

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique



Université Hadj lakhdar –Batna

Institut de Génie Civil, d'Hydraulique et d'Architecture

Département d'hydraulique

Mémoire de Magister en Hydraulique

Option : Hydraulique numérique et environnement

Présenté par

Emir SAÏDANI

Pour obtenir le diplôme de Magister en Hydraulique

Modélisation des écoulements transitoires et du transfert de chaleur dans les conduites en charge

Sous la direction de Pr : Ali FOURAR
Mémoire soutenue le.....

Devant le jury composé de :

| Jury | Grade | Affiliation | Qualité |
|---------------------|-------|----------------------|------------|
| LAHBARI Noureddine | MCA | Université de Batna | Président |
| FOURAR Ali | Pr | Université de Batna | Rapporteur |
| BOUZIANE Med Toufik | Pr | Université de Biskra | Examineur |
| BRIOUA Mourad | Pr | Université de Batna | Examineur |
| TIRI Amar | MCB | Université de Batna | Examineur |

Dédicace :

A l'issue de ce mémoire, je profite, pour passer mes remerciements à toute personne qui m'a aidé à bien mener ce travail de près ou de loin.

Je rends hommage à mon défunt père, que dieu l'accueille dans son vaste paradis.

Je tiens à adresser mes dédicaces à ma mère pour ces encouragements et sa patience, ma sœur et mes frères.

Particulièrement, je remercie profondément mon encadreur, Mr. Fourar Ali, professeur à l'université de Batna, de m'avoir suivi, avec ses grandes qualités d'enseignant et ses potentialités humaines.

Et messieurs les membres du jury :

- ❖ Mr. LAHBARI Nouredine, maître de conférences à l'université de Batna.
- ❖ Mr. BOUZIANE Med Toufik, professeur à l'université de Biskra.
- ❖ Mr. BRIOUA Mourad, professeur à l'université de Batna.
- ❖ Mr. TIRI Amar, maître de conférences à l'université de Batna.

Egalement, je remercie tout enseignant m'a aidé et m'a soutenu durant mon parcours universitaire, jusqu'à ce stade, spécialement, ceux qui m'ont marqué :

- ❖ Mr. Hézil Saddek.
- ❖ Mr. Messaid Belkacem.

Enfin, j'espère que ce travail sera utile pour les étudiants à l'avenir.

Notations

- a : la célérité de l'onde, (M/S).
 - p : la pression hydraulique, (Pa)
 - H : La charge hydraulique, (M.C.E).
 - t : Le temps, (S).
 - T : La température, ($^{\circ}\text{K}$).
 - ρ : La masse volumique, (M^3/s).
 - μ : La viscosité dynamique, (Pa S).
 - λ_c : La conductivité thermique, ($\text{W}/\text{M } ^{\circ}\text{C}$).
 - β : Le module de compressibilité, (Pa).
 - ν : La viscosité cinématique, (M^2/S).
 - α_p : Le coefficient de dilatation thermique, ($1/^{\circ}\text{K}$).
 - τ : Contrainte de cisaillement, (Pa).
 - C_v : La chaleur spécifique mesurée à volume constant, ($\text{J}/\text{Kg. } ^{\circ}\text{C}$).
 - C_p : La chaleur spécifique mesurée à pression constante, ($\text{J}/\text{Kg. } ^{\circ}\text{C}$).
 - Pr : Nombre de Prandtl, (-).
 - α_T : Diffusivité thermique du fluide, (M^2/S).
 - h_c : Le coefficient d'échange par convection, ($\text{W m}^{-2}\text{K}^{-1}$).
 - R_{th} : La résistance thermique de surface, (-).
 - Re : Nombre de Reynolds, (-).
 - Nu : nombre de Nusselt, (-).
 - Gr : nombre de Grashof, (-).
 - E : module d'élasticité du matériau de la conduite, (Pa).
 - e : épaisseur des parois de la conduite, (M).
-

Sommaire

Introduction..... 1

- 1. Problématique3
- 2. Objectifs.....4
- 3. Plan du travail5

Chapitre I : Généralités sur les écoulements transitoires dans les conduites en charge.6

- 1. Présentation du phénomène transitoire en charge7
 - 1.1. Définition.....7
 - 1.2. Causes du régime transitoire en charge.....8
 - 1.2.1. Risques du coup de bélier.....8
 - 1.2.2. Augmentations de pression.....8
 - 1.2.3. Baisse de pression.....9
- 2. Mécanisme de formation et de propagation des ondes.....9
- 3. Comportement des ondes élastiques15
 - 3.1. Propagation et réflexion.....15
 - 3.2. Résonance.....17
- Conclusion18

Chapitre II : Transfert de chaleur dans les conduites en charge. 19

- Introduction..... 20
 - 1. Modèles de comportement.....22
 - 2. Propriétés thermiques du fluide23
 - 2.1. Masse volumique23
 - 2.2. Module de compressibilité26
 - 2.3. Dilatation thermique30
 - 2.4. Viscosité33
 - 2.5. Conductivité thermique36
 - 2.6. Chaleur spécifique36
 - 3. Transfert de chaleur39
 - 3.1. Transfert De La Chaleur Par Convection.....41
 - 3.1.1. La convection forcée46
 - 3.1.2. La Convection libre ou naturelle46
 - 3.1.3. Valeur du coefficient « h_c »48
 - 3.2. Transfert thermique en écoulement établi dans une conduite en charge48
 - 3.3. Transfert thermique établi avec température de paroi constante50
 - Conclusion..... 53
-
-

Chapitre III: Modélisation mathématique des écoulements transitoires en charge avec transfert de chaleur.54

Introduction.....55

1. Hypothèses de base.....56
2. Développement des équations fondamentales de l'écoulement transitoire en charge.58
 - 2.1. Théorème des quantités de mouvement.....59
 - 2.2. L'équation de continuité60
 - 2.2.1. Compressibilité de l'eau.61
 - 2.2.2. L'élasticité de la conduite.....61
 - 2.2.3. L'effet thermique et la compressibilité de l'eau.....62
3. La valeur de la vitesse de propagation d'onde.....66
4. Simplification des équations du mouvement transitoire.....68
5. Intégration du système.....69
6. Interprétation physique des équations d'Allievi73

Chapitre IV: Modélisation numérique des écoulements transitoires en charge avec transfert de chaleur.82

Introduction.....83

1. L'analyse numérique des équations aux dérivées partielles83
2. Discrétisation spatiale et temporelle87
3. La méthode des différences finies89
 - 3.1. Problème transitoire et schémas explicite/implicite.....90
 - 3.1.1. Schéma décentré amont explicite92
 - 3.1.2. Schéma implicite de PREISSMANN93
4. La méthode des caractéristiques.....95
 - 4.1. Principe96
5. Consistance, Stabilité et Convergence.....97
 - 5.1. Consistance.....97
 - 5.2. Stabilité97
 - 5.3. Convergence.....98
 - 5.4. Condition de stabilité CFL98
 - 5.5. Théorème de LAX.....98
 - 5.6. Théorème de Lax-Wendroff99
6. Discrétisation des équations de l'écoulement transitoire par la méthode des différences finies.....101
 - 6.1. Suivant le schéma décentré amont explicite101
 - 6.2. Suivant le schéma implicite de PREISSMAN103
7. Discrétisation des équations de l'écoulement transitoire par la méthode des caractéristiques106
 - 7.1. Intégration du système différentiel110

| | |
|-----------------------------|-----|
| Conditions aux limites..... | 113 |
|-----------------------------|-----|

Chapitre V: Simulation des écoulements transitoires en charge avec transfert de chaleur.116

| | |
|---------------------------------|-----|
| Introduction..... | 117 |
| 1. Le logiciel AFT IMPULSE..... | 118 |
| 2. Modèle de simulation..... | 121 |
| 2.1. Hypothèse de base..... | 121 |
| 2.2. Données de simulation..... | 122 |
| 3. Résultats de simulation..... | 124 |

Chapitre VI: Interprétation des résultats.150

| | |
|---|-----|
| Introduction..... | 151 |
| 1. Analyse des résultats..... | 153 |
| 1.1.Mécanisme du phénomène..... | 153 |
| 1.2. Effet thermique..... | 153 |
| 1.2.1. La célérité « a »..... | 153 |
| 1.2.2. Les surpressions « H_{max} »..... | 154 |
| 1.2.3. Les dépressions « H_{min} »..... | 155 |
| 1.2.4. Les débits maximaux « Q_{max} »..... | 156 |
| 1.2.5. Les débits minimaux « Q_{min} »..... | 156 |
| 1.3.Interprétation des résultats..... | 157 |
| Conclusion..... | 162 |

Conclusion générale......163

Bibliographie...... 168

Liste des figures

| | |
|---|----|
| Fig. I. 1. : Système d'adduction gravitaire..... | 9 |
| Fig. I. 2. : Mécanisme de formation et de propagation des ondes: <u>Phase 1</u> | 11 |
| Fig. I. 3. : Mécanisme de formation et de propagation des ondes: <u>Phase 1</u> | 11 |
| Fig. I. 4. : Mécanisme de formation et de propagation des ondes: <u>Phase 2</u> | 12 |
| Fig. I. 5. : Mécanisme de formation et de propagation des ondes: <u>Phase 2</u> | 12 |
| Fig. I. 6. : Mécanisme de formation et de propagation des ondes: <u>Phase 3</u> | 14 |
| Fig. I. 7. : Mécanisme de formation et de propagation des ondes: <u>Phase 3</u> | 14 |
| Fig. I. 8. : Mécanisme de formation et de propagation des ondes: <u>Phase 4</u> | 15 |
| Fig. I. 9. : Mécanisme de formation et de propagation des ondes: <u>Phase 4</u> | 15 |
| | |
| Fig. II. 1. Variation de la masse volumique en fonction de la température. | 26 |
| Fig. II. 2. Variation du volume massique en fonction de la température | 32 |
| Fig. II. 3. Variation de la viscosité cinématique en fonction de la température . | 35 |
| Fig. II. 4. Variation de la conductivité thermique en fonction de la température | 36 |
| Fig. II. 5. Variation de la chaleur spécifique « C_p » en fonction de la température. | 38 |
| Fig. II. 6. Transfert de la chaleur par convection..... | 42 |
| Fig. II. 7. la principale résistance thermique au transfert de chaleur entre la paroi et le fluide en mouvement | 45 |
| Fig. II. 8. Transfert thermique établi avec écoulement de Poiseuille dans une conduite en charge à section circulaire | 49 |
| | |
| Fig. III. 1 : système d'adduction gravitaire..... | 56 |
| Fig. III. 2 : Développement des équations fondamentales de l'écoulement transitoire en charge..... | 58 |
| Fig. III. 3 : Courbe-type de pression, <u>classe1</u> | 79 |

| | |
|--|-----|
| Fig. III. 4 : Courbe-type de pression, <u>classe2</u> | 79 |
| Fig. III. 5 : Courbe-type de pression, <u>classe3</u> | 80 |
| Fig. IV. 1 : Discrétisation spatiale et temporelle | 87 |
| Fig. IV. 2 : Schéma décentré amont explicite (Points de calcul pour une vitesse négative) | 92 |
| Fig. IV. 3 : Schéma décentré amont explicite (Points de calcul pour une vitesse positive) | 94 |
| Fig. IV. 4 : Schéma implicite de PREISSMAN (Variation temporelle) | 94 |
| Fig. IV. 5 : Schéma implicite de PREISSMAN (Variation spatiale) | 97 |
| Fig. IV. 6 : Solutions exacte, numérique et discrète | 100 |
| Fig. IV. 7 : Lignes caractéristiques « PR » et « LP »..... | 109 |
| Fig. IV. 8 : Réseau des caractéristiques..... | 112 |
| Fig. V. 1 : Schéma de l'adduction gravitaire | 121 |
| Fig. V. 2 : Charge « H » au niveau de la vanne à « T = 0 (°C) ». | 124 |
| Fig. V. 3 : Débit « Q » au niveau réservoir à « T = 0 (°C) ». | 124 |
| Fig. V. 4 : Charge « H » au niveau du point « M » à « T = 0 (°C) » | 125 |
| Fig. V. 5 : Débit « Q » au niveau du point « M » à « T = 0 (°C) ». | 125 |
| Fig. V. 6 : Charge « H » au niveau de la vanne à « T =10 (°C) » | 126 |
| Fig. V. 7 : Débit « Q » au niveau réservoir à « T = 10 (°C) ». | 126 |
| Fig. V. 8 : Charge « H » au niveau du point « M » à « T = 10 (°C) ». | 127 |
| Fig. V. 9 : Débit « Q » au niveau du point « M » à « T = 10 (°C) ». | 127 |
| Fig. V. 10 : Charge « H » au niveau de la vanne à « T = 20 (°C) ». | 128 |
| Fig. V. 11 : Débit « Q » au niveau réservoir à « T = 20 (°C) ». | 128 |
| Fig. V. 12 : Charge « H » au niveau du point « M » à « T = 20 (°C) ». | 129 |
| Fig. V. 13 : Débit « Q » au niveau du point « M » à « T = 20 (°C) ». | 129 |
| Fig. V. 14 : Charge « H » au niveau de la vanne à « T = 30 (°C) » | 130 |
| Fig. V. 15 : Débit « Q » au niveau réservoir à « T =30 (°C) ». | 130 |

| | |
|---|-----|
| Fig. V. 16 : Charge « H » au niveau du point « M » à « T = 30 (°C) ». | 131 |
| Fig. V. 17 : Débit « Q » au niveau du point « M » à « T = 30 (°C) ». | 131 |
| Fig. V. 18 : Charge « H » au niveau de la vanne à « T = 40 (°C) ». | 132 |
| Fig. V. 19 : Débit « Q » au niveau réservoir à « T = 40 (°C) ». | 132 |
| Fig. V. 20 : Charge « H » au niveau du point « M » à « T = 40 (°C) ». | 133 |
| Fig. V. 21 : Débit « Q » au niveau du point « M » à « T = 40 (°C) ». | 133 |
| Fig. V. 22 : Charge « H » au niveau de la vanne à « T = 50 (°C) ». | 134 |
| Fig. V. 23 : Débit « Q » au niveau réservoir à « T = 50 (°C) ». | 134 |
| Fig. V. 24 : Charge « H » au niveau du point « M » à « T = 50 (°C) ». | 135 |
| Fig. V. 25 : Débit « Q » au niveau du point « M » à « T = 50 (°C) ». | 135 |
| Fig. V. 26 : Charge « H » au niveau de la vanne à « T = 60 (°C) ». | 136 |
| Fig. V. 27 : Débit « Q » au niveau réservoir à « T = 60 (°C) ». | 136 |
| Fig. V. 28 : Charge « H » au niveau du point « M » à « T = 60 (°C) ». | 137 |
| Fig. V. 29 : Débit « Q » au niveau du point « M » à « T = 60 (°C) ». | 137 |
| Fig. V. 30 : Charge « H » au niveau de la vanne à « T = 70 (°C) ». | 138 |
| Fig. V. 31 : Débit « Q » au niveau réservoir à « T = 70 (°C) ». | 138 |
| Fig. V. 32 : Charge « H » au niveau du point « M » à « T = 70 (°C) ». | 139 |
| Fig. V. 33 : Débit « Q » au niveau du point « M » à « T = 70 (°C) ». | 139 |
| Fig. V. 34 : Charge « H » au niveau de la vanne à « T = 80 (°C) ». | 140 |
| Fig. V. 35 : Débit « Q » au niveau réservoir à « T = 80 (°C) ». | 140 |
| Fig. V. 36 : Charge « H » au niveau du point « M » à « T = 80 (°C) ». | 141 |
| Fig. V. 37 : Débit « Q » au niveau du point « M » à « T = 80 (°C) ». | 141 |
| Fig. V. 38 : Charge « H » au niveau de la vanne à « T = 90 (°C) ». | 142 |
| Fig. V. 39 : Débit « Q » au niveau réservoir à « T = 90 (°C) ». | 142 |
| Fig. V. 40 : Charge « H » au niveau du point « M » à « T = 90 (°C) ». | 143 |
| Fig. V. 41 : Débit « Q » au niveau du point « M » à « T = 90 (°C) ». | 143 |
| Fig. V. 42 : Charge « H » au niveau de la vanne à « T = 100 (°C) ». | 144 |
| Fig. V. 43 : Débit « Q » au niveau réservoir à « T = 100 (°C) ». | 144 |
| Fig. V. 44 : Charge « H » au niveau du point « M » à « T = 100 (°C) ». | 145 |

| | |
|---|-----|
| Fig. V. 45 : Débit « Q » au niveau du point « M » à « T = 100 (°C) » | 145 |
| Fig. V. 46 : Variation de la célérité « a » en fonction de la température | 147 |
| Fig. V. 47 : Variation de « H _{max} » en fonction de la température | 147 |
| Fig. V. 48 : Variation de « H _{min} » en fonction de la température | 148 |
| Fig. V. 49 : Variation de « Q _{max} » en fonction de la température | 148 |
| Fig. V. 50 : Variation de « Q _{min} » en fonction de la température | 141 |
| | |
| Fig. VI. 1 : Variation de la masse volumique « ρ » en fonction de la température | 161 |
| Fig. VI. 2 : Variation de la compressibilité « β » en fonction de la température | 161 |
| Fig. VI. 3 : Variation du module d'élasticité « E » en fonction de la température | 162 |
| | |
| Fig.54 : Le couplage entre les différents domaines | 167 |

Introduction

L'étude des écoulements transitoires dans les conduites en charge a fait l'objet de nombreux travaux, une théorie générale ne pouvait qu'être utile, non seulement comme complément pour l'œuvre entreprise par Lorenzo Allievi, mais plus encore, pour donner réponse à une série de questions pratiques de toute première importance, dans ce contexte, la modélisation mathématique de ce type d'écoulement conduit à un système d'équations aux dérivées partielles non linéaire et couplées, autrement dites E.D.P ; En dehors de quelques configurations assez académiques, pour lesquelles ces équations sont linéaires, il n'est pas possible d'envisager, dans le cas général, une résolution directe par intégration du système. Alors, on doit recourir à d'autres méthodes, basées soit sur la réduction du problème en recherchant des solutions approchées, sachant que, de nombreuses approches ont été développées qui concourent toutes à établir un système réduit dans le cadre d'hypothèses uniquement justifiées dans un domaine de validité clairement défini: unidimensionnels, bidimensionnels, iso-volumes, laminaires... de fluides non visqueux, isentropiques, isothermes, non pesants... et toute combinaison de ces différentes approximations. Les outils qui permettent d'apprécier, pour chaque configuration particulière, la validité des approximations, reposent essentiellement sur l'analyse dimensionnelle, l'analyse Physique (recherche des échelles caractéristiques du problème), l'analyse de similitude (théorie des maquettes), mais aussi... l'intuition, fondée sur la connaissance des phénomènes physiques, la pratique, l'étude des expériences. Ou bien, **rechercher des solutions numériques**, en s'appuyant sur l'accroissement rapide de la puissance des calculateurs scientifiques s'est accompagnée, depuis les années 70, d'un développement considérable des méthodes numériques adaptées à la résolution des équations aux dérivées partielles. Ces méthodes conduisent à une formulation discrète linéaire du problème continu et à la résolution d'un système linéaire de relations algébriques couplées. La *Mécanique des Fluides Numérique* trouve cependant ses limites (en particulier pour la simulation des écoulements tridimensionnels

turbulents) dans la puissance encore insuffisante des supercalculateurs et les coûts importants des calculs. La recherche de formulations réduites (*les classes d'approximations*) des problèmes de Mécanique des Fluides est donc, dans ce domaine aussi, indispensable.

1. Problématique :

L'exploitation permanente d'une installation de pompage n'est pas possible indéfiniment car le démarrage et l'arrêt de la pompe constituent déjà en eux-mêmes des modifications de régime. En général, tous les types de modifications de régime et de perturbations génèrent des variations de pression et de débit, c'est-à-dire des états d'écoulement se modifiant dans le temps. Ces états sont qualifiés de **non permanents ou transitoires**. S'il est question de pressions, on parle également de **modifications dynamiques de la pression** ou, encore, **les coups de bélier**. Quand aux installations équipées de cheminées d'équilibre ou réservoirs anti-bélier le phénomène transitoire devient une oscillation en masse. Les causes essentielles des états d'écoulement **non permanents** sont les suivantes :

- Défaillance de la pompe suite à la mise hors circuit ou à l'interruption de l'alimentation en énergie électrique.
- Arrêt ou mise en circuit des pompes en parallèles avec des pompes déjà en service.
- Fermeture ou ouverture d'organes d'arrêt sur la tuyauterie.
- Génération de vibrations de résonance par des pompes à courbe « Q-h » instable.
- Modifications du niveau d'aspiration d'eau.

De plus, on constate que, tout changement de température provoquera la dilatation et la contraction du liquide dans le système, qui sera différent de la dilatation/contraction de l'enveloppe. Cette différence des coefficients

de dilatation/contraction doit être prise en compte. Si la température du système augmente, il faudra purger une partie du liquide pour éviter l'accumulation de pression. Si la température diminue, il faudra plutôt fournir du liquide au système pour éviter la transformation d'une partie du liquide du système en vapeur, ce qui pourrait provoquer des coups de bélier par condensation lorsque la pression du système augmentera subséquentement. Ces étapes de purge et d'appoint sont particulièrement critiques pendant les phases de démarrage et d'arrêt. Le coup de bélier est plus dangereux dans les circuits de liquide, notamment si le liquide a une grande énergie cinétique en raison de sa masse et de sa vitesse.

Les coups de bélier peuvent provoquer des dommages graves. Dans les cas extrêmes, un coup de bélier peut même briser l'équipement dans lequel il se produit. Si le système contient de l'eau ou de la vapeur chaude sous pression, un coup de bélier peut même présenter un danger pour la vie des personnes à proximité. Dans les cas les moins graves, le mouvement violent de la tuyauterie causé par les chocs peut endommager les supports et les colliers de suspension de tuyaux, rompre les poussoirs ou les conduites d'alimentation en fluide, ou encore endommager de manière irréparable le système.

Bien que le « coup de bélier » soit également appelé « marteau d'eau », ce qui laisse supposer que ce phénomène ne se produit qu'avec l'eau, il peut se produire tout aussi violemment avec n'importe quel fluide.

2. Objectifs:

Compte tenu de l'importance technique du phénomène de coup de bélier, il est indispensable de projeter une étude, qui met en évidence, les propriétés essentielles de ce dernier. L'objectif de ce mémoire, sera donc, la modélisation mathématique et numérique du phénomène transitoire dans une conduite en charge. Ainsi que, l'influence du changement de la

température du fluide sur l'amplitude des ondes de surpression et de dépression engendrées par le coup de bélier.

3. Plan du travail :

En première phase, le travail s'ouvre sur une description théorique du phénomène transitoire dans les conduites en charge.

En deuxième lieu, la modélisation mathématique, dont le but est de mettre sous forme d'équations les phénomènes transitoires et les contraintes thermique, en se basant sur les lois de continuité, conservation de la masse, transfert thermique et les bilans d'énergie. A cet effet, il est nécessaire de tenir compte des points suivants:

- Les propriétés du fluide évoluent en fonction de la température et de la pression.
- L'échange de la chaleur avec l'entourage est nul.
- L'expansion thermique du fluide n'est pas négligée.

S'agissant de la modélisation numérique, dans le présent mémoire, pour la résolution des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, nous avons préféré d'utiliser les méthodes numérique de discrétisation de différences finies et des caractéristiques, pour leurs robustesse et performance.

Au terme de ce travail, il s'agit d'interpréter les résultats obtenus et tirer des conclusions.

Chapitre I

Chapitre I: Généralités sur les écoulements transitoires dans les conduites en charge.

1. Présentation du phénomène transitoire en charge: la modification des contraintes locales dans un milieu matériel continu, engendre un déséquilibre ou une perturbation de l'état initial, cette perturbation se manifeste souvent sous la forme d'ondes qui se propagent avec une vitesse constante, partantes de la source de la perturbation, vers toutes les directions. Dans le cas d'un écoulement en charge, le phénomène transitoire résulte généralement du changement des caractéristiques hydrauliques d'un régime d'écoulement permanent que ça soit la vitesse ou bien la pression en fonction du temps, et il en résulte la création des ondes de pression ou de dépression qui se propagent tout au long du conduit.

A signaler que dans le cas où la conduite contient un système élastique local, tel qu'une surface libre déformable (cheminée d'équilibre) ou des poches d'air comprimé (réservoir d'air), on aura une oscillation en masse. Dans notre cas nous nous intéresserons qu'aux systèmes fermés dépourvu de tout contact ou transfert d'énergie mécanique, autrement dit on parlera que des ondes élastiques.

1.1. Définition: l'écoulement est dit transitoire, non permanent ou instationnaire si ses caractéristiques de pression et de vitesse ne conservent pas leurs grandeurs dans le temps. Autrement dit : $P=f(t)$ et $V=f(t)$

Ou bien :

$$\frac{\partial P}{\partial t} \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$$

1.2. Causes du régime transitoire en charge : d'après sa définition, la création du régime transitoire est essentiellement due à la perturbation ou la modification d'un régime d'écoulement permanent, dans les systèmes hydrauliques ce genre de perturbation est fréquent, car l'exploitation des stations hydraulique d'une façon permanente n'est pas possible indéfiniment, puisque un arrêt ou un démarrage d'une pompe constitue un changement du régime, alors nous pouvons constater que les causes essentielles au niveau des systèmes hydrauliques sont dues aux :

- Un arrêt ou un démarrage d'une pompe.
- Un arrêt ou une mise en circuit d'une pompe en parallèle.
- Défaillance d'une pompe suite à l'interruption d'énergie électrique.
- Une fermeture ou ouverture d'une vanne.
- Une manœuvre d'une vanne.
- Changement du niveau d'aspiration de l'eau.

1.3. Risques du coup de bélier : les surpressions et les dépressions intenses et soudaines véhiculées par les ondes en régime transitoire lesquelles ont tendance à atteindre tous les points d'un système hydraulique, peuvent causer de graves dégâts au niveau des installations, Nous vous présentons ci-après, à titre d'exemple, quelques dommages typiques causés par les ondes du coup de bélier :

1.3.1. Augmentations de pression :

- Eclatement des conduites.
- Dommages causés aux supports de tuyaux.
- Dommages causés aux pompes, aux fondations, aux pièces internes de tuyauterie et aux appareils de robinetterie.

1.3.2. Baisses de pression :

- aplatissement et détérioration de tuyauteries en matière plastique ou en acier mince.
- Écaillage du revêtement intérieur en mortier de ciment des tuyauteries.
- Aspiration d'air ou d'eau souillée sur les liaisons par bride, les liaisons par manchon, les presse-étoupe ou les fuites.
- Rupture de la colonne d'eau suivie d'augmentations importantes de la dépression lors du choc des colonnes liquides (macro cavitation).

2. Mécanisme de formation et de propagation des ondes: nous allons considérer le cas d'un système hydraulique composé d'un réservoir « R » dont la surface libre du plan d'eau est exposé à la pression atmosphérique, ce dernier est muni d'une conduite horizontale « AB » de longueur « L » à caractéristiques uniques, pour laquelle nous allons négliger les pertes de charge dues aux frottements, celle-ci est équipée d'une vanne à son extrémité aval, son rôle consiste au contrôle du débit transité par la conduite.

Au premier temps, la vanne est totalement ouverte, l'écoulement est permanent ayant en chaque section « M » du tronçon, une vitesse moyenne « U_0 » et une pression moyenne « P_0 » constantes dans le temps.

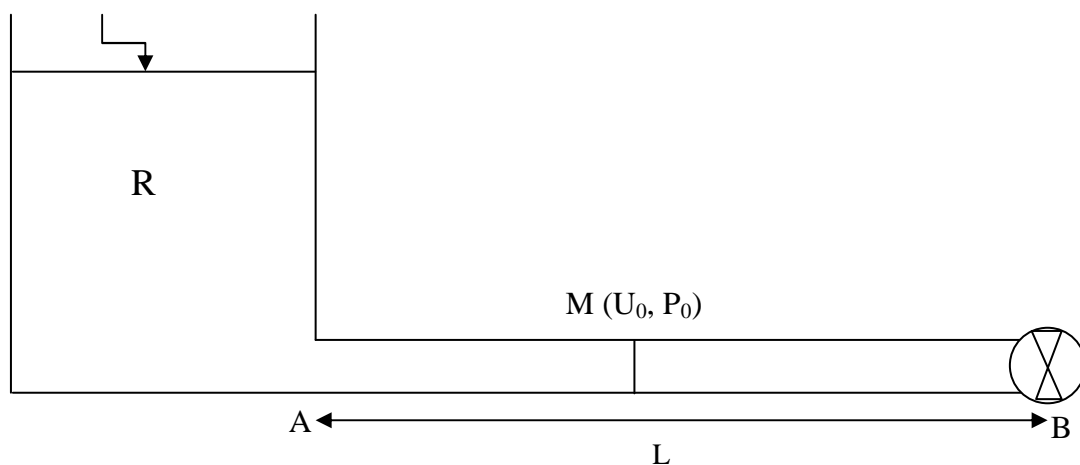


Fig. I. 1. : Système d'adduction gravitaire

Nous allons déclencher le phénomène transitoire, supposons qu'à un moment donné « t_0 » nous allons fermer totalement la vanne et d'une façon instantanée, Le système donc va subir un changement du régime d'écoulement initial, générant les phases suivantes :

Phase 1: juste après la fermeture de la vanne, la vitesse d'écoulement « U_0 » diminue immédiatement à proximité de la vanne et s'annule progressivement tout au long de la conduite, partant de la vanne vers le réservoir suivant le sens contraire de l'écoulement initial ; Cependant, la pression initiale « P_0 » augmente immédiatement à proximité de la vanne avec une valeur « ΔP » et de même atteindra « $P + \Delta P$ » progressivement tout au long la conduite partant de la vanne vers le réservoir suivant le sens contraire de l'écoulement. Il en résulte ainsi une onde de surpression qui se propage tout au long de la conduite avec vitesse « $+ a$ » de signe positif, qu'on appelle célérité d'onde. Une fois l'onde de surpression atteindra le point « A » l'écoulement sera complètement stoppé, la vitesse « U_0 » égale à zéro, la surpression règne avec une valeur de « $P_0 + \Delta P$ », quand à la conduite « AB », elle sera totalement dilatée, alors que le liquide est totalement comprimé.

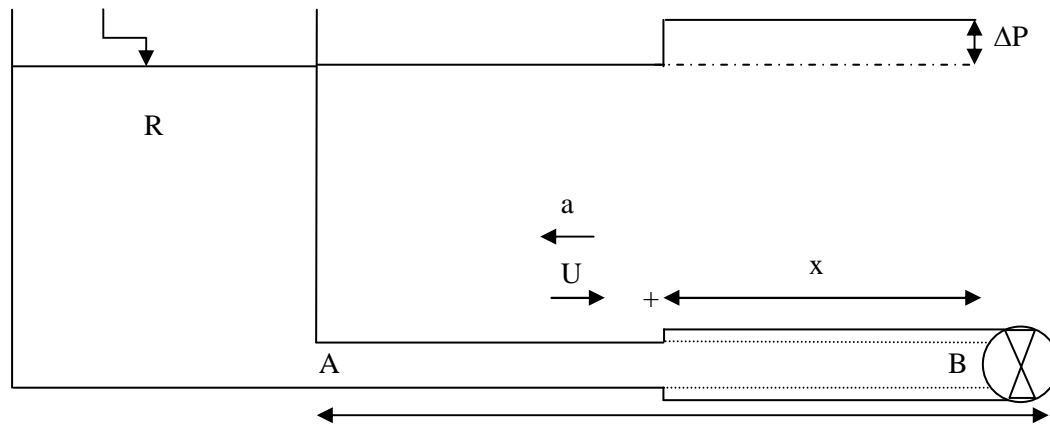
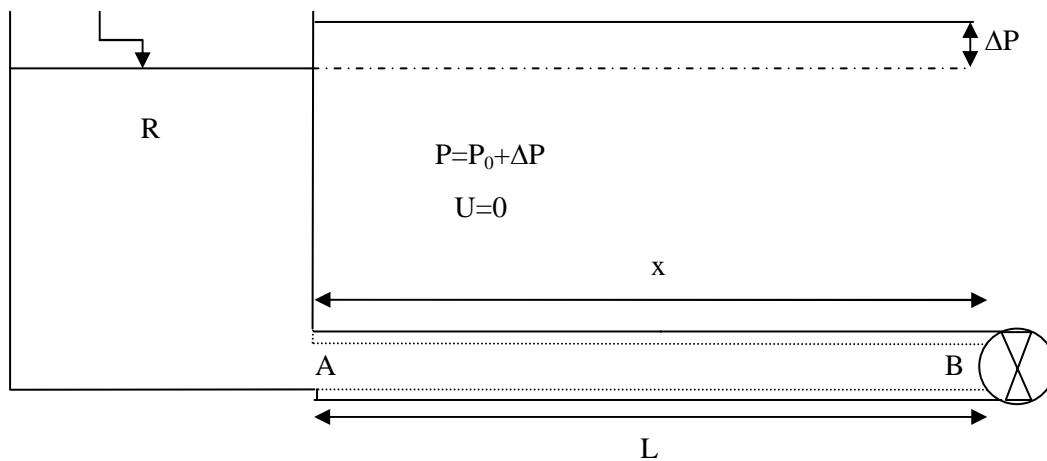
Dans cette phase l'interprétation sur le plan énergétique implique que l'énergie cinétique initiale engendrée par le régime d'écoulement permanent se transforme en énergie potentiel sous forme d'ondes de surpression d'une valeur de « $P_0 + \Delta P$ » se propageant dans le milieu avec une célérité « a ».

Nous pouvons constater que le temps mis par l'onde pour parcourir le tronçon « AB » est égal à :

$$t = \frac{l}{a}$$

Ainsi que :

$$\begin{cases} U = 0 \\ P = P_0 + \Delta P \end{cases}$$

**Fig. I. 2.** L**Fig. I. 3.****Phase 2:**

Partons de l'état final de la phase une, conduite dilatée et fluide comprimé sous l'effet de la surpression accumulée, nous pouvons comparer l'état du système à un ressort comprimé qui tente à se détendre de l'effet d'énergie potentielle qui la conserve. Dans le fluide celle-ci se transforme en énergie cinétique qui se manifeste par un mouvement de particules fluide vers des zones de pressions plus basses que celle dans la conduite, alors un écoulement de la conduite vers le réservoir se créa de vitesse « U_0 » et de signe opposé à celle du régime permanent initial, de ce fait, un abaissement de pression s'accompagne rendant l'état de surpression à son état initial de « P_0 » .

Cependant la conduite se rétablit progressivement et reprend son diamètre initial.

A ce stade, l'onde a parcouru deux fois le tronçon « AB », elle a donc mis un temps :

$$t = \frac{2l}{a}$$

L'état du système jusque là est défini par :

$$\begin{cases} U = -U_0 \\ P = P_0 \end{cases}$$

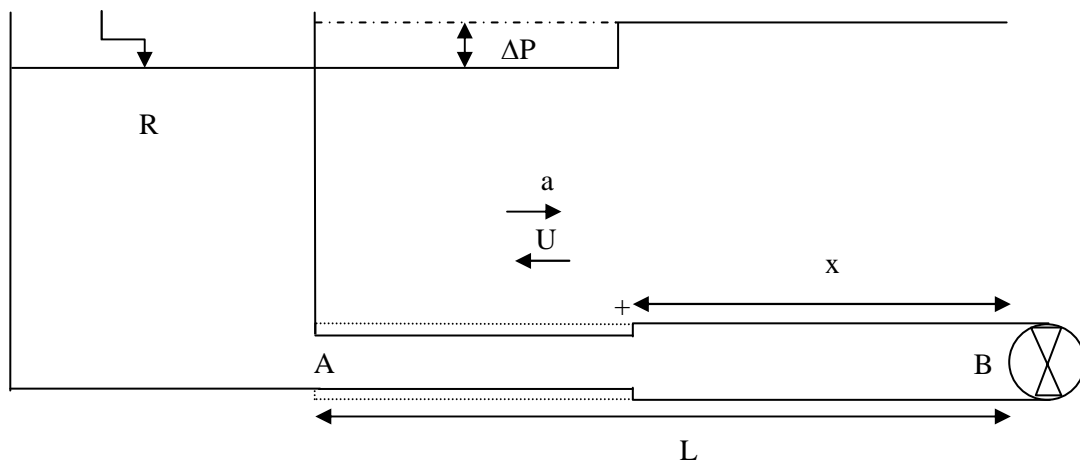


Fig. I. 4.

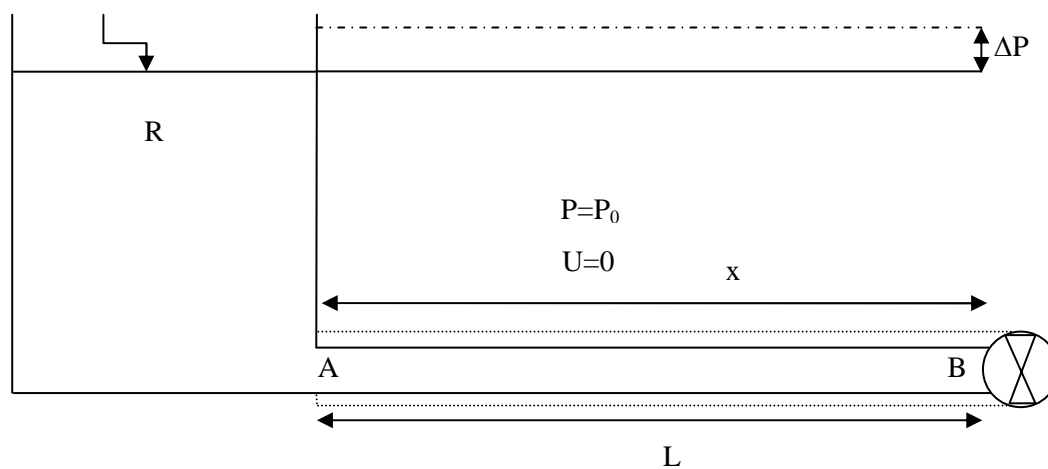


Fig. I. 5.

Phase 3: jusque là, le système a repris son état initial, sauf que le sens d'écoulement est l'opposé c'est-à-dire du point « B » vers « A ».

De plus, l'équilibre n'est pas encore atteint, car le mouvement des particules fluide, engendré par la remise à l'état initial du système - cause de leur élasticité-, ne cesse de reproduire malgré que l'état d'équilibre élastique du système est atteint.

La seule contrainte restante responsable du mouvement est l'inertie des particules fluides, celle-ci conserve une partie de l'énergie cinétique reçu auparavant et la convertit en mouvement.

Alors l'écoulement vers l'amont continue avec une vitesse « U_0 » tout en créant une dépression de « $P-\Delta P$ », provoquant une traction sur le fluide, lequel à son tour engendre une contraction des parois vers l'intérieur ou bien une diminution du diamètre de la conduite.

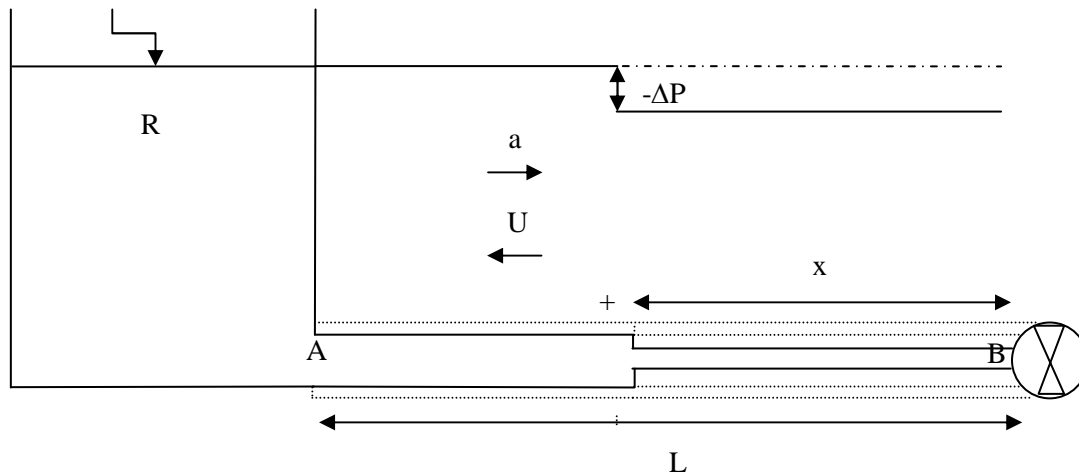
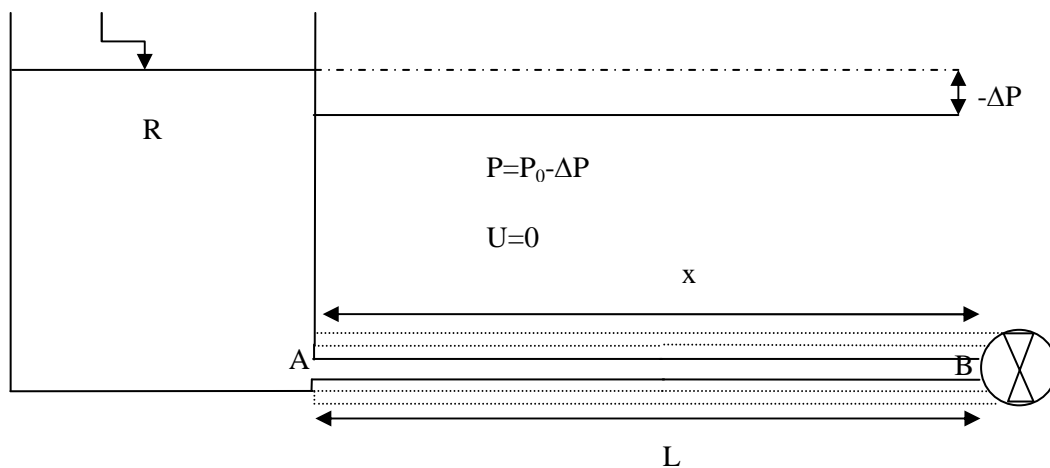
L'écoulement continue, jusqu'à ce que les forces de traction, du système seront supérieures à celles de l'inertie.

A ce moment l'écoulement s'arrête à un temps de:

$$t = \frac{3l}{a}$$

Le système sera à :

$$\begin{cases} U = 0 \\ P = P_0 - \Delta P \end{cases}$$

**Fig. I. 6.****Fig. I. 7.**

Phase 4: la dépression qui a été créée pendant la phase précédente règne sur le système. Cela implique que pour atteindre l'état d'équilibre final il faut compenser cette dépression par un apport du fluide. Pour cela l'élasticité du système intervient encore en provoquant un écoulement de « A » vers « B » avec une vitesse « U_0 ».

La pression dans la conduite se rétablit progressivement pour atteindre sa valeur de « P_0 » jusqu'à ce que la conduite reprend son diamètre initial.

Donc le système reprend son état initial à :

$$t = \frac{4l}{a}$$

Et aura comme caractéristiques :

$$\begin{cases} u = u_0 \\ P = P_0 \end{cases}$$

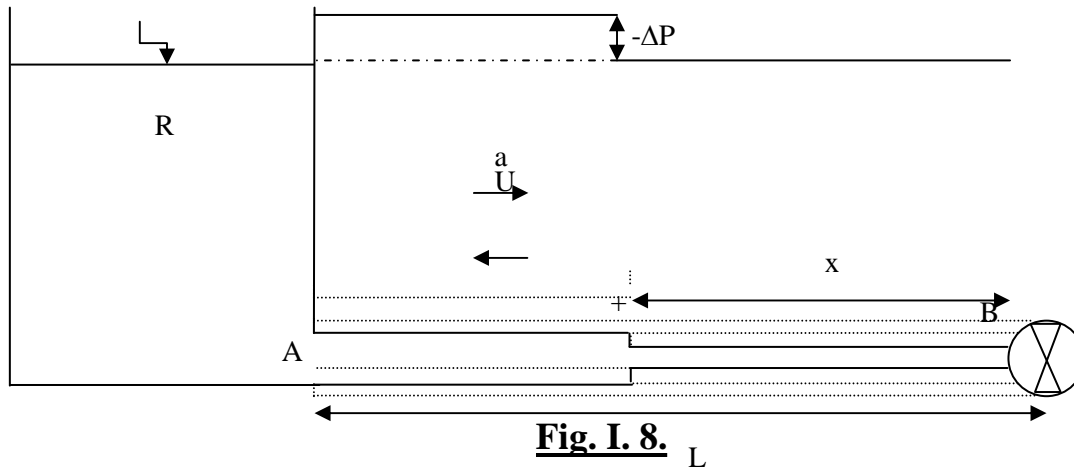


Fig. I. 8.

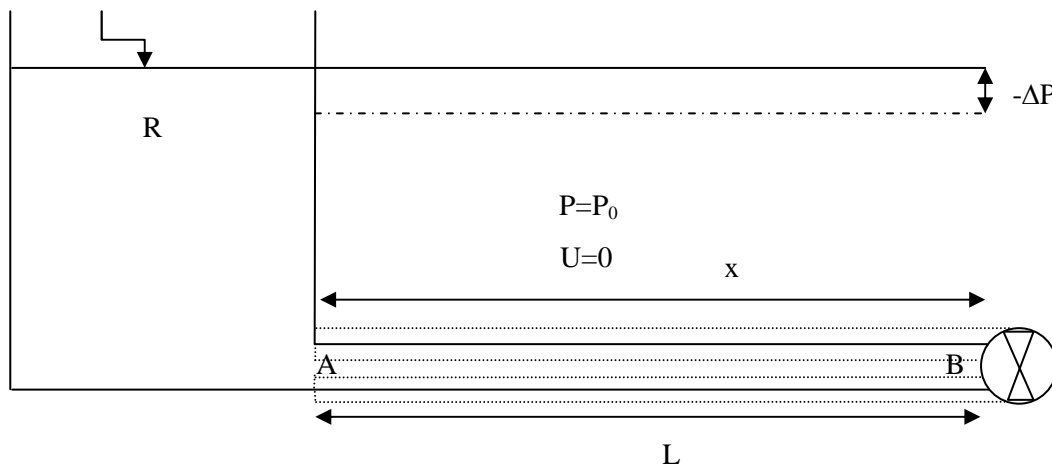


Fig. I. 9.

A ce moment : $t = \frac{4l}{a}$ le système se trouve à l'état initial de vitesse et de pression, c'est-à-dire en régime permanent initial. Après ce temps, le phénomène va se déclencher à nouveau commençant par la première phase.

Donc nous considérons que le phénomène est cyclique de période $t = \frac{4l}{a}$.

En faite, du point de vue théorique, si nous négligerons les effets de viscosité et de frottement du fluide avec les parois, qui ont un rôle d'amortissement, le phénomène se répétera à l'infini.

3. Comportement des ondes élastiques: La création et la propagation des ondes ne peuvent avoir lieu si le fluide ne possède une certaine compressibilité dont il faut tenir compte, en vrai, se sont les phénomènes de compressibilité qui permettent d'expliquer la propagation des ondes dites aussi ondes élastiques, le mot lequel reflète la nature élastique du milieu matériel.

3.1. Propagation et réflexion :

Les coups de bélier se propagent rapidement, avec une vitesse d'environ « $a = 1000 \text{ M/S}$ » dans les tuyauteries en fonte ou les tuyaux en acier. Ils ne décroissent que lentement et restent donc longtemps dangereux. Les durées d'atténuation des ondes sont fonction de la longueur des tuyaux.

Les ondes élastiques se propagent sans modification dans un milieu isotrope infini, mais sont susceptibles de réflexion et de réfraction quand elles rencontrent une surface séparant deux milieux différents. Deux cas sont à envisager :

- Quand une onde plane se propageant dans un fluide, rencontre normalement une surface rigide, elle se réfléchit sans changer de signe: ainsi une onde de compression se réfléchit en une onde de compression.
- Quand une onde plane se propageant dans un fluide, rencontre normalement une surface où la pression reste constante (surface libre d'un liquide), il y a réflexion avec changement de signe: ainsi une onde de compression donne naissance à une onde de dépression.

Les ondes élastiques longitudinales peuvent se propager dans le fluide contenu dans une conduite. En faisant abstraction des perturbations provoquées par le frottement sur les parois, on peut admettre que pour une conduite cylindrique, la propagation s'effectue par des ondes planes perpendiculaires à l'axe de la conduite. Mais la célérité des ondes est différente de la valeur donnée précédemment. En effet, sous l'action des variations de pression provoquées par une onde, les parois de la conduite se

déforment. Ces déformations sont petites en général, mais il faut en tenir compte dans le calcul de la vitesse des ondes. Si elle est de l'ordre de « 1000 M/S » dans les conduites d'acier elle peut descendre à quelques centaines de M/S pour les conduites en matière plastique et à 15 m/s pour des conduites en caoutchouc.

3.2. Résonance :

Les vibrations de résonance représentent un cas particulier. Elles interviennent quand les fréquences d'excitation de n'importe quelle origine, générées par exemple par l'entraînement des pompes ou les phénomènes de perte de charge dans les robinetteries et les coudes, coïncident avec la fréquence propre de la tuyauterie. Les tronçons de tuyauterie librement posés, ancrés de manière incorrecte, sont particulièrement menacés par les vibrations de résonance transmises par le fluide transporté et la structure de tuyaux. Sur les tuyaux enterrés, la résonance ne joue en revanche pratiquement aucun rôle. Pour configurer les ancrages de manière correcte, il convient de soumettre systématiquement les ancrages de tuyaux des installations de pompage à une estimation sommaire en termes de dynamique de structure en prenant la vitesse de la pompe comme fréquence d'excitation.

Conclusion : le phénomène des ondes élastiques, réputé dans le domaine d'hydraulique sous le nom du coup de bélier, intervient quand l'énergie cinétique, engendré par l'écoulement en régime permanent, se transforme en un travail de déformation, cause d'un changement brusque de la vitesse d'écoulement, provoqué par la perturbation du régime initial. Il en résulte ainsi, la formation des ondes de surpressions et dépressions, lesquelles ont tendance à se déplacer ou se propager avec une vitesse appelée célérité d'onde et atteindre tous les points du système.

L'impacte du coup de bélier sur le système hydraulique est un sujet de première importance, il est indispensable d'estimer les variations violentes des pressions et de projeter des dispositifs afin de préserver le système de tout genre de défaillance.

Chapitre II

Chapitre II : transfert de chaleur dans les conduites en charge.

Introduction : il a fallu longtemps pour que l'on puisse distinguer entre les différents types d'échange de chaleur et les classer en rayonnement, conduction, convection naturelle et convection forcée.

Du point de vue thermodynamique, un fluide est un milieu matériel homogène dont l'état est défini par deux variables indépendantes qui peuvent être choisies, par exemple, parmi trois grandeurs physiques intuitives : la température, le volume massique et la pression.

- La température, c'est la manifestation mesurable de la chaleur, elle s'exprime en degrés et sa valeur dépend des échelles utilisées. Celles préconisées par les normes internationales sont l'échelle Celsius ($^{\circ}\text{C}$) et l'échelle Kelvin (K), reliées par $T (^{\circ}\text{K}) = T (^{\circ}\text{C}) + 273,15$
- Le volume massique s'exprime en mètres cubes par kilogramme (M^3/Kg). Et la masse volumique « ρ » s'exprime en kilogrammes par mètre cube (Kg/M^3).
- La pression (p) s'exprime en pascal (Pa), mais c'est une unité très petite, qui ne s'utilise que dans les calculs en raison de son appartenance au système international (SI). Dans la pratique courante, on utilise des multiples tels que :
 - l'hectopascal (h Pa) pour les faibles différences de pression.
 - le bar (bar), qui vaut 10^5 Pa, pour les pressions industrielles courantes.

D'un point de vue fonctionnel, les effets thermiques interviennent dans les systèmes hydrauliques par le fluide circulant. Ce couplage thermo-hydraulique se manifeste à deux niveaux. Le premier est lié à la température d'environnement avec laquelle les propriétés du fluide varient largement, ce qui

à son tour affecte la performance du système. Le deuxième couplage est lié à la chaleur engendrée par la perte de charge dans le système hydraulique et ses transferts avec l'environnement.

1. **Modèles de comportement** : Lorsqu'on modifie la pression d'un fluide, sa masse volumique en est affectée, dans une mesure plus ou moins grande suivant la nature du fluide. Cette variation est traduite par la loi de comportement, c'est-à-dire en définitive par l'équation d'état.

Les liquides sont très peu sensibles aux variations de pression, et leur comportement est en général bien décrit par le modèle incompressible « $\rho = \text{cte}$ ».

Les gaz sont au contraire très sensibles aux variations de pression. En outre, leur comportement dépend de l'environnement thermique.

La distinction « compressible / incompressible » ne coïncide pas exactement avec la distinction « liquide / gaz ». Certains phénomènes en milieu liquide ne s'expliquent pas avec le modèle incompressible ; c'est le cas de notre étude qui concerne la propagation des ondes « les coups de bélier ». En fait, aucun fluide n'est rigoureusement incompressible, mais si la variation relative de sa masse volumique est faible, on peut la considérer proportionnelle à la surpression ; c'est le modèle faiblement compressible

$$d\rho / \rho = dp / \beta$$

β est le module de compressibilité ; il est homogène à une pression. Pour l'eau à la température ambiante, il vaut 20 000 bars. Ainsi, pour une surpression de 100 bar, l'augmentation relative de la masse volumique (ou la diminution relative de volume) n'est que de « 0,5 % ».

En outre, leur comportement dépend de l'environnement thermique. Deux modèles extrêmes sont envisagés :

1/ Le modèle isotherme, dans lequel le contact du fluide avec son environnement est supposé parfait ; alors le fluide reste à une température constante.

2/ Le modèle adiabatique, qui suppose au contraire que le fluide n'échange aucune chaleur avec l'extérieur.

2. **Propriétés thermiques du fluide** : Le fluide possède quatre propriétés fondamentales indépendantes, qui sont :

- La masse volumique « ρ ».
- La viscosité dynamique « μ ».
- La conductivité thermique « λ_c ».
- La chaleur spécifique à pression constante « C_p ».

A partir de ces propriétés essentielles, on trouve les autres propriétés comme :

- Le module de compressibilité « β ».
- La viscosité cinématique « ν ».
- La chaleur spécifique à volume constant « C_v ».
- Le coefficient de dilatation thermique (expansion volumique) « α_p ».
- Le nombre de Prandtl « P_r ».
- Le coefficient isentropique « γ ».
- L'enthalpie « h ».

La plupart des propriétés sont sensibles à la température et la pression, comme il est expliqué ci-après.

2.1. **Masse volumique:**

Tout d'abord, la masse volumique est un facteur important pour les calculs et l'évaluation des paramètres d'un système hydraulique. Elle est exigée également dans les analyses de l'écoulement comportant le nombre de Reynolds, le module de compressibilité, le transfert de matière et de chaleur comme dans l'équation de conservation d'énergie.

Définition : Considérons un milieu continu fluide à l'intérieur d'un volume « V », et soit « dV » un volume élémentaire défini autour d'un

point « M » du volume « V ». Désignons par « dm » la masse de fluide contenue dans le volume « dV ».

Le rapport : $\rho = dm / dV$ représente la masse volumique moyenne du fluide contenu dans le volume « dV ».

On définit la masse volumique au point « M » par :

$$\rho = \lim_{dv \rightarrow 0} \frac{dm}{dv}$$

Donc la masse volumique « ρ » est par définition la masse de l'unité de volume de la substance considérée (Kg/M^3).

Elle diminue énormément avec la température alors qu'elle augmente modérément avec la pression.

Pour représenter cette évolution, on utilise l'équation d'état qui lie la masse volumique à la pression et à la température. Comme cette évolution ne peut pas être établie mathématiquement à partir de considérations physiques et chimiques, on se sert habituellement du modèle (II.1.0) obtenu par développement en série de Taylor :

$$\rho = \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_t (P - P_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p (T - T_0) \quad (\text{II. 1.0})$$

Avec:

ρ (Kg/M^3): masse volumique à température « T » et à pression « P » donnés.

ρ_0 (Kg/M^3): masse volumique aux conditions de référence ordinaires de température et de pressions « T_0 » et « P_0 », par exemple : $T = 20^\circ\text{C}$, $P = 1 \text{ ATM}$ et $\rho_0 = 998,21 \text{ Kg}/\text{M}^3$.

Pour faciliter les calculs analytiques locaux (autour d'un point de fonctionnement), il est commode de rendre l'équation d'état du fluide linéaire, qui devient :

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{1}{\beta} (P - P_0) - \alpha_P (T - T_0) \right] \quad (\text{II. 1.1})$$

$$\beta = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \quad (\text{II. 1.2})$$

$$\alpha_P = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (\text{II. 1.3})$$

La combinaison des équations (II.1.0) et (II.1.1) fait ressortir deux nouveaux paramètres physiques de valeurs positives qui sont :

β : module de compressibilité (Bulk Modulus) (Pa).

α_p : coefficient d'expansion volumique à pression constante (1/°K).

L'équation d'état (II.1.1) traduit l'augmentation de la masse volumique avec la pression et sa diminution avec la température. (Voir **Fig. II. 1.**)

D'autres propriétés peuvent être extraites de la masse volumique comme:

Le poids volumique « $\bar{\omega}$ » en (N/M³):

$$\bar{\omega} = \rho g$$

g : accélération de la pesanteur, (M/S²).

Le volume massique ou spécifique « V_{ms} » en (M³/Kg) :

$$V_{ms} = \frac{1}{\rho}$$

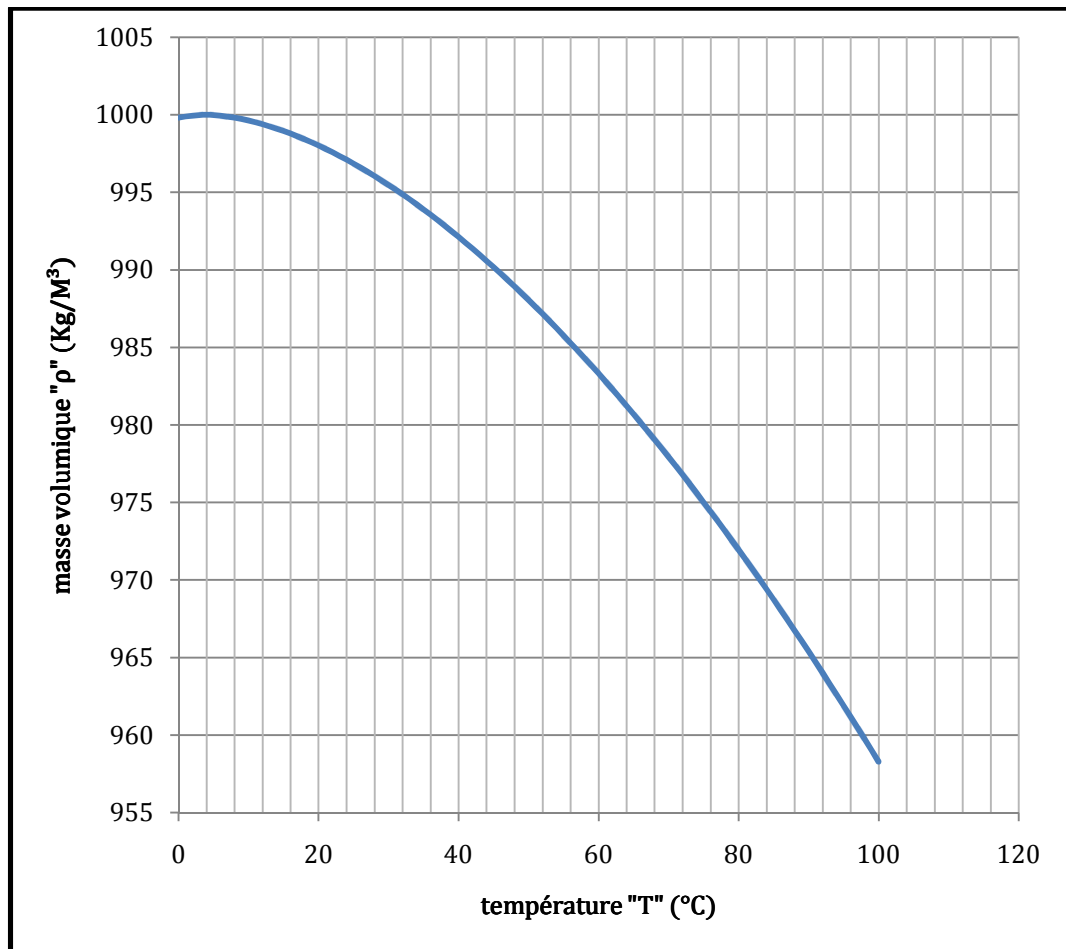


Fig. II. 1. Variation de la masse volumique en fonction de la température.

2.2. **Module de compressibilité:** Par définition, le module de compressibilité « β » est l'inverse de la compressibilité « B », qui représente la diminution relative du volume du fluide à cause d'un accroissement de pression ; suivant la formule ci-après :

$$B_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (\text{II. 1.4})$$

Avec:

B_T : compressibilité isotherme (1/Pa).

V : Volume total du fluide à température « T » et à pression « P », en (M^3).

Le module de compressibilité est un terme employé pour montrer la capacité d'un fluide à résister à la réduction de volume provoquée par la pression appliquée. C'est un paramètre important dans la conception des systèmes hydrauliques.

En conclusion, le module de compressibilité est souvent la plus importante propriété du fluide pour déterminer la performance dynamique des systèmes hydrauliques.

Il peut aussi être décrit sous la forme suivante en remarquant que:

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = \frac{\partial v}{v} \quad \beta_T = \frac{1}{B_T} = - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_T = \rho \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \quad (\text{II. 1.5})$$

Avec :

β_T : module de compressibilité isotherme (Pa).

Le module de compressibilité isotherme est utile pour les processus qui se produisent lentement en assurant un échange thermique qui manifeste à une température constante. Par contre, dans le cas des processus rapides, le module de compressibilité adiabatique « β_a » est utilisé à la place de « β_T ». C'est le cas des pompes et les moteurs où les processus sont relativement rapides, ce qui n'assure pas le temps pour l'échange thermique entre le fluide et l'environnement.

Pour les liquides, la valeur de ce module « β_a » reste au voisinage de celle de « β_T », contrairement au cas des gaz.

La relation qui lie les deux modules de compressibilité est :

$$\beta_a = \frac{C_p}{C_v} \beta_T = \gamma \beta_T \quad (\text{II. 1.6})$$

Avec:

β_a : module de compressibilité adiabatique (Pa).

C_p : chaleur spécifique à pression constante (J/Kg/°C).

C_v : chaleur spécifique à volume constant (J/Kg/°C).

γ : coefficient isentropique pour gaz parfait (-).

Remarque: Si la nature du processus n'est pas précisée, on considère généralement qu'il s'agit du module de compressibilité isotherme. D'autre part, la grandeur de la variation de pression indique la façon avec laquelle le module de compressibilité peut être calculé. Si la variation de pression est importante comme dans les pompes et les moteurs, le module de compressibilité est le module sécant (II.1.8). Par contre, si la variation se produit autour d'une pression constante de faible valeur le module est le module tangent (II.1.7).

$$\beta_T = -V \frac{\partial P}{\partial V} \quad (\text{II. 1.7})$$

$$\beta_S = -V \frac{P - P_0}{V - V_0} \quad (\text{II. 1.8})$$

Avec :

β_t : module de compressibilité tangente (Pa).

β_s : module de compressibilité sécante (Pa).

Les modules les plus utilisés généralement sont récapitulés ci-dessous :

| Fonctionnement | Variation de pression | Module de compressibilité | Application |
|-----------------------|------------------------------|----------------------------------|--|
| Dynamique | Petite | Adiabatique tangent | Actionneurs et Servo-systèmes |
| Dynamique | Grande | Adiabatique tangent | Pompes hydrauliques |
| Statique | Petite | Isotherme tangent | Utilisation limitée par système d'aération des véhicules |
| Statique | Grande | Grande Isotherme sécant | Utilisation limitée par système d'aération des véhicules |

Tableau II.1. Les modules de compressibilités utilisés pour différentes applications

Note : La notion petite est pour la variation de pression est inférieure à 10% de pression de système.

La notion grande est pour la variation est supérieure à 80% de la pression du système.

A noter que le module de compressibilité est positif et qu'il diminue énormément en présence du gaz libre dans le liquide. L'effet de la respiration de l'enveloppe mécanique du composant sous l'effet de la pression peut également être introduit pour définir un module de compressibilité effectif « β_e », qui prend la forme :

$$\frac{1}{\beta_e} = \frac{1}{\beta_c} + \frac{1}{\beta_l} + \left(\frac{V_G}{T} \frac{1}{\beta_g} \right) \quad (\text{II. 1.9})$$

Avec :

β_e : module de compressibilité effectif pour le système (Pa).

β_c : module de compressibilité pour la matière de composant (Pa).

β_l : module de compressibilité pour le fluide (Pa).

β_g : module de compressibilité équivalent du gaz contenu dans le fluide (Pa).

V_g : volume de gaz (m^3).

V_t : volume total de fluide et de gaz, $V_t = V_g + V_l$ (m^3).

V_l : volume du fluide (m^3).

Selon l'équation (1.9), les effets capacitifs agissent en série. Par exemple, le module de compressibilité théorique d'un liquide à ($P = 210$ bar, $T = 40$ °C) est $\beta = 17000$ bar. La présence de 1% de volume d'air libre réduit cette valeur à 8000 bar si l'air évolue de façon adiabatique. Pour des flexibles des systèmes hydrauliques, l'effet de la déformation des enveloppes dans β_c fait descendre le module effectif à environ 3000 bar.

En ce qui concerne β_g , il peut être calculé de l'équation de l'état de gaz pour un gaz parfait et pour un processus isentropique (adiabatique et réversible), qui est de la forme :

$$PV^\gamma = \text{cte} \quad (\text{II. 2.0})$$

Pour déterminer le terme de variation de volume avec la variation de la pression, on dérive l'équation (II.2.13) par rapport au temps, ce qui donne:

$$\frac{dV}{dT} = -\frac{V}{\gamma P} \frac{dP}{dT} \quad (\text{II. 2.1})$$

Le signe négatif signifie que l'augmentation de pression cause une diminution de volume et vice versa. En comparant l'équation (II.2.1) avec celle du fluide

$$\frac{dV}{dT} = -\frac{V}{\beta_l} \frac{dP}{dT} \quad (\text{II. 2.2})$$

la compressibilité du gaz est alors exprimée par la formule suivante :

$$\beta_g = \gamma P \quad (\text{II. 2.3})$$

2.3. Dilatation thermique :

C'est la variation relative du volume de la substance lorsqu'elle est soumise à un accroissement de température. Conformément à l'équation (2.4), elle est évaluée à pression constante.

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \quad (\text{II. 2.4})$$

Cette propriété a un intérêt particulier, par exemple, dans la conception des systèmes hydrauliques fermés qui doivent fonctionner sur une vaste plage de température. La température et la pression ont des effets relativement modérés sur le coefficient « α_p ».

La dilatation thermique de l'eau est un phénomène intéressant parce qu'il présente une anomalie entre 0°C et 4°C. Entre ces deux températures, le volume diminue au fur et à mesure que la température augmente.

| Fluide | α (1 /°K) |
|-------------------------|---------------------|
| Eau | $2 \cdot 10^{-4}$ |
| Alcool éthylique | $11 \cdot 10^{-4}$ |
| Mercure | $1,8 \cdot 10^{-4}$ |

Tableau II.2. Coefficients de dilatation volumique (20°C)

L'étude de la dilatation de l'eau en fonction de la température montre que l'eau se dilate de façon anormale : son volume passe par un minimum au voisinage de 4°C ou elle présente un maximum de densité.

| T (°C) | 0 | 2 | 4 | 6 |
|--|---------|---------|---------|---------|
| V/M ($\text{cm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$) | 1000.19 | 1000.06 | 1000.00 | 1000.06 |

Tableau II.3. Variation du volume massique de l'eau en fonction de la température au voisinage de 4°C

Le minimum : $1000,00007 \text{ kg}/\text{CM}^3$ pour $T = 3,96 \text{ °C}$ (Voir **Fig. II. 2.**)

La structure précise de l'eau à l'état liquide reste hypothétique. De nombreuses représentations ont été proposées, qui rendent compte plus ou moins bien des différentes propriétés physiques de l'eau, notamment de la masse volumique et de la viscosité et de leurs variations en fonction de la température et de la pression. Le plus simple et peut être le plus efficace de ces modèles admet que les molécules d'eau sont

rassemblées par amas ou grappes (clusters) ôtant au milieu des molécules d'eau isolées. Ces grappes rassemblant par des liaisons hydrogènes un nombre variable de molécules d'eau auraient une structure mouvante, se brisant et se reformant perpétuellement. L'existence de liaison hydrogène explique notamment que le point de fusion de l'eau et son point d'ébullition soient beaucoup plus élevées que ceux de composés identiques (H_2S , H_2Se , H_2Te)...La superposition de l'effet de tassement dû à la rupture des liaisons hydrogènes et de l'effet de dilatation thermique expliquerait l'existence du maximum de masse volumique de l'eau à $4^\circ C$. Extrait de « L'eau dans tous ses états ». Gérard Copin-Montégut.

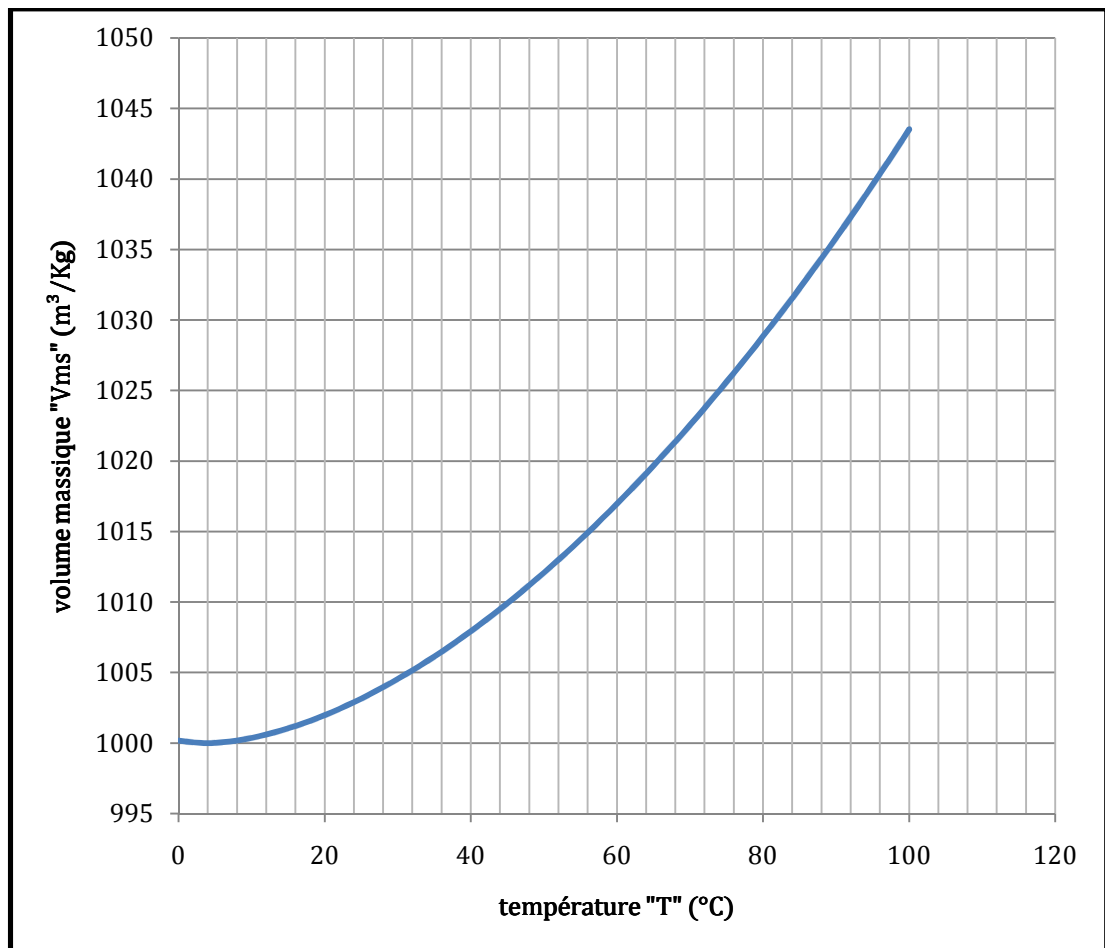


Fig. II. 2. Variation du volume massique en fonction de la température.

2.4. Viscosité :

La viscosité, elle aussi, est une propriété importante du fluide, car elle manifeste sa résistance à l'écoulement du fluide. Elle conditionne la plage de température de fonctionnement des systèmes hydrauliques. D'une part, la bonne lubrification des composants et la réduction des fuites internes et externes exigent une viscosité élevée. D'autre part, la réduction des pertes dans les lignes hydrauliques et l'obtention d'une réponse rapide requièrent un fluide de basse viscosité.

Les efforts de cisaillement dans le fluide changent avec le gradient de vitesse à travers une section cisailée donnée. Pour les fluides Newtoniens l'effort de cisaillement entre les couches du fluide est proportionnel au gradient de vitesse à travers la section cisailée. Cette propriété des fluides Newtoniens simplifie grandement la relation de viscosité. Elle est bien vérifiée pour les fluides de notre étude.

L'équation de cisaillement pour les fluides newtoniens est :

$$\tau = \mu \frac{dU}{dS} \quad (\text{II. 2.5})$$

Avec:

τ : Contrainte de cisaillement (Pa).

μ : Viscosité dynamique ou viscosité absolue (Pa s).

$\frac{dU}{dS}$: Gradient de vitesse « dU » à travers la section cisailée dans l'épaisseur « dS » (1/s).

Le rapport de la viscosité dynamique à la masse volumique du fluide apparaît fréquemment dans les développements analytiques et il est directement mesuré par les viscosimètres. Ce rapport est défini comme la viscosité cinématique ν du fluide:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{II. 2.6})$$

Avec:

ν : viscosité cinématique (M^2/S). La viscosité est sensible à la pression et la température.

La viscosité diminue de manière significative avec l'augmentation de la température. Cette variation peut être représentée par la relation usuelle suivante (voir **Fig. II. 3.**):

$$\mu_T = \mu_0 e^{-k(T-T_0)} \quad (\text{II. 2.7})$$

Avec:

μ_T : viscosité dynamique à température « T », (Pa s).

μ_0 : viscosité dynamique à température de référence « T_0 », (Pa s).

k_1 : coefficient de température-viscosité qui dépend du fluide ($1/^\circ\text{C}$).

Par contre, la viscosité augmente assez légèrement avec la pression qui peut être présentée par l'équation de Barus:

$$\mu_p = \mu_0 e^{-k(P-P_0)} \quad (\text{II. 2.8})$$

Avec:

μ_p : viscosité dynamique à la pression absolue « P », (Pa s).

μ_0 : viscosité dynamique à la pression de référence « P_0 » qui est la pression atmosphérique, (Pa s).

k : coefficient de pression-viscosité qui varie avec la température, ($1/\text{Pa}$). Comme cet effet est secondaire, il est rarement pris en compte dans les études.

D'autre part, le terme de la viscosité représente habituellement la perte d'énergie mécanique due à la déformation du volume causée par le cisaillement. Par contre, même si le volume varie sans changer de forme (pas de cisaillement), une viscosité secondaire apparaît.

Cette viscosité est engendrée par la dilatation et elle représente la dissipation d'énergie lors de la variation de volume. Elle a un effet

important dans la transmission d'ondes de pression de grande fréquence dans les conduites en charge.

Il faut remarquer que la viscosité du fluide diminue très rapidement au début de service. C'est la conséquence de la rupture des chaînes moléculaires longues des additifs de viscosité qui sont destinés à réduire l'influence de la température. Cette perte de viscosité permanente qui peut atteindre 30%, est rarement mentionnée et très mal documentée. Elle n'est pas prise en compte dans notre travail.

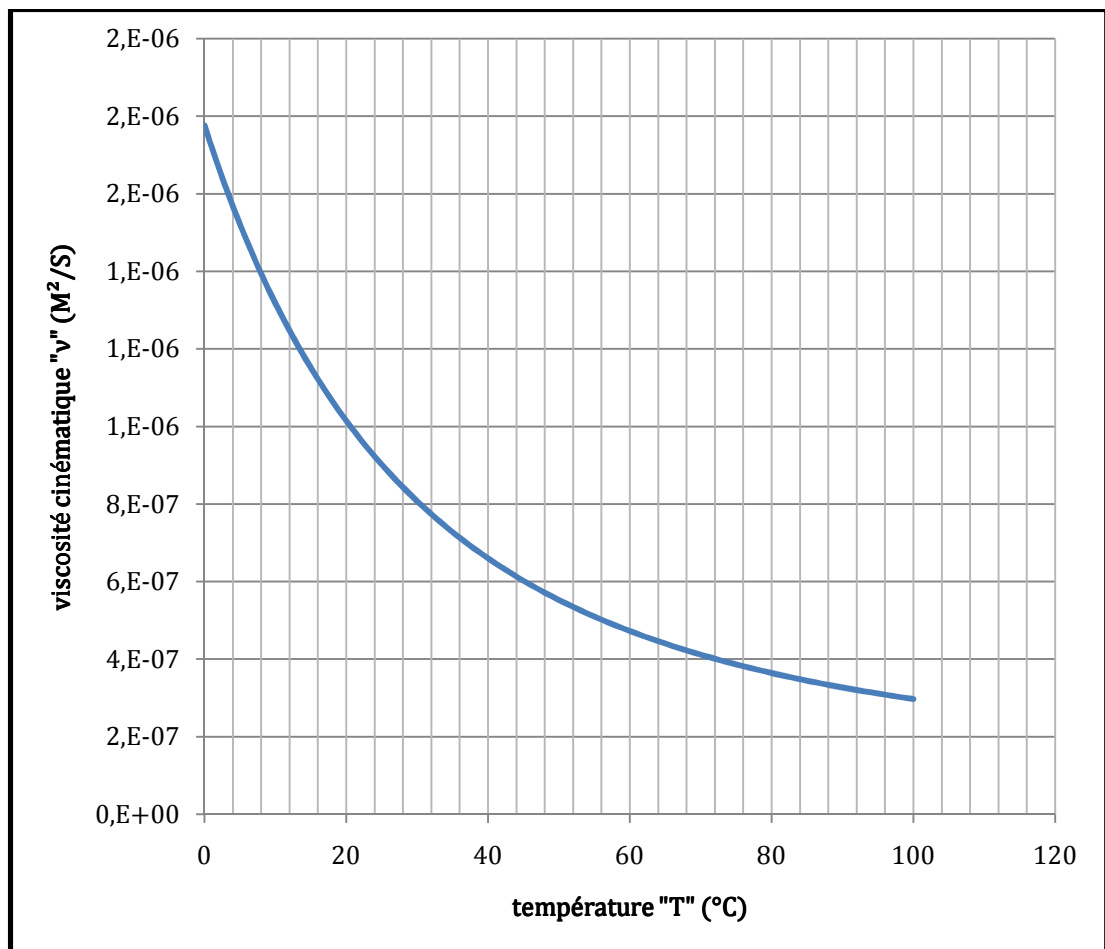


Fig. II. 3. Variation de la viscosité cinématique en fonction de la température

2.5. Conductivité thermique :

La conductivité thermique λ_c (W/M °C) est une propriété qui quantifie le flux de chaleur traversant le fluide. La conductivité thermique de la plupart des liquides diminue lorsque la température augmente et varie très légèrement avec le changement de la pression. (Voir **Fig. II. 4.**)

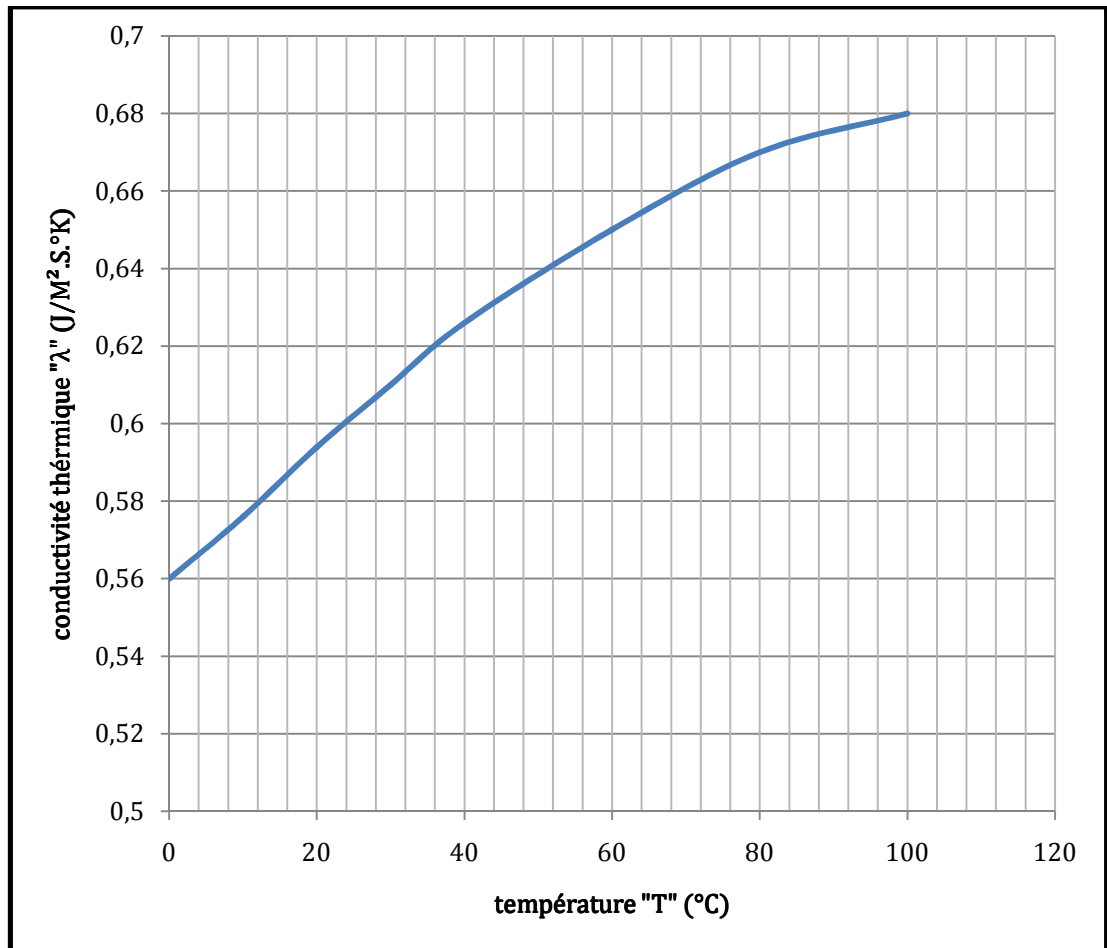


Fig. II. 4. Variation de la conductivité thermique en fonction de la température.

2.6. Chaleur spécifique :

La chaleur spécifique d'un liquide est la quantité de la chaleur nécessaire pour augmenter la température de 1° pour un kilogramme de fluide. Elle est exprimée en (J/Kg. °C).

Généralement, dans les systèmes hydrauliques la chaleur est produite par la perte de charge dans les orifices de dosage, par la compression du liquide, par le frottement dans les lignes de transmission et par les fuites. L'analyse thermique de ces systèmes exige alors de connaître la chaleur spécifique du liquide pour bien calculer le transfert de chaleur conditionnant le taux de réchauffement ou de refroidissement du fluide. (Voir **Fig. II. 4.**)

La chaleur spécifique est donnée sous deux formes : la chaleur spécifique mesurée à pression constante « C_p », et la chaleur spécifique mesurée à volume constant « C_v ». Pour un liquide, les deux valeurs sont très voisines, contrairement aux gaz.

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad C_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (\text{II. 2.9})$$

Avec :

u : énergie interne spécifique (J/Kg).

h : enthalpie spécifique (J/Kg).

Le rapport entre les deux chaleurs spécifiques est indispensable pour déduire un module de compressibilité de l'autre (II.2.9). Ce rapport de chaleurs spécifiques diminue généralement avec l'augmentation de la température, il est peu affecté par les pressions dans la gamme de : (0 M Pa à 69 M Pa).

De plus, d'autres propriétés peuvent être définies à partir des paramètres présentés ci-dessus, comme les propriétés thermiques suivantes:

$$\alpha_T = \frac{\lambda_c}{\rho C_p} \quad (\text{II. 3.0})$$

Avec :

α_T : diffusivité thermique du fluide (M^2/S).

Nombre de Prandtl « Pr », il caractérise la diffusion de quantité de mouvement du fluide représentée par la viscosité cinématique « ν » par rapport à la diffusion de la chaleur dans le fluide « α_t » :

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda_c} = \frac{\nu}{\alpha_t} \quad (\text{II. 3.1})$$

Avec : Pr nombre de Prandtl (-).

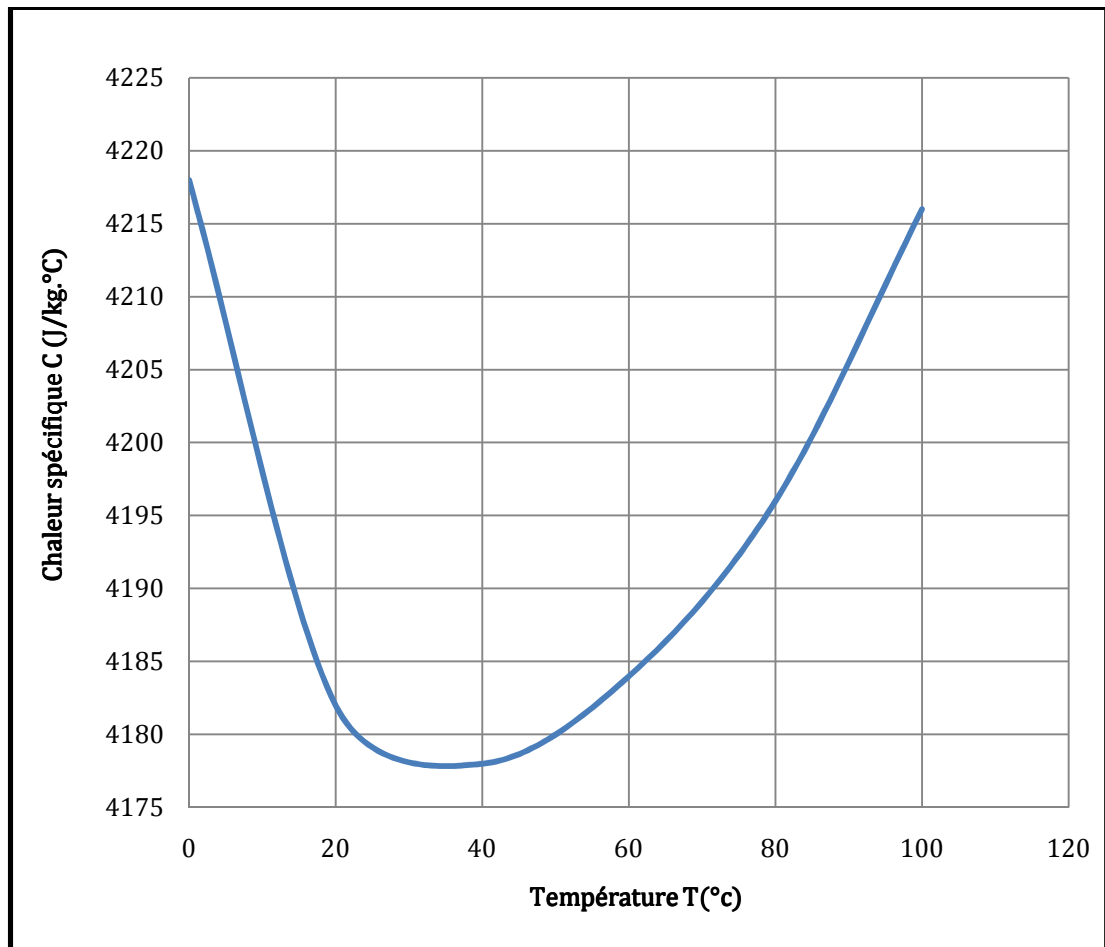


Fig. II. 5. Variation de la chaleur spécifique « C_p » en fonction de la température.

Propriétés physiques de l'eau :

| θ | ρ | c_p | λ_c | $\mu \cdot 10^{-4}$ | $\nu \cdot 10^7$ | Pr |
|----------------------------|---------------------------|--------------------------------|--|---------------------------------------|-------------------------------------|-----------|
| °C | kg. m⁻³ | J.kg-1. °C⁻¹ | W.m⁻¹. °C⁻¹ | Pa. s⁻¹ | m².s⁻¹ | - |
| 0 | 1002 | 4218 | 0.552 | 17.90 | 1.31 | 13.06 |
| 20 | 1001 | 4182 | 0.597 | 10.10 | 1.43 | 7.02 |
| 40 | 995 | 4178 | 0.628 | 6.55 | 1.51 | 4.34 |
| 60 | 985 | 4184 | 0.651 | 4.71 | 1.55 | 3.02 |
| 80 | 974 | 4196 | 0.668 | 3.55 | 1.64 | 2.22 |
| 100 | 960 | 4216 | 0.680 | 2.82 | 1.68 | 1.74 |
| 120 | 945 | 4250 | 0.685 | 2.33 | 1.71 | 1.45 |
| 140 | 928 | 4283 | 0.684 | 1.99 | 1.72 | 1.24 |
| 160 | 910 | 4342 | 0.680 | 1.73 | 1.73 | 1.10 |
| 180 | 889 | 4417 | 0.675 | 1.54 | 1.72 | 1.00 |
| 200 | 867 | 4505 | 0.665 | 1.39 | 1.71 | 0.94 |
| 220 | 842 | 4610 | 0.652 | 1.26 | 1.68 | 0.89 |
| 240 | 816 | 4756 | 0.635 | 1.17 | 1.64 | 0.88 |
| 260 | 786 | 4949 | 0.611 | 1.08 | 1.58 | 0.87 |
| 280 | 753 | 5208 | 0.580 | 1.02 | 1.48 | 0.91 |
| 300 | 714 | 5728 | 0.540 | 0.96 | 1.32 | 1.02 |

Tableau. II. 4. Évolution des propriétés physiques de l'eau en fonction de la température.

3. Transfert de chaleur :

Le transfert d'une quantité de chaleur « δq » pendant un intervalle de temps « δt » correspond à un flux de chaleur « $\Phi = \delta q / \delta t$ ». Un flux de chaleur équivaut à une puissance échangée par un système à travers sa frontière sous forme de chaleur. Les flux de chaleur « Φ » se mesurent en Watts. Comme le flux de chaleur n'est pas nécessairement uniforme sur toute la surface d'échange « S », on introduit la notion de densité de flux locale « \vec{j} (W. M⁻²) ». Le flux « Φ » est alors l'intégrale de la densité de flux sur la surface d'échange « S », « $\Phi = \int \vec{j} \cdot \vec{dS}$ » où « \vec{dS} » représente un élément de surface orienté de telle sorte que le flux est sortant si « $\vec{j} \cdot \vec{dS} > 0$ » entrant « $\vec{j} \cdot \vec{dS} < 0$ ».

D'un point de vue plus physique, le transfert de chaleur trouve son origine dans les écarts de température. Ainsi, un transfert d'énergie sous forme de chaleur sera obtenu chaque fois qu'un gradient de température existera au sein d'un système ou lorsque deux systèmes, à températures différentes, seront mis en contact par l'intermédiaire d'une surface d'échange « S ». Le processus de transmission de la chaleur n'est pas régi par une relation unique mais résulte d'une combinaison de mécanismes physiques indépendants. Ces trois modes s'effectuent la plupart du temps en parallèle.

La conduction thermique existe dans tous les milieux continus et se manifeste par l'élévation de la température de proche en proche qui, pour les solides, correspond à un accroissement de l'énergie de vibration du réseau cristallin, tandis que pour les fluides, à une transmission d'énergie cinétique opérée par les chocs entre les particules, c'est J. Fourier (1822), que l'on doit la théorie analytique de la conduction de la chaleur qui a

amené, en dehors des applications physiques, à des progrès en analytique mathématique.

Dans les fluides l'existence d'un champ de température non-uniforme modifie localement la masse volumique de ces fluides et entraîne dans un champ de forces de volume (pesanteur, force centrifuge), des mouvements dites convection naturelle, ces mouvements ont été étudiés pour la première fois par H.J.E Bénard (1901) entre deux plaques horizontales à températures différentes.

3.1. **Transfert de La chaleur par convection :**

La convection thermique est le mode de transmission qui implique le déplacement d'un fluide, liquide ou gazeux. Dans un fluide, il est pratiquement impossible d'assister la conduction pure car le moindre gradient de température entraîne des courants de convection, c'est-à-dire, transport de masse, on distingue deux types de convection, la convection libre ou naturelle et convection forcée.

Auquel il existe un gradient de température. C'est le cas d'une pièce où l'air chaud produit au niveau du sol va monter au plafond tandis que l'air froid va descendre. Le mouvement est dû au fait que l'air chaud est moins dense que l'air froid et monte alors sous l'effet du principe d'Archimède. La convection forcée se produit quand le mouvement est provoqué par une intervention extérieure telle qu'un dispositif de pompage ou de ventilation.

Quel que soit le mode de convection, le transfert de l'énergie thermique entre la surface d'un corps solide à une température « T » et le fluide environnant se fait par conduction thermique puisque généralement la vitesse du fluide est nulle dans la couche limite en contact avec le corps solide. La continuité de la densité du flux d'énergie à la surface permet donc d'écrire :

$$\varphi|_{\text{surface}} \text{ (W.m}^{-2}\text{)} = -\lambda_s \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\text{solide}} \Big|_{x=0} = -\lambda_f \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\text{fluide}} \Big|_{x=0} \quad (\text{II. 3.2})$$

Ou « λ_s » et « λ_f » sont respectivement les conductivités thermiques du solide et du fluide.

Le problème est de déterminer le gradient de température à la surface qui dépend du phénomène de la conduction. La densité du flux à la surface dépend du couplage entre un phénomène de conductivité transverse suivant (OX) et d'un phénomène de convection. Il s'agit donc d'un problème très compliqué où la thermique et la mécanique des fluides sont couplées. D'un point de vue pratique, les problèmes de convection sont traités par des formules semi-empiriques.

Abordons le problème par le coté pratique. Pour cela, supposons un volume d'air immense à la température « T_a » (réservoir de température). Plaçons dans ce volume une résistance électrique. Loin de l'élément chauffant, une sonde de température indique la température « T_a ». Au fur et à mesure que la sonde est approchée de la surface de l'élément chauffant, la température augmente. Intuitivement on doit obtenir un profil de température analogue à celui de la figure suivante où « T_s » est la température de la surface de l'élément chauffant. (Voir **Fig. II. 6.**)

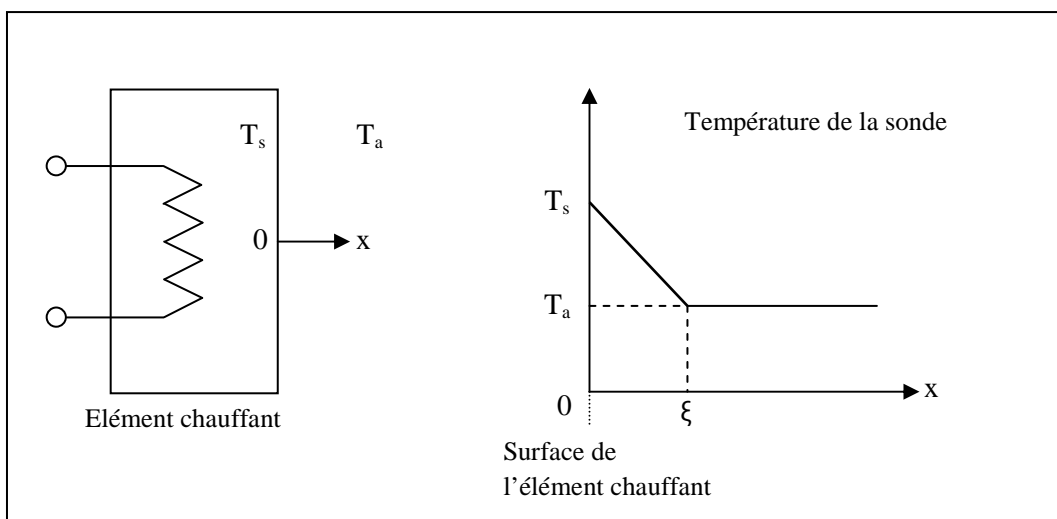


Fig. II. 6.

La température chute donc dans une couche très faible près de la surface. On introduit alors le concept de couche limite notée « ξ » telle que la densité du flux d'énergie « φ » à la surface s'écrit:

$$\begin{aligned} \varphi|_{\text{surface}} \text{ (W.m}^{-2}\text{)} &= -\lambda_s \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\text{solide}} \Big|_{x=0} = -\lambda_f \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\text{fluide}} \Big|_{x=0} \\ &= -\lambda_f \cdot \frac{T_a - T_s}{\xi} \end{aligned} \quad (\text{II. 3.3})$$

On peut alors définir le flux de chaleur échangé par convection.

$$\varphi(W) = hc S (T_s - T_a) \quad (\text{II. 3.4})$$

Avec :

$$h(\text{W.m}^{-2}.\text{k}^{-1}) = \frac{\lambda_f}{\xi} \quad (\text{II. 3.5})$$

Cette équation est appelée équation de Newton où « h » représente le coefficient convectif. Ce coefficient ne dépend pas en général de la nature de la paroi mais uniquement des propriétés du fluide (viscosité, coefficient de dilatation thermique, densité) et de la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent). On retiendra que le coefficient d'échange convectif « h » décrit globalement le phénomène de convection et qu'il permet de définir une conductance thermique de convection :

$$G_{\text{th convection}} = h \cdot S \quad (\text{II. 3.6})$$

Telle que :

$$\varphi = G_{\text{th convection}} \cdot (T_s - T_a) \quad (\text{II. 3.7})$$

L'épaisseur de la couche limite « ξ » dépend du régime d'écoulement au voisinage de la paroi. Dans le cas d'un écoulement laminaire, les filets liquides contigus glissent les uns sur les autres sans se mélanger dans la direction normale aux filets. Autrement dit, il n'y a pas de brassage de fluide.

Quand la vitesse d'écoulement augmente on aura une transition vers un régime d'écoulement turbulent dont les filets liquides sont animés par des mouvements tourbillonnaire à caractère aléatoire. Le mouvement du fluide sera dans ce cas dans trois dimensions avec un brassage important qui favorise les échanges thermique. L'épaisseur de la couche limite « ξ » diminue avec l'augmentation de la vitesse et la turbulence de l'écoulement.

Les ordres des grandeurs des coefficients des transferts convectifs « h » pour différents fluides sont donnés dans le tableau suivant :

| Type de transfert | fluide | h (W. m ⁻² .k ⁻¹) |
|-------------------|-----------------|--|
| Convection libre | air | 5 à 50 |
| | eau | 100 à 1000 |
| Convection forcée | air | 10 à 500 |
| | eau | 100 à 15000 |
| | huile | 50 à 1500 |
| | Métaux liquides | 5000 à 250000 |

Tableau. II. 4.

La convection est un processus physique de transmission de la chaleur qui s'appuie sur un milieu matériel avec mouvement de matière. On ne peut donc avoir de convection que dans les liquides et les gaz. Le flux de chaleur transmis par convection, entre une paroi à température « T1 » et un fluide à température « T2 » (température mesurée loin de la paroi), peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi = h_c S (T1 - T2) \quad (\text{II. 3.8})$$

(Loi de Newton) où « h_c » est le coefficient d'échange par convection (unité W m⁻²K⁻¹). On définira de la même façon que précédemment la

résistance thermique de surface par :

$$R_{th} = \frac{1}{hc S} \quad (II. 3.9)$$

Cette relation ne constitue pas une loi, mais plutôt une description phénoménologique du processus de transmission par analogie avec la conduction. Quel que soit le régime d'écoulement, y compris turbulent, il existe au voisinage immédiat de la paroi une zone d'écoulement laminaire appelée couche limite (voir **Fig. II. 7.**). Ce film est adjacent à la surface avec condition d'arrêt de l'écoulement le long de la paroi (vitesse nulle).

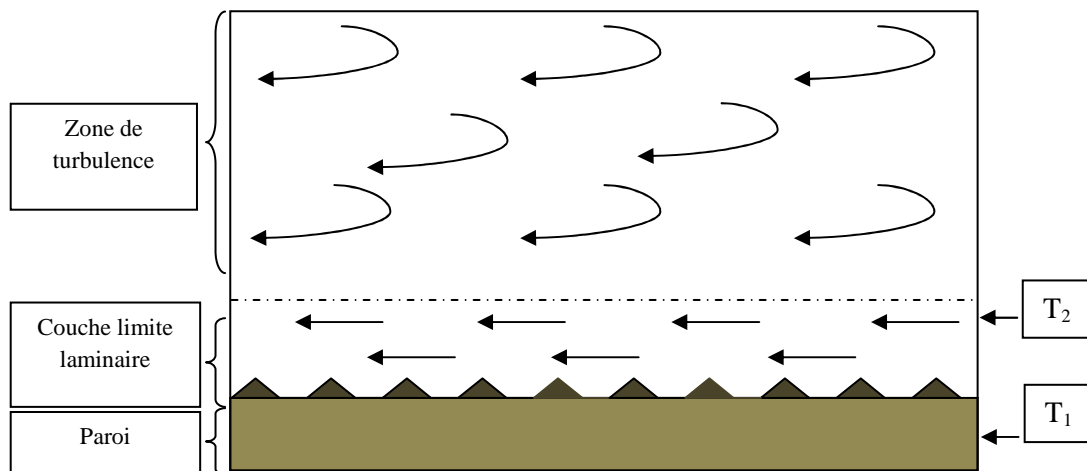


Fig. II. 7

Ce film constitue la principale résistance thermique au transfert de chaleur entre la paroi et le fluide en mouvement. C'est pourquoi on parle souvent de coefficient de film pour désigner le coefficient de transfert convectif à la paroi. Lorsque la turbulence de l'écoulement augmente, l'épaisseur du film laminaire diminue, sa résistance thermique décroît. Le flux de chaleur, pour un écart de température donné, est donc d'autant plus important que le régime d'écoulement est turbulent.

Dans la pratique, on détermine la valeur de « h_c » à partir d'expériences. Les résultats de ces expériences sont traduits en termes de lois de

corrélations faisant intervenir des grandeurs adimensionnelles. On distingue deux types de convection.

3.1.1. **La convection forcée:** Le mouvement du fluide est imposé par des actions mécaniques extérieures (pompes, ventilateurs, etc...). L'écoulement est alors laminaire ou turbulent suivant la valeur du nombre de Reynolds « $Re = \frac{\rho v x}{\mu}$ » où « x » est une échelle de longueur caractéristique de l'écoulement (par exemple diamètre, dans le cas d'un écoulement de conduite), « v » est une vitesse caractéristique de l'écoulement (par exemple, la vitesse moyenne : $v = \frac{\dot{m}}{\rho S}$ (M/S) dans le cas d'un écoulement de conduite, « \dot{m} » représentant le débit massique et « S » la section de passage), « μ » la viscosité dynamique (en Poiseuille (Pl) en SI) et « ρ » la masse volumique. Les coefficients d'échange « h_c » sont exprimées par l'intermédiaire du nombre de Nusselt « N_u » défini par « $N_u = \frac{h_c x}{k}$ » (« k » la conductivité thermique du fluide, « x » échelle de longueur caractéristique). Le nombre de Nusselt caractérise l'efficacité du transport thermique convectif par rapport à ce que serait le seul transport de conduction dans le gaz. L'expérience montre que « $Nu = f(P_r, Re)$ » où « $Pr = \frac{\mu C}{\kappa}$ » est le nombre de Prandtl qui résume les propriétés thermo-physiques du fluide. Ainsi, on posera la plupart du temps « $Nu = A Re^m Pr^n$ » où « A » est une constante dépendant de la géométrie considérée et de la valeur du nombre de Reynolds.

3.1.2. **La Convection libre ou naturelle :** Ce type de convection résulte des variations de masse volumique du fluide résultant des échanges de chaleur eux-mêmes (poussée d'Archimède sur les éléments de fluide chaud). Il en résulte une convection laminaire ou turbulente, suivant la valeur du nombre de Grashof « Gr » :

$$Gr = \frac{g \alpha \rho^2 x^3 \Delta T}{\mu^2} \quad (\text{II. 4.0})$$

Où de Rayleigh R_a :

$$R_a = P_r G_r \quad (\text{II. 4.1})$$

« x » est l'échelle caractéristique de longueur,

« ΔT » est l'écart caractéristique de température,

« g » est l'accélération de la pesanteur,

« μ » est la viscosité dynamique,

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \quad (\text{II. 4.2})$$

« α » est le coefficient de dilatation.

En fonction de la valeur du nombre de Rayleigh, le transfert de chaleur a les caractéristiques suivantes :

- $R_a < 10^3$: convection négligeable ; le transfert a lieu essentiellement par conduction.
- $10^3 < R_a < 10^9$: le transfert a lieu en régime de convection libre laminaire (rouleaux convectifs stables dans le temps).
- $R_a > 10^9$: le transfert a lieu en régime de convection libre turbulente.

L'expérience montre que :

$$Nu = A R_A^N = A(P_r G_r)^n \quad (\text{II. 4.3})$$

Où « A » est une constante dépendante de la géométrie considérée et de la valeur du nombre de Rayleigh.

3.1.3. **Valeur du coefficient d'échange « h_c » :** Il est difficile de donner des valeurs de « h », les valeurs pouvant varier énormément en fonction de la géométrie, du fluide et du type de convection. On peut cependant retenir

que pour l'air, aux alentours de la température ambiante et en convection naturelle, « h » est donné par :

$$h = \left(\frac{\theta}{D}\right)^{1.4} \quad (\text{II. 4.4})$$

Où : $\theta = T_{\text{corps}} - T_{\text{ambiante}}$ en Kelvin et « D » est le diamètre d'une barre (en mètre).

Ceci donne des valeurs d'environ 5 « W m⁻²K⁻¹ ». Pour l'eau, toujours aux alentours de la température ambiante, le coefficient « h » est environ 10 fois plus élevé.

3.2. Transfert thermique en écoulement établi dans une conduite en charge :

On considère ici différents cas de transfert thermique en écoulement établi en conduite cylindrique circulaire. Le profil de vitesse est connu: c'est le profil de Poiseuille.

En négligeant la conduction de chaleur dans la direction axiale :

$$\frac{\partial T^2}{\partial x} \ll \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (\text{II. 4.5})$$

L'équation de l'énergie se réduit à:

$$\rho c u \frac{\partial T^2}{\partial x^2} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mu \left(\frac{du}{dr} \right)^2 \quad (\text{II. 4.6})$$

Et d'après le profil des vitesses :

$$\frac{du}{dr} = -4 \frac{u_m}{R} \frac{r}{R} \quad (\text{II. 4.7})$$

Le transfert thermique est dit établie lorsque le profil de différence de température « T-T_p », avec : T_p la température de la paroi, ne dépend pas de « x » et elle n'est fonction que de « r » :

$$\frac{\partial(T - T_p)}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_p}{\partial x} \quad (\text{II. 4.8})$$

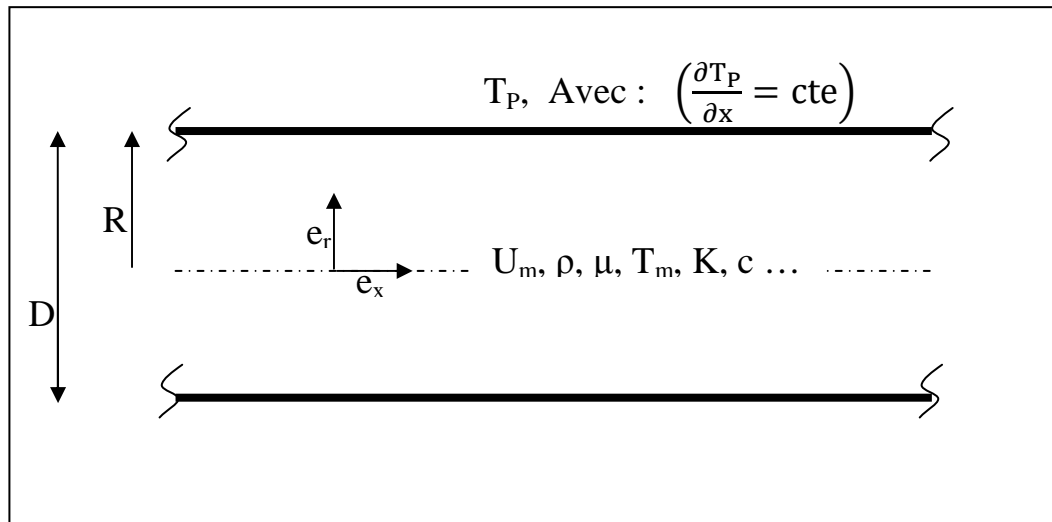


Fig. II. 8. Transfert thermique établi avec écoulement de Poiseuille dans une conduite en charge à section circulaire

3.2.1. Transfert thermique établi avec température de paroi constante :

On considère tout d'abord le cas du transfert thermique établi avec température paroi constante :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_p}{dx} = \text{cte} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II. 4.9})$$

Il n'y a pas donc de conduction de la chaleur dans la direction axiale (i.e. pas besoin de la négliger elle s'annule exactement), l'équation d'énergie se simplifie alors d'avantage :

$$0 = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \mu \left(\frac{du}{dr} \right)^2 \quad (\text{II. 5.0})$$

La dissipation visqueuse contrebalance exactement la conduction, ce qui conduit à :

$$k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} (T - T_p) \right) = -16\mu \frac{u_m}{R^2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \quad (\text{II. 5.1})$$

Par intégration on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial r} (T - T_p) = -4 \frac{\mu u_m^2}{kR} \left(\frac{r}{R} \right)^3 \quad (\text{II. 5.2})$$

Et donc, finalement, le profil de différence de température :

$$T - T_p = \frac{\mu u_m^2}{kR} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right) \right)^4 \quad (\text{II. 5.3})$$

La différence de température maximale est obtenue au centre de la conduite :

$$T_c - T_p = \frac{\mu u_m^2}{kR} \quad (\text{II. 5.4})$$

Par exemple, pour de l'eau à 20°C ($\mu=1.00 \cdot 10^{-3}$ (N S /M²) et $k=0.603$ W / (m.k)) circulant avec une vitesse de $u_m=1$ (M/S), on obtient « $T_c - T_p = 0.0017$ °C », ce qui est faible. Comme nous le verrons plus loin. la dissipation visqueuse est en fait souvent négligée dans les phénomènes de transfert de chaleur.

La chaleur produite au sein de l'écoulement par la dissipation visqueuse est dégagée vers l'extérieur par conduction à la paroi. Comme le profil de température ne dépend pas de « x », le transfert de chaleur ne dépend non plus de « x » : il s'agit bien d'un transfert thermique établi. On a pour le transfert de chaleur à la paroi :

$$q_w = -k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=R} = 4k \frac{(T_c - T_p)}{R} \quad (\text{II. 5.5})$$

Le coefficient adimensionnel de transfert de chaleur est le nombre de Nusselt défini par :

$$N_u = \frac{q_w}{\frac{k(T_c - T_p)}{D}} \quad (\text{II. 5.6})$$

On a donc déterminé ici que le nombre de Nusselt en transfert thermique établi pour un écoulement de Poiseuille en conduite circulaire est $N_u=8$.

En fait la température maximale n'est pas la grandeur que l'on utilise pour définir un coefficient de transfert global. On utilise plutôt la température moyenne représentative du flux énergétique thermique au sein de la conduite. A chaque tube de courant à section « dA » correspond un flux énergétique local égal à « c T ρ u dA » (énergie thermique × débit massique)

La température de référence (Cup Mixing Temperature) est définie par :

$$c T_m = \frac{\int c T \rho u dA}{\int \rho u dA} \quad (\text{II. 5.7})$$

Et donc, en incompressible :

$$T_m = \frac{\int T u dA}{\int u dA} = \frac{\int T u dA}{u_m A} \quad (\text{II. 5.8})$$

Le flux énergétique thermique global de la conduite est donc, par définition de « T_m » égal à « $c T_m \rho u_m A$ ». De manière équivalente, on a par soustraction « T_w » que :

Pour le profil de différence de température ci-dessus, on obtient, par intégration (avec $dA=r d\theta dr$ et en utilisant $\eta=r/R$) :

$$\begin{aligned} T_m - T_p &= \frac{1}{u_m \pi R^2} \frac{\mu u_m^2}{k} 2u_m 2\pi R^2 \int_0^1 (1 - \eta^4)(1 - \eta^2) \eta d\eta \\ &= \frac{5}{6} \frac{\mu u_m^2}{k} \quad (5.9) \end{aligned}$$

On peut donc aussi écrire, le profil de différence de température.

$$\frac{T - T_p}{T_m - T_p} = \frac{5}{6} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right) \quad (\text{II. 6.0})$$

Le transfert de chaleur à la paroi est alors :

$$q_p = 4 \frac{\mu u_m^2}{R} = \frac{24}{5} k \frac{(T_m - T_p)}{R} \quad (\text{II. 6.1})$$

De sorte que le nombre de Nusselt défini en utilisant

$$N_u = \frac{q_p}{k(T_m - T_p)/D} = \frac{48}{5} = 9.6 \quad (\text{II. 6.2})$$

Conclusion :

L'influence de la température sur les propriétés du fluide et notamment sur l'eau a une grande importance dans l'étude des systèmes hydrauliques. Comme nous l'avons montré au cours de ce chapitre, la majorité des paramètres du fluide : masse volumique, viscosité, conductivité thermique, chaleur spécifique ; évoluent modérément en fonction de l'énergie thermique.

Lors d'un transfert de chaleur d'une paroi à température « T_p » vers un fluide environnant dont la température moyenne est « T_f » (dans notre cas T_f est plus basse que T_p), l'expérience indique que l'on peut écrire une loi de transfert sous la forme :

$$\phi = h_c S (T_1 - T_2)$$

Ou « S » est l'air d'échange et « h (W/m^2k) » est appelé coefficient de convection. Il apparaît que, souvent, « h » est indépendant ou ne dépend que faiblement de la température. La loi ci-dessus, dite loi de Newton, est donc approximativement linéaire.

La loi de Newton est plus formelle en physique, car le coefficient « h » ne peut être déterminé une fois pour toutes. Il contient en réalité toutes les informations relatives à l'écoulement : profil de vitesse à la paroi et aux propriétés du fluide (viscosité, conductibilité thermique, masse volumique, chaleur massique).

Chapitre III

Chapitre III: modélisation mathématique des écoulements transitoires dans les conduites en charge avec transfert de chaleur.

Introduction:

Toute étude du coup de bélier dans les conduites forcées, doit nécessairement s'inspirer des travaux de Lorenzo Allievi qui, le premier, a su interpréter avec une rigueur mathématique le phénomène physique du coup de bélier. La théorie que nous développerons par la suite n'est qu'une extension des équations posées par l'ingénieur italien.

Le but de ce chapitre consiste à développer un modèle mathématique, sous forme d'équations, gouvernant l'écoulement transitoire en charge avec transfert de chaleur, décrivant le comportement des ondes dans le système dans lequel elles se créent et se propagent.

Nous entendons par le transfert de chaleur, spécialement, le comportement des ondes élastiques vis-à-vis le changement des conditions thermiques, autrement dit, l'influence du changement de la température du milieu fluide sur l'évolution et la propagation des ondes.

L'étude du phénomène transitoire, caractérisé par la formation et la propagation des ondes de pression et de dépression, nous oblige de tenir en compte des propriétés d'élasticité de la conduite et de compressibilité du fluide, lesquels sont négligés dans la plupart des cas d'écoulement permanent.

Afin de pouvoir établir les équations mathématiques qui relient les pressions et les vitesses aux déformations élastiques, nous nous servirons de deux équations classiques : équation de continuité et équation du mouvement.

Quant aux effets thermiques, la variante thermique sera intégrée, aux furs et aux mesures, tout en introduisant les différentes propriétés physiques du fluide qui ont tendance de s'influer par le changement thermique.

7. Hypothèses de base :

Considérons un système d'adduction gravitaire constitué d'une conduite sous pression, horizontale ou inclinée, de section et d'épaisseur constantes (voir: Fig. III. 1.)

La conduite débouche en « A » d'un bassin supposé infiniment grand et à niveau constant. On peut modifier à volonté le régime de l'écoulement, en manœuvrant un obturateur « B » situé à l'extrémité inférieure de la conduite et dont l'ouverture est variable.

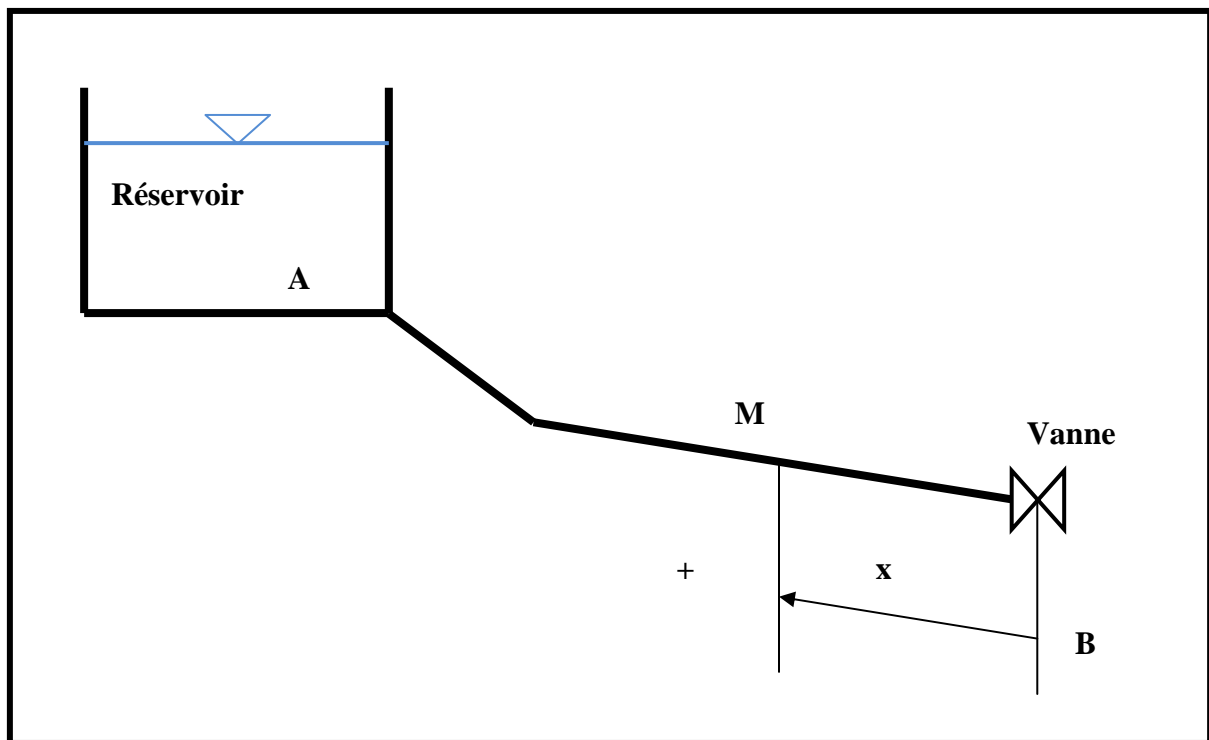


Fig. III. 1 : système d'adduction gravitaire

Considérons également que le système est dépourvu de tout système élastique local tel que des poches d'air ou de surface libre déformable.

L'inégalité des vitesses de l'écoulement et de pression à travers une section transversale de la conduite est négligée.

Lorsque l'on manœuvre l'obturateur « B », afin de modifier le régime d'écoulement, le passage d'un régime à l'autre ne s'établit ni instantanément, ni même de manière continue. Entre les deux états successifs de régime permanent, on enregistre de fortes oscillations de la pression et de la vitesse de l'eau, oscillations dont l'amplitude peut être considérable. Les variations de pression entraînent des déformations élastiques de la conduite et de la colonne d'eau. Pressions, vitesses de l'eau et déformations élastiques sont, de toute évidence, liées par certaines relations. On les obtiendra en appliquant les lois générales de l'hydraulique et de l'élasticité des matériaux.

L'étude de ces équations constitue le problème du coup de bélier. Allievi l'a résolu pour le cas d'une conduite horizontale, rectiligne, tel que nous l'avons définie plus haut. On sait, cependant, que ses équations sont valables pour une conduite inclinée, non rectiligne, aboutissant à un bassin infiniment grand.

Nous généraliserons donc, en ce sens, l'exposé d'Allievi. Définissons d'abord quelques grandeurs:

E : le module d'élasticité de la conduite.

β : le module de compressibilité volumétrique.

γ : le poids spécifique de l'eau.

S : la section de la conduite, « L » sa longueur, « R » son rayon.

D : le diamètre de la conduite.

d : l'épaisseur des parois, supposées minces.

8. **Développement des équations fondamentales de l'écoulement transitoire en charge :** Pour le développement des équations, nous allons considérer une tranche élémentaire de la conduite d'une longueur « dx » limitée par deux sections (S) et (S') d'abscisses respectives « x » et « $x+dx$ » projetées sur un axe orienté positivement de l'aval vers l'amont. (voir Fig. III. 2.)

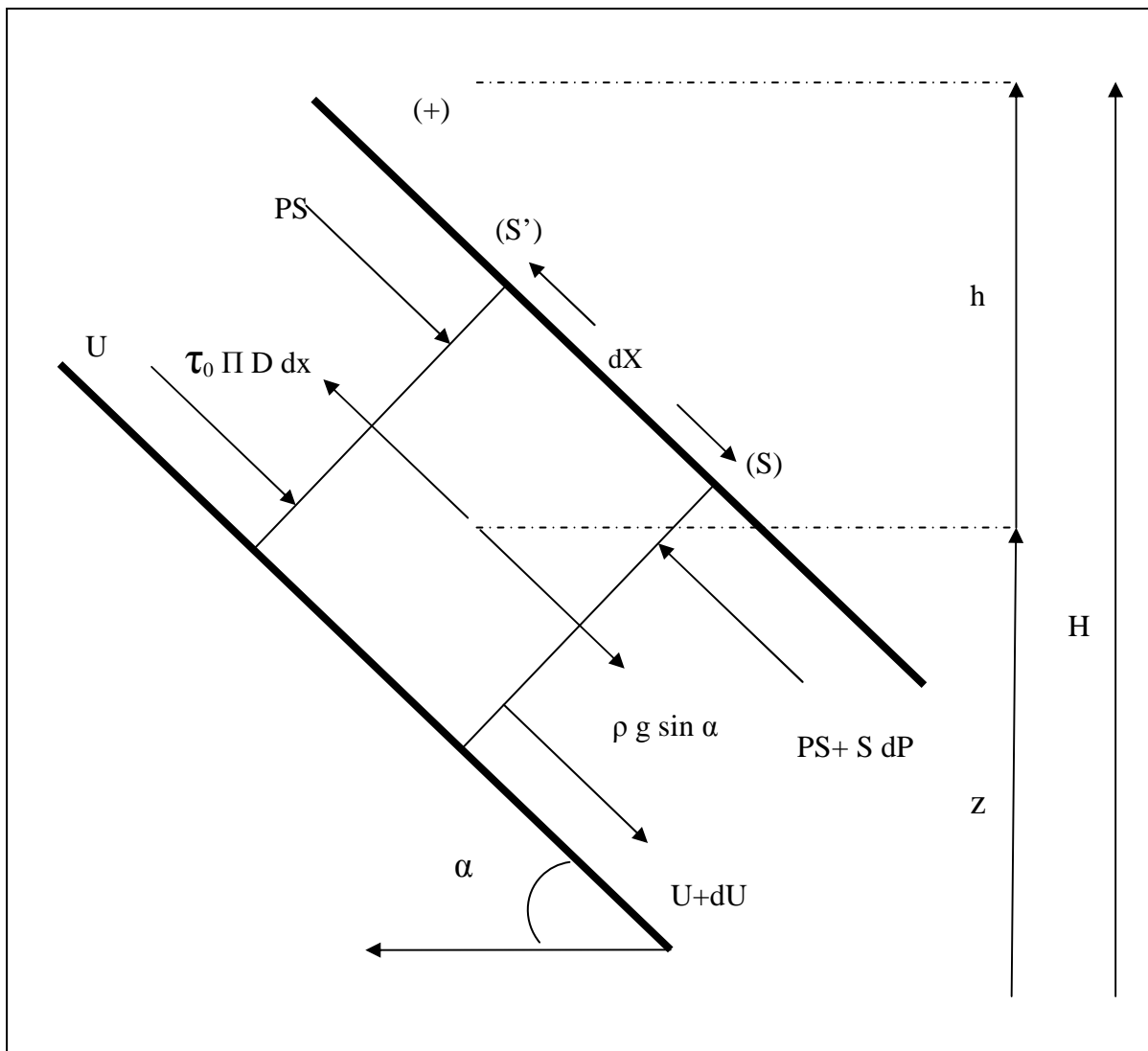


Fig. III. 2

Les équations différentielles, définissant l'écoulement transitoire en charge, qui relient les pressions et les vitesses aux déformations élastiques ont été établies en 1901 par l'Italien « Lorenzo Allievi ». Elles sont obtenues en appliquant à

cette tranche élémentaire de la canalisation. Les deux équations classiques: l'équation générale du mouvement varié ou équation d'Euler et l'équation de continuité de masse.

8.1. **Théorème des quantités de mouvement** : l'application du théorème des quantités de mouvement à la tranche considérée dans la « Fig.III.2. » se fait par la projection des forces du poids, de pression et celles du frottement sur l'axe «OX» comme suit :

$$\Sigma F_{\text{ext}} = m \frac{du}{dt} \Leftrightarrow -p s + p s + dp s - \rho g s dx \sin\alpha + F = \rho s dx \frac{du}{dt}$$

/La dérivée totale de la pression est exprimée comme suit :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial t} dt = \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

La variation temporelle de la pression est négligée : $\frac{\partial p}{\partial t} dt = 0$

/La force de frottement, indiquée par « F » est exprimée par la formule suivante :

$$F = \Delta P \cdot S$$

$$\Delta p = \rho g \lambda \frac{u^2}{2g} \frac{dx}{D}$$

$$F = \rho \lambda \frac{u^2}{2} \frac{dx}{D} \frac{\pi D^2}{4} = \rho \pi D dx \lambda \frac{u^2}{8}$$

Alors :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \sin\alpha + \frac{\rho \pi D dx}{\rho s dx} \lambda \frac{u^2}{8} = - \frac{du}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \left(g \sin\alpha - \frac{\rho 4 \pi D dx}{\rho s \pi D^2 dx} \lambda \frac{u^2}{8} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \left(g \sin \alpha - \lambda \frac{u^2}{2D} \right)$$

Comme :

$$p = \rho g H = \rho g (h - Z) \quad \text{et:} \quad \frac{\Delta Z}{\Delta x} = \sin (\alpha)$$

Donc, on obtient la première équation du mouvement :

$$\frac{du}{dt} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\lambda u^2}{2D} = 0 \quad (\text{III. 1})$$

Mais :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u$$

Alors, nous pouvons écrire, encore plus :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\lambda u^2}{2D} = 0 \quad (\text{III. 2})$$

8.2. **L'équation de continuité:** compte tenu de la compressibilité de l'eau, de l'élasticité de la conduite et de la température du fluide.

A travers la section amont (**S**), la vitesse est « u ». A travers la section aval (**S'**), la vitesse est :

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}$$

Pendant le temps « dt », il entre par la face amont de la tranche considérée un volume « S u dt » ;

Pendant le même temps, il sort par la face aval un volume « S (u + $\frac{\partial u}{\partial x} dx$) dt » ;

La quantité d'eau emmagasinée est donc:

$$dw = -s \frac{\partial u}{\partial x} dx dt \quad (\text{III. 3})$$

Cet accroissement est dû d'une part à la compressibilité du liquide et d'autre à l'élasticité de la conduite.

8.2.1. Compressibilité de l'eau:

Conformément à la loi de Hooke, la variation de pression « dp » (variation de la contrainte) entraîne une diminution de volume « Δw » (déformation) de la masse d'eau dans la conduite, tel que:

$$dp = -\beta \frac{dw}{w}$$

β : la compressibilité volumique de l'eau.

$$p = \rho gh = \rho g(H - Z)$$

« p » varie avec « x » et « t », mais les variations de « p » avec « x » sont négligeables par rapport aux variations avec « t », alors :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial t} dt = \rho g \frac{\partial h}{\partial t} dt$$

et

$$w = s dx$$

Donc :

$$dw_1 = -\frac{1}{\beta} \rho g s \frac{\partial h}{\partial t} dt dx \quad (\text{III. 4})$$

8.2.2. L'élasticité de la conduite :

Sous l'action de la pression « p », la matière de la canalisation est soumise à une contrainte « σ »:

$$d\sigma = E \frac{dD}{D}$$

E: module de Young ou module d'élasticité de la conduite.

La contrainte « σ » est exprimée en fonction de la pression « p » par la relation suivante :

$$d\sigma = \frac{D}{2e} dp$$

Alors :

$$\frac{dD}{D} = \frac{d\sigma}{E} = \frac{D}{2eE} dp$$

L'accroissement du diamètre « dD » entraîne un accroissement de la section « dS », tel que:

$$\frac{dS}{S} = 2 \frac{dD}{D} \Leftrightarrow ds = 2 \frac{s dD}{D} = S \frac{D}{eE} dp$$

La tranche considérée emmagasine, de ce fait, un volume d'eau supplémentaire:

$$dw_2 = ds dx$$

$$dw_2 = S \frac{D}{eE} dp dx$$

$$dw_2 = \frac{sD}{eE} \rho g \frac{\partial h}{\partial t} dt dx \quad (\text{III. 5})$$

8.2.3. L'effet thermique et la compressibilité de l'eau: l'accroissement ou la diminution de la température du fluide influe, en première vue, sur sa masse volumique, l'interprétation mathématique de cette influence est réalisée en se servant de l'équation d'état, cité précédemment, qui lie la masse volumique à la pression et à la température.

$$\rho = f(P, T) \quad (1)'$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{1}{\beta} (dP)_T + \alpha (dT)_P \right) \quad (2)'$$

$$\rho = \frac{m}{v} \Leftrightarrow m = \rho v \quad (3)'$$

$$dm = d(\rho V) = d\rho \cdot V + \rho \cdot dV = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$$

$$d\rho = \frac{dV}{V} \rho = \rho_0 \left(\frac{1}{\beta} (dP) + \alpha (dT) \right)$$

$$\frac{\rho}{V} dV = \rho \left(\frac{1}{\beta} (dP) + \alpha (dT) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\beta} (dp) + \alpha (dT) \right) V$$

$$= \left(\frac{1}{\beta} \bar{\omega} s \frac{\partial h}{\partial t} dt dx \right) + (\alpha dT s dx)$$

A signaler que le premier terme « $\frac{1}{\beta} \bar{\omega} s \frac{\partial h}{\partial t} dt dx$ » représente la même différence du volume, déjà établie en (III.5), dû à la compressibilité du fluide « dw_1 », l'équation d'état employée englobe les deux phénomènes, de compressibilité et de la dilatation thermique. Par conséquent, nous allons tenir que le deuxième terme qui présente l'augmentation du volume générée par la dilatation thermique :

$$dw_3 = \alpha dT s dx \quad (III.6)$$

Alors :

$$dw = dw_1 + dw_2 + dw_3$$

$$\Leftrightarrow \left(s \frac{\partial u}{\partial x} dx dt = \frac{sD}{eE} \rho g \frac{\partial h}{\partial t} dt dx + \frac{1}{\beta} \bar{\omega} s \frac{\partial h}{\partial t} dt dx + \alpha dT s dx \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx dt = \frac{\partial h}{\partial t} dt dx \bar{\omega} \left(\frac{D}{eE} + \frac{1}{\beta} \right) + \alpha dT dx \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} = \bar{\omega} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{D}{eE} \right) \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha \frac{dT}{dt} \right)$$

On pose :

$$\frac{1}{a^2} = \rho \left(\frac{1}{\beta} + \frac{D}{eE} \right)$$

On aura :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha \frac{dT}{dt} = 0 \quad (\text{III.7})$$

Donc, le système d'équation classique, appelé aussi système de Saint-venant, devient après l'introduction de l'effet thermique comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\lambda u^2}{2D} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha \frac{dT}{dt} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.8})$$

La première équation est, en effet, l'expression de l'équilibre des forces selon la loi de newton « F=mg » ; cet équilibre fait intervenir l'accélération du fluide par la variation temporelle de la vitesse, les différences de pressions sous forme de gradient de pression et les forces de frottement causées par la vitesse du fluide sur les parois plus ou moins rugueuses de la conduite.

La deuxième équation exprime le fait qu'une variation spatiale de la vitesse plus une variation temporelle de l'énergie thermique, entraînent une évolution temporelle de la pression; en effet, par exemple, il entre plus de débit dans un volume donné qu'il en sorte, il faut que la pression augmente de façon à ce que le volume augmente s'il est élastique.

Ce système d'équations constitue la relation cherchée qui lie les pressions, les vitesses et l'effet thermique aux déformations élastiques.

Remarque :

Le nouveau terme obtenu « $\alpha \frac{dT}{dt}$ » exprime la variation de la dilatation thermique en fonction du temps. Nous pouvons considérer que cette variation est fonction « $f(t)$ » donc:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = f(T)$$

Nous avons considéré aussi que la variation spatiale de la température, le long de l'axe « x », est négligée, en d'autre terme, elle est constante le long de l'axe et qu'elle n'est fonction que du temps, alors :

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx = 0$$

Alors le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\lambda u^2}{2D} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III. 9})$$

9. **La valeur de la vitesse de propagation d'onde** : la célérité de l'onde « a » peut être assimilée à la vitesse de propagation du son dans le milieu eau-conduite, Il vaut mieux parler de célérité que de vitesse des ondes, car la notion de vitesse évoque le déplacement de particules matérielles. Les particules ne suivent pas l'onde avec la célérité « a » bien que leur mouvement soit modifié par le passage de l'onde. Elle s'exprime par :

$$a = \frac{\sqrt{\frac{1}{\rho}}}{\sqrt{\frac{1}{\beta} + \frac{D}{eE}}} = \frac{\sqrt{\frac{\beta}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\beta D}{eE}}} \quad (\text{III. 10})$$

Avec :

ρ : masse volumique (spécifique) du liquide ; Pour l'eau aux conditions normales de température et de pression, la masse volumique est:

$$\rho = 1000 \text{ Kg/m} = 102 \text{ KgF S}^2/\text{M}^4 = 1 \text{ KgN}/\text{M}^4 ,$$

β : compressibilité du liquide, pour l'eau:

$$\beta = 2.03 \cdot 10^6 \frac{\text{KN}}{\text{M}^2} = 2.08 \cdot 10^8 \frac{\text{KgF}}{\text{M}^2}$$

D et e : diamètre intérieur et épaisseur de la conduite.

E : module d'élasticité du matériau de la conduite, dépend de la nature de la paroi, on trouve les valeurs suivantes pour les différents matériaux usuels suivants:

| matériau | fonte ductile | fonte grise | acier | béton | cuivre | PVC | polyéthylène haute densité | polyéthylène basse densité |
|----------|---------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|----------------------|----------------|----------------------------|----------------------------|
| E | $1,7 \cdot 10^{11}$ | $1,2 \cdot 10^{11}$ | 2 à $2,2 \cdot 10^{11}$ | $3,5 \cdot 10^{10}$ | $11,5 \cdot 10^{10}$ | $3 \cdot 10^9$ | $9,3 \cdot 10^8$ | $2 \cdot 10^8$ |

Tableau. III. 1

Ainsi, pour l'eau et pour les canalisations courantes, les valeurs de la célérité varient entre 300 m/s (pour le PVC et le polyéthylène haute

densité) et 1200 m/s (pour l'acier et la fonte) suivant les diamètres, les pressions et la nature des matériaux.

Pour les matériaux composites (béton armé par exemple), les tuyaux épais ou les galeries, la célérité de l'onde est calculée en introduisant un coefficient sans dimension « Ψ » ; dont, la valeur est fonction du type de tuyau (épais ou mince), des conditions de pose (ancrage ou libre), des propriétés élastiques du matériau (module de Young « E » et coefficient de Poisson « ν » qui est le rapport entre la déformation latérale et la déformation axiale) et des dimensions (épaisseur « e » et diamètre intérieur « D »).

Afin de simplifier la relation de « a », on a fixé la célérité « a_0 » dans les conditions normales, de température et de pression, comme suit :

$$a_0 = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.08 \cdot 10^8}{102}} = 1425 \text{ M/S}$$

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \frac{\beta D}{e E}}} = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{\beta D}{e E}}}$$

Où:

a_0 : vitesse de propagation du son dans l'eau.

La relation de "a" peut être écrite comme suit:

$$a = \frac{A}{\sqrt{B + K \frac{D}{E}}}$$

Allievi a calculé les valeurs de A, B et k en remplaçant ρ , β et E par leurs valeurs exactes ou moyennes et a obtenu pour l'eau aux conditions ordinaires de température et de pression la formule suivante :

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48,3 + K \frac{D}{E}}} \quad (\text{III. 11})$$

K : Coefficient dépendant du matériau de la canalisation.

$$K = \frac{10^{10}}{E}$$

Si les unités de mesures sont Kgf, M et S.

10.Simplification des équations du mouvement transitoire « méthode d'Allievi »:

Les équations d'Allievi découlent des équations ci-dessus quand on pose les hypothèses simplificatrices suivantes :

Nous négligerons les pertes de charge provoquées par le frottement de l'eau contre les parois de la conduite, vu que leur rôle se limite essentiellement dans l'atténuation des ondes.

Les termes infiniment petits du deuxième ordre « $u \frac{\partial u}{\partial x}$ » sont négligés devant ceux du premier ordre « $\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial t}$ » Ces deux hypothèses se renforcent d'ailleurs l'une à l'autre.

1)

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Alors :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

2) Le terme « $\frac{\lambda u^2}{2D}$ » peut être négligé pour le moment, il présente le module des pertes de charge dues aux frottements, qu'ils ont pour effet, qu'à diminuer l'amplitude des ondes.

Nous obtenons, ainsi, les équations suivantes qui constituent le système d'équations d'Allievi:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (\text{III. 12})$$

11. Intégration du système:

On dérive la première équation du système par rapport à la variable de l'espace « x » et la deuxième par rapport au temps « t ».

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + g \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases}$$

On dérive, la première équation par rapport au temps « t » et la deuxième par rapport à la variable de l'espace « x ».

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases} \quad (\text{III. 13})$$

Ce genre de système constitué d'équations de dérivées partielles du deuxième ordre est similaire aux systèmes d'équations des ondes ou d'équation des cordes vibrantes. Dont l'intégration se fait par changement de variable comme suit :

$$\text{On pose : } \begin{cases} \xi = t + \frac{x}{a} \\ \eta = t - \frac{x}{a} \end{cases}$$

(η, ζ) sont dites variables de Riemann.

Les variables (η, ζ) ont la même dimension [T].

Calculons les différentes dérivées de « H » en fonction de nouvelles variables « η » et « ζ » :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial H}{\partial \xi}$$

De même pour « $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ » on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial H}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial H}{\partial \xi} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial H}{\partial \xi} \\ 2 \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial H}{\partial \xi} = -2 \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial H}{\partial \xi} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial \eta \partial \xi} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \eta \partial \xi} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right) = 0$$

Donc :

$$H(x, t) = F\left(t + \frac{x}{a}\right) + f\left(t - \frac{x}{a}\right) + \text{cte} \quad (\text{III. 14})$$

La constante s'obtient en considérant la pression « H_0 » au point quelconque avant la manœuvre de la vanne, c'est-à-dire à l'instant « $t = 0$ », par conséquent la solution générale de la ligne piézométrique $H(x, t)$ qui est homogène à une longueur s'écrit à une constante « H_0 » près.

$$H = F\left(t + \frac{x}{a}\right) + f\left(t - \frac{x}{a}\right) + H_0 \quad (\text{III. 15})$$

Les deux fonctions « F, f » doivent être homogènes à une longueur.

On remarque que la surpression ou la dépression correspondante à la valeur du coup de bélier en un point quelconque est: $b = H - H_0$

$$\Leftrightarrow b = F\left(t + \frac{x}{a}\right) - f\left(t - \frac{x}{a}\right) \quad (\text{III. 16})$$

Les dérivées partielles « $\frac{\partial H}{\partial x}$ » et « $\frac{\partial H}{\partial t}$ » ont pour expression :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{a} F' - \frac{1}{a} f'$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = F' + f'$$

On a précédemment vu que les variables (η, ξ) avaient [T] pour équation aux dimensions. Il en résulte que les fonctions F' et f' sont homogènes à une vitesse.

Puisque on a respectivement les relations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{g}{a} (F' - f') \quad (\text{III. 17})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{g}{a^2} (F' - f') \quad (\text{III. 18})$$

Et que la vitesse moyenne uniformisée dans une section transversale droite est une combinaison linéaire des fonctions F et f , on peut écrire:

$$u(x, t) = \alpha F\left(t - \frac{x}{c}\right) + \beta f\left(t + \frac{x}{c}\right) + u_0 \quad (\text{III. 19})$$

Expression dans laquelle les constantes « α » et « β » à déterminer ont pour équation aux dimensions $[T^{-1}]$:

Les dérivées « $\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x}$ » s'écrivent dans ces conditions :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha \partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\beta \partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\alpha}{a} F' + \frac{\beta}{a} f'$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\alpha \partial F}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\beta \partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \alpha F' + \beta f'$$

Par identification, il en résulte que les constantes « α » et « β » ont pour expressions :

$$\alpha = \frac{g}{a} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{g}{a} \quad (\text{III. 20})$$

La solution générale de la vitesse moyenne uniformisée $u(x, t)$ s'écrit:

$$u(x, t) = \frac{g}{a} \left[F\left(t - \frac{x}{c}\right) + f\left(t + \frac{x}{c}\right) \right] + u_0 \quad (\text{III. 21})$$

u_0 : présente la vitesse moyenne correspondante à l'écoulement uniforme avant le début de la manœuvre de la vanne.

En définitive, les solutions du système des deux équations différentielles régissant l'écoulement transitoire en charge s'écrivent :

$$\begin{cases} H - H_0 = F\left(t + \frac{x}{a}\right) + f\left(t - \frac{x}{a}\right) \\ u - u_0 = \frac{g}{a} \left[F\left(t - \frac{x}{c}\right) + f\left(t - \frac{x}{a}\right) \right] \end{cases} \quad (\text{III. 22})$$

F et f sont des fonctions définies par les conditions initiales et aux limites (dont l'expression dépend de la loi de fermeture ou d'ouverture de la vanne), qui représentent deux ondes se propageant dans la conduite, en sens inverse, avec la même célérité « a ».

« H_0 » et « u_0 » sont des constantes, elles représentent respectivement la côte de la ligne piézométrique et la vitesse du fluide (vitesse uniforme dans une section) en l'absence de tout ébranlement : c'est le régime permanent initial.

La quantité « $\Delta H = H - H_0$ » est l'augmentation de pression, ou de surpression, qui règne à l'instant « t » dans une section d'abscisse « x ».

Ce sont les équations d'Allievi. Elles ont été obtenues en considérant le départ de la conduite (point A) au niveau du réservoir comme origine des abscisses.

Mais, il est d'usage dans la théorie du coup de bélier de porter souvent les abscisses « x » en direction positive à partir de l'organe de fermeture aval « B » vers le point « A ».

12. **Interprétation physique des équations d'Allievi :** La signification physique de la première de ces équations est aisée à trouver: Faisons dans « F » et « f », « x = a t + cte » et « x = - a t + cte ». Les deux fonctions « F » et « f » représentent alors deux charges constantes qui se propagent le long de la conduite avec une célérité « a », mais en sens inverse. Les fonctions « F » et « f » sont donc des ondes et « a » leur célérité ou vitesse de propagation.

Si, au contraire, nous faisons x = cte. Nous voyons que « F » et « f » sont des grandeurs variables. Au temps « t » et au point d'abscisse « x » la surcharge : « H - H₀ = Y - Y₀ » est donc égale à la somme des deux surcharges mobiles « F » et « f » qui interfèrent en cet instant au point considéré.

Les deux fonctions « F » et « f » sont inconnues. On peut en éliminer une, en remarquant que, si l'on suppose le réservoir infiniment grand, et dans ce cas seulement, la pression est constante en « B »; c'est-à-dire que pour « x = L »:

$$f\left(x + \frac{L}{a}\right) = -F\left(t - \frac{L}{a}\right) \quad (\text{III. 23})$$

Or, si nous posons en particulier

$$t = t_1 + \frac{x}{a} - \frac{L}{a}$$

Où « t₁ » désigne un instant quelconque de la phase de contre coup dans la section d'abscisse « x », l'équation (III.23) prend la forme générale:

$$f\left(t_1 + \frac{x}{L}\right) = -F\left(t_1 + \frac{x}{L} - \frac{2l}{a}\right) = -F\left(t_1 - \frac{x}{L} - 2\frac{(L-x)}{a}\right)$$

On voit clairement que la fonction « f », au temps « t₁ » et à l'abscisse « x », n'est autre que la fonction « -F » au point « x » et au temps « t₁ - $\frac{2(L-x)}{a}$ ».

Tout revient donc à considérer une onde « F » qui se réfléchit entièrement au réservoir « x = L », pour revenir sur elle-même après changement de signe. Du point de vue physique, nous nous trouvons en présence d'ondes oscillant dans une conduite de longueur « L ». La période de l'oscillation est ($\mu = 2L/a$).

En combinant les équations fondamentales (III.22) et (III.23), en éliminant les fonctions inconnues « F » et « f », il ne reste qu'une relation entre « H » et « u » et les constantes « H₀, u₀, a, g ». Le problème est donc, en principe, résolu; toutes les recherches ultérieures n'ayant d'autre but que de classer les diverses solutions. Nous insistons sur le fait que ce sont ces équations fondamentales qui donnent la solution générale du problème, et que les résultats de problèmes particuliers traités par Allievi ne peuvent, par contre, avoir une portée aussi générale.

Nous reproduisons ici l'essentiel des développements d'Allievi. Pour la section d'abscisse « x = 0 », section adjacente à l'obturateur, l'équation (III.23) devient :

$$f(t) = F\left(t - \frac{2L}{a}\right)$$

Soit « t₁ » un instant tel que 0 < t₁ < μ, nous considérons les instants successifs :

$$t_1; t_1 + \mu; t_1 + 2\mu; \dots; t_1 + (i-2)\mu; t_1 + (i-1)\mu;$$

Que nous désignerons par:

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_{i-2}, t_{i-1}, t_i$$

Et qui tombent respectivement dans la phase :

$$1, 2, 3; \dots, i-1, i$$

Nous écrirons alors (III.23) sous la forme simplifiée:

$$f_i = -F_{i-1}$$

Ce qui nous permet de développer les équations (III.22), écrites pour l'obturateur « O », pendant les « i » premières phases. Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = H_0 + F_1 \\ H_2 = H_0 + F_2 - F_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ H_{I-1} = H_0 + F_{I-1} - F_{I-2} \\ H_I = H_0 + F_I - F_{I-1} \end{array} \right. \quad \text{(III.24)}$$

Et :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_0 + \frac{g}{a} F_1 \\ u_2 = u_0 + \frac{g}{a} (F_1 + F_2) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ u_{i-1} = u_0 + \frac{g}{a} (F_{i-2} - F_{i-1}) \\ u_i = u_0 + \frac{g}{a} (F_{i-1} - F_i) \end{array} \right. \quad \text{(III.25)}$$

En additionnant deux à deux les équations (III.24) et en soustrayant les équations (III.25), on élimine la fonction F_i et l'on obtient les séries enchaînées d'Allievi:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 - H_0 = \frac{a}{g} (u_0 u) \\ H_1 + H_2 - 2H_0 = \frac{a}{g} (u_1 - u_2) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ H_{I-2} + H_{I-1} - 2H_0 = \frac{a}{g} (u_{i-2} - u_{i-1}) \\ H_{I-1} + H_I - 2H_0 = \frac{a}{g} (u_{i-1} - u_i) \end{array} \right. \quad \text{(III.26)}$$

Il est intéressant, surtout en vue de la construction d'abaques classificateurs, de rendre ces équations indépendantes de la hauteur h_0 . Nous définissons, à cet effet, la pression relative:

$$\xi_{*i}^2 = \frac{H_i}{H_0}$$

$$\xi_{*1}^2 - 1 = 2\rho_*[1 - \eta_1 \xi_{*1}]$$

D'où :

$$\xi_{*1} = -\rho_* \eta_1 + \sqrt{\rho_*^2 + \eta_1^2 + 1 + 2\rho_*} \quad (\text{III.31})$$

Pour calculer « η_1 », on fera « $0 < i < 1$ ». La valeur particulière « $i=1$ » nous livre « $\eta_1 = 1 - \frac{1}{\theta}$ et ξ_{*1}^2 » qui est la première « valeur de rythme entier » correspondant à la première discontinuité de la courbe des pressions. Nous l'appelons le coup direct.

Si la fermeture est assez brusque pour être terminée avant la fin de la première phase, c'est-à-dire si « $\Theta < 1$ », on obtient « $\eta_1 = 0$ » et « $\xi_{*1}^2 - 1 = 2\rho_*$ » qui est, par le fait, la valeur du coup direct pour une fermeture instantanée. C'est la plus grande valeur que la surpression relative « $\xi_{*1}^2 - 1$ » puisse prendre au cours d'une fermeture linéaire quelconque.

On calculera successivement : « $\xi_{*2}^2, \xi_{*3}^2, \dots, \xi_{*i-1}^2, \xi_{*i}^2$ » de préférence pour des rythmes entiers.

Allievi a démontré que ces valeurs tendent toujours vers une limite « ξ_{*m}^2 » que ce soit par valeurs croissantes ou par valeurs alternativement plus grandes ou plus petites que « ξ_{*m}^2 ».

Pour calculer « ξ_{*m}^2 » nous poserons dans la dernière des équations (III.28):

$$\xi_{*i-1} \approx \xi_{*i-1} \approx \xi_{*i-1}$$

Et :

$$\eta_{i-1} - \eta_i = 1 - \frac{i-1}{\theta} - 1 + \frac{i}{\theta} = \frac{1}{\theta}$$

Ce qui nous donnera :

$$\xi_{*1}^2 - 1 = \frac{\rho_*}{\theta} \xi_{*m}$$

Et :

$$\xi_{*m} = \frac{\rho_*}{2\theta} + \sqrt{\frac{\rho_*^2}{2\theta} + 1}$$

Au cours d'une étude des plus remarquables, Allievi a mis en relief les lois qui régissent le cas de fermeture linéaire de l'obturateur (équations (II.28) et (II.30)). Il a montré que les courbes des pressions devant l'obturateur pouvaient être classées en un certain nombre de courbes-types. Nous en reproduisons schématiquement « 3 » d'entre elles (Voir Fig.III. 3, 4 et 5).

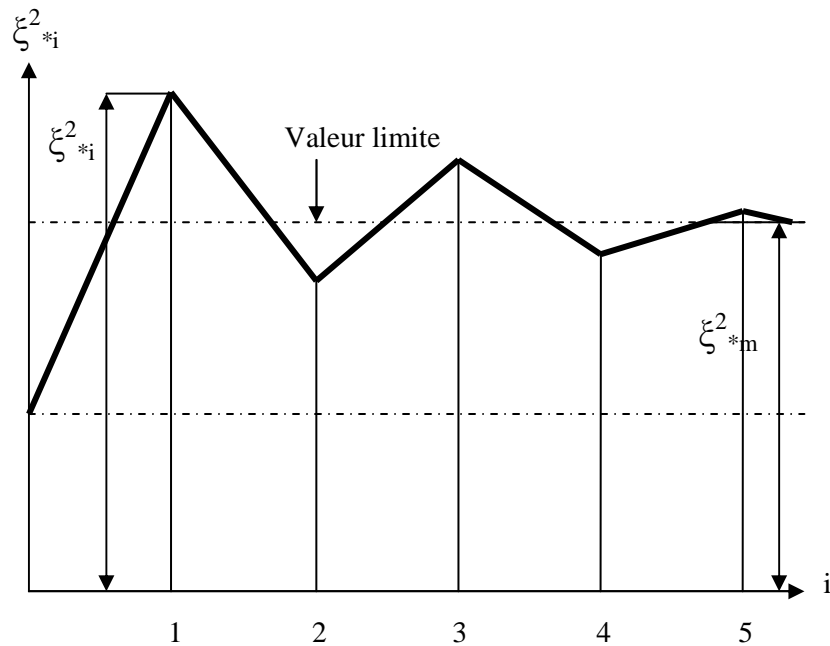


Fig. III. 3

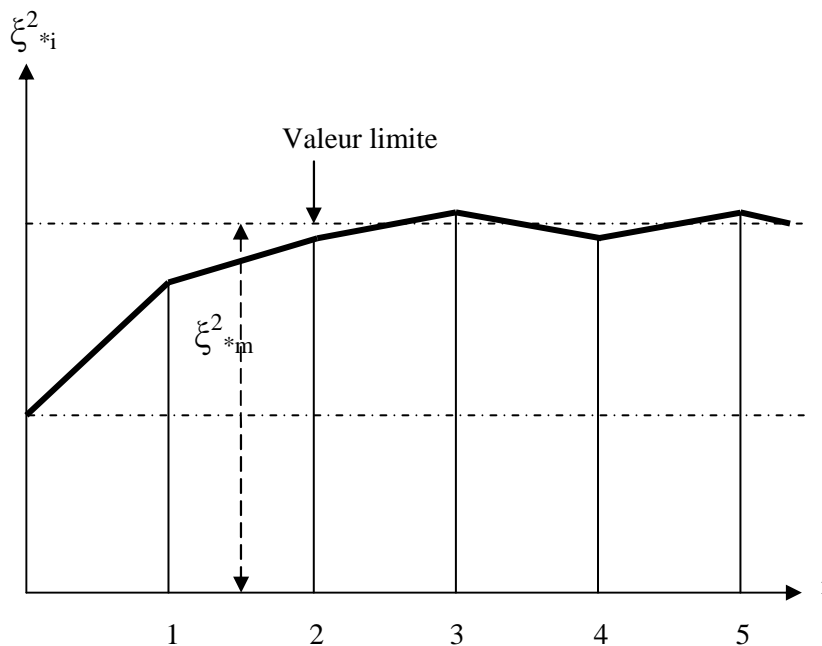
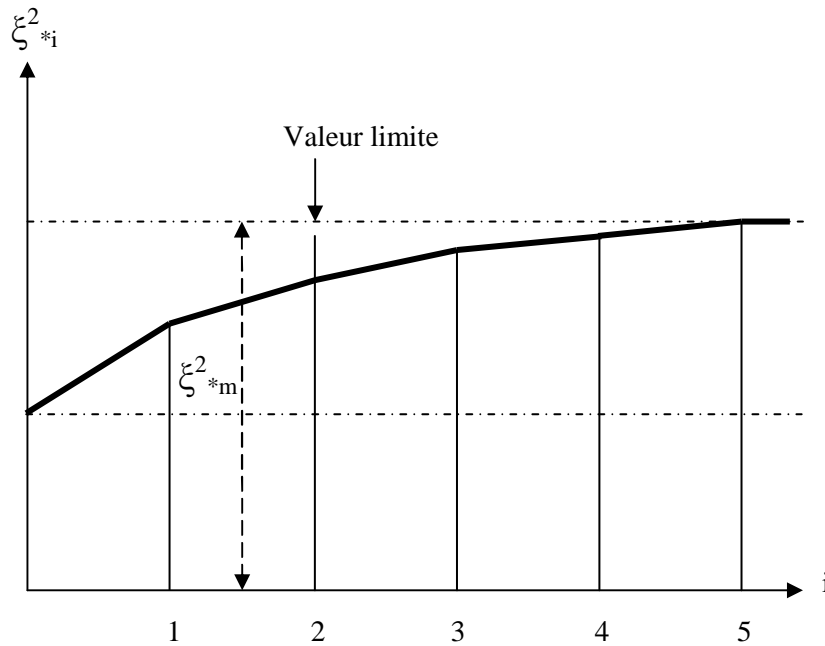


Fig. III. 4

**Fig. III. 5**

On voit que le maximum « ξ^2_{*max} » peut se produire, soit à la fin de la première phase (Fig.III. 3), soit pendant ou à la fin d'une des phases suivantes (Fig.III. 4 et 5). Après avoir observé, en outre, que tout le phénomène dépendait uniquement des valeurs relatives « ρ_* et θ », Allievi est arrivé à construire un abaque unique, qui donne à la fois la valeur du maximum ainsi que la phase au cours ou à la fin de laquelle se produit le maximum, ce qui permet de se rendre compte de l'allure de la courbe, sans la construire. Ce résultat est remarquable. En pratique, on se contente de calculer « ξ^2_{*1} et ξ^2_{*m} ». La plus grande de ces valeurs sera, avec une exactitude suffisante, prise pour « ξ^2_{*max} ».

Allievi a résolu, de même, le problème pour l'ouverture linéaire de l'obturateur, problème qui se présente sous une forme analogue à celui que nous avons traité, il a donné, également, des formules et des abaques pour les « contrecoups de retour au régime » et les « manœuvres rythmiques » de l'obturateur.

Nous voulions, par ce bref et unique exemple, faire ressortir les points essentiels de la méthode suivie par Allievi, c'est-à-dire la transformation des équations (III.22) en un système de « séries enchaînées » (III.28) qui permet, soit le calcul point par point de la courbe des pressions, soit le calcul des valeurs « ξ_{*i}^2 et ξ_{*m}^2 » et la construction d'abaques classificateurs. Allievi applique la même méthode à l'étude de tous les autres cas.

Chapitre IV

Chapitre IV: Modélisation numérique des écoulements transitoires en charge.

Introduction: Les équations qui gouvernent l'écoulement transitoire sont des équations aux dérivées partielles, quasi linéaires et hyperboliques. Par conséquent, les solutions analytiques ne sont pas possibles. Alliévi a développé des solutions classiques, basées sur des hypothèses simplificatrices et traitent des cas particuliers. L. Bergeron a également développé des solutions graphiques qui ont une application pratique dans plusieurs types de systèmes hydrauliques avant l'avènement de l'ordinateur.

1. L'analyse numérique des équations aux dérivées partielles :

Pour aborder le calcul numérique (à l'aide d'un outil informatique) des solutions d'un problème réel, on passe par les étapes suivantes :

1. Description qualitative des phénomènes physiques : Cette étape, effectuée par des spécialistes des phénomènes que l'on veut quantifier (ingénieurs, chimistes, biologistes etc. ...) consiste à répertorier tous les mécanismes qui entrent en jeu dans le problème qu'on étudie.

2. Modélisation : Il s'agit, à partir de la description qualitative précédente, d'écrire un modèle mathématique. On supposera ici que ce modèle amène à un système d'équations aux dérivées partielles (EDP). Selon les hypothèses effectuées, la modélisation peut aboutir à plusieurs modèles, plus ou moins complexes. Dans la plupart des cas, on ne saura pas calculer une solution analytique, explicite, du modèle ; on devra faire appel à des techniques de résolution approchée.

3. Analyse du modèle mathématique : Même si l'on ne sait pas trouver une solution explicite du modèle, il est important d'en étudier les propriétés mathématiques, dans la mesure du possible. Il est bon de se poser les questions suivantes :

- Le problème est-il bien posé ? C'est-à-dire y-a-t'il existence et unicité de la solution ?

- Les propriétés physiques auxquelles on s'attend sont elles satisfaites par les solutions du modèle mathématique ?

- Y a-t-il continuité de la solution par rapport aux données ?

4. Discrétisation et résolution numérique : Un problème posé sur un domaine continu (espace - temps) n'est pas résoluble tel quel par un ordinateur, qui ne peut traiter qu'un nombre fini d'inconnues. Pour se ramener à un problème en dimension finie, on discrétise l'espace et/ou le temps. Si le problème original est linéaire on obtient un système linéaire. Si le problème original est non linéaire (par exemple s'il s'agit de la minimisation d'une fonction) on aura un système non linéaire à résoudre par une méthode AD HOC (méthode de Newton...)

5. Analyse numérique : IL s'agit maintenant de l'analyse mathématique du schéma numérique. En effet, une fois le problème discret obtenu, il est raisonnable de se demander si la solution de ce problème est proche, et en quel sens, du problème continu. De même, si on doit mettre en œuvre une méthode itérative pour le traitement des non-linéarités, il faut étudier la convergence de la méthode itérative proposée.

6. Mise en œuvre, programmation et analyse des résultats : La partie mise en œuvre est une grosse consommatrice de temps. Actuellement, de nombreux codes commerciaux existent, qui permettent en théorie de résoudre "tous" les problèmes. Il faut cependant procéder à une analyse critique des résultats obtenus par ces codes, qui ne sont pas toujours compatibles avec les propriétés physiques attendues...

D'autres améliorations aux équations régissant le phénomène du coup de bélier ont été réalisé par plusieurs savants : JAEGER, WOOD, RICH, PARMAKIAN, STREETER, LAI et WYLIE.

Leurs efforts combinés ont apporté des résultats dans les équations unidimensionnelles classiques du coup de bélier, qui sont généralement la base de la simulation numérique des écoulements transitoires en charge.

Quand aux méthodes numériques employées, on peut constater que diverses approches ont été introduites pour le calcul des écoulements transitoires. En voici, en bref, les étapes les plus remarquables :

- STREETER a développé un modèle numérique en utilisant une valeur constante du coefficient de frottement.
- WIGGERT et SUNDQUIST ont les a résolu en utilisant des grilles fixes sur lesquelles sont projetées les caractéristiques de l'écoulement. Leur analyse montre les effets de l'interpolation, l'espacement et la taille de la grille sur l'atténuation et la dispersion des ondes.
- WATT et AL ont les a résolu par la méthode des caractéristiques « MOC » et dont les valeurs de frottement n'ont pas été prises en compte.
- GOLDBERG et WYLIE ont utilisé des interpolations dans le temps, plutôt que les interpolations spatiales utilisées plus largement, démontrent plusieurs avantages dans l'application de la méthode des caractéristiques à des problèmes d'onde dans l'hydraulique.
- SHIMADA et OKUSHIMA ont résolu l'équation du second ordre par un procédé de solution en utilisant la méthode des séries et la méthode de NEWTON RAPHSON. Ils n'ont calculé que la pression maximale de coups de bélier avec coefficient de frottement constant. La solution n'a pas été effectuée pendant une période suffisamment longue afin de démontrer l'amortissement de la pression avec l'accroissement du temps.
- CHUDHURY et HUSSAINI ont résolu les équations du coup de bélier par MACCORMACK «la méthode MacCormack est un schéma de discrétisation largement utilisé pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles hyperboliques. Cette méthode du second ordre différences finies est introduite par Robert W. MacCormack en 1969. La

méthode MacCormack est très élégante et facile à comprendre et à programmer, GABUTTI « schéma des différences finies explicites ».

- SIBETHEROS et AL ont étudié la méthode des caractéristiques (MOC) avec des polynômes SPLINE pour des interpolations nécessaires à l'analyse de coup de bélier numérique pour une conduite horizontale sans frottement.
- SILVA-ARYA et CHOUDHURY ont résolu la partie hyperbolique de l'équation gouvernante par « MOC » sous une forme unidimensionnelle et la partie de l'équation parabolique par « FD » en forme quasi-bidimensionnelle.
- PEZZINGA a présenté à la fois quasi 2-D et 1-D analyses d'écoulement in-stationnaire dans les réseaux et les tuyaux à l'aide schéma aux différences finies implicite. Il les a résolues avec un intervalle de temps de 4 secondes avec un coefficient de frottement constant. il a également travaillé pour évaluer la résistance à l'écoulement in-stationnaire par MOC. Il utilisait la formule de DARCY-WEISBACK pour le calcul de frottement et résolvait les oscillations pendant 4 secondes seulement.
- ZHAO et GHIDAQUI ont résolu un modèle quasi-bidimensionnel pour un écoulement turbulent dans les coups de bélier. Ils ont considéré que la résistance est la contrainte de cisaillement turbulente au lieu de coefficient de frottement.
- ZHAO et GHIDAQUI ont élaboré, appliqué et analysé les problèmes de coups de bélier du premier et de second ordre avec la méthode des volumes finis explicite (FV) de type GODUNOV. Ils ont comparé deux schémas « FV » avec « MOC ». On n'a constaté que le premier ordre « FV » GADUNOV système produit des résultats identiques avec « MOC ».

L'étude des travaux antérieurs indique qu'il existe divers modèles numériques, qui comprennent, la méthode des caractéristiques « MOC », des différences

finies « FD » et de volumes finis « FV », présentés par différents chercheurs pour obtenir les valeurs de pression et de débit. Parmi ces méthodes « MOC » s'est avérée être la plus populaire, que sur 14 logiciel du coup de bélier disponible dans le marché, 11 sont basés sur « MOC » et 3 sont basées sur « FD ».

Là encore « MOC » est la plus largement acceptée est simple à programmer, précise et efficace. ZHAO et GHIDAOUI préconisent que, bien que différentes approches telles que « FV », « MOC », « FD » et éléments finis « FE » fournissent un cadre tout à fait différent de conceptualiser et de représenter la physique de l'écoulement, les régimes qui résultent de différentes approches peuvent être similaires, voire identiques.

2. Discrétisation spatiale et temporelle :

Les méthodes numériques transforment le problème continu en un problème discret : l'intervalle d'étude en temps $[0; t_{\max}]$ est découpé en intervalles plus réduits en considérant $0 = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_{N-1} < t_N = t_{\max}$. Lorsque la discrétisation temporelle est régulière on a :

$$\forall i, \Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \Delta t = \text{constante}$$

De même, en espace, un ensemble de points est introduit (voir **Fig. IV. 1.**) :

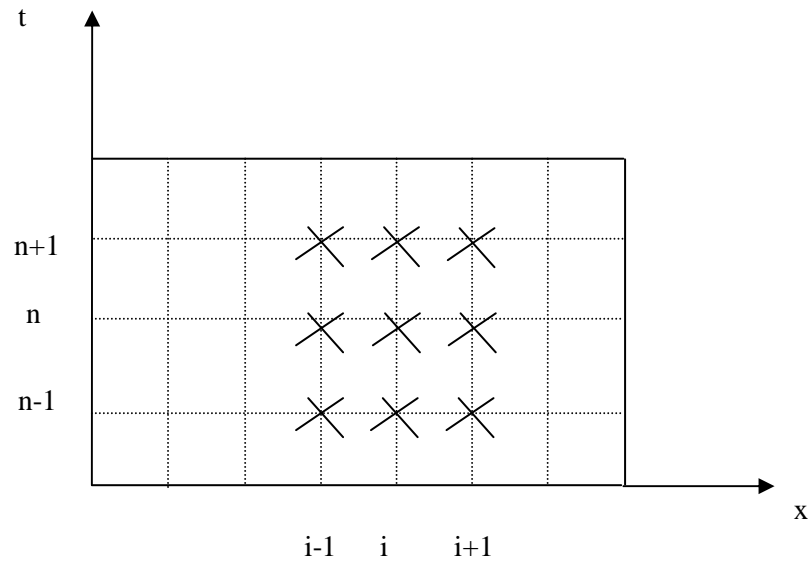


Fig. IV. 1. Discrétisation spatiale et temporelle

Une fonction inconnue $f(x, t)$ sera représentée par l'ensemble de ses valeurs aux différents points et aux différents instants de la discrétisation ($f(x_{i,j}, t_n)$). L'objet des méthodes numériques est de déterminer ces valeurs.

Notons que les méthodes numériques passent toujours par des discrétisations des problèmes analytiques en des problèmes numériques et qu'il existe plusieurs méthodes de discrétisation d'une équation, mais les plus couramment utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles sont:

1. La méthode des différences finies.
2. la méthode des caractéristiques.
3. La méthode des éléments finis.
4. la méthode des volumes finis.

3. **La méthode des différences finies** : La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage. L'avantage de cette méthode est qu'il y a une grande simplicité d'écriture et un faible cout de calcul. Elle est couramment pratique et facile d'accès. Elle repose sur deux notions: la discrétisation des opérateurs de dérivation ou différentiation et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu. Son inconvénient est qu'on se limite à des géométries simples, et qu'il y a des difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées partielles aux points du maillage par des développements de séries de Taylor comme suit :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + h \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^{(n)} f(x_i)}{\partial x^n} + \theta(h^{n+1})$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - h \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \dots + (-1)^n \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^{(n)} f(x_i)}{\partial x^n} + \theta(h^{n+1})$$

Les termes de troncature $\theta(h^{n+1})$ ayant la signification suivante :

$$a = b + \theta(h^{n+1}) \Leftrightarrow \exists k \text{ indépendant de } h \ / \ |a - b| \leq k h^{n+1}$$

Par combinaisons linéaires des développements de Taylor, on exprime les dérivées partielles en fonction des valeurs aux points de discrétisation.

Ainsi, en négligeant les erreurs de troncature,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \begin{cases} \frac{1}{h} (f_{i+1} - f_i) \\ \frac{1}{h} (f_i - f_{i-1}) \\ \frac{1}{2h} (f_{i+1} - f_{i-1}) \end{cases}$$

On peut noter qu'a priori, on a le choix entre trois formes d'approximation de la dérivée première.

Lorsque chaque monôme de l'EDP à résoudre est remplacé par une des approximations obtenues, en figeant les données matérielles, on obtient des combinaisons linéaires entre les valeurs des inconnues aux points de discrétisation, soit sous forme matricielle :

$$A F = B$$

Les dérivées partielles des fonctions « f » sont remplacées par des différences finies et les valeurs par leurs moyennes entre deux instants.

3.1. **Problème transitoire et schémas explicite/implicite :**

Dans le cas de problèmes transitoires (évolutions des quantités cherchées en fonction du temps et de l'espace) deux types de schéma sont possibles:

Des schémas dits explicites.

Des schémas dits implicites.

- Un schéma est dit explicite si la solution discrète « x » au temps t^{n+1} , notée x^{n+1} , ne dépend pas de x^{n+1} . Quel que soit le point « k » de la discrétisation spatiale on connaît explicitement la valeur de la solution au point « k » au temps t^{n+1} .

$$x^{n+1}_k = f(x^n; x^{n-1}; \text{données}).$$

L'inconvénient des schémas explicites réside dans la limitation du pas de temps par des contraintes de stabilité numérique.

- Un schéma non-explicite est implicite et la solution « x » au temps t^{n+1} dépend de x^{n+1} . On doit donc résoudre un système matriciel avec une matrice non diagonale :

$$A x^{n+1} = f(x^n; x^{n-1}; \text{données})$$

Le rang de la matrice « A » étant en général élevé, il est proportionnel au nombre de points du maillage, l'évaluation de A^{-1}

est coûteuse en terme de « CPU » et de stockage. L'évaluation d'un pas de temps (calcul de x^{n+1} à partir de x^n) coûte donc beaucoup plus cher avec un schéma implicite, sans compter le surcout éventuel de la linéarisation si le problème est non linéaire. Par contre, le pas de temps « $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ » n'est pas limité en implicite par des contraintes de stabilité linéaire contrairement à l'explicite. Soient t_{\max} la durée du phénomène étudié et N le nombre de pas de temps nécessaire pour atteindre t_{\max} . N étant imposé par des contraintes de stabilité en explicite alors qu'il est librement fixé par l'utilisateur en implicite, on obtient (pour un utilisateur normalement constitué)

$$N_{\text{implicite}} < N_{\text{explicite}}$$

Comme d'autre part :

$$\text{CPU}_{\text{implicite}} > \text{CPU}_{\text{explicite}}$$

On voit que le choix entre explicite et implicite n'est pas à priori évident, tous ces critères dépendent bien entendu du problème à traiter et du nombre de mailles.

Si le choix de « t » implicite n'est pas contraint par des problèmes de stabilité, des contraintes de précision imposent d'être raisonnable:

$$\Delta t_{\text{implicite}} < 10^3 \Delta t_{\text{explicite}}$$

Cette contrainte disparaît dans le cas de recherche d'un état stationnaire en tant que limite asymptotique d'un état transitoire. Dans ce type d'applications, l'implicite est souvent plus efficace.

3.1.1. **Schéma décentré amont explicite:** dans le schéma décentré amont explicite les dérivées : $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial t}$ sont approximées comme suit :

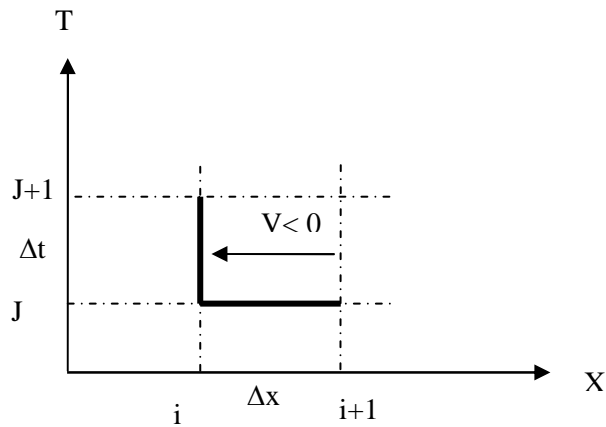


Fig. IV.2. Schéma décentré amont explicite

(Points de calcul pour une vitesse négative)

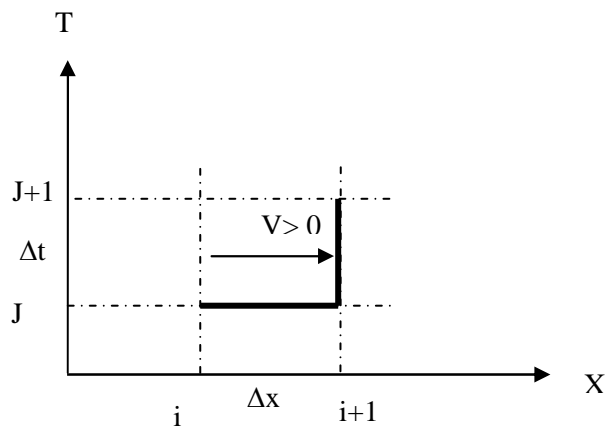


Fig. IV.3. Schéma décentré amont explicite

(Points de calcul pour une vitesse positive)

Les dérivées de la fonction « U » sont estimées comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x_{i-1/2}} & \text{pour: } v \geq 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} & \text{pour: } v \leq 0 \end{cases}$$

Où « $\Delta x_{i-1/2}$ » et « $\Delta x_{i+1/2}$ » représentent respectivement les distances « $x_i - x_{i-1}$ ».

À noter que la dépendance de l'approximation de « $\partial U / \partial x$ » par rapport au signe de « U » peut être justifiée de la façon suivante : l'information de l'état de « U » vient de l'amont. Il peut donc paraître normal d'utiliser les points à l'amont de « i » pour l'approximation de la dérivée d'espace.

3.1.2. **Schéma implicite de PREISSMANN** : le schéma de PREISSMANN est utilisé dans des plusieurs logiciels de simulation, il est implicite. Les dérivées en temps et en espace sont approchées en utilisant les quatre points (i, n), (i+1, n), (i, n+1), (i+1, n+1).

Il est conçu de manière à respecter le caractère conservatif des équations.

Les dérivées en temps et en espace sont rapprochées comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = (1 - \psi) \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \psi \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i+1}^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial U}{\partial x} = (1 - \theta) \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \theta \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} \end{cases}$$

Où « ψ » et « θ » sont deux paramètres, déterminés par l'utilisateur, qui permettent de « décentrer » le schéma en espace et en temps respectivement. Ils peuvent influencer considérablement sur la stabilité et le degré de précision de la solution numérique. En général, il est conseillé de prendre « $\psi = 1/2$ » et « $\theta \geq 1/2$ », pour des valeurs inférieure de « θ » le schéma peut devenir instable.

Dans la formulation ci-dessus, on peut considérer que la dérivée par rapport au temps est estimée comme la moyenne pondérée des deux dérivés par rapport au temps estimées aux points « i » et « i+1 » ; par une démarche similaire, la dérivées estimées aux pas de temps « n » et « n+1 ».

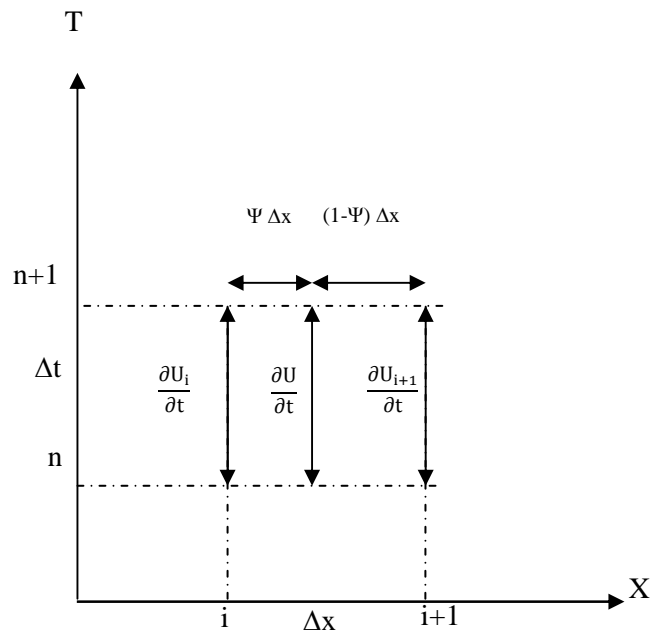


Fig. IV.4. Schéma implicite de PREISSMAN (Variation temporelle)

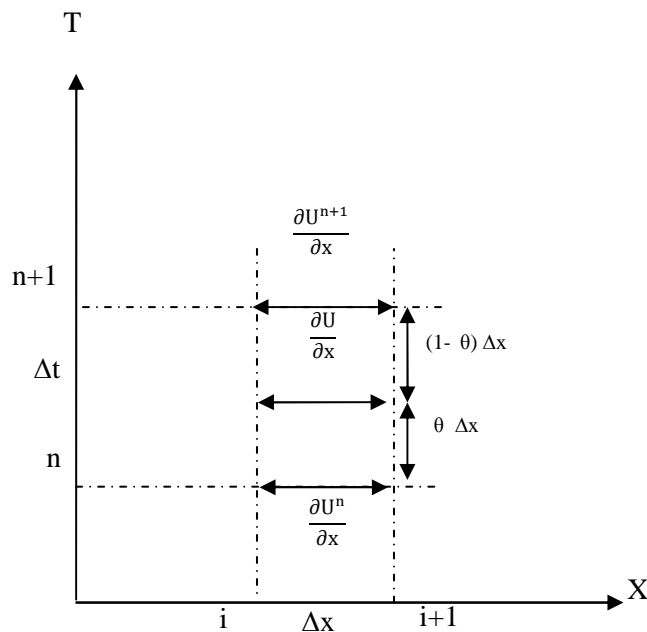


Fig. IV.5. Schéma implicite de PREISSMAN (Variation spatiale)

Le principe du schéma de PREISSMANN est que la dérivée par rapport au temps est une pondération des dérivées estimées aux points « i » et « $i+1$ » ; la dérivée par rapport à l'espace est une pondération des dérivées estimées aux pas de temps « n » et « $n+1$ ».

4. **La méthode des caractéristiques** : du point de vue mathématique la méthode des caractéristiques est une technique permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. Particulièrement adaptée aux problèmes de transport, elle est utilisée dans de nombreux domaines tels que la mécanique des fluides ou le transport de particules.

Pour une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre, la méthode des caractéristiques cherche des courbes appelées « lignes caractéristiques », ou plus simplement « caractéristiques » le long desquelles l'EDP se réduit à une simple équation différentielle ordinaire (EDO). La résolution de l'EDO le long d'une caractéristique permet de retrouver la solution du problème original.

Il existe une classe d'équations aux dérivées partielles dont on peut obtenir les solutions en utilisant une méthode du type géométrique, la méthode des caractéristiques.

C'est une des plus grandes méthodes énumérées en introduction utilisées pour la résolution des équations différentielles partielles. Dans certains cas particuliers, cette méthode peut permettre la résolution purement analytique de l'EDP. Dans des cas plus complexes comme en modélisation des systèmes physiques, la méthode des caractéristiques peut être utilisée comme une méthode de résolution numérique du problème.

La méthode des caractéristique est simple à appliquer, et demande peu de calculs et le résultat obtenu est remarquablement précis, contrairement à ceux des méthodes classiques des différences finies.

4.1. **Principe** : En mathématique, la méthode des caractéristiques est une technique pour résoudre les équations aux dérivées partielles, plus généralement elle est valable pour toutes les équations aux dérivées partielles hyperboliques.

La méthode consiste à réduire une équation aux dérivées partielles à une famille d'équations différentielles ordinaires, le long de laquelle la solution peut être intégrée à partir des données initiales.

Elle cherche des courbes appelées les courbes caractéristiques ou tout simplement les caractéristiques le long desquelles l'équation aux dérivées partielles se réduit en une équation simple à résoudre.

La résolution de cette simple équation sur les caractéristiques se fait par intégration ou par différences finies afin de nous permettre de retrouver la solution globale du problème originale sur tout le maillage.

5. Consistance, Stabilité et Convergence:

5.1. **Consistance** : La consistance est une propriété de la discrétisation qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tend vers la solution exacte des équations continues lorsque les pas de discrétisation « Δt » et « Δx » tendent vers zéro. On dit que l'EDP discrétisée est consistante par rapport à l'EDP réelle si elle tend vers elle lorsque « Δt » tend vers 0. La différence entre l'équation discrétisée et l'équation réelle est appelée l'erreur de troncature.

La consistance d'une discrétisation s'analyse en effectuant un développement en série de Taylor de l'équation discrétisée et en vérifiant que celle-ci tend vers l'EDP originale lorsque « Δt » ou « Δx » tendent vers 0.

5.2. **Stabilité** : La stabilité est la propriété de la solution (analytique et/ou numérique) qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées soit bornée. C'est une traduction du principe du maximum. Pour les problèmes de diffusion-convection, en absence de terme source, la solution est bornée par le minimum et le maximum de la condition initiale. Le schéma numérique, pour vérifier ce principe, ne doit donc pas amplifier les erreurs.

Le principe de la stabilité d'un schéma numérique consiste dans l'analyse du rapport « U_i^{n+1}/U_i^n » et sous quelle condition il est inférieur à « 1 » (auquel cas le schéma est stable) ou supérieur (auquel cas le schéma est instable).

La stabilité des schémas numériques explicites pour les EDP hyperbolique est fortement conditionnée par la valeur du nombre de Courant « Cr »/ nombre adimensionnel : $Cr = a (\Delta t/\Delta x)$. Pour que le

schéma numérique soit stable le nombre doit être compris entre $:-1$ et $(+1)$.

(Cr : du nom du mathématicien Robert Courant)

- 5.3. **Convergence** : La convergence c'est la propriété qui assure que la solution numérique tend vers la (ou une) solution exacte des équations continues ; C'est évidemment la propriété la plus recherchée. Lorsque le pas du maillage en espace noté « h » ou « Δx » et lorsque le pas de temps « Δt », tendent simultanément vers 0, de la solution approchée f_h vers la solution exacte f d'une EDP est délicate à démontrer. C'est pourquoi on utilise le plus souvent le théorème de LAX : pour un problème linéaire bien posé, il y a équivalence entre convergence et (stabilité + consistance).

La convergence est une propriété de la solution numérique. On dit que la solution numérique converge vers la solution analytique si elle tend vers elle en tout point du temps et de l'espace, lorsque « Δt » et « Δx » tendent vers « 0 ».

- 5.4. **Condition de stabilité CFL** : Pour des problèmes d'évolution temporelle, certains schémas sont stables à condition que le pas de temps soit inférieur à une certaine valeur critique fonction du pas d'espace. Cette inégalité constitue la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (1928) ou condition CFL. Elle est nécessaire et suffisante pour assurer la stabilité du schéma numérique adopté.

La condition CFL varie d'une équation à une autre.

- 5.5. **Théorème de LAX** : la consistance et la stabilité sont en général relativement facile à démontrer. La convergence demande souvent des démonstrations longues et ardues. Le théorème de LAX permet

d'obvier à cette difficulté : il exprime, en effet, une équivalence entre consistance, stabilité et convergence pour la résolution des EDP linéaires, il a été étendu aux EDP non linéaires. Il s'énonce comme suit :

La consistance et la stabilité sont nécessaires et suffisantes à la convergence.

Autrement dit, si l'on a discrétisé une EDP d'une façon consistante et si la solution de cette EDP est stable, alors elle est également convergente.

5.6. **Théorème de Lax-Wendroff :**

Si un schéma numérique consistant converge lorsqu'on raffine les pas de temps et d'espace, c'est-à-dire lorsque « Δt » et « Δx » tendent vers 0, alors il converge vers une solution faible des équations.

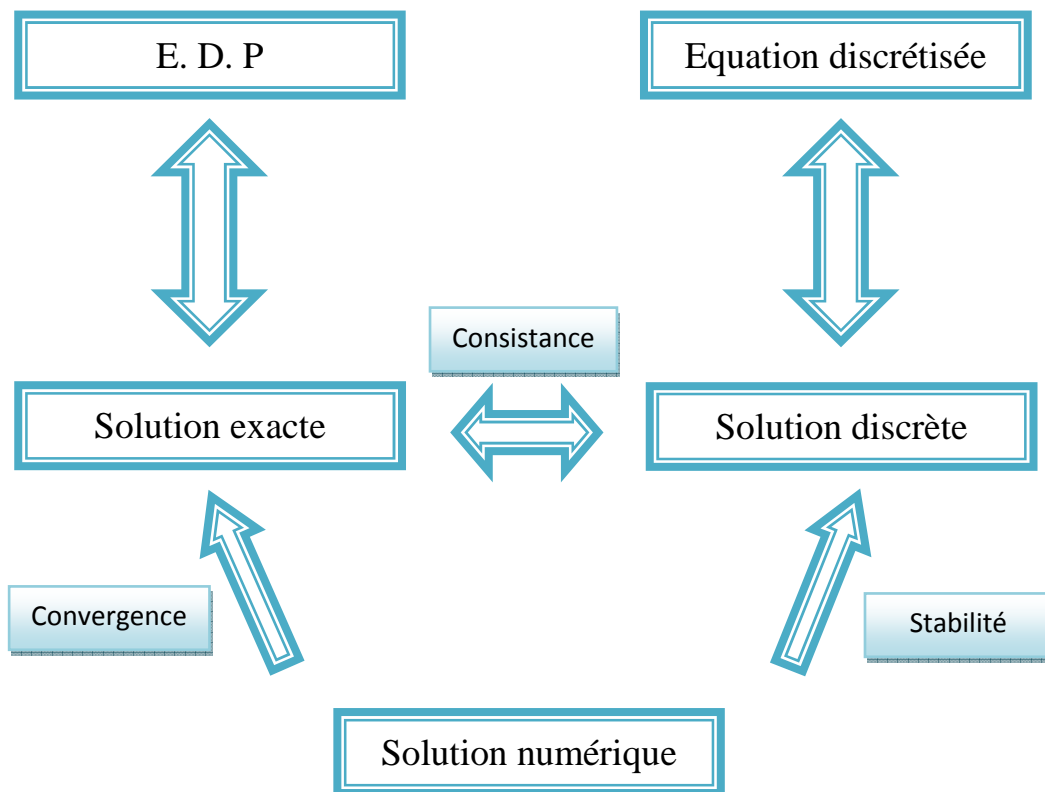


Fig. IV. 6. Solutions exacte, numérique et discrète

Ces propriétés sont liées les unes aux autres par les théorèmes précédents.

6. Discrétisation des équations de l'écoulement transitoire par la méthode des différences finies:

6.1. Suivant le schéma décentré amont explicite :

Reprenons le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\lambda u^2}{2D} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha \frac{dT}{dt} = 0 \end{cases}$$

Remplaçons la vitesse « u » par le débit « Q », nous aurons :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial Q}{A \partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda Q^2}{2D A} = 0 \\ \frac{\partial Q}{A \partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \alpha \frac{dT}{dt} = 0 \end{cases}$$

Pour la charge « H » :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H_i^n - H_{i-1}^n}{\Delta x_{i-1/2}} & \text{pour: } v \geq 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H_{i+1}^n - H_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} & \text{pour: } v \leq 0 \end{cases}$$

Pour le débit « Q » :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x_{i-1/2}} & \text{pour: } v \geq 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} & \text{pour: } v \leq 0 \end{cases}$$

Pour la température « T » :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

Pour le débit « Q^2 », nous pouvons faire l'approximation comme suit :

$$Q^2 = (Q_{i+1}^n \cdot |Q_{i+1}^n| + Q_i^n \cdot |Q_i^n|)/2 ;$$

Introduisons les valeurs de « H » et « Q » dans le système précédent:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{A} \left(\frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} \right) + g \left(\frac{H_i^n - H_{i-1}^n}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right) + \frac{\lambda}{2D A^2} (Q_{i+1}^n \cdot |Q_{i+1}^n| + Q_i^n \cdot |Q_i^n|)/2 = 0 \\ \frac{1}{A} \left(\frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right) + \frac{g}{a^2} \left(\frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} \right) + \alpha \left(\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \right) = 0 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{A \Delta t g}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} (H_{i+1}^n - H_i^n) + \left(\frac{\lambda \Delta t}{2D A} \right) (Q_{i+1}^n \cdot |Q_{i+1}^n| + Q_i^n \cdot |Q_i^n|)/2 \\ H_i^{n+1} = H_i^n - \frac{a^2 \Delta t}{A g \Delta x_{i-\frac{1}{2}}} (Q_{i+1}^n - Q_i^n) - \alpha \left(\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \right) \end{cases}$$

Pour résoudre complètement le système, il faut fixer des conditions aux limites amont et aval, c'est-à-dire « Q_0^n » et « H_0^n » à l'amont et « Q_L^n » et « H_L^n » à l'aval $\forall n$, et les conditions initiales U_i^0 et $h_i^0 \forall i$. De plus, le schéma doit vérifier la condition de Courant-Friedrich-Levy exprimée sous la forme :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|U \mp a|}$$

Avec :
$$a = \frac{\sqrt{\frac{1}{\rho}}}{\sqrt{\frac{1}{\beta} + \frac{D}{eE}}}$$

6.2. **Suivant le schéma implicite de PREISSMAN:** Le schéma de PREISSMAN utilise les quatre points (i, n), (i+1, n), (i, n+1), (i+1, n+1).

Reprenons le système d'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{A \partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda Q^2}{2D A^2} = 0 \\ \frac{\partial Q}{A \partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \alpha \frac{dT}{dt} = 0 \end{cases}$$

Pour la charge « H » :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = (1 - \psi) \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} + \psi \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i+1}^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial H}{\partial x} = (1 - \theta) \frac{H_{i+1}^n - H_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \theta \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} \end{cases}$$

Pour le débit « Q » :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} = (1 - \psi) \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} + \psi \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = (1 - \theta) \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \theta \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} \end{cases}$$

Substituons ces valeurs dans le système d'équation comme suit:

$$\begin{cases} \frac{1}{A} \left((1 - \psi) \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} + \psi \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n}{\Delta t} \right) + g \left((1 - \theta) \frac{H_{i+1}^n - H_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \theta \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} \right) + \frac{\lambda}{4D A^2} (Q_i^n |Q_i^n| + Q_{i+1}^n |Q_{i+1}^n|) = 0 \\ \frac{1}{A} \left((1 - \theta) \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \theta \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} \right) + \frac{g}{a^2} \left((1 - \psi) \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} + \psi \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i+1}^n}{\Delta t} \right) + \alpha \left(\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left((1 - \psi) \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} + \psi \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n}{\Delta t} \right) + gA \left((1 - \theta) \frac{H_{i+1}^n - H_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \theta \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} \right) + \frac{\lambda}{4D A} (Q_i^n |Q_i^n| + Q_{i+1}^n |Q_{i+1}^n|) = 0 \\ \left((1 - \theta) \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \theta \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} \right) + \frac{gA}{a^2} \left((1 - \psi) \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} + \psi \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i+1}^n}{\Delta t} \right) + \alpha A \left(\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \right) = 0 \end{cases}$$

Après certain arrangement et afin que le système soit stable, on fixe les valeurs de « $\psi = 1/2$ » et « $\theta = 1/2$ », alors le système devient :

$$\begin{cases} (H_{i+1}^{n+1} - H_i^{n+1} + H_{i+1}^n - H_i^n) + \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{g A \Delta t} (Q_{i+1}^{n+1} + Q_i^{n+1}) - \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{g A \Delta t} (Q_i^n - Q_{i+1}^n) + \frac{\lambda \Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{2gD A^2} (Q_i^n |Q_i^n| + Q_{i+1}^n |Q_{i+1}^n|) = 0 \\ \frac{2 \Delta t a^2}{g A \Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (Q_{i+1}^n - Q_i^n + Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) + (H_{i+1}^{n+1} - H_i^n + H_{i+1}^{n+1} - H_{i+1}^n) + \frac{2 a^2}{g} \alpha (T_i^{n+1} - T_i^n) = 0 \end{cases}$$

Le système d'équations peut être simplifié :

$$\alpha_i = \left(\frac{2 \Delta t a^2}{g A_i \Delta x_i} \right)$$

$$\beta_i = (H_{i+1}^n - H_i^n) + \alpha_i (Q_i^n - Q_{i+1}^n)$$

$$\gamma_i = \left(\frac{\Delta x_i}{2g \theta A_i \Delta t} \right)$$

$$\delta_i = (H_i^n - H_{i+1}^n) + \left(\frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}} \lambda_i}{2g A^2 \Delta t} \right) (Q_i^n |Q_i^n| + Q_{i+1}^n |Q_{i+1}^n|)$$

Tous les paramètres des coefficients devraient être connus comme les propriétés ou les valeurs de la hauteur piézométrique et du débit dans le pas de temps précédent.

$$\begin{cases} (H_{i+1}^{n+1} - H_i^{n+1} + H_{i+1}^n - H_i^n) + \gamma_i (Q_{i+1}^{n+1} + Q_i^{n+1}) - \gamma_i (Q_i^n - Q_{i+1}^n) + \frac{\lambda \Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{2gD A^2} (Q_i^n |Q_i^n| + Q_{i+1}^n |Q_{i+1}^n|) = 0 \\ \alpha_i (Q_{i+1}^n - Q_i^n + Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) + (H_{i+1}^{n+1} - H_i^n + H_{i+1}^{n+1} - H_{i+1}^n) + \frac{2 a^2}{g} \alpha (T_i^{n+1} - T_i^n) = 0 \end{cases}$$

Alors le système d'équation est simplifié en apparence, comme suit :

$$\begin{cases} H_{i+1}^n + H_{i+1}^{n+1} + \alpha_i (Q_{i+1}^{n+1} + Q_i^{n+1}) + \frac{2 a^2}{g} \alpha (T_i^{n+1} - T_i^n) = \beta_i \\ -H_{i+1}^n + H_{i+1}^{n+1} + \gamma_i (Q_i^{n+1} + Q_{i+1}^{n+1}) = \delta_i \end{cases}$$

Une paire d'équation de cette forme s'applique à chaque segment d'une conduite dans le cas d'un régime d'écoulement transitoire.

On constate que les inconnues à l'itération $(n+1)$ sont reliées entre elles par une relation implicite (d'où le nom de la méthode).

Les variables à évaluer sont au temps (t^n) , on peut donc écrire ces deux équations pour chaque position « i » sur l'axe « x ».

7. Discrétisation des équations de l'écoulement transitoire par la méthode des caractéristiques :

Reprenons le système d'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{A \partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda Q |Q|}{2D A} = 0 \\ \frac{\partial Q}{A \partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \alpha \frac{dT}{dt} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.7.1})$$

Afin de transformer le système constitué de deux équations aux dérivées partielles en une équation aux dérivées ordinaires, nous allons procéder comme suite:

Le système peut être écrit comme suit :

$$k \left(\frac{\partial Q}{A \partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda Q^2}{2D A} \right) + \left(\frac{\partial Q}{A \partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \alpha \frac{dT}{dt} \right) = 0 \quad (\text{IV.7.2})$$

$$\frac{1}{A} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + k \frac{\partial Q}{\partial t} \right) + \left(k g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \left(\alpha \frac{dT}{dt} + k \frac{\lambda Q^2}{2D A} \right) = 0 \quad (\text{IV.7.3})$$

Les différences totales du débit et de la charge sont :

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial t} dt \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dQ}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{dt}{dx} \\ \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{dt}{dt} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dQ}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{dt}{dx} \\ \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial t} \end{cases}$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial H}{\partial t} \frac{dt}{dx} \\ \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \frac{dt}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} \frac{dt}{dx} \\ \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \end{cases}$$

Par comparaison, on a :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + k \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{dt}{dx} \frac{\partial Q}{\partial t} = k \frac{dQ}{dt}$$

$$k g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{g}{a^2} \frac{dx}{dt} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{g}{a^2} \frac{dH}{dt}$$

Alors :

$$\begin{cases} k = \frac{dt}{dx} \\ k = \frac{1}{a^2} \frac{dx}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} k = +\frac{1}{a} \\ \text{ou} \\ k = -\frac{1}{a} \end{cases} \quad (\text{IV.7.4})$$

Alors pour satisfaire l'équation, le facteur « K » doit prendre une des deux valeurs obtenues « + a/g » ou « - a/g ».

Où « g » est toujours positive mais la célérité « a » peut être positive ou négative suivant le sens de propagation.

Substituons les valeurs de « k » dans l'équation (IV.7.3) :

$$k \left(\frac{dQ}{A dt} \right) + \frac{g}{a^2} \left(\frac{dH}{dt} \right) + \left(k \frac{\lambda Q |Q|}{2D A} \right) + \alpha \left(\frac{dT}{dt} \right) = 0 \quad (\text{IV.7.5})$$

Pour $k = +\frac{1}{a}$:

$$\frac{1}{a} \left(\frac{dQ}{A dt} \right) + \frac{g}{a^2} \left(\frac{dH}{dt} \right) + \left(\frac{1}{a} \frac{\lambda Q |Q|}{2D A} \right) + \alpha \left(\frac{dT}{dt} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dQ}{A dt} \right) + \frac{g}{a} \left(\frac{dH}{dt} \right) + \left(\frac{\lambda Q |Q|}{2D A} \right) + (\alpha a) \left(\frac{dT}{dt} \right) = 0 \quad (\text{IV.7.6})$$

Laquelle est connue comme la caractéristique C^+ .

Pour $k = -\frac{1}{a}$:

$$-\frac{1}{a} \left(\frac{dQ}{A dt} \right) + \frac{g}{a^2} \left(\frac{dH}{dt} \right) - \left(\frac{1}{a} \frac{\lambda Q |Q|}{2D A} \right) + \alpha \left(\frac{dT}{dt} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dQ}{A dt} \right) - \frac{g}{a} \left(\frac{dH}{dt} \right) + \left(\frac{\lambda Q |Q|}{2D A} \right) - (\alpha a) \left(\frac{dT}{dt} \right) = 0 \quad (\text{IV.7.7})$$

Laquelle est connue comme la caractéristique C^- .

Alors, nous avons deux équations C^+ et C^- :

$$\begin{cases} \left(\frac{dQ}{A dt} \right) + \frac{g}{a} \left(\frac{dH}{dt} \right) + \left(\frac{\lambda Q |Q|}{2D A} \right) + (\alpha a) \left(\frac{dT}{dt} \right) = 0, & C^+ \\ \left(\frac{dQ}{A dt} \right) - \frac{g}{a} \left(\frac{dH}{dt} \right) + \left(\frac{\lambda Q |Q|}{2D A} \right) - (\alpha a) \left(\frac{dT}{dt} \right) = 0, & C^- \end{cases} \quad (IV.7.8)$$

Nous avons encore :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a, & C^+ \\ \frac{dx}{dt} = -a, & C^- \end{cases} \quad (IV.7.9)$$

Il est à noter que la première équation du système (IV. 7. 8) est valable si la première équation du système (IV. 7. 9) est satisfaite et même pour la deuxième équation. Les systèmes d'équations (IV. 7. 8), (IV. 7. 9) sont tout à fait identiques aux systèmes d'équations (IV. 7. 1). Le système d'équations (IV. 7. 8) est en dérivées ordinaires et ne contient plus la coordonnée longitudinale x .

Par la méthode des caractéristiques, on a donc transformé un système d'équations aux dérivées partielles en un système d'équations aux dérivées ordinaires où la variable est « t ». Cependant, les systèmes (IV. 7. 8) ne sont valables que sur les deux lignes correspondantes :

$$\frac{dx}{dt} = \mp a$$

Dénommées lignes caractéristiques, tandis que le système (IV. 7. 1) est valable entièrement dans le plan « x-t ».

Dans le cas le plus simple, la célérité d'onde «a» est constante et les lignes caractéristiques deviennent des droites. Elles partagent le plan « x-t », sur lequel les solutions $Q(x, t)$ et $H(x, t)$ sont recherchées.

Du point de vue physique, les lignes caractéristiques correspondent aux tracés le long desquels les perturbations sont propagées (Abbott, 1966).

Comme démontré dans la figure (Fig. IV. 7) une perturbation au point « L » aura traversé le trajet « $\Delta x = a \Delta t$ » au point « P » dans le temps « Δt ».

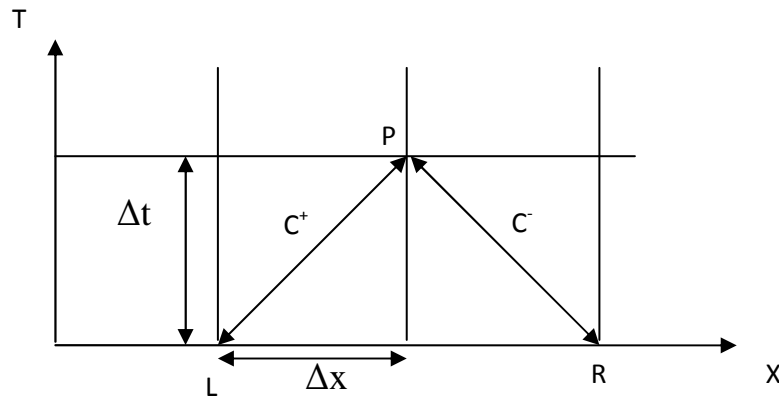


Fig. IV. 7. Lignes caractéristiques « PR » et « LP »

Cela signifie que si on veut connaître les valeurs de « Q » et « H » à moment donnée et à un point donné le long de la conduite on doit le calculer à la base des valeurs de « Q » et de « H » au temps zéro aux points « $x - \Delta x$ » et « $x + \Delta x$ ».

7.1. Intégration du système différentiel :

Intégration par différences finies : l'intégration du système (IV. 7. 8)

en utilisant un schéma de différences finies est comme suite :

On subdivise la conduite en « N » tronçons espacés d'un pas de « Δx », ce qui nous donne « N+1 » nœuds.

Suivant la caractéristique positive « C⁺ », nous avons :

$$\partial H = \frac{H_i^{n+1} - H_{i-1}^n}{\Delta t}, \quad \partial Q = \frac{Q_i^{n+1} - Q_{i-1}^n}{\Delta t}$$

Suivant la caractéristique positive « C⁻ », nous avons :

$$\partial H = \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_i^n}{\Delta t}, \quad \partial Q = \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t}$$

Substituons les valeurs de « H » et de « Q » dans le système (IV. 7. 8) :

$$\begin{cases} \frac{1}{A} \left(\frac{Q_P^{n+1} - Q_L^n}{\Delta t} \right) + \frac{g}{a} \left(\frac{H_P^{n+1} - H_L^n}{\Delta t} \right) + \left(\frac{\lambda Q_L^n |Q_L^n|}{2D A} \right) + (\alpha a) \left(\frac{T_P^{n+1} - T_L^{n+1}}{\Delta t} \right) = 0, & C^+ \\ \frac{1}{A} \left(\frac{Q_P^{n+1} - Q_R^n}{\Delta t} \right) - \frac{g}{a} \left(\frac{H_P^{n+1} - H_R^n}{\Delta t} \right) + \left(\frac{\lambda Q_R^n |Q_R^n|}{2D A} \right) - (\alpha a) \left(\frac{T_P^{n+1} - T_R^{n+1}}{\Delta t} \right) = 0, & C^- \end{cases} \quad (IV.7.10)$$

La substitution de « L » et « R » au lieu de « i-1 » et « i » traduit la position des points à gauche « Left : L » et points à droites « Right : R » par rapport au point « P » avec un pas de temps « Δt » au passé.

La relation entre le pas de temps « Δt » et le pas de l'espace « Δx » constitue le module de la ligne caractéristique.

En multipliant le système (IV. 8. 10) par « Δt », on aura :

$$\begin{cases} \frac{1}{A} (Q_P^{n+1} - Q_L^n) + \frac{g}{a} (H_P^{n+1} - H_L^n) + \left(\frac{\lambda \Delta t Q_L^n |Q_L^n|}{2D A} \right) + (\alpha a) (T_P^{n+1} - T_L^{n+1}) = 0, & C^+ \\ \frac{1}{A} (Q_P^{n+1} - Q_R^n) - \frac{g}{a} (H_P^{n+1} - H_R^n) + \left(\frac{\lambda \Delta t Q_R^n |Q_R^n|}{2D A} \right) - (\alpha a) (T_P^{n+1} - T_R^{n+1}) = 0, & C^- \end{cases} \quad (IV.7.11)$$

Afin de simplifier le système on peut mettre :

$$C = \frac{g}{a}$$

Et :

$$K = \frac{\lambda \Delta t}{2D}$$

Alors les solutions du système (IV. 7. 11), « Q_p » et « H_p » seront:

$$\begin{cases} Q_P - Q_L + AC(H_P - H_L) + K(Q_L|Q_L|) + (\alpha a A) (T_P^{n+1} - T_L^{n+1}) = 0, & C^+ \\ Q_P - Q_R - AC(H_P - H_R) + K(Q_R|Q_R|) - (\alpha a A) (T_P^{n+1} - T_R^{n+1}) = 0, & C^- \end{cases} \quad (\text{IV. 7.12})$$

Soustrairons les deux équations du système (IV. 7. 12) « Q_p » sera éliminé, alors :

$$H_P = \frac{1}{2AC} [(Q_L - Q_R) + AC(H_L - H_R) - K(Q_L|Q_L| - Q_R|Q_R|) + (\alpha a A)(2T_P^{n+1} - T_L^{n+1} + T_R^{n+1})]$$

Où :

$-T_L^{n+1} + T_R^{n+1} = 0$, La variation spatiale de la température est négligée.

Généralement, (Q_p, H_p) sont représentés au ième point le long de la conduite par (Q_{pi}, H_{pi}) et calculé à base de $(Q_{i-1}, H_{i-1}), (Q_{i+1}, H_{i+1})$, comme suit :

$$\begin{aligned} Q_{Pi} &= 0.5 \left[\frac{1}{A} (Q_{i-1} + Q_{i+1}) + \frac{g}{a} (H_{i-1} - H_{i+1}) - \frac{\lambda \Delta t}{2DA} (Q_{i-1}|Q_{i-1}| + Q_{i+1}|Q_{i+1}|) \right] \\ H_{Pi} &= 0.5 \left[\frac{a}{gA} (Q_{i-1} - Q_{i+1}) + (H_{i-1} + H_{i+1}) - \frac{\lambda \Delta t}{2DA} \frac{a}{g} (Q_{i-1}|Q_{i-1}| - Q_{i+1}|Q_{i+1}|) + \left(\alpha \frac{a^2}{g} \right) (2T_P^{n+1}) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV. 7.13})$$

Ainsi, la résolution des inconnues « Q_{pi} » et « H_{pi} » par le système (IV.7.13) peut s'étendre à l'intérieur du domaine « $0 < x < L$ » et « $t > 0$ » pour un incrément temporel « Δt ». Par la suite, la résolution se poursuit par incrémentation du temps « $t = t_0 + i \Delta t$ » avec « $i=2,3,\dots, n$ ».

Aux limites « $x=0$ » et « $x=L$ », les conditions aux limites doivent être imposées à chaque point de l'extrémité.

La condition initiale ($t = 0$) ressort d'un calcul en écoulement stationnaire.

La figure (Fig. IV. 83) montre un réseau de nœuds types où la distinction a été faite entre des conditions limites amont et aval, la condition initiale et des points de calcul. Les pas de temps « Δt » et de distance « Δx » ont été choisis équidistants dans ce cas particulier.

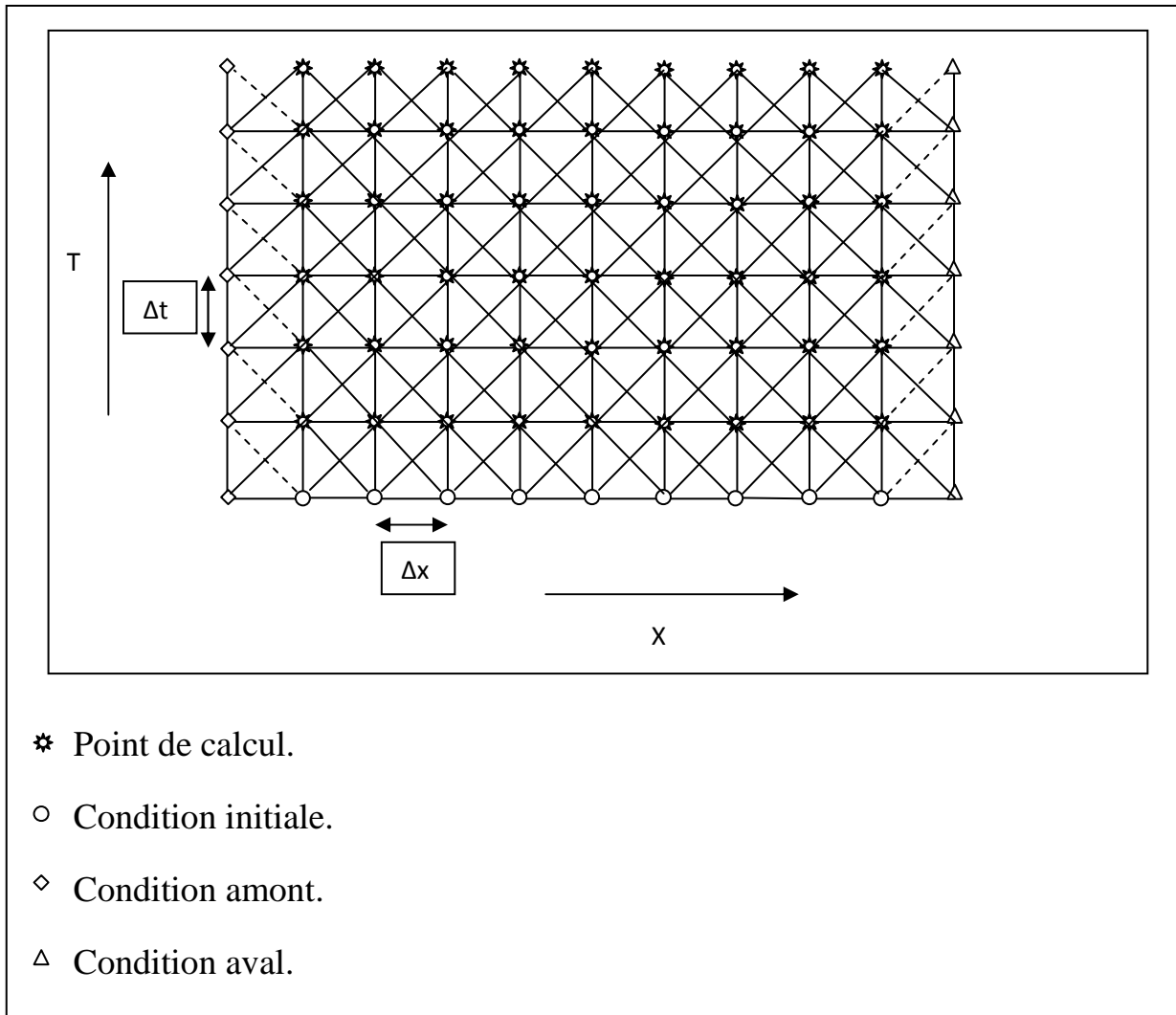


Fig. IV. 8. Réseau des caractéristiques.

7.2. Conditions aux limites :

Les conditions aux limites servent à fixer la relation de pression ou de débit dans les points des extrémités amont et aval, ces conditions se différent suivant la nature des équipements installés aux extrémités du système, qu'elles soient :

Un réservoir à surface libre ou bien une pompe à l'extrémité amont. Une vanne avec une loi de fermeture donnée « brusque, instantanée ou lente »

Une jonction ou une bifurcation de deux ou plusieurs conduites de différents diamètres.

Par la suite, l'extrémité amont est caractérisée par l'index « 1 » et l'extrémité aval par l'index « n+1 ». Amont et aval se réfèrent à l'écoulement stationnaire bien qu'un changement de direction d'écoulement peut apparaître pendant la phase non stationnaire. La conduite de longueur « L » est divisée en « n » tranches équidistantes.

Dans notre cas le système est composé d'un réservoir en amont équipé d'une conduite horizontal à caractéristiques unique et munie d'une vanne à son extrémité aval.

7.2.1. Conditions initiales : Ces conditions présentent les propriétés de l'écoulement « H » et « Q » à l'état initial avant la manœuvre de la vanne à l'instant initial ($t = 0$) ou bien l'état en régime stationnaire. Ils peuvent être donnés sous forme :

$$H = H(x, 0) = H(x) \text{ et } Q = Q(x, 0) = Q(x).$$

7.2.2. Conditions limite amont « Réservoir » : nous considérons que le niveau du plan d'eau dans le réservoir reste constant, ainsi la charge au niveau de l'extrémité amont reste constante :

$$H(0, t) = H_0$$

Pour obtenir la condition du débit, on utilise la relation de C⁻ dans (IV. 7. 12), on a :

$$Q_P - Q_R - AC(H_P - H_R) + K(Q_R|Q_R|) - (\alpha a A)(T_P^{n+1} - T_R^{n+1}) = 0$$

Nous avons :

$$H_P = H_0, Q_R = Q_0$$

Alors :

$$Q_P = Q_0 + AC(H_0 - H_1) - K(Q_0|Q_0|) + (\alpha a A)(T_P^{n+1} - T_R^{n+1}) = 0$$

7.2.3. Conditions limite aval « Vanne » : Une condition à la limite droite doit être donnée pour pouvoir calculer les valeurs des deux inconnues, La condition aux limites la plus simple est celle où l'une des variables est donnée en fonction du temps, exemple:

$$Q = f(L, t) = f(t).$$

Supposons que la fermeture de la vanne obéie à une loi linéaire de sorte que le débit d'écoulement diminue de manière linéaire sur l'intervalle de fermeture à partir d'une valeur d'état stable initial à zéro.

Alors la condition limite imposée est:

$$Q_P = Q_0 \left(1 - \frac{t}{T_c}\right) = Q_0 \left(1 - \frac{n \Delta t}{t_c}\right)$$

Où :

T_c : temps de fermeture complète de la vanne.

Pour obtenir la condition de la charge, on utilise la relation de C^+ dans (IV. 7. 12), on a :

$$Q_P - Q_L + AC(H_P - H_L) + K(Q_L|Q_L|) + (\alpha a A) (T_P^{n+1} - T_L^{n+1}) = 0$$

$$(H_P - H_L) = \frac{1}{AC} [(Q_L - Q_P) - K(Q_L|Q_L|) - (\alpha a A) (T_P^{n+1} - T_L^{n+1})]$$

Ce qui nous donne :

$$H_P = H_L + \frac{1}{AC} [(Q_L - Q_P) - K(Q_L|Q_L|) - (\alpha a A) (T_P^{n+1} - T_L^{n+1})]$$

Chapitre V

Chapitre V : Simulation numérique des écoulements transitoires en charge avec transfert de chaleur :

Introduction : la simulation numérique des écoulements transitoires consiste à mettre en œuvre les équations discrétisées obtenues dans le chapitre précédent, Les équations ainsi développées prennent en compte l'effet thermique sur le fluide.

Le calcul des pressions et des débits à chaque point et à chaque instant en utilisant les équations appropriées n'est possible que si on dispose d'un moyen de calcul puissant, pour cela il faut faire recours à l'outil informatique. Dans ce cadre, plusieurs logiciels ont été développés pour le calcul et la simulation du phénomène transitoire, dont la majorité se base sur la méthode des caractéristiques, et quelques logiciels utilisent la méthode des différences finies. Les logiciels reposant sur la méthode des caractéristiques fournissent des résultats dont la précision dépasse de très loin les besoins pratiques, comme le prouvent de nombreuses comparaisons avec des relevés de mesures. Les différences notables n'interviennent que lors du calcul de la macro cavitation et de l'atténuation des ondes de pression dans le tuyau.

La mise en œuvre, programmation et analyse des résultats : La partie mise en œuvre est une grosse consommatrice de temps. Actuellement, de nombreux codes commerciaux existent, qui permettent en théorie de résoudre " tous " les problèmes. Il faut cependant procéder à une analyse critique des résultats obtenus par ces codes, qui ne sont pas toujours compatibles avec les propriétés physiques attendues...

1. Le logiciel AFT IMPULSE : « Applied Flow Technology's » ce logiciel est une plate-forme à interface graphique pour la modélisation des écoulements transitoires dans les conduites en charge.

L'interface graphique avancée du logiciel, simplifie les modèles les plus complexes dans la construction des systèmes hydrauliques. Le moteur de calcul employé, pour résoudre les équations fondamentales du régime transitoire, est basé sur la méthode des caractéristiques.

Dans les calculs hydrauliques, AFT Impulse tient compte des propriétés thermo-physiques du fluide véhiculé, qu'elles soient variables ou constantes, pouvant ainsi être définis des fluides et des mélanges de tous types. AFT Impulse est un outil aidant à réaliser les calculs hydrauliques sans l'analyse de l'échange thermique, mais en considérant les propriétés du fluide en fonction de la température, à chaque tronçon du réseau de tuyauteries.

AFT Impulse peut être utilisé pour modéliser une grande variété de systèmes d'écoulement incompressibles, y compris:

- Les systèmes ouverts et fermés.
- Systèmes d'écoulement transitoires équipés de vanne.
- Systèmes d'écoulement transitoires équipé de pompe.
- Systèmes d'écoulement transitoires à pression ou à débit contrôlés par une vanne.
- Systèmes d'écoulement transitoire prennent en considération les phénomènes de cavitation et de séparation de la colonne de liquide.
- Systèmes avec dispositifs de protection contre les coups de bélier tels que les accumulateurs, les réservoirs anti-bélier et les soupapes de décharge.
- Systèmes de densité et viscosité variables.
- Un comportement de liquide non-newtonien.

Le solveur : Le moteur de solution stationnaire de l'AFT Impulse est basé sur des techniques standard utilisées depuis de nombreuses années dans l'industrie.

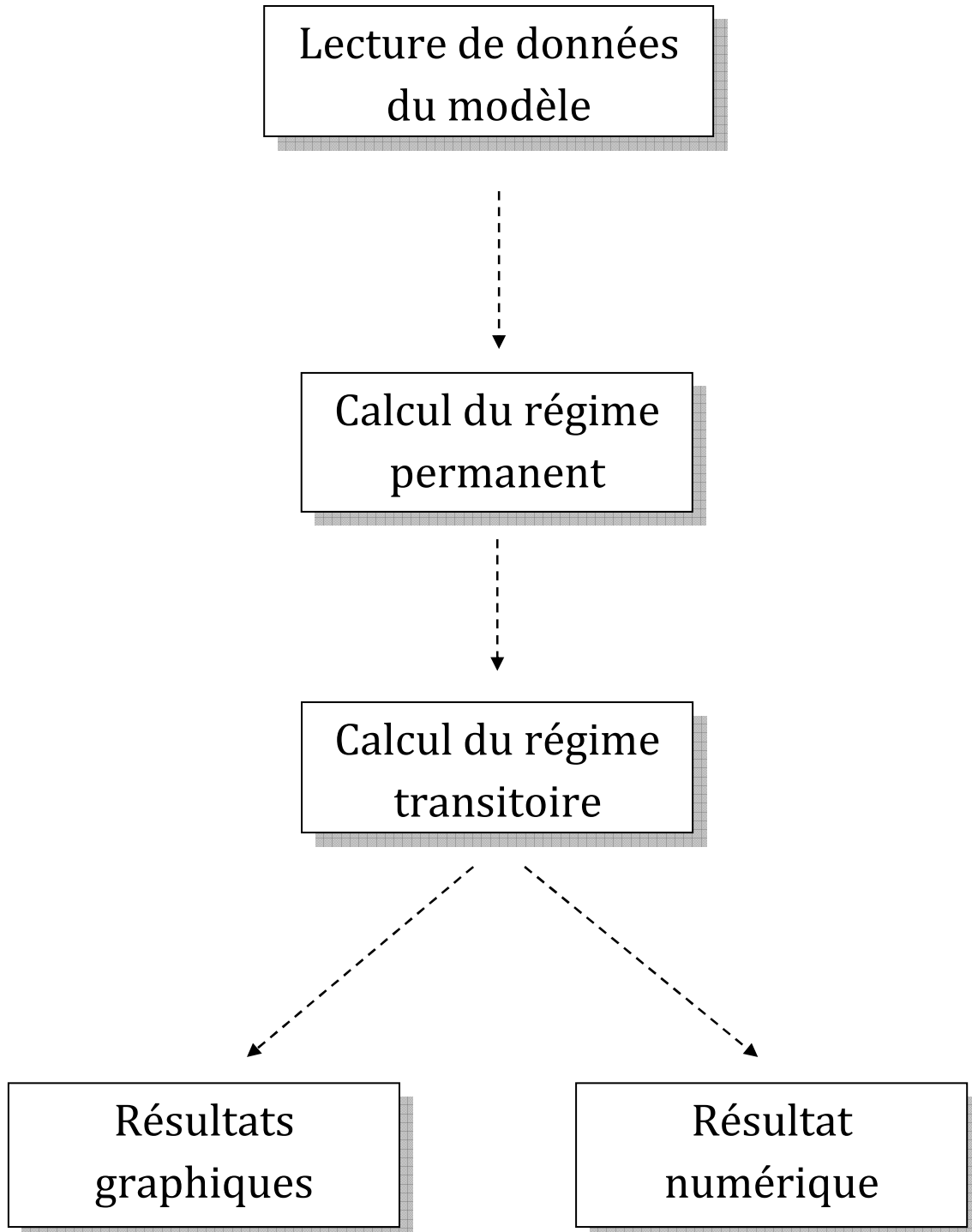
Avant le calcul des équations du régime transitoire, l'évaluation des grandeurs initiaux en régime stationnaire initial est indispensable.

Une fois les résultats des propriétés de l'écoulement permanent ou initial sont calculés, Impulse AFT passe à la résolution des équations du régime transitoire en utilisant la méthode des caractéristiques (MOC).

Hypothèses : AFT impulse est basé sur les hypothèses de la mécanique des fluides suivantes :

- Ecoulement uniquement en phase liquide.
- Ecoulement unidimensionnel.
- Aucune réaction chimique.
- La célérité des ondes reste constante pendant la durée de la simulation.
- Aucune libération de gaz dissous dans le liquide.
- Les bulles formées lors de phénomène de cavitation ne déplacent pas.

Organigramme du logiciel AFT Impulse :



2. Modèle de simulation : le modèle d'étude que nous allons simuler c'est un système hydraulique d'écoulement gravitaire illustré au chapitre III.

Le système est constitué d'un réservoir muni d'une conduite équipée à son extrémité avale par une vanne.

2.1. Hypothèse de base : afin de simplifier le système, nous allons nous baser sur les hypothèses suivantes :

- La surface du réservoir est supposée infiniment grande afin que nous puissions considérer que le niveau du plan d'eau reste constant.
- La conduite en acier, horizontale et possède des caractéristiques uniques de diamètre et d'épaisseur.
- La vanne se ferme brusquement ($T_f = 0$).
- L'échange thermique avec les parois de la conduite est nul.

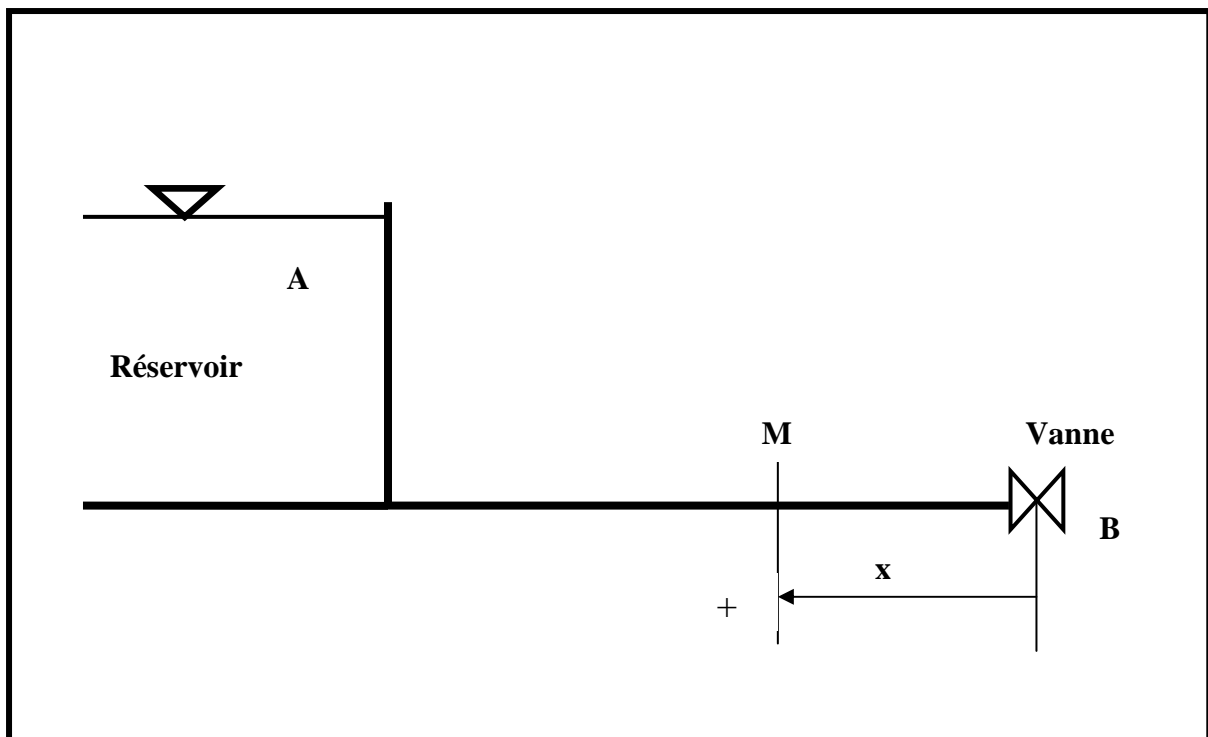


Fig. V. 1. Schéma de l'adduction gravitaire

2.2. Données de la simulation :

2.2.1. les caractéristiques du système :

- La hauteur d'eau dans le réservoir est égal à : $H_0 = 100 \text{ M}$.
- La conduite à une longueur de : $L = 1000 \text{ ML}$.
- Le diamètre de la conduite : $D = 0.250 \text{ M}$.
- La module d'élasticité du matériau de la conduite: $E_0 = 2,038 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$.
- La rugosité absolue du matériau de la conduite est de : $0,04 \text{ MM}$.
- L'épaisseur des parois de la conduite : $e = 0.015 \text{ M}$.

2.2.2. Les caractéristiques thermo-hydrauliques du fluide :

- La température initiale est :

$$T_0 = 0 \text{ (}^\circ\text{C)} = 273 \text{ (}^\circ\text{K)}$$

- La masse volumique de l'eau :

$$\rho_0 = 999,81 \text{ (Kg/M}^3\text{)}$$

- Le module de compressibilité du fluide « Eau » :

$$B_0 = 1,82 \cdot 10^9 \text{ (KG F/M}^2\text{)}$$

- Le module de dilatation thermique moyenne:

$$\alpha = 1,13 \cdot 10^{-4} \text{ (1/K}^\circ\text{)}$$

2.2.3. Options de simulation :

- La simulation dure 20 secondes.
- Le pas de temps « Δt » :

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{a}$$

- La précision des calculs est de : 0,00001.
- Les résultats de simulation sont donnés à chaque pas de temps.
- Les résultats de simulation sont donnés pour :
 - ❖ La charge « $H \text{ (M)}$ » au niveau de la vanne.
 - ❖ Le débit « $Q \text{ (M}^3\text{/S)}$ » au niveau du réservoir.

- ❖ La charge « H (M) » et le débit « Q (M³/S) » au niveau du point « M » situé milieu de la conduite.
- La simulation se déroule pour différentes température partant de T=0°C jusqu'à T=100°C, chaque les 10°C.

3. Résultats de la simulation :

Température : $T = 0^{\circ}\text{C}$

Charge « H » au niveau de la vanne :

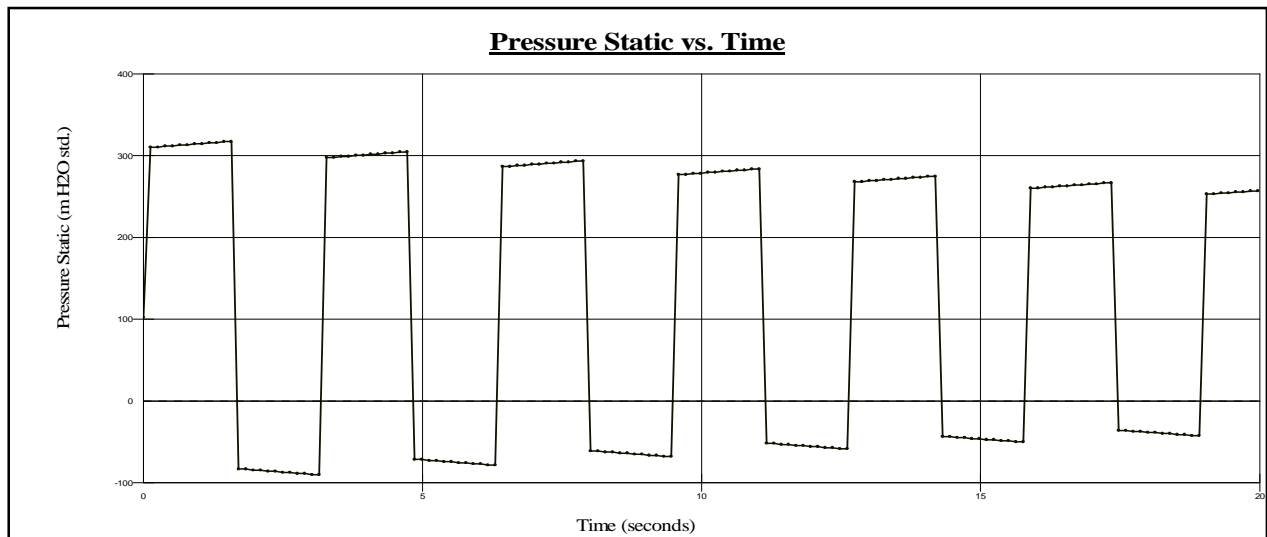


Fig. V. 2.

Débit « Q » au niveau du réservoir :

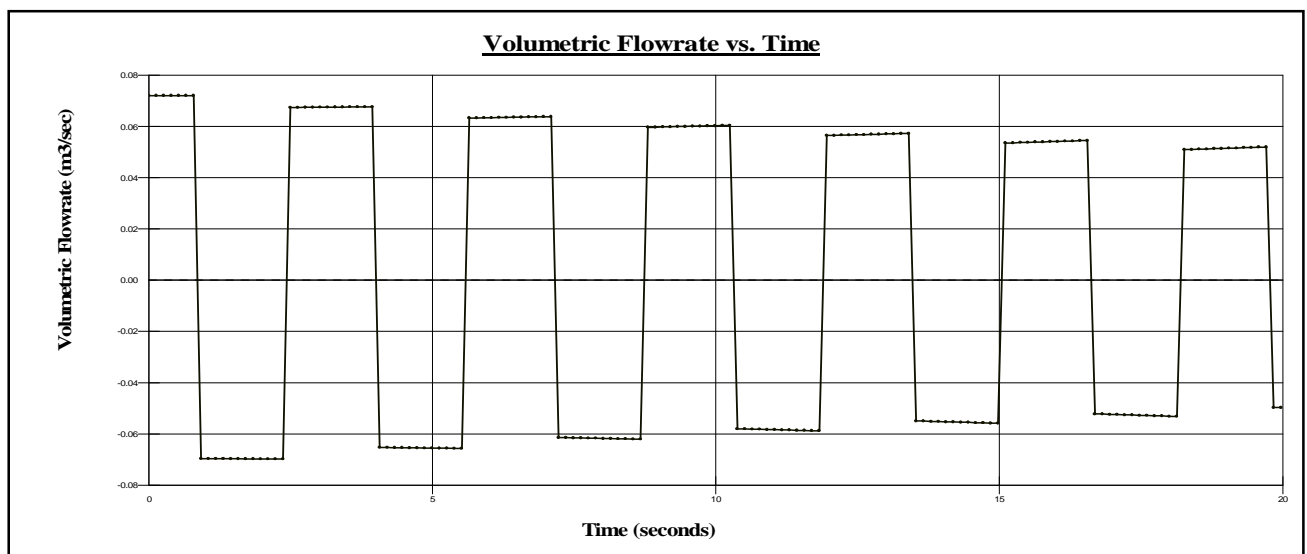


Fig. V. 3.

Charge au point « M » :

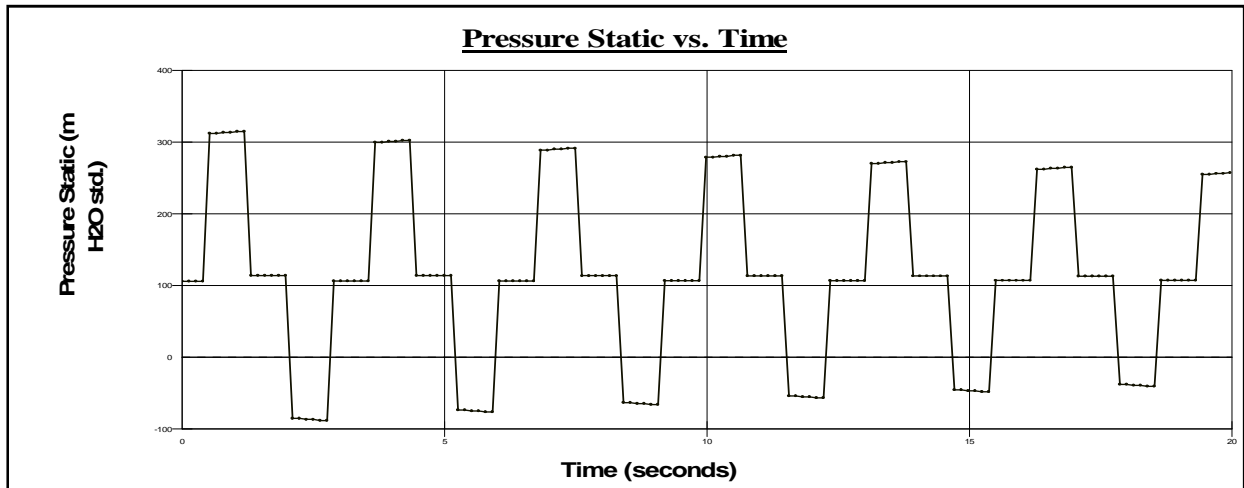


Fig. V. 4.

Débit au point « M »

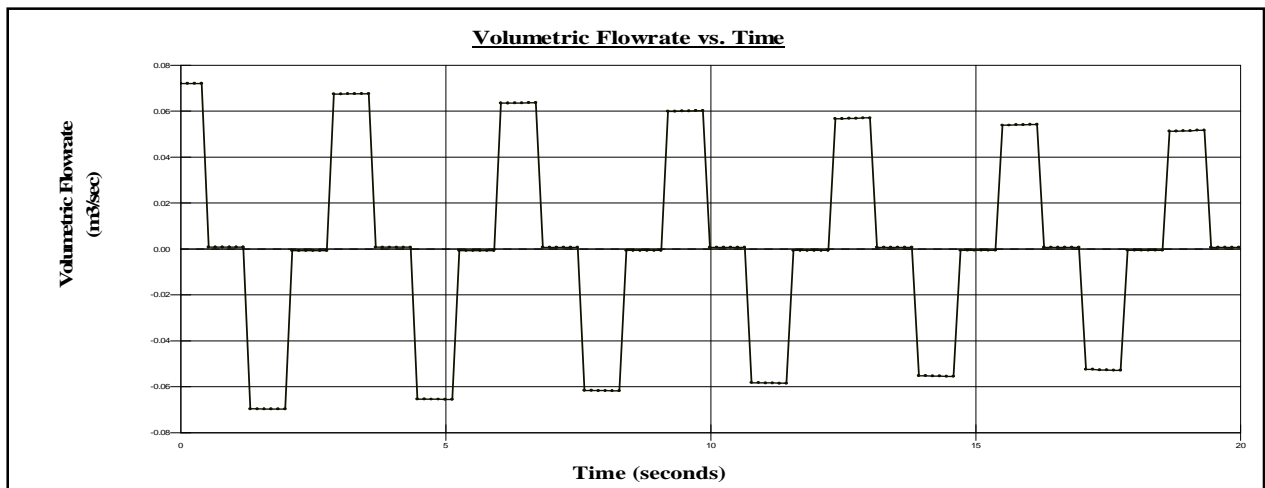


Fig. V. 5.

| 1268,66 | H_{\max} (M.C.E) | H_{\min} (M.C.E) | Q_{\max} (M ³ /S) | Q_{\min} (M ³ /S) |
|---------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| | 311,1 | -83,81 | 0.07193 | -0.06954 |
| x (m) | 1000 | 1000 | 0 | 0 |
| t (s) | 1,445 | 3,002 | 0 | 2,233 |

Température : $T = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$

Charge « H » au niveau de la vanne :

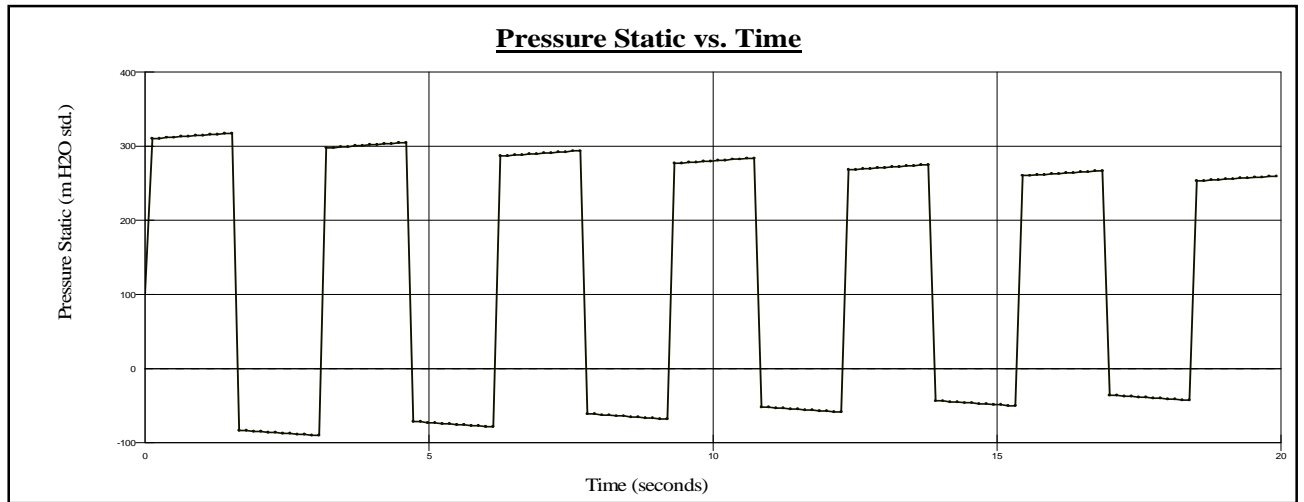


Fig. V. 6.

Débit « Q » au niveau du réservoir :

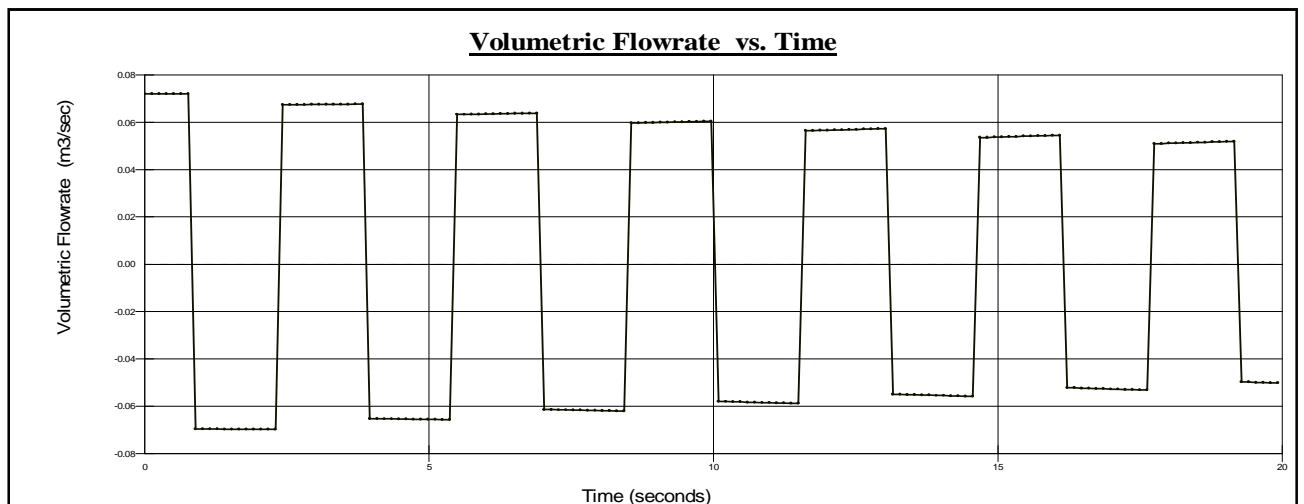


Fig. V. 7.

Charge au point « M » :

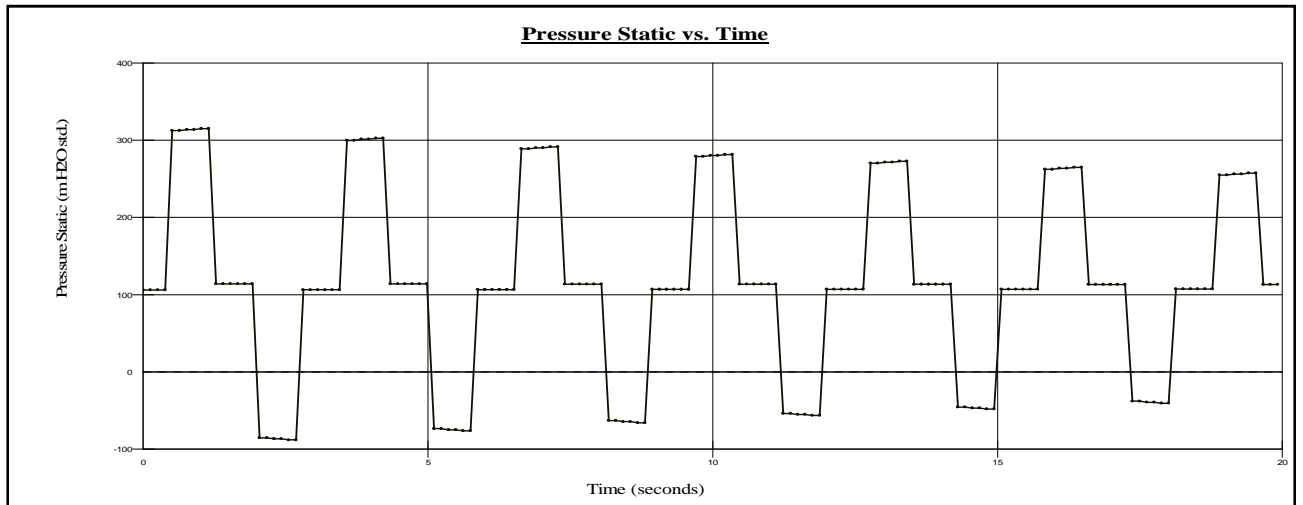


Fig. V. 8.

Débit au point « M »

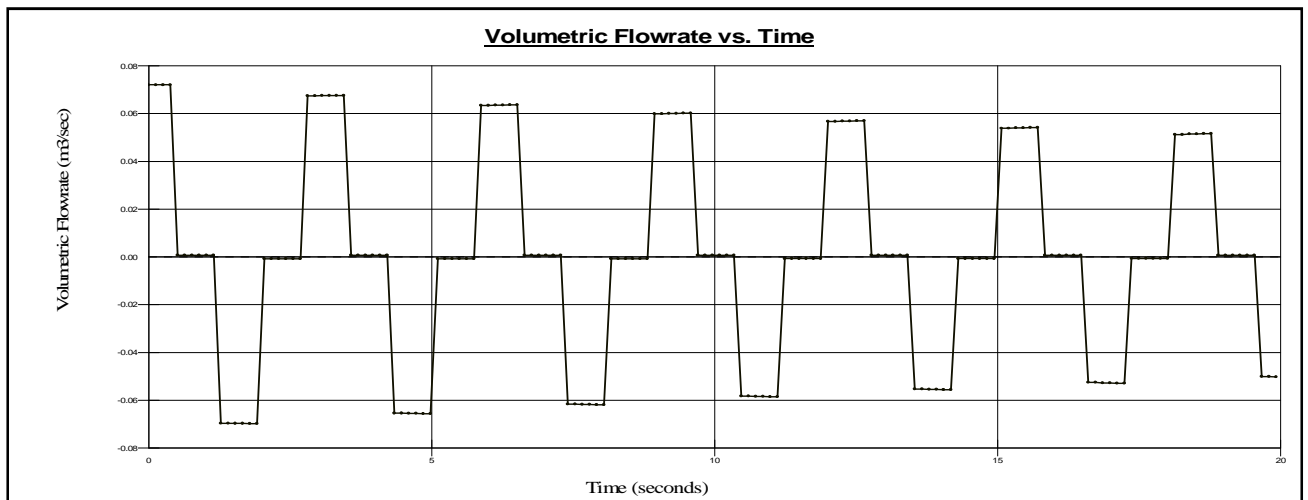


Fig. V. 9.

| 1305,332 | H_{\max} (M.C.E) | H_{\min} (M.C.E) | Q_{\max} (M ³ /S) | Q_{\min} (M ³ /S) |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| | 317,2 | -90,10 | 0.07204 | -0.06979 |
| x (m) | 1000 | 1000 | 0 | 0 |
| t (s) | 1,405 | 2,937 | 0 | 2,171 |

Tableau. V. 1

Température : $T = 20\text{ °C}$

Charge « H » au niveau de la vanne :

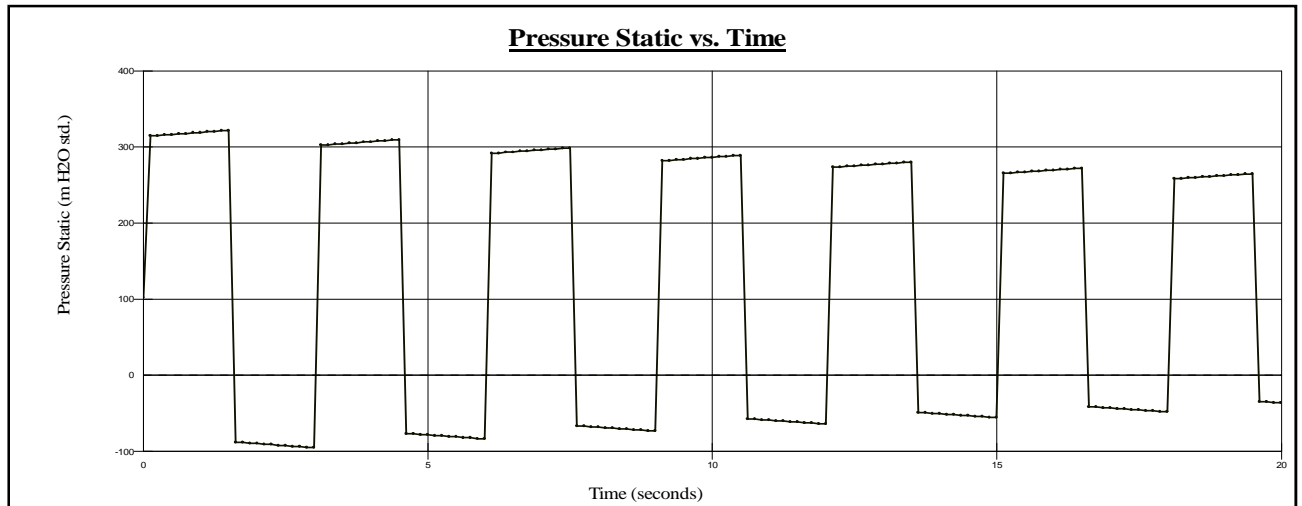


Fig. V. 10.

Débit « Q » au niveau du réservoir :

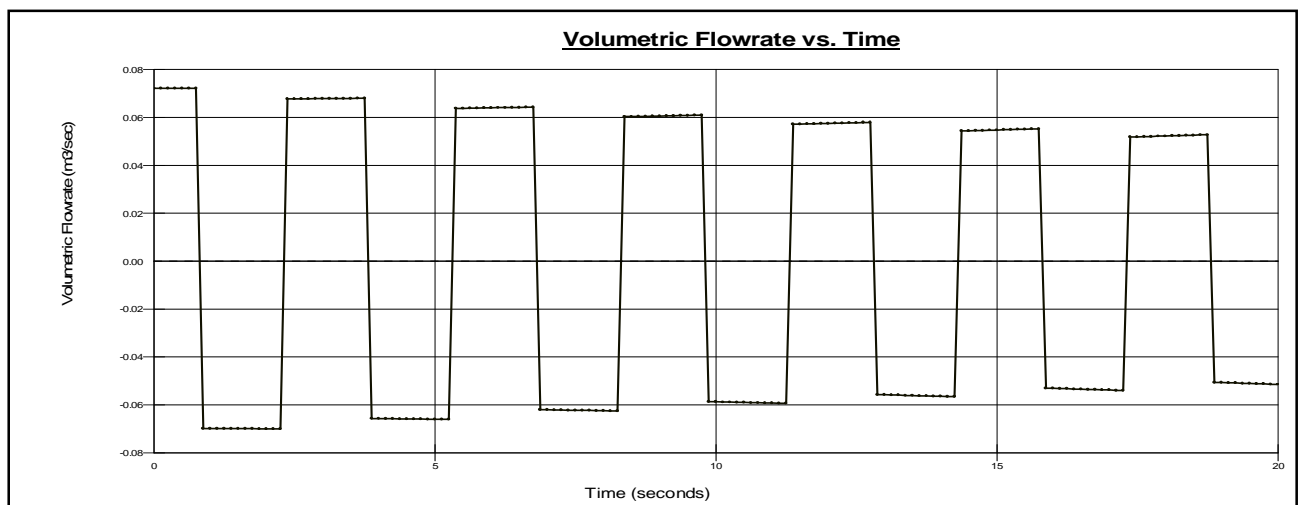


Fig. V. 11.

Charge au point « M » :

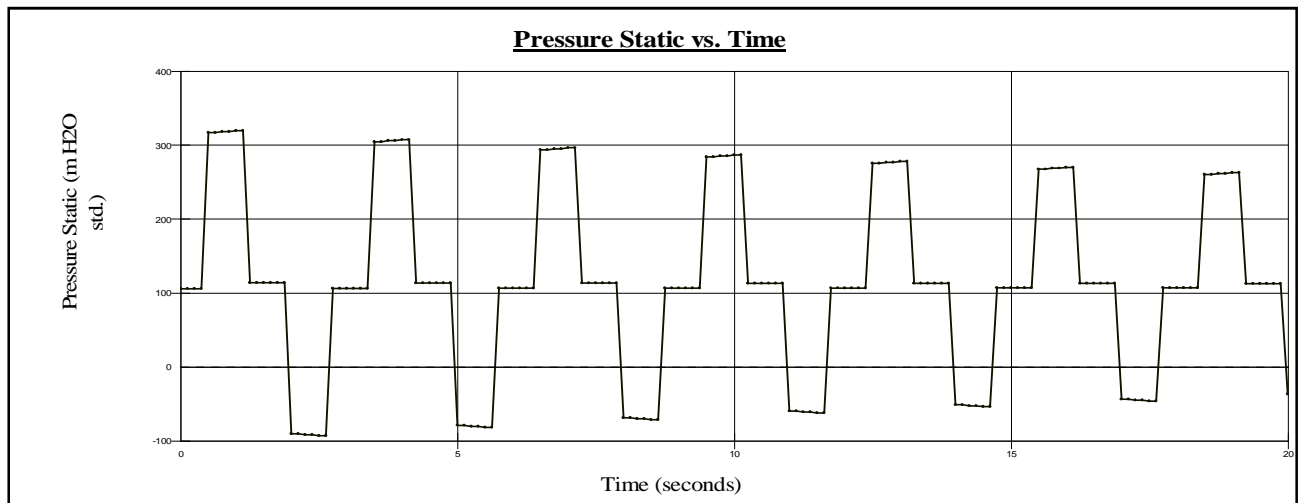


Fig. V. 12.

Débit au point « M »

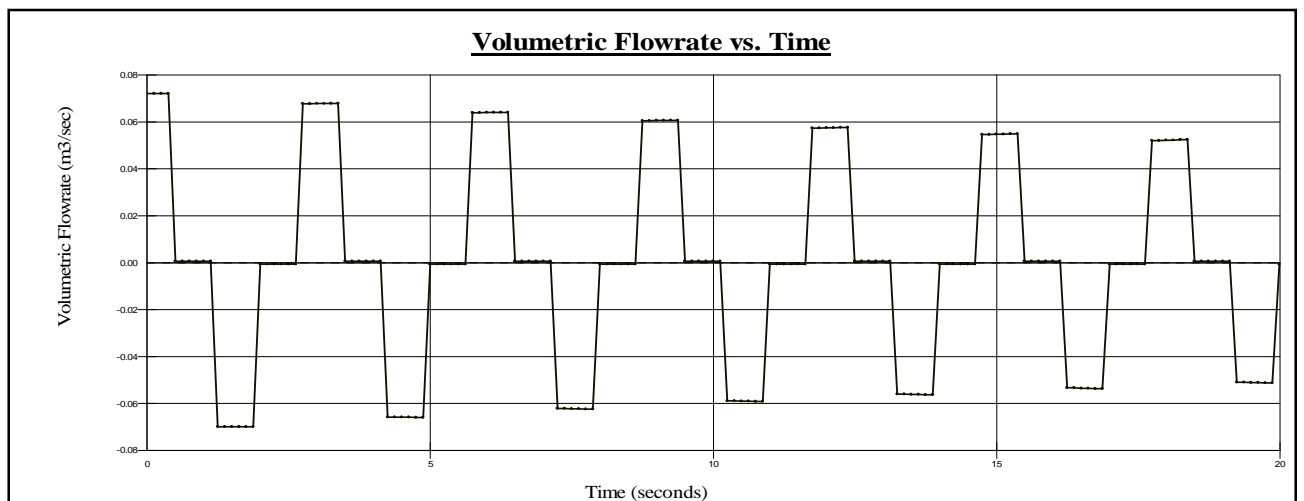


Fig. V. 13.

| 1333,973 | H_{\max} (M.C.E) | H_{\min} (M.C.E) | Q_{\max} (M ³ /S) | Q_{\min} (M ³ /S) |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| | 321,6 | -94,96 | 0.07213 | -0.06999 |
| x (m) | 1000 | 1000 | 0 | 0 |
| t (s) | 1,374 | 2,874 | 0 | 2,124 |

Tableau. V. 2

Température : T = 30 °C

Charge « H » au niveau de la vanne :

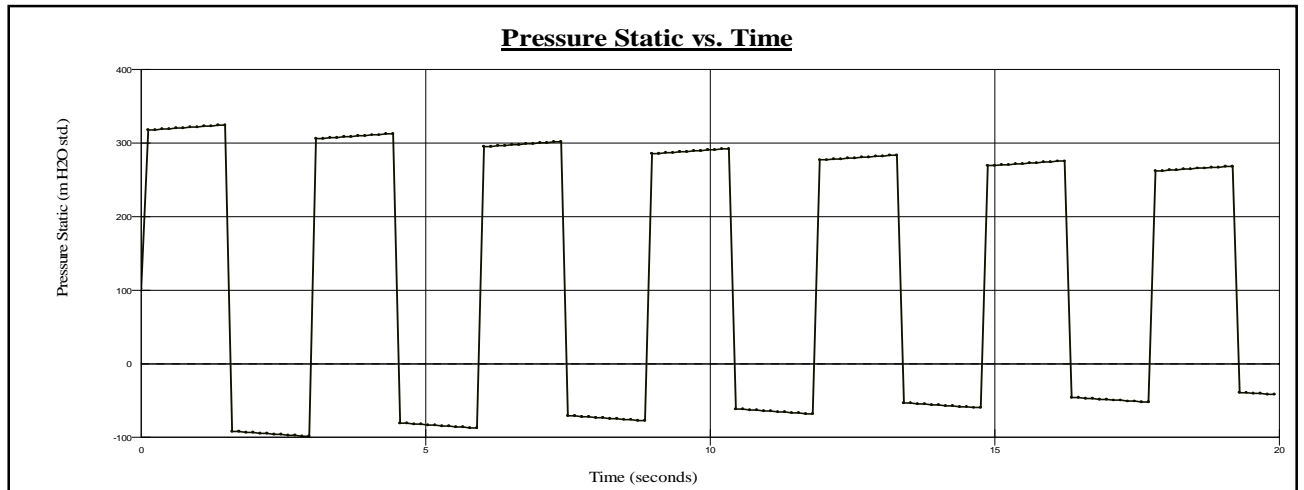


Fig. V. 14.

Débit « Q » au niveau du réservoir :

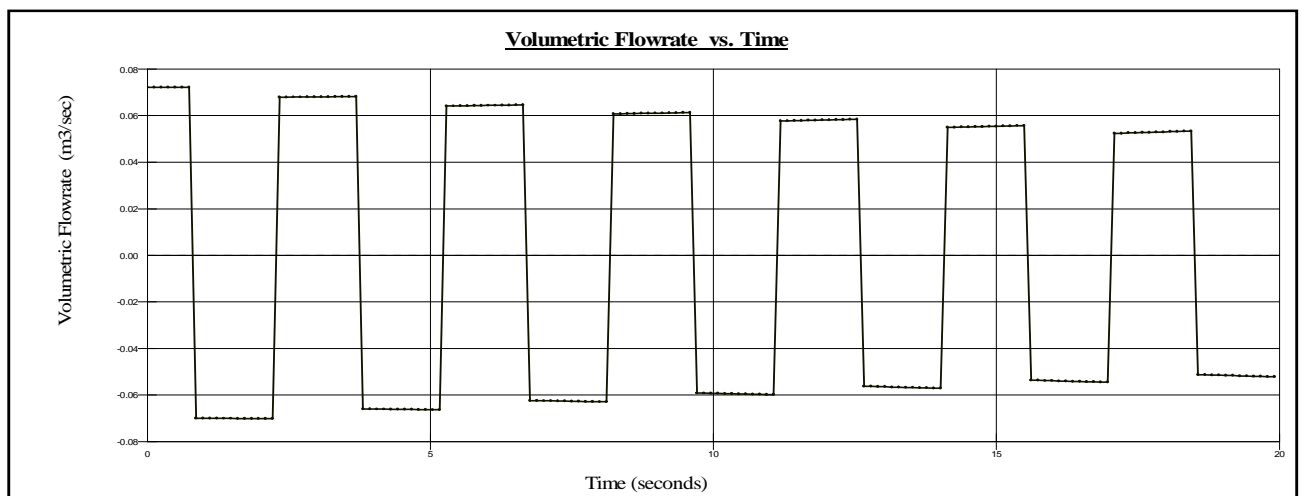


Fig. V. 15.

Charge au point « M » :

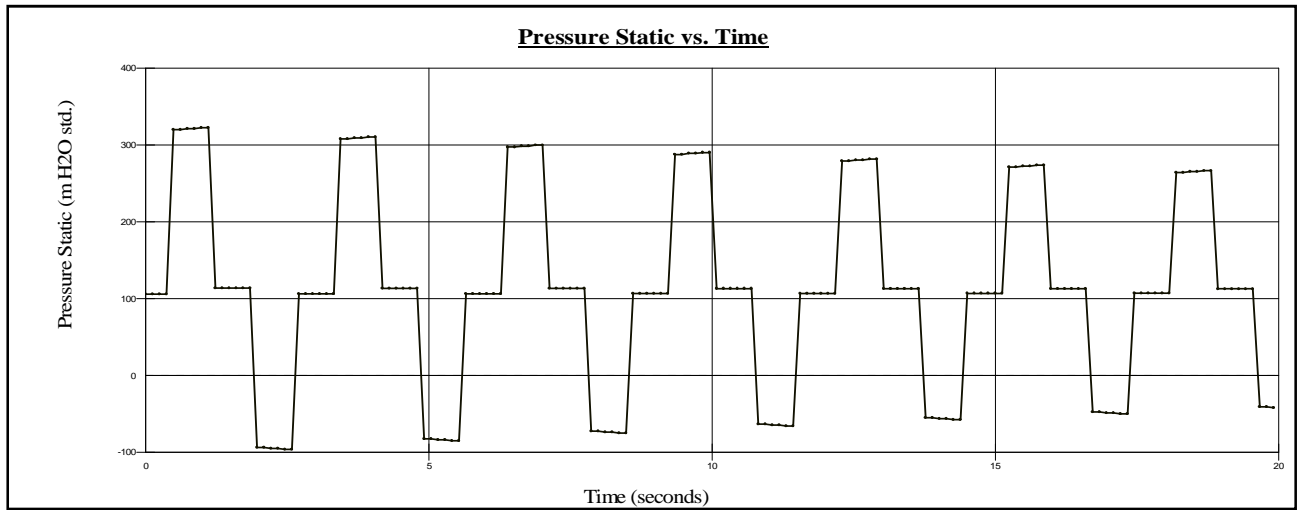


Fig. V. 16.

Débit au point « M »

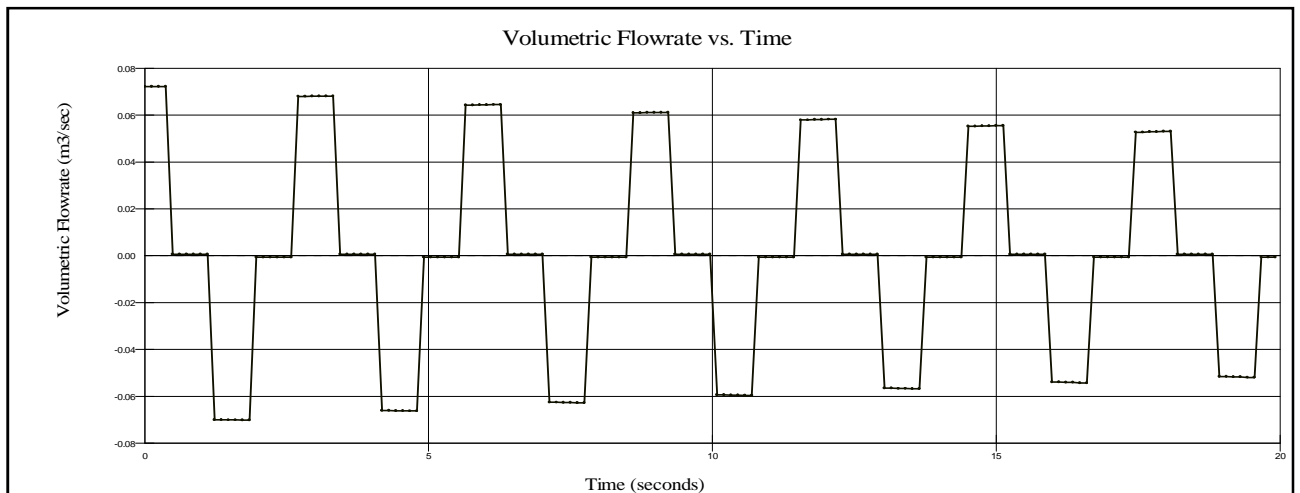


Fig. V. 17.

| 1355,601 | H_{\max} (M.C.E) | H_{\min} (M.C.E) | Q_{\max} (M ³ /S) | Q_{\min} (M ³ /S) |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| | 324,4 | -98,46 | 0,07220 | -0,07013 |
| x (m) | 1000 | 1000 | 0 | 0 |
| t (s) | 1,352 | 2,827 | 0 | 2,090 |

Tableau. V. 3

Température : $T = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$

Charge « H » au niveau de la vanne :

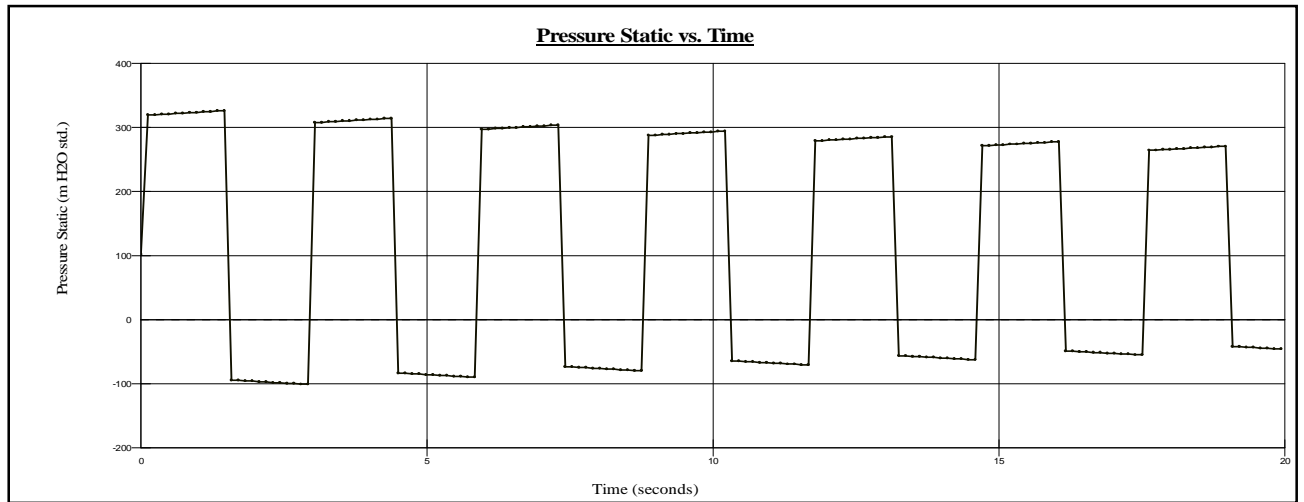


Fig. V. 18.

Débit « Q » au niveau du réservoir :

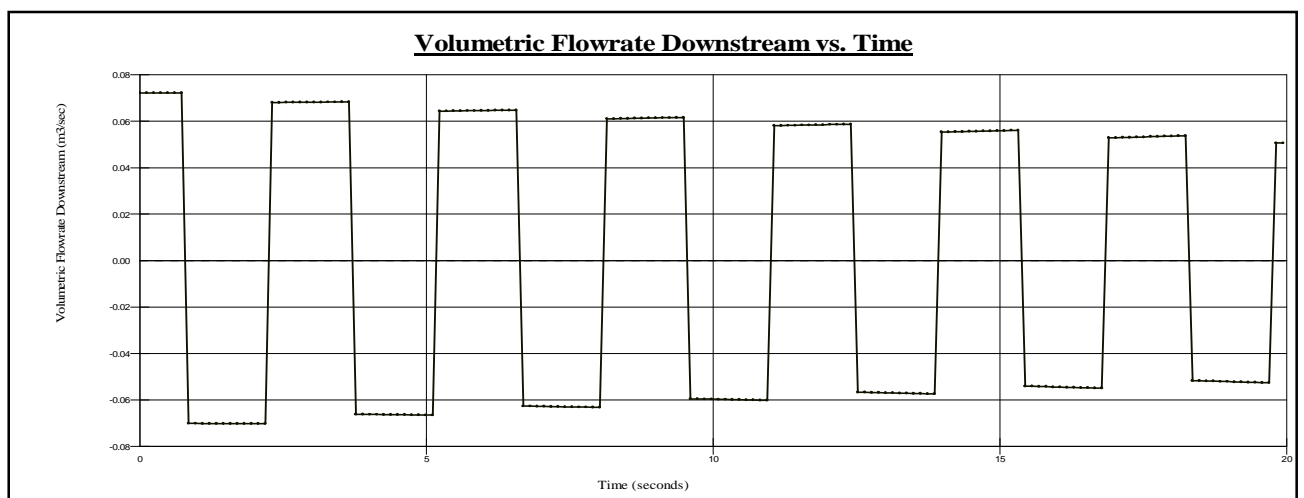


Fig. V. 19.

Charge au point « M » :

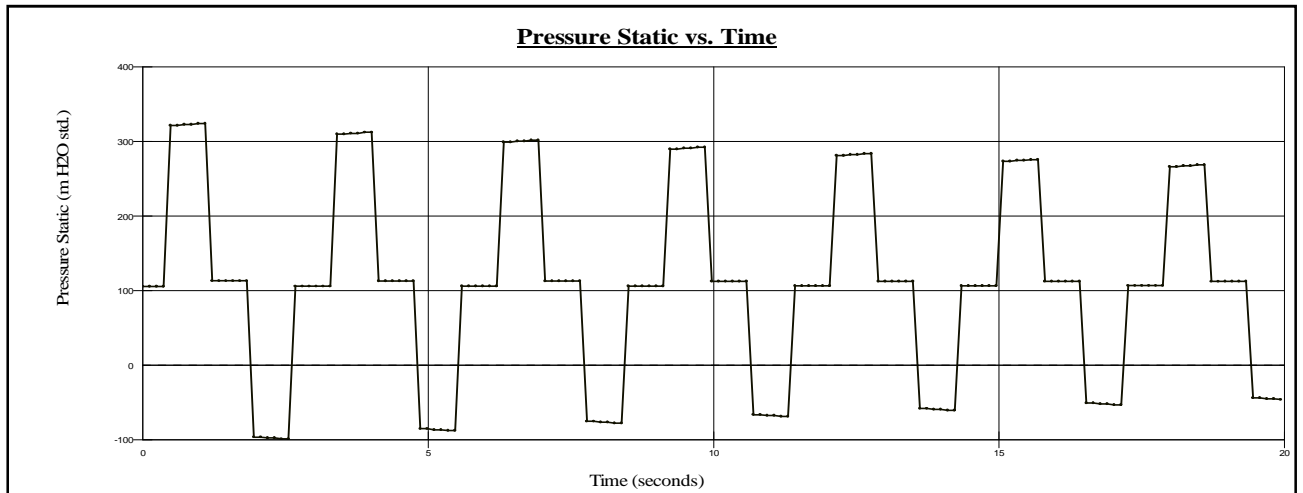


Fig. V. 20.

Débit au point « M » :

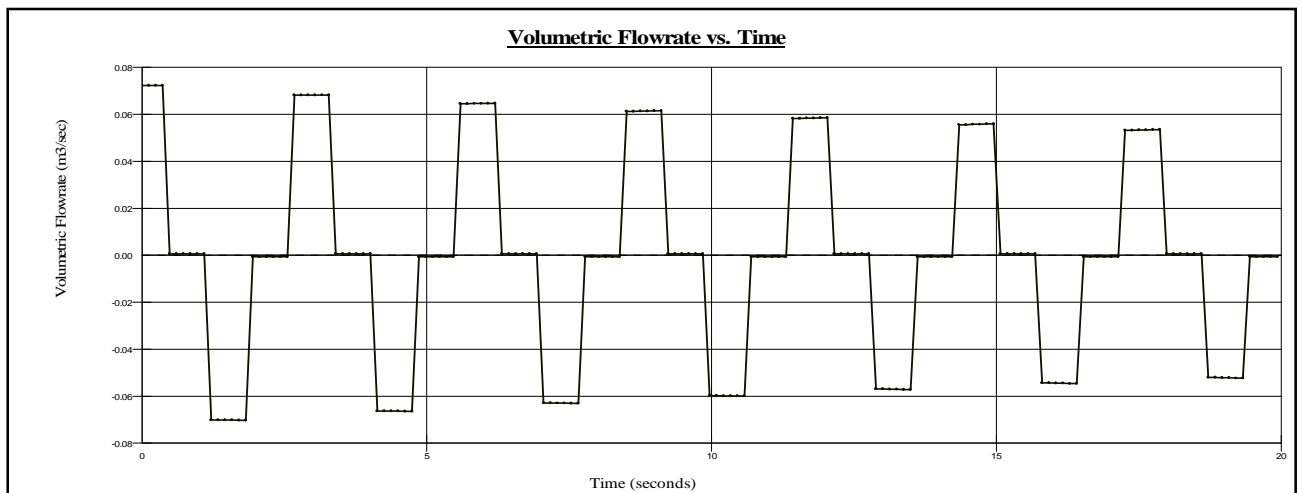


Fig. V. 21.

| 1370,642 | H_{\max} (M.C.E) | H_{\min} (M.C.E) | Q_{\max} (M ³ /S) | Q_{\min} (M ³ /S) |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| | 325,9 | -100,7 | 0.07225 | -0.07023 |
| x (m) | 1000 | 1000 | 0 | 0 |
| t (s) | 1,337 | 2,796 | 0 | 2,067 |

Tableau. V. 4

Température : $T = 50\text{ °C}$

Charge « H » au niveau de la vanne :

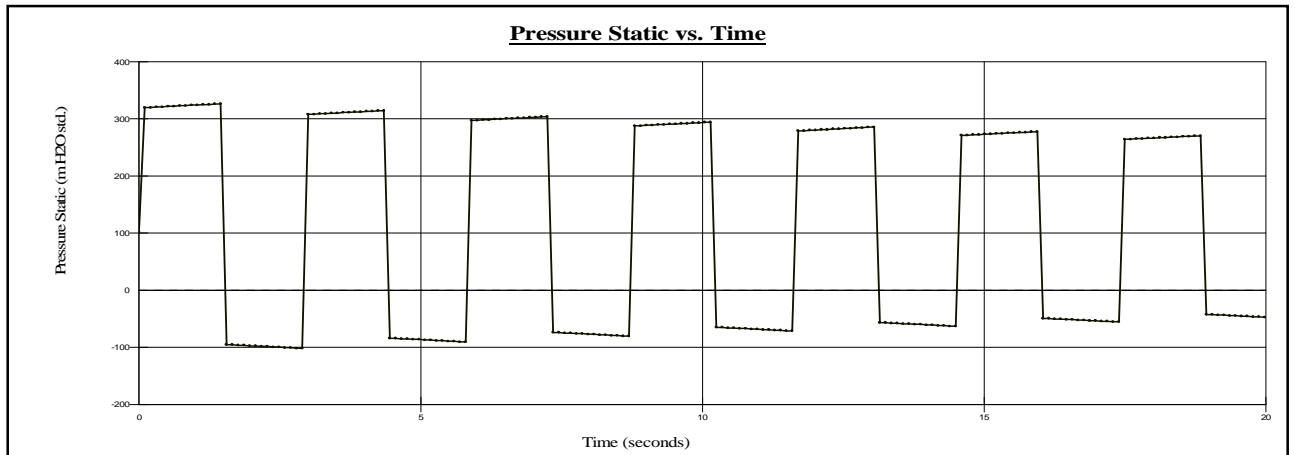


Fig. V. 22.

Débit « Q » au niveau du réservoir :

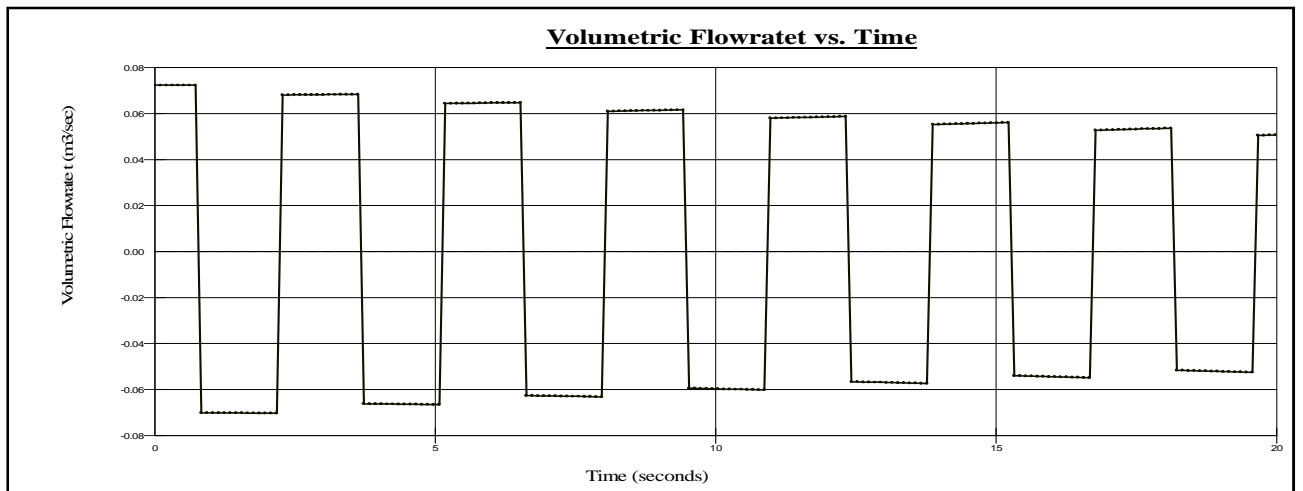


Fig. V. 23.

Charge au point « M » :

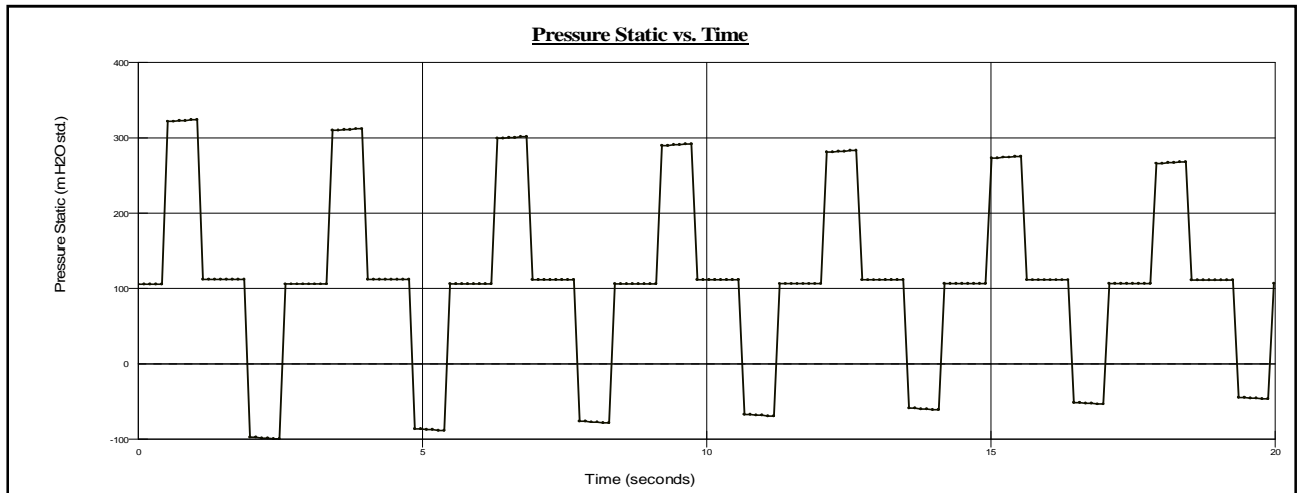


Fig. V. 24.

Débit au point « M » :

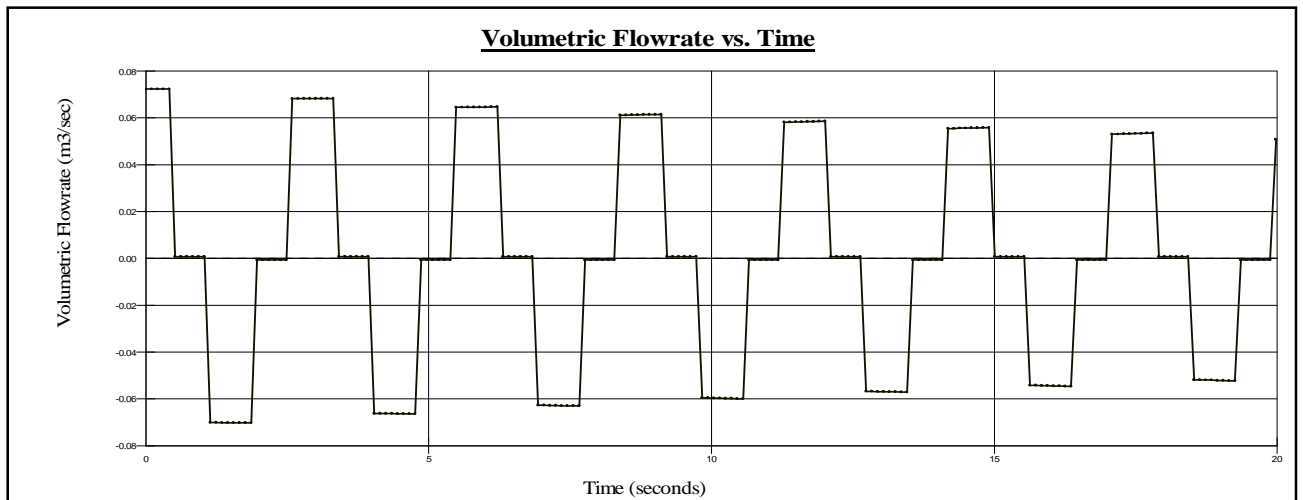


Fig. V. 25.

| 1379,315 | H_{\max} (M.C.E) | H_{\min} (M.C.E) | Q_{\max} (M ³ /S) | Q_{\min} (M ³ /S) |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| | 326.1 | -101,7 | 0.07229 | -0.07025 |
| x (m) | 1000 | 1000 | 0 | 0 |
| t (s) | 1,346 | 2,795 | 0,1035 | 2,070 |

Tableau. V. 5

Température : $T = 60\text{ °C}$

Charge « H » au niveau de la vanne :

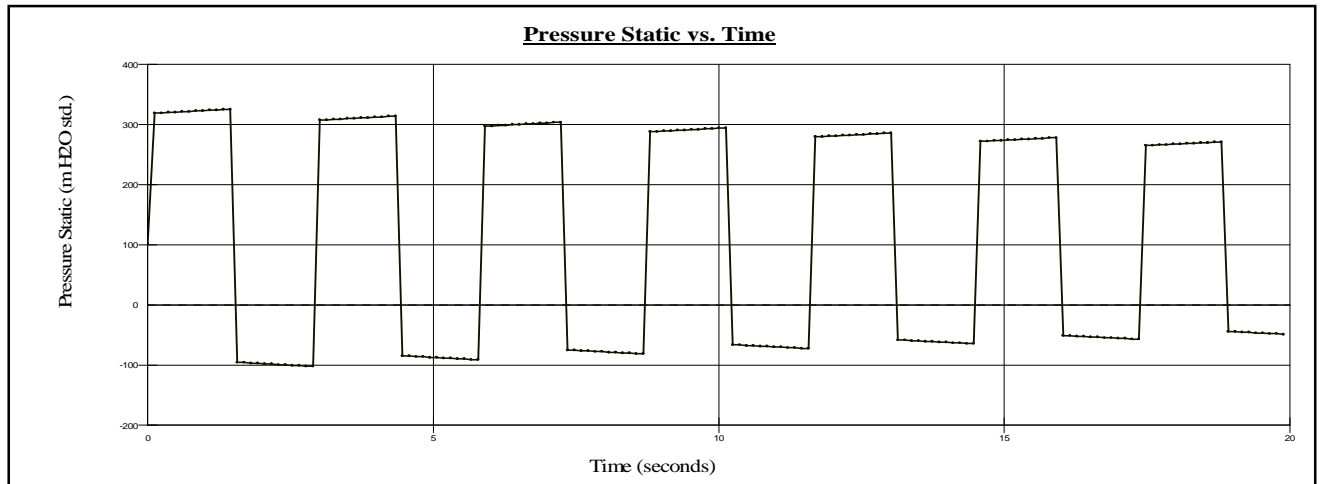


Fig. V. 26.

Débit « Q » au niveau du réservoir :

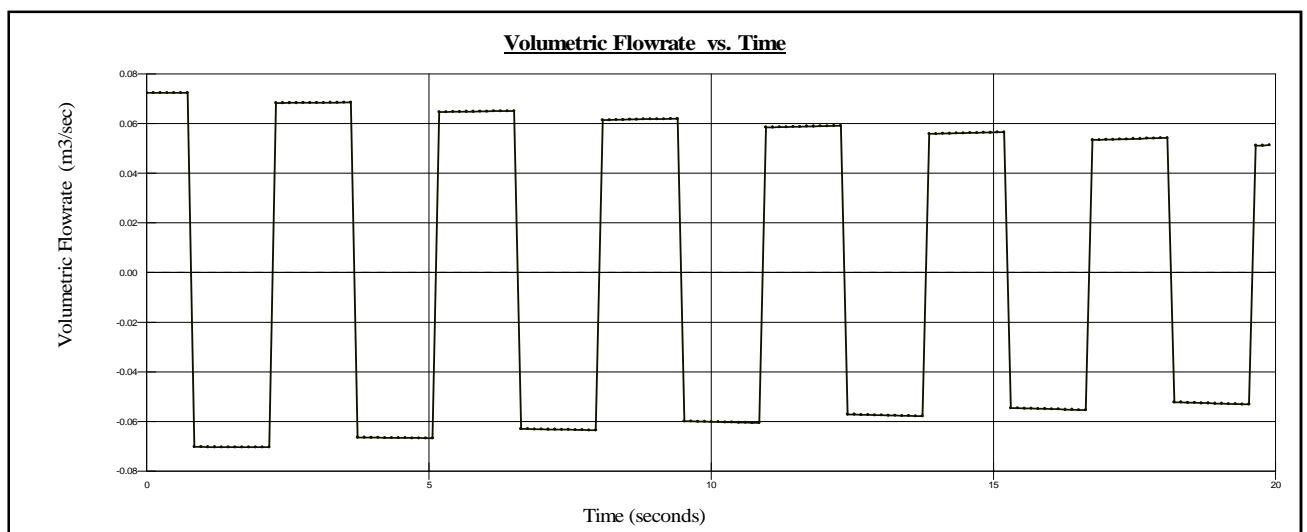


Fig. V. 27.

Charge au point « M » :

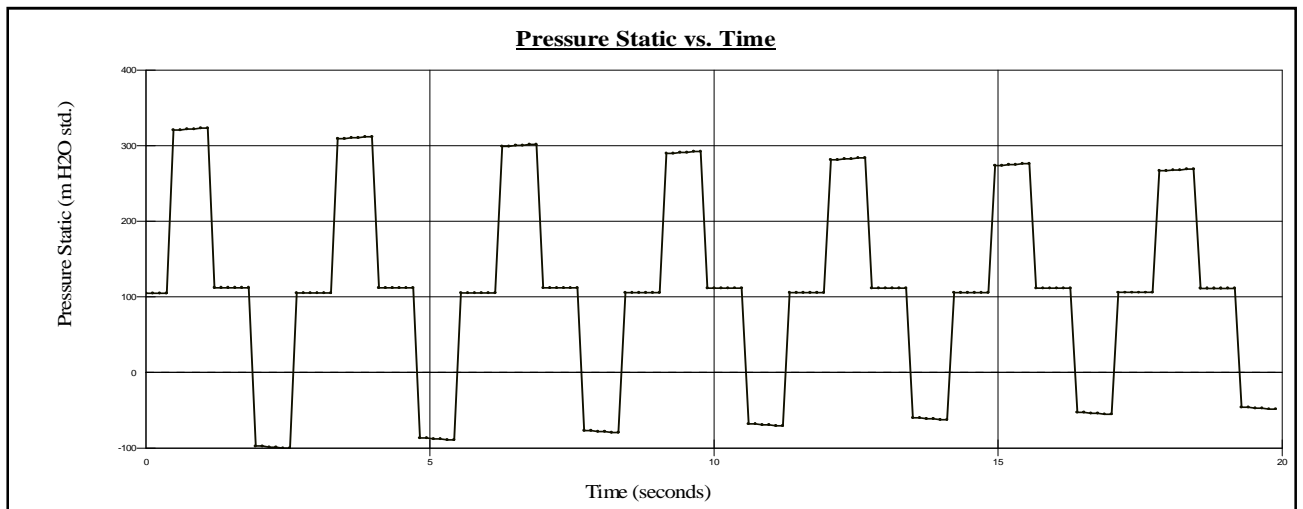


Fig. V. 28.

Débit au point « M » :

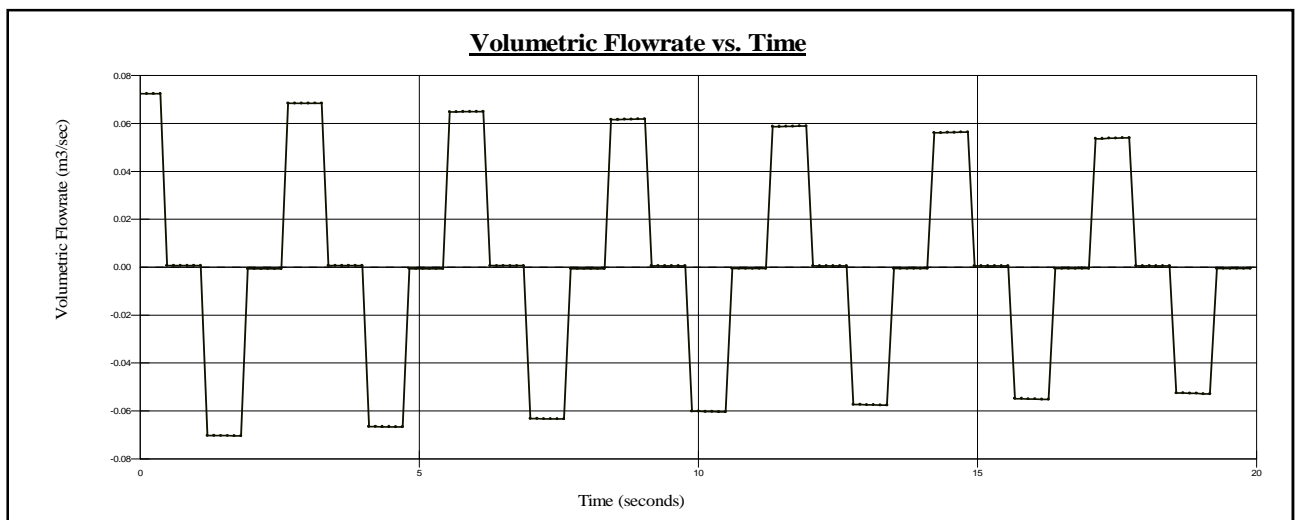


Fig. V. 29.

| 1381,671 | H_{max} (M.C.E) | H_{min} (M.C.E) | Q_{max} (M ³ /S) | Q_{min} (M ³ /S) |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| | 325 | -101,8 | 0,07231 | -0,07035 |
| x (m) | 1000 | 1000 | 0 | 0 |
| t (s) | 1,326 | 2,772 | 0,1205 | 2,049 |

Tableau. V. 6

Température : $T = 70\text{ °C}$

Charge « H » au niveau de la vanne :

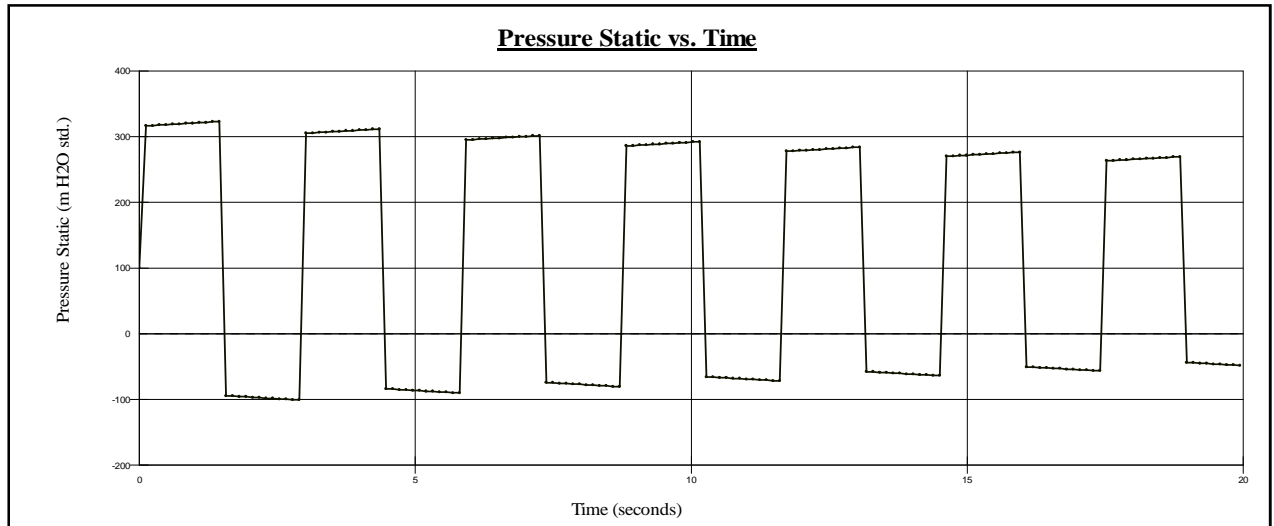


Fig. V. 30.

Débit « Q » au niveau du réservoir :

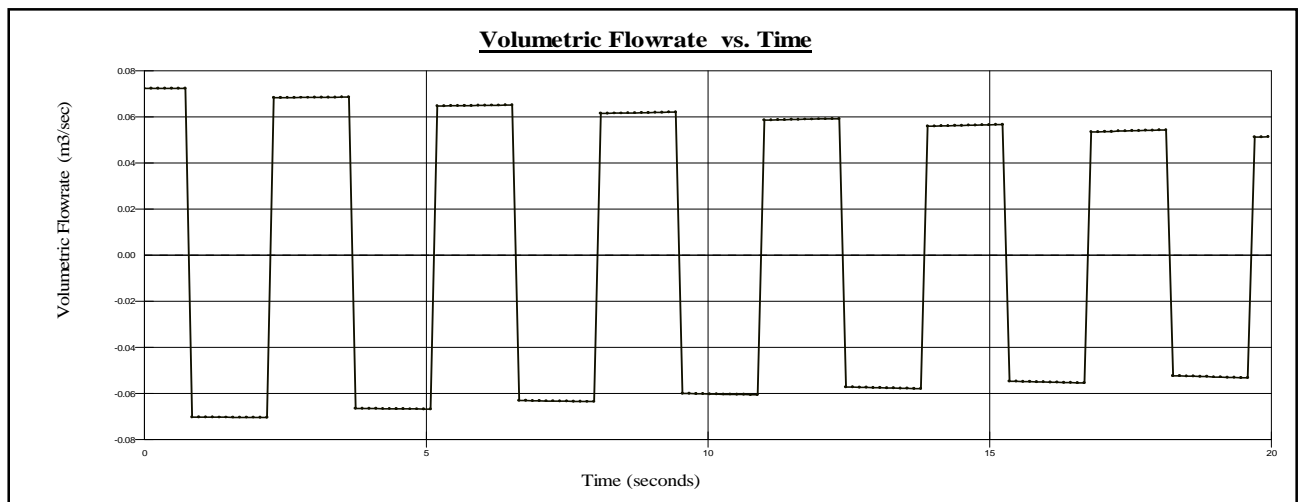


Fig. V. 31.

Charge au point « M » :

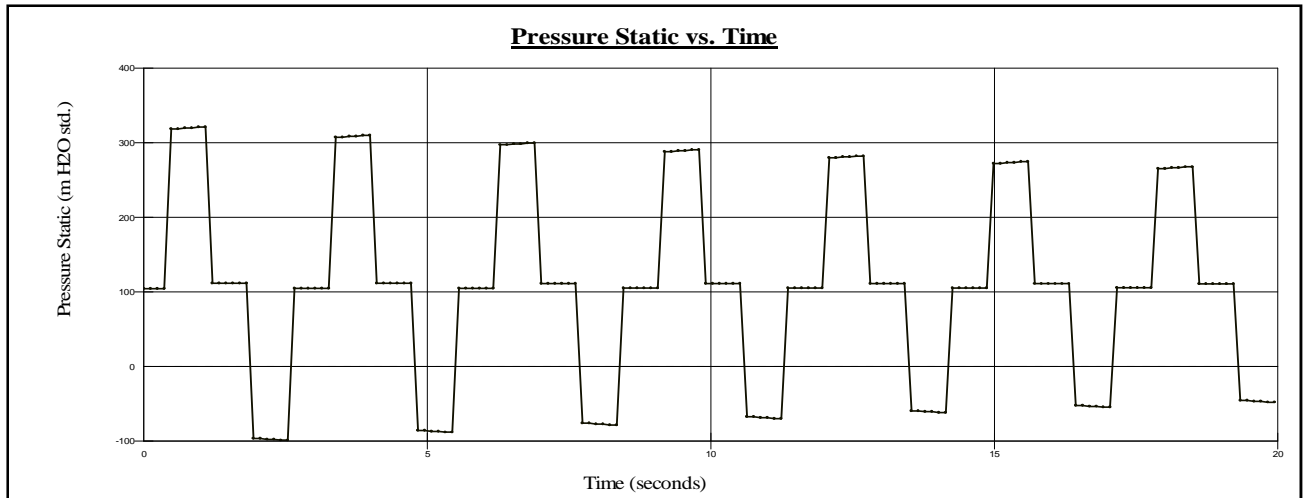


Fig. V. 32.

Débit au point « M » :

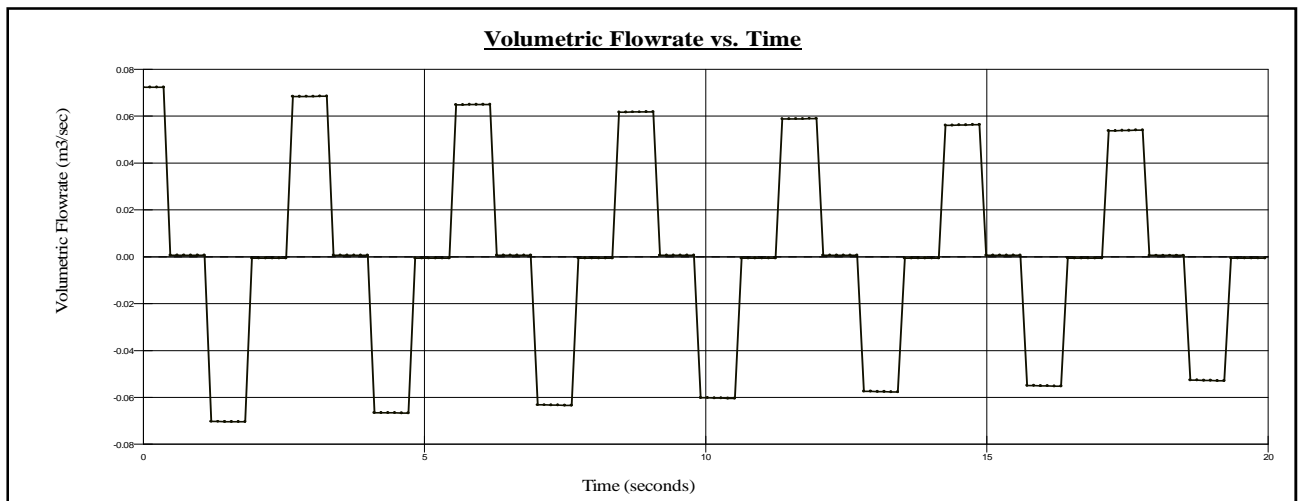


Fig. V. 33.

| 1377,603 | H_{\max} (M.C.E) | H_{\min} (M.C.E) | Q_{\max} (M ³ /S) | Q_{\min} (M ³ /S) |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| | 322,7 | -100,7 | 0.07234 | -0.07039 |
| x (m) | 1000 | 1000 | 0 | 0 |
| t (s) | 1,330 | 2,78 | 0 | 2,055 |

Tableau. V. 7

Température : T = 80 °C

Charge « H » au niveau de la vanne :

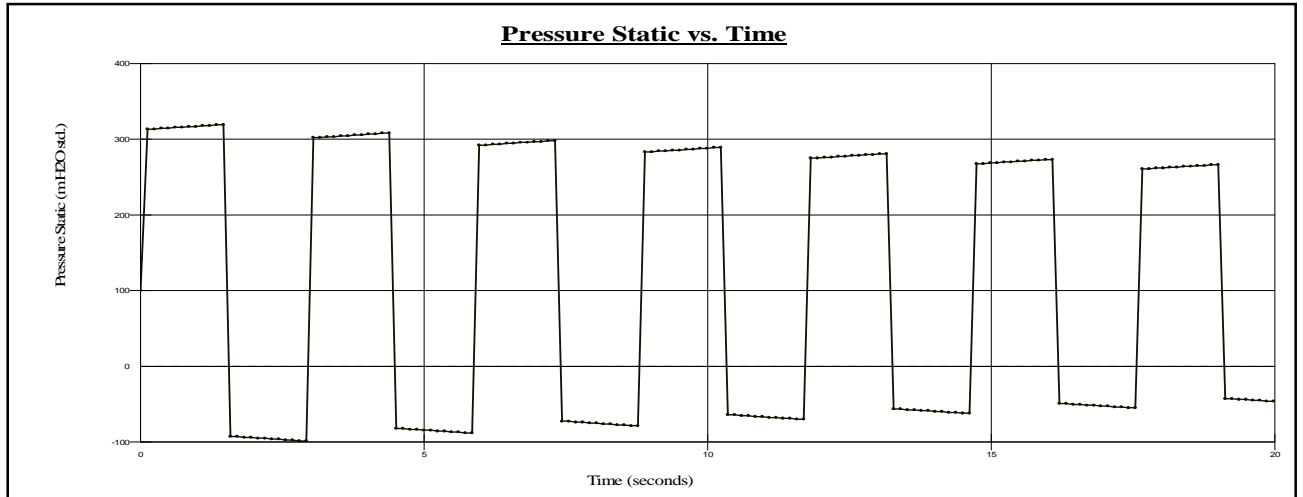


Fig. V. 34.

Débit « Q » au niveau du réservoir :

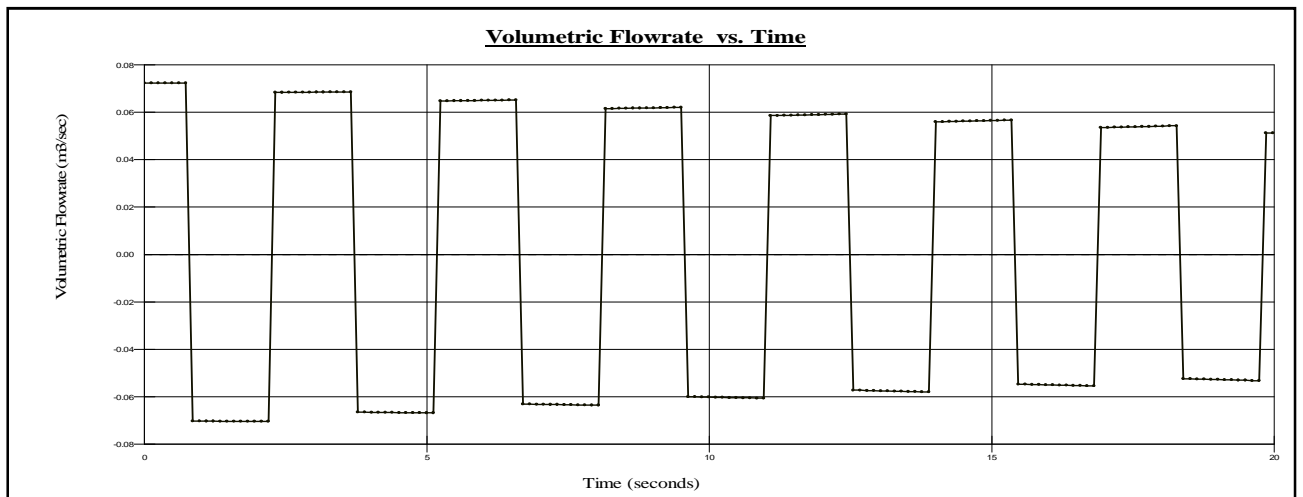


Fig. V. 35.

Charge au point « M » :

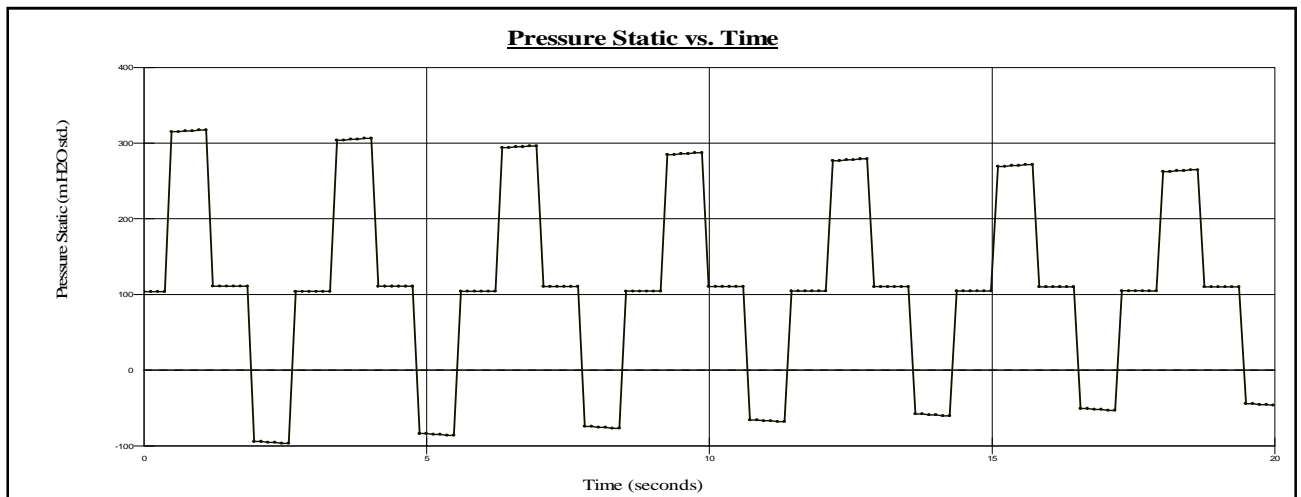


Fig. V. 36.

Débit au point « M » :

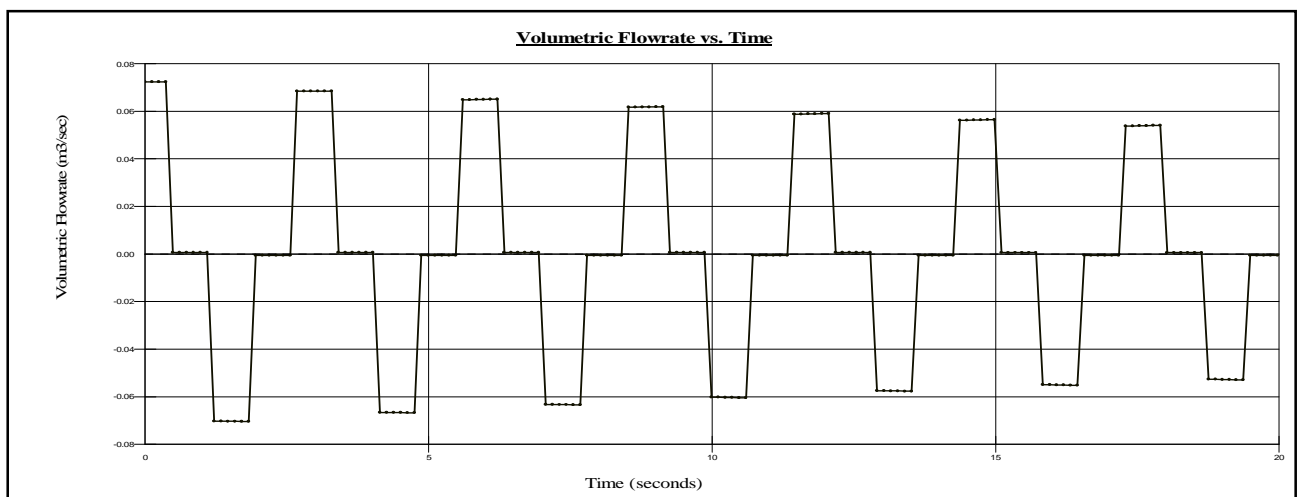


Fig. V. 37.

| 1366,846 | H_{\max} (M.C.E) | H_{\min} (M.C.E) | Q_{\max} (M ³ /S) | Q_{\min} (M ³ /S) |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| | 319,3 | -98,54 | 0.07236 | -0.07041 |
| x (m) | 1000 | 1000 | 0 | 0 |
| t (s) | 1,340 | 2,801 | 0 | 2,071 |

Tableau. V. 8

Température : $T = 90\text{ }^{\circ}\text{C}$

Charge « H » au niveau de la vanne :

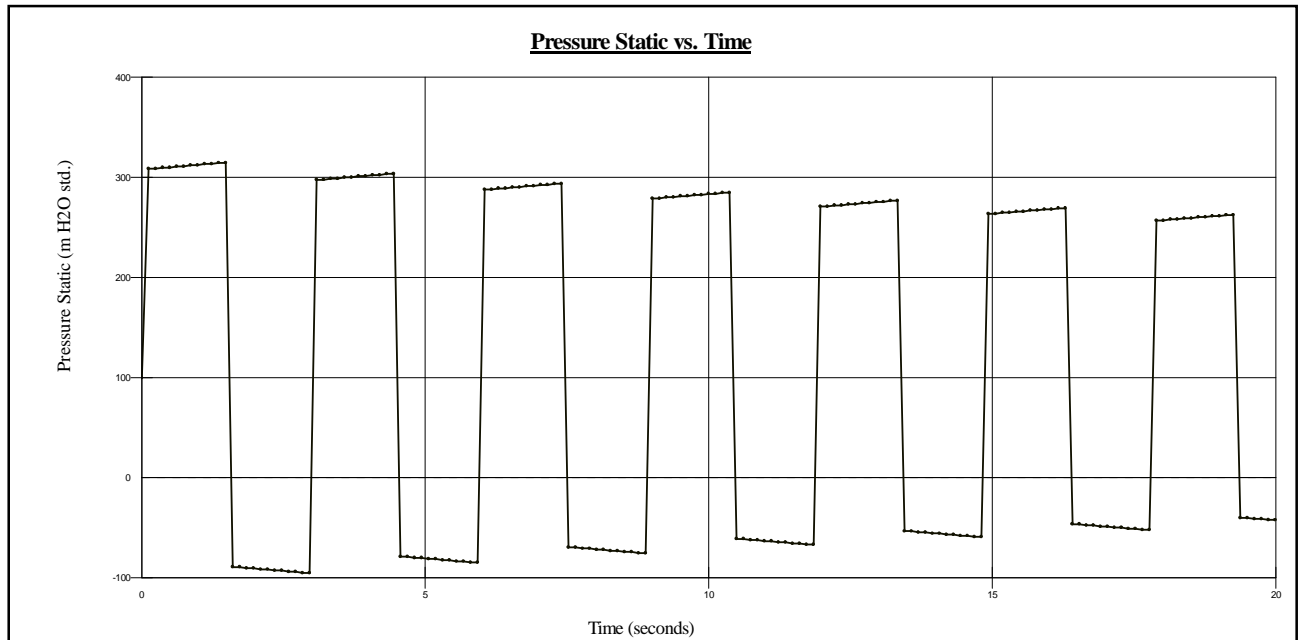


Fig. V. 38.

Débit « Q » au niveau du réservoir :

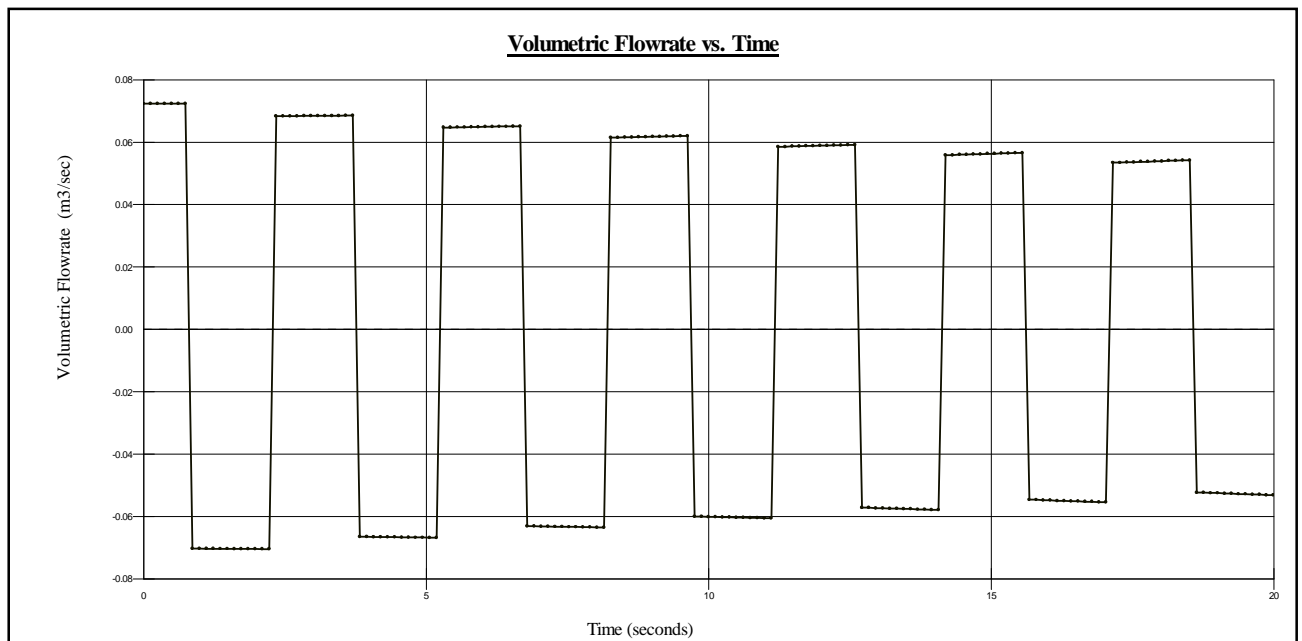


Fig. V. 39.

Charge au point « M » :

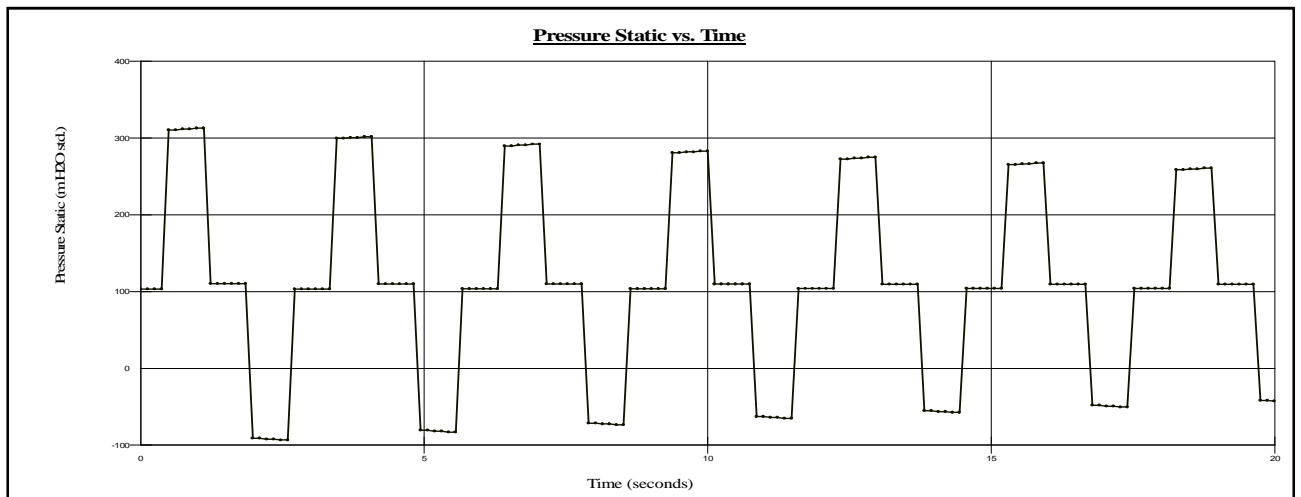


Fig. V. 40.

Débit au point « M » :

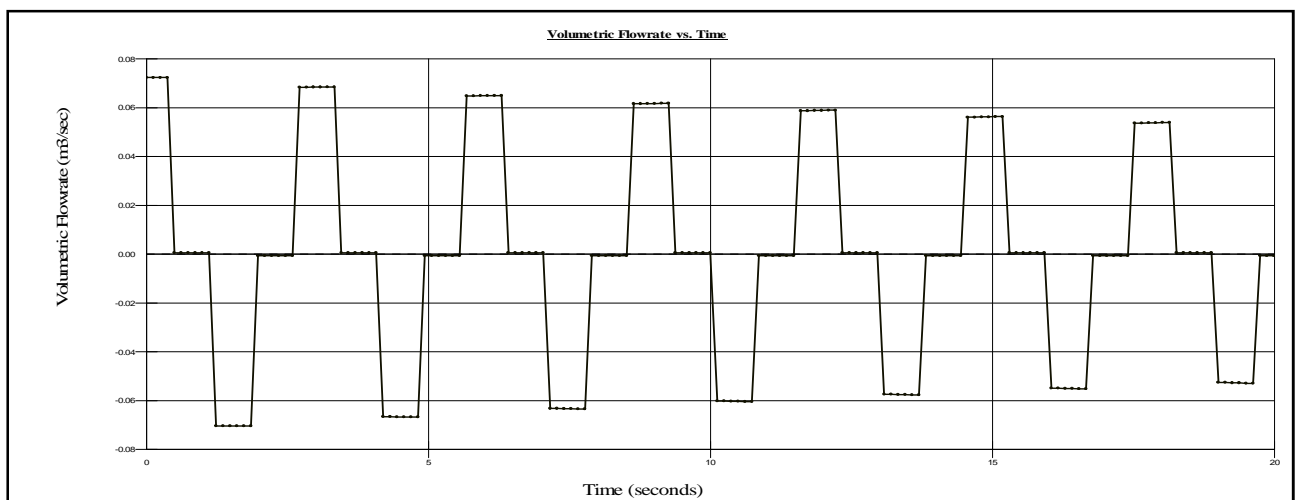


Fig. V. 41.

| | H_{\max} (M.C.E) | H_{\min} (M.C.E) | Q_{\max} (M ³ /S) | Q_{\min} (M ³ /S) |
|---------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1348,96 | 314,5 | -95,18 | 0,07238 | -0,07042 |
| x (m) | 1000 | 1000 | 0 | 0 |
| t (s) | 1,357 | 2,838 | 0 | 2,098 |

Tableau. V. 9

Température : $T = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$

Charge « H » au niveau de la vanne :

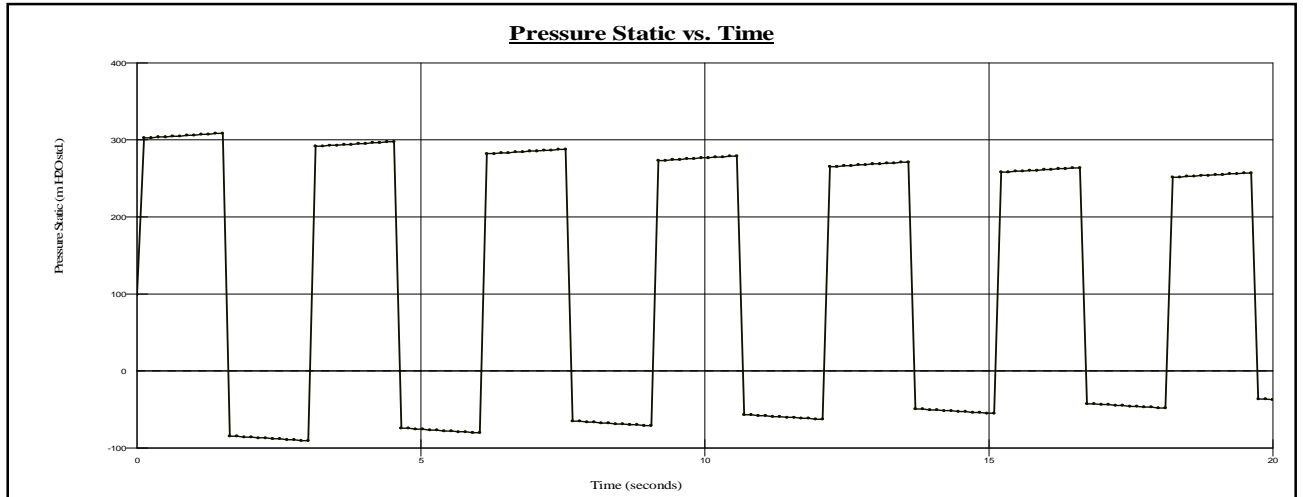


Fig. V. 42.

Débit « Q » au niveau du réservoir :

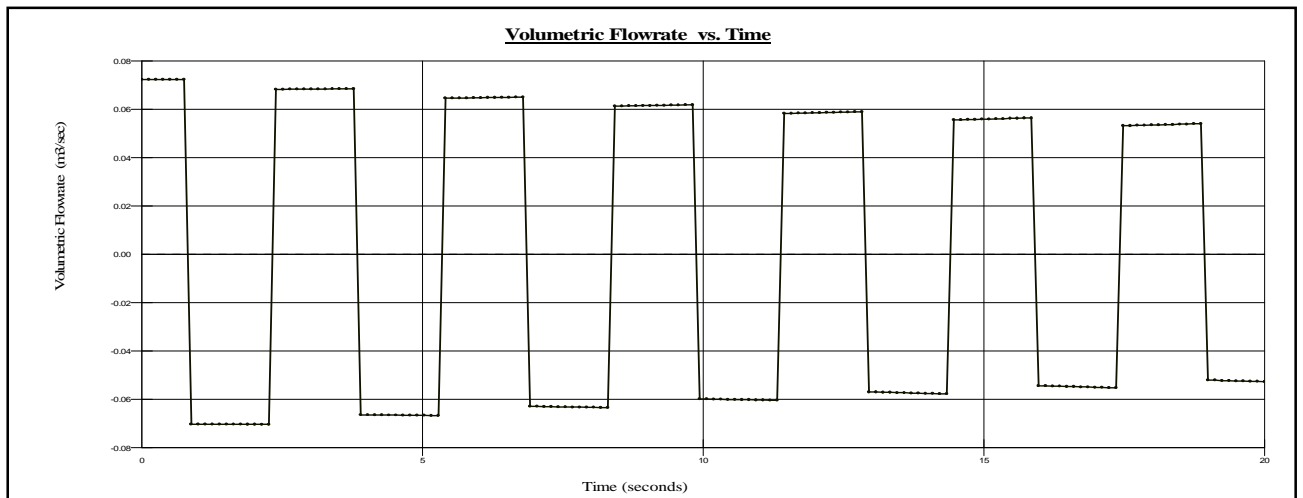


Fig. V. 43.

Charge au point « M » :

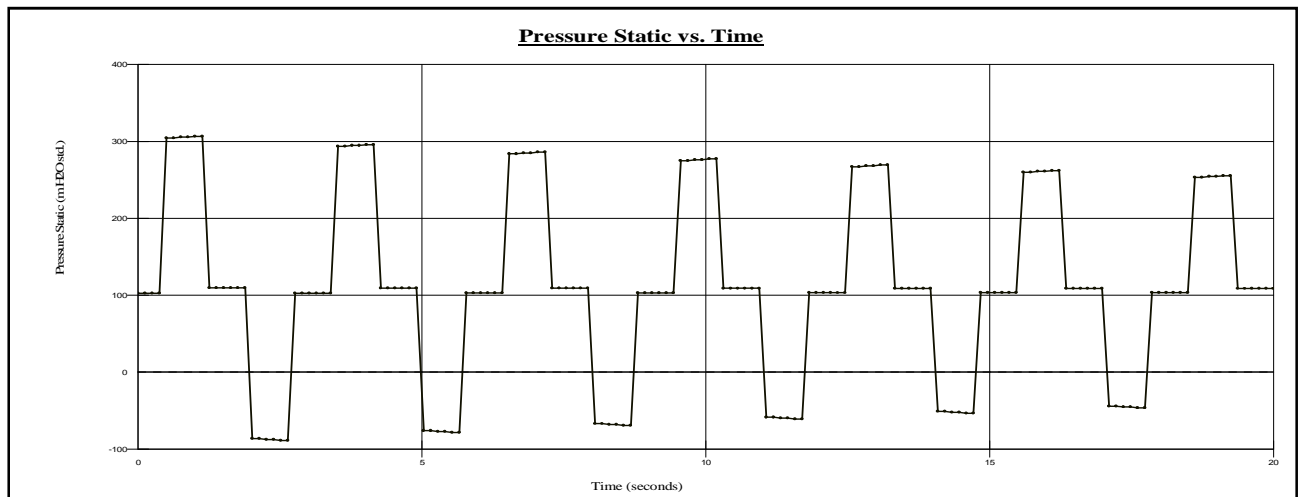


Fig. V. 44.

Débit au point « M » :

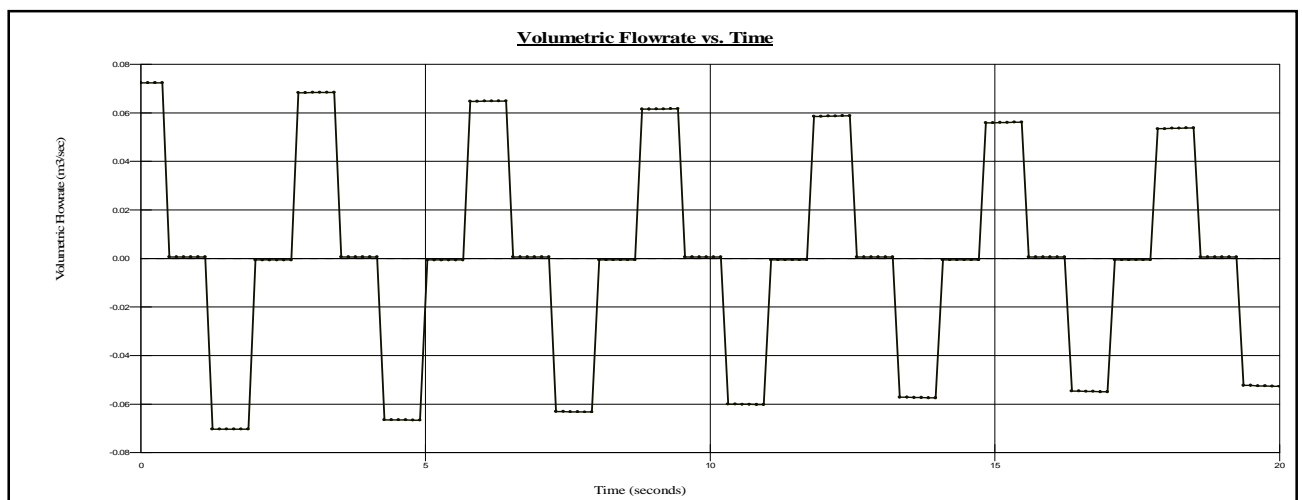


Fig. V. 45.

| 1323,292 | H_{\max} (M.C.E) | H_{\min} (M.C.E) | Q_{\max} (M ³ /S) | Q_{\min} (M ³ /S) |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| | 308,4 | -90,57 | 0.07239 | -0.07039 |
| x (m) | 1000 | 1000 | 0 | 0 |
| t (s) | 1,509 | 3,018 | 0,1258 | 2,264 |

Tableau. V. 10

Récapitulation

| T (°C) | a (M/S) | H _{max} (M.C.E) | H _{min} (M.C.E) | Q _{max} (M ³ /S) | Q _{min} (M ³ /S) |
|-----------|------------|-----------------------------|-----------------------------|---|---|
| 0 | 1268,66 | 311,1 | -83,81 | 0.07193 | -0.06954 |
| 10 | 1305,332 | 317,2 | -90,10 | 0.07204 | -0.06979 |
| 20 | 1333,973 | 321,6 | -94,96 | 0.07213 | -0.06999 |
| 30 | 1355,601 | 324,4 | -98,46 | 0.07220 | -0.07013 |
| 40 | 1370,642 | 325,9 | -100,7 | 0.07225 | -0.07023 |
| 50 | 1379,315 | 326.1 | -101,7 | 0.07229 | -0.07025 |
| 60 | 1381,671 | 325 | -101,8 | 0.07231 | -0.07035 |
| 70 | 1377,603 | 322,7 | -100,7 | 0.07234 | -0.07039 |
| 80 | 1366,846 | 319,3 | -98,54 | 0.07236 | -0.07041 |
| 90 | 1348,96 | 314,5 | -95,18 | 0.07238 | -0.07042 |
| 100 | 1323,292 | 308,4 | -90,57 | 0.07239 | -0.07039 |

Tableau. V. 11

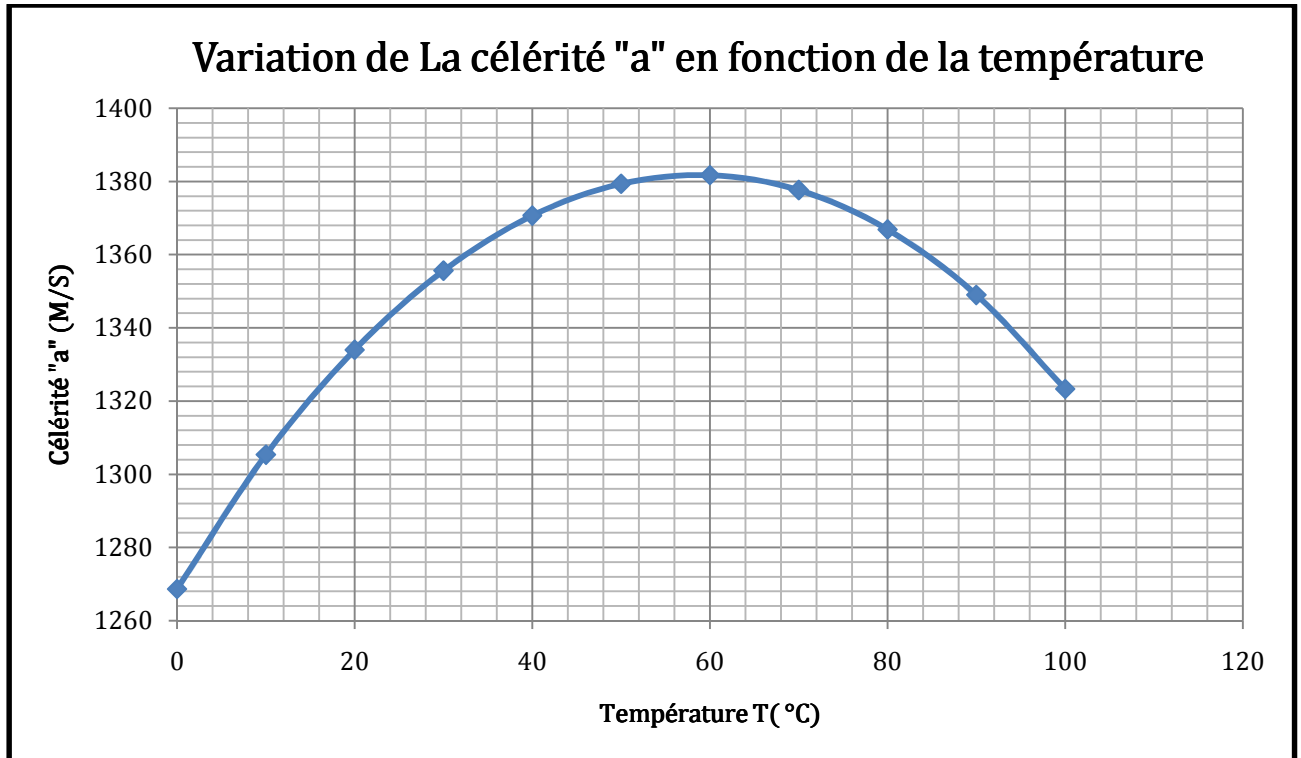


Fig. V. 46.

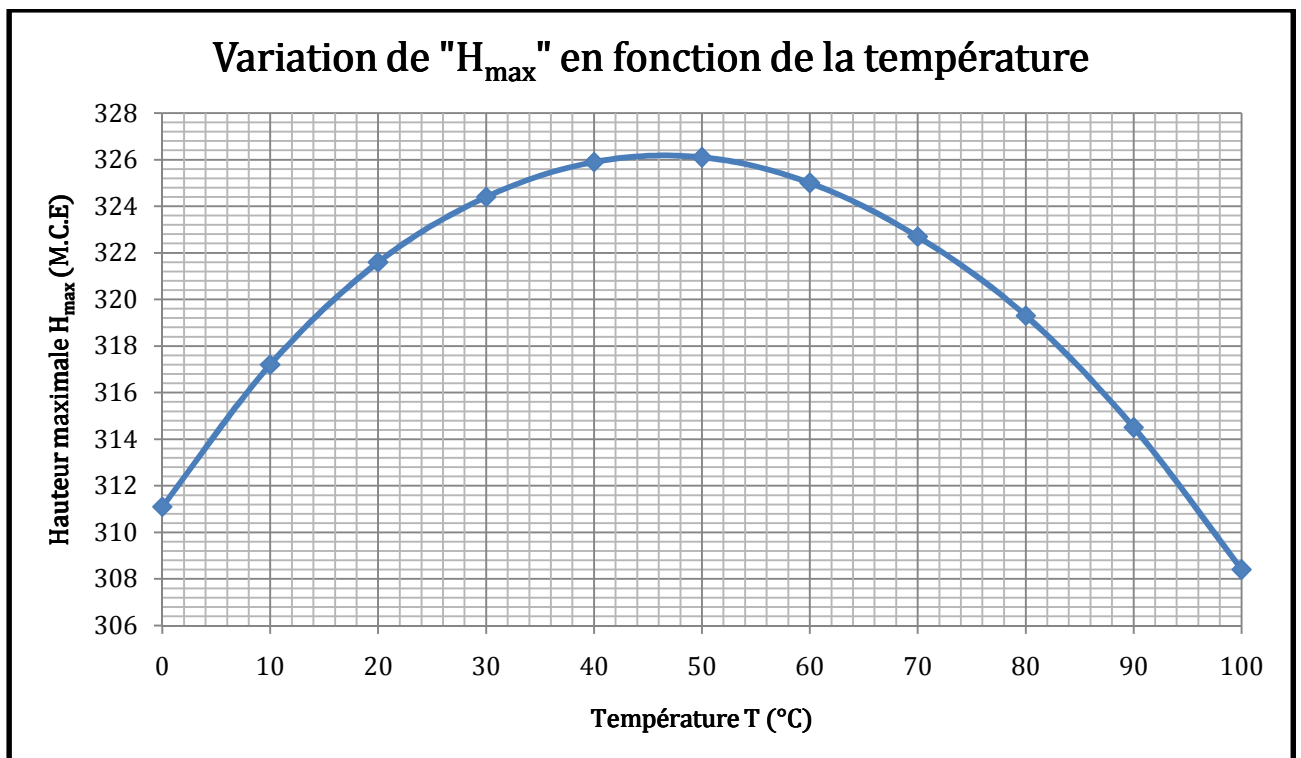


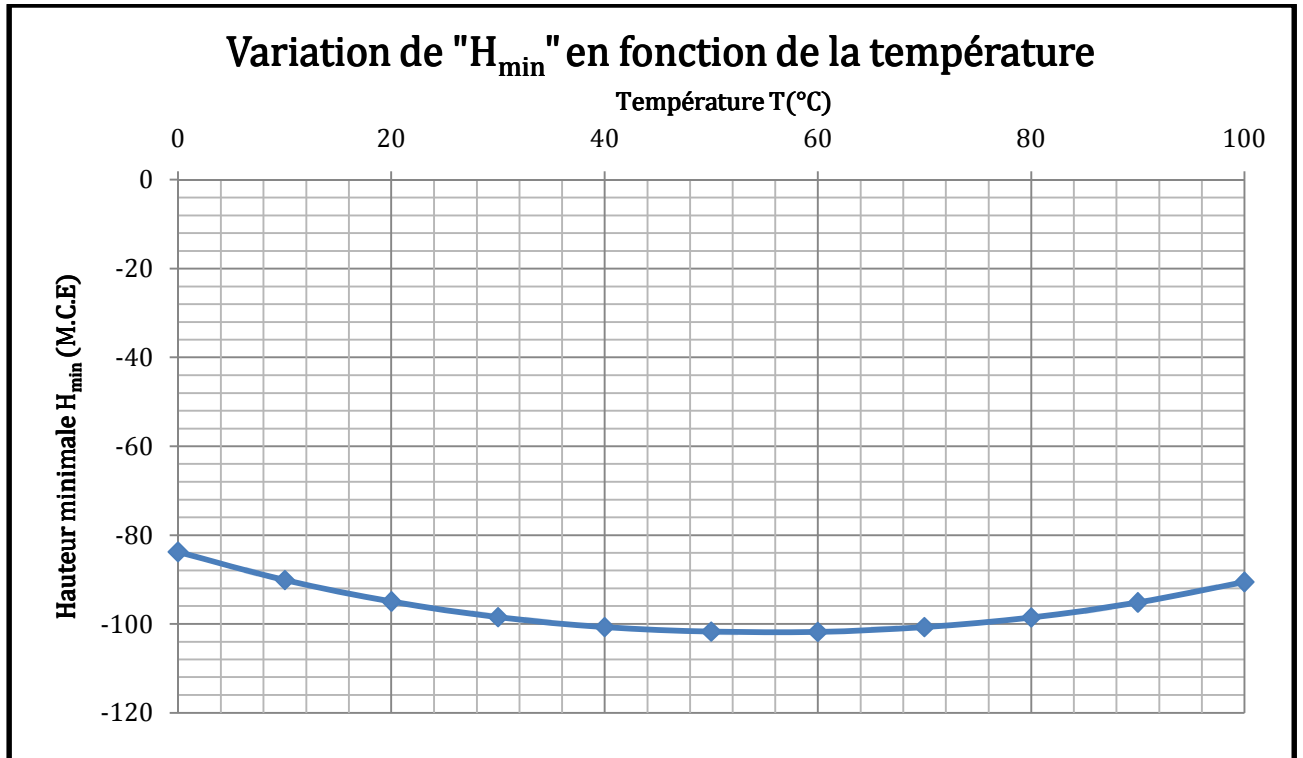
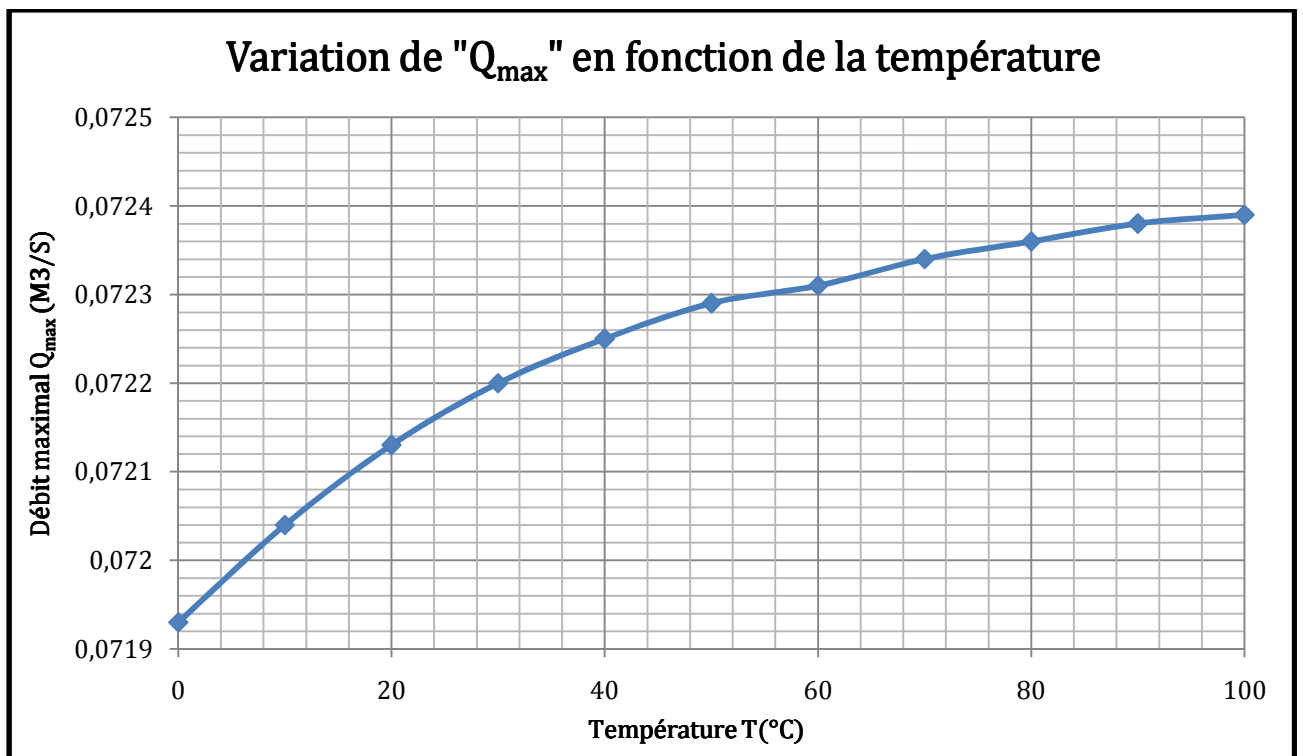
Fig. V. 47.**Fig. V. 48.**

Fig. V. 49.

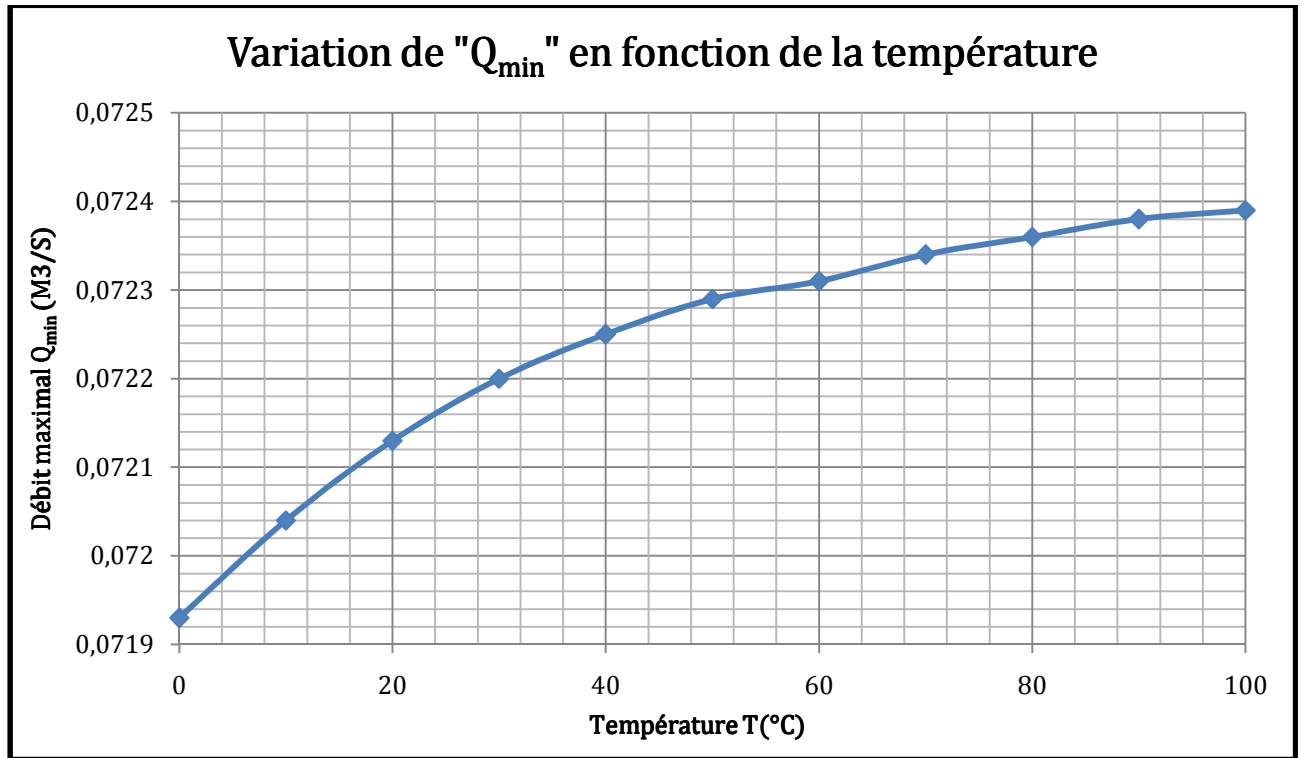


Fig. V. 50.

Chapitre VI

Chapitre. VI. Interprétation des résultats :

Introduction : le modèle que nous avons simulé, constitué d'un réservoir muni d'une conduite équipée à son extrémité aval d'une vanne, présente le système le plus simple et le plus adéquat dans l'analyse de l'écoulement transitoire en charge.

La simulation s'est déroulée pour différentes températures allant de « T = 0 °C » jusqu'à « T= 100 °C », avec un pas de température de « 10 °C » pendant une durée de 20 secondes pour chaque simulation.

Les résultats obtenus pour la célérité des ondes, les hauteurs maximales et minimales ainsi que pour les débits maximaux et minimaux pour les différents points de calculs critiques, qui sont respectivement :

- Point amont au niveau du réservoir.
- Point médiane au milieu de la conduite.
- Point aval au niveau de la vanne.

Sont représentés par des figures classées comme suit :

- Des figures qui présentent la variation des hauteurs de surpression et de dépression en fonction du temps pour le point de la limite aval situé au niveau de la vanne.
- Des figures qui présentent la variation des débits en fonction du temps pour le point de la limite amont situé au niveau du réservoir.
- Des figures qui présentent la variation des hauteurs et des débits en fonction du temps pour le point médian « M ».

Les valeurs ainsi obtenus pour chaque pas de température sont regroupées et récapitulées dans le tableau « **V. 11.** », ce dernier nous a permis de construire les figures suivant:

- ❖ **Fig. V.46** : Variation de « a » en fonction de la température « T ».
- ❖ **Fig. V.47** : Variation de « H_{\max} » en fonction de la température « T ».
- ❖ **Fig. V.48** : Variation de « H_{\min} » en fonction de la température « T ».
- ❖ **Fig. V.49** : Variation de « Q_{\max} » en fonction de la température « T ».
- ❖ **Fig. V.50** : Variation de « Q_{\min} » en fonction de la température « T ».

Ces figures traduisent le comportement du phénomène transitoire en fonction du changement thermique.

1. Analyse des résultats : l'examen des résultats obtenus, nous permet de faire les observations suivantes :

1.1. Mécanisme du phénomène transitoire:

- ❖ Le déclenchement du phénomène transitoire est causé par la fermeture de la vanne situé à l'extrémité aval de conduite.
- ❖ La fermeture de la vanne est une fermeture brusque « $T_f = 0$ ».
- ❖ Les valeurs de surpressions et de dépressions maximales sont enregistrées immédiatement après la fermeture de la vanne au point de l'extrémité aval de la conduite au niveau de la vanne espacée temporellement par $t = 2L/a$.
- ❖ Les valeurs de débit maximum et minimum sont enregistrées au point de l'extrémité amont de la conduite au niveau du réservoir.
- ❖ L'atténuation des ondes se fait progressivement en fonction de la rugosité des parois de la conduite et la viscosité du fluide.

1.2. Effet thermique : la récapitulation des résultats obtenus pour différentes températures dans le tableau « V. 11 » nous a permis d'établir les figures « Fig. V.46 .47.48.49.50. », qui représentent le comportement des différents paramètres de l'écoulement avec l'évolution de la température :

1.2.1. La célérité « a » : d'après la « Fig. V. 46 » qui représente une courbe : $a = f(t)$, construite à partir des résultats de la valeur de la célérité « a » obtenu pour les différentes températures, on en déduit que :

- Partant de « $a = 1268,66$ (m/s) » à « $T = 0$ (°C) », La valeur de la célérité « a » croit progressivement avec l'augmentation de la température.

- La valeur maximale de « a » est enregistrée pour « T=60 (°C) », elle vaut : 1381,671 (m/s).
- Au delà de « T = 50 (°C) » la valeur de la célérité commence à baisser progressivement avec la l'augmentation de la température.
- L'abaissement de la célérité continue jusqu'à la température finale « T=100(°C) » ou elle atteint une valeur de « 1323,292 (m/s) ».
- Il en résulte que le taux d'accroissement de la célérité est plus élevé que celui d'abaissement dans l'intervalle de température que nous avons fixé « T = 0 → 100 (°C) ».

1.2.2. **Les surpressions « H_{\max} » :** La figure « Fig. V. 47 », représentée par la courbe « $H_{\max} = f(T)$ », montre la variation de la surpression « H_{\max} » en fonction de l'augmentation de la température « T », l'analyse de la courbe, nous permet de dire que :

- la courbe « $H_{\max} = f(T)$ » connaît une valeur initiale de « $H_{\max} = 311,1$ (M.C.E) » pour la température initiale de « T = 0 (°C) ».
- la valeur de « H_{\max} » accroît progressivement avec l'augmentation de la température jusqu'à atteindre sa valeur maximale de « $H_{\max} = 326.1$ (M.C.E) » pour une température de « T= 50 (°C) ».
- Au-delà de « $H_{\max}=326.1$ (M.C.E) », la valeur de la surpression commence à s'abaisser progressivement avec l'augmentation de la température « T » jusqu'à ce que cette dernière atteint sa valeur finale de « T= 100 (°C) » où on

trouve « $H_{\max} = 308,4$ (M.C.E) » qui représente la valeur minimale de la surpression.

- Le taux d'accroissement de la surpression est approximativement égal à celui d'abaissement dans l'intervalle de température que nous avons fixé « $T = 0 \rightarrow 100$ (°C) ».

1.2.3. Les dépressions « H_{\min} » : La figure « Fig. V. 48 », représentée par la courbe « $H_{\min} = f(T)$ », montre la variation de la dépression « H_{\min} » en fonction de l'augmentation de la température « T », l'examen de la courbe, nous permet de dire que :

- La courbe « $H_{\min} = f(T)$ » connaît une valeur initiale de « $H_{\min} = -83,81$ (M.C.E) » pour la température initiale de « $T = 0$ (°C) ».
- la valeur de « H_{\min} » accroit progressivement avec l'augmentation de la température jusqu'à atteindre sa valeur maximale de « $H_{\min} = -101,8$ (M.C.E) » pour une température de « $T = 60$ (°C) ».
- Au-delà de « $H_{\min} = -101,8$ (M.C.E) », la valeur de la dépression commence à diminuer progressivement avec l'augmentation de la température « T » jusqu'à ce que cette dernière atteint sa valeur finale de « $T = 100$ (°C) » où on trouve « $H_{\min} = -90,57$ (M.C.E).
- Le taux d'accroissement de la dépression est approximativement égal à celui d'abaissement dans l'intervalle de température que nous avons fixé « $T = 0 \rightarrow 100$ (°C) ».

1.2.4. Les Débits maximums « Q_{\max} »: les débits maximums sont représentés par la courbe « $Q_{\max} = f(T)$ » dans la figure « Fig. V. 49 », de cette courbe on peut déduire que :

- La valeur initiale de « $Q_{\max} = 0.07193 \text{ (M}^3/\text{S)}$ » correspond à la température initiale « $T = 0 \text{ (}^\circ\text{C)}$ ».
- La courbe « $Q_{\max} = f(T)$ » indique que le débit maximal accroît progressivement avec la l'augmentation de la température.
- Contrairement à la courbe des hauteurs maximales et minimales, la courbe « $Q_{\max} = f(T)$ » ne change pas de signe au alentour de « $T = 50 \text{ (}^\circ\text{C)}$ », elle continue avec le même signe jusqu'à ce que le débit atteint sa valeur maximale de « $Q_{\max} = 0.07239 \text{ (M}^3/\text{S)}$ » à la température « $T = 100 \text{ (}^\circ\text{C)}$ ».

1.2.5. Les débits minimums « Q_{\min} »: de même que les débits maximums, les débits minimums sont représentés par la courbe « $Q_{\min} = f(T)$ » dans la figure « Fig. V. 50 ». l'examen de la courbe nous permet de dire aussi que :

- La valeur initiale de « $Q_{\min} = -0.06954 \text{ (M}^3/\text{S)}$ » correspond à la température initiale « $T = 0 \text{ (}^\circ\text{C)}$ ».
- La courbe « $Q_{\min} = f(T)$ » indique que le débit maximal accroît progressivement avec la l'augmentation de la température.
- La courbe « $Q_{\min} = f(T)$ » ne change pas de signe aux alentours de « $T = 50 \text{ (}^\circ\text{C)}$ », elle continue avec le même signe jusqu'à ce que le débit atteint sa valeur maximale de « $Q_{\min} = -0.07039 \text{ (M}^3/\text{S)}$ » à la température « $T = 100 \text{ (}^\circ\text{C)}$ ».

1.3. **Interprétation des résultats** : Les résultats ainsi obtenus, traduisent le comportement des ondes de l'écoulement transitoire en fonction du changement thermique. L'analyse des résultats nous a permis de faire une approche vers la compréhension du problème posé et tirer les conclusions, suivantes :

L'influence de la température sur l'écoulement transitoire réside dans le fait qu'une augmentation de la température affecte les propriétés de l'écoulement transitoire de façon directe ou indirecte, les principales caractéristiques de ces écoulements sont :

- La célérité de l'onde « a ».
- La hauteur maximale qui représente la surpression maximale «H_{max} ».
- La hauteur minimale qui représente la dépression maximale «H_{min} ».
- Le débit maximal « Q_{max} ».
- Le débit minimal «Q_{min} ».

Ces propriétés sont reliées entre elles par le système d'équation (IV. 7. 13) obtenu précédemment :

$$\begin{aligned}
 Q_{Pi} &= 0.5 \left[\frac{1}{A} (Q_{i-1} + Q_{i+1}) + \frac{g}{a} (H_{i-1} - H_{i+1}) - \frac{\lambda \Delta t}{2DA} (Q_{i-1}|Q_{i-1}| + Q_{i+1}|Q_{i+1}|) \right] \\
 H_{Pi} &= 0.5 \left[\frac{a}{gA} (Q_{i-1} - Q_{i+1}) + (H_{i-1} + H_{i+1}) - \frac{\lambda \Delta t}{2DA} \frac{a}{g} (Q_{i-1}|Q_{i-1}| - Q_{i+1}|Q_{i+1}|) + \left(\alpha \frac{a^2}{g} \right) (2T_P^{n+1}) \right]
 \end{aligned}$$

Afin de pouvoir interpréter les résultats, obtenus et représentés par les courbes précédentes, nous devons recourir au système d'équation (IV. 7. 13). Chaque monôme du système représente une quantité précise tel que :

1. Pour la première équation :

$$Q_{Pi} = 0.5 \left[\frac{1}{A} (Q_{i-1} + Q_{i+1}) + \frac{g}{a} (H_{i-1} - H_{i+1}) - \frac{\lambda \Delta t}{2DA} (Q_{i-1}|Q_{i-1}| + Q_{i+1}|Q_{i+1}|) \right]$$

Les deux premiers termes de l'équation indiquent qu'un simple changement dans l'énergie potentiel exprimée en charge « H » cause un changement dans l'énergie cinétique exprimée en débit « Q », où en parle de transformation d'énergie potentiel en énergie cinétique.

Le troisième terme concerne la dissipation énergétique induite par les effets de frottement et de viscosité.

2. Pour la deuxième équation :

$$H_{Pi} = 0.5 \left[\frac{a}{gA} (Q_{i-1} - Q_{i+1}) + (H_{i-1} + H_{i+1}) - \frac{\lambda \Delta t}{2DA} \frac{a}{g} (Q_{i-1}|Q_{i-1}| - Q_{i+1}|Q_{i+1}|) + \left(\alpha \frac{a^2}{g} \right) (2T_P^{n+1}) \right]$$

Contrairement à la première équation, les deux premiers termes traduisent le fait qu'un simple changement dans l'énergie cinétique exprimée en débit « Q » engendre un changement dans l'énergie potentiel exprimée en charge « H », on d'autre terme, on parle de la transformation de l'énergie cinétique en énergie potentiel.

De même que précédemment le troisième terme traduit la dissipation énergétique.

Le dernier terme désigne qu'un simple changement dans l'énergie thermique exprimé en degré de température « T » provoque un changement dans l'énergie potentiel exprimée en charge « H », on parle ici de transformation de l'énergie thermique en énergie potentiel.

En examinant les deux équations nous pouvons dire que :

1. Contrairement à l'énergie cinétique exprimée en débit « Q », l'énergie potentielle exprimée en charge « H » dépend d'une façon directe de la valeur de célérité « a ».
2. L'allure des courbes « Fig. V. 47 » et « Fig. V. 48 », qui représentent les valeurs des surpressions et de dépressions en fonction de la température, dépend dans son intégralité de la célérité « a ».
3. Le comportement de la célérité « a » avec l'évolution de la température est représenté dans « Fig. V. 46 », la courbe « a=f(T) » connaît un maximum à « T=60 (°C) » de « a=1381,671 (M/S) », afin de comprendre ce comportement par rapport au changement thermique, nous devons tenir compte de formule de la célérité :

$$a = \frac{\sqrt{\frac{\beta}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\beta D}{eE}}}$$

Avec :

ρ : masse volumique (spécifique) du liquide ; Pour l'eau aux conditions normales de température et de pression, la masse volumique est:

$$\rho = 1000 \text{ Kg/m} = 102 \text{ KgF S}^2/\text{M}^4 = 1 \text{ KgN/M}^4 ,$$

β : compressibilité du liquide, pour l'eau:

$$\beta = 2.03 \cdot 10^6 \frac{\text{KN}}{\text{M}^2} = 2.08 \cdot 10^8 \frac{\text{KgF}}{\text{M}^2}$$

D et e : diamètre intérieur et épaisseur de la conduite.

E : module d'élasticité du matériau de la conduite. Le module d'élasticité de Young «E», dépend de la nature de la paroi.

La dépendance de la célérité « a » de la température, dans la formule précédente, est fonction des modules de compressibilité du liquide « β », d'élasticité du matériau de la conduite « E » ainsi que de la masse volumique « ρ » qui sont fortement influencés par la température ambiante, affectant de manière substantielle la célérité de l'onde élastique.

Les valeurs de ces trois paramètres lors de notre simulation sont représenté dans le tableau suivant :

| T (°C) | ρ (KG/M ³) | B (Pa) | E (Pa) | a (M/S) |
|------------------|--|------------------|------------------|-------------------|
| 0 | 999,88837 | 1,820434 E+9 | 2,032824E+11 | 1268,66 |
| 10 | 999,75964 | 1,941199 E+9 | 2,037755E+11 | 1305,332 |
| 20 | 998,31671 | 2,0372 E+9 | 2,033336E+11 | 1333,973 |
| 30 | 995,77191 | 2,1085 E+9 | 2,028573E+11 | 1355,601 |
| 40 | 992,30481 | 2,1550 E+9 | 2,023464E+11 | 1370,642 |
| 50 | 988,06256 | 2,1768 E+9 | 2,01801E+11 | 1379,315 |
| 60 | 983,15973 | 2,1739 E+9 | 2,012212E+11 | 1381,671 |
| 70 | 977,67804 | 2,1462 E+9 | 2,006068E+11 | 1377,603 |
| 80 | 971,66705 | 2,0938 E+9 | 1,99958E+11 | 1366,846 |
| 90 | 965,14331 | 2,0166 E+9 | 1,992746E+11 | 1348,96 |
| 100 | 958,09137 | 1,9147 E+9 | 1,985568E+11 | 1323,292 |

Tableau. VI. 1

Nous pouvons, ainsi, construire les graphes suivants :

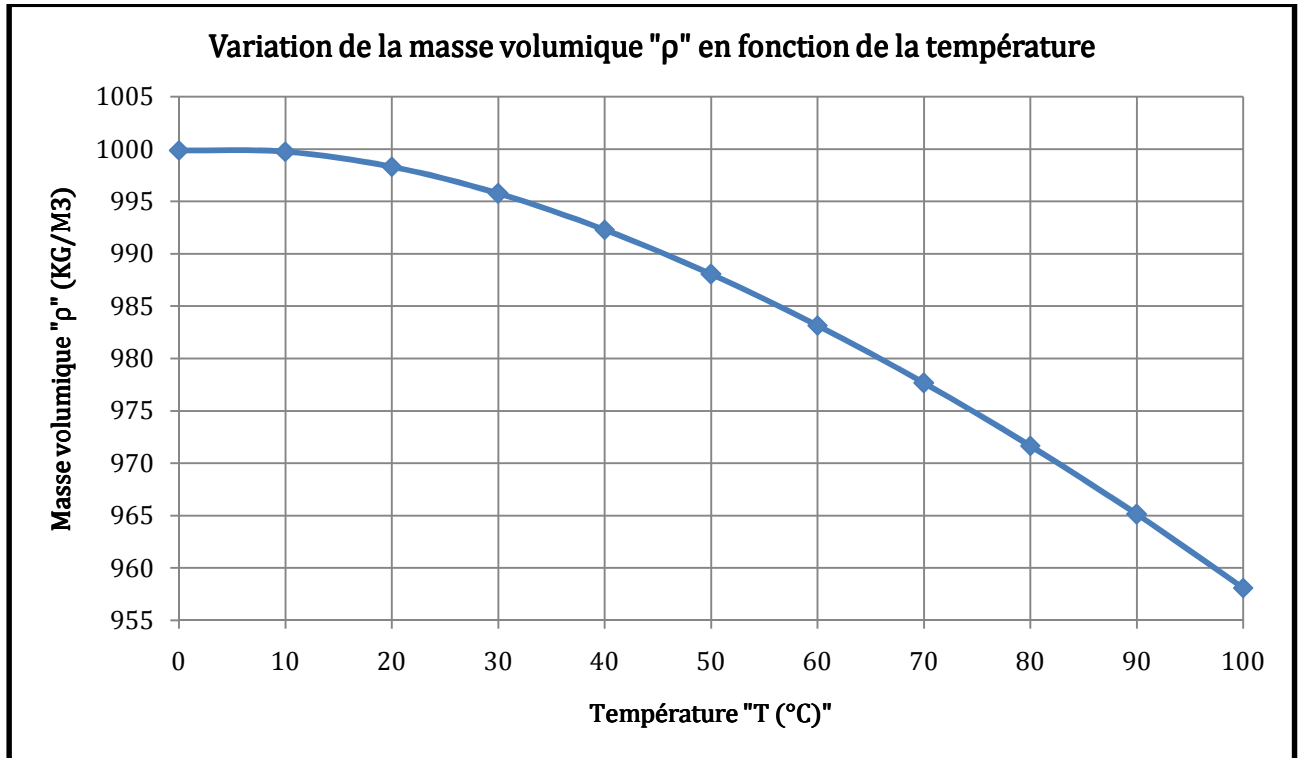


Fig. VI. 1.

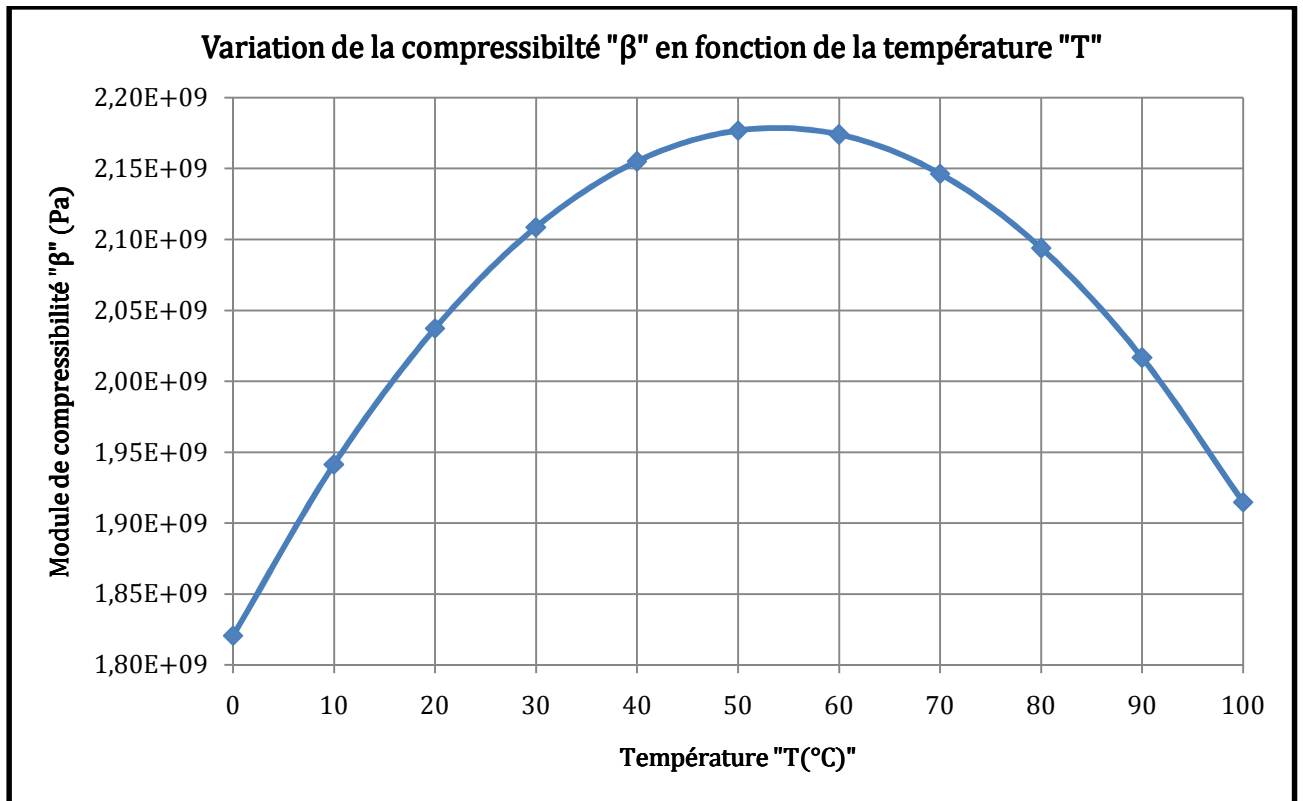


Fig. VI. 2.

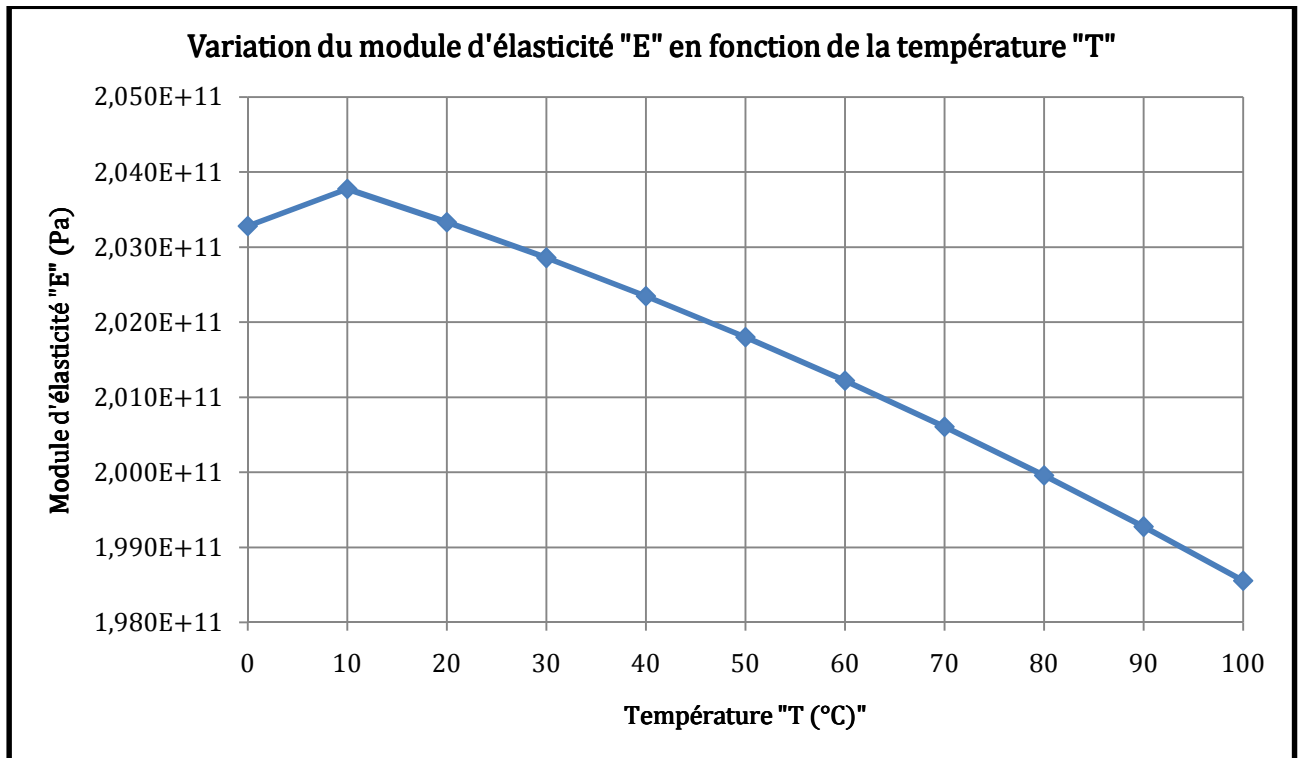


Fig. VI. 3.

Conclusion :

D'après l'examen que nous venons d'effectuer, nous avons déduit que le paramètre essentiel affectant la célérité « a » est le module de compressibilité « β », ce dernier connaît une valeur maximale pour une température de « $T = 50$ (°C) ».

Alors, nous concluons que l'effet direct de la température sur les propriétés physique du fluide, a un impact sur les propriétés de l'écoulement transitoire, notamment sur les surpressions et les dépressions. Ces derniers dépendent de la valeur de la célérité « a », qui à son tour est fonction de la compressibilité du fluide, ensuite, de l'élasticité du matériau de la conduite ainsi que de la masse volumique du fluide.

Conclusion Générale

Conclusion générale

L'étude que nous avons menée, concernant la modélisation des écoulements transitoires en charge avec transfert de chaleur, a pour but de faire une approche pour la compréhension du phénomène transitoire ainsi que son comportement vis-à-vis les contraintes qui affectent ses principales propriétés hydraulique, notamment l'influence du changement thermique sur la charge et le débit.

Pour cela, nous avons modélisé mathématiquement le phénomène physique, tout en prenant en compte la contrainte thermique, à cet effet, nous avons apporté une extension au système d'équation classique de Saint-Venant, en lui ajoutant le terme tenant compte de l'influence thermique qui se traduit par une dilatation thermique volumique.

La résolution du système mathématique, n'a pu être obtenue, qu'après une discrétisation numérique de ce système. Donc, nous avons employé deux méthodes les plus répandues pour la résolution de ce genre de système d'équation aux dérivées partielles hyperboliques, en l'occurrence des différences finies et celle des caractéristiques.

Le modèle de l'étude choisi pour la simulation numérique est constitué d'un système simple, afin de minimiser toutes les contraintes secondaires. Alors, nous avons utilisé le logiciel AFT IMPULSE vu ses avantages et sa compatibilité avec notre besoin de la prise en compte de l'effet thermique.

L'examen des résultats obtenus pour différentes températures, indique que l'effet thermique sur les propriétés de l'écoulement transitoire est important, non seulement sur le plan théorique mais, aussi bien, sur le plan pratique. Pour le cas échéant, d'après la simulation que nous venons de faire, la différence entre la valeur de la surpression maximale à la température initiale « $T = 0$ (°C) » et celle à la température « $T = 50$ (°C) » est de 10 (M.C.E). Cette différence ne peut pas être négligée ni sur le plan théorique ni sur le plan pratique, un tel écart entre les deux hauteurs peut causer des dommages irréparables au niveau des

installations, pour lesquelles on a pas prévu cette augmentation de pression due aux écarts thermiques, lors de leurs études.

Le comportement des propriétés de l'écoulement transitoire lors de l'évolution de la contrainte thermique est traduit par une amplification des hauteurs de surpression et de dépression jusqu'à atteindre une valeur maximale ou un pic à une certaine température, pour notre cas elle est de « 50 (°C) », au delà de cette valeur l'amplitude des ondes commence à s'atténuer progressivement avec l'augmentation de la température.

L'explication de ce comportement réside dans la nature de la célérité « a » qui a une grande influence sur l'amplitude des ondes de surpression et de dépression. La valeur de « a » est sensible au changement thermique, elle dépend de la géométrie de la conduite du diamètre et de l'épaisseur, de l'élasticité du matériau de la conduite et essentiellement de la compressibilité du liquide ainsi que de sa masse volumique. Le module de compressibilité du liquide présente la contrainte principale qui domine la valeur de « a », ce dernier est sensible au changement thermique.

Donc nous pouvons conclure que le fait de changer la température du liquide, on apporte, relativement, une légère variation du module de compressibilité, cette variation influe grandement sur la célérité « a », celle-ci à son tour agit sur l'amplitude des ondes.

Enfin, nous signalons que l'objet de notre étude concernant la modélisation des écoulements transitoires dans les conduites en charge avec transfert de chaleur, a nécessité l'emploi de plusieurs disciplines scientifiques, partant de la mécanique des fluides, la thermodynamique ou la thermo-hydraulique jusqu'à l'analyse numérique et l'informatique.

Afin d'analyser les systèmes hydrauliques avec effet thermique, il faut associer la thermodynamique pour l'aspect thermique, la mécanique des fluides pour

l'aspect hydraulique ainsi que le transfert de chaleur pour la transmission de chaleur du et vers le fluide.

Enfin, il y'a lieu de signaler que le travail étudié n'a pas pu être achevé par le fait que plusieurs paramètres : les modes de transfert de chaleur, l'échange thermique avec l'extérieur, n'ont pu être intégrer. En perspectives, notre projet consiste à développer cette étude en tenant compte prioritairement de ces paramètres dans des systèmes hydrauliques plus complexes.

Le couplage entre les différents domaines est illustré par la Figure « II-8» suivante, avec les équations constitutives :

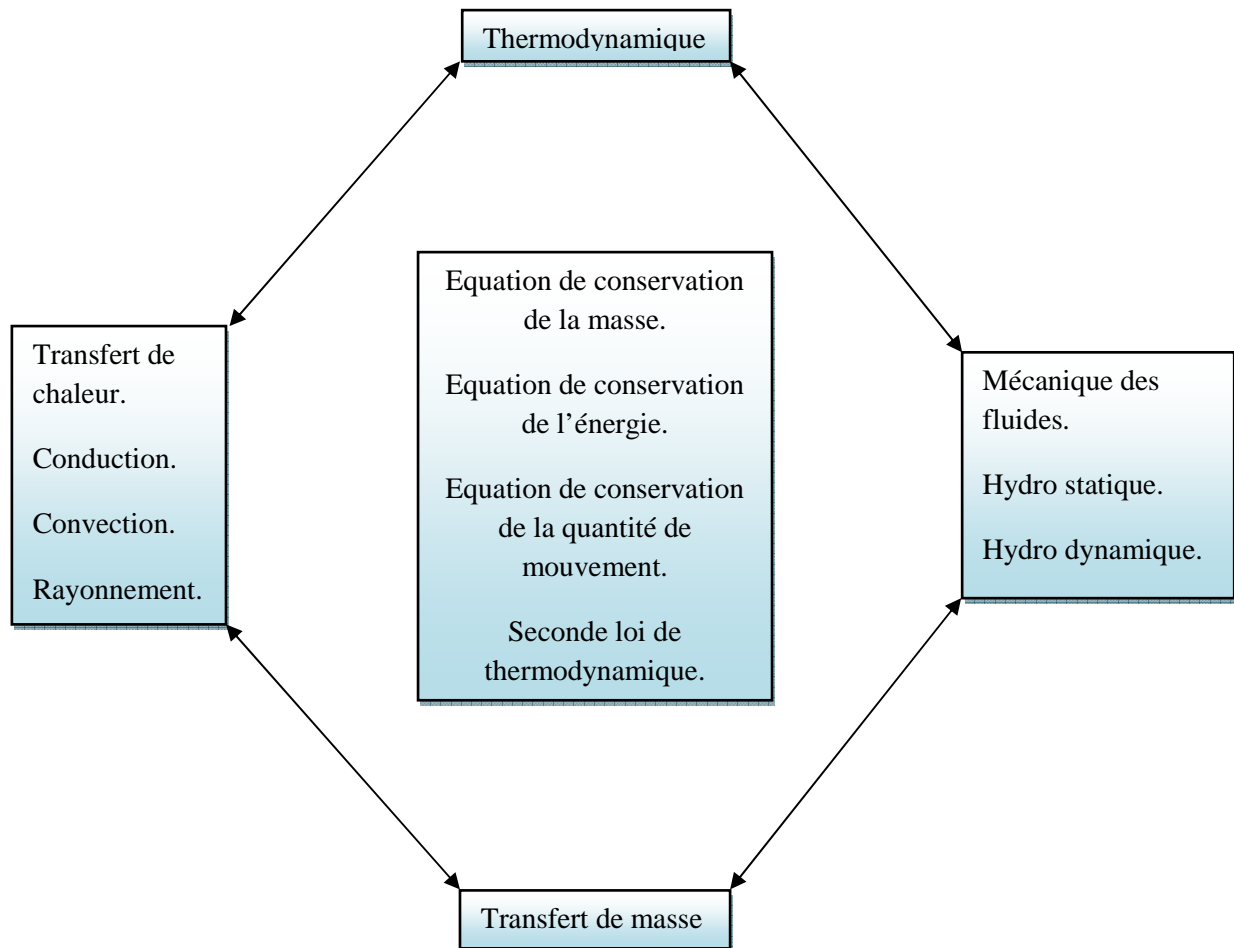


Fig.54. Le couplage entre les différents domaines.

Bibliographie

Bibliographie

- 1.** « **HYDRAULIQUE GENERALE** » Ecole Nationale Du Génie De L'eau Et de L'environnement De Strasbourg.
- 2.** « **COUPS DE BELIER** » par Marcel FRELIN, Ingénieur CNAM
Docteur de l'Université Sous-directeur honoraire de Laboratoire au Conservatoire national des arts et métiers.
- 3.** « **ECOULEMENTS NON PERMANENTS** », A.L. MAR, JUIN 2009.
- 4.** « **HYDRAULIQUE GENERALE ET APPLIQUEE** », CARLIER M, Paris 1980.
- 5.** « **THÉORIE GENERALE DU COUP DE BELIER** », Charles JAEGER 1933.
- 6.** « **A REVIEW OF WATER HAMMER THEORY AND PRACTICE** »,
 - Mohamed S. Ghidaoui.
 - Ming Zhao. Department of Civil Engineering, The Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, China.
 - Duncan A. McInnis Surface Water Group, Komex International Ltd., 4500 16th Avenue, Suite 100, N. W. Calgary, Alberta T3B 0M6, Canada.
 - David H. Axworthy 163 N. Marengo Avenue, #316, Pasadena, CA 91101.

- 7.** «**SIMULATION OF WATER HAMMER FLOWS WITH UNSTEADY FRICTION FACTOR** », MIMI DAS SAIKIA¹ AND ARUP KUMAR SARMA, Department of Civil Engineering, Indian Institute of Technology GUWAHATI, North GUWAHATI, ASSAM, INDIA.
- 8.** «**MODELISATION DES SYSTEMES HYDRAULIQUES A ECOULEMENTS TRANSITOIRES EN CHARGE** », Jean-Louis Boillat, Paulo de Souza, Laboratoire de Constructions Hydrauliques, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2004.
- 9.** «**WATER HAMMER SIMULATION BY IMPLICIT FINITE DIFFERENCE SCHEME USING NON-SYMMETRICAL STAGGERED GRID**», MORTEZA SEPEHRAN, MOHAMMAD ALI BADRI NOUDEH Amir Kabir University of Technology Chemical Engineering Department No. 24 Hafez Ave. Tehran IRAN.
- 10.** «**ANALYSE NUMERIQUE DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES** », Raphaëlle Herbin ; 26 octobre 2011.
- 11.** «**METHODES NUMERIQUES ET APPLIQUEES** », Vincent Guinot, Bernard Capelaere. Ecole Polytechnique de Montpellier, 2005/2006.
- 12.** «**INITIATION A LA SIMULATION NUMERIQUE EN MECANIQUE DES FLUIDES : ELEMENTS D'ANALYSE NUMERIQUE** », Frédéric DABBENE et Henri PAILLERE, Juin 2003.

- 13.** « **METHODES, ANALYSE ET CALCULS NUMERIQUES** », Eric Goncalves, Institut Polytechnique De Grenoble, septembre 2005.
- 14.** « **DIFFERENCES FINIES ET ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE** », Nicolas Champagnat, octobre 2010.
- 15.** « **MECANIQUE DES FLUIDES** », Jean-François SINI, 2008.
- 16.** « **THE TEMPERATURE DEPENDENCE OF THE ISOTHERMAL BULK MODULUS AT 1 BAR PRESSURE** »,
➤ J. Garai, Dept. of Earth Sciences, Florida International University, University Park, USA.
➤ A. Laugier I.D.P.C.E.S Rennes, France.
- 17.** « **BASICS OF FLUID MECHANICS** », Genick Bar–Meir, Ph. Chicago, 2011.
- 18.** « **FLUID MECHANICS - FOURTH EDITION** », Frank M. White University of Rhode Island.
- 19.** « **PHYSIQUE DES FLUIDES** », V. Légat, 2010.
- 20.** « **TRANSFERT DE CHALEUR** », Yves Jannot, 2009.
- 21.** « **PHENOMENES DE TRANSFERT** », Prof. H. Hofmann.
- 22.** « **CONVECTION** », J.Brau, INSA DE LYON, 2006.
- 23.** « **COURS DE THERMIQUE** », Philippe Roux, 2006.

- 24. « MODELISATION REALISTE EN CONDITIONS EXTREMES DES SERVOVALVES ELECTROHYDRAULIQUE UTILISEE POUR LE GUIDAGE ET LA NAVIGATION AERONOTIQUE ET SPATIALE »**, Batoul Attar, Thèse de Doctorat de l'université de Toulouse, 2008.
- 25. « CONTRIBUTION EXPERIMENTALE A L'ETUDE DE LA CONVECTION THERMIQUE EN REGIME LAMINAIRE, TRANSITOIRE ET TURBULENT POUR UN GUIDE A SEUIL EN ECOULEMENT DANS UNE CONDUITE »**, Jorge Peixinho, Thèse de Doctorat de l'université d'Henri Poincaré, Nancy1, 2004.