

Image processing by the partial derivative equations

by

Abed Samira

Submitted to the Department of Mathematical
in partial fulfillment of the requirements for the degree of

Magister

at the

UNIVERSITY OF EL HADJ LAKHDAR - BATNA

23 February 2012

	© Jury	
Dr. Djeflal Lakhdar	University of Batna	President
Pr. Melkemi Khaled	University of Biskra	Reporter
Dr. Labed Boubakeur	University of Biskra	Examinator
Dr. Benzid Redha	University of Batna	Examinator

The author hereby grants to University of El Hadj Lakhdar - Batna permission to
reproduce and
to distribute copies of this thesis document in whole or in part.

Signature of Author

Department of Mathematical
23 February 2012

Accepted by

Image processing by the partial derivative equations

by

Abed Samira

Submitted to the Department of Mathematical
on 23 February 2012, in partial fulfillment of the
requirements for the degree of
Magister

Résumé

The field of the image processing by the partial derivative equations is very varied. For this aim we have chosen to primarily consider PDE under the angle analysis scales-spaces. The accent will be put on some equations'examples illustrating the most important points that appear to us . After having precised the effect of the equation of heat on images, we will explain, why certain non-linear equations are more adapted to their structure.

Key words : Partial derivative equations – Image processing – Filtering.

Table des matières

Introduction	4
1 Rappels et définitions	7
1.1 Définitions	7
1.1.1 Signal	7
1.1.2 Image numérique	8
1.1.3 Le pixel	9
1.1.4 Voisinage d'un point	9
1.1.5 Ensembles de niveau, lignes de niveau	9
1.1.6 Le contour	10
1.1.7 Le bruit	10
1.1.8 Le Filtrage	10
1.2 Géométrie planaire différentielle	11
1.2.1 Courbure euclidienne	12
1.3 Notions sur le traitement multi-échelles	13
1.3.1 Les axiomes architecturaux	14
1.3.2 Les axiomes géométriques et morphologiques	15
1.3.3 Théorèmes découlant des axiomes	17
1.4 Pourquoi le traitement d'image?	20
2 EDP pour l'amélioration d'images	21
2.1 Filtres basés sur la diffusion linéaire	21
2.1.1 Pourquoi l'équation de la chaleur	21

2.1.2	Equation de la chaleur et noyau gaussien	22
2.2	Filtrage non linéaire (EDP de PERONA-MALIK)	
2.2.1	Equation de diffusion anisotrope	28
2.2.2	Choix des paramètres	32
2.2.3	Approche variationnelle	34
2.2.4	Filtrage par diffusion non linéaire régularisé	38
2.3	Filtres basés sur la notion de courbure	39
2.3.1	Mouvement par courbure moyenne (<i>MCM</i>)	39
2.4	Conclusion	41
3	Résolutions numériques	42
3.1	Approximations par différences finies	42
3.1.1	Notations	42
3.1.2	Approximations des dérivées partielles	43
3.1.3	Approximations des opérateurs de la géométrie différentielle	45
3.1.4	Méthodes de résolution	47
3.1.5	Consistance, convergence et stabilité des schémas numériques	49
3.2	Résultats numériques	54
3.2.1	L'équation de diffusion de la chaleur	55
3.2.2	Modèle de Perona et Malik	57
3.2.3	Comparaison entre l'EDP de Perona-Malik et filtre linéaire	60
	Conclusion	60
	Bibliographie	63

Introduction

En modélisation par des EDP du traitement d'images, on peut distinguer en particulier deux domaines d'application. Le premier est la restauration des images, qui consiste à améliorer l'image afin de la rendre plus significative à l'oeil en renforçant les contrastes de l'image originale et en corrigeant les distorsions (bruit) introduites lors de son acquisition. L'autre domaine est celui de la segmentation ou d'une manière plus générale celui de l'interprétation des images qui consiste à détecter les contours des objet significatifs de l'image. D'une manière générale, le pré-traitement représente une étape très importante en traitement d'images et en vision par ordinateur, puisqu'il permet un débruitage et une augmentation des contrastes qui facilitent la segmentation par la suite. Le travail présenté dans ce mémoire se situe dans la premier domaine.

Mathématiquement, une image plane, généralement un rectangle, consiste en un ensemble discret de point (pixel) porteur d'une fonction u , le niveau de gris. Par ailleurs, en traitement d'image et en vision par ordinateur, il est difficile d'analyser l'information contenue dans une image à partir de l'intensité lumineuse de chaque pixel. Par contre, on peut saisir les changements d'intensité et la taille des zones présentant des propriétés d'homogénéité (ou regroupant des pixels faisant partie d'un "même" objet). D'où, la nécessité d'utiliser des équations aux dérivées partielles EDPs qui respectent la taille et les propriétés de ces zones. Ces approches ont de plus l'avantage de donner des resultats d'existence et d'unicité de la solution (image restaurée) et permettent de mettre en oeuvre des schémas numériques stables.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante. Le premier chapitre présente quelques notions de bases sur l'objet image, géométrie différentielle plane, l'axiomatique d'Alvarez, Guichard, Lions et Morel [6]. Celle-ci permet à la fois d'unifier les analyse multi-échelles existantes et de faire le lien entre les traitements multi-échelles et les diverses EDP classiques du traitement d'images qui seront présentées par la suite.

Le deuxième chapitre retrace les principales contribution concernant l'utilisation des équations aux dérivée partielles pour l'amélioration des images. Les principales EDP de lissage sont en premier lieu présentées. Elles sont déclinées suivant les catégories suivantes : le filtrage linéaire, le filtrage non linéaire, et le filtre basé sur la notion de courbure.

Le troisième chapitre présente une technique d'approximation les approximations par différences finies. Ce chapitre est organisé de manière suivante : nous allons revoir dans un premier temps le cadre général de ces approches et ensuite, les principes théoriques des schémas utilisés pour les EDP présentées aux chapitres précédents et en fin nous présentons quelques résultats numériques illustrés par des images pour l'équation de la chaleur et l'équation de Perona et Malik, on conclut que la diffusion non linéaire est mieux adaptée à leur structure

Chapitre 1

Rappels et définitions

1.1 Définitions

1.1.1 Signal

La théorie du signal a pour objet l'étude des signaux et des systèmes qui les transmettent.

La notion de signal est très extensive. Il ressort de l'observation d'un phénomène certaines quantités qui dépendent du temps (de l'espace, d'une fréquence, ou d'autre chose). Ces quantités supposées mesurables, seront appelées des signaux. Elles correspondent en mathématique, à la notion de fonction (d'une ou plusieurs variables : temps, espace, etc.) qui en constitue donc une modélisation.

Exemples de signaux

- Intensité d'un courant électrique ;

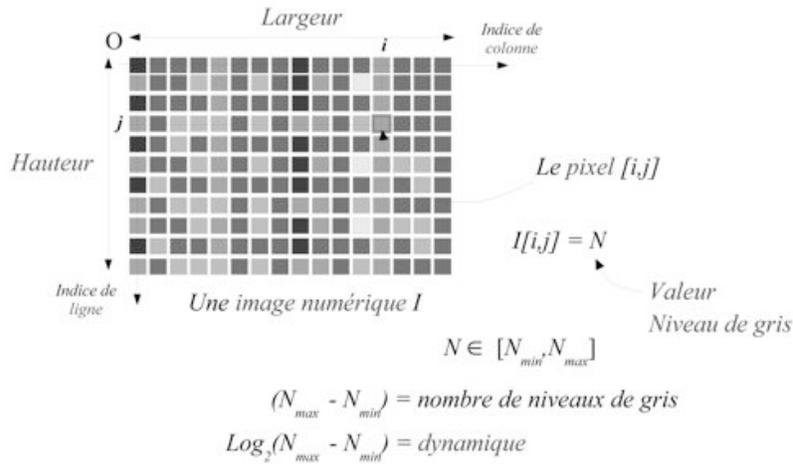
- Position d'un Mobile, repéré par sa position dans le temps, $M = M(t)$, ou dans l'espace $M = M(x, y, z)$;

- Niveaux de gris des points d'une image $g(i,j)$;

Il y a différentes façons de considérer un signal :

i) On peut le modéliser de façon déterministe ou aléatoire. Seul le point de vue déterministe sera adopté ici.

ii) La variable peut être continue, on dit alors qu'on a un signal analogique $x = x(t)$, si elle est discrète, on a un signal discret $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Un signal discret sera le plus souvent le résultat



de la discrétisation (appelée aussi échantillonnage) d'un signal analogique.

iii) En fin, les valeurs $x = x(t)$ du signal seront ici considérées comme des valeurs exactes, réelles ou complexes. Pour le traitement en ordinateur, il est, par contre, nécessaire de stocker sous forme finie, par exemple de multiples d'une quantité élémentaire q . Cette approximation des valeurs exactes est appelée quantification.

Un signal discret et quantifié est appelé signal numérique.

On appelle système (de transmission) toute entité, ou appareil, où l'on peut distinguer des signaux d'entrée et des signaux de sortie, ces signaux n'étant pas nécessairement de même nature.

1.1.2 Image numérique

Définition 1 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 (nous considèrerons le cas où Ω est un rectangle ouvert). On considère une image comme une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

La fonction u est définie sur Ω . Mais en traitement d'image, nous n'avons accès qu'à des valeurs discrètes ($u(x_i, y_j)$) de cette fonction u

1.1.3 Le pixel

Le pixel est l'abréviation de "Picture élément" ; élément d'image. C'est la primitive de bas niveau la plus pauvre en information car ses seuls attributs sont la position dans la matrice image (n° de ligne, n° de colonne) et la valeur numérique indiquant sa couleur, ou son niveau de gris.

Il peut être représenté en mémoire sur :

- Un bit (0 ou 1) pour les images monochromes : 0 pour le noir et 1 pour le blanc.
- Un octet, soit 256 niveaux de gris pour une image à niveaux de gris : 0 noir et 255 blanc.

1.1.4 Voisinage d'un point

Définition 2 Soit $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $p = [x_p, y_p]$, un point sur un support isotrope unitaire.

Le 4-voisinage $V_4(p)$ du point p est défini :

$$V_4(p) = \{[x_p, y_p \pm 1], [x_p \pm 1, y_p]\}$$

Le point q est appelé 4-voisin de (ou 4-adjacent à) p si $q \in V_4(p)$

De même façon, nous pouvons définir un voisinage plus large :

Définition 3 Soit $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $p = [x_p, y_p]$, un point sur un support isotrope unitaire.

Le 8-voisinage $V_8(p)$ du point p est défini :

$$V_8(p) = \{[x_p \pm 1, y_p \pm 1]\}$$

Le point q est appelé 8-voisin de (ou 8-adjacent à) p si $q \in V_8(p)$

1.1.5 Ensembles de niveau, lignes de niveau

Définition 4 Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle ensemble de niveau de u au niveau λ l'ensemble

$$\chi_\lambda(u) = \{x \in \mathbb{R}^2, u(x) \geq \lambda\}.$$

Les lignes de niveaux de u sont les frontières topologiques des composantes connexes des ensembles de niveau de u .

1.1.6 Le contour

Dans l'approche " contour ", on considère que les primitives à extraire sont les lignes de contrastes séparant des régions de niveaux de gris différents et relativement homogènes, ou bien des régions de texture différentes. En pratique, il s'agit de reconnaître les zones de transition et de localiser au mieux la frontière entre les régions.

Donc un contour peut approximativement être défini comme une zone de l'image où l'intensité des pixels change brusquement, cette discontinuité dans l'image est le passage d'un niveau de gris à un autre, de manière plus ou moins rapide, donnant lieu à trois interprétations d'échelon, de rampe, de toit ou de ligne.

On distingue trois types de contour simple

- **Marche d'escalier** : le contour est net (contour idéal).
- **Rampe** : le contour est plus flou.
- **Toit** : il s'agit d'une ligne sur un fond uniforme.

1.1.7 Le bruit

Le bruit caractérise les parasites ou interférences d'un signal, c'est-à-dire les parties du signal déformées localement. Ainsi le bruit d'une image désigne les pixels de l'image dont l'intensité est très différente de celle des pixels voisins.

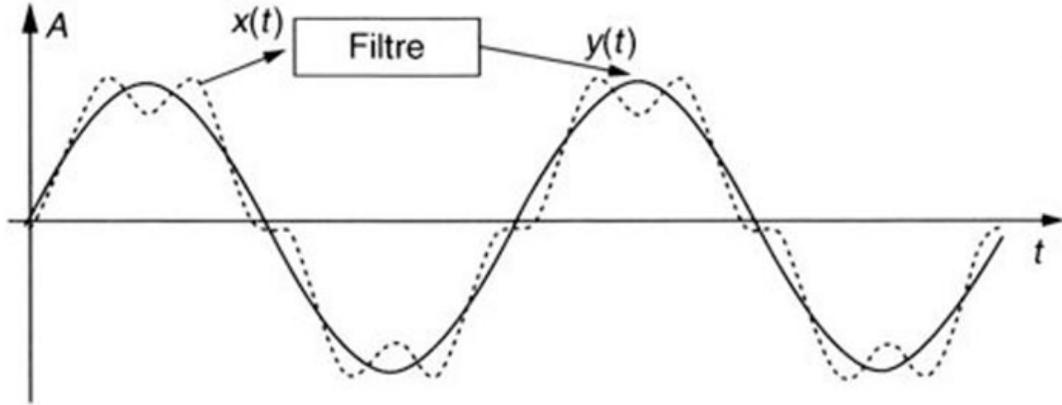
- Environnement lors de l'acquisition ;
- Qualité du capteur ou une mauvaise utilisation de ces derniers ;
- Qualité de l'échantillonnage.

1.1.8 Le Filtrage

Le terme de filtre désigne à la fois un système physique ayant des propriétés particulières, et sa modélisation mathématique définie par les données suivantes :

Soit X et Y deux espaces vectoriels de signaux d'entrée et de sortie, munis chacun d'une notion de convergence ;

Définition 5 *On appelle filtre linéaire tout opérateur $A : X \rightarrow Y$ vérifiant les conditions suivantes :*



i) A est linéaire :

$$\forall v, u \in X \quad A(v + u) = A(v) + A(u)$$

et $\forall u \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad A(\lambda u) = \lambda A(u)$.

ii) A est continu :

lorsque la suite (u_n) tend vers u , la suite $(v_n = Au_n)$ tend vers $v = Au$

iii) A est invariant par translation :

$$\forall u \in X, \forall a \in \mathbb{R} \quad A(\mathcal{J}_a u) = \mathcal{J}_a(Au)$$

telle que \mathcal{J}_a est l'opérateur de retard défini par :

$$\mathcal{J}_a u(t) = u(t - a).$$

Pour suivant le traitement de filtrage , on peut éliminer le bruit si l'image n'a pas été filtrée ou supprimer les derniers artefacts qui n'ont pu disparaître lors du filtrage en niveaux de gris.

1.2 Géométrie plane différentielle

De nombreuses implantations des EDP aboutissent à des réalisations des algorithmes sur l'évolution des fronts. En $2D$ ce front devient une courbe. L'étude des courbes permet de construire de nombreuses applications contrôlées par des caractéristiques de courbes allant de lissage de contours jusqu'à la segmentation par contours actifs.

Une courbe plane peut être vue comme un contour d'un objet plane.

Définition 6 (courbe)

La courbe est un bijection d'une ligne réelle dans un plan réelle :

$$\mathcal{C}(p) : [a, b] \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \quad (1.1)$$

où p représente le paramètre de la courbe \mathcal{C} . Pour toute valeur du point $p_0 \in [a, b]$ nous obtenons un point dans le plan $\mathcal{C}(p_0) \in \mathbb{R}^2$.

Si $\mathcal{C}(a) = \mathcal{C}(b)$ la courbe est **fermée**.

La courbe a une intersection s'il existe au moins une paire de paramètres $p_0, p_1 \in [a, b]$ et $p_0 \neq p_1$ tels que $\mathcal{C}(p_0) = \mathcal{C}(p_1)$. Sinon la courbe est appelée courbe simple.

1.2.1 Courbure euclidienne

La plus importante caractéristique d'une courbe est la courbure κ . Considérons un arc infinitésimale ds de courbe \mathcal{C} entre les points s_1 et s_2 , nous pouvons remplacer ds par un arc cercle osculateur avec rayon r .

La courbure κ est l'inverse du rayon r du cercle osculateur :

$$\kappa = \frac{1}{r} \quad (1.2)$$

Parmi d'autre expressions pour la courbure, nous pouvons mentionner une formulation dérivée de paramétrisation euclidienne de courbe. Si nous reprenons la définition (6) de courbe $\mathcal{C}(p)$, nous passons à une paramétrisation spéciale $\mathcal{C}(s)$ où la courbe est définie sur l'intervalle $s \in [0, L]$, L est la longueur de la courbe. La courbure est ensuite définie comme suit :

$$\kappa \vec{\eta} = \frac{d^2\mathcal{C}}{ds^2} \quad (1.3)$$

où $\vec{\eta}$ est le vecteur normal et s est le paramètre d'une paramétrisation avec $s \in [0, L]$

$$\vec{\eta} = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \quad (1.4)$$

$$\kappa = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) = \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_xu_yu_{xy} + u_{yy}u_x^2}{\sqrt{(u_x^2 + u_y^2)^3}} \quad (1.5)$$

La longueur euclidienne.

La longueur euclidienne d'une courbe est également l'un des concepts de base de la géométrie planaire. La longueur euclidienne L entre deux points de la courbe :

$$L(p_0, p_1) = \int_{p_0}^{p_1} \left[\left(\frac{dx}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dp} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dp \quad (1.6)$$

Quelques propriétés relatives à la courbure :

- La courbure d'une droite est nulle car le rayon r du cercle osculateur tend vers l'infini.
- La courbure des cercles est constante, égale à l'inverse du rayon du cercle.

Toute courbe $\mathcal{C}(p)$ peut être uniquement représentée par la fonction de courbure κ .

1.3 Notions sur le traitement multi-échelles

Les objectifs des techniques d'approximation et ceux du filtrage du bruit sont très similaires dans le sens où les deux visent à produire, à partir d'une image, une version plus lisse et avec moins d'extrema locaux. Ce lissage et la simplification qui en découle amènent à la notion d'échelle. Une image contient de l'information à différents niveaux de détail, pour des objets de taille variable et à des échelles différentes. L'espace multi-échelle est constitué de l'ensemble des Versions graduellement simplifiées de l'image originale. Cette représentation, appelée multi-échelle, permet via une analyse à différents niveaux d'obtenir des informations qui sont seulement implicites dans l'image de départ.

Une analyse multi-échelle d'une image $u_0(x)$ consiste en la génération d'une séquence d'images $u_0(x, t)$, où chaque image de la séquence apparaît comme une version lissée, à l'échelle référencée par le paramètre t de l'image initiale $u_0(x)$. Une axiomatisation d'une telle analyse multi-échelle a été proposée récemment par Alvarez, Guichard, Lions et Morel [6].

Dans cette axiomatisation, l'analyse multi-échelles est définie par une famille de transformations $(T_t)_{t \geq 0}$ qui transforment une image initiale u_0 en une famille d'image $u(x, t) = (T_t)(u_0)(x)$,

t étant un paramètre dit paramètre d'échelle. Par convention, on pose $T_0 = Id$. On appelle filtre de transition l'opérateur $T_{t+\Delta t,t} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, l'opérateur permettant de passer de l'échelle t à l'échelle $t + \Delta t$. Suivant l'analyse, l'opérateur T_t doit vérifier un certain nombre d'axiomes.

1.3.1 Les axiomes architecturaux

Axiome 1 (Architecture pyramidale : Causalité 1)

$$T_{t+\Delta t} = T_{t+\Delta t,t} \circ T_t \quad (1.7)$$

$T_{t+\Delta t,t}$ est un opérateur censé agir localement, c'est-à-dire que $T_{t+\Delta t,t}(x)$ ne dépend que des valeurs de $u_0(y)$ où y appartient à un voisinage de x , $\vartheta(x)$

Axiome 2 (principe de comparaison local : Causalité 2)

Si $u(y) > v(y)$ pour $y \in \vartheta(x)(y \neq x)$, alors pour Δt assez petit, on doit avoir :

$$T_{t+\Delta t,t}u(x) \geq T_{t+\Delta t,t}v(x) \quad (1.8)$$

Si une image u est plus claire qu'une image v autour d'un point x , alors cette proposition doit rester vraie au moins pour un intervalle infinitésimal d'échelle. L'aspect local est ajouté au principe de comparaison afin de pouvoir aussi traiter des images de contours ou des cartes de profondeur. Le fait que l'opérateur T_t préserve l'ordre signifie qu'il n'y a pas de rehaussement de contraste, mais juste un lissage lors de l'analyse multi-échelles. L'hypothèse de régularité est le dernier axiome architectural. L'analyse d'une image régulière (par exemple, une forme quadratique) doit se faire de façon régulière. Soit u une forme quadratique au voisinage d'un point x_0 :

$$u(x) = a + \prec p, x \succ + \frac{1}{2} \prec Ax, x \succ, \quad \|x - x_0\| < e \quad (1.9)$$

où a est une constante réelle, $p \in \mathbb{R}^2$ et A est une matrice 2×2 . Alors quand Δt tend vers zéro, la valeur de $T_{t+\Delta t,t}(u)(x_0)$ ne doit dépendre que des valeurs de a, p et A . Cet axiome peut s'exprimer formellement comme suit :

Axiome 3 (Régularité)

Soit $u(x)$ une forme quadratique de \mathbb{R}^2 , il existe une fonction $F(A, p, a, x, t)$ continue par rapport à A et telle que :

$$\frac{(T_{t+\Delta t,t}(u) - u)(x_0)}{\Delta t} \rightarrow F(A, p, a, x_0, t), \quad \Delta t \rightarrow 0 \quad (1.10)$$

1.3.2 Les axiomes géométriques et morphologiques

La sortie de l'analyse ne doit pas dépendre de u_0 mais de ses classes d'équivalence. Les axiomes suivants établissent que l'analyse doit être invariante aux fluctuations de lumière, aux changements de position, d'orientation et d'échelle. Donc, l'opérateur de transition $T_{t+\Delta t,t}$ doit pouvoir commuter avec le changement de contraste et les transformations géométriques (rotations, changement d'échelle...). L'intensité en chaque pixel $u_0(x)$ n'est pas une information fiable sur le nombre de photons émis par un point visible vers le capteur optique. La seule information pertinente est que l'ordre des niveaux de gris doit être préservé au cours de l'analyse. L'analyse doit donc commuter avec toute redistribution monotone croissante $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (inconnue et dépendante du capteur) de niveau de gris.

Axiome 4 (Invariance morphologique)

$$\forall u, \quad T_{t+\Delta t,t}(g \circ u) = g \circ T_{t+\Delta t,t}(u) \quad (1.11)$$

Cette invariance est dite forte si cet axiome est respecté pour toute fonction $g(\cdot)$, croissante ou décroissante. La seule information pertinente est l'information relative aux lignes de niveau de l'image d'où la référence à la morphologie mathématique. L'invariance aux translation de niveau de gris est un cas particulier de l'invariance morphologique.

Axiome 5 (Invariance en translation)

L'opérateur T_t est dit invariant par translation, si pour toute translation τ , et toute image u :

$$T_t(\tau \circ u) = \tau \circ T_t(u) \quad (1.12)$$

L'analyse doit être invariante à toute transformation $F_{A,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $F_{A,b}(m) = Am + b$, où $m \in \mathbb{R}^2$, A est une matrice de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ non singulière et $b \in \mathbb{R}^2$:

$$T_{t+\Delta t,t}(u) \circ F_{A,b} = T_{t+\Delta t,t}(u \circ F_{A,b}) \quad (1.13)$$

Si A est la matrice d'une rotation, alors l'opération de commutation devient :

Axiome 6 (Invariance en rotation)

$$AT_{t,t+\Delta t} = T_{t,t+\Delta t}A, \quad Au(x) = u(Ax) \quad (1.14)$$

Si A est une transformation affine, l'opération de commutation ci-dessus n'est plus aussi simple car A peut réduire ou agrandir l'image (par exemple, par un zoom : $Au(x) = A(kx)$, $k > 0$). On peut alors imposer dans le cas de l'invariance affine une propriété de commutation plus faible :

Axiome 7 (Invariance affine)

$\forall A$ et $t \geq 0$, il existe une fonction $t_1(t, A) \geq 0, C^1$, telle que :

$$AT_{t_1+\Delta t_1,t_1} = T_{t_1+\Delta t_1,t_1}A \quad (1.15)$$

Alvarez et al. [6] montrent que $\Delta t_1 = \Delta t \sqrt{|\det(A)|}$ et $t_1 = t \sqrt{|\det(A)|}$. Bien sûr, l'invariance affine implique l'invariance euclidienne. L'invariance projective serait préférable à l'invariance affine mais, malheureusement il n'existe pas de modèle causal la vérifiant. Une hypothèse op-

tionnelle de linéarité peut être faite sur l'opérateur T_t comme c'est souvent le cas en traitement d'image.

Axiome 8 (Linéarité)

L'opérateur est linéaire par rapport à ses arguments :

$$T_{t+\Delta t,t}(au + bv) = aT_{t+\Delta t,t}(u) + bT_{t+\Delta t,t}(v) \quad (1.16)$$

1.3.3 Théorèmes découlant des axiomes

Guichard [6] montre que l'on peut associer à la pyramide visuelle(c-à-d. si l'on suppose les axiomes architecturaux) une fonction F continue telle que pour toute image donnée $u, u(x, t)$ est la solution de viscosité de l'EDP parabolique d'ordre 2 suivante :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = F(\mathcal{H}u, \nabla u, u, x, t) \quad (1.17)$$

Une classification des analyses est proposée grâce au concept de solutions de Viscosité [4] . Les théorèmes suivants permettent de découvrir des EDP que nous retrouverons dans le chapitre suivant.

Equation de la chaleur

Théorème 7 *Si l'analyse multi-échelles satisfait les axiomes de structure pyramidale, de comparaison locale, d'invariance euclidienne, et de linéarité, alors, la solution $u(x, t)$ est solution de l'EDP :*

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \Delta u(x, t) = \text{div}(\nabla u(x, t)) \quad (1.18)$$

Ceci correspond au modèle étudié par, Florack [17] . Ici, on peut noter que l'invariance morphologique et la linéarité sont incompatibles dans le cadre de l'analyse d'images.

Théorème 8 *Si une analyse multi-échelles satisfait aux axiomes de structure pyramidale, de comparaison local, de régularité, d'invariance morphologique et d'invariance euclidienne, elle peut être définie par l'EDP suivante :*

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \|\nabla u\| G\left(\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\right), t\right) \quad (1.19)$$

où $G(s, t)$ est une fonction non décroissante par rapport à la variable réelle s

Espace multi-échelle euclidien morphologique (EMSS)

Si on choisit $G(s, t) = s.t$, on obtient l'analyse multi-échelles appelée multi-échelles morphologique euclidien et définie par l'équation :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = t \|\nabla u\| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\right) \quad (1.20)$$

Le terme $\operatorname{div}\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$ représentant la courbure en chaque point de l'isosurface $u(x, t) = \mathcal{C}$, en dimension deux, on a alors $t \|\nabla u\| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\right) = tu_{\xi\xi}$. Cela correspond donc à une diffusion anisotrope dans la direction des lignes de niveau de l'image. Elle est très proche de l'EDP de restauration où $G(s, t) = s$ appelée Mouvement de courbure moyenne (MCM).

Dilatation et Erosion [7]

Soit $B \subset \mathbb{R}^2$ un élément structurant. Soient $D_t f(x) = \sup\{f(y), y - x \in tB\}$ et $E_t f(x) = \inf\{f(y), y - x \in tB\}$ respectivement la dilatation et l'érosion à l'échelle t d'une fonction f avec l'élément structurant B . Si B est une boule, $u(x, t) = D_t f(x)$ est solution de l'EDP :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \|\nabla u\|_B \quad (1.21)$$

avec $\forall m \in \mathbb{R}^2, \|m\|_B = \sup_{t \in B} \prec m, t \succ$. Ce qui correspond au cas particulier où $G = 1$. Si B est une boule, $u(x, t) = E_t f(x)$ est solution de l'EDP :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \|\nabla u\|_B \quad (1.22)$$

Ce qui correspond au cas particulier où $G = -1$

Espace multi-échelle affine morphologique (AMSS)

Si l'on remplace l'hypothèse euclidienne par l'hypothèse affine, Alvarez et al. [6], démontrent le théorème suivant :

Théorème 9 *En dimension deux, il existe une unique analyse multi-échelles qui satisfait aux axiomes de structure pyramidale, de comparaison locale, de régularité, d'invariance morphologique, et d'invariance affine. L'analyse multi-échelles est définie par l'EDP :*

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = t^{\frac{1}{3}} \|\nabla u\|^{\frac{2}{3}} (u_{\xi\xi})^{\frac{1}{3}} \quad (1.23)$$

Cette analyse multi-échelles est appelée multi-échelles morphologique affine. Elle préserve la courbure affine.

Espace-échelles de Perona et Malik

L'équation de Perona et Malik [1] :

$$\frac{\partial u(x)}{\partial t} = \operatorname{div} (g(\|\nabla u\|) \nabla u) \quad (1.24)$$

Vérifie les axiomes hiérarchiques, les invariances par translation, par décalage de niveaux de gris, par isométrie. L'invariance morphologique n'est pas vérifiée. L'invariance par changement d'échelle n'est vraie que si g est une fonction puissance.

1.4 Pourquoi le traitement d'image ?

Le but du traitement d'image est de :

- Eliminer ou réduire les bruits et parasites introduits lors de son acquisition.
- Interpréter de façon meilleur l'image et son contenu et ceci en détectant la présence de certaines formes.

Les domaines d'application du traitement d'images sont divers, entre autre, la physique, la biologie, etc..., on peut citer :

- La médecine (radiologie, échographe, scanner).
- La télécommunication (téléphone mobile, vidéo, tv).
- L'industrie (la robotique, sécurité).

Chapitre 2

EDP pour l'amélioration d'images

Dans ce chapitre, nous présentons les principales Equations aux Dérivées Partielles proposées dans la littérature pour améliorer les images, c'est-à-dire les EDP permettant de réduire le bruit et/ou le flou dans les images. Lorsque l'EDP a pour objectif la réduction du bruit on parle d'EDP de lissage et lorsque celle-ci a pour objectif la réduction du flou on parle d'EDP de rehaussement.

Pour l'organisation de ce chapitre nous avons classé les EDP en trois catégories qui sont le filtrage linéaire, le filtrage non linéaire et diffusion par courbure moyenne.

2.1 Filtres basés sur la diffusion linéaire

2.1.1 Pourquoi l'équation de la chaleur

Dans les années 60, Gabor a remarqué que la différence entre une image nette u_0 et cette même image floue était en première approximation proportionnelle au laplacien de u_0 , Δu_0 . Le petit calcul qui suit explique ce phénomène dans le cas où l'image est rendue floue par moyennage local. Pour r positif, nous définissons l'opérateur de moyennage local par :

$$M_r(u_0)(x) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(x,r)} u_0(x') dx',$$

où $D(x, r)$ est le disque de centre x et de rayon r . En effectuant un développement de Taylor au voisinage de x il est facile de voir que

$$\frac{M_r(u_0)(x) - u_0(x)}{r^2} = \frac{1}{8}\Delta u_0(x) + \varepsilon(r),$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 si r tend vers 0 . Si nous notons alors M_r^n l'opérateur correspondant à n applications successives de M_r , il est possible de montrer que, si nr^2 tends vers un nombre positif t et n vers l'infini, alors $M_r^n(u_0)(x)$ converge vers $u(x,t)$, solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{8}\Delta u \\ u(., t) = u_0. \end{cases}$$

Ce résultat signifie que si l'on construit une suite d'images de plus en plus lissées en partant de u_0 , on obtient asymptotiquement une suite $u(., t)$ solution de l'équation de la chaleur (le facteur $1/8$ peut être supprimé en normalisant le filtre). Plus généralement, ce type de relation reste vrifié si M_r est remplacé par un opérateur de convolution avec un noyau isotrope g de masse unité (c'est à dire que $\int g = 1$) suffisamment régulier. En ce sens, l'équation de la chaleur est caractéristique d'un grand nombre de filtrages linéaire, et nous allons donc maintenant nous intéresser à cette équation par donner une construction explicite de ses solutions.

2.1.2 Equation de la chaleur et noyau gaussien

Koenderink [6] est le premier à introduire les EDP pour la restauration d'images bruitées. Il propose d'appliquer à l'image l'EDP parabolique linéaire, communément appelée équation de la chaleur (ou bien encore équation de diffusion isotrope ou EDP linéaire) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$\partial\Omega$ représente le bord de Ω , n est un vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$ et $u_0(x)$ l'image initiale à restaurer. Comme l'opérateur laplacien est invariant en rotation, l'équation de la chaleur effectue une diffusion isotrope de l'intensité de l'image. Koenderink montre aussi que convoluer l'image initiale par le noyau gaussien :

$$g_t(x) = \frac{1}{4\pi t} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right), \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (2.2)$$

est équivalent à faire évoluer l'EDP (2.1). Cela permet d'interpréter le filtrage d'une image par une gaussienne en terme d'espace-échelles, le paramètre t jouant ici le rôle d'échelle. C'est pourquoi, on parle aussi d'espace multi-échelles linéaire pour désigner l'ensemble des images générées par les équations (2.1) et (2.2). Lorsque t augmente, l'image $u(x, t)$ représente une version de plus en plus grossière de l'image initiale. Ainsi, de nombreuses structures disparaissent quand l'échelle augmente. Si t tend vers l'infini, l'équation (2.1) fait tendre $u(x, t)$ vers une constante qui est la moyenne de l'image initiale u_0 . Donc, pour conserver de l'information dans l'image, il faut stopper le processus de diffusion à une échelle t_{fin} à déterminer.

Théorème 10 (Existence) Soit $v \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$u(t, x) = (g_t * v)(x)$$

alors

1. en tout point $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$, $u(t, x)$ est solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

2. $\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t, \cdot) - v\|_{L^1} = 0$
3. si $v \in B \cup C(\mathbb{R}^2)$ (bornée et uniformément continue), alors :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t, x) - v(x)\|_{L^\infty} = 0$$

Si v est simplement continue et bornée, alors la convergence est seulement uniforme sur tout compact

Preuve. . On a :

$$\partial_t u = \partial_t (g_t * v) = (\partial_t g_t) * v = (\Delta g_t) * v = \Delta (g_t * v) = \Delta u \text{ ce qui montre (1).}$$

– On va montrer (3). On a

$$|u(t, x) - v(x)| = \left| \int v(x - y) g_t(y) dy - v(x) \right| = \left| \int (v(x - y) - v(x)) g_t(y) dy \right| \text{ car } \int g_t = 1.$$

Par changement de variable linéaire ; on a aussi

$$|u(t, x) - v(x)| = \left| \int (v(x - ty) - v(x)) g_1(y) dy \right|.$$

Or

$$\int_{|y| \geq R} |(v(x - ty) - v(x))| g_1(y) dy \leq 2 \|v\|_{L^\infty} \int_{|y| \geq R} g_1(y) dy.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On peut choisir R assez grand, indépendamment de t pour que

$$2 \|v\|_{L^\infty} \int_{|y| \geq R} g_1(y) dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, v est uniformément continue, on peut donc trouver un $t_0 > 0$ tel que

$$\forall t < t_0, \forall x, y \in \mathbb{R}^2, |y| \leq R \Rightarrow |v(x - ty) - v(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

On a alors

$$\int_{|y| \leq R} |v(x - ty) - v(x)| g_1(y) dy \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|y| \leq R} g_1(y) dy \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En utilisant les deux estimations, on a prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_0, t.q. \forall x \in \mathbb{R}^2, t < t_0 \Rightarrow |u(t, x) - v(x)| < \varepsilon,$$

qui est exactement (3).

On va montrer 2. supposons $v \in C_0^0$, alors

$$\begin{aligned} \int |u(t, x) - v(x)| dx &= \int \left| \int v(x - ty) \cdot g_1(y) dy - v(x) \right| dx \\ &\leq \int |v(x - ty) - v(x)| g_1(y) dy dx \end{aligned}$$

soit $\varepsilon > 0$, fixé.

On peut choisir R assez grand, indépendamment de t pour que

$$\int_{|y| \geq R} |v(x - ty) - v(x)| g_1(y) dx dy \leq 2 \|v\|_{L^1} \cdot \int_{|y| \geq 2} g_1(y) dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Supposons maintenant $|y| \leq R$. On peut également supposer $t \leq 1$ (t est destiné à tendre vers 0).

Soit K tel que v est à support compact contenu dans $B_K = B(0, k)$. Alors :

$v(x - ty) - v(x) = 0$ pour tout x tel que $|x| \geq K + R$. De plus, v étant uniformément continue,

si $t \leq t_0 \leq 1$ avec t_0 assez petit, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall y, |y| \leq R, \quad |v(x - ty) - v(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2|B_{K+R}|}$$

(Ici $|B_{K+R}|$ désigne la mesure de la boule de rayon $K + R$). On a alors

$$\begin{aligned} \int_{|y| \leq R} |v(x - ty) - v(x)| g_1(y) dx dy &= \int_{|x| \leq K+R, |y| \leq R} |v(x - ty) - v(x)| g_1(y) dx dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2|B_{K+R}|} |B_{K+R}| \int_{|y| \leq R} g_1(y) dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

En recollant les deux morceaux, on a montré, que si $v \in C_0^0$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_0, t \leq t_0 \Rightarrow \|u(t, \cdot) - v\|_{L^1} \leq \varepsilon$$

qui est la définition de

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t, \cdot) - v\|_{L^1} = 0.$$

Supposons à présent seulement $v \in L^1$,

alors :

on peut choisir $v_\varepsilon \in C_0^0$ tel que $\|v - v_\varepsilon\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{3}$,

alors :

$$\begin{aligned} \|g_t * v - v\|_{L^1} &= \|g_t * (v - v_\varepsilon) + (g_t * v_\varepsilon - v_\varepsilon) + v_\varepsilon - v\|_{L^1} \\ &\leq \|g_t * (v - v_\varepsilon)\|_{L^1} + \|g_t * v_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^1} + \|v_\varepsilon - v\|_{L^1} \end{aligned}$$

le premier terme se majore par $\|v - v_\varepsilon\|_{L^1} \|g\|_{L^1} = \|v - v_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, tout comme le troisième.

Quant au deuxième, on utilise $v_\varepsilon \in C_0^0$. ■

Unicité

Lemme 11 Soit $\chi \in C_0^\infty$ telle que $\chi \geq 0$ et $\int \chi = 1$.

Soit $\chi_h(x) = \frac{1}{h^2} \chi\left(\frac{x}{h}\right)$. pour $h > 0$. (Approximation de l'identité.) Alors :

si $u \in L^1 \cap C^0$, on a $\forall x, \chi_h * u(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} u(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Preuve. } |\chi_h * u(x) - u(x)| &= \left| \int \chi(y) u(x - hy) dy - u(x) \right| \\ &= \left| \int \chi(y) (u(x - hy) - u(x)) dy \right| \text{ car } \int \chi = 1 \\ &= \left| \int_{B_R} \chi(y) (u(x - hy) - u(x)) dy \right|, \end{aligned}$$

ou R ne dépend que de χ (et pas de h). Soit $\varepsilon > 0$. Comme u est continue, si h est assez petit, $|u(x - hy) - u(x)| \leq \varepsilon$. pour tout $y \in B_R$, cette inégalité implique

$$|\chi_h * u(x) - u(x)| \leq \varepsilon \int \chi = \varepsilon.$$

Remarquons aussi que h peut être choisi indépendamment de x sur tout compact, car u est uniformément continue sur tout compact. La convergence de $\chi_h * u$ vers u est donc uniforme sur tout compact. ■

Remarque 12 Si u est uniformément continue et dans L^1 , alors $u * \chi_h$ converge uniformément vers u .

Théorème 13 (unicité)

Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Il existe une unique fonction $u \in C^1(\mathbb{R}_+^*, C^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^2))$, telle que

- $\partial_t u = \Delta u$ dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$.

$$2. \|u - u_0\|_{L^1} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Cette fonction est donnée par :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2. \quad u(t, x) = g_t * u_0(x)$$

On peut donc parler de la solution de l'équation de la chaleur avec condition initiale u_0 .

Preuve. L'existence découle évidemment du théorème.10. Il faut cependant prouver que :
 $u = g_t * u_0$ dans le bon espace fonctionnel. On a d'abord $\|u(t, \cdot)\|_{L^1} \leq \|u_0\|_{L^1}$ (conséquence directe de la convolution). Comme $u_0 \in L^1$, on a donc bien $u \in L^\infty(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}^2))$. Pour la deuxième condition, il suffit de vérifier que les dérivées spatiales de u jusqu'à l'ordre 2 sont des fonctions bornées et C^1 pour $t \in [t_0, +\infty[$ et ce pour tout t_0 , ce qui est immédiat. Ceci prouve l'existence.

Supposons qu'on ait deux solutions u et v . Soit $w = u - v$. Alors w est solution de l'équation de la chaleur avec condition initiale nulle, c'est-à-dire $\|w(t, \cdot)\|_{L^1} \rightarrow 0$ lorsque t tend vers 0. On va montrer que w est identiquement nulle.

Soit $h > 0$ petit (précisé ultérieurement) et $w_h = \chi_h * w$. Alors $w_h(t, \cdot)$ est C^∞ et aussi solution de l'équation de la chaleur. De plus,

$$\|w_h(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq \|\chi_h\|_{L^\infty} \|w\|_{L^1} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Remarquons que cette estimation est fautive pour w . D'ailleurs la borne obtenue dépend de $\|\chi_h\|_{L^\infty}$ qui tend vers $+\infty$ lorsque h tend vers 0. L'estimation n'est donc en aucun cas uniforme en h .

Supposons $u \neq v$. Soit (x_0, t_0) tel que $w(x_0, t_0) > 0$ (quitte à permuter u et v). Comme w_h converge simplement vers w , pour h assez petit, on a aussi $w_h(x_0, t_0) > 0$ (par le lemme. 11). De plus,

$$\begin{aligned} \forall t, \|w_h(t, \cdot)\|_{L^\infty} &\leq \|\chi_h\|_{L^\infty} \|w\|_{L^1} \\ &\leq \|\chi_h\|_{L^\infty} M, \end{aligned}$$

où M peut-être prise égale à $2\|u_0\|_{L^1}$.

Soit encore $w_h^\varepsilon(t, x) = e^{-\varepsilon t - \varepsilon^2 |x|^2} w_h(t, x)$. Alors

- $w_h^\varepsilon(x_0, t_0) > 0$
- et $w_h^\varepsilon(x, t) \rightarrow 0$ uniformément (à ε fixé) lorsque $t \rightarrow 0$, ou $t \rightarrow +\infty$, ou $|x| \rightarrow +\infty$.

(Notons qu'on ne sait pas prouver que w vérifie ces propriétés.)

Donc, il existe $(t_\varepsilon, x_\varepsilon)$ tel que w_h^ε admet un maximum global en $(t_\varepsilon, x_\varepsilon)$. Alors,

$$\partial_t w_h^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) = 0, \quad Dw_h^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) = 0, \quad \text{et} \quad \Delta w_h^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq 0$$

De plus,

$$w_h^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \geq w_h^\varepsilon(t_0, x_0) \geq c > 0,$$

ou encore

$$e^{-\varepsilon t - \varepsilon^2 |x|^2} w_h^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \geq c > 0.$$

Donc

$$\varepsilon t_\varepsilon + \varepsilon^2 |x|^2 \leq \ln(\|\chi_h\|_{L^\infty} M) - \ln c,$$

et

$$t_\varepsilon = o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad x_\varepsilon = o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Comme $\partial_t w_h = \Delta w_h$, on a aussi

$$\partial_t w_h^\varepsilon(t, x) = -\varepsilon w_h^\varepsilon(t, x) + e^{-\varepsilon t - \varepsilon^2 |x|^2} \Delta w_h.$$

D'autre part,

$$\Delta w_h(t, x) = e^{-\varepsilon t - \varepsilon^2 |x|^2} (4\varepsilon^4 |x|^2 w_h^\varepsilon + 4\varepsilon^2 x \cdot Dw_h^\varepsilon + 2\varepsilon^2 w_h + \Delta w_h^\varepsilon).$$

En particulier en $(t_\varepsilon, x_\varepsilon)$, (en utilisant $Dw_h^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) = 0$)

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t w_h^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \\ &= -\varepsilon w_h^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) + 4\varepsilon^4 |x_\varepsilon|^2 w_h^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) + 4\varepsilon^2 w_h^\varepsilon + \Delta w_h^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \\ &= w_h^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon)(-\varepsilon + o(\varepsilon^2)) + \Delta w_h^\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \\ &< 0 \text{ pour } \varepsilon \text{ assez petit.} \end{aligned}$$

Cette contradiction montre que w ne peut pas prendre de valeurs non nulle. Donc $u = v$.

■

Dans les sections suivantes, nous présentons divers filtres de diffusion non linéaire permettant de pallier les problèmes inhérents à l'analyse multi-échelles linéaire.

2.2 Filtrage non linéaire (EDP de PERONA-MALIK)

Perona et Malik [1] sont les premiers à introduire la non linéarité dans le filtrage par EDP. L'idée est de trouver un espace multi-échelles vérifiant les trois critères suivants :

1. Causalité;
2. Localisation immédiate : à toute résolution les contours devraient être marqués (\lll tranchants \ggg) et coïncider avec la signification sémantique des contours à cette résolution ;

3. Lissage par morceaux : à toute échelle le lissage intra-région doit être préféré à un lissage inter-région.

Cela revient, en fait, à effectuer une diffusion intra-région forte et une diffusion inter-régions faible.

2.2.1 Equation de diffusion anisotrope

Pour détecter les zones inter-régions (i.e : les contours), Perona et Malik choisissent la norme du gradient de l'image $\|\nabla u\|$. Ils introduisent alors une fonction de diffusion (ou coefficient de conduction) réelle g dans l'équation (2.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \operatorname{div} (g(\|\nabla u(x,y,t)\|) \nabla u(x,y,t)) \\ u(x,y,0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Dans un souci de clarté, nous utilisons les notations allégées : à l'échelle $t, \forall x, y \in \mathbb{R}$, $u(x, y, t) = u$ et pour le gradient $\nabla u(x, y, t) = \nabla u$, $c(x, y, t) = g(\|\nabla u\|)$

En développant la divergence de (2.3), celle-ci devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\Delta u + \nabla c \cdot \nabla u \quad (2.4)$$

Notons que si $g(x, t) = 1$ on retrouve l'équation de la chaleur (2.1). g doit être choisie de façon à réaliser les critères fixés au départ. Perona et Malik étudient un contour monodimensionnel, de type marche, localisé sur un point d'inflexion afin de trouver des conditions sur g pour rehausser les contours et lisser les petites discontinuités. Ils trouvent que g doit être non négative, monotone décroissante, tendant vers 0 en l'infini, avec $g(0) = 1$ (diffusion isotrope s'il n'y a pas de contour) et proposent d'utiliser les fonctions de diffusion suivantes :

$$g(\|\nabla u\|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\|\nabla u\|}{k}\right)^{1+\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (2.5)$$

et

$$g(\|\nabla u\|) = e^{-\left(\frac{\|\nabla u\|}{k}\right)^2} \quad (2.6)$$

k étant fixé arbitrairement ou en estimant le bruit. Si $\|\nabla u\| < k$ alors, L'EDP lisse, sinon l'EDP rehausse les contours. Autrement dit, les points dont la norme du gradient est inférieure à k sont assimilés à du bruit alors que les autres sont considérés comme étant des contours. Ce qui est bien le résultat escompté.

Une interprétation directionnelle de (2.3) qui permet de saisir plus facilement les différences avec la diffusion isotrope est obtenue en écrivant l'équation en terme de dérivées secondes directionnelles dans la direction du gradient $\vec{\eta} = \left(\frac{u_x}{\|\nabla u\|}, \frac{u_y}{\|\nabla u\|}\right)^T$ et dans la direction orthogonale $\vec{\xi} = \left(-\frac{u_y}{\|\nabla u\|}, \frac{u_x}{\|\nabla u\|}\right)^T$. Cette notation, classique, est présentée dans plusieurs travaux [9].[5]

Proposition 14

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(\|\nabla u\|) \nabla u) = g(\|\nabla u\|) u_{\xi\xi} + [g(\|\nabla u\|) + \|\nabla u\| g'(\|\nabla u\|)] u_{\eta\eta} \quad (2.7)$$

Preuve. Soit $\nabla u = (u_x, u_y)^T$, le vecteur gradient de norme $\|\nabla u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. Dans le repère orthonormé (\vec{i}, \vec{j}) , le développement de (2.4) conduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\Delta u + \nabla c \cdot \nabla u = g(\|\nabla u\|) (u_{xx} + u_{yy}) + \frac{\partial}{\partial x} g(\|\nabla u\|) u_x + \frac{\partial}{\partial y} g(\|\nabla u\|) u_y \quad (2.8)$$

Le deuxième terme s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} g(\|\nabla u\|) u_x + \frac{\partial}{\partial y} g(\|\nabla u\|) u_y &= g'(\|\nabla u\|) \frac{\partial}{\partial x} \|\nabla u\| u_x + g'(\|\nabla u\|) \frac{\partial}{\partial y} \|\nabla u\| u_y \\
&= \frac{g'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} (u_{xx}u_x + u_{yx}u_y) u_x + \frac{g'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} (u_{xy}u_x + u_{yy}u_y) u_y \\
&= \frac{g'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} (u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_y^2)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Dans le repère $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ la dérivée première directionnelle selon $\vec{\eta}$ s'exprime par :

$$u_{\eta} = \nabla u \cdot \vec{\eta} = \|\nabla u\|$$

La dérivée seconde s'écrit :

$$\begin{aligned}
u_{\eta\eta} = \nabla u_{\eta} \cdot \vec{\eta} &= \frac{1}{\|\nabla u\|} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\|\nabla u\|) u_x + \frac{\partial}{\partial y} (\|\nabla u\|) u_y \right] \\
&= \frac{(u_{xx}u_x + u_{yx}u_y) u_x + (u_{xy}u_x + u_{yy}u_y) u_y}{\|\nabla u\|^2} \\
&= \frac{u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_y^2}{\|\nabla u\|^2}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Le laplacien étant invariant au changement de base, le premier terme de (2.8) peut s'écrire :

$$c\Delta u = g(\|\nabla u\|) (u_{xx} + u_{yy}) = g(\|\nabla u\|) (u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) \tag{2.11}$$

En combinant (2.9), (2.10), (2.11) nous obtenons :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (g(\|\nabla u\|) \nabla u) = g(\|\nabla u\|) u_{\xi\xi} + [g(\|\nabla u\|) + \|\nabla u\| g'(\|\nabla u\|)] u_{\eta\eta}$$

■

Réécrivons (2.7) sous une autre forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c_\xi u_{\xi\xi} + c_\eta u_{\eta\eta} \\ c_\xi = g(\|\nabla u\|) \\ c_\eta = g(\|\nabla u\|) + \|\nabla u\| g'(\|\nabla u\|) = \varphi'(\|\nabla u\|) \end{cases} \quad (2.12)$$

La fonction $\varphi(s) = s.g(s)$ est appelée fonction flux, elle gère la diffusion selon la direction du gradient.

– dans la direction orthogonale au gradient, la diffusion anisotrope induit un lissage modulé par la norme du vecteur gradient

– la diffusion anisotrope peut également rehausser les contours. Pour des valeurs du gradient $\|\nabla u\| > k$ (pour la fonction rationnelle) et $\|\nabla u\| > \frac{k}{\sqrt{2}}$ pour la fonction gaussienne, la fonction flux devient décroissante, sa dérivée est négative conduisant à un rehaussement dans la direction $\vec{\eta}$.

Perona et Malik ont montré ce dernier aspect pour des profils 1D en écrivant l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi'(u_x) u_{xx} \quad (2.13)$$

La variation de la pente par rapport au temps devient [1]

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \varphi''(u_x) u_{xx}^2 + \varphi'(u_x) u_{xxx} \quad (2.14)$$

L'argumentation est fondée sur le fait qu'au point d'inflexion, $u_{xx} = 0$; en supposant que le contour est orienté de telle sorte que $u_x > 0$ ($u_{xxx} \ll 0$) la pente du profil augmente si $\varphi'(u_x) < 0$ et elle diminue pour $\varphi'(u_x) > 0$.

Le rehaussement des contours est un phénomène recherché dans ce modèle. Malheureusement, la présence de ce rehaussement ne permet pas de démontrer - en même temps - l'existence de la solution de l'équation. Le modèle peut conduire à des oscillations non bornées. D'ailleurs, Perona et Malik ne revendiquent pas cette existence de solution. Par contre, ils introduisent un principe de maximum pour garantir le principe de causalité et l'absence d'oscillations pour leur modèle numérique. Pour des fonctions $u(x, y, t)$ deux fois différentiables sur $\Omega \times [0, t)$ qui

respectent [1] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\Delta u - \nabla c \cdot \nabla u = 0$$

avec des conditions aux limites de type Neumann les maxima et les minima appartiennent à l'image originale :

$$\inf_{\Omega} u_0 \leq u \leq \sup_{\Omega} u_0$$

Ce principe peut être ensuite étendu au cas discret : si à une échelle t

$u_{\min|(i,j)} = \min_{(k,l) \in \mathcal{N}(i,j)} (u_{k,l})$, $u_{\max|(i,j)} = \max_{(k,l) \in \mathcal{N}(i,j)} (u_{k,l})$ ($\mathcal{N}(i,j)$ représente le 4 ou le 8 - voisinage du pixel (i,j)) et si le schéma discret est stable, alors :

$$u_{\min|(i,j)}^t \leq u_{(i,j)}^{t+1} \leq u_{\max|(i,j)}^t$$

Malgré le principe de maximum, les principes de causalité et de causalité forte d'une analyse multi-échelle ne sont validés qu'expérimentalement. Les auteurs remarquent notamment que la présence du terme de rehaussement peut introduire de nouveaux maxima et minima.

2.2.2 Choix des paramètres

La diffusion anisotrope nécessite le réglage de deux paramètres libres k et t . Le choix du temps d'arrêt t influence de manière forte les résultats de la diffusion : cependant, dans le cadre d'un traitement multi-échelle, la tendance est de choisir une valeur grande pour t et d'observer l'évolution du processus vers une image constante ; dans le cadre de la restauration d'images, t est choisi plus faible, la souhaitée étant proche de l'image originale. Il n'existe pas de critère universel pour déterminer t de manière optimale.

La barrière de diffusion contrôle la manière avec laquelle les contours interviennent dans le processus de diffusion. Si k est élevé, les résultats s'approchent de ceux d'une diffusion isotrope ; pour des valeurs faibles, les contours correspondant à un gradient de norme supérieure à k seront conservés et même rehaussés. Perona et Malik proposent deux manières de choisir k :

- en se fondant sur une connaissance a priori, k est alors choisi par l'utilisateur.

– en se fondant sur l’estimateur du bruit de canny [5]. k est choisi comme un pourcentage p ($p = 90\%$ par exemple) de l’intégrale de l’histogramme des gradient.

Les $(100 - p)\%$ contours les plus marqués ne seront pas affectés par la diffusion. Pour le cas des images fortement bruitées, ou pour des images où le bruit varie d’une région à l’autre, il est possible de lier k à un estimateur local du bruit.

Deput la publication de l’article originale, plusieurs auteurs se sont intéressés au choix du paramètre k dans le modèle de base Perona-Malik.

Li et Chen [5] sont intéressés en même temps au temps d’arrêt et au choix de k . Ils proposent de faire décroître k au fil des itérations mais sans rendre la barrière de diffusion dépendante de l’image. L’idée est reprise dans [14] : en se fondant sur une analogie avec les phénomènes physiques, les auteurs proposent deux version des coefficients de diffusion dépendants du temps (2.15 et 2.16) :

$$k(t) = \frac{1}{\varepsilon + \alpha_1 t} \quad (2.15)$$

où $\varepsilon \approx 0$. Pour $t = 0$, la diffusion est linéaire ($k \rightarrow \infty$, $g(x, y, 0) \rightarrow 1$). Lorsque l’EDP évolue avec le temps, k devient de plus en plus faible. Pour $t \rightarrow \infty$ la solution converge vers un état stable puisque $k \rightarrow 0$, $g(x, y, 0) \rightarrow 0$. Le paramètre α_1 contrôle la vitesse de décroissance de k : plus α_1 est grand et plus le système évolue rapidement vers l’état stable induisant une moindre élimination du bruit et des contours mieux conservés.

La deuxième approche consiste à modifier la fonction de diffusion (2.5) :

$$g(\|\nabla u\|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\|\nabla u\|}{k}\right)^{\alpha_2 t}} \quad (2.16)$$

où α_2 contrôle la pente de la fonction de la diffusion. Pour $t = 0$ la diffusion est linéaire en tout point ; lorsque t augmente, la diffusion s’effectue pour des gradients inférieures à k et s’annule pour des gradients supérieurs à k . Les images filtrées avec ce coefficient de diffusion sont constantes par morceaux.

même si les résultats montrent que l’image originale tend à évoluer vers une image stable, les auteurs ne donnent pas de critère de choix pour α_1 et α_2 . Le problème de choix du temps

d'arrêt optimal est simplement remplacé par le problème du choix des deux paramètres libres.

2.2.3 Approche variationnelle

Une approche variationnelle du problème de restauration permet d'unifier sous un même formalisme les différentes approches dérivées de celle de Perona et Malik et de rendre plus évident le choix des fonctions de diffusion tout en tenant compte des préoccupations de stabilité et de convergence du processus.

Dans un problème de restauration on suppose généralement que l'image observée u_0 peut s'exprimer selon $u_0 = \mathcal{P}u + b$, où b est un bruit additif et \mathcal{P} un opérateur de convolution. Pour reconstruire l'image u à partir de u_0 il faut trouver u qui minimise le bruit $b = u_0 - \mathcal{P}u$. Cela revient à minimiser une énergie du type :

$$E(u) = \int_{\Omega} f(u, u_0) d\Omega \quad (2.17)$$

Généralement, on considère $f(u, u_0) = \|u_0 - \mathcal{P}u\|^2$ et on minimise alors $E(u)$ par une méthode des moindres carrés $\mathcal{P}^*u_0 = \mathcal{P}^*\mathcal{P}u$. Or, ce problème est un problème inverse mal posé au sens de Hadamard [6]. En effet, $\mathcal{P}^*\mathcal{P}$ n'est pas toujours inversible et le problème inverse est instable ce qui est généralement le cas en traitement d'images. Donc résoudre un problème de restauration d'image revient en fait à résoudre un problème inverse mal posé au sens de Hadamard. Dans ce cas là, il faut généralement faire des hypothèses de régularité sur l'image à reconstruire ; on parle ainsi d'information a priori pour restreindre la taille de l'espace des solutions. La solution est alors choisie suivant différents critères selon la méthode de régularisation. Tikhonov [3] propose le premier d'ajouter le terme de régularisation linéaire $\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\Omega$ à l'énergie (2.17). Malheureusement, le terme de régularisation quadratique proposé par Tikhonov ne permet pas de préserver les contours de l'image alors qu'il élimine le bruit. Pour remédier à ce problème nous présentons ici l'approche variationnelle qui fait partie des méthodes déterministe

Ces dernières années, de nombreux auteurs ont proposé des termes de régularisation non quadratiques permettant d'éviter le lissage des contours. D'une façon générale, ce terme de régularisation peut s'écrire sous la forme $\int_{\Omega} \Phi(\|\mathcal{D}u\|) d\Omega$ où Φ est une fonction paire définie sur \mathbb{R} et croissante sur \mathbb{R}^+ et \mathcal{D} est l'opérateur dérivée au sens des distributions [12]. Si u est de

class C^1 sur Ω , alors $\int_{\Omega} \Phi (\|\mathcal{D}u\|) d\Omega = \int_{\Omega} \Phi (\|\nabla u\|) d\Omega$. Donc, trouver u à partir de u_0 revient à trouver u qui minimise l'énergie :

$$E(u) = \underbrace{\int_{\Omega} f(u, u_0) d\Omega}_{E_1(u)} + \lambda \underbrace{\int_{\Omega} \Phi (\|\mathcal{D}u\|) d\Omega}_{E_2(u)} \quad (2.18)$$

où $E_1(u)$ est un terme d'attache aux données et $E_2(u)$ est le terme de régularisation. Le paramètre λ permet de pondérer le terme d'attache aux données par rapport au terme de diffusion. Toutefois, toutes les fonctions Φ ne permettent pas de préserver les discontinuités. Par exemple, si on choisit $\Phi(u) = u^2$, Φ est quadratique et l'on retrouve le terme de régularisation linéaire de Tikhonov. On notera que cela revient à utiliser la norme L^2 comme mesure. De même, si l'on choisit $\Phi(u) = u$ on trouve l'énergie initialement proposée par Rudin, Osher et Fatemi [4].

Pour simplifier, supposons maintenant que $f(u, u_0) = \|u - u_0\|^2$. Si l'on applique le théorème d'Euler-Lagrange à $E(u)$ on obtient alors :

$$(u - u_0) - \lambda \operatorname{div} \left(\frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} \nabla u \right) = 0 \quad (2.19)$$

Cette équation correspond à l'état stationnaire de l'EDP [6] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -(u - u_0) + \lambda \operatorname{div} (g(\|\nabla u\|) \nabla u) \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right. \quad (2.20)$$

avec $g(\|\nabla u\|) = \frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|}$. L'équation (2.20) correspond en fait à une descente de gradient à pas constant sur l'énergie $\|u - u_0\|^2 + \lambda\Phi(\|\nabla u\|)$. Ici encore, le d'attache aux données permet au processus de lisser tout en restant proche de l'image initiale. Cela permet ainsi de stabiliser le processus et de s'affranchir du choix d'un temps d'arrêt.

Maintenant, on essaie d'interpréter géométriquement l'EDP non linéaire (2.20). Pour cela, on pose $\xi = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$ un vecteur normal à l'isophote (ou contour) et $\eta = \xi^\perp$ un vecteur tangent à l'isophote, peut se réécrire comme suit [9]

$$(u - u_o) - \lambda \left(\underbrace{\Phi''(\|\nabla u\|)}_{c_\xi} u_{\xi\xi} + \underbrace{\frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|}}_{c_\eta} u_{\eta\eta} \right) = 0 \quad (2.21)$$

où $u_{\xi\xi}$ et $u_{\eta\eta}$ sont respectivement la dérivée seconde de u dans la direction ξ et la dérivée seconde de u dans la direction η . Cette équation correspond donc à un lissage suivant une direction perpendiculaire au contour pondéré par le terme c_ξ et à un lissage suivant la direction du contour pondéré par c_η . Dorénavant, de même que Kornprobst [10], nous essaierons de présenter les EDP non linéaire sous cette forme pour comprendre l'action géométrique de ces équations.

Notons que Krissian [11], propose une généralisation de l'équation (2.3) aux dimensions supérieures. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, \xi = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|})$ une base orthonormale de \mathbb{R}^n .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \Phi''(\|\nabla u\|) u_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} \sum_i^{n-1} u_{e_i e_i} \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Le processus peut alors être interprété géométriquement comme une diffusion toujours isotrope dans l'hyperplan orthogonal au gradient.

Ces formulations permettent d'étudier les conditions de convergence et de stabilité de l'EDP parabolique en fonction de la forme de $E_2(u)$ et des conditions initiales et donc finalement de choisir la fonction Φ correspondant au lissage voulu. Si l'on veut que la surface ne comporte pas plusieurs minima locaux et ainsi avoir une surface $E_2(u)$ convexe. Pour cela, il suffit d'avoir les deux coefficients de diffusion positifs [9] :

$$\Phi''(\|\nabla u\|) \geq 0 \quad (2.23)$$

$$\Phi'(\|\nabla u\|) \geq 0 \quad (2.24)$$

Or, on veut :

1. un lissage isotrope dans les zones homogènes c'est-à-dire lorsque $\|\nabla u\|$ est proche de 0 ;

2. un lissage uniquement dans la direction parallèle au contour de manière à conserver le contraste et les contours.

Ces deux conditions se traduisent par :

$$\lim_{\|\nabla u\| \rightarrow 0} \Phi''(\|\nabla u\|) = \lim_{\|\nabla u\| \rightarrow 0} \frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} = \Phi''(0) > 0 \quad (2.25)$$

et

$$\lim_{\|\nabla u\| \rightarrow \infty} \Phi''(\|\nabla u\|) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\|\nabla u\| \rightarrow \infty} \frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} = C > 0 \quad (2.26)$$

Malheureusement, ces deux conditions ne peuvent être respectées simultanément. En effet, si

$$\lim_{\|\nabla u\| \rightarrow \infty} \Phi''(\|\nabla u\|) = 0 \quad \text{alors,} \quad \lim_{\|\nabla u\| \rightarrow \infty} \frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} = 0 \quad (2.27)$$

On propose alors des conditions plus faibles qui consistent à imposer à $\Phi''(\|\nabla u\|)$ de décroître plus rapidement que $\frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|}$ quand $\|\nabla u\| \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\|\nabla u\| \rightarrow 0} \Phi''(\|\nabla u\|) = \lim_{\|\nabla u\| \rightarrow 0} \frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} = \Phi''(0) > 0 \quad (2.28)$$

$$\lim_{\|\nabla u\| \rightarrow \infty} \Phi''(\|\nabla u\|) = \lim_{\|\nabla u\| \rightarrow \infty} \frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{\|\nabla u\| \rightarrow \infty} \frac{\|\nabla u\| \Phi''(\|\nabla u\|)}{\Phi'(\|\nabla u\|)} = 0 \quad (2.29)$$

En générale, la fonction Φ est choisie de manière à être quadratique au voisinage de 0 et linéaire ou sous-linéaire en l'infini [12].

Voyons à titre d'exemple comment s'exprime le processus de Perona et Malik (avec fonction $g(s) = \exp\left(-\frac{s^2}{k^2}\right)$ sous le formalisme de l'équation (2.21) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \underbrace{\exp\left(\frac{-\|\nabla u\|^2}{k^2}\right)}_{\frac{\Phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|}} u_{\eta\eta} + \underbrace{\exp\left(\frac{-\|\nabla u\|^2}{k^2}\right) \left(1 - 2\frac{\|\nabla u\|^2}{k^2}\right)}_{\Phi''(\|\nabla u\|)} u_{\xi\xi} \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right.$$

On voit bien apparaître ici, que lorsque $\|\nabla u\| \geq \frac{k}{\sqrt{2}}$, $\Phi''(\|\nabla u\|)$ est négative et transforme ainsi l'EDP en équation de la chaleur inverse .

En résumé, un filtrage de type Perona et Malik respecte mieux les contours et les jonctions que le filtrage par diffusion isotrope . Cela permet généralement, d'éviter l'utilisation d'algorithmes de fermeture de contours. Par contre, lorsque $\Phi'' < 0$, le processus de diffusion est instable et peu engendrer un effet de type « marches en escalier » sur les contours.

2.2.4 Filtrage par diffusion non linéaire régularisé

Comme on l'a noté précédemment, lorsque Φ'' est négative cela introduit une instabilité dans le processus et l'effet « marches en escalier ». Certains auteurs [6],[13] se sont donc intéressés à la régularisation de l'équation de Perona et Malik. Nous présentons ici quelques approches de régularisation.

Régularisation par un filtre gaussien Notons $u_\sigma(x,t) = (g_\sigma * u)(x,t)$. Dans Catté et al.[8], la fonction de diffusion est calculée non plus sur la norme du gradient mais sur la norme du gradient lissée par une gaussienne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(\|\nabla u_\sigma\|) \nabla u) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right. \quad (2.30)$$

De plus, les auteurs montrent l'existence, l'unicité et la régularité de la solution de l'EDP ainsi transformée. Cette EDP permet donc de rehausser les contours tout en gardant le processus stable. L'effet « marches en escalier » disparaît et l'EDP (2.30) est moins sensible à la discrétisation. Néanmoins, son interprétation géométrique reste difficile..

Régularisation par morphologie mathématique. L'introduction du l'image gaussien

dans l'estimation de la norme du gradient peut engendrer un déclaiage des contours. C'est pourquoi, Segal et al.[13] préfèrent utiliser un filtre non linéaire pour régulariser l'EDP (2.3). Ils choisissent l'opérateur de filtrage ouverture-fermeture car il est non linéaire et ne décale pas les contours. Soit $\mathbf{O}_s(u)$ et $\mathbf{F}_s(u)$ respectivement l'ouverture et la fermeture morphologique de l'image u par un élément structurant s . La fonction de diffusion proposée est alors la suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (g(\|\nabla(\mathbf{F}_s(\mathbf{O}_s(u)))\|) \nabla u) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

L'opérateur ouverture-fermeture identifie efficacement les régions sans enlever les hautes fréquences et sans introduire de déplacement de contours ni de biais dans les niveaux de gris. Cela autorise l'EDP à lisser les objets plus petits que l'élément structurant s tout en maintenant la structure des contours et leur localisation. Ce processus peut être intéressant particulièrement pour les images entachées d'un bruit de type « poivre et sel ».

2.3 Filtres basés sur la notion de courbure

La motivation principale des filtres basés sur le déplacement et de la courbure principale, dits de *mean curvature motion(MCM)*, est la construction d'un opérateur de diffusion non linéaire capable de diffuser "plus" dans la direction parallèle aux objets significatifs et "moins" dans leurs directions perpendiculaires. C'est une autre approche qui va nous permettre d'englober les filtres définis précédemment dans un cadre plus large de filtre anisotropes.

2.3.1 Mouvement par courbure moyenne (MCM)

Si l'on introduit les notations η (la coordonnée suivant la direction parallèle au gradient de u) et ξ (celle suivant sa direction orthogonale) $u = u(\eta, \xi, t)$, l'équation de la chaleur s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}. \quad (2.32)$$

Le premier terme permet donc le lissage suivant la direction des bords ; par contre le

deuxième diffuse suivant leur direction orthogonale. Il n'est donc pas difficile de voir que pour ne conserver que la diffusion le long des contours, l'équation de la chaleur doit être remplacée par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial (\xi)^2} \quad (2.33)$$

Une formulation de cette dernière équation nous donne :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \|\nabla u\| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) \quad (2.34)$$

Le terme $\|\nabla u\| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right)$ est un terme de diffusion dégénéré : il diffuse u dans la direction orthogonale à ∇u (mais pas dans la direction de ∇u). Le but de ce terme est de lisser u de part et d'autre des bords, tout en préservant justement les bords (un bord est défini comme une ligne le long de laquelle le gradient est "grand").

Le front de diffusion est une ligne de niveau définie à l'instant t par :

$$Fr_t = \{(x, y) / u(x, y, t) = Cte\} \quad (2.35)$$

Cette courbe Fr_t peut être paramétrée par :

$$Fr_t = \{M(s, t) / u(M(s, t)) = Cte\} \quad (2.36)$$

La vitesse $\frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$ de déplacement du point M et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial s}$, la direction de la tangente à Fr_t en M sont liées par la relation suivante :

$$\left\langle \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} \right\rangle = 0 \quad (2.37)$$

Une différenciation de (2.36) par rapport à t et s nous permet d'écrire :

$$\left\langle \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}, \vec{\nabla} u \right\rangle + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{\partial \vec{M}}{\partial s}, \vec{\nabla} u \right\rangle = 0 \quad (2.38)$$

(2.37) et (2.38) nous donnent : $\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = \lambda \vec{\nabla} u$. En remplaçant dans (2.38) et on utilisant (2.34)

on obtient :

$$\frac{\vec{\partial M}}{\partial t} = \left[-\frac{\vec{\nabla}u}{\|\nabla u\|} \right] \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) \quad (2.39)$$

$$= \left[-\frac{\vec{\nabla}u}{\|\nabla u\|} \right] \operatorname{courbure}(u) \quad (2.40)$$

où (*courbure*(u)), la courbure en chaque point d'une ligne de niveaux, est donnée par :

$$\operatorname{courbure}(u) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) \quad (2.41)$$

Les fronts de diffusion se déplacent ainsi avec une vitesse proportionnelle à la courbure .

Les courbes C , correspondant aux lignes de niveaux de u , évoluent donc selon l'équation suivante :

$$C_t(., t) = k(., t) . \vec{\eta} \quad (2.42)$$

où $k(x, t)$ est la courbure de C au point x et $\vec{\eta}$ le vecteur normal intérieur à cette courbe.

2.4 Conclusion

Dans l'approche par EDP les images sont considérées à support continu en temps et en espace. Bien que cette formalisation offre un cadre théorique solide, elle est confrontée aux problèmes numériques inhérents à la résolution des EDP. Dans le chapitre suivant, nous présentons une technique d'approximation pour la résolution numérique des EDP présentées dans ce chapitre.

Chapitre 3

Résolutions numériques

La littérature relative aux équations aux dérivées partielles est très abondante tant du point de vue théorique que du point de vue numérique. Les EDP que nous avons présenté ne permettent pas une résolution directe, elles nécessitent d'habitude des techniques d'approximation. Ces techniques constituent elles mêmes un domaine très vaste, nous nous référons à [5] pour un traitement complet. Parmi les techniques d'approximation les approximations par différences finies sont utilisées de manière prépondérante. En réalité, les images étant définies sur des grilles fixes, l'analyse numérique des modèles à travers des méthodes de différences finies, est la mieux adaptée.

Nous allons revoir dans un premier temps le cadre général de ces approches et, ensuite, exposer les principes théoriques des schémas utilisés pour les EDP présentées aux paragraphes précédents, finalement nous présentons quelques résultats numériques pour faire une comparaison entre le filtrage linéaire et le filtrage non linéaire.

3.1 Approximations par différences finies

3.1.1 Notations

Toutes les EDP analysées nécessitent la connaissance d'un domaine $\Omega = [0, a] \times [0, b]$, et des conditions initiales et aux limites.

La discrétisation du domaine est implicite, dans la plupart des situations une image est représentée sur une grille de points. Nous considérons dans ce chapitre des grilles régulières

avec un espacement identique h selon les directions horizontale x et verticale y ; les valeurs de la fonction initiale sont données pour des échantillons (pixels) dans les deux directions. La dimension de l'image (en pixels) est $M \times N$; avec $M = a/h$ et $N = b/h$.

Mathématiquement, la fonction continue $u : \Omega \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ est remplacée par :

$$u(x, y, t) \rightarrow u(ih, jh, t) = u(i, j, t), \quad i = \{0, 1, \dots, N\}, \quad j = \{0, 1, \dots, M\} \quad (3.1)$$

Toutes les équations présentées sont des processus récursifs nécessitant une discrétisation en temps ; nous considérons des temps discrets uniformément distribués, multiples d'un pas de discrétisation en temps, noté δt . La représentation à l'instant t de l'image numérique qui évolue est donnée par :

$$u(i, j, t) \rightarrow u(i, j, n\delta t) = u_{i,j}^n \quad (3.2)$$

En (3.2) nous notons par n le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre l'échelle t .

Le même raisonnement s'applique pour les conditions initiales :

$$u(x, y, 0) \rightarrow u_{i,j}^0 \quad (3.3)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, d'un point de vue pratique, dans le traitement des images par ordinateurs, elles ne sont pas très importantes. Elles ne sont imposées que pour s'affranchir des problèmes liés de bords.

3.1.2 Approximations des dérivées partielles

Les dérivées spatiales et temporelles sont déduites en partant des développements en série de Taylor en des points $(x + k, y + l, t + m)$. Afin de ne pas modifier le caractère local des EDP, les dérivées premières sont remplacées par des approximations d'ordre 2 ou 1. La méthode des différences centrales utilise des approximations symétriques :

$$\frac{\partial}{\partial x} (u(x, y, t)) = D_x^0 [u(x, y, t)] = \frac{u(x + k, y, t) - u(x - k, y, t)}{2|k|} \quad (3.4)$$

et des formules similaires pour y et t .

En considérant $x = ih, y = jh, t = n\delta t$ et de déplacements de type $k = \pm h, l = \pm h, m = \pm \delta t$,
Ces formules s'expriment-pour les dérivées spatiales-sous la forme simplifiée :

$$D_x^0(u_{i,j}^n) = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h}, \quad D_y^0(u_{i,j}^n) = \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h} \quad (3.5)$$

Des approximations d'ordre 1 progressives et régressives peuvent également être utilisées :

$$\begin{aligned} D_x^+(u_{i,j}^n) &= \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{h}, & D_x^-(u_{i,j}^n) &= \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{h} \\ D_y^+(u_{i,j}^n) &= \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{h}, & D_y^-(u_{i,j}^n) &= \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{h} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dans toutes les méthodes la dérivée par rapport au temps est remplacée par une approximation d'ordre 1 progressive :

$$D_t^+(u_{i,j}^n) = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\delta t} \quad (3.7)$$

Certains méthodes utilisent des dérivées selon des axes diagonaux. Si nous notons respectivement par $\vec{d}x$ et $\vec{d}y$ des vecteurs de norme h selon les directions de l'axe horizontal et vertical $\vec{d}u = \vec{d}x + \vec{d}y$, $\vec{d}v = \vec{d}x - \vec{d}y$ avec $|\vec{d}u| = |\vec{d}v| = \sqrt{2}h$:

$$D_u^0(u_{i,j}^n) = \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i-1,j-1}^n}{2\sqrt{2}h}, \quad D_v^0(u_{i,j}^n) = \frac{u_{i+1,j-1}^n - u_{i-1,j+1}^n}{2\sqrt{2}h} \quad (3.8)$$

et :

$$\begin{aligned} D_u^+(u_{i,j}^n) &= \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\sqrt{2}h}, & D_u^-(u_{i,j}^n) &= \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j-1}^n}{2h} \\ D_v^+(u_{i,j}^n) &= \frac{u_{i+1,j-1}^n - u_{i,j}^n}{2h}, & D_v^-(u_{i,j}^n) &= \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j+1}^n}{2h} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les dérivées secondes se déduisent de manière similaire en utilisant des approximations d'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n}{h^2} = D_x^- [D_x^+ (u_{i,j}^n)] \\ \frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n}{h^2} = D_y^- [D_y^+ (u_{i,j}^n)] \\ \frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial x \partial y} = \frac{u_{i+1,j+1}^n + u_{i-1,j-1}^n - u_{i+1,j-1}^n - u_{i-1,j+1}^n}{4h^2} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Des approximations similaires peuvent être déduites pour les directions diagonales $\frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial v^2}$ et $\frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial u \partial v}$.

3.1.3 Approximations des opérateurs de la géométrie différentielle

Les approximations précédentes s'utilisent pour développer des formules numériques pour les opérateurs classiques de la géométrie différentielle.

Des approximations typiques pour le vecteur gradient sont :

$$\nabla u_{i,j}^n = \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial x} \vec{d} x + \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial y} \vec{d} y = \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial u} \vec{d} u + \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial v} \vec{d} v$$

En fonction de l'approximation des dérivées premières les normes des vecteurs gradient se déduisent :

$$|\nabla u_{i,j}^n| = \sqrt{\left(D_x^0(u_{i,j}^n)\right)^2 + \left(D_y^0(u_{i,j}^n)\right)^2} = \sqrt{\left(D_u^0(u_{i,j}^n)\right)^2 + \left(D_v^0(u_{i,j}^n)\right)^2} \quad (3.11)$$

La forme numérique du laplacien la plus utilisée correspond à :

$$\Delta u(i, j, n) = \Delta u_{i,j}^n = \frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial y^2} = D_x^- [D_x^+ (u_{i,j}^n)] + D_y^- [D_y^+ (u_{i,j}^n)] \quad (3.12)$$

La divergence est l'opérateur auquel correspond la plus grande diversité en terme d'approximations. Dans certains cas, comme nous l'avons illustré, cet opérateur peut se réduire à des estimations des dérivées secondes directionnelles. Nous allons maintenant décrire l'approche classique de Perona Malik, l'approximation de cet opérateur est obtenue en partant de l'équation de diffusion 1D pour une certaine échelle t :

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[g \left(\left| \frac{\partial u_i^n}{\partial x} \right| \right) \cdot \frac{\partial u_i^n}{\partial x} \right] \approx \frac{\partial}{\partial x} \left[g \left(\left| \frac{\partial u_i^n}{\partial x} \right| \right) \cdot \frac{u_{i+h/2}^n - u_{i-h/2}^n}{h} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \left[g \left(\left| \frac{\partial u_i^n}{\partial x} \right| \right) \Big|_{i+h/2} \cdot \frac{u_{i+h/2+h/2}^n - u_{i-h/2+h/2}^n}{h} - g \left(\left| \frac{\partial u_i^n}{\partial x} \right| \right) \Big|_{i-h/2} \cdot \frac{u_{i+h/2-h/2}^n - u_{i-h/2-h/2}^n}{h} \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[g \left(\left| \frac{\partial u_i^n}{\partial x} \right| \right) \Big|_{i+h/2} \cdot D_x^+ (u_i^n) - g \left(\left| \frac{\partial u_i^n}{\partial x} \right| \right) \Big|_{i-h/2} \cdot \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right] \quad (3.13)
\end{aligned}$$

La valeur de la fonction de diffusion au milieu de l'intervalle séparant deux pixels est remplacée par une approximation progressive ou régressive de la première dérivée :

$$\begin{aligned}
g \left(\left| \frac{\partial u_i^n}{\partial x} \right| \right) \Big|_{i+h/2} &\approx g \left(\left| \frac{\partial u_i^n}{\partial x} \right| \Big|_{i+h/2} \right) = g [|D_x^+ (u_i^n)|] \\
g \left(\left| \frac{\partial u_i^n}{\partial x} \right| \right) \Big|_{i-h/2} &\approx g \left(\left| \frac{\partial u_i^n}{\partial x} \right| \Big|_{i-h/2} \right) = g [|D_x^- (u_i^n)|] \quad (3.14)
\end{aligned}$$

(3.13) s'écrit ensuite :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i^n}{\partial t} &= \frac{1}{h} [g [|D_x^+ (u_i^n)|] D_x^+ (u_i^n) - g [|D_x^- (u_i^n)|] D_x^- (u_i^n)] \\
&= D_x^- (g [|D_x^+ (u_i^n)|] D_x^+ (u_i^n)) = \Phi_{droite} - \Phi_{gauche} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Par Φ_{droite} , Φ_{gauche} nous avons noté les fonctions flux aux pixels voisins du pixel courant (i, j) .

La diffusion 2D est une simple extension de (3.13) en ajoutant une autre dimension et en considérons la fonction de diffusion comme une matrice diagonale :

$$g(\nabla u_{i,j}^n) = \begin{pmatrix} g \left(\left| \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial x} \right| \right) & 0 \\ 0 & g \left(\left| \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial y} \right| \right) \end{pmatrix} :$$

L'extension est immédiate :

$$\frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[g \left(\left| \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial x} \right| \right) \cdot \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[g \left(\left| \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial y} \right| \right) \cdot \frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial y} \right]$$

$$= D_x^- (g [|D_x^+ (u_{i,j}^n)|] D_x^+ (u_{i,j}^n)) + D_y^- (g [|D_y^+ (u_{i,j}^n)|] D_y^+ (u_{i,j}^n)) \quad (3.16)$$

$$= \Phi_{est} - \Phi_{ouest} + \Phi_{sud} - \Phi_{nord}$$

3.1.4 Méthodes de résolution

Dans ce paragraphe nous allons revoir les méthodes utilisées pour le calcul de la solution d'une EDP, à une échelle t donnée. La plupart des méthodes de résolution utilisent une discrétisation progressive en temps $\frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial t} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\delta t}$ où δt est le pas de discrétisation en temps. Les méthodes sont des processus itératifs : la solution à l'instant $n\delta t$ est utilisée pour déterminer la solution à l'instant $(n+1)\delta t$. Les méthodes diffèrent par le type d'approximations des dérivées spatiales aux $n\delta t$ et $(n+1)\delta t$ qui interviennent dans l'équation.

Nous allons illustrer les diverses méthodes sur l'équation classique de Perona et Maillk en $1D$. En utilisant une discrétisation progressive en temps en (2.3) l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[g \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (3.17)$$

Si les dérivées spatiales sont calculées à l'échelle $n\delta t$ le schéma s'appelle explicite en temps (ou Euler) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[g \left(\left| \frac{\partial u^n}{\partial x} \right| \right) \cdot \frac{\partial u^n}{\partial x} \right] \quad (3.18)$$

Dans ce cas la solution à l'échelle $(n+1)\delta t$ est complètement déterminée par les valeurs calculées à l'instant $n\delta t$:

$$u^{n+1} = u^n + \delta t \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[g \left(\left| \frac{\partial u^n}{\partial x} \right| \right) \cdot \frac{\partial u^n}{\partial x} \right] \quad (3.19)$$

Ce type de schéma est utilisé de manière prépondérante pour la résolution des EDP. Son principal avantage est la simplicité, même si, en général, il nécessite un grand nombre d'itérations pour converger.

Le schéma est dit semi-implicite si la solution u^{n+1} est calculée en résolvant un système

d'équations avec des coefficients qui dépendent seulement de la solution à l'instant $n\delta t$ [15].
 Pour l'exemple (3.17) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[g \left(\left| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right| \right) \cdot \frac{\partial u^n}{\partial x} \right] \quad (3.20)$$

En discrétisant les dérivées spatiales (3.20) peut être ramené à une forme similaire à (3.16) :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} = \frac{1}{h} [g [|D_x^+(u_i^n)|] D_x^+(u_i^{n+1}) - g [|D_x^-(u_i^n)|] D_x^-(u_i^{n+1})]$$

En considérant $h = 1$ et en regroupant les termes :

$$u_i^{n+1} (1 + \delta t (g (|D_x^+(u_i^n)|) + g (|D_x^-(u_i^n)|))) - \delta t g (|D_x^+(u_i^n)|) u_{i+1}^{n+1} - \delta t g (|D_x^-(u_i^n)|) u_{i-1}^{n+1} = u_i^n \quad (3.21)$$

Pour une longueur fixe de la suite numérique (N) ; en introduisant les notations

$$u^k = [u_0^k \ u_1^k \ \dots \ u_N^k]^T$$

$$A [u^n]_{N \times N} = [a_{i,k} (u^n)] = \begin{cases} -g (|D_x^-(u_i^n)|) & \text{pour } k = i - 1 \\ -g (|D_x^+(u_i^n)|) & \text{pour } k = i + 1 \\ g (|D_x^-(u_i^n)|) + g (|D_x^+(u_i^n)|) & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{en reste} \end{cases} .$$

(3.21) se réduit au système linéaire :

$$u^{n+1} (I_N + \delta t A [u^n]) = u^n \quad (3.22)$$

La résolution du système est généralement réalisée en utilisant des méthodes de relaxation telles que les méthodes Jacobi ou Gauss-Seidel. l'avantage de ces méthodes est relatif : même si elles sont stables pour n'importe quel pas δt ; en partant d'une solution initiale, plusieurs itérations sont nécessaires pour converger vers la solution du système et, de plus, le nombre de calculs nécessaires pour chaque itération est plus grand que celui d'une méthode explicite.

Une comparaison intéressante entre les schémas explicite et semi-implicite est réalisée par Weickert [15]. En comparant les erreurs introduites par les approximations, les résultats montrent qu'en terme d'erreur, le schéma explicite sous des contraintes de stabilité est meilleur.

3.1.5 Consistance, convergence et stabilité des schémas numériques

Dans ce paragraphe nous allons rappeler quelques définitions relatives aux propriétés quantitatives des schémas d'approximations des EDP et revoir quelques critères de stabilité. Les EDP analysées sont des problèmes à conditions initiales qui en partant d'une image initiale donnent une image filtrée à une certaine échelle qui correspond à la solution de l'EDP à la même échelle.

Nous présentons quelques notions d'analyse numérique dans le cas $1D$ (par souci de clarté).

Considérons le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = F & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ v(0, x) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.23)$$

où \mathcal{L} est un opérateur linéaire.

On veut résoudre (3.23) numériquement. On commence par discrétiser l'espace spatial en plaçant une grille sur cette espace. par souci de simplicité, on utilisera une grille uniforme de pas h . On discrétise de la même manière le temps, avec un pas δt .

Résoudre numériquement le problème signifie trouver une fonction discrète u définie aux points $(n\delta t, ih)$ (on note u_i^n la valeur de u en ces points). La fonction u est obtenue comme la solution d'une équation discrète (qui est une approximation de (3.23)) :

$$\begin{cases} L_i^n u_i^n = G_i^n & i = -\infty, \dots, +\infty \\ u_i^0 = f(ih) \end{cases} \quad (3.24)$$

Il est important de voir que l'équation discrétisée remplace l'équation originale par une nouvelle équation, et qu'une solution exacte du problème discrétisée donne une solution approchée de l'EDP originale, puisque nous avons introduit une erreur due à la discrétisation.

Une première notion importante est celle de convergence. On note $u^n = (\dots, u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, \dots)$.

Définition 15 *Le schéma (3.24) approchant l'EDP(3.23) est un schéma convergent au temps t si lorsque $(n + 1)\delta t \rightarrow t$, on a :*

$$|u^{n+1} - v^{n+1}|_* \rightarrow 0 \quad (3.25)$$

quand $h \rightarrow 0$ et $\delta t \rightarrow 0$, et où $|\cdot|_*$ est une norme à préciser

Remarque 16 :

Un schéma numérique à deux niveaux est un schéma dans lequel seuls deux niveaux de temps différents sont présents dans l'équation (typiquement $H(u^{n+1}, u^n) = 0$)

Ecrivons le schéma numérique à deux niveaux (3.24) sous la forme :

$$u^{n+1} = Qu^n + \delta t G^n \quad (3.26)$$

Définition 17 Le schéma (3.24) est consistant avec l'EDP (3.23) pour la norme $|\cdot|_*$ si la solution v de l'EDP vérifie :

$$v^{n+1} = Qv^n + \delta t G^n + \delta \tau^n \quad (3.27)$$

avec $\tau^n \rightarrow 0$ lorsque $h, \delta t \rightarrow 0$.

construit des schémas numériques consistant en utilisant les formules de Taylors.

Définition 18 Le schéma à deux niveaux

$$\begin{cases} u^{n+1} = Qu^n + \delta t G^n & , n \\ u^0 & \text{donnée} \end{cases} \quad (3.28)$$

est dit stable pour la norme $|\cdot|_*$ s'il existe des constantes strictement positives h_0 et δt_0 , ainsi que des constantes positives K et β telles que :

$$|u^{n+1}|_* \leq Ke^{\beta t} |u^0|_* \quad (3.29)$$

pour $0 \leq t = (n+1)\delta t$, $0 < h < h_0$, et $0 < \delta t \leq \delta t_0$.

Théorème 19 [Lax] [2]. *Un schéma numérique aux différences finies à deux niveaux consistant (pour un problème linéaire, à valeurs initiales, bien posé) est convergent si et seulement si il est stable.*

Dans le reste de ce paragraphe nous allons nous intéresser au problème de stabilité de l'approximation d'une EDP. Dans la plupart des situations du traitement des images assisté par ordinateur, les dérivées partielles spatiales sont remplacées par des différences finies sur une grille régulière de points avec un écart spatial h fixe. Dans ce contexte l'espace qui apparaît essentiel est la stabilité de l'approximation numérique.

Les contraintes imposées sur la stabilité de l'approximation numérique sont étroitement liées aux pas de discrétisation en temps δt et celui de discrétisation spatiale h . Pour h fixé, les contraintes s'imposent seulement sur δt .

La nature non linéaire des équations ne permet pas d'utiliser de méthodes classiques telles que l'analyse de Von Neumann [5]. En fonction du type de l'EDP les contraintes de stabilité s'impose de manière différente. Nous allons illustrer la manière de déterminer ces contraintes seulement pour des schémas explicites. Les schémas implicites sont connus pour leur stabilité indépendante du δt ou h .

Prenons le cas 1D d'une équation de diffusion anisotrope. Pour tout δt positif :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} \rightarrow u^{n+1} \approx u^n + \delta t \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.30)$$

En développant le terme droit de (3.30) pour chaque point discret $x = ih$ et en notant par $\mathcal{N}(i)$ l'ensemble de ses voisins :

$$\begin{aligned} u^{n+1} &\approx u_i^n + \frac{\delta t}{h} \left(g \left[|D_x^+(u_i^n)| \right] D_x^+(u_i^n) - g \left[|D_x^-(u_i^n)| \right] D_x^-(u_i^n) \right) \\ &= u_i^n + \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g(|u_j^n - u_i^n|) (u_j^n - u_i^n) \\ &= u_i^n \left[1 - \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g(|u_j^n - u_i^n|) \right] + \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g(|u_j^n - u_i^n|) u_j^n \end{aligned} \quad (3.31)$$

La stabilité de ce schéma est assurée si une quantité positive telle que $\sum_i |u_i^n|$ où $\sum_i (u_i^n)^2$ est bornée pour tout n . L'avantage de cette méthode énergétique [16] est qu'elle peut s'appliquer pour tout problème linéaire ou non-linéaire.

Récrivons (3.31) en notant par $g_{i,j}^n = g(|u_j^n - u_i^n|)$; en tenant compte de l'inégalité triangulaire :

$$|u^{n+1}| \leq \left| u_i^n \left[1 - \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n \right] \right| + \left| \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n u_j^n \right| \leq |u_i^n| \left| 1 - \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n \right| + \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n |u_j^n|$$

En sommant sur l'ensemble des points i :

$$\sum_i |u_i^{n+1}| \leq \sum_i |u_i^n| \left| 1 - \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n \right| + \frac{\delta t}{h^2} \sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n |u_j^n| \quad (3.32)$$

Le deuxième terme de (3.32) peut se développer ensuite :

$$\sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n |u_j^n| = \sum_i (g_{i,i+1}^n |u_{i+1}^n| + g_{i,i-1}^n |u_{i-1}^n|) \quad (3.33)$$

Les fonctions de diffusion sont des fonctions paires :

$$g_{i,i+1}^n = g(|u_{i+1}^n - u_i^n|) = g(|u_i^n - u_{i+1}^n|) = g_{i+1,i}^n \quad \text{et} \quad g_{i,i-1}^n = g_{i-1,i}^n.$$

En supposant des conditions aux limites périodiques :

$$\sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n |u_j^n| = \sum_i (g_{i+1,i}^n |u_{i+1}^n| + g_{i-1,i}^n |u_{i-1}^n|) = \sum_i |u_i^n| \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{j,i}^n = \sum_i |u_i^n| \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n \quad (3.34)$$

Nous pouvons donc réécrire (3.32) sous la forme :

$$\sum_i |u_i^{n+1}| \leq \sum_i |u_i^n| \left| 1 - \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n \right| + \frac{\delta t}{h^2} \sum_i |u_i^n| \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n = \sum_i |u_i^n| \left(\left| 1 - \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n \right| + \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n \right)$$

Afin que la condition de stabilité $\sum_i |u_i^{n+1}| \leq \sum_i |u_i^n|$ soit remplie, les coefficients de pondération du terme droit doivent être inférieurs à 1 :

$$\left| 1 - \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n \right| + \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n \leq 1 \quad (3.35)$$

qui se réduit à :

$$\delta t \leq \frac{h^2}{\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n} \quad (3.36)$$

(3.36) doit être vérifiée pour n'importe quelles valeurs de l'intensité en niveaux de gris. Le cas le plus défavorable s'obtient pour $g_{i,j}^n$ de valeurs maximales égales à 1. Dans ce cas nous retrouvons une limite supérieure pour le pas de discrétisation en temps δt et le nombre de voisins du pixel courant :

$$\delta t \leq \frac{h^2}{2} \quad (3.37)$$

La généralisation pour le cas $2D$ est immédiate. Si N représente le nombre de pixels dans le voisinage 3×3 considéré nous retrouvons la limite $\delta t \leq h^2/N$;

Notons que (3.37) est une condition suffisante pour que la stabilité du schéma numérique (3.30) soit assurée.

De plus, sous ces contraintes de stabilité un schéma de type (3.30) impose un principe discret de maximum. La positivité des coefficients de pondération permet d'écrire :

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u_i^n \left[1 - \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n \right] + \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n u_j^n \\ &\leq \max_{k=i,j \in \mathcal{N}(i)} (u_k^n) \left(1 - \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n + \frac{\delta t}{h^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} g_{i,j}^n \right) \\ &\leq \max_{k=i,j \in \mathcal{N}(i)} (u_k^n) \end{aligned} \quad (3.38)$$

La relation reste valable pour les minima et elle peut se généraliser pour le cas $2D$. Finalement sous les contraintes de stabilité et pour une image initiale avec les intensités en niveaux de gris bornées $m \leq \max_{(i,j) \in \Omega} u_{i,j}^0 \leq M$:



Fig 3.1 – (a) : image originale, (b) : image bruitée « poivre et sel, $v=0.01$ »

$$m \leq \min_{(i,j) \in \Omega} u_{i,j}^n \leq u_{i,j}^{n+1} \leq \max_{(i,j) \in \Omega} u_{i,j}^n \leq M \quad (3.39)$$

Ce type de raisonnement peut s'appliquer pour n'importe quel type d'EDP ; pour des équations hyperboliques des conditions Courant, Fredericks et Levy [2] s'appliquent.

3.2 Résultats numériques

Nous utiliserons la figure 3.1 pour tester nos algorithmes.

3.2.1 L'équation de diffusion de la chaleur

Schéma numérique

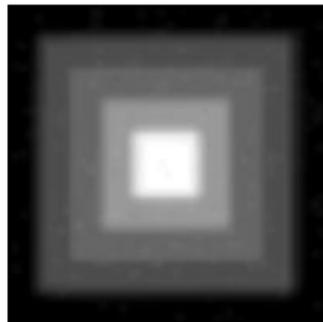
Notation : On note δt le pas de discrétisation en temps, et $h = 1$ le pas de discrétisation en espace (on prend même pas selon les deux axes). $u_{i,j}^n$ désigne la valeur de $u(n\delta t, hi, hj)$.

On va utiliser un schéma d'Euler explicite à l'ordre 1 en temps : on approxime donc le terme $\frac{\partial u}{\partial t}(n\delta t, i, j)$ par $\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\delta t}$. Pour obtenir une discrétisation du Laplacien, on discrétise les différentes dérivées par différences finie décentrées à gauche et à droite. On obtient l'expression suivante :

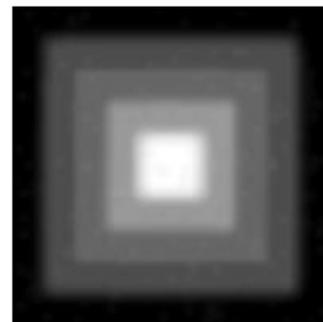
$$\Delta u_{i,j}^n = u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n$$

Limitation du modèle

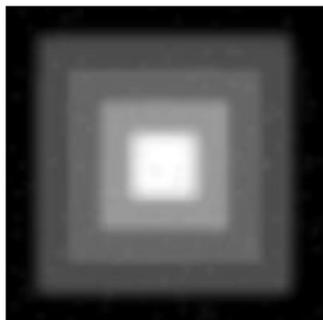
Le filtrage linéaire a été largement utilisée ces dernières années pour ses propriétés d'invariance aux translations, aux rotations et aux changements d'échelle et pour ses bonnes performances en termes de réduction du bruit dans les images. Elle a aussi montré son utilité pour l'extraction de caractéristiques, telles que les contours, les vallées, les crêtes et les coins, ou l'étude structurelle de l'image. Néanmoins, le caractère isotrope de l'équation de la chaleur engendre un lissage identique dans toutes les directions. Ainsi, les contours sont lissés au même titre que le bruit. A titre d'exemple, sur la figure 3.2, on peut voir l'évolution de l'image au fil des échelles. On observe bien ici une simplification de l'image de la perte des contrastes de l'image quand l'échelle augmente.



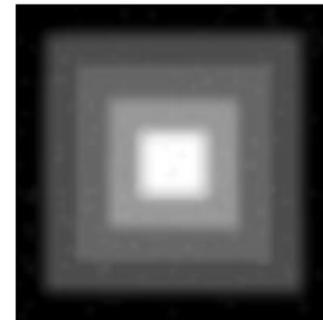
(a) : mse=25.03, PSNR=34.14



(b) : mse=27.88, PSNR=33.677



(c) : mse=27.92, PSNR=33.671



(d) : mse=28.55, PSNR=33.57

Fig 3.2 – Image filtrée par (2.1) après (a) : 20 itérations, (b) : 50 itérations, (c) : 100 itérations et (d) : 200 itérations.

3.2.2 Modèle de Perona et Malik

Schéma numérique

Sur le même principe que l'EDP de la chaleur, le schéma de discrétisation explicite du modèle de Perona et Malik en tous points (i, j) et à l'instant $n + 1$ est le suivant :

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} = & u_{i,j}^n + \delta t [g(|u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n|) \cdot (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) - g(|u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n|) \cdot (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) \\ & + g(|u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n|) \cdot (u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n) - g(|u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n|) \cdot (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n)] \end{aligned}$$

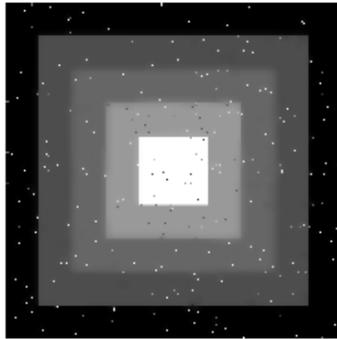
Les résultats que nous analyserons obtenus en considérant la fonction de convergence g définie par :

$$g \mapsto \frac{1}{1 + \frac{x^2}{k^2}}$$

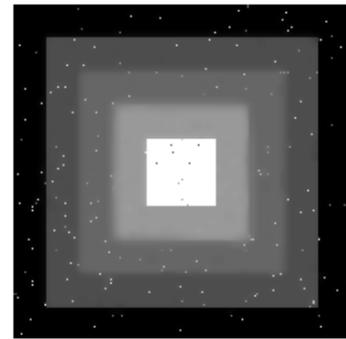
où k est un paramètre de conservation des détails.

Limitation du modèle

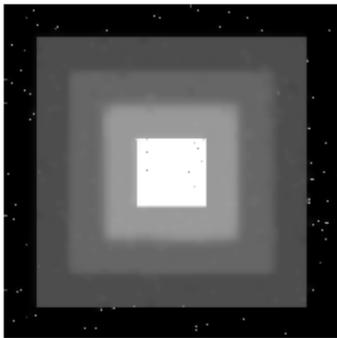
Malgré les résultats expérimentaux plutôt convaincants (Fig. 3.3 et 3.4), plusieurs auteurs ont soulevé les inconvénients de l'approche originelle de Perona-Malik. Un premier défaut peut se comprendre de manière intuitive : si le niveau du bruit dans l'image originale est élevé, il est rehaussé par le processus. Pour s'affranchir de ce problème Perona et Malik proposent dans leur article de remplacer les conditions initiales avec une version lissée de l'image originale.



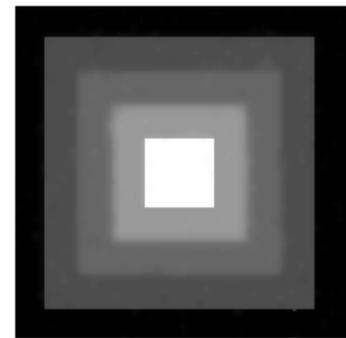
(a) :mse=4.76, PSNR=41,35



(b) :mse=6.24, PSNR=40.17

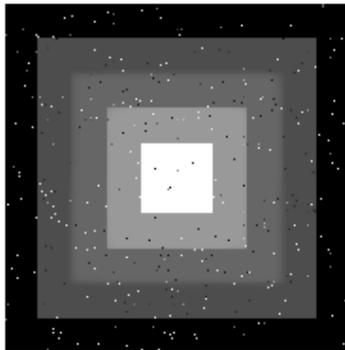


(c) :mse=7.25, PSNR=39.52

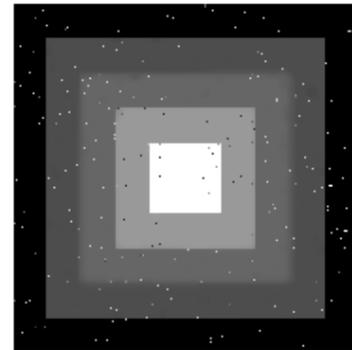


(d) :mse=7.54, PSNR=39.35

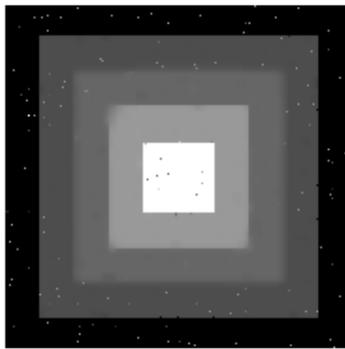
Fig 3.3 – Image filtrée par (2.3) pour $k = 15$, après (a) : 20 itérations, (b) : 50 itérations, (c) : 100 itérations et (d) : 200 itérations.



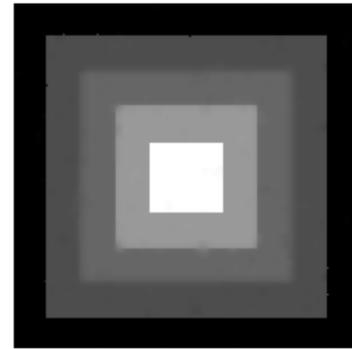
(a) :mse=3.11, PSNR=43.20



(b) :mse=2.72, PSNR= 43.78



(c) :mse=3.38, PSNR=42.84



(d) :mse=3.29, PSNR=42.95

Fig 3.4 – Image filtrée par (2.3) pour $k = 13$, après (a) : 20 itérations, (b) : 50 itérations, (c) : 100 itérations et (d) : 200 itérations.



(a)



(b)

Fig 3.5 – (a) : image originale, (b) : image bruitée « poivre et sel, $v=0.01$ »

3.2.3 Comparaison entre l'EDP de Perona-Malik et filtre linéaire

Nous utiliserons la figure 3.5 pour comparer entre l'EDP de Perona et l'EDP de la chaleur.



(a) :mse=37.41,PSNR=32.40



(b) :mse=22.48, PSNR=34.62



(c) :mse=43.51,PSNR=31.74



(d) :mse=28.53, PSNR=33.57

Fig. 3.6 – Filtrage sous l'équation de la chaleur (colonne gauche) et Perona-Malik avec $k=12.5$ (colonne droite), après 15 itérations pour (a) et (b) et 200 itérations pour (c) et (d).

Conclusion

Le domaine du traitement d'images par des méthodes aux équations aux dérivées partielles contient une large palette d'opérateurs, chacune des approches présente des caractéristiques qui la rendent opérationnelle pour certaine classe des images.

Après traitement des différentes équations mise en oeuvre lors de ce mémoire il apparaît que la plus grande difficulté dans l'implémentation de méthodes de lissage par EDP correctes sont : La formulation d'un problème continu dans le domaine discret, la conservation efficace des contours tout en éliminant le bruit et l'amélioration des algorithmes déjà existant. Il semblerait que la diffusion par courbure moyenne présente les meilleurs résultats pour les images naturelles et que les recherches devraient s'orienter soit, dans l'amélioration de la complexité de l'algorithme de Perona-Malik et de la non considération du bruit comme une haute variation du gradient, soit dans l'optimisation du paramètre temporel pour la diffusion par courbure moyenne . Les champs d'application de ce domaine de recherche étant multiples (inpainting, lissage de texture, simplification de maillage) nous pouvons espérer que de nouveaux résultats seront prochainement publiés.

Bibliographie

- [1] Maciej Wielgus - " Perona-Malik equation and its numerical properties".Université de Warszawski, 2010.
- [2] Alphonse Magnus -"Equation aux dérivées partielles 2". Université Catholique de Louvain, pp. 123-163. Mat 2410 EDP 2, 2009-2010.
- [3] Humbert Florent -" Techniques de débruitage d'images ". Janvier 2008.
- [4] Jean-François Aujol -" Traitement d'images par approches variationnelles et équations aux dérivées partielles ". Avril 2005
- [5] Romulus Mircea Terebes -" Diffusion directionnelle. Application à la restauration et à l'amélioration d'images. ". Thèse présentée en 2004.
- [6] Benoit Tremblais -"De la résolution numérique des EDP à l'extraction de caractéristiques linéiques dans les images : application à la détection multi-échelles d'un arbre vasculaire ". Thèse présentée en 2002.
- [7] Eva Dejnozka - " Architecture Dediee au traitement d'image basé sur les équations aux dérivées partielles ".Thèse présentée en Mars 2004.
- [8] J. Weickert - " Applications of nonlinear diffusion in image processing and computer vision ". Acta Math. univ. Comenianae. Vol. LXX, pp. 33-55. January 2001
- [9] R. Deriche and O.Faugeras. Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur. Technical Report 2697, Inria, novembre 1995.
- [10] Pierre Kornprobst. Contribution à la restauration d'image et à l'analyse de séquences : approche variationnelles et solutions de viscosité. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, Novembre 1998.

- [11] Karl Krissian. Traitement multi-échelle : applications à l'imagerie médicale et à la détection tridimensionnelle de vaisseaux. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, 2000.
- [12] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud G. Aubert, and M. Berlaud. Deterministic edge- preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2) :298-311, February 1997
- [13] C.A Segall and S.T. Acton. Morphological anisotropic diffusion . *IEEE international Conference on image processing*, October 1997.
- [14] G. Gilboa, Y. Zeevi, N. Sochen - " Image enhancement, segmentation and denoising by time dependent nonlinear diffusion processes ", In : *Proceeding of the International Conference on Image Processing - ICIP'01, Thessalonik, Greece, vol.3, pp. 134-137, 2001.*
- [15] J. Weickert - " Efficient and reliable Schemes for nonlinear diffusion filtering ", *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.7, no.3, pp.398-410, 1998.
- [16] D.R.Durran - *Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics*, Springer, Berlin, 1999.
- [17] L.M.J. Florack. *image structure*. Kluwer academic publishers, Dodrecht the Netherlands, 1997.