

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE EL-HADJ LAKHDAR, BATNA

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de **DOCTORAT D'ETAT**

OPTION : Mathématiques Appliquées

par

Mohamed Lamine LEGHMIZI

THEME

**ANALYSE LIMITE EN TERME DE MESURES DE
YOUNG DE CERTAINES CLASSES DE
FONCTIONNELLES INTEGRALES**

Soutenue le 3 Juillet 2006 devant le jury composé de :

Président :	S . REBIAI	Professeur	Université de Batna
Rapporteur :	K. MESSAOUDI	Maître de conférence	Université de Batna
Examineurs :	M. DENCHE	Professeur	Université de Constantine
	S . GUEDJIBA	Maître de conférence	Université de Batna
	Z . MOHDEB	Professeur	Université de Constantine
	M. YAROU	Maître de conférence	Université de Jijel

Remerciements.

Mes sincères remerciements au Dr. Khelifa MESSAOUDI, Maître de conférence à l'Université de Batna, qui m'a dirigé durant la réalisation de cette thèse. Sa disponibilité, sa confiance et ses conseils judicieux m'ont été très utiles pour arriver au terme de ce travail.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude au Professeur Gérard MICHAILLE pour ses enseignements, sa précieuse collaboration et son soutien durant mon stage de recherche à l'Université MontpellierII.

Je remercie également le Professeur S. REBIAI de me faire l'honneur de présider le Jury et d'apprécier mon travail. Mes remerciements s'adressent aussi à Messieurs : Prof. M. DENCHE, Dr. S. GUEDJIBA, Prof. Z. MOHDEB et Dr. M. YAROU qui m'ont fait honneur en acceptant d'examiner mon travail avec intérêt.

Je ne saurais oublier mes amis Dr. Omar ANZA HAFSA et Dr. Jean-philippe MANDALLENA pour leur soutien et leurs discussions qui m'ont beaucoup apporté dans mon travail de recherche.

Merci enfin à mes parents et à mes beaux parents pour m'avoir soutenu sans relâche, et en particulier ma femme et mes deux filles Sarah et Rodina pour leur patience et leur abnégation durant toutes mes absences.

Table des matières

Introduction générale	5
1 Notions de base et résultats préliminaires	8
1.1 Méthode directe et Relaxation	8
1.2 Γ -convergence	10
1.3 Rappels de théorie de la mesure	12
1.4 Mesures de Young	14
1.4.1 Compacité	17
1.4.2 Effets d'oscillation	19
1.4.3 Mesures de Young générées par des gradients	20
1.4.4 Effets de concentration	22
1.5 Notion de mesures de "varifold"	22
1.5.1 Mesures de "varifold" générées par des gradients	23
1.5.2 $W^{1,p}$ -mesures de Young-varifold	23
1.6 Relaxation en terme de mesures de Young	25
1.7 Relaxation en terme de mesures de Young-varifold	30
2 Formulation d'un modèle non linéaire de membrane en terme de mesures de Young-varifold	35
2.1 Introduction	36
2.2 Position du problème	36
2.3 Formulation en terme de mesures de Young	38
2.3.1 Formulation de l'énergie associée à la structure élastique mince en terme de mesures de Young	40
2.3.2 Γ_γ -convergence dans la formulation en terme de mesures de Young	41
2.3.3 Résultat principal dans la formulation en terme de mesures de Young	43
2.4 Formulation en terme de mesures de Young-varifold	48

TABLE DES MATIÈRES

2.4.1	Effets d'oscillation et de concentration : Formulation de l'énergie associée à la structure mince en terme de mesures Young-varifold	50
2.4.2	Formulation en terme de mesures de Young-varifold de l'énergie associée à la structure élastique mince	51
2.4.3	$\Gamma_{\mathcal{Y}}$ -convergence dans la formulation en terme de mesures de Young-varifold	52
2.4.4	Résultat principal dans la formulation en terme de mesures de Young-varifold	54
3	Homogénéisation d'une suite de fonctionnelles intégrales dépendante du temps.	59
3.1	Introduction	60
3.2	Position du problème	61
3.3	Résultat principal	62
	Bibliographie	70

Introduction générale

Le but des travaux de cette thèse est l'analyse limite de certaines familles de fonctionnelles intégrales en terme de mesures de Young et de mesures de "varifold". Cette étude a pour origine la relaxation de la fonctionnelle intégrale

$$F(u) := \int_{\Omega} f(\nabla u(x)) dx, \quad (1)$$

dont le problème de minimisation associé est

$$\inf \{F(u) : u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)\}, \quad (2)$$

Ω étant un ouvert borné de \mathbb{R}^N .

En élasticité, Ω représente la configuration de référence occupée par un matériau élastique et F l'énergie élastique associée au matériau. Si F n'est pas semi-continue inférieurement, en général le problème (2) n'admet pas de solutions. On relaxe donc la fonctionnelle (1) relativement à la topologie faible de $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Autrement dit, on associe à F la fonctionnelle semi-continue inférieure

$$\overline{F}(u) := \int_{\Omega} Qf(\nabla u(x)) dx,$$

où Qf est la quasiconvexifié de f , dans le sens où les solutions du problème de minimisation associé à \overline{F} sont des points d'adhérence des suites minimisantes du problème (2) (cf.[13]).

Très récemment les mesures de Young et particulièrement les mesures de Young générées par des gradients ont été exploitées dans plusieurs domaines. Ces mesures furent introduites par L.C. Young comme solution généralisée de problèmes de surfaces minimales (cf. [41]) et L. Tartar est le premier à avoir utilisé les mesures de Young dans l'étude d'équations aux dérivées partielles (cf. [35, 36]). On trouve des applications pour les microstructures observées dans les transformations de phase solide/solide dans [8].

En s'inspirant des travaux de [20, 21, 32, 34], nous développons une autre

approche de relaxation de (1) en terme de mesures de Young. L'idée est de prolonger l'espace des fonctions admissibles $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ à l'espace de mesures de Young, et on relaxe donc la fonctionnelle (1) en terme de ces mesures. Cette approche nous permet de décrire la limite faible du gradient de la suite minimisante du problème de départ. De plus, on ne quasiconvexifie pas l'intégrande dans le problème relaxé.

Dans une deuxième approche, en utilisant les mesures de "varifold" introduite récemment dans [19], on relaxe (1) en terme de mesures de Young-varifold. On retrouve ainsi une nouvelle relaxée de (1) dépendante de la fonction de récession f^∞ de l'intégrande f . Ceci, nous permet de prendre en compte les effets d'oscillation et de concentration du gradient de la suite minimisante. L'idée de base est de réécrire la fonction F en terme de mesures de type $\delta_{\frac{\nabla u}{|\nabla u|}}(x) \otimes |\nabla u|^p dx$ et d'utiliser le fait que $f^\infty(\nabla u) = f^\infty(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}(x))|\nabla u|^p dx$, puisque f^∞ est p-homogène.

Si la fonctionnelle (1) dépend d'un paramètre $\varepsilon > 0$, destiné à tendre vers zéro, on emploie le terme analyse limite plutôt que relaxation. Dans ce cas, on s'intéressera au comportement limite de la famille de fonctionnelles associée en utilisant la Γ -convergence.

Cette thèse est composée de trois chapitres. Dans le premier chapitre, on commence par rappeler quelques outils mathématiques tels que : la relaxation des fonctionnelles relatives aux problèmes de calcul des variations, la définition et la propriété variationnelle de la Γ -convergence, les mesures de Young et les mesures de Young-varifold. Dans la dernière partie de ce chapitre, on établira deux résultats préliminaires de relaxation d'une fonctionnelle de type (1) en terme de mesures de Young, et en terme de mesures de Young-varifold.

Dans le second chapitre, en s'inspirant des deux approches de relaxation du chapitre précédent, on étudie le comportement limite d'une famille de fonctionnelles associée à une structure mince de type

$$F_\varepsilon(u) := \int_{\Omega_\varepsilon} f(\nabla u) dx,$$

et où $\Omega_\varepsilon = \omega \times]0, \varepsilon[$ est un ouvert de \mathbb{R}^3 , au sens d'une convergence variationnelle en terme de mesures de Young et de Young-varifold. On introduit la $\Gamma_{\mathcal{Y}}$ -convergence relativement à la convergence étroite des mesures de Young et la $\Gamma_{\mathcal{Y}\mathcal{Y}}$ -convergence relativement à la convergence faible des mesures de "varifold" ; on obtient ainsi deux nouvelles formulations de l'énergie associées à une membrane dans l'espace des mesures de $W_0^{1,p}$ -Young et dans l'espace des

mesures $W_0^{1,p}$ -Young-varifold comme limite des énergies tridimensionnelles associées à la structure mince. Les deux formulations sont différentes de la formulation classique obtenue dans [23].

Le chapitre trois est consacré à l'analyse limite de certaines fonctionnelles intégrales non périodiques et dépendantes du temps de ty

$$F_\varepsilon(u) := \int_0^T \int_\Omega f_\varepsilon(x, \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}) dt dx, \quad (3)$$

où $u \in W^{1,p}(]0, T[; L^p(\Omega))$ et $f_\varepsilon(x, \cdot)$ appartient à une classe de fonctions convexes et satisfaisant des conditions de croissance et de coercitivité. On établit alors la Γ -convergence de (3), relativement à la topologie faible de $W^{1,p}(]0, T[; L^p(\Omega))$, où la Γ -limite est caractérisée en utilisant les techniques de mesures de Young.

Ce travail a fait l'objet d'une publication dans une revue internationale, en collaboration avec G. Michaille (Professeur à l'Université de MontpellierII) et C. Licht (Directeur de recherche au CNRS, Laboratoire de Mécanique et de Génie Civil), lors de mon séjour à l'Université MontpellierII.

Chapitre 1

Notions de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, on commencera par présenter quelques outils de base sur la relaxation en calcul des variations, et nous rappelons très brièvement la définition et la propriété fondamentale de Γ -convergence, qui est une convergence variationnelle introduite par E. De Giorgi en 1975 et élaborée successivement par de nombreux auteurs. Puis, après un rappel sur les mesures de Young et de "varifold", on terminera ce chapitre en établissant deux résultats préliminaires de relaxation de fonctionnelles intégrales en terme de mesures de Young et de mesures de Young-varifold.

1.1 Méthode directe et Relaxation

Dans ce paragraphe, on considère X un espace de Banach (où sa norme est notée $\| \cdot \|$) et $\{F_n, F : X \rightarrow]-\infty, +\infty] : n \in \mathbb{N}\}$ une famille de fonctions.

Définition 1.1.1 *On dit que F est semi-continue inférieurement¹ (en abrégé s.c.i.) au point $u \in X$ si, et seulement si, pour toute suite (u_n) convergeant vers u dans X*

$$F(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(u_n),$$

autrement dit

$$F(u) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) : u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right\}.$$

F est dite s.c.i. sur X , si elle est s.c.i. en tout point de X .

¹Si X est munit de sa topologie faible, on parle de s.c.i. séquentielle.

1.1. MÉTHODE DIRECTE ET RELAXATION

Définition 1.1.2 F est coercitive sur X si, pour tout $t > 0$ il existe un compact K_t dans X tel que $\{u \in X : F(u) \leq t\} \subset K_t$.

Si X est réflexif muni de sa topologie faible (ou si X est le dual d'un espace de Banach séparable muni de sa topologie faible-étoile), on dit que

(a) F est coercitive sur X si $\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} F(u) = +\infty$.

(b) F_n est equi-coercitive sur X si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} F_n(u) = +\infty$.

La méthode directe pour prouver l'existence de solutions en calcul des variations est basée sur le théorème de Weierstrass suivant :

Théorème 1.1.1 (Théorème de Weierstrass, cf. [11, 13, 14])

Si F est s.c.i et coercitive alors F admet un point minimum dans X , c'est à dire, qu'il existe $u_0 \in X$ tel que pour tout $u \in X$

$$F(u_0) \leq F(u).$$

En effet, en pratique on remarque qu'il faut choisir une topologie appropriée pour garantir à la fois la coercitivité et la s.c.i. afin d'appliquer le théorème de Weierstrass.

Définition 1.1.3 (relaxée et relaxation)

(a) On dit que $\overline{F} : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est la relaxée ou la régularisée s.c.i. de F si, \overline{F} est la plus grande fonction s.c.i. minorant F . On peut décrire \overline{F} par

$$\overline{F}(u) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) : u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right\}.$$

(b) La relaxation d'une fonctionnelle F est le calcul de sa relaxée \overline{F} .

La caractérisation et les propriétés de la relaxée \overline{F} sont données par les deux propositions suivantes (cf. [11, 13, 14])

Proposition 1.1.1 Soit $F : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction. Alors \overline{F} est la relaxée de F dans X si, et seulement si, les deux assertions suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $u \in X$ et pour toute suite (u_n) convergeant vers u dans X ,

$$\overline{F}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(u_n),$$

(ii) pour tout $u \in X$, il existe une suite (u_n) convergeant vers u dans X , telle que

$$\bar{F}(u) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} F(u_n).$$

Proposition 1.1.2 Si F est coercitive, alors sa relaxée \bar{F} vérifie les propriétés suivantes :

- (i) \bar{F} est coercitive et s.c.i. ,
- (ii) \bar{F} admet un point minimum,
- (iii) $\inf_{u \in X} F(u) = \min_{u \in X} \bar{F}(u)$,
- (iv) Si (u_n) est une suite minimisante de F , c'est à dire

$$F(u_n) \leq \inf_{u \in X} F(u) + \frac{1}{n},$$

alors toute valeur d'adhérence \bar{u} de (u_n) est un point minimum de \bar{F} , et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) = \inf_{u \in X} F(u) = \bar{F}(\bar{u}) = \min_{u \in X} \bar{F}(u).$$

1.2 Γ -convergence

La notion de Γ -convergence a été introduite par E. De Giorgi et T. Franzoni en 1975 dans [15], et depuis elle s'est développée en liens avec les problèmes de calcul des variations et en particulier l'analyse limite de fonctionnelles intégrales. On en trouve une étude plus générale et approfondie de cette notion dans les ouvrages de H. Attouch [6] et G. Dal Maso [14]. On présente ici la définition et la propriété variationnelle de la Γ -convergence.

On considère X un espace de Banach et $\{F_n, F_\infty : X \rightarrow]-\infty, +\infty], n \in \mathbb{N}\}$ une famille de fonctions.

Définition 1.2.1 On dit que la suite (F_n) Γ -converge vers F_∞ en $u \in X$ si, et seulement si, les deux assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) Pour toute suite (u_n) convergeant vers u dans X ,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(u_n) \geq F_\infty(u),$$

- (ii) il existe une suite (u_n) convergeant vers u dans X , telle que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(u_n) \leq F_\infty(u).$$

1.2. Γ -CONVERGENCE

Si cette propriété est satisfaite pour tout $u \in X$, on dit que (F_n) Γ -converge vers F_∞ et on écrit $F_\infty = \Gamma(X)\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$.

Si on a une famille de fonctionnelles $\{\mathcal{F}_\varepsilon\}$, où ε est un paramètre positif destiné à tendre vers 0, alors

$$\mathcal{F} = \Gamma(X)\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon$$

si, et seulement si, pour toute suite $(\varepsilon_n)_n$ convergeant vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\mathcal{F} = \Gamma(X)\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_{\varepsilon_n}.$$

L'intérêt pratique de cette notion réside dans la proposition suivante :

Proposition 1.2.1 (*Propriété variationnelle*)

Soient $F_\infty = \Gamma(X)\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$ et (u_n) une suite vérifiant

$$F_n(u_n) \leq \inf_{u \in X} F_n(u) + \frac{1}{n}.$$

Si (u_n) est relativement compacte dans X , alors toute valeur d'adhérence \bar{u} de (u_n) est un point minimum de F et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{u \in X} F_n(u) = F_\infty(\bar{u}) = \min_{u \in X} F_\infty(u).$$

Remarque 1.2.1

1. Si $F_\infty = \Gamma(X)\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$, alors F_∞ est s.c.i. sur X .
2. Si $F_n = F$, c'est à dire que la suite (F_n) est indépendante de n , alors

$$\bar{F} = \Gamma(X)\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$$

où \bar{F} est la relaxée de F .

3. Si $F_\infty = \Gamma(X)\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$ et $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue dans X , alors

$$\Gamma(X)\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} (F_n + L) = F_\infty + L.$$

4. Puisque dans les résultats qui suivent (cf. chap 2 et chap. 3), X est muni de sa topologie faible, il faut noter que si X est réflexif muni de sa topologie faible (ou si X est le dual d'un espace de Banach séparable muni de sa topologie faible-étoile) et tel que la suite (F_n) est équi-coercitive, alors la définition de la Γ -convergence de (F_n) vers F relativement à la topologie faible (ou faible-étoile) est caractérisée par (i) et (ii) de la définition 1.2.1 (cf. [14]).

1.3 Rappels de théorie de la mesure

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $\mathcal{L}_{|\Omega}$ est la mesure de Lebesgue restreinte à Ω et $\mathcal{B}(\Omega)$ la tribu borélienne de Ω . Notons par $\mathcal{M}^+(\Omega)$ l'ensemble des mesures positives finies sur Ω . On désigne par $\mathcal{C}_c(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur Ω et $\mathcal{C}_0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues nulles à l'infini (nulles sur le bord $\partial\Omega$ si Ω est borné). On notera par $L^p(\Omega, \mu; \mathbb{R}^m)$ l'espace des fonctions p -ième sommable ($p \geq 1$) sur Ω dans \mathbb{R}^m relativement à la mesure μ .

Définition 1.3.1 *On dit que la suite $(\mu_n) \subset \mathcal{M}^+(\Omega)$ converge faiblement vers une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, et on écrit $\mu_n \rightharpoonup \mu$, si pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \phi(x) d\mu_n = \int_{\Omega} \phi(x) d\mu.$$

On a le théorème de compacité des mesures bornées suivant :

Théorème 1.3.1 *Toute suite (μ_n) bornée dans $\mathcal{M}^+(\Omega)$, c'est à dire, $\sup_n \mu_n(\Omega) < +\infty$, possède une sous-suite faiblement convergente.*

Théorème 1.3.2 *(Théorème d'Alexandroff)*

Soit $\{\mu_n, \mu : n \in \mathbb{N}\}$ une famille de $\mathcal{M}^+(\Omega)$ telle que (μ_n) converge faiblement vers μ . Alors pour tout ouvert U et tout compact K de Ω ,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(U) \geq \mu(U) \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K).$$

De plus, on en déduit que pour tout borélien B relativement compact dans Ω tel que $\mu(\partial B) = 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(B) = \mu(B).$$

Etant donné (X, \mathfrak{B}, μ) un espace mesuré (où μ est une mesure positive finie), (Y, \mathfrak{T}) un espace mesurable et $H : E \rightarrow F$ une application $(\mathfrak{B}, \mathfrak{T})$ -mesurable.

Définition 1.3.2 *L'image de μ par f est la mesure ν sur (Y, \mathfrak{T}) , dite mesure image, définie pour tout $B \in \mathfrak{T}$ par*

$$\nu(B) := \mu \circ H^{-1}(B) = \mu(H^{-1}(B)),$$

où H^{-1} est une application de \mathfrak{T} dans \mathfrak{B} .

1.3. RAPPELS DE THÉORIE DE LA MESURE

Remarque 1.3.1 Si $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ est ν -intégrable, on a

$$\int_F \varphi d\nu = \int_E \varphi \circ H d\mu.$$

Soit μ une mesure vectorielle sur $\mathcal{B}(\Omega)$ ($\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^m)$). On définit pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ la mesure scalaire positive, notée $|\mu|$, par

$$|\mu|(B) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} |\mu(B_i)| : B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right\},$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des partitions (B_i) de B .

Définition 1.3.3 La mesure $|\mu|$ est appelée la variation totale de μ , et l'application $\mu \mapsto |\mu|(\Omega)$ est une norme sur $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Avant de rappeler le théorème de Radon-Nikodym, donnons quelques définitions.

Définition 1.3.4 Soient $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ et $\nu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. On dit que ν est absolument continue par rapport à μ , et on écrit $\nu \ll \mu$, si $\nu(B) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ tel que $\mu(B) = 0$.

On dit que ν est singulière par rapport à μ , s'il existe $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ tel que pour tout $B \in \mathcal{B}(\Omega)$, on a

$$\mu(A) = 0 \text{ et } \nu(B) = 0,$$

avec $A \cap B = \emptyset$ (on dit alors que ν est concentrée sur A).

Théorème 1.3.3 (Décomposition de Radon-Nikodym)

Soient $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ et $\nu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Alors, il existe une fonction $g \in L^1(\Omega, \mu; \mathbb{R}^m)$ et une mesure ν^s , singulière par rapport à μ , tels que

$$\nu = g\mu + \nu^s,$$

où la mesure $g\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ est définie par

$$g\mu(B) := \int_B g d\mu,$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\Omega)$. g est appelée densité de la mesure de ν par rapport à μ .

Remarque 1.3.2 Pour $u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$, on définit la mesure $u\mathcal{L} \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ par

$$u\mathcal{L}(B) := \int_B u(x) dx,$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\Omega)$. On a $u\mathcal{L} \ll |u|\mathcal{L}$ et de plus $|u\mathcal{L}| = |u|\mathcal{L}$.

Puisque $u\mathcal{L} \ll |u|\mathcal{L}$, en vertu du théorème de Radon-Nikodym il existe une fonction $h \in L^1(\Omega, |u|\mathcal{L}; \mathbb{R}^m)$ tel que $u\mathcal{L} = h|u|\mathcal{L}$ et $|h(x)| = 1$. De plus on a $h(x) = \frac{u}{|u|}(x)$ pour $|u|\mathcal{L}$ -p.p. tout $x \in \Omega$.

1.4 Mesures de Young

Dans ce paragraphe, sont rassemblés la plupart des résultats préliminaires concernant l'espace des mesures de Young et qui seront utilisés ultérieurement à plusieurs reprises. On trouvera un bon nombre de référence dans [32, 39, 40]. Dans tout ce qui suit, Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $\mathcal{L}_{|\Omega}$ est la mesure de Lebesgue restreinte à Ω , $\mathcal{B}(\Omega)$ la tribu Borélienne de Ω , $\mathbb{E} = \mathbb{R}^{m \times N}$ identifié isomorphiquement à l'ensemble des matrices réelles $m \times N$ muni de sa norme $|\cdot|$ et $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ la σ -algèbre sur \mathbb{E} . On notera par $\mathcal{M}^+(\Omega \times \mathbb{E})$ l'ensemble de mesures positives finies sur $\Omega \times \mathbb{E}$ et \mathcal{P}_Ω la projection sur Ω , c'est à dire $\mathcal{P}_\Omega : \Omega \times \mathbb{E} \rightarrow \Omega$.

Définition 1.4.1 On dit que $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega \times \mathbb{E})$ est une mesure de Young sur $\Omega \times \mathbb{E}$ si $\mathcal{L}_{|\Omega} = \mu \circ \mathcal{P}_\Omega^{-1}$, et on obtient pour tout borélien B de $\mathcal{B}(\Omega)$

$$\mathcal{L}_{|\Omega}(B) = \mu(B \times \mathbb{E}).$$

On notera par $\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$ l'ensemble des mesures de Young sur $\Omega \times \mathbb{E}$.

On considère $\mathcal{C}th^b(\Omega; \mathbb{E})$ l'ensemble des intégrandes de Caratheodory² bornées, c'est à dire pour tout $\psi \in \mathcal{C}th^b(\Omega; \mathbb{E})$ on a :

- (i) Pour tout $x \in \Omega$: $\psi(x, \cdot)$ est bornée et continue sur \mathbb{E} ,
- (ii) $x \mapsto \|\psi(x, \cdot)\|_\infty$ est $\mathcal{L}_{|\Omega}$ -intégrable.

²Une intégrande de Carathéodory est une fonction $\mathcal{B}(\Omega) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{E})$ -mesurable en (x, λ) et continue en λ .

On munit $\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$ de la topologie étroite (le terme en anglais correspondant est "narrow topology"), c'est la topologie qui rend les applications $\mu \mapsto \int_{\Omega \times \mathbb{E}} \psi d\mu$ continue pour tout ψ dans $\mathcal{C}th^b(\Omega; \mathbb{E})$. On est donc conduit à la définition suivante :

Définition 1.4.2 *Etant donné $\{\mu_n; \mu : n \in \mathbb{N}\}$ une famille de $\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$. On dit que μ_n converge étroitement vers μ , et on écrit $\mu_n \xrightarrow{e} \mu$, si pour tout $\psi \in \mathcal{C}th^b(\Omega; \mathbb{E})$,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \times \mathbb{E}} \psi(x, \lambda) d\mu_n(x, \lambda) = \int_{\Omega \times \mathbb{E}} \psi(x, \lambda) d\mu(x, \lambda).$$

Remarque 1.4.1

1. Dans la définition de la topologie étroite sur $\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$ on peut tester avec les fonctions $\psi = 1_B \phi$ pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ (où 1_B est la fonction caractéristique de B) et $\phi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{E})$, l'espace des fonctions continues bornées sur \mathbb{E} , (cf [39]).
2. L'espace de mesures de Young $\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$ est étroitement fermé dans $\mathcal{M}^+(\Omega \times \mathbb{E})$. En effet, si $\mu_n \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$ converge étroitement vers une mesure μ , il suffit de prendre $\psi = 1_B 1_{\mathbb{E}}$ pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\Omega)$.

On rappelle ici le théorème de désintégration d'une mesure de Young, qui peut être vu comme une généralisation du théorème de Fubini.

Théorème 1.4.1 *(Désintégration, cf. [18, 7]) Si $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$, alors pour p.p. $x \in \Omega$ il existe une mesure de probabilité μ_x sur \mathbb{E} , telle que pour toute fonction f dans $\mathcal{C}_0(\Omega \times \mathbb{R}^m)$ on a*

(i) $x \mapsto \int_{\mathbb{E}} f(x, \lambda) d\mu_x(\lambda)$ est $\mathcal{L}_{|\Omega}$ -mesurable.

(ii) $\int_{\Omega \times \mathbb{E}} f(x, \lambda) d\mu(x, \lambda) = \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{E}} f(x, \lambda) d\mu_x(\lambda) \right) dx.$

On écrit alors $\mu = \mu_x \otimes dx^3$.

³Afin d'alléger les notations, on notera par dx la mesure de Lebesgue restreinte à tout ouvert borné de \mathbb{R}^n .

Remarque 1.4.2

1. Le théorème reste valable si on remplace l'espace \mathbb{E} par un espace séparable métrisable et localement compact (cf. [39] th. A1).
2. Si au lieu de la mesure de Young μ , on considère ν une mesure positive finie sur \mathbb{E} tel que sa projection sur Ω est une mesure σ (c'est à dire $\sigma(B) = \nu(B \times \mathbb{E})$ pour tout borélien B de $\mathcal{B}(\Omega)$), alors ν peut s'écrire sous la forme $\nu = \nu_x \otimes \sigma$ avec $\{\nu_x\}_x$ une famille de probabilités sur \mathbb{E} (cf. [39], p. 182).

Soient $u : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ une fonction mesurable et G l'application graphe de u , c'est à dire

$$\begin{aligned} G : \Omega &\longrightarrow \Omega \times \mathbb{E} \\ x &\longmapsto (x, u(x)). \end{aligned}$$

Alors la mesure image $\mu := \mathcal{L}_{|\Omega} \circ G^{-1}$ est une mesure de Young, et en vertu de la remarque 1.3.1, on en déduit que pour tout ψ μ -intégrable

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \mathbb{E}} \psi(x, \lambda) d\mu(x, \lambda) &= \int_{\Omega} \psi(x, u(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{E}} \psi(x, \lambda) d\delta_{u(x)}(\lambda) \right) dx. \end{aligned}$$

où $\delta_{u(x)}$ est la mesure de Dirac au point $u(x)$. Par conséquent, d'après le théorème 1.4.1, on a $\mu = \delta_{u(x)} \otimes dx$.

Définition 1.4.3 La mesure μ est appelée *mesure⁴ de Young associée à la fonction u .*

Le lien entre la convergence en mesure est la convergence étroite des mesures de Young associées à des fonctions est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.4.1 (cf. [40]) Soit $\{u_n, u : \Omega \rightarrow \mathbb{E}, n \in \mathbb{N}\}$ une famille de fonctions mesurables. Alors (u_n) converge en mesure vers u si, et seulement si la suite de mesures de Young associée à (u_n) converge étroitement vers la mesure de Young associée à u , autrement dit

$$u_n \xrightarrow{m} u \iff \mu_n = \delta_{u_n(x)} \otimes dx \xrightarrow{e} \mu = \delta_{u(x)} \otimes dx,$$

où $u_n \xrightarrow{m} u$, si pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\lim_n \mathcal{L}\{x \in \Omega : |u_n(x) - u(x)| > \varepsilon\} = 0$.

⁴C'est une mesure portée par le graphe de u .

Si la suite de mesures de Young associée à une suite de fonctions mesurables $\mu_n = \delta_{u_n(x)} \otimes dx$ converge étroitement vers une mesure de Young μ , en général la mesure μ n'est pas associée à une fonction mesurable.

Exemple 1.4.1 Soit $\Omega =]0, 1[$ et $u(x) = \sin(2\pi x)$. On prolonge u par périodicité sur \mathbb{R} et on pose $u_n(x) = u(nx)$. Si $\mu_n = \delta_{u_n(x)} \otimes dx$, alors en utilisant un résultat de [25] (cf. p. 40, th. 2) on obtient que pour tout ϕ continue bornée sur \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \times \mathbb{R}} \phi(x) d\mu_n(x, \lambda) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \phi(u_n(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{]0, 1[} \phi(u(y)) dy dx. \end{aligned}$$

D'autre part, par un changement de variable

$$\begin{aligned} \int_{]0, 1[} \phi(u(y)) dy &= \int_{]0, 1[} \phi(\sin(2\pi y)) dy \\ &= \int_{]0, 1/4[} \phi(\sin(2\pi y)) dy + \int_{]1/4, 3/4[} \phi(\sin(2\pi y)) dy \\ &\quad + \int_{]3/4, 1[} \phi(\sin(2\pi y)) dy \\ &= \int_{]-1, 1[} \phi(x) \frac{dx}{\pi \sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

On en déduit alors que $\mu_n \xrightarrow{e} \mu$ dans $\mathcal{Y}([0, 1[;]-1, 1])$ et tel que la désintégrée de μ est $\mu_x = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} dx_{]-1, 1[}$ qui n'est pas un Dirac.

1.4.1 Compacité

On présente ici la notion de tension pour les mesures de Young, afin de donner la version du théorème du Prokhorov paramétrique ⁵.

Définition 1.4.4 Une suite de mesures de Young (μ_n) est tendue, si pour tout $\eta > 0$, il existe un compact K_η de \mathbb{E} tel que $\sup_n \mu_n(\Omega \times (\mathbb{E} \setminus K_\eta)) < \eta$.

⁵Dans la version classique du théorème de Prokhorov sans paramètre, la définition de la tension diffère en considérant le K_η dans la définition 1.4.4 un compact dans $\Omega \times \mathbb{E}$.

1.4. MESURES DE YOUNG

Dans le cas où (μ_n) est associée à une suite de fonctions mesurables $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$, il est assez naturel de poser la définition suivante :

Définition 1.4.5 *La suite (μ_n) est tendue si pour tout $\eta > 0$, il existe un compact K_η de \mathbb{E} tel que $\sup_n \mathcal{L}\{x \in \Omega : u_n(x) \in (\mathbb{E} \setminus K_\eta)\} < \eta$.*

Théorème 1.4.2 *(Version paramétrique du théorème de Prokhorov, cf. [39]) Soit (μ_n) une suite de mesures de Young tendue. Alors, il existe une suite extraite $(\mu_{n_k})_k$ convergeant étroitement dans $\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$.*

Une conséquence immédiate du théorème de Prokhorov est le corollaire suivant, qui sera utilisé ultérieurement à plusieurs reprises.

Corollaire 1.4.1 *Si (u_n) est une suite bornée dans $L^1(\Omega; \mathbb{E})$, alors la suite $(\mu_n := \delta_{u_n(x)} \otimes dx)$ associée à (u_n) est étroitement relativement compacte.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer l'inégalité

$$\mathcal{L}(\{x \in \Omega : |u_n(x)| > R\}) \leq \frac{1}{R} \int_{\Omega} |u_n(x)| dx, \quad \text{où } R > 0.$$

Remarque 1.4.3

1. *Le théorème 1.4.2 et le corollaire 1.4.1 reste valable si au lieu de l'espace \mathbb{E} , on prend S un espace séparable métrisable et localement compact (cf. [40]).*
2. *En utilisant l'inégalité de Hölder, on en déduit facilement que le théorème reste valable si (u_n) est bornée dans $L^p(\Omega; \mathbb{E})$ avec $p > 1$.*

On présente ici le théorème fondamental des mesures de Young qui nous permet de passer à la limite en prenant comme fonctions test des fonctions de Carathéodory. Pour cela nous rappelons au préalable la définition d'uniforme intégrabilité pour une suite de fonctions mesurables $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.4.6 *La suite (f_n) est dite uniformément intégrable (en abrégé U.I) si*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\sup_n \int_{\{|f_n| > R\}} |f_n| dx \right) = 0.$$

Soient S un espace localement compact métrisable séparable et $u_n : \Omega \rightarrow S$ une suite de fonctions mesurables. Si la suite de mesures de Young associée à (u_n) converge étroitement vers μ , on a

Théorème 1.4.3 (Théorème fondamental des mesures de Young, cf. [39, 40])

- (i) Si $\psi : \Omega \times S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable en (x, λ) et s.c.i. en λ (ψ est dite intégrande normale) tel que la suite des parties négatives⁶ $(\psi^-(\cdot, u_n(\cdot)))_n$ est U.I dans $L^1(\Omega; \mathbb{R}^+)$, alors

$$\int_{\Omega \times \mathbb{E}} \psi(x, \lambda) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi(x, u_n(x)) dx.$$

- (ii) Si $\psi : \Omega \times S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une intégrande de Carathéodory telle que $(\psi(\cdot, u_n(\cdot)))_n$ est U.I, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi(x, u_n(x)) dx = \int_{\Omega \times \mathbb{E}} \psi(x, \lambda) d\mu.$$

1.4.2 Effets d'oscillation

Soit (u_n) une suite dans $L^p(\Omega)$ qui converge faiblement vers u ($u_n \rightharpoonup u$). Alors d'après la remarque 1.4.3 du corollaire 1.4.1 la suite de mesures de Young $\mu_n = \delta_{u_n} \otimes dx$ associée à (u_n) converge étroitement (à une sous-suite près) vers u ($\mu_n \xrightarrow{e} \mu$).

On se pose la question suivante : Qu'elle est le lien entre μ et u ? La réponse est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.4.2 Si (u_n) une suite qui converge faiblement vers u dans $L^p(\Omega)$, et (μ_n) la mesure de Young associée à (u_n) . Alors, pour une sous-suite extraite, que l'on ne réindexera pas, on a

$$\mu_n \xrightarrow{e} \mu \text{ et } u(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu_x(\lambda), \quad x \in \Omega \text{ p.p.}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le corollaire 1.4.1 et prendre $\psi(x, \lambda) = \varphi(x)\lambda$ avec $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$. Ainsi en vertu du théorème 1.4.3 et théorème 1.4.1, on obtient que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \times \mathbb{R}} \varphi(x)\lambda d\mu_n(x, \lambda) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(x)u_n(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu_x(\lambda) \right) dx. \end{aligned}$$

⁶La partie négative de ψ est définie par $\psi^-(x, \lambda) = \max(0, -\psi(x, \lambda))$ pour tout $(x, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{E}$.

D'autre part

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(x) u_n(x) dx = \int_{\Omega} \varphi(x) u(x) dx.$$

Par identification on trouve le résultat. La proposition est ainsi établie.

En général une des causes qui fait que la convergence faible n'implique pas la convergence forte, c'est la présence d'éventuelles fluctuations de la suite de fonctions (u_n) . Les mesures de Young donnent plus d'informations sur ce comportement, qu'on appellera effets d'oscillation.

1.4.3 Mesures de Young générées par des gradients

Dans cette partie, on va s'intéresser aux mesures de Young obtenues comme limite de suite de mesures de Young associées à des gradients, dites mesures de Young générées par des gradients (cf. [32, 33, 34]). Les propriétés essentielles de ce type de mesures sont données par le théorème ci-dessous. Notons par $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ l'espace de Sobolev usuel avec $p \in]1, +\infty[$ et, par abus de langage, on définit $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ comme l'ensemble des fonctions de $W^{1,p}$ qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$. $C_c^\infty(\Omega)$ désignera l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur Ω .

Définition 1.4.7 *On dira que $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$ est une $W^{1,p}$ -mesure de Young s'il existe une suite (u_n) bornée dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ telle que*

$$\mu_n = \delta_{\nabla u_n(x)} \otimes dx \xrightarrow{e} \mu,$$

autrement dit, μ est générée par la suite des gradients (∇u_n) .

On rappelle ici un lemme technique qui sera utile par la suite. Pour la preuve voir [7, 19, 32].

Lemme 1.4.1 *(Lemme de décomposition) Soit (μ_n) une $W^{1,p}$ -mesure de Young générée par les gradients d'une suite (u_n) convergeant faiblement vers u dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Alors il existe une suite (v_n) dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ satisfaisant*

- (i) $v_n - u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$,
- (ii) $(|\nabla v_n|^p)$ est uniformément intégrable,
- (iii) $v_n - u_n \xrightarrow{m} 0$ et $\nabla v_n - \nabla u_n \xrightarrow{m} 0$.

Comme conséquence de **(iii)** et de la proposition 1.4.1, la suite (v_n) génère la même mesure de Young que (u_n) .

Rappelons également la notion de quasiconvexité introduite dans [30].

Définition 1.4.8 *La fonction continue $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite quasiconvexe si*

$$f(\lambda) \leq \frac{1}{|A|} \int_A f(\lambda + \nabla\varphi(x)) \, dx$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{E}$, et tout $A \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné et tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Si $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ est quelconque, on peut définir son enveloppe quasiconvexe $Qf : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$Qf = \sup\{h \leq f : h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est quasiconvexe}\},$$

autrement dit, c'est la plus grande fonction quasiconvexe minorant f .

Nous allons maintenant énoncer le théorème de caractérisation pour les mesures de Young générées par des gradients établie dans [20, 22]

Théorème 1.4.4 *$\mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$ est une $W^{1,p}$ -mesure de Young si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont vérifiées*

(i) *il existe $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ tel que*

$$\nabla u(x) = \int_{\mathbb{E}} \lambda \, d\mu_x(\lambda), \quad x \in \Omega \text{ p.p.},$$

(ii) *pour toute ϕ quasiconvexe, vérifiant $0 \leq \phi(\lambda) \leq \beta(1 + |\lambda|^p)$ pour un $\beta > 0$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{E}$, on a ⁷*

$$\phi(\nabla u(x)) \leq \int_{\mathbb{E}} \phi(\lambda) \, d\mu_x(\lambda), \quad x \in \Omega \text{ p.p.},$$

(iii) $\int_{\Omega \times \mathbb{E}} |\lambda|^p \, d\mu(x, \lambda) < +\infty$.

⁷C'est l'inégalité de Jensen.

1.4.4 Effets de concentration

On a vu que les mesures de Young apportent plus d'informations sur les oscillations d'une suite (u_n) qui converge faiblement vers u dans $L^p(\Omega)$ (cf. proposition 1.4.2). D'autre part, si on sait que la suite (u_n) converge en mesure vers u , les oscillations de (u_n) peuvent être exclues et on ne peut toujours pas déduire la convergence forte dans $L^p(\Omega)$, et dans ce cas les mesures de Young n'apportent aucune information sur ce comportement, puisque à une sous-suite près on a $\mu_n := \delta_{u_n(x)} \otimes dx \xrightarrow{e} \delta_{u(x)} \otimes dx$. Ce fait est appelé effets de concentration, et afin d'illustrer ce comportement, prenons l'exemple suivant :

Exemple 1.4.2 Soit la suite de fonctions $(u_n(x))$ définie sur $\Omega =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ par

$$u_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de voir que $u_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\Omega)$ et $u_n \xrightarrow{m} 0$. Donc, $\mu_n := \delta_{u_n} \otimes dx \xrightarrow{e} \delta_0 \otimes dx$ alors que la masse totale $\theta_n := |u_n|^2 dx = 1$ et donc θ est concentrée sur 0.

Exemple 1.4.3 (cf. Exemple 1.4.1) Si on reprend l'exemple 1.4.1, on montre par un calcul similaire que la suite de fonctions $v_n = \sin(4n\pi x)$ génère la même mesure de Young que celle de (u_n) . On en déduit alors que les mesures de Young ne tiennent pas compte de la localisation des oscillations. On dit alors qu'il y'a une possibilité de concentration.

Plusieurs tentatives pour comprendre les effets de concentration ont été abordées par plusieurs auteurs, particulièrement dans l'homogénéisation des équations aux dérivées partielles (cf. [16, 36]). Une autre alternative est d'utiliser les mesures de "varifold" (cf.[19]), et c'est l'approche qu'on adaptera par la suite.

1.5 Notion de mesures de "varifold"

Dans ce paragraphe on introduit la notion de mesure de "varifold" et on s'intéressera aux mesures de varifold générées par des gradients. On considère toujours $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ l'espace de Sobolev usuel avec $p \in]1, +\infty[$, et on notera $\mathbb{S} := \{\lambda \in \mathbb{E} : |\lambda| = 1\}$ la sphère unité de \mathbb{E} .

1.5. NOTION DE MESURES DE "VARIFOLD"

Pour tout $v \in L^p(\Omega; \mathbb{E})$ on lui associe la mesure image θ de $|v|^p \mathcal{L}$ par l'application

$$\begin{aligned} T : \Omega &\longrightarrow \Omega \times \mathbb{S} \\ x &\longmapsto \left(x, \frac{v}{|v|}(x)\right). \end{aligned}$$

où $x \longmapsto \frac{v}{|v|}(x)$ est la densité de la mesure $v \mathcal{L}$ par rapport à la mesure $|v| \mathcal{L}$. On obtient alors que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega \times \mathbb{S}), \quad \int_{\Omega \times \mathbb{S}} \varphi(x, \lambda) d\theta(x, \lambda) = \int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{v}{|v|}(x)\right) |v|^p dx.$$

Il faut noter qu'en utilisant le théorème de désintégration 1.4.1, on a

$$\theta = \delta_{\frac{v}{|v|}(x)} \otimes |v|^p dx.$$

Définition 1.5.1 *La mesure $\theta \in \mathcal{M}^+(\Omega \times \mathbb{S})$, est appelée mesure de "varifold" (ou mesure de Young généralisée) associée à la fonction v .*

1.5.1 Mesures de "varifold" générées par des gradients

Puisque dans la suite on va s'intéresser aux suites de gradients, on considère dans la définition 1.5.1 $v = \nabla u$ pour $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Si on munit $\mathcal{M}^+(\Omega \times \mathbb{S})$ de sa topologie faible, on est donc conduit à la définition suivante :

Définition 1.5.2 *On dira que $\theta \in \mathcal{M}^+(\Omega \times \mathbb{S})$ est une $W^{1,p}$ -mesure de varifold s'il existe une suite (u_n) bornée dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ telle que la mesure de "varifold" associée $\theta_n := \delta_{\frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|}(x)} \otimes |\nabla u_n|^p dx$ converge faiblement vers θ , c'est à dire pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega \times \mathbb{S})$,*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \mathbb{S}} \varphi(x, \lambda) d\theta(x, \lambda) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \times \mathbb{S}} \varphi(x, \lambda) d\theta_n(x, \lambda) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|}(x)\right) |\nabla u_n|^p dx. \end{aligned}$$

On dira que θ est une mesure de "varifold" générée par la suite des gradients (∇u_n) bornée dans $L^p(\Omega; \mathbb{E})$.

1.5.2 $W^{1,p}$ -mesures de Young-varifold

Soit l'espace produit $\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{E}; \mathbb{S}) := \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E}) \times \mathcal{M}^+(\Omega \times \mathbb{S})$ muni de la topologie produit étroite-faible. On pose donc la définition suivante :

1.5. NOTION DE MESURES DE "VARIFOLD"

Définition 1.5.3 On dira que le couple $(\mu, \theta) \in \mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{E}; \mathbb{S})$ est une $W^{1,p}$ -mesure de Young-varifold s'il existe une suite (u_n) bornée dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ telle que

$$\mu_n := \delta_{\nabla u_n(x)} \otimes dx \xrightarrow{e} \mu \quad \text{et} \quad \theta_n := \delta_{\frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|}(x)} \otimes |\nabla u_n|^p dx \rightharpoonup \theta$$

Autrement dit, le couple de mesure (μ, θ) est généré par la suite des gradients (∇u_n) .

Remarque 1.5.1 En utilisant le théorème de désintégration 1.4.1, on en déduit que pour tout (μ, θ) $W^{1,p}$ -mesure de Young-varifold, la mesure θ se décompose de la forme $\theta = \theta_x \otimes \pi$ où π est la mesure projection de θ sur Ω et $\{\theta_x\}_{x \in \Omega}$ est une famille de mesures de probabilités sur \mathbb{S} .

Nous rappelons maintenant le théorème de caractérisation pour les mesures de Young-varifold générées par des gradients établie dans [19].

Théorème 1.5.1 Soit $p > 1$. Alors le couple (μ, θ) est une $W^{1,p}$ -mesure de Young-varifold si, et seulement si, les trois assertions suivantes sont vérifiées

- (i) il existe $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ telle que $\nabla u(x) = \int_{\mathbb{E}} \lambda d\mu_x(\lambda)$, $x \in \Omega$ \mathcal{L} -p.p.,
- (ii) pour tout $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ quasiconvexe, vérifiant $0 \leq \phi(\lambda) \leq \beta(1 + |\lambda|^p)$ pour un $\beta > 0$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{E}$, on a

$$\phi(\nabla u(x)) \leq \int_{\mathbb{E}} \phi(\lambda) d\mu_x(\lambda), \quad x \in \Omega \text{ } \mathcal{L} - \text{p.p.},$$

- (iii) pour tout $\psi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ p -homogène⁸ et continue telle que $Q\psi(0) = 0$, où $Q\psi$ est la quasiconvexifié de ψ , on a

$$\int_{\mathbb{E}} \psi(\lambda) d\mu_x(\lambda) \leq \frac{d\pi}{dx}(x) \int_{\mathbb{S}} \psi(\lambda) d\theta_x(\lambda), \quad x \in \Omega \text{ } \mathcal{L} - \text{p.p.},$$

où $\frac{d\pi}{dx}$ est la densité de la mesure π par rapport à $\mathcal{L}|_{\Omega}$,

- (iv) pour toute fonction $\psi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ p -homogène et continue telle que $Q\psi(0) = 0$, on a

$$\int_{\Omega \times \mathbb{S}} \psi(\lambda) d\theta_x(\lambda) \geq 0, \quad x \in \Omega \text{ } \pi_s - \text{p.p.}$$

où π_s désigne la partie singulière de π par rapport à $\mathcal{L}|_{\Omega}$.

⁸C'est à dire pour tout $\lambda \in \mathbb{E}$ et pour tout $t \geq 0$, on a $\psi(t\lambda) = t^p \psi(\lambda)$.

Remarque 1.5.2

1. En prenant dans (iii) $\psi(\lambda) = |\lambda|^p$, on obtient

$$\int_{\Omega \times \mathbb{E}} |\lambda|^p d\mu < +\infty.$$

On déduit alors de (i), (ii) et (iii) le théorème de caractérisation des mesures de Young (cf. th. 1.4.4).

2. L'assertion (iii) donne la relation entre la mesure de Young et la partie absolument continue de la mesure de "varifold", par contre (iv) représente la restriction des "varifold" sur la partie où la mesure singulière est concentrée.

1.6 Relaxation en terme de mesures de Young

Dans cette partie, nous étudions, en terme de mesures de Young, le problème de minimisation suivant :

$$m := \inf \left\{ F(u) := \int_{\Omega} f(\nabla u(x)) dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \right\}, \quad (1.1)$$

où $p > 1$ et $f : \mathbb{E} \rightarrow [0, +\infty[$ est continue et vérifie les conditions de coercivité et de croissance, c'est à dire pour tout λ

$$\alpha |\lambda|^p \leq f(\lambda) \leq \beta (1 + |\lambda|^p) \quad (1.2)$$

pour $0 < \alpha \leq \beta$ deux constantes données.

On sait que la semicontinuité inférieure de F est crucial pour la recherche de minimiseur dans les problèmes variationnelles. Pour des problèmes de type (1.1), la condition qui assure la semicontinuité séquentielle de F relativement à la topologie faible de $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ est la quasiconvexité de l'intégrande f (convexité dans le cas scalaire) (cf. [1]).

Pour la modélisation de matériaux à transition de phase solide/solide en élasticité non linéaire, la densité d'énergie f n'est pas quasiconvexe (non convexe dans le cas scalaire). Dans ces conditions, le minimum de l'énergie n'est atteint qu'en un sens généralisé et ceci est due aux oscillations de la suite minimisante associée au problème (1.1). Pour illustrer la nature des oscillations de la suite minimisante, on présente l'exemple connu en dimension un suivant :

Exemple 1.6.1 (Problème de Bolza) *On considère le problème de minimisation de la fonctionnelle intégrale⁹*

$$\inf \left\{ F(u) = \int_0^1 \Phi(u'(x)) + u(x)^2 dx : u \in W_0^{1,p}(0,1) \right\}.$$

où $\Phi(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2$.

Alors le problème n'admet pas de solution. En effet, si on considère la suite de fonctions (v_n) définie par

$$v_n(x) := \frac{1}{n}v(nx),$$

où

$$v(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

étendue par périodicité de $[0, 1]$ à \mathbb{R} . Alors, par construction on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^1 v^2(nx) dx = 0.$$

Par conséquent $\inf F(u) = 0$. Cependant, il n'existe pas de fonction u qui satisfait $F(u) = 0$, puisque on devrait avoir

$$u = 0 \text{ et } |u'| = 1, \text{ p.p sur }]0, 1[,$$

ce qui est en contradiction pour toute fonction dans $W^{1,4}(0,1)$. Donc le problème n'admet pas de solution.

Classiquement, pour surmonter le problème d'existence de solutions, on relaxe le problème initial et on applique (iii) de la proposition 1.1.2 avec les modifications nécessaires. En effet, dans le cas du problème (1.1), sous l'hypothèse de continuité et (1.2), la relaxée de F relativement à la topologie faible de $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ est donnée par (cf. [13])

$$\overline{F}(u) := \int_{\Omega} Qf(\nabla u(x)) dx,$$

où Qf est la quasiconvexifié de f . Par conséquent, le problème relaxé n'est autre que le problème suivant :

$$\overline{m} := \min \left\{ \overline{F}(u) : u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \right\}, \quad (1.3)$$

⁹À remarquer que Φ n'est pas convexe.

et on a de plus $m = \bar{m}$.

Si on reprend le problème de l'exemple 1.6.1, on obtient le problème relaxé

$$\min \left\{ \bar{F}(u) = \int_{\Omega} \Phi^{**}(\nabla u(x)) dx : u \in W_0^{1,p}(0, 1) \right\}, \quad (1.4)$$

tel que

$$\Phi^{**}(\lambda) = \begin{cases} (\lambda^2 - 1)^2 & \text{si } \xi \geq 1, \\ 0 & \text{si } \xi \leq 1, \end{cases}$$

avec $\Phi^{**} = \sup\{h \leq \Phi : h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe}\}$. Par conséquent la fonction nulle $u = 0$ est solution du problème relaxé (1.4).

Dans la relaxation précédente, le problème relaxé ne donne aucune information sur le comportement de la limite faible (comportement oscillatoire) de la suite minimisante. L'autre approche est la relaxation en terme de mesures de Young. Ceci, nous conduit à introduire la relaxation du problème (1.1) en terme de mesures de Young relativement à la topologie étroite, et établir certains résultats relatif à cette relaxation. D'un point de vue différent, L.C. Young [41] est le premier avoir traité des problèmes de calcul des variations, où il a introduit la notion de solution généralisée pour des courbes de surfaces, et étudia l'existence de la trajectoire associée à un problème de contrôle optimale (voir aussi [9]).

En premier, nous noterons par $\nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$ l'ensemble de $W_0^{1,p}$ -mesures de Young telles que définies dans 1.4.7, en substituant $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ par $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Le problème (1.1) peut s'écrire alors, en terme de mesures de Young, en considérant la fonctionnelle intégrale $\mathcal{F} : \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E}) \rightarrow [0, +\infty]$ définie par

$$\mathcal{F}(\mu) := \begin{cases} \int_{\Omega \times \mathbb{E}} f(\lambda) d\mu(x, \lambda) & \text{si } \mu \in \mathcal{E}\nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E}), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\mathcal{E}\nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E}) = \left\{ \mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E}) : \mu_x = \delta_{\nabla u(x)} \text{ avec } u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \right\}$ est un sous ensemble de $\nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$.

A partir de cette écriture, on voit facilement que dans le domaine de la fonctionnelle \mathcal{F} on a

$$\mathcal{F}(\mu) = \int_{\Omega} f(\nabla u(x)) dx = F(u),$$

pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Le premier résultat principal de ce chapitre est alors

Théorème 1.6.1 *Avec les notations ci-dessus et sous l'hypothèse (1.2), on obtient que la relaxée de \mathcal{F} , relativement à la topologie étroite dans $\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$, est $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E}) \rightarrow [0, +\infty]$ définie par*

$$\overline{\mathcal{F}}(\mu) := \begin{cases} \int_{\Omega \times \mathbb{E}} f(\lambda) d\mu(x, \lambda) & \text{si } \mu \in \nabla \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E}), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier (i) et (ii) de la proposition 1.1.1.

Vérification de (i). Montrons que pour tout μ et (μ_n) dans $\mathcal{Y}(\Omega, \mathbb{E})$ tels que $\mu_n \xrightarrow{e} \mu$ on a

$$\overline{\mathcal{F}}(\mu) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n).$$

Sans perdre de généralité, on peut supposer que

$$l := \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n) < +\infty.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n) = l$, et donc $\sup_n \mathcal{F}(\mu_n) < +\infty$. On en déduit alors que $\mu_n \in \mathcal{E}\nabla \mathcal{Y}(\Omega; E)$, c'est à dire qu'il existe $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ tel que $\mu_n = \delta_{\nabla u_n(x)} \otimes dx$, et on a

$$\mathcal{F}(\mu_n) = \int_{\Omega} f(\nabla u_n(x)) dx.$$

La condition de coercitivité (1.2) implique que la suite (u_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, et donc μ est générée par une suite bornée, autrement dit $\mu \in \nabla \mathcal{Y}(\Omega; E)$ (cf. définition 1.4.7). Grâce au théorème fondamental des mesures de Young (cf. th. 1.4.3) on obtient

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n) \geq \int_{\Omega \times \mathbb{E}} f(\lambda) d\mu = \overline{\mathcal{F}}(\mu).$$

Vérification de (ii). Soit $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$, montrons qu'il existe $\mu_n \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$ telle que $\mu_n \xrightarrow{e} \mu$ et

$$\overline{\mathcal{F}}(\mu) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n).$$

Supposons que $\overline{\mathcal{F}}(\mu) < +\infty$, sinon il n'y a rien à démontrer. On a alors $\mu \in \nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E})$ et par définition 1.4.7, il existe une suite (u_n) bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{E})$ telle que $\delta_{\nabla u_n(x)} \otimes dx \xrightarrow{e} \mu$. En vertu du lemme de décomposition 1.4.1, il existe une suite (v_n) telle que $(|v_n|^p)$ est uniformément intégrable et génère la même mesure de Young μ . Par conséquent, en utilisant les conditions de croissance et le théorème 1.4.3 il vient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla v_n(x)) dx = \int_{\Omega \times \mathbb{E}} f(\lambda) d\mu.$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

La relation entre le problème classique et le problème en terme de mesures de Young est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 1.6.1 *On a*

$$m = \overline{m} = \inf \{ \mathcal{F}(\mu) : \mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E}) \} = \min \{ \overline{\mathcal{F}}(\mu) : \mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E}) \}.$$

De plus si (μ_n) est une suite minimisante, c'est à dire

$$\mathcal{F}(\mu_n) \leq \inf_{\mu} \mathcal{F} + \frac{1}{n}.$$

Alors (μ_n) est étroitement relativement compact et toute valeur d'adhérence $\overline{\mu}$ est solution du problème

$$\min \{ \mathcal{F}(\mu) : \mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{E}) \}.$$

et vérifiant

$$\nabla \overline{u}(x) = \int_{\mathbb{E}} \lambda d\overline{\mu}_x(\lambda) \quad , \quad x \in \Omega \text{ p.p.},$$

où \overline{u} est solution du problème classique

$$\overline{m} := \min \{ \overline{F}(u) : u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \}.$$

DÉMONSTRATION. On a $m = \overline{m}$ (cf. [13]). Soit (u_n) une suite minimisante de m , c'est à dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) = \inf F(u)$. Donc $\mu_n := \delta_{\nabla u_n} \otimes dx \xrightarrow{e} \mu$, et on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n) \geq \inf \mathcal{F}. \quad (1.5)$$

1.7. RELAXATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG-VARIFOLD

D'autre part, si $\bar{\mu}$ est solution de $\inf \bar{\mathcal{F}}$, alors il existe (u_n) bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ telle que $\delta_{\nabla u_n} \otimes dx \xrightarrow{e} \bar{\mu}$. En vertu du lemme de décomposition 1.4.1, il existe (v_n) dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ tel que $(|v_n|^p)$ est U.I. On obtient donc

$$m := \inf F \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla v_n) dx = \mathcal{F}(\bar{\mu}) = \min \bar{\mathcal{F}}. \quad (1.6)$$

Comme $\inf \mathcal{F} = \inf \bar{\mathcal{F}}$, on en déduit de (1.5) et (1.6) l'égalité $\inf F = \inf \mathcal{F}$. En utilisant le théorème de caractérisation 1.4.4 et l'inégalité de quasiconvexité le reste de la démonstration en découle immédiatement.

1.7 Relaxation en terme de mesures de Young-varifold

Dans cette section, dans l'intention de capter les oscillations et prendre en compte les effets de concentration de la suite des gradients minimiseurs, on relaxe le problème (1.1) en terme de mesures de Young-varifold introduites dans [19].

Notations. Avant de commencer, nous allons préciser quelques notations. On notera par $\nabla \mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{E}; \mathbb{S})$ l'ensemble des $(\mu, \theta) \in \mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{E}; \mathbb{S})$, qu'on appellera $W_0^{1,p}$ -mesure de Young-varifold (cf. Définition 1.5.3), généré par une suite (u_n) bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, c'est à dire on a

$$\mu_n := \delta_{\nabla u_n(x)} \otimes dx \xrightarrow{e} \mu \text{ et } \theta_n := \delta_{\frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|}(x)} \otimes |\nabla u_n|^p dx \rightharpoonup \theta.$$

Nous désignerons par $\mathcal{E}\nabla \mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{E}; \mathbb{S})$ le sous-espace de $\nabla \mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{E}; \mathbb{S})$ de tout les couples $(\mu, \theta) \in \mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{E}; \mathbb{S})$ associés à des fonctions de $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, et qu'on appellera espace élémentaire, c'est à dire qu'il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tel que

$$(\mu, \theta) = \left(\delta_{\nabla u(x)} \otimes dx, \delta_{\frac{\nabla u}{|\nabla u|}(x)} \otimes |\nabla u|^p \right).$$

Puisque les effets de concentration peuvent apparaître au bord $\partial\Omega$, pour des raisons techniques, on considère un ouvert borné $\tilde{\Omega}$ tel que $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$, et pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ on notera par \tilde{u} sa prolongée par zéro hors de Ω .

On définira alors respectivement $\mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{E}; \mathbb{S})$, $\nabla \mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{E}; \mathbb{S})$ et $\mathcal{E}\nabla \mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{E}; \mathbb{S})$ telles que sont définies, ci-dessus, les espaces $\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{E}; \mathbb{S})$, $\nabla \mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{E}; \mathbb{S})$ et

1.7. RELAXATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG-VARIFOLD

$\mathcal{E}\nabla\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{E}; \mathbb{S})$, où on remplace respectivement Ω et u par $\tilde{\Omega}$ et \tilde{u} et les mesures de Young-varifold sont générées par (\tilde{u}_n) au lieu de (u_n) .

Ceci dit, nous allons maintenant donner deux lemmes préliminaires qui seront utilisés dans la démonstration du théorème de relaxation en terme de mesures de Young-varifold. Le premier lemme précise la relation entre les deux espaces $\nabla\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{E}; \mathbb{S})$ et $\nabla\mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{E}; \mathbb{S})$, le deuxième peut avoir son intérêt propre.

Lemme 1.7.1 *Soit $(\mu, \theta) \in \nabla\mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{E}; \mathbb{S})$. Alors*

$$\mu = \mu_{|\Omega \times \mathbb{E}} + \delta_0 \otimes \mathcal{L}_{|(\tilde{\Omega} \setminus \Omega)} \quad \text{et} \quad \theta = \theta_{|\Omega \times \mathbb{S}} + \theta_{|(\tilde{\Omega} \setminus \Omega) \times \mathbb{S}},$$

où $(\mu_{|\Omega \times \mathbb{E}}, \theta_{|\Omega \times \mathbb{S}}) \in \nabla\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{E}; \mathbb{S})$ et $\theta_{|(\tilde{\Omega} \setminus \Omega) \times \mathbb{S}}$ est concentrée sur $\partial\Omega \times \mathbb{S}$.

DÉMONSTRATION. Soit (u_n) une suite bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ telle que

$$\mu_n := \delta_{\nabla \tilde{u}_n(x)} \otimes dx \xrightarrow{e} \mu \quad \text{et} \quad \theta_n := \delta_{\frac{\nabla \tilde{u}_n}{|\nabla \tilde{u}_n|}(x)} \otimes |\nabla \tilde{u}_n|^p dx \rightarrow \theta = \theta_x \otimes \pi,$$

où θ_x est la désintégrée de θ et π est la projection de θ sur $\tilde{\Omega}$. Comme $\mathcal{L}(\partial\Omega) = 0$, alors pour $\psi \in \mathcal{C}th^b(\tilde{\Omega}; \mathbb{E})$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{E}} \psi(x, \lambda) d\mu(x, \lambda) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_{\Omega} \psi(x, \nabla u_n(x)) dx + \int_{\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}} \psi(x, 0) dx \right] \\ &= \int_{\Omega \times \mathbb{E}} \psi(x, \lambda) d\mu_{|\Omega \times \mathbb{E}} + \int_{\tilde{\Omega} \setminus \Omega} \int_{\mathbb{E}} \psi(x, \lambda) d\delta_0(\lambda) dx. \end{aligned}$$

D'où $\mu = \mu_{|\Omega \times \mathbb{E}} + \delta_0 \otimes \mathcal{L}_{|(\tilde{\Omega} \setminus \Omega)}$.

Si $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega \times \mathbb{S})$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{S}} \varphi(x, \lambda) d\theta(x, \lambda) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_{\Omega \times \mathbb{S}} \varphi(x, \lambda) d\theta_n + \int_{\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega} \times \mathbb{S}} \varphi(x, \lambda) d\theta_n \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial\Omega \times \mathbb{S}} \varphi(x, \lambda) d\theta_n \right] \end{aligned}$$

Puisque $\theta_n := \delta_{\frac{\nabla u_n}{|\nabla u_n|}(x)} \otimes |\nabla u_n|^p dx \rightarrow \theta$ où $\theta = \theta_x \otimes \pi_{|\Omega}$ et $\pi(\partial\Omega) = 0$, on en déduit que le support de $\theta_{|(\tilde{\Omega} \setminus \Omega) \times \mathbb{S}}$ est concentrée sur $\partial\Omega \times \mathbb{S}$.

1.7. RELAXATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG-VARIFOLD

Lemme 1.7.2 Soit (v_n) une suite bornée dans $L^p(\Omega; \mathbb{E})$ avec $(p \geq 1)$, et $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{h(\lambda)}{|\lambda|^p} = 0 .$$

Alors la suite $h(v_n(\cdot))$ est uniformément intégrable.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser la définition de la limite et le fait que f est continue.

Le problème (1.1) peut s'écrire, en terme de mesures de Young-varifold, en considérant la fonctionnelle intégrale $\mathfrak{F} : \mathcal{Y}(\tilde{\Omega}; \mathbb{E}) \times \mathcal{M}^+(\tilde{\Omega} \times \mathbb{S}) \rightarrow [0, +\infty]$ définie par

$$\mathfrak{F}(\mu, \theta) := \begin{cases} \int_{\Omega \times \mathbb{E}} [f - f^\infty](\lambda) d\mu + \int_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{S}} f^\infty(\lambda) d\theta & \text{si } (\mu, \theta) \in \mathcal{E}\nabla\mathcal{Y}\mathcal{V}(\tilde{\Omega}; \mathbb{E}; \mathbb{S}), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $f^\infty : \mathbb{E} \rightarrow [0, +\infty[$ est p -homogène, telle que

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \frac{f(\lambda) - f^\infty(\lambda)}{|\lambda|^p} = 0. \quad (1.7)$$

Comme $f^\infty(0) = 0$, il est facile de voir que, dans le domaine de la fonctionnelle \mathfrak{F} on a

$$\mathfrak{F}(\mu, \theta) = \int_{\Omega} f(\nabla u(x)) dx = F(u) ,$$

pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

A partir de l'hypothèse (1.7), on en déduit la proposition suivante :

Proposition 1.7.1

(i) La fonction f^∞ est la fonction de récession de f , p -homogène, définie par

$$f^\infty(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t\lambda)}{t^p} .$$

1.7. RELAXATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG-VARIFOLD

(ii) Si (u_n) est une suite bornée dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, alors $([f - f^\infty](\nabla u_n))_n$ est uniformément intégrable.

DÉMONSTRATION. Un calcul élémentaire nous permet d'obtenir (i). Pour (ii), il suffit d'utiliser le lemme 1.7.2.

Le deuxième résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 1.7.1 Avec les notations ci-dessus et sous les hypothèses (1.2) et (1.7), on obtient que la relaxée de \mathfrak{F} , relativement à la topologie produit étroite par faible dans $\mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{E}; \mathbb{S})$, est $\bar{\mathfrak{F}} : \mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{E}; \mathbb{S}) \rightarrow [0, +\infty]$ définie par

$$\bar{\mathfrak{F}}(\mu, \theta) := \begin{cases} \int_{\Omega \times \mathbb{E}} [f - f^\infty](\lambda) d\mu + \int_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{S}} f^\infty(\lambda) d\theta & \text{si } (\mu, \theta) \in \nabla \mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{E}; \mathbb{S}), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier (i) et (ii) de la proposition 1.1.1.

Vérification de (i). Montrons que pour tout (μ, θ) et (μ_n, θ_n) dans $\mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{E}; \mathbb{S})$ tels que $\mu_n \xrightarrow{e} \mu$ et $\theta_n \rightharpoonup \theta$ on a

$$\bar{\mathfrak{F}}(\mu, \theta) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{F}(\mu_n, \theta_n).$$

Sans perdre de généralité, on peut supposer que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{F}(\mu_n, \theta_n) < +\infty.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{F}(\mu_n, \theta_n) = l$, et donc $\sup_n \mathfrak{F}(\mu_n) < +\infty$. On en déduit que $(\mu_n, \theta_n) \in \mathcal{E}\nabla \mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{E}; \mathbb{S})$, c'est à dire qu'il existe $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ telle que $\mu_n = \delta_{\nabla \tilde{u}_n(x)} \otimes dx$, et $\theta_n = \delta_{\frac{\nabla \tilde{u}_n}{|\nabla \tilde{u}_n|}(x)} \otimes |\nabla \tilde{u}_n|^p dx$. De plus, la condition de coécitivité sur f implique que la suite (u_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, d'où $(\mu, \theta) \in \nabla \mathcal{YV}(\Omega; E; \mathbb{S})$.

En utilisant (ii) de la proposition 1.7.1 et théorème 1.4.3 on obtient

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{F}(\mu_n, \theta_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} [f - f^\infty](\nabla u_n(x)) dx + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{\Omega}} f^\infty(\nabla u_n(x)) dx \\ &\geq \int_{\Omega \times \mathbb{E}} [f - f^\infty](\lambda) d\mu + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{\Omega}} f^\infty\left(\frac{\nabla \tilde{u}_n}{|\nabla \tilde{u}_n|}(x)\right) |\nabla \tilde{u}_n(x)|^p dx \end{aligned}$$

1.7. RELAXATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG-VARIFOLD

Ainsi par le lemme 1.7.1 et proposition 1.7.1

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{F}(\mu_n, \theta_n) &\geq \int_{\Omega \times \mathbb{E}} [f - f^\infty](\lambda) d\mu dx + \int_{\Omega \times \mathbb{S}} f^\infty(\lambda) d\theta + \int_{\partial\Omega \times \mathbb{S}} f^\infty(\lambda) d\theta \\
&= \int_{\Omega \times \mathbb{E}} [f - f^\infty](\lambda) d\mu dx + \int_{\overline{\Omega} \times \mathbb{S}} f^\infty(\lambda) d\theta \\
&= \overline{\mathfrak{F}}(\mu, \theta).
\end{aligned}$$

La preuve de (i) est donc achevée.

Vérification de (ii). Nous allons montrer que pour tout $(\mu, \theta) \in \mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{E}; \mathbb{S})$, il existe $(\mu_n, \theta_n) \in \mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{E}; \mathbb{S})$ telle que $\mu_n \xrightarrow{e} \mu$, $\theta_n \rightharpoonup \theta$ et

$$\overline{\mathfrak{F}}(\mu, \theta) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{F}(\mu_n, \theta_n).$$

Supposons que $\overline{\mathfrak{F}}(\mu, \theta) < +\infty$, sinon il n'y a rien à démontrer. Alors $\mu \in \nabla\mathcal{YV}(\Omega; E; \theta)$ et par définition 1.5.3, il existe une suite (u_n) bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{E})$ telle que

$$\begin{aligned}
\mu_n &:= \delta_{\nabla u_n(x)} \otimes dx \xrightarrow{e} \mu \text{ dans } \mathcal{Y}(\tilde{\Omega}; \mathbb{E}), \\
\theta_n &:= \delta_{\frac{\nabla \tilde{u}_n}{|\nabla \tilde{u}_n|}(x)} \otimes |\nabla \tilde{u}_n|^p dx \rightharpoonup \theta \text{ dans } \mathcal{M}(\tilde{\Omega} \times \mathbb{S}).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, le lemme 1.7.1 et théorème 1.4.3 nous conduisent à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \times \mathbb{E}} [f - f^\infty](\lambda) d\mu_n = \int_{\Omega \times \mathbb{E}} [f - f^\infty](\lambda) d\mu. \quad (1.8)$$

D'autre part, par continuité de f^∞ et la convergence faible $\theta_n \rightharpoonup \theta$ on en déduit que $f_n^\infty \theta \rightharpoonup f^\infty \theta$ dans $\mathcal{M}(\tilde{\Omega} \times \mathbb{S})$. D'où, en vertu du théorème 1.3.2, il vient que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n^\infty \theta_n(\overline{\Omega} \times \mathbb{S}) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\overline{\Omega} \times \mathbb{S}} f^\infty(\lambda) d\theta_n \\
&\leq \int_{\overline{\Omega} \times \mathbb{S}} f^\infty(\lambda) d\theta \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{\Omega}} f^\infty(\nabla \tilde{u}_n) dx.
\end{aligned} \quad (1.9)$$

Ainsi, de (1.8) et (1.9) il en résulte

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathfrak{F}(\mu_n, \theta_n) \leq \overline{\mathfrak{F}}(\mu, \theta).$$

La démonstration du théorème est achevée.

Chapitre 2

Formulation d'un modèle non linéaire de membrane en terme de mesures de Young-varifold

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on se propose d'étudier le comportement limite d'une structure élastique mince en terme de mesures de Young et de "varifold". On établit deux nouvelles formulations du problème limite associées à une membrane, l'une dans l'espace des mesures de Young générées par des gradients $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ -Young et l'autre dans l'espace des mesures de "varifold" générées par des gradients $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ -Young-varifold. En effet, la fonctionnelle énergie associée à ces deux formulations est obtenue comme limite de la formulation tridimensionnelle de la structure mince via une convergence variationnelle associée à la convergence étroite des mesures de Young et la convergence faible des "varifolds". Cette formulation est différente à celle établie dans [23], bien adaptée pour avoir plus d'informations sur le comportement des oscillations du gradient de la suite minimisante et prend en compte les effets de concentration. On en trouve une autre approche variationnelle pour les structures élastiques minces dans [3, 4, 10].

Dans une première partie, on reformule le problème classique de la structure élastique mince en terme de mesures de Young, et on montre que la famille des énergies associées Γ_Y -converge vers l'énergie de membrane formulée dans l'espace des mesures de Young. Dans la deuxième partie, dans l'intention d'analyser les oscillations et de prendre en compte les effets de concentration du gradient de la suite minimisante, on reformule le problème classique en terme de mesures de Young-varifold. On obtient ainsi une Γ_{YV} -convergence des énergies associées vers une nouvelle formulation de l'énergie de membrane en terme de mesures de Young-varifold.

2.2 Position du problème

On note $\mathbb{M}^{3 \times 3}$ l'espace des matrices réelles 3×3 muni de la norme euclidienne usuelle $|A| = \sqrt{\text{tr}(A^t A)}$ et $\mathbb{M}^{3 \times 2}$ l'espace des matrices réelles à trois lignes et deux colonnes.

Soit ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière $\partial\omega$. On considère $\Omega_\varepsilon = \omega \times]0, \varepsilon[$ la configuration de référence d'un corps hyperélastique, où $\varepsilon > 0$ est l'épaisseur de la structure mince.

On suppose que le corps est encastré sur le bord $\Gamma_{0,\varepsilon} = \gamma_0 \times]0, \varepsilon[$, où γ_0 est une partie de $\partial\omega$ de mesure superficielle strictement positive. Dans la suite, un élément $x = (x_1, x_2, x_3)$ de \mathbb{R}^3 sera noté (\hat{x}, x_3) avec $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$.

L'énergie potentielle élastique associée à la déformation $u : \Omega_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est

2.2. POSITION DU PROBLÈME

donnée par la famille de fonctionnelles intégrales $F_\varepsilon : L^p(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3) \rightarrow]0, +\infty]$ définie par

$$F_\varepsilon(u) := \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\nabla u) dx & \text{si } u \in W_{\Gamma_{0,\varepsilon}}^{1,p}(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}^3), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $W_{\Gamma_{0,\varepsilon}}^{1,p}(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}^3)$ est l'espace des fonctions de $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3)$ de trace nulle sur $\Gamma_{0,\varepsilon}$ et f est la densité d'énergie élastique satisfaisant

$$\forall A \in \mathbb{M}^{3 \times 3}, \alpha |A|^p \leq f(A) \leq \beta(1 + |A|^p), \quad (2.1)$$

$$\forall A, B \in \mathbb{M}^{3 \times 3}, |f(A) - f(B)| \leq L|B - A|(1 + |A|^{p-1} + |B|^{p-1}), \quad (2.2)$$

pour $0 < \alpha \leq \beta$ et $L > 0$ des constantes données.

La structure est soumise à des densités de forces volumiques $g_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ où on suppose qu'il existe $g : \Omega = \omega \times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3$, $g \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^3)$ (où q est l'exposant conjugué de p) et vérifiant $\varepsilon g_\varepsilon(\hat{x}, \varepsilon x_3) = g(x)$. On note alors la charge extérieure par

$$L_\varepsilon(u) := \int_{\Omega_\varepsilon} g_\varepsilon \cdot u dx.$$

L'équilibre du système de configuration est atteint pour une déformation \bar{u}_ε , solutions du problème :

$$\inf \{ F_\varepsilon(u) - L_\varepsilon(u) : u \in L^p(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3) \}.$$

En l'absence d'hypothèse de quasiconvexité sur f , ce problème n'admet pas de solution en général. On procède alors de la manière suivante : on étudie le comportement asymptotique du corps élastique par Γ -convergence quand l'épaisseur ε tend vers zéro.

Comme dans [23], afin de se ramener à un ouvert $\Omega = \omega \times]0, 1[$ indépendant de ε , on fait le changement de variable $(\hat{x}, x_3) = (\hat{x}, \varepsilon x'_3)$. On obtient donc le problème de minimisation équivalent :

$$\inf \{ \tilde{F}_\varepsilon(v) - \int_{\Omega} g \cdot v dx : v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \}, \quad (2.3)$$

où

$$\tilde{F}_\varepsilon(v) := \begin{cases} \int_{\Omega} f(\widehat{\nabla} v, \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_3}) dx & \text{si } v \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

2.3. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG

$\Gamma_0 = \gamma_0 \times]0, 1[$ et $\widehat{\nabla}v = (\frac{\partial v_i}{\partial x_j})_{i=1,2,3, j=1,2}$ est le gradient tangentiel de v .

Dans [23], on montre que la famille de fonctionnelles rééchellonnées $\widetilde{F}_\varepsilon$ Γ -converge, relativement à la topologie faible de $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, vers la fonctionnelle $\widetilde{F} : L^p(\Omega; \mathbb{R}^3) \rightarrow [0, +\infty]$ définie par

$$\widetilde{F}(v) := \begin{cases} \int_{\Omega} Qf_0(\widehat{\nabla}v) dx & \text{si } v \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_3} = 0, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où Qf_0 est la quasiconvexifié de f_0 donnée par

$$f_0(\widehat{\lambda}) = \inf \{ f(\widehat{\lambda}, \xi), \xi \in \mathbb{R}^3 \}.$$

De plus, toute suite de déformations minimisante converge, à une sous-suite près, vers \bar{v} solution du problème limite

$$\inf \{ \widetilde{F}(v) - \widetilde{L}(v) : v \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^3) \}, \quad (2.4)$$

où \widetilde{F} peut être considérée comme un modèle de l'énergie de membrane et la fonctionnelle \widetilde{L} , associée à la densité de forces volumiques, est définie par

$$\widetilde{L}(v) := \int_{\omega} \bar{g} \cdot v d\widehat{x}, \quad \bar{g}(\widehat{x}) = \int_0^1 g(\widehat{x}, s) ds.$$

Le problème limite ci-dessus ne donne aucune information sur le comportement de la limite faible du gradient de la suite minimisante du (2.3). Une méthode alternative est d'élargir l'espace des déformations $W_{\Gamma_0, \varepsilon}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ en reformulant le problème (2.3) dans l'espace des mesures de Young, et de calculer la Γ -limite en terme de mesures de Young. Ceci, nous permet de décrire le comportement oscillatoire du gradient de la suite minimisante. Puisque les mesures de Young ne prennent pas en considération les effets de concentration, en reformule le problème classique en terme de mesures de "varifold".

2.3 Formulation en terme de mesures de Young

Nous allons préciser quelques notations et définitions de mesures de Young paramétrées sur Ω et ω associées respectivement à la configuration de référence de la structure mince et de la membrane.

2.3. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG

On désigne par $\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$ l'espace des mesures de Young paramétrées sur Ω à valeur dans $\mathbb{M}^{3 \times 3}$, c'est à dire

$$\mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}) \iff \mu \in \mathcal{M}^+(\Omega \times \mathbb{M}^{3 \times 3}) \text{ et } \mathcal{L}_{|\Omega} = \mu \circ \mathcal{P}_\Omega^{-1},$$

où \mathcal{P}_Ω est la projection sur Ω . En vertu du théorème de désintégration (cf. chap. 1, théorème 1.4.1) on a $\mu = \mu_x \otimes dx^1$, avec $\{\mu_x\}_{x \in \Omega}$ une famille de mesures de probabilités sur $\mathbb{M}^{3 \times 3}$. On munit $\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$ de sa topologie étroite (cf. chap. 1, sect. 4).

On notera par $\nabla \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$ l'espace de $W_{\Gamma_0}^{1,p}$ -mesures de Young telles que définies dans le chapitre 1, définition 1.4.7, en remplaçant $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ par $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$. On définit alors le sous-espace $\nabla \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2,0}) \subset \nabla \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$ qu'on utilisera dans la formulation du problème de membrane non linéaire :

$$\mu \in \nabla \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2,0}) \iff \begin{cases} \exists (u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \text{ bornée dans } W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3) \text{ t.q.} \\ \delta_{\nabla u_\varepsilon(x)} \otimes dx \xrightarrow{\varepsilon} \mu, \\ \delta_{\widehat{\nabla} u_\varepsilon(x)} \otimes dx \xrightarrow{\varepsilon} \widehat{\mu}, \\ \mu_x = \widehat{\mu}_x \otimes \delta_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

où $\delta_{\widehat{\nabla} u_\varepsilon(x)} \otimes dx \xrightarrow{\varepsilon} \widehat{\mu}$ est une convergence étroite dans l'espace des mesures de Young $\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$ paramétrées sur Ω à valeur dans $\mathbb{M}^{3 \times 2}$ et $\{\widehat{\mu}_x\}_{x \in \Omega}$ est une famille de mesures de probabilités sur $\mathbb{M}^{3 \times 2}$ obtenue par désintégration de la mesure de Young $\widehat{\mu} \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$. On écrit $\mu = \widehat{\mu} \otimes \delta_0$.

On note par $\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$ l'espace des mesures de Young paramétrées sur ω à valeur dans $\mathbb{M}^{3 \times 2}$, autrement

$$\nu \in \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}) \iff \mu \in \mathcal{M}^+(\omega \times \mathbb{M}^{3 \times 2}) \text{ et } \widehat{\mathcal{L}}_{|\omega} = \mu \circ \mathcal{P}_\omega^{-1},$$

où $\widehat{\mathcal{L}}$ est la mesure de Lebesgue sur ω et \mathcal{P}_ω est la projection sur ω .

En vertu du théorème de désintégration, on a $\mu = \mu_{\widehat{x}} \otimes d\widehat{x}^2$, avec $\{\mu_{\widehat{x}}\}_{\widehat{x} \in \omega}$ une famille de mesures de probabilités sur $\mathbb{M}^{3 \times 2}$. On munit $\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$ de sa topologie étroite

On désignera par $\nabla \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$ l'espace de $W_{\gamma_0}^{1,p}$ -mesures de Young telles que définies dans le chapitre 1, définition 1.4.7, en remplaçant $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ par $W_{\gamma_0}^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3)$, c'est à dire

$$\mu \in \nabla \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}) \iff \exists (u_\varepsilon) \text{ bornée dans } W_{\gamma_0}^{1,p}(\omega, \mathbb{R}^3); \delta_{\nabla u(\widehat{x})} \otimes d\widehat{x} \xrightarrow{\varepsilon} \mu.$$

¹Afin d'alléger les notations, on notera par dx la mesure de Lebesgue restreinte à Ω .

²Afin d'alléger les notations, on notera par $d\widehat{x}$ la mesure de Lebesgue restreinte à ω .

2.3. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG

Le passage de l'espace $\nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2, 0})$ à l'espace $\nabla\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$ est donné par l'opérateur Θ définie par :

$$\begin{aligned} \Theta : \nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2, 0}) &\longrightarrow \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}) \\ \mu = \hat{\mu} \otimes \delta_0 &\longmapsto \Theta(\mu) = \bar{\mu}, \quad \text{où } \bar{\mu}_{\hat{x}} := \int_0^1 \hat{\mu}_{\hat{x}, s} ds. \end{aligned}$$

On obtient alors la proposition suivante :

Proposition 2.3.1 *L'image de l'espace $\nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2, 0})$ par l'opérateur Θ est l'espace $\nabla\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$.*

DÉMONSTRATION. Pour la preuve de cette proposition voir [24].

2.3.1 Formulation de l'énergie associée à la structure élastique mince en terme de mesures de Young

Afin de reformuler le problème (2.3) en terme de mesures de Young, on définit $\mathcal{F}_\varepsilon : \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}) \rightarrow]0, +\infty]$ l'énergie potentielle élastique associée à la structure élastique mince par

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\mu) := \begin{cases} \int_{\Omega \times \mathbb{M}^{3 \times 3}} f(\hat{\lambda}, \frac{1}{\varepsilon} \lambda_3) d\mu(x, \lambda) & \text{si } \mu \in \mathcal{E}\nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\mathcal{E}\nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$ est un sous ensemble de $\nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$ définie par

$$\mu \in \mathcal{E}\nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}) \iff \exists u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad \mu = \delta_{\nabla u(x)} \otimes dx,$$

Pour tout $\mu \in \nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$, on définit le barycentre $\mathbf{E}\mu$ de μ par

$$\mathbf{E}\mu = \int_{\mathbb{M}^{3 \times 3}} \lambda d\mu_x.$$

Alors $\nabla^{-1}\mathbf{E}\mu$ est bien définie dans $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Les forces volumiques dans la formulation en terme de mesures de Young est donnée par :

$$\mathcal{L} : \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{ +\infty \}$$

$$\mathcal{L}(\mu) := \begin{cases} \int_{\Omega} \tilde{g} \cdot \nabla^{-1}\mathbf{E}\mu dx & \text{si } \mu \in \mathcal{E}\nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.3. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG

A partir de cette formulation, il est facile de voir que pour tout $\mu \in \mathcal{E}\nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\mu) - \mathfrak{L}(\mu) = \tilde{F}_\varepsilon(u) - \tilde{L}(u)$$

où $u = \nabla^{-1}\mathbf{E}\mu$.

La formulation du problème (2.3) en terme de mesures de Young est

$$\inf \left\{ \mathcal{F}_\varepsilon(\mu) - \int_{\Omega} g \cdot \nabla^{-1}\mathbf{E}\mu \, dx : \mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}) \right\}. \quad (2.6)$$

Le problème limite est donc donnée par

$$\inf \left\{ \mathcal{F}(\nu) - \int_{\Omega} g \cdot \nabla^{-1}\mathbf{E}\nu \, dx : \nu \in \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}) \right\},$$

où $\mathcal{F} : \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}) \rightarrow]0, +\infty]$ est l'énergie potentielle élastique associée à la membrane dans la formulation en terme de mesures de Young, définie par

$$\mathcal{F}(\nu) := \begin{cases} \int_{\omega \times \mathbb{M}^{3 \times 2}} f_0(\hat{\lambda}) \, d\nu(\hat{x}, \hat{\lambda}) & \text{si } \nu \in \nabla\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $\bar{\mathfrak{L}} : \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est associée à la densité des forces volumiques définie par

$$\bar{\mathfrak{L}}(\nu) := \begin{cases} \int_{\omega} \bar{g} \cdot \nabla^{-1}\mathbf{E}\nu \, d\hat{x} & \text{si } \nu \in \nabla\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.3.2 $\Gamma_{\mathcal{Y}}$ -convergence dans la formulation en terme de mesures de Young

Dans cette partie, on introduit une convergence variationnelle afin de justifier le passage limite de la formulation précédente. En premier, on introduit une notion de convergence étroite entre les éléments des deux espaces $\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$ et $\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$.

Définition 2.3.1 *Soient une famille $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de $\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$ et ν dans $\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$. On dit que (μ_ε) converge étroitement au sens des membranes vers ν , et on écrit*

$$\mu_\varepsilon \xrightarrow{mem} \nu,$$

si, et seulement si, il existe μ dans $\nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2,0})$ telle que

$$\mu_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon} \mu \text{ et } \nu = \Theta(\mu).$$

2.3. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG

Il est à remarquer, qu'en vertu de la proposition 2.3.1, la mesure limite ν appartient à $\nabla\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$.

On considère les deux familles de fonctionnelles

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\varepsilon &: \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}) \longrightarrow]-\infty, +\infty] \\ \mathcal{H} &: \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}) \longrightarrow]-\infty, +\infty].\end{aligned}$$

La définition suivante de la $\Gamma_{\mathcal{Y}}$ -convergence est similaire à la Γ -convergence (cf. chapitre 1, définition 1.2.1).

Définition 2.3.2 *On dit que la famille \mathcal{H}_ε $\Gamma_{\mathcal{Y}}$ -converge vers \mathcal{H} au sens de la formulation en terme de mesures de Young et on écrit*

$$\mathcal{H}_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma_{\mathcal{Y}}} \mathcal{H}$$

si, et seulement si, pour tout ν in $\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$ les deux assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\forall \mu_\varepsilon \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$, telle que $\mu_\varepsilon \xrightarrow{mem} \nu$, $\mathcal{H}(\nu) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon)$,
- (ii) $\exists \theta_\varepsilon \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$, telle que $\theta_\varepsilon \xrightarrow{mem} \nu$, $\mathcal{H}(\nu) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon(\theta_\varepsilon)$.

Remarque 2.3.1 *Les deux fonctionnelles $\Gamma_{\mathcal{Y}}$ -lim inf \mathcal{H}_ε et $\Gamma_{\mathcal{Y}}$ -lim sup \mathcal{H}_ε définies de $\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$ dans $]-\infty, +\infty]$ par*

$$\Gamma_{\mathcal{Y}}\text{-lim inf } \mathcal{H}_\varepsilon(\nu) = \inf \left\{ \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon) : \mu_\varepsilon \xrightarrow{mem} \nu \right\}$$

$$\Gamma_{\mathcal{Y}}\text{-lim sup } \mathcal{H}_\varepsilon(\nu) = \inf \left\{ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon) : \mu_\varepsilon \xrightarrow{mem} \nu \right\}.$$

sont s.c.i sur $\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$ et $\mathcal{H}_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma_{\mathcal{Y}}} \mathcal{H}$ si, et seulement si, on a pour tout ν dans $\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$

$$\Gamma_{\mathcal{Y}}\text{-lim sup } \mathcal{H}_\varepsilon(\nu) \leq \mathcal{H}(\nu) \leq \Gamma_{\mathcal{Y}}\text{-lim inf } \mathcal{H}_\varepsilon(\nu).$$

La propriété variationnelle de la $\Gamma_{\mathcal{Y}}$ -convergence est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.3.2 *Supposons que la famille $(\mathcal{H}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ $\Gamma_{\mathcal{Y}}$ -converge vers \mathcal{H} et que $\mu_\varepsilon \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$ vérifie*

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon) \leq \inf \left\{ \mathcal{H}_\varepsilon(\mu) : \mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}) \right\} + \varepsilon.$$

2.3. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG

Si (μ_ε) est relativement compact relativement à la convergence étroite au sens des membranes, alors toute valeur d'adhérence ν est un minimum de \mathcal{H} dans $\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$ et on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \mathcal{H}_\varepsilon(\mu) : \mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}) \} = \mathcal{H}(\nu).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\nu \in \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$ telle que $\mu_\varepsilon \xrightarrow{\text{mem}} \nu$. D'après (i) de la définition 2.3.2, on a

$$\mathcal{H}(\nu) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon). \quad (2.7)$$

D'autre part, grâce à (ii) de la définition 2.3.2, pour tout σ dans $\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$ il existe (σ_ε) dans $\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$ telle que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon) \leq \mathcal{H}(\sigma). \quad (2.8)$$

De (2.7) et (2.8), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\nu) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon) &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \{ \mathcal{H}_\varepsilon(\mu) : \mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}) \} \\ &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon(\sigma_\varepsilon) \leq \mathcal{H}(\sigma), \end{aligned}$$

d'où alors ν est un minimum de \mathcal{H} dans $\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$. Et l'égalité

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \mathcal{H}_\varepsilon(\mu) : \mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}) \} = \mathcal{H}(\nu)$$

découle, en remplaçant dans l'inégalité ci-dessus σ par ν . ■

2.3.3 Résultat principal dans la formulation en terme de mesures de Young

On note les deux énergies totales formulées en terme de mesures de Young par

$$\mathcal{H}_\varepsilon := \mathcal{F}_\varepsilon - \mathcal{L} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} := \mathcal{F} - \overline{\mathcal{L}}.$$

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 *Soit $\{\mathcal{H}_\varepsilon, \mathcal{H}; \varepsilon > 0\}$ la famille de fonctionnelles intégrales définie ci-dessus. On a*

- (i) *Compacité : Si $\sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon) < +\infty$, alors (μ_ε) est étroitement relativement compact au sens des membranes.*

2.3. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG

(ii) $\Gamma_{\mathcal{Y}}$ -Convergence : La famille $(\mathcal{H}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ $\Gamma_{\mathcal{Y}}$ -converge vers \mathcal{H} .

DÉMONSTRATION.

Vérification de (i). Comme $\{\mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ est équibornée, alors de (2.1) on obtient aisément

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_\varepsilon = \delta_{\nabla u_\varepsilon(x)} \otimes \mathcal{L}, \\ \mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon) = \int_{\Omega} f(\widehat{\nabla} u_\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3}) dx - \int_{\Omega} g \cdot u_\varepsilon dx, \\ (\nabla u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \text{ bornée dans } L^p(\Omega, \mathbb{M}^{3 \times 3}), \\ (\widehat{\nabla} u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \text{ bornée dans } L^p(\Omega, \mathbb{M}^{3 \times 2}), \\ (\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3})_{\varepsilon>0} \text{ bornée dans } L^p(\Omega, \mathbb{R}^3). \end{array} \right.$$

Puisque $(\nabla u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^p(\Omega, \mathbb{M}^{3 \times 3})$, la suite $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est tendue. Par conséquent, il existe $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$ et une suite extraite de (μ_ε) , que l'on ne réindexera pas, vérifiant

$$\mu_\varepsilon \xrightarrow{e} \mu \text{ in } \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}).$$

Par ailleurs, comme $(\widehat{\nabla} u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^p(\Omega, \mathbb{M}^{3 \times 2})$, pour une suite extraite associée à $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, la suite $(\widehat{\mu}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (où $\widehat{\mu}_\varepsilon := \delta_{\widehat{\nabla} u_\varepsilon(x)} \otimes d\widehat{x}$) est tendue. Par suite il existe $\widehat{\mu} \in \widehat{\nabla} \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$ telles que à une sous suite près

$$\widehat{\mu}_\varepsilon \xrightarrow{e} \widehat{\mu} \text{ dans } \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}).$$

Enfin, comme $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \rightarrow 0$ in $L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)$, on en déduit que

$$\delta_{\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3}(x)} \otimes dx \xrightarrow{e} \delta_0 \otimes \mathcal{L} \text{ dans } \mathcal{Y}(\Omega, \mathbb{R}^3),$$

ce qui entraîne que

$$\mu_x = \widehat{\mu}_x \otimes \delta_0,$$

et donc $\mu \in \nabla \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2, 0})$. En posant $\nu = \Theta(\mu)$, on obtient que

$$\mu_\varepsilon \xrightarrow{\text{mem}} \nu.$$

D'où (μ_ε) est étroitement relativement compact au sens des membranes.

2.3. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG

Vérification de (ii). Il suffit de vérifier les deux assertions de la définition 2.3.2.

(a) Montrons que pour tout $\mu_\varepsilon \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$ et $\nu \in \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$ tels que $\mu_\varepsilon \xrightarrow{\text{mem}} \nu$, on a

$$\mathcal{H}(\nu) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon).$$

Supposons que $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon) < +\infty$, sinon il n'y a rien à démontrer. D'où $\sup_\varepsilon \mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon) < +\infty$. Par suite, $\mu_\varepsilon \in \mathcal{E}\nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$, c'est à dire qu'il existe une suite dans $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ qui est bornée par (2.1). D'autre part, puisque $\mu_\varepsilon \xrightarrow{\text{mem}} \nu$, il existe $\mu \in \nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2,0})$ tel que $\mu_\varepsilon \xrightarrow{e} \mu$ et $\nu = \Theta(\mu) = \bar{\mu}$ (cf. définition 2.3.1). En vertu de la proposition 2.3.1, $\nu \in \nabla\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$. Il vient ainsi,

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon) &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega \times \mathbb{M}^{3 \times 3}} f\left(\hat{\lambda}, \frac{1}{\varepsilon} \lambda_3\right) d\mu_\varepsilon(x, \lambda) - \int_{\Omega} \tilde{g} \cdot u_\varepsilon dx \right) \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega \times \mathbb{M}^{3 \times 3}} f_0(\hat{\lambda}) d\mu_\varepsilon(x, \lambda) - \int_{\Omega} \tilde{g} \cdot u_\varepsilon dx \right). \end{aligned}$$

En utilisant le théorème fondamental des mesures de Young (cf. chap.1, th. 1.4.3), on obtient

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon) &\geq \int_{\Omega \times \mathbb{M}^{3 \times 3}} f_0(\hat{\lambda}) d\mu(x, \lambda) - \int_{\Omega} g \cdot u dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{M}^{3 \times 3}} f_0(\hat{\lambda}) d\hat{\mu}_x \otimes \delta_0 \right) dx - \int_{\Omega} g \cdot u dx \\ &= \int_{\omega \times \mathbb{M}^{3 \times 2}} f_0(\hat{\lambda}) d\bar{\mu}_x d\hat{x} - \int_{\omega} \bar{g} \cdot \nabla^{-1} \mathbf{E}\mu(\bar{\mu}) d\hat{x} \\ &= \mathcal{H}(\nu). \end{aligned}$$

(b) Soit $\nu \in \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$. Montrons que

$$\Gamma_{\mathcal{Y}}\text{-lim sup } \mathcal{F}_\varepsilon(\nu) \leq \mathcal{F}(\nu).$$

Afin d'alléger la démonstration, on ne prend pas en considération l'énergie des forces extérieures.

On suppose que $\mathcal{F}(\nu) < +\infty$. Alors $\nu \in \nabla\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$ et en vertu du lemme de décomposition (cf. chap.1, lemme. 1.4.1), il existe $v_\eta \in W_{\gamma_0}^{1,p}(\omega, \mathbb{R}^3)$ telle que

$$\delta_{\nabla v_\eta}(\hat{x}) \otimes d\hat{x} \xrightarrow{e} \nu \quad \text{dans } \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}),$$

$$(|\nabla v_\eta|^p)_{\eta>0} \text{ est U.I. sur } \omega.$$

2.3. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG

Par conséquent

$$\mathcal{F}(\nu) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\omega} f_0(\nabla v_{\eta}(\hat{x})) d\hat{x}. \quad (2.9)$$

Soit $\xi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\omega, \mathbb{R}^3)$. On définit alors $(u_{\varepsilon, \eta}) \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et sa mesure de Young associée par

$$\begin{cases} u_{\varepsilon, \eta}(x) = v_{\eta}(\hat{x}) + \varepsilon x_3 \xi(\hat{x}), \\ \mu_{\varepsilon, \eta} := \delta_{\nabla u_{\varepsilon, \eta}}(x) \otimes dx. \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier que

$$\mu_{\varepsilon, \eta} \xrightarrow{\text{mem}} \nu_{\eta} = \delta_{\widehat{\nabla} v_{\eta}(\hat{x})} \otimes d\hat{x},$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$. D'autre part

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_{\varepsilon}(\mu_{\varepsilon, \eta}) = \int_{\omega} f(\nabla v_{\eta}(\hat{x}), \xi(\hat{x})) d\hat{x}.$$

On a donc

$$\Gamma_{\mathcal{Y}}\text{-lim sup } \mathcal{F}_{\varepsilon}(\nu_{\eta}) \leq \int_{\omega} f(\nabla v_{\eta}(\hat{x}), \xi(\hat{x})) d\hat{x}.$$

En prenant l'infimum sur $\xi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\omega, \mathbb{R}^3)$ dans l'inégalité de droite, on obtient

$$\Gamma_{\mathcal{Y}}\text{-lim sup } \mathcal{F}_{\varepsilon}(\nu_{\eta}) \leq \int_{\omega} f_0(\nabla v_{\eta}(\hat{x})) d\hat{x}.$$

Par semicontinuité de $\Gamma_{\mathcal{Y}} \text{ lim sup } \mathcal{F}_{\varepsilon}$ sur $\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$, en faisant tendre $\eta \rightarrow 0$, et grâce à (2.9) il résulte que

$$\Gamma_{\mathcal{Y}}\text{-lim sup } \mathcal{F}_{\varepsilon}(\nu) \leq \mathcal{F}(\nu).$$

Finalement, de (a) et (b), on obtient que pour tout $\nu \in \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$

$$\Gamma_{\mathcal{Y}}\text{-lim sup } \mathcal{F}_{\varepsilon}(\nu) \leq \mathcal{F}(\nu) \leq \Gamma_{\mathcal{Y}} \text{ lim inf } \mathcal{F}_{\varepsilon}(\nu),$$

autrement dit

$$\mathcal{F}_{\varepsilon} \xrightarrow{\Gamma_{\mathcal{Y}}} \mathcal{F}.$$

La démonstration du théorème est donc achevée.

2.3. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG

Le corollaire suivant donne la propriété variationnelle de cette formulation et sa relation avec le problème classique.

Corollaire 2.3.1

(i) Soit $\mu_\varepsilon \in \mathcal{E}\nabla\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})$ associée à $u_\varepsilon \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon) \leq \inf_{\mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3})} \mathcal{H}_\varepsilon + \varepsilon.$$

Alors toute valeur d'adhérence ν de $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, relativement à la convergence étroite au sens des membranes (cf. (i) du théorème 3.3.1), est solution du problème

$$\min_{\sigma \in \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})} \mathcal{H}(\sigma).$$

De plus, (u_ε) converge faiblement dans $W_{\Gamma_0}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$, et sa limite $\bar{u} \in W_{\gamma_0}^{1,p}(\omega, \mathbb{R}^3)$ est solution de la formulation classique

$$\min \{ \tilde{F}(u) - \tilde{L}(u) : u \in W_{\gamma_0}^{1,p}(\omega, \mathbb{R}^3) \},$$

vérifiant

$$\nabla \bar{u}(\hat{x}) = \int_{\mathbb{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} d\nu_{\hat{x}}(\hat{\lambda}), \quad \hat{x} \in \omega \text{ p.p.}$$

(ii) Si ν est solution de $\min_{\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})} \mathcal{H}$, alors

$$\int_{\mathbb{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} d\nu_{\hat{x}}(\hat{\lambda}) = \nabla \bar{u}(\hat{x}),$$

où \bar{u} est solution du problème classique

$$\min \{ \tilde{F}(u) - \tilde{L}(u) : u \in W_{\gamma_0}^{1,p}(\omega, \mathbb{R}^3) \}.$$

DÉMONSTRATION. (i) est une conséquence de la proposition 2.4.2. Montrons alors (ii). Supposons que ν est solution de

$$\min \{ H(\theta) : \theta \in \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}) \}.$$

Comme ν appartient à $\nabla\mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2})$, en vertu du théorème 1.5.1, il existe $u \in W_{\gamma_0}^{1,p}(\omega, \mathbb{R}^3)$ tel que

$$\widehat{\nabla} u(\hat{x}) = \int_{\mathbb{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} d\nu_{\hat{x}}(\hat{\lambda}), \quad \hat{x} \in \omega \text{ p.p.}$$

2.4. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG-VARIFOLD

D'autre part l'inégalité de quasiconvexité entraîne que

$$\begin{aligned} \int_{\omega} Qf_0(\widehat{\nabla}u(\widehat{x})) d\widehat{x} &= \int_{\omega} Qf_0\left(\int_{\mathbb{M}^{3 \times 2}} \widehat{\lambda} d\nu_{\widehat{x}}(\widehat{\lambda})\right) \leq \int_{\omega} \int_{\mathbb{M}^{3 \times 2}} Qf_0(\widehat{\lambda}) d\nu_{\widehat{x}}(\widehat{\lambda}) dx \\ &\leq \int_{\omega} \int_{\mathbb{M}^{3 \times 2}} f_0(\widehat{\lambda}) d\nu_{\widehat{x}}(\widehat{\lambda}) dx \\ &= \mathcal{F}(\nu). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} F(u) - L(u) \leq \mathcal{H}(\nu) &= \min \{ \mathcal{H}(\theta) : \theta \in \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}) \} \\ &= \min \{ F(v) - L(v) : v \in W_{\gamma_0}^{1,p}(\omega, \mathbb{R}^3) \}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du corollaire 1.6.1 (cf. chap. 1, sect. 6).

2.4 Formulation en terme de mesures de Young-varifold

Dans la suite de cette section on suppose que $\Gamma = \partial\omega \times]0, 1[$. On note respectivement par $\mathcal{S}^{3 \times 3}$ et $\mathcal{S}^{3 \times 2}$ les sphères unités de $\mathbb{M}^{3 \times 3}$ et $\mathbb{M}^{3 \times 2}$, et on définit l'espace de mesures Young-varifold $\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3})$ paramétrées sur Ω à valeur dans $\mathbb{M}^{3 \times 3}$ par

$$\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3}) := \mathcal{Y}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}) \times \mathbb{M}^+(\Omega \times \mathcal{S}^{3 \times 3}),$$

muni de la topologie produit étroite-faible.

Pour tout $(\mu, \theta) \in \mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3})$, il existe en vertu du théorème de désintégration (cf. chap. 1, théorème 1.4.1) une famille de mesures de probabilités $\{\mu_x\}_{x \in \Omega}$ sur $\mathbb{M}^{3 \times 3}$ et une famille de mesures de probabilités $\{\theta_x\}_{x \in \Omega}$ sur $\mathcal{S}^{3 \times 3}$ telles que

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_x \otimes dx \\ \theta &= \theta_x \otimes \pi, \end{aligned}$$

où $\pi = \theta \circ P_{\Omega}^{-1}$ est l'image de θ par la projection \mathcal{P}_{Ω} sur Ω . Par la décomposition de Radon-Nikodym de la mesure π , on a

$$\pi = \frac{d\pi}{d\mathcal{L}} \mathcal{L} + \pi_s,$$

où π_s est la partie singulière de π .

2.4. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG-VARIFOLD

On notera par $\nabla\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3})$ l'espace des $W_0^{1,p}$ -mesures de Young-varifold telles que définies dans le chapitre 1, définition 1.5.3, en remplaçant $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ par $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

On définit alors le sous-espace $\nabla\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2,0}; \mathcal{S}^{3 \times 2,0}) \subset \nabla\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3})$ qu'on utilisera dans la formulation du problème de membrane non linéaire, comme suit

$$(\mu, \theta) \in \nabla\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2,0}; \mathcal{S}^{3 \times 2,0}) \iff \begin{cases} \exists (u_\varepsilon) \text{ vérifiant (2.5)} \\ \delta_{\frac{\nabla u_\varepsilon}{|\nabla u_\varepsilon|}(x)} \otimes |\nabla u_\varepsilon|^p dx \rightharpoonup \theta \\ \delta_{\frac{\widehat{\nabla} u_\varepsilon}{|\widehat{\nabla} u_\varepsilon|}(x)} \otimes |\widehat{\nabla} u_\varepsilon|^p dx \rightharpoonup \widehat{\theta} \\ \theta \circ \mathcal{P}_\Omega^{-1} = \widehat{\theta} \circ \mathcal{P}_\Omega^{-1} := \pi \\ \theta_x = \widehat{\theta}_x \circ H^{-1} \quad x \in \Omega \quad \pi p.p \end{cases} \quad (2.10)$$

où $\delta_{\frac{\widehat{\nabla} u_\varepsilon}{|\widehat{\nabla} u_\varepsilon|}(x)} \otimes |\widehat{\nabla} u_\varepsilon|^p dx \rightharpoonup \widehat{\theta}$ est une convergence faible dans $\mathbb{M}^+(\Omega \times \mathcal{S}^{3 \times 2})$, $(\theta_x)_{x \in \Omega}$ est une famille de mesures de probabilités sur la sphère $\mathcal{S}^{3 \times 3}$ de $\mathbb{M}^{3 \times 3}$ et $(\widehat{\theta}_x)_{x \in \Omega}$ est une familles de mesures de probabilités sur la sphère unité $\mathcal{S}^{3 \times 2}$ de $\mathbb{M}^{3 \times 2}$, obtenues respectivement par désintégration de θ et $\widehat{\theta}$ par rapport à π . La mesure projection π n'est autre que la limite faible de $|\nabla u_\varepsilon|^p dx$ et l'application H est l'extension définie par

$$\begin{aligned} H : \mathcal{S}^{3 \times 2} &\longrightarrow \mathcal{S}^{3 \times 3} \\ \widehat{\lambda} &\longmapsto H(\widehat{\lambda}) = (\widehat{\lambda}, 0). \end{aligned}$$

D'une manière similaire, on définit $\mathcal{YV}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$ l'espace des mesures de Young-varifold paramétrées sur ω à valeurs dans $\mathbb{M}^{3 \times 2}$ par

$$\mathcal{YV}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2}) = \mathcal{Y}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}) \times \mathbb{M}^+(\omega \times \mathcal{S}^{3 \times 2}).$$

qu'on munit de sa topologie produit étroite-faible.

On désignera par $\nabla\mathcal{YV}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$ l'espace des $W_0^{1,p}$ -mesures de Young-varifold telles que définies dans le chapitre 1, définition 1.5.3, en remplaçant $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ par $W_0^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3)$, autrement dit

$$(\nu, \theta) \in \nabla\mathcal{YV}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2}) \iff \begin{cases} \exists (u_\varepsilon) \text{ bornée dans } W_0^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3) \\ \delta_{\nabla u_\varepsilon(\widehat{x})} \otimes d\widehat{x} \xrightarrow{c} \nu \\ \delta_{\frac{\nabla u_\varepsilon}{|\nabla u_\varepsilon|}(\widehat{x})} \otimes |\nabla u| dx \rightharpoonup \theta \end{cases}$$

2.4. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG-VARIFOLD

Le passage de l'espace $\nabla\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2, 0}; \mathcal{S}^{3 \times 2, 0})$ à l'espace $\nabla\mathcal{YV}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$ est donné par l'opérateur Ξ définie par :

$$\begin{aligned} \Xi : \nabla\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2, 0}; \mathcal{S}^{3 \times 2, 0}) &\longrightarrow \mathcal{YV}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2}) \\ (\mu, \theta) &\longmapsto (\bar{\mu}, \bar{\theta}), \end{aligned}$$

$$\text{où } \bar{\mu}_{\hat{x}} := \int_0^1 \hat{\mu}_{\hat{x}, s} ds \text{ et } \bar{\theta}_{\hat{x}} := \int_0^1 \hat{\theta}_{\hat{x}, t} d\pi_{\hat{x}}(t), \quad \bar{\theta} = \bar{\theta}_{\hat{x}} \otimes \pi^\omega.$$

Les mesures $\hat{\mu}$ et $\hat{\theta}$ sont définies par (2.5) et (2.10), et $(\pi_{\hat{x}})_{\hat{x} \in \omega}$ est une famille de mesures de probabilités sur $]0, 1[$ obtenue par désintégration de la mesure π par rapport à sa projection π^ω sur ω , c'est à dire

$$\pi = \pi_{\hat{x}} \otimes \pi^\omega, \quad \text{où } \pi^\omega = \pi \circ \mathcal{P}_\omega^{-1}.$$

Comme dans la section précédente, on obtient la proposition suivante :

Proposition 2.4.1 (cf. [24], proposition 1)

L'image de l'espace $\nabla\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2, 0}; \mathcal{S}^{3 \times 2, 0})$ par l'opérateur Ξ est l'espace $\nabla\mathcal{YV}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$.

2.4.1 Effets d'oscillation et de concentration : Formulation de l'énergie associée à la structure mince en terme de mesures Young-varifold

Puisque la formulation des foces volumiques extérieures est la même que celle de la section précédente, on se restreint à la formulation de l'énergie potentielle associée à la structure mince.

Dans l'intention de prendre en compte les effets d'oscillation et de concentration du gradient de la suite minimisante en utilisant les "varifold", on reformule l'énergie potentielle associée à la structure mince en terme de mesures de Young-varifold. Pour des raisons techniques, on considère un ouvert borné $\tilde{\Omega} = \tilde{\omega} \times]0, 1[$ où $\tilde{\omega}$ est un ouvert borné arbitraire de \mathbb{R}^2 tel que $\omega \subset \bar{\omega} \subset \tilde{\omega}$. Pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, on notera par \tilde{u} sa prolongée par zéro sur $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$. On utilisera les mêmes notations dx et $d\hat{x}$, pour désigner respectivement la mesure de Lebesgue restreinte à Ω (ou $\tilde{\Omega}$) et ω (ou $\tilde{\omega}$).

On définira respectivement $\mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3})$, $\nabla\mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3})$, $\nabla\mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2, 0}; \mathcal{S}^{3 \times 2, 0})$, $\mathcal{YV}(\tilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$ et $\nabla\mathcal{YV}(\tilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$ telles que sont définies les espaces $\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3})$, $\nabla\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3})$, $\nabla\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 2, 0}; \mathcal{S}^{3 \times 2, 0})$, $\mathcal{YV}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$ et $\nabla\mathcal{YV}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$, où on

2.4. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG-VARIFOLD

remplacera respectivement Ω , ω et u par $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\omega}$ et \tilde{u} et les mesures de Young-varifold sont générées par (\tilde{u}_ε) au lieu de (u_ε) .

Ceci dit, nous allons maintenant donner un lemme précisant la relation entre les deux espaces $\nabla\mathcal{YV}(\tilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$ et $\nabla\mathcal{YV}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$. La preuve est similaire à celle du lemme 1.7.1 (cf. chap. 1).

Lemme 2.4.1 *Soit $(\nu, m) \in \nabla\mathcal{YV}(\tilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$. Alors*

$$\begin{cases} \nu = \nu_{|\omega \times \mathbb{M}^{3 \times 2}} + \delta_0 \otimes \mathcal{L}_{|(\tilde{\omega} \setminus \omega)}, \\ m = m_{|\omega \times \mathcal{S}^{3 \times 2}} + m_{|(\tilde{\omega} \setminus \omega) \times \mathcal{S}^{3 \times 2}}, \end{cases}$$

où $(\nu_{|\omega \times \mathbb{M}^{3 \times 2}}, m_{|\omega \times \mathcal{S}^{3 \times 2}})$ appartient à $\nabla\mathcal{YV}(\omega; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$ et $m_{|(\tilde{\omega} \setminus \omega) \times \mathcal{S}^{3 \times 2}}$ est concentrée sur $\partial\omega \times \mathcal{S}^{3 \times 2}$.

Il est à noter que puisque le support de la mesure $m_{|(\tilde{\omega} \setminus \omega) \times \mathcal{S}^{3 \times 2}}$ est inclu dans $\partial\omega \times \mathcal{S}^{3 \times 2}$,

$$m_{|\omega \times \mathcal{S}^{3 \times 2}} + m_{|(\tilde{\omega} \setminus \omega) \times \mathcal{S}^{3 \times 2}} = m_{|\omega \times \mathcal{S}^{3 \times 2}} + m_{|\partial\omega \times \mathcal{S}^{3 \times 2}}.$$

On en déduit alors que cette décomposition ne dépend pas du choix de l'extension $\tilde{\omega}$ de ω .

2.4.2 Formulation en terme de mesures de Young-varifold de l'énergie associée à la structure élastique mince

Pour reformuler le problème (3.3) en terme de mesures de Young-varifold, on définit $\mathfrak{F}_\varepsilon : \mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3}) \longrightarrow]0, +\infty]$ l'énergie potentielle élastique associée à la structure élastique mince par

$$\mathfrak{F}_\varepsilon(\mu, \theta) = \begin{cases} \int_{\Omega \times \mathbb{M}^{3 \times 3}} f\left(\hat{\lambda}, \frac{1}{\varepsilon} \lambda_3\right) d\mu(x, \lambda) & \text{si } (\mu, \theta) \in \mathcal{E}\nabla\mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3}) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\mathcal{E}\nabla\mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3})$ est un sous ensemble de $\nabla\mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3})$ définie par

$$(\nu, m) \in \mathcal{E}\nabla\mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3}) \iff \begin{cases} \exists u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3) \text{ tel que :} \\ \nu = \delta_{\nabla\tilde{u}(x)} \otimes dx, \\ m = \delta_{\frac{\nabla\tilde{u}}{|\nabla\tilde{u}|}(x)} \otimes |\nabla\tilde{u}|^p dx. \end{cases}$$

2.4. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG-VARIFOLD

A partir de cette formulation, on voit facilement que pour (μ, θ) dans le domaine de la fonctionnelle \mathfrak{F}_ε on a

$$\mathfrak{F}_\varepsilon(\mu, \theta) = \tilde{F}_\varepsilon(u),$$

pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ associée à (μ, θ) .

Soit $f_0^\infty : \mathbb{M}^{3 \times 2} \rightarrow [0, +\infty[$ la fonction de récession de la densité f_0 (cf. chap. 1, sect. 7), p -homogène et vérifiant l'hypothèse suivante :

$$\lim_{|\hat{\lambda}| \rightarrow +\infty} \frac{f_0(\hat{\lambda}) - f_0^\infty(\hat{\lambda})}{|\hat{\lambda}|^p} = 0. \quad (2.11)$$

L'énergie potentielle élastique \mathfrak{F} associée au problème limite dans la formulation en terme de mesures de Young-varifold est donnée par $\mathfrak{F} : \mathcal{YV}(\tilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2}) \rightarrow]0, +\infty]$,

$$\mathfrak{F}(\nu, m) = \begin{cases} \int_{\omega \times \mathbb{M}^{3 \times 2}} [f_0 - f_0^\infty](\hat{\lambda}) \, d\nu \\ \quad + \int_{\tilde{\omega} \times \mathcal{S}^{3 \times 2}} f_0^\infty(\hat{\lambda}) \, dm & \text{si } (\nu, m) \in \nabla \mathcal{YV}(\tilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2}), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.4.3 $\Gamma_{\mathcal{YV}}$ -convergence dans la formulation en terme de mesures de Young-varifold

Dans cette partie, on introduit une convergence variationnelle afin de justifier le passage limite de la formulation précédente. On commence par introduire une notion de convergence faible entre les éléments des deux espaces $\mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3})$ et $\mathcal{YV}(\tilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$.

Définition 2.4.1 Soient une famille $(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ de $\mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3})$ et (ν, m) dans $\mathcal{YV}(\tilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$. On dit $(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ converge faiblement au sens des membranes vers (ν, m) , et on écrit

$$(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \xrightarrow{mem} (\nu, m)$$

si, et seulement si, il existe (μ, θ) dans $\nabla \mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2,0}; \mathcal{S}^{3 \times 2,0})$ telle que

$$(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \rightharpoonup (\mu, \theta) \text{ et } (\nu, m) = \Xi(\mu, \theta).$$

2.4. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG-VARIFOLD

Il est à remarquer, qu'en vertu de la proposition 2.4.1, la mesure limite faible au sens des membranes (ν, m) appartient à $\nabla\mathcal{YV}(\tilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$.

On considère les deux familles de fonctionnelles

$$\mathcal{H}_\varepsilon : \mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3}) \longrightarrow] - \infty, +\infty]$$

$$\mathcal{H} : \mathcal{YV}(\tilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2}) \longrightarrow] - \infty, +\infty].$$

Définition 2.4.2 On dit que la famille \mathcal{H}_ε $\Gamma_{\mathcal{YV}}$ -converge vers \mathcal{H} au sens de la formulation en terme de mesures de Young-varifold et on écrit

$$\mathcal{H}_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma_{\mathcal{YV}}} \mathcal{H}$$

si, et seulement si, pour tout $(\nu, m) \in \mathcal{YV}(\tilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$, les deux assertions suivantes sont vérifiées :

$$\forall (\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3}), \text{ tel que } (\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \xrightarrow{mem} (\nu, m),$$

$$\mathcal{H}(\nu, m) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon).$$

$$\exists (\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3}) \text{ tel que } (\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \xrightarrow{mem} (\nu, m) \text{ et}$$

$$\mathcal{H}(\nu, m) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon).$$

Le même principe de démonstration de la proposition 3.3.2 s'adapte pour montrer la propriété variationnelle suivante :

Proposition 2.4.2 Soient la famille $(\mathcal{H}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ $\Gamma_{\mathcal{YV}}$ -convergeant vers \mathcal{H} et $\{(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ une famille de $\mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3})$ vérifiant

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \leq \inf \{ \mathcal{H}_\varepsilon(\mu, \theta) : (\mu, \theta) \in \mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3}) \} + \varepsilon.$$

Si $\{(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ est relativement compact pour la convergence faible au sens des membranes, alors toute valeur d'adhérence (ν, m) est un minimum de \mathcal{H} dans $\mathcal{YV}(\tilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$ et on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \{ \mathcal{H}_\varepsilon(\mu, \theta) : (\mu, \theta) \in \mathcal{YV}(\tilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3}) \} = \mathcal{H}(\nu, m).$$

2.4.4 Résultat principal dans la formulation en terme de mesures de Young-varifold

Le résultat principal dans la formulation en terme de mesures de Young-varifold est le théorème suivant :

Théorème 2.4.1 *Soit $\{\mathfrak{F}_\varepsilon, \mathfrak{F}; \varepsilon > 0\}$ la famille de fonctionnelles intégrales associées à la formulation en terme de mesures de Young-varifold (cf. sect. 3.4.2). On a alors*

(i) *Compacité : Si $\sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon) < +\infty$, alors $\{(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ est relativement compact pour la convergence faible au sens des membranes.*

(ii) *$\Gamma_{\mathcal{YV}}$ -Convergence : La famille $(\mathfrak{F}_\varepsilon)_\varepsilon$ $\Gamma_{\mathcal{YV}}$ -converge vers \mathfrak{F} .*

DÉMONSTRATION.

Vérification de (i). D'après (i) du théorème 2.3.1, il existe à une sous-suite près (μ_ε) et $\mu \in \nabla \mathcal{Y}_{3 \times 2, 0}(\tilde{\Omega})$ telle que $\mu_\varepsilon \xrightarrow{e} \mu$.

D'autre part

$$\theta_\varepsilon(\tilde{\Omega} \times \mathcal{S}^{3 \times 3}) = \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u_\varepsilon|^p dx < +\infty, \text{ pour } u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\tilde{\Omega}; \mathbb{R}^3).$$

D'où, à une sous-suite près, il existe $\theta \in \mathcal{M}^+(\tilde{\Omega} \times \mathcal{S}^{3 \times 3})$ tel que $\theta_\varepsilon \rightharpoonup \theta$, et donc $\theta = \theta_x \otimes \pi$. Le même raisonnement s'adapte pour établir que

$$\hat{\theta}_\varepsilon = \delta_{\frac{\widehat{\nabla} u_\varepsilon}{|\widehat{\nabla} u_\varepsilon|}(x)} \otimes |\widehat{\nabla} u_\varepsilon|^p dx$$

converge faiblement, à une sous-suite près, vers $\hat{\theta}$ dans $\mathcal{M}^+(\tilde{\Omega} \times \mathcal{S}^{3 \times 2})$, de plus on a $\hat{\theta} = \hat{\theta}_x \otimes \hat{\pi}$.

Comme $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \rightarrow 0$ dans $L^p(\tilde{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ on en déduit que $\hat{\pi} = \pi$. Montrons que $\theta_x = \hat{\theta}_x \circ H^{-1}$.

Soit $\phi \in \mathcal{C}_0(\tilde{\Omega})$ et choisissons $\psi \in \mathcal{C}(\mathcal{S}^{3 \times 3})$ tel que $\psi(\lambda) = \psi(\hat{\lambda}, 0)$. La convergence faible de θ_ε et $\hat{\theta}_\varepsilon$ implique d'une part que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tilde{\Omega}} \phi(x) \tilde{\psi}(\nabla u_\varepsilon) dx = \int_{\tilde{\Omega}} \phi(x) \left[\int_{\mathcal{S}^{3 \times 3}} \psi(\hat{\lambda}, 0) d\theta_x \right] d\pi(x), \quad (2.12)$$

2.4. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG-VARIFOLD

où $\tilde{\psi}$ est la prolongée p -homogène de ψ . D'autre part, si on pose $\phi(\widehat{\lambda}) = \psi(\widehat{\lambda}, 0)$ on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi(x) \tilde{\phi}(\widehat{\nabla} u_{\varepsilon}) dx &= \int_{\Omega} \varphi(x) \left[\int_{\mathcal{S}^{3 \times 2}} \phi(\widehat{\lambda}) d\widehat{\theta}_x(\widehat{\lambda}) \right] d\pi \\ &= \int_{\Omega} \varphi(x) \left[\int_{\mathcal{S}^{3 \times 2}} \phi(\widehat{\lambda}, 0) d\widehat{\theta}_x(\widehat{\lambda}) \right] d\pi. \end{aligned} \quad (2.13)$$

De (2.12) et (2.13), on obtient pour π -presque $x \in \Omega$

$$\int_{\mathcal{S}^{3 \times 3}} \psi(\lambda) d\theta_x(\lambda) = \int_{\mathcal{S}^{3 \times 2}} \psi(\widehat{\lambda}, 0) d\widehat{\theta}_x(\widehat{\lambda}) \int_{\mathcal{S}^{3 \times 2}} \psi \circ H(\widehat{\lambda}) d\widehat{\theta}_x(\widehat{\lambda}).$$

D'où, $\theta_x = \widehat{\theta}_x \circ H^{-1}$, et donc d'après (2.10) $(\mu, \theta) \in \nabla \mathcal{YV}(\widetilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2, 0}; \mathcal{S}^{3 \times 2, 0})$. En posant $\Xi(\mu, \theta) = (\nu, m)$, on obtient que

$$(\mu, \theta) \xrightarrow{\text{mem}} (\nu, m),$$

autrement dit, $(\mu_{\varepsilon}, \theta_{\varepsilon})$ est faiblement relativement compact au sens des membranes.

Vérification de (ii). Il suffit de vérifier les deux assertions de la définition 3.4.2.

(a) Montrons que pour tout $(\mu_{\varepsilon}, \theta_{\varepsilon}) \in \mathcal{YV}(\widetilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3})$ et $(\nu, m) \in \mathcal{YV}(\widetilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$ tels que $(\mu_{\varepsilon}, \theta_{\varepsilon}) \xrightarrow{\text{mem}} (\nu, m)$, on a

$$\mathfrak{F}(\nu, m) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathfrak{F}_{\varepsilon}(\mu_{\varepsilon}, \theta_{\varepsilon}).$$

On suppose que $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathfrak{F}_{\varepsilon}(\mu_{\varepsilon}, \theta_{\varepsilon}) < +\infty$. Puisque $(\mu_{\varepsilon}, \theta_{\varepsilon}) \xrightarrow{\text{mem}} (\nu, m)$, il existe $(\mu, \theta) \in \nabla \mathcal{YV}(\widetilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2, 0}; \mathcal{S}^{3 \times 2, 0})$ tel que

$$(\mu_{\varepsilon}, \theta_{\varepsilon}) \rightharpoonup (\mu, \theta) \text{ et } (\nu, m) = \Xi(\mu, \theta).$$

En vertu de la proposition 2.4.1, $(\nu, m) \in \nabla \mathcal{YV}(\widetilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$.

D'autre part, en supposant que $\sup_{\varepsilon > 0} \mathfrak{F}_{\varepsilon}(\mu_{\varepsilon}, \theta_{\varepsilon}) < +\infty$, il existe (u_{ε}) dans $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ tel que $(\mu, \theta) \in \nabla \mathcal{YV}(\widetilde{\Omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2, 0}; \mathcal{S}^{3 \times 2, 0})$ est généré par $(\tilde{u}_{\varepsilon})$. Plus précisément,

2.4. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG-VARIFOLD

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_\varepsilon := \delta_{\nabla \tilde{u}_\varepsilon(x)} \otimes dx \xrightarrow{\varepsilon} \mu, \\ \delta_{\widehat{\nabla} \tilde{u}_\varepsilon(x)} \otimes dx \xrightarrow{\varepsilon} \widehat{\mu}, \\ \mu_x = \widehat{\mu}_x \otimes \delta_0, \\ \theta_\varepsilon := \delta_{\frac{\nabla \tilde{u}_\varepsilon}{|\nabla \tilde{u}_\varepsilon|}(x)} \otimes |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|^p dx \rightarrow \theta, \\ \widehat{\theta}_\varepsilon := \delta_{\frac{\widehat{\nabla} \tilde{u}_\varepsilon}{|\widehat{\nabla} \tilde{u}_\varepsilon|}(x)} \otimes |\widehat{\nabla} \tilde{u}_\varepsilon|^p dx \rightarrow \widehat{\theta}, \\ \theta \circ \mathcal{P}_{\tilde{\Omega}}^{-1} = \widehat{\theta} \circ \mathcal{P}_{\tilde{\Omega}}^{-1} := \pi, \\ \theta_x = \widehat{\theta}_x \circ H^{-1}, \quad x \in \tilde{\Omega} \text{ } \pi - p.p.. \end{array} \right.$$

Le fait que $f_0^\infty(0) = 0$, entraîne

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathfrak{F}_\varepsilon(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_0(\widehat{\nabla} u_\varepsilon) dx \\ &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} [f_0 - f_0^\infty](\widehat{\nabla} u_\varepsilon) dx + \int_{\tilde{\Omega}} f_0^\infty(\widehat{\nabla} \tilde{u}_\varepsilon) dx \right) \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} [f_0 - f_0^\infty](\widehat{\nabla} u_\varepsilon) dx \\ &\quad + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tilde{\Omega}} f_0^\infty \left(\frac{\widehat{\nabla} \tilde{u}_\varepsilon}{|\widehat{\nabla} \tilde{u}_\varepsilon|} \right) |\widehat{\nabla} \tilde{u}_\varepsilon|^p dx. \end{aligned}$$

En utilisant à la fois, dans la dernière inégalité, le théorème fondamentale des mesures de Young (cf. chap1, th. 1.4.3), le théorème de désintégration (cf. chap 1, th.1.4.1) et le lemme 3.4.1, on obtient

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathfrak{F}_\varepsilon(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon) &\geq \int_{\Omega \times \mathbb{M}^{3 \times 3}} [f_0 - f_0^\infty](\widehat{\lambda}) d\mu + \int_{\tilde{\Omega} \times \mathcal{S}^{3 \times 2}} f_0^\infty(\widehat{\lambda}) d\widehat{\theta} \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{M}^{3 \times 2}} (f_0 - f_0^\infty)(\widehat{\lambda}) d\widehat{\mu}_x \right) dx \\ &\quad + \int_{\tilde{\Omega}} \left(\int_{\mathcal{S}^{3 \times 2}} f_0^\infty(\widehat{\lambda}) d\widehat{\theta}_x \right) d\pi, \end{aligned}$$

et à l'aide du théorème de Fubini et la désintégration $\pi = \pi_{\widehat{x}} \otimes \pi^{\widehat{\omega}}$, nous pouvons écrire

2.4. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG-VARIFOLD

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathfrak{F}_\varepsilon(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon) &\geq \int_{\omega \times \mathbb{M}^{3 \times 2}} [f_0 - f_0^\infty](\widehat{\lambda}) d\nu + \int_{\overline{\omega} \times \mathcal{S}^{3 \times 2}} f_0^\infty(\widehat{\lambda}) dm \\ &= \mathfrak{F}(\nu, m). \end{aligned}$$

où $(\nu, m) = \Xi(\mu, \theta)$. La première assertion est donc établie.

(b) Soit $(\nu, m) \in \mathcal{YV}(\widetilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2})$. Montrons

$$\Gamma_{\mathcal{YV}} - \limsup \mathfrak{F}_\varepsilon(\nu, m) \leq \mathfrak{F}(\nu, m).$$

On peut supposer que $\mathfrak{F}(\nu, m) < +\infty$. Soit alors $v_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3)$ telle que

$$\begin{aligned} \nu_\varepsilon &= \delta_{\nabla \tilde{v}_\varepsilon(\widehat{x})} \otimes d\widehat{x} \xrightarrow{\varepsilon} \nu \\ m_\varepsilon &:= \delta_{\frac{\nabla \tilde{v}_\varepsilon}{|\nabla \tilde{v}_\varepsilon|}(\widehat{x})} \otimes |\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^p d\widehat{x} \rightharpoonup m \end{aligned}$$

où la projection $\widehat{\pi}_\varepsilon = |\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^p d\widehat{x} \rightharpoonup \pi^{\widetilde{\omega}} = m \circ P_{\widetilde{\omega}}^{-1}$.

En vertu du lemme 1.7.2, on en déduit de (2.11) que $\widehat{x} \mapsto 1_\omega(\widehat{x})(f_0 - f_0^\infty)(\nabla \tilde{v}_\varepsilon(\widehat{x}))$ est uniformément intégrable. Ainsi par le théorème fondamental des mesures de Young

$$\int_{\omega \times \mathbb{M}^{3 \times 2}} (f_0 - f_0^\infty)(\widehat{\lambda}) d\nu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\omega (f_0 - f_0^\infty)(\nabla v_\varepsilon) d\widehat{x}. \quad (2.14)$$

D'autre part, puisque la mesure m_ε converge faiblement vers la mesure m dans $\mathcal{M}(\widetilde{\omega} \times \mathcal{S}^{3 \times 2})$, il résulte, par continuité de $\widehat{\lambda} \mapsto f_0^\infty(\widehat{\lambda})$, que la mesure $f_0^\infty m_\varepsilon$ converge faiblement vers la mesure $f_0^\infty m$ dans $\mathcal{M}(\widetilde{\omega} \times \mathcal{S}^{3 \times 2})$. Ainsi, par le fait que $\overline{\omega} \times \mathcal{S}^{3 \times 2}$ est compact de $\widetilde{\omega} \times \mathcal{S}^{3 \times 2}$, le théorème d'Alexandrov donne

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\omega} \times \mathcal{S}^{3 \times 2}} f_0^\infty(\widehat{\lambda}) dm &\geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{\omega}} f_0^\infty(\nabla \tilde{v}_\varepsilon) d\widehat{x} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\omega f_0^\infty(\nabla v_\varepsilon) d\widehat{x}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

De (2.14) et (2.15), on obtient

$$\mathfrak{F}(\nu, m) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\omega f_0(\nabla v_\varepsilon) d\widehat{x}.$$

L'assertion en découle en adaptant le raisonnement de (ii), (b) du théorème 2.3.1.

Le théorème est ainsi démontré.

2.4. FORMULATION EN TERME DE MESURES DE YOUNG-VARIFOLD

Le corollaire suivant est une conséquence du théorème 2.4.1, et sa démonstration est une simple adaptation de celle du corollaire 2.3.1.

Corollaire 2.4.1

(i) Soit $(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ associée à $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$\mathfrak{F}_\varepsilon(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \leq \inf_{\mathcal{YV}(\Omega; \mathbb{M}^{3 \times 3}; \mathcal{S}^{3 \times 3})} \mathfrak{F}_\varepsilon + \varepsilon.$$

Alors toute valeur d'adhérence (ν, m) de $\{(\mu_\varepsilon, \theta_\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$, relativement à la convergence faible au sens des membranes (cf. (i) du théorème 3.3.1), est un minimum du problème

$$\min \{ \mathfrak{F}(\sigma, \eta) ; (\sigma, \eta) \in \mathcal{YV}(\tilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2}) \},$$

et (u_ε) converge faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ vers le minimum \bar{u} de

$$\min \{ F(u) ; u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) \}$$

vérifiant

$$\nabla u(\hat{x}) = \int_{\mathcal{S}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} d\nu_{\hat{x}}.$$

De plus la mesure $m = m_{\hat{x}} \otimes \pi^\omega$ générée par (u_ε) , prend en compte les effets de concentration de $(\nabla u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ dans le sens que la projection $\pi_{\tilde{\omega}}$ sur $\tilde{\omega}$ est la projection sur $\tilde{\omega}$ de la limite faible de la mesure $|\nabla u_\varepsilon|^p dx$ dans $\mathcal{M}(\tilde{\Omega})$.

(ii) Si (ν, m) est un minimum du $\min \{ \mathfrak{F}(\sigma, \eta) ; (\sigma, \eta) \in \mathcal{YV}(\tilde{\omega}; \mathbb{M}^{3 \times 2}; \mathcal{S}^{3 \times 2}) \}$ alors le barycentre

$$\hat{x} \mapsto \int_{\mathbb{M}^{3 \times 2}} \hat{\lambda} d\nu_{\hat{x}}$$

est le gradient de la solution du problème classique

$$\min \{ F(u) : u \in W_0^{1,p}(\omega, \mathbb{R}^3) \}.$$

Chapitre 3

Homogénéisation d'une suite de fonctionnelles intégrales dépendante du temps.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on se propose d'étudier l'analyse limite d'une famille de fonctionnelles de type

$$F_\varepsilon(u) := \int_0^T \int_\Omega f_\varepsilon(x, \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}) dx dt, \quad (3.1)$$

où $]0, T[\times \Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $\varepsilon > 0$ un paramètre destiné à tendre vers zéro, $u \in W^{1,p}(]0, T[; L^p(\Omega))$ ($p > 1$), et $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ vérifiant les deux hypothèses :

(H1) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f_\varepsilon(\cdot, a)$ est mesurable et $f_\varepsilon(x, \cdot)$ convexe pour tout $x \in \Omega$ p.p.

(H2) Il existe $0 < \alpha \leq \beta$ tels que

$$\alpha|a|^p \leq f_\varepsilon(x, a) \leq \beta(1 + |a|^p),$$

pour tout $x \in \Omega$ p.p. et pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Ce type de problème apparaît dans l'étude des problèmes d'évolution non périodique à coefficient oscillant. Ce travail est une tentative de généralisation d'un résultat étudié dans [26, 38], pour une famille de fonctionnelles

$$F_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega |u' + a_\varepsilon u|^2 dx dt - \int_0^T \int_\Omega (u' + a_\varepsilon u) f dx dt, \quad u \in H_0^1(0, T; L^p(\Omega))$$

associée à l'équation linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon(t, x) + a_\varepsilon(t, x) u_\varepsilon(t, x) = f(t, x) & \text{in }]0, T[\times \Omega, \\ u_\varepsilon(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

où, afin d'alléger l'écriture, $\partial_t u$ désignera la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial t}$.

On utilisera les techniques de mesures de Young pour caractériser la Γ -limite, en adaptant une méthode similaire à celle utilisée dans [29]. Une autre approche, est d'utiliser une généralisation de la convergence à double échelle au cas non périodique introduite dans [27]. Dans le cas de l'homogénéisation classique, où l'intégrande est de la forme $f(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u(x))$, un résultat en terme de mesures de Young est obtenu récemment (cf. [5]).

3.2 Position du problème

Considérons l'espace

$$W^{1,p}(0, T; L^p(\Omega)) = \left\{ u \in L^p(]0, T[\times \Omega) : \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(]0, T[\times \Omega) \right\}.$$

Et on note par \mathbf{W}_0 le sous-espace de $W^{1,p}(0, T; L^p(\Omega))$ défini par

$$\mathbf{W}_0 := \{ u \in W^{1,p}(0, T; L^p(\Omega)) : u(0, x) = 0 \ x \in \Omega \text{ p.p.} \},$$

muni de la topologie faible induite par $W^{1,p}(0, T; L^p(\Omega))$.

Pour tout $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$ définissons l'ensemble \mathcal{X} par

$$\mathcal{X} = \{ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ est convexe et } \forall a \in \mathbb{R} : \alpha|a|^p \leq g(a) \leq \beta(1 + |a|^p) \}.$$

Remarque 3.2.1

1. Il est facile de voir que si $g \in \mathcal{X}$, alors g est localement lipschitzienne, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ telle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|g(a) - g(b)| \leq M|a - b|(1 + |a|^{p-1} + |b|^{p-1}).$$

Dans le cas de \mathbb{R}^N ($N > 1$), on raisonne par composante (cf [13]).

2. Puisque $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues, on le munit de la topologie de convergence uniforme sur des parties compactes. Ainsi par construction d'une distance appropriée, par exemple si $d : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $f, g \in \mathcal{X}$ par

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f - g\|_{[0, k]}}{1 + \|f - g\|_{[0, k]}}$$

où $\|f - g\|_{[0, k]} = \sup_{x \in [0, k]} |f(x) - g(x)|$. Alors (\mathcal{X}, d) est un espace métrique,

de plus \mathcal{X} est fermé borné. En vertu du 1 de la remarque 3.2.1, \mathcal{X} est équicontinu. Grâce au théorème d'Ascoli, on en déduit que (\mathcal{X}, d) est compact.

Soit la fonction mesurable $x \mapsto f_\varepsilon(x, \cdot)$ de Ω dans \mathcal{X} . On considère alors $F_\varepsilon : \mathbf{W}_0 \rightarrow [0, +\infty[$ définie par

$$F_\varepsilon(u) = \int_0^T \int_\Omega f_\varepsilon(x, \partial_t u(t, x)) dx dt,$$

Associons la mesure de Young $\mu_\varepsilon \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathcal{X})$ à la fonction $x \mapsto f_\varepsilon(x, \cdot)$.

3.3. RÉSULTAT PRINCIPAL

Autrement dit, c'est l'image de la mesure de Lebesgue sur Ω par

$$\begin{aligned} G_\varepsilon : \Omega &\rightarrow \Omega \times \mathcal{X} \\ x &\mapsto (x, f_\varepsilon(x, \cdot)). \end{aligned}$$

En utilisant la remarque 3.2.1, on en déduit que la suite (μ_ε) est tendue. Ainsi, on peut extraire une sous-suite, que l'on ne réindexera pas, telle que (μ_ε) converge étroitement. Notons alors $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathcal{X})$ sa limite.

3.3 Résultat principal

Nous présentons ici le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.3.1 *Soit (μ_ε) convergeant étroitement vers μ dans $\mathcal{Y}(\Omega; \mathcal{X})$. Alors la famille $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ Γ -converge, relativement à la topologie faible de \mathbf{W}_0 , vers F donnée par*

$$\begin{aligned} F(u) = \inf \left\{ \int_0^T \int_{\Omega \times \mathcal{X}} \Lambda \left(\frac{\partial}{\partial t} U(t, x, \Lambda) \right) d\mu(x, \Lambda) dt : \right. \\ \left. U \in \mathcal{W}, \int_{\mathcal{X}} U(t, x, \Lambda) d\mu_x(\Lambda) = u(t, x), \mathcal{L} - p.p. \right\} \quad (3.2) \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{W} := \left\{ U \in W^{1,p}([0, T]; L^p_\mu(\Omega \times \mathcal{X})) / U(0, x, \Lambda) = 0, (x, \Lambda) \in \Omega \times \mathcal{X} \mu - p.p. \right\}$$

et $\{\mu_x\}_{x \in \Omega}$ est une famille de mesures de probabilités sur \mathcal{X} , obtenue par désintégration de μ par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}|_\Omega$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier les deux assertions (i) et (ii) de la définition 1.2.1.

Vérification de (i). Montrons que pour tout $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans \mathbf{W}_0 on a

$$F(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F(u_\varepsilon).$$

Si le second membre de l'inégalité ci-dessus vaut $+\infty$, le résultat est trivial. Sinon, en extrayant une sous-suite, on se ramène au cas où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(u_\varepsilon) < +\infty.$$

3.3. RÉSULTAT PRINCIPAL

Soit $\nu_\varepsilon \in \mathcal{Y}(]0, T[\times \Omega; \mathcal{X} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ associée à

$$\begin{aligned}]0, T[\times \Omega &\longrightarrow \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2 \\ (t, x) &\longmapsto (f_\varepsilon(x, \cdot), u_\varepsilon(t, x), \partial_t u_\varepsilon(t, x)). \end{aligned}$$

Alors pour tout ψ mesurable et positive sur $]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2$ on a

$$\int_{]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2} \psi d\nu_\varepsilon = \int_0^T \int_\Omega \psi(t, x, f_\varepsilon(x, \cdot), u_\varepsilon(t, x), \partial_t u_\varepsilon(t, x)) dx dt,$$

et on a donc $\nu_\varepsilon = \delta_{(f_\varepsilon(x, \cdot), u_\varepsilon(t, x), \partial_t u_\varepsilon(t, x))} \otimes \mathcal{L}_{]0, T[\times \Omega}$

Puisque la suite $(f_\varepsilon(x, \cdot))$ est bornée dans \mathcal{X} et par construction les suites (u_ε) et $(\partial_t u_\varepsilon)$ sont bornées, grâce à la remarque 1.4.3, on en déduit que (ν_ε) est tendue. On peut finalement, compte tenu du théorème de compacité 1.4.2, extraire une sous-suite de ν_ε , que l'on ne réindexera pas, convergeant étroitement vers $\nu \in \mathcal{Y}(]0, T[\times \Omega; \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2)$. En appliquant le théorème de continuité 1.4.3 pour ψ particulière définie sur $]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2$ par $\psi(t, x, \Lambda, s, \xi) = \Lambda(\xi)$, on obtient

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \psi(t, x, f_\varepsilon(x, \cdot), u_\varepsilon(t, x), \partial_t u_\varepsilon(t, x)) dx dt \\ &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2} \psi(t, x, \Lambda, s, \xi) d\nu_\varepsilon \\ &\geq \int_{]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2} \Lambda(\xi) d\nu(t, x, \Lambda, s, \xi). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que la projection de ν sur $]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X}$ est $dt \otimes \mu$, et donc sa désintégrée sur le produit $(]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X}) \times \mathbb{R}^2$ par rapport à $dt \otimes \mu$ est $(\nu_{(t, x, \Lambda)})_{(t, x, \Lambda) \in]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X}}$. Par ailleurs l'inégalité de Jensen entraîne que

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) &\geq \int_{]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \Lambda(\xi) d\nu_{(t, x, \Lambda)}(s, \xi) \right) d\mu(x, \Lambda) dt \\ &\geq \int_{]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X}} \Lambda \left(\int_{\mathbb{R}^2} \xi d\nu_{(t, x, \Lambda)}(s, \xi) \right) d\mu(x, \Lambda) dt. \quad (3.3) \end{aligned}$$

3.3. RÉSULTAT PRINCIPAL

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0, T[\times \Omega)$ et considrons $\psi(t, x, \Lambda, s, \xi) = \varphi(t, x)s$. Alors par (ii) du théorème 1.4.3, on a d'une part

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \varphi u_\varepsilon dx dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2} \psi d\nu_\varepsilon(t, x, \Lambda, s, \xi) \\ &= \int_{]0, T[\times \Omega} \varphi(t, x) \int_{\mathcal{X}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} s d\nu_{(t, x, \Lambda)}(s, \xi) \right) d\mu_x(\Lambda) dx dt, \end{aligned}$$

d'autre part,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \varphi u_\varepsilon dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \varphi u dx dt.$$

Par identification, on obtient pour $\mathcal{L}_{]0, T[\times \Omega}$ -presque tout $(t, x) \in]0, T[\times \Omega$,

$$u(t, x) = \int_{\mathcal{X}} U(t, x, \Lambda) d\mu_x(\Lambda),$$

où $U(t, x, \Lambda) := \int_{\mathbb{R}^2} s d\nu_{(t, x, \Lambda)}(s, \xi)$. Montrons alors que $U(t, x, \Lambda) \in \mathcal{W}$. En effet, par définition

$$\int_0^T |U|_{L_{\mu}^p(\Omega \times \mathcal{X})}^p dt = \int_0^T \int_{\Omega} \int_{\mathcal{X}} |U(t, x, \lambda)|^p d\mu_x(\lambda) dx dt.$$

Par convexité de la fonction $x \mapsto |x|^p$ et en appliquant (i) du théorème 1.4.3 avec $\psi(t, x, \Lambda, s, \xi) = |s|^p$, il vient ainsi

$$\int_0^T |U|_{L_{\mu}^p(\Omega \times \mathcal{X})}^p dt \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} |u_\varepsilon(t, x)|^p dx dt < +\infty,$$

d'où $U(t, x, \Lambda) \in L^p((0, T) \times \Omega \times \mathcal{X})$. Enfin pour terminer la preuve, il suffit de montrer que

$$\partial_t U \in L^p(]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X}) \quad (3.4)$$

et

$$U(0, x, \Lambda) = 0, \quad (x, \Lambda) \in \Omega \times \mathcal{X} \text{ ; } \mu\text{-p.p.} \quad (3.5)$$

3.3. RÉSULTAT PRINCIPAL

Soient $\varphi_1 \in \mathcal{C}_0^1([0, T])$ et $\varphi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. On considère tout d'abord $\psi(t, x, \Lambda, s, \xi) = \varphi_1(t)\varphi_2(x)\xi$. Puisque la suite $(\psi(\cdot, \cdot, f_\varepsilon(x, \cdot), u_\varepsilon(\cdot, \cdot), \partial_t u_\varepsilon(\cdot, \cdot)))_\varepsilon$ est uniformément intégrable, en vertu du théorème 1.4.3, nous avons d'une part

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \varphi_1(t)\varphi_2(x)\partial_t u_\varepsilon(t, x) dx dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2} \psi d\nu_\varepsilon(t, x, \Lambda, s, \xi) \\ &= \int_{]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2} \varphi_2(x)\varphi_1(t)\xi d\nu(t, x, \Lambda, s, \xi) \\ &= \int_{\Omega \times \mathcal{X}} \varphi_2(x) \int_0^T \varphi_1(t)V(t, x, \Lambda) dt d\mu, \quad (3.6) \end{aligned}$$

où $V(t, x, \lambda) := \int_{\mathbb{R}^2} \xi d\nu_{(t, x, \Lambda)}(s, \xi)$. D'autre part, en intégrant par partie et en raisonnant d'une manière semblable à ci-dessus, pour $\psi(t, x, \Lambda, s, \xi) = \varphi_1(t)\varphi_2(x)s$ nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \varphi_1(t)\varphi_2(x)\partial_t u_\varepsilon(t, x) dx dt &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \partial_t \varphi_1(t)\varphi_2(x)u_\varepsilon(t, x) dx dt \\ &= - \int_{\Omega \times \mathcal{X}} \varphi_2(x) \left[\int_0^T \partial_t \varphi_1(t) \left(\int_{\mathbb{R}^2} s d\nu_{(t, x, \Lambda)}(s, \xi) \right) dt \right] d\mu(x, \Lambda) \\ &= - \int_{\Omega \times \mathcal{X}} \varphi_2(x) \left[\int_0^T \partial_t \varphi_1(t)U(t, x, \Lambda) dt \right] d\mu(x, \Lambda). \quad (3.7) \end{aligned}$$

De (3.6) et (3.7) on obtient que pour μ -presque tout (x, Λ)

$$- \int_0^T \partial_t \varphi_1(t)U(t, x, \Lambda) dt d\mu(x, \Lambda) = \int_0^T \varphi_1(t)V(t, x, \Lambda) dt d\mu.$$

En intégrant par partie une fois encore, on a par conséquent

$$\partial_t U(t, x, \Lambda) = V(t, x, \lambda) := \int_{\mathbb{R}^2} \xi d\nu_{(t, x, \Lambda)}(s, \xi). \quad (3.8)$$

3.3. RÉSULTAT PRINCIPAL

Si, on reprend les mêmes étapes utilisées précédemment pour vérifier que $U \in L^p(]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X})$, en considérant V à la place de U , ξ à la place de s et $\partial_t u_\varepsilon$ au lieu de u_ε , on obtient que $\partial_t U \in L^p(]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X})$, et donc (3.4) est vérifiée.

Pour (3.5), il suffit de prendre $\psi(t, x, \Lambda, s, \xi) = \varphi_1(t)\varphi_2(x, \Lambda)\xi$, où $\varphi_1 \in \mathcal{C}_0^1([0, T])$ et $\varphi_2 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathcal{X})$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_{]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2} \psi(t, x, \lambda, s, \xi) d\nu_\varepsilon &= \int_0^T \int_\Omega \varphi_1(t) \varphi_2(x, f_\varepsilon(x, \cdot)) \partial_t u_\varepsilon(t, x) dx dt \\ &= - \int_0^T \int_\Omega \frac{d\varphi_1}{dt}(t) \varphi_2(x, f_\varepsilon(x, \cdot)) u_\varepsilon(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

En passant à la limite, on a d'une part en vertu théorème 1.4.3

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2} \psi d\nu_\varepsilon &= \int_{]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2} \varphi_1(t) \varphi_2(x, \Lambda) \xi d\nu(t, x, \Lambda, s, \xi) \\ &= \int_{\Omega \times \mathcal{X}} \varphi_2(x, \Lambda) \left[\int_0^T \varphi_1(t) V(t, x, \Lambda) dt \right] d\mu(x, \Lambda) \\ &= \int_{\Omega \times \mathcal{X}} \varphi_2(x, \Lambda) \left[\int_0^T \varphi_1(t) \partial_t U(t, x, \Lambda) dt \right] d\mu(x, \Lambda) \\ &= \int_{\Omega \times \mathcal{X}} \varphi_2(x, \Lambda) \left[\int_0^T -\frac{d\varphi_1}{dt}(t) U(t, x, \Lambda) dt \right. \\ &\quad \left. - U(0, x, \lambda) \varphi_1(0) \right] d\mu. \quad (3.9) \end{aligned}$$

D'autre part, pour $\psi(t, x, \Lambda, s, \xi) = \varphi_1(t)\varphi_2(x, \Lambda)s$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{]0, T[\times \Omega \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2} \psi d\nu_\varepsilon &= - \int_{\Omega \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^2} \frac{d\varphi_1}{dt}(t) \varphi_2(x, \Lambda) s d\nu(t, x, \Lambda, s, \xi) \\ &= - \int_{\Omega \times \mathcal{X}} \varphi_2(x, \Lambda) \int_0^T \frac{d\varphi_1}{dt}(t) \left[\int_{\mathbb{R}^2} s d\nu_{(s, \xi)} \right] dt d\mu(x, \Lambda) \\ &= \int_{\Omega \times \mathcal{X}} \varphi_2(x, \Lambda) \left[\int_0^T -\frac{d\varphi_1}{dt}(t) U(t, x, \Lambda) dt \right] d\mu. \quad (3.10) \end{aligned}$$

3.3. RÉSULTAT PRINCIPAL

Par identification de (3.9) et (3.10), l'égalité

$$U(0, x, \Lambda) = 0,$$

pour μ -presque tout $(x, \Lambda) \in \Omega \times \mathcal{X}$, en résulte immédiatement. Enfin, de (3.3) et (3.8) on en déduit

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) &\geq \int_0^T \int_{\Omega \times \mathcal{X}} \Lambda(\partial_t U(t, x, \Lambda)) d\mu(x, \Lambda) dt \\ &\geq F(u). \end{aligned}$$

La preuve de la première assertion est donc achevée.

Vérification de (ii). Soit $u \in \mathbf{W}_0$. La preuve consiste à construire une suite (u_ε) convergeant faiblement vers u dans \mathbf{W}_0 telle que

$$F(u) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F(u_\varepsilon).$$

En effet, pour $\eta > 0$ fixé on choisit $W_\eta \in \mathcal{W}$ une suite minimisante de (3.2), c'est à dire

$$\int_0^T \int_{\Omega \times \mathcal{X}} \Lambda(\partial_t W_\eta(t, x, \Lambda)) d\mu(x, \Lambda) dt \leq F(u) + \eta. \quad (3.11)$$

Par densité de $C^1([0, T]; \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathcal{X}))$ dans $W^{1,p}([0, T]; L^p_\mu(\Omega \times \mathcal{X}))$ (cf. [27, 38]), il existe $\widetilde{W}_\eta \in C^1([0, T]; \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathcal{X}))$ telle que

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega \times \mathcal{X}} |\widetilde{W}_\eta - W_\eta|^p d\mu(x, \Lambda) dt \leq \eta \\ \int_0^T \int_{\Omega \times \mathcal{X}} |\partial_t \widetilde{W}_\eta - \partial_t W_\eta|^p d\mu(x, \Lambda) dt \leq \eta. \end{cases} \quad (3.12)$$

Posons $u_{\varepsilon, \eta}(t, x) := \widetilde{W}_\eta(t, x, f_\varepsilon(x, \cdot))$, par conséquence $u_{\varepsilon, \eta} \in \mathbf{W}_0$. En utilisant l'hypothèse (H2) et théorème de continuité 1.4.3, pour $\psi(t, x, \Lambda, s, \xi) = \Lambda(\partial_t \widetilde{W}_\eta(t, x, \Lambda))$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_{\varepsilon, \eta}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, \partial_t \widetilde{W}_\eta(t, x, f_\varepsilon(x, \cdot))) dx dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega \times \mathcal{X}} \Lambda(\partial_t \widetilde{W}_\eta(t, x, \Lambda)) d\mu_\varepsilon(x, \Lambda) dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega \times \mathcal{X}} \Lambda(\partial_t \widetilde{W}_\eta(t, x, \Lambda)) d\mu(x, \Lambda) dt. \end{aligned}$$

3.3. RÉSULTAT PRINCIPAL

De (3.11) on obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega \times \mathcal{X}} \Lambda(\partial_t \widetilde{W}_\eta(t, x, \Lambda)) d\mu(x, \Lambda) dt \leq F(u) + \eta + I_\eta$$

$$\text{où } I_\eta = \int_0^T \int_{\Omega \times \mathcal{X}} \left| \Lambda(\partial_t \widetilde{W}_\eta(t, x, \Lambda) - \Lambda(\partial_t W_\eta(t, x, \Lambda))) \right| d\mu(x, \Lambda) dt.$$

Puisque Λ est localement lipschitzienne, il vient grâce à (3.12)

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F(u_{\varepsilon, \eta}) \leq F(u).$$

Il reste à montrer que $u_{\varepsilon, \eta} \rightharpoonup u$ quand $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$ dans \mathbf{W}_0 . Pour cela, il suffit de prendre $\psi(t, x, \Lambda, s, \xi) = \varphi(t, x) \widetilde{W}_\eta(t, x, \Lambda)$ avec $\varphi \in L^q([0, T] \times \Omega)$ (où q est l'exposant conjugué de p). On obtient alors, en vertu du théorème 1.4.3, que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \varphi u_{\varepsilon, \eta} dx dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \widetilde{W}_\eta(t, x, \Lambda) d\mu_\varepsilon(x, \Lambda) dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \varphi W_\eta(t, x, \Lambda) d\mu(x, \Lambda) dt + J_\eta \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \varphi u dx dt + J_\eta \end{aligned}$$

$$\text{où } J_\eta = \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \left[\widetilde{W}_\eta(t, x, \Lambda) - W_\eta(t, x, \Lambda) \right] d\mu(x, \Lambda) dt.$$

Par passage à la limite quand $\eta \rightarrow 0$, le résultat en découle immédiatement. En appliquant le raisonnement précédent, en considérant $\partial_t \widetilde{W}_\eta$ à la place de \widetilde{W}_η , on obtient

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \partial_t u_{\varepsilon, \eta} dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \partial_t u dx dt.$$

3.3. RÉSULTAT PRINCIPAL

Finalement par un argument de diagonalisation (cf. [6], corollaire 1.16), il existe une application croissante $\varepsilon \rightarrow \eta(\varepsilon)$ telle que $\eta(\varepsilon)$ tends vers 0 quand ε tends vers 0, et

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\varepsilon, \eta(\varepsilon)} \rightharpoonup u \text{ dans } \mathbf{W}_0, \\ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_{\varepsilon, \eta(\varepsilon)}) \leq F(u). \end{array} \right.$$

La démonstration du théorème est donc achevée.

Bibliographie

- [1] E. ACERBI ET N. FUSCO, Semicontinuity problems in the calculus of variations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **86** (1984), pp.125-145.
- [2] G. ALBERTI ET S. MÜLLER, A new approach to variational problems with multiple scales, *Comm. Pure Appl. Math.*, **54** (2001), pp. 761-825.
- [3] O. ANZA HAFSA, *Régularisation de problèmes variationnels non convexes issus de l'élasticité non linéaire*, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier II, 2002.
- [4] O. ANZA HAFSA, Variational formulation on thin elastic plates with constraints, *J. Conv. Anal.*, **12**, n°2, (2005), pp. 365-382.
- [5] O. ANZA HAFSA, J-P. MANDALLENNA ET G. MICHAILLE, Homogenization of periodic nonconvex integral functionals in terms of Young measures, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **12**,(2006), pp. 35-51.
- [6] H. ATTOUCH, *Variational Convergence for Functions and Operators*, Appl. Math. Series, Pitman, London, 1984.
- [7] H. ATTOUCH, G. BUTTAZZO ET G. MICHAILLE, *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces : applications to optimization and partial differential equations*, SIAM Book Series on optimisation, 2005.
- [8] J.M. BALL, *Utilisation des mesures de Young en mécanique et thermomécanique*, Cours présenté au laboratoire LMGC, Montpellier, Mai 2003.
- [9] H. BERLIOCCI ET J.M LASRY, Intégrales normales et mesures paramétrées en calcul des variations, *Bull. Soc. Math. France* **101**, (1973), pp. 129-184.
- [10] M. BOCEA ET I. FONSECA, A Young measure approach to a nonlinear membrane model involving the bending moment, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A*, **134**, (2004),pp.845-883.
- [11] G. BUTTAZZO, *Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variations*, Pitman Research Notes in Mathematics Series **207**, Harlow, 1989.

BIBLIOGRAPHIE

- [12] B. DACOROGNA, *Weak Continuity and Weak Lower Semicontinuity of Non-Linear Functionals*, Lecture Notes in Math., **922**, Springer Verlag, 1982.
- [13] B. DACOROGNA, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Appl. Math. Sciences 78, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [14] G. DAL MASO, *An Introduction to Γ -convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [15] E. DE GIORGI ET T. FRANZONI, Su un tipo di convergenza variazionale, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Mat.*, (8) **58** (1975), pp. 842-850.
- [16] R. J. DIPERNA ET A. J. MAJDA, Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations, *Comm. Math. Phys.*, **108**, (1987), pp. 667-687.
- [17] I. EKELAND ET R. TEMAM, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976 (Edition Française : Dunod Gauthier-Villar, Paris, 1973).
- [18] L.C. EVANS, Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations, *CBMS regional Conf. Ser. in Math.* **74**, 1988.
- [19] I. FONSECA, S. MÜLLER ET P. PEDREGAL, Analysis of concentration and oscillation effects generated by gradients, *SIAM J. Math. Anal.*, **29**, n° 3, (1998), pp. 736-756.
- [20] D. KINDERLEHRER ET P. PEDREGAL, Characterization of Young measures generated by gradients, *Arch. Rational Mech. Anal.* **115** (1991), pp.329-365.
- [21] D. KINDERLEHRER ET P. PEDREGAL, Weak convergence of integrand and the Young measures representation, *SIAM J. Math. Anal.* **23**, n° 1, (1992), pp.1-19.
- [22] D. KINDERLEHRER ET P. PEDREGAL, Gradient Young measures generated by sequences in Sobolev spaces, *J. Geom. Anal.*, **4**, (1994), pp.59-90.
- [23] H. LE DRET ET A. RAOULT, The nonlinear membrane model as Variational limit in nonlinear three-dimensional elasticity, *J. Math. Pures Appl.* **74**, n° 6,(1995) pp. 549-578.
- [24] M.L. LEGHMIZI, C. LICHT ET G. MICHAILLE, The nonlinear membrane model : a Young measure and varifold formulation, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **11**,(2005) pp. 449-472.
- [25] D. LUKKASSEN, G. NGUETSENG ET P. WALL, Two-scale convergence, *Internat. J. Pure and Appl. Math.*, **2**, n° 1,(2002) pp. 35-86.

- [26] M.L. MASCARENHAS, Γ - convergence and non local effect : a nonlinear case. *Homogenization and Applications to Material Sciences, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications*, **9**, (1997), pp. 279-290.
- [27] M.L. MASCARENHAS ET A.M. TOADER, Scale convergence in homogenization, *Numer. Funct. Anal. Opt.*, **22**, (2001), pp. 127-158.
- [28] K. MESSAOUDI, M.L. LEGHMIZI ET M. ZERGUINE, Convex random integral functionals and epiconvergence, *Int. J. Sci. Res.*, **14**, (2005), pp. 83-91.
- [29] G. MICHAILLE ET M. VALADIER, Young measures generated by a class of integrands : a narrow epicontinuity and applications to Homogenization, *J. Math. Pures Appl.* **81**, (2002), pp. 1277-1312.
- [30] C.B. MORREY, Quasiconvexity and the semicontinuity of multiple integrals, *Pacific. J. Math.*, **2**, (1952), pp. 25-53.
- [31] S. MÜLLER, *Variational Models for Microstructure and Phase Transitions*, Lecture Notes in Math. **1713**, Springer-Verlag , Berlin (1999), pp. 85-210.
- [32] P. PEDREGAL, *Parametrized Measures and Variational Principles*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **30**, Birkhäuser, Basel, 1997.
- [33] P. PEDREGAL, *Variational Methods in Nonlinear Elasticity*, SIAM, Basel, 2000.
- [34] M.A. SYCHEV, A new approach to Young measure theory, relaxation and convergence in energy, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **16**, (1999), pp.773-812.
- [35] L. TARTAR, *Une nouvelle méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles nonlinéaires*, Lecture Notes in Math. **665**, Springer-Verlag, (1977), pp. 228-241.
- [36] L. TARTAR, H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A*, **115**, (1990), pp.193-230.
- [37] L. TARTAR, Beyond Young measures, *Meccanica*, **30**, (1995), pp.505-526.
- [38] A.M. TOADER, Memory effects and Γ -convergence : A time dependent case, *J. Conv. Anal.*, **6**, n°1, (1999), pp. 13-27.
- [39] M. VALADIER, *Young measures, Methods of Nonconvex Analysis*, ed. by A. Cellina, Lecture Notes in Math. **1446**, Springer-Verlag, (1990), pp. 152-188.

BIBLIOGRAPHIE

- [40] M. VALADIER, A course on Young measures, *Workshop di Teoria della Misura e Analisi Reale, Grado, September 19-October 2, Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste 26 suppl.* (1994), pp. 349-394.
- [41] L.C. YOUNG, *Lectures on Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, WB. Saunders, Philadelphia, 1969.

Résumé. Cette thèse est consacrée à l'étude du comportement limite de certaines familles de fonctionnelles intégrales en terme de mesures de Young et de mesures de "varifold". On établit deux nouvelles formulations d'une membrane, l'une dans l'espace des mesures de Young générées par des gradients $W_0^{1,p}$ -Young et l'autre dans l'espace des mesures de Young-varifold générées par des gradients $W_0^{1,p}$ -Young-varifold. La fonctionnelle énergie associée à ces deux formulations est obtenue comme limite de la formulation tridimensionnelle de la structure mince via une convergence variationnelle associée à la convergence étroite des mesures de Young et la convergence faible des "varifold". La première formulation permet de capter les oscillations de la suite des gradients minimiseurs de la formulation classique. La deuxième formulation prend en compte les effets de concentration. En utilisant les mesures de Young associées à des fonctions mesurables, on démontre un résultat d'homogénéisation par Γ -convergence d'une famille de fonctionnelles intégrales dépendante du temps, où la Γ -limite est caractérisée par les techniques de ces mesures.

Mots-clés : Γ -convergence, relaxation, mesures de Young, mesures de "varifold", problème de membrane, homogénéisation.

Abstract. In this thesis, we study the behavior of family of integral functionals in terms of Young measures and varifold. We establish two new formulations of the membrane problem by working in the space of $W_0^{1,p}$ -Young measures and $W_0^{1,p}$ -Young-varifold. The energy functional related to these formulations is obtained as a limit of the three-dimensional formulation of the thin layer via a suitable variational convergence associated to the narrow convergence of Young measures and to some weak convergence of varifold. The interest of the first formulation is to capture the oscillation informations on the gradients minimizing sequences related to the classical formulation. The second formulation allows to moreover account for concentration effects. By using the Young measures associated to measurable functions, we prove a homogenization result by Γ -convergence of family of functionals integrals with time dependent, where the Γ -limit is characterize by techniques of this measures.

Key words : Γ -convergence, relaxation, Young measures, varifold measures, membrane problem, homogenization.