الجمهوريـــة الجزائريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE HADJ LAKHDAR

BATNA (ALGERIE)

THESE

Présentée à la Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option: Mathématique

Par

NOUREDDINE MIDOUNE

THEME

CLASSIFICATION DES FORMES TRILINEAIRES ALTERNEES DE RANG 8 SUR LES CORPS FINIS

Soutenue le : 26 / 05 / 2009

Devant le jury d'examen

Mr. A. BOUDAOUD	Prof.	Université de M'Sila	Président
Mr. L. NOUI	Prof.	Université de Batna	Directeur de thèse
Mr. M. KERADA	M.C.	Université de Jijel	Examinateur
Mr. A. AMROUNE	M.C.	Université de M'Sila	Examinateur
Mr.M.GUEDJIBA	M.C.	Université de Batna	Examinateur

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K.La classification des trivecteurs est l'étude de l'action du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel $\wedge^3 E$ .Comme $\wedge^3 E^* \simeq (\wedge^3 E)^*$, on parle indifféremment des formes trilinéaires alternées et des trivecteurs . Cette classification se fait en deux étapes:

1) Classification sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque.

2) Utilisation de la cohomologie galoisienne pour en déduire la classification sur un corps quelconque ou sur certains corps particuliers (corps finis , corps ordonnés ,...).

Plusieurs auteurs ont étudié les formes multilinéaires alternées ;le cas bilinéaire étant simple,celui des formes trilinéaires est l'objet principal des recherches.Des références et une description des orbites pour $n \leq 7$peuvent être trouvées dans [23] , [25] , [32] , [8]et[36].

La classification des trivecteurs de rang 8 est connue sur $\mathbb{C}$: il n'y a encore qu'un nombre fini d'orbites dont la liste est donnée dans [11] .Une classification complète et connue aussi pour $n = 8$ et $K = \mathbb{R}$ ([9]) et dans le cas algébriquement clos de caractéristique quelconque [26] .Notons que si dim $E \geq 9$, dim $\wedge^3 E > \dim End(E) = \dim GL\,(E)$ et il y a une infinité d'orbites (du moins si K est un corps infini) , cela a été fait dans [38] .

Dans [13], J.Hora donne une borne supérieure de la complexité maximale $C_n(K)$ dans le cas où K est le corps à deux éléments et il montre que $C_7(K) = 4$ (voir III§2 pour la définition).

Dans ce travail , en utilisant l'invariant arithmétique $d_1(\omega)$ d'un trivecteur ω,nous donnons une borne supèrieure de la complexité maximale $C_n(K)$ où K est un corps arbitraire. Pour $n \leqslant 8$, $C_n(K)$ est déterminée. Ensuite ,nous donnons une approche de la classification des trivecteurs de rang 8 , sur un corps quelconque , en particulier sur un corps fini ;ceci repose sur la détermination des groupes d'automorphismes de chaque trivecteur sur un corps algébriquement clos, puis sur l'utilisation de la cohomologie galoisienne.

Dans le premier chapitre, on donne des généralités où apparaissent les notions de scindabilité , de puissances divisées , d'invariants , groupe d'automorphismes , commutant et dérivation , parties stables et des propriétés du commutant . Enfin nous rappelons l'essentiel des résultats sur les formes bilinéaires alternées.

Le deuxième chapitre est consacré aux trivecteurs de rang au plus 8.A la lumière de [8] , [23] , [25] , [26] , [32] et [34] nous rappelons les principaux résultats connus sur la classification des formes trilinéaires alternées avec $n \leqslant 7$ et K un corps quelconque.
Les énoncés que nous reprendrons montrent que la classification dépend du corps de base choisie.Ensuite et après avoir donné la classification des trivecteurs pour $n = 8$ et K algébriquement clos ([26]) , nous déterminons leurs groupes d'automorphismes. Toute fois, il y a lieu de prendre en considération que le fait de mettre en évidence le groupe d'automorphismes à un isomorphisme local près , est insuffisant pour appliquer la cohomologie ([27]) , et ceci resulte de la négligence du groupe discret , ce qui motive la détermination complète de ces groupes par les suites exactes en utilisant les parties stables. Nous donnons aussi d'autres méthodes pour déterminer certains de ces groupes.

L'objet du chapitre III , est l'étude de la complexité maximale des trivecteurs de rang au plus 8. On donne aussi des résultats connus concernant leur longueur. Ensuite , on calcule la complexité pour chaque trivecteur sur un corps arbitraire. On généralise un résultat de J.Hora ([13]) et nous donnons une borne supérieure de la complexité maximale $C_n(K)$.

Dans le dernier chapitre , nous traitons le problème de classification des trivecteurs de rang 8 , en particulier sur un corps fini. On utilise la cohomologie galoisienne afin de décrire toute les formes trilinéaires alternées ω non équivalentes sur K mais équivalentes sur une clôture algébrique $\overline{K}$ de K à un même trivecteur $\overline{\omega}$. Nous donnons un nouveau résultat concernant la classification des trivecteurs $2-$scindables de rang 8 , sur un corps de caractéristique différente de 2 et 3. Ensuite nous déterminons les groupes d'automorphismes des autres trivecteurs de rang 8 et on donne une approche de la classification des trivecteurs de rang 8 sur un corps fini.

I- PRELIMINAIRES

§1-Algèbre extérieure

1-1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps commutatif K. L'action de $GL(E)$ sur $\wedge^p E$ est définie par: $f.\omega = (\wedge^p f)(\omega)$, pour $f \in GL(E)$ et $\omega \in \wedge^p E$, $p \geqslant 2$.

Du fait des isomorphismes $\wedge^p E^* \simeq (\wedge^p E)^*$,on emploiera indifféremment le langage des formes alternées ou des $p-$ vecteurs.

L'étude est essentiellement consacrée au cas $p = 3$ et $n = 8$, c'est- à- dire l'action de $GL_8(K)$ sur $\wedge^3 K^8$.

1-2. Support et rang.

On appelle support de ω et on note S_ω le plus petit sous - espace F de E tel que $\omega \in \wedge^3 F$; sa dimension est le rang de ω , noté $d_o(\omega)$ ou $rg(\omega)$.

- Le rang est invariant par l'action du groupe linéaire $GL(E)$ et par extension des scalaires.

- De l'isomorphisme entre $\wedge^p K^{p+1}$ et $\wedge^1 K^{p+1}$, on déduit qu'il n'y a pas de $p-$ vecteurs de rang $p+1$; en particulier il n'y a pas de trivecteurs de rang 4.

1-3. Soit $\omega \in \wedge^p E^*$ une forme $p-$linéaire :$Rad\ \omega$, le radical de ω , est l'ensemble des x de E tels que $\omega(x, x_2, \ldots, x_p) = 0$ quels que soient $x_2, \ldots, x_p$ dans E.

- Le support de ω est le sous-espace $(Rad\ \omega)^{\circ}$ de E^* , isomorphe à $(E/Rad\ \omega)^*$.

- Si $Rad\ \omega = \{0\}$, on dit que ω est non dégénérée ou de rang maximal.

1-4. p- Vecteur décomposable .

Un $p-$vecteur non nul ω est appelé décomposable s'il existe $x_1, \ldots, x_p$ dans E tel que $\omega = x_1 \wedge ... \wedge x_p$(produit extérieur) .Le support de ω est le sous - espace vectoriel F

engendré par $x_1, \ldots, x_p$, $S_\omega = vect\{x_1, \ldots, x_p\}$; dans ce cas , $d_o(\omega) = \dim S_\omega = p$ car $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est un système libre puisque $\omega \neq 0$.

Un $p-$vecteur est somme de $p-$vecteurs décomposables et le nombre minimal de $p-$vecteurs nécessaires est un invariant intéressant , la longueur dont nous reparlerons au chapitre III.

1-5.Puissances divisées.

Théorème. Un système de puissances divisées existe dans l'idéal $\underset{k\geqslant 1}{\oplus} \wedge^{2k} E$ de l'algèbre $\wedge^{\circ} E = \underset{k\geqslant 0}{\oplus} \wedge^{2k} E$ ([31]) .

Ce résultat est bien connu dans le cas des corps et il admet une généralisation au cas d'un module non nécessairement libre sur un anneau quelconque.

Si $u \in \wedge^2 M^*$, u est non dégénérée si et seulement si $\gamma_m(u)$ engendre le $A-$module $\wedge^{2m} M^*$. Si $u = \sum\limits_{i=1}^{r} x_{2i-1}x_{2i}$ où $\{x_1, \ldots, x_{2r}, \ldots, x_n\}$ est une base de M ,

$\gamma_k(u) = \sum\limits_{1\leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq r} x_{2i_1-1}x_{2i_1} \ldots x_{2i_k}$ de sorte que $rg(u) = 2r$ équivaut à $\gamma_k(u) \neq 0$ et $\gamma_{k+1}(u) = 0$.

Les puissances divisées permettent d'étudier les sous-espaces vectoriels de $\wedge^2 E$ ([32]) et comme conséquence les algèbres de Lie $2-$nilpotentes.

1-6. Eléments scindables.

Soient E_1et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E :
$\wedge^p E$ s'identifie à $\oplus_{k=0}^{k=p}(\wedge^k E_1 \otimes \wedge^{p-k} E_2)$ .Un élément $\omega \in \wedge^p E$ est dit <u>scindable</u> s'il existe une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$ telle que $\omega \in E_1 \otimes \wedge^{p-1} E_2$,vu comme facteur direct de $\wedge^p E$.

Si $\dim E_1 = r$, on dit que ω est $r-$scindable . La scindabilité est une généralisation de la divisibilité ; en effet ω est divisible si et seulement si ω est $1-$scindable.Cette propriété ne dépend pas du corps de base car c'est équivalent à dire que l'application $E \longrightarrow \wedge^{p+1} E$, $x \longmapsto x\omega$ n'est pas injective .

Soit ω un élément $r-$scindable et $\{e_1,\ldots,e_r\}$ une base de E_1 : $\omega = \sum\limits_{i=1}^{r} e_i u_i$ où $u_i \in \wedge^{p-1}E_2$.Les u_i sont déterminés de façon unique par la base $\{e_1,\ldots,e_r\}$ de E_1 car $u_i = d_{e_i^*}(\omega)$ où $e_i^* \in E^*$ est définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ et $e_i^*(E_2) = 0$. Alors ω est déterminé par le sous-espace vectoriel F de $\wedge^{p-1}E_2$ engendré par les u_i ; en effet , si on change de base dans E_1 , et si la nouvelle base f_j est donnée par $e_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} f_j, \omega = \sum\limits_{i=1}^{r} e_i u_i = \sum_{j=1}^{r} f_j \left(\sum_{i=1}^{r} a_{ij} u_i\right) = \sum_{j=1}^{r} f_j v_j$:les v_j sont combinaisons linéaires des u_i et ω ne dépend donc que de F . Si $\dim F < r$, on peut trouver une base $\{f_j\}$de E_1telle que certains des v_j associés soient nuls ; alors S_ω n'est pas E tout entier et ω est $s-$scindable avec $s < r$. Cela peut se voir aussi en utilisant l'isomorphisme naturel entre $E_1 \otimes \wedge^{p-1}E_2$ et $Hom(E_1^*, \wedge^{p-1}E_2)$. Si φ est l'élément de $Hom(E_1^*, \wedge^{p-1}E_2)$ canoniquement associé à ω, F n'est autre que $\varphi(E_1^*)$.

Pour classifier les éléments $r-$scindables de rang maximal dans $\wedge^p E$, il suffit donc d'étudier l'action de $GL(E_2)$ sur la grassmannienne $Gr_r(\wedge^{p-1}E_2)$ des sous - espaces vectoriels de dimension r de $\wedge^{p-1}E_2$. C'est ce qui est fait pour $p = 3$ et pour certaines valeurs du couple ($r = \dim E_1, n - r = \dim E_2$) dans [32] et [23].Le cas où $n - r$ est pair est plus simple car on peut y utiliser les puissances divisées sous la forme de pfaffiens.

Remarquons qu'un même $p-$ vecteur peut être scindable pour plusieurs valeurs de l'entier r comme le montre l'exemple de $\omega_{7,3} = e_1e_2e_3 + e_3e_4e_5 + e_5e_6e_7$ qui est 2 et 3$-$scindable .

Si $p = 3$ l'étude des 3$-$vecteurs scindables est très liée à celle des algèbres de Lie 2$-$nilpotentes [10] , [33] et [35] .

§2 - Invariants et trivecteurs

2-1. Invariants numériques.

On peut associer à un $p-$vecteur d'autres invariants numériques que le rang. Pour tout sous - espace vectoriel α de E , soit $\overline{\omega}_\alpha$l'image canonique de ω dans $\wedge^p(E/\alpha)$; on pose $d_k(\omega) = \inf_\alpha rg(\overline{\omega}_\alpha)$ où α parcourt la grassmannienne de tous les sous - espaces de dimension k de E . Les entiers $d_k(\omega)$ forment une suite strictement décroissante : $d_0(\omega) = rg(\omega) > d_1(\omega) > \cdots > d_r(\omega) = 0$ dès que r dépasse $\dim E - (p-1)$. La suite $d_i(\omega)$ est invariante par l'action de $GL(E)$ mais ne l'est pas par extension des scalaires. Notons que $d_1(\omega) = 0$ si et seulement si ω est divisible par un vecteur. Notons aussi que si ω est $r-$scindable , alors $\omega \in E_1 \otimes \wedge^{p-1} E_2$ et $d_r(\omega) = 0$.

On pose $\overline{\omega}_\alpha = \overline{\omega}\,(x)$ pour $\alpha = Kx$, $x \neq 0$.

2-2. Lemme.

Soit E un espace vectoriel de dimension paire(au moins égale à 6) et ω un trivecteur de rang maximal ; alors $d_1(\omega) \neq 0$ (en particulier si $\dim E = 8, d_1(\omega) \neq 0$).

Preuve. On a $d_1(\omega) = \inf_\alpha rg\,(\overline{\omega}_\alpha)$, où α parcourt l'espace projectif $\mathbf{P}(E)$ des droites de E . Si $d_1(\omega) = 0$, il existe $\alpha = Kx$, $x \neq 0$ tel que $\overline{\omega}(x) = 0$, soit E' un supplémentaire de Kx dans E : de $E = E' \oplus Kx$ résulte $\wedge^3 E \backsimeq \wedge^3 E' \oplus (Kx \otimes \wedge^2 E')$, alors $\omega = xu + \omega'$ et $\overline{\omega}(x) = 0$ signifie que ω' est nul ; de plus $S_\omega = S_u \oplus Kx = E$. Comme ω est de rang maximal , $S_u = E'$ et E' est de dimension paire , ce qui contredit l'hypothèse sur la dimension de E.

2-3. Groupe d'automorphismes.

Le groupe des automorphismes de ω , nôté $Aut(\omega)$, est le sous-groupe d'isotropie de ω dans l'action de $GL(E)$ sur $\wedge^p E$ c'est à dire le sous - groupe de $GL(E)$ des automorphismes de E quit laissent ω invariant: $Aut(\omega) = \{f \quad / f \in GL(E) \text{ et } f.\omega = \omega\}$.
L'orbite de ω par $GL(E)$ est en bijection avec l'ensemble des classes à droite $GL(E)/Aut(\omega)$.

Pour définir les invariants algébriques , on utilisera le plus souvent le langage des formes $p-$linéaires alternées et on supposera $p \geqslant 3$.

2-4. Commutant et Dérivations.

On désigne par $D(\omega)$ l'ensemble des endomorphismes d de E tels que:
$\sum_{i=1}^{p} \omega(x_1, \ldots, x_{i-1}, dx_i, x_{i+1}, \ldots, x_p) = 0$,quels que soient $x_1, \ldots, x_p$ dans E , c'est la

$K-$algèbre de Lie des dérivations de ω .

Un invariant algébrique a été introduit par B.Kahn ([16]) , on appelle commutant de ω et on note $C(\omega)$; $\omega \in \wedge^p E^*$, l'ensemble des endomorphismes $f : E \longrightarrow E$ tels que l'application $(x_1, \ldots, x_p) \longrightarrow \omega(x_1, \ldots, x_{i-1}, fx_i \ , x_{i+1}, \ldots, x_p)$ ne dépend pas de l'entier i.On la note $\omega_f(x_1, \ldots, x_p)$ et c'est clairement une forme $p-$linéaire alternée ($p \geq 3$ est essentiel ici) .

Certains des résultats qui suivent sont dans [23] .

2-5. Propriétés de $C(\omega)$.

Soit ω une $p-$forme non dégénérée ; il existe une décomposition de E en somme directe de sous - espaces vectoriels E_i , $1 \leqslant i \leqslant k$, et des formes $p-$linéaires $\omega_i \in \wedge^p E_i^*$ tels que $\omega = \sum_{i=1}^{k} \omega_i$ et $C(\omega)$ est une $K-$algèbre commutative , produit direct des anneaux locaux $C(\omega_i)$.

Toute $K-$algèbre étale L (produit fini d'extensions algébriques séparables) est le commutant d'une forme $p-$linéaire , comme le montre l'exemple suivant : sur $E = L^p$, considérons la forme $p-$ linéaire naturelle det : $E^p \longrightarrow L$. Pour toute forme linéaire $f : L \longrightarrow K$ dont le noyau ne contient aucune sous - algèbre de L , on considère sur E^p l'application $\omega = f \circ \det : E^p \longrightarrow K$ .Considérant E comme $K-$espace vectoriel , ω est une forme $p-$ linéaire alternée non dégénerée sur E telle que $C(\omega) = L$ (la condition sur f sert à assurer que ω est non dégénérée).

2-6. Lemme. Si $E = E_1 \oplus E_2$ et $\omega = \omega_1 + \omega_2$, $\omega_i \in \wedge^p E_i^*$,non dégénérées $D(\omega) = D(\omega_1) \times D(\omega_2)$.

2-7. Lemme. Soit ω une forme non dégénérée ; si $u \in C(\omega)$ et $f \in Aut(\omega)$ alors $f\ u\ f^{-1} \in C(\omega)$.

$\omega(f\ u\ f^{-1}x, y, z) = \omega(uf^{-1}x, f^{-1}y, f^{-1}z) = \omega(f^{-1}x, uf^{-1}y, f^{-1}z)$
$= \omega(x, fuf^{-1}y, z)$. D'où $fuf^{-1} \in C(\omega)$.

On a aussi $fuf^{\,-1} - u \in C(\omega)$, $\forall f \in Aut(\omega)$.

2-8. Parties stables.

Soit ω un trivecteur non nul de $\wedge^3 E$; à ω on associe une partie de E stable par le sous-groupe $Aut(\omega)$ de $GL\,(E)$:on dit que $R_i(\omega) = \{x \in E - \{0\} \;\; / \;\; \overline{\omega}(x)$ est de type $\omega_i\}$ est une partie stable de E pour $Aut(\omega)$.

En effet , posons $E = Kx \oplus E'$, alors ω s'écrit $\omega = xu + \omega'$ avec $\omega' \in \wedge^3 E'$ $(\dim E' = n-1)$ et $\overline{\omega}(x) = \overline{\omega'}(x)$, comme $x \notin E'$ alors $\overline{\omega'}$ et de même type que $\overline{\omega'(x)}$.

Si $f \in Aut(\omega)$, $\wedge^3 f(\omega) = \omega$ donc $f(x) \wedge^2 f(u) + \wedge^3 f(\omega') = \omega$, d'où : $\overline{\omega}(f(x)) = \overline{\wedge^3 f(\omega')}(f(x))$. comme f est une application linéaire bijective , elle tranforme le trivecteur ω' à un trivecteur de même type , c'est à dire $f(\omega')$ est dans l'orbite de ω' , par suite $\overline{\omega}(f(x))$ est de type ω_i, d'où $f(x) \in R_i(\omega)$ est $f(R_i(\omega)) \subset R_i(\omega)$.

En particulier , on a $R_3(\omega) = \{x \in E - \{0\} \;\; / \; \overline{\omega}(x)$ est de rang $3\}$ est stable pour $Aut(\omega)$, ainsi que $R_5(\omega) = \{x \in E - \{0\} \;\; / \; \overline{\omega}(x)$ est de rang $5\}$.

Soit $x \in E$ et considérons la forme bilinèaire alternée $f^{\,x}$ définie par : $f^{\,x}(y,z) = f(x,y,z)$ où $y,z \in E$ et f une forme trilinèaire alternée , alors l'ensemble $\overline{R_i(f)} = \{x \in E \;\; / \; rg(f^{\,x}) = 2i\}$ où $0 \leqslant 2i \leqslant n$ est stable pour $Aut(f)$, ce qui est utile pour déterminer $Aut(\omega_{8,1})$ ([8]) .

§3-Certaines propriétés des formes bilinéaires alternées ou des bivecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K.

3-1. Proposition. Soit u un élément de $\wedge^2 E$; il existe une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E de sorte que : $\omega = \sum\limits_{i=1}^{k} e_{2i-1} e_{2i}$ et $2k \leqslant n$.
Le support S_u est le sous-espace de E engendré par $e_1, \ldots, e_{2k}$ et le rang de u est $2k$.
Pour que u soit non dégénérée , il faut que E soit de dimension paire et $2k = n$.

Deux bivecteurs u_1 et u_2 sont équivalents sous l'action du groupe $GL(E)$ si et seulement si ils ont même rang .

3-2. Groupe symplectique et base symplectique .

Base symplectique:

Soit φ une forme bilinéaire sur E.On dit qu'une base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de E est symplectique relativement à φ s'il existe un entier naturel m tel que $2m \leq n$, $\varphi(e_{2j-1}, e_{2j}) = -\varphi(e_{2j}, e_{2j-1}) = 1$ pour tout élément j de $\{1, ..., m\}$, et que $\varphi(e_i, e_j) = 0$ dans les autres cas . S'il existe une telle base B , la forme bilinéaire φ est alternée et son rang est égal à $2m$.Réciproquement , pour toute forme bilinéaire alternée φ sur E,il existe une base de E symplectique relativement à φ.La forme φ est non dégénérée si $2m = \dim E$, ce qui nécessite que la dimension soit paire .Alors deux formes non dégénérée sont toujours équivalentes .

Les automorphismes de φ , c'est à dire les applications linéaires $u : E \to E$ telles que $\varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)$ quels que soient x et y dans E,sont dits symplectiques. L'ensemble de ces automorphismes est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(E)$ appelé le groupe symplectique de φ et nôté $Sp(\varphi)$.La dimension n de E est un entier pair , soit $2m$. Soit B une base symplectique de E pour φ et f un automorphisme de φ : la matrice M de f dans la base B est dite symplectique . Cela revient à la condition $t_{MJ_mM} = J_m$ où $J_m = \begin{pmatrix} 0 & Id_m \\ -Id_m & 0 \end{pmatrix}$.

Cela revient à dire que l'endomorphisme de $E = K^{2m}$ associé à M est un automorphisme relativement à la forme bilinéaire alternée canonique sur K^{2m} :

$\varphi((x_1, ..., x_{2m}), (y_1, ..., y_{2m})) = \sum_{k=1}^{k=m} (x_{2k-1}y_{2k} - x_{2k}y_{2k-1})$.

Les matrices symplectiques constituent un sous-groupe du groupe spécial linéaire $SL_{2m}(K)$ appelé groupe symplectique et noté $Sp_{2m}(K)$.

Il est clair que f tronsforme toute base symplectique en une autre base symplectique: $\varphi(f(e_{2i-1}), f(e_{2i})) = \varphi(e_{2i-1}, e_{2i}) = 1$ et $\varphi(f(e_k), f(e_l)) = 0$ si $\{k,\ l\}$ n'est pas de la forme $\{2i-1,\ 2i\}$. Si $\{u_1, ..., u_{2m}\}$ est une base symplectique de E, on définit un élément f de $Sp(\varphi)$ par $f(e_i) = u_i$, $1 \leq i \leq 2m$. Donc $Sp(\varphi)$ est en bijection avec l'ensemble des bases symplectiques de E.

On note $Sp_{2m}(K)$,le groupe $Sp(\varphi)$ où φ est la forme bilinèaire alternée canonique surK^{2m}

3-3.Proposition.

Soit $K = \mathbf{F}_q$ **,** on a $card\,(Sp_{2m}(K)) = q^{m^2} \prod_{k=1}^{m} (q^{2k} - 1)$.

Le cardinal de $Sp_{2m}(\mathbf{F}_q)$ est le nombre de bases symplectiques de $\mathbf{F}_q^{2m}$ pour une forme bilinéaire alternée φ non dégénérée quelconque. On calcule d'abord le nombre $f_m(q)$ de paires symplectiques (x, y) i.e. de couples de vecteurs x et y de $\mathbf{F}_q^{2m}$ vérifiant $\varphi(x, y) = 1$: pour cela $f_m(q) = (q^{2m} - 1)\, q^{2m-1}$.Pour compléter $\{x, y\}$ en une base symplectique de $\mathbf{F}_q^{2m}$, on prend une base symplectique arbitraire de l'espace $(vect\,\{x, y\})^{\perp}$, pour φ , qui est isomorphe à $\mathbf{F}_q^{2m-2}$ muni de la forme bilinéaire alternée canonique , cela donne :

$$\begin{aligned} Card\ \ (Sp_{2m}(\mathbf{F}_q)) &= f_m(q) \times Card\ \ (Sp_{2m-2}(\mathbf{F}_q))\,,\ \text{soit :} \\ Card\ \ (Sp_{2m}(\mathbf{F}_q)) &= \prod_{k=1}^{m} f_k(q) = q^{m^2} \prod_{k=1}^{m} (q^{2k} - 1). \end{aligned}$$

Nous donnons deux lemmes qui nous seront utiles dans la suite. On renvoie à [25] et [32] pour plus de précisions.

3-4. Lemme.

Soit H un plan vectoriel dans $\wedge^2 K^5$ non contenu dans $\wedge^2 E$, pour tout hyperplan E de K^5 : alors il existe une base $\{e_1, ..., e_5\}$ de K^5 telle que H possède une base de l'un des deux types suivants:

$$\begin{cases} u_1 = e_1 e_2 \\ u_2 = e_2 e_3 + e_4 e_5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4 \\ u_2 = e_1 e_3 + e_4 e_5 \end{cases}$$

Supposons K algébriquement clos :

3-5. Lemme. $\wedge^2 K^6$ admet six types de sous-espaces vectoriels de dimension 2 et de rang maximal donnés par une base $\{u_1, u_2\}$:

on désigne par $\{e_1, ..., e_6\}$ une base de K^6.

			γ_3
H_1	$u_1 = e_1e_3 + e_2e_4$	$u_2 = e_1e_5 + e_2e_6$	0
H_2	$u_1 = e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6$	$u_2 = e_1e_2$	x^3
H_3	$u_1 = e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6$	$u_2 = e_1e_2 + e_3e_4$	x^3
H_4	$u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$	$u_2 = e_1e_3 + e_5e_6$	x^2y
H_5	$u_1 = e_1e_2$	$u_2 = e_3e_4 + e_5e_6$	x^2y
H_6	$u_1 = e_1e_2 + e_5e_6$	$u_2 = e_1e_2 + e_3e_4$	$xy(x+y)$

$\gamma_3 : H_i \to \wedge^6 K^6 \simeq K$ est un polynôme homogène du troisième degré $\gamma_3\left(xu_1 + yu_2\right)$.

La colonne γ_3 donne l'invariant $\gamma_3(xu_1 + yu_2)$ sur la base $e_1e_2e_3e_4e_5e_6$ de $\wedge^6 K^6$.

Si K n'est pas algébriquement clos, en caractéristique différente de 2 et 3, seule le cas de H_6 fournit des $K-$formes non triviales, en bijection avec l'ensemble des $K-$formes binaires cubiques de discriminant non nul à changement de variables et homothétie prés.

En caractiristique 2 ou 3, si K n'est pas parfait , il y a également des $K-$formes pour H_2, H_3, H_4 et H_5.

Remarque. Nous avons vu en $1-6$ que la donnée d'un trivecteur scindable ω revient à celle d'un sous-espace vectoriel d'un espace $\wedge^2 E$:ainsi le lemme 3-4 donne deux classes de trivecteurs $2-$scindables de rang 7 et le lemme 3-5 donne six classes de trivevteurs $2-$scindables de rang 8 qui ne sont pas isomorphes en tant que trivecteurs car leurs groupes d'automorphismes ne le sont pas comme on le verra au chapitre II-5.

II- CLASSIFICATION DES TRIVECTEURS

La classification des formes trilinéaires alternées est connue uniquement pour " les petites dimensions". La répartition des classes d'équivalences est beaucoup plus compliquée que pour les formes bilinéaires comme nous allons le voir.

§1- Classification en dimension inférieur à 6 .

1-1. Si $\dim E = 3$, il n'y a qu'une orbite de trivecteurs non nuls : si $\omega \in \wedge^3 E - \{0\}$, il existe une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de E telle que $\omega = e_1 e_2 e_3$ et $Aut(\omega) \simeq SL_3(K)$.

Si $\dim E = 4$, $\wedge^3 E$ a deux orbites $\{0\}$ et son complémentaire : si $\omega \in \wedge^3 E - \{0\}$, S_ω est de dimension 3 et il existe une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de E telle que $\omega = e_1 e_2 e_3$ et $S_\omega = vect\{e_1, e_2, e_3\}$.

Si $\dim E = 5$, soit $\{e_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant 5$ une base de E ; $\wedge^3 E$ a trois orbites pour l'action de $GL(E)$ et un représentant de chaque orbite est donné par $\{0\}$, $e_1 e_2 e_3$, $e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5) = \omega_5$.

§2 - Classification en dimension 6 .

Dans ce paragraphe , E est de dimension 6 sur le corps K .

2-1. Proposition [32].

Sur un corps quadratiquement clos, $\wedge^3 E$ a deux orbites de rang maximal.
Si $\{e_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant 6$ est une base de E, un représentant de chaque orbite est donné par :

$$\omega_{6,1} = e_1 e_2 e_3 + e_4 e_5 e_6 \text{ et } \omega_{6,2} = e_1 e_2 e_4 + e_2 e_3 e_5 + e_1 e_3 e_6$$

Un trivecteur ω est dit de type $\omega_{6,1}$ sur un corps quelconque K , si par extension algébrique K' de K il est équivalent à $\omega_{6,1}$. On peut alors décrire les trivecteurs de rang 6 de type $\omega_{6,1}$ qui ne sont pas équivalents à $\omega_{6,1}$.

2-2. Proposition [25] .

Soit K un corps quelconque et ω un trivecteur de rang maximal de type $\omega_{6,1}$ et $\{e_i\}, 1 \leq i \leq 6$ est une base quelconque de E .

$$\begin{aligned}
\text{Si } car(K) &\neq 2 \text{ , } \exists d \in K - K^2 \text{ tel que } \omega = \ \omega_{6,1,d} = e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_6 - de_4e_5). \\
\text{Si } car(K) &= 2 \text{ , } \exists a \notin \left\{\alpha^2 + \alpha \ / \ \alpha \in K\right\} \text{ tel que :} \\
\omega &= \ \omega_{6,1,a} = e_1(e_3e_4 + ae_5e_6) + e_2(e_3e_6 + e_4e_5 + e_5e_6).
\end{aligned}$$

On suppose K algébriquement clos .

2-3. Lemme [26] .

Soient ω un trivecteur équivalent à $\omega_{6,1}$ et H un hyperplan contenu dans S_ω , il existe alors une base $\{e_i\}, 1 \leqslant i \leqslant 6$ de S_ω telle que $\{e_1, \ldots, e_5\}$est une base de H et telle que $\omega = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6$ ou $\omega = (e_1 + e_6)e_2e_3 + e_4e_5e_6$.

Preuve. On sait d'aprés [25] III 2-1-8 lemme1 que $R_3(\omega) = (V_1 \cup V_2) - \{0\}$ où $S_\omega = V_1 \oplus V_2$ avec $\dim(V_i) = 3$: il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que $V_i \not\subset H$. Soit $x \in V_i - H$; on a $S_\omega = Kx \oplus H$ et ω s'écrit $\omega = xu + \omega'$ avec $S_{\omega'} \subset H$, ω' est décomposable.
Si on prend par exemple $x = e_6$,alors :
Si $rg(u) = 2$, ω s'écrit $e_6(e_4e_5) + e_1e_2e_3$ où $\{e_1, \ldots, e_5\}$ est une base de H .
Si $rg(u) = 4$, on a $\dim(S_u \cap S_{\omega'}) = 2$ et ω s'écrit $e_6(e_2e_3 + e_4e_5) + e_1e_2e_3$, c'est à dire $\omega = (e_1 + e_6)\, e_2e_3 + e_4e_5e_6$.

2-4. Lemme [26] .

Soient ω un trivecteur équivalent à $\omega_{6,2}$ et H un hyperplan contenu dans S_ω. Il existe alors une base $\{e_i\}, 1 \leq i \leq 6$ de S_ω telle que $\omega = e_1e_2e_4 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6$ et H est l'un des sous-espaces $vect\,\{e_2, \ldots, e_6\}$, $vect\,\{e_1, \ldots, e_5\}$, $vect\,\{e_1, \ldots, e_4,\ e_5 + e_6\}$.

Preuve. Soit $F_2 = \{x \in S_\omega \ / \ \overline{\omega}(x)$ est de rang 3 $\} \cup \{0\}$.

Si $F_2 \not\subset H$, $S_\omega = Kx \oplus H$, $x \in F_2 - H$, ω s'ecrit $\omega = xu + \omega'$ avec ω' décomposable, comme ω est de type $\omega_{6,2}$, $rg(u) = 4$. Par suite $\dim(S_u \cap S_{\omega'}) = 2$ et $S_u \cap S_{\omega'} = vect\,\{a, b\}$ alors $abu = 0$ et ω s'ecrit $\omega = x(ay + bz) + abc$. En posant $x = e_1$, $a = e_2$, $b = e_3$, $y = e_4$, $z = e_6$ et $c = e_5$ on a: $\omega = e_1(e_2e_4 + e_3e_6) + e_2e_3e_5$ et $H = vect\,\{e_2, \dots, e_6\}$.

Si $F_2 \subset H$, considérons F_1 un supplémentaire de F_2 dans S_ω alors si $F_1 \not\subset H$ et $S_\omega = Kx \oplus H$ où $x \in F_1 - H$, $\omega = xu + \omega'$ avec $rg(\omega') = 5$, u est nécessairement de rang 2. En effet $\omega = xu + av$ avec $\dim S_v = 4$ et $S_u \subset S_{av} = H$. Si $a \notin S_u$ on peut prendre $S_u \subset S_v$, $< u, v >$ est un s.e.v de $\wedge^2 K^4$, de dimension 2, soit $\{x', a'\}$ une base de $p =< x, a >$ alors il existe λ_1, λ_2, $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ tels que $x = \lambda_1 x' + \lambda_2 a'$, $a = \alpha_1 x' + \alpha_2 a'$ et $\omega = x'(\lambda_1 u + \alpha_1 v) + a'(\lambda_2 u + \alpha_2 v)$ on choisit λ_1, λ_2, α_1, α_2 dans K de sort que ω s'ecrit $x'e_1e_3 + a'(e_1e_2 + e_3e_4)$.

On a : $x' \notin H$ et $a' \in H$ (en effet $x' = \lambda_1' x + \lambda_2' a$ et $x \notin H$, $a \in H$, $a' = \alpha_1' x + \alpha_2' a$ avec $\alpha_1' = 0$ car $a' \in F_2 \subset H$). Il reste le cas où $a \in S_u$ et $rg(u) = 4$. Alors $u = ay + cd$ et $\omega = xcd + a(v + yx)$. Posons $v + yx = u_1$ alors $\omega = xcd + au_1$ avec $x \notin S_{u_1}$ et $rg(u_1) = 4$, $card\,(S_{xcd} \cap S_{au_1}) = 2$ et comme on peut ajouter à x une combinaison linéaire de c, d alors on peut supposer c, $d \in S_{u_1}$, $cdu_1 = 0$ (sinon ω s'ecrit de type $\omega_{6,1}$) et $\omega = xcd + a(cy + dz)$, $c, d \in F_2 \subset H$, d'autre part $card\,(S_{u_1} \cap H) = 3$ comme on peut remplacer y par une combinaison linéaire de y et z on peut supposer $y \in H$; donc $H =< t, c, d, a, y >=< \lambda_1 x + \lambda_6 z\ , c, d, a, y >=< x + z\ , c, d, a, y >$.

Dans [34] , sont définis un covariant algébrique des formes trilinéaires alternées de rang 6 qui permettent de mieux comprendre la classification de ces formes. Soit K un corps de caractéristique quelconque et E un $K-$espace vectoriel de dimension 6 :
On associe à un element $\omega \in \wedge^3 E$ une application ν_ω de $E \otimes E^*$ dans $\wedge^6 E$ définie par $\nu_\omega(x \otimes f) = x\omega d_f(\omega)$. En fixant un générateur de $\wedge^6 E$, on obtient un endomorphisme u_ω de E^* [du fait de l'isomorphisme naturel $EndE^* \to (E^*)^* \otimes E^*$ et de $E \simeq E^{**}$].

Il se trouve que u_ω^2 est une homothétie dont le rapport $P(\omega) \in \wedge^6 E \otimes \wedge^6 E$, $P(\omega)$ covariant de degré 4 de ω et un calcul simple montre que les trivecteurs de type $\omega_{6,1}$ sont caractérisés par la condition $P(\omega) \neq 0$.
Soit $B = \{e_1, \ldots, e_6\}$ une base de E : on a $Mat_B(u_\omega) = (C_{ij})$ et $C_{ij} = e_i \omega d_{e_j^*}(\omega)$.

2-5. Lemme.

Si $\lambda \in K^*$ et $\mu \in K$, le trivecteur $\omega = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda e_4e_5e_6 + \mu e_2e_3e_6$ est de type $\omega_{6,1}$.

Preuve. Calculons $C_{ij} = e_i \omega d_{e_j^*}(\omega)$:on a $C_{ij} = 0$ si $i \neq j$ ou $i + j \neq 7$ et $C_{ii} = \lambda$ si $i \leqslant 3$ et $-\lambda$ si $i > 3$, on a aussi $C_{16} = 2\mu\lambda$, $C_{26} = -C_{43} = C_{51} = 2$ et $C_{56} = 2\ \mu$.
La matrice de u_ω^2 est $\lambda^2 id_{K^6}$, donc $P(\omega) = \lambda^2$; comme $\lambda \in K^*$, ω est de type $\omega_{6,1}$.

2-6. Lemme.

Soit $\omega = x\,(e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6) + ye_1e_2e_3 + ze_4e_5e_6$ où $x, y, z \in K$.
Alors ω n'est pas de type $\omega_{6,1}$ si $y = 0$ ou $yz^2 + 4x^3 = 0$.

Preuve. Calculons $C_{ij} = e_i \omega d_{e_j^*}(\omega)$: on a $C_{ij} = 0$ si $i \neq j$ ou $i + j \neq 7$ et $C_{ii} = yz$ si $i \leqslant 3$ et $-yz$ si $i > 3$;on a aussi $C_{16} = C_{34} = -C_{25} = -2x^2$ et $C_{43} = C_{61} = -C_{52} = 2xy$
La matrice de u_ω prend la forme: $Mat_B(u_\omega) = \begin{pmatrix} A & 2x^2B \\ 2xyB & -A \end{pmatrix}$ où $A = yz\ id_{K^3}$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit $Mat_B(u_\omega^2) = y(yz^2 + 4x^3) id_{K^6}$, d'où $P(\omega) = y(yz^2 + 4x^3)$.

En particulier pour $x = 1$ on trouve le lemme 4-5 ([8]) .

2-7. Lemme.

Soit $\omega = xe_1e_4e_5 + ye_2e_4e_6 + ze_3e_5e_6 + te_1e_2e_3$ où $x, y, z, t \in K$.
Alors ω n'est pas de type $\omega_{6,1}$ si $xyzt = 0$.

Preuve. Calculons $C_{i7-i} = e_i\omega d_{e^*_{7-i}}(\omega)$: on a $C_{16} = 2yz$, $C_{25} = 2xz$, $C_{34} = 2xy$, $C_{43} = 2zt$, $C_{52} = 2yt$, $C_{61} = 2xt$ dans ce cas la matrice de u^2_ω est $Mat_B(u^2_\omega) = 4xyzt\, id_{K^6}$ D'où $P(\omega) = 4xyzt$.

Soit $D \subset \wedge^3 K^6$ un sous-espace de dimension 2 et $\{\omega_1, \omega_2\}$ une base de D. On peut associer à D une forme polynôme homogène de degré 4 (biquadratique) , nôté f_D , définie à un multiple scalaire près de la façon suivante : pour $\omega = a\omega_1 + b\omega_2 \in D$, on pose $P(\omega) = f_D\,(a, b)$ .Le lemme 2-7 permet d'établir le résultat suivant , où on suppose pour simplifier K algébriquement clos .

2-8. Proposition.

Pour tout polynôme homogène de degré 4 à deux variables φ , il existe un sous-espace D de dimension 2 de $\wedge^3 K^6$ tel que φ et f_D sont équivalents .

Preuve.

Deux polynômes homogènes de degré n à deux variables (ou formes binaires de degré n) sont équivalents s'ils se correspondent par changement linéaire de variables .Une forme binaire f de degré 4 dans les variables X et Y , s'écrit $\prod_{i=1}^{4}(X - \lambda_i Y)$ où les λ_i sont les quatres racines de l'équation $f\,(X, 1) = 0$.

Posons alors $x = X - \lambda_1 Y, y = X - \lambda_2 Y, z = X - \lambda_3 Y$ et $t = X - \lambda_4 Y$: on prend alors $\omega_1 = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + e_1e_2e_3$, $\omega_2 = \lambda_1 e_1e_4e_5 + \lambda_2 e_2e_4e_6 + \lambda_3 e_3e_5e_6 + \lambda_4 e_1e_2e_3$ et $D = vect\,\{\omega_1, \omega_2\}$ .Le lemme 2-7 dit que $f_D\,(X, Y) = P\,(X\omega_1 - Y\omega_2) = \prod_{i=1}^{4}(X - \lambda_i Y)$ est équivalent à f.

§3- Classification en dimension 7 .

Dans ce paragraphe , on reprend la classification des formes trilinéaires alternées de rang 7 sur un corps algébriquement clos et sur un corps quelconque. Des résultats de ce paragraphe sont dans [25] et [26]. On peut aussi se reférer aux travaux de Revoy et Noui [34] et à [8] .

3-1. Théorème([36])

Sur un corps algébriquement clos, il existe cinq orbites de trivecteurs de rang 7. Dans une base $\{e_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant 7$, de E , un représentant de chaque orbite est donné par :

$\omega_{7,1} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7)$

$\omega_{7,2} = \omega_{7,1} + e_2e_4e_6$

$\omega_{7,3} = e_1e_2e_3 + e_3e_4e_5 + e_5e_6e_7$

$\omega_{7,4} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_7$

$\omega_{7,5} = \omega_{7,2} + e_3e_5e_7$

3-2. Théorème.

Les trivecteurs ω de rang 7 sur un corps K de caractéristique différente de 2 et 3 et de clôture algébrique $\overline{K}$ se répartissent en cinq classes C_i ; $i = 1, \ldots, 5$, selon que $\omega_{\overline{K}}$ est de type $\omega_{7,i}$. Les ensembles C_1 et C_2 sont réduits respectivement aux éléments $\omega_{7,1}$ et $\omega_{7,2}$. L'ensemble C_3 est formé de classes d'isomorphismes en bijection avec le groupe des extensions quadratiques séparables de K ; C_4 est en bijection avec l'ensemble des classes de $K-$algèbres de quaternions et C_5 est en bijection avec l'ensemble $O \times \left(K^*/K^{*^3}\right)$, où O est l'ensemble des classes d'isomorphismes de $K-$algèbres octonions.

Rappelons qu'un corps ordonné K est dit maximal si toute extension algébrique ordonnée de K est triviale. Par exemple $\mathbb{R}$ est un corps ordonné maximal.

3-3. Théorème.

Sur un corps ordonné maximal , $\wedge^3 E$ admet , en dimension 7 , quatorze orbites.Les classes C_3, C_4 et C_5 sont constituées de deux éléments. Dans une base $\{e_i\}, i = 1, ..., 7,$ un réprésentant de chaque orbite de trivecteurs de rang maximal est donné par :

$\omega_{7,1},\ \omega_{7,2},\ \omega_{7,3},\ \omega_{7,3,-1},\ \omega_{7,4},\ \omega_{7,4,1,-1},\ \omega_{7,5}$ et $\omega_{7,5,-1,-1,-1}$.

Ce résultat est valable en particulier sur le corps des réels $\mathbb{R}$.

Rappelons qu'un corps local K est un corps valué complet pour une valuation discrète ν de corps résiduel fini k .C'est une extension algébrique finie du corps $\mathbb{Q}_p$, ou du corps $\mathbf{F}_p((x))$ des séries formelles sur $\mathbf{F}_p$.La caractéristique de k est égale à p et le degré de k sur $\mathbf{F}_p$,appelé degré résiduel de K , est noté f ;la caractéristique de K est 0 ou p suivant que K contient $\mathbb{Q}_p$ ou non ;le premier cas est dit d'inégale caractéristique [37] .

3-4. Théorème.

Sur un corps local K , de caractéristique différente de 2 et de 3 , il y a 19 orbites Si $q \not\equiv 1\,[3]$ (resp.25 orbites si $q \equiv 1\,[3]$) de trivecteurs de $rang \leqslant 7$. Un représentant de chaque orbite de rang maximal est donné par $\omega_{7,1}, \omega_{7,2}, \omega_{7,3,\alpha^i\beta^j}$ où $i, j \in \{0, 1\}$ et $\alpha, \beta, \alpha^{-1}\beta \in K_* - K_*^2$, $\omega_{7,4}$ et $\omega_{7,4,-\pi,-u}$,$\omega_{7,5}, \lambda\omega_{7,5}, \lambda^2\omega_{7,5}$ avec $\lambda \in K^* - K^{*^3}$ pour le premier cas et $\delta^i\gamma^j\omega_{7,5}$ avec $i, j \in \{0, 1, 2\}$ où $(\overline{\delta}, \overline{\gamma})$ est une $\mathbf{F}_3-$base de K^*/K^{*^3} dans le second cas .

3-5. Proposition.

Soit E un espace vectoriel de dimension 7 sur un corps fini $K = \mathbf{F}_q$ de caractéristique quelconque , alors :

a) Si $q \equiv 1\,[3]$, $\wedge^3 E$ admet 14 orbites et dans une base $\{e_i\}, 1 \leq i \leq 7$, un représentant de chaque orbite de trivecteurs de rang maximal est donné par : $\omega_{7,1}, \omega_{7,2}$ $\omega_{7,3}, \omega_{7,3,d} = e_1(e_2e_5 + e_3e_7) + e_4(e_2e_3 + de_5e_7) + e_6(e_5e_3)$ tel que $d \notin K_*^2$ et $car(K) \neq 2$ ou $\omega_{7,3,a} = e_1(e_2e_5 + e_3e_7) + e_4(e_2e_5 + e_5e_7 + ae_2e_3) + e_6(e_3e_5)$ si $a \notin \{x^2 + x, x \in K\}$ et $car(K) = 2$,$\omega_{7,4}$, $\omega_{7,5}$,$\lambda\omega_{7,5}$,$\lambda^2\omega_{7,5}$ $(\lambda \notin K_*^3)$.

b) Si $q \not\equiv 1\,[3]$, $\wedge^3 E$ admet 12 orbites et dans une base $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq 7$,un représentant de chaque orbite de trivecteurs de rang maximal est donné par $\omega_{7,1},\ \omega_{7,2},\ \omega_{7,3},\ \omega_{7,3,d}$ ou $\omega_{7,3,a},\ \omega_{7,4},\ \omega_{7,5}$.

On suppose K algébriquement clos .

3-6.Définition.

$B = \{u_1, \ldots, u_7\}$ est une base normale pour $\omega_{7,i}$, $1 \leqslant i \leqslant 5$ (3-1) , s'il existe $f \in Aut(\omega_{7,i})$ telle que $f(B) = \{e_1, \ldots, e_7\}$.

3-7.Lemme .

Soient ω un trivecteur équivalent à $\omega_{7,3}$ et H un hyperplan contenu dans S_ω ; alors H contient au moins cinq éléments d'une base normale de ω.

3-8.Lemme.

Soient ω un trivecteur équivalent à $\omega_{7,4}$ et H un hyperplan contenu dans S_ω . Alors H contient au moins cinq éléments d'une base normale de ω si $R_5(\omega) \not\subset H$ (I-2-8) et quatre éléments dans le cas contraire .

3-9.Lemme.

Soient ω un trivecteur équivalent à $\omega_{7,5}$ et H un hyperplan contenu dans S_ω ; alors H contient au moins quatre éléments d'une base normale de ω.

§4 - Classification en dimension 8

4-1. Théorème[26] .

Sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque , il existe treize classes d'équivalance de trivecteurs de rang 8 . La table 1 donne, relativement à une base $\{e_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant 8$ de E , un système de représentants des 13 classes, notés $\omega_{8,i}$, $1 \leqslant i \leqslant 13$ La deuxième colonne correspond à la notation de Gurevitch [11] .

Table 1

$\omega_{8,i}$	**Notation de Gurevitch**	**Expression d'un représentant de l'orbite**	$\mathbf{d}_1(\omega)$
$\omega_{8,1}$	**XVI**	$e_1(e_2e_3+e_4e_5)+e_6e_7e_8$	3
$\omega_{8,2}$	**XI**	$e_1(e_2e_3+e_4e_5+e_6e_7)+e_5e_6e_8$	3
$\omega_{8,3}$	**XVII**	$e_1(e_3e_4+e_5e_6)+e_2(e_3e_5+e_7e_8)$	5
$\omega_{8,4}$	**XIII**	$e_1(e_2e_3+e_4e_5)+e_6(e_2e_7+e_4e_8)$	5
$\omega_{8,5}$	**XIX**	$e_1(e_2e_3+e_4e_5)+e_6(e_2e_3+e_7e_8)$	5
$\omega_{8,6}$	**XIV**	$e_1(e_2e_3+e_4e_5+e_6e_7)+e_8(e_4e_3+e_5e_6)$	5
$\omega_{8,7}$	**XII**	$e_1(e_2e_3+e_4e_5+e_6e_7)+e_2(e_5e_6+e_7e_8)$	5
$\omega_{8,8}$	**XVIII**	$e_1(e_2e_8+e_3e_6+e_4e_7)+e_6e_7e_8+e_3e_4e_5$	6
$\omega_{8,9}$	**XXI**	$e_1[e_2(e_3+e_4)+e_5e_6]+e_3e_5e_7+e_4e_6e_8$	6
$\omega_{8,10}$	**XX**	$e_1(e_2e_8+e_6e_7)+e_2e_3e_5+e_3e_4e_6+e_4e_5e_7$	6
$\omega_{8,11}$	**XV**	$e_1(e_3e_7+e_5e_4+e_8e_2)+e_8(e_4e_3+e_6e_7)+e_2e_4e_6$	6
$\omega_{8,12}$	**XXII**	$e_1[(e_4-e_7)(e_3-e_8)+e_5e_7]+e_2(e_3e_4+e_5e_6)+e_6e_7e_8$	7
$\omega_{8,13}$	**XXIII**	$e_1[e_5(e_3+e_7)+e_8e_4]+e_2(e_3e_4+e_5e_6)+e_6e_7e_8$	7

Remarque 1.

Un calcul direct sur les expressions de $\omega_{8,i}$ montre que $C(\omega)=K$ à l'exception des trois cas suivants : $\omega_{8,1}$, pour lequel $C(\omega)=K\times K$, ainsi que $\omega_{8,2}$ et $\omega_{8,3}$ pour lesquels on trouve $K[\varepsilon]$ avec $\varepsilon^2=0$ et $rang(\varepsilon)=3$.

Remarque 2.

Si u et v sont des bivecteurs tels que $S_v\subset S_u$ et $rg(u)=4, rg(v)=2$, il existe une base $\{a,b,x,y\}$ de S_u telle que :

si $uv=0$, $v=xy$ et $u=ax+by$

si $uv\neq 0$, $v=xy$ et $u=\lambda xy+ab$

Si u est un bivecteur de rang 6 , ω un trivecteur de rang 3 tels que $S_\omega \subset S_u$, il existe une base $\{a,b,c,x,y,z\}$ de S_u telle que :
si $u\omega = 0$, $\omega = xyz$ et $u = ax + by + cz$
si $u\omega \neq 0$, $\omega = xyz$ et $u = ab + cx + yz$.

La démonstration du théorème 4-1 utilise la classification des trivecteurs de rang infèrieur , l'invariant numérique $d_1(\omega)$ et les lemmes donnés au paragraphe §2 et §3.
Rappelons que si $d_1(\omega) = k$, il existe $e_1 \in E - \{0\}$, $u \in \wedge^2 E'$, $\omega' \in \wedge^3 E'$ où E' est un supplémentaire de Ke_1 dans E tels que $\omega = e_1 u + \omega'$ avec $rg(\omega') = k$.
Comme $\dim E = 8$, l'invariant $d_1(\omega)$ est un des entiers $3, 5, 6$ ou 7 à cause de $(I - 2.2)$.
Il s'agit de faire varier E' et de discuter suivant le rang de u les positions relatives des supports de ω' et de u.
Si $d_1(\omega) = 3$, ω' est décomposable ; le rang de u est au moins 4 car $S_\omega \subset Ke_1 + S_u + S_{\omega'}$ et S_ω doit être E tout entier .
Si le rang de u vaut 4 , $\dim(S_u \cap S_{\omega'}) = 0$ et on écrit , dans $E^{'}$, $\omega' = xyz$ et $u = ab + cd$ où $\{e_1, a, b, c, d, x, y, z\}$ est une base de E ; ainsi on obtient $\omega_{8,1}$.
Si le rang de u est 6 , $\dim(S_u \cap S_{\omega'}) = 2$; soit alors $S_u \cap S_{\omega'} = vect\{x, y\}$ et $\omega' = xyz$; u s'écrit $u_1 + u_2$ où $rg(u_1) = 2$, $rg(u_2) = 4$ et $x, y \in S_{u_2} - S_{u_1}$.
Si $xyu_2 = 0$,la remarque 2 permet d'écrire $u = (xa + yb) + cd$; en posant $c = e_2, d = e_3$, $a = -e_4$, $x = e_5$, $y = e_6$, $b = e_7$ et $z = e_8$, on obtient $\omega_{8,2}$.
Si $xyu_2 \neq 0, u_2 = xy + ef$ et ω équivalent à $\omega_{8,1}$.
Les trivecteurs $\omega_{8,3}, \ldots, \omega_{8,7}$ s'obtiennent pour $d_1(\omega) = 5$.
Si $d_1(\omega) = 6$, ω est équivalent à $\omega_{8,i}$, $8 \leqslant i \leqslant 11$; pour ce faire on utilise les lemmes 2-3,2-4,2-5.
Les deux derniers trivecteurs $\omega_{8,12}$ et $\omega_{8,13}$ s'obtiennent pour $d_1(\omega) = 7$.
Si $d_1(\omega) = 7, \omega = e_1 u + \omega'$;le support de u est contenu dans $S_{\omega\prime} = E'$,le rang de u dépasse 2,sinon $u = ab$ avec $a \in S_u \cap S_{\omega'}$ et le rang de $\overline{\omega}(a)$ serait inférieur à 7,donc $rg(u) \in \{4, 6\}$ .Le trivecteur ω' ne peut pas être équivalent à $\omega_{7,1}$ car ω' serait de la

forme $e_2\nu$: si $rg(u) = 4$, $\overline{\omega}\,(e_2)$ est de rang 5 et $d_1(\omega) \leqslant 5$ et si $rg(u) = 6$, ω' s'écrit $e_1u + e_2\nu$; $e_2 \in S_u$ entrainerait $d_1(\omega) \leqslant 5$, si $e_2 \notin S_u$, K est algébriquement clos entrainerait l'existance d'un scalaire λ tel que $\gamma_3(u + \lambda\nu) = 0$ et $d_1(\omega) \leqslant 5$. Le cas où ω' est équivalent à $\omega_{7,2}$ se ramène au cas $rg(u) = 6$ et ω' est équivalent à $\omega_{7,3}$. Dans le cas où $rg(u) = 6$ le support de u ,S_u , est un hyperplan de E' , on utilise les lemmes 3-6 , 3-7 et 3-8 on en déduit les autres trivecteurs.

Remarque 3.

Les trivecteurs 2-scindables de rang 8 sont les trivecteurs $\omega_{8,i}$, $i = 1, \ldots, 6$.

§5 Groupes d'automorphismes

Dans ce paragraphe , nous déterminons les groupes d'automorphismes des trivecteurs $\omega_{8,i}$, $1 \leqslant i \leqslant 13$.

5-1. Cohomologie galoisienne et groupes d'automorphismes.

Soit ω un trivecteur de rang 8 sur l'espace vectoriel E et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K . Le trivecteur $\omega_{\overline{K}} \in \wedge^3 E \otimes_K \overline{K}$ est d'un des 13 types $\omega_{8,i}$ .On sait qu'alors si G le groupe de Galois de $\overline{K}$ sur K et $A_i = Aut_{\overline{K}}(\omega_i)$ le groupe des automorphismes de $\omega_{8,i}$, l'ensemble de cohomologie $H^1(G, A_i)$ est en bijection avec l'ensemble Γ_i des classes d'équivalence de $3-$vecteurs $\omega \in \wedge^3 E$ de type $\omega_{8,i}$ ([37] , [17]) . Il faut donc déterminer ces groupes A_i , sous-groupe de $GL_8(\overline{K})$, comme cela a été fait en rang 6 ([32]) et en rang 7 ([8] , [34]) et dans la thèse de L.Noui ([25]).

La détermination des groupes d'automorphismes A_i à un isomorphisme local près est insuffisante pour l'utilisation de la cohomologie ([27]) ,comme le montre l'exemple suivant: pour $A = Aut(\omega_{7,5})$ on a la suite suivante $1 \longrightarrow G_2(K) \longrightarrow A \longrightarrow \mu_3(K) \longrightarrow 1$ où $G_2(K)$ est un groupe simple de dimension 14, et il est , aussi , la composante connexe de A. Le groupe d'automorphismes de $\omega_{7,5}$ à un isomorphisme local près est $A' = G_2(K)$, on trouve $H^1(G, A) \neq H^1(G, A')$ avec $A = [G_2(K)] \,.\mu_3(K)$.

En particulier , si on prend $K = \mathbf{F}_q$ un corps fini avec $q \equiv 1\,[3]$, on obtient :
$card\,(H^1(G,A)) = 3$, $\omega_{7,5}, \lambda\omega_{7,5}, \lambda^2\omega_{7,5}$ $(\lambda \notin K^{*^3})$
$card\left(H^1(G,A^`)\right) = 1$, $\omega_{7,5}$.
Donc en négligeant le groupe discret , on n'obtient pas toutes les orbites en question , ce qui motive la détermination complète des groupes d'automorphismes. La détermination des groupes A_i se fait en générale à l'aide des parties stables (I-2-8).

5-2. Proposition .

Le groupe d'automorphismes $A_1 = Aut(\omega_{8,1})$ est déterminé par les suites exactes:

$$1 \longrightarrow SL_3(K) \longrightarrow A_1 \longrightarrow Aut(\omega_5) \longrightarrow 1$$
$$1 \longrightarrow A_0 \longrightarrow Aut(\omega_5) \longrightarrow K^* \longrightarrow 1$$
$$1 \longrightarrow K^4 \longrightarrow A_0 \longrightarrow SP_4(K) \longrightarrow 1 \qquad \text{où } \omega_5 = e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$$

Preuve.Déterminons la partie stable $\overline{R}_{\leqslant 1}(\omega_{8,1}) = \overline{R}_0(\omega_{8,1}) \cup \overline{R}_1(\omega_{8,1})$ (I-2-9).
Aprés calcul on trouve $\overline{R}_{\leqslant 1}(\omega_{8,1}) =< e_2, e_3, e_4, e_5 > \cup < e_6, e_7, e_8 >= V_1 \cup V_2$.
Remarquons que $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, donc si $f \in A_1 = Aut(\omega)$ on a $f(R(\omega)) \subset R(\omega)$, d'où $\{f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2\}$ ou $\{f(V_1) \subset V_2$ et $f(V_2) \subset V_1\}$ .Le deusième cas est impossible , et la matrice associée à f prend la forme : $\begin{pmatrix} \alpha_1 & o_{1\times 4} & o_{1\times 3} \\ \vdots & A & o_{4\times 3} \\ \alpha_8 & o_{3\times 4} & B \end{pmatrix}$.
Soit $f \in A_1$, $f.\omega = \omega$, entraine $B \in SL_3(K)$ et $\alpha_2 = \cdots = \alpha_8 = 0$, dans ce cas $f(e_1) = \alpha_1 e_1$ et $\wedge^3 f\,[e_1(e_2e_3 + e_4e_5)] = e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$, on en déduit que :
$f \setminus < e_1, \ldots, e_5 > \in Aut(\omega_5)$, ce qui permet de définir un homomorphisme de groupe $\varphi : A_1 \longrightarrow Aut(\omega_5)$, $f \longmapsto f \setminus < e_1, \ldots, e_5 >$. φ est évidemment surjectif , d'autre part $\ker\varphi = \{f \;/\; f \in A_1 \; et \; \alpha_1 = 1 \; , \; A = id_4\}$, or $f.\omega = \omega$, entraine $\ker\varphi \backsimeq SL_3(K)$,d'où l'exactitude de la suite $1 \longrightarrow SL_3(K) \longrightarrow A_1 \longrightarrow Aut(\omega_5) \longrightarrow 1$.
Comme $Aut(\omega_5)$ vérifie les deux suites exactes ([25]) :
$1 \longrightarrow A_0 \longrightarrow Aut(\omega_5) \longrightarrow K^* \longrightarrow 1$
$1 \longrightarrow K^* \longrightarrow A_0 \longrightarrow SP_4(K) \longrightarrow 1$ D'où le resultat.

5-3. Proposition.

Le groupe d'automorphismes $A_2 = Aut(\omega_{8,2})$ est déterminé par les suites exactes:

$$\begin{array}{l}
1 \longrightarrow A_2' \longrightarrow A_2 \longrightarrow K^* \longrightarrow 1 \\
1 \longrightarrow A_2'' \longrightarrow A_2' \longrightarrow SL_2(K) \longrightarrow 1 \\
1 \longrightarrow A_2''' \longrightarrow A_2'' \longrightarrow K^* \longrightarrow 1 \\
1 \longrightarrow U(16) \longrightarrow A_2''' \longrightarrow SL_2(K) \longrightarrow 1
\end{array}$$

où $U(16)$ est un groupe unipotent de dimension 16.

Preuve. Par un changement de base , on peut écrire :
$\omega_{8,2} = e_1 (e_5e_6 + e_8e_2 + e_3e_7) + e_2e_3e_4$. Déterminons dabord la partie stable $R_3(\omega_{8,2})$. Remarquons que $e_1 \in R_3(\omega_{8,2})$.Aprés calcul , on obtient $R_3(\omega_{8,2}) =< e_1 > - \{0\}$, donc on peut définir un homomorphime de groupe $\varphi : A_2 \longrightarrow K^*, \varphi(f\ ) = \alpha$ où $f(e_1) = \alpha e_1$, il est surjectif , d'où l'exactitude de la première suite :$1 \longrightarrow A_2' \longrightarrow A_2 \longrightarrow K^* \longrightarrow 1$ avec $A_2' = \ker \varphi$. Soit $f \in A_2'$, donc $\alpha = 1$ et de $f.\omega = \omega$ résulte $f\,(e_1\omega) = e_1\omega$, soit $vect\,\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est stable par f. Alors la matrice M de f est de la forme :

$$M\,(f) = \begin{pmatrix} 1 & a \quad b \quad c & \multicolumn{2}{c}{} \\ 0 & & \multicolumn{2}{c}{} \\ 0 & A & \multicolumn{2}{c}{B} \\ 0 & & \multicolumn{2}{c}{} \\ \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$O_{4\times 4}$}} & C & D \\ & & O_{2\times 2} & E \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} A \in GL_3(K) \\ C, E \in GL_2(K) \end{array}$$

Aprés calcul on trouve $C \in SL_2(K)$. Ceci nous permet de définir un homomorphisme $\pi : A_2' \longrightarrow SL_2(K)$, $\pi\,(M) = C$, il est surjectif , d'où la suite exacte :
$1 \longrightarrow A_2'' \longrightarrow A_2' \longrightarrow SL_2(K) \longrightarrow 1$ où $A_2'' = \ker \pi$ .De $f.\omega = \omega$, le même calcul montre que la matrice A prend la forme : $\begin{pmatrix} B & \begin{matrix} c_2 \\ c_3 \end{matrix} \\ 0_{1\times 2} & c_4 \end{pmatrix}$ et $detB \times c_4 = 1$.

Cela permet de définir un homomorphisme $\eta : A_2'' \longrightarrow K^*, \eta(f) = c_4$ qui est surjectif. D'où la troisième suite exacte . Si $f \in A_2''', c_4 = 1$, donc $\det B = 1$ et il suffit de prendre l'homomorphisme δ tel que $\delta : A_2''' \longrightarrow SL_2(K), \delta(f) = B$ pour obtenir la dernière suite.

5-4. Proposition.

Le groupe $A_3 = Aut(\omega_{8,3})$ est déterminé par :

$$\begin{array}{ccl} 1 & \longrightarrow & A_3' \longrightarrow A_3 \longrightarrow K^* \times K^* \longrightarrow 1 \\ 1 & \longrightarrow & A_3'' \longrightarrow A_3' \longrightarrow SL_2(K) \longrightarrow 1 \\ 1 & \longrightarrow & K^9 \longrightarrow A_3'' \longrightarrow SL_2(K) \longrightarrow 1 \end{array}$$

La partie stable $R_5(\omega_{8,3}) =< e_1 > \cup < e_2 > - \{0\} = V_1 \cup V_2 - \{0\}$ .Soit $f \in A_3$, donc $f(R_5(\omega)) \subset R_5(\omega)$, par suite $f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2$, le cas $f(V_1) \subset V_2$ et $f(V_2) \subset V_1$ est absurde car dans ce cas $f(e_1) = \lambda e_2$ et $f(e_2) = \beta e_1$, comme $\omega = e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_5 + e_7e_8)$, posons $u = e_3e_4 + e_5e_6$ et $v = e_3e_5 + e_7e_8$, or $\wedge^3 f(\omega) = \omega$ entraine $\lambda e_1e_2\wedge^2 f(u) = e_1e_2u$ (*) et $\beta e_1e_2\wedge^2 f(v) = e_2e_1v$ (**) , d'où le support des deux membres de(*) est $vect\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_7, e_8\} = vect\{e_1, e_2, f(e_3), f(e_4), f(e_5), f(e_6)\}$ et de même pour (**) , $vect\{e_1, ..., e_6\} = vect\{e_1, e_2, f(e_3), f(e_5), f(e_7), f(e_8)\}$,donc le coefficient de $e_2e_7e_8$ dans l'égalité $f.\omega = \omega$ implique $1 = 0$, d'où la contradiction .

Donc $f(e_1) = \alpha e_1$ et $f(e_2) = \beta e_2$, ceci permet d'écrire la première suite exacte :

$1 \longrightarrow A_3' \longrightarrow A_3 \longrightarrow K^* \times K^* \longrightarrow 1$.Soit $f \in A_3^{`}$, donc $\alpha = \beta = 1$, l'égalité $f.\omega = \omega$, entraine :

$$M(f\ ) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0_{4\times 2} & \end{matrix} & \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & D \\ O_{2\times 2} & O_{2\times 4} & C \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} B \in GL_4(K) \\ C \in GL_2(K) \end{matrix} .$$

Dans ce cas $\det M(f\ ) = \det B \times \det C \neq 0$. Aprés calcul , on trouve $C \in SL_2(K)$, d'où la deuxième suite. Soit $f \in A_3''$, donc $C = Id_2$, par suite $\det B = 1$, or $\wedge^3 f(\omega) = \omega$

entraine : $\begin{pmatrix} \alpha_3 & \gamma_3 & \beta_3 & \delta_3 \\ 0 & \gamma_4 & 0 & \delta_4 \\ \alpha_5 & \gamma_5 & \beta_5 & \delta_5 \\ 0 & \gamma_6 & 0 & \delta_6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_5 & \beta_5 \end{pmatrix} \in SL_2(K)$, c'est à dire le plan $\{e_3, e_5\}$ est invariant par A_3'' , d'où la dernière suite .

5-5. Proposition.

Le groupe $A_4 = Aut(\omega_{8,4})$ est déterminé par :

$$\begin{array}{ccl} 1 & \longrightarrow & A_4' \longrightarrow A_4 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1 \\ 1 & \longrightarrow & A_4'' \longrightarrow A_4' \longrightarrow K^* \times K^* \longrightarrow 1 \\ 1 & \longrightarrow & K^{12} \longrightarrow A_4'' \longrightarrow SL_2(K) \times SL_2(K) \longrightarrow 1 \end{array}$$

Par un changement de base , $\omega_{8,4}$ devient: $\omega = e_1(e_3e_6 + e_4e_7) + e_2(e_3e_5 + e_4e_8)$. La partie stable $R_5(\omega) =< e_1, e_2 > \cup < e_3, e_4 > - \{0\} = V_1 \cup V_2 - \{0\}$. Comme$V_1 \cap V_2 = \{0\}$, donc si $f \in A_4$, $f(R_5(\omega)) \subset R_5(\omega)$, dans ce cas : $\{f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2\}$ou $\{f(V_1) \subset V_2$ et $f(V_2) \subset V_1\}$, ce qui premet de définir un homomorphisme de groupes $\varphi : A_4 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, f \longmapsto \varphi(f) = \begin{cases} \overline{0} \text{ si } f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2 \\ \overline{1} \quad \text{sinon} \end{cases}$

L'homomorphisme φ est surjectife , en effet $\varphi(id_E) = \overline{0}$ et $\varphi(f_0) = \overline{1}$, où f_0 est définie par $f_0(e_1) = e_3,\ f_0(e_2) = e_4,\ f_0(e_3) = e_1,\ f_0(e_4) = e_2,\ f_0(e_5) = -e_7,\ f_0(e_6) = -e_6,$ $f_0(e_7) = -e_5,\ f_0(e_8) = -e_8$.On obtient une suite exacte $1 \longrightarrow A_4' \longrightarrow A_4 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$ avec $A_4^{`} = \ker \varphi$.Soit $f \in A_4^{`}$, donc $f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2$, par suit la matrice associée à f prend la forme suivante:$M(f) = \begin{pmatrix} A & O_{2\times 2} & \\ O_{2\times 2} & B & C \\ & O_{4\times 4} & \end{pmatrix}$ $\quad A, B \in GL_2(K)$

Ceci permet de construire un homomorphisme de groupes $\psi : A_4' \longrightarrow K^* \times K^*$, avec $\psi(f) = (\det A, \det B)$, il est surjectif , d'où l'exactitude de la suite : $1 \longrightarrow A_4'' \longrightarrow A_4' \longrightarrow K^* \times K^* \longrightarrow 1$ où $A_4'' = \ker \psi$.

Soit $f \in A''_4$, donc $\det A = \det B = 1$, par suite $A\ ,B \in SL_2(K)$, on peut définir un homomorphisme de groupes $\pi : A''_4 \longrightarrow SL_2(K) \times SL_2(K)$, $\pi(f) = (A, B)$, il est surjectif et de noyau $\ker \pi$. Soit $f \in \ker \pi$, alors $A = B = id_2$, or $\wedge^3 f(\omega) = \omega$, après calcul la matrice de f prend la forme : $M(f) = \begin{pmatrix} id_4 & D \\ 0_{4\times 4} & id_4 \end{pmatrix}$, où $D \in GL_4(K)$, d'où l'exactitude de la dernière suite $1 \longrightarrow K^{12} \longrightarrow A''_4 \longrightarrow SL_2(K) \times SL_2(K) \longrightarrow 1$.

5-6. Proposition.

Le groupe d'automorphismes $A_5 = Aut(\omega_{8,5})$ est déterminé par les suites exactes:

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow A'_5 \longrightarrow A_5 \longrightarrow S_3 \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow A''_5 \longrightarrow A'_5 \longrightarrow K^* \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow A'''_5 \longrightarrow A''_5 \longrightarrow SL_2(K) \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow K^6 \longrightarrow A'''_5 \longrightarrow SL_2(K) \times SL_2(K) \longrightarrow 1 \end{array}$$

Par un changement de base , $\omega_{8,5}$ devient: $\omega = e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_4 + e_7e_8)$.
La partie stable $R_5(\omega) =< e_1 > \cup < e_2 > \cup < e_1 + e_2 > - \{0\} = V_1 \cup V_2 \cup V_3 - \{0\}$
Or si $f \in A_5$, $f(R_5(\omega)) \subset R_5(\omega)$, donc $f(V_i) \subset V_{\sigma(i)}$ où $\sigma \in S_3$, ceci nous permet de définire un homomorphisme de groupes $\varphi : A_5 \longrightarrow S_3$ par $\varphi(f\ ) = \sigma$, où $\sigma = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ V_{\sigma(1)} & V_{\sigma(2)} & V_{\sigma(3)} \end{pmatrix}$. On peut montrer que φ est surjectif , d'où la première suite où $A'_5 = \ker \varphi$. Soit $f \in A'_5$, donc $f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2$ et $f(V_3) \subset V_3$, par suite $f(e_1) = \alpha e_1$, $f(e_2) = \beta e_2$, $f(e_1+e_2) = \delta(e_1+e_2)$, d'où $\alpha = \beta$. Cela permet de définir un homomorphisme de groupes $\psi : A'_5 \longrightarrow K^*, \psi(f\ ) = \alpha$, il est surjectif , d'où la deuxième suite exacte, $A''_5 = \ker \psi$. Soit $f \in A''_5$ i.e. $\alpha = 1$ et $f.\omega = \omega$ donnent aprés calcul:

$$M(f\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & A & \multirow{2}{*}{D} \\ 0 & 1 & B & \\ \multicolumn{2}{c}{O_{6\times 2}} & O_{2\times 4} & C \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} C \in GL_2(K) \\ B \in GL_4(K) \end{array}$$

Comme $\det M(f\ ) = \det B \times \det C \neq 0$, d'où $\det C \neq 0$ et $\wedge^3 f(\omega) = \omega$ entraine

$\det C = 1$, donc $C \in SL_2(K)$, ce qui permet de définir un homomorphisme surjectif $\pi : A_5'' \longrightarrow SL_2(K)$ par $\pi(f) = C$, , on a donc la suite exacte suivante :
$1 \longrightarrow A_5''' \longrightarrow A_5'' \longrightarrow SL_2(K) \longrightarrow 1$ avec $A_5''' = \ker \pi$. Soit $f \in \ker \pi$, on a $C = id_2$. De $f.\omega = \omega$, le même calcul montre que la matrice B est de la forme $\begin{pmatrix} X & O_{2\times 2} \\ O_{2\times 2} & Y \end{pmatrix}$ où $\det X = \det Y = 1$, donc $X, Y \in SL_2(K)$. D'où l'homomorphisme de groupes $h : A_5''' \longrightarrow SL_2(K) \times SL_2(K)$, $h(f) = (X, Y)$, h est surjectif et de noyau le groupe additif K^6.

5-7. Proposition.

Le groupe $A_6 = Aut(\omega_{8,6})$ est déterminé par:

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow A_6' \longrightarrow A_6 \longrightarrow K^* \times K^* \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow U(13) \longrightarrow A_6' \longrightarrow SL_2(K) \longrightarrow 1 \end{array}$$

On peut écrire $\omega_{8,6} = e_1(e_8e_3 + e_6e_5 + e_4e_7) + e_2(e_6e_3 + e_5e_4)$. Les parties stables $R_5(\omega_{8,6}) =< e_1 > - \{0\}$ et $R_{7,1}(\omega_{8,6}) = \{x \in E \ / \ \overline{\omega}(x)$ est de type $\omega_{7,1}\} =$
$\{x \in E \ / \ x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ et $\alpha_2 \neq 0\}$ permettent de déterminer A_6. Soit $f \in A_6$, la matrice de f est $\begin{pmatrix} \beta & \alpha_1 & \\ 0 & \alpha_2 & A \\ \multicolumn{2}{c}{O_{6\times 2}} & \end{pmatrix}$ cela permet de définir un homomorphisme surjectif $\varphi : A_6 \longrightarrow K^* \times K^*$, $\varphi(f) = (\beta, \alpha_2)$. D'où la première suite exacte :
$1 \longrightarrow A_6' \longrightarrow A_6 \longrightarrow K^* \times K^* \longrightarrow 1$. Soit $f \in A_6' = \ker \varphi$, $f(e_1) = e_2 + \alpha_1 e_1$.
De $f.\omega = \omega$, la matrice A prend la forme $\begin{pmatrix} B_1 & A_1 & A_2 \\ 0_{2\times 2} & B & A_3 \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & C \end{pmatrix}$ et un calcul simple montre que $\det B = \det B_1 = 1$ où $B_{\ 1}$ est en fonction de B et telle que :
$\det M(f) = \det B \times \det B_1 \times \det C$; $C \in GL_2(K)$. On peut donc construire un homomorphisme surjectif $\psi : A_6' \longrightarrow SL_2(K)$, $\psi(f\ ) = B$, $\ker \psi \simeq U(13)$.

5-8. Proposition.

Le groupe $A_7 = Aut(\omega_{8,7})$ est déterminé par :

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow A_7' \longrightarrow A_7 \longrightarrow K^* \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow A_7'' \longrightarrow A_7' \longrightarrow SL_2(K) \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow U(16) \longrightarrow A_7'' \longrightarrow K^* \longrightarrow 1 \end{array}$$

On peut écrire $\omega_{8,7} = e_1e_2e_8 + e_1(e_7e_5 + e_6e_4) + e_1(e_4e_3 + e_5e_6)$. $R_5(\omega) =< e_1, e_2 >$. Soit $f \in A_7$,donc la matrice associée à f est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{6\times 2} & C \end{pmatrix}$ où $A \in GL_2(K)$. Ceci nous permet de construire un homomorphisme $\varphi : A_7 \longrightarrow K^*$, $\varphi(f) = \det A$. φ est surjectif et de noyau A_7'. Soit $f \in A_7'$, donc $\det A = 1$ i.e. $A \in SL_2(K)$, d'où l'homomorphisme $\psi : A_7' \longrightarrow SL_2(K)$, $\psi(f) = A$, qui est surjectif et de noyau A_7''.
Si $f \in A_7''$, $A = id_2$ i.e. $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = e_2$. $\wedge^3 f(\omega) = \omega$, par suite et aprés calcul on trouve que , dans la base $\{e_1, e_2, e_5 = e_3', e_4, e_5' = e_3, e_6, e_7, e_8\}$, $M(f)$ prend la forme triangulaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & \\ & 1 & & & & D & & \\ & & \alpha^{-1} & & & & & \\ & & & \alpha^{-1} & & & & \\ & & & & \alpha & & & \\ & & & & & \alpha & & \\ & & 0 & & & & \alpha & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Cela permet de définir un homomorphisme $\sigma : A_7'' \longrightarrow K^*$, $\sigma(f) = \alpha$. Evidement σ est surjectif et de noyau isomorphe à $U(16)$.

5-9. Proposition.

Le groupe $A_8 = Aut(\omega_{8,8})$ est déterminé par les suite exactes suivante:

$$1 \longrightarrow A_8' \longrightarrow A_8 \longrightarrow K^* \times K^* \longrightarrow 1$$
$$1 \longrightarrow U(9) \longrightarrow A_8' \longrightarrow SL_2(K) \longrightarrow 1.$$

Par un changement de base $\omega_{8,8}$ devient $\omega = e_4(e_5e_1 + e_3e_8 + e_2e_7) + e_8e_7e_1 + e_3e_2e_6$ Aprés calcul , on trouve les parties stables :
$R_{6,1}(\omega) = \{x \in E \ / \ \overline{\omega}(x) \text{ du type } \omega_{6,1}\} = \{\alpha_1 e_1 + \alpha_4 e_4 \ / \ \alpha_4 \in K^*, \alpha_1 \in K\}$
$R_{6,2}(\omega) = \left\{x \in E \ / \ \overline{\omega}(x) \text{ du type } \omega_{6,2}\right\} =< e_2, e_3 > \cup < e_1 >= V_1 \cup V_2$.
Soit $f \in A_8$, donc $f(R_{6,2}(\omega)) \subset R_{6,2}(\omega)$ i.e.$\{f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2\}$ ou $\{f(V_1) \subset V_2$ et $f(V_2) \subset V_1\}$ .Le deuxième cas est imposible car $\dim f(V_1) = \dim V_1 = 2$ et $\dim V_2 = 1$, on en déduit $f(e_1) = a_1e_1$; $f(e_2) = a_2e_2 + b_3e_3$; $f(e_3) = a_2'e_2 + b_3'e_3$ et $f(e_4) = \alpha_4e_4 + \alpha_1e_1$, $\alpha_4 \in K^*$. Donc on peut définir un homomorphisme $\varphi : A_8 \longrightarrow K^* \times K^*$ par $\varphi(f) = (a_1, \alpha_4)$, φ est surjectif et de noyau A_8' . Soit $f \in A_8'$, $a_1 = \alpha_4 = 1$,de l'égalité $f.\omega = \omega$, on trouve : $B = \begin{pmatrix} a_2 & a_2' \\ b_3 & b_3' \end{pmatrix} \in SL_2(K)$ .D'où l'homomorphisme $\psi : A_8' \longrightarrow SL_2(K)$, $\psi(f) = B$. ψ est surjectif et de noyau isomorphe à $U(9)$.

5-10. Proposition.

Le groupe d'automorphisme $A_9 = Aut(\omega_{8,9})$ est déterminé par :

$$1 \longrightarrow A_9' \longrightarrow A_9 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$
$$1 \longrightarrow A_9'' \longrightarrow A_9' \longrightarrow K^* \longrightarrow 1$$
$$1 \longrightarrow U(9) \longrightarrow A_9'' \longrightarrow K^* \times K^* \longrightarrow 1$$

On peut écrire $\omega_{8,9} = e_5\left[e_6(e_1 + e_2) + e_3e_4\right] + e_1e_3e_7 + e_2e_4e_8$.
Aprés avoir fait les calculs , on trouve les parties stables suivantes:

$R_{6,1}(\omega) = \{\lambda_3 e_3 + \lambda_1 e_1 \ ; \ \lambda_3 \neq 0\} \cup \{\delta_4 e_4 + \delta_2 e_2 \ ; \ \delta_4 \neq 0\} \cup \{\gamma_5 e_5 + \gamma(e_1 + e_2) \ ; \ \gamma_5 \neq 0\}$

$R_{6,2}(\omega) =< e_1 > \cup < e_2 >= V_1 \cup V_2$.

Soit $f \in A_9$, donc $f(R_{6,2}(\omega)) \subset R_{6,2}(\omega)$, on peut alors définir un homomorphisme de groupes $\varphi : A_9 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ f \longmapsto \varphi(f) = \begin{cases} \overline{0} & \text{si } f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2 \\ \overline{1} & \text{sinon} \end{cases}$

φ est surjectif et de noyau A'_9 . Soit $f \in A'_9$, i.e. $f(e_1) = \alpha e_1$ et $f(e_2) = \beta e_2$.On utilise l'égalité $f.\omega = \omega$ et la partie stable $R_{6,1}(\omega)$, on obtient $\alpha = \beta$. On peut alors définir un homomorphisme $\psi : A'_9 \longrightarrow K^*, \psi(f\ ) = \alpha$, qui est surjectif et de noyau A''_9.Soit $f \in A''_9$ i.e. $\alpha = \beta = 1$.De $\wedge^3 f(\omega) = \omega$ et aprés calcul , on peut construire un homomorphisme de groupes $\theta : A''_9 \longrightarrow K^* \times K^*$, $\theta(f) = (a, b)$ où $a, b \in Diag(M(f\ ))$ et $M(f)$ est une matrice triangulaire. θ est surjectif et de noyau isomorphe à $U(9)$.

5-11. Proposition.

Le groupe d'automorphismes $A_{10} = Aut(\omega_{8.10})$ est déterminé par:

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow A'_{10} \longrightarrow A_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow A''_{10} \longrightarrow A'_{10} \longrightarrow K^* \times K^* \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow A'''_{10} \longrightarrow A''_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow K^6 \longrightarrow A'''_{10} \longrightarrow SL_2(K) \longrightarrow 1 \end{array}$$

Par un changement de base , $\omega_{8.10}$ devient $\omega = e_1(e_2e_8+e_5e_4)+e_2e_7e_6+e_7e_3e_4+e_3e_6e_5$. La partie stable $R_{6,2}(\omega) =< e_1 > \cup < e_2 >= V_1 \cup V_2$ .Donc on a un homomorphisme $\varphi : A_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\varphi(f\ ) = \overline{0}$ si $f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2$ et $\varphi(f\ ) = \overline{1}$ dans l'autre cas φ est surjectif et de noyau A'_{10}.Soit $f \in A'_{10}$, $f(e_1) = \alpha_1 e_1$ et $f(e_2) = \alpha_2 e_2$, l'ensemble $B = \{x \in E \ / \ xe_1e_2\ \omega = 0\}$ est une partie stable . En effet , soit $x \in B$,$xe_1e_2\omega = 0$.De $f \in A'_{10}$, $f(xe_1e_2\omega) = 0$ implique $\alpha_1\alpha_2 f(x)e_1e_2\omega = 0$ et comme $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$, on tire $f(x)e_1e_2\omega = 0$, ainsi $f(x) \in B$, $f(B) \subset B$. Après calcul , on trouve $B =< e_1, e_2, e_3 >$

Donc $f(e_3) = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$ .De $\wedge^3 f(\omega) = \omega$, $f(e_3) = \gamma_3 e_3$,$\gamma_3 \neq 0$, on trouve $\gamma_3^2 = \alpha_1\alpha_2$. Comme K est algébriquement clos cette équation admet deux solutions θ_i tel que $\gamma_3^2 = \theta_i^2 = \alpha_1\alpha_2$, $i = 1, 2$. On peut ainsi définir un homomorphisme
$\psi : A'_{10} \longrightarrow K^* \times K^*$, $\psi(f\ ) = (\alpha_1, \alpha_2)$. ψ est surjectif et de noyau A''_{10} .
Soit $f \in A''_{10}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ et $\gamma_3^2 = 1$ .Cela permet de définir un homomorphisme $\theta : A''_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\theta(f\ ) = \overline{0}$ si $\gamma_3 = 1$ et $\overline{1}$ si $\gamma_3 = -1$, il est surjectif et de noyau A'''_{10}

Soit $f \in A'''_{10}$, la matrice de f est $\begin{pmatrix} I_3 & A & \\ & B & C \\ O_{5\times 3} & & \\ & O_{3\times 2} & \end{pmatrix}$ $B \in GL_2(K)$.

De $f.\omega = \omega$, $\det B = 1$, cela permet de définir un homomorphisme $\sigma : A''_{10} \longrightarrow SL_2(K)$ $\sigma(f\ ) = B$, il est surjectif et de noyau isomorphe à K^6.

5-12. Proposition.

Le groupe d'automorphismes $A_{11} = Aut(\omega_{8,11})$ est déterminé par les suites exactes:

$$1 \longrightarrow A'_{11} \longrightarrow A_{11} \longrightarrow K^* \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow A''_{11} \longrightarrow A'_{11} \longrightarrow SL_2(K) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow U(12) \longrightarrow A''_{11} \longrightarrow \mu_3(K) \longrightarrow 1$$

On peut écrire $\omega_{8,11} = e_1(e_7e_4 + e_8e_2 + e_5e_6) + e_5(e_2e_7 + e_3e_4) + e_6e_2e_3$
$R_{6,2}(\omega) =< e_1, e_2 >$, soit $f \in A_{11}$, donc $f(R_{6,2}(\omega)) \subset R_{6,2}(\omega)$ et la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ O_{6\times 2} & \end{pmatrix}$,avec $A \in GL_2(K), \det A \neq 0$.On peut alors définir un homomorphisme $\varphi : A_{11} \longrightarrow K^*$, $\varphi(f) = \det A$, φ est surjectif et de noyau A'_{11}.
Si $f \in A'_{11}$, $\det A = 1$ et par suite $A \in SL_2(K)$, ce qui permet de définir un homomorphisme de groupes surjectif $\psi : A'_{11} \longrightarrow SL_2(K)$, $\psi(f\ ) = A$ et de noyau A''_{11}.Soit $f \in A''_{11}, A = id_2$.De $f.\omega = \omega$,on constate qu'il existe $\alpha \in Diag(M(f\ ))$, où $M(f\ )$ est triangulaire et $\alpha^3 = 1$. Donc on définit un homomorphisme de groupes $\theta : A''_{11} \longrightarrow \mu_3(K)$, $\mu_3(K) = \{\alpha \in K^*/\alpha^3 = 1\}$, $\theta(f\ ) = \alpha$, θ est surjectif et de noyau isomorphe à $U(12)$

5-13.Proposition.

Le groupe d'automorphismes $A_{12} = Aut(\omega_{8,12})$ est : $A_{12} = (PGL_2(K) \times K^*) .K^5$ produit semi-direct de $PGL_2(K) \times K^*$ et K^5 , le groupe additif de dimension 5.

5-14.Proposition.

Le groupe $A_{13} = Aut(\omega_{8,13})$ est déterminé à un isomorphisme local prés dans [27] , $A_{13} = SL_3(K)$ .Dans [24] , si K est un corps de caractéristique 0 de clôture algébrique $\overline{K}$; $Aut_{\overline{K}}(\omega_{8.13}) \backsimeq SL_3(\overline{K})$.

Si K est un corps algébriquement clos , $A_{13} = (PGL_3(K) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) .\mu_3(K)$.

§6- Autres méthodes pour déterminer certains groupes d'automorphismes

6-1. On peut obtenir le groupe d'automorphismes $A_1 = Aut(\omega_{8,1})$ en tenant compte de I-2-5 , $\omega_{8,1} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6e_7e_8$ est somme directe des trivecteurs de rang 3 et de rang 5 , $C(\omega_{8,1}) = K \times K$ (voir Table 1). Cette décomposition conduit à l'écriture dans $C(\omega_{8,1})$ de 1_E comme somme d'idempotents e, e' orthogonaux et indécomposables: $1_E = e + e', rang(e) = 5$ et $e^2 = e$.Si $f \in Aut(\omega_{8,1})$, $fuf^{-1} \in C(\omega_{8,1})$,$u \in C(\omega_{8,1})$ (I-2-7) .On en déduit que $Aut(\omega_{8,1})$ permutent les idempotents de même rang , $fe = ef$ et $f(1_E - e) = (1_E - e)f$ .On a $E = E_1 \oplus E_2, E_1 = eE = vect\{e_1, ..., e_5\}, E_2 = (1_E - e)E = vect\{e_6, e_7, e_8\}$ et $\omega_{8,1} = \omega_5 + \omega_3$ où $\omega_3 = e_6e_7e_8, \omega_5 = e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$ .Donc la matrice de f prend la forme : $M(f) = \begin{pmatrix} M_3 & 0 \\ 0 & M_5 \end{pmatrix}$ où $M_3 \in Aut(\omega_3) \simeq SL_3(K)$ et $M_5 \in Aut(\omega_5)$ .D'où $A_1 = Aut(\omega_{8,1}) = SL_3(K) \times Aut(\omega_5)$.

6-2. Proposition.

Soit la forme trilinéaire standard $\omega = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6 + \cdots + e_{3n-2}e_{3n-1}e_{3n}$.
Alors $Aut(\omega) = SL_3(K)^n \rtimes S_n$.
Le commutant de $\omega, C(\omega) \backsimeq K^n$ et l'algèbre de lie $D(\omega) \backsimeq sl_3(K)^n$.

En effet la partie stable $R(\omega) = < e_1, e_2, e_3 > \cup < e_4, e_5, e_6 > \cup \ldots \cup < e_{3n-2}, e_{3n-1}, e_{3n} > = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$.Or si $f \in Aut(\omega)$,$f(R(\omega)) \subset R(\omega)$, donc $f(V_i) \subset V_{\sigma(i)}$ où $\sigma \in S_n$, ceci nous permet de définire un homomorphisme de groupes $\varphi : Aut(\omega) \longrightarrow S_n$,$\varphi(f\ ) = \sigma$ où $\sigma = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \ldots & V_n \\ V_{\sigma(1)} & V_{\sigma(2)} & \ldots & V_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$, φ est surjectif . Soit $f \in \ker \varphi$, donc $f(V_i) \subset V_i$ $i = 1, \ldots, n$. Par suite $f.\omega = \omega$, entraine $f(e_1, e_2, e_3) = e_1 e_2 e_3, \ldots, f(e_{3n-2} e_{3n-1} e_{3n}) = e_{3n-2} e_{3n-1} e_{3n}$, et la matrice de f prend la forme $\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{pmatrix}$ avec $\det A_i = 1$ $i = 1, \ldots, n$. D'où $\ker \varphi \backsimeq SL_3(K)^n$.

On a donc la suite exacte de groupes : $1 \longrightarrow SL_3(K)^n \longrightarrow Aut(\omega) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1$.

On sait que $C(\omega)$ est une $K-$algèbre commutative , produit direct fini d'anneaux locaux commutatifs , donc en calculant le commutant d'une somme orthoganale de n trivecteurs indécomposables , on trouve $C(\omega) \backsimeq K \times K \times \ldots \times K$, n fois .

En utilisant le lemme I-2-6 on a :

$D(\omega) \backsimeq D(e_1 e_2 e_3) \times \ldots \times D(e_{3n-2} e_{3n-1} e_{3n}) \backsimeq sl_3(K) \times \ldots \times sl_3(K)$, n fois .

6-3. On considère $K^9 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$, $E_1 = vect\{e_1, e_2, e_3\}$; $E_2 = vect\{e_4, e_5, e_6\}$ $E_3 = vect\{e_7, e_8, e_9\}$. Soit $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ où $\omega_i \in \wedge^3 E_i$; $i = 1, 2, 3$ et soit D un s.e.v de K^9 de dimension 1 (une droite) , D en position génerale par rapport à E_i ; $i \in \{1, 2, 3\}$ c'est à dire $D \not\subset \bigcup_{(i,j)} E_i \oplus E_j$ où $(i, j) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$, par exemple $D = Kv = K(e_3 + e_6 + e_9)$.

On a $C(\omega) = K \times K \times K$ et $Aut(\omega) = SL_3(K)^3 \rtimes S_3$, où S_3 agit sur $SL_3(K)^3$ par permutation .On considère l'application $S : \wedge^3 K^9 \longrightarrow \wedge^3(K^9/D), S(\omega) = \overline{\omega}_D$.

$\omega_1 = e_1 e_2 e_3$; $\omega_2 = e_4 e_5 e_6$; $\omega_3 = e_7 e_8 e_9$.L'espace K^9/D à pour base $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_8$ et $\overline{\omega}_D = \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 + \bar{e}_4 \bar{e}_5 \bar{e}_6 + \bar{e}_7 \bar{e}_8(-\bar{e}_3 - \bar{e}_6)$, donc $\overline{\omega}_D = \bar{e}_3(\bar{e}_1 \bar{e}_2 + \bar{e}_8 \bar{e}_7) + \bar{e}_6(\bar{e}_4 \bar{e}_5 + \bar{e}_8 \bar{e}_7)$ est de type $\omega_{8,5}$.

Soit $A = \{f \in GL(9,K)/f \in Aut(\omega)$ et $f(D) \subset D\}$, comme $D = Kv$, $f(v) = \lambda v$ i.e. $f(e_3+e_6+e_9) = \lambda(e_3+e_6+e_9)$ .On a $f(E_i) = E_{s(i)}$ où $s \in S_3$; $i = 1,2,3$. l'application $\theta : A \to Aut(\overline{\omega}_D), \theta(f) = \overline{f}$ est bijective , on obtient une première suite exacte $1 \longrightarrow A' \longrightarrow Aut(\overline{\omega}_D) \xrightarrow{\varphi} S_3 \longrightarrow 1$ où $A' = \ker \varphi$ .Soit $f \in A', f$ est défini par

$$\begin{cases} f(e_3) = \lambda e_3 \ ; \ f \in SL_3(E_1) \\ f(e_6) = \lambda e_6 \ ; \ f \in SL_3(E_2) \\ f(e_9) = \lambda e_9 \ ; \ f \in SL_3(E_3) \end{cases}$$ Donc la matrice associée a f restreinte à E_i , $i = 1,2,3$

est de la forme : $\begin{pmatrix} B & & 0 \\ & & 0 \\ \alpha & \beta & \lambda \end{pmatrix}$,avec $\det B = \lambda^{-1}$, d'où la deuxième suit exacte :

$1 \longrightarrow A'' \longrightarrow A' \underset{f \longmapsto \lambda}{\longrightarrow} K^* \longrightarrow 1$. A'' est le sous groupe de $SL_3(K)$ qui laisse invariant une droite . On trouve $B = SL_2(K) \times K^2$. D'où le résultat pour $Aut(\omega_{8,5})$.

Remarque. Ce résultat est un cas particulier d'un résultat plus général:
Soit $n \geq 3$ et $\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_n \in \wedge^3 K^{3n}$; $\omega_i \in \wedge^3 E_i \setminus \{0\}$ où $E_i = vect\{e_{3i-2}, e_{3i-1}, e_{3i}\}$ et $\omega_i = e_{3i-2}e_{3i-1}e_{3i}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Alors $C(\omega) = K^n$ et $Aut(\omega) = SL_3(K)^n \rtimes S_n$ où S_n agit sur $SL_3(K)^n$ par permutation.
Soit D une droite de K^{3n} et soit $W_i = \oplus_{j \neq i} E_j$ .D sera dite en position générale si $D \not\subset W_i$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$; alors $D = Kv$, $v = x_1 + \cdots + x_n$; $x_i \in E_i - \{0\}$.
On considère $A = \{f \in Aut(\omega)/f(D) \subset D\}$ .Quitte à modifier les e_i,on peut supposer $D = K(e_3 + e_6 + \ldots + e_{3n-3} - e_{3n})$ et :

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_D &= e_1e_2e_3 + \cdots + e_{3n-5}e_{3n-4}e_{3n-3} + e_{3n-2}e_{3n-1}(e_3 + e_6 + \cdots + e_{3n-3}) \\ &= e_3(e_1e_2 + e_{3n-2}e_{3n-1}) + e_6(e_4e_5 + e_{3n-2}e_{3n-1}) + \cdots + e_{3n-3}(e_{3n-5}e_{3n-4} + e_{3n-2}e_{3n-1})\end{aligned}$$

où on note encore e_i l'image de e_i dans K^{3n}/D.Si $f \in A, f(v) = \lambda v$ et $f(E_i) = E_{\sigma(i)}$ où $\sigma \in S_n$ est une permutation de $\{1,\ldots,n\}$ et $i \in \{1,\ldots,n\}$ .Il y a une première suite exacte $1 \longrightarrow A' \longrightarrow Aut(\overline{\omega}_D) \xrightarrow{\varphi} S_n \longrightarrow 1$, $\varphi(f) = \sigma$.
Si $f \in A'$, alors on a la suite $1 \longrightarrow A'' \longrightarrow A' \xrightarrow{\psi} K^* \longrightarrow 1$, $\psi(f) = \lambda$ .Comme dans le cas précédent on trouve $Aut(\overline{\omega}_D) = \left[(SL_2(K) \times K^2)^n \times K^*\right] \rtimes S_n$.

III- COMPLEXITE DES TRIVECTEURS

Dans [13] , J.Hora donne une borne supérieure de la complexité maximale $C_n(K)$ dans le cas où $K = \mathbf{F}_2$ est un corps à deux éléments et il montre que $C_7(\mathbf{F}_2) = 4$. Dans ce chapitre on étudie le cas général où K est un corps arbitraire, en utilisant l'invariant arithmétique $d_1(\omega)$ d'un trivecteur ω nous donnons une borne supérieure de la compexité maximale $C_n(K)$.

§1 -Longueur d'un trivecteur

1-1. Définition . Un trivecteur est somme de trivecteurs décomposables.On appelle longueur du trivecteur ω ,et on note $l(\omega)$, le nombre minimum de trivecteurs décomposables dont ω est la somme (I-1-4) .

Pour un corps K , on pose $l(K,n) = \max\{r \ / \ r = l(\omega) \ , \ \omega \text{ parcourt } \wedge^3 K^n\}$.

Busemann et Glassco se sont intéressés aux longueurs des trivecteurs [7] et dans [40], Westwick a étudié $l(\mathbb{C}\ ,n)$ où $n = 7$ ou 8 et dans [39] ,a montré l'égalité $l\ (\mathbb{R},7) = 5$.

Kahn [16] obtient la majoration $l\ (K,8) \leqslant 8$ lorsque K est algébriquement clos.

1-2. Théorème [25] .

Sur un corps quelconque K , $l\ (K,6) = 3$ et $l(K,7) \leqslant 5$.

1-3. Proposition [26] .

Sur un corps algébriquement clos K de caractéristique quelconque , $l\ (K,8) = 5$.

La démonstration repose sur l'écriture des trivecteurs $\omega_{8,i}$ où $1 \leqslant i \leqslant 13$ (voir la table 1) si $i \neq 11, \omega_{8,i}$ est de longueur 5 au plus. Dans [40], Westwick a montré que : sur $\mathbb{C}$, le trivecteur $\omega_{8,11}$(XV) est de longueur 5 , et sa démonstration reste valable en caractéristique quelconque.

§2 . Complexité d'un trivecteur

2-1. Définitions. Soit $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ une base de l'espace vectoriel E .Etant donnée une forme trilinéaire alternée $f : E^3 \longrightarrow K$, on définit $e_B(f)$ l'efficacité de f par rapport à la base B, le nombre de parties $\{b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}\}$ de B telles que $f(b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}) \neq 0$. La plus petite valeur de $e_B(f)$ où B parcourt toutes les bases de E est appelée efficacité de f et noté par $e(f)$.

Soit U un espace vectoriel de dimension 3. On choisit une base $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ de U et on considère h la forme trilinéaire sur U définie par $h(b_1, b_2, b_3) = 1$ (D'aprés l'isomorphisme $\wedge^3 E^* \backsimeq (\wedge^3 E)^*$, h correspond au trivecteur décomposable).

Considerons des espaces U_i , $1 \leqslant i \leqslant k$, de dimension 3 et choisissons une base $\{u_{3i-2}, u_{3i-1}, u_{3i}\}$ de U_i . Si $E = \oplus_{i=1}^{k} U_i$, on définit la forme $h^k : E^3 \longrightarrow K$ ([13]) par : $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $h^k(u_{3i-2}, u_{3i-1}, u_{3i}) = 1$, $h^k(u_i, u_j, u_s) = 0$ sinon. Cette forme est dite forme trilinéaire standard de multiplicité k et les sous-espaces U_i sont les sous-espaces standards de E.

Soit f_1 et f_2 deux formes trilinéaires définies respectivement sur les espaces vectoriels V_1 et V_2 . L'homomorphisme des espaces vectoriels $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ est dit homomorphisme des formes f_1 et f_2 si $f_2(\phi(v_1), \phi(v_2), \phi(v_3)) = f_1(v_1, v_2, v_3)$. Si ϕ est de plus bijective , on dit que f_1 est équivalent à f_2.

Dans([13] , [14]) J.Hora, montre que pour toute forme trilinéaire alternée f il existe $k \geqslant 1$ et un homomorphisme de f et h^k , la valeure minimale de k est appelée complexité de f est noté par $c(f)$, c'est à dire , f peut être considérée comme restriction de la forme trilinéaire alternée standard sur un sous espace convenable .

Notons par $C_n(K)$ le nombre $C_n(K) = \max\{c(\omega), \omega \in \wedge^3 K^n\}$ i.e. , la complexité maximale du trivecteur de rang au plus n . $C_7(\mathbf{F}_2)$ est déterminé par J.Hora [13] .

Remarque. Il existe un trivecteur dont l'éfficacité est différente de la longueur, par exemple $e(\omega_{7,4}) = 4$ et $l\ (\omega_{7,4}) = 3$ car :

$\omega_{7,4} = e_1(e_2 + e_5)(e_3 - e_4) + (e_6 - e_1)e_2e_4 + (e_7 + e_1)e_3e_5$, d'où $l(\omega_{7,4}) < e(\omega_{7,4})$.

2-2. Théorème [13] .

Pour toute forme trilinéaire alternée non degenerée f définie sur l'espace vectoriel E il existe $c \in \mathbb{N}$ et un homomorphisme injectif $\phi : E \longrightarrow U^c$ des formes f et h^c.

§3. Complexité et Longueur

On choisit les bases B et B' de E et U^m respectivement et $\phi : E \longrightarrow U^m$ un homomorphisme, afin de gagner de l'espace , nous ecrivons la matrice $M_{B,B'}(\phi)$ comme suite $g_1, \ldots, g_{3m}$ où g_j est le jth colonne de $M_{B,B'}(\phi)$.

3-1. Proposition.

Soit $\omega \in \wedge^3 E$ un trivecteur de rang maximal tel que $d_1(\omega) = k$,alors :

a) il existe $e_1 \in E - \{0\}$, $u \in \wedge^2 E'$, $\omega' \in \wedge^3 E'$ où E' est un facteur direct de Ke_1 dans E tel que $\omega = e_1 u + \omega'$ avec $rg(\omega') = k$

b) si $k = 0$, $c(\omega) = \dfrac{rg(u)}{2}$

c) si $k \neq 0$, $c(\omega) \leqslant c(\omega') + \dfrac{rg(u)}{2}$

Preuve.

a) Si $E = E_1 \oplus E_2$, alors $\wedge^p E \backsimeq \oplus_{k=0}^{k=p}(\wedge^k E_1 \otimes \wedge^{p-k} E_2)$. Pour $p = 3$, on choisit le sous-espace $\alpha = Ke_1$ tel que $rg(\overline{\omega}_\alpha) = d_1(\omega) = k$. Par conséquent $E = Ke_1 \oplus E'$ et $\wedge^3 E \backsimeq \wedge^3 E' \oplus Ke_1 \otimes \wedge^2 E'$, d'où $\omega = e_1 u + \omega'$ avec $r(\omega') = k$. D'où le résultat .

b) Si $k = 0$, on peut ecrire $\omega = e_1 u = e_1(v_1v_2 + \cdots + v_{2m-1}v_{2m})$, comme le rang de ω est maximal , la dimension de E est nécessairement impair . Pour prouver l'assertion en question , on peut utiliser un raisonnement par recurrence sur $rg(u)$ ou bien on considère directement l'homomorphisme $\phi :< e_1, v_1, \ldots, v_{2m} >\longrightarrow U^m$ défini par:

$\phi(e_1) = u_1 + u_4 + \cdots + u_{1+3s} + \cdots + u_{3m-2}$

$\phi(e_{2k-1}) = u_{3k-1}$ *pour* $k \in \{1, \ldots, m\}$

$\phi(e_{2k}) = u_{3k}$

C'est à dire , si on choisit les bases $B = \{e_1, v_1, \ldots, v_{2m}\}$ et

$B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_{3m-2}, u_{3m-1}, u_{3m}\}$ de E et U^m respectivement , la matrice $M_{B,B'}(\phi)$ a la forme suivante :

$M_{B,B'}(\phi) = (10010\ldots100, 010\ldots0, 0010\ldots0, 000010\ldots0, 0000010\ldots0, \ldots, 0\ldots010,$ $0\ldots01)$, d'où $c(\omega) = m = \dfrac{rg(u)}{2}$.

c) On a $E = Ke_1 \oplus E'$ et $\omega = e_1 u + \omega'$ où $\omega' \in \wedge^3 E'$ et $e_1 u \in Ke_1 \otimes \wedge^2 E'$. Soit $c(\omega') = c'$ et $c(e_1 u) = c''$. Alors il existe des applications linéaires injectives $\phi' : E' \longrightarrow U^{c'}$ et $\phi'' : E' \longrightarrow U^{c''}$ telles que ϕ' est l'homomorphisme de ω' et $h^{c'}$et ϕ'' est l'homomorphisme de $e_1 u$ et $h^{c''}$. Comme $\wedge^3 E \backsimeq \wedge^3 E' \oplus Ke_1 \otimes \wedge^2 E'$ on définit une application linéaire $\phi : E \longrightarrow U^{c'} \oplus U^{c''}$ par $\phi(\lambda e_1 + x') = \phi''(\lambda e_1) + \phi'(x')$.

Si $B' = \left\{u'_1, u'_2, u'_3, \ldots, u'_{\acute{c}}, u'_{\acute{c}+1}, u'_{\acute{c}+2}\right\}$ et $B'' = \left\{u''_1, u''_2, u''_3, \ldots, u''_{c''}, u''_{c''+1}, u''_{c''+2}\right\}$ sont des bases des $U^{c'}$ et $U^{c''}$ respectivement , $B = B' \cup B''$ est une base de $U^{c'+c''}$, il n'est pas difficile de verifier que ϕ est un homomorphisme de ω et $h^{c'+c''}$. D'où $c(\omega) \leqslant c(\omega') + r(u)$.

3-2. Corollaire.

Pour tout corps K on a : $C_n(K) \leqslant C_{n-1}(K) + \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$

Preuve. Il découle de **c)**.

D'aprés ce resultat on a en particulier, le lemme 2-5 de J.Hora[13] .

3–3. Proposition .

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit ω un trivecteur dans $\wedge^3 E$.

Alors $c(\omega) \leqslant l\ (\omega)$.

On raisonne par récurrence sur la longueur du trivecteur. Si $l(\omega) = 1$, alors $\omega = xyz$ et $c(\omega) = l\ (\omega) = 1$. Maintenant on considère un trivecteur $\omega = v_1v_2v_3 + \cdots + v_lv_{l+1}v_{l+2}$ de longueur l et on suppose que l'inégalité est vraie pour $l-1$. Comme $l\ (\omega) = l$ les vecteurs $v_1,\ v_2,\ v_3$ sont linéairement independants , d'où $\omega = v_1v_2v_3 + \omega_1$ avec
$l\ (\omega_1) = l - 1$.Par conséquent $c(\omega_1) = k_1 \leqslant l(\omega_1)$. $\{v_1, v_2, v_3\}$ peut être completée en une base $B = \{v_1, v_2, v_3\} \cup B_1$ de E . Soit $\overline{B}_{k_1} = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{3k_1-2}, u_{3k_1-1}, u_{3k_1}\}$ une base de U^{k_1}.Notons par $M_1 = M_{B_1,\overline{B}_{k_1}}(\phi_1)$ la matrice de l'homomorphisme $\phi_1 : S_{\omega_1} \longrightarrow U^{k_1}$ de ω_1 et h^{k_1}. On définit l'application linéaire $\phi : E \longrightarrow U^{k_1+1}$ par sa matrice $M_{B,\overline{B}_{k_1+1}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0_{3k_1\times 3} & M_1 \\ I_3 & 0_{.3\times(n-3)} \end{pmatrix}$ où I_3 est la 3×3 matrice identité. Un calcul direct montre que ϕ est un homomorphisme de ω et h^{k_1+1}. Alors on conclut que $c(\omega) \leqslant k_1 + 1 \leqslant l$.

§4-Plongements canoniques et complexité maximale

Dans ce paragraphe, on va construire un plongement canonique pour chaque trivecteur de rang au plus 7 sur un corps quelconque K.

4-1. Si $\dim E = 5$, il existe à équivalence près , un trivecteur unique de rang maximal $\omega = e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$.
Il est évident que $C_5(K) = 2$, pour démontrer ceci il suffit de considerer l'homomorphisme $\phi : E \longrightarrow U^2$ tel que $M_{B,B'}(\phi) = (100100, 010000, 001000, 000010, 000001)$ où
$B = \{e_1, \ldots, e_5\}$ et $B' = \{u_1, \ldots, u_6\}$ sont des bases de E et U^2 respectivement.

4-2. Si $\dim E = 6$, premièrement on suppose que K est algébriquement clos. Alors $\wedge^3 E$ admet deux trivecteurs de rang maximal $\omega_{6,1}$, $\omega_{6,2}$.Evidemment $c(\omega_{6,1}) = 2$ car $\omega_{6,1} = h^2$. Pour le second trivecteur on considère l'homomorphisme $\phi : E \longrightarrow U^3$ défini par $\phi(e_1) = u_1 + u_7$, $\phi(e_2) = u_2 + u_4$, $\phi(e_3) = u_5 + u_8$, $\phi(e_4) = u_3$, $\phi(e_5) = u_6$, $\phi(e_6) = u_9$.D'où $C_6(K) = 3$. Maintenant on suppose que K est un corps quelconque, alors il existe en plus de $\omega_{6,1}, \omega_{6,2}$ les trivecteurs :

$\omega_{6,1,d} = e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_6 - de_4e_6)$ avec $d \notin K_*^2$ si $car(K) \neq 2$.

$\omega_{6,1,a} = e_1(e_3e_4 + ae_5e_6) + e_2(e_3e_6 + e_4e_5 + e_5e_6)$ avec $a \notin \{x^2 + x, x \in K\}$ si $car(K) = 2$.

Pour montrer l'égalité $c(\omega_{6,1,d}) = c(\omega_{6,1,a}) = 3$, il suffit de considerer les plongements $\phi_d : E \longrightarrow U^3$ et $\phi_a : E \longrightarrow U^3$ définis respectivement par les matrices :

$M_{B,B'}(\phi_d) = (100100000, 100000100, 010000010, 00100 - d00 - 1, 0d0010000, 000001001)$

$M_{B,B'}(\phi_a) = (100100000, a^{-1}00000100, 000010010, 00 - 1001000, 0a0000000, 001000001)$

par conséquent pour tout corps quelconque K on a $C_6(K) = 3$.

4-3. Si $\dim E = 7$, on suppose d'abord que K est algébriquement clos .Alors $\wedge^3 E$ admet cinq trivecteurs de rang maximal (II-3) $\omega_{7,i}$; $1 \leq i \leq 5$. On a $\forall i \in \{1, \ldots, 5\}$, $c(\omega_{7,i}) \leqslant 4$. Pour montrer ce resultat on utilise les plongement suivants :

$\phi_{7,1} : E \longrightarrow U^3$ tel que

$M_{B,B'}(\phi_1) = (100100100, 010000000, 001000000, 000010000, 000001000,$
$000000010, 000000001)$

$\phi_{7,2} : E \longrightarrow U^4$ tel que

$M_{B,B'}(\phi_2) = (100100100000, 010000000100, 001000000000, 000010000010,$
$000001000000, 000000010001, 000000001000)$

$\phi_{7,3} : E \longrightarrow U^3$ tel que

$M_{B,B'}(\phi_3) = (100000000, 010000000, 001100000, 000010000, 000001100,$
$000000010, 000000001)$

$\phi_{7,4} : E \longrightarrow U^3$ tel que

$M_{B,B'}(\phi_4) = (001100 - 100, 0000 - 10001, 10000 - 1000, 000001010,$
$0100 - 10000, 000000 - 100, 001000000)$

$\phi_{7,5} : E \longrightarrow U^4$ tel que

$M_{B,B'}(\phi_5) = (001001100100, 000100000001, 1000000000 - 10, 000010000010,$
$010000000001, 000001010000, 001000001000)$

Le même argument utilisé dans l'article[13] donne $c(\omega_{7,2}) = 4$. Alors $C_7(K) = 4$

Maintenant on suppose que K est un corps quelconque , alors , en plus des cinq trivecteurs $\omega_{7,1}, \omega_{7,2}, \omega_{7,3}, \omega_{7,4}, \omega_{7,5}$ il existe les trivecteurs :

$\omega_{7,3,d} = e_1(e_2e_3 - de_5e_6) + e_7(e_2e_5 - e_3e_6) + e_3e_4e_5$ avec $d \notin K_*^2$ si $car(K) \neq 2$.

$\omega_{7,3,a} = e_1(e_2e_3 + ae_5e_6) + e_7(e_2e_5 + e_3e_6 + e_5e_6) + e_3e_4e_5$ avec $a \notin \{x^2 + x, x \in K\}$ si $car(K) = 2$.

$\omega_{7,4,a,b} = e_1(e_4e_5 + e_6e_7) + e_2(e_4e_6 + ae_5e_7) + e_3(e_4e_7 + be_5e_6)$.

$\omega_{7,5,\alpha,\gamma,\delta} = \alpha\gamma e_1e_2e_3 + \alpha\delta e_1(e_4e_5 + \gamma e_6e_7) + \delta\gamma e_2(e_4e_6 - \alpha e_5e_7) + \alpha\delta\gamma e_3(e_5e_6 - e_4e_7)$

Dans ce cas on a $C_7(K) \leqslant 5$, pour prouver ceci on utilise les plongement suivants:

$\phi_{7,d} : E \longrightarrow U^4$ tel que

$$M_{B,B'}(\phi_{7,d}) = (000-d00100000, 00-100000-1000, 010000010100, 000000000001,\\ 0100010000-10, 00-10-10000000, 100100-100000)$$

$\phi_{7,a} : E \longrightarrow U^4$ tel que

$$M_{B,B'}(\phi_{7,a}) = (100100000000, 010010100000, 000001a00100, 000000000010,\\ 0a0000010001, 0010010a^{-1}0000, a^{-1}000000010a0)$$

$\phi_{7,a,b} : E \longrightarrow U^4$ tel que

$$M_{B,B'}(\phi_{7,a,b}) = (100000-100100, 000100-100-a00, 00000100b00, 010010010000,\\ 0010a0000010, 010001000001, 001001001000)$$

Par conséquent la complexité de ces trivecteurs est au plus 4. Pour le dernier trivecteur $\omega_{7,5,\alpha,\gamma,\delta}$ on pose $a = -\gamma\alpha$, $b = -\gamma^{-1}$, $e'_1 = \alpha\delta e_1$, $e'_2 = \delta e_2$, $e'_3 = -\alpha\delta\gamma e_3$, $e'_4 = e_4$, $e'_5 = e_5$, $e'_6 = \gamma e_6$, $e'_7 = e_7$.

Alors $\omega_{7,5,\alpha,\gamma,\delta} = -\alpha^{-1}\delta^{-3}e'_1e'_2e'_3 + e'_1(e'_4e'_5 + e'_6e'_7) + e'_2(e'_4e'_6 + ae'_5e'_7)e'_3(e'_4e'_7 + be'_5e'_6) \backsimeq e''_1e''_2e''_3 + \omega_{7,4,a,b}$ ......(⋇) et d'aprés la proposition 3-3 on a :

$c(\omega_{7,5,\alpha,\gamma,\delta}) \leqslant l(\omega_{7,5,\alpha,\gamma,\delta}) \leqslant 1 + l(\omega_{7,4,a,b})$, d'où [25] , $c(\omega_{7,5,\alpha,\gamma,\delta}) \leqslant 5$.

Recapitulons les résultats obtenus.

4-4. Proposition.

Pour tout corps K on a $C_5(K) = 2$, $C_6(K) = 3$, $C_7(K) \leqslant 5$.

4-5. Proposition .

Pour tout corps K on a :

$C_7(K) = 5 \Leftrightarrow$ il existe au moins deux classes d'algèbres d'octonions sur K.

D'après les plongements précédents on a $c(\omega) \leqslant 4$ si ω n'est pas de la forme $\omega_{7,5,\alpha,\gamma,\delta}$. D'autre part la classification des trivecteurs de type $\omega_{7,5}$ se déduit de la classification des algèbres d'octonions sur K ou celle des $3-$formes quadratiques de Pfister ([12] , [34]) .D'une façon précise l'ensemble des classes d'isomorphismes des trivecteurs de type $\omega_{7,5}$ est l'ensemble $O \times (K_*/K_*^3)$, où O est l'ensemble des classes d'isomorphismes des algèbres d'octonions sur K ([23] , [25] , [34]) . On a $\omega_{7,5} \backsimeq \omega_{7,5,1,-1,1}$ ceci correspond à l'algèbre d'octonions triviale sur K ([12]) et $c(\omega_{7,5}) = 4$ ([13]) . Alors $C_7(K) = 5$ si et seulement si O contient une algèbre d'octonions non triviale.

4-6. Corollaire.

1) Si K est un corps algébriquement clos ou un corps fini ou un corps local, alors $C_7(K) = 4$.

2) Si K est ordonné maximal (en particulier si $K = \mathbb{R}$) , alors $C_7(K) = 5$.

Si K est algèbriquement clos , $C_7(K) = 4$ (ceci est déja prouvé par les plongements canoniques).

Soit $\mathbf{F}_q$ un corps fini avec $q = p^m$. Il est connu qu'il existe une classe unique d'algèbres d'octonions sur $\mathbf{F}_q$ puisque toute forme quadratique à trois variables au plus représente 0 [25] . D'où $C_7(\mathbf{F}_q) = 4$.

Maintenant on suppose que K est un corps local, chaque trivecteur de type $\omega_{7,5}$ est de la forme $\lambda\omega_{7,5}$, d'où $C_7(K) = 4$.

Si K est ordonné maximal , il existe deux algèbres d'octonions sur K non équivalentes ([12] , [25]) . Par conséquent il existe deux trivecteurs de type $\omega_{7,5}$: $\omega_{7,5}$ et $\omega_{7,5,-1,-1,-1}$. D'où $C_7(K) = 5$.En particulier si on prend $K = \mathbb{R}$,la complexité maximal est égale à 5.

4-7. Théorème.

Pour tout corps K on a $C_8(K) \leqslant 7$.

Preuve. Soit E un espace vectoriel de dimension 8 et soit ω un trivecteur de rang maximal dans $\wedge^3 E$. On peut écrire ω sous la forme $\omega = e_8 u + \omega'$ où $rg(\omega') = d_1(\omega)$ et $d_1(\omega) \in \{3,5,6,7\}$. Pour démontrer le resultat précedent , il suffit de donner une estimation de $c(\omega)$ avec $d_1(\omega) = 7$ et $rg(u) = 6$.

Si ω' n'est pas de la forme $\omega_{7,5,\alpha,\gamma,\delta}$, alors $l\ (\omega') \leqslant 4$ [25] . Alors d'aprés la proposition 3-3 on a $c(\omega) \leqslant l\ (\omega) \leqslant l\ (u) + l\ (\omega')$ et $c(\omega) \leqslant 7$.

Si ω' est de la forme $\omega_{7,5,\alpha,\gamma,\delta}$ et non équivalente à $\omega_{7,5}$, alors (⁎) implique :

$\omega' = e_1e_2e_3 + \omega_{7,4,a,b} = e_1e_2e_3 + e_1(e_4e_5 + e_6e_7) + e_2(e_4e_6 + ae_5e_7) + e_3(e_4e_7 + be_5e_6)$. Posons $\omega_\circ = e_2(e_4e_6 + ae_5e_7) + e_3(e_4e_7 + be_5e_6)$.

Puisque $\omega_\circ = (e_2 + e_3)(e_4 + ae_5)e_7 + e_2e_4(e_6 - e_7) + e_3e_5(be_6 - ae_7)$, $l_\circ(\omega) = 3$.

$\dim(S_u + S_{\omega'}) = \dim S_u + \dim S_{\omega'} - \dim(S_u \cap S_{\omega'}) \leqslant 7$ implique que $S_u \subset S_{\omega'}$.

<u>Premier cas :</u> $S_{e_1e_2e_3} \subset S_u$.

Si $ue_1e_2e_3 \neq 0$,d'aprés la remarque 2 (II-4) , $l(e_8u + e_1e_2e_3) \leqslant 3$. D'où $c(\omega) \leqslant l\ (\omega) \leqslant 7$.

Si $ue_1e_2e_3 = 0$,$u = e_1v_1 + e_2v_2 + e_3v_3$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\omega = e_8(e_1v_1 + e_2v_2 + e_3v_3) + e_1e_2e_3 + (e_1 + e_2 + e_3)e_4(e_5 + e_6 + e_7) + e_1(e_6 + e_7)(e_3 + e_4)\\ + e_2(e_5 + e_7)(ae_7 + e_4) + e_3(e_5 + e_6)(be_6 + e_4) = e_1u_1 + e_2u_2 + e_3u_3 +\\ (e_1 + e_2 + e_3)e_4(e_5 + e_6 + e_7) + e_1e_2e_3.\end{aligned}$$

Alors $\overline{\omega}_{e_1+e_2+e_3} = e_1u_1 + e_2u_2 + (e_1 + e_2)u_3 = e_1(u_1 - u_3) + e_2(u_2 - u_3)$ est un trivevteur $2-$scindable de rang 7 , donc il est de la forme $\omega_{7,3}$ ou $\omega_{7,4}$. Il s'ensuit que $l\ (\overline{\omega}_{e_1+e_2+e_3}) \leqslant 3$ et $\omega = (e_1 + e_2 + e_3)u + \omega''$ avec $l\ (\omega'') \leqslant 3$, et finalement $c(\omega) \leqslant l(\omega) \leqslant 6$.

<u>Second cas :</u> $S_{e_1e_2e_3} \not\subseteq S_u$.

Il existe au moins un élément de $\{e_1, e_2, e_3\}$ qui n'appartient pas à S_u , par exemple choisissons e_1 l'élément en question . Alors : $\omega = e_8u + e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + \omega_\circ$ avec $l_\circ\ (\omega_\circ) = 3$. Alors $e_8u + e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7)$ est un trivecteur $2-$ scindable de rang 8.

Or ces trivecteurs sont donnés par $x_1u_1 + x_2u_2$ où u_1, u_2 sont présentés dans le lemme I-3-5. La longueur de ces trivecteurs est inférieur ou égale à 4 pour les cas H_1, H_2, H_4, H_5 et H_6 . Il reste à étudier le dernier cas H_3. On a :

$\omega_{8,6} = e_7(e_1e_4+e_2e_5+e_3e_6)+e_8(e_1e_2+e_3e_4) = [e_7(e_1e_4 + e_2e_5) + e_8(e_1e_2 + e_3e_4)]+e_7e_3e_6$ qui est la somme d'un trivecteur $\omega_{7,4}$ et d'un trivecteur décomposable.Puisque $l\ (\omega_{7,4}) \leqslant 3$ et $l\ (\omega_3) \leqslant 4$. Alors chaque trivecteur $2-$ scindable de rang 8 a une longueur au plus 4 . D'où $l(\omega) \leqslant 7$ ce qui termine la démonstration.

4-8. Proposition.

Soit K un corps quelconque, alors pour $n > 6$ on a :

$$C_n(K) \leqslant \frac{n^2-2n-15}{4} \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

et

$$C_n(K) \leqslant \frac{n^2-2n-20}{4} \quad \text{si } n \text{ est pair .}$$

Soit ω un trivecteur de rang n . Alors d'aprés le corollaire 3-2 on obtient :

$$C_n(K) \leqslant C_{n-1}(K) + \left[\frac{n-1}{2}\right] \leqslant C_{n-2}(K) + n - 2\ .$$

Supposons d'abord que n est impair. Comme $C_7(K) \leqslant 5$ (voir proposition 4-4) on obtient $C_n(K) \leqslant C_7(K) + (7 + \cdots + (n-2)) \leqslant \dfrac{n^2-2n-15}{4}$.

Maintenant supposons que n est pair , d'àprés le théorème 4-7 , $C_8(K) \leq 7$. Par conséquent $C_n(K) \leqslant C_8(K) + (8 + \cdots + (n-2)) \leqslant \dfrac{n^2-2n-20}{4}$.

Remarques.

a) Une majoration de la complexité maximale du trivecteur de rang au plus n est donné par J.Hora [13] ,mais elle n'est pas valable dans le cas général. Si on prend $K = \mathbb{R}$, d'aprés [22] ,on obtient $C_7(\mathbb{R}) \leqslant 4$,cependant le corollaire 4-6 implique que $C_7(\mathbb{R}) \leqslant 5$.

b) Pour tout corps K , $C_8(K) \in \{5, 6, 7\}$.

c) Si K est algébriquement clos , on a d'aprés [25] , $c(\omega) \leqslant l(\omega) \leqslant 5$ et pour le trivecteur $\omega_{8,11} = e_1e_3e_7 + e_1e_5e_4 + e_1e_8e_2 + e_8e_4e_3 + e_8e_6e_7 + e_2e_4e_6$ le plongement $\phi_{8,11} : E \longrightarrow U^5$ défini par :

$$M_{B,B'}(\phi_{8,11}) = (100100100000000, 000010001000010, 010000000001000, 000001010010000,$$
$$0000100000000, 000000100000100, 001000000000010, 000000010100001)$$

montre que $C_8(K) = 5$.

IV-CLASSIFICATION SUR LES CORPS FINIS

L'étude des trivecteurs de rang 8 sur un corps quelconque repose sur le théoréme II-4-1.On dira que $\omega \in \wedge^3 E$ est de type $\omega_{8,i}$ si sur la clôture algébrique $\overline{K}$ de $K, \omega_{\overline{K}} \backsimeq \omega_{8,i}$ Dans le chapitre II , on a vu le théorème connu de la classification des formes trilinéaire alternées de rang 8 . On va maintenant aborder le cas des corps finis . Rappelons qu'une classification est connue pour $n = 8$ et $K = \mathbb{R}$ [9] .

§1-Cohomologies galoisienne([37] , [17])

On utilise la cohomologie galoisienne afin d'obtenir toutes les formes trilinéaires alterneés ω non équivalentes sur K mais équivalentes sur une clôture algébrique $\overline{K}$ de K.

1-1. On note $G = Gal(\overline{K}, K)$ le groupe de galois de $\overline{K}$ sur K , $\overline{K}$ est la clôture algébrique de K, ce groupe est un groupe profini (groupe topologique qui est limite projective de groupes finis munis chacun de la topologie discrète) . soit A un sous groupe de $GL(\overline{E})$ où $\overline{E} = E \otimes_K \overline{K}$. G opère naturellement à droite sur A par :
$(g.f)(v \otimes \lambda) = f\left(v \otimes g^{-1}(\lambda)\right)$.

un $1-$ cocycle de G à valeurs dans A est une application continue définie par :
$\alpha : G \to A, s \mapsto \alpha_s$, telle que $\alpha_{st} = \alpha_s.s(\alpha_t)$ pour $s, t \in G$.

On note $Z^1(G, A)$ l'ensemble des $1-$ cocycles de G à valeurs dans A.

On dit que deux $1-$ cocycles α, α' sont cohomologues s'il existe $a \in A$ tel que :
$\alpha'_s = a.\alpha_s.s(a^{-1})$, pour tout $s \in G$: ceci définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des $1-$cocycles . L'ensemble des classes d'équivalence est noté par $H^1(G, A)$.

1-2. Soit $\mathbf{C}$ la catégorie des groupes algébriques (foncteur de la catégorie des corps dans la catégorie des groupes) , contenant $K \mapsto (K,+)$, $K \mapsto GL(n,K)$ (en particulier pour $n=1$, $K \mapsto K^*$) , $K \mapsto SL(n,K)$, $K \mapsto Sp_{2n}(K)$ et telle que :
si $1 \to A \to B \to C \to 1$ est une suite exacte avec A et $C \in Ob(\mathbf{C})$, alors $B \in Ob(\mathbf{C})$ et $H^1(G, B(\overline{K})) = \{1\}$.

Soit G un groupe et A un $G-$module ; on considère le produit semi-direct B de $A \times A$ par le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ opérant sur $A \times A$ par permutation des facteurs . C'est un $G-$module de façon naturelle de sorte que la suite exacte de groupes :$1 \to A \times A \to B \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1$ est une suite exacte de $G-$module . Alors si $H^1(G,A) = \{1\}$ et si $H^1(G',A) = \{1\}$ pour tout sous-groupe G' d'indice 2 de G , $H^1(G,B)$ s'identifie à $H^1(G,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ([32]) .

1-3. Proposition ([37]) .

L'ensemble de cohomologie $H^1(G,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est le groupe des homomorphismes continues de G dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,$Hom(G,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$: c'est le groupe des extensions quadratiques séparables de K isomorphe à K^*/K^{*^2}si K est de caractéristique différente de 2.

On considère maintenant S_n comme un $G-$module trivial.

1-4. Proposition([17]) .

L'ensemble de cohomologie $H^1(G,S_n)$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de $K-$algèbres étales de dimension n (c'est une généralisation de la proposition précidente car $S_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

1-5. Algèbre étale cubique ([17]) .

C'est l'algèbre étale de dimension 3 .

Soit L une $K-$algèbre étale cubique et $\phi : G \longrightarrow S_3$ un $1-$ cocycle associée à L. Comme l'action de G sur S_3 est trivial, l'application ϕ est un homomorphisme .On dit que L est de type i_{s_3} , pour $i = 1,2,3$ et 6 si $im(\phi) \subset S_3$ est un sous-groupe d'ordre i , on a :

L est de type 1_{s_3} ssi $L \backsimeq K \times K \times K$

L est de type 2_{s_3} ssi $L \backsimeq K \times K^`$ où $K^`$ est une extension quadratique separable de K

L est de type 3_{s_3} ssi L est une extension cyclique de K

L est de type 6_{s_3} ssi L est une extension non galoisienne de K .

D'où $card\,(H^1(G, S_3)) = 4$.

En particulier si $K = \mathbf{F}_q$ un corps fini on a $card\,(H^1(G, S_3)) = 3$ et si $K = \mathbb{R}$, $card\,(H^1(G, S_3)) = 2$

1-6. Théorème.

Soit G un groupe profini , A un $G-$module topologique tel que $H^1(G, A) = 0$ pour tout sous-groupe ouvert d'indice fini de G .

posons $B_n = A^n \rtimes S_n$, alors $H^1(G, B_n) \simeq H^1(G, S_n)$

Preuve. On prend $G = Gal(\overline{K}, K), G$ agit sur A^n par $g.(a_1, \ldots, a_n) = (ga_1, \ldots, ga_n)$ et $g.\sigma = \sigma$ pour $\sigma \in S_n$. La suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de $G-$modules $1 \longrightarrow A^n \longrightarrow B_n \overset{p}{\longrightarrow} S_n \longrightarrow 1$ donne :

$\{1\} = H^1(G, A^n) \longrightarrow H^1(G, B_n) \longrightarrow H^1(G, S_n)$ .Comme B_n est un produit semi-direct $i.e.$ il existe une section $s :\ S_n \longrightarrow B_n$ telle que $po\ s = 1_{S_n}$,$H^1(G, B_n) \longrightarrow H^1(G, S_n)$ est surjectif . Reste à montrer que cette application est bijective , c'est à dire que deux $1-$cocycles $g \longmapsto b_g, g \longmapsto b'_g$ tels que $\varepsilon_g = p(b_g) = p(b'_g)$ pour tout $g \in G$ sont cohomologues. Comme $g \longmapsto \varepsilon_g$ est un $1-$cocycle à valeurs dans S_n , c'est un homomorphisme de groupes ε de noyau H sous-groupe ouvert d'indice fini de G et les deux $1-$cocycles $h \longmapsto b_h$ et $h \longmapsto b'_h$ de H , à valeurs dans A^n sont des $1-$cobords $b_h = \beta h(\beta^{-1})$ et $b'_h = \beta' h(\beta'^{-1})$. Utilisant β et β' , on peut modifier les $1-$cocycles b et $b' \in Z^1(G, B_n)$ de sorte que $b_h = b'_h = 1_{B_n}$ pour tout $h \in H$.

On peut écrire $G = \cup tH = \cup Ht$ où t parcourt un système de représentants de G modulo H. Pour $g \in G$, il existe $h, h^{`}$ uniques dans $H$ tels que $g = th = h^{`}t$ et on a:

$b_g = b_{th} = b_t t(b_h) = b\ t$ $\qquad\qquad\qquad\qquad b'_g = b'_t$

$b_g = b_{h't} = b_{h'} h'(b_t) = h'(b_t) = b_t$ $\qquad\qquad b'_t = h(b'_t)$

Cela montre que b et $b^{`}$ sont constants sur les classes $tH = Ht$ et à valeurs dans $B_n^H = (A^H)^n \rtimes S_n$ de sorte que b et b' induisent des $1-$cocycles $\overline{b}$ et $\overline{b'}$:

$\overline{b}$, $\overline{b'} \in Z^1(G/H, (A^H)^n \rtimes S_n)$. On notera encore t les éléments de G/H .

Cas $n = 2$: $G/H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, \sigma\}$; b et b' sont déterminis par :$b_\sigma = (a_1, a_2; \sigma)$, $b'_\sigma = (a'_1, a'_2; \sigma)$ et $b_1 = ((1,1);1) = b'_1$, $b_{\sigma^2} = b_\sigma \sigma(b_\sigma) = (a_1\sigma(a_2), a_2\sigma(a_1); 1)$ on a donc $\sigma(a_2) = a_1^{-1}$ soit $a_2 = \sigma(a_1^{-1})$ et de même $a'_2 = \sigma(a_1'^{-1})$.

Soit alors $\beta = (u, v; 1)$, $\sigma(\beta^{-1}) = (\sigma(u^{-1}), \sigma(v^{-1}); 1)$ et

$$\begin{aligned} \beta b_\sigma \sigma(\beta^{-1}) &= (u, v; 1)(a_1, \sigma(a_1^{-1}); \sigma)(\sigma(u^{-1}), \sigma(v^{-1}); 1) \\ &= (ua_1, v\sigma(a_1^{-1}); \sigma)(\sigma(u^{-1}), \sigma(v^{-1}); 1) = (ua_1\sigma(v^{-1}), v\sigma(a_1^{-1})\sigma(u^{-1}); \sigma). \end{aligned}$$

On cherche u et v de sorte que $ua_1\sigma(v^{-1}) = a'_1$, $v\sigma(a_1^{-1})\sigma(u^{-1}) = \sigma(a_1'^{-1})$.

On prend $v = 1$ de sorte que les deux équations s'écrivent :

$ua_1 = a'_1$, $\sigma(a_1^{-1})\sigma(u^{-1}) = \sigma(a_1'^{-1})$ qui sont équivalentes et il suffit de prendre $u = a'_1 a_1^{-1}$, ce qui se montre que b et b' sont cohomologues .

Dans le cas général , on procède par récurrence sur n . G/H s'identifie à un sous- groupe de S_n et $b_t = (a_{1,t}\ , \ldots, a_{n,t}\ ; t)$, $b'_t = (a'_{1,t}\ , \ldots, a'_{n,t}\ ; t)$

Posons $\beta = (c_1, \ldots, c_n\ ; 1)$, $t(\beta^{-1}) = (t(c_1^{-1})\ , \ldots, t(c_n^{-1}); 1)$ et

$$\begin{aligned} \beta b_t t(\beta^{-1}) &= (c_1, \ldots, c_n\ ; 1)(a_{1,t}\ , \ldots, a_{n,t}; t)(t(c_1^{-1})\ , \ldots, t(c_n^{-1})\ ; 1) \\ &= (c_1 a_{1,t}\ , \ldots, c_n a_{n,t}\ ;\ t)(t(c_1^{-1})\ , \ldots, t(c_n^{-1}); 1) \\ &= (c_1 a_{1,t} t(c_{t^{-1}(1)}^{-1}), \ldots, c_i a_{i,t} t(c_{t^{-1}(i)}^{-1})\ , \ldots; t). \end{aligned}$$

Il s'agit de résoudre les équations $c_i a_{i,t} t(c^{-1}_{t^{-1}(i)}) = a'_{i,t}$.
Supposons que $G/H \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ opère sur A_n^H par permutation circulaire :
$G/H = \{1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}\}$, θ génirateur agissant par $\theta(i) = i - 1$ modulo n.
$b_\theta = (a_1, \dots, a_n \; ;\theta)$
$b_{\theta^2} = (a_1, \dots, a_n \; ;\theta)(\theta(a_1), \dots, \theta(a_n) \; ; \; \theta) = (a_1\theta(a_2) \; , \dots, a_i\theta(a_{i+1}), \dots ; \theta^2)$
$b_{\theta^k} = (a_1\theta(a_2), \dots, \theta^{k-1}(a_K), \dots ; \theta^k)$.
Ce qui signifie que $a_1\theta(a_2)\theta^2(a_3) \dots \theta^{n-1}(a_n) = 1$ dans A^H.
Ecrivons $b'_\theta = (a'_1, \dots, a'_n \; ;\theta)$; les conditions sur $c_1, \dots, c_n$ donne $c_i a_i \theta(c^{-1}_{i+1}) = a'_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. On pose $c_1 = 1$, $c_n a_n = a'_n$, $c_n = a'_n a_n^{-1}, c_{n-1} a_{n-1} \theta(c_n^{-1}) = a'_{n-1}$,d'où c_{n-1} etc... et il reste a vérifier que la dernière condition et vérifiée. Or les relations $c_i a_i \theta(c^{-1}_{i+1}) = a'_i$ sont surabondants du fait de la condition des cocycles.
$a_1\theta(a_2) \dots \theta^{n-1}(a_n) = 1 = a'_1\theta(\grave{a}_2) \dots \theta^{n-1}(\grave{a}_n)$. Comme $b'_\theta = \beta b_\theta \theta(\beta^{-1}), \beta = (c_1, \dots, c_n \, ; 1)$ on a pour tout k , $b'_{\theta^k} = \beta b_{\theta^k} \theta^k(\beta^{-1})$ c'est a dire que b et b' sont cohomologues.

§2- Classification sur un corps de caractéristique différente de 2 et 3

Dans le chapitre II on a déterminé les groupes d'automorphismes pour chaque trivecteur de rang 8 , on va maintenant utiliser la cohomologie galoisienne .

2-1. Les suites exactes de cohomologie appliqué aux groupes $A_i = Aut(\omega_{8,i})$, $i = 1, 2, 3, 6$ montrent imédiatement que $H^1(G, A_i)$ est réduit à un seul élément , l'élément distingué.
Pour $\omega_{8,4}$, on utilise 1-2 et la proposition 1-3 , on trouve $H^1(G, A_4) \simeq K^*/K^{*2}$.
Pour $\omega_{8,5}$, on utilise le théorème 1-6 , on en déduit $H^1(G, A_5) \simeq H^1(G, S_3)$.

On a donc le résultat suivant :

2-2 Théorème .

Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et 3 (parfait de caractéristique 2,3). Les $K-$formes de trivecteurs $2-$scindables de rang 8 se répartissent en six classes C_i.L'ensemble C_i est réduit à $\omega_{8,i}$, si $i \in \{1,2,3,6\}$,l'ensemble C_4est formé de classes d'isomorphismes en bijection avec le groupe des extensions quadratiques séparable de K L'ensemble C_5 est formé de classes d'isomorphismes en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de $K-$algèbres étales de dimension 3 .

Il en résulte que pour chaque extension quadratique séparable L de K , il existe $\omega_L \in \wedge^3 E$ tel que $\omega_L \not\simeq \omega_{8,4}$ et $\omega_L \otimes L \in \wedge^3(E \otimes_K L)$ est $L-$isomorphe à $\omega_{8,4}$.
On peut construire ω_L comme suit :
$\omega_{8,4} = e_1(e_2e_5 + e_3e_6) + e_4(e_7e_2 + e_8e_3)$ est $4-$scindable et s'écrit :
$e_5(e_1e_2) + e_6(e_1e_3) + e_7(e_2e_4) + e_8(e_3e_4)$. Posons $u_1 = e_1e_2, u_2 = e_1e_3, u_3 = e_2e_4, u_4 = e_3e_4$ alors $V = vect\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $\wedge^2 K^4$.
La réstriction de la forme quadratique γ_2 à V ,une foie qu'on a choisi un générateur de $\wedge^4 vect\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, nous permet de construire $\omega_{8,4,d}$ (proposition 3-2 ,[32]) , $\omega_{8,4,d}$ s'écrit $e_5v_1 + e_6v_2 + e_7v_3 + e_8v_4$ où $v_1 = e_1e_2 + e_3e_4$,$v_2 = e_1e_3 + de_2e_4$, $v_3 = e_1e_4$, $v_4 = e_2e_3$ $(d \notin K_*^2)$. Alors les trivecteurs $\omega_{8,4,d}$ et $\omega_{8,4}$ ne sont pas $K-$isomorphes car leurs groupes d'automorphismes différent, pour $\omega_{8,4,d}$ on a :

2-3. Proposition.

Le groupe d'automorphismes $A_{4,d} = Aut(\omega_{8,4,d})$ est déterminé par les suite exactes :

$$\begin{aligned}
1 \quad &\longrightarrow \quad A'_{4,d} \longrightarrow A_{4,d} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1 \\
1 \quad &\longrightarrow \quad A''_{4,d} \longrightarrow A'_{4,d} \longrightarrow K^* \times K^* \longrightarrow 1 \\
1 \quad &\longrightarrow \quad K^{12} \longrightarrow A''_{4,d} \longrightarrow SL_2(K') \longrightarrow 1 \text{ où } K' = K\left(\sqrt{d}\right)
\end{aligned}$$

Preuve. Par un changement de base on obtient :

$\omega = e_8(e_1e_3 + e_4e_2) + e_7(e_1e_4 + de_3e_2) + e_6e_1e_2 + e_5e_3e_4.$

La partie stable $R_{6,2}(\omega)$ est $< e_1, e_2 > \cup < e_3, e_4 >= V_1 \cup V_2$. D'où la première suite exacte. Si $f \in A'_{4,d}$, alors $f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2$, dans ce cas la matrice $M(f)$ est

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \\ 0 & B & C \\ & 0 & \end{pmatrix} \quad A,\ B \in GL_2(K)$$

Ceci permet de construire un homomorphisme de groupe $\pi : A'_{4,d} \xrightarrow{\pi} K^* \times K^*$,

$\pi(f) = (\det A, \det B)$. π est surjectif . Si $f \in \ker \pi$ on a $A, B \in SL_2(K)$ et on a une suite exacte $1 \longrightarrow A''_{4,d} \longrightarrow A'_{4,d} \longrightarrow K^* \times K^* \longrightarrow 1$ .Par suite on peut définir un homomorphisme $\psi : A''_{4,d} \longrightarrow SL_2(K) \times SL_2(K), \psi(f) = (A, B)$ qui n'est pas surjective. Pour déterminer $\psi(A''_{4,d})$, il suffit d'étudier le groupe des $K-$automorphismes de F avec $F = vect\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ où $u_1 = e_1e_3 + e_4e_2; u_2 = e_1e_4 + de_3e_2; u_3 = e_1e_2; u_4 = e_3e_4$. On prend l'espace orthogonal de F c'est $F^\perp$. Donc $\dim F^\perp = 2$ et de base $\{v, w\}$ où $v = e_1e_4 - de_3e_2$; $w = e_1e_3 - e_4e_2$ donc $F^\perp = vect\{v, w\}$, d'où $\left(F^\perp\right)_{K'} = vect\{v_1, w_1\}$; $K' = K\left(\sqrt{d}\right)$ et : $v_1 = v + \sqrt{d}w = (e_4 + \sqrt{d}e_3)(e_1 - \sqrt{d}e_2) = p_1p_2$

$$w_1 = v - \sqrt{d}w = (e_4 - \sqrt{d}e_3)(e_1 - \sqrt{d}e_2) = \overline{p}_1\overline{p}_2$$

Comme $\{p_1, p_2, \overline{p}_1, \overline{p}_2\}$ est une base de K'^4, la matrice dans cette base de tout $K'-$automorphisme de F laissant invariant v et w est de la forme $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \overline{D} \end{pmatrix}$ où D et $\overline{D} \in SL_2(K')$, d'où la suite exacte de groupes $1 \longrightarrow A'''_{4,d} \longrightarrow A''_{4,d} \longrightarrow SL_2(K') \longrightarrow 1$ et comme pour $\omega_{8,4}$; $A'''_{4,d} = \ker \psi \simeq K^{12}$.

Remarques.

1) La forme quadratique de $\omega_{8,4}$ est $\gamma_2(xu_1 + yu_2 + zu_3 + tu_4) = (xt - yz)$,pour $\omega_{8,4,d}$ on a $\gamma_2(xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4) = (x^2 - dy^2 + zt)$. On voit bien que les deux formes ne sont pas équivalentes sur K mais ils le deviennent par extension des scalaires .

2) Les trivecteurs $\omega_{8,2}$ et $\omega_{8,7}$ sont également $4-$scindables et correspondent aux sous-espaces de dimension 4 et de rang maximal de $\wedge^2 K^4$.

En caractéristique 2 , comme précédement , à l'aide de γ_2 , on trouve :

$\omega_{8,4,a} = e_5v_1 + e_6v_2 + e_7v_3 + e_8v_4$ où $v_1 = e_1e_3 + e_2e_4$,$v_2 = e_1e_3 + e_3e_4 + ae_1e_2$, $v_3 = e_1e_4$ $v_4 = e_2e_3$ ainsi $\omega_{8,4,a}$ et $\omega_{8,4}$ ne sont pas $K-$isomorphe :

$\gamma_2(xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4) = (y^2a - x^2 + zt)$ et on a :

2-4. Proposition.

Le groupe d'automorphismes $A_{4,a} = Aut(\omega_{8,4,a})$ est déterminé par les suites exactes :

$$
\begin{array}{rcl}
1 & \longrightarrow & A'_{4,a} \longrightarrow A_{4,a} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1 \\
1 & \longrightarrow & A''_{4,a} \longrightarrow A'_{4,a} \longrightarrow K^* \times K^* \longrightarrow 1 \\
1 & \longrightarrow & K^{12} \longrightarrow A''_{4,a} \longrightarrow SL_2(K') \longrightarrow 1 \\
\text{où } K' & = & K\,(\alpha) \text{ avec } \alpha^2 + \alpha = a \text{ et } \alpha \in K.
\end{array}
$$

Preuve. On peut écrire $\omega_{8,4,a} = e_8(e_1e_4 + e_3e_2) + e_7(e_1e_4 + e_4e_2 + ae_1e_3) + e_6e_1e_2 + e_5e_3e_4$. La partie stable est $R_{6,2}(\omega) =< e_1,e_2 > \cup < e_3, e_4 >= V_1 \cup V_2$. Soit $f \in A_{4,a}$,on obtient la première suite exacte comme dans le cas précédent , on obtient aussi la deuxième suite et on défini un homomorphisme $\psi : A''_{4,a} \longrightarrow SL_2(K) \times SL_2(K)$, ψ n'est pas surjective Pour déterminer $\psi(A''_{4,a})$, il suffit d'étudier le groupe des $K-$automorphismes de F avec $F = vect\,\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ où $u_1 = e_1e_4 + e_3e_2$,$u_2 = e_1e_4 + e_4e_2 + ae_1e_3$, $u_3 = e_1e_2$, $u_4 = e_3e_4$. On prend l'espace orthogonal de F c'est $F^\perp$ donc $\dim F^\perp = 2$; la base de $F^\perp$ est $\{v, w\}$ avec $v = e_1e_4 + e_3e_1 - e_3e_2$, $w = e_1e_3 - a^{-1}e_4e_2$ d'où $F^\perp = vect\,\{v, w\}$.

Par suite $(F^\perp)_{K'} = vect\,\{v_1, w_1\}$, $K' = K\,(\alpha)$ avec $\alpha^2 + \alpha = a$ et $\alpha \in K$:

$v_1 = v + (\alpha + 1)w = (e_2 + \alpha e_1)(e_3 + (\alpha + 1)a^{-1}e_4) = p_1p_2$

$w_1 = v - (\alpha + 1)w = (e_2 - \alpha e_1)(e_3 - (\alpha + 1)a^{-1}e_4) = \overline{p_1p_2}$

Comme $\{p_1, p_2, \overline{p_1}, \overline{p_2}\}$ est une base de K'^4. La matrice dans cette base de tout $K'-$automorphisme de F , laissant inveriant v et w est de la même forme précédente , d'où la dèrnière suite.

2-5.Proposition.

Le nombre des classes d'isomorphismes de $K-$algèbres étales de dimension 3 dans le cas des corps finis est égal à 3 . Un représentant de chaque orbite est donné par :

$\omega_{8,5}$

$\omega_{8,5,d} = e_2(e_5e_3 - de_4e_6) + e_1(e_7e_8 + e_5e_4 + e_6e_3)$, $d \in K - K_*^2$

$\omega_{8,5,a} = e_1(ae_3e_4 + ae_5e_6 + e_7e_8) + e_2(e_3e_5 + e_4e_7 + e_6e_8)$,$a \in K'$, K' est une extension de K de degré 3 .

Preuve. Soient L une extension cubique de K et F un $L-$e.v de dimension 3. Choisissons une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de F et soit $\varphi : \wedge^3 F \longrightarrow L$ la forme déterminant normalisée par $\varphi(e_1, e_2, e_3) = 1$. Soit alors $Tr : L \longrightarrow K$ la forme trace et $\omega_L = Tr_L \circ \varphi : F \times F \times F \longrightarrow K$: c'est une forme $K-$trilinéaire alternée de rang 9 sur $E = F$ considéré comme espace vectoriel sur K.

Si $car(L) \neq 3$, on prend $L = K(t)$ avec $t^3 = a$ dans ce cas

$\{e_1, e_2, e_3, e_4 = te_1, e_5 = te_2, e_6 = te_3, e_7 = t^2e_1, e_8 = t^2e_2, e_9 = t^2e_3\}$ est une base de E .

Soit $\{e_i^*\}$,$1 \leqslant i \leqslant 9$; sa base duale ; alors un calcul simple nous donne :

$\omega_L(e_1, e_2, e_3) = 3$, $\omega_L(e_4, e_5, e_6) = 3a$, $\omega_L(e_7, e_8, e_9) = 3a^2$, $\omega_L(e_1, e_5, e_9) = 3a$, $\omega_L(e_1, e_6, e_8) = -3a$, $\omega_L(e_2, e_4, e_9) = -3a$, $\omega_L(e_2, e_6, e_7) = 3a$, $\omega_L(e_9, e_4, e_8) = 3a$, $\omega_L(e_3, e_5, e_7) = -3a$ et $\omega_L(e_i, e_j, e_k) = 0$ pour les autres cas . Donc :

$\frac{1}{3}\omega_L = e_1^*e_2^*e_3^* + ae_4^*e_5^*e_6^* + a^2e_7^*e_8^*e_9^* + ae_1^*e_5^*e_9^* - ae_1^*e_6^*e_8^* + ae_2^*e_4^*e_9^* - ae_2^*e_6^*e_7^* + ae_3^*e_4^*e_8^* - ae_3^*e_5^*e_7^*.$

or $\overline{\omega}(e_9^*) = e_3^*(e_1^*e_2^* + ae_4^*e_8^* + ae_7^*e_5^*) + ae_6^*(e_4^*e_5^* + e_1^*e_8^* + e_2^*e_7^*)$, donc le trivecteur :

$e_3(e_1e_2 + ae_4e_8 + ae_7e_5) + ae_6(e_4e_5 + e_1e_8 + e_2e_7)$ est équivalent au trivecteur $\omega_{8,5,a}$

(il suffit de considérer l'application linéaire définie par $f(e_1) = e_3$,$f(e_2) = ae_6$, $f(e_3) = e_4$, $f(e_4) = e_8$, $f(e_5) = e_5$,$f(e_6) = -e_7$, $f(e_7) = -e_1$, $f(e_8) = -e_2$).

Si on prend $L = K' \times K$ avec $K' = K(\alpha)$ où $\alpha^2 = d$ $(d \notin K^{*^2})$; dans ce cas $\{e_1, e_2, e_3, e_4 = \alpha e_1, e_5 = \alpha e_2, e_6 = \alpha e_3, e_7, e_8, e_9\}$ est une base de E.

Soit $\{e_i^*\}$,$1 \leqslant i \leqslant 9$; sa base duale , alors $\omega_L(e_1, e_2, e_3) = 3$, $\omega_L(e_7, e_8, e_9) = 3$,

$\omega_L(e_1,e_5,e_6) = 3d$, $\omega_L(e_2,e_4,e_6) = -3d$, $\omega_L(e_3,e_4,e_5) = 3d$ et $\omega_L(e_i,e_j,e_k) = 0$ pour les autres cas.Donc $\frac{1}{3}\omega_L = e_1^*e_2^*e_3^* + de_1^*e_5^*e_6^* + de_2^*e_4^*e_6^* + de_3^*e_4^*e_5^* + e_7^*e_8^*e_9^*$ et le trivecteur $\omega = e_1e_2e_3 + de_1e_5e_6 + de_2e_4e_6 + de_3e_4e_5 + e_7e_8e_9 = \omega_{6,1,d} + e_7e_8e_9$.
car $\omega_{6,1,d} = e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_6 - de_4e_5)$ (II-2-2). On pose $x = e_9 - e_1$ dans ce cas $e_9 = x + e_1$ et $\overline{\omega}(x) = \overline{e}_1(\overline{e}_7\overline{e}_8 + \overline{e}_3\overline{e}_4 + \overline{e}_5\overline{e}_6) + \overline{e}_2(\overline{e}_3\overline{e}_6 - d\overline{e}_4\overline{e}_5)$ est équivalent au trivecteur $\omega_{8,5,d}$

Si $L = K \times K \times K = K^3$, $F = L^3 = K^9$, dans ce cas $\omega = \omega_9 = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6 + e_7e_8e_9$. La même méthode donnent $\omega_{8,5}$ (II-6-2).

On rappelle que si L/K est une extension cubique de corps de caractéristique différente de 3 , L est engendré par une racine d'un polynôme de $K[x]$ de la forme $x^3 + px + q$. On peut donc construire le quatrième trivecteur de type $\omega_{8,5}$:

2-6. Proposition.

Soit $L = K(x)$ une extension cubique de K tel que $x^3 + px + q = 0$, où p et q deux paramètres quelconque de K et $pq \neq 0$. Alors il exsiste un trivecteur $\omega_{8,5,p,q}$ de type $\omega_{8,5}$: $\omega_{8,5,p,q} = e_7(e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6) + e_8(e_1(e_4 + pe_5) + e_2e_6 + qe_3e_5)$.

Comme les trivecteurs $\omega_{8,5}, \omega_{8,5,d}$,$\omega_{8,5,a}$,$\omega_{8,5,p,q}$ sont $2-$scindables , on associe un invariant $\gamma_3(xu_1 + yu_2)$ qui est une forme cubique ; $u_1, u_2 \in \wedge^2 K^6$, on trouve :
$\gamma_3(xu_1+yu_2) = xy(x+y), x(x^2 - dy^2), a^2x^3 + y^3$ et $x^3 + pxy^2 + qy^3$pour $\omega_{8,5}, \omega_{8,5,d}$,$\omega_{8,5,a}$ et $\omega_{8,5,p,q}$ respictivement.
On voit bien que les trois dernières formes sont équivalentes a la première si le corps est algébriquement clos , pour la deuxième on écrit d comme carré et pour la troisième on écrit $(xj + yj^2)(xj^2 + yj)(x + y)$ avec j la racine cubique de a.
On remarque que si $q = 0$, $\omega_{8,5,p,q}$ est équivalent à $\omega_{8,5,d}$ et si $p = 0$, $\omega_{8,5,p,q}$ est équivalent à $\omega_{8,5,a}$.

2-7. Lemme .

Il existe des trivecteurs de rang 8 qui ne sont pas $2-$scindables mais le deviennent par extension des scalaires.

Le lemme I-3-5 donne les $3-$ vecteurs de rang 8 qui sont $2-$ scindables . Il y a six classes $\omega_{8,i}$, $i = 1, \ldots, 6$. Donc si K est un corps non quadratiquement clos , il suffit de prendre un trivecteur de type $\omega_{8,4}$ qui n'est pas $K-$isomorphe à $\omega_{8,4}$. $\omega_{8,4,d}$ n'est pas $2-$scindable mais $(\omega_{8,4,d})_{\overline{K}}$ l'est.

2-8. Proposition.

Le groupe d'automorphismes $A_{8,5,d} = Aut(\omega_{8,5,d})$ est déterminé par les suites exactes suivantes:

$$\begin{array}{lll} 1 & \longrightarrow & A' \longrightarrow A \longrightarrow K^* \longrightarrow 1 \\ 1 & \longrightarrow & A'' \longrightarrow A' \longrightarrow SL_2K) \longrightarrow 1 \\ 1 & \longrightarrow & K^6 \longrightarrow A'' \longrightarrow SL_2(K') \longrightarrow 1 \end{array}$$

où $K' = K\left(\sqrt{d}\right)$.

Preuve. On peut écrire $\omega_{8,5,d} = e_2(e_5e_3 - de_4e_6) + e_1(e_7e_8 + e_5e_4 + e_6e_3)$. La partie stable $R_5(\omega) =< e_1 >$, dans ce cas $f(e_1) = ae_1$, $a \in K^*$ ce qui permet de définir un homomorphisme de groupe $\pi : A \longrightarrow K^*$, $\pi(f) = a$, π est surjectif, d'où la suite exacte $1 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow K^* \longrightarrow 1$ avec $A' = \ker \pi$.
Soit $f \in A'$, donc $a = 1$ et $f.\omega = \omega$ entraine:

$$M(f)=\begin{pmatrix} 1 & b_1 & c_1 & d_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & & & & & & \alpha_3 & \beta_3 \\ 0 & & & B & & & \alpha_4 & \beta_4 \\ 0 & & & & & & \alpha_5 & \beta_5 \\ 0 & & & & & & \alpha_6 & \beta_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_7 & \beta_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_8 & \beta_8 \end{pmatrix}$$

où $\begin{vmatrix} \alpha_7 & \beta_7 \\ \alpha_8 & \beta_8 \end{vmatrix} = 1$, $B \in GL_4(K)$ donc $h = \begin{pmatrix} \alpha_7 & \beta_7 \\ \alpha_8 & \beta_8 \end{pmatrix} \in SL_2(K)$ ce qui donne un homomorphisme $\psi : A' \longrightarrow SL_2(K)$, $\psi(f) = h$. ψ est surjectif et de noyau $A'' = \ker\psi$. Soit $f \in A''$, *i.e* $h = id_2$. Or $f.\omega = \omega$ entraine $\alpha_2 = \ldots = \alpha_6 = 0$ et $\beta_2 = \ldots = \beta_6 = 0$. On peut définir un homomorphisme $\varphi : A'' \longrightarrow GL_4(K)$, $\varphi(f) = B$ pour déterminer $\varphi(A'')$, il suffit d'étudier le groupe des $K-$automorphismes de F avec $F = vect\{u_1, u_2\}$ où $u_1 = e_5e_4 + e_6e_3; u_2 = e_5e_3 - de_4e_6$ on prend l'espace orthogonal de F c'est $F^\perp$, donc $\dim F^\perp = 2$. La base de $F^\perp$est $\{v, w\}$ où $v = e_5e_3 + de_4e_6$, $w = e_5e_4 - e_6e_3$, donc $F^\perp = vect\{v, w\}$, d'où $(F^\perp)_{K'} = vect\{v_1, w_1\}$, $K' = K\left(\sqrt{d}\right)$ et

$v_1 = v + \sqrt{d}w = (e_3 + \sqrt{d}e_4)(-e_5 + \sqrt{d}e_6) = p_1p_2$

$w_1 = v - \sqrt{d}w = (e_3 - \sqrt{d}e_4)(-e_5 - \sqrt{d}e_6) = \overline{p_1p_2}$

Comme $\{p_1, p_2, \overline{p_1}, \overline{p_2}\}$ est une base de K' , la matrice dans cette base de tout $K'-$automorphismes de F, laissant invariant v et w est de la forme :

$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \overline{D} \end{pmatrix}$ où D , $\overline{D} \in SL_2(K')$.

D'où la suite exacte de groupe : $1 \longrightarrow A''' \longrightarrow A'' \longrightarrow SL_2(K') \longrightarrow 1$.

Soit $f \in A'' = \ker\varphi$, alors $B = id_4$ dans ce cas $\wedge^3 f(\omega) = \omega$ entraine $A''' \cong K^6$, d'où le resultat.

§3- Classification sur un corps fini

Devant la difficulté du problème de classification des trivecteurs sur un corps quelconque , on se restreint au cas des corps finis. Nous donnons une approche de cette classification .

3-1. On utilise la cohomologie galoisienne on en déduit que $H^1(G, A_i)$ est réduit à un seul élément pour $A_i = Aut(\omega_{8,i})$, $i \in \{7, 8, 11, 12\}$.

Pour $\omega_{8,9}$, si K est un corps de caractéristique différente de 2 :

$H^1(G, A_9) \simeq Hom(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq K^*/K^{*2}.$, il y a donc deux classes $\omega_{8,9}$ et $\omega_{8,9,d}$:

$\omega_{8,9,d} = e_1(e_2e_3 + e_2e_4 + e_5e_6) + e_3(e_5e_7 + e_6e_8) + e_4(e_5e_8 - de_7e_6)$, $d \notin K^{*^2}$.

On peut expliciter $\omega_{8,9,d}$ comme suit :

Dans la preuve de la proposition 2-3 , on a trouver $\omega_L = \omega_{6,1,d} + e_7e_8e_9$ dans le cas où $K' = K\left(\sqrt{d}\right)$ et comme $\omega_{7,3,d} = \omega_{6,1,d} + e_7e_5e_3$. On en déduit que :

$\omega_L = \omega_{7,3,d} + e_7e_5e_3 + e_7e_8e_9$,on pose $x = e_9 - e_1 - e_4$ donc $e_9 = x + e_1 + e_4$, d'où $\overline{\omega}(x) = \overline{e}_7(\overline{e}_8\overline{e}_1 + \overline{e}_8\overline{e}_4 + \overline{e}_3\overline{e}_5) + \overline{e}_1(\overline{e}_2\overline{e}_5 + \overline{e}_3\overline{e}_7) + \overline{e}_4(\overline{e}_2\overline{e}_3 + d\overline{e}_5\overline{e}_7)$ est équivalent au trivecteur $\omega_{8,9,d}$.

Les trivecteurs $\omega_{8,9}$ et $\omega_{8,9,d}$ ne sont pas $K-$isomorphes car leurs groupes d'automorphismes différents , pour $\omega_{8,9,d}$ on a:

3-2. Proposition.

Le groupe d'automorphismes $A_{9,d} = Aut(\omega_{8,9,d})$ est déterminé par les suites exactes :

$$\begin{array}{l}
1 \longrightarrow A'_{9,d} \longrightarrow A_{9,d} \xrightarrow{\varphi} GL_2(K) \\
1 \longrightarrow \mathbf{F}^*_{q^2} \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1 \\
1 \longrightarrow K^9 \longrightarrow A'_{9,d} \longrightarrow K^* \longrightarrow 1
\end{array}$$

Prouve. $\omega_{8,9,d} = e_6(e_8e_4 + e_8e_3 + e_1e_2) + e_4(e_1e_7 + e_5e_2) + e_3(e_5e_1 + de_2e_7)$.
La partie stable $R\,(\omega_{8,9,d}) =< e_1, e_2 >$, donc si $f \in A_{9,d}$,$f(R\,(\omega_{8,9,d})) \subset R\,(\omega_{8,9,d})$ et la matrice de f est $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \\ a_2 & b_2 & C \\ \multicolumn{2}{c}{0_{6\times 2}} & \end{pmatrix}$

D'où l'homomorphisme $\varphi : A_{9,d} \longrightarrow GL_2(K)$, $\varphi(f) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \alpha$

Pour montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \operatorname{Im}\varphi$, il suffit de considérer l'homomorphisme σ définie par $\sigma(e_1) = e_1, \sigma(e_2) = -e_2, \sigma(e_3) = e_3, \sigma(e_4) = e_4, \sigma(e_5) = -e_5, \sigma(e_6) = e_6$, $\sigma(e_7) = -e_7, \sigma(e_8) = e_8$. on a $\sigma^2 = id_E$ et $\sigma/ < e_1, e_2 >= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}\varphi$ et $\sigma.\omega = \omega$
Soit $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ la matrice de $t_{\alpha_2^{-1}}$ dans la base $\{e_1^*, e_2^*\}$ alors :
$\operatorname{Im}\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ db_1 & a_1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -db_1 & -a_1 \end{pmatrix} \right\}$.

Dans le premier cas , on a $b_2 = a_1$, dans le second $b_2 = -a_1$.Considérons l'homomorphisme $h : \operatorname{Im}\varphi \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ défini par $h(\alpha_2) = \overline{o}$ si $b_2 = a_1$ et $\overline{1}$ sinon . La suite suivante est exacte $1 \longrightarrow \mathbf{F}_{q^2}^* \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$ et $|\operatorname{Im}\varphi| = 2(q^2 - 1)$.
Soit $f \in A'_{9,d} = \ker\varphi$, i.e $\alpha = id_2$ et aprés calcul $f.\omega = \omega$, on trouve la dérnière suite.

Dans [11], G.B. Gurevitch donne la liste des orbites de $GL_8(\mathbb{C})$ dans $\wedge^3\mathbb{C}^8$. Comme pour la dimension 7 , il n'y a qu'un nombre fini d'orbites , 23, dont 13 sont de rang maximal 8. Il existe alors une seule orbite ouverte dense O et le groupe d'isotropie d'un élément ω de cette orbite et un groupe de Lie algébrique de dimension :
$\dim GL_8(\mathbb{C}) - \dim \wedge^3\mathbb{C}^8 = 8$.

Dans [25] cette orbite est celle d'un trivecteur lié à l'algèbre de Lie sl_3 $(\mathbb{C})$ des matrices de trace nule ; et quand K et un corps quelconque de caractéristique 0 , toutes les orbites de $GL_8(K)$ dans $\wedge^3 K^8$ dont les éléments , sur une clôture algébrique $\overline{K}$ de K , sont dans l'orbite ouverte dense O .

3-3. Théorème[24] .

Soit $\omega \in \wedge^3 K^8$ un trivecteur tel que $\omega_{\overline{K}}$ soit dans l'orbite ouverte dense sous l'action du groupe $GL_8(\overline{K})$. Il existe une $K-$algèbre de Lie simple A de dimension 8 et un scalaire non nul λ tels que ω soit $K-$équivalent à $\lambda\omega_A$.
Deux trivecteurs $\lambda\omega_A$ et $\mu\omega_B$ sont équivalents si et seulement si A et B sont $K-$isomorphes en tant qu'algèbres de Lie et $\lambda\mu^{-1} \in K^{*^3}$.

On peut dire que les classes de formes trilinéaires alternées fournies par le théorème précédent sont en bijection avec le produit de K^*/K^{*^3} par l'ensemble des $K-$formes de $sl_3(\overline{K})$: ce dernier et formé , outre $sl_3(K)$, des classes de corps gauches de rang 9 et des classes de matrices antihermitiennes de trace nulle d'une algèbre de matrices $M_3(L)$ où L est une extension quadratique de K.

3-4. Corollaire .

Si $K = \mathbf{F}_q$ un corps fini et $car(K) \neq 2$ et 3 , il existe deux orbites pour l'action de $GL_8(K)$ sur $\wedge^3 K^8$. $O(\omega_{8,13})$ et $O(\omega_{8,13,d})$. L'obrite $O(\omega_{8,13,d})$ est celle d'un trivecteur lié à l'agèbre de Lie $su_{1,2}(\mathbf{F}_q)$ de matrices antihermitiennes de trace nulle d'une algèbre de matrices $M_3(\mathbf{F}_{q^2})$.

Pour calculer $\omega_{8,13,d}$, on utilise la même méthode de ([25] , p 41-42) , on prend :
$A = su_{1,2}(\mathbf{F}_q)$ une base B de A est formée de :

$$H_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$H_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$H_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, H_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \text{ où } i^2 = d\ .$$

On note $e_1, e_2, \ldots, e_8$ la base duale . On calcule donc aisément les valeurs de la forme $\omega_A = \omega_{8,13,d}$ sur la base de $\wedge^3 su_{1,2}(\mathbf{F}_q)$ déduite de B.on trouve:

$$\omega_{8,13,d} = e_1e_3e_4 + e_2e_5e_6 + e_2e_7e_8 - e_1e_7e_8 + e_3e_5e_7 + de_3e_6e_8 + de_4e_5e_8 + de_4e_6e_7.$$

Donc il existe deux formes de l'algèbre de Lie $sl_3(\mathbf{F}_{q^2})$,à savoir $sl_3(\mathbf{F}_q)$, $su_{1,2}(\mathbf{F}_q)$ .i.e. deux classes de trivecteurs $\omega_{8,13}$ et $\omega_{8,13,d}$

3-5. Proposition.

Le groupe d'automorphismes $A_{8,13,d} = Aut(\omega_{8,13,d})$ est : $A_{8,13,d} = (su(2,1) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\,.\mu_3\,(K)$

Remarque 1.

Il existe uniquement un groupe de type $su(2,1)$ sur les corps finis , et son cardinal est $q^3(q^3+1)(q^2-1)$.

Remarque 2.

Les trivecteurs restants sont de type $\omega_{8,10}$, le calcul de leur nombre $card\,(H^1(G, A_{10}))$ est un problème de cohomologie (non conu suivant la documentation dont on dispose) que nous ne savons pas résoudre actuellement.

3-6. On suppose que le corps K est fini ($|K| = q, K = \mathbf{F}_q$). Notons ω_i^8 le trivecteur de rang i ($1 \leqslant i \leqslant 7$) dans $\wedge^3 K^8$ et $Aut(\omega_i)$ le groupe d'automorphismes de ω_i dans $\wedge^3 K^i$.

On sait que si G est un groupe fini et X un $G-$ensemble fini , X et réunion d'un nombre fini d'orbites O_i : si $x_i \in O_i$ et si G_i est le stabilisateur de x_i , $cardX = \sum_i cardO_i = \sum_i cardG/cardG_i$. Cela permet de vérifier l'exactitude dans le cas des corps finis des résultats en prenant $G = GL_8(\mathbf{F}_q)$, $X = \wedge^3 K^8$ i.e . on calcule le cardinal de chaque groupe ensuite on déduit le cardinal de chaque orbite et on verifié que la somme des cardinaux des classes est égal au cardinal de l'espace $\wedge^3 E$. Si la verification est faite ceci signifie que la classification est complète sur les corps finis .

BIBLIOGRAPHIE

[**1**] **L.Y. Antonyan** , Classification des quadrivecteurs d'un espace de dimension 8 (en russe) , Trudy Sem. Vekt. Tenz.Analizu XX 1981 , p.144-161.

[**2**] **M.Aschbacher** , Chevalley groups of type G_2 as the group of a trilinear form , Journal of Algebra. 109-p.259 , 1987.

[**3**] **N.Bourbaki** , Algèbre, chapitres 1 à 3 , Hermann , Paris , 1970.

[**4**] **N.Bourbaki** , Algèbre, chapitre 9 , Hermann , Paris , 1959.

[**5**] **N.Bourbaki** , Algèbre, chapitres 4 à 7, Masson , Paris 1981.

[**6**] **N.Bourbaki** , Groupes et Algèbres de Lie , chapitres 7 et 8 , Hermann , Paris , 1975.

[**7**] **H.Busemann and D.E.Glassco** , Irreducible sums of simple multivectors , Pacific Journal of Mathematics , 49 (1973) 13-32.

[**8**] **A.Cohen et A.Helminck** , Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 7 , Communications in Algebra 16(1) , 1988 , p.1-25.

[**9**] **D.Djokovic's** , Classification of trivectors of an eight dimensional real vector space , Linear and multilinear Algebra , 13(3) , 1983 , p.3-39.

[**10**] **Michael A.Gauger** , On the classification of metabelian Lie algebra (1) , Transactions of the American Mathematical Society , volume 179 , May 1973 , p.293-329.

[**11**] **G.B.Gurevitch** , Theory of algebraic invariants . P.Noordhof LTD , Groningen , the Netherland , 1964.

[**12**] **H.Hijikata** , A remark on the groups of type G_2 and F_4 , J.Math.Soc.Jap.vol. 15 , 2 , 1963 , p.159-164.

[**13**] **J.Hora** , Complexity of trilinear alternating forms , Contributions to General Algebra 14 , 2004 , p.83-90.

[**14**] **J.Hora** , Orthogonal decompositions and canonical embeddings of multilinear alternating forms , Linear and Multilinear Algebra , vol ,52 , n°2 , 2004. p.121-132.

[**15**] **K-Iwasawa** , Local class field theory , Oxford University Press , New York , 1986.

[**16**] **B.Kahn** , Sommes de tenseurs décomposables , Prépublication de l'université Paris VII , Mai 1991 , 28p.

[**17**] **M.A.Knus, A.Merkurjev, M.Rost , J.P.Tignol** , The Book of involutions , American Mathematical Society , colloquium publications , volume 44.1998.

[**18**] **J.L.Koszul** , Homologie et Cohomologie des Algèbres de Lie , Bulletin S.M.F, 78 , 1950 , p.65-127.

[19] **T.Y.Lam** , The Algebraic theory of quadratic forms. 1973 , Benjamin , New-york.

[20] **S.Lang** , Algebra , second edition , Addisson-Wesley publishing company Inc , California 1984.

[21] **A.Micali et Ph.Revoy** , Modules quadratiques , Bulletin S.M.F 63, 1979,144p.

[22] **N.Midoune And L.Noui** , Maximal complexity of trivectors , African Diaspora Journal of Mathematics , Volume 4 , Number 1 , 2005.

[23] **L.Noui et Ph.Revoy**, Formes multilinéaires alternées , Ann.Math.Blaise Pascal Vol 1 , n°2 , 1994 , p.43-69.

[24] **L.Noui et Ph.Revoy** , Algèbres de Lie orthogonales et formes trilinéaires alternées , Communications in Algebra , 25(2) , p.617-622(1997).

[25] **L.Noui** , Classification des trivecteurs par l'action du groupe linéaire , Thèse de Doctorat , Université de Montpellier II , France , 1995 .

[26] **L.Noui** , Trivecteurs de rang 8 sur un corps algébriquement clos , C.R.Acad. Sci.Paris , t.324 , série i , Algèbre , 1997, p.611-614.

[27] **I.Ozeki** , On the Microlocal Structure of a Regular Prehomogeneous Vector Space Associated With GL(8), Proc.Japan Acad., 56, ser.A(1980), Vol.56(A) , p18-21.

[28] **V.L.Popov, E.B.Vinberg** , Invariant theory , Algebraic Geometry IV , Encyclopaedia of Mathematical Sciences , Volume 55 , Springer-Verlag.

[**29**] **CL.Procesi** , Rings with polynomial identities, New-York, Marcel Dekker, 1973.

[**30**]**E.M. Rains , J.A. Sloane** , Self-dual codes , Handbook of Coding Theory , pless V.S. Huffman W.C (editors) , Elsevier , Amsterdam , 1998 , p.177-294.

[**31**] **Ph.Revoy** , Formes alternées et puissances divisées , sém.P.Dubreil , 26éme année , 1972-73 , n°8 , 10p.

[**32**] **Ph.Revoy** , Trivecteurs de rang 6 , in coll. Sur les formes quadratiques , Bulletin SMF , 59 , 1979 , p.141-155.

[**33**] **Ph.Revoy** , Algèbre de Lie métabéliennes , Annales Faculté des sciences Toulouse , Vol II , 1980 , p.93-100.

[**34**] **Ph.Revoy** , Formes trilinéaires alternées de Rang 7 , Bul.Sc. Math.112 ,1988 , p.357-368.

[**35**] **J.Scheuneman** , Two-step nilpotent Lie algebras , Journal of algebra 7,1967. p.152-159.

[**36**] **J.Schouten** , Klassifizierung der alternierenden Grossendritten Grades in 7 dimension , Rend.Circ.Math. palermo , 55 ,1931 , p.137-156.

[**37**] **J.P. Serre** , Corps Locaux , Hermann , Paris , 1968.

[**38**] **E.B.Vinberg , A.G.Elashvili** , Classification des trivecteurs d'un espace de dimension 9 (en russe) Trudy sem.Vekt ,Tenz. Anlisu XVIII , 1978 , p.197-233.

[**39**] **R.Westwick** , Real trivectors of rank seven , Linear and Multilinear Algebra , 10 , (3) , 1981 , p.183-204.

[**40**] **R.Westwick** , Irreductible lengths of trivectors of rank seven and eight , Pacific Journal of Mathematics , Vol 80 , n°2 , 1979 , p.575-579.