République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Hadj Lakhdar-Batna

Faculté des sciences

Département de Mathématiques

Mémoire

Présentée pour l'obtention du diplôme de

Magister
(École doctorale)

Option: Mathématiques

Thème

Comportement Asymptotique Singulier des Equations de Stokes Couplées

Par :

MEKSEH NEDJMA

Devant le jury :

Youkana Amar	**M.C.A**	**Univ. De Batna**	**Président**
Bentalha Fadila	**M.C.A**	**Univ. de Batna**	**Rapporteur**
Aibeche Aissa	**Pr.**	**Univ. de Sétif**	**Examinateur**
Mokrane Ahmed Zerrouk	**M.C.A**	**Univ. de Batna**	**Examinateurs**

Table des matières

0.1 Introduction

La prédiction théorique des propriétés effectives de matériaux composites est un problème important en mécanique et en engineering. Les méthodes d'homogénéisation sont parmi les méthodes qui ont été élaborées donnant la possibilité d'estimer les propriétés effectives en utilisant seulement les informations microstructurales.

D'une façon générale, un des buts des méthodes d'homogénéisation est l'étude du comportement " global "et " effectif " de matériaux hétérogènes "composites " présentant de "nombreuses " hétérogénéités (fibres, inclusions, perforations....) dont la taille est " petite " par rapport aux dimensions caractéristiques du matériau. En effet, ces méthodes nous permettent d'approcher de manière tout à fait satisfaisante ce matériau composite par un matériau dit " homogénéisé " fictif, dont les caractéristiques posent moins de problèmes. Elles s'appliquent dans différents domaines : thermique, élasticité, électromagnétisme, mécanique des fluides,...

Du point de vue mathématique, ces méthodes résident dans la recherche d'une équation, dite homogénéisée ou macroscopique, qui peut décrire des phénomènes qui ont lieu dans un milieu non homogène. Ce passage d'un milieu non homogène à un milieu homogène équivalent revient techniquement à un passage à la limite avec un ou plusieurs petits paramètres liés à la non homogénéité du milieu.

Les progrès les plus récents en théorie de l'homogénéisation concernent l'apparition de termes supplémentaires dits 'termes étranges' D. Cioranescu, F. Murat [12] dans les équations limites, ou bien d'équations limites d'un type autre que les équations de départ, ce qui correspond aux 'effets non locaux' [3] [4][6] [7] [8][9] [11] représentatifs d'un nouveau mode d'interaction entre l'échelle macroscopique et l'échelle microscopique.

Ce mémoire s'intéresse aux effets non locaux résultant du comportement asymptotique d'un milieu ambiant (non fluide), contenant une distribution ε-périodique de très petites particules sphériques fluides, de rayon r_ε. On suppose que $\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \to 0$ lorsque ε tend vers zéro. Sous cette condition le volume global des particules fluides tend vers zéro, ce qui signifie qu'à la limite les particules disparaissent, on compense alors cette hypothèse en supposant que leur masse globale reste de l'ordre de l'unité.

Plus précisément, le problème étudié dans ce mémoire est la détermination, sous les conditions citées plus haut, du comportement asymptotique (lorsque $\varepsilon \to 0$) de la solution $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ du problème $(1) - (11)$. Ce comportement dépend du comportement asymptotique de $\gamma_\varepsilon = \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3}$ appelé coefficient de raréfaction de la distribution. On distingue dans cette étude les trois cas suivants :

-les particules ont la taille critique $r_\varepsilon = O(\varepsilon^3)$, correspondant à $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \gamma_\varepsilon = \gamma > 0$

-les particules sont plus grandes que la taille critique $\varepsilon^3 << r_\varepsilon$, correspondant à $\gamma = +\infty$

-les particules sont plus petites que la taille critique $r_\varepsilon << \varepsilon^3$, correspondant à $\gamma = 0$.

L'étude asymptotique dans ce contexte a nécessité l'utilisation d'une méthode récente, appelée ''méthode de la zone de contrôle'' [7] [8] [9] , et qui est une adaptation de la méthode des échelles multiple aux sous-structures très fines, difficile à mettre en œuvre car basée sur la construction de fonctions test particulières nécessaires pour lever la difficulté que posent les termes singuliers dans les équations.

0.1.1 Description du mémoire

Ce mémoire est formé de sept parties et une annexe.

La première partie comporte le rappel de quelques notions fondamentales d'analyse fonctionnelle utilisées dans le mémoire.

La deuxième partie est consacrée à la description du problème Q_ε et l'établissement et l'étude d'une première formulation variationnelle (15) ne faisant intervenir que u^ε. Pour montrer l'existence de la pression p_ε dans Q_ε une deuxième formulation est donnée (18).

Dans la troisième partie on donne les outils spécifiques de la méthode de la zone de contrôle, outils en fonction desquels s'écrira les fonctions tests qui seront utilisées pour les passages à la limite. A savoir les opérateurs localisants G_{r_ε}, G_{R_ε} donnés par(23) et la fonction clé (40) et leurs propriétés donnée dans le lemme 5, basées.essentiellement sur les estimations données dans les lemmes 3 et 4 Par contre l'opérateur M_{D_ε} donné par (31) sera utilisé seulement dans les démonstrations.

La quatrième partie s'intéresse essentiellement au cas $(\gamma_\varepsilon^{-1})_\varepsilon$ bornée, englobant les deux cas $\gamma > 0$ et $\gamma = +\infty$. Dans cette situation l'estimation (50) a lieu, ce qui a permis d'établir les estimations à priori (57) et (58), estimations incontournables pour l'étude asymptotique de notre problème.

Le résultat le plus intéressant de ce travail est donné dans la cinquième partie lorsque les particules ont la taille critique $\gamma > 0$, le problème limite est un couple de deux équations (79) donnant les 'effets non locaux' représentés par le terme $4\nu\gamma\,(v - u)$ qui témoignent de l'effet des particules évanescentes.

Le cas où $\gamma = +\infty$ est donné dans la sixième partie, le problème limite correspond au problème posé initialement sur la matrice avec une fonction supplémentaire s'additionnant au second membre (90), témoignant d'un résiduel effet des particules évanescentes.

La partie sept s'intéresse à l'étude du cas $\gamma = 0$. Dans ce cas les estimations à priori (57) ne sont pas vérifiées, alors pour considérer quand même ce cas on a compensé l'hypothèse $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3} = 0$ par (93) dans le nouveau problème microscopique (94)-(98). Le problème limite est alors donné par (109) qui correspond à celui obtenu dans le cas $\gamma = +\infty$.

Dans l'annexe A on donne la démonstration des lemmes 5 et 6.

Première partie

Rappels et notations

Nous rappelons quelques notions d'analyses fonctionnelles nécessaires dans notre mémoire. Ce rappel a été conçu essentiellement à partir des ouvrages [10] [16] [17] [14].

0.2 Convergence faible dans un espace de Banach

Dans tout ce qui suit E est un espace de Banach muni de la norme $|.|$, on désigne par E' son dual (i.e. l'espace des formes linéaires continues sur E).

Proposition 1 *Pour $x \in E$ on définit l'application*

$$f_x : x' \in E' \longrightarrow \langle x', x \rangle_{E',E} \in \mathbb{R},$$

avec $\langle ., . \rangle_{E',E}$ le produit de dualité entre E et E'. Alors

$$f_x \in E''$$

et l'application

$$F : x \in E \longrightarrow f_x \in E'' \text{ est une isométrie,}$$

c'est-à-dire

$$|x|_E = |F(x)|_{E''} = |f_x|_{E''}.$$

Définition 1 *E est dit reflexif si $F(E) = E''$, on indentifie alors E et E''.*

Définition 2 *Soit (x_n) une suite de E, on dit que (x_n) converge faiblement vers x si*

$$\forall x' \in E', \quad \langle x', x_n \rangle_{E',E} \to \langle x', x \rangle_{E',E}$$

et on note $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E.

Proposition 2
1) Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E, alors la limite faible x de (x_n) est unique et (x_n) est bornée dans E.
2) Si $x_n \longrightarrow x$ fortement dans E, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E.

Proposition 3
1) Si

$$x_n \rightharpoonup x \text{ faiblement dans } E, \quad \text{et} \quad y_n \to y \text{ fortement dans } E'$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} \langle y_n, x_n \rangle_{E',E} = \langle y, x \rangle_{E',E}.$$

2) Si

$$x_n \to x \text{ fortement dans } E, \quad \text{et} \quad y_n \rightharpoonup y \text{ faiblement dans } E'$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} \langle y_n, x_n \rangle_{E',E} = \langle y, x \rangle_{E',E}.$$

Théorème 1 *(Théorème de Eberlein-Smuljan)*
Si E est reflexif et (x_n) une suite bornée dans E, alors

i) Il éxiste une sous- suite$(x_{n_k})_k$ de (x_n) et $x \in E$ tel que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ dans E.

ii) Si toutes les sous suites faiblement convergentes de (x_n) ont la même limite faible $x \in E$, alors c'est toute la suite (x_n) qui converge faiblement vers x.

0.3 Distributions

Dans tout ce qui suit Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue.

Définition 3 *Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, l'ensemble $supp\varphi = \overline{\{x \in \Omega,\ \varphi(x) = 0\}}$ est dit support de φ. On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact sur Ω.*

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note

$$\partial^{\alpha}\varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_2 ... \partial^{\alpha_n}x_n},\ \ \alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n) \quad et \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_n$$

Définition 4 *Soit (φ_n) une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on dit que (φ_n) converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si*
1) $supp\varphi_n$ reste dans un compact fixe K de Ω,
2)$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^{\alpha}\varphi_n$ tend vers $\partial^{\alpha}\varphi$ uniformément sur K.

Définition 5 *Toute application de $\mathcal{D}(\Omega)$ vers $\mathbb{R}$ linéaire et continue est dite distribution. On note par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω. On a alors, d'après la définition 4, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$*

$$\left\{\varphi_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \varphi \ \ dans\ \ \mathcal{D}(\Omega)\right\} \Longrightarrow \left\{\langle T, \varphi_n\rangle \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi\rangle\right\}$$

avec $\langle . \rangle$ produit de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$.

Soit (T_m) une suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on dit que (T_m) converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $\langle T_m, \varphi\rangle \underset{m \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi\rangle$.

Définition 6 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ par*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle.$$

0.4 Les espases L^p

0.4.1 Définitions

Définition 7 *Soit $p \in \mathbb{R}$, et $1 \leq p < \infty$, on définit*

$$L^p(\Omega) := \left\{ f,\ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \ mesurable\ et\ \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\},$$

et

$$L^\infty(\Omega) := \{f,\ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\ mesurable\ et\ il\ existe\ C \in \mathbb{R}_+\ telle\ que\ |f| \leq C\ \ p.p.\ sur\ \ \Omega\}.$$

1/ Si $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$|f|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} & si\ p < +\infty \\ \sup_{x\in\Omega} ess\, |f(x)| & si\ \ p = +\infty \end{cases},$$

avec

$$\sup_{x\in\Omega} ess\, |f(x)| = \inf\{C,\ \ |f(x)| \leq C,\ p.p.\ sur\ \Omega\}.$$

Proposition 4 *1/ Si $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est séparable.*
2/ L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f g \, dx.$$

3/ Si $1 < p < \infty$, le dual de $L^p(\Omega)$ est l'espace $L^{p'}(\Omega)$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.
$L^p(\Omega)$ est donc un espace de Banach reflexif .

Théorème 2 *(Inégalié de Hölder) Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{\acute{p}}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors*

$$\begin{aligned} f.g &\in L^1(\Omega), \\ et\ \int_\Omega |fg| &\leq |f|_{L^p} |g|_{L^{p'}}. \end{aligned}$$

0.4.2 Convergence faible dans L^p pour $1 < p < \infty$

Soit $(u_n) \in L^p(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$, (u_n) converge faiblement vers u dans $L^p(\Omega)$ si

$$\int_\Omega u_n \varphi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u\varphi,\ \forall\varphi \in L^{p'}(\Omega), \qquad \text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Théorème 3 *(théorème de la moyenne)*
Soit D un sous ensemble compact et connexe de $\mathbb{R}^n$, et $f : D \to \mathbb{R}$ continue. Il existe $\zeta \in D$ tel que

$$f(\zeta) = \frac{1}{|D|} \int_D f(x)dx,$$

avec $|D|$ la mesure de D.

Théorème 4 *(théorème de la convergence dominée de Lebesgue)*
Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^2(\Omega)$. On suppose que

1/ $f_n(x) \to f(x)$ p.p. sur Ω,

2/ il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que pour tout n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.

Alors $f \in L^2(\Omega)$ et $|f_n - f|_{L^2(\Omega)} \to 0$.

0.5 Espace de Hilbert et théorème de Lax Milgram

Définition 8 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire, de plus, est complet pour la norme du produit scalaire.*

Théorème 5 *(théorème de la Lax Milgram)*
Soit V un espace de Hilbert, et soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue, coercive sur $V \times V$, et $l(v)$ une forme linéaire continue sur V. Alors il existe $u \in V$ unique tel que

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V.$$

0.6 Espaces de sobolevs

Dans tout ce suit on désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\partial\Omega$ sa frontière.

0.6.1 Définitions

Définition 9

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ \forall 1 \leq i \leq n \right\}.$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$(u, v)_{1,\Omega} = \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx$$

et on note $|v|_{1,\Omega}$ la norme associée .

Proposition 5 *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert Séparable.*

Définition 10 *Si Ω est borné, on désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'adhrence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

Théorème 6 *(inégalité de poincaré)*
Si Ω est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$, il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad |v|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

0.6.2 Théorème de trace et formule de Green

Définition 11 *Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Ω est dit 1-régulier s'il est borné et sa frontière est une variété de classe C^1 de dimension $n-1$, et Ω étant localement d'un seul côté de sa frontière.*

Théorème 7 *Si Ω est 1-régulier, alors $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et l'application*

$$\begin{aligned} \gamma_0 &: \mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right) \to \mathcal{C}^0(\partial\Omega) \\ v &\to \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ encore notée γ_0.

Définition 12 *L'application γ_0 définie ci dessu est appelée application trace, et sa valeur $\gamma_0(v)$ pour une fonction v de $H^1(\Omega)$ est appelée trace de v sur $\partial\Omega$.*

Lemme 1 *Sous les conditions précédentes, on a*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) ; \ v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Théorème 8 *(**Formule de Green**)*
Soit Ω 1-régulier et n le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ dirigé à l'extérieur de Ω. Alors, si u et v sont des éléments de $H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i d\sigma, \qquad 1 \leqq i \leqq n.$$

Théorème 9 *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière C^1 par morceaux et soit L une forme linéaire continue sur $\mathbf{H}_0^1(D)$. Si L s'annule sur l'ensemble*

$$W := \left\{ v \in \mathbf{H}_0^1(D) ; \ \operatorname{div} v = 0 \right\}$$

alors, il existe une fonction p de $L^2(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in \mathbf{H}_0^1(D), \ L(v) = \int_D p \operatorname{div} v \, dx.$$

0.7 Notations utilisées

Dans tout ce qui suit on note

$$⨍_{E} \cdot d\sigma := \frac{1}{|E|} \int_{E} \cdot d\sigma$$

et

$h_1 \lesssim h_2 \Longleftrightarrow h_1 \leq C\ h_2$; C constante strictement positive indépendante de ε.

$\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{C}_c(\Omega)$, $\mathbf{D}(\Omega)$ correspondent respectivement à $(H_0^1(\Omega))^3$, $(L^2(\Omega))^3$, $(C_c(\Omega))^3$ et $(\mathcal{D}(\Omega))^3$. χ_E est la fonction caractéristique de E.

Deuxième partie

Position du problème et formulations variationnelles

0.8 Description de la géométrie

Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^3$, de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière, Ω étant localement d'un seul côté de sa frontière On suppose que $|\Omega| = 1.$

On considère la cellule de base

$$Y := \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)^3, \tag{1}$$

et pour $\varepsilon > 0$, les translatés de εY dans $\mathbb{R}^3$

$$Y_\varepsilon^k := \varepsilon k + \varepsilon Y \qquad , \ k \in \mathbb{Z}^3, \tag{2}$$

les translatés de εY dans Ω

$$\Omega_{Y_\varepsilon} := \cup_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon} Y_\varepsilon^k, \ \text{avec } \mathbb{Z}_\varepsilon := \left\{k \in \mathbb{Z}^3, Y_\varepsilon^k \subset \Omega\right\}. \tag{3}$$

Le milieu fluide étant représenté par la réunion des petites sphères de centre εk et de rayon r_ε noté

$$D_\varepsilon := \cup_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon} B\left(\varepsilon k, r_\varepsilon\right). \tag{4}$$

On considère tout le long de cette étude que $0 < r_\varepsilon \ll \varepsilon,$ qui signifit

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} = 0, \ \text{avec } 0 < r_\varepsilon. \tag{5}$$

Cette dernière hypothèse entraîne

$$|D_\varepsilon| \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0, \tag{6}$$

ce qui veut dire que les particules fluides dégénèrent lorsque $\varepsilon \to 0.$ De plus nous considérons par la suite que la masse globale des particules fluides reste de l'ordre de l'unité.

0.9 Présentation du problème Q_ε

Soient deux fonctions f et g, g appartenant à $\mathbf{C}_c\left(\overline{\Omega}\right)$ et f appartenant à $\mathbf{L}^2(\Omega).$

Considérons le problème de Stokes couplé Q_ε suivant.

Trouver $(u^\varepsilon, p_\varepsilon)$ solution de

$$\begin{aligned}
-\triangle u^\varepsilon + \nabla p_\varepsilon &= g && \text{dans } D_\varepsilon, && (7)\\
div\ u^\varepsilon &= 0 && \text{dans } D_\varepsilon, && (8)\\
-\triangle u^\varepsilon &= f && \text{dans } \Omega_\varepsilon, && (9)\\
\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \Xi}|_{D_\varepsilon} - p_\varepsilon n &= |D_\varepsilon| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \Xi}|_{\Omega_\varepsilon} && \text{sur } \partial D_\varepsilon, && (10)\\
u^\varepsilon &= 0 && \text{sur } \partial\Omega, && (11)
\end{aligned}$$

où n est le vecteur normal extérieur à D_{ε}, u^{ε} une fonction définie de Ω vers $\mathbb{R}^3$, et p_{ε} une fonction scalaire définie sur D_{ε}.

0.10 Formulation variationnelle

Considérons l'espace test suivant
$V_{\varepsilon} := \{\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ avec $div\varphi = 0$ sur $D_{\varepsilon}\}$.
On multiplit les deux membres de l'equation (9) par une fonction test $\varphi \in V_{\varepsilon}$, et en intégrant sur Ω_{ε}

$$-\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega_{\varepsilon}}\frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon}}{\partial x_j^2}\varphi_i dx = \sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_{\varepsilon}} f_i\varphi_i dx.$$

On a, d'après la formule de green,

$$-\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega_{\varepsilon}}\frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon}}{\partial x_j^2}\varphi_i dx = \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega_{\varepsilon}}\frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx + \sum_{i=1}^{3}\int_{\partial D_{\varepsilon}}\frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial \Xi}\varphi_i d\sigma,$$

alors les deux dernières équations donnent

$$|D_{\varepsilon}|\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega_{\varepsilon}}\frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx + \sum_{i=1}^{3}\int_{\partial D_{\varepsilon}}|D_{\varepsilon}|\frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial \Xi}\varphi_i d\sigma = |D_{\varepsilon}|\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_{\varepsilon}} f_i\varphi_i dx. \quad (12)$$

Par ailleurs on multiplit les decux membres de l'equation (7) par la fonction test φ et en intégrant sur D_{ε} il vient

$$-\sum_{i,j=1}^{3}\int_{D_{\varepsilon}}\frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon}}{\partial x_j^2}\varphi_i dx + \sum_{i=1}^{3}\int_{D_{\varepsilon}}\frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_i}\varphi_i dx = \sum_{i=1}^{3}\int_{D_{\varepsilon}} g_i\varphi_i dx \quad (13)$$

et par utilisation de la formule de green on obtient

$$-\sum_{i,j=1}^{3}\int_{D_{\varepsilon}}\frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon}}{\partial x_j^2}\varphi_i dx = \sum_{i,j=1}^{3}\int_{D_{\varepsilon}}\frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx - \sum_{i=1}^{3}\int_{\partial D_{\varepsilon}}\frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial \Xi}\varphi_i d\sigma$$

et

$$\sum_{i=1}^{3}\int_{D_{\varepsilon}}\frac{\partial p_{\varepsilon}}{\partial x_i}\varphi_i dx = -\int_{D_{\varepsilon}} p_{\varepsilon}\,\mathrm{div}\,\varphi\, dx + \sum_{i=1}^{3}\int_{\partial D_{\varepsilon}} p_{\varepsilon}\varphi_i n_i d\sigma,$$

qui donnent avec (13), et en sachant que $\mathrm{div}\,\varphi = 0$,

$$\sum_{i,j=1}^{3}\int_{D_{\varepsilon}}\frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dx - \sum_{i=1}^{3}\int_{\partial D_{\varepsilon}}\left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial \Xi} - p_{\varepsilon}n_i\right)\varphi_i d\sigma = \sum_{i=1}^{3}\int_{D_{\varepsilon}} g_i\varphi_i dx. \quad (14)$$

Finalement, en additionnant (14) et (12), et en tenant compte de (10), on obtient

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \ \nabla\varphi \ dx + \fint_{D_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \ \nabla\varphi \ dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi dx + \fint_{D_\varepsilon} g\varphi dx.$$

Donc u^ε est solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} u^\varepsilon \in V_\varepsilon \quad \text{et} \\ a_\varepsilon(u^\varepsilon, \varphi) = F_\varepsilon(\varphi), \quad \forall\varphi \in V_\varepsilon. \end{cases} \tag{15}$$

où a_ε et F_ε sont deux formes définies respectivement sur $(\mathbf{H}_0^1(\Omega))^2$ et $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ par

$$a_\varepsilon(\psi,\varphi) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\psi \ \nabla\varphi \ dx + \fint_{D_\varepsilon} \nabla\psi \ \nabla\varphi \ dx \tag{16}$$

$$F_\varepsilon(\varphi) = \int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi dx + \fint_{D_\varepsilon} g\varphi dx. \tag{17}$$

Le problème (15) est une première formulation variationnelle du problème Q_ε.

Théorème 10 *Le problème variationnel* (15) *admet une solution* u^ε *unique.*

Preuve. Montrons que le problème variationnel (15) vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

a_ε est trivialement bilinéaire, montrons qu'elle est continue et coercive sur V_ε. Il suffit de montrer ces propriétés sur $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

$\forall w, \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |a_\varepsilon(w,\varphi)| &= \left| \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx + \frac{1}{|D_\varepsilon|}\sum_{i,j=1}^{3} \int_{D_\varepsilon} \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x j} dx \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega_\varepsilon} \left|\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j}\right| \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right| dx + \frac{1}{|D_\varepsilon|}\sum_{i,j=1}^{3} \int_{D_\varepsilon} \left|\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x j}\right| dx, \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} |a_\varepsilon(w,\varphi)| &\leq \max(\frac{1}{|D_\varepsilon|}, 1) \left(\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega_\varepsilon} \left|\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right| dx + \sum_{i,j=1}^{3} \int_{D_\varepsilon} \left|\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x j}\right| dx \right) \\ &\leq \max(\frac{1}{|D_\varepsilon|}, 1) \left(\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right| dx \right). \end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder nous donne

$$|a_\varepsilon(w,\varphi)| \leq \max(\frac{1}{|D_\varepsilon|}, 1) \sum_{i,j=1}^{3} \left|\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right|_\Omega \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right|_\Omega,$$

ceci entraîne avec l'inégalité de Cauchy Shwarz

$$\begin{aligned}
|a_\varepsilon(w,\varphi)| &\leq \max(\frac{1}{|D_\varepsilon|},1)\left(\sum_{i,j=1}^{3}\left|\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right|_\Omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i,j=1}^{3}\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right|_\Omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \max(\frac{1}{|D_\varepsilon|},1)\,|\nabla w|_\Omega\,|\nabla\varphi|_\Omega\,.
\end{aligned}$$

Alors $a_\varepsilon(.,.)$ est bicontinue sur $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Par ailleurs

$$\forall\varphi\in\mathbf{H}_0^1(\Omega),\qquad a_\varepsilon(\varphi,\varphi)=\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega_\varepsilon}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)^2dx+\frac{1}{|D_\varepsilon|}\sum_{i,j=1}^{3}\int_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)^2dx,$$

d'où

$$\begin{aligned}
a_\varepsilon(\varphi,\varphi) &\geq \min\left(\frac{1}{|D_\varepsilon|},1\right)\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)^2dx\\
a_\varepsilon(\varphi,\varphi) &\geq \min\left(\frac{1}{|D_\varepsilon|},1\right)|\nabla\varphi|_\Omega^2\,.
\end{aligned}$$

Alors $a_\varepsilon(.,.)$est coercive sur $(\mathbf{H}_0^1(\Omega))^2$.

D'un autre côté F_ε est trivialement linéaire, montrons sa continuité.

$$\begin{aligned}
\forall\varphi &\in \mathbf{H}_0^1(\Omega)\\
|F_\varepsilon(\varphi)| &= \left|\frac{1}{|D_\varepsilon|}\sum_{i=1}^{3}\int_{D_\varepsilon}g_i\varphi_i\,dx+\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_\varepsilon}f_i\varphi_i\,dx\right|\\
&\leq \max(\frac{1}{|D_\varepsilon|},1)\left(\sum_{i=1}^{3}\int_{D_\varepsilon}|g_i\varphi_i|\,dx+\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_\varepsilon}|f_i\varphi_i|\right)\\
&\leq \max(\frac{1}{|D_\varepsilon|},1)\left(\sum_{i=1}^{3}\int_{D_\varepsilon}|g_i|\,|\varphi_i|\,dx+\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_\varepsilon}|f_i|\,|\varphi_i|\,dx\right),
\end{aligned}$$

et d'après les inégalités de Hölder et de Cauchy schwarz

$$|F_\varepsilon(\varphi)|\leq\max(\frac{1}{|D_\varepsilon|},1)\left(|g|_{D_\varepsilon}|\varphi|_{D_\varepsilon}+|f|_{\Omega_\varepsilon}|\varphi|_{\Omega_\varepsilon}\right),$$

d'où

$$|F_\varepsilon(\varphi)|\leq\max(\frac{1}{|D_\varepsilon|},1)\left(|g|_{D_\varepsilon}+|f|_{\Omega_\varepsilon}\right)|\varphi|_\Omega\,.$$

Par utilisation de l'inégalité de Poincaré sur Ω on obtient

$$|F_\varepsilon(\varphi)|\lesssim\max(\frac{1}{|D_\varepsilon|},1)\left(|g|_{D_\varepsilon}+|f|_{\Omega_\varepsilon}\right)|\nabla\varphi|_\Omega\,,$$

alors F_ε est continue sur $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. ■

0.11 Existence de p_ε et deuxième formulation variationnelle

Le lemme qui suit donne un résultat d"existence de la pression p_ε,ce qui achévera la preuve que le problème Q_ε est bien posé.

Lemme 2 *Sous les hypothèses précédentes il existe* $p_\varepsilon \in L^2(D_\varepsilon)$ *vérifiant*

$$a_\varepsilon(u^\varepsilon, \varphi) - \int_{D_\varepsilon} p_\varepsilon \operatorname{div} \varphi \, dx = F_\varepsilon(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{18}$$

et donc

$$-\triangle u^\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = g \qquad\qquad \textit{dans } \mathbf{H}^{-1}(D_\varepsilon).$$

Preuve. Soit u^ε solution unique de (15), on considère la forme

$$L_\varepsilon(v) = \int_{D_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \ \nabla v \ dx - \int_{D_\varepsilon} g v dx,$$

linéaire et continue sur $\mathbf{H}_0^1(D_\varepsilon)$ (facile à vérifier).D'après (15) L_ε s'annule sur

$$W_\varepsilon := \left\{ v \in \mathbf{H}_0^1(D_\varepsilon); \ \operatorname{div} v = 0 \right\}.$$

En effet, pour $v \in W_\varepsilon$, soit $\tilde{v}$ son prolongement par 0 sur Ω, alors $\tilde{v} \in V_\varepsilon$ et d'après (15)

$$a_\varepsilon(u^\varepsilon, \tilde{v}) = F_\varepsilon(\tilde{v}),$$

ce qui donne

$$\int_{D_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \ \nabla v \ dx - \int_{D_\varepsilon} g v dx = 0.$$

Donc d'après le théorème 9 il existe une fonction p_ε de $L^2(D_\varepsilon)$ telle que

$$\forall v \in \mathbf{H}_0^1(D), \ L_\varepsilon(v) = \int_{D_\varepsilon} p_\varepsilon \operatorname{div} v dx.$$

Procédant formellement comme pour l'établissement de la formulation faible (15) et en prenant comme fonction test $\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, on obtient $(u^\varepsilon, p_\varepsilon)$ solution du problème variationnel

$$\left\{ \begin{array}{c} u^\varepsilon \in V_\varepsilon, \ p_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon) \quad \text{et} \\ a_\varepsilon(u^\varepsilon, \varphi) - \fint_{D_\varepsilon} p_\varepsilon \operatorname{div} \varphi dx = F_\varepsilon(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{array} \right. \tag{19}$$

avec $a_\varepsilon(.,.)$ et $F_\varepsilon(.)$ données par (16) (17).Par conséquent $(u^\varepsilon, p_\varepsilon)$ vérifie

$$-\triangle u^\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = g \qquad\qquad \text{dans } \mathbf{H}^{-1}(D_\varepsilon).$$

■

Remarque 1 (19) *est une deuxième formulation faible du problème* Q_ε *introduisant la pression* p_ε. p_ε *n'existe pas d'une façon unique car* D_ε *n'est pas connexe (même pas à une constante additive près) voir [20]. Par contre* (19) *admet un unique* $u^\varepsilon \in V_\varepsilon$ *qui est en même temps solution de* (15) *(facile à vérifier).*

Troisième partie

Outils spécifiques de la méthode de la zone de contrôle

0.12 Notations

On introduit l'ensemble

$$\mathcal{R}_\varepsilon = \{R_\varepsilon,\ r_\varepsilon << R_\varepsilon << \varepsilon\},$$

donc $R_\varepsilon \in \mathcal{R}_\varepsilon$ si et seulement si

$$R_\varepsilon > 0, \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{r_\varepsilon}{R_\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon} = 0. \tag{20}$$

Il est claire que $\mathcal{R}_\varepsilon$ est un ensemble infini car $0 < r_\varepsilon << \varepsilon$.
On note S_r la sphère de centre 0 et de rayon r,

$$S_r := \partial B(0,r).$$

On désigne le domaine compris entre les sphères de rayon a et b par

$$C(a,b) := \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ a < |x| < b\right\}$$

auquel on associe

$$C_\varepsilon(a,b) := \varepsilon k + C(a,b),\ k \in \mathbb{Z}_\varepsilon.$$

Pour tout $R_\varepsilon \in \mathcal{R}_\varepsilon$ on définit

$$C_\varepsilon := C_\varepsilon(r_\varepsilon, R_\varepsilon),$$

$$C_\varepsilon := \cup_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon} C_\varepsilon.$$

0.13 Inégalités de bases et opérateurs localisants

Les deux lemmes suivants jouent un rôle fondamental dans la méthode de la zone de contrôle, c'est une adaptation des lemmes A.3 et A.4 [3] respectivement, voir [6] pour la démonstration.

Lemme 3 *Pour tout* $0 < r_1 < r_2$, *et* $u \in H^1(C(r_1,r_2))$, *on a l'estimation*

$$|\nabla u|^2_{C(r_1,r_2)} \geq \frac{4\nu r_1 r_2}{r_2 - r_1}\left|\fint_{S_{r_2}} u\,d\sigma - \fint_{S_{r_1}} u\,d\sigma\right|^2. \tag{21}$$

Lemme 4 $\forall(\alpha,R) \in \mathbb{R}_+ \times (0,1)$, $\exists C > 0$ *tel que* $\forall u \in H^1(B(0,R))$,

$$\int_{B(0,R)}\left|u - \fint_{S_{\alpha R}} u\,d\sigma\right|^2 dx \leq C\frac{R^2}{\alpha}|\nabla u|^2_{B(0,R)}. \tag{22}$$

Pour tout $r > 0$ on définit l'opérateur G_r par

$$G_r : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \to \mathbf{L}^2(\Omega)$$

$$G_r(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \left(\fint_{S_r^k} \theta \, d\sigma \right) \chi_{Y_\varepsilon^k} \tag{23}$$

où

$$S_r^k := \partial B(\varepsilon k, r).$$

$G_r(\theta)$ ainsi définie est une fonction constante par morceaux.

On a alors le résultat suivant, qui est une conséquence des lemmes 3 et 4 et dont la démonstration est donnée dans l'annexe A.

Lemme 5 *[9] Si $R_\varepsilon \in \mathcal{R}_\varepsilon$, alors pour tout $\theta \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ on a*

$$\int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |\theta - G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2 \, dx \lesssim \frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon} \int_\Omega |\nabla \theta|^2 \, dx \tag{24}$$

$$\int_{D_\varepsilon} |\theta - G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 \, dx \lesssim r_\varepsilon^2 \int_{D_\varepsilon} |\nabla \theta|^2 \, dx \tag{25}$$

$$\int_\Omega |G_{R_\varepsilon}(\theta) - G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 \, dx \lesssim \frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon} |\nabla \theta|^2 \, dx \tag{26}$$

où G_{R_ε} et G_{r_ε} sont définis par (23). De plus :

$$\int_\Omega |G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2 \, dx = \int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2 \, dx = \fint_{D_\varepsilon} |G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2 \, dx, \tag{27}$$

$$\int_\Omega |G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 \, dx = \int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 \, dx = \fint_{D_\varepsilon} |G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 \, dx. \tag{28}$$

Nous notons dans tout ce qui suit

$$\gamma_\varepsilon = \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3} \tag{29}$$

γ_ε est appellée coefficient de raréfaction de la méthode de la zone de contrôle. Nous allons étudier dans ce qui suit le comportement asymptotique du problème (15) dans les cas où

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \gamma_\varepsilon = \gamma$$

et les trois situations suivantes : $\gamma > 0$, $\gamma = +\infty$, $\gamma = 0$.

On déduit directement du lemme 5 le lemme qui suit dont la démonstration est donnée dans l'annexe A.

Lemme 6 *[9] Si $R_\varepsilon \in \mathcal{R}_\varepsilon$, alors pour tout $\theta \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ on a l'estimation*

$$\fint_{D_\varepsilon} |\theta|^2 \, dx \lesssim \max\left(1, \frac{1}{\gamma_\varepsilon}\right) |\nabla \theta|_\Omega^2. \tag{30}$$

Soit l'opérateur $M_{D_\varepsilon} : \mathbf{C}_c(\Omega) \to \mathbf{L}^2(\Omega)$ défini par

$$M_{D_\varepsilon}(\varphi) = \sum_{k \in Z_\varepsilon} \left(\fint_{Y_\varepsilon^k} \varphi \, dx \right) \chi_{B(\varepsilon k, r_\varepsilon)}. \tag{31}$$

Lemme 7 *Pour tout* $\varphi \in \mathbf{C}_c(\Omega)$ *on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \fint_{D_\varepsilon} |\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi)|^2 \, dx = 0, \tag{32}$$

et pour tout $\psi \in \mathbf{D}(\Omega)$ *on a*

$$|G_{r_\varepsilon}(\psi) - \psi|_{\mathbf{L}^\infty(C_\varepsilon \cup D_\varepsilon)} \leq 2R_\varepsilon |\nabla \psi|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}. \tag{33}$$

et

$$|G_{r_\varepsilon}(\psi) - \psi|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \lesssim \varepsilon |\nabla \psi|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}, \tag{34}$$

$$\left|G_{R_\varepsilon}(\psi) - \psi\right|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \lesssim \varepsilon |\nabla \psi|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}. \tag{35}$$

Preuve. Montrons (32). Notons que

$$\begin{aligned} \fint_{D_\varepsilon} |\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi)|^2 \, dx &= \frac{1}{|D_\varepsilon|} \int_{D_\varepsilon} |\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi)|^2 \, dx \\ &\leq \frac{1}{|D_\varepsilon|} \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, r_\varepsilon)} \left| \varphi(x) - \fint_{Y_\varepsilon^k} \varphi(y) \, dy \right|^2 dx, \end{aligned}$$

d'après le théorème de la moyenne, il existe $\zeta_\varepsilon^k \in Y_\varepsilon^k$ tel que

$$\fint_{Y_\varepsilon^k} \varphi(y) \, dy = \varphi\left(\zeta_\varepsilon^k\right)$$

d'où

$$\fint_{D_\varepsilon} |\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi)|^2 \, dx \leq \frac{1}{|D_\varepsilon|} \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, r_\varepsilon)} \left|\varphi(x) - \varphi\left(\zeta_\varepsilon^k\right)\right|^2 dx$$

Comme $\varphi \in \mathbf{C}_c(\Omega)$, φ est uniformément continue sur son support. Pour tout $\delta > 0$, il existe alors $\delta' > 0$ vérifiant :

pour tout x, y éléments du support de φ, on a
$|x - y| < \delta' \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \delta$.

Par ailleurs, pour tout x et y dans Y_ε^k et éléments du support de φ, on a $|x - y| < \sqrt{3}\varepsilon$, et par conséquent pour $\varepsilon > 0$ tel que $\sqrt{3}\varepsilon < \delta'$ on a:

$$\begin{aligned} \fint_{D_\varepsilon} |\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi)|^2 \, dx &\leq \delta^2 \frac{1}{|D_\varepsilon|} \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, r_\varepsilon)} dx \\ &\leq \delta^2 \frac{|D_\varepsilon|}{|D_\varepsilon|} = \delta^2. \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\fint_{D_\varepsilon} |\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi)|^2 \, dx \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

Montrons maintenant (33). Soit $\psi \in \mathbf{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}(G_{r_\varepsilon}(\psi) - \psi)(x) &= G_{r_\varepsilon}(\psi)(x) - \psi(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \left(\fint_{S^k_{r_\varepsilon}} \psi \, d\sigma \right) \chi_{Y^k_\varepsilon}(x) - \psi(x).\end{aligned}$$

Pour tout $x \in B(\varepsilon k, R_\varepsilon)$, avec $k \in \mathbb{Z}_\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \left(\fint_{S^k_{r_\varepsilon}} \psi \, d\sigma \right) \chi_{Y^k_\varepsilon}(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \frac{1}{\left|S^k_{r_\varepsilon}\right|} \left(\int_{S^k_{r_\varepsilon}} \psi \, d\sigma \right) \chi_{Y^k_\varepsilon}(x) \\ &= \left(\fint_{S^k_{r_\varepsilon}} \psi \, d\sigma \right).\end{aligned}$$

Par ailleurs d'après le théorème de la moyenne, il existe $\zeta^k_\varepsilon \in B(\varepsilon k, R_\varepsilon)$ tel que

$$\fint_{S^k_{r_\varepsilon}} \psi \, d\sigma = \psi\left(\zeta^k_\varepsilon\right).$$

Alors pour $x \in B(\varepsilon k, R_\varepsilon)$

$$(G_{r_\varepsilon}(\psi) - \psi)(x) = \psi\left(\zeta^k_\varepsilon\right) - \psi(x),$$

d'où, d'après le théorème des accroissements finis, on conclut que

$$\begin{aligned}|(G_{r_\varepsilon}(\psi) - \psi)(x)| &\leq \left|\zeta^k_\varepsilon - x\right| |\nabla\psi|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq 2R_\varepsilon |\nabla\psi|_{L^\infty(\Omega)}.\end{aligned}$$

Montrons maintenant (34) et (35).
On a d'après le théorème de la moyenne $\exists \zeta^k_\varepsilon \in S^k_{r_\varepsilon}$ tel que

$$\fint_{S^k_{r_\varepsilon}} \psi \, d\sigma = \psi\left(\zeta^k_\varepsilon\right),$$

alors d'apès le théorème des accroissements finis et pour $x \in Y^k_\varepsilon$ il vient

$$\begin{aligned}|(G_{r_\varepsilon}(\psi) - \psi)(x)| &= \left|\psi\left(\zeta^k_\varepsilon\right) - \psi(x)\right| \\ &\leq \left|\zeta^k_\varepsilon - x\right| |\nabla\psi|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \sqrt{3}\varepsilon |\nabla\psi|_{L^\infty(\Omega)}.\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}\left|(G_{R_\varepsilon}(\psi) - \psi)(x)\right| &= \left|\psi\left(\zeta^k_\varepsilon\right) - \psi(x)\right| \\ &\leq \left|\zeta^k_\varepsilon - x\right| |\nabla\psi|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \sqrt{3}\varepsilon |\nabla\psi|_{L^\infty(\Omega)}.\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

0.14 Problème local et fonction clé

Soit $W_{R_\varepsilon} \in H^1(C(r_\varepsilon, R_\varepsilon))$ la solution fondamentale du Laplacien, c'est à dire solution unique du problème local

$$\begin{aligned}
\Delta W_{R_\varepsilon} &= 0 \text{ dans } C(r_\varepsilon, R_\varepsilon) && (36)\\
W_{R_\varepsilon} &= 1 \text{ sur } S_{r_\varepsilon} && (37)\\
W_{R_\varepsilon} &= 0 \text{ sur } S_{R_\varepsilon}, && (38)
\end{aligned}$$

cette solution s'écrie

$$W_{R_\varepsilon}(y) = \frac{r_\varepsilon}{(R_\varepsilon - r_\varepsilon)}\left(\frac{R_\varepsilon}{|y|} - 1\right) \text{ pour } y \in \overline{C(r_\varepsilon, R_\varepsilon)}, \tag{39}$$

W_{R_ε} est une fonction radiale de classe C^∞ sur $\overline{C(r_\varepsilon, R_\varepsilon)}$.

Définition 13 *Pour tout* $R_\varepsilon \in \mathcal{R}_\varepsilon$, *on introduit* $w_{R_\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$ *définie par*

$$w_{R_\varepsilon}(x) := \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \backslash C_\varepsilon, \\ W_{R_\varepsilon}(x - \varepsilon k) & \text{dans } C_\varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z}_\varepsilon, \\ 1 & \text{dans } D_\varepsilon. \end{cases} \tag{40}$$

Fonction εY*-périodique, dite fonction clé de la méthode de la zone de contrôle.*

Proposition 6 *Pour tout* $R_\varepsilon \in \mathcal{R}_\varepsilon$, *on a*

$$\begin{aligned}
& w_{R_\varepsilon} \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega) && (41)\\
& 0 \le w_{R_\varepsilon}(x) \le 1 \text{ pour tout } x \in \Omega && (42)\\
& w_{R_\varepsilon} = 0 \qquad \text{dans } \Omega \backslash C_\varepsilon \cup D_\varepsilon && (43)\\
& |\nabla w_{R_\varepsilon}|_\Omega \lesssim \sqrt{\gamma_\varepsilon} && (44)\\
& w_{R_\varepsilon} \to 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) && (45)
\end{aligned}$$

Preuve. (41) et (43) sont une conséquence immédiate de (39) et (40). En effet, la fonction W_{R_ε} est continue sur $C(r_\varepsilon, R_\varepsilon)$ et admet un prolongement par continuité sur εY donné par

$$\tilde{W}_{R_\varepsilon}(y) = \begin{cases} 0 \text{ pour } |y| \ge R_\varepsilon \\ W_{R_\varepsilon}(y) = \frac{r_\varepsilon}{(R_\varepsilon - r_\varepsilon)}\left(\frac{R_\varepsilon}{|y|} - 1\right) \text{ pour } y \in C(r_\varepsilon, R_\varepsilon) \\ 1 \text{ pour } |y| \le r_\varepsilon. \end{cases} \tag{46}$$

La continuité de w_{R_ε} est déduite par la relation triviale

$$w_{R_\varepsilon}(x) := \tilde{W}_{R_\varepsilon}(x - \varepsilon k), \; x \in Y_\varepsilon^k, \; k \in \mathbb{Z}_\varepsilon,$$

et le fait que w_{R_ε} est nulle sur le bord des cellules Y_ε^k.

On montre (42).

Soit $y \in C\ (r_\varepsilon, R_\varepsilon)$, on a

$$r_\varepsilon \leq |y| \leq R_\varepsilon,$$

donc

$$0 \leq \frac{R_\varepsilon}{|y|} - 1 \leq \left(\frac{R_\varepsilon}{r_\varepsilon} - 1\right),$$

par conséquent

$$0 \leq W_{R_\varepsilon}(y) \leq 1,$$

ce qui nous permet de conclure.

Pour montrer (45), il suffit de remarquer que

$$card\, \mathbb{Z}_\varepsilon \leq \frac{|\Omega|}{\varepsilon^3} = \frac{1}{\varepsilon^3} \tag{47}$$

et que

$$\begin{aligned}
|w_{R_\varepsilon}|^2_\Omega &= |w_{R_\varepsilon}|^2_{C_\varepsilon \cup D_\varepsilon} = \int\limits_{C_\varepsilon \cup D_\varepsilon} |w_{R_\varepsilon}|^2 dy \\
&\leq \int\limits_{C_\varepsilon \cup D_\varepsilon} dy = |C_\varepsilon \cup D_\varepsilon| \\
&\leq card\, \mathbb{Z}_\varepsilon\ |B\ (0, R_\varepsilon)| \\
&\leq \frac{4\nu}{3}\left(\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3.
\end{aligned}$$

On conclut en utilisant l'hypothèse (20).

Démontrons (44). On a par définition de w_{R_ε}

$$\begin{aligned}
|\nabla w_{R_\varepsilon}|^2_\Omega &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \int_{C^k_\varepsilon} |\nabla w_{R_\varepsilon}|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \int_{C\left(r_\varepsilon, R_\varepsilon\right)} |\nabla W_{R_\varepsilon}(y)|^2 dy \\
&= card\, Z_\varepsilon \int_{C_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}} |\nabla W_{R_\varepsilon}(y)|^2 dy.
\end{aligned}$$

Par un changement de variables sphériques on a

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \Gamma}, \frac{1}{r \sin \Gamma}\frac{\partial}{\partial \theta}\right),$$

alors

$$\nabla W_{R_\varepsilon} = \left(\frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial \Gamma}, \frac{1}{r \sin \Gamma}\frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial \theta}\right).$$

Etant donné que W_{R_ε}est une fonction radiale donc ne dépend que de r, alors

$$\frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial \Gamma} = 0 \text{ et } \frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial \theta} = 0.$$

On en déduit
$$\nabla W_{R_\varepsilon} = \left(\frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial r}, 0, 0\right), \tag{48}$$
alors
$$|\nabla W_{R_\varepsilon}| = \left|\frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial r}\right|.$$
Par ailleurs
$$dy_1 dy_2 dy_3 = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\Gamma,$$
et d'après (39)
$$\left|\frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial r}(r)\right| = \left|\frac{r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon}\frac{1}{r^2}\right|. \tag{49}$$
Par conséquent
$$\begin{aligned}
\int_{C_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}} |\nabla W_{R_\varepsilon}(y)|^2 dy &= \int_0^{2\nu}\int_0^{\nu}\int_{r_\varepsilon}^{R_\varepsilon} \left|\frac{r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon}\frac{1}{r^2}\right|^2 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\Gamma \\
&= \int_0^{2\nu} d\Gamma \int_0^{\nu} \sin\theta \, d\theta \left(\frac{r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon}\right)^2 \int_{r_\varepsilon}^{R_\varepsilon} \frac{1}{r^2} dr \\
&= 4\nu \frac{r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon},
\end{aligned}$$
alors
$$|\nabla w_{R_\varepsilon}|_\Omega^2 = car \, Z_\varepsilon 4\nu \left(\frac{r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon - r_\varepsilon}\right),$$
et tenant compte de (47) il vient
$$|\nabla w_{R_\varepsilon}|_\Omega^2 \leq 4\nu \frac{1}{\left(1 - \frac{r_\varepsilon}{R_\varepsilon}\right)} \left(\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3}\right).$$

On conclut à l'aide de (20). ■

Remarque 2 *dans le cas où* $(\gamma_\varepsilon)_\varepsilon$ *est bornée, et en vertue de* (44) *et* (45), $w_{R_\varepsilon} \rightharpoonup 0$ *dans* $H_0^1(\Omega)$. *Dans le cas où* $\gamma_\varepsilon \to 0$, *on a d'après l'inégalité* (44), $|\nabla w_{R_\varepsilon}|_\Omega \to 0$, *donc* $w_{R_\varepsilon} \to 0$ *dans* $H_0^1(\Omega)$.

Quatrième partie

Comportement asymptotique de (F_ε) et estimations à priori

0.15 Comportement asymptotique de (F_ε)

Remarque 3 *Comme conséquence du lemme 6 on a, si* $(\gamma_\varepsilon^{-1})$ *est borné alors* $\forall\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$

$$\left(\fint_{D_\varepsilon} |\varphi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim |\nabla\varphi|_\Omega^2. \tag{50}$$

Rappellons pour $\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$,

$$F_\varepsilon(\varphi) := \int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi dx + \fint_{D_\varepsilon} g\varphi dx.$$

On a le résultat suivant.

Lemme 8 *Si* $(\gamma_\varepsilon^{-1})$ *est bornée alors ,* (F_ε)*est une suite bornée d'éléments de* $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$.

Preuve. Soit $\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\boldsymbol{\Omega})$,

$$|F_\varepsilon(\varphi)| = \left|\int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi dx + \fint_{D_\varepsilon} g\varphi dx\right|.$$

On a d'après l'inégalité de Hölder

$$\left|\int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi dx\right| \leq \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\varphi|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

puis l'inégalité de poincaré

$$\left|\int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi dx\right| \lesssim |\nabla\varphi|_\Omega. \tag{51}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\left|\fint_{D_\varepsilon} g\varphi dx\right| &\leq \fint_{D_\varepsilon} |g||\varphi| dx \\
&\leq \|g\|_\infty \left(\fint_{D_\varepsilon} |\varphi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\fint_{D_\varepsilon} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|g\|_\infty \left(\fint_{D_\varepsilon} |\varphi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

d'après (30)

$$\left|\fint_{D_\varepsilon} g\varphi dx\right| \leq \max\left(1, (\gamma_\varepsilon)^{-1}\right) \|g\|_\infty |\nabla\varphi|_\Omega.$$

Donc, si $(\gamma_\varepsilon)^{-1}$ est bornée alors

$$\left|\fint_{D_\varepsilon} g\varphi dx\right| \lesssim |\nabla\varphi|_\Omega. \tag{52}$$

Par conséquent

$$|F_\varepsilon(\varphi)| \lesssim |\nabla\varphi|_\Omega .$$

Alors

$$F_\varepsilon \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \text{ et } \|F_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \lesssim 1.$$

■

Lemme 9 *Si* $\left(\gamma_\varepsilon^{-1}\right)$ *est bornée, alors*

$$F_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} F \quad dans\ \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$$

avec

$$F = f + g.$$

Preuve. La démonstration se fait en deux étapes.
Première étape :
Montrons que $F_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} F$ dans $\mathbf{D}'(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathbf{D}(\mathbf{\Omega})$,

$$\fint_{D_\varepsilon} g\varphi\, dx = \frac{1}{|D_\varepsilon|}\sum_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon}\int_{B(\varepsilon k, r_\varepsilon)} g\varphi\, dx,$$

d'après le théorème de la moyenne il existe $\zeta_\varepsilon^k \in B(\varepsilon k, r_\varepsilon)$ tel que

$$\fint_{D_\varepsilon} g\varphi\, dx = \frac{1}{|D_\varepsilon|}\sum_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon} g(\zeta_\varepsilon^k)\varphi(\zeta_\varepsilon^k)\,|B(\varepsilon k, r_\varepsilon)|,$$

comme $|D_\varepsilon| = card\,\mathbb{Z}_\varepsilon\,|B(0, r_\varepsilon)|$,et $|B(\varepsilon k, r_\varepsilon)| = |B(0, r_\varepsilon)|$,
on a

$$\fint_{D_\varepsilon} g\varphi\, dx = \frac{1}{card\,\mathbb{Z}_\varepsilon}\sum_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon} g(\zeta_k)\varphi(\zeta_k).$$

Par ailleurs $card\,\mathbb{Z}_\varepsilon$ est une quantité équivalente à $\dfrac{|\Omega|}{\varepsilon^3}$ lorsque $\varepsilon \to 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon\to 0} card\,\mathbb{Z}_\varepsilon / \frac{|\Omega|}{\varepsilon^3} = 1,$$

ce qui s'écrit

$$card\,\mathbb{Z}_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{|\Omega|}{\varepsilon^3},$$

d'où

$$card\,\mathbb{Z}_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{1}{|Y_\varepsilon^k|}, \tag{53}$$

d'où l'on déduit que

$$\fint_{D_\varepsilon} g\varphi\, dx \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \sum_{k\in Z_\varepsilon} g(\zeta_k).\varphi(\zeta_k)\,|Y_\varepsilon^k|,$$

et d'après la définition de l'intégrale de lebesgue

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon} g(\zeta_k).\varphi(\zeta_k)\left|Y_\varepsilon^k\right| = \int_\Omega g\varphi\,dx, \tag{54}$$

donc

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}⨍_{D_\varepsilon} g\varphi\,dx = \int_\Omega g\varphi\,dx. \tag{55}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f\varphi\,dx - \int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi\,dx\right| &= \left|\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} f\varphi\,dx\right| \\ &\le \|\varphi\|_\infty\left|\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} f\,dx\right| \\ &\le \|\varphi\|_\infty |f|_\Omega\sqrt{|\Omega\setminus\Omega_\varepsilon|},\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left|\int_\Omega f\varphi\,dx - \int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi\,dx\right| \lesssim \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}|\Omega\setminus\Omega_\varepsilon| = 0.$$

Alors

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx. \tag{56}$$

En conclusion

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left(\int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi\,dx + ⨍_{D_\varepsilon} g\varphi\,dx\right) = \int_\Omega f\varphi\,dx + \int_\Omega g\varphi\,dx,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} F_\varepsilon(\varphi) = F(\varphi).$$

Deuxième étape de la démonstration :

Soit $\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\boldsymbol{\Omega})$, $\exists\varphi_n \in \mathbf{D}(\boldsymbol{\Omega})$ tel que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $\mathbf{H}_0^1(\boldsymbol{\Omega})$ (car $D(\boldsymbol{\Omega})$ est dense dans $H_0^1(\boldsymbol{\Omega})$).

On a

$$|F_\varepsilon(\varphi) - F(\varphi)| \le |F_\varepsilon(\varphi - \varphi_n)| + |F_\varepsilon(\varphi_n) - F(\varphi_n)| + |F(\varphi_n - \varphi)|,$$

par conséquent en vertue du lemme 8 et des hypothèses sur f et g

$$|F_\varepsilon(\varphi - \varphi_n)| \lesssim |\nabla(\varphi - \varphi_n)|_\Omega \quad \text{et} \quad |F(\varphi_n - \varphi)| \lesssim |\nabla(\varphi_n - \varphi)|_\Omega,$$

donc

$$|F_\varepsilon(\varphi) - F(\varphi)| \lesssim |\nabla(\varphi - \varphi_n)|_\Omega + |F_\varepsilon(\varphi_n) - F(\varphi_n)|.$$

Par ailleurs, étant donné que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $\mathbf{H}_0^1(\boldsymbol{\Omega})$, pour $\varepsilon' > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \rangle n_0 \quad |\nabla(\varphi - \varphi_n)|_\Omega \le \frac{\varepsilon'}{2}.$$

On fixe $n > n_0$, étant donné que $F_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\rightharpoonup} F$ dans $\mathbf{D}'(\Omega)$ (d'après la première étape de la démonstration), $\exists \delta > 0$ tel que si $0 < \varepsilon < \delta$

$$|F_\varepsilon(\varphi_n) - F(\varphi_n)| \leq \frac{\varepsilon'}{2},$$

alors

$$\forall \varepsilon' > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ tel que si } 0 < \varepsilon < \delta, \ \ |F_\varepsilon(\varphi) - F(\varphi)| \leq \varepsilon'.$$

Par conséquent

$$\forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), F_\varepsilon(\varphi) \rightharpoonup F(\varphi).$$

■

0.16 Estimations à priori

Théorème 11 *si u^ε est solution de* (15), *et Si* $(\gamma_\varepsilon^{-1})$ *est bornée alors ,*

$$(u^\varepsilon) \text{ est bornée dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{57}$$

et

$$\fint_{D_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \lesssim 1. \tag{58}$$

Preuve. Démontrons (58). on pose $\varphi = u^\varepsilon$ dans (15) il vient en vertu du lemme8

$$\begin{aligned} \fint_{D_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx &= \left| \langle F_\varepsilon, u^\varepsilon \rangle_{\mathbf{H}^{-1} \times \mathbf{H}_0^1} \right|, \\ &\leq \|F_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{-1}} |\nabla u^\varepsilon|_\Omega, \end{aligned}$$

et comme (F_ε) est bornée dans $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ on obtient

$$\fint_{D_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \lesssim |\nabla u^\varepsilon|_\Omega.$$

Pour ε petit, on a grâce à (6)

$$\frac{1}{|D_\varepsilon|} > 1,$$

alors

$$\fint_{D_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \geq \int_{D_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx. \tag{59}$$

Il vient

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx &\leq \fint_{D_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx, \quad (60) \\ &\lesssim |\nabla u^\varepsilon|_\Omega, \quad (61) \end{aligned}$$

par conséquent

$$\int_{\Omega} |\nabla u^{\varepsilon}|^2 dx \lesssim |\nabla u^{\varepsilon}|_{\Omega}$$

alors

$$|\nabla u^{\varepsilon}|_{\Omega} \lesssim 1,$$

et d'après(61)

$$⨍_{D_{\varepsilon}} |\nabla u^{\varepsilon}|^2 dx \lesssim 1.$$

■

0.17 Comportement limite de (u^{ε}) dans le cas $(\gamma_{\varepsilon}^{-1})$ bornée

Proposition 7 *Si $(\gamma_{\varepsilon}^{-1})$est bornée alors, il existe $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et $v \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tel que, à une sous suite près,*

$$u^{\varepsilon} \rightharpoonup u \qquad dans\ \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{62}$$

$$G_{R_{\varepsilon}}(u^{\varepsilon}) \rightarrow u \qquad dans\ \mathbf{L}^2(\Omega), \tag{63}$$

$$G_{r_{\varepsilon}}(u^{\varepsilon}) \rightharpoonup v \qquad dans\ \mathbf{L}^2(\Omega). \tag{64}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ⨍_{D_{\varepsilon}} |u^{\varepsilon} - G_{r_{\varepsilon}}(u^{\varepsilon})|^2 dx = 0. \tag{65}$$

et

$$\frac{1}{|D_{\varepsilon}|}\chi_{D_{\varepsilon}} u^{\varepsilon} \rightharpoonup v \qquad dans\ \mathbf{H}^{-1}(\Omega). \tag{66}$$

De plus si $\gamma_{\varepsilon} \longrightarrow +\infty$ *on a*

$$G_{r_{\varepsilon}}(u^{\varepsilon}) \longrightarrow u\ \ dans\ \mathbf{L}^2(\Omega). \tag{67}$$

Preuve. En vertue du théorème 10 u^{ε} est bornée dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, alors il existe une sous suite de (u^{ε}) encore notée (u^{ε}) et $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ telle que $u^{\varepsilon} \rightharpoonup u$ dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Pour cette sous suite on a

$$|G_{R_{\varepsilon}}(u^{\varepsilon}) - u|_{\Omega} \leq |G_{R_{\varepsilon}}(u^{\varepsilon}) - u^{\varepsilon}|_{\Omega} + |u^{\varepsilon} - u|_{\Omega}.$$

D'autre part (24) (25) puis (57) nous donnent

$$\begin{aligned} |G_{R_{\varepsilon}}(u^{\varepsilon}) - u^{\varepsilon}|_{\Omega} &\lesssim \left(\frac{\varepsilon^3}{R_{\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}} |\nabla u^{\varepsilon}|_{\Omega} \\ &\lesssim \left(\frac{\varepsilon^3}{r_{\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r_{\varepsilon}}{R_{\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

Puisque $\left(\frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon}\right)_\varepsilon$ est bornée et $\frac{r_\varepsilon}{R_\varepsilon} \longrightarrow 0$, alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |G_{R_\varepsilon}(u^\varepsilon) - u^\varepsilon|_\Omega = 0,$$

et par suite, à cause de (62)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |G_{R_\varepsilon}(u^\varepsilon) - u|_\Omega = 0.$$

Par ailleurs d'après(26) (63) et (57)

$$\begin{aligned} |G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon)|_\Omega &\leq |G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon) - G_{R_\varepsilon}(u^\varepsilon)|_\Omega + |G_{R_\varepsilon}(u^\varepsilon)|_\Omega \\ &\lesssim \frac{1}{\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} |\nabla u^\varepsilon|_\Omega + 1 \lesssim 1. \end{aligned}$$

Alors il existe une sous suite de la sous suite (u^ε) encore notée (u^ε) et $v \in L^2(\Omega)$ telle que

$$G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon) \rightharpoonup v \text{ dans } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Démontrons (65).

D'après (25) et (58) il vient

$$⨍_{D_\varepsilon} |u^\varepsilon - G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon)|^2 dx \lesssim r_\varepsilon^2 ⨍_{D_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \lesssim r_\varepsilon^2,$$

alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ⨍_{D_\varepsilon} |u^\varepsilon - G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon)|^2 dx = 0.$$

(66) se démontre en deux étapes.

Première étape :

Soit $\varphi \in \mathbf{C}_c(\Omega)$ montrons que pour la sous suite (u^ε) précédente

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \varphi \, dx = \int_\Omega v \varphi \, dx$$

Soit $\varphi \in C_c(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} ⨍_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \varphi \, dx &= ⨍_{D_\varepsilon} (u^\varepsilon - G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon)) \varphi \, dx + ⨍_{D_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon)(\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi)) \, dx \\ &\quad + ⨍_{D_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon) M_{D_\varepsilon}(\varphi) \, dx \end{aligned}$$

Le terme $⨍_{D_\varepsilon} (u^\varepsilon - G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon)) \varphi \, dx$ converge vers zéro, car on a par application de l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \left| ⨍_{D_\varepsilon} (u^\varepsilon - G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon)) \varphi \, dx \right| &\leq \left(⨍_{D_\varepsilon} |u^\varepsilon - G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(⨍_{D_\varepsilon} |\varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\varphi|_\infty \left(⨍_{D_\varepsilon} |u^\varepsilon - G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

avec $\left(⨍_{D_\varepsilon} |u^{\varepsilon} - G_{r_\varepsilon}(u^{\varepsilon})|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ d'après (65).

Le terme $⨍_{D_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(u^{\varepsilon})(\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi))\,dx$ converge vers zéro. En effet, par application de l'inégalité de Hölder on a

$$⨍_{D_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(u^{\varepsilon})(\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi))\,dx \leq \left(⨍_{D_\varepsilon} |G_{r_\varepsilon}(u^{\varepsilon})|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(⨍_{D_\varepsilon} |\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

le terme $⨍_{D_\varepsilon} |\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi)|^2 dx$ converge vers zéro d'après (32), et on a d'après (28)

$$⨍_{D_\varepsilon} |G_{r_\varepsilon}(u^{\varepsilon})|^2 dx = \int_{\Omega} |G_{r_\varepsilon}(u^{\varepsilon})|^2 dx,$$

le deuxième terme de cette égalitè étant borné d'après (64).

Allons vers le terme $⨍_{D_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(u^{\varepsilon})\, M_{D_\varepsilon}(\varphi)\,dx$, il s'écrit

$$\begin{aligned} ⨍_{D_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(u^{\varepsilon})\, M_{D_\varepsilon}(\varphi)\,dx &= \frac{1}{|D_\varepsilon|} \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, r_\varepsilon)} \left(⨍_{S^h_{r_\varepsilon}} u^{\varepsilon}\, d\sigma\right) \left(⨍_{Y^k_\varepsilon} \varphi\, dy\right) dx \\ &= \frac{|B\,(0, r_\varepsilon)|}{\varepsilon^3 \frac{1}{\varepsilon^3} |B\,(0, r_\varepsilon)|} \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \int_{Y^k_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(u^{\varepsilon})\, \varphi\, dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \int_{Y^k_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(u^{\varepsilon})\, \varphi\, dx \\ &= \int_{\Omega} G_{r_\varepsilon}(u^{\varepsilon})\, \varphi\, dx, \end{aligned}$$

d'après (64) il vient,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ⨍_{D_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(u^{\varepsilon})\, M_{D_\varepsilon}(\varphi)\,dx = \int_{\Omega} v\, \varphi\, dx.$$

Deuxième étape :

Soit $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, par densité de $D\,(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$ il existe (φ_n) une suite dans $D\,(\Omega)$ telle que

$$\varphi_n \to \varphi \text{ dans } H^1_0(\Omega).$$

On a

$$\left|⨍_{D_\varepsilon} u^{\varepsilon} \varphi\, dx - \int_{\Omega} u\, \varphi\, dx\right| \leq \left|⨍_{D_\varepsilon} u^{\varepsilon}(\varphi - \varphi_n)\,dx\right| + \left|⨍_{D_\varepsilon} u^{\varepsilon} \varphi_n\, dx - \int_{\Omega} u\, \varphi_n\, dx\right| +. \left|\int_{\Omega} u\,(\varphi_n - \varphi)\,dx\right|. \tag{68}$$

Montrons que les trois termes de droite convergent vers zéro lorsque n ou ε convergent vers zéro.

D'après l'inégalité de Hölder on a

$$\left|⨍_{D_\varepsilon} u^{\varepsilon}(\varphi - \varphi_n)\,dx\right| \leq \left(⨍_{D_\varepsilon} |u^{\varepsilon}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(⨍_{D_\varepsilon} |\varphi - \varphi_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

grâce à (57) et le lemme 6 il vient

$$\left| \fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon (\varphi - \varphi_n)\, dx \right| \lesssim |\nabla (\varphi - \varphi_n)|_\Omega ,$$

alors $\fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon (\varphi - \varphi_n)\, dx \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ car $\varphi_n \to \varphi$ dans $H_0^1(\Omega)$. On a aussi $\int_\Omega u\, (\varphi_n - \varphi)\, dx \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ pour la même raison.

Par ailleurs, d'après la première étape de la démonstration

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \varphi_n \, dx = \int_\Omega u \varphi_n \, dx ,$$

donc on a $\left| \fint_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \varphi_n \, dx - \int_\Omega u \varphi_n \, dx \right| \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

Démontrons (67) si $\gamma_\varepsilon \longrightarrow +\infty$, alors

$$|G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon) - u|_\Omega \leq |G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon) - G_{R_\varepsilon}(u^\varepsilon)|_\Omega + |G_{R_\varepsilon}(u^\varepsilon) - u|_\Omega$$

et d'après (26)

$$|G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon) - u|_\Omega \lesssim \frac{1}{\gamma_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} |\nabla u^\varepsilon|_\Omega + |G_{R_\varepsilon}(u^\varepsilon) - u|_\Omega \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

gâce à (63) et (57) et le fait que $\gamma_\varepsilon \longrightarrow +\infty$. ∎

Cinquième partie

Problème limite dans le cas $r_\varepsilon = O\left(\varepsilon^3\right)$

Dans cette partie nous étudions le comportement asymptotique de la suite (u_ε) lorsque

$$\gamma_\varepsilon \longrightarrow \gamma > 0. \tag{69}$$

Cette étude est basée sur la construction de fonctions tests particulières à divergence nulle dans la partie fluide. Ces fonctions dépendent nécessairement de ε.

0.18 Fonction test

Pour $R_\varepsilon \in \mathcal{R}_\varepsilon$ et pour $\varphi,\ \psi \in \mathbf{D}(\Omega)$ on définit la fonction test

$$\Phi_\varepsilon := (1 - w_{R_\varepsilon})\varphi + w_{R_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(\psi).$$

D'une façon explicite

$$\Phi_\varepsilon := \begin{cases} \varphi & \text{sur } \Omega_\varepsilon \backslash C_\varepsilon \\ (1 - w_{R_\varepsilon})\varphi + w_{R_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(\psi) & \text{sur } C_\varepsilon \\ G_{R_\varepsilon}(\psi) & \text{sur } D_\varepsilon \end{cases}, \tag{70}$$

d'où

$$\nabla\Phi_\varepsilon = \begin{cases} \nabla\varphi & \text{sur } \Omega_\varepsilon \backslash C_\varepsilon \\ (1 - w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi + \nabla w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi) & \text{sur } C_\varepsilon \\ 0 & \text{sur } D_\varepsilon. \end{cases}. \tag{71}$$

On a alors le résultat suivant.

Lemme 10 *Φ_ε est un élément de V_ε, de plus*

$$\Phi_\varepsilon \rightharpoonup \varphi \ \text{ dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{72}$$

Preuve. Montrons d'abord que $\Phi_\varepsilon \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, En sachant que $w_{R_\varepsilon} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$, on a alors $(1 - w_{R_\varepsilon})\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Par ailleurs, w_{R_ε} ne vie $(= 0)$ que dans $\cup_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon} B(\varepsilon k, R_\varepsilon)$ et $w_{R_\varepsilon} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ de plus $G_{r_\varepsilon}(\psi)$ est constante sur chaque boule $B(\varepsilon k, r_\varepsilon)$, Alors $w_{R_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(\psi) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Par conséquent

$$\Phi_\varepsilon \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

D'autre par, sur chaque $B(\varepsilon k, r_\varepsilon)$ on a $G_{r_\varepsilon}(\psi)$ constante, alors

$$div\ \Phi_\varepsilon = div\ G_{r_\varepsilon}(\psi) = 0 \ \text{ sur } D_\varepsilon.$$

Démontrons (72)

Pour tout $\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ on a d'après (71)

$$\begin{aligned} |\nabla\Phi_\varepsilon|_\Omega^2 &= |\nabla\varphi|_{\Omega_\varepsilon\backslash C_\varepsilon}^2 + |(1 - w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi + \nabla w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi)|_{C_\varepsilon}^2 \\ &\leq |\nabla\varphi|_\Omega^2 + 2|(1 - w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi|_{C_\varepsilon}^2 + 2|\nabla w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi)|_{C_\varepsilon}^2. \end{aligned}$$

Par application de l'inégalité de Hölder

$$|\nabla \Phi_\varepsilon|_\Omega^2 \leq |\nabla \varphi|_\Omega^2 + 2\,|(1 - w_{R_\varepsilon})\,\nabla \varphi|_{C_\varepsilon}^2 + 2\,|\nabla w_{R_\varepsilon}|_{C_\varepsilon}^2\,|G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi|_{C_\varepsilon}^2$$

D'après(44) et (42), il vient

$$\begin{aligned} |\nabla \Phi_\varepsilon|_\Omega^2 &\leq |\nabla \varphi|_\Omega^2 + 2\,|\nabla \varphi|_{C_\varepsilon}^2 + 2\,|\nabla w_{R_\varepsilon}|_{C_\varepsilon}^2\,|(G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi)|_{C_\varepsilon}^2 \\ &\lesssim |\nabla \varphi|_\Omega^2 + 2\,|\nabla \varphi|_\Omega^2 + 4\gamma_\varepsilon\,|G_{r_\varepsilon}(\psi)|_\Omega^2 + 4\gamma_\varepsilon\,|\varphi|_\Omega^2, \end{aligned}$$

avec l'inégalité de poincaré et (69), on obtient

$$\begin{aligned} |\nabla \Phi_\varepsilon|_\Omega^2 &\lesssim |\nabla \varphi|_\Omega^2 + |G_{r_\varepsilon}(\psi)|_\Omega^2 \\ &\lesssim |\nabla \varphi|_\Omega^2 + |G_{r_\varepsilon}(\psi)|_{L^\infty(\Omega)}, \end{aligned}$$

de plus, gâce à (34) $|G_{r_\varepsilon}(\psi)|$ converge uniformèment vers ψ, donc

$$|\nabla \Phi_\varepsilon|_\Omega^2 \lesssim 1.$$

On achève la démontrons de (72). en montrant $\Phi_\varepsilon \longrightarrow \varphi$ dans $L^2(\Omega)$
On a

$$|\Phi_\varepsilon - \varphi|_\Omega^2 = |(1 - w_{R_\varepsilon})\,\varphi + w_{R_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi|_{C_\varepsilon}^2 + |G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi|_{D_\varepsilon}^2$$

Le terme $|(1 - w_{R_\varepsilon})\,\varphi + w_{R_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi|_{C_\varepsilon}^2$ converge vers zéro. En effet,

$$|(1 - w_{R_\varepsilon})\,\varphi + w_{R_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi|_{C_\varepsilon}^2 = |w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi)|_{C_\varepsilon}^2,$$

et gâce à (42)

$$|w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi)|_{C_\varepsilon}^2 \leq |(G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi)|_{L^\infty(\Omega)}^2\,|C_\varepsilon|,$$

Puisque $|C_\varepsilon| \to 0$ et $|G_{r_\varepsilon}(\psi)|$ converge uniformément vers ψ, donc

$$|(G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi)|_{L^\infty(\Omega)}^2 \to |\psi - \varphi|_{L^\infty(\Omega)}^2,$$

alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |(1 - w_{R_\varepsilon})\,\varphi + w_{R_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi|_{C_\varepsilon}^2 = 0.$$

Le terme $|G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi|_{D_\varepsilon}^2$ converge aussi vers zéro car $G_{r_\varepsilon}(\psi)$ converge uniformément vers ψ, donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi|_{D_\varepsilon}^2 \leq \lim_{\varepsilon \to 0} |G_{r_\varepsilon}(\psi) - \varphi|_{L^\infty(\Omega)}^2\,|D_\varepsilon| = 0$$

■

0.19 Passage à la limite

Proposition 8 *Pour la sous suite de la proposition 7 on a*

$$a_\varepsilon\left(u^\varepsilon,\Phi_\varepsilon\right)\underset{\varepsilon\to0}{\to}\int_\Omega \nabla u\,\nabla\varphi\,dx+4\nu\gamma\int_\Omega (v-u)(\psi-\varphi)\,dx \tag{73}$$

et

$$\langle F_\varepsilon,\Phi_\varepsilon\rangle_{\mathbf{H}^{-1}\times\mathbf{H}_0^1}\underset{\varepsilon\to0}{\to}\int_\Omega f\,\varphi\,dx+\int_\Omega g\,\psi\,dx \tag{74}$$

Preuve. Montrons (73). En sachant que $\nabla\Phi_\varepsilon=0$ sur D_ε, il vient

$$\begin{aligned}a_\varepsilon\left(u^\varepsilon,\Phi_\varepsilon\right)&=\left(\nabla u^\varepsilon,\nabla\Phi_\varepsilon\right)_{\Omega_\varepsilon}\\&=\left(\nabla u^\varepsilon,\nabla\varphi\right)_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon}+\left(\nabla u^\varepsilon,(1-w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi+\nabla w_{R_\varepsilon}\left(G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi\right)\right)_{C_\varepsilon}.\end{aligned}$$

Commençons par déterminer la limite du terme $\left(\nabla u^\varepsilon,\nabla\varphi\right)_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon}$, on a

$$\left(\nabla u^\varepsilon,\nabla\varphi\right)_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon}=\int_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon}\nabla u^\varepsilon\nabla\varphi\,dx=\int_\Omega \chi_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon}\nabla u^\varepsilon\nabla\varphi\,dx,$$

en sachant que

$$\begin{aligned}\left|\Omega\setminus\left(\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon\right)\right|&=\left|\cup_{k\in Z\varepsilon}B\left(\varepsilon k,R_\varepsilon\right)\right|\\&=\cup_{k\in Z\varepsilon}\left|B\left(\varepsilon k,R_\varepsilon\right)\right|=card Z\varepsilon\mid B\left(0,R_\varepsilon\right)\mid\\&\simeq\frac{1}{\varepsilon^3}\frac{4}{3}\nu R_\varepsilon^3\underset{\varepsilon\to0}{\to}0,\end{aligned}$$

donc

$$\chi_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon}\nabla\varphi\longrightarrow\nabla\varphi\quad\text{pp sur }\Omega,$$

de plus on a

$$\left|\chi_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon}\nabla\varphi(x)\right|\le\left|\nabla\varphi(x)\right|\qquad\forall x\in\Omega,$$

alors d'après le théorème de la converge dominées de Lebesgue il vient

$$\chi_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon}\nabla\varphi\longrightarrow\nabla\varphi\quad\text{dans }\mathbf{L}^2(\Omega).$$

Tenant compte de la convergence faible de ∇u^ε vers ∇u dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, on déduit

$$\left(\nabla u^\varepsilon,\nabla\varphi\right)_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon}=\int_\Omega\left(\chi_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon}\nabla\varphi\right)\nabla u^\varepsilon dx\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\int_\Omega\nabla\varphi\,\nabla u\,dx.$$

Allons vers le terme $\left(\nabla u^\varepsilon,\nabla\Phi_\varepsilon\right)_{C_\varepsilon}$, il s'écrit

$$\begin{aligned}\left(\nabla u^\varepsilon,\nabla\Phi_\varepsilon\right)_{C_\varepsilon}&=\left(\nabla u^\varepsilon,(1-w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi\right)_{C_\varepsilon}+\left(\nabla u^\varepsilon,\nabla w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\psi)-\varphi)\right)_{C_\varepsilon}\\&=\left(\nabla u^\varepsilon,(1-w_{R_\varepsilon})\nabla\varphi\right)_{C_\varepsilon}+\left(\nabla u^\varepsilon,\nabla w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\psi)-G_{r_\varepsilon}(\varphi))\right)_{C_\varepsilon}+\\&\quad+\left(\nabla u^\varepsilon,\nabla w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\varphi)-\varphi)\right)_{C_\varepsilon}.\\&=I_1+I_2+I_3,\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &:= (\nabla u^\varepsilon, (1 - w_{R_\varepsilon}) \nabla \varphi)_{C_\varepsilon} \\ I_2 &:= (\nabla u^\varepsilon, \nabla w_{R_\varepsilon} (G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi))_{C_\varepsilon}. \\ I_3 &:= (\nabla u^\varepsilon, \nabla w_{R_\varepsilon} (G_{r_\varepsilon}(\psi) - G_{r_\varepsilon}(\varphi)))_{C_\varepsilon} \end{aligned}$$

Le terme I_1 converge vers zéro. En effet,

$$I_1 = (\nabla u^\varepsilon, (1 - w_{R_\varepsilon}) \nabla \varphi)_{C_\varepsilon} = \int_\Omega \nabla u^\varepsilon \chi_{C_\varepsilon} (1 - w_{R_\varepsilon}) \nabla \varphi \, dx,$$

d'où en vertue de (42)

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_\Omega \nabla u^\varepsilon \chi_{C_\varepsilon} (1 - w_{R_\varepsilon}) \nabla \varphi \, dx \right| \leq |\nabla \varphi|_\infty \int_\Omega |\nabla u^\varepsilon| \chi_{C_\varepsilon} \\ &\leq |\nabla \varphi|_\infty |\nabla u^\varepsilon|_\Omega |C_\varepsilon|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

et d'après (57)

$$|I_1| \lesssim |C_\varepsilon|^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Le terme I_2 converge aussi vers zéro car d'après (33), (57) et (44) et (69)on a

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq 2R_\varepsilon |\nabla \varphi|_{L^\infty(\Omega)} \int_{C_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon| \, |\nabla w_{R_\varepsilon}| \, dx \\ &\leq 2R_\varepsilon |\nabla \varphi|_{L^\infty(\Omega)} |\nabla u^\varepsilon|_\Omega |\nabla w_{R_\varepsilon}|_\Omega \\ &\lesssim R_\varepsilon \sqrt{\gamma_\varepsilon} \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Pour calculer la limite de I_3 on remarque d'abord que

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{C_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla w_{R_\varepsilon} (G_{r_\varepsilon}(\psi) - G_{r_\varepsilon}(\varphi)) \, dx \\ &= \sum_{k \in z_\varepsilon} \left(\fint_{S^k_{r_\varepsilon}} \psi \, d\sigma - \fint_{S^k_{r_\varepsilon}} \varphi \, d\sigma \right) \int_{C_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla w_{R_\varepsilon} dx, \end{aligned}$$

puis, par un changement de variables, et en notant

$$\tilde{u}^\varepsilon_k(x) = u^\varepsilon(x + \varepsilon k),$$

on peut écrire

$$\int_{C_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla w_{R_\varepsilon} dx = \int_{C(r_\varepsilon, R_\varepsilon)} \nabla \tilde{u}^\varepsilon_k(x) \nabla W_{R_\varepsilon}(x) \, dx.$$

Pour expliciter le second terme de cette dernière égalité, on passe au changement de variables sphérique. D'après (48) et (39) il vient

$$\begin{aligned}\int_{C(r_\varepsilon,R_\varepsilon)} \nabla\tilde{u}_k^\varepsilon(x)\,\nabla W_{R_\varepsilon}(x)\,dx &= \int_0^{2\nu}\int_0^{\nu}\sin\theta\,d\theta\,d\Gamma\int_{r_\varepsilon}^{R_\varepsilon}\frac{\partial\tilde{u}_k^\varepsilon}{\partial r}\frac{\partial W_{R_\varepsilon}}{\partial r}r^2dr\\ &= -\frac{r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon-r_\varepsilon}\int_0^{2\nu}\int_0^{\nu}\sin\theta\,d\theta\,d\Gamma\int_{r_\varepsilon}^{R_\varepsilon}\frac{\partial\tilde{u}_k^\varepsilon}{\partial r}dr\\ &= \frac{r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon-r_\varepsilon}\int_0^{2\nu}\int_0^{\nu}(\tilde{u}_k^\varepsilon/_{r=r_\varepsilon}-\tilde{u}_k^\varepsilon/_{r=R_\varepsilon})\sin\theta\,d\theta\,d\Gamma\\ &= \frac{r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon-r_\varepsilon}\int_{S_1}(\tilde{u}_k^\varepsilon/_{r=r_\varepsilon}-\tilde{u}_k^\varepsilon/_{r=R_\varepsilon})\,d\sigma,\end{aligned}$$

S_1 étant la sphère de rayon 1 centrée en zéro.

En remarquant que

$$\fint_{S_R} h\,d\sigma = \fint_{S_1} h/_{r=R}\,d\sigma,$$

on peut écrire

$$\int_{S_1}(\tilde{u}_k^\varepsilon/_{r=r_\varepsilon}-\tilde{u}_k^\varepsilon/_{r=R_\varepsilon})\,d\sigma = 4\nu\left(\fint_{S_{r_\varepsilon}}\tilde{u}_k^\varepsilon d\sigma - \fint_{S_{R_\varepsilon}}\tilde{u}_k^\varepsilon d\sigma\right)$$

donc

$$\int_{S_1}(\tilde{u}_k^\varepsilon/_{r=r_\varepsilon}-\tilde{u}_k^\varepsilon/_{r=R_\varepsilon})\,d\sigma = 4\nu\left(\fint_{S_{r_\varepsilon^k}}u^\varepsilon d\sigma - \fint_{S_{R_\varepsilon^k}}u^\varepsilon d\sigma\right).$$

Finalement

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{4\nu r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon-r_\varepsilon}\sum_{k\in z_\varepsilon}\left(\fint_{S_{r_\varepsilon}^k}\psi\,d\sigma-\fint_{S_{r_\varepsilon}^k}\varphi\,d\sigma\right)\left(\fint_{S_{r_\varepsilon^k}}u^\varepsilon d\sigma-\fint_{S_{R_\varepsilon^k}}u^\varepsilon d\sigma\right)\\ &= \frac{1}{\varepsilon^3}\frac{4\nu r_\varepsilon R_\varepsilon}{R_\varepsilon-r_\varepsilon}\int_\Omega(G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon)-G_{R_\varepsilon}(u^\varepsilon))\,(G_{r_\varepsilon}(\psi)-G_{r_\varepsilon}(\varphi))\,dx.\end{aligned}$$

On passe à la limite, on obtient en vertu de (63), (64) et de la convergence uniforme $G_{r_\varepsilon}(\psi)$ vers ψ et celle de $G_{r_\varepsilon}(\varphi)$ vers φ,

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} I_3 = 4\nu\gamma\int_\Omega(v-u)(\psi-\varphi)\,dx.$$

On a alors

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}(\nabla u^\varepsilon,\nabla\Phi^\varepsilon) = \int_\Omega\nabla u\,\nabla\varphi\,dx + 4\nu\gamma\int_\Omega(v-u)(\psi-\varphi)\,dx.$$

Passons à la démonstration de (74)

On a

$$\langle F_\varepsilon,\Phi^\varepsilon\rangle = \int_{\Omega_\varepsilon} f\quad\Phi^\varepsilon dx + \fint_{D_\varepsilon} g\,\Phi^\varepsilon dx.$$

D'après (70) il vient

$$\begin{aligned}\langle F_\varepsilon, \Phi^\varepsilon\rangle &= \int_{\Omega_\varepsilon} f\,\Phi^\varepsilon\, dx + \fint_{D_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}\ (\psi)\, g\ dx\\ &= J_1 + J_2.\end{aligned}$$

Montrons que

$$J_2 \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \int_\Omega \psi\, g\, dx,$$

pour cela on fait la décomposition suivante :

$$\fint_{D_\varepsilon} G_{R_\varepsilon}(\psi)\, g\ dx = \fint_{D_\varepsilon} g\ (G_{R_\varepsilon}\ (\psi) - \psi)\ dx\ + \fint_{D_\varepsilon} g\,\psi\, dx;$$

on a

$$\begin{aligned}\left|\fint_{D_\varepsilon} g\ (G_{R_\varepsilon}(\psi) - \psi)\, dx\right| &\leq \left(\fint_{D_\varepsilon} |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\fint_{D_\varepsilon} |G_{R_\varepsilon}\ (\psi) - \psi|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \|g\|_\infty |G_{R_\varepsilon}(\psi) - \psi|_{L^\infty(D_\varepsilon)},\end{aligned}$$

alors d'après (33)

$$\left|\fint_{D_\varepsilon} g\ (G_{R_\varepsilon}(\psi) - \psi)\, dx\right| \leq \|g\|_\infty\, 2R_\varepsilon\, |\nabla\psi|_{L^\infty(\Omega)}$$

donc

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\left|\fint_{D_\varepsilon} g\ (G_{R_\varepsilon}\ (\psi) - \psi)\ dx\ \right| \leq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \|g\|_\infty\, 2R_\varepsilon\, |\nabla\psi|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

Par ailleurs, d'après (55) on a

$$\fint_{D_\varepsilon} g\,\psi\, dx \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \int_\Omega g\,\psi\, dx.$$

On passe à J_1. On a

$$J_1 = \int_{\Omega_\varepsilon} f\,\Phi^\varepsilon\, dx = \int_\Omega \chi_{\Omega_\varepsilon} f\,\Phi^\varepsilon\, dx.$$

Puisque

$$\chi_{\Omega_\varepsilon} f \longrightarrow f \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ et } \Phi^\varepsilon \to \varphi \text{ dans } L^2(\Omega),$$

alors

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\int_\Omega \chi_{\Omega_\varepsilon} f\,\Phi^\varepsilon\, dx = \int_\Omega f\,\varphi\, dx.$$

En effet, $\chi_{\Omega_\varepsilon} f \longrightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$ car

$$\chi_{\Omega_\varepsilon} f \longrightarrow f \quad \text{pp sur } \Omega$$

et

$$\left|\chi_{\Omega_\varepsilon} f\right| \leq |f|, \quad |f| \in L^2(\Omega),$$

donc, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$\chi_{\Omega_\varepsilon} f \longrightarrow f \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

■

0.20 Problème limite et effets non locaux

Les résultats de convergences démontrés ultérieurement ce résument dans le théorème suivant.

Théorème 12 *Il existe* $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ *et* $v \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ *tels que,*

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{75}$$

$$G_{R_\varepsilon}(u^\varepsilon) \to u \text{ dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \tag{76}$$

$$G_{r_\varepsilon}(u^\varepsilon) \rightharpoonup v \text{ dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \tag{77}$$

$$\frac{1}{|D_\varepsilon|}\chi_{D_\varepsilon} u^\varepsilon \rightharpoonup v \quad \text{dans } \mathbf{H}^{-1}(\Omega). \tag{78}$$

avec (u, v) *solution unique du système*

$$\begin{cases} -\Delta u + 4\nu\gamma(v-u) = f & \text{dans } L^2(\Omega) \\ -4\nu\gamma(v-u) = g & \text{dans } L^2(\Omega) \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{79}$$

Ici les convergences ont lieu pour toute la suite (u^ε).

Preuve. Montrons que le problème (79) admet une unique solution Soient (u_1, v_1) et (u_2, v_2) deux solution de (79), alors

$$-\Delta(u_1 - u_2) + 4\nu\gamma((v_1 - v_2) - (u_1 - u_2)) = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \tag{80}$$

$$(v_1 - v_2) - (u_1 - u_2) = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \tag{81}$$

d'où

$$\begin{cases} -\Delta(u_1 - u_2) = 0 & \text{dans } L^2(\Omega) \\ u_1 = 0 \quad \text{et} \quad u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ce systeme correspond au problème du laplacien homogène, donc admet une solution unique nulle, alors

$$u_1 - u_2 = 0 \tag{82}$$

d'après (82) et (81), il vient

$$v_1 = v_2.$$

Toute sous suite $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ vérifiant les convergences (75), (76), (77), converge vers les mêmes valeurs u et v. Donc c'est toute la suite $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ qui vérifie ces convergences en vertue du théorème de Eberlein-Smuljan (Théorème 1 du rappel). ■

Sixième partie

Problème limite dans le cas $\varepsilon^3 \ll r_\varepsilon \ll \varepsilon$

Dans cette partie on considère que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_\varepsilon = +\infty. \tag{83}$$

0.21 Fonction test

Pour $R_\varepsilon \in \mathcal{R}_\varepsilon$ et pour $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$ on définit la fonction test

$$\Phi_\varepsilon := (1 - w_{R_\varepsilon})\varphi + w_{R_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(\varphi).$$

Proposition 9 *Sans aucune condition sur γ_ε on a*

$$\Phi_\varepsilon \in V_\varepsilon,$$

et

$$\Phi_\varepsilon \to \varphi \quad \textit{dans} \quad \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{84}$$

Preuve. $\Phi_\varepsilon \in V_\varepsilon$ et $\Phi_\varepsilon \longrightarrow \varphi$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ se démontre comme dans le lemme 10.

Reste à montrer que $|\nabla\Phi_\varepsilon - \nabla\varphi|_\Omega \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned} |\nabla\Phi_\varepsilon - \nabla\varphi|_\Omega^2 &= |-w_{R_\varepsilon}\nabla\varphi + \nabla w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi)|_{C_\varepsilon}^2 + |\nabla\varphi|_{D_\varepsilon}^2 \\ &\le 2|w_{R_\varepsilon}\nabla\varphi|_{C_\varepsilon}^2 + 2|\nabla w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi)|_{C_\varepsilon}^2 + |\nabla\varphi|_{D_\varepsilon}^2 \end{aligned}$$

Le terme $|w_{R_\varepsilon}\nabla\varphi|_{C_\varepsilon}$ converge vers zéro. En effet,

$$|w_{R_\varepsilon}\nabla\varphi|_{C_\varepsilon}^2 = \int_\Omega \chi_{C_\varepsilon}|w_{R_\varepsilon}|^2|\nabla\varphi|^2,$$

d'après (42), il vient

$$\begin{aligned} |w_{R_\varepsilon}\nabla\varphi|_{C_\varepsilon}^2 &\le \int_\Omega \chi_{C_\varepsilon}|\nabla\varphi|^2 \\ &\le |\nabla\varphi|_\infty^2 |C_\varepsilon| \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Le terme $|\nabla w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi)|_{C_\varepsilon}$ converge aussi vers zéro car

$$|\nabla w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi)|_{C_\varepsilon}^2 \le |G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi|_{L^\infty(C_\varepsilon)}^2 |\nabla w_{R_\varepsilon}|_{C_\varepsilon}^2,$$

et d'après(44), (34) et (20)

$$\begin{aligned} |\nabla w_{R_\varepsilon}(G_{r_\varepsilon}(\varphi) - \varphi)|_{C_\varepsilon}^2 &\lesssim \varepsilon^2|\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega)}^2\gamma_\varepsilon \\ &\lesssim \varepsilon^2|\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega)}^2\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3} \\ &\lesssim \left(\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}\right)|\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega)}^2 \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\rightarrow} 0. \end{aligned}$$

Le terme $|\nabla\varphi|_{D_\varepsilon}$ converge aussi vers zéro,.en effet

$$|\nabla\varphi|_{D_\varepsilon}^2 = \int_{D_\varepsilon}|\nabla\varphi|^2 \le |\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega)}^2|D_\varepsilon| \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\rightarrow} 0.$$

Par conséquent

$$\Phi_\varepsilon \to \varphi \ \textit{dans} \ \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

■

0.22 Passage à la limite

Proposition 10 *Pour la sous suite de la proposition 7 on a*

$$a_{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon},\Phi_{\varepsilon}\right)\underset{\varepsilon\to 0}{\to}\int_{\Omega}\nabla u\,\nabla\varphi\,dx. \tag{85}$$

et

$$\langle F_{\varepsilon},\Phi_{\varepsilon}\rangle_{\mathbf{H}^{-1}\times\mathbf{H}_0^1}\underset{\varepsilon\to 0}{\to}\int_{\Omega}(f+g)\,\varphi\,dx. \tag{86}$$

Preuve. Montrons (85). En sachant que $\nabla\Phi_{\varepsilon}=0\ sur\,D_{\varepsilon},$ il vient

$$a_{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon},\Phi_{\varepsilon}\right)=\left(\nabla u^{\varepsilon},\nabla\Phi_{\varepsilon}\right)_{\Omega_{\varepsilon}}=\left(\nabla u^{\varepsilon},\nabla\Phi_{\varepsilon}\right)_{\Omega},$$

d'après (84) et (62)on a

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left(\nabla u^{\varepsilon},\nabla\Phi_{\varepsilon}\right)_{\Omega}=\left(\nabla u,\nabla\varphi\right)$$

Par ailleurs, puisque $F_{\varepsilon}\rightharpoonup f+g$ dans $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ et $\Phi^{\varepsilon}\to\varphi$ dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ on a

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\langle F_{\varepsilon},\Phi^{\varepsilon}\rangle=\int_{\Omega}(f+g)\,\varphi\,dx.$$

■

0.23 Problème limite

Les résultats de convergences démontrés ultérieurement ce résument dans le théorème suivant.

Théorème 13 *Il existe* $u\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ *tel que*

$$u^{\varepsilon}\rightharpoonup u\ dans\ \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{87}$$

$$G_{R_{\varepsilon}}\left(u^{\varepsilon}\right)\to u\ dans\ \mathbf{L}^2(\Omega), \tag{88}$$

$$G_{r_{\varepsilon}}\left(u^{\varepsilon}\right)\to u\ dans\ \mathbf{L}^2(\Omega) \tag{89}$$

avec u*, solution unique du système*

$$\begin{cases}-\Delta u=f+g & dans\ L^2(\Omega)\\ u=0\ sur\ \partial\Omega\end{cases}. \tag{90}$$

Remarque 4 *Dans ce théorème les convergences ont lieu pour toute la suite* (u^{ε}) *car le systeme* (90) *admet une unique solution et par application du théorème de Eberlein-Smuljan (Théorème 1 du rappel). Dans ce cas la quantité* v *de la proposition 7 est telle que* $u=v$*.*

Septième partie

Problème limite dans le cas $r_\varepsilon \ll \varepsilon^3 \ll \varepsilon$

Dans cette partie on considère que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \gamma_{\varepsilon} = 0. \tag{91}$$

Remarque 5 *Sous la condition* (91) *l'estimation*

$$\fint_{D_{\varepsilon}} |\theta|^2 \, dx \lesssim |\nabla\theta|^2_{\Omega}, \tag{92}$$

nécessaire pour avoir l'estimations à priori (57)*n'est plus vérifiée car* $(\gamma_{\varepsilon}^{-1})$ *n'est pas bornée (voir remarque3 et théorème 11). On ne peut donc pas étudier le comportement asymptotique de notre problème.*

Dans cette étude on compense l'estimation (92) par l'introduction d'une suite (g_{ε}) de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ vérifiant

$$\frac{1}{|D_{\varepsilon}|}\chi_{D_{\varepsilon}} g_{\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\rightharpoonup} g \qquad \text{dans} \quad \mathbf{H}^{-1}(\Omega), \tag{93}$$

et en posant un nouveau problème à étudier suivant :

$$\begin{aligned}
-\triangle u^{\varepsilon} + \nabla p_{\varepsilon} &= g_{\varepsilon} && \text{dans } D_{\varepsilon}, && (94)\\
div\ u^{\varepsilon} &= 0 && \text{dans } D_{\varepsilon}, && (95)\\
-\triangle u^{\varepsilon} &= f && \text{dans } \Omega_{\varepsilon}, && (96)\\
\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial \Xi}|_{D_{\varepsilon}} - p_{\varepsilon} n &= |D_{\varepsilon}| \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial \Xi}|_{\Omega_{\varepsilon}} && \text{sur } \partial D_{\varepsilon}, && (97)\\
u^{\varepsilon} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega, && (98)
\end{aligned}$$

Remarque 6 *Un exemple de fonctions vérifiant*(93) : $g_{\varepsilon} = |D_{\varepsilon}| h$, *avec* $h \in L^2(\Omega)$, *on a* $\frac{\chi_{D_{\varepsilon}}}{|D_{\varepsilon}|} |D_{\varepsilon}| h = \chi_{D_{\varepsilon}} h \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$ *dans* $H^{-1}(\Omega)$ *(se montre par utilisation du théoème de la convergence dominée de Lesbesgue), dans ce cas* $g = 0$.

En suivant la démarche donnée dans la partie 2 de ce mémoire la formulation variationnelle du problème (94)-(98) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_{\varepsilon} \in V_{\varepsilon} \text{ tel que} \\ a_{\varepsilon}(u^{\varepsilon}, \varphi) = H_{\varepsilon}(\varphi), \quad \forall \varphi \in V_{\varepsilon}, \end{array} \right. \tag{99}$$

où V_{ε} et a_{ε} sont respectivement l'espace test et la forme bilinéaire considérés dans la partie 2, à savoir

$$\begin{aligned}
V_{\varepsilon} \quad &: = \left\{ \varphi \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \text{ avec } div\varphi = 0 \text{ sur } D_{\varepsilon} \right\}. \\
a_{\varepsilon}(\psi, \varphi) \quad &= \int_{\Omega_{\varepsilon}} \nabla\psi \ \nabla\varphi \ dx + \fint_{D_{\varepsilon}} \nabla\psi \ \nabla\varphi \ dx.
\end{aligned}$$

H_{ε} est donnée par

$$H_{\varepsilon}(\varphi) = \int_{\Omega_{\varepsilon}} f \varphi \, dx + \fint_{D_{\varepsilon}} g_{\varepsilon} \varphi \, dx. \tag{100}$$

0.24 Comportement asymptotique de (H_ε)

Lemme 11

$$H_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\rightharpoonup} f + g \quad dans \quad \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \tag{101}$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\mathbf{\Omega})$

$$\langle H_\varepsilon, \varphi \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}_0^1(\mathbf{\Omega})} = \int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi\, dx + \fint_{D_\varepsilon} g_\varepsilon \varphi\, dx$$

D'après la démonstration de lemme 9 on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx.$$

Par ailleurs

$$\fint_{D_\varepsilon} g_\varepsilon \varphi\, dx = \int_\Omega \frac{\chi_{D_\varepsilon}}{|D_\varepsilon|} g_\varepsilon \varphi\, dx,$$

d'après (93)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \fint_{D_\varepsilon} g_\varepsilon \varphi\, dx &= \int_\Omega g\varphi\, dx \\ &= \langle g, \varphi \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}_0^1(\mathbf{\Omega})} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle F_\varepsilon, \varphi \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}_0^1(\mathbf{\Omega})} = \langle f + g, \varphi \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}_0^1(\mathbf{\Omega})}.$$

■

0.25 Estimations à priori

Théorème 14 *si u^ε est solution du problème* (99) *alors*

$$(u^\varepsilon) \text{ est bornée dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{102}$$

et

$$\frac{1}{|D_\varepsilon|} |\nabla u^\varepsilon|^2_{D_\varepsilon} \lesssim 1. \tag{103}$$

La preuve est la même que celle donnée pour le théorème 11.

0.26 Fonction test

Pour $R_\varepsilon \in \mathcal{R}_\varepsilon$ et pour $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$ on définit la fonction test

$$\Phi_\varepsilon := (1 - w_{R_\varepsilon})\varphi + w_{R_\varepsilon} G_{r_\varepsilon}(\varphi).$$

Remarque 7 *D'après la proposition 9 on a*

$$\Phi_\varepsilon \in V_\varepsilon,$$

et

$$\Phi_\varepsilon \to \varphi \text{ dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{104}$$

0.27 Passage à la limite

Proposition 11 *A une sous suite près on a*

$$a_\varepsilon(u^\varepsilon, \Phi_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx, \tag{105}$$

et

$$\langle H_\varepsilon, \Phi_\varepsilon\rangle_{\mathbf{H}^{-1}\times\mathbf{H}_0^1} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \langle f + g, \varphi\rangle_{\mathbf{H}^{-1}\times\mathbf{H}_0^1}. \tag{106}$$

Preuve. Montrons (105). En sachant que $\nabla\Phi_\varepsilon = 0$ sur D_ε, il vient

$$a_\varepsilon(u^\varepsilon, \Phi_\varepsilon) = (\nabla u^\varepsilon, \nabla\Phi_\varepsilon)_{\Omega_\varepsilon} = (\nabla u^\varepsilon, \nabla\Phi_\varepsilon)_\Omega,$$

d'après (102) il existe une sous suite de (u^ε) encore notée (u^ε) telle que

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{107}$$

Pour la sous suite (u^ε) on a d'après (107) et (104)

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} (\nabla u^\varepsilon, \nabla\Phi_\varepsilon)_\Omega = (\nabla u, \nabla\varphi)_\Omega.$$

Par ailleurs (106) est immédiate grâce à (104) et (101). ■

0.28 Problème limite

Les résultats de convergences démontrés ultérieurement ce résument dans le théorème suivant.

Théorème 15 *Il existe* $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ *tels que,*

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{108}$$

avec u, solution unique du système

$$\begin{cases} -\Delta u = f + g & \text{dans } L^2(\Omega) \\ \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{109}$$

Remarque 8 *Dans ce théorème la convergence* (108) *a lieu pour toute la suite d'après le Théorème de Eberlein-Smuljan (voir rappel) et le fait que le systeme* (109) *admet une unique solution (problème du Laplacien).*

Conclusion

Il est intéressant de noter que le comportement limite du mélange dans les trois cas étudiés n'est pas fluide. Aussi l'effet des particules évanescentes représenté par l'apparition à la limite de la quantité v est plus important dans le cas critique que dans les deux autres cas. En effet, le cas critique mes en évidence des effets non locaux qui se traduisent par le terme $4\nu\gamma\,(v-u)$ dans les équations limite (79). Il est à noter que (79) se réécrit

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f+g \qquad \text{dans } L^2(\Omega) \\ v &= \frac{g}{4\nu} \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

donc le problème limite est le même que celui des deux autres cas. De plus, v est calculable, ce qui n'est pas le cas des deux autres cas.

Annexe A

Les démonstrations suivantes sont données dans [6][9] néanmoins nous avons jugé bon de les retranscrire.

A.1 Preuve du lemme 5

Preuve. Démontrons (24). Soit $\theta \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |\theta - G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2 \, dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \int_{Y_\varepsilon^k} \left| \theta - \fint_{S_{R_\varepsilon}^k} \theta \, d\sigma \right|^2$$

car

$$\Omega_{Y_\varepsilon} = \cup_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} Y_\varepsilon^k.$$

Par ailleurs, la sphère circonscrite du cube Y_ε^k étant $B\left(\varepsilon k, \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, on a donc

$$Y_\varepsilon^k \subset B\left(\varepsilon k, \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

ce qui nous donne

$$\int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |\theta - G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2 \, dx \le \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \int_{B\left(\varepsilon k, \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \left| \theta - \fint_{S_{R_\varepsilon}^k} \theta \, d\sigma \right|^2. \tag{A.1}$$

On applique le lemme 4 pour $R = \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha = \dfrac{2R_\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{3}}$ au second membre de $(A.1)$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |\theta - G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2 \, dx &\lesssim \left(\frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2R_\varepsilon} \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \int_{B\left(\varepsilon k, \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} |\nabla\theta|^2 \, dx \\ &\lesssim \frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon} \sum_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \int_{B\left(\varepsilon k, \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} |\nabla\theta|^2 \, dx. \end{aligned}$$

On peut faire l'estimation suivante

$$\sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{B\left(\varepsilon k,\varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}|\nabla\theta|^2\,dx\leq 2\int_\Omega|\nabla\theta|^2\,dx,$$

car

$$\left|\cup_{k\in Z_\varepsilon}\left(B\left(\varepsilon k,\varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\setminus Y_\varepsilon^k\right)\right|<|\Omega|,$$

par conséquent

$$\int_{\Omega_{Y_\varepsilon}}|\theta-G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2\,dx\lesssim\frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon}\int_\Omega|\nabla\theta|^2\,dx.$$

Démontrons (25). Soit $\theta\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{D_\varepsilon}|\theta-G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2\,dx=\sum_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon}\int_{B(\varepsilon k,r_\varepsilon)}\left|\theta-⨍_{S^k_{r_\varepsilon}}\theta\,d\sigma\right|^2dx$$

On applique le lemme 4 pour $R=r_\varepsilon$ et $\alpha=1$

$$\int_{D_\varepsilon}|\theta-G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2\,dx\lesssim r_\varepsilon^2\sum_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon}\int_{B(\varepsilon k,r_\varepsilon)}|\nabla\theta|^2\,dx\lesssim r_\varepsilon^2\int_{D_\varepsilon}|\nabla\theta|^2\,dx.$$

Démontrons (26). Soit $\theta\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega|G_{R_\varepsilon}(\theta)-G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2\,dx=\sum_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon}\int_{Y_\varepsilon^k}\left|⨍_{S^k_{R_\varepsilon}}\theta\,d\sigma-⨍_{S^k_{r_\varepsilon}}\theta\,d\sigma\right|^2dy.$$

On applique le lemme 3 au terme de droite de cette dernière égalité, pour $r_1=r_\varepsilon$ et $r_2=R_\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega|G_{R_\varepsilon}(\theta)-G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2\,dx&\leq\sum_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon}\int_{Y_\varepsilon^k}\frac{(R_\varepsilon-r_\varepsilon)}{4\nu R_\varepsilon r_\varepsilon}dy\int_{C^k_{r_\varepsilon,R_\varepsilon}}|\nabla\theta|^2\,dx\\&\leq\frac{(R_\varepsilon-r_\varepsilon)}{4\nu R_\varepsilon r_\varepsilon}\sum_{k\in\mathbb{Z}_\varepsilon}\left|Y_\varepsilon^k\right|\int_{C^k_{r_\varepsilon,R_\varepsilon}}|\nabla\theta|^2\,dx\\&\lesssim\varepsilon^3\frac{(R_\varepsilon-r_\varepsilon)}{4\nu R_\varepsilon r_\varepsilon}\int_{C_\varepsilon}|\nabla\theta|^2\,dx\end{aligned}$$

la deuxième inégalité est justifiée par

$$\int_{Y_\varepsilon^k}dy=\left|Y_\varepsilon^k\right|=\varepsilon^3.$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{R_\varepsilon-r_\varepsilon}{R_\varepsilon}<1,$$

par conséquent

$$\int_\Omega|G_{R_\varepsilon}(\theta)-G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2\,dx\lesssim\frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon}\int_{C_\varepsilon}|\nabla\theta|^2\,dx.$$

■

A.2 Preuve du lemme 6.

Preuve. On a,

$$\fint_{D_\varepsilon} |\theta|^2 dx \leq 2\fint_{D_\varepsilon} |\theta - G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dx + 2\fint_{D_\varepsilon} |G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dx.$$

Compte tenu de (28) et de (25) il vient

$$\begin{aligned} \fint_{D_\varepsilon} |\theta|^2 dx &\leq 2\fint_{D_\varepsilon} |\theta - G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dx + 2\int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dx \\ &\lesssim r_\varepsilon^2 \fint_{D_\varepsilon} |\nabla\theta|^2 dx + 4\int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |G_{R_\varepsilon}(\theta) - G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dx + \\ &\quad +8\int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |\theta - G_{R_\varepsilon}(\theta)|^2 dx + 8\int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |\theta|^2 dx. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Par ailleurs

$$|D_\varepsilon| = \sum_{k\in Z_\varepsilon} |B(\varepsilon k, r_\varepsilon)| = \frac{4}{3}\nu r_\varepsilon^3 \frac{|\Omega|}{\varepsilon^3},$$

donc

$$\frac{r_\varepsilon^2}{|D_\varepsilon|} = \frac{3}{4\nu}\frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon}. \tag{A.3}$$

D'après (24) (26), $(A.2)$ $(A.3)$, et l'inégalité de Poincaré, on a

$$\begin{aligned} \fint_{D_\varepsilon} |\theta|^2 dx &\lesssim \frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon}\int_{D_\varepsilon} |\nabla\theta|^2 dx + \frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon}\int_{C_\varepsilon} |\nabla\theta|^2 dx + \frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon}\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx + \\ &\quad + \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx \\ &\lesssim \left(\frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon} + \frac{\varepsilon^3}{R_\varepsilon} + 1\right)\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx \\ &\lesssim \max\left(1, \frac{\varepsilon^3}{r_\varepsilon}\right)\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx. \end{aligned}$$

■

Bibliographie

[1] **G. ALLAIRE,** Homogenization of the Navier Stokes equations in open sets perforated with tiny holes. I. *Abstract framework, a volume distribution of holes. Arch. Rational. Mech. Anal.* 113 (1991) 209 − 259.

[2] **G. ALLAIRE,** Homogénéisation des équations de Stokes et de Navier-Stokes. *Thèse de doctorat de l'université de paris VI.* (1989).

[3] **M. BELLIEUD ; G. BOUCHITTE,** Homogenization of elliptique problems in a fiber reinforced structure. Non local effects. *ann.scuola Norm. Sup. Pis Cl. Csi.* (4) 26 (3) (1998) 407-436.

[4] **M. BELLIEUD ; I. GRUAIS,** Homogenization of an elastique material reinforced by very stiff or heavy fibers. Non local effects. Memory effects. *J.Math. Pures Appl.* 84 (1) (2005) 55-96

[5] **A. BENSOUSSAN ; J.L. LIONS ; G. PAPANICOLAOU,** Asymptotique Analysis for periodic Structures, *North-Hollands, Amsterdam, 1978.*

[6] **F. BENTALHA ;** Etude Mathématiques de quelques problèmes en mécanique des fluides, *Thèse de doctorat d'état, Constantine Décembre* (2006).

[7] **F. BENTALHA ; I. GRUAIS ; DAN. POLISEVSKI,** Homogenization of a conductive suspension in a Stokes-Bussinesq flow, *Applicable Analysis. 85* (6 − 7) (2006) 811-830.

[8] **F. BENTALHA ; I. GRUAIS ; DAN. POLISEVSKI,** Asymptotic thermal flow around a highly conductive suspension. *Analele Universitatii din Bucuresti, Seria Matematica.*(2007).

[9] **F. BENTALHA ; I. GRUAIS ; DAN. POLISEVSKI**, Diffusion process in a rarefied binary structure. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et appliquées,* 52 (2007), 2, 129-149.

[10] **H. BREZIS,** Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. *Dunod Paris* (1983).

[11] **M. BRIANE ; N. TCHOU,** Fibered microstructure for some nonlocal Dirichlet forms. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* 30 (2001) 681 − 712.

[12] **D. CIORANESCU ; F. MURAT,** Un terme étrange venu d'ailleurs, I et II. *Non linear Partial differential Equations and their applications. Collège de France Seminar,* II *and* III, *Paris* (1979/1980) *and*

(1980/ 1981) ; *Reaserch Notes in Mathematics,* 60 *and* 70*, Pitman, London* (1982) *and* (1983)*, 98-138, and 154-178.*

[13] **D. CIORANESCU ; P DONATO,** An introduction to homogenization. *Oxford Lecture Series in Math. App., Vol. 17, Oxford University Press*. (1999).

[14] **V. GIRAULT ; P.A. RAVIART,** Finite Elements Methods for Navier-Stokes Equations. *Springer Series in computational Mathematics, 5 Berlin,* (1986).

[15] **R. LANDAU ; E. LIPSCHITZ**, Mécanique des fluides. *Edition Mir,* (1971).

[16] **J. L. LIONS ; E. MAGENES,** Problèmes aux limites non homogène et applications. *Tome 1, Dunod, Paris* (1968).

[17] **P.A.RAVIART. J.M.TOMAS,** Introduction à l'analyse numérique des dérivées partielles, *Coll. Math. Appl.pour la Maîtrise, Dunod, Paris* (1983).

[18] **E. SANCHEZ -PALENCIA,** Non homogenous media and vibration theory. *Lecture notes in physics, Springer* 127, (1980).

[19] **E. SANCHEZ -PALENCIA ; J. SANCHEZ-HUBERT,** Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation. *Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson* (1992).

[20] **R. TEMAM,** Navier Stokes Equations. *North holland* (1979).