RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de BATNA
Faculté des Sciences Exactes
École Doctorale de Mathématiques
Département de Mathématiques

N° d'ordre : ....
N° série : ....

MÉMOIRE
Pour l'obtention du grade de
MAGISTER
SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Appliquées**
OPTION : **Théorie du contrôle**

Présenté par : **BELHAOUES RAZIK**

Intitulé :

Étude théorique et numérique d'un système stabilisable

Soutenu publiquement le 01/06/2011 à l'Université de Batna devant le jury composé de :

Mr Salah Eddine Rebiai	Professeur	Président	Université de Batna
Mr Ayadi Abedelhamid	Professeur	Rapporteur	Université de O-E-B
Mr Rachid Benacer	Professeur	Examinateur	Université de Batna
Mr Bouzit Mohamed	Maître de Conférences	Examinateur	Université de O-E-B

Remerciements

Au début et avant tous, je rends grâce à dieu tout puissant qui m'a aider à terminer ce travail.

je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur **Abdelhamid Ayadi** avoir encadré ce travail et pour les conseils efficaces et les encouragements et encore plus pour tout le temps qu'il m'a consacré pour me suivre pendant la rédaction de ce travail.

En outre, je reste et resterai fort reconnaissant à **Mr Salah Eddine Rebiai** qui me fera honneur de présider ce jury, ainsi qu'à **Mr Rachid Benacer** et **Mr Bouzit Mohamed** d'avoir bien voulu accepter d'être examinateurs de ce même jury.

Dédicace

C'est avec plaisir que je présente mes meilleurs voeux et sentiments à toute ma famille, en particulier mes parents.

Je dédie ce travail à tous mes chers amis sans exception. Sans oublier mes collègues de travail.

Table des matières

Notations

Ω	un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$,de frontière $\partial\Omega$
A^*	adjoint de A.
I	opérateur identité.
$\rho(A)$	l'ensemble résolvant de A.
$\sigma(A)$	le spectre ponctuel de A.
$\mathcal{D}(A)$	domaine de A.
$\mathcal{L}(H,K)$	ensemble des fonctions linéaires et continues de H dans K.
$\mathcal{L}(H)$	$\mathcal{L}(H,H)$.
$\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$	l'espace des fonctions continues
$L^p(\Omega)$	l'espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$.
$L^p(0,T,H)$	espace des fonctions intégrable f :$]0,T[\to H$ tel que $t \to \|f(t)\|^p$ est intégrable sur $]0,T[$.
ϕ	l'ensemble vide.
e^x, exp	fonction exponentielle
log	logarithme népérien
$f(.,t)$	fonction :$x \in \Omega \mapsto f(x,t)$
$<,>_H$	un produit scalaire définie dans H.
$\|.\|_H$	une norme définie dans H.
χ_ω	l'opérateur de restriction a ω.
$Im(A)$	image de A
$Ker(A)$	noyau de A

Introduction

La théorie du contrôle est censée modéliser des problèmes d'ingénierie et d'économie. Ètant donné un système dynamique régi par une équation d'évolution. L'étude d'analyse de ces systèmes conduit à trouver un contrôle qui les rend exactement contrôlable, faiblement contrôlable, stabilisable.
Dans ce mémoire on s'intéresse à la stabilité de certains systèmes de type :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Et la stabilisabilité du systèmes :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

tel que A, B sont des opérateurs linéaires.
La stabilité est l'un des aspects les plus importants de la théorie du système. La théorie fondamentale de stabilité établie par Lyapunov est intensivement développée pour les systèmes de dimension finie. Ici nous sommes intéressés par la stabilité asymptotique d'une classe de dimension infinie des systèmes linéaires, en utilisant la représentation puissante de semi groupe.

Le problème de stabilisation consiste à étudier le comportement asymptotique d'un système distribué globalement ou régionalement. Il ya des systèmes instables globalement mais stables dans une région du domaine d'évolution. Pour cela, on a la possibilité d'étudier le problème de stabilisation régionalement. Il existe de diverses méthodes pour l'étudier. A titre d'exemple : la méthode de décomposition spéctrale, le biais de contrôlabilité, les méthodes numériques,...

Nous donnons maintenant un aperçu du contenu des chapitres.
Le premier chapitre concerne quelques rappels sur la théorie des $semi-groupes$. Nous rappelons des résultats sur le comportement asymptotiques des $semi-groupes$ linéaires, puis nous donnons les principes généraux de la contrôlabilité des systèmes distribués..

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la notion de stabilisation des systèmes distribués. Ensuite nous introduisons la notion de la stabilisation régionale pour les systèmes linéaires. Nous présentons des exemples de motivation, ensuite nous donnons les caractérisations des contrôles réalisant la stabilisation régionale.

Enfin, le 3ième chapitre est consacré à l'application d'une méthode numérique de tels systèmes qui donne l'approche de la solution des sytèmes. la méthode utilisée est une méthode de différences finies basée sur les schémas explicites ou implicites....

Chapitre 1

Rappel sur la théorie des semi groupes et contrôlabilité

1.1 Les opérateurs

Soit H un espace de Hilbert.

Définition 1.1
Un opérateur linéaire non borné dans H est une application $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ définie sur un domaine $\mathcal{D}(A)$, sous-espace vectoriel de H.
Son image est $Im(A) = \{y \in H; \exists x \in \mathcal{D}(A), y = Ax\}$

Définition 1.2
L'ensemble résolvant de A est l'ensemble $\rho(A)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda I - A$ soit inversible d'inverse borné. Pour $\lambda \in \rho(A)$, on note $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

Définition 1.3
Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$,où X et Y sont deux espaces de Hilbert avec $\mathcal{D}(A)$ dense dans X. L'opérateur adjoint A^* de A est défini par :

$$\mathcal{D}(A^*) = \{y \in Y; \exists c \geq 0, | < y, Ax >_Y | \leq c\|x\|, \forall x \in \mathcal{D}(A)\}$$

$$< y, Ax >_Y = < A^*y, x >_X; \forall x \in \mathcal{D}(A), \forall y \in \mathcal{D}(A^*)$$

Définition 1.4
Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$.$A$ est dit auto-adjoint si $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ et $A = A^*$.

Théorème 1.1 $[Banach - Steinhaus]$
Soit X un espace de Banach.soint $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs linéaires bornés.
Si la suite $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ borné en tout point $x \in X$
(i.e $\forall x \in X, \exists M_x$ tel que : $\|A_n x\| \leq M_x \quad \forall n = 1, 2, ...$)
Alors la suite $(\|A_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornés.

1.2 Semi groupes

Soit le problème :

$$\begin{cases} 1)u'(t) = Au(t) \\ 2)u(o) = u_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

A est un opérateur linéaire défini sur un Hilbert .
Si le problème (1.1) admet une solution et que cette solution dépend continument de u_0 alors l'équation (1) admet une solution qui vérifie (2) et de plus cette solution dépend continument de u_0. Donc on introduit l'opérateur $S(t) : u_0 \longrightarrow u(t)$; pour $t \geq 0$. i.e $u(t) = S(t)u_0$.
et comme $u(t)$ vérifie la condition (2) alors $u(0) = S(0)u_0 \Rightarrow S(0) = I$.
De plus le systéme :

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) \\ v(0) = u(1) \end{cases} \tag{1.2}$$

Ce problème admet une solution unique $v(t) = S(t)u(s)$.
On remarque que $u(t+s)$ est une solution de problème (1.2) où :

$$\begin{cases} u(t+s) = S(t)u(s) \\ u(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Définition 1.5
Si $S(t)$ est un opérateur définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{L}(H)$ et vérifie les propriétés suivantes :

1. $S(t+s) = S(t)S(s)$.
2. $S(0) = I_H$.
3. $\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\|_H = 0$, $\quad \forall x \in H$.

alors la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est dite un $semi - groupe$ fortement continue .notée par $C^0 semi - groupe$

Exemple 1.1
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ *tel que :* $S(t) = e^{At} = \sum_{n\geq 0} \frac{(At)^n}{n!}$
alors $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* $C^0 semi-groupe$

Proposition 1.1 [12] *Si* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* $C^0 semi-groupe$ *dans* H*, alors la famille d'opérateurs adjoints* $\{S^*(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* $C^0 semi-groupe$ *dans* H*.*

Définition 1.6
On appelle $C^0 semi-groupe$ $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *de contraction si :*
$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1, \qquad \forall t \geq 0.$

Définition 1.7
On appelle générateur infinitésimal d'un $C^0 semi-groupe$ $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *l'opérateur* A *du domaine de définition* $\mathcal{D}(A)$ *définie par :*

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in H; \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}; existe\}$$

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}$$

Théorème 1.2 [12]
L'opérateur A *est un générateur infinitésimal de* $C^0 semi-groupe$ *si et seulement si* A *est un opérateur linéaire borné.*

Proposition 1.2 [6]
Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* $C^0 semi-groupe$ *sur l'espace de Hilbert* H *, soit* A *le générateur infinitésimal de* $S(t)$ *de domaine* $\mathcal{D}(A)$ *, si* $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ *alors :*

1. $S(t)x_0 \in \mathcal{D}(A)$ *pour tout* $t \geq 0$ *.*
2. $\frac{d}{dt}(S(t)x_0) = AS(t)x_0 = S(t)Ax_0; \qquad \forall t > 0$
3. $\frac{d^n}{dt^n} S(t)x_0 = A^n S(t)x_0 = S(t)A^n x_0$ *pour* $x_0 \in \mathcal{D}(A^n), \qquad ,t > 0.$
4. $S(t)x_0 - x_0 = \int_0^t S(s)Ax_0 ds \qquad ,t > 0$
5. $\mathcal{D}(A^n)$ *est dense dans* H *pour* $n = 1, 2, ...$ *et* A *est est fermé.*

Corollaire 1.3 [1]
Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* $C^0 semi-groupe$ *sur* H *de générateur infinitésimal* $(A, \mathcal{D}(A))$ *alors pour tout* $y_0 \in \mathcal{D}(A)$ *le système*

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

admet une unique solution $y \in C^1([0, \infty[; H) \cap C([0, \infty[; \mathcal{D}(A))$ *donée par* $y(t) = S(t)y_0$.
On s'intéresse à présent à la réciproque du résultat précédant.
Etant donne un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$ *à quelles condition est-il générateur* $C^0 semi-groupe$ *sur* H *?*
La réponse complète est donnée par le théorème de Hille-yosida.

Théorème 1.3 [6]
Si :

(a) A *est un opérateur linéaire fermé tel que* $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$.

(b) $(\lambda I - A)^{-1}$ *existe pour tout* $\lambda > \omega$.

(c) $\|(\lambda I - A)^{-m}\| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n} \qquad , \lambda > \omega \qquad m = 1, 2, ...$

alors A *est un générateur infinitésimal d'un* $C^0 semi-groupe$ *avec*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad , \forall t \geq 0$$

.

Définition 1.8 *Soit* $(A, \mathcal{D}(A))$ *un opérateur linéaire dans* H.*On dit que* A *est dissipatif si*

$$Re(Ax, x) \leq 0 \quad , \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

Si $Im(I - A) = H$ *alors* $(A, \mathcal{D}(A))$ *est dit maximal.*

Théorème 1.4 [12]
Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow Y$ *un opérateur linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $(A, \mathcal{D}(A))$ *est un générateur infinitésimal d'un* $C^0 semi-groupe$ *de contraction sur* H .

2. A *est maximal dissipatif.*

3. A^* *est maximal dissipatif.*

Proposition 1.4 [12]
Un opérateur linéaire fermé A à domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans H génère un $C^0 semi-groupe$ de contraction si et seulement si l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient $\mathbb{R}^+$ et pour tout $\lambda > 0$ on a :

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{1}{\lambda}$$

Théorème 1.5 [14] *Soit A un opérateur fermé à domaine dense, et supposons qu'il existe β tel que*

$$Re < Ay, y > \leq \beta\|y\|^2, \forall y \in \mathcal{D}(A)$$

et

$$Re < A^*y, y > \leq \beta\|y\|^2, \forall y \in \mathcal{D}(A^*)$$

alors A engendre un $C^0 semi-groupe$ tel que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq e^{\beta t}$$

Proposition 1.5 [14] *Si $S(t)$ est un $C^0 semi-groupe$ compact (i.e $S(t)$ est compact pout tout $t > 0$),alors $S(t)$ est continu pour la norme uniforme.*

Réciproquement ,on a

Proposition 1.6 [14] *Supposons que A est un générateur infinitésimal d'un $C^0 semi-groupe$ $S(t)$.*
Le $semi-groupe$ $S(t)$ est compact si et seulement si il est continu pour la topologie uniforme et la résolvante $R(\lambda, A)$ est compacte pour tout $\lambda \in \rho(A)$.

Remarque 1.1
Soit φ_n une base orthonormale de H espace de Hilbert supposé séparable, et soit λ_n une suite de nombres complexes telle que la suite $(e^{\lambda_n t})_{n\geq 1}$ soit bornée (ce qui et vrai si $\sup_{n\geq 0} Re(\lambda_n) < \infty$).
considérons l'opérateur diagonal défini par

$$Ay = \Sigma_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \varphi_n, y > \varphi_n, \mathcal{D}(A) = \{y \in H/\Sigma_{n=1}^{\infty} \mid \lambda_n < \varphi_n, y >|^2 < \infty\}$$

supposons de plus que A est auto-adjoint et que $(\lambda I - A)^{-1}$ est compact pour un certain λ.Alors on a les propriétés suivantes :

1. *Il existe une suite λ_n de valeurs propres distinctes de A telle que :*

   i $|\lambda_n| \longrightarrow \infty$

ii *La dimension de l'espace propre associé à λ_n est égale à son ordre de multiplicité r_n.*

iii *la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1})$ est strictement décroissante.*

2. *A admet un ensemble complet de vecteurs propres $(\varphi_{jk})_{j,k\geq 1}$*
3. *Le spectre $\sigma(A)$ est dénombrable*
4. *Pour tout $y \in \mathcal{D}(A)$,on a*

$$Ay = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k=1}^{r_j} < \varphi_{jk}, y > \varphi_{jk}$$

(r_j étant l'ordre de multiplicité de λ_j)

5. *L'opérateur A engendre le $semi-groupe$ donnée par*

$$S(t)y = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} \sum_{k=1}^{r_j} < y, \varphi_{jk} > \varphi_{jk}$$

1.3 Contrôlabilité

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ représentant le domaine géométrique du système (1.5) ($n = 1, 2, 3..$ pour les applications) et soit $T > 0$.
Les espaces H et U considérés dans cette partie sont des espaces de Hilbert séparables et désignent respectivement les espaces d'état et de contrôle .
On considère le système décrit par l'équation d'état :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \text{sur } [0, T] \\ y(0) = y^0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Où A est un opérateur différentiel de domaine $\mathcal{D}(A)$, qui engendre un $semi-groupe$ fortement continu $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur l'espace d'état $H = L^2(\Omega), B \in \mathcal{L}(U, H)$ et $u \in L^2(0, T, u)$.
Le système (1.5) admet une solution unique qui s'exprime par :

$$y_u(t) = S(t)y^0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds$$

.

On considère $Q_t : L^2(0, T; U) \to H$, l'opérateur qui défini par :

$$Q_t u = \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, \quad \forall u \in L^2(0, T; U)$$

Définition 1.9

a *Le système (1.5) est dit exactement contrôlable dans* H *sur* $[0, T]$ *si :*

$$\forall y^d \in H, \exists u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que} : y_u(T) = y^d$$

b *Le système (1.5) est dit exactement contrôlable dans* H *sur* $[0, T]$ *si :*

$$\forall y^d \in H, \exists u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que} : \|y_u(T) - y^d\|_H \leq$$

Proposition 1.7 [1]
Il ya une équivalence entre les propriétés suivantes :

a *(1.5) est faiblement contrôlable sur* $[0, T]$

b $\overline{Im(Q_t)} = H$

c $Ker(Q_t^*) = Ker(Q_t^* Q_t) = \{0\}$

d $\{< y, S(s)Bu >= 0 \quad \forall s \in [0, T] \quad et \quad \forall u \in U\}$
$\Rightarrow y = 0$

1.4 Actionneurs

les actionneurs peuvent être de nature , de forme et de conception diverses .Ceux que l'on rencontre dans les systèmes physiques, peuvent être de type :
- ponctuel.
- zone.
- file

Ces divers types d'actionneurs peuvent être localisés à l'intérieur du domaine Ω ou bien sur sa frontière Γ.

Définition 1.10
Soit Ω_0 *une partie non vide , fermée de* Ω *(resp.*Γ_0 *une partie non vide , de* Γ*),et soit* $g \in L^2(\Omega_0)$ *(resp.* $g \in L^2(\Gamma_0)$*).*
On appelle actionneur zone (resp. zone frontière) le couple (Ω_0, g) *(resp.* (Γ_0, g)*)où :*

1. Ω_0 *(resp.* Γ_0*) représente le support de l'actionneur.*

2. *g représente la répartition spatiale de l'actionneur.*

Définition 1.11

Soit $b \in \Omega$ (resp. $b \in \Gamma$).on appelle actionneur ponctuel (resp. ponctuel frontière)le couple (b, δ_b) où :

1. *b représente le support de l'actionneur.*
2. *δ_b représente la répartition spatiale de l'actionneur.*

Définition 1.12

On dira que l'actionneur (Ω_0, g) ou (b, δ_b) est stratégique, si le système qu'il existe est faiblement contrôlable .

Dans le cas de plusieurs actionneurs $(\Omega_i, g_i)_{1\leq i\leq p}$ ou $(b_i, \delta_{b_i})_{1\leq i\leq p}$,on dira que la suite d'actionneurs est stratégique, si le système qu'ils excite est faiblement contrôlable.

Proposition 1.8 [7]

La suite d'actionneurs $(\Omega_i, g_i)_{1\leq i\leq p}$ est stratégique si et seulement si :

1. *$p \geq \sup_n(r_n)$*
2. *$rg(G_n) = r_n$, pour tout n ,où G_n est la matrice d'ordre (p, r_n) et d'éléments :*

$$(G_n)_{ij} =< g_i, \varphi_{nj} >_{L^2(\Omega_i)}$$

$i = 1. .... p$ *et* $j = 1. .... r_n$

Chapitre 2

La stabilisation du système distribué

2.1 Notions de stabilité

Une des considérations les plus importantes dans l'analyse et le contrôle des systèmes est celle de la stabilité.
Considérons le système :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Où $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ est un générateur infinitésimal d'un $C^0 semi-groupe$ $S(t), t \geq 0$ dans H .

Définition 2.1
Le système (2.1) est dit :
- *Faiblement stable, si pour tout état initial $y_0 \in H$:*
  $< S(t)y_0, x >_H \to 0$ *quand* $t \to \infty, \forall x \in H$
- *Asymptotiquement stable, si pour tout état initial $y_0 \in H$:*
  $\|S(t)y_0\|_H \to 0$ *quand* $t \to +\infty$.
- *Exponentiellement stable, si pour tout état initial y_0 , $y(t)$ tend exponentiellement vers* 0 *quand* $t \to +\infty$.

Notons que la stabilité exponentielle de (2.1) est équivalente à l'existence de deux constantes $M > 0$ et $\sigma > 0$,telles que pour tout $t \geq 0$

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\omega t}, \text{où } t \geq 0$$

Exemple 2.1 *Considérons le système défini sur* $\Omega =]0, +\infty[$ *par*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \\ y(x,0) = y_0(x) \end{array} \right. \tag{2.2}$$

L'opèrateur $A = -\frac{\partial}{\partial x}$ *avec* $\mathcal{D}(A) = \{y \in H^1(\Omega) \backslash y(0,.) = 0\}$ *génère un* $C_0 semi-groupe$ $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *sur* $L^2(\Omega)$ *donné par*

$$S(t)y(x) = \left\{ \begin{array}{l} y(x-t) \quad si \quad x \geq t \\ 0 \quad si \quad x < t \end{array} \right.$$

Alors pour tout $y, z \in L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} | < S(t)y, z >_{L^2(\Omega)} | &= | \int_t^\infty y(x-t) z(x) dx | \\ &\leq (\int_t^\infty |y(x-t)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_t^\infty |z(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|y\| (\int_t^\infty |z(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad quand \quad t \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Donc le système (2.2) est faiblement stable.
mais

$$\begin{aligned} \|S(t)y\|_{L^2(\Omega)} &= (\int_t^\infty |y(x-t)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\int_0^\infty |y(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|y\| \end{aligned}$$

Donc le système n'est pas Asymptotiquement stable.

Exemple 2.2
(φ_{n_j}) *étant la famille orthonormée de fonctions propres de* A *, associée aux valeurs propres* (λ_n), *avec* λ_n *de multiplicité* r_n.
Nous avons déja vu dans la remarque (1.1),que :

$$S(t)y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \sum_{j=1}^{r_n} < y_0, \varphi_{nj} >_{L^2(\Omega)} \varphi_{nj}$$

et donc :

$$\|S(t)y_0\|^2_{L^2(\Omega)} = \langle \sum_{n=1} e^{\lambda_n t} \sum_{j=1}^{r_n} < y_0, \varphi_{nj} >_{L^2(\Omega)} \varphi_{nj}, , \sum_{m=1} e^{\lambda_m t} \sum_{k=1}^{r_m} < y_0, \varphi_{mk} >_{L^2(\Omega)} \varphi_{mk} \rangle_{L^2(\Omega)}$$

alors :

$$\|S(t)y_0\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_n e^{\lambda_n t} \sum_m \overline{e^{\lambda_m t}} \sum_{j=1}^{r_n} < y_0, \varphi_{nj} >_{L^2(\Omega)} \sum_{k=1}^{r_m} \overline{< y_0, \varphi_{mk} >_{L^2(\Omega)}} \langle \varphi_{nj}, , \varphi_{mk} \rangle_{L^2(\Omega)}$$

D'après la définition de (φ_{n_j})

On a : $\begin{cases} \langle \varphi_{nj}, , \varphi_{mk} \rangle = 1 \;\; \textbf{si} \;\; nj = mk \;\textbf{où}\; (n = m \;\textbf{et}\; j = k) \\ \langle \varphi_{nj}, , \varphi_{mk} \rangle = 0 \;\; \textbf{si} \;\; nj \neq mk \end{cases}$

On déduit que :

$$\|S(t)y_0\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_n e^{\lambda_n t} \overline{e^{\lambda_n t}} \sum_{j=1}^{r_n} < y, \varphi_{nj} >_{L^2(\Omega)} \overline{< y_0, \varphi_{nj} >_{L^2(\Omega)}}$$

Donc :

$$\|S(t)y_0\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_n e^{2Re(\lambda_n)t} \sum_{j=1}^{r_n} | < y, \varphi_{nj} > |^2 \tag{2.3}$$

1. *Supposons qu'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que :*

$$Re(\lambda_n) < -\varepsilon, pour \;\; tout \;\; n \geq 1$$

alors

$$\begin{aligned} \|S(t)y_0\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 2e^{-2\varepsilon t} \sum_n \sum_{j=1}^{r_n} < y, \varphi_{nj} >^2 \\ &\leq 2e^{-2\varepsilon t} \|S(0)y_0\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2e^{-2\varepsilon t} \parallel y_0 \parallel^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\varepsilon t}$$

Donc le système est exponentiellement stable.

2. *Supposons que ,pour un certain i ,*

$$Re(\lambda_i) > 0$$

alors, le système n'est pas exponentiellement stable .

En effet, il suffit de considérer la solution du système correspondant à l'état initial $y_0 = \varphi_{i_1}$ *:*

$$y(t) = S(t)y_0 = \sum_n e^{\lambda_n t} \sum_{j=1}^{r_n} < \varphi_{i_1}, \varphi_{nj} >_{L^2(\Omega)} \varphi_{nj} = e^{\lambda_i t} \varphi_{i_1}$$

Remarque 2.1
l'exemple ci-dessus montre que la stabilité du système (2.1) est liée au spectre $\sigma(A)$ *de l'opérateur* A*. Plus précisément, on montre que :*

$$\sup\{Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} \leq \inf_{\omega}\{\omega | \exists M > 0; \|S(t)\| \leq Me^{-\omega t}\} \tag{2.4}$$

et donc, si le système (2.1) est exponentiellement stable, alors nécessairement le spectre de A *est dans le demi-plan :*

$$Re(\lambda) < 0$$

Généralement, dans (2.4), nous n'avons pas d'égalité. Mais pour la plupart des systèmes réels, et essentiellement ceux étudies ici,il y a égalité.Et par conséquent ,la stabilité exponentielle du $semi-groupe$ *peut être déterminée en analysant le spectre de* A*.*
Dans le cas où A *engendre un* $semi-groupe$ *non exponentiellement stable, nous allons voir comment y remédier en choisissant des contrôles adéquats.*

Dans le cas de dimension finie, les degrés de stabilité coïncident. De plus, plusieurs résultats de caractérisation ont été établis, ces résultats sont basés sur des propriétés spectrales de la matrice A, ou sur l'existence d'une fonction de Lyapunov, ce qui revient aussi à établir l'existence d'une équation (dite aussi Lyapunov)

Proposition 2.1 [3]
Supposons que $\dim H < +\infty$*.Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Le système (2.1) est exponentiellement stable ;*
2. $\sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < 0$ *;*
3. *Il existe une matrice* P *définie positive telle que*

$$PA + A^*P = -I \tag{2.5}$$

D'après la propriété (3), la fonction $V(t) =< Py, y >$ est une fonction de Lyaponov pour (2.1)dans le sens où, pour chaque trajectoire $y(t)$,on a $\frac{d}{dt} < Py(t), y(t) >< 0$. Si H est de dimension infinie, la propriété (3) est partiellement vraie et exige une reformulation.
S'écrit

$$< Ay, Py > + < Py, Ay > + < y, y > \;=\; 0, y \in \mathcal{D}(A) \tag{2.6}$$

Ainsi peut être formulé par le résultat suivant :

Proposition 2.2 [4]
Le système (2.1) est exponentiellement stable si et seulement s'il existe un opérateur définie positif P tel que (2.6) soit vérifiée, ce qui est équivalent à

$$\int_0^\infty \|S(t)y\|^2 dt < +\infty, \forall y \in H$$

pour chaque générateur A, nous définissons les indices inférieur et supérieur de la stabilité :

$$\sigma_- = \sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$$

$$\sigma_+ = \inf\{\mu | \exists M > 0; \|S(t)\| \leq Me^{t\mu}, \forall t \geq 0\}$$

Proposition 2.3 [15]
$\sigma_- \leq \sigma_+$,*et donc si le système (2.1)est exponentiellement stable alors* $\sigma_- < 0$.

Proposition 2.4 [16]
Si

a *Le semi-groupe $S(t)$ est différentiable pour $t > 0$;*

b $\exists t_1 > 0$,*tel que $S(t_1)$ est compact,*

Alors $\sigma_- = \sigma_+$, et par conséquent l'inégalité $\sigma_- < 0$ entraine la stabilité exponentielle du système (2.1).

Proposition 2.5 [9]
Soit A est un générateur infinitésimal d'un C_0semi groupe $S(t)$ dans H. Le système (2.1) est exponentiellement stable si et seulement si : $\sigma_- < 0$ et existe $\sigma \in \{\sigma_-, 0\}$ tel que $\sup\left\{\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| ; Re\lambda \geq \sigma\right\} < +\infty$

Proposition 2.6 *Soit A est un générateur infinitésimal d'un C_0semi groupe $S(t)$ dans H. Alors le système (2.1) est exponentiellement stable si et seulement si : $\sigma_- < 0$ et*

$$C = \sup\left\{\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| ; Re\lambda \geq 0\right\} < +\infty$$

Preuve $\Rightarrow$)
Tant que A est un générateur infinitésimal d'un $C_0 semi - groupe$ $S(t)$ alors d'après la proposition (2.5),$\sigma_- < 0$ et existe $\sigma \in \{\sigma_-, 0\}$ tel que $\sup\left\{\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| ; Re\lambda \geq \sigma\right\} < +\infty$.
On remarque que $\left\{\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| ; Re\lambda \geq 0\right\} \subset \left\{\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| ; Re\lambda \geq \sigma\right\}$
Donc

$C = \sup\left\{\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\|; Re\lambda \geq 0\right\} \leq \sup\left\{\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\|; Re\lambda \geq \sigma\right\} < +\infty$

$\Leftarrow)$

Soit $\sigma = \max\left\{\frac{\sigma_-}{2}, \frac{-1}{2C}\right\}$ et $\lambda = \theta + i\xi$,et $\theta \in [\sigma, 0]$.alors

$$\lambda I - A = (\theta I + i\xi I - A)$$

$$= \left[I + \theta(i\xi I - A)^{-1}\right](i\xi I - A)$$

Alors

$$\left\|\left[I + \theta(i\xi I - A)^{-1}\right]x\right\| \geq \|x\| - |\theta|\left\|(i\xi I - A)^{-1}x\right\|$$

$$\geq \|x\| - \frac{1}{2C}.C\|x\| = \frac{1}{2}\|x\|$$

Nous avons $\left\|[I + \theta(i\xi I - A)^{-1}]^{-1}\right\| \leq 2$.ainsi pour $\theta \in [\sigma, 0]$,$-\infty < \xi < +\infty, \lambda = \theta + i\xi \in \rho(A)$ et

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| = \left\|(i\xi I - A)^{-1}\left[I + \theta(i\xi I - A)^{-1}\right]^{-1}\right\|$$

$$\leq \left\|(i\xi I - A)^{-1}\right\|\left\|\left[I + \theta(i\xi I - A)^{-1}\right]^{-1}\right\|$$

$$\leq 2C$$

par conséquent ,$\sup\{\|(\lambda I - A)^{-1}\|; Re\lambda \geq \sigma\} < +\infty$ et selon la proposition (2.5), le système (2.1) est exponentiellement stable. ■

2.2 Stabilisabilité

Nous considérons maintenant le système linéaire :

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + Bu(t), y(0) = y_0 \tag{2.7}$$

où A est un générateur infinitésimal d'un $C_0 semi-groupe$ $S(t), t \geq 0$ sur H et $B \in \mathcal{L}(U, H)$,U étant l'espace des contrôles supposé de Hilbert.

Notons que pour tout $K \in \mathcal{L}(H)$, l'opérateur $A + BK$ engendre un $C_0 semi-groupe$ et que la solution faible du système contrôlé (2.7), et donnée par

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds$$

et on a la définition suivante :

Définition 2.2
Le système (2.7) est dit faiblement (resp. asymptotiquement, exponentiellement) stabilisable (ou la paire (A, B) est stabilisable) s'il existe un opérateur borné $K \in \mathcal{L}(H, U)$ tel que le système :

$$\frac{dy(t)}{dt} = (A + BK)y(t), y(0) = y0 \in H.$$

soit faiblement (resp. asymptotiquement, exponentiellement) stable.

Proposition 2.7 [8]
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *Le système (2.7) est exponentiellement stabilisable .*
- *Il existe un contrôle $u(.)$ tel que la solution correspondante de (2.7) vérifie*

$$\int_0^{\infty} (\|y(t)\|^2 + \|u(t)\|^2)dt < +\infty, \forall y_0 \in H$$

- *Il existe un opérateur défini positif P vérifiant l'équation de riccati suivante*

$$< Ay, Py > + < Py, Ay > - < B^*Py, B^*Py > + < y, y > \; = \; 0, \forall y \in \mathcal{D}(A) \quad (2.8)$$

- *Pour tout état initial $y_0 \in H$,il existe un contrôle $u(.)$ tel que $u(t)$ et la solution correspondante de (2.7) tendent exponentiellement vers zéro quand $t \to +\infty$.*

il ya principalement trois types de conditions qui garantissent la stabilisabilité du système(2.7). Le premier emploit la notion de contrôlabilité,le second passe par l'équation de Riccati et le troisième utilise les propriétés spectrales et structurales de A. Pour l'emploit de contrôlabilité on a la proposition suivante :

Proposition 2.8 [9]
le système (2.7) est faiblement stabilisable par le contrôle $u(t) = -B^*y(t)$ si et seulement si les états instables de (2.7) sont contrôlables

Dans le cas de dimension finie, le problème de stabiliser (2.7) est équivalent à la contrôlabilité de ses modes instables.
Pour l'emploi les propriétés spectacles on a la définition suivante :

Définition 2.3 (La décomposition spéctrale) *On considère le système (2.7) avec les même hypothèses .*
Soit $\delta > 0$ fixé et on considère les sous ensembles :

$$\sigma_u(A) = \{\lambda : Re(\lambda) \geq -\delta\} \tag{2.9}$$

$$\sigma_s(A) = \{\lambda : Re(\lambda) < -\delta\} \tag{2.10}$$

Si l'ensemble $\sigma_u(A)$ est borné et séparé de l'ensemble $\sigma_s(A)$ de sorte qu'une courbe simple et fermée enclôt un ouvert contenant $\sigma_s(A)$ dans son intérieur, alors l'espace d'état peut être décomposé comme suit

$$H = H_u + H_s \tag{2.11}$$

avec $H_u = PH$ et $H_s = (I - P)H$, où $P \in \mathcal{L}(H)$ est l'opérateur de projection donné par

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

où Γ est une courbe enfermant $\sigma(A)$. Le système (2.7) peut être décomposé en considérant $y_u = Py$ et $y_s = (I - P)y$,sous la forme

$$\begin{cases} y_u'(t) = A_u y_u(t) + PBu(t) \\ y_{0_u} = Py_0 \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\begin{cases} y_s'(t) = A_s y_s(t) + (I - P)Bu(t) \\ y_{0_s} = (1 - P)y_0 \end{cases} \tag{2.13}$$

où A_s et A_u sont les restrictions de A à H_s et à H_u respectivement et sont définies telles que

$$\sigma(A_s) = \sigma_s(A) \quad , \quad \sigma(A_u) = \sigma_u(A)$$

et A_u est un opérateur borné sur H_u.Les solutions de (2.12)et (2.13) sont données par

$$y_u(t) = S_u(t)y_{0_u} + \int_0^t S_u(t-\tau)PBu(\tau)d\tau$$

et

$$y_s(t) = S_s(t)y_{0_s} + \int_0^t S_s(t-\tau)PBu(\tau)d\tau$$

où $S_u(t)$ et $S_s(t)$ sont les restrictions de $S(t)$ à H_u et à H_s,qui sont respectivement les semi groupes fortement continus de générateurs A_u et A_s.
Pour stabiliser le système (2.7) il revient de stabiliser (2.12) pourvu que l'opérateur A_s satisfait la condition de croissance du spectre

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|S_s(t)\|}{t} \quad = \quad \sup Re(\sigma(A_s)) \tag{2.14}$$

2.3 Stabilisation et actionneurs

Nous avons une caractérisation de la stabilisation par le choix des actionneurs, comparable au résultat de la proposition (1.9) concernant la contrôlabilité.La différence réside dans le fait que l'on ne s'intéresse qu'à la partie du système correspondant au spectre de A à partie réelle positive.

Proposition 2.9

Supposons que le système (2.7) est existe par p actionneurs zones $(\Omega_i, g_i)_{1\leq i\leq p}$ *et que le spectre de A compte j valeurs propres non négatives. Alors le système (2.7) est stabilisable si et seulement si :*

i $p \geq \sup_{1\leq n\leq j}(r_n)$

ii $rg(G_n) = r_n$ *,pour tout* $n = 1, 2. \ldots. j$

où $(G_n)_{ij} =< g_i, \varphi_{nj} >_{L^2(\Omega_i)}$

avec $i = 1. \ldots. p$ *et* $j = 1. \ldots. r_n$.

Preuve

On décompose le spectre de A comme la définition(2.3) avec :

$$\sigma_u(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_j\}$$

$$\sigma_s(A) = \{\lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, ...\}$$

A_u est représenté par la matrice d'ordre

$$(\sum_{n=1}^{j} r_n \ , \ \sum_{n=1}^{j} r_n)$$

et donnée par :

$$A_u = diag(\underbrace{\lambda_1, \lambda_1, ...\lambda_1}_{r_1} ... \underbrace{\lambda_j, \lambda_j, ...\lambda_j}_{r_j})$$

et

$$PB = [G_1^T, G_2^T, ...G_j^T]^T$$

sous la condition ii) de la proposition(1.9),il est facile de voir que le système de dimension finie est contrôlable et donc il est stabilisable.

Il existe donc un contrôle

$$u = -Fy_u$$

tel que

$$\|e^{(A_u - PBF)t}\| \leq Me^{-\delta t}$$

avec $M > 0$ et $\delta > 0$

ainsi :

$$\|y_u(t)\| \leq Me^{-\delta t}\|Py_0\|$$

et

$$\|u(t)\| \leq Me^{-\delta t}\|F\|\|Py_0\|$$

Par ailleurs, le semi groupe engendré par A_s est exponentiellement stable, c'est à dire : $\exists\overline{M}$ et $\overline{\delta} > 0$ tels que :

$$\|S_s(t)\| \leq \overline{M}e^{-\overline{\delta}t}$$

donc

$$\|y_s(t)\| = \|S_s(t)y_{0_s} + \int_0^t S_s(t-\tau)(I-P)Bu(\tau)d\tau\|$$

$$\|y_s(t)\| \leq \|S_s(t)y_{0_s}\| + \|\int_0^t S_s(t-\tau)(I-P)Bu(\tau)d\tau\|$$

$$\begin{aligned}\|y_s(t)\| &\leq \overline{M}e^{-\overline{\delta}t}\ \|(I-P)y_0\| + \int_0^t \overline{M}e^{-\overline{\delta}(t-\tau)}\|(I-P)B\|.\|u(\tau)\|d\tau \\ &\leq \overline{M}e^{-\overline{\delta}t}\ \|(I-P)y_0\| + \overline{M}M\|F\|.\|(I-P)B\|\|Py_0\|.\int_0^t e^{-\overline{\delta}(t-\tau)}e^{-\delta\tau}d\tau \\ &\leq \overline{M}e^{-\overline{\delta}t}\|(I-P)y_0\| + c\|Py_0\|\frac{e^{-\overline{\delta}t} - e^{-\delta t}}{\delta - \overline{\delta}}\end{aligned}$$

où $c > 0$, et par conséquent l'état du système vérifie

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &\leq \|y_u(t)\| + \|y_s(t)\| \\ &\leq (\overline{M}e^{-\overline{\delta}t} + c\frac{e^{-\overline{\delta}t} - e^{-\delta t}}{\delta - \overline{\delta}} + Me^{-\delta t})\|y_0\|\end{aligned}$$

ceci montre la stabilisabilité exponentielle du système(2.7). ■

Proposition 2.10 (Stabilisabilité et actionneurs frontières) [7]
Le système excité par la suite d'actionneurs zones frontières $(\Gamma_i, g_i)_{1<i<p}$ *est stabilisable si et seulement si :*

i $p \geq \sup_{1\leq n\leq j}(r_n)$

ii $rg(G_n) = r_n$ *,pour tout* $n = 1, 2. \dots . j$

où $(G_n)_{ij} =< g_i, \frac{\partial \phi_{nj}}{\partial \nu} >_{L^2(\Gamma_i)}$ *dans le cas Dirichlet.*

$(G_n)_{ij} =< g_i, \psi_{nj} >_{L^2(\Gamma_i)}$ *dans le cas Neumann.*

avec $i = 1. \dots . p$ *et* $j = 1. \dots . r_n$.

2.4 Stabilité régionale

Le système à paramètres distribuées peut être stable ou instable sur son domaine Ω,mais il ya des systèmes instable sur Ω et stable sur une région de Ω ou sur sa frontière. On considère le système :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \quad \Omega \times]0, \infty[\\ y(0) \in L^2(\Omega) \end{cases} \tag{2.15}$$

Tel que A est un générateur infinitésimal d'un $C^0 semi - groupe$ $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dans un espace d'état $L^2(\Omega)$.

Considérons maintenant une partie mesurable de mesure positive ,ω ; interne (ouvert de Ω) ou frontière (ouvert $\omega \subset \partial\Omega$) et soit l'opérateur de restriction $\chi_\omega : L^2(\Omega) \to L^2(\omega)$ tel que $\chi_\omega y = y/\omega$,d'adjoint χ_ω^* tel que

$$\chi_\omega^*(y) = \begin{cases} y(x) \quad x \in \omega \\ 0 \quad x \in \Omega/\omega \end{cases}$$

Définition 2.4 (La stabilité régionale faible)
On dit que le système (2.15)est faiblement $\omega-$*stable si :*
$\forall y_0 \in L^2(\Omega)$; $< \chi_\omega y(t), y^d > \longrightarrow 0$ *quand* $t \longrightarrow \infty$; $\forall y^d \in L^2(\Omega)$

Définition 2.5 (La stabilité régionale asymptotique)
On dit que le système (2.15)est asymptotiquement $\omega-$*stable si :*
$\forall y_0 \in L^2(\Omega)$;$\|\chi_\omega y(t)\| \longrightarrow 0$ *quand* $t \longrightarrow \infty$.

Définition 2.6 (La stabilité régionale exponentielle)
On dit que le système (2.15)est exponentiellement $\omega-$*stable si :*
$\exists M, \alpha > 0$:$\|\chi_\omega y(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|y_0\|$;$t \geq 0$, $y_0 \in L^2(\Omega)$.

Remarque 2.2

- *Ce concept est général car pour $\omega = \Omega$ on retrouve la définition classique de la stabilité.*
- *les définitions ci-dessus montrent que l'on est intéressé par la comportement asymptotique du système (2.15)seulement sur ω.*

Exemple 2.3 *on considère le système :*

$$\begin{cases} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = (\log(x+0.1))y(x,t) & (x,t) \in]0,2[\times]0,\infty[\\ y(x,0) = y_0(x) &]0,2[\end{cases} \tag{2.16}$$

Pour $y_0 \in L^2(0,2)$ on a :

$$y(x,t) = e^{\log(x+0.1))t} y_0$$

alors :

$$\begin{aligned} \|y(x,t)\|^2_{L^2(0,2)} &= \int_0^2 |e^{2\log(x+0.1)t}|.|y_0|^2 dx \\ &= \int_0^1 |e^{2\log(x+0.1)t}|.|y_0|^2 dx + \int_1^2 |e^{2\log(x+0.1)t}|.|y_0|^2 dx \\ &\geq \int_1^2 |e^{2\log(x+0.1)t}|.|y_0|^2 dx \\ &\geq \int_1^2 |y_0|^2 dx \end{aligned}$$

alors $\lim_{t\to\infty} y(x,t) \neq 0$, *donc le système (2.16) n'est pas stable sur* $]0,2[$.
Soit $\omega =]0,a[\subset]0,1[$,

on a :

$$\begin{aligned} \|\chi_\omega y(x,t)\|^2_{L^2(0,2)} &= \int_0^2 |e^{2\log(x+0.1)t}|.|\chi_\omega y_0|^2 dx \\ &\leq (\int_0^2 |e^{2\log(x+0.1)t}| dx)^{\frac{1}{2}}.(\int_0^2 |\chi_\omega y_0|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq e^{\log(a+0.1)t} \|y_0\|_{L^2(0,2)} \end{aligned}$$

alors :$\lim_{t\to\infty} \chi_\omega y(x,t) = 0$ *,donc le système (2.16) est stable sur* ω

2.5 Caractérisation

Dans cette partie nous donnons les résultats caractérisant la stabilité régionale. C'est le cas par exemple si on prend $H = L^2(\Omega)$ pour une région interne.

On considère

$$\sigma_\omega^1(A) = \{\lambda \in \sigma(A)/Re(\lambda) \geq 0; Ker(A - \lambda I) \nsubseteq Ker(i_\omega)\} \tag{2.17}$$

$$\sigma_\omega^2(A) = \{\lambda \in \sigma(A)/Re(\lambda) < 0; Ker(A - \lambda I) \nsubseteq Ker(i_\omega)\} \tag{2.18}$$

tel que :$i_\omega = \chi_\omega^* \chi_\omega$.

Proposition 2.11

1. *Si le système (2.15) est asymptotiquement stable sur ω ,alors $\sigma_\omega^1(A) = \emptyset$*
2. *On suppose que l'opérateur A admet une base $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions propres dans $L^2(\Omega)$.*
   Si $\sigma_\omega^1(A) = \emptyset$ et s'il existe $\alpha > 0$ tel que $Re(\lambda) \leq -\alpha$, $\forall\lambda \in \sigma_\omega^2(A)$ alors le système (2.15) est exponentiellement stable sur ω.

Preuve

1. On suppose que il existe $\lambda \in \sigma(A)$ et $\varphi \in Ker(A - \lambda I)$ tel $Re(\lambda) \geq 0$ et $\chi_\omega\varphi \neq 0$.
   Pour $y_0 = \varphi$, la solution de (2.15) est $S(t)\varphi = e^{t\lambda}\varphi$.
   Donc :
   $$< \chi_\omega S(t)\varphi, \varphi >_{L^2(\omega)} \geq \|\chi_\omega\varphi\|_{L^2(\omega)} \neq 0$$
   Alors (2.15) n'est pas asymptotiquement stable sur ω.
2. Sans nuire à la généralité du résultat, on peut supposer que les valeurs propres de A sont simples. Dans ce cas, pour tout $y_0 \in H$, on a :

$$\chi_\omega S(t)y_0 = \sum_{\lambda_n\in\sigma(A)} e^{\lambda_n t} < y_0, \varphi_n > \chi_\omega\varphi_n$$

$$= \chi_\omega \sum_{\lambda_n\in\sigma_\omega^2(A)} e^{\lambda_n t} < y_0, \varphi_n > \varphi_n$$

$$\|\chi_\omega S(t)y_0\|^2 = \langle\chi_\omega \sum_{\lambda_n\in\sigma_\omega^2(A)} e^{\lambda_n t} < y_0, \varphi_n > \varphi_n, \chi_\omega \sum_{\lambda_k\in\sigma_\omega^2(A)} e^{\lambda_k t} < y_0, \varphi_k > \varphi_k\rangle$$

$$\|\chi_\omega S(t)y_0\|^2 = \langle \sum_{\lambda_n\in\sigma_\omega^2(A)} e^{\lambda_n t} < y_0, \varphi_n > \varphi_n, \chi_\omega^*\chi_\omega \sum_{\lambda_k\in\sigma_\omega^2(A)} e^{\lambda_k t} < y_0, \varphi_k > \varphi_k\rangle$$

$$\|\chi_\omega S(t)y_0\|^2 = \sum_{\lambda_n\in\sigma_\omega^2(A)} e^{\lambda_n t} < y_0, \varphi_n > \chi_\omega^*\chi_\omega \sum_{\lambda_k\in\sigma_\omega^2(A)} \overline{e^{\lambda_k t}} < y_0, \varphi_k > \langle\varphi_n, \varphi_k\rangle$$

$$\|\chi_\omega S(t)y_0\|^2 = \|\chi_\omega\|^2 \sum_{\lambda_n \in \sigma^2_\omega(A)} e^{2\mathcal{R}(\lambda_n)t} < y_0, \varphi_n >^2$$
$$\leq \|\chi_\omega\|^2 e^{-2\alpha t}\|S(0)y_0\|^2$$

Donc :$\|\chi_\omega S(t)y_0\| \leq \|\chi_\omega\| e^{-\alpha t}\|y_0\|$,par conséquent (2.15) est exponentiellement stable sur ω.

■

Le résultat suivant fournit des conditions suffisantes pour la stabilité régionale Asymptotique.

Proposition 2.12

S'il existe un opérateurs $P \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ positifs et auto-adjoints tel que :

$$< Ay, Py > + < Py, Ay > + < Ry, y >= 0, \quad y \in \mathcal{D}(A) \tag{2.19}$$

Où $R \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ est un opérateur auto-adjoint positif satisfaisant

$$< Ry, y > \geq c\|\chi_\omega y\|^2, \quad \textit{pour un certain} \quad c > 0 \tag{2.20}$$

Si, de plus, A auto-adjoint et satisfait

$$< \chi_\omega Ay, y > \leq 0, \quad y \in \mathcal{D}(A) \tag{2.21}$$

Alors le système (2.15) est asymptotiquement stable sur ω.

Preuve

Soit $V(t, y(t)) =< Py(t), y(t) >$,pour $y(t) \in L^2(\Omega), t \geq 0$.
On a la solution de (2.15) donne :$y(t) = S(t)y_0 \quad \forall y_0 \in \mathcal{D}(A)$
Alors

$$\frac{\partial}{\partial t} V < t, y(t) > =< P\frac{\partial}{\partial t}S(t)y_0, S(t)y_0 > + < PS(t)y_0, \frac{\partial}{\partial t}S(t)y_0 >$$

$$=< PAS(t)y_0, S(t)y_0 > + < PS(t)y_0, AS(t)y_0 >$$

$$=< AS(t)y_0, P^*S(t)y_0 > + < PS(t)y_0, AS(t)y_0 >$$

$$=< AS(t)y_0, PS(t)y_0 > + < PS(t)y_0, AS(t)y_0 >$$

$$= - < RS(t)y_0, S(t)y_0 >$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} (- < RS(\tau)y_0, S(\tau)y_0 >)d\tau = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau} V < \tau, y(\tau) > d\tau$$

$$\int_0^{+\infty} (< RS(\tau)y_0, S(\tau)y_0 >)d\tau = V < 0, y(0) > - \lim_{t\to\infty} V < \tau, y(\tau) >$$

Alors

$$\int_0^{+\infty} < RS(\tau)y_0, S(\tau)y_0 > d\tau \leq V < 0, y(0) >$$

D'aprés (2.20)

$$\int_0^{+\infty} c\|\chi_\omega S(\tau)y_0\|^2 d\tau \leq \int_0^{+\infty} < RS(\tau)y_0, S(\tau)y_0 > d\tau < +\infty$$

et à partir de(2.21) on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\chi_\omega S(t)y_0\|^2 = \frac{\partial}{\partial t} < \chi_\omega S(t)y_0, \chi_\omega S(t)y_0 >$$

$$=< \chi_\omega AS(t)y_0, \chi_\omega S(t)y_0 > + < \chi_\omega S(t)y_0, \chi_\omega AS(t)y_0 >\leq 0$$

Alors

$$t\|\chi_\omega S(t)y_0\|^2 = \int_0^t \|\chi_\omega S(t)y_0\|^2 d\tau \leq \int_0^t \|\chi_\omega S(\tau)y_0\|^2 d\tau$$

Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ donc

$$\|\chi_\omega S(t)y_0\|^2 \leq \frac{\beta(y_0)}{t}, t > 0, y_0 \in \mathcal{D}(A) \texttt{ pour un certain } \beta(y_0) \tag{2.22}$$

Alors pour tout $y_0 \in L^2(\Omega)$, (2.22) est vérifiée, donc le système (2.15) est $\omega-asymptotiquement\ stable$.

■

Lemme 2.13 *Soit* $\sigma_0 = \inf_{t>0} \frac{\log\|\chi_\omega S(t)\|}{t}$*.Si le semi* $-$ *groupe satisfait :*

$$\|\chi_\omega S(t+s)y\| \quad \leq \quad \|\chi_\omega S(t)\|.\|\chi_\omega S(s)y\|, t, s \geq 0 \tag{2.23}$$

alors

$$\sigma_0 = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log\|\chi_\omega S(t)\|}{t}$$

Preuve

Soient $t_0 > 0$ et $M = \sup_{o\leq t\leq t_0} \|S(t)\|$,

pour $t \geq t_0$,il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nt_0 \leq t \leq (n+1)t_0$,alors

$$\begin{aligned}\frac{\log \|\chi_\omega S(t)\|}{t} &= \frac{\log \|\chi_\omega S(nt_0 + t - nt_0)\|}{t} \\ &\leq \frac{\log \|\chi_\omega S(nt_0)\|}{t} + \frac{\log \|\chi_\omega S(t - nt_0)\|}{t}\end{aligned}$$

D'aprés (2.23),on a

$\|\chi_\omega S(nt)\| \leq \|\chi_\omega S(t)\|^n, t \geq 0, n \in \mathbb{N}$ alors

$$\frac{\log \|\chi_\omega S(t)\|}{t} \leq \frac{nt_0}{t}\frac{\log \|\chi_\omega S(t_0)\|}{t_0} + \frac{\log M}{t}$$

$$\leq \begin{cases} \frac{\log \|\chi_\omega S(t_0)\|}{t_0} + \frac{\log M}{t} & \texttt{si} \quad \|\chi_\omega S(t_0)\| \geq 1 \\ \frac{t-t_0}{t}\frac{\log \|\chi_\omega S(t_0)\|}{t_0} + \frac{\log M}{t} & \texttt{sinon} \end{cases}$$

donc

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\log \|\chi_\omega S(t)\|}{t} \leq \frac{\log \|\chi_\omega S(t_0)\|}{t_0} < \infty$$

et puisque t_0 est arbitraire, on a

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\log \|\chi_\omega S(t)\|}{t} \leq \inf_{t>0} \frac{\log \|\chi_\omega S(t)\|}{t} \leq \lim_{t\to\infty} \inf \frac{\log \|\chi_\omega S(t)\|}{t}$$

par conséquent $\sigma_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \|\chi_\omega S(t)\|}{t} < \infty$ ■

Le résultat suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité régionale exponentielle.

Proposition 2.14 *On suppose que A génère un semi−groupe fortement continu $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ et vérifie (2.23),alors le système (2.15) est exponentiellement stable sur ω si et seulement si*

$$\int_0^\infty \|\chi_\omega S(t)y\|^2 dt < \infty, \quad y \in L^2(\Omega)$$

Preuve

Pour $n \geq 1$, on définit l'opérateur

$$\begin{aligned}\Theta_n \quad : \quad & L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(0,\infty, L^2(\omega)) \\ & \qquad y \longmapsto \chi_{[0,n]}(t)\chi_\omega S(t)y\end{aligned}$$

Alors

$$\|\Theta_n y\|^2_{L^2(0,\infty,L^2(\omega))} = \int_0^\infty \|\chi_{[0,n]}(t)\chi_\omega S(t)y\|^2_{L^2(\omega)} dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^n \|\chi_\omega S(t)y\|^2_{L^2(\omega)} dt \\
&\leq \int_0^n \|\chi_\omega S(t)\|^2_{L^2(\omega)} \|y\|^2_{L^2(\omega)} dt \\
&\leq \|y\|^2_{L^2(\omega)} \int_0^n \|\chi_\omega S(t)\|^2_{L^2(\omega)} dt \\
&\leq \alpha_n \|y\|^2
\end{aligned}
$$

et d'aprés le théorème de Banach Steinhaus, il existe $\gamma > 0$ tel que :$\|\Theta_n\| \leq \gamma \quad ; n \geq 1$
Soit σ_1 et M tel que $\|S(t)\| \leq Me^{\sigma_1 t}, \quad t \geq 0$.
Pour $t_0 > 0$, la famille $\{\chi_\omega S(t)\}_{t \leq t_0}$ est bornée et pour $t > t_0$, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{1 - e^{-2\sigma_1 t}}{2\sigma_1} \|\chi_\omega S(t)y\|^2 &= \int_0^t e^{-2\sigma_1 (t-s)} \|\chi_\omega S(t)y\|^2 ds \\
&\leq \int_0^t e^{-2\sigma_1 (t-s)} \|\chi_\omega S(s)y\|^2 \|\chi_\omega S(t-s)\|^2 ds \\
&\leq M^2 \gamma^2 \|y\|^2
\end{aligned}
$$

On déduit qu'il existe $k > 0$ tel que $\|\chi_\omega S(t)\| \leq k \ ,t \geq 0$.
par (2.23),on obtient :

$$
t\|\chi_\omega S(t)y\|^2 \leq \int_0^t \|\chi_\omega S(s)y\|^2 \|\chi_\omega S(t-s)y\|^2 ds
$$

alors $t\|\chi_\omega S(t)y\|^2 \leq K^2\gamma^2\|y\|^2$ et pour t assez grand on a $\|\chi_\omega S(t)\| < 1$,donc il existe $t_0 \leq t$ tel que $\log \|\chi_\omega S(t)\| < 0$ on déduit que

$$
\sigma_0 = \inf_{t>0} \frac{\log \|\chi_\omega S(t)\|}{t} \leq \frac{\log \|\chi_\omega S(t_0)\|}{t_0} < 0
$$

et par le lemme (2.13) on obtient

$$
-\sigma \in]\sigma_0, 0[, \quad \exists M / \|\chi_\omega S(t)\| \leq Me^{-\sigma t}, \quad t \geq 0
$$

Par conséquent le système est exponentiellement stable sur ω. ■
Nous donnos maintenant une approche utilisant l'équation de Lyapunov .

Proposition 2.15 [18]
Si le semi − groupe satisfait (2.23), alors le système (2.15) est exponentiellement stable sur ω , si et seulement si, il existe un operateur positif $P \in \mathcal{L}L^2(\Omega)$ tel que

$$
< Ay, Py > + < Py, Ay > + < \chi_\omega y, y >= 0 \quad ; y \in \mathcal{D}(A) \tag{2.24}
$$

2.6 Stabilisabilité régionale

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment stabiliser régionalement un système distribué.
On consèdere le système

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + Bu(t), y(0) = y_0 \tag{2.25}$$

avec même hypothèses de paragraphe précédent, et $B \in \mathcal{L}(U,H)$,U étant l'espace des contrôle supposé de Hilbert.

Définition 2.7 *On dit que le systéme (2.26) est faiblement (resp.asymptotiquement, exponentiellement) stabilisable sur $\omega \subset \Omega$,s'il existe un opérateur $K \in \mathcal{L}(H,U)$ tel que le système*

$$\begin{cases} y'(t) = (A+BK)y \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.26}$$

est faiblement (resp. asymptotiquement, exponentiellement) stabilisable sur ω.

a partir de la définition précédente,on note les points suivants :
- le contrôle en boucle fermé qui stabilise le système est

$$u = Ky \quad ; \quad K \in \mathcal{L}(H,U) \tag{2.27}$$

- on cosidère la fonction coût suivante

$$q(u) = \int_0^{+\infty} \|u(t)\|^2 dt \tag{2.28}$$

tel que $u \in \mathcal{U}_{ad}(\omega)$ avec

$$\mathcal{U}_{ad}(\omega) = \{u \in L^2(0,+\infty,U); u \; stabilise \; fortement \; (2.26) \; sur \; \omega \; et \; q(u) < \infty\}$$

donc

$$\min_{\mathcal{U}_{ad}(\omega)} q(u) \leq \min_{\mathcal{U}_{ad}(\Omega)} q(u)$$

2.7 Caractérisations

Dans cette section on propose une approche pour la caractérisation de la stabilisabilité régionale qui explore les résultats précédente,on note $\{S_K(t)\}_{t\geq 0}$ le semi-groupe engendré par $A+BK$,et soient $R \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ un opérateur positif auto-adjoint et un constante $c > 0$ tels que

$$< Ry, y >\geq c\|\chi_\omega y\|^2 \tag{2.29}$$

On considère ,pour $y \in \mathcal{D}(A)$, l'équation de Riccati

$$< Ay, Py > + < Py, Ay > + < Ry, y > - < B^*Py, B^*Py >= 0 \tag{2.30}$$

Proposition 2.16 [18]
On suppose qu'il existe un opérateur positif et auto-adjoint $P \in \mathcal{L}(H)$ satisfat l'équation (2.31) et soit l'opérateur $K = -B^*P$.

1. *si*

$$Re < \chi_\omega(A + BK)y, y >_{L^2(\omega)}\leq 0 \ ; \quad y \in \mathcal{D}(A) \tag{2.31}$$

   alors le système (2.26) est asymptotiquement stabilisable sur ω.

2. *Si $S_K(t)$ satisfait (2.23) ,alors le système (2.26) est exponentiellement stabilisable sur ω.*

3. *S'il existe $d > 0$ tel que*

$$< Ry, y >\geq dRe < \chi_{\Omega\backslash\omega}(A + BK)y, y > \quad ; \quad y \in \mathcal{D}(A) \tag{2.32}$$

   alors l'état de système (2.26) reste borné dans $\Omega \setminus \omega$

En considérant les opérateurs $R = (\chi_\omega B)(\chi_\omega B)^*$ et $P = I$, on a le résultat suivant.

Proposition 2.17 [18]
Soit $U = H$ et on suppose que

$$< i_\omega Ay, y > + < y, i_\omega Ay >= 0; \quad y \in \mathcal{A} \tag{2.33}$$

et

$$\|B^*i_\omega y\| \geq c\|\chi_\omega y\|, \quad y \in H \tag{2.34}$$

1. *Si (2.32) est vérifiée, alors le contrôle $u(t) = -B^*i_\omega y(t)$ stabilise le système (2.26) régionalement asymptotiquement sur ω.*
2. *Si $S^K(t)$ vérifiée (2.23),alors le contrôle $u(t)$ stabilise le système (2.26) régionalement exponentiellement sur ω.*

2.8 Exemple de stabilisabilité régionale

Dans cette section on cherche un contrôle pour stabilisé le système (2.26) sur une région $\omega \subset \Omega$ avec un état borné sur Ω.

Exemple 2.4 *On considère le système distribué décrit par l'équation*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = (\cos x + 1)u(x,t) + v(x,t) & \Omega\times]0,\infty[\\ u(x,0) = u_0 & \Omega \end{cases} \tag{2.35}$$

tel que $\Omega =]0,\pi[$ *et* $v(x,t) = 0$

On a $Au = (\cos x + 1)u$ *et* $u(x,t) = e^{(\cos x+1)t}u_0$

Donc

$$\begin{aligned} \|u(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_0^\pi e^{2(\cos x+1)t}\,|u_0|^2\,dx \\ &\geq \pi e^{2t}\,\|u_0\|^2 \to +\infty \quad quand \quad t \to +\infty \end{aligned}$$

le système n'est pas stable sur Ω.
Aussi pour $\omega = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ *on a*

$$\begin{aligned} \|u(x,t)\|^2_{L^2(\omega)} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{2(\cos x+1)t}\,|u_0|^2\,dx \\ &\geq \frac{\pi}{2}e^{2t}\,\|u_0\|^2 \to +\infty \quad quand \quad t \to +\infty \end{aligned}$$

Donc le système n'est pas stable sur la région $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
Mais pour le contrôl $v = -u$ *on a le système (2.36) s'écrit*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = (\cos x)u(x,t) & \Omega\times]0,\infty[\\ u(x,0) = u_0 & \Omega \end{cases} \tag{2.36}$$

Le système reste n'est pas stable sur Ω, *mais sur la région* $\omega = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
Alors la solution de systéme donne par

$$u(x,t) = e^{\cos xt}u_0$$

alors

$$\begin{aligned} \|u(x,t)\|^2_{L^2(\omega)} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |e^{2\cos xt}\,|u_0(x)|^2\,dx \\ &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |e^{-2t}|.|u_0|^2 dx \end{aligned}$$

$$\leq |e^{-2t}| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |u_0|^2 dx$$

$$\leq M.|e^{-2t}| \longrightarrow 0 \quad pour \quad t \longrightarrow +\infty$$

donc le système stable sur la région ω.

Chapitre 3

Étude numérique

3.1 Introduction

Ce chapitre présente le sujet de la stabilisation numérique des équations différentielles partielles. On peut être amené à rechercher la solution par la discrétisation de cet EDP ,par exemple par un schéma aux différences finies ,ou aux éléments finies qui conduit des systèmes linéaire ou une famille de systèmes de contrôle en dimension finie. j'ai choisit, dans ce travail, la méthode des différences finies.
La méthode des différences finies est la plus facile d'accès, puisqu'elle repose sur deux notions : la discrétisation des opérateurs de dérivation/différentiation (assez intuitive) par différences finies d'une part, et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu d'autre part.

3.2 Déscription de la méthode

La méthode des différences finies consiste à discrétiser les variables et équations du problème posée, c'est à dire de les approximer par des suites de valeurs et d'égalités définies en un nombre fini de points, afin d'en faire des objets utilisables par un ordinateur. Ainsi la coordonnée t devient la suite $(t_j)_{j=1...N}$, la coordonnée x devient la suite $(x_i)i = 1...i_{max}$ et la variable y est réduite au tableau de valeurs $y_i^j = y(x_i, t_j)$. On notera Y^j le vecteur dont les i_{max} coordonnées sont les valeurs numériques à l'instant t_j.
On se bornera dans ce travail aux méthodes à un pas de temps, et on utilisera un maillage régulier. Cela signifie que les suites (t_j) et (x_i) seront arithmétiques d'incréments respectifs Δt et Δx.

$$\begin{cases} t_j = j\Delta t \quad j \geq 0 \\ x_i = i\Delta x \quad 0 \leq i \leq n+1 \end{cases}$$

tel que t la variable de temps et x la variable d'espace. On a $\Delta x = \frac{1}{n+1}$.
Notre objectif est de calculez les valeurs approximatives de la fonction y la solution aux points de maille (x_i, t_j).
La deuxième étape dans le processus consiste choisir une certaine formule simple pour rapprocher les dérivés apparaissant dans l'équation. Une certaine formule est basée sur le développement de Taylor comme suite :

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta x y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + ... + \frac{(\Delta x)^n}{n!} y^n(x)$$

alors

$$y'(x) \simeq \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

$$y''(x) \simeq \frac{y(x + \Delta x) - 2y(x) + y(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Pour simplifie la notation,on pose :
$x = x_i; t = t_j$ et $y_i^j = y(x_i; t_j)$
Naturellement, il existe de nombreuse formules ayant divers degrés de précision.

3.3 Équation de la chaleur .

On considère le système distribué décrit par l'équation aux dérivée partielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \quad x \in [0,1] \\ y(0,t) = y(1,t) = 0 \\ y(x,o) = \sin \pi x \end{cases} \tag{3.1}$$

tel que $\Omega = [0, 1]$, $H = L^2(\Omega)$.
La solution exact de ce Système :

$$y(x,t) = \exp(-\pi^2 t) sin(\pi x)$$

On a $y(t, x) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$ danc nous avons la stabilité.
On utilise la méthode de différences finies par le shéma explicite. On obtient alors le système

suivant :

$$\begin{cases} \frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{(\Delta t)} = \frac{y_{i+1}^j-2y_i^j+y_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} & x_i \in [0,1] \\ y_0^j = y_n^j = 0 \\ y_i^0 = \sin \pi x_i \end{cases} \tag{3.2}$$

tel que $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) \simeq \frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{(\Delta t)}$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \simeq \frac{y_{i+1}^j-2y_i^j+y_{i-1}^j}{(\Delta x)^2}$, alors

$$\begin{cases} y_i^{j+1} = ay_{i-1}^j + by_i^j + ay_{i+1}^j & x_i \in [0,1] \\ y_0^j = y_n^j = 0 \\ y_i^0 = \sin \pi x_i \end{cases} \tag{3.3}$$

Où $a = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, $b = 1 - 2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

3.3.1 Stabilité de schéma

Avant de se lancer dans une validation numérique, une question essentielle concernant ces schémas numériques est de savoir si ils sont stables, c'est-à-dire si il convergent ou non vers une solution. On s'intéressera ici seulement à la stabilité de Von Neumann. La technique de Von Neumann consiste à décomposer les variables, en modes :

$$y_j^n = \lambda^n e^{ikj\Delta x}, \quad i^2 = -1$$

Proposition 3.1
La condition nécessaire pour la stabilité de schéma explicite est $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$.

Preuve
D'abord on a $y_j^{n+1} = \lambda^{n+1} e^{ikj\Delta x} = \lambda y_j^n$.
Alors on a

$$\lambda^{n+1} - \lambda^n = \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}\lambda^n(\cos(k\Delta x) - 1)$$

Alors

$$\frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n} = 1 + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}(\cos(k\Delta x) - 1)$$

Il s'agit d'une suite géométrique, qui converge si et seulement si sa raison est comprise entre -1 et 1.
donc

$$-1 < 1 + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}(\cos(k\Delta x) - 1) < 1$$

$$-2 < \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}(\cos(k\Delta x) - 1) < 0$$
$$0 < \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}(1 - \cos(k\Delta x)) < 1$$

Or $(1 - \cos(k\Delta x)) \in [0, 2]$ donc la méthode explicite

est stable si

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2}$$

■

3.3.2 Validation numérique

pour $\Delta x = 0.1; \Delta t = t = 0.00001$,le système (3.3) donne

$$y_i^1 = Ay_i^0$$

Où A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.9980 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0010 & 0.9980 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0010 & 0.9980 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0010 & 0.9980 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0.9980 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0.9980 & 0.0010 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0.9980 & 0.0010 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0.9980 & 0.0010 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0.9980 & 0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 & 0.9980 \end{pmatrix} \text{et}$$

le vecteur $\{y_i^0\} = (0.3090 \;\; 0.5878 \;\; 0.8090 \;\; 0.9511 \;\; 1.0000 \;\; 0.9511 \;\; 0.8090 \;\; 0.5878 \;\; 0.3090)^t$
On note $v_0 = \{y_i^0\}$ et $v_n = \{y_i^n\}$
On trouve par recurence :

$$v_n = A^n v_0$$

On représente les résultats obtenus de quelque itérations :

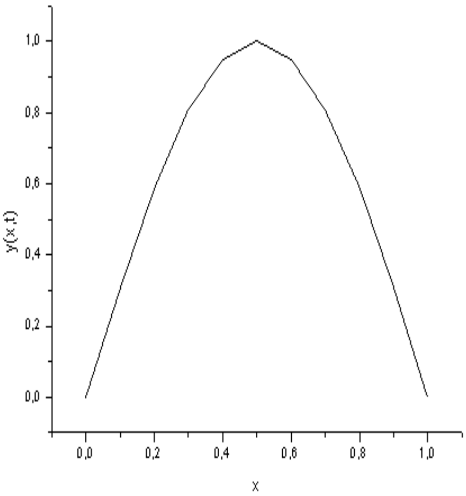

FIG. 3.1 – pour t=0

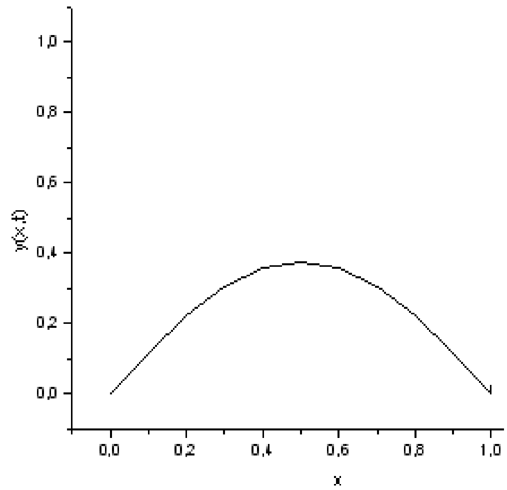

FIG. 3.2 – pour t=0.1

FIG. 3.3 – pour t=0.2

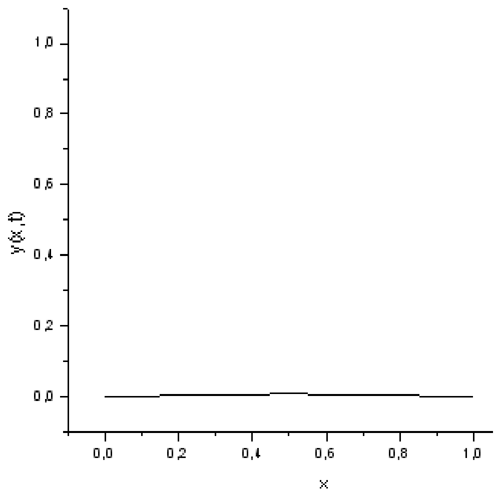

FIG. 3.4 – pour t=0.5

Le tableau ci-dessous présente quelque itiration de la norme dans $L^2(\Omega)$ qui définie par

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{i=n} y_i^2}$$

temps	t=0	t=0.05	t=0.1	t=0.15	t=0.2	t=0.25	t=0.3	t=0.35	t=0.4
$\|y\|$	2.2361	1.3706	0.8401	0.5150	0.3157	0.1935	0.1186	0.0727	0.0446

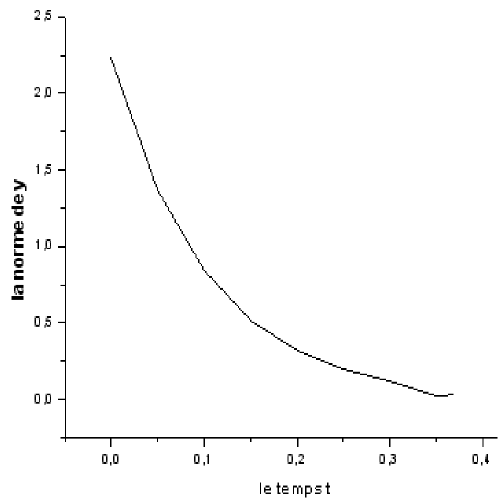

FIG. 3.5 – La stabilité du système

Les résultats obtenus montre la stabilité du système.

3.4 Équation de transport

On considère le système distribué décrit par l'équation aux dérivée partielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \quad x \in [0,1] \\ y(0,t) = y(1,t) = 0 \\ y(x,o) = x \end{cases} \tag{3.4}$$

tel que $\Omega = [0,1]$, $H = L^2(\Omega)$.On utilise la méthode des diffirences finies par le shéma explicite.

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{(\Delta t)} = \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{(\Delta x)} \quad x_i \in [0,1] \\ y_0^j = y_n^j = 0 \\ y_i^0 = x_i \end{cases} \tag{3.5}$$

tel que $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) \simeq \frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{(\Delta t)}$ et $\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \simeq \frac{y_{i+1}^j-y_i^j}{(\Delta x)}$, alors

$$\begin{cases} y_i^{j+1} = (1+a)y_i^j + ay_{i+1}^j \quad x_i \in [0,1] \\ y_0^j = y_n^j = 0 \\ y_i^0 = x_i \end{cases} \tag{3.6}$$

tel que $a = \frac{\Delta t}{\Delta x}$,

3.4.1 Stabilité de schéma

Lemme 3.2 [13]
Le schéma (3.5) est stable si la condition CFl vérifie

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

3.4.2 Validation numérique

pour $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.5$ le système (3.5) donne

$$y_i^1 = Ay_i^0$$

Où A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$$

on note par $v_0 = \{y_i^0\}$ et $v_n = \{y_i^n\}$.

On trouve par récurrence :

$v_2 = A^2 v_0$

$v_3 = A^3 v_0$

.

.

$v_n = A^n v_0$

On représente les résultats obtenus de quelques iterations :

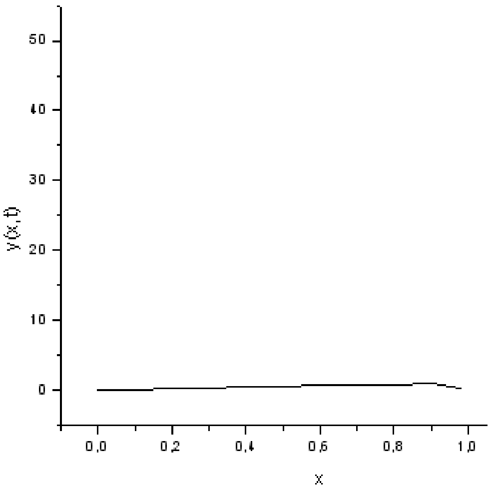

FIG. 3.6 – pour t=0

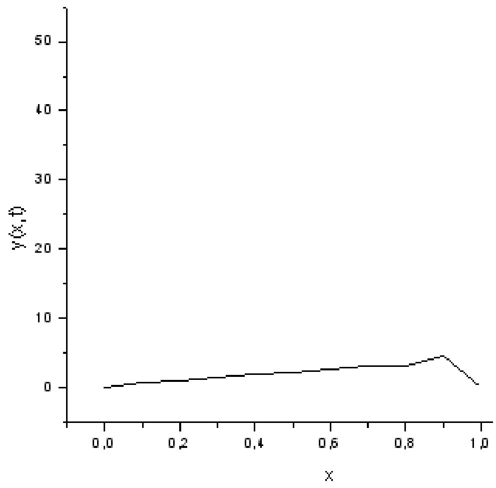

FIG. 3.7 – pour t=0.1

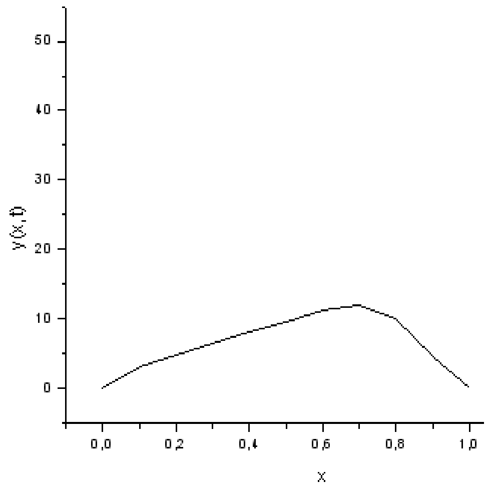

FIG. 3.8 – pour t=0.2

FIG. 3.9 – pour t=0.3

Le tableau ci-dessous présente quelque itiration de la norme dans $L^2(\Omega)$.

temps	t=0	t=0.05	t=0.1	t=0.15	t=0.2	t=0.25	t=0.3	t=0.35	t=0.4
$\|y\|$	1.7	3.3	6.4	12.6	24.9	49.2	97.3	192.2	379.9

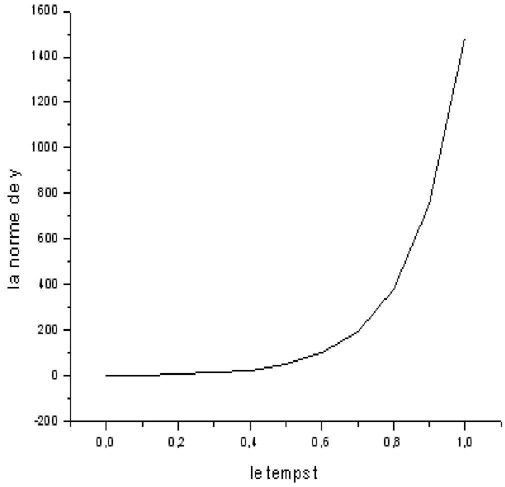

FIG. 3.10 – L'instabilité du système

Les résultats obtenus montre que le système n'est pas stable.

3.5 Satbilité régionale

Soit le système :

$$\begin{cases} y'(x,t) = \log(x+0.1)y(x,t) \quad & x \in [0,1] \\ y(x,0) = |0.5 - x| \end{cases} \tag{3.7}$$

le système descritisé corrospondant est :

$$\begin{cases} y_i^{j+1} = (1 + \Delta \log(x_i + 0.1))y_i^j \\ y_i^0 = |0.5 - x_i| \end{cases} \tag{3.8}$$

pour $\Delta t = 0.001; \Delta x = 0.1$, on obttient les résultats :

FIG. 3.11 – pour t=0

FIG. 3.12 – pour t=0.1

FIG. 3.13 – pour t=0.2

FIG. 3.14 – pour t=0.3

Les résultats obtenus montre que le système n'est pas stable sur tout le domaine, mais stable sur la région $[0, 0.5]$.

3.6 Satbilisation régionale

Dans cette section, on va faire une application numérique pour la stabilisation régionale,et faire une comparaison avec la stabilisation analytique.Pour cela on prend l'exemple (2.5).

Exemple 3.1 *Le système discret :*

$$\begin{cases} y_i^{j+1} = (1 + \Delta t(1 - x_i))y_i^j \\ y_i^0 = x_i|0.5 - x_i| \quad ; \quad y_0^j = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

pour $\Omega =]0, 1[$ *et* $\Delta t = 0.001$ *et* $\Delta x = 0.1$.

On déduit qu'on augmentant le temps,notre solution grandit.

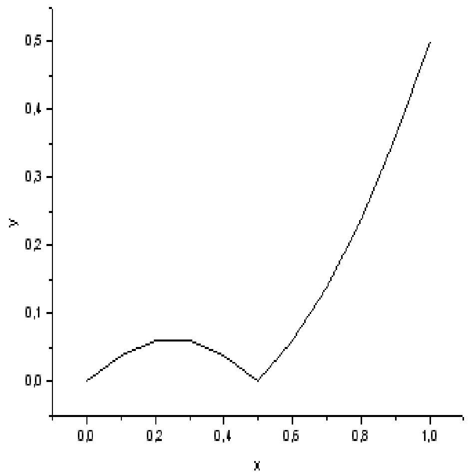

FIG. 3.15 – pour t=0

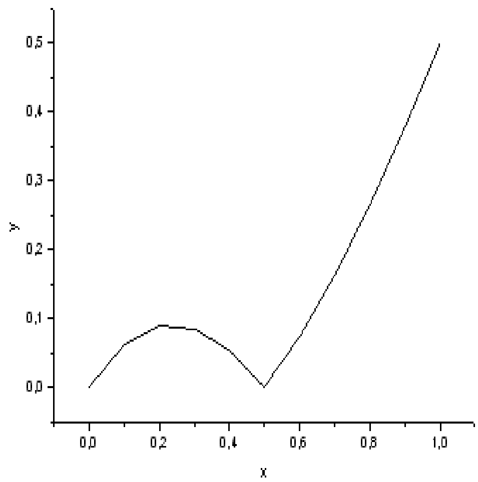

FIG. 3.16 – pour t=0.1

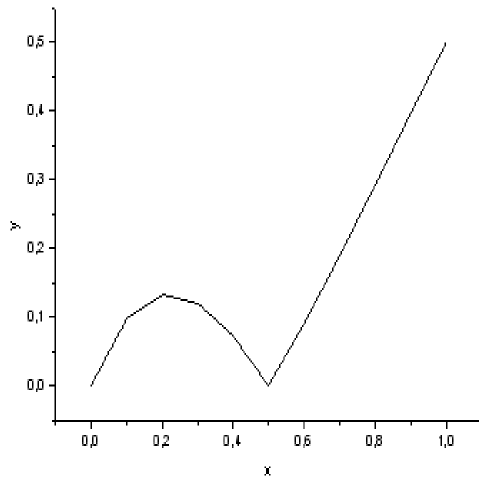

Fig. 3.17 – pour t=1

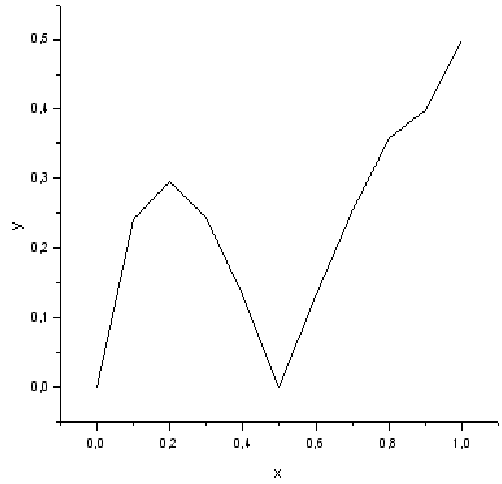

Fig. 3.18 – pour t=2

temps	*t=0*	*t=1*	*t=2*	*t=3*	*t=4*	*t=5*	*t=6*	*t=7*	*t=8*
$\|y\|$	*0.6861*	*0.7651*	*0.9369*	*1.3870*	*2.5673*	*5.4599*	*12.3115*	*28.4553*	*66.6480*

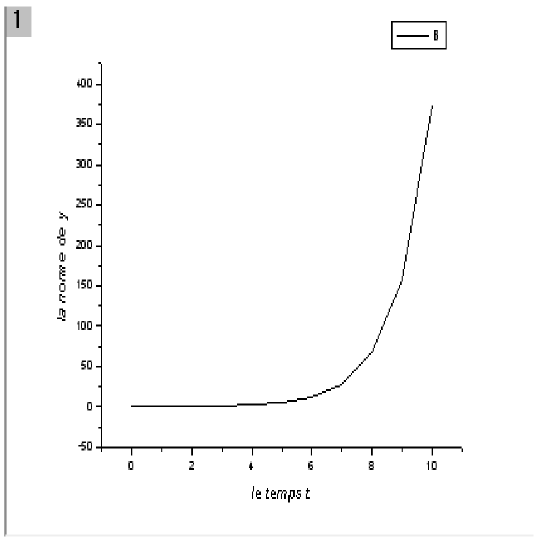

Fig. 3.19 – l'instabilité de système non-controlé

alors le système n'est pas asymptotiquement stable.

Maintenent on va étudier la stabilisation sur la région $\omega =]0, 0.5[\subset \Omega$

pour le système non contrôlé on a les resultats suivants :

temps	*t=100*	*t=200*	*t=300*	*t=400*	*t=500*	*t=600*	*t=700*	*t=8 00*	*t=900*
$\|y\| \times 10^{272}$	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*	*1.2149*	*nan*	*nan*

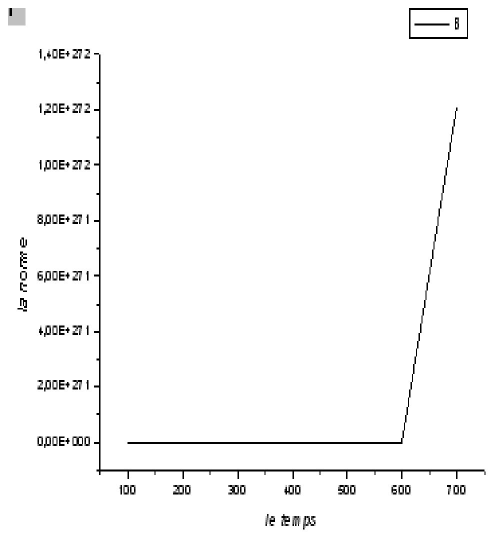

FIG. 3.20 – le systéme non-contrôlé

mais pour une région $\omega =]0, 0.5[\subset \Omega$ *et pour le contrôle* $u = y$ *et* $B = ((1-x) + \sqrt{1+(1-x)^2} i_\omega$ *On a le système discret correspondant :*

$$\begin{cases} y_i^{j+1} = (1 - \Delta t \sqrt{(1+(1-x_i)^2)}) y_i^j \\ y_i^0 = x_i |0.5 - x_i| \quad ; \quad y_0^j = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Lorsque t *augmante,la norme* $\|y(t,x)\|$ *tend vers* 0.

FIG. 3.21 – pour t=0

FIG. 3.22 – pour t=0.1

FIG. 3.23 – pour t=0.5

FIG. 3.24 – pour t=1

On utilise la norme dans $L^2(\omega)$.On a les résultats suivants;

temps	*t=0.1*	*t=0.2*	*t=0.3*	*t=0.5*	*t=0.6*	*t=0.7*	*t=0.8*	*t=0.9*	*t=1*
$\|y\|$	*0.0900*	*0.0794*	*0.0700*	*0.0545*	*0.0481*	*0.0425*	*0.0375*	*0.0331*	*0.0292*

temps	*t=10*	*t=20*	*t=30*	*t=40*	*t=50*	*t=60*	*t=70*	*t=80*	*t=90*
$\|y\| \times 10^{-6}$	*0.4845*	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*	*0.0000*

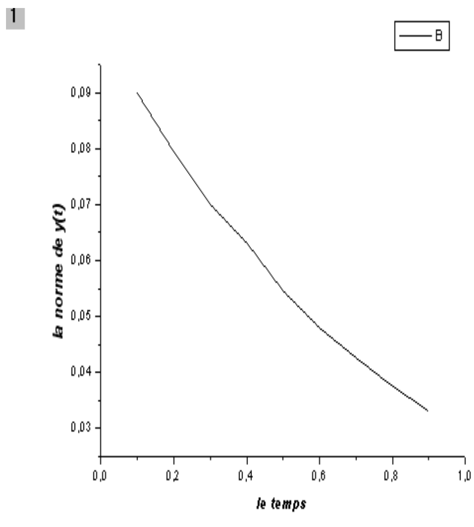

FIG. 3.25 – le système controlé

Bibliographie

[1] Assia Benabdallah, *une introduction à la théorie du contrôle*, CMI-LATP ,technopp̂le Chàteau-cobert,Univercité de provence,2005.

[2] Benchimol C. *A note on weak stabilizability of contraction semi-groups* Siam ,J.control and optimization.,1978.vol.16,pp 373-379.

[3] Curtain,R.F,and Zwart,H.J. *An Introduction to infinite dimensional linear systems theory* .NewYork,Springer-Verlag, 1995.

[4] Datko,R. *Extending a theorem of A.M.Liapunov to Hilbert Space.* J.of math.Anal.and Appl,1970.

[5] David Kincaid and Ward Cheney, *Numerical Analysis* Brooks/Cole Publishing Company Pacific Grove,California,QA297.K563.1990.

[6] E.B.Davies, *One-parameter semigroups* St.john's college ,Oxford,England,Academic press 1980.

[7] A.El Jai-A.J.Pritchard, *capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribuée* , Masson.RMA3.paris.1986.

[8] E.Hille and R.S.phillips, *functional Analysis and semi-groups* Colloquium publications,Amer.Math.Soc.Providence.1957.

[9] F.L.Huang, *On the Mathematical Model for linear Elastic systèms with Analytic Damping* Siam J Control Optim.,Vol.26,1988,pp.714-724 .

[10] Kendall.Atkinson Weimin.Han, *Theoretical Numerical Analysis* , Springer, texts in applied mathematics 39,2000. Grove,California,QA297.K563.1990

[11] J.L.Lions, *Contolabilité Exacte,Stabilisations et Perturbations des Systèmes Distribués*, Masson.Vol.1.1988.

[12] A.Pazy, *semigroups of linear opérators and applications to partial differential equations*, Springer,Applied Mathématical Sciences,1983.

[13] Peng Li, *Controllability,Stability and Stabilizability of Distributed Parameter Systems* thèse de Doctorat , Université de Ottawa,Canada 1991.

[14] Prichard,A.J.,and Zabczyk,J *Stability and stabilizability of infinite dimensional systems* Siam Rrview , 1981,23,pp 25-51

[15] Triggiani,R *On the stabilizability problem in Banach space* J.math.Anal.Appl,1975 ,52,pp 383-403.

[16] Zabczyk,J. *Remarks on the algebraic Riccati equation in Hilbert space* App.Math.Opt,1976,3,pp 251-258

[17] E. Zerrik A .Boutoulout H.Bourray,*Boundary Strategic Actuatorse* MACS Group - AFACS UFR Moulay Ismail University. Sciences Faculty.P.O.Box 4010 Meknes. Morocco.2001.

[18] E. Zerrik and M.Ouzahra, *Regional stabilization for infinite-dimentional systems*, MACS Group - AFACS UFR Moulay Ismail University. Sciences Faculty. Meknes. Morocco.2000.

[19] Mohamed Ouzahra, *Stabilisation régionale des systèmes distribués*, thèse de Doctorat, MACS Group - AFACS UFR Moulay Ismail University. Sciences Faculty. Meknes. Morocco.2004.

Résumé

Ce travail consiste à étudier l'application de la théorie de stabilisation dans l'étude théorique et numérique d'un système dynamique gouverné par des équations aux dérivées partielles.
On introduit les nouveaux concepts de la stabilisation,et on se concentre en particulier sur la stabilisation régionale.

Mots clés :semi-groupes,stabilité,stabilisabilité.

Abstract

This work concerns the mathematic and numerical studies of stabilization for dynamical systems govern by partial differential equations.
We introduce the now concepts of stabilization,and we concentrate in particular on the regional stabilization.
Key words : semi-groups,stability, stabilisability