schéma numérique, on procède par trois étapes successives : discrétisation, transformation et résolution. Premièrement, on ramène le problème à un problème discret par la division du domaine global en sous domaine: c'est la discrétisation. La deuxième étape consiste, à faire une approximation des équations gouvernantes par des équations algébriques pour chaque sous domaine : c'est la transformation. Finalement, le système d'équations algébriques est résolu en utilisant des méthodes numériques directes ou indirectes : c'est la résolution. En général, les méthodes numériques peuvent être classifiées suivant la manière de discrétisation et de transformation utilisée. Les quatre types de méthodes les plus utilisées pour résoudre les problèmes des écoulements des fluides sont :

- Méthodes des caractéristiques (M.C) ;
- Méthodes des différences finies (M.D.F) ;
- Méthodes des éléments finis (M.E.F) ;
- Méthodes des volumes finis (M.V.F).

III.2. La méthode numérique

Dans la conception de telles méthodes numériques nous nous trouvons face à, au moins, trois difficultés majeures :

- a) la conservation, une condition essentielle et obligatoire de façon que la présence des discontinuités hydrauliques soit prise en compte automatiquement dans la solution,
- b) la non génération d'oscillations parasites aux voisinages des forts gradients,
- c) le traitement convenable des termes sources afin de préserver la haute précision du modèle numérique dans la résolution des problèmes impliquant des termes sources pouvant admettre essentiellement des fonctions non différentiables (comme par exemple un lit irrégulier).

Cette étude est une contribution à la résolution des équations de Saint-Venant par la méthode des volumes finis dont le domaine d'étude est un canal horizontal sa longueur est de 15m et de hauteur de 1.5m (Figure III.1).

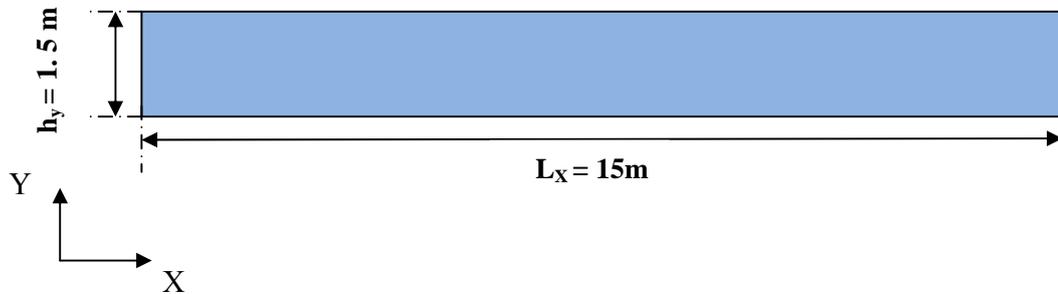


Figure III.1: Présentation du domaine d'étude d'un canal à surface libre

III.3. Résolution numérique de l'équation de transport

III.3.1. Méthode des volumes finis (MVF)

La méthode a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar (Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, [11]).

Dans les dernières années, la méthode des volumes finis a attiré une large attention de la communauté des numériciens et a obtenu une série de succès incontestables dans la simulation numérique des problèmes hydrauliques bidimensionnels à surface libre.

III.3.2. Principe

La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (VC).

Le principe de discrétisation peut être illustré en considérant l'équation de transport pour une grandeur scalaire ϕ , valable pour toutes les équations d'écoulement.

III.3.3. Equation de transport

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\Phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\Phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + S \quad (\text{III.1})$$

Où u et v sont les composantes de la vitesse, de l'écoulement dans les directions x et y
 $\Phi = \Phi(x, y, t)$ est une valeur scalaire et Γ est le coefficient de diffusion [11].

La Figure. III.2 représente le domaine de calcul et le volume de contrôle

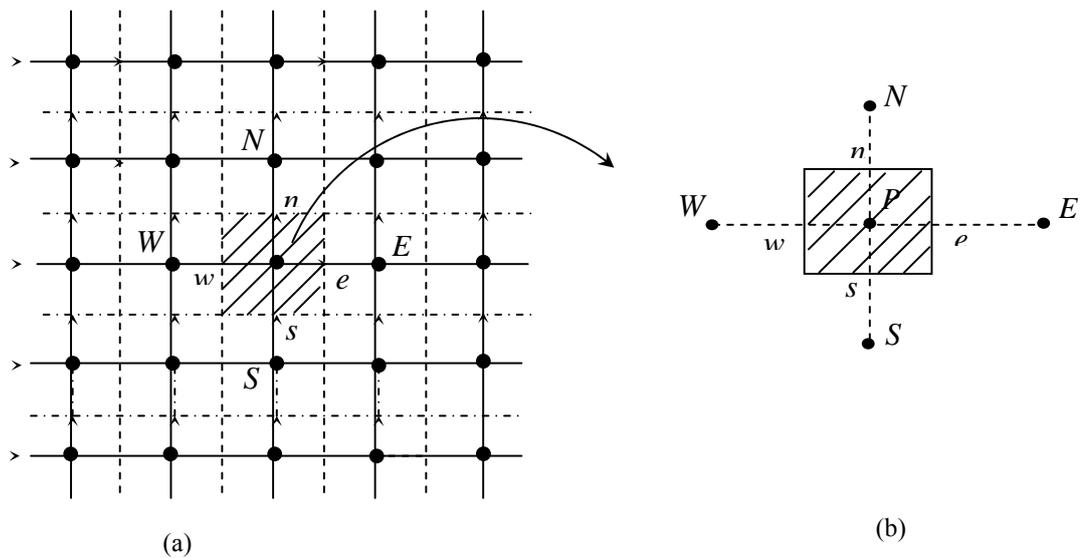


Figure. III.2: Schéma de discrétisation. (a) domaine de calcul, (b) volume de contrôle

$$\int_{VC} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho U \phi}{\partial x} + \frac{\partial \rho V \phi}{\partial y} \right) dv dt = \int_{VC} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + s_\phi \right) dv dt \quad (\text{III.2})$$

$$dv = dx \cdot dy \cdot 1$$

III.3.4. Discrétisation des Différents Termes

III.3.4.1. Terme de Stockage

$$\int_{VC} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) \right) dt \cdot dx \cdot dy = (\rho\phi) \Big|_t^{t+\Delta t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \left((\rho\phi_p)^{t+\Delta t} - (\rho\phi_p)^t \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (III.3)$$

III.3.4.2. Terme Convectif Longitudinal

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \left(\frac{\partial \rho U \phi}{\partial x} \right) dx \cdot dy \cdot dt = (\rho\phi U) \Big|_w^e \cdot \Delta y \cdot \Delta t = \left((\rho U \phi)_e - (\rho U \phi)_w \right) \cdot \Delta y \cdot \Delta t \quad (III.4)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \left(\frac{\partial \rho U \phi}{\partial x} \right) dx \cdot dy \cdot dt = (F_e \phi_e - F_w \phi_w) \cdot \Delta t$$

Avec: $F_e = \rho U_e \cdot \Delta y$

$F_w = \rho U_w \cdot \Delta y$

III.3.4.3. Terme Convectif Vertical

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \left(\frac{\partial \rho V \phi}{\partial y} \right) dy \cdot dx \cdot dt = (\rho V \phi) \Big|_s^n \cdot \Delta x \cdot \Delta t = \left((\rho V \phi)_n - (\rho V \phi)_s \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta t = (F_n \phi_n - F_s \phi_s) \cdot \Delta t \quad (III.5)$$

Avec: $F_n = \rho V_n \cdot \Delta x$

$F_s = \rho V_s \cdot \Delta x$

III.3.4.4. Terme Diffusif Suivant x

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) dx \cdot dy \cdot dt &= \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_w^e \cdot \Delta y \cdot \Delta t = \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_w \right) \cdot \Delta y \cdot \Delta t \\ &= \left(\Gamma_e \frac{\phi_e - \phi_p}{\delta x_{pe}} - \Gamma_w \frac{\phi_p - \phi_w}{\delta x_{wp}} \right) \cdot \Delta y \cdot \Delta t = \left(\frac{\Gamma_e \cdot \Delta y}{\delta x_{pe}} \cdot (\phi_e - \phi_p) - \frac{\Gamma_w \cdot \Delta y}{\delta x_{wp}} \cdot (\phi_p - \phi_w) \right) \cdot \Delta t \quad (III.6) \\ &= (D_e \cdot (\phi_e - \phi_p) - D_w \cdot (\phi_p - \phi_w)) \cdot \Delta t \end{aligned}$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e \cdot \Delta y}{\delta x_{pe}}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \cdot \Delta y}{\delta x_{wp}}$$

III.3.4.5. Terme Diffusif Suivant y

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right) dx \cdot dy \cdot dt &= \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_n \cdot \Delta x \cdot \Delta t = \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_s \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta t \\ &= \left(\Gamma_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta x_{PN}} - \Gamma_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta x_{SP}} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta t = \left(\frac{\Gamma_n \cdot \Delta x}{\delta x_{PN}} \cdot (\phi_N - \phi_P) - \frac{\Gamma_s \cdot \Delta x}{\delta y_{SP}} \cdot (\phi_P - \phi_S) \right) \cdot \Delta t \quad (\text{III.7}) \\ &= (D_n \cdot (\phi_N - \phi_P) - D_s \cdot (\phi_P - \phi_S)) \cdot \Delta t \end{aligned}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \cdot \Delta x}{\delta x_{NP}}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \cdot \Delta x}{\delta x_{SP}}$$

III.3.4.6. Terme Source

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{VC} (S_\phi) dv \cdot dt = (S_\phi) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t = (S_P \cdot \phi_P + S_u) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t \quad (\text{III.8})$$

On considère que le terme source S_ϕ est linéaire par rapport (ϕ). Après une substitution dans l'équation de transport-diffusion et en appliquant un schéma implicite pour le temps, on obtient la forme discrétisée suivante [12].

$$\begin{aligned} a_e^0 (\phi_P^{t+\Delta t} - \phi_P^t) + (F_e \phi_e^{t+\Delta t} - F_w \phi_w^{t+\Delta t}) + (F_n \phi_n^{t+\Delta t} - F_s \phi_s^{t+\Delta t}) = \\ (D_e (\phi_E^{t+\Delta t} - \phi_P^{t+\Delta t})) + (D_w (\phi_P^{t+\Delta t} - \phi_W^{t+\Delta t})) + \\ (D_n (\phi_N^{t+\Delta t} - \phi_P^{t+\Delta t})) - (D_s (\phi_P^{t+\Delta t} - \phi_S^{t+\Delta t})) + (S_P \cdot \phi_P^{t+\Delta t} + S_u) \Delta x \cdot \Delta y \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

$$\text{Avec: } a_p^0 = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

- **Schéma de discrétisation (Schéma Hybride)**

Pour arriver à une forme finale, on doit choisir un schéma de discrétisation des termes convectifs. Le schéma employé pour la discrétisation est le schéma Hybride. Ce schéma, dont la précision spatiale est réduite au premier ordre, possède les propriétés de transport et de conservation. Le schéma hybride se réduit à l'approximation du schéma centrée CSD lorsque $|Pe_m| < 2$, mais il devient identique au schéma Upwind UDS1 lorsque $|Pe_m| > 2$ [13].

Après un réarrangement on aura:

$$ap \cdot \phi_p^{t+\Delta t} = aw \cdot \phi_w^{t+\Delta t} + ae \cdot \phi_e^{t+\Delta t} + as \cdot \phi_s^{t+\Delta t} + an \cdot \phi_n^{t+\Delta t} + a_p^0 \cdot \phi_p^t + s_u \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (\text{III.10})$$

a_m ($m = w, e, s, n$) Les coefficients sont donnés par:

$$aw = \max\left(F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0\right) \quad (\text{III.11})$$

$$ae = \max\left(-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0\right) \quad (\text{III.12})$$

$$as = \max\left(F_s, D_s + \frac{F_s}{2}, 0\right) \quad (\text{III.13})$$

$$an = \max\left(-F_n, D_n - \frac{F_n}{2}, 0\right) \quad (\text{III.14})$$

$$ap = a_p^0 + aw + ae + as + an - S_p \Delta x \cdot \Delta y \quad (\text{III.15})$$

Il est à noter que cette formulation est valable pour n'importe quelle localisation des interfaces entre les mailles. Elle permet de fournir des solutions physiquement acceptables aux problèmes sans toutefois garantir la précision de la solution obtenue.

- **Schémas Implicite ADI**

La méthode implicite est une méthode qui n'est pas restreinte au critère de stabilité, c'est-à-dire qu'elle est stable pour tout Δt ; autrement dit elle est inconditionnellement stable. L'une de ces méthodes implicite est la méthode ADI (alternating direction implicite); elle est très efficace pour la résolution des problèmes des phénomènes de transport, bidimensionnels [11].

Cette méthode consiste à diviser le pas de temps Δt en deux pas :

Le premier pas $t \rightarrow t + \Delta t / 2$ en prenant l'implicite suivant x au temps $(t + \Delta t / 2)$ et l'explicite suivant y au temps (t)

$$-aw \cdot \phi_{i,j-1}^{1/2} + ap \cdot \phi_{i,j}^{1/2} - ae \cdot \phi_{i,j+1}^{1/2} = as \cdot \phi_{i-1,j}^0 + an \cdot \phi_{i+1,j}^0 + ap^0 \cdot \phi_{i,j}^0 + S_u \Delta x \cdot \Delta y \quad (\text{III.16})$$

Le deuxième pas $t + \Delta t / 2 \rightarrow t + \Delta t$ en prenant l'implicite suivant y au temps $(t + \Delta t)$ et l'explicite suivant x au temps $(t + \Delta t / 2)$

$$-as \cdot \phi_{i-1,j}^1 + ap \cdot \phi_{i,j}^1 - an \cdot \phi_{i+1,j}^1 = aw \cdot \phi_{i,j-1}^{1/2} + ae \cdot \phi_{i,j+1}^{1/2} + ap^0 \cdot \phi_{i,j}^{1/2} + S_u \Delta x \cdot \Delta y \quad (\text{III.17})$$

Remarque:

- $0 \rightarrow t$
- $1/2 \rightarrow t + \Delta t / 2$
- $1 \rightarrow t + \Delta t$

III. 4. Résolution du couplage Vitesse -hauteur

Un des problèmes rencontrés lorsque l'on résout les équations de Saint-Venant exprimées en variables vitesse-hauteur d'eau (issue des équations de Navier-Stokes exprimées en variables primitives vitesse-pression) concerne le traitement du couplage entre les deux quantités vitesse et hauteur [13].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho U^* - \rho U^t}{\Delta t} = -\frac{\partial(\rho U U)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho V U)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial U}{\partial y} \right) + S_u \\ \frac{\rho V^* - \rho V^t}{\Delta t} = -\frac{\partial(\rho V U)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho V V)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial V}{\partial y} \right) + S_v \\ \frac{\rho U^{t+\Delta t} - \rho U^*}{\Delta t} = -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} \quad (a) \\ \frac{\rho V^{t+\Delta t} - \rho V^*}{\Delta t} = -g \frac{\partial Z_s}{\partial y} \quad (b) \end{array} \right. \quad (III.18)$$

La résolution des deux dernières équations (a) et (b) représente l'étape dite de prédiction, elle Permet l'obtention d'un champ provisoire de vitesse U^* et V^* calculé uniquement à partir du champ U^t et V^t . Ce champ provisoire ne vérifie a priori pas l'équation de continuité. On dérive les deux dernières équations respectivement par rapport à x et par rapport à y, d'où:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho U^{t+\Delta t} - \rho U^*}{\Delta t} \right) = -g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z_s}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho V^{t+\Delta t} - \rho V^*}{\Delta t} \right) = -g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Z_s}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (III.19)$$

On faisons la somme on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho U^{t+\Delta t} - \rho U^*}{\Delta t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho V^{t+\Delta t} - \rho V^*}{\Delta t} \right) &= -g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z_s}{\partial x} \right) - g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Z_s}{\partial y} \right) \\ \left(\left(\frac{\partial(\rho U^{t+\Delta t})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V^{t+\Delta t})}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial(\rho U^*)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V^*)}{\partial y} \right) \right) / \Delta t &= -g \frac{\partial^2 Z_s}{\partial x^2} - g \frac{\partial^2 Z_s}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (III.20)$$

$$\left(\frac{\partial(\rho U^{t+\Delta t})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V^{t+\Delta t})}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{Équation de continuité}). \quad (\text{III.21})$$

$$g \left(\frac{\partial^2 Z_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_s}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial(\rho U^*)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V^*)}{\partial y} \right) / \Delta t \quad (\text{III.22})$$

La résolution de l'équation ci-dessus, nécessite évidemment de fixer des conditions aux limites. On choisira une condition de type Neumann sur le gradient de surface au niveau des frontières du domaine :

$$\frac{\partial Z_s}{\partial n} = 0$$

Après convergence, on recalcule les hauteurs aux frontières du domaine, en les extrapolant à partir du champ en aval. La dernière étape de la méthode consiste évidemment à réinjecter les hauteurs, calculé ci-dessus, dans les équations (a) et (b), ce qui permet d'obtenir le champ de vitesse $U^{t+\Delta t}, V^{t+\Delta t}$ celui-ci satisfaisant aussi bien à l'équation de quantité de mouvement qu'à l'équation de continuité [13].

$$U_{IJ}^{t+\Delta t} = U_{IJ}^{t+\Delta t/2} - \Delta t \cdot (Z_{I+1J} - Z_{IJ}) / (\rho \Delta x) \quad (\text{III.23})$$

$$V_{IJ}^{t+\Delta t} = V_{IJ}^{t+\Delta t/2} - \Delta t \cdot (Z_{IJ+1} - Z_{IJ}) / (\rho \Delta y) \quad (\text{III.24})$$

- **Discretisation de l'Equation**

Ces deux équations ont une forme générale de l'équation de poisson:

$$\nabla(\Gamma \cdot \nabla(\phi)) + S_\phi = 0$$

L'intégration sur le volume de contrôle définie précédemment donne:

$$\int_{vc} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial x} (\phi) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial y} (\phi) \right) + S_\phi \right) \cdot dv = 0 \quad (\text{III.25})$$

D'où sa forme discrétisée:

$$ap \cdot \phi_P = aw \cdot \phi_W + ae \cdot \phi_E + as \cdot \phi_S + an \cdot \phi_N + s_\phi \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (\text{III.26})$$

Où les différents coefficients :

$$aw = D_w \quad (\text{III.27})$$

$$ae = D_e \quad (\text{III.28})$$

$$as = D_s \quad (\text{III.29})$$

$$an = D_n \quad (\text{III.30})$$

$$ap = D_w + D_e + D_s + D_n - S_p \Delta x \cdot \Delta y \quad (\text{III.31})$$

III.5. Présentation du Maillage et des Conditions Aux Limites

Les conditions aux limites sont exprimées par deux types des conditions Dirichlet et Neumann. La géométrie suivante montre le domaine de calcul étudié (Fig. III.3). Pour toutes les variables on a choisi la condition de Dirichlet sous la forme $\phi = \phi_0$ à l'entre du canal (la face I) à la sortie de domaine la condition de Neumann a été choisi sous la forme,

$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$, avec n représente la normal de la face

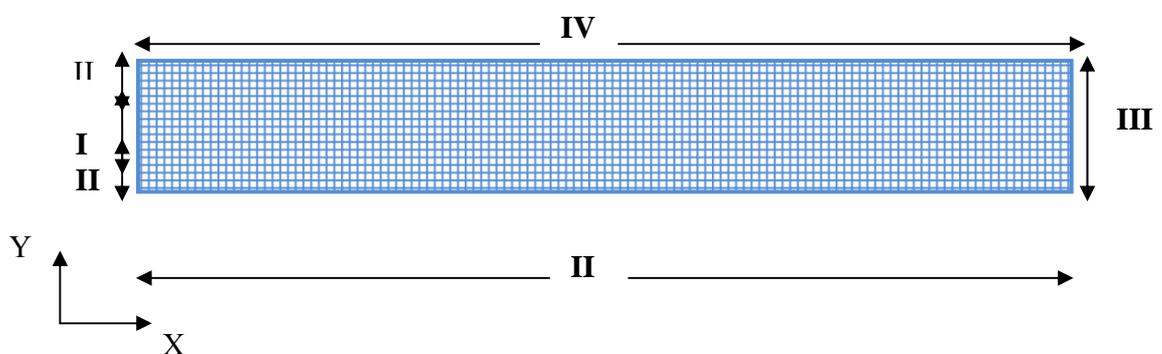


Figure. III.3: Présentation du maillage et des conditions aux limites

- I** : Entrée du canal,
- II** : Paroi du canal,
- III** : Sortie du canal,
- IV** : Surface libre.

Tableau .III.1: Conditions aux limites.

	U	V	h
<i>I</i>	$U = U_0$	$V = 0$	$h = h_0$
<i>II</i>	$U = 0$	$V = 0$	$h = 0$
<i>III</i>	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$	$h = Z_s$
<i>IV</i>	$U = 0$	$V = 0$	$h = Z_s$

III.5.1. CONDITIONS INITIALES

à $t=0$
 $U = 0$
 $h = 0$

III.5.2. CONDITIONS AUX LIMITES

Dans un problème d'écoulement à surface libre, les frontières sont classées en deux types [7]

III.5.2.1. Frontières solides

Sur cette frontière, aucun flux ne doit traverser. La composante normale du vecteur Vitesse ainsi que le gradient de la surface libre ne doivent y être nuls (effet « miroir » de la paroi :

$$\frac{\partial Z_s}{\partial n} = 0 \text{ et } U_n = 0$$

III. 5.2.2. Condition aux parois non glissantes

On impose que la composante tangentielle du vecteur vitesse U_t à la frontière est Nulle:

$$U_t=0$$

III.5.2.3. Condition aux parois glissantes

Cette condition implique que la vitesse normale et le gradient normal à la paroi de la vitesse tangentielle soient nuls.

$$\frac{\partial U_t}{\partial n} = 0 \text{ et } \frac{\partial Z_s}{\partial n} = 0$$

III.6. Résolution de L'équation (méthode de Gauss)

Afin de discrétiser l'équation, on trouve la relation général qui à la forme suivante:

$$ap.\phi_{I,J} = (aw.\phi_{I-1,J} + ae.\phi_{I+1,J} + as.\phi_{I,J-1} + an.\phi_{I,J+1} + b_{I,J}) \quad (\text{III.32})$$

La méthode de Gauss consiste à estimer une solution $\phi_{I,J}^k$ dans l'itération k , pour calculer $\phi_{I,J}^{k+1}$ à partir de:

$$\phi_{I,J}^{k+1} = (aw.\phi_{I-1,J}^{k+1} + ae.\phi_{I+1,J}^k + as.\phi_{I,J-1}^{k+1} + an.\phi_{I,J+1}^k + b_{I,J}) / ap \quad (\text{III.33})$$

La condition de convergence est:

$$\left| \frac{\phi_{I,J}^{k+1} - \phi_{I,J}^k}{\phi_{I,J}^{k+1}} \right| \leq \varepsilon \quad (\text{III.34})$$

Si la condition n'est pas vérifiée, on pose que $\phi_{I,J}^k = \phi_{I,J}^{k+1}$ et on recalcule jusqu'à la convergence.

III.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode volume fini de second ordre en temps et en espace pour la résolution des équations de Barré de Saint Venant 2D. Afin de permettre le développement d'un schéma numérique de type ADI et un maillage uniforme, nous avons détaillé les discrétisations spatiale et temporelle ainsi que les conditions aux limites pour ce type de maillage. La méthode est basée sur l'écriture des équations

mathématiques sous forme intégrale sur un volume de contrôle élémentaire. Chaque volume élémentaire est représenté par une cellule du maillage, utilisée pour la discrétisation du domaine simulé [14].

Après le choix de la méthode numérique et la proposition des conditions aux limites un programme est élaboré en Fortran 90, et suite à plusieurs essais, 'on a abouti aux résultats présentés dans le chapitre suivant.

CHAPITRE IV

RESULTATS ET DISCUSSIONS

IV.1. Introduction

Une simulation numérique des écoulements transitoires à surface libre provoqués par l'ouverture brusque d'une vanne, cas d'un divergent, et cas d'un déversoir est développée. L'application des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement aboutit à un système de deux équations aux dérivées partielles de type hyperbolique qui est résolu numériquement par le schéma ADI. L'écoulement transitoire à surface libre concerne un canal rectangulaire à pente nulle et un fond lisse. L'écoulement transitoire est provoqué par les différents cas nous a permis d'étudier l'évolution des profondeurs et la variation des champs de vitesses en fonction du temps en différentes sections du canal. On assiste aux changements des profils des profondeurs, et des vitesses. Soit à l'apparition d'oscillations lors de l'évolution de ces profondeurs pouvant entraîner l'inondation du canal [14].

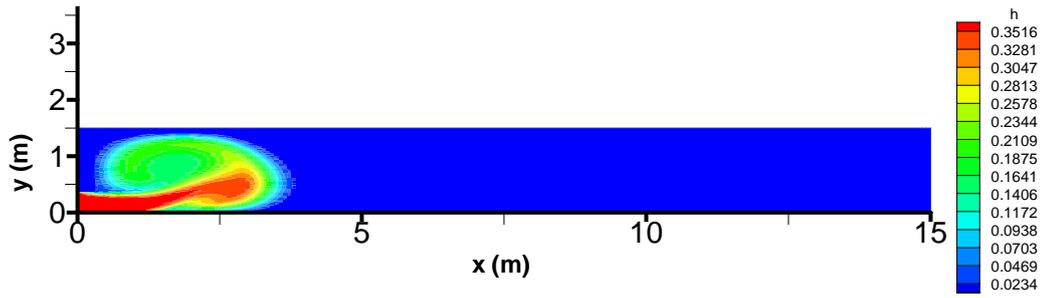
IV.2 Résultats de la simulation

IV.2.1. Cas de L'Ouverture brusque d'une vanne dans un canal à pente nulle et sans frottement

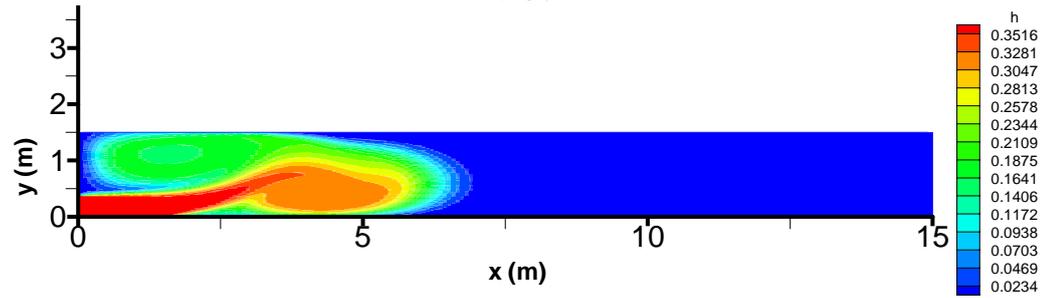
Le premier cas concerne l'écoulement transitoire dans un canal prismatique à section rectangulaire. Nous considérons un canal horizontal de largeur, $B = 0.50\text{m}$, de hauteur de $H = 1.50\text{m}$ et de longueur $L = 15\text{m}$. Le lit du canal est lisse, donc il n'y a pas d'effet de frottement sur l'écoulement. La vanne se trouve au début du canal et à l'instant $t=0$, la vanne est totalement enlevée et l'eau se relâche sous forme d'une vague, se dirige vers aval.

La discrétisation numérique se fait en partageant le canal en (200×100) noeuds de calcul.

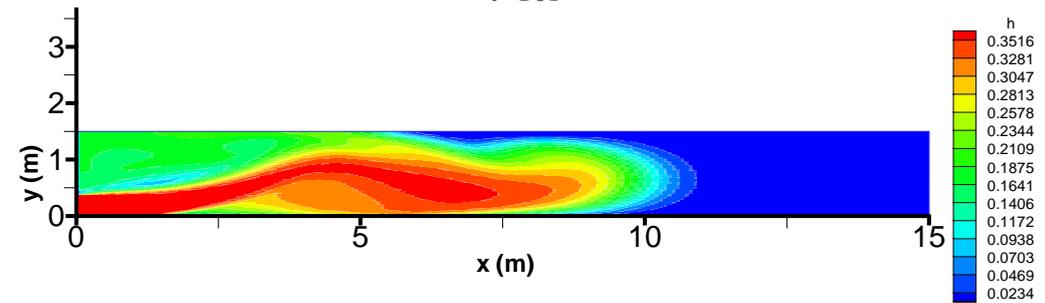
Les résultats suivants présente l'écoulement instationnaire dans un canal rectangulaire à surface libre dont on représente la variation de la hauteur d'eau en fonction du temps (Figure IV.1).



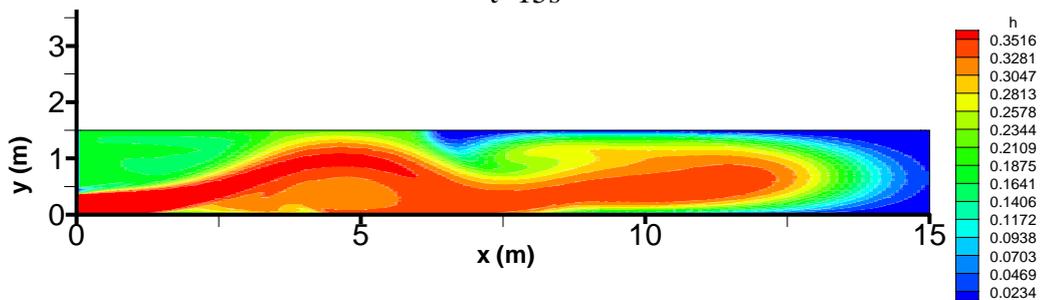
t=5s



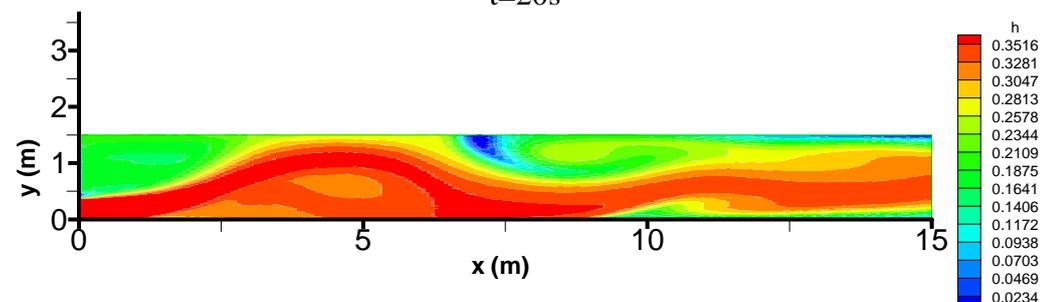
t=10s



t=15s



t=20s



t=25s

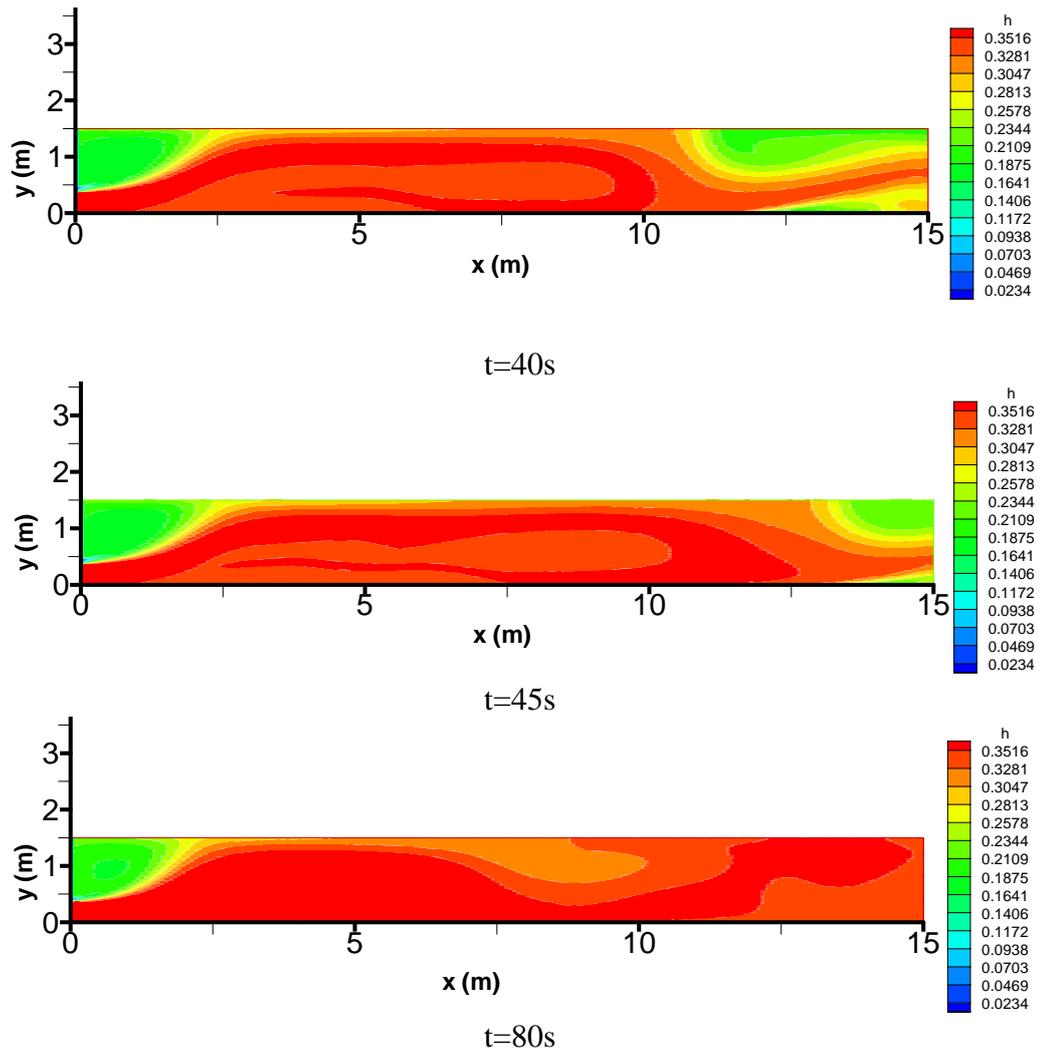


Figure IV.1: Variation de la hauteur d'eau dans le cas de l'ouverture brusque de la vanne à ($t=5s, 10s, 15s, 20s, 25s, 40s, 45s$ et $80s$)

Les figures IV.2 et IV.3 présente les profils des hauteurs selon les deux axes (x) et (y).

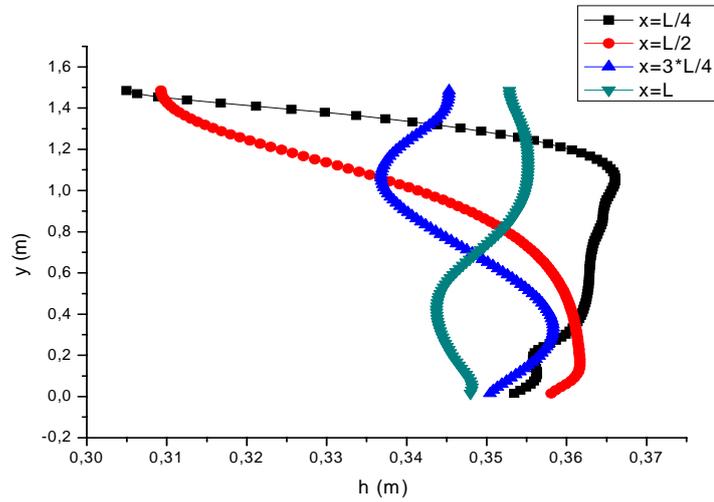


Figure IV.2: Profil des hauteurs h (m) selon l'axe des (y)

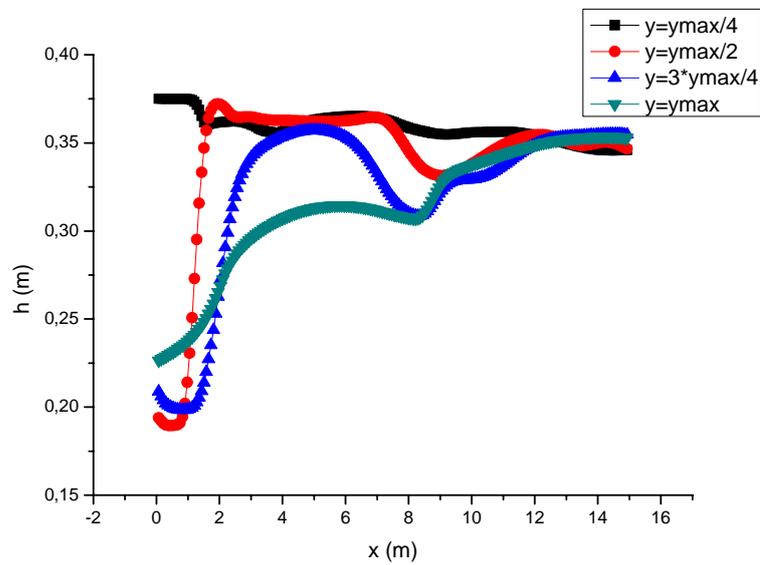


Figure IV.3: Profil des hauteurs h (m) selon l'axe des (x)

Les figures IV.4 et IV.5 représentent la variation de la vitesse u (m/s) au long du canal avec un profil des vitesses selon l'axe x .

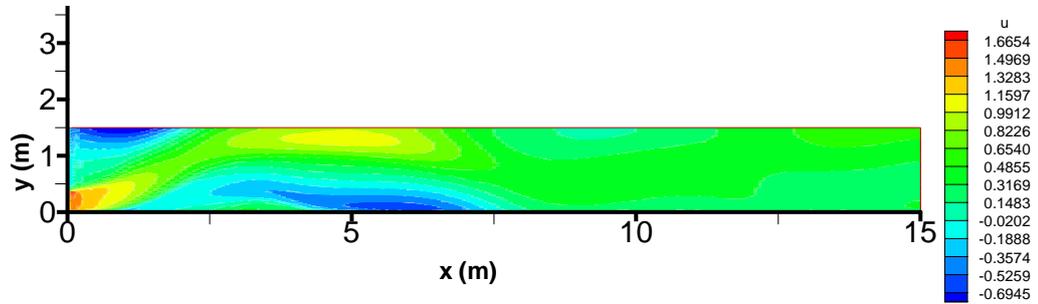


Figure IV.4: Variation de la vitesse u (m/s) dans le cas de l'ouverture brusque de la vanne

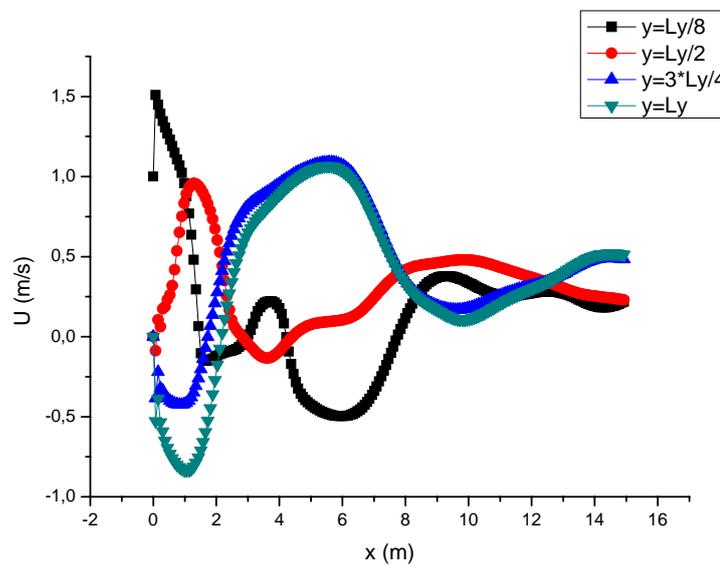


Figure IV.5: Profil des vitesses u (m/s) selon l'axe des x

Les figures IV.6 et IV.7 représentent la variation de la vitesse v (m/s) le long du canal avec un profil des vitesses selon l'axe x .

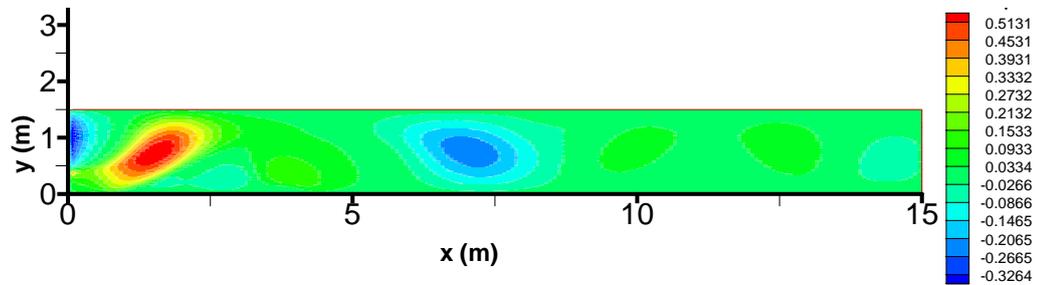


Figure IV.6: Variation de la vitesse v (m/s) dans le cas de l'ouverture brusque de la vanne

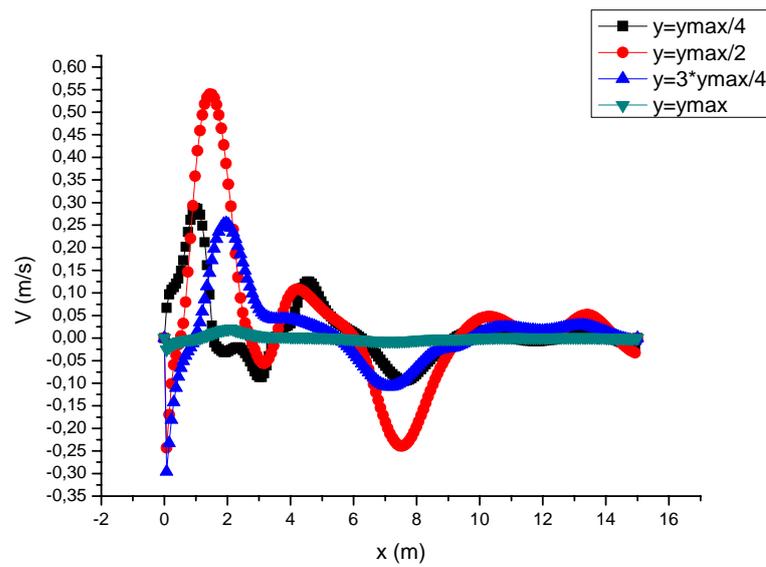


Figure IV.7: Profil des vitesses v (m/s) selon l'axe des (x)

La figure IV.8 présente la variation des champs des vecteurs vitesses le long du canal rectangulaire à surface libre.

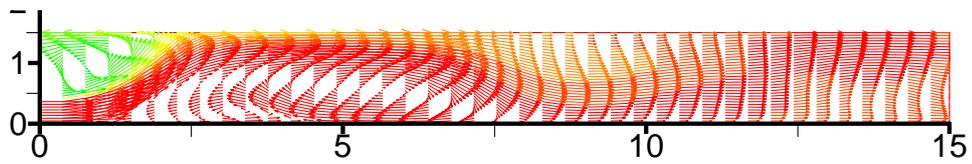


Figure IV.8: Présentation des champs des vecteurs vitesses dans le cas de l'ouverture brusque de la vanne

Les figures IV.9, IV.10 et IV.11 représentent les zones de recirculation dans les différentes sections du canal.

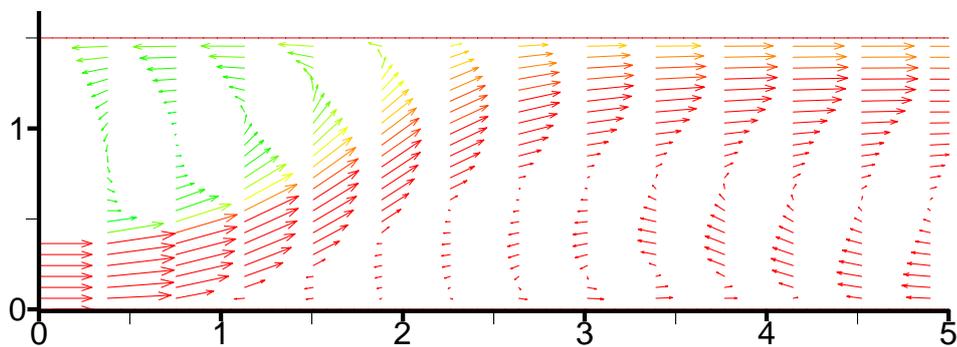


Figure IV.9: Présentation de la zone de re-circulation au début du canal

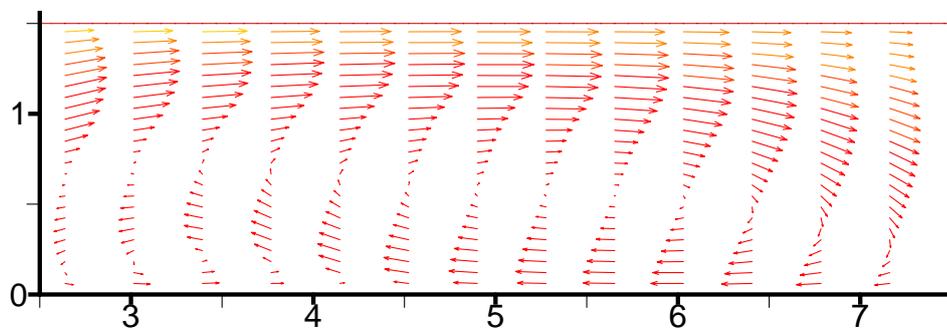


Figure IV.10: Présentation de la zone de re-circulation au milieu du canal

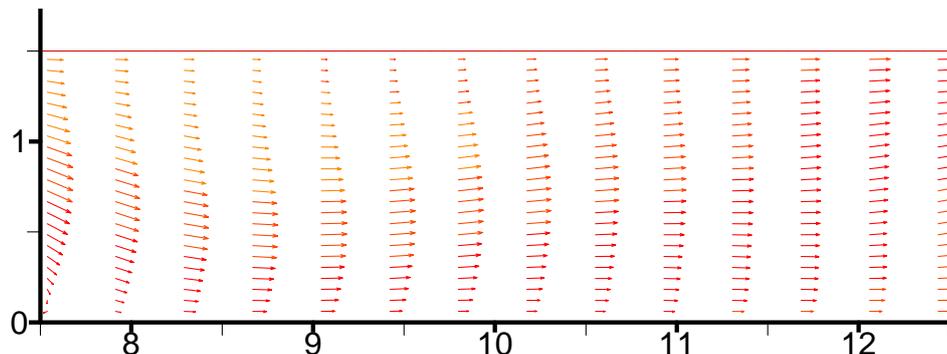


Figure IV.11: Présentation de la zone de re-circulation à la fin du canal

IV.2.2. Cas de la Présence d'un divergent dans un canal à pente nulle et sans frottement

Le deuxième cas concerne l'écoulement transitoire dans un canal prismatique à section rectangulaire. Nous considérons un canal horizontal de largeur, $B = 0.50\text{m}$, de hauteur de $H = 1.50\text{m}$ et de longueur $L = 15\text{ m}$. Le lit du canal est lisse, donc il n'y a pas d'effet de frottement sur l'écoulement. un divergent se trouve à l'entrée du canal et à l'instant $t=0$, l'écoulement se fait à travers le divergent et l'eau se relâche sous forme d'une vague, se dirige vers aval.

La figure IV.12 présente la variation de la hauteur d'eau en fonction du temps ainsi La figure IV.13 présente le profil des hauteurs

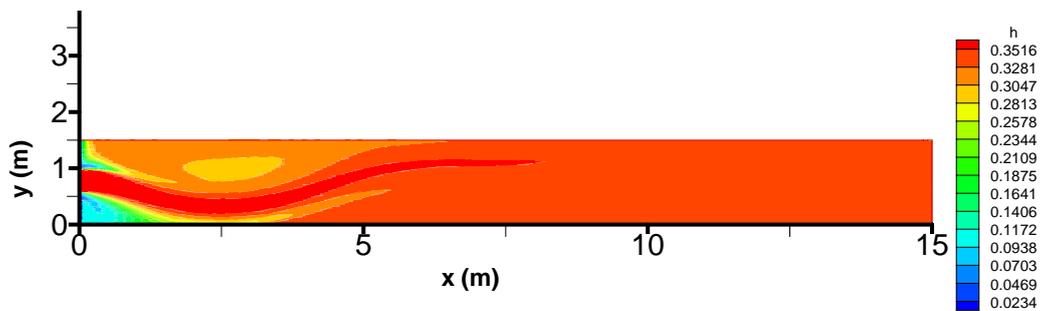


Figure IV.12: Variation de la hauteur d'eau dans le cas d'un divergent

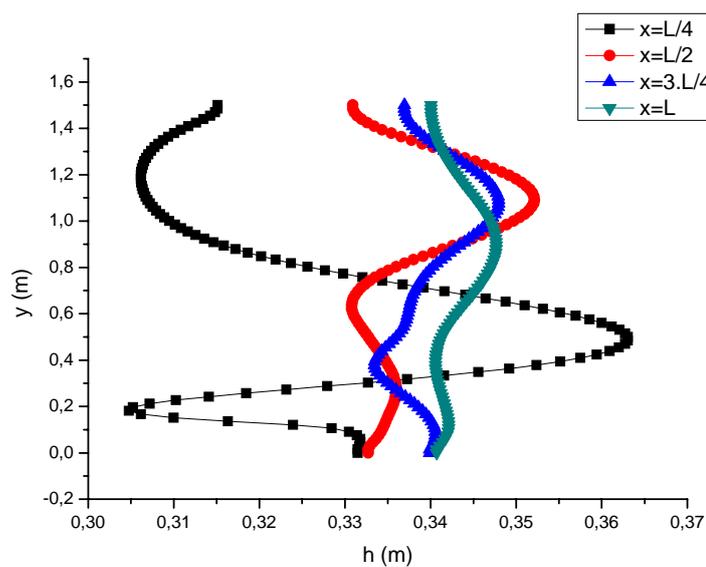


Figure IV.13: Profil des hauteurs h (m) selon l'axe des (y)

La figure IV.14 présente la variation de la vitesse u (m/s) ainsi Les figure IV.15 et IV.16 présente les profils des vitesses selon les deux axes x et y .

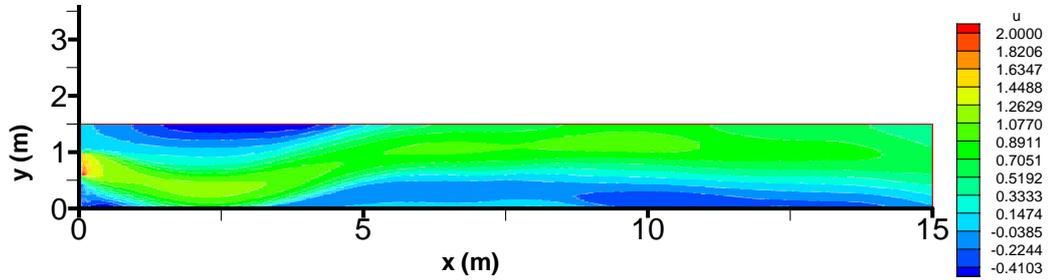


Figure IV.14: Variation de la vitesse u (m/s) dans le cas d'un divergent

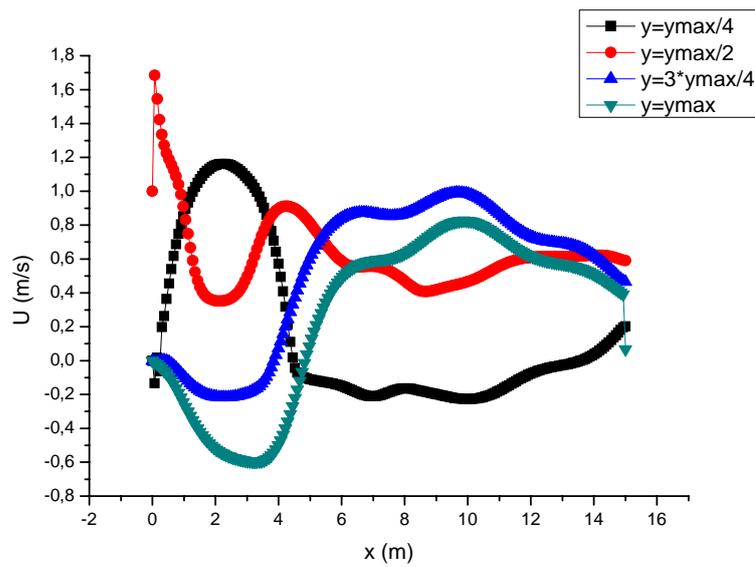


Figure IV.15: Profil des vitesses u (m/s) selon l'axe des (x)

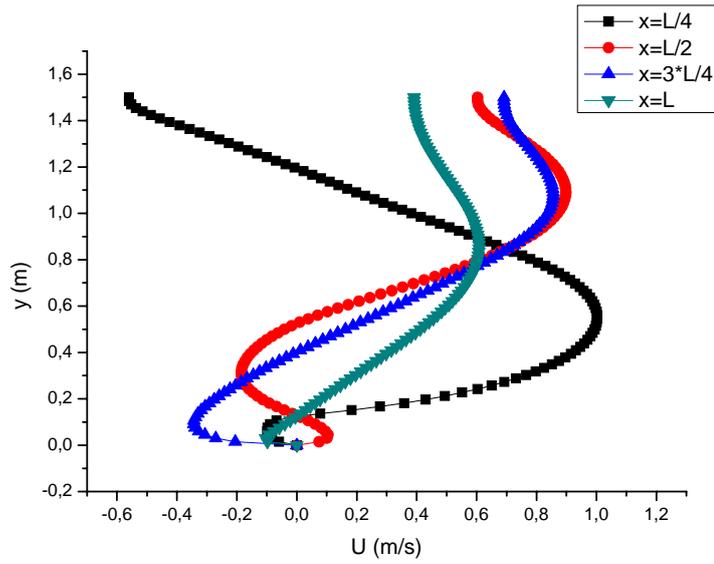


Figure IV.16: Profil des vitesses u (m/s) selon l'axe des (y)

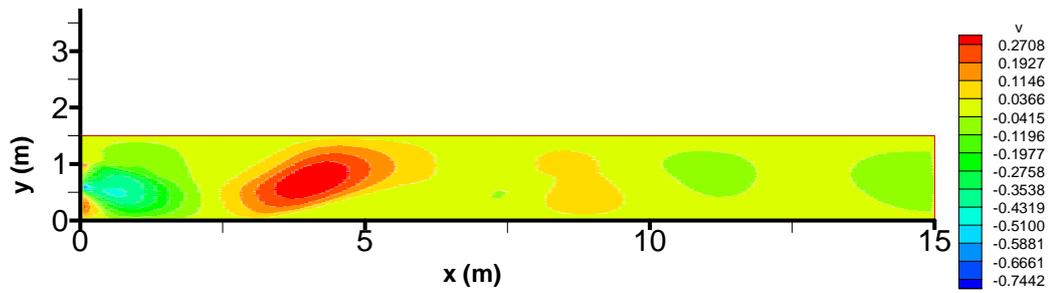


Figure IV.17: Variation de la vitesse v (m/s) dans le cas d'un divergent

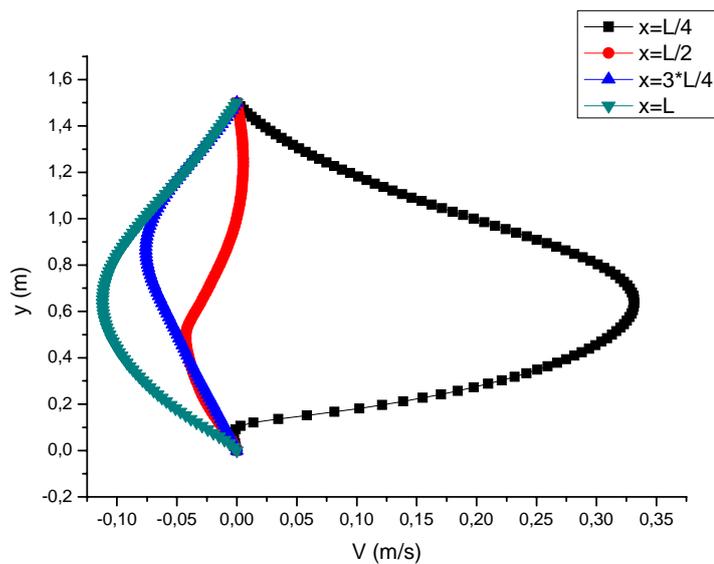


Figure IV.18: Profil des vitesses v (m/s) selon l'axe des (y)

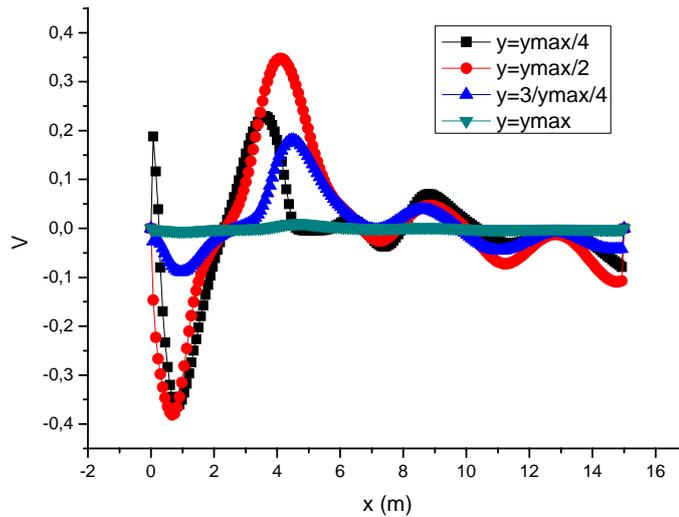


Figure IV.19: Profil des vitesses v (m/s) selon l'axe des (x)

La figure IV.20 présente la variation des champs des vecteurs vitesses le long du canal.

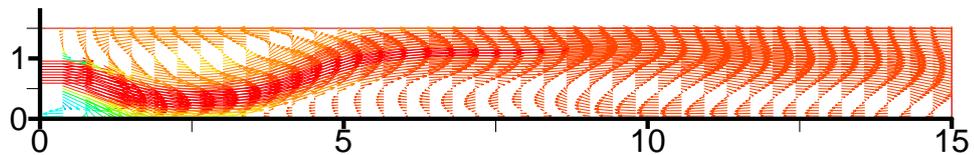


Figure IV.20:Présentation des champs des vecteurs vitesses dans le cas d'un divergent

Dans un divergent brutal, les gradients de vitesses sont très fort sur les bord du jet ils génèrent une turbulence importante comme les vitesses sont relativement faible dans la zone située a proximité de la paroi aval du divergent, et une forte pression dans cette zone.

Les figures IV.21, IV.22 et IV.23 représentent les zones de recirculation dans les différentes sections du canal.

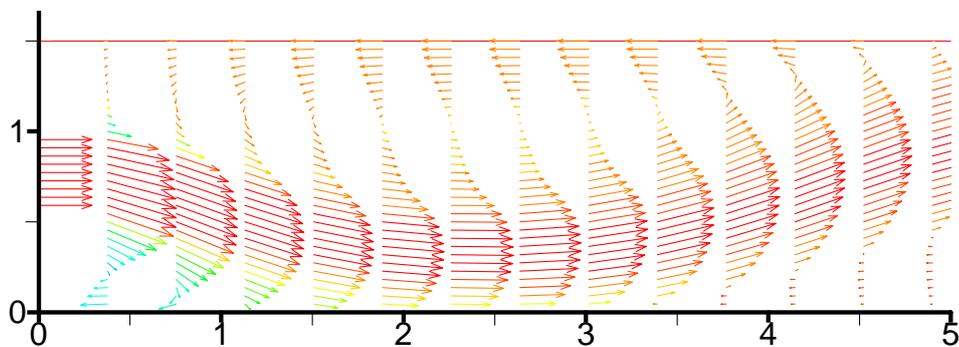


Figure IV.21: Présentation de la zone de re-circulation au début du canal

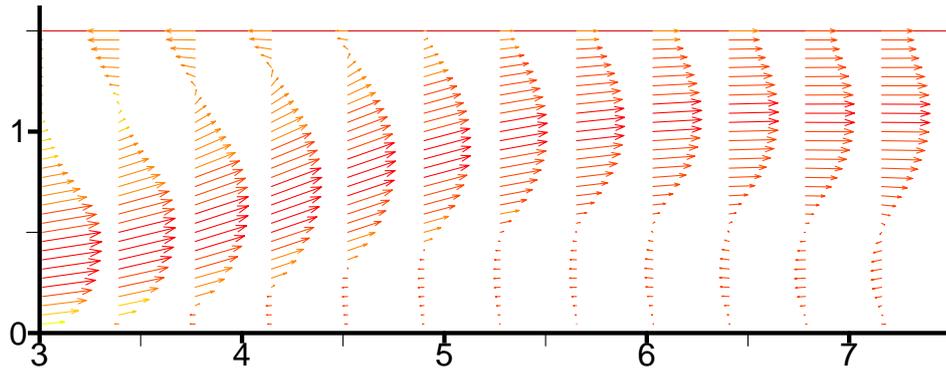


Figure IV.22: Présentation de la zone de re-circulation au milieu du canal

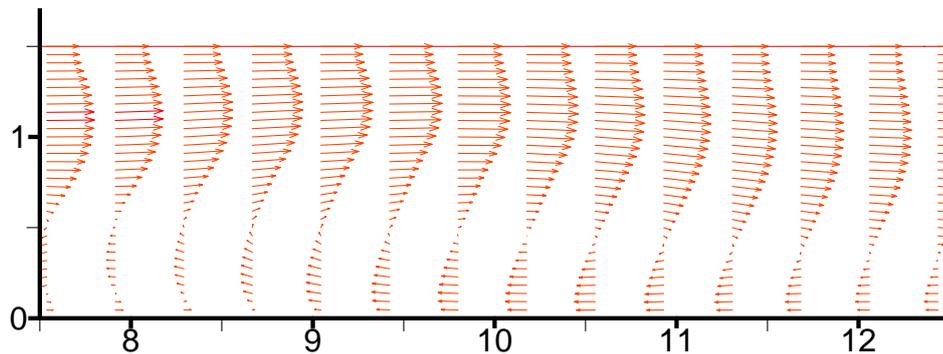


Figure IV.23: Présentation de la zone de re-circulation à la fin du canal

IV.2.3. Cas de la présence d'un déversoir à l'entrer d'un canal à pente nulle et sans frottement

Le troisième cas concerne l'écoulement transitoire dans un canal prismatique à section rectangulaire. Nous considérons un canal horizontal de largeur, $B = 0.50\text{m}$, de hauteur $H = 1.5\text{m}$ et de longueur $L = 15\text{m}$. Le lit du canal est lisse, donc il n'y a pas d'effet de frottement sur l'écoulement. Un déversoir se trouve à l'entrer du canal et à l'instant $t=0$, l'écoulement se fait à travers le déversoir et se dirige vers aval.

La figure IV.24 présente la variation de la hauteur d'eau en fonction du temps ainsi La figure IV.25 présente le profil de vitesse.

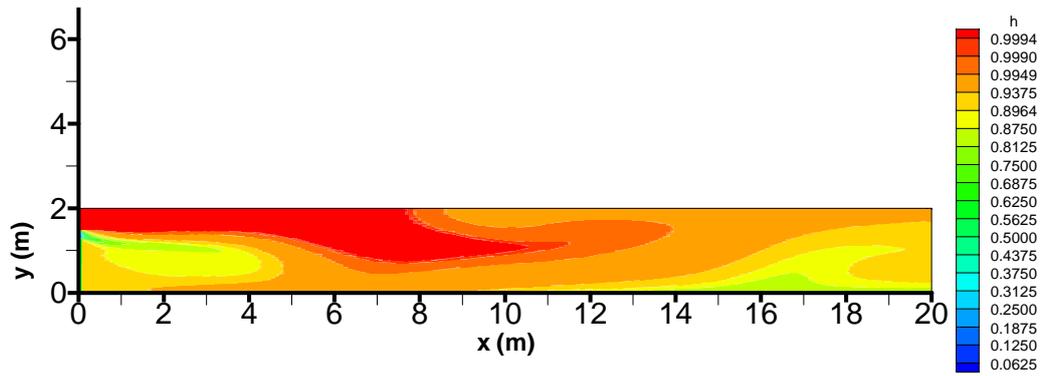


Figure IV.24: Variation de la hauteur d'eau dans le cas d'un déversoir à $t=50$ s

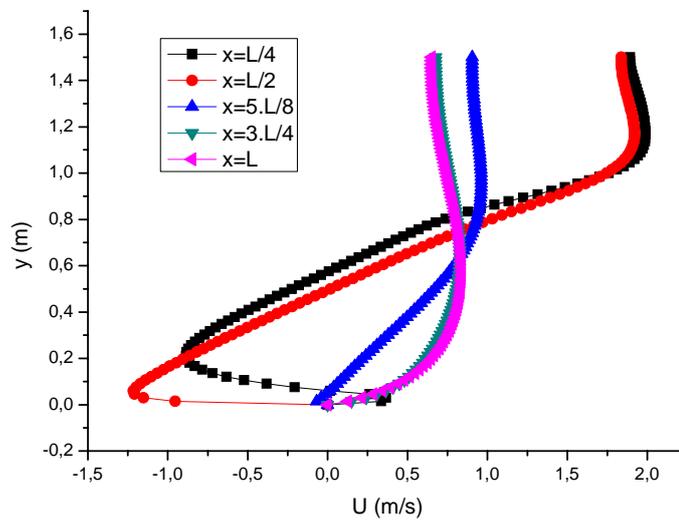


Figure IV.25: Profil de vitesse u (m/s) selon l'axe des (y)

La figure IV.26 présente la variation des champs des vecteurs vitesses le long du canal.

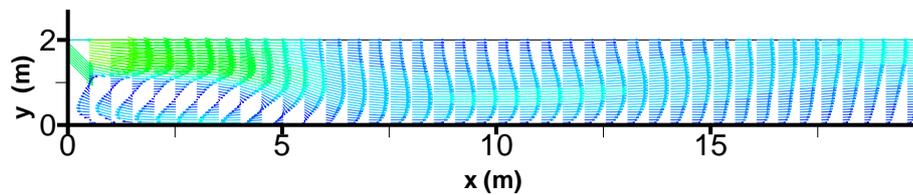


Figure IV.26: Présentation des champs des vecteurs vitesses dans le cas d'un déversoir

Les figures IV.27 et IV.28 représentent les zones de recirculation dans les différentes sections du canal.

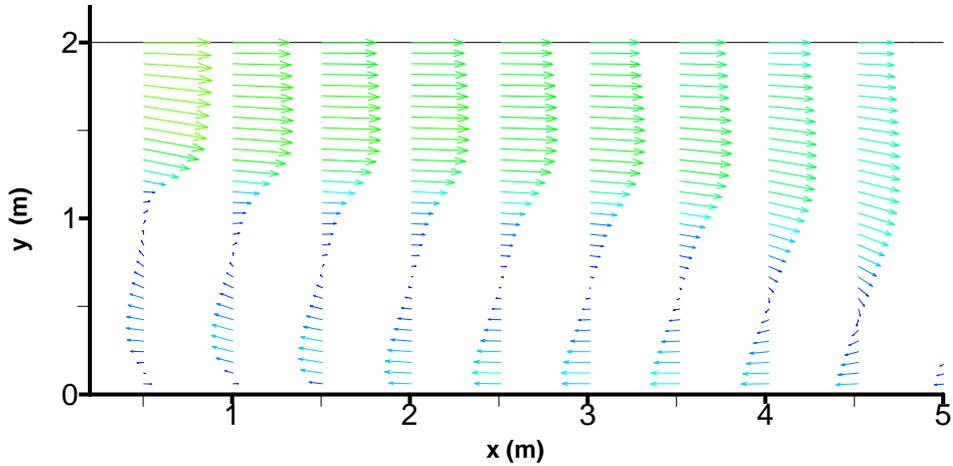


Figure IV.27: Présentation de la zone de re-circulation

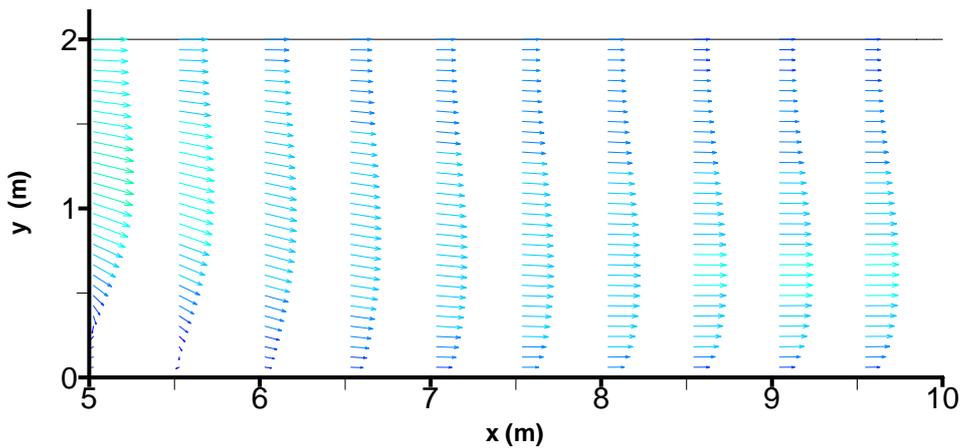


Figure IV.28: Présentation de la zone de re-circulation

IV.3. Interprétation des résultats

Les ouvrages hydrauliques sont souvent utilisés comme système de stockage et de régulation des écoulements. La restitution des eaux à l'aval de ces ouvrages peut se faire parfois avec de grandes vitesses, dont les conséquences sur le fond sont très préjudiciables. La réalisation de bassins amortisseurs pour briser les effets dévastateurs de l'eau libérée avec force est plus que nécessaire. A l'intérieur de ces ouvrages, le ressaut hydraulique provoqué à l'aide d'un seuil est le siège de la dissipation de

l'énergie libérée. Le but assigné à ces types de bassins est donc de favoriser la formation du ressaut hydraulique, d'accroître la dissipation d'énergie, de rendre le dissipateur plus compact et d'améliorer la stabilité du processus. De nombreuses configurations de bassins sont envisageables; le cas traité concerne un canal horizontal prismatique de section rectangulaire, à l'intérieur duquel un seuil est placé. Cette étude dont l'objectif est d'essayer de mieux comprendre et connaître les écoulements brusquement instationnaires en tant que phénomène hydraulique complexe a été menée en simulant un canal de 15 m de long, 0.5 m de large et 1.5m de haut ; Les écoulements brusquement instationnaires étudiés sont ceux qui sont générés lors de l'ouverture brusque d'une vanne, dans le cas d'un divergent ou d'un déversoir

La répartition des vitesses met en évidence les zones de rouleaux de surface et de fond, la où les vitesses sont négatives.

La zone du rouleau de fond derrière le seuil est caractérisée par une re-circulation d'eau provoquant une dissipation d'énergie importante.

IV.6.Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons simulé divers problèmes hydrauliques de types instationnaire et transitoire. Les résultats de simulations ont montré que tous les problèmes simulés ont donné des résultats satisfaisants, et surtout dans le cas transitoire.

Conclusion générale

Les écoulements instationnaires brusquement variés dans un canal rectangulaire à surface libre sont l'un des phénomènes les plus compliqués de l'hydraulique.

Ces écoulements, abstraction faite des forces de frottement, sont régis par le seul équilibre dynamique des forces de gravité et d'inertie. Dans cette présente étude un intérêt particulier a été accordé au phénomène des ressauts hydrauliques provoqués à la fois lors de l'ouverture d'une cloison, dans le cas d'un élargissement et enfin d'une chute brusque. Ces phénomènes s'avèrent très utiles pour déterminer les relations entre les profondeurs conjuguées, les pertes de charges étant très importantes, et donc de calculer les surfaces d'eau dans les canaux et rivières. Les équations utilisées pour établir ces relations qui font intervenir les forces extérieures sont les équations de quantité de mouvement.

L'intégration numérique de ces équations aux dérivées partielles de Saint-Venant en 2D a permis de mieux comprendre le phénomène des écoulements brusquement instationnaires. Leur résolution a été effectuée à l'aide de la méthode des volumes finis (schéma ADI) qui est un schéma numérique robuste c'est-à-dire capable de réduire les contraintes sur les pas de temps et d'espace pouvant altérer la convergence de ce schéma et de donner une solution numérique aussi proche que possible de la réalité.

Après avoir fixé les conditions aux limites au niveau des parois et de la surface libre ainsi qu'à l'entrée et la sortie du domaine considéré, un programme de calcul en langage Fortran a été élaboré. Les résultats obtenus s'avèrent intéressants à plus d'un titre comparativement à ceux réalisés dans des conditions similaires dans un canal non prismatique [9] notamment ceux relatifs aux profils des vitesses dans un divergent. S'agissant des autres résultats des différents profils des vitesses et des hauteurs après un lâcher brusque et à travers un déversoir, le schéma numérique appliqué et inconditionnellement numériquement stable.

Bibliographie

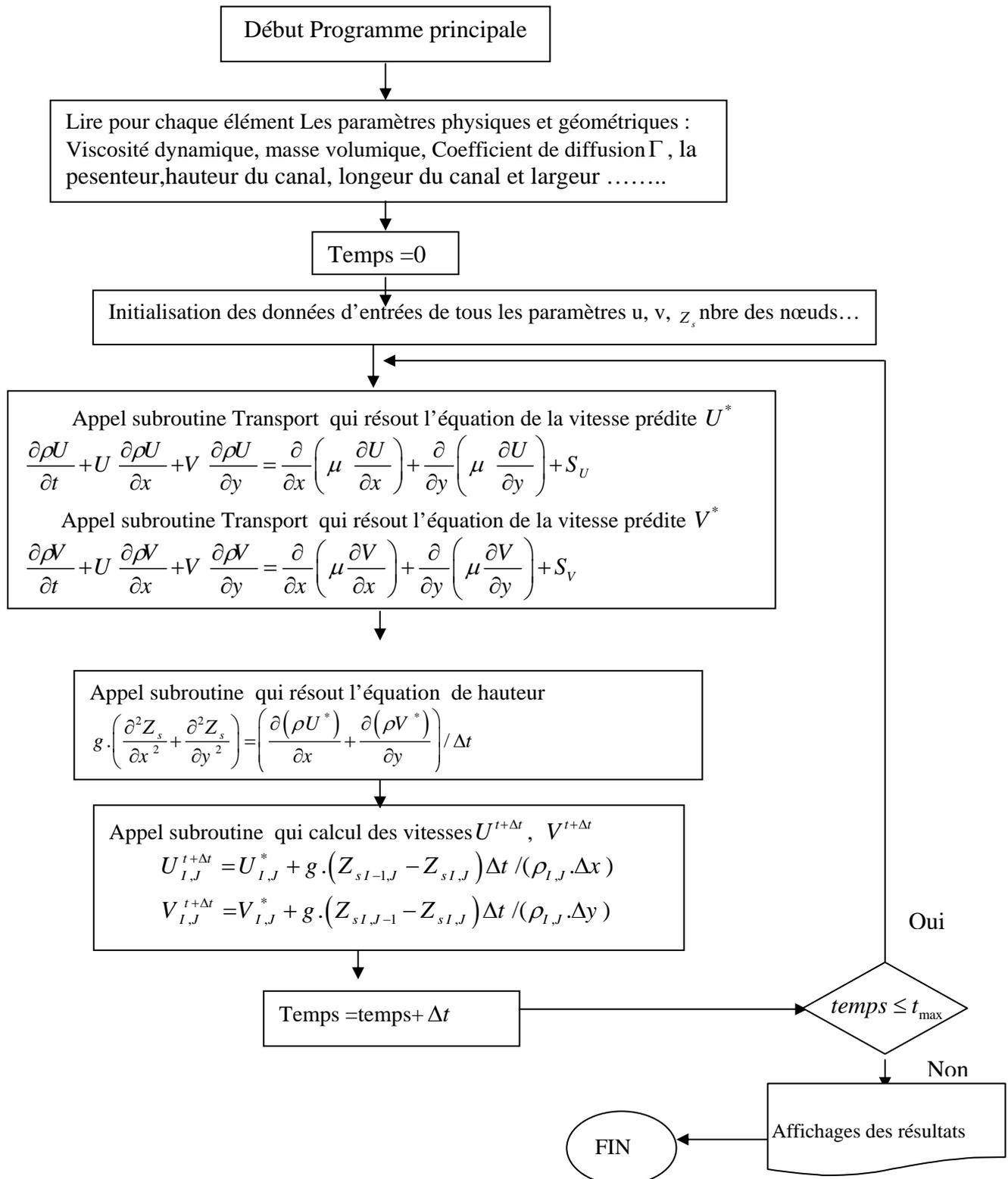
- [1] P.L.Viollet, J-P.Chabard, P-Esposito, D.Laurnce, Mécanique des fluides appliquées presse de l'école nationale des ponts et chaussées, paris, ISBN 2-85978. 1998.
- [2] H.Graf, S.Altinakar, hydraulique fluviale, volume16, Presse polytechnique et universitaires romandes CH-1015Lausanne, ISBN 2-88074-442-3. 2000.
- [3] José Vazquez, Hydraulique à surface libre (systèmes hydrauliques urbains) Ecole Nationale du génie de l'eau et de l'environnement de Strasbourg. 2003.
- [4] Hager, W.H.Sinnigerr Flow characteristics of the hydraulic jump in a stilling basin.
- [5] R.Bremen, Hager WHT-Jump in an abrupty expanding channel.
- [6] M.Carlier, Hydraulique générale et appliquée, Editions Eyrolles, Paris, ISSN 0399-4198. 1986.
- [7] J.M.Hevouet, Hydrodynamique des écoulements à surface libre, presse de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris, ISBN 2-85978-379-2. 2003.
- [8] Thual O. Dérivation des équations de Saint- Venant [.http://www.enseiht.fr/~thual/otapm/ondderisv/index.htm](http://www.enseiht.fr/~thual/otapm/ondderisv/index.htm) 2003.
- [9] SHi-Yu.e, Résolution numérique des équations de Saint-Venant par la technique de projection Thèse doctorat, université de Caen –Basse Normandie, 2006
- [10] H.Chanson,The hydraulics of open chanel flow an introduction,Elseiver house,oxford ,200 wheeler Road,Burlington,MA01803,2004
- [11] S-V.Patankar, Numerical Heat Transfert and fluid flow. S.V.Patankar, "Numerical heat transfer and fluid flow", Series in computational methods in mechanics and thermal sciences, 1980.
- [12] R.Fennema, Chaudhry M.H. Implicite methods for two-dimensional unsteady free-surface flows. Journal of Hydraulic Research; 27:321-332.1989.
- [13] Hoang V.L., Nguyen K.D. A Finite Volume Method for the two-dimensional Shallow Water Equations with Varying Bottom. 2003
- [14] SAINT-VENANT A.J.C. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. Compte-Rendu à l'Académie des Sciences de Paris; 73:147-154, 1871.2002

Table des figures

Figure I.1: Type d'écoulements	6
Figure I.2: Schéma des écoulements permanents, uniformes et variés dans un canal à surface libre.	7
Figure I.3: Présentation du phénomène physique	7
Figure I.4: Le comportement des ondes selon les régimes d'écoulement	8
Figure I.5: Approximation du nombre de Froude et de la hauteur critique	8
Figure I.6: Variation du régime d'écoulement supercritique à subcritique	10
Figure I.7: Grandeur géométrique dans un canal	10
Figure I.8: Ressaut classique	12
Figure I.9: La ligne de charge totale le long du ressaut	15
Figure I.10: simulation d'un ressaut	16
Figure II.1: Le domaine de calcul	19
Figure III.1 Présentation du domaine d'étude d'un canal à surface libre	35
Figure III.2: Schéma de discrétisation.	36
Figure III.3: Présentation du maillage et des conditions aux limites.	43
Figure IV.1: Variation de la hauteur d'eau dans le cas de l'ouverture brusque de la vanne à (t=5s, 10s, 15s, 20s, 25s, 40s, 45 et 80s)	49
Figure IV.2: Profil des hauteurs h (m) selon l'axe des (y)	51
Figure IV.3: Profil des hauteurs h (m) selon l'axe des (x)	51
Figure IV.4: Variation de la vitesse u (m/s) dans le cas de l'ouverture brusque de la vanne	52
Figure IV.5: Profil des vitesses u (m/s) selon l'axe des (x)	52
Figure IV.6: Variation de la vitesse v (m/s) dans le cas de l'ouverture brusque de la vanne	53
Figure IV.7: Profil des vitesses v (m/s) selon l'axe des (x)	53
Figure IV.8: Présentation des champs de vectrices vitesses dans le cas de l'ouverture brusque de la vanne	54
Figure IV.9: Présentation de la zone de re-circulation au début du canal	54
Figure IV.10: Présentation de la zone de re-circulation au milieu du canal	54
Figure IV.11: Présentation de la zone de re-circulation à la fin du canal	54
Figure IV.12: Variation de la hauteur d'eau dans le cas d'un divergent	55
Figure IV.13: Profil des hauteurs h (m) selon l'axe des (y)	55
Figure IV.14: Variation de la vitesse u (m/s) dans le cas d'un divergent	56
Figure IV.15: Profil des vitesses u (m/s) selon l'axe des (x)	56
Figure IV.16: Profil des vitesses u (m/s) selon l'axe des (y)	57
Figure IV.17: Variation de la vitesse v (m/s) dans le cas d'un divergent	57
Figure IV.18: Profil des vitesses v (m/s) selon l'axe des (y)	57
Figure IV.19: Profil des vitesses v (m/s) selon l'axe des (x)	58
Figure IV.20: Présentation des champs de vectrices vitesses dans le cas d'un divergent	58
Figure IV.21: Présentation de la zone de re-circulation au début du canal	58
Figure IV.22: Présentation de la zone de re-circulation au milieu du canal	59
Figure IV.23: Présentation de la zone de re-circulation à la fin du canal	59
Figure IV.24: Variation de la hauteur d'eau dans le cas d'un déversoir à t=50 s	60
Figure IV.25: Profil des vitesses u (m/s) selon l'axe des (y)	60

Figure IV.26: Présentation des champs de vecteurs vitesses dans le cas d'un déversoir	60
Figure IV.27: Présentation de la zone de re-circulation dans le cas d'un déversoir.	61
Figure IV.28: Présentation de la zone de re-circulation dans le cas d'un déversoir.	61

Organigramme



SUBROUTINE TRANSPORT

Le but de cette subroutine c'est la résolution de l'équation de transport

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho U \phi}{\partial x} + \frac{\partial \rho V \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial x} (\phi) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial y} (\phi) \right) + s_u$$

Début de subroutine transport

Appel subroutine a_wesn qui calcul les coefficients
concernant la méthode des volumes finis :

////////////////////////////////// principe du schéma ADI ////////////////////////////////////
////////////////////////////////// implicite suivant x ////////////////////////////////////

```
DO I=2,NI-1,1
    DP(1)=AP(I,1) ; DS(1)=-AE(I,1); B(1)=SU(I,1)
    DO J=2,NJ-1,1
        DI(J-1)=-AW(I,J)
        DP(J)=AP(I,J)
        DS(J)=-AE(I,J)
        B(J) =(AP0(I,J)*PHI(I,J))+(AN(I,J)*PHI(I+1,J))+
            (AS(I,J)*PHI(I-1,J))+ (SU(I,J)*DX*DY)
    END DO
    DI(NJ-1)=-AW(I,NJ) ; DP(NJ)=AP(I,NJ) ; B(NJ)=SU(I,NJ)
    CALL SOLUTION(NJ,DI,DP,DS,B,X)
    DO J=1,NJ,1
        PHIC(I,J)=X(J)
    ENDDO
END DO
```

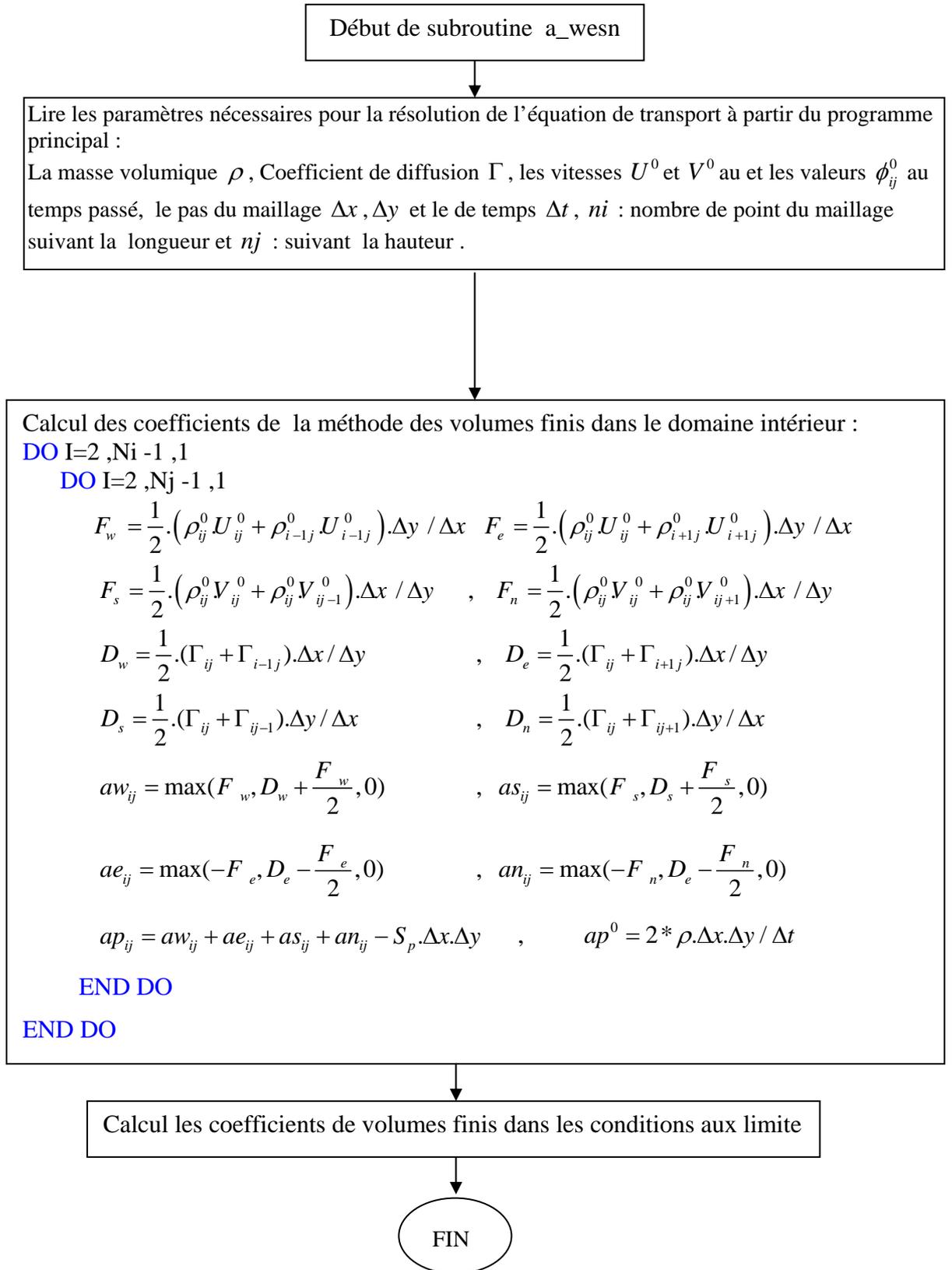
////////////////////////////////// implicite suivant y ////////////////////////////////////

```
DO J=2,NJ-1,1
    DP(1)=AP(1,J) ; DS(1)=-AN(1,J) ; B(1)=SU(1,J)
    DO I=2,NI-1,1
        DI(I-1)=-AS(I,J)
        DP(I)= AP(I,J)
        DS(I)= -AN(I,J)
        B(I) =(AP0(I,J)*PHIC(I,J))+(AE(I,J)*PHIC(I,J+1))+&
            (AW(I,J)*PHIC(I,J-1))+ (SU(I,J)*DX*DY)
    END DO
    DI(NI-1)=-AS(NI,J) ; DP(NI)=AP(NI,J) ; B(NI)=SU(NI,J)
    CALL SOLUTION(NI,DI,DP,DS,B,X)
    DO I=1,NI,1
        PHIC(I,J)=X(I)
    ENDDO
END DO
```

FIN

SUBROUTINE A WESN

Le but de cette subroutine est de calculer le coefficient concernant la méthode des volumes finis



SUBROUTINE SOLUTION

Le but de cette subroutine est la résolution le système tri diagonal suivant par la méthode de gausse

$$\begin{cases} Dp_{(1)} \cdot \Phi_{(1)} + Ds_{(1)} \cdot \Phi_{(2)} = V_{(1)} \\ Di_{(I)} \cdot \Phi_{(I-1)} + Dp_{(I)} \cdot \Phi_{(I)} + Ds_{(I)} \cdot \Phi_{(I+1)} = V_{(I)} & ; I = 2 \rightarrow N-1 \\ Di_{(N-1)} \cdot \Phi_{(I-1)} + Dp_{(N)} \cdot \Phi_{(N)} = V_{(N)} \end{cases}$$

SUBROUTINE SOLUTION(N,DI,DP,DS,V,PHI)

REAL DI(N),DP(N),DS(N),V(N),PHI(N)

!-----

DO I=1,N-1

R= DI(I)/DP(I)

DP(I+1)=DP(I+1)-(R*DS(I))

V(I+1)=V(I+1)- (R*V(I))

END DO

!-----

PHI(N)=V(N)/DP(N)

DO I=N-1,1,-1

PHI(I)=(V(I)-(DS(I)*PHI(I+1)))/DP(I)

END DO

END

SUBROUTINE Hauteur

Le but de cette subroutine c'est la résolution de l'équation des hauteurs

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + S = 0$$

Début de subroutine hauteur

Lire les paramètres nécessaires pour la résolution de l'équation à partir du programme principale: Coefficient Γ , le pas du maillage $\Delta x, \Delta y$, Ni nombre de point du maillage suivant la longueur, Nj suivant la hauteur.

Calcul des coefficients concernant la méthode des volumes finis :

$$D_w, D_e, D_s, D_n$$
$$aw = D_w, \quad as = D_s, \quad ae = D_e, \quad an = D_n$$
$$ap = aw + ae + as + an$$

La première itération $k = 1$

Estimation de la solution de l'équation au temps précédent :

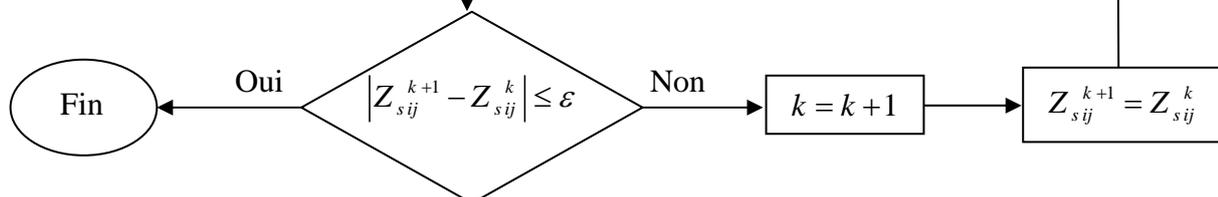
$$Z_{sij}^k = Z_{sij}^0$$

Résolution numérique de l'équation par la méthode itérative de Gauss Seidel :

Pour $2 \leq i \leq Ni-1$ et $2 \leq j \leq Nj-1$ on calcul :

$$Z_{ij}^{k+1} = (aw_{ij} Z_{i-1j}^k + ae_{ij} Z_{i+1j}^k + as_{ij} Z_{ij-1}^k + an_{ij} Z_{ij+1}^k + S \cdot \Delta x \cdot \Delta y) / ap_{ij}$$

Calcul des conditions aux limites pour les quatre côtés du domaine



Nomenclature

Lettres latines

B : Largeur du canal (m)

C : Célérité de l'onde

dt : Pas de temps

dx : Pas d'espace en x

dy : Pas d'espace en y

\vec{F}_M : Force massique

\vec{F}_S : Force Surfaique

\vec{f}_c : Force de Coriolis

Fr : Nombre de Froude

g : Accélération de la pesanteur ($g=9.81\text{m/s}^2$)

h : Profondeur totale d'eau (m)

\vec{I} : Tenseur unitaire

L : Longueur du canal (m)

M_s : Flux de masse

P : Pression local du fluide (N/m^2)

p_{am} : Pression atmosphérique (N/m^2)

R_e : Nombre de Reynolds de l'écoulement

t : Temps (s)

u : Composante de la vitesse suivant l'axe des x (m/s)

U^s, V^s, W^s : Composante du vitesse en surface

V : Composante de la vitesse suivant l'axe des y (m/s)

U^f, V^f, W^f : Composante du vitesse au fond

ν_t : Viscosité cinématique turbulente y (m^2/s).

Lettres grecques:

Γ : Coefficient de diffusion dans l'équation de transport

Ω : Domaine de calcul

ρ : Masse volumique du fluide

μ : Viscosité dynamique moléculaire

$\Phi(x, y, t)$: Valeur scalaire