الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE HADJ LAKHDAR

BATNA (ALGERIE)

THESE

Présentée à la Faculté des Sciences

Département de Mathématique

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématique

Par

Khalil SAADI

THEME

Les opérateurs multi p-sommants et leurs applications

Soutenue le : 16-06- 2010.

Devant le jury d'examen :

Mr. S.E. REBIAI	Prof.	Université de Batna	Président
Mr. L. MEZRAG	Prof.	Université de M'sila	Directeur de Thèse
Mr. A. AIBECHE	Prof.	Université de Sétif	Examinateur
Mr. R. BENACER	Prof.	Université de Batna	Examinateur
Mme. F. LUST-PIQUARD	Prof.	Université de Cergy-Pontoise	Examinateur
Mr. B. MEZERDI	Prof.	Université de Biskra	Examinateur

A mes parents, ma femme Farida, mes filles Chems et Intissar

Remerciements

Je tiens premièrement à remercier mon Directeur de Thèse, Lahcène MEZRAG.

Il m'a tout d'abord fait confiance en décidant de m'encadrer pour ma thèse. Je le remercie également pour sa gentillesse et ses nombreux conseils qui m'ont donné durant la réalisation de ce travail.

Je suis spécialement reconnaissant à Françoise Lust-Piquard avec qui je n'ai cessé

de discuter puis de collaborer depuis mon arrivé à Paris pour un stage de 18 mois. Son hospitalité et celle de Laboratoire de Mathématiques de Cergy Pontoise m'ont permis de faire d'agréables séjours à Cergy.

Je tiens à témoigner ma gratitude à Mr. S.E. REBIAI, Mr. A. AIBECHE, Mr. R. BENACER , Mem. F. LUST-PIQUARD, Mr. B. MEZERDI d'avoir acceptés de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie enfin ma famille pour m'avoir toujours soutenu durant mes études.

Table des matières

0.1 Introduction

Il y a de nombreuses motivations pour étudier les opérateurs linéaires p-sommants. Citons par exemple leur relation avec les espaces de Lebesgue L_p (théorie de la mesure), initiée par Pietsch [Pie67], les propriétés des suites p-sommables, ainsi que la théorie des fonctions intégrables à valeurs vectorielles. En effet, un opérateur entre espaces de Banach $u : X \to Y$ est p-sommant si, et seulement si, pour tout espace de probabilité (Ω, Σ, μ) et toute fonction fortement mesurable $f : \Omega \to X$ qui est faiblement intégrable (i.e., $x^* \circ f \in L_p(\mu)$ pour tout $x^* \in X^*$), $u \circ f$ est p-intégrable au sens de Bochner (i.e., $u \circ f$ est fortement mesurable et $\|u \circ f(.)\|_Y \in L_p(\mu)$). Soient G un groupe topologique compact et F un sous espace invariant par translation de $C(G)$ (espace des fonctions continues sur G), X un espace de Banach et $u : F \to X$ un opérateur p-sommant invariant par translation. Y. Golden [1969] et A. PeŁczyński [1969] ont montré que la mesure de probabilité qui apparait dans la factorisation de Pietsch de u, appelée parfois *mesure de Pietsch,* coïncide avec la mesure de Haar normalisée sur G. Si on prend le tore $G = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, S. Kwapień et A. PeŁczyński [KPel80] ont prouvé que l'espace des opérateurs p-sommants invariants par translation de l'algèbre du disque A dans H^2 est isométriquement isomorphe à l'espace des opérateurs invariants par translation de l'espace de Hardy H^p dans H^2. De nombreuses applications à la factorisation des opérateurs, à la caractérisation de certains espaces de Banach, ainsi que des résultats concernant la théorie des idéaux, motivent l'intérêt de développer cette théorie et de la généraliser dans d'autres directions, notamment le cas non commutatif et le cas multilinéaire.

La définition pour $p = 1$ est due à Grothendieck [Gro56]. Dans son "Célèbre Résumé", il a utilisé le terme " applications pré-intégrables à droite". Ensuite, A. Pietsch [Pie67] a défini la classe pour tout p et a démontré les résultats principaux ; on y trouve le théorème de "Domination/Factorisation", les propriétés d'idéal, d'inclusion, de composition ainsi que des relations avec d'autres classes d'opérateurs, tels que les opérateurs nucléaires et de Hilbert-Schmidt (voir également [Pel67]).

Au début des années 80, et principalement dans [Pie83], il est apparu la généralisation des idéaux d'opérateurs linéaires au cas multilinéaire. Un idéal des opérateurs multilinéaires (ou multi-idéal) $\mathcal{M}$ est une classe d'opérateurs multilinéaires bornés tels que pour tout $X_1, ..., X_m$ et Y des espaces de Banach on a : $\mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y)$ est un sous espace de $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ qui est invariant par rapport à la composition d'un opérateur linéaire à gauche et m opérateurs linéaires à droite et qui contient les opérateurs de rang finis. Dans certains idéaux multilinéaires, la généralisation est élémentaire. C'est le cas des opérateurs m-linéaires faiblement compacts, ou complètement continus ou inconditionnellement convergeant ([AHV83], [BFV01], [GGut94], [GGut95], [GVill03], [Pel63(1)], [Pel63(2)], [Rya79]), des opérateurs intégraux et nucléaires ([Ale85], [BRyn01], [CD'AG02], [Din70] , [Vill03]), des opérateurs de Hilbert-Schmidt ([CKP92], [Dwy71], [Mat03]). La propriété vérifiée dans le cas linéaire reste la même dans le cas multilinéaire. En revanche, dans le cas des opérateurs p-sommants, la généralisation n'est pas unique ; de nombreuse définitions ont été introduites dans ce sens et de nombreux articles ont été consacrés à la notion de sommabilité pour les opérateurs multilinéaires ([Ble88], [Bot97], [CKMT01], [CD'AG02], [FMat95], [MTon99],[Pell03]).

Pietsch [Pie83] a introduit trois méthodes permettant de construire des idéaux multilinéaires à partir d'un idéal linéaire $\mathcal{I}$; ce sont les méthodes de *factorisation*, de *linéarisation* et de *composition*. Dans la première, on considère les opérateurs m-linéaires qui se factorisent par un multilinéaire composé par m opérateurs linéaires appartenant à l'idéal $\mathcal{I}$. L'idéal linéaire des opérateurs p-sommants donne alors, par cette méthode, l'espace des opérateurs multilinéaires p-dominés. Dans la deuxième, on suppose que les opérateurs linéaires T_j définis par

$$T_j : X_j \rightarrow \mathcal{L}\left(X_1, \overset{[j]}{\ldots}, X_m; Y\right)$$

où

$$T_j(x_j)\left(x_1,\overset{[j]}{\ldots},x_m\right)=T(x_1,...,x_m)$$

sont dans l'idéal linéaire $\mathcal{I}$. L'espace obtenu par la méthode de factorisation est inclus dans celui qui est engendré par la méthode de linéarisation. La troisième méthode consiste à composer les opérateurs linéaires de $\mathcal{I}$ avec les opérateurs multilinéaires bornés. On obtient alors l'idéal

$$\mathcal{I}\circ\mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y).$$

Cette technique donne l'espace des opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommants à partir de l'idéal des opérateurs linéaires fortements p-sommants introduits par Cohen [Coh73] .

Cette thèse est consacrée à l'étude des différentes classes d'opérateurs multilinéaires absolument sommants entre des espaces de Banach et le thème de recherche principal est d'introduire de nouveaux concepts pour établir entre autre la connexion entre les différents types de sommabilité d'une part. D'autre part, nous allons nous intéresser aux opérateurs multi sous-linéaires nouvellement introduits afin de trouver des liens avec les opérateurs multilinéaires, ce qui permet de développer et d'enrichir la théorie des idéaux d'opérateurs multilinéaires.

Le point de départ de la thèse était l'étude des opérateurs m-linéaires Cohen fortements p-sommants introduits par Achour et Mezrag en 2007 comme généralisation des opérateurs linéaires fortements p-sommants. On s'est proposé de démontrer que cet espace est un multi-idéal qui s'interprète par la méthode de composition de Pietsch à partir de l'idéal linéaire des opérateurs fortements p-sommants. Autrement dit, étant donné un opérateur multilinéaire

$$T:X_1\times...\times X_m\to Y,$$

T est Cohen fortement p-sommant si et seulement si il existe un espace de Banach G, un opérateur fortement p-sommant $u : G \to Y$ et un opérateur multilinéaire

$$A : X_1 \times ... \times X_m \to G$$

tels que $T = u \circ A$. Le lien avec les opérateurs adjoints est aussi agréable. En effet, l'opérateur T est Cohen fortement p-sommant si et seulement si son opérateur adjoint

$$T^* : Y^* \to \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)$$

défini par $T^*(y^*)(x_1, ..., x_m) = y^* T(x_1, ..., x_m)$ est p^*-sommant. Ces belles propriétés lui font comme une classe intéressante permettant de jouer un rôle intermédiaire entre les différentes classes qui généralisent Π_p (espace des opérateurs p-sommnts). On a pu montrer plusieurs résultats de comparaison notamment le théorème de Bu multilinéaire qui relie les opérateurs multilinéaires p-dominés avec ceux de Cohen fortement q-sommants quand les espaces X_j sont des Hilbert. On a utilisé une autre technique que celle utilisée par Achour et Mezrag ; la clé était de montrer que le produit tensoriel projective des opérateurs Cohen fortement p_j-sommants $u_1 \otimes_\pi ... \otimes_\pi u_m$ où

$$\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$$

est un opérateur Cohen fortement p-sommant. La question de caractérisation des espaces de Banach a été aussi entamée. Une bonne partie est consacrée à donner des versions multilinéaires et polynômiaux du théorème de Kwapień. Il s'agit de caractériser les espaces de Hilbert. Les espaces de Banach X_j $(1 \leq j \leq m)$ sont isomorphes aux espaces de Hilbert si, et seulement si, pour tout espace de Banach Y et tout opérateur p-dominé $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$, T est Cohen fortement q-sommant avec $1 < p, q < \infty$. Dans le cas des polynômes, tout d'abord on introduira le concept de Cohen fortement p-sommant sur l'espace de polynômes, puis on établira leurs relations avec les opérateurs multilinéaires symétriques associes d'une part et avec leurs opérateurs liéarisés d'autre part.

Le théorème qui généralise celle de Kwapień sera donné. Un autre axe de cette thèse était d'introduire une nouvelle définition de sommabilité dans la catégorie des opérateurs multilinéaires, appelés opérateurs multilinéaires Cohen $(p; p_1, ..., p_m)$-nucléaires. Notre motivation est d'étudier de nouveaux types d'opérateurs multilinéaires admettant des factorisations par des opérateurs linéaires p-sommants et Cohen fortements p-sommants. On fera une étude approfondie de cette classe d'opérateurs. On montrera qu'elle conserve la plupart des propriétés du cas linéaire et qu'elle possède de bonnes propriétés d'idéal. Grâce au théorème de Pietsch, on montrera que l'opérateur multilinéaire T est Cohen $(p; p_1, ..., p_m)$-nucléaires si et seulement si il existe un opérateur linéaire Cohen fortement p-sommant v, un multilinéaire borné A et des opérateurs linéaires p_j-sommants u_j avec $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$ tels que T s'écrit comme suit

$$T = v \circ A\left(u_1, ..., u_m\right).$$

Cela généralise le théorème de factorisation de Kwapien pour les opérateurs linéaires p-nucléaires. Avec cette factorisation, on peut montrer que T est compact lorsque Y est un espace de Banach reflexif ou bien lorsque les espaces X_j sont des espaces de Hilbert. Finalement, on s'intéressera au problème d'extension des opérateurs multilinéaires. Dans un cas particulier, on comparera des opérateurs multilinéaires et des opérateurs multi-sous linéaires qu'on introduira dans cette thèse.

Chapitre 1

Idéaux d'opérateurs multilinéaires

En premier lieu, on va présenter les notions et une sélection des résultats classiques concernant les opérateurs multilinéaires. Puis, on discute les classes d'idéaux d'opérateurs multilinéaires et leurs méthodes de constructions introduites par Pietsch. La dernière partie sera consacrée à l'étude de classes importantes d'opérateurs multilinéaires, qui sont les opérateurs absoluments p-sommants, p-dominés, multi p-sommants, fortement p-sommants et Hilbert Schmidt et de leurs propriétés.

1.1 Les applications multilinéaires

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. Une application

$$T : X_1 \times ... \times X_m \to Y,$$

est dite *opérateur* ou *application multilinéaire* (ou *m-linéaire*) si

$$T\left(x^1, ..., \alpha x^j + \beta y^j, ..., x^m\right) = \alpha T\left(x^1, ..., x^j, ..., x^m\right) + \beta T\left(x^1, ..., y^j, ..., x^m\right),$$

pour tout j $(1 \leq j \leq m)$ et $x^j, y^j \in X_j, \alpha, \beta \in \mathbb{K}\left(\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}\right)$. Si $Y = \mathbb{K}$, T est dit *forme multilinéaire.*

L'ensemble S des éléments de Y de la forme $T(x^1, ..., x^m)$, $x^j \in X_j$ $(1 \leq j \leq m)$, n'est pas un espace vectoriel : voir l'exemple [Gre67, Partie 1.1]. On note $L(X_1, ..., X_m; Y)$ l'ensemble des opérateurs multilinéaires de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y. Définissons les opérations linéaires suivantes

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(x^1, ..., x^m) &= T_1(x^1, ..., x^m) + T_2(x^1, ..., x^m) \\ (\alpha T)(x^1, ..., x^m) &= \alpha T(x^1, ..., x^m),\end{aligned}$$

ce qui donne à $L(X_1, ..., X_m; Y)$ une structure d'espace vectoriel. Grâce à la formule

$$\begin{gathered}T(x^1, ..., x^m) - T(y^1, ..., y^m) = T(x^1 - y^1, x^2, ..., x^m) \\ +T(y^1, x^2 - y^2, x^3, ..., x^m) + ... + T(y^1, ..., y^{m-1}, x^m - y^m),\end{gathered}$$

on peut montrer le résultat suivant.

Proposition 1.1 (*Multilinéaire borné*). *Pour $T \in L(X_1, ..., X_m; Y)$, les affirmations suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'opérateur T est continue.*

(2) *L'opérateur T est continue en $(0, ..., 0)$.*

(3) *Il existe une constante $C > 0$ telle que $\|T(x^1, ..., x^m)\| \leq C \|x^1\| ... \|x^m\|$ pour tout $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$.*

Dans ce cas, on dit que T est borné et on pose

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x^j\| \leq 1,\ 1 \leq j \leq m} \left\|T\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| \\ &= \inf\{C,\ C \text{ vérifiant l'inégalité ci-dessus}\}.\end{aligned}$$

Il est facile de voir qu'elle définit une norme sur $L(X_1, ..., X_m; Y)$. L'espace des applications m-linéaires continues (ou bornées) de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y est un espace de Banach. On le note $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. Si $Y = \mathbb{K}$, on écrit $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m)$. Si $X_1 = ... = X_m = X$, on note simplement $\mathcal{L}(^m X; Y)$. On désignera aussi par $\mathcal{B}(X; Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y. Rappelons qu'un opérateur multilinéaire T induit des opérateurs linéaires

$$T_j : X_j \to \mathcal{L}\left(X_1, \overset{[j]}{\ldots}, X_m; Y\right),$$

où

$$T_j\left(x^j\right)\left(x^1, \overset{[j]}{\ldots}, x^m\right) = T\left(x^1, ..., x^m\right),$$

ce qui permet d'identifier l'espace $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ avec $\mathcal{L}\left(X_j; \mathcal{L}\left(X_1, \overset{[j]}{\ldots}, X_m; Y\right)\right)$ pour tout $j = 1, ..., m$. Un cas particulier est souvent utilisé dans la théorie linéaire, lorsqu'on prend $m = 2$ et $Y = \mathbb{K}$:

$$\mathcal{L}(X_1, X_2) = \mathcal{B}(X_1; X_2^*). \tag{1.1}$$

Définition 1.2 (*Multilinéaire symétrique*). Soient X, Y deux espaces de Banach. Soit $T : \underbrace{X \times ... \times X}_{m} \to Y$ un opérateur multilinéaire borné ; l'opérateur T est dit symétrique s'il est invariant par rapport à toute permutation des variables, i.e.,

$$T \circ \sigma\left(x^1, ..., x^m\right) := T\left(x^{\sigma(1)}, ..., x^{\sigma(m)}\right) = T\left(x^1, ..., x^m\right),$$

pour toute permutation σ. On note $\mathcal{L}_S(^mX; Y)$ l'espace des opérateurs multilinéaires continus symétriques.

Si on fait toutes les permutations possibles on peut associer à $T \in \mathcal{L}(^mX; Y)$ un opérateur symétrique $T_S \in \mathcal{L}_S(^mX; Y)$. Soit $T : \underbrace{X \times ... \times X}_{m} \to Y$ un opérateur m-linéaire, on pose

$$T_S = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma} T \circ \sigma.$$

L'opérateur T_S s'appelle *opérateur symétrisé* de T. On a

(1) Si $T \in \mathcal{L}(^mX; Y)$, alors $T_S \in \mathcal{L}_S(^mX; Y)$.

(2) $T_S = T$ si, et seulement si, T est symétrique.

(3) L'opérateur linéaire $S : \mathcal{L}(^mX; Y) \to \mathcal{L}_S(^mX; Y) : T \to S(T) = T_S$ est une projection.

1.2 Représentation sur un produit tensoriel

Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach. On note $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ le produit tensoriel algébrique de $X_1, ..., X_m$. On définit la norme projective par

$$\|v\|_\pi = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\| \right\}, \tag{1.2}$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations possibles de v de la forme

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m.$$

On note $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ le produit tensoriel projectif des espaces $X_1, ..., X_m$ i.e. ; le complété de $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ pour cette norme. Si $X_1 = ... = X_m = X$ on écrit simplement $\widehat{\otimes}_\pi^m X$. A chaque opérateur multilinéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ on peut lui associer un opérateur linéaire, appelé *linéarisation de* T, $\widetilde{T} : X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \to Y$ défini par

$$\widetilde{T}(\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m) = \sum_{i=1}^{n} T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right). \tag{1.3}$$

Il est bien défini, car il ne dépend pas de repésentation choisie (voir [Rya01]). De plus, $\widetilde{T}$ est unique et $\left\|\widetilde{T}\right\| = \|T\|$. En effet, soit $v = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m$, on a

$$\left\|\widetilde{T}(v)\right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right) \right\| \leq \|T\| \sum_{i=1}^{n} \left\|x_i^1\right\| ... \left\|x_i^m\right\|,$$

comme v est arbitraire, $\left\|\widetilde{T}\right\| \leq \|T\| \|v\|_\pi$. Donc, $\widetilde{T}$ est borné et $\left\|\widetilde{T}\right\| \leq \|T\|$. D'autre part, $\|T\| \leq \left\|\widetilde{T}\right\|$ parce que

$$\left\|T\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| = \left\|\widetilde{T}\left(x^1 \otimes ... \otimes x^m\right)\right\| \leq \left\|\widetilde{T}\right\| \left\|x^1\right\| ... \left\|x^m\right\|.$$

Soit maintenant $\widetilde{B}$ un autre opérateur linéarisé de T ; pour tout $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$ on a

$$\widetilde{B}\left(x^1 \otimes ... \otimes x^m\right) = T\left(x^1, ..., x^m\right) = \widetilde{T}\left(x^1 \otimes ... \otimes x^m\right).$$

Par linéarité, $\widetilde{B}, \widetilde{T}$ sont identiques sur $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ et enfin, par densité, ils sont identiques sur $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$.

On a

$$\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right) = \mathcal{B}\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y\right), \tag{1.4}$$

car l'application

$$\begin{array}{ccccc} \Phi & : & \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right) & \rightarrow & \mathcal{B}\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y\right) \\ & & T & \rightarrow & \Phi\left(T\right) = \widetilde{T} \end{array} \tag{1.5}$$

est une isomorphisme isométrique.

On étudiera plus précisément les relations entre les propriétés de T et de $\widetilde{T}$.

Cas particulier. Le dual de $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ s'identifie à l'espace des formes multilinéaires bornées

$$\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m\right)^* = \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m\right). \tag{1.6}$$

Cette dualité donne une nouvelle formule pour la norme projective

$$\|v\|_\pi = \sup\left\{\left|\langle v, T\rangle\right| : T \in B_{\mathcal{L}(X_1, ..., X_m)}\right\}.$$

Remarque 1.3. Dans le cas linéaire, $\mathcal{B}\left(X; Y^*\right)$ s'identifie à $\left(X \widehat{\otimes}_\pi Y\right)^*$; ici, d'après (1,4), on a l'identification isométrique

$$\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \widehat{\otimes}_\pi Y\right)^* = \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y^*\right). \tag{1.7}$$

Opérateurs diagonaux. Les plongements naturels de X dans $\underbrace{X \times ... \times X}_{m}$ et dans $\widehat{\otimes}_{\pi}^{m} X$, notés Δ_m et δ_m respectivement, sont définis par

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_m & : & X & \to & X \times ... \times X \\ & & x & \to & (x, ..., x) \end{array}, \quad \begin{array}{ccccc} \delta_m & : & X & \to & \widehat{\otimes}_{\pi}^{m} X \\ & & x & \to & x \otimes ... \otimes x \end{array}$$

Il est claire que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \Delta_m \downarrow & \overset{\delta_m}{\searrow} & \\ \underbrace{X \times ... \times X}_{m} & \underset{i_m}{\rightarrow} & \widehat{\otimes}_{\pi}^{m} X \end{array}$$

i.e., $i_m \circ \Delta_m = \delta_m$, où i_m est l'opérateur *multilinéaire canonique* de $X_1 \times ... \times X_m$ dans $X_1 \widehat{\otimes}_{\pi} ... \widehat{\otimes}_{\pi} X_m$, défini par

$$i_m \left(x^1, ..., x^m \right) = x^1 \otimes ... \otimes x^m.$$

On a aussi le diagramme suivant qui est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times ... \times X_m & & \\ i_m \downarrow & \overset{T}{\searrow} & \\ X_1 \widehat{\otimes}_{\pi} ... \widehat{\otimes}_{\pi} X_m & \underset{\widetilde{T}}{\rightarrow} & Y \end{array}$$

i.e.,

$$T = \widetilde{T} \circ i_m. \tag{1.8}$$

1.3 Idéaux d'opérateurs multilinéaires

Depuis l'article célèbre de A. Pietsch intitulé "*Ideals of multilinear functions*" [Pie83], le succés de la théorie des idéaux linéaires a une influence considérable sur le développement des idéaux d'opérateurs multilinéaires et polynômes homogènes entres espaces de Banach. Pour plus d'information sur le sujet, voir par exemple [Bra87], [BPR07] et [Bot05].

Définition 1.4 (*Opérateurs de rang fini*). Un opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est de *rang fini* s'il est somme finie d'opérateurs de la forme

$$T_{y \otimes_{j=1}^m x_j^*} = x_1^* \otimes ... \otimes x_m^* \otimes y : \left(x^1, ..., x^m\right) \to x_1^* \left(x^1\right) ... x_m^* \left(x^m\right) y,$$

où $x_j^* \in X_j^*$ $(1 \leq j \leq m)$ et $y \in Y$. L'espace des opérateurs m-linéaires de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_m; Y)$.

Définition 1.5 (*Idéal des opérateurs m-linéaires*). Un idéal des opérateurs multilinéaires (ou multi-idéal) $\mathcal{M}$ est une classe d'opérateurs multilinéaires bornés tels que pour tout $X_1, ..., X_m$ et Y des espaces de Banach on a :
(1) L'ensemble $\mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y)$ est un sous espace de $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ qui contient les opérateurs m-linéaires de rang finis.
(2) *Propriété d'idéal* : si $T \in \mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y)$, $u_j \in \mathcal{B}(E_j; X_j)$ et $v \in \mathcal{B}(Y; F)$, alors $v \circ T \circ (u_1, ..., u_m)$ est dans $\mathcal{M}(E_1, ..., E_m; F)$.
De plus, si $\|.\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^+$ satisfait
$(1')$ $(\mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y), \|.\|_{\mathcal{M}})$ est un espace normé (Banach)
$(2')$ $\|A^n : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K};\ A^n(x_1, ..., x_m) = x_1 ... x_m\|_{\mathcal{M}} = 1.$
$(3')$ Si $T \in \mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y), u_j \in \mathcal{B}(E_j; X_j), v \in \mathcal{B}(Y; F)$,

$$\|v \circ T \circ (u_1, ..., u_j)\|_{\mathcal{M}} \leq \|v\| \, \|T\|_{\mathcal{M}} \, \|u_1\| ... \|u_m\|.$$

Alors $(\mathcal{M}; \|.\|_{\mathcal{M}})$ s'appelle *idéal normé (de Banach) des opérateurs multilinéaires.*
L'idéal des opérateurs multilinéaires $\mathcal{M}$ est dit *symétrique* si $T_S \in \mathcal{M}$ dès que $T \in \mathcal{M}$.

Exemple 1.6. (a) Les opérateurs multilinéaires faiblement compacts $\mathcal{W}(X_1, ..., X_m; Y)$, i.e.,

les m-linéaires qui envoient tout ensemble borné sur un ensemble relativement faiblement compact.
(b) Les opérateurs multilinéaires compacts $\mathcal{K}(X_1, ..., X_m; Y)$, i.e., les m-linéaires qui envoient tout ensemble borné sur un ensemble relativement compact.
(c) Les opérateurs multilinéaires de rang finis $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_m; Y)$. Ces idéaux constituent des exemples importants. Les deux premiers sont des idéaux de Banach.

1.4 Méthodes de construction

Il y a différentes manières de construire un idéal des opérateurs multilinéaires à partir d'un idéal linéaire $\mathcal{I}$, i.e., qui vérifie la Définition (1.5) pour $m = 1$. On rappelle que l'idéal linéaire $\mathcal{I}$ est *fermé* s'il est fermé dans l'espace des opérateurs linéaires bornés, et *injectif* s'il vérifie la propriété d'injectivité, i.e.,

$$T \in \mathcal{I}(E; F) \Leftrightarrow i \circ T \in \mathcal{I}(E; G),$$

où $i \in \mathcal{B}(F; G)$ est une isométrie ($\|i(f)\| = \|f\|, \quad \forall f \in F$). La propriété vérifiée par les opérateurs de $\mathcal{I}$ peut parfois être généralisée au cas multilinéaire et la classe obtenue s'avère être un idéal (c'est le cas pour l'idéal des opérateurs (faiblement) compacts). La généralisation n'est pas nécessairement unique (par exemple pour l'idéal des opérateurs p-sommants).

Les méthodes suivantes sont décrites dans [Pie83].

1.4.1 La méthode de factorisation

Soit $\mathcal{I}$ un idéal des opérateurs linéaires. Un multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est de type $\mathcal{L}(\mathcal{I})$, et on écrit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$, s'il existe des espaces de Banach $G_1, ..., G_m$, des opérateurs linéaires $u_j \in \mathcal{I}(X_j; G_j)$, $j = 1, ..., m$, et un opérateur multilinéaire borné $A \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \times ... \times & X_m & \xrightarrow{T} & Y \\ \downarrow u_1 & & \downarrow u_m & A \nearrow & \\ G_1 & \times ... \times & G_m & & \end{array}$$

en d'autres termes $T = A \circ (u_1, ..., u_m)$. Si $\mathcal{I}$ est normé on définit pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{I})(X_1, ..., X_m; Y)$

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})} = \inf \|A\| \|u_1\|_{\mathcal{I}} ... \|u_m\|_{\mathcal{I}},$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles de $T = A \circ (u_1, ..., u_m)$ avec $u_j \in \mathcal{I}$.

Proposition 1.7. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal des opérateurs linéaires. Alors,*
(1) *L'espace $\mathcal{L}(\mathcal{I})$ est un idéal des opérateurs multilinéaires.*
(2) *Si $\mathcal{I}$ est un idéal de Banach, alors $\left(\mathcal{L}(\mathcal{I}); \|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{I})}\right)$ est un idéal quasi Banach des opérateurs multilinéaires.*

Notation. Soient $\mathcal{I}_j$ $1 \leq j \leq m$ des idéaux d'opérateurs linéaires. On note $\mathcal{L}(\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m)$ l'idéal des opérateurs multilinéaires construit par la méthode de factorisation, i.e., dans la factorisation $T = A \circ (u_1, ..., u_m)$, on a

$$u_j \in \mathcal{I}_j (X_j; G_j), \quad j = 1, ..., m.$$

1.4.2 La méthode de linéarisation

Soit $\mathcal{I}$ un idéal linéaire. Un opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est dit de type $\mathcal{L}[\mathcal{I}]$ et on écrit $T \in \mathcal{L}[\mathcal{I}](X_1, ..., X_m; Y)$, si $T_j \in \mathcal{I}\left(X_j; \mathcal{L}(X_1, \overset{[j]}{\ldots}, X_m; Y)\right)$ pour tout $j = 1, ..., m$. Si $\mathcal{I}$ est normé, on définit pour tout $T \in \mathcal{L}[\mathcal{I}](X_1, ..., X_m; Y)$

$$\|T\|_{[\mathcal{I}]} = \max \|T_j\|_{\mathcal{I}}.$$

Notation. Soient $\mathcal{I}_j$ $1 \leq j \leq m$ des idéaux d'opérateurs linéaires. On note $\mathcal{L}[\mathcal{I}_1, ..., \mathcal{I}_m]$ l'idéal multilinéaire construit par la méthode de linéarisation, i.e., on a

$$T_j \in \mathcal{I}_j \left(X_j; \mathcal{L}(X_1, \overset{[j]}{\ldots}, X_m; Y) \right), \quad j = 1, ..., m.$$

Proposition 1.8. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal des opérateurs linéaires. Alors,*

(1) *L'espace $\mathcal{L}[\mathcal{I}]$ est un idéal des opérateurs multilinéaires.*

(2) *Si $\mathcal{I}$ est un idéal de Banach, alors $\left(\mathcal{L}[\mathcal{I}]; \|.\|_{\mathcal{L}[\mathcal{I}]} \right)$ est un idéal de Banach.*

(3) *On a $\mathcal{L}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{L}[\mathcal{I}]$.*

(4) *Si $\mathcal{I}$ est fermé et injectif,*

$$\mathcal{L}(\mathcal{I}) = \mathcal{L}[\mathcal{I}].$$

Preuve. (1) et (2) : La preuve est dans [Bra87 ; Section 1.3].

(3) Soit T un opérateur multilinéaire de type $\mathcal{L}(\mathcal{I})$. Il existe donc des espaces de Banach $G_1, ..., G_m$, des opérateurs linéaires $u_j \in \mathcal{I}(X_j; G_j)$, $j = 1, ..., m$, et un opérateur multilinéaire borné $A \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$ tels que $T = A \circ (u_1, ..., u_m)$. On définit l'opérateur

$$\begin{aligned} \varphi \quad &: \quad G_j \to \mathcal{L}(X_1, \overset{[j]}{\ldots}, X_m; Y) \\ \varphi\left(g^j\right)\left(x^1, \overset{[j]}{\ldots}, x^m\right) \quad &= \quad A\left(u_1\left(x^1\right), ..., g^j, ..., u_m\left(x^m\right)\right). \end{aligned}$$

Pour tout $x^j \in X_j$ on a

$$\begin{aligned} \varphi \circ u_j\left(x_j\right)\left(x^1, \overset{[j]}{\ldots}, x^m\right) \quad &= \quad A\left(u_1\left(x^1\right), ..., u_j\left(x^j\right), ..., u_m\left(x^m\right)\right) \\ &= \quad T\left(x^1, ..., x^m\right) \\ &= \quad T_j\left(x^j\right)\left(x^1, \overset{[j]}{\ldots}, x^m\right). \end{aligned}$$

Comme $u_j \in \mathcal{I}(X_j; G_j)$, par la propriété d'idéal, on a

$$T_j \in \mathcal{I}\left(X_j; \mathcal{L}(X_1, \overset{[j]}{\ldots}, X_m; Y)\right).$$

(4) Voir l'article [GG99, Théorème 4]. ■

1.4.3 La méthode de composition

Soit $\mathcal{I}$ un idéal linéaire. Un opérateur multilinéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est de type $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$, et on écrit $T \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, s'il existe un espace de Banach G, un opérateur linéaire $u \in \mathcal{I}(G; Y)$ et un opérateur multilinéaire borné $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; G)$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \times ... \times & X_m & \xrightarrow{T} & Y \\ & & & \searrow A & u \uparrow \\ & & & & G \end{array}$$

en d'autres termes $T = u \circ A$.

Si $\mathcal{I}$ est normé,

$$\|T\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = \inf \|u\|_{\mathcal{I}} \|A\|,$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles de $T = u \circ A$ avec $u \in \mathcal{I}$.

Proposition 1.9. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal d'opérateurs linéaires. Alors,*
(1) *L'espace $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ est un idéal des opérateurs multilinéaires.*
(2) *Si $\mathcal{I}$ est un idéal de Banach, alors il en est de même pour $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}; \|.\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$.*

Proposition 1.10. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal des opérateurs linéaires. Pour $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *L'opérateur $T \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$.*
(2) *L'opérateur $\widetilde{T} \in \mathcal{I}\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y\right)$.*

Preuve. Soit $T = u \circ A$ avec $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; G)$ et $u \in \mathcal{I}(G; Y)$. Il est clair que

$$u \circ \tilde{A} = \widetilde{T}$$

où $\tilde{A}, \tilde{T}$ sont les opérateurs linéarisés de A et T respectivement. Donc, (1) implique (2) par la propriété d'idéal de $\mathcal{I}$. Pour la seconde implication, d'après (1.8)

$$T = \widetilde{T} \circ i_m$$

et par (2) on a $T \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. De plus, pour tout $T \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ on a

$$\|T\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{L}} = \left\|\widetilde{T}\right\|_{\mathcal{I}}.$$

Ce qui termine la démonstration. ∎

Remarque 1.11. Cette technique permet de construire les espaces $\mathcal{K}(X_1, ..., X_m; Y)$ et $\mathcal{W}(X_1, ..., X_m; Y)$. En effet, on peut facilement vérifier que : T est compact (faiblement compact) si, et seulement si, $\widetilde{T}$ est compact (faiblement compact). Dans ce cas, on écrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(X_1, ..., X_m; Y) &= \mathcal{I}_{\mathcal{K}} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) \\
\mathcal{W}(X_1, ..., X_m; Y) &= \mathcal{I}_{\mathcal{W}} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)
\end{aligned}$$

où $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{W}}$ sont les idéaux d'opérateurs linéaires compacts et faiblement compacts respectivement, i.e., un multilinéaire T entre espaces de Banach est compact (faiblement compact) si, et seulement si, il peut s'écrire $T = u \circ B$ où B est un opérateur multilinéaire borné et u est un opérateur linéaire compact (faiblement compact).

Remarque 1.12. Si $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ sont deux idéaux de Banach et

$$\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{I}_2 \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$$

alors on a $\mathcal{I}_1(X_j; Y) \subseteq \mathcal{I}_2(X_j; Y)$ pour tout $1 \leq j \leq m$. En particulier, si

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$$

on a $\mathcal{I}(X_j;Y) = \mathcal{L}(X_j;Y)$ pour tout j. La réciproque est en général fausse, pour plus de détails voir [GDP07, Remarque 4.4].

Remarque 1.13. Soit $\mathcal{I}$ un idéal des opérateurs linéaires et Y un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
(a) L'identité $id_Y \in \mathcal{I}(Y;Y)$.
(b) L'espace $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ pour tous $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach.

1.5 Généralisation des opérateurs linéaires sommants

Commençons cette section par quelques préliminaires. Soit X un espace de Banach. Soit $1 \leq p \leq \infty$. On note $l_p^n(X)$ l'espace de Banach des suites $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ dans X muni de la norme

$$\left\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\right\|_{l_p^n(X)} = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

et $l_p^{n\ \omega}(X)$ l'espace de Banach des suites $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ dans X muni de la norme

$$\|(x_n)\|_{l_p^{n\ \omega}(X)} = \sup_{x^*\in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x^*\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

où X^* est le dual (topologique) de X. La boule unité fermée de X est notée B_X (si p est infini on prend le sup). Rappelons la définition d'un opérateur linéaire p-sommant introduite par Grothendieck pour $p = 1$, et généralisée par Pietcsh [Pie67]. Soient X, Y deux espaces de Banach et $u \in \mathcal{B}(X;Y)$. On dira que u est p-sommant pour $p \in]0, \infty[$, s'il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $x_1, ..., x_n \in X$

$$(\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^*\in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.9}$$

On note $\Pi_p(X, Y)$ l'idéal de Banach des opérateurs linéaires p-sommants de X dans Y muni de la norme $\pi_p(u) = \inf\{C$ vérifiant (1.9) $\}$.

Remarque 1.14. L'opérateur u est p-sommant s'il transforme toute suite faiblement p-sommable en une suite fortement p-sommable ; si $p = \infty$, c'est simplement la continuité.

Exemple 1.15. Soient K un espace compact, μ une mesure positive sur K et $1 \leq p < \infty$.
(1) L'opérateur de multiplication défini par

$$\begin{array}{cccc} u_\varphi & : & C(K) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ & & f & \longmapsto & f.\varphi \end{array}$$

avec $\varphi \in L_p(\mu)$, est p-sommant et $\pi_p(u) = \|\varphi\|_p$.
(2) L'injection canonique

$$\begin{array}{cccc} J_p & : & C(K) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ & & f & \longmapsto & f \end{array}$$

est p-sommante et $\pi_p(J_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$.

Théorème de factorisation (domination) de Pietsch. *Soient $p \in \left]0, \infty\right[$ et $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire p-sommant et. Alors, il existe une probabilité de radon λ sur $(B_{X^\star},\ \sigma(X^\star, X))$ telle que*

$$\forall x \in X : \|u(x)\| \leq \pi_p(u) \left(\int_{B_{X^\star}} |x^*(x)|^p \, d\lambda(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.10}$$

Inversement, s'il existe une probabilité de radon λ sur $(B_{X^\star},\ \sigma(X^\star, X))$ et $C > 0$ telle que cette formule est vérifiée, alors u est p-sommant et $\pi_p(u) \leq C$.

La factorisation proprement dite de Pietsch est

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{u}{\to} & Y \\ i_X \downarrow & & \uparrow \tilde{u} \\ i_X(X) & \overset{k_p}{\to} & S \\ \cap & & \cap \\ C(K) & \overset{J_p}{\to} & L_p(\mu) \end{array}$$

où $\tilde{u}$ un opérateur linéaire borné, k_p la restriction de J_p, $K = B_{X^*}$ et S la fermeture de $k_p \circ i_X(X)$ dans $L_p(\mu)$. Dans ce cas $\pi_p(u) = \|\tilde{u}\|$.

Cas particulier. Si $p = 2$, l'opérateur $\tilde{u}$ peut s'étendre à $L_2(\mu)$ tout entier, c'est à dire u se factorise par un espace de Hilbert. En effet, soit P la projection de $L_2(\mu)$ sur S, donc

$$\bar{u} := \tilde{u} \circ P \text{ et } \bar{u} J_2 i_X = u.$$

Théorème 1.16 (*Théorème d'inclusion*). *Si $1 \leq p < q < \infty$, alors*

$$\Pi_p(X;Y) \subseteq \Pi_q(X;Y).$$

De plus, on a $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$ pour tout $u \in \Pi_p(X;Y)$.

Théorème 1.17 (*Le théorème de Grothendieck*). *Si $X = L_1(\mu)$ et $Y = L_2(\lambda)$, tout opérateur borné de X dans Y est 1-sommant. i.e.,*

$$\mathcal{B}(X;Y) = \Pi_1(X;Y).$$

avec $\pi_1(u) \leq k_G \|u\|$, k_G est la constante universelle de Grothendieck.

Théorème 1.18 (*Le petit théorème de Grothendieck*). *Soit K un espace compact, soit μ une mesure quelconque, si $1 \leq p \leq 2$, tout opérateur borné de $C(K)$ dans $L_p(\mu)$ est 2-sommant. i.e.,*

$$\mathcal{B}(C(K); L_p(\mu)) = \Pi_2(C(K); L_p(\mu))$$

avec $\pi_2(u) \leq k_G \|u\|$.

Généralisation. Pour généraliser les opérateurs linéaires p-sommants au cas multilinéaire, Pietsch [Pie83] a introduit deux définitions : opérateurs multilinéaires absolument p-sommants et p-dominés. Dans le premier cas, la généralisation était très naturelle et la norme a été définie pour que l'espace soit un espace de Banach. Quelques autres propriétés des opérateurs linéaires p-sommants restent vraies dans le cas multilinéaire. Cependant, il n'y a pas l'analogue du théorème de domination de Pietsch. D'autre part, les opérateurs multilinéaires p-dominés ont été introduits pour qu'ils vérifient le théorème de domination de Pietsch, mais l'espace associé n'est pas un Banach si $p < m$. C'est un quasi-Banach (sauf si $p \geq m$ où l'espace associé est un Banach). Les deux espaces sont des idéaux d'opérateurs m-linéaires.

1.5.1 Opérateurs multilinéaires absolument p-sommants

Définition 1.19. Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est *absolument p-sommant* $(1 \leq p < \infty)$ s'il existe $C > 0$ telle que pour tous $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$ $(j = 1, ..., m)$,

$$(\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right) \right\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{i=1}^{n} \right\|_{l_p^n \ \omega(X_j)}. \tag{1.11}$$

On note $\mathcal{L}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace de Banach des opérateurs m-linéaires absolument p-sommants muni de la norme

$$\|T\|_p = \inf \{C : C \text{ vérifie } (1.11)\}.$$

L'espace $\mathcal{L}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ est un idéal de Banach (on vérifie facilement les conditions de la Définition (1.5)). En revanche, les opérateurs absolument p-sommants ne sont pas faiblement compacts et le théorème de factorisation n'est plus vérifié.

La définition suivante est une version généralisée de la précédente.

Opératurs multilinéaires absolument $(p; p_1, ..., p_m)$-sommants. Soient $p_1, ..., p_m \in]0, \infty]$ avec $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$. Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est absolument $(p; p_1, ..., p_m)$-sommant s'il existe une constante positive C telle que pour tous $x_1^j, ..., x_n^j \in$

X_j, $(j = 1, ..., m)$,

$$(\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right) \right\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{i=1}^{n} \right\|_{l_{p_j}^{n,w}(X_j)}. \tag{1.12}$$

La classe des opérateurs m-linéaires absolument $(p; p_1, ..., p_m)$-sommants de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y, notée $\mathcal{L}_{(p;p_1,...,p_m)}^m (X_1, ..., X_m; Y)$, est un Banach idéal pour la norme

$$\|T\|_{(p;p_1,...,p_m)} = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité (1.12)}\}.$$

1.5.2 Opérateurs multilinéaires p-dominés

Définition 1.20. Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ un opérateur m-linéaire borné. On dira que T est p-dominé $(1 \leq p < \infty)$ s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\left(x_i^j\right)_{1 \leq i \leq n} \subset X_j$ $(1 \leq j \leq m)$, on a

$$(\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right) \right\|^{\frac{p}{m}})^{\frac{m}{p}} \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{l_p^{n,\omega}(X_j)}. \tag{1.13}$$

On note $\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace des opérateurs m-linéaires p-dominés de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y. C'est un quasi-Banach pour la quasi-norme $\delta_p(T)$, définie par

$$\delta_p(T) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité (1.13)}\}.$$

Si $p > m$, $\delta_p(T)$ est une norme sur $\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y)$. Soulignons que

$$\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}_{\left(\frac{p}{m};p,...,p\right)}^m (X_1, ..., X_m; Y).$$

Théorème 1.21. *Soient* $1 \leq p < \infty, T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. *Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'opérateur* T *est* p*-dominé.*

(2) *Il existe une constante positive* C *et des probabilités de Radon* μ_j *sur* $K_j = B_{X_j^*}$

$(1 \leq j \leq m)$ *telles que*

$$\left\| T\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| \leq C \prod_{j=1}^{m} (\int\limits_{B_{X_j^*}} \left|x^j(x^*)\right|^p d\mu_j(x^*))^{\frac{1}{p}}, \tag{1.14}$$

pour tout $x^j \in X_j$. *De plus, on a*

$$\delta_p(T) = \inf \{C \text{ vérifiant l'inégalité } (1.14)\}$$

(3) *Pour tout* $1 \leq j \leq m$, *il existe des probabilités de Radon* μ_j *sur* $B^*_{X_j}$ *et* $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(S_1, ..., S_m; Y)$ *tels que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{array}{lllllll}
X_1 & \times ... \times & X_m & & \xrightarrow{T} & Y & \\
\downarrow i_{X_1} & & \downarrow i_{X_m} & & & \widetilde{T} \uparrow & \\
i_{X_1}(X_1) & \times ... \times & i_{X_m}(X_m) & \underset{(k_1,...,k_m)}{\longrightarrow} & S_1 & \times ... \times & S_m \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C(K_1) & \times ... \times & C(K_m) & \underset{(k_1,...,k_m)}{\longrightarrow} & L_p(\mu_1) & \times ... \times & L_p(\mu_m)
\end{array}$$

où $k_j : C(K_j) \longrightarrow L_p\left(\mu_j\right)$ *est l'injection canonique,* $i_{X_j} : X_j \longrightarrow C(K_j)$ *est l'isométrie canonique,* S_j *est la fermeture de l'espace* $k_j\left(i_{X_j}(X_j)\right)$ *et* $\left\|\widetilde{T}\right\| = \delta_p(T)$.

Remarque 1.22. La classe des opérateurs m-linéaires p-dominés est un multi-idéal. Sa construction peut s'interpréter par la méthode de factorisation, i.e.,

$$\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}\left(\Pi_p\right)(X_1, ..., X_m; Y),$$

où Π_p est l'espace des opérateurs linéaires p-sommants. Pour la preuve, il suffit de montrer le lemme suivant.

Lemme 1.23. *Soit* $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. *Alors,*

(a) Si $u_j \in \Pi_p(X_j; G_j)\,(1 \leq j \leq m)$, l'opérateur multilinéaire $T \circ (u_1, ..., u_m)$ est p-dominé.

(b) Si T est p-dominé, alors il existe des opérateurs linéaires p-sommants u_j $(1 \leq j \leq m)$ et $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ tels que

$$T = A \circ (u_1, ..., u_m)\,.$$

Preuve. (a) Facile à voir.

(b) Immédiat grâce au diagramme (3).

Remarque 1.24. L'inclusion $\mathcal{L}(\Pi_1) \subset \mathcal{L}\,[\Pi_1]$ est stricte. En effet, soit $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et $F \in L_1(\mathbb{T})$ une fonction non bornée. Soit la forme bilinéaire $T : C(\mathbb{T}) \times C(\mathbb{T}) \to \mathbb{K}$ définie par

$$T(f,g) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x-y)\, f(x)\, g(y)\, dxdy.$$

Les opérateurs linéaires correspondants à T sont :

$$\begin{aligned} \forall f &\in C(\mathbb{T}) : T_1(f) = \int_0^{2\pi} F(x-y)\, f(x)\, dx = F * f \in L_1(\mathbb{T}) \\ \forall g &\in C(\mathbb{T}) : T_2(g) = \int_0^{2\pi} F(x-y)\, g(y)\, dy = F * g \in L_1(\mathbb{T}), \end{aligned}$$

ils sont 1-sommants car se prolongent en opérateurs bornés : $L_1(\mathbb{T}) \to L_1(\mathbb{T})$. Donc $T \in \mathcal{L}\,[\Pi_1]\,(C(\mathbb{T}), C(\mathbb{T}); \mathbb{K})$. Supposons que $T \in \mathcal{L}(\Pi_1)$ i.e., que T admet une factorisation

$$T = A\,(u_1, u_2)$$

où $u_j \in \Pi_1(C(\mathbb{T}), G_j)$. Comme T_j commute aux translations, on peut supposer qu'il en est de même pour u_j. Alors $u_j = v_j \circ i$ où i est l'identité : $C(\mathbb{T}) \to L_1(\mathbb{T})$ et v_j est borné :

$L_1(\mathbb{T}) \to G_j$. Alors $T = A(v_1, v_2)(i,i) = B(i,i)$ et cela implique que $\tilde{T} = \widetilde{B} \circ (i \otimes i)$ où

$$\widetilde{B} : L_1(\mathbb{T}) \hat{\otimes}_\pi L_1(\mathbb{T}) = L_1\left(\mathbb{T}^2\right) \to \mathbb{K}.$$

Donc, la fonction $(x,y) \to F(x-y)$ est dans $L^\infty(\mathbb{T}^2)$, ce qui contredit l'hypothèse.

1.5.3 Opérateurs multilinéaires multi p-sommants

Une autre définition a été introduite indépendament par Mario C. Matos [Mat02] (sous la terminologie : operateur multilinéaire fully sommant) et par Bombal, Perèz-Garcia and Villanueva [BGV04], suite à la question de Pietsch sur les cas des opérateurs absolument $(p; p_1, ..., p_m)$-sommants qui coïncident avec les opérateurs multilinéaires de Hilbert Schmidt (qui seront introduits plus loin).

Définition 1.25. Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est dit multi p-sommant $(1 \leq p < \infty)$, s'il existe $C > 0$ telle que pour tous $x_{i_1}^j, ..., x_{i_n}^j \in X_j$ $(j = 1, ..., m)$,

$$\Big(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} \left\| T\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right) \right\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{n_j} \right\|_{l_p^n \ \omega(X_j)}. \tag{1.15}$$

On note $\Pi_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$, l'espace de Banach des opérateurs m-linéaires multi p-sommants, muni de la norme $\pi_p^m(T) = \inf\{C : C \text{ vérifie } (1.15)\}$.
Cette classe d'opérateurs ne vérifie pas l'analogue du théorème de Pietsch, mais c'est une bonne généralisation des opérateurs linéaires p-sommants car elle conserve plusieurs propriétés du cas linéaire :
(1) C'est un idéal d'opérateurs m-linéaires bornés.
(2) Le théorème de Grothendieck se généralise : si les X_j $(1 \leq j \leq m)$ sont des espaces $\mathcal{L}_1$ et Y un espace de Hilbert on a

$$\Pi_p^m(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y).$$

(4) Si les X_j sont des espaces de Hilbert, alors $\Pi_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ coïncide avec l'espace des opérateurs m-linéaires de Hilbert Schmidt.

(5) Les espaces X_j $(1 \leq j \leq m)$ sont des espaces $\mathcal{L}_\infty$ ssi, tout opérateur multi 1-sommant est intégral.

(6) L'opérateur m-linéaire T est multi p-sommant ssi, son extension d'Aron–Berner $AB\,(T)\ :\ X_1^{**} \times ... \times X_m^{**} \rightarrow Y^{**}$ est aussi multi p-sommante. Pour la définition de l'extension d'Aron–Berner voir [GVill03] .

(7) Théorèmes de composition [GVill05] .

Remarque 1.26. Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. On a

$$\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \Pi_p^m(X_1, ..., X_m; Y).$$

En effet, soit $T \in \mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y)$. D'après la factorisation des opérateurs multilinéaires p-dominés,

$$T = A\,(u_1, ..., u_m)$$

où les u_j sont linéaires p-sommants. Alors

$$\begin{aligned}
&(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} \left\|T\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right)\right\|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} \left\|A\left(u_1\left(x_{i_1}^1\right), ..., u_m\left(x_{i_m}^m\right)\right)\right\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|A\|\,(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} \left\|u_1\left(x_{i_1}^1\right)\right\|^p ... \left\|u_m\left(x_{i_m}^1\right)\right\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|A\|\,(\sum_{i_1=1}^{n_1} \left\|u_1\left(x_{i_1}^1\right)\right\|^p)^{\frac{1}{p}} ...(\sum_{i_m=1}^{n_m} \left\|u_m\left(x_{i_m}^1\right)\right\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|A\| \prod_{j=1}^m \pi\,(u_j) \prod_{j=1}^m \left\|\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{n_j}\right\|_{l_p^n\ \omega(X_j)}.
\end{aligned}$$

1.5.4 Opérateurs multilinéaires fortement p-sommants

Dans le cas linéaire, un opérateur $u : X \rightarrow Y$ est faiblement compact ssi, son biadjoint u^{**} est à valeurs dans Y. Si un opérateur multilinéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est faiblement compact, alors son extension $AB\,(T)$ est à valeurs dans Y. Dimant [Dim03] a introduit les opérateurs multilinéaires fortement p-sommants pour montrer que la réciproque de dernière propriété n'est pas vraie. De plus, ces opérateurs vérifient l'analogue du théorème de Pietsch et forment un idéal de Banach.

Définition 1.27. Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. L'opérateur T est fortement p-sommant s'il existe une constante positive C telle que pour tous $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$ $(j = 1, ..., m)$

$$(\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right) \right\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} \left| \Phi\left(x_i^1, ..., x_i^m\right) \right|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.16}$$

La classe des opérateurs m-linéaires fortement p-sommants de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y, notée $\mathcal{L}_s^p(X_1, ..., X_m; Y)$, est un espace de Banach pour la norme $\|T\|_{\mathcal{L}_s^p}$ qui est la plus petite constante C telle que l'inégalité (1.16) soit vérifiée.

Théorème 1.28 [Dim03]. *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

(i) L'opérateur T est fortement p-sommant.

(ii) Il existe une mesure de probabilité de Radon μ sur $(B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}, \omega^*)$ et une constante positive $C > 0$ telle que pour tout $(x^1, ..., x^m)$ dans $X_1 \times ... \times X_m$, on a

$$\left\| T\left(x^1, ..., x^m\right) \right\| \leq C(\int_{B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}} \left| \Phi\left(x^1, ..., x^m\right) \right|^p d\mu(\Phi))^{\frac{1}{p}}.$$

On note que l'espace $\mathcal{L}_s^p(X_1, ..., X_m; Y)$ est un idéal de Banach . On a aussi

$$\Pi_p \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_s^p(X_1, ..., X_m; Y).$$

Proposition 1.29. *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$.*

(1) *Si $\widetilde{T}$ est p-sommant, alors T est fortement p-sommant.*

(2) *Théorème de Grothendieck multilinéaire : si les X_j sont des espaces $\mathcal{L}_1$ et Y un espace*

de Hilbert, on a pour tout $1 \leq p \leq \infty$

$$\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right) = \mathcal{L}_s^p\left(X_1, ..., X_m; Y\right).$$

Preuve. (1) Facile à voir.

(2) On note que $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ est un espace $\mathcal{L}_1$; d'après le petit théorème de Grotendieck , $\widetilde{T}$ est p-sommant puis on conclut par (1). ■

1.5.5 Opérateurs multilinéaires de Hilbert-Schmidt

La définition des opérateurs de Hilbert Schmidt a été introduite par Dwyer [Dwy71], et étudiée par plusieurs auteurs notammant Pietsch dans [Pie83]. L'idée a été inspiré de la norme de Hilbert Schmidt d'un opérateur linéaire T sur un Hilbert H, qui est la somme des $\|T(e_j)\|^2$ où (e_j) est une base orthonormale de H.

Définition 1.30. Soient $H_1, ..., H_m, H$ des espaces de Hilbert. L'opérateur multilinéaire $T : H_1 \times ... \times H_m \to H$ est de Hilbert-Schmidt si

$$\sum_{e^1_{i_1} \in I_1, ..., e^m_{i_m} \in I_m} \left\|T\left(e_{i_1}, ..., e_{i_m}\right)\right\|^2 < \infty$$

où $\left(e_{i_j}\right)_{i_j \in I_j}$ est une base orthonormale de l'espace H_j. Noter que cette quantité ne dépend pas de choix de la base orthonormale. La norme de Hilbert-Schmidt de T est

$$\|T\|_{HS} = \Big(\sum_{e^1_{i_1} \in I_1, ..., e^m_{i_m} \in I_m} \left\|T(e^1_{i_1}, ..., e^m_{i_m})\right\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme dans le cas linéaire, l'espaces des opérateurs multilinéaires de Hilbert-Schmidt $\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_m; H)$ est un espace de Hilbert space dont la norme $\|.\|_{HS}$ est induite du produit scalaire suivant

$$\langle T,S\rangle = \sum_{e^1_{i_1}\in I_1,\ldots,e^m_{i_m}\in I_m} \left\langle T(e^1_{i_1},\ldots,e^m_{i_m}), \overline{S(e^1_{i_1},\ldots,e^m_{i_m})}\right\rangle .$$

Définition 1.31 (*Produit tensoriel de Hilbert*). On peut munir le produit tensoriel algébrique $H_1 \otimes \ldots \otimes H_m$ du produit scalaire défini par

$$\forall h = (h_1 \otimes \ldots \otimes h_m), k = (k_1 \otimes \ldots \otimes k_m) \in H_1 \otimes \ldots \otimes H_m : \langle h,k\rangle = \prod_{j=1}^{m} \langle h_j, k_j\rangle .$$

On note $\|.\|_2$ la norme correspondante et $H_1\widehat{\otimes}_2\ldots\widehat{\otimes}_2 H_m$ l'espace de Hilbert complété. Rappelons que cette norme est raisonnable et vérifie

$$\varepsilon(v) \leq \|v\|_2 \leq \pi(v), \tag{1.17}$$

pour tout $v \in H_1 \otimes \ldots \otimes H_m$. Soit $\left(e_{k_j}\right)_{k_j\in I_j}$ une base orthonormale de H_j $(1 \leq j \leq m)$. On peut voir sans difficulté que le système

$$\left\{e_{k_1} \otimes \ldots \otimes e_{k_m}\right\}_{\substack{k_j\in I_j \\ 1\leq j\leq m}},$$

forme une base orthonormale de $H_1\widehat{\otimes}_2\ldots\widehat{\otimes}_2 H_m$. La proposition suivante devient donc immédiate.

Proposition 1.32 [Mat03, Proposition 5.10]. *Soient $H_1,\ldots,H_m,H$ des espaces de Hilbert. Les deux propréités suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'opérateur T est dans $\mathcal{L}_{HS}(H_1,\ldots,H_m;H)$.*

(2) *L'opérateur $\widetilde{T}_2$ est dans $\mathcal{L}_{HS}\left(H_1\widehat{\otimes}_2\ldots\widehat{\otimes}_2 H_m;H\right)$, ($\widetilde{T}_2$ est l'extension de $\widetilde{T}$ sur l'espace $H_1\widehat{\otimes}_2\ldots\widehat{\otimes}_2 H_m$).*

Remarque 1.33. Dans le cas $m = 1$, toutes les définitions précédentes coïncident avec la définition des opérateurs linéaires p-sommants.

Chapitre 2

Relations entre différentes classes d'opérateurs multilinéaires

L'objet de ce chapitre est de comparer les différentes classes d'opérateurs multilinéaires citées au chapitre 1. Les opérateurs multilinéaires Cohen fortement sommants y joueront un rôle important : beaucoup de propriétés du cas linéaire sont conservées, il sera utile de les énoncer dans le langage des idéaux. Dans le cas des opérateurs multilinéaires sur des espaces $\mathcal{L}_p$ on établira de bonnes relations entre les différentes notions. David Perez Garcia a étudié une bonne partie de ces comparaisons.

2.1 Les opérateurs Cohen fortement p-sommants

2.1.1 Cas linéaire

Soit $u : X \to Y$ un opérateur linéaire entre espaces de Banach. On définit l'opérateur adjoint de u par $u^* : Y^* \to X^*$ tel que $u^*(y^*) : X \to \mathbb{K}$, $u^*(y^*)(x) = y^*(u(x)) = \langle u^*(y^*), x\rangle = \langle y^*, u(x)\rangle$. Dans [Pie67] Pietsch a montré que l'opérateur identité de l_1 dans l_2, qui est 2-sommant, a un adjoint qui n'est pas 2-sommant. Afin de caractériser les adjoints des opérateurs linéaires p-sommants, J. S. Cohen dans [Coh73] a introduit le concept suivant : un opérateur u entre espaces de Banach X, Y est Cohen fortement p-sommant ($1 < p \leq \infty$) s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle u(x_i), y_i^* \rangle| \leq C(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{l_{p^*}^n}. \tag{2.1}$$

La plus petite constante C, notée $d_p(u)$, telle que l'inégalité (2.1) a lieu, définit la norme fortement p-sommante sur l'espace de Banach $\mathcal{D}_p(X;Y)$ des opérateurs Cohen fortement p-sommants de X dans Y. Pour $p = 1$, l'espace $\mathcal{D}_1(X;Y)$ coïncide avec $\mathcal{B}(X;Y)$, l'espace des opérateurs bornés de X dans Y.

Résultats linéaires (RL).(*cf.* [Coh73])

(a) $\mathcal{D}_p(X;Y)$ est un idéal de Banach dans $\mathcal{B}(X;Y)$.

(b) $\mathcal{D}_{p^*}(X;Y) \neq \Pi_p(X;Y)$ en général.

(c) Soit $u : X \to Y$; $u \in \Pi_p(X;Y)$ si, et seulement si, $u^* \in \mathcal{D}_{p^*}(Y^*;X^*)$ et $\pi_p(u) = d_{p^*}(u^*)$.

(d) Théorème de factorisation de Pietsch est vérifié.

(e) $u \in \mathcal{D}_p(X;Y)$ si, et seulement si, $u^{**} \in \mathcal{D}_p(X^{**};Y^{**})$.

Inclusions

(f) $\mathcal{D}_{p_1}(X;Y) \subseteq \mathcal{D}_{p_2}(X;Y)$ pour $p_1 \geq p_2$.

(g) Tout opérateur $u \in \mathcal{D}_p(X;Y)$ est faiblement compact, i.e., $\mathcal{D}_p(X;Y) \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{W}}(X;Y)$.

(h) Soit $1 \leq p < \infty$; $\Pi_p(X;Y) \subseteq \mathcal{D}_{p^*}(X;Y)$ lorsque X est un espace $\mathcal{L}_{p^*}$.

(i) Soit $1 \leq p < \infty$; $\mathcal{D}_{p^*}(X;Y) \subseteq \Pi_p(X;Y)$ lorsque Y est un espace $\mathcal{L}_p$.

Coincidences

(j) $\mathcal{D}_p(H_1;H_2) = \Pi_q(H_1;H_2) = \mathcal{L}_{HS}(H_1;H_2)$, $1 < p \leq \infty; 1 \leq q < \infty$, lorsque H_1 et H_2 sont des espaces de Hilbert.

(k) Soit $1 \leq p < \infty$; $\mathcal{D}_{p^*}(X;Y) = \Pi_p(X;Y)$ lorsque X est un espace $\mathcal{L}_{p^*}$ *et* Y est un espace $\mathcal{L}_p$.

2.1.2 Cas multilinéaire

La version multilinéaire a été introduite par Achour et Mezrag dans [AM07]. Elle conserve la plupart des propriétés des opérateurs linéaires : le théorème de domination de Pietsch, la caractérisation des opérateurs adjoints, et une bonne relation avec les autres notions d'opérateurs multilinéaires sommants.

Définition 2.1. Soient $m \in \mathbb{N}$ et X_j, Y des espaces de Banach $(j = 1, ..., m)$. Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est Cohen fortement p-sommant, $1 < p \leq \infty$, s'il existe une constante positive C telle que pour tout $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$ et tout $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| \leq C(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\| (y_i^*(y)) \right\|_{l_{p^*}^n}. \tag{2.2}$$

La classe des opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommants de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y, notée $\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$, est un espace de Banach pour la norme

$$d_p^m(T) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité (2.2)}\}.$$

Pour $p = 1$, on a $\mathcal{D}_1^m(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$.

Proposition 2.2. *L'espace $\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ est un idéal de Banach dans $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. i.e.,*

(1) *Propriété d'idéal. Si $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ et $u_j \in \mathcal{B}(G_j; X_j)$, $v \in \mathcal{B}(Y; Z)$, alors $v \circ T \circ (u_1, ..., u_m)$ est dans $\mathcal{D}_p^m(G_1, ..., G_m; Z)$ et*

$$d_p^m(v \circ T \circ (u_1, ..., u_m)) \leq \|v\| \, d_p^m(T) \|u_1\| ... \|u_m\|.$$

(2) *L'espace $\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ contient tous les opérateurs m-linéaires de rang fini.*

(3) *Si $A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$; $A(\lambda_1, ..., \lambda_m) = \lambda_1 ... \lambda_m$, alors $d_p^m(A) = 1$.*

Preuve. On vérifie seulement (2), pour les autres propriétés voir [AM07]. Il suffit de montrer la propriété pour les opérateurs de la forme $T = x_1^* \otimes ... \otimes x_m^* \otimes y$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| &= \sum_{i=1}^{n} \left| x_1^*\left(x_i^1\right) ... x_m^*\left(x_i^m\right) \right| \left| \left\langle y, y_i^* \right\rangle \right| \text{ d'après Hölder} \\
. \qquad &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left| x_1^*\left(x_i^1\right) ... x_m^*\left(x_i^m\right) \right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle y, y_i^* \right\rangle \right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \|y\| \prod_{j=1}^{m} \left\| x_j^* \right\| \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right) \right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\| \left(y_i^*(y)\right) \right\|_{l_{p^*}^n}.
\end{aligned}$$

D'où, $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ et $d_p^m(T) = \|y\| \prod_{j=1}^{m} \left\| x_j^* \right\|$. ■

2.1.3 Représentation tensorielle

Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. Soit $X_1 \otimes ... \otimes X_m \otimes Y^*$ leur produit tensoriel algébrique. Pour tout u dans $X_1 \otimes ... \otimes X_m \otimes Y^*$ on définit

$$g_p(u) = \inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left\| \left(y_i^*\right) \right\|_{l_{p^*}^{n,w}(Y^*)} \right\}, \tag{2.3}$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations de la forme $u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m \otimes y_i^*$. Si $m = 1$, g_p s'appelle la norme de *Chevet-Saphar* (*cf.* [Rya01]). Si $p_1, ..., p_m \in [1, \infty]$ vérifient $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$, alors

$$g_p(u) = \inf \left\{ \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right) \right\|_{l_{p_j}^n(X_j)} \left\| \left(y_i^*\right) \right\|_{l_{p^*}^{n,w}(Y^*)} \right\}. \tag{2.4}$$

En effet, à partir de cette définition on obtient (2.3), en remplaçant x_i^j par $\left(x_i^j \frac{\left(\prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|\right)^{\frac{p}{p_j}}}{\left\| x_i^j \right\|}\right)$. L'inverse est immédiat par l'inégalité de Hölder généralisée.

Proposition 2.3. *Soit* $p \in [1, \infty]$.

(1) g_p *est une norme tensorielle raisonnable.*

(2) *Pour tout* u *dans* $X_1 \otimes ... \otimes X_m \otimes Y^*$, *on a*

$$\varepsilon(u) \leq g_p(u) \leq \pi(u).$$

(3) *On a aussi* $g_1 = \pi$.

(4) *Si l'espace* Y *est de dimension finie, alors* $g_p = \pi$, *pour tout* $p \geq 1$.

Preuve. (1) Facile à vérifier.

(2) Pour tout u dans $X_1 \otimes ... \otimes X_m \otimes Y^*$ tel que $u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m \otimes y_i^*$, on a

$$\varepsilon(u) = \sup_{\|x_j^*\|=1, \|y^{**}\|=1} \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} x_1^*(x_i^1) ... x_m^*(x_i^m) y^{**}(y_i^*) \right| \right\} \text{ d'après Hölder}$$

$$\leq \sup_{\|x_j^*\|=1, \|y^{**}\|=1} (\sum_{i=1}^{n} |x_1^*(x_i^1) ... x_m^*(x_i^m)|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} |y^{**}(y_i^*)|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\leq (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \|x_i^j\|_{X_j}^p)^{\frac{1}{p}} \|(y_i^*)\|_{l_{p^*}^{n,w}(Y^*)}.$$

Cette inégalité est vérifie pour toutes les représentations de u, par conséquent, $\varepsilon(u) \leq g_p(u)$.

Par définition,

$$g_p(u) \leq (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \|x_i^j\|_{X_j}^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} \|y_i^*\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}.$$

En remplaçant dans l'écriture de u les x_i^j par $(x_i^j \frac{\left(\prod_{j=1}^{m} \|x_i^j\| \|y_i^*\|\right)^{\frac{1}{p_j}}}{\|x_i^j\|})$ et y_i^* par $(y_i^* \frac{\left(\prod_{j=1}^{m} \|x_i^j\| \|y_i^*\|\right)^{\frac{1}{p^*}}}{\|y_i^*\|})$ avec $p_1, ..., p_m \in [1, \infty]$ vérifiant $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$. On trouve $g_p(u) \leq \pi(u)$.

(3) Immédiate.

(4) D'après [DJT95, Page 33], on a $\|(y_i^*)\|_{l_{p^*(Y^*)}^n} = \|(y_i^*)\|_{l_{p^*(Y^*)}^{n,w}}$. ■

Notation. On note $X_1 \widehat{\otimes}_{g_p} ... \widehat{\otimes}_{g_p} X_m \widehat{\otimes}_{g_p} Y^*$ l'espace complété pour la norme g_p.

Proposition 2.4. *Pour tout $X_1, ..., X_m, Y$ espaces de Banach, on a l'identification isométrique*

$$\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y) = \left(X_1 \widehat{\otimes}_{g_p} ... \widehat{\otimes}_{g_p} X_m \widehat{\otimes}_{g_p} Y^*\right)^*.$$

Preuve. Soient $1 < p \leq \infty$ et $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$. Soit $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m \otimes Y^*$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m \otimes y_i^*.$$

L'action de T sur u est donnée par

$$\langle T, u\rangle = T(u) = \sum_{i=1}^n \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle,$$

ce qui donne

$$|T(u)| \leq d_p^m(T) (\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left\|\left(x_i^j\right)\right\|^p)^{\frac{1}{p}} \|(y_i^*)\|_{l_{p^*}^{n,w}(Y^*)}.$$

En prenant l'infimum sur toutes les représentations de u, on trouve

$$|T(u)| \leq d_p^m(T)\, g_p(u).$$

Donc

$$T \in \left(X_1 \widehat{\otimes}_{g_p} ... \widehat{\otimes}_{g_p} X_m \widehat{\otimes}_{g_p} Y^*\right)^*,$$

et $\|T\|_{g_p} \leq d_p^m(T)$.

Inversement, soit $T \in \left(X_1 \widehat{\otimes}_{g_p} ... \widehat{\otimes}_{g_p} X_m \widehat{\otimes}_{g_p} Y^*\right)^*$. Soient $\left(x_i^j\right)_{i=1}^n \subset X_j$ et $(y_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$. On a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^n \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^*\rangle\right| &= \left|T(\sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m \otimes y_i^*)\right| \\
&\leq \|T\|_{g_p} g_p(\sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m \otimes y_i^*) \\
&\leq \|T\|_{g_p} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left\|\left(x_i^j\right)\right\|_{l_p^n(X_j)} \|(y_i^*)\|_{l_{p^*}^{n,w}(Y^*)}.
\end{aligned}$$

Par un argument simple, on trouve que $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ et $d_p^m(T) \leq \|T\|_{g_p}$. ■

Remarque 2.5. Soient $p_1, ..., p_m \in [1, \infty]$ vérifiant $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$. D'après la deuxième écriture de g_p (2.4), la définition (2.1) devient

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| \leq C \prod_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} \left\|\left(x_i^j\right)\right\|_{X_j}^{p_j})^{\frac{1}{p_j}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{l_{p^*}^n}.$$

Corollaire 2.6. *Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach et Y un espace de Banach de dimension finie. Pour tout $p \geq 1$*

$$\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y).$$

Preuve. Par l'identification

$$\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) = \left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \widehat{\otimes}_\pi Y^*\right)^*,$$

et la Proposition (2.3) (4), on obtient le résultat. ■

2.2 Connexion avec les opérateurs adjoints

Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. Si $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, on définit *l'adjoint* de T :

$$T^* : Y^* \to \mathcal{L}(X_1, ..., X_m), \; y^* \to T^*(y^*) : X_1 \times ... \times X_m \to \mathbb{K}$$

par $T^*(y^*)(x^1, ..., x^m) = y^*(T(x^1, ..., x^m))$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Une question naturelle se pose concernant la relation entre les opérateurs multilinéaires et leurs adjoints pour les différentes classes de sommabilité. Si $X_1, ..., X_m$ sont des espaces $\mathcal{L}_\infty$, Y est un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, Pellegrino et Souza [PSou05] ont montré que, si T^* est persque sommant, alors T est $(1, 2)$-absolument sommant. Dans ce paragraphe, on montre que T est un m-linéaire Cohen fortement p-sommant si, et seulement si, son adjoint T^* est un opérateur linéaire p^*-sommant. D'autre part, si T^* est un opérateur Cohen fortement p^*-sommant, alors T est un opérateur multilinéaire fortement p-sommant.

Théorème 2.7. *Soit $1 < p \leq \infty$. Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ et T^* son adjoint. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(a) *L'opérateur multilinéaire T est Cohen fortement p-sommant.*

(b) *Il existe une probabilité de Radon μ sur $B_{Y^{**}}$ telle que, pour tout $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$ et tout $y^* \in Y^*$*

$$\left|\left\langle T\left(x^1, ..., x^m\right), y^*\right\rangle\right| \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\|x^j\right\|_{X_j} \|y^*\|_{L_{p^*(\mu)}}. \tag{2.5}$$

(c) *L'opérateur adjoint T^* est p^*-sommant.*

De plus

$$d_p^m(T) = \pi_{p^*}(T^*) = \inf\{C \text{ vérifiant } (2.5)\}.$$

Preuve. L'équivalence entre (a) et (b) voir [AM07].

(b) implique (c). Supposons que T vérifie (2.5). Alors

$$\|T^*(y^*)\| = \sup_{\|x^1\|, ..., \|x^m\| \leq 1} \left|T^*(y^*)\left(x^1, ..., x^m\right)\right| \leq d_p^m(T) \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu(y^{**})\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

D'après le théorème de domination de Pietsch sus cité,

$$T^* \in \pi_{p^*}(Y^*; \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)) \text{ et } \pi_{p^*}(T^*) \leq d_p^m(T).$$

(c) implique (b). Supposons que $T^* \in \pi_{p^*}(Y^*; \mathcal{L}(X_1, ..., X_m))$. Nous avons

$$\begin{aligned} \left|\langle T(x^1, ..., x^m), y^*\rangle\right| &= \left|T^*(y^*)(x^1, ..., x^m)\right| \\ &\leq \|T^*(y^*)\| \prod_{j=1}^{m} \|x^j\|. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs linéaires p^*-sommants, on trouve

$$\left|\left\langle T\left(x^1, ..., x^m\right), y^*\right\rangle\right| \leq \pi_{p^*}(T^*) \prod_{j=1}^{m} \left\|x^j\right\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu(y^{**})\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

On conclut, par l'inégalité (2.5), que T est Cohen fortement p-sommant et $d_p^m(T) \leq \pi_{p^*}(T^*)$. ■

Corollaire 2.8. *Soit Y un espace de Banach tel que Y^* est de cotype 2. Alors*

$$\mathcal{D}_2^m(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y),$$

pour tout $2 < p < \infty$. En particulier, pour tout espace de Hilbert H et $2 < p < \infty$

$$\mathcal{D}_2^m(X_1, ..., X_m; H) = \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; H).$$

Preuve. Dans le cas linéaire, Maurey a montré que si X est de cotype 2, alors $\Pi_2(X; Z) = \Pi_q(X; Z)$ pour tout espace de Banach Z et $1 < q < 2$. Comme Y^* est de cotype 2, on a

$$\Pi_2(Y^*; \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)) = \Pi_q(Y^*; \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)).$$

Le Théorème (2.7) termine la démonstration. ■

Théorème 2.9. *Considérons $1 < p \leq \infty$ et $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. Si T^* est un opérateur linéaire Cohen fortement p^*-sommant, alors $T \in \mathcal{L}_s^p(X_1, ..., X_m; Y)$.*

Preuve. Supposons que T^* est Cohen fortement p^*-sommant. D'après (2.1)

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle T^*(y_i^*), z_i^*\rangle| \leq d_{p^*}(T^*) (\sum_{i=1}^{n} \|y_i^*\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} |z_i^*(\Phi)|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Soient maitenant $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$ $(1 \leq j \leq m)$. On considère la forme linéaire $x_i^1 \times ... \times x_i^m : \mathcal{L}(X_1, ..., X_m) \to \mathbb{K}$ définie par

$$x_i^1 \times ... \times x_i^m (\Phi) = \Phi\left(x_i^1, ..., x_i^m\right).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^*\rangle| &= \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i^1 \times .. \times x_i^m, T^*(y_i^*)\rangle| \\ \leq \quad & d_{p^*}(T^*) (\sum_{i=1}^{n} \|y_i^*\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_i^1, ..., x_i^m)|^p)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & (\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i^1, ..., x_i^m)\|^p)^{\frac{1}{p}} \\ = \quad & \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^*\rangle \right| : (\sum_{1}^{n} \|y_i^*\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \leq 1 \right\} \\ \leq \quad & d_{p^*}(T^*) \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} |\Phi(x_i^1, ..., x_i^m)|^p)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

donc, T est fortement p-sommant et $\|T\|_{\mathcal{L}_s^p} \leq d_{p^*}(T^*)$. ■

2.3 Interprétation de multi-idéal $\mathcal{D}_p^m$ par la méthode de composition

Dans cette section on montre que l'idéal des opérateurs multilinéaires $\mathcal{D}_p^m$ s'interprète par la méthode de composition à partir de l'idéal linéaires des opérateurs Cohen fortement p-sommants et qu'il contient l'idéal multilinéaire $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{p_1}, ..., \mathcal{D}_{p_m})$ avec $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$.

On commence par le résultat suivant qui considère la clé de de la démonstration.

Lemme 2.10. *Soit* $1 < p \leq \infty$. *Soit* $T : X_1 \times ... \times X_m \rightarrow Y$ *un opérateur multilinéaire et* $\widetilde{T} : X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \rightarrow Y$ *sa linéarisation. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

(a) *L'opérateur* T *appartient à* $\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$.

(b) *L'opérateur* $\widetilde{T}$ *appartient à* $\mathcal{D}_p \left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y \right)$.

Preuve. Tout d'abord, on remarque que l'opérateur adjoint de $\widetilde{T}$ est T^*. D'après le Théorème (2.7), $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ si, et seulement si, $T^* \in \pi_{p^*} \left(Y^*; \mathcal{L} \left(X_1, ..., X_m \right) \right)$, donc, d'après la propriété (RL)(c), si, et seulement si, $\widetilde{T} \in \mathcal{D}_p \left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y \right)$, puisque $\mathcal{L} \left(X_1, ..., X_m \right)$ est le dual de $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$. ■

Un des principaux résultat de cette partie est le théorème suivant.

Théorème 2.11. *L'idéal multilinéaire* $\mathcal{D}_p^m$ *est engendré par la méthode de composition à partir de l'idéal linéaire* $\mathcal{D}_p$, *i.e., pour tout* $X_1, ..., X_m, Y$ *espaces de Banach on a*

$$\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{D}_p \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y). \tag{2.6}$$

Preuve. Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. Si $T \in \mathcal{D}_p \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, il existe un espace de Banach Z, un opérateur linéaire $u \in \mathcal{D}_p \left(Z; Y \right)$ et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ tels que

$$T = u \circ A.$$

D'après (RL)(c), u^* est p^*-sommant, donc pour tout $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$ et

$y^* \in Y^*$, on a

$$\begin{aligned} \left|\left\langle u \circ A\left(x^1, ..., x^m\right), y^*\right\rangle\right| &= \left|\left\langle A\left(x^1, ..., x^m\right), u^*\left(y^*\right)\right\rangle\right| \\ &\leq \|A\| \prod_{i=1}^{m} \left\|x^j\right\| \|y^*\|_{L_{p^*}(\mu)}, \end{aligned}$$

et par conséquent, $T = u \circ A$ appartient à $\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$.
Pour l'inclusion inverse, soit $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$. D'après le Lemme 2.10, $\widetilde{T}$ est dans $\mathcal{D}_p^m(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y)$. Comme $T = \widetilde{T} \circ i_m$, où i_m est l'opérateur multilinéaire canonique, donc T appartient à $\mathcal{D}_p \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m, Y)$ ce qui termine la preuve. ■

Corollaire 2.12. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *L'espace Y est de dimension finie.*
(2) *Pour tous espaces de Banach $X_1, ..., X_m$,*

$$\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y).$$

(3) *L'identité $id_Y \in \mathcal{D}_p(Y; Y)$.*

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) Corollaire (2.6).
(2) $\Rightarrow$ (3) Comme $\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{D}_p \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ pour tout $X_1, ..., X_m$, la Remarque (1.13) entraine

$$id_Y \in \mathcal{D}_p(Y; Y).$$

(3) $\Rightarrow$ (1) L'operateur id_{Y^*} est alors p^*-sommant, ce qui entraine que $id_{Y^*} = id_{Y^*} \circ id_{Y^*}$ est compact (par composition de deux opérateurs faiblement compacts et complètement continus). Alors id_Y est aussi compact, donc Y est de dimension finie. ■

Corollaire 2.13. *Les opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommants sont faiblements compacts.*

Preuve. Dans le cas linéaire, pour tout $p > 1$ $\mathcal{D}_p(X;Y) \subset \mathcal{I}_{\mathcal{W}}(X;Y)$ (RL(g)), d'où le résultat d'après la décomposition (2.6) et la Remarque 1.11. ■

Corollaire 2.14. *Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach et Y un espace de Banach reflexif. Alors, les opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommants de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y sont compacts.*

Preuve. D'aprés le Théorème 2.11, il existe un espace de Banach Z, un opérateur linéaire $u \in \mathcal{D}_p(Z;Y)$ et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ tels que

$$T = u \circ A.$$

Il est bien connu qu'un opérateur p-sommant défini sur un espace reflexif est compact. Par conséquent, un opérateur fortement p-sommant est compact quand son espace arrivé est reflexif, i.e., u est compact. Par la factorisation des opérateurs multilinéaires compacts, nous pouvons conclure que T est compact. ■

Corollaire 2.15. *Soient $H_1, ..., H_m, H$ des espaces de Hilbert. Alors*

$$\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_m; H) \subseteq \mathcal{D}_p^m(H_1, ..., H_m; H).$$

Preuve. On a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H_1 \times ... \times H_m & \overset{T}{\rightarrow} & H \\ i_m \downarrow & & \widetilde{T}_2 \uparrow \\ H_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi H_m & \overset{i_m^2}{\rightarrow} & H_1 \widehat{\otimes}_2 ... \widehat{\otimes}_2 H_m. \end{array}$$

où i_m^2 est l'inclusion naturelle et $\widetilde{T}_2$ est l'extension de $\widetilde{T}$ sur $H_1 \widehat{\otimes}_2 ... \widehat{\otimes}_2 H_m$. On a

$$\widetilde{T} = \widetilde{T}_2 \circ i_m^2.$$

Par (RL(j)), $\widetilde{T}$ est Cohen fortement p-sommant pour tout $p > 1$, car $\widetilde{T}_2$ est de Hilbert-Schmidt d'après la Proposition 1.32. Donc T est Cohen fortement p-sommant par le Lemme (2.10). ■

Remarque 2.16. Contrairement au cas linéaire, l'inclusion du corollaire précédent est stricte. En effet, considérons l'opérateur $T : H \times H \times H \to H$ défini par

$$T(x, y, z) = \langle x, y \rangle u(z),$$

où $u \in \mathcal{D}_p(H; H)$ (i.e., u est de Hilbert-Schmidt). L'opérateur T est Cohen fortement p-sommant. En effet

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i, y_i, z_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^{n} |\langle \langle x_i, y_i \rangle u(z_i), y_i^* \rangle| \\ &\leq d_p(u) (\sum_{i=1}^{n} \|\langle x_i, y_i \rangle z_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{l_{p^*}^n} \\ &\leq d_p(u) (\sum_{i=1}^{n} (\|x_i\| \|y_i\| \|z_i\|)^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{l_{p^*}^n}.\end{aligned}$$

Vérifions que T n'est pas de Hilbert–Schmidt. En effet

$$\begin{aligned}\sum_{k_1 \in I, k_2 \in I, k_3 \in I} \|T(e_{k_1}, e_{k_2}, e_{k_3})\|^2 &= \sum_{k_1 \in I, k_2 \in I, k_3 \in I} \|\langle e_{k_1}, e_{k_2} \rangle u(e_{k_3})\|^2 \\ &= \sum_{k_1 \in I, k_2 \in I, k_3 \in I} |\langle e_{k_1}, e_{k_2} \rangle|^2 \|u(e_{k_3})\|^2 \\ &= \sum_{k_2 \in I} \sum_{k_3 \in I} \|u(e_{k_3})\|^2 \|e_{k_2}\|^4 \\ &= \|u\|_{HS}^2 \sum_{k_2 \in I} \|e_{k_2}\|^4 = +\infty.\end{aligned}$$

Corollaire 2.17. *L'idéal multilinéaire $\mathcal{D}_p^m$ est symétrique.*

Preuve. Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. Soit $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$. Comme

$T = \widetilde{T} \circ i_m$, on a

$$T_S = \frac{1}{m!} \sum_\sigma \widetilde{T} \circ i_m \circ \sigma = \widetilde{T} \circ (\frac{1}{m!} \sum_\sigma i_m \circ \sigma) \in \mathcal{D}_p \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y).$$

D'où le Corollaire. $\blacksquare$

Théorème 2.18. *Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach et $p_1, ..., p_m \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$. Alors*

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{D}_{p_1}, ..., \mathcal{D}_{p_m}\right)(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y).$$

La démonstration utilise le lemme suivant.

Lemme 2.19. *Soient $u_j \in \mathcal{D}_{p_j}(X_j; Y_j)$ tels que $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$. Alors*

$$u_1 \otimes_\pi ... \otimes_\pi u_m \quad : \quad X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \quad \rightarrow \quad Y_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi Y_m,$$

est Cohen fortement p-somment.

Preuve. Sans restreindre la généralité, on va montrer la propriété pour deux opérateurs. Soient $u_1 \in \mathcal{D}_{p_1}(X_1; Y_1), u_2 \in \mathcal{D}_{p_2}(X_1; Y_2)$ tels que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$. On définit l'opérateur bilinéaire $u_1 \times u_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \widehat{\otimes}_\pi Y_2$ par

$$u_1 \times u_2 \left(x_1, x_2\right) = u_1\left(x_1\right) \otimes u_2\left(x_2\right).$$

Comme $u_1 \otimes_\pi u_2$ est l'opérateur linéarisé de $u_1 \times u_2$ il suffit, d'après le Lemme (2.10), de voir que $u_1 \times u_2$ est dans $\mathcal{D}_p^2(X_1 \times X_2; Y_1 \widehat{\otimes}_\pi Y_2)$.

Soient $(x_i^1) \subset X_1, (x_i^2) \subset X_2$ et $\widetilde{\varphi}_i \in (Y_1 \widehat{\otimes}_\pi Y_2)^*$ $(1 \leq i \leq n)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left|\left\langle u_1 \times u_2\left(x_i^1, x_i^2\right), \widetilde{\varphi}_i\right\rangle\right| &= \sum_{i=1}^n \left|\left\langle u_1\left(x_i^1\right) \otimes u_2\left(x_i^2\right), \widetilde{\varphi}_i\right\rangle\right| \\
&= \sum_{i=1}^n \left|\left\langle \varphi_i\left(u_1\left(x_i^1\right), u_2\left(x_i^2\right)\right)\right\rangle\right| \\
&= \sum_{i=1}^n \left|\left\langle u_1\left(x_i^1\right), \varphi_{i,u_2\left(x_i^2\right)}\right\rangle\right|,
\end{aligned}$$

où $\varphi_{i,u_2\left(x_i^2\right)} : Y_1 \rightarrow \mathbb{K}; y \mapsto \varphi_{i,u_2\left(x_i^2\right)}(y) = \varphi_i\left(y, u_2\left(x_i^2\right)\right)$. Comme $u_1 \in \mathcal{D}_{p_1}(X_1; Y_1)$, alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \left|\left\langle u_1 \times u_2\left(x_i^1, x_i^2\right), \widetilde{\varphi}_i\right\rangle\right| \\
\leq\ & d_{p_1}\left(u_1\right) \left\|\left(x_i^1\right)\right\|_{l_{p_1}^n(X_1)} \sup_{\|y_1\|=1} \left(\sum_{i=1}^n \left|\varphi_{i,u_2\left(x_i^2\right)}\left(y_1\right)\right|^{p_1^*}\right)^{\frac{1}{p_1^*}} \qquad (2.7) \\
\leq\ & d_{p_1}\left(u_1\right) \left\|\left(x_i^1\right)\right\|_{l_{p_1}^n(X_1)} \sup_{\|y_1\|=1} \sup_{\|(\lambda_i)\|_{l_{p_1}^n}=1} \left|\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(y_1, u_2\left(x_i^2\right))\right|.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant s'intéresser à la quantité

$$\left|\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(y_1, u_2\left(x_i^2\right))\right| = \left|\sum_{i=1}^n \left\langle u_2\left(x_i^2\right), \lambda_i \varphi_{i,y_1}\right\rangle\right|.$$

Comme l'opérateur u_2 est dans $\mathcal{D}_{p_2}(X_2; Y_2)$, alors

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(y_1, u_2\left(x_i^2\right))\right| \\
\leq\ & d_{p_2}\left(u_2\right) \left\|\left(x_i^2\right)\right\|_{l_{p_2}^n(X_2)} \sup_{\|y_2\|=1} \left(\sum_{i=1}^n \left|\lambda_i \varphi_{i,y_1}(y_2)\right|^{p_2^*}\right)^{\frac{1}{p_2^*}} \\
=\ & d_{p_2}\left(u_2\right) \left\|\left(x_i^2\right)\right\|_{l_{p_2}^n(X_2)} \sup_{\|y_2\|=1} \sup_{\|(\alpha_i)\|_{l_{p_2}^n}=1} \left|\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \varphi_i(y_1, y_2)\right|,
\end{aligned}$$

puisque

$$\left\{(\alpha_i \lambda_i) \mid (\alpha_i) \in B_{l_{p_1}^n}, (\lambda_i) \in B_{l_{p_2}^n}\right\} \subset B_{l_p^n}.$$

Cela implique

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\|(\lambda_i)\|_{l_{p_1}^n}=1\\ \|(\alpha_i)\|_{l_{p_2}^n}=1}} \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \varphi_i\left(y_1, y_2\right)\right| &\leq \sup_{\|(\delta_i)\|_{l_p^n}=1} \left|\sum_{i=1}^{n} \delta_i \varphi_i\left(y_1, y_2\right)\right| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(y_1, y_2)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

De plus, $B_{Y_1} \otimes B_{Y_2} \subseteq B_{Y_1 \widehat{\otimes}_\pi Y_2}$ entraine

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\|y_j\|=1\\ j=1,2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(y_1, y_2)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} &= \sup_{\|y_1 \otimes y_2\|_{B_{Y_1} \otimes B_{Y_2}}=1} \left(\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{\varphi}_i(y_1 \otimes y_2)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \sup_{\|y_1 \otimes y_2\|_{B_{Y_1 \widehat{\otimes}_\pi Y_2}}=1} \left(\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{\varphi}_i(y_1 \otimes y_2)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \qquad (2.8) \\
&\leq \sup_{\|v\|_{B_{Y_1 \widehat{\otimes}_\pi Y_2}}=1} \left(\sum_{i=1}^{n} |\widetilde{\varphi}_i(v)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}},
\end{aligned}$$

de (2.7) et (2.8) on obtient comme conclusion

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle u_1 \times u_2\left(x_i^1, x_i^2\right), \widetilde{\varphi}_i\right\rangle\right| \\
\leq\; & d_{p_1}\left(u_1\right) d_{p_2}\left(u_2\right) \|(x_i^1)\|_{l_{p_1}^n(X_1)} \|(x_i^2)\|_{l_{p_2}^n(X_2)} \sup_{\|v\|_{B_{Y_1 \widehat{\otimes}_\pi Y_2}}=1} \|(\widetilde{\varphi}_i)\|_{l_{p^*}^n}.
\end{aligned}$$

Ainsi se termine la démonstration grâce à la Remarque 2.5. ■

Preuve du Théorème 2.18. Soit $T \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}_{p_1}, ..., \mathcal{D}_{p_m}\right)\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$. Alors il existe des espaces de Banach G_j, $u_j \in \mathcal{D}_{p_m}\left(X_j; G_j\right)$ et un multilinéaire A tels que

$$T = A\left(u_1, ..., u_m\right).$$

Il est facile de vérifier que l'opérateur $\widetilde{T}$, le linéarisé de T, est

$$\widetilde{T} = \tilde{A} \circ u_1 \otimes_\pi ... \otimes_\pi u_m,$$

où $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \overset{u_1 \otimes_\pi ... \otimes_\pi u_m}{\longrightarrow} G_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi G_m \overset{\tilde{A}}{\to} Y$. D'après le Lemme 2.19, $\widetilde{T}$ est Cohen fortement p-sommant. Cela entraine que $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$. ■

2.3.1 Conséquence : le Théorème de Bu multilinéaire

Dans [Bu03], Q. Bu a généralisé un résultat de [Coh73, Théorème 4.2.2.(ii)] pour $1 < p, q < \infty$ et H un espace de Hilbert au lieu de $p = q = 2$,

$$\Pi_p(H; Y) \subseteq \mathcal{D}_q(H; Y).$$

La version multilinéaires a été démontrée par Achour et Mezrag en remplaçant les opérateurs p-sommants par les opérateurs m-linéaires p-dominés, et en utilisant les inégalités de Kahane et de Khintchine généralisées. On redémontre ce théorème en employant la technique des idéaux.

Théorème 2.20. *Soient* $1 < p, q < \infty$; $H_1, ..., H_m$ *des espaces de Hilbert et* Y *un espace de Banach. Alors*

$$\mathcal{L}_d^p(H_1, ..., H_m; Y) \subseteq \mathcal{D}_q^m(H_1, ..., H_m; Y).$$

Preuve. Soit $T \in \mathcal{L}_d^p(H_1, ..., H_m; Y)$. Il existe $u_j \in \Pi_p(H_j; Z_j)$ et $A \in \mathcal{L}(Z_1, ..., Z_m; Y)$ tels que $T = A(u_1, ..., u_m)$. D'après le théorème de Bu cas linéaire, $u_j \in \mathcal{D}_q(H_j; Z_j)$ pour tout $1 < q < \infty$. On choisit $p_1, .., p_m > 1$ tels que $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$. Comme $u_j \in \mathcal{D}_{q_j}(H_j, Z_j)$ donc

$$\mathcal{L}_d^p(H_1, ..., H_m; Y) = \mathcal{L}(\Pi_p)(H_1, ..., H_m; Y) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{D}_{p_1}, ..., \mathcal{D}_{p_m})(H_1, ..., H_m; Y),$$

et le Théorème 2.18 achève la preuve. ■

2.4 Les opérateurs m-linéaires définis sur des espaces $\mathcal{L}_p$

Cette section a pour but d'étudier le rapport entre les classes d'opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommants, multi p-sommants et fortement p-sommants au sens de Dimant agissant sur des espaces $\mathcal{L}_p$. On prouvera que $\Pi^m_{p^*}(X_1, ..., X_m; Y)$ est inclus dans $\mathcal{D}^m_p(X_1, ..., X_m; Y)$, lorsque les X_j $(1 \leq j \leq m)$ sont des espaces $\mathcal{L}_p$. Si de plus Y est un espace $\mathcal{L}_{p^*}$, on verra que l'espace des opérateurs m-linéaires fortement p^*-sommants contient les deux derniers espaces.

Commençons par rappeler la définition des espaces $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, introduite par Lindenstrauss et PeŁczyński dans leur article : "*Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications*". Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $\lambda > 1$. Un espace de Banach X est dit espace $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ si pour tout sous espace de dimension finie $E \subset X$ il existe $F \subset X$ contenant E et un isomorphisme $u : F \longrightarrow l_p^{\dim F}$ satisfaisant $\|u\| \|u^{-1}\| < \lambda$. On dit que X est un espace $\mathcal{L}_p$ si c'est un espace $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ pour un certain $\lambda > 1$. Soit $(\Omega; \mu)$ un espace mesuré ; pour $1 \leq p \leq \infty$, les espaces de Lebesgue $L_p(\mu)$ sont des espaces $\mathcal{L}_p$. L'espace $C(K)$ des fonctions continues sur un compact K est un espace $\mathcal{L}_\infty$.

Définition 2.21 (*Sous espace complémenté*). Soit X un espace de Banach et Y un sous espace fermé de X. On dit que Y est *complémenté* dans X s'il existe un sous espace fermé Z tel que

$$X = Y \oplus Z$$

Le sous espace fermé Z s'appel le complément de Y.

Théorème 2.22. *Un sous espace fermé Y d'un espace de Banach X est compémenté dans X si, et seulement si, il est l'image d'une projection continue de X.*

Exemple 2.23. (1) Tout sous espace fermé d'un espace de Hilbert H est complémenté dans H.

(2) Les l_p^n sont complémentés dans l_p.

Proposition 2.24 [Bou 81]. (1) *Si* $1 < p < \infty$ *et* X *est un espace* $\mathcal{L}_p$, *alors* X *est isomorphe à un sous espace complémenté dans* $L_p(\mu)$.

(2) *Si* X *est un espace* $\mathcal{L}_1$ *(resp.* $\mathcal{L}_\infty$*), alors* X^{**} *est isomorphe à un sous espace complémenté dans* $L_1(\mu)$ *(resp.* $C(K)$*)*.

Inversement, si X *est un sous espace complémenté dans* L_p $(1 < p < \infty)$, *alors* X *est un epace* $\mathcal{L}_p$ *ou bien isomorphe à un espace de Hilbert.*

Proposition 2.25 [Bou 81]. (1) *Si* X *est un espace* $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ *pour tout* $\lambda \geq 1$, *alors* X *est un* $L_p(\mu)$.

(2) *Tout espace de Hilbert est un espace* $\mathcal{L}_{2,\lambda}$ *pour tout* $\lambda \geq 1$.

Proposition 2.26. *Soient* $r_1, ..., r_m \in \mathbb{N}^*$ *et* $1 < p \leq \infty$. *Soit* T *un opérateur multilinéaire de* $l_p^{r_1} \times ... \times l_p^{r_m}$ *dans* Y. *Alors*

$$d_p^m(T) \leq \pi_{p^*}^m(T).$$

Preuve. Soit $(e_{k_j})_{k_j=1}^{r_j}$ la base canonique de $l_p^{r_j}$ $(1 \leq j \leq m)$. Nous avons

$$\begin{aligned} &(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{r_1,\ldots,r_m} \|T(e_{k_1},...,e_{k_m})\|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \\ \leq\ & \pi_{p^*}^m(T) \prod_{j=1}^m \sup_{\|x_j^*\|_{l_{p^*}^{r_j}}=1} (\sum_{k_j=1}^{r_j} |x_j^*(e_{k_j})|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} = \pi_{p^*}^m(T). \end{aligned}$$

Soient $x_1^j, ..., x_n^j$ dans $l_p^{r_j}$ $(1 \leq j \leq m)$ d'où $x_i^j = \sum_{k_j=1}^{r_j} a_{k_j,i}^j e_{k_j}$. Pour $y_1^*, ..., y_n^*$ dans Y^*,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| \\ \leq \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{k_1,...,k_m=1}^{r_1,...,r_m} \left| \left\langle T\left(a_{k_1,i}^1 e_{k_1}, ..., a_{k_m,i}^m e_{k_m}\right), y_i^* \right\rangle \right| \\ \leq \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{k_1,...,k_m=1}^{r_1,...,r_m} \left| a_{k_1,i}^1 ... a_{k_m,i}^m \right| \left| \left\langle T\left(e_{k_1}, ..., e_{k_m}\right), y_i^* \right\rangle \right|. \end{aligned}$$

Si $1 < p < \infty$, nous avons par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| \\ \leq \quad & \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k_1,...,k_m=1}^{r_1,...,r_m} \left| a_{k_1,i}^1 ... a_{k_m,i}^m \right|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k_1,...,k_m=1}^{r_1,...,r_m} \left| \left\langle T\left(e_{k_1}, ..., e_{k_m}\right), y_i^* \right\rangle \right|^{p^*} \Big)^{\frac{1}{p^*}} \\ = \quad & \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\| \Big(\sum_{k_1,...,k_m=1}^{r_1,...,r_m} \left| \left\langle T\left(e_{k_1}, ..., e_{k_m}\right), y_i^* \right\rangle \right|^{p^*} \Big)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

Par un simple argument,

$$\begin{aligned} \leq \quad & \Big(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k_1,...,k_m=1}^{r_1,...,r_m} \left\| T\left(e_{k_1}, ..., e_{k_m}\right) \right\|^{p^*} \Big)^{\frac{1}{p^*}} \sup_{y \in B_Y} \left\| (y_i^*(y)) \right\|_{l_{p^*}^n} \\ \leq \quad & \pi_{p^*}^m (T) \Big(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\| (y_i^*(y)) \right\|_{l_{p^*}^n}. \end{aligned}$$

Ceci implique $d_p^m (T) \leq \pi_{p^*}^m (T)$.

Si $p = \infty$, on a

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| \\
\leq \quad & \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{k_1, ..., k_m} \left| a_{k_1,i}^1 ... a_{k_m,i}^m \right| \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k_1, ..., k_m = 1}^{r_1, ..., r_m} \left| \left\langle T\left(e_{k_1}, ..., e_{k_m}\right), y_i^* \right\rangle \right| \right) \\
= \quad & \sup_{1 \leq i \leq n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{l_\infty^{r_j}} \left(\sum_{k_1, ..., k_m = 1}^{r_1, ..., r_m} \left\| T\left(e_{k_1}, ..., e_{k_m}\right) \right\| \right) \sup_{y \in B_Y} \left\| \left(y_i^*(y)\right) \right\|_{l_1^n} \\
\leq \quad & \pi_1^m(T) \sup_{1 \leq i \leq n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{l_\infty^{r_i}} \sup_{y \in B_Y} \left\| \left(y_i^*(y)\right) \right\|_{l_1^n}.
\end{aligned}
$$

On obtient $d_\infty^m(T) \leq \pi_1^m(T)$, ce qui achève la preuve. ■

Le théorème suivant généralise le résultat de Cohen linéaire (RL (h)).

Théorème 2.27. *Fixons $m \in \mathbb{N}^*$. Soient $1 < p \leq \infty$ et X_j $(1 \leq j \leq m)$ des espaces $\mathcal{L}_{p,\lambda}$* pour un *$\lambda \geq 1$. Alors*

$$\Pi_{p^*}^m(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y) \text{ et } d_p^m(T) \leq \pi_{p^*}^m(T)\, \lambda^m.$$

Preuve. Soient $n \in \mathbb{N}^*$; $x_1^j, ..., x_n^j$ dans X_j et $T \in \Pi_{p^*}^m(X_1, ..., X_m; Y)$. Comme X_j est un espace $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, il existe un sous espace de dimension finie $M_j \subset X_j$ contenant le sous espace engendré par $x_1^j, ..., x_n^j$, et un opérateur inversible $S_j : l_p^{r_j} \to M_j$ $(\dim M_j = r_j)$ tel que $\|S_j\| \left\| S_j^{-1} \right\| \leq \lambda$. Considérons le diagramme suivant

$$
\begin{array}{lllcccc}
X_1 & \times ... \times & X_m & & \xrightarrow{T} & Y & \\
\uparrow i_1 & & \uparrow i_m & & & \overline{T} \uparrow & \\
M_1 & \times ... \times & M_m & \underset{(S_1, ..., S_m)}{\longleftarrow} & l_p^{r_1} & \times ... \times & l_p^{r_m} \\
\uparrow k_1 & & \uparrow k_m & & & & \\
\mathrm{vect}\{x_1^1, ..., x_n^1\} & \times ... \times & \mathrm{vect}\{x_1^m, ..., x_n^m\} & & & &
\end{array}
$$

où i_j et k_j sont les inclusions cananiques et

$$\overline{T} = T\left(i_1 \circ S_1, ..., i_m \circ S_m\right).$$

Il s'ensuit que

$$\pi^m_{p^*}(\overline{T}) \leq \pi^m_{p^*}\left(T\right) \prod_{j=1}^{m} \|S_j\| \, \|i_j\| \, .$$

La Proposition 2.26 implique

$$d^m_p\left(\overline{T}\right) \leq \pi^m_{p^*}\left(\overline{T}\right) \leq \pi^m_{p^*}\left(T\right) \prod_{j=1}^{m} \|S_j\| \, .$$

Posons $z^j_i = S^{-1}_j x^j_i \in l^{r_j}_p$; pour $y^*_1, ..., y^*_n \in Y^*$, nous avons

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\left(x^1_i, ..., x^m_i\right), y^*_i)\right\rangle\right| \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle \overline{T}\left(z^1_i, ..., z^m_i\right), y^*_i)\right\rangle\right| \\
\leq \quad & d^m_p\left(\overline{T}\right) (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\|z^j_i\right\|^p_{l^{r_j}_p})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y^*_i(y))\|_{l^n_{p^*}} \\
\leq \quad & \pi^m_{p^*}\left(T\right) \prod_{j=1}^{m} \|S_j\| \, (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\|z^j_i\right\|^p_{l^{r_j}_p})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y^*_i(y))\|_{l^n_{p^*}} .
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\left(x^1_i, ..., x^m_i\right), y^*_i)\right\rangle\right| \\
\leq \quad & \pi^m_{p^*}\left(T\right) \lambda^m (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\|x^j_i\right\|^p_{X_j})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y^*_i(y))\|_{l^n_{p^*}} .
\end{aligned}$$

Donc $d^m_p\left(T\right) \leq \pi^m_{p^*}\left(T\right) \lambda^m$. ■

Corollaire 2.28. *Soit* $1 < p \leq \infty$. *Si* Y^* *est un espace* $\mathcal{L}_p$,

$$\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_s^{p^*}(X_1, ..., X_m; Y).$$

Preuve. Soit $T \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$. D'après le Théorème 2.7, T^* est p^*-sommant. Comme Y^* est un espace $\mathcal{L}_p$, par [Coh73 ; Théorème 3.2.3], T^* est Cohen fortement p-sommant. Le Théorème 2.9 implique que $T \in \mathcal{L}_s^{p^*}(X_1, ..., X_m; Y)$. $\blacksquare$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du Corollaire 2.28 et du Théorème 2.27.

Corollaire 2.29. *Soit* $1 < p < \infty$. *Si* X_j $(1 \leq j \leq m)$ *est un espace* $\mathcal{L}_p$ *et* Y *est un espace* $\mathcal{L}_{p^*}$,

$$\Pi_{p^*}^m(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_s^{p^*}(X_1, ..., X_m; Y).$$

Chapitre 3

Caractérisation non linéaire des espaces de Banach

Une application de la théorie des opérateurs linéaires sommants est la caractérisation de certains espaces de Banach tels que les espaces de Hilbert et les espaces $\mathcal{L}_p$. Cohen [Coh70] a montré que $\Pi_2(H;Y) \subseteq \mathcal{D}_2(H;Y)$ pour tout espace de Banach Y et tout espace de Hilbert H. Cette propriété caractérise-t-elle les espaces de Hilbert ? Kwapień [Kwa70] a donné une réponse affirmative à cette question de Cohen. On trouve dans [SR72] une caractérisation des espaces $\mathcal{L}_\infty$: X est un espace $\mathcal{L}_\infty$ si, et seulement si, pour tout espace de Banach Y, tout opérateur linéaire 1-sommant $u : X \to Y$ est intégral. Dans ce chapitre, et en premier lieu on va donner quelques résultats de caractérisation en termes d'opérateurs multilinéaires. En second lieu, nous généralisons le théorème de Kwapień dans le cas des polynômes homogènes de degré m en repmlaçant l'espace Π_2 par $\mathcal{P}_d^2$ l'espace de polynômes 2-dominés et $\mathcal{D}_p$ par $\mathcal{P}_{Coh}^q$ l'espace de polynômes Cohen fortements 2-sommants.

3.1 Caractérisation multilinéaire des espaces de Hilbert.

On commence par rappeler le théorème de Kwapień.

Théorème 3.1 [Kwa70]. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *X est isomorphe à un espace de Hilbert.*

(2) *Pour tout espace de Banach Y, $\Pi_2(X;Y) \subseteq \mathcal{D}_2(X;Y)$.*

(3) *Pour tout espace de Banach Y, $\mathcal{D}_2(Y;X) \subseteq \Pi_2(Y;X)$.*

Preuve. (1) $\Longrightarrow$ (2) Par le théorème de Cohen.

(2) $\Longrightarrow$ (1) *Préliminaire* : Soit $K = B_{X^*}$ muni de la topologie $*$-faible. Soit $(x_i^*)_{i\in\mathbb{N}} \subset C(K)^*$ telle que $\left\|(x_i^*)_{i\in\mathbb{N}}\right\|_{l_2^w(C(K)^*)} \leq 1$. On lui associe l'application linéaire

$$u : C(K) \to l_2$$

définie par $u(x) = (\langle x, x_i^* \rangle)_{i\in\mathbb{N}}$. L'application u est bornée car

$$\|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} (\sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle x, x_i^* \rangle|^2)^{\frac{1}{2}} = \|(x_i^*)\|_{l_2^w(C(K)^*)} \leq 1.$$

D'après le petit théorème de Grothendieck, elle est 2-sommante, ce qui implique que

$$u \circ i_X : X \to C(K) \to l_2$$

est 2-sommante, donc Cohen fortement 2-sommant, i.e, $i_X^* \circ u^*$ est 2-sommante.

Montrons à l'aide du Préliminaire que $i_X^* \in \Pi_2(C(K)^*; X^*)$. Soit $(x_i^*) \in l_2^w(C(K)^*)$ et soit u associée à (x_i^*) comme ci-dessus. Alors $x_i^* = u^*(e_i)$, donc

$$(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|i_X^*(x_i^*)\|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i\in\mathbb{N}} \|i_X^* \circ u^*(e_i)\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \pi_2(i_X^* \circ u^*) < \infty,$$

et par conséquent i_X^* est 2-sommante. Il existe donc un espace de Hilbert H tel que

$$i_X^* = v_1 \circ v_2 : C(K)^* \xrightarrow{v_2} H \xrightarrow{v_1} X^*$$

Comme i_X^* est sujective, v_1 est aussi surjective. D'après le théorème de l'application ouverte, X^* est isomorphe à l'espace quotient $\frac{H}{Ker(v_1)}$, donc à un Hilbert.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) Facile à voire. ■

Le théorème suivant est une généralisation naturelle du théorème de Kwapień au cas multilinéaire.

Théorème 3.2. *Fixons $m \geq 2$. Soient X_j $(1 \leq j \leq m)$ des espaces de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *Les espaces $X_1, ..., X_m$ sont isomorphes aux espaces de Hilbert.*
(2) *Pour tous $1 < p, q < \infty$,* et *tout espace de Banach Y,*

$$\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{D}_q^m(X_1, ..., X_m; Y).$$

(3) *Pour tout espace de Banach Y, $\mathcal{L}_d^2(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{D}_2^m(X_1, ..., X_m; Y)$.*

Preuve
(1) $\Longrightarrow$ (2) est immédiate par le Théorème de Bu multilinéaire.
(2) $\Longrightarrow$ (3) est évidente.
(3) $\Longrightarrow$ (1) Soit $1 \leq j \leq m$. Soit $u \in \Pi_2(X_j; Y)$, on va montrer que $u \in \mathcal{D}_2(X_j; Y)$. Pour $1 \leq k \leq m$ $(k \neq j)$ on fixe $x^k \in B_{X_k}$ et $x_k^* \in B_{X_k^*}$ tels que $x_k^*(x^k) = 1$. Vérifions que l'opérateur multilinéaire

$$T = x_1^* \otimes ... \otimes u \otimes ... \otimes x_m^* : X_1 \times ... \times X_m \to Y$$

appartient à $\mathcal{L}_d^2(X_1,...,X_m;Y)$. En effet,

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n}\left\|T\left(g_i^1,...,g_i^m\right)\right\|^{\frac{2}{m}})^{\frac{m}{2}} &= (\sum_{i=1}^{n}\left|x_1^*\left(g_i^1\right)\right|^{\frac{2}{m}}...\left\|u\left(g_i^j\right)\right\|^{\frac{2}{m}}...\left|x_m^*\left(g_i^m\right)\right|^{\frac{2}{m}})^{\frac{m}{2}} \\
&\leq (\sum_{i=1}^{n}\left|x_1^*\left(g_i^1\right)\right|^2)^{\frac{1}{2}}...(\sum_{i=1}^{n}\left\|u\left(g_i^j\right)\right\|^2)^{\frac{1}{2}}...(\sum_{i=1}^{n}\left|x_m^*\left(g_i^m\right)\right|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \pi_2\left(u\right)\left\|\left(g_i^1\right)\right\|_{l_2^{n,w}}...\left\|\left(g_i^m\right)\right\|_{l_2^{n,w}}.
\end{aligned}$$

Alors, par hypothèse, $T\in\mathcal{D}_2^m(X_1,...,X_m;Y)$. Sa linéarisation $\tilde{T}$ est donc Cohen fortement 2-sommante. Posons $v:X_j\to X_1\widehat{\otimes}_\pi...\widehat{\otimes}_\pi X_m$, définie par

$$v=x^1\otimes...\otimes id_{X_j}\otimes...\otimes x^m.$$

Alors $u=\tilde{T}\circ v$ est Cohen fortement 2-sommante. Par le théorème de Kwapień, X_j est isomorphe à un Hilbert. ■

Théorème 3.3. *Fixons $m\geq 2$. Soit Y un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *Y est isomorphe à un espace de Hilbert.*
(2) *Pour tous espaces de Banach $X_1,...,X_m$* et tous $1<p,q<\infty$,

$$\mathcal{D}_p^m(X_1,...,X_m;Y)\subseteq\mathcal{L}_s^q(X_1,...,X_m;Y).$$

(3) *Pour tous espaces de Banach $X_1,...,X_m$; $\mathcal{D}_2^m(X_1,...,X_m;Y)\subseteq\mathcal{L}_s^2(X_1,...,X_m;Y)$.*

Preuve

(1) $\Longrightarrow$ (2) Soit $Y=H$ un espace de Hilbert. Soit $T\in\mathcal{D}_p^m(X_1,...,X_m;H)$; T^* est p^*-sommant par le Théorème (2.7). Le Théorème linéaire de Bu [Bu03], entraine que

$$T^*\in\mathcal{D}_{q^*}(H;(X_1\widehat{\otimes}_\pi...\widehat{\otimes}_\pi X_m)^*),1<q^*<\infty.$$

Par le Théorème (2.9), $T \in \mathcal{L}_s^q(X_1, ..., X_m; Y)$. Ce résultat reste vrai si Y est isomorphe à un Hilbert.

(2) $\Longrightarrow$ (3) est évidente.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Soit X un espace de Banach et $u : X \to Y$ un opérateur Cohen 2-sommant. Pour $2 \leq j \leq m$ on considère $x^j \in B_{X_j}$ et $x_j^* \in B_{X_j^*}$ tels que $x_j^*(x^j) = 1$. Il est facile de voir que l'opérateur multilinéaire

$$T = u \otimes x_2^* \otimes ... \otimes x_m^* : \underbrace{X \times ... \times X}_{m} \to Y$$

est Cohen fortement 2-sommant. Alors, par hypothèse, $T \in \mathcal{L}_s^2(X, ..., X; Y)$. Donc, pour $g^1, ..., g^n \in X$

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} \left\| u\left(g^i\right) \right\|^2)^{\frac{1}{2}} &= (\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(g^i, x^2, ..., x^m\right) \right\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X,...,X)}} (\sum_{i=1}^{n} \left| \Phi\left(g^i, x^2, ..., x^m\right) \right|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} \left| x^*\left(g^i\right) \right|^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

puisque $x \to \Phi(x, x^2, ..., x^m)$ est une forme linéaire sur X de norme ≤ 1, donc $u \in \Pi_2(X; Y)$. Par la forme dual du théorème de Kwapień, Y est isomorphe à un Hilbert. $\blacksquare$

Notons que l'implication (3) $\Longrightarrow$ (1) de ce théorème est un cas particulier du Théorème 3.5 qui va suivre.

Corollaire 3.4. *Soient $H_1, ..., H_m, H$ des espaces de Hilbert, alors*

$$\mathcal{L}_d^p(H_1, ..., H_m; H) \subset \mathcal{D}_q^m(H_1, ..., H_m; H) \subset \mathcal{L}_s^r(H_1, ..., H_m; H)$$

pour tous $1 < p, r, q < \infty$.

3.2 Caractérisation m-linéaire des sous espaces de L_p

Dans cette section, on donne une version multilinéaire du théorème de caractérisation linéaire de sous espaces fermés de L_p, voir [DJT95] , qui est : Y est isomorphe à un sous espace fermé de L_p $(1 \leq p < \infty)$ si, et seulement si, pour tout espace de Banach X,

$$\mathcal{D}_{p^*}(X; Y) \subseteq \Pi_p(X; Y). \tag{3.1}$$

Théorème 3.5. *Fixons $m \geq 2$. Soit $1 \leq p < \infty$ et Y un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(a) L'espace Y est isomorphe à un sous espace fermé de L_p.

(b) Pour tous espaces de Banach $X_1, ..., X_m$

$$\mathcal{D}_{p^*}^m(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_s^p(X_1, ..., X_m; Y).$$

Preuve

Soit Y un sous espace fermé de L_p. Soit $T \in \mathcal{D}_{p^*}^m(X_1, ..., X_m; Y)$. Alors

$$\widetilde{T} \in \mathcal{D}_{p^*}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y),$$

et d'après l'inclusion (3.1), on a $\widetilde{T} \in \Pi_p(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y)$. Nous concluons par la Proposition 1.29 et donc $T \in \mathcal{L}_s^p(X_1, ..., X_m; X)$.

Inversement, soit X un espace de Banach et $u \in \mathcal{D}_{p^*}(X; Y)$. On va montrer que $u \in \Pi_p(X; Y)$. Pour $2 \leq j \leq m$ on considère $x^j \in B_{X_j}$ et $x_j^* \in B_{X_j^*}$ tels que $x_j^*(x^j) = 1$. L'opérateur multilinéaire

$$T = u \otimes x_2^* \otimes ... \otimes x_m^* : \underbrace{X \times ... \times X}_{m} \to Y$$

est Cohen fortement p^*-sommant. Donc, par hypothèse, T est dans $\mathcal{L}_s^p(X, ..., X; Y)$. Par un argument analogue à celui de la preuve du Théorème 3.3, on peut facilement montrer que u est p-sommant. ■

Corollaire 3.6. *Soit* $1 < p \leq \infty$. *Si* $X_1, ..., X_m$ *sont des espaces* $\mathcal{L}_p$ *et* Y *est un* espace $\mathcal{L}_{p^*}$, *alors*

$$\mathcal{L}_d^{p^*}(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \Pi_{p^*}^m(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{L}_s^{p^*}(X_1, ..., X_m; Y).$$

Remarque 3.7. Ce Corollaire est une version multilinéaire du cas linéaire (RL)(k).

3.3 Caractérisation polynomial d'un espace de Hilbert

Cette Section a fait l'objet d'une publication en collaboration avec Achour Dahmane [ASaa10].

Let X be a Banach space. Kwapień [Kwa70] has shown that : X is isomorphic to a Hilbert space if, and only if, for every Banach spaces Y and every absolutely 2-summing operators u from X into Y, the conjugate operator u^* is absolutely 2-summing, i.e., u is strongly 2-summing in the sense of Cohen [Coh73]. This theorem of Kwapień is a response to a question posed by J.S. Cohen [Coh70] who had previously established an isometric version. In this section, we will give a polynomial version of this characterization of Hilbert space. For this, we will introduce and study Cohen strongly summing polynomials, extending the definition given by Cohen for linear operators and by Achour and Mezrag [AM07] for multilinear mappings. We show, for instance, that a polynomial is Cohen strongly p-summing if, and only if, its associated symmetric multilinear mapping is Cohen strongly p-summing, if and only if, its linearization is strongly p-summing linear operator. As consequence, certain inclusion theorems are given

This paper is organized as follows.

In section 1, we recall some facts about polynomial mappings.

In section 2, we study the space of Cohen strongly p-summing polynomials between Banach spaces. We give a natural analog of Pietsch Domination Theorem similar to the m-linear case.

In section 3, we discuss the relationships between the classes of Cohen strongly p-summing polynomials, multilinear and linear operators. As consequence, we compare this notion with strongly p-summing polynomials (in the sense of Dimant), where the rang space is an $\mathcal{L}_{p^*}$-space. We end this section by comparing Cohen strongly p-summing and p-dominated polynomials when the domain is a Hilbert space.

In section 4, we give our main result, that is : the Banach space X is isomorphic to a Hilbert space if, and only if, for all Banach spaces Y and for every 2-dominated polynomials P from X into Y, P is Cohen strongy 2-summing polynomial.

3.3.1 Definitions and general results

The notation and terminology used in this paper are standard in Banach space theory. However, we shall recall some terminology : Let X be a Banach space and $1 \leq p \leq \infty$. We denote by $l_p^n(X)$ the space of all sequences $(x_i)_{i=1}^n$ in X equipped with the norm

$$\left\|(x_i)_{1\leq i\leq n}\right\|_{l_p^n(X)} = (\sum_1^n \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

and by $l_p^{n\ \omega}(X)$ the space of all sequences $(x_i)_{i=1}^n$ in X equipped the norm

$$\|(x_n)\|_{l_p^{n\ \omega}(X)} = \sup_{\|x^*\|_{X^*}=1} (\sum_1^n |\langle x_i, x^*\rangle|^p)^{\frac{1}{p}},$$

where X^* denotes the topological dual of X. The closed unit ball of X will be denoted by B_X. The vector space of bounded linear operators from X to Y will be noted by $\mathcal{B}(X;Y)$.

A map $P : X \to Y$ is an m-homogeneous polynomial if there exists a unique symmetric m-linear operator $\hat{P} : X \times ... \times X \to Y$ such that

$$P(x) = \hat{P}\left(x, \overset{(m)}{\dots}, x\right)$$

for every $x \in X$. Both are related by the polarization formula [Muj86, Theorem 1.10]

$$\hat{P}\left(x^1, ..., x^m\right) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \epsilon_1 ... \epsilon_m P(\sum_{j=1}^{m} \epsilon_j x^j). \tag{3.2}$$

P is bounded on the unit ball of X if and only if $\hat{P}$ is bounded on. The norms are related by the inequalities [Muj86, Theorem 2.2]

$$\|P\| \leq \left\|\hat{P}\right\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P\|. \tag{3.3}$$

We denote by $\mathcal{P}\left({}^m X; Y\right)$, the Banach space of all continuous m-homogeneous polynomials from X into Y endowed with the norm

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup\left\{\|P(x)\| \,/\, \|x\| \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{C : \|P(x)\| \leq C\|x\|^m \text{ for all } x \in X\right\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

If $Y = \mathbb{K}$, we write simply $\mathcal{P}\left({}^m X\right)$. For the general theory of polynomials on Banach spaces, we refer to [Din99] and [Muj86]. By $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ we denote the completed projective tensor product of $X_1, ..., X_m$. If $X = X_1 = ... = X_m$ we write $\widehat{\otimes}_\pi^m X$. By $\otimes_s^m X := X \otimes_s \overset{(m)}{\cdots} \otimes_s X$ we denote the m fold symmetric tensor product of X, that is, the set of all elements $u \in \otimes^m X$ of the form

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_i, \ (n \in \mathbb{N}, x_i \in X, 1 \leq i \leq n)$$

By $\widehat{\otimes}_{\pi,s}^m X$ we denote the closure of $\otimes_s^m X$ in $\widehat{\otimes}_\pi^m X$. For symmetric tensor products, we refer to [Flo97]. If $P \in \mathcal{P}\left({}^m X; Y\right)$ we define its linearization $\widetilde{P} : \otimes_s^m X \to Y$ by

$$\widetilde{P}(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_i) = \sum_{i=1}^{n} P\left(x_i\right)$$

for all $x_i \in X, 1 \leq i \leq n$. Consider the canonical polynomial $\delta_m : X \to \widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X$ define by

$$\delta_m(x) = x \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x$$

We have the next diagram which is commute

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "\delta_m"'] & Y \\ & \widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X \arrow[u, "\widetilde{P}"'] \end{tikzcd}$$

in the other words $P = \widetilde{P} \circ \delta_m$.

The definition of strongly p-summing polynomial was introduced by V. Dimant in [Dim03].

Definition 3.8. Let $1 \leq p \leq \infty$ and $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$. The polynomial P is strongly p-summing if there exists a constant $C \geq 0$ such that for, every $x_1, ..., x_n \in X$,

$$(\sum_{i=1}^n \|P(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{P}(^m X)}} (\sum_{i=1}^n |\Phi(x_i)|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{3.5}$$

The class of strongly p-summing m-homogeneous polynomials from X into Y, which is denoted by $\mathcal{P}^p_{ss}(^m X; Y)$ is a Banach space for the norm $\|P\|_{ss,p}$, i.e. the smallest constant C such that inequality (3.5) holds.

We also recall the definition of p-dominated plynomials.

Definition 3.9 [MTon99]. Given $1 \leq p < \infty$, a polynomial $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ is p-dominated if there exists a constant $C > 0$ such that, for all $n \in \mathbb{N}^*$ and for every $x_1, ..., x_n \in X$,

$$(\sum_{i=1}^n \|P(x_i)\|^{\frac{p}{m}})^{\frac{m}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p)^{\frac{m}{p}}$$

We denote by $\mathcal{P}_d^p(^mX;Y)$ the space of p-dominated polynomials $P : X \to Y$ and by $\delta_p(P)$ the infimum of all C verifying the above inequality. For $p \geq m$, $\delta_p(P)$ is a norm on $\mathcal{P}_d^p(^mX;Y)$, but for $p < m$ it is only a quasinorm. Such polynomials are sometimes called absolutely $(p/m, p)$-summing polynomials.

3.3.2 Cohen strongly p-summing m-homogeneous polynomials

We give in this section a natural generalization of strongly p-summing linear operators. We extend "*Pietsch Domination Theorem*" to the category of polynomials mappings. In the linear case, Cohen easily got it by duality because the adjoint of a strongly p-summing operator is absolutely p^*-summing. In the multilinear case, the proof in [AM07] is direct induces applying Ky Fan's lemma.

Before giving the definition for polynomials mappings, we start by recalling the definition of Cohen strongly p-summing multilinear operators which is introduced as an extension of strongly p-summing operators.

Definition 3.10 [AM07] . Let $1 \leq p \leq \infty$. An m-linear operator $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ (X_j, Y are arbitrary Banach spaces and $m \in \mathbb{N}^*$) is Cohen strongly p-summing if and only if there is a constant $C > 0$ such that for any $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$, $(j = 1, ..., m)$ and any $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| \leq C(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^{p})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\| (y_i^*(y)) \right\|_{l_{p^*}^n}. \tag{3.6}$$

The class of Cohen strongly p-summing m-linear operators from $X_1 \times ... \times X_m$ into Y, which is denoted by $\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$, is a Banach space for the norm $d_p^m(T)$, i.e. the smallest constant C such that inequality (3.6) holds.

Definition 3.11. Fix $m \in \mathbb{N}$. Let $1 < p \leq \infty$ and let X, Y be Banach spaces. An m-homogeneous polynomial $P : X \longrightarrow Y$ is Cohen strongly p-summing, if there is a constant $C > 0$ such that for any $x_1, ..., x_n \in X$ *and* $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), y_i^* \rangle| \leq C (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{l_{p^*}^n}. \tag{3.7}$$

The class of such polynomials is denoted by $\mathcal{P}_{Coh}^p(^m X; Y)$; it is equipped with the norm $d_p(P)$, i.e. the smallest constant C such that inequality (3.7) holds. For $p = 1$ we have $\mathcal{P}_{Coh}^1(^m X; Y) = \mathcal{P}(^m X; Y)$.

Or in the other words if

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), v(e_i) \rangle| \leq K (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^{mp})^{\frac{1}{p}} \|v\|,$$

for all $v \in \mathcal{B}(l_p^n; Y^*)$.

Let us first give an example of a Cohen strongly p-summing polynomial, $1 \leq p \leq \infty$. Let $m \in \mathbb{N}$, $u : X \to Y$ be a strongly p-summing linear operator and $\varphi \in X^*$. The polynomial

$$P : X \to Y : P(x) = \varphi^{m-1}(x) u(x)$$

is Cohen strongly p-summing. Indeed, for $x_1, ..., x_n \in X$, $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), y_i^* \rangle| = \sum_{i=1}^{n} |\langle \varphi^{m-1}(x_i) u(x_i), y_i^* \rangle| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\langle u(\varphi^{m-1}(x_i) x_i), y_i^* \rangle| \\ &\leq d_p(u) \|\varphi\|^{m-1} (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} (\sum_{i=1}^{n} |y_i^*(y)|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

So, P is Cohen strongly p-summing and $d_p(P) \leq \|\varphi\|^{m-1} d_p(u)$.

The polynomial version of "*Pietsch Domination Theorem*" goes as follows. Its proof is an adaptation of the proof for the multilinear case (see [AM07]).

Theorem 3.12. *Let $m \in \mathbb{N}$. An m-homogeneous polynomial $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ is Cohen strongly p-summing $(1 < p \leq \infty)$ if and only if there is a Radon probability measure μ*

on $B_{Y^{**}}$ and $C > 0$ such that, for all $x \in X$ and $y^* \in Y^*$

$$|\langle P(x), y^* \rangle| \leq C \|x\|^m \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**})\right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.8}$$

Moreover, in this case $d_p(P) = \min\{C : C \text{ verifies } (3.8)\}$.

An immediate consequence of Theorem 2.3 is the following.

Corollary 3.13. *Let $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$.*
If $P \in \mathcal{P}_{Coh}^{p_2}({}^m X; Y)$ then $P \in \mathcal{P}_{Coh}^{p_1}({}^m X; Y)$ and $d_{p_1}(P) \leq d_{p_2}(P)$.

3.3.3 Characterization and inclusion theorems

In this section, we investigate connections between the class of Cohen strongly summing polynomials and other classes of polynomial mappings, such as p-dominated and strongly summing polynomials (in the sense of Dimant). First, we give the relation between P and its associated symmetric m-linear operator $\hat{P}$ concerning the notion of Cohen strongly p-summing. A similar characterization holds for p-dominated polynomials (see [MTon99]).

Theorem 3.14. *The polynomial $P \in \mathcal{P}({}^m X; Y)$ is Cohen strongly p-summing if, and only if, its associated symmetric m-linear operator $\hat{P} \in \mathcal{L}({}^m X; Y)$ is Cohen strongly p-summing.*

Proof. Let us first assume that $\hat{P}$ is Cohen strongly p-summing. Let $x_1, ..., x_n \in X$ and $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$; then

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), y_i^* \rangle| = \sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle \hat{P}(x_i, ..., x_i), y_i^* \right\rangle \right|$$
$$\leq d_p^m(\hat{P}) (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{l_{p^*}^n}.$$

Hence, P is Cohen strongly p-summing and $d_p(P) \leq d_p^m(\hat{P})$.

Conversely, let $P \in \mathcal{P}^p_{Coh}(^mX;Y)$. Let $x^j \in X$ such that $\|x^j\| \leq 1$ $(1 \leq j \leq m)$ and $y^* \in Y^*$. Using the polarization formula (3.2), we obtain

$$\left|\left\langle \hat{P}\left(x^1,...,x^m\right), y^*\right\rangle\right| =|< \tfrac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_1,...,\epsilon_m=\pm 1} \epsilon_1...\epsilon_m P(\sum_{j=1}^m \epsilon_j x^j), y^* >|$$
$$\leq \tfrac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_1,...,\epsilon_m=\pm 1} |< P(\sum_{j=1}^m \epsilon_j x^j), y^* >|$$
$$\leq \tfrac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_1,...,\epsilon_m=\pm 1} d_p(P) \parallel \sum_{j=1}^m \epsilon_j x^j \parallel^m (\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}$$
$$\leq \tfrac{1}{m!2^m} d_p(P) \sum_{\epsilon_1,...,\epsilon_m=\pm 1} (\sum_{j=1}^m \|x^j\|)^m (\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}})$$
$$\leq \tfrac{1}{m!2^m} d_p(P) 2^m m^m (\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}$$
$$\leq \tfrac{m^m}{m!} d_p(P) (\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}).$$

So, for every $x^j \in B_X$ $(1 \leq j \leq m)$, we have

$$\left|\left\langle \hat{P}\left(x^1,...,x^m\right), y^*\right\rangle\right| \leq \tfrac{m^m}{m!} d_p(P) (\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}).$$

and for $x^j \in X$ $(x^j \neq 0)$,

$$\left|\left\langle \hat{P}\left(\tfrac{x^1}{\|x^1\|},...,\tfrac{x^m}{\|x^m\|}\right), y^*\right\rangle\right| \leq \tfrac{m^m}{m!} d_p(P) (\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}})$$

Thus

$$\left|\left\langle \hat{P}\left(x^1,...,x^m\right), y^*\right\rangle\right| \leq \tfrac{m^m}{m!} d_p(P) \prod_{j=1}^m \|x^j\| (\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}})$$

Therefore, by [AM07, Theorem 2.4], $\hat{P}$ is Cohen strongly p-summing and $d^m_p\left(\hat{P}\right) \leq \frac{m^m}{m!} d_p(P)$. ■

The following characterization of Cohen strongly p-summing polynomials is useful and will be used later.

Proposition 3.15. *Let $1 < p \leq \infty$. Let $P : X \to Y$ be a m-homogeneous polynomial and $\widetilde{P}$ its linearization. The following properties are equivalent*

(a) *The polynomial P belongs to $\mathcal{P}^p_{Coh}(^mX;Y)$.*

(b) *The operator $\widetilde{P}$ belongs to $\mathcal{D}_p\left(\widehat{\otimes}^m_{\pi,s}X;Y\right)$.*

Proof. Suppose that $\widetilde{P} \in \mathcal{D}_p\left(\widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X; Y\right)$. For $x_1, ..., x_n \in X$ and $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, we have

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left| \langle P(x_i), y_i^* \rangle \right| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle \widetilde{P}(x_i \otimes ... \otimes x_i), y_i^* \right\rangle \right| \\
&\leq d_p\left(\widetilde{P}\right) (\sum_{i=1}^{n} \|x_i \otimes ... \otimes x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{l^n_{p^*}} \\
&\leq d_p\left(\widetilde{P}\right) (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{l^n_{p^*}}.
\end{aligned}$$

Conversely, suppose that P is Cohen strongly p-summing. Let $v \subset \widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X$ such that $v \neq 0$ and $y^* \in Y^*$. Suppose that $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes ... \otimes x_i$. Then

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \widetilde{P}(v), y^* \right\rangle \right| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \langle P(x_i, ..., x_i), y^* \rangle \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} d_p^m(P) \|x_i\|^m (\textstyle\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}} \\
&= d_p^m(P) (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^m)(\textstyle\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned}$$

Taking the infimum over all represents of v we get

$$\left| \left\langle \widetilde{P}(v), y^* \right\rangle \right| \leq d_p^m(P) \|v\| (\textstyle\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}$$

Therefore, by [Coh73, Theorem 2.3.1], $\widetilde{P}$ is strongly p-summing and $d_p^m(P) = d_p\left(\widetilde{P}\right)$.
■

Corollary 3.16. *The following are equivalent for $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$.*

(1) *The polynomial P is Cohen strongly p-summing.*

(2) *The operator $\widetilde{P}$ is Cohen strongly p-summing from $\widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X$ into Y.*

(3) *There exist a Cohen strongly p-summing operator u and a polynomial Q such that $P = u \circ Q$.*

Proof. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Proposition 3.15.

(2) $\Rightarrow$ (3) We have the result directly from the factorization $P = \widetilde{P} \circ \delta_m$.

(3) $\Rightarrow$ (1) There is a Banach space Z, an operator linear u in $\mathcal{D}_p(Z;Y)$ and a polynomial Q in $\mathcal{P}(^m X;Z)$ such that $P = u \circ Q$. For $x_1, ..., x_n \in X$ and $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, we have

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^{n} |\langle u \circ Q(x_i), y_i^* \rangle| \\
&\leq d_p(u) (\sum_{i=1}^{n} \|Q(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{l_{p^*}^n} \\
&\leq d_p(u) \|Q\| (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{l_{p^*}^n}.
\end{aligned}$$

Hence, P is Cohen strongly p-summing. ■

If Y is an $\mathcal{L}_{p^*}$-space, we have the following inclusion.

Corollary 3.17. *Let $1 < p < \infty$. If Y is an $\mathcal{L}_{p^*}$-space then*

$$\mathcal{P}_{Coh}^{p}(^m X;Y) \subset \mathcal{P}_{ss}^{p^*}(^m X;Y).$$

Proof. Let $P \in \mathcal{P}_{Coh}^{p}(^m X;Y)$. By Corollary 3.16, there exist a Cohen strongly p-summing operator $u : Z \to Y$ and a polynomial $Q : X \to Z$ such that $P = u \circ Q$. Since Y is an $\mathcal{L}_{p^*}$-space the operator $u : Z \to Y$ is p^*-summing by [Coh73, Theorem 3.2.3]. Now, for $x_i \in X$ $(1 \leq i \leq n)$

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} \|P(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{i=1}^{n} \|u \circ Q(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi(u) \sup\nolimits_{z^* \in B_{Z^*}} (\sum_{i=1}^{n} |z^*(Q(x_i))|^p)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

since the polynomial $z^* \circ Q$ belongs to $\mathcal{P}\left({}^m X\right)$ we have

$$(\sum_{i=1}^{n} \|P\left(x_i\right)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|Q\| \, \pi\left(u\right) \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{P}\left({}^m X\right)}} (\sum_{i=1}^{n} |\Phi\left(x_i\right)|^p)^{\frac{1}{p}}$$

i.e., P is strongly p^*-summing polynomial. ■

Next, we give an inclusion between the class of p-dominated and Cohen strongly q-summing polynomials. The linear version of this inclusion is due to Cohen [Coh73] for $p = q = 2$ and to Bu [Bu03] for all p and q. The reader can see [AM07] for more details about the multilinear version.

Corollary 3.18. *Let $m \in \mathbb{N}$ and $1 < p, q < \infty$. Let H be a Hilbert space and Y be a Banach space. Let $P \in \mathcal{P}\left({}^m H; Y\right)$. If P is p-dominated polynomial, then P is Cohen strongly q-summing polynomial.*

Proof. Fix $1 < p, q < \infty$. Let $P \in \mathcal{P}\left({}^m H; Y\right)$ and $\hat{P} \in \mathcal{L}\left({}^m H; Y\right)$ the associated symmetric m-linear. Assume that P is p-dominated polynomial. By [Muj86, Theorem 6], $\hat{P}$ is p-dominated and by [AM07, Theorem 3.2], $\hat{P}$ is a Cohen strongly q-summing m-linear operator. So, Theorem 3.14. concludes the proof. ■

3.3.4 Main result

Given $m \in \mathbb{N}$ and X be a Banach space. In this section, we show that : X is isomorphic to a Hilbert space if, and only if, for every Banach space Y and every m-homogeneous 2-dominated polynomial from X into Y, u is Cohen strongly 2-summing. We start by a preparatory result.

Theorem 3.19. *Let $m \in \mathbb{N}, 1 < p, q < \infty$ and X, Y be Banach spaces such that $\mathcal{P}_d^p({}^m X; Y) \subseteq \mathcal{P}_{Coh}^q({}^m X; Y)$. Then $\Pi_p(X; Y) \subseteq \mathcal{D}_q(X; Y)$.*

Proof. Let $u \in \Pi_p\left(X; Y\right)$, we will show that $u \in \mathcal{D}_q\left(X; Y\right)$. Fix $x_0 \in B_X$ and $x_0^* \in B_{X^*}$

such that $x_0^*(x_0) = 1$. Define the operator $\pi_j : \widehat{\otimes}_{\pi,s}^{j+1} X \to \widehat{\otimes}_{\pi,s}^{j} X$ $(1 \leq j \leq m-1)$ by

$$\pi_j(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \overset{(j+1)}{\cdots} \otimes x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_0^*(x_i) x_i \otimes \overset{(j)}{\cdots} \otimes x_i$$

Let $\delta_m : X \to \widehat{\otimes}_{\pi,s}^{m} X$ be the canonical polynomial. We show that the polynomial $P := u \circ \pi_1 \circ ... \circ \pi_{m-1} \circ \delta_m : X \to Y$ is p-dominated. We reason by induction on m. For $m = 1$, the statement is trivial. We suppose now that

$$u \circ \pi_1 \circ ... \circ \pi_{m-2} \circ \delta_{m-1} : X \to Y$$

is p-dominated. Let $x_i \in X$ $(1 \leq i \leq n)$. Then

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \|P(x_i)\|^{\frac{p}{m}} = \sum_{i=1}^{n} \|u \circ \pi_1 \circ ... \circ \pi_{m-1} \circ \delta_m (x_i)\|^{\frac{p}{m}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\| u \circ \pi_1 \circ ... \circ \pi_{m-1} \left(x_i \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_i \right) \right\|^{\frac{p}{m}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_0^*(x_i)|^{\frac{p}{m}} \left\| u \circ \pi_1 \circ ... \circ \pi_{m-2} \left(x_i \otimes \overset{(m-1)}{\cdots} \otimes x_i \right) \right\|^{\frac{p}{m}}
\end{aligned}$$

By Hölder's inequality

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \|P(x_i)\|^{\frac{p}{m}} \\
\leq \ & (\sum_{i=1}^{n} |x_0^*(x_i)|^p)^{\frac{1}{m}} (\sum_{i=1}^{n} \|u \circ \pi_1 \circ ... \circ \pi_{m-2} \circ \delta_{m-1}(x_i)\|^{\frac{p}{m-1}})^{\frac{m-1}{m}}
\end{aligned}$$

We obtain by the induction hypothesis and the fact that $x_0^* \in B_{X^*}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \|P(x_i)\|^{\frac{p}{m}} \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_0^*(x_i)|^p)^{\frac{1}{m}} (C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p)^{\frac{m-1}{p}})^{\frac{p}{m}} \\
&= C^{\frac{p}{m}} (\sum_{i=1}^{n} |x_0^*(x_i)|^p)^{\frac{1}{m}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p)^{\frac{m-1}{m}} \\
&\leq C^{\frac{p}{m}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p .
\end{aligned}$$

Therefore, P is p-dominated and hence Cohen strongly q-summing. By the decomposition $P = \widetilde{P} \circ \delta_m$ we have $\widetilde{P} = u \circ \pi_1 \circ ... \circ \pi_{m-1}$ which is Cohen strongly q-summing by the

Proposition 3.15. Now, as it has been shown in the proof of [Bla97, Theorem 3], there are operators $k_j : \widehat{\otimes}^{j}_{\pi,s} X \to \widehat{\otimes}^{j+1}_{\pi,s} X$ $(1 \leq j \leq m-1)$ defined in terms of x_0^* and x_0 such that $\pi_j \circ k_j$ is the identity map on $\widehat{\otimes}^{j}_{\pi,s} X$. We have

$$u = u \circ \pi_1 \circ ... \circ \pi_{m-1} \circ k_{j-1} \circ ... \circ k_1 : X \to Y$$

which is, by the ideal property, Cohen strongly q-summing. ∎

Theorem 3.20. *Let X be a Banach space. The following properties are equivalent.*

(1) *The space X is isomorphic to a Hilbert space.*

(2) *For all $m \in \mathbb{N}$, $1 < p, q < \infty$, and every Banach space Y*

$$\mathcal{P}^p_d({}^m X; Y) \subseteq \mathcal{P}^q_{Coh}({}^m X; Y)$$

(3) *For all $m \in \mathbb{N}$ and every Banach space Y*

$$\mathcal{P}^2_d({}^m X, Y) \subseteq \mathcal{P}^2_{Coh}({}^m X, Y)$$

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) Immediate by Corollary 3.18.

(2) $\Rightarrow$ (3) Obviously.

(3) $\Rightarrow$ (1) It is enough to apply Theorem 3.19. and Kwapień's theorem. ∎

Chapitre 4

Les opérateurs multilinéaires Cohen $(p; p_1, ..., p_m)$-nucléaires

Dans ce chapitre on introduit les opérateurs m-linéaires de type Cohen $(p; p_1, ..., p_m)$-nucléaires. On démontre l'analogue du théorème de factorisation de Pietsch, ce qui permet de représenter cet espace comme composition de l'espace linéaire $\mathcal{D}_p$ avec l'espace des opérateurs multilinéaires $(p; p_1, ..., p_m)$-sommants. Dans le cas où $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$, on donne une version multilinéaire de la factorisation de Kwapień.

4.1 Introduction et motivation

Dans la définition des opérateurs linéaires sommants, il est bien connu qu'un opérateur : $T : X \to Y$ est 1-sommant si et seulement si l'application

$$Id \otimes T : l_p \widehat{\otimes}_\varepsilon X \to l_p \widehat{\otimes}_\pi Y, \tag{4.1}$$

est continue pour $p = 1$. Si $p > 1$, la continuité de cette application entraine que T est p-sommant, mais la réciproque n'est pas vraie en général. Cohen a introduit dans [Coh73] la classe $\mathcal{N}_p$ des opérateurs p-nucléaires dont la définition est : T est p-nucléaire si l'application $Id \otimes T$ définie dans (4.1) est continue. Les travaux de Cohen en 1973 et de Kwapień en 1972 permettent de représenter l'espace $\mathcal{N}_p$ par

$$\mathcal{N}_p = \mathcal{D}_p \circ \Pi_p. \tag{4.2}$$

Il a y plusieurs façons d'engendrer un idéal multilinéaire à partir de $\mathcal{N}_p$ à savoir les méthodes de Pietsch décrites au chapitre 1. L'abondance des classes qui généralisent Π_p nous permettra de définir d'autres idéaux multilinéaires, en remplaçant Π_p dans la formule (4.2) par ses classes généralisées. Dans ce chapitre, on s'intéresse à la classe obtenue lorsqu'on remplace Π_p par l'espace des opérateurs multilinéaires absolument $(p; p_1, ..., p_m)$-sommants. Si $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$, on obtient un résultat analogue à (4.2) ; cette classe peut donc s'interpréter à la fois par la méthode de composition et la méthode de factorisation. Cette étude pourrait se faire avec d'autres classes, comme celle des opérateurs multilinéaires p-dominés, p-semi intégral ou fortement p-sommnats. Nous entamons donc ce chapitre par introduire la définition suivante qui est une généralisation du cas linéaire.

Définition 4.1. Soient $1 \leq p \leq \infty$; $p_1, ..., p_m \in]0, \infty]$ avec $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$. Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est Cohen $(p; p_1, ..., p_m)$-nucléaire s'il existe une constante positive C telle que, pour tous $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$, $(j = 1, ..., m)$, $y_1^*, ..., y_m^* \in Y^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{i=1}^{n} \right\|_{l_{p_j}^{n,w}(X_j)} \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left|y_i^*\left(y\right)\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{4.3}$$

La classe des opérateurs m-linéaires Cohen $(p; p_1, ..., p_m)$-nucléaires de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y, notée $\mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$, est un espace de Banach pour la norme

$$N_{(p;p_1,...,p_m)}(T) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité (4.3)}\}.$$

Remarque 4.2. On a

$$\mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}\left(X_1,...,X_m;Y\right) \subset \mathcal{L}^m_{(p;p_1,...,p_m)}\left(X_1,...,X_m;Y\right).$$

En effet, comme $\left(l_p^n\left(Y\right)\right)^* = l_{p^*}^n\left(Y^*\right)$ pour tout espace de Banach Y, on peut donc écrire

$$\left\|(y_i)\right\|_{l_p^n(Y)} = \sup_{\left\|(y_i^*)\right\|_{l_{p^*}^n(Y^*)}\leq 1} \left|\left\langle (y_i), (y_i^*)\right\rangle\right| = \sup_{\left\|(y_i^*)\right\|_{l_{p^*}^n(Y^*)}\leq 1} \left|\sum_{i=1}^n \left\langle y_i, y_i^*\right\rangle\right|.$$

L'inégalité (4.3) implique

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^n \left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| &\leq \sum_{i=1}^n \left|\left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| \\ &\leq C\prod_{j=1}^m \left\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^n\right\|_{l_{p_j}^{n,w}(X_j)} \sup_{\|y\|=1}\left(\sum_{i=1}^n \left|y_i^*\left(y\right)\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}.\end{aligned}$$

En prenant le supremum sur toutes les suites $\left(y_i^*\right)_{i=1}^n \subset Y^*$ telles que $\left\|(y_i^*)\right\|_{l_{p^*}^n(Y^*)} \leq 1$, on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^n \left\|T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\prod_{j=1}^m \left\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^n\right\|_{l_{p_j}^{n,w}(X_j)},$$

c'est à dire, T est absolument $(p;p_1,...,p_m)$-sommant (i.e., $T \in \mathcal{L}^m_{(p;p_1,...,p_m)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$).

Remarque 4.3. Si $p=1$, on trouve la coïncidence suivante

$$\mathcal{N}_{(1;p_1,...,p_m)}\left(X_1,...,X_m;Y\right) = \mathcal{L}^m_{(1;p_1,...,p_m)}\left(X_1,...,X_m;Y\right).$$

En effet, soit $T \in \mathcal{L}^m_{(1;p_1,...,p_m)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$; alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \left|\left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left\|T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\|\right)\sup_{i=1}^m \left\|y_i^*\right\| \\ &\leq C\prod_{j=1}^m \left\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^n\right\|_{l_{p_j}^{n,w}(X_j)} \sup_{i=1}^m \left\|y_i^*\right\|,\end{aligned}$$

donc T est Cohen $(1;p_1,...,p_m)$-nucléaire.

Si Y est de dimension finie,

$$\mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)=\mathcal{L}^m_{(p;p_1,...,p_m)}\left(X_1,...,X_m;Y\right).$$

En effet, soit $T\in\mathcal{L}^m_{(p;p_1,...,p_m)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$. D'après le Corollaire (2.12), l'opérateur identité Id_Y est Cohen fortement p-sommant, donc

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right| &= \sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle Id_Y\circ T\left(x_i^1,...,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right| \\ &\leq C(\sum_{i=1}^{n}\left\|T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\|^p)^{\frac{1}{p}}\sup_{\|y\|=1}(\sum_{i=1}^{n}\left|y_i^*\left(y\right)\right|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq C\prod_{j=1}^{m}\left\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^n\right\|_{l_{p_j}^{n,w}(X_j)}\sup_{\|y\|=1}(\sum_{i=1}^{n}\left|y_i^*\left(y\right)\right|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}.\end{aligned}$$

Proposition 4.4. *La classe $\mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}$ est un idéal de Banach dans l'espace des opérateurs multilinéaires bornés.*

Preuve. Tout d'abord, comme $\frac{1}{p}\leq\frac{1}{p_1}+...+\frac{1}{p_m}$, l'inégalité de Hölder généralisée donne

$$(\sum_{i=1}^{n}\left|a_i^1...a_i^m\right|^p)^{\frac{1}{p}}\leq(\sum_{i=1}^{n}\left|a_i^1\right|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}....(\sum_{i=1}^{n}\left|a_i^m\right|^{p_m})^{\frac{1}{p_m}}.$$

Il suffit de vérifier (2) de la Définition (1.5). Pour cela on va montrer la propriété pour les opérateurs de la forme $T = x_1^* \otimes ... \otimes x_m^* \otimes y$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle x_1^*\left(x_i^1\right) ... x_m^*\left(x_i^m\right) y, y_i^* \right\rangle \right| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left| x_1^*\left(x_i^1\right) ... x_m^*\left(x_i^m\right) \right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \langle y, y_i^* \rangle \right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left| x_1^*\left(x_i^1\right) \right|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} .... \left(\sum_{i=1}^{n} \left| x_m^*\left(x_i^m\right) \right|^{p_m}\right)^{\frac{1}{p_m}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \langle y, y_i^* \rangle \right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \left(\|y\| \prod_{j=1}^{m} \left\| x_j^* \right\|\right) \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_i^j\right)_{i=1}^{n} \right\|_{l_{p_j}^{n,w}(X_j)} \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| y_i^*(y) \right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Donc, $T \in \mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}(X_1, ..., X_m; Y)$ et $\mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}(T) = \|y\| \prod_{j=1}^{m} \left\| x_j^* \right\|$. ■

4.2 Connexion avec le produit tensoriel

Dans cette partie, on définira une norme tensorielle raisonnable sur le produit tensoriel algébrique $X_1 \otimes ... \otimes X_m \otimes Y^*$ et on montrera que son dual topologique muni de cette norme s'identifier isométriquement à l'espace des opérateurs multilinéaires Cohen $(p; p_1, ..., p_m)$-nucléaires. Cette identification nous permettra de le comparer facilement avec d'autre espaces d'opérateurs multilinéaires. Soient maintenant $p, p_1, ..., p_m \in [1, \infty]$. Soit $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m \otimes Y^*$. On considère

$$w_{(p;p_1,...,p_m)}(u) = \inf \left\{ \left\| \left(x_k^1\right) \right\|_{l_{p_1}^w} ... \left\| \left(x_k^m\right) \right\|_{l_{p_m}^w} \left\| \left(y_k^*\right) \right\|_{l_{p^*}^w} \right\},$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations de u de la forme

$$u = \sum_{k=1}^{n} x_k^1 \otimes ... \otimes x_k^m \otimes y_k^*,$$

avec $x_k^j \in X_j$ et $y_k^* \in Y^*$; $1 \leq k \leq n$, $1 \leq j \leq m$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 4.5. *Soient $p, p_1, ..., p_m \in [1, \infty]$. Si $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$, alors $w_{(p;p_1,...,p_m)}$ est une norme tensorielle raisonnable sur $X_1 \otimes ... \otimes X_m \otimes Y^*$.*

Pour la démonstration, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.6. *Soient $\lambda_1, ..., \lambda_m > 0$. Pour $r_1, ..., r_m$ tels que $\frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r_m} = 1$, on a*

$$\lambda_1 ... \lambda_m \leq \frac{1}{r_1}\lambda_1^{r_1} + ... + \frac{1}{r_m}\lambda_m^{r_m}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \lambda_1 ... \lambda_m &= e^{Log(\lambda_1)+...+Log(\lambda_m)} \\ &= e^{\frac{1}{r_1}Log\left(\lambda_1^{r_1}\right)+...+\frac{1}{r_m}Log(\lambda_m^{r_m})}, \end{aligned}$$

et on applique la convexité de la fonction exponentielle. ■

Preuve de Proposition 4.5. Soient $u', u'' \in X_1 \otimes ... \otimes X_m \otimes Y^*$ tels que

$$u' = \sum_{k=1}^{n'} x_k'^1 \otimes ... \otimes x_k'^m \otimes y_k'^*, \;\; u'' = \sum_{k=1}^{n''} x_k''^1 \otimes ... \otimes x_k''^m \otimes y_k''^*.$$

Posons $u = u' + u'' = \sum\limits_{k=1}^{n+n'} x_k^1 \otimes ... \otimes x_k^m \otimes y_k^*$ où

$$x_k^j = \begin{cases} x_k'^j & \text{si } 1 \leq k \leq n' \\ x_{k-n'}''^j & \text{si } n'+1 \leq k \leq n'+n'' \end{cases}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} & w_{(p;p_1,\ldots,p_m)}(u) \\ = & \inf\left\{\left\|\left(x_k^1\right)\right\|_{l_{p_1}^{n+n',w}(X_1)}\cdots\left\|\left(x_k^m\right)\right\|_{l_{p_m}^{n+n',w}(X_m)}\left\|\left(y_k^*\right)\right\|_{l_{p^*}^{n+n',w}(Y^*)}\right\} \\ \leq & \left\|\left(x_k^1\right)\right\|_{l_{p_1}^{n+n',w}(X_1)}\cdots\left\|\left(x_k^m\right)\right\|_{l_{p_m}^{n+n',w}(X_m)}\left\|\left(y_k^*\right)\right\|_{l_{p^*}^{n+n',w}(Y^*)}. \end{aligned}$$

Par le Lemme (4.6)

$$\begin{aligned} & w_{(p;p_1,\ldots,p_m)}(u) \\ \leq & \frac{1}{p_1}\left\|\left(x_k^1\right)\right\|_{l_{p_1}^{n+n',w}(X_1)}^{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_m}\left\|\left(x_k^m\right)\right\|_{l_{p_m}^{n+n',w}(X_m)}^{p_m}+\frac{1}{p^*}\left\|\left(y_k^*\right)\right\|_{l_{p^*}^{n+n',w}(Y^*)}^{p^*}. \end{aligned}$$

On peut écrire u', u'' de la façon suivante

$$u'=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k'^1}{\epsilon_1'}\right)\otimes\ldots\otimes\left(\frac{x_k'^m}{\epsilon_m'}\right)\otimes\left(\frac{y_k'^*}{\epsilon_{m+1}'}\right),\ u''=\sum_{k=1}^{n'}\left(\frac{x_k''^1}{\epsilon_1''}\right)\otimes\ldots\otimes\left(\frac{x_k''^m}{\epsilon_m''}\right)\otimes\left(\frac{y_k''^*}{\epsilon_{m+1}''}\right).$$

où

$$\begin{aligned} \epsilon_j' &= \frac{\lambda_j'}{\left(\lambda_1'\ldots\lambda_m'\lambda_{m+1}'\right)^{\frac{1}{p_j}}} \quad (1\leq j\leq m) \\ \epsilon_j'' &= \frac{\lambda_j''}{\left(\lambda_1''\ldots\lambda_m''\lambda_{m+1}''\right)^{\frac{1}{p_j}}} \quad (1\leq j\leq m) \\ \epsilon_{m+1}' &= \frac{\lambda_{m+1}'}{\left(\lambda_1'\ldots\lambda_m'\lambda_{m+1}'\right)^{\frac{1}{p^*}}} \\ \epsilon_{m+1}'' &= \frac{\lambda_{m+1}''}{\left(\lambda_1''\ldots\lambda_m''\lambda_{m+1}''\right)^{\frac{1}{p^*}}} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_j' &= \left\|\left(x_k'^j\right)\right\|_{l_{p_j}^{n',w}(X_j)} \quad (1\leq j\leq m) \\ \lambda_j'' &= \left\|\left(x_k''^j\right)\right\|_{l_{p_j}^{n'',w}(X_j)} \quad (1\leq j\leq m) \\ \lambda_{m+1}' &= \left\|\left(y_k'^*\right)\right\|_{l_{p^*}^{n',w}(Y^*)} \\ \lambda_{m+1}'' &= \left\|\left(y_k''^*\right)\right\|_{l_{p^*}^{n'',w}(Y^*)} \end{aligned}$$

Par un calcul simple, on obtient

$$w_{(p;p_1,...,p_m)}\left(u'+u''\right)\leq w_{(p;p_1,...,p_m)}\left(u'\right)+w_{(p;p_1,...,p_m)}\left(u''\right).$$

Le reste est facile. ■

Proposition 4.7. *Pour tous $p,p_1,...,p_m\in[1,\infty]$ tels que $\frac{1}{p_1}+...+\frac{1}{p_m}=\frac{1}{p}$, on a*

$$\varepsilon\leq w_{(p;p_1,...,p_m)}\leq g_p\leq\pi.$$

où ε,π sont les normes injective et projective sur $X_1\otimes...\otimes X_m\otimes Y^*$ et g_p est la morme tonsorielle définie dans (2.3).

Preuve. Soit $u=\sum_{k=1}^{n}x_k^1\otimes...\otimes x_k^m\otimes y_k^*\in X_1\otimes...\otimes X_m\otimes Y^*$. On a

$$\varepsilon\left(u\right)\;=\;\sup_{\left\|x_j^*\right\|=1,\left\|y^{**}\right\|=1}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}x_1^*\left(x_k^1\right)...x_m^*\left(x_k^m\right)y^{**}\left(y_k^*\right)\right|\right\},$$

par l'inégalité de Hölder (généraliseé)

$$\begin{aligned}&\varepsilon\left(u\right)\\ \leq\;&\sup_{\left\|x_1^*\right\|=1}(\sum_{k=1}^{n}\left|x_1^*\left(x_k^1\right)\right|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}...\sup_{\left\|x_m^*\right\|=1}(\sum_{k=1}^{n}\left|x_m^*\left(x\right)\right|^{p_m})^{\frac{1}{p_m}}\sup_{\left\|y^{**}\right\|=1}(\sum_{k=1}^{n}\left|y^{**}\left(y_k^*\right)\right|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}\\ =\;&\left\|(x_k^1)\right\|_{l_{p_1}^{n,w}(X_1)}...\left\|(x_k^m)\right\|_{l_{p_1}^{n,w}(X_m)}\left\|(y_k^*)\right\|_{l_{p^*}^{n,w}(Y^*)}.\end{aligned}$$

Comme u est arbitraire, $\varepsilon\left(u\right)\leq w_{(p;p_1,...,p_m)}\left(u\right)$. Les deux autres inégalités sont immédiates. ■

On note $X_1\widehat{\otimes}_w...\widehat{\otimes}_wX_m\widehat{\otimes}_wY^*$ le complété de $X_1\otimes...\otimes X_m\otimes Y^*$ pour la norme $w_{(p;p_1,...,p_m)}$.

Proposition 4.8. *Nous avons l'identification isométrique suivante*

$$\mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}(X_1,...,X_m;Y) = \left(X_1\widehat{\otimes}_w...\widehat{\otimes}_w X_m\widehat{\otimes}_w Y^*\right)^*.$$

Preuve. Soit $T \in \mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}(X_1,...,X_m;Y)$. Soit $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m \otimes Y^*$ tel que

$$u = \sum_{k=1}^{n} x_k^1 \otimes ... \otimes x_k^m \otimes y_k^*,$$

alors

$$\begin{aligned}
|T(u)| &= \left|T(\sum_{k=1}^{n} x_k^1 \otimes ... \otimes x_k^m \otimes y_k^*)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} \left\langle T\left(x_k^1,...,x_k^m\right), y_k^*\right\rangle\right| \\
&\leq N_{(p;p_1,...,p_m)}(T) \left\|\left(x_k^1\right)\right\|_{l_{p_1}^{n,w}(X_1)} ... \left\|(x_k^m)\right\|_{l_{p_1}^{n,w}(X_m)} \left\|(y_k^*)\right\|_{l_{p^*}^{n,w}(Y^*)}.
\end{aligned}$$

i.e.,

$$|T(u)| \leq N_{(p;p_1,...,p_m)}(T)\, w_{(p;p_1,...,p_m)}(u).$$

puisque u est arbitraire, $T \in \left(X_1\widehat{\otimes}_w...\widehat{\otimes}_w X_m\widehat{\otimes}_w Y^*\right)^*$et $\|T\|_{w_{(p;p_1,...,p_m)}} \leq N_{(p;p_1,...,p_m)}(T)$. Inversement, soit $T \in \left(X_1\widehat{\otimes}_w...\widehat{\otimes}_w X_m\widehat{\otimes}_w Y^*\right)^*$. Soit $\left(x_i^j\right)_{i=1}^n \subset X_j$ et $(y_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$. On a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} \left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| &= \left|T(\sum_{k=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m \otimes y_i^*)\right| \\
&\leq \|T\|_{w_{(p;p_1,...,p_m)}} w_{(p;p_1,...,p_m)}(\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m \otimes y_i^*) \\
&\leq \|T\|_{w_{(p;p_1,...,p_m)}} \left\|\left(x_i^1\right)\right\|_{l_{p_1}^{w}(X_1)} ... \left\|(x_i^m)\right\|_{l_{p_m}^{w}(X_m)} \left\|(y_i^*)\right\|_{l_{p^*}^{w}(Y^*)}.
\end{aligned}$$

Alors, $T \in \mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}(X_1,...,X_m;Y)$ et $N_{(p;p_1,...,p_m)}(T) \leq \|T\|_{w_{(p;p_1,...,p_m)}}$. ■

4.3 Domination et factorisation (cas $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$)

Factoriser un opérateur multilinéaire c'est à dire trouver des espaces de Banach $G_1, ..., G_m$, des opérateurs linéaires $v_j : X_j \to G_j$ et un opérateur multilinéaire $A : G_1 \times ... \times G_m \to Y$ tels que

$$T = A(v_1, ..., v_m).$$

On sait que la classe des opérateurs m-linéaires p-dominés admet une telle factorisation, ce qui lui fait une classe intéressante. La démonstration, comme dans le cas linéaire, basée sur le théorème de domination de Pietsch. Un deuxième type de factorisation consiste à trouver un espace de Banach G, un opérateur linéaire $u : G \to Y$ et un opérateur multilinéaire $A : X_1 \times ... \times X_m \to G$ tels que

$$T = u \circ A.$$

La classe des opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommants possède ce type de factorisation. La classe des opérateurs que nous sommes en train d'étudier rassemble les deux types de factorisations ; on va montrer qu'un élément $T \in \mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}(X_1, ..., X_m, Y)$ se décompose en

$$T = u \circ A(v_1, ..., v_m),$$

où u est Cohen fortement p-sommant, A est un opérateurs multilinéaire, les v_j sont p_j-sommants. Pour cela on va montrer le théorème de domination de Pietsch pour cette classe d'opérateurs. On aura besoin des lemmes suivants :

Lemme 4.9. *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Pour tous $(x_i)_{i=1}^n \subset X$, il existe $x_0^* \in B_{X^*}$ tel que*

$$\sup_{\|x^*\|=1} (\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^n |x_0^*(x_i)|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Preuve. Soit $(x_i)_{i=1}^n \subset X$. Considérons la fonction $x^* \longmapsto \|(x^*(x_i))_{i=1}^n\|_{l_p}$ de X^* dans $\mathbb{R}$. On muni la boule B_{X^*} de la topologie $*$-faible qui lui fait compacte. Comme la dernière fonction est continue sur B_{X^*}, elle atteint donc son maximum, i.e., il existe $x_0^* \in B_{X^*}$.tel que

$$\sup_{B_{X^*}} \|(x^*(x_i))_{i=1}^n\|_{l_p} = \|(x_0^*(x_i))_{i=1}^n\|_{l_p}$$

d'où le résultat.

Remarque 4.10. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Pour tous $(y_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$, on a

$$\sup_{\|y\|=1} (\sum_{i=1}^n |y_i^*(y)|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\|y^{**}\|=1} (\sum_{i=1}^n |y^{**}(y_i)|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Donc, il existe $y_0^{**} \in B_{Y^{**}}$ tel que

$$\sup_{\|y\|=1} (\sum_{i=1}^n |y_i^*(y)|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^n |y_0^{**}(y_i^*)|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour la preuve du lemme suivant, le lecteur pourra consulter [DJT95, p.190].

Lemme 4.11 (Ky Fan). *Soient E un espace vectoriel topologique séparé, $\mathcal{C}$ une partie convexe compacte de E. Soit M un ensemble de fonctions définies sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $(-\infty, \infty]$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(a) *Toute $f \in M$ est convexe et semicontinue inférieurement.*

(b) *Si $g \in conv(M)$, il existe $f \in M$ telle que $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathcal{C}$.*

(c) *Il existe $r \in \mathbb{R}$ telle que toute $f \in M$ prend une valeur $\leq r$.*

Alors, il existe $x_0 \in \mathcal{C}$ telle que $f(x_0) \leq r$ pour toute $f \in M$.

Théorème 4.12. *Soient $1 < p < \infty$; $p_1, ..., p_m \in]0, \infty[$ tels que $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$. Soient X_j, Y des espaces de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *L'opérateur $T \in \mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}(X_1, ..., X_m; Y)$.*

(2) *Il existe une constante positive C, des probabilités de Radon μ_j sur $B_{X_j^*}$ et η sur*

$B_{Y^{**}}$ *telles que pour tout* $(x^1,...,x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$ *et* $y^* \in Y^*$, *on a*

$$\left|\left\langle T\left(x^1,...,x^m\right),y^*\right\rangle\right| \le C\prod_{j=1}^{m}(\int_{B_{X_j^*}}\left|x^*(x^j)\right|^{p_j}d\mu_j)^{\frac{1}{p_j}}(\int_{B_{Y^{**}}}\left|y^*(y^{**})\right|^{p^*}d\eta)^{\frac{1}{p^*}}. \qquad (4.4)$$

Dans ce cas

$$N^m_{(p;p_1,...,p_m)}(T) = \inf\left\{C>0,\ C \text{ vérifiant (4.4)}\right\}.$$

Preuve. On commence par montrer la réciproque. Soient $x_i^1,...,x_i^m \in X_i$ et $y_1^*,...,y_n^* \in Y^*$;

$$\begin{array}{rcl} & & \sum\limits_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right| \\ & \le & C\sum\limits_{i=1}^{n}(\prod\limits_{j=1}^{m}(\int_{B_{X_j^*}}\left|x_j^*(x_i^j)\right|^{p_j}d\mu_j)^{\frac{1}{p_j}}(\int\limits_{B_{Y^{**}}}\left|y_i^*(y^{**})\right|^{p^*}d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}) \\ \text{(par Hölder)} & \le & C\prod\limits_{j=1}^{m}(\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{B_{X_j^*}}\left|x_j^*(x_i^j)\right|^{p_j}d\mu_j)^{\frac{1}{p_j}}(\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{B_{Y^{**}}}\left|y_i^*(y^{**})\right|^{p^*}d\eta)^{\frac{1}{p^*}} \\ & \le & C\prod\limits_{j=1}^{m}\sup\limits_{\left\|x_j^*\right\|=1}(\sum\limits_{i=1}^{n}\left|x_j^*(x_i^j)\right|^{p_j})^{\frac{1}{p_j}}\sup\limits_{y\in B_Y}\left\|(y_i^*(y))_{1\le i\le n}\right\|_{l^n_{p^*}}. \end{array}$$

Donc $T \in \mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}\left(X_1,...,X_m;Y\right)$ et $N^m_{(p;p_1,...,p_m)}(T) \le C$.
Pour la première implication, soient $K_j = B_{X_j^*}$ $(1 \le j \le m)$ et $L = B_{Y^{**}}$. On considère les ensembles $\mathcal{C}_{K_1},...,\mathcal{C}_{K_m},\mathcal{C}_L$ des mesures de probabilités sur $K_1,...,K_m,L$ respectivement. Ils sont convexes et compacts lorsque on munit $C(K_1)^*,...,C(K_m)^*,C(L)^*$ de leurs topologies $*$-faibles. Posons

$$E = C(K_1)^* \times ... \times C(K_m)^* \times C(L)^*,$$

et $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{K_1} \times ... \times \mathcal{C}_{K_m} \times \mathcal{C}_L$. Soit M l'ensemble des fonctions définies sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$\begin{array}{rl} & f_{\left((x_i^j),(y_i^*)\right)}(\mu_1,...,\mu_m,\eta) \\ = & \sum\limits_{i=1}^{k}(\left|\left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right| - \sum\limits_{j=1}^{m}\left(\frac{C}{p_j}\int_{K_j}\left|x^*(x_i^j)\right|^{p_j}d\mu_j\right) - \frac{C}{p^*}\int_L\left|\langle y_i^*,y^{**}\rangle\right|^{p^*}d\eta), \end{array}$$

où $\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n} \subset X_j, 1 \leq j \leq m$ et $(y_i^*)_{1\leq i\leq n} \subset Y^*$. Nous allons vérifier les hypothèses du lemme de Ky Fan.

(a) Il est facile de voir que les éléments de M sont des fonctions affines (convexes) et continues sur $\mathcal{C}$.

(b) Il suffit de voir que M est convexe. Soient f, g dans M telles que

$$\begin{aligned} & f_{\left(\left(x_i'^j\right),\left(y_i'^*\right)\right)}(\mu_1, ..., \mu_m, \eta) \\ = & \sum_{i=1}^{k} (\left|\left\langle T\left(x_i'^1, ..., x_i'^m\right), y_i^*\right\rangle\right| - \sum_{j=1}^{m}\left(\tfrac{C}{p_j}\int_{K_j}\left|x^*(x_i'^j)\right|^{p_j} d\mu_j\right) - \tfrac{C}{p^*}\int_L |\langle y_i'^*, y^{**}\rangle|^{p^*} d\eta), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & g_{\left(\left(x_i''^j\right),\left(y_i''^*\right)\right)}(\mu_1, ..., \mu_m, \eta) \\ = & \sum_{i=1}^{l} (\left|\left\langle T\left(x_i''^1, ..., x_i''^m\right), y_i^*\right\rangle\right| - \sum_{j=1}^{m}\left(\tfrac{C}{p_j}\int_{K_j}\left|x^*(x_i''^j)\right|^{p_j} d\mu_j\right) - \tfrac{C}{p^*}\int_L |\langle y_i''^*, y^{**}\rangle|^{p^*} d\eta). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \alpha f + (1-\alpha) g \\ = & \sum_{i=1}^{n} (\left|\left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| - \sum_{j=1}^{m}\left(\tfrac{C}{p_j}\int_{K_j}\left|x^*(x_i^j)\right|^{p_j} d\mu_j\right) - \tfrac{C}{p^*}\int_L |\langle y_i^*, y^{**}\rangle|^{p^*} d\eta), \end{aligned}$$

avec $n = k + l$,

$$x_i^j = \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{p_j}} x_i'^j & \text{si} \quad 1 \leq i \leq k, \\ (1-\alpha)^{\frac{1}{p_j}} x_i''^j & \text{si} \quad k+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

et

$$y_i^* = \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{p^*}} y_i'^* & \text{si} \quad 1 \leq i \leq k, \\ (1-\alpha)^{\frac{1}{p^*}} y_i''^* & \text{si} \quad k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

(c) Montrons que $r=0$ vérifie la condition (c). Soient $z_j^* \in B_{X_j^*}$ $(1 \leq j \leq m)$ et $y_0 \in B_{Y^{**}}$ tels que

$$\sup_{\|x^*\|=1} (\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle x^*, x_i^j \right\rangle\right|^{p_j})^{\frac{1}{p_j}} = (\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle z_j^*, x_i^j \right\rangle\right|^{p_j})^{\frac{1}{p_j}},$$

et

$$\sup_{\|y\|=1} (\sum_{i=1}^{n} |\langle y_i^*, y\rangle|^{p})^{\frac{1}{p^*}} = (\sum_{i=1}^{n} |\langle y_i^*, y_0\rangle|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}.$$

Soient $\delta_{x_j^0}$, δ_{y_0} les mesures de Dirac portées par x_j^0, y_0 respectivement. On utilise le Lemme (4.6) puis l'inégalité (4.3), on obtient

$$\begin{aligned}
& f\left(\delta_{z_1^*}, ..., \delta_{z_m^*}, \delta_{y_0}\right) \\
= & \sum_{i=1}^{n} (\left|\left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle\right| - \sum_{j=1}^{m} (\tfrac{C}{p_j} \textstyle\int_{K_j} \left|x^*(x_i^j)\right|^{p_j} d\delta_{z_j^*}) - \tfrac{C}{p^*} \displaystyle\int_L |\langle y_i^*, y^{**}\rangle|^{p^*} d\delta_{y_0}) \\
= & \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle\right| - \sum_{j=1}^{m} \tfrac{C}{p_j} \sum_{i=1}^{n} \left|x^*(x_i^j)\right|^{p_j} - \frac{C}{p^*} \sum_{i=1}^{n} |\langle y_i^*, y_0\rangle|^{p^*} \\
\leq & \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle\right| - C \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \left|z_j^*(x_i^j)\right|^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle y_i^*, y_0\rangle|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq 0.
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Ky Fan, il existe $(\mu_1, ..., \mu_m, \eta) \in \mathcal{C}$ telles que $f(\mu_1, ..., \mu_m, \eta) \leq 0$ pour toute $f \in M$. Si on prend $x = (x^1, ..., x^m) \in X_1, ..., X_m$ et $y^* \in Y^*$ on a

$$\begin{aligned}
f(\mu_1, ..., \mu_m, \eta) &= f_{(x,y^*)}(\mu_1, ..., \mu_m, \eta) \\
&= \left|\left\langle T\left(x^1, ..., x^m\right), y^* \right\rangle\right| - \sum_{j=1}^{m} \tfrac{C}{p_j} \textstyle\int_{K_j} \left|x^*(x^j)\right|^{p_j} d\mu_j - \tfrac{C}{p^*} \displaystyle\int_L |\langle y^*, y^{**}\rangle|^{p^*} d\eta \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

D'où

$$\left|\left\langle T\left(x^1, ..., x^m\right), y^* \right\rangle\right| \leq \sum_{j=1}^{m} \tfrac{C}{p_j} \textstyle\int_{K_j} \left|x^*(x^j)\right|^{p_j} d\mu_j + \tfrac{C}{p^*} \displaystyle\int_L |\langle y^*, y^{**}\rangle|^{p^*} d\eta.$$

Posons pour $1 \leq j \leq m$: $\lambda_j = \left(\int_{K_j} |x^*(x^j)|^{p_j} d\mu_j\right)^{\frac{1}{p_j}}$, $\lambda_{m+1} = \left(\int_L |\langle y^*, y^{**}\rangle|^{p^*} d\eta\right)^{\frac{1}{p^*}}$.
En remplaçant le vecteur $(x^1, ..., x^m, y^*)$ par $\left(\frac{x^1}{\lambda_1}, ..., \frac{x^m}{\lambda_m}, \frac{y^*}{\lambda_{m+1}}\right)$ on trouve

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle T\left(\frac{x^1}{\lambda_1}, ..., \frac{x^m}{\lambda_m}\right), \frac{y^*}{\lambda_{m+1}}\right\rangle\right| = \frac{1}{\lambda_1 ... \lambda_m \lambda_{m+1}} \left|\left\langle T\left(x^1, ..., x^m\right), y^*\right\rangle\right| \\
\leq \; & \sum_{j=1}^{m} \frac{C}{p_j} \int_{K_j} \left|x^*(\frac{x^j}{\lambda_j})\right|^{p_j} d\mu_j + \frac{C}{p^*} \int_L \left|\left\langle \frac{y^*}{\lambda_{m+1}}, y^{**}\right\rangle\right|^{p^*} d\eta = C,
\end{aligned}$$

Cela implique

$$\left|\left\langle T\left(x^1, ..., x^m\right), y^*\right\rangle\right| \leq C \prod_{j=1}^{m} (\int_{B_{X_j^*}} \left|x^*(x^j)\right|^{p_j} d\mu_j)^{\frac{1}{p_j}} (\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\eta)^{\frac{1}{p^*}},$$

ce qui termine la démonstration. ■

Comme conséquence de théorème ci-dessus cette factorisation par un opérateur linéaire Cohen fortement p-sommant et des m opérateurs linéaires p_j-sommants.

Corollaire 4.13. *Soient* $1 < p < \infty$; $p_1, ..., p_m \in]0, \infty[$ *tels que* $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$. *On a*

$$\mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}(X_1, ..., X_m, Y) = \mathcal{D}_p \circ \mathcal{L}(\Pi_{p_1}, ..., \Pi_{p_m})(X_1, ..., X_m, Y),$$

pour tous espaces de Banach $X_j \, (1 \leq j \leq m), Y$
Si $p = 1$,

$$\mathcal{N}_{(1;p_1,...,p_m)}(X_1, ..., X_m, Y) = \mathcal{L}(\Pi_{p_1}, ..., \Pi_{p_m})(X_1, ..., X_m, Y).$$

Preuve. Soit $T \in \mathcal{D}_p \circ \mathcal{L}(\Pi_{p_1}, ..., \Pi_{p_m})(X_1, ..., X_m, Y)$; il existe un espace de Banach Z, $u \in \mathcal{D}_p(Z, Y)$, des opérateurs $v_j \in \Pi_{p_j}(X_j, G_j)$ et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m, Z)$ tels que

$$T = u \circ A(v_1, ..., v_m).$$

Nous avons pour tout $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$ et $y^* \in Y^*$

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle T\left(x^1, ..., x^m\right), y^*\right\rangle\right| &= \left|\left\langle u \circ A\left(v_1\left(x_1\right), ..., v_m\left(x_m\right)\right), y^*\right\rangle\right| \\
&\leq C\left\|A\right\| \prod_{j=1}^{m} \left\|v_j\left(x_j\right)\right\| \left\|y^*\right\|_{L_{p^*(\eta)}} \\
&\leq C\left\|A\right\| \prod_{j=1}^{m} \left\|x_j\right\|_{L_{p_j\left(\mu_j\right)}} \left\|y^*\right\|_{L_{p^*(\eta)}}.
\end{aligned}$$

Réciproquement, soit $T \in \mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}(X_1, ..., X_m, Y)$. D'après le Théorème 4.12, on a le diagramme qui est commutatif

$$\begin{array}{cccccccc}
X_1 & \times...\times & X_m & & \xrightarrow{T} & Y & & \\
\downarrow i_{X_1} & & \downarrow i_{X_m} & & & \tilde{T}\uparrow & & \\
i_{X_1}(X_1) & \times...\times & i_{X_m}(X_m) & \underset{(k_1,...,k_m)}{\longrightarrow} & S_1 & \times...\times & S_m & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
C(K_1) & \times...\times & C(K_m) & \underset{(k_1,...,k_m)}{\longrightarrow} & L_{p_1}(\mu_1) & \times...\times & L_{p_m}(\mu_m) &
\end{array}$$

où $T = \tilde{T}(h_1, ..., h_m)$ avec $h_j = k_j \circ i_{X_j}$ sont des opérateurs p_j-sommnats. L'opérateur $\tilde{T}$ est bien défini et borné. De plus, d'après (2.5), $\tilde{T}$ est Cohen fortement p-sommant. La factorisation (2.6) assure qu'il existe un opérateurs linéaire Cohen fortement p-sommant u et un opérateur multilinéaire A tels que

$$T = u \circ A(h_1, ..., h_m).$$

Pour $p = 1$, d'après le théorème de domination pour les opérateurs $(1; p_1, ..., p_m)$-sommants [Mat03], on a

$$\mathcal{L}_{(1;p_1,...,p_m)}(X_1, ..., X_m, Y) = \mathcal{L}(\Pi_{p_1}, ..., \Pi_{p_m})(X_1, ..., X_m, Y),$$

avec la Remarque (4.3) on trouve le résultat souhaité. ■

4.4 Comparaison avec d'autres classes d'opérateurs multilinéaires

On commence par rappeler la définition des opérateurs multilinéaires integraux introduits dans [CD'AG02].

Définition 4.14. Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est intégral s'il existe une constante positive C telle que pour tout $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$, $(j = 1, ..., m)$, et tout $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| \leq C \sup_{\left\|x_j^*\right\|=1; 1\leq j\leq m} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_1^*\left(x_i^1\right) ... x_m^*\left(x_i^m\right) y_i^* \right\|_{Y^*}. \tag{4.5}$$

La classe des opérateurs m-linéaires integraux de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y, notée $\boldsymbol{Int}(X_1, ..., X_m; Y)$, est un espace de Banach pour la norme

$$int(T) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité } (4.5)\}.$$

Si on munit le produit tensoriel $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ de la norme tensorielle injective, alors $T \in \boldsymbol{Int}(X_1, ..., X_m; Y)$ si et seulement si $\tilde{T} \in \boldsymbol{Int}(X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon ... \widehat{\otimes}_\varepsilon X_m; Y)$ et on a $int(T) = int(\tilde{T})$.

Proposition 4.15 ($cf.$ [CD'AG02]) *. On a l'identifation isométrique*

$$\boldsymbol{Int}(X_1, ..., X_m; Y) = \left(X_1 \widehat{\otimes}_\varepsilon ... \widehat{\otimes}_\varepsilon X_m \widehat{\otimes}_\varepsilon Y^*\right)^*.$$

Corollaire 4.16. *Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. On a les inclusions suivantes*

$$\boldsymbol{Int}(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{N}_{(p; p_1, ..., p_m)}(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y).$$

Preuve. D'après la Proposition (4.7), on a

$$\varepsilon \leq w_{(p;p_1,...,p_m)} \leq g_p,$$

ce qui signifie

$$\left(X_1\widehat{\otimes}_{\varepsilon}...\widehat{\otimes}_{\varepsilon}X_m\widehat{\otimes}_{\varepsilon}Y^*\right)^* \subseteq \left(X_1\widehat{\otimes}_{w}...\widehat{\otimes}_{w}X_m\widehat{\otimes}_{w}Y^*\right)^* \subseteq \left(X_1\widehat{\otimes}_{g_p}...\widehat{\otimes}_{g_p}X_m\widehat{\otimes}_{g_p}Y^*\right)^*,$$

d'où le résultat, d'après ce qui précède. ■

Corollaire 4.17. *Soient* $1 \leq p < \infty$; $p_1, ..., p_m \in \left]0, \infty\right[$ *tels que* $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$. *Soient* $X_j\,(1 \leq j \leq m)$, Y *des espaces de Banach. Alors*
(1) $\mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}\left(X_1, ..., X_m; Y\right) \subseteq \Pi^m_{(r;p_1,...,p_m)}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$ où $r = \max_{j=1}^m p_j$.
(2) $\mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)}\left(X_1, ..., X_m; Y\right) \subseteq \mathcal{L}^r_d\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$ où $r = \max_{j=1}^m p_j$.

Preuve. (1) La formule (4.4) entraine

$$\left\|T\left(x^1_{i_1}, ..., x^m_{i_m}\right)\right\| = \sup_{\|y^*\|=1}\left|\left\langle T\left(x^1_{i_1}, ..., x^m_{i_m}\right), y^*\right\rangle\right| \leq C\prod_{j=1}^{m}(\textstyle\int_{B_{X^*_j}}\left|x^*(x^j_{i_j})\right|^{p_j} d\mu_j)^{\frac{1}{p_j}};$$

alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m}\left\|T\left(x^1_{i_1}, ..., x^m_{i_m}\right)\right\|^r \\
\leq\ & C^r\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m}\left(\prod_{j=1}^{m}(\textstyle\int_{B_{X^*_j}}\left|x^*(x^j_{i_j})\right|^{p_j} d\mu_j)^{\frac{r}{p_j}}\right) \\
=\ & C^r\sum_{i_1=1}^{n_1}(\textstyle\int_{B_{X^*_1}}\left|x^*(x^1_{i_1})\right|^{p_1} d\mu_1)^{\frac{r}{p_j}} \times ... \times \displaystyle\sum_{i_m=1}^{n_m}(\textstyle\int_{B_{X^*_m}}\left|x^*(x^m_{i_m})\right|^{p_m} d\mu_m)^{\frac{r}{p_m}} \\
\leq\ & C^r(\sum_{i_1=1}^{n_1}\textstyle\int_{B_{X^*_1}}\left|x^*(x^1_{i_1})\right|^{p_1} d\mu_1)^{\frac{r}{p_j}} \times ... \times (\displaystyle\sum_{i_m=1}^{n_m}\textstyle\int_{B_{X^*_m}}\left|x^*(x^m_{i_m})\right|^{p_m} d\mu_m)^{\frac{r}{p_m}} \\
\leq\ & C^r\prod_{j=1}^{m}\left(\left\|(x^j_i)\right\|_{l^{n,w}_{p_j}(X_j)}\right)^r.
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

(2) Par la formule (4.4), nous avons

$$\begin{aligned}\left\|T\left(x^1,...,x^m\right)\right\| &\leq C\prod_{j=1}^{m}(\int_{B_{X_j^*}}\left|x^*(x^j)\right|^{p_j}d\mu_j)^{\frac{1}{p_j}}\\ &\leq C\prod_{j=1}^{m}(\int_{B_{X_j^*}}\left|x^*(x^j)\right|^{r}d\mu_j)^{\frac{1}{r}}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Corollaire 4.18. *Si $p \geq m$, nous avons*

$$\mathcal{D}_{\frac{p}{m}}\circ\mathcal{L}_d^p\left(X_1,...,X_m;Y\right)=\mathcal{N}_{\left(\frac{p}{m};p,...,p\right)}\left(X_1,...,X_m;Y\right).$$

pour tous espaces de Banach $X_1,...,X_m,Y$.

Preuve. Par le Corollaire 4.13, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\left(\frac{p}{m};p,...,p\right)}\left(X_1,...,X_m;Y\right) &= \mathcal{D}_{\frac{p}{m}}\circ\mathcal{L}\left(\Pi_p,...,\Pi_p\right)\left(X_1,...,X_m;Y\right)\\ &= \mathcal{D}_{\frac{p}{m}}\circ\mathcal{L}\left(\Pi_p\right)\left(X_1,...,X_m;Y\right)\end{aligned}$$

La Remarque 1.22 conclut la preuve. ■

Remarque 4.19. Si l'espace Y est de dimension finie, on a pour tout $p \geq m$ la coïncidence

$$\mathcal{L}_d^p\left(X_1,...,X_m;Y\right)=\mathcal{N}_{\left(\frac{p}{m};p,...,p\right)}\left(X_1,...,X_m;Y\right).$$

Il bien connu que tout opérateur p-sommant défini sur un espace reflexif est compact [DJT95]. Par conséquent, tout opérateur linéaire Cohen fortement p-sommant est compact dès que son espace arrivé est reflexif. On peut conclure, d'après la décomposition (4.2), que tout opérateur linéaire Cohen p-nucléaire $u : X \to Y$ est compact lorsque X ou bien Y est un espace reflexif. Dans le cas multilinéaire, si Y est reflexif, la factorisation (2.6) nous permet de conclure, avec la Remarque 1.11, que chaque opérateur multilinéaire

Cohen $(p; p_1, ..., p_m)$-nucléaire T de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y est compact. Réciproquement, on verra dans le théorème suivant que si les $X_1, ..., X_m$ sont des espaces de Hilbert, alors T est compact.

Théorème 4.20. *Soient $p, p_1, ..., p_m \in]1, \infty[$ tels que $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$.Soient $H_1, ..., H_m$ des espaces de Hilbert et Y un espace de Banach. Tout opérateur multilinéaire Cohen $(p; p_1, ..., p_m)$-nucléaire de $H_1 \times ... \times H_m$ dans Y est compact.*

Preuve. Soient $p, p_1, ..., p_m \in]1, \infty[$ tels que $\frac{1}{p_1}+...+\frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}$. Soit $T \in \mathcal{N}_{(p;p_1,...,p_m)} (H_1, ..., H_m; Y)$ par le Corollaire 4.13, il existe un espace de Banach Z, $u \in \mathcal{D}_p(Z; Y)$, des opérateurs linéaires p_j-sommants $v_j \in \Pi_{p_j} (H_j; G_j)$ et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L} (G_1, ..., G_m; Z)$ tels que

$$T = u \circ A (v_1, ..., v_m) .$$

Par le Théorème de Bu $v_j \in \mathcal{D}_{p_j} (H_j; G_j)$.

Maintenant, remarquons que l'opérateur linéaisé de T est

$$\widetilde{T} = u \circ \widetilde{A} \circ v_1 \otimes_\pi ... \otimes_\pi v_m.$$

Grâce au Lemme (2.19), l'opérateur $v_1 \otimes_\pi ... \otimes_\pi v_m$ est Cohen fortement p-sommant. Comme $\widetilde{T}$ est composition de deux opérateurs linéaires Cohen fortements p-sommants, $\widetilde{T}$ est compact et par conséquent T est aussi compact. $\blacksquare$

Chapitre 5

Relations entre les opérateurs m-linéaires et les opérateurs multi-sous linéaires

Dans la première partie de ce chapitre, nous rappelons quelques généralités sur les espaces de Banach réticulés. On introduit les opérateurs multi-sous linéaires dans la deuxième partie. Ensuite on étendra le théorème de Hahn-Banach aux applications multilinéaires dans des cas particuliers. Dans la quatrième partie, on introduit la notion d'opérateurs multi-sous linéaires Cohen fortements sommants. On discutera leurs relations avec les opérateurs multilinéaires.

5.1 Introduction

Soient X un espace de Banach et Y un espace de Banach réticulé. Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous linéaire (i.e. positivement homogène et sous additif). On note ∇T le sous-différentiel de T :

$$\nabla T = \{u : X \longrightarrow Y \text{ linéaires tels que } u(x) \leq T(x) \text{ pour tout } x \text{ dans } X\}.$$

On sait ($cf.$ [AM04]) que ∇T est non vide si Y est complètement réticulé et

$$T(x) = \sup\left\{u(x) : u \in \nabla T\right\}; \tag{5.1}$$

de plus, le sup est atteint. Si Y est simplement un réticulé, ∇T est en général vide ($cf.$ [Lin91]). Pour montrer l'égalité (5.1), nous avons utilisé le théorème de Hahn-Banach, lequel :

Théorème de Hahn Banach : *Soient X_0 un sous espace fermé de X et Y un espace complètement réticulé. Soit $u : X_0 \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire tel que $u \leq T$. Alors u s'étend en un opérateur linéaire $\widetilde{u} : X \longrightarrow Y$ tel que $\widetilde{u} \leq T$ et $\widetilde{u} = u$ sur X_0.*

Le but de ce chapitre est d'étudier une version multilinéaire de (5.1). Dans un premier temps, on introduira les opérateurs multi-sous linéaires comme généralisation naturelle des opérateurs sous linéaires. Le théorème de Hahn Banach dans le cas multilinéaire malheureusement est faux en général. En effet, Hayden a proposé [Hay67] la conjecture suivante : soient X, Y deux espaces de Banach et X_0, Y_0 deux sous espaces fermés de X, Y respectivement. Considérons $u \in \mathcal{L}(X_0, Y_0; \mathbb{R})$ une forme bilinéaire sur $X_0 \times Y_0$ telle que $\|u\| \leq C$. Existe-il $\widetilde{u} \in \mathcal{L}(X, Y; \mathbb{R})$ tel que $\widetilde{u}/X_0 \times Y_0 = u$ et $\|\widetilde{u}\| \leq C$? Il a donné une réponse affirmative dans le cas des espaces de Hilbert et a prouvé dans [Hay67a] que cela ne caractérise pas les espaces de Hilbert. Defant [DF93] a donné un contre exemple montrant que la conjecture est fausse en général. En effet, si l'opérateur bilinéaire $u \in \mathcal{L}(X_0, Y; \mathbb{R})$ admettait une extension $\widetilde{u} \in \mathcal{L}(X, Y; \mathbb{R})$, chaque $v \in \mathcal{B}(X_0; Y^*)$ devrait avoir une extension $\widetilde{v} \in \mathcal{B}(X; Y^*)$:

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \hookrightarrow & X \\ & \searrow v & \downarrow \tilde{v} \\ & & Y^* \end{array}$$

Posons $X_0 = Y^*$ et $v = id_{X_0}$, il existerait une extension $\tilde{v}$ qui devrait être une projection de X sur X_0, c'est à dire X_0 serait un sous espace complimenté de X. Cela est faux en général :

(1) Tout espace de Banach X de dimension infinie, qui n'est pas isomorphe à un espace de Hilbert, admet un sous espace non complémenté dans X [LT71] .
(2) Soient les fonctions de Rademacher définies sur l'intervalle $[0,1]$ par $r_n(t) := (-1)^k$ si $t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$;
l'injection

$$\begin{array}{rcl} l_2 & \to & L_1[0,1] \\ (\zeta_n) & \mapsto & \sum \zeta_n r_n \end{array}$$

est bornée d'après l'inégalité de Khintchine

$$B \left\|(\zeta_n)\right\|_{l_2} \leq \left\|\sum \zeta_n r_n\right\|_{L_1} \leq A \left\|(\zeta_n)\right\|_{l_2}.$$

Mais l_2 n'est pas complémenté dans L_1. En effet, une projection $P : L_1 \to l_2 \hookrightarrow L_1$ est nécessairement p-sommante par le théorème de Grothendieck ; comme $P^2 = P$ c'est un opérateur compact (par composition de deux opérateurs p-sommants) ; cela est impossible car l_2 n'est pas de dimension finie.

5.2 Les opérateurs multi-sous linéaires

On introduit dans cette section la classe des opérateurs multi-sous linéaires. Commençons par donner quelques définitions, propriétés et notations concernant les espaces de Riesz. Pour plus de détails voir [Zaa97] .

Définition 5.1. Un espace vectoriel réel X, partiellement ordonné par un ordre partiel noté $\leq$, est un espace vectoriel ordonné (ou espace de Riesz) si

$$\begin{array}{llll} x \leq y & \text{implique} & x+z \leq y+z & \text{pour tout } z \in X, \\ x \geq 0 & \text{implique} & \alpha x \geq 0 & \text{pour tout } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}_+. \end{array}$$

Notation. Soit X un espace de Riesz.

1. On note $X^+ = \{x \in X : x \geq 0\}$. Un élément x de X est positif si $x \in X^+$. L'ensemble X^+ est appelé cône positif de X. Il vérifie les propriétés suivantes :

a) $x \in X^+, y \in X^+$ implique $x + y \in X^+$.

b) $x \in X^+$ implique $\alpha x \in X^+$ pour tout réel $\alpha \geq 0$.

c) $x \in X^+$,$-x \in X^+$ implique $x = 0$.

2. La borne supérieure d'un ensemble à deux éléments est notée $x \vee y$ ou $\sup\{x, y\}$ et la la borne inférieure d'un ensemble à deux éléments est notée $x \wedge y$ ou $\inf\{x, y\}$. Pour tout $x \in X$ on peut écrire $x^+ = x \vee 0$; $x^- = -x \vee 0$, donc $|x| = x^+ \vee (-x)$ et $x = x^+ - x^-$. On a aussi

a) $0 \leq x^+ \leq |x|$ et $0 \leq x^- \leq |x|$ d'où $-x^- \leq x^- \leq x^+$.

b) $x \leq y$ si et seulement si $x^+ \leq y^+$ et $x^- \geq y^-$.

c) $|x| \wedge |y| = 0 \Leftrightarrow |x + y| = |x - y|$.

d) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}\{|x + y| + |x - y|\}$ et $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}\{|x + y| - |x - y|\}$.

Espaces réticulés et complètement réticulés.

(1) *Un espace vectoriel partiellement ordonné X dans lequel toute paire d'éléments a une borne supérieure est appelé espace vectoriel réticulé ou de Riesz.*

(2) *Un espace vectoriel est complètement réticulé si toute partie non vide et majorée pour l'ordre admet un supremum.*

Rappelons qu'une norme $\|.\|$ sur un espace de Riesz X est une norme réticulée si $\forall x, y \in X$, $|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$ (en particulier $x \in X$ et $|x|$ ont la même norme). Un espace de Riesz muni d'une norme réticulée est appelé espace de Riesz normé. Si la norme est complète, on dira que X est un espace de Banach réticulé (Il est complètement réticulé s'il est complètement réticulé en tant qu'espace vectoriel). Les deux inégalités suivantes sont vérifiées $\|x^+ - y^-\| \leq \|x - y\|$ et $\||x| - |y|\| \leq \|x - y\|$.

Exemple 5.2. (1) L'espace $C(K)$ est un espace de Banach réticulé.
(2) L'espace $L_p(\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ est un espace de Banach complètement réticulé.

Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach réticulés ; alors le produit $X_1 \times ... \times X_m$ est aussi un espace réticulé, pour la relation d'ordre

$$x \leq y \Longleftrightarrow x^1 \leq y^1, ..., x^m \leq y^m \quad \text{pour tous } x,y \in X_1 \times ... \times X_m$$

et

$$\sup\{x, y\} = \left(\sup\left\{x^1, y^1\right\}, ..., \sup\{x^m, y^m\}\right)$$

On note

$$(X_1 \times ... \times X_m)^+ \quad = \quad X_1^+ \times ... \times X_m^+.$$

Remarque importante. Dans tout ce qui suit, les espaces de Banach réticulés sont celles des classes d'équivalence des fonctions mesurables sur l'espace mesuré (Ω, μ), avec la relation d'ordre naturelle (on va utiliser la mutiplication dans X).

Nous définissons maintenant les opérateurs multi-sous linéaires, notion apparue premièrement dans [Don90] pour les opérateurs bi-sous linéaires.

Une application T d'un espace de Banach X dans un espace de Banach réticulé Y est dite sous linéaire si, pour tout x, y dans X et λ dans $\mathbb{R}^+$, nous avons

(i) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$,

(ii) $T(x + y) \leq T(x) + T(y)$.

Remarquons que $T(0) = 0$ et $-T(x) \leq T(-x)$. Si X, Y sont deux espaces de Banach réticulés, on dit que $u \in \mathcal{B}(X; Y)$ est positif si $u(x) \geq 0$ lorsque $x \geq 0$. On note $\mathcal{B}^+(X; Y)$ l'ensemble des $u \in \mathcal{B}(X; Y)$ qui sont positifs.

Définition 5.3. Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach et Y un Banach réticulé. Une application T de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y, qui est sous linéaire par rapport à chaque variable, est dite *multi-sous linéaire* (ou *m-sous linéaire*).

La multi-sous linéairité est stable pour l'addition et la multiplication par un scalaire positif. On note

$$SL(X_1, ..., X_m; Y)$$

l'ensemble des applications m-sous linéaires $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$. Si $X_1 = ... = X_m = X$, on note simplement $SL(^m X, Y)$. On munit $SL(X_1, ..., X_m; Y)$ de la relation d'ordre suivante

$$T_1 \leq T_2 \Longleftrightarrow T_1(x) \leq T_2(x), \quad \forall x \in X_1 \times ... \times X_m$$

et

$$\nabla T = \{u \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) : u \leq T\}$$

(i.e., $\forall x \in X_1 \times ... \times X_m$, $u(x) \leq T(x)$). Alors, nous avons

$$u \in \nabla T \Longleftrightarrow -T(x^1, ..., -x^j, ..., x^m) \leq u(x) \leq T(x)$$

pour tout $x = (x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$ et $j \in \{1, ..., m\}$.

Remarque 5.4. Pour certains T, l'ensemble ∇T n'est pas vide. Mais, on ne sait pas c'est toujours vrai.

On dit qu'un opérateur m-sous linéaire T est :
(a) symétrique suivant j si, pour tout $x \in X_1 \times ... \times X_m$, $T(x) = T(x^1, ..., -x^j, ..., x^m)$.
(b) positif si, pour tout $x \in X_1 \times ... \times X_m$, $T(x) \geq 0$.
(c) croissant (X_j Banach réticulé pour tout j), si pour tout $x \leq y$ dans $X_1 \times ... \times X_m$, $T(x) \leq T(y)$.

La symétrie (pour un j) implique la positivité, l'inverse est faux. Il n'existe pas de relation entre la positivité et la croissance. Si T est symétrique suivant un j, on a

$$u \in \nabla T \Longleftrightarrow |u(x)| \leq T(x), \quad \forall x \in X$$

et

$$T(x^1, ..., \lambda x^j, ..., x^m) = |\lambda| \, T(x), \quad \text{pour tout } \lambda$$

Soit T un opérateur m-sous linéaire de $X_1 \times ... \times X_m$ dans un Banach réticulé Y. L'opérateur T est continu si, et seulement s'il existe une constante positive C telle que, pour tout $x \in X_1 \times ... \times X_m$, $\|T(x)\| \leq C \|x^1\| ... \|x^m\|$. Dans ce cas on dit aussi que T est borné et on pose

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x^1\|_{B_{X_1}} = 1, ..., \|x^m\|_{B_{X_m}} = 1\}.$$

On note $\mathcal{SL}(X_1, ..., X_m; Y)$ le cône des opérateurs multi-sous linéaire continus (bornés) de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y.

Exemple 5.5. 1- Soit $u \in \mathcal{SB}(G; Y)$ un opérateur sous linéaire. Pour tout $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; G)$, $u \circ T$ est multi-sous linéaire.
2- L'opérateur $T(x^1, ..., x^m) = \|x^1\| ... \|x^m\|$ est m-sous linéaire.
3- Soient $p; p_1, ..., p_m \in]0, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$. Considérons

$$\begin{array}{rccc} T: & l_{p_1} \times ... \times l_{p_m} & \longrightarrow & l_p \\ & ((x_n^1)_n, ..., (x_n^m)_n) & \longmapsto & (|x_n^1 ... x_n^m|)_n \end{array}$$

L'opérateur T est m-sous linéaire et $\|T\| \leq 1$. En effet, par l'inégalité de Hölder généralisée, nous obtenons

$$(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^1 ... x_n^m|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^1|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} ... \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^m|^{p_m}\right)^{\frac{1}{p_m}}.$$

4- Un opérateur T de $X_1 \times ... \times X_m$ dans un espace de Banach réticulé Y est dit m-quasilinéaire si pour tout $x = (x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$, $y^j \in X_j$ $(1 \leq j \leq m)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} \quad \left|T(x^1, ..., \lambda x^j, ..., x^m)\right| & = & |\lambda| \left|T(x)\right| \text{ pour tout } 1 \leq j \leq m, \\ \text{(ii)} \quad \left|T(x^1, ..., x^j + y^j, ..., x^m)\right| & \leq & \left|T(x)\right| + \left|T(x^1, ..., y^j, ..., x^m)\right|. \end{array}$$

En général, la somme de deux opérateurs m-quasilinéaire ne l'est pas, mais λT est m-quasilinéaire si T l'est. Si on pose $\varphi(x) = |T(x)|$ alors φ est un opérateur m-sous linéaire symétrique. Si T est m-sous linéaire symétrique pour un j, alors T est m-quasilinéaire.

Remarque 5.6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, ..., X_m$, $E_1, ..., E_m$, Y, Z des espaces de Banach tels que Y, Z sont réticulés.

(a) Si T est dans $\mathcal{SL}(X_1, ..., X_m; Y)$ et $u \in \mathcal{B}^+(Y; Z)$, alors, $u \circ T \in \mathcal{SL}(X_1, ..., X_m, Z)$.

(b) Si u_j est dans $\mathcal{B}(E_j; X_j)$ $(1 \leq j \leq m)$ et T dans $\mathcal{SL}(X_1, ..., X_m; Y)$, alors, $T \circ (u_1, ..., u_n) \in \mathcal{SL}(E_1, ..., E_m; Y)$.

(c) $\forall T \in \mathcal{SL}(X_1, ..., X_m; Y)$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, nous avons pour tout j

$$\lambda T(x) \leq T(x_1, ..., \lambda x_j, ..., x_m).$$

En conséquence, $T \leq u$ $(u \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)) \Rightarrow T = u$. En effet, pour tout $x \in X_1 \times ... \times X_m$,

$$\begin{array}{ll} & T \leq u \\ \Longrightarrow & T(x) \leq u(x) \\ \Longrightarrow & T(x^1, ..., -x^j, ..., x^m) \leq u(x^1, ..., -x^j, ..., x^m) \\ \Longrightarrow & -T(x) \leq T(x^1, ..., -x_j, ..., x^m) \leq -u(x) \\ \Longrightarrow & T(x) \geq u(x). \end{array}$$

5.3 Extension du théorème de Hahn-Banach pour les opérateurs multi-sous linéaires.

L'importance du théorème classique de Hahn-Banach dans le cas linéaire a motivé de nombreuses tentatives d'établir des versions non linéaires correspondantes. Cette question a été traité dans [Car99, CGJ, CGMM94]. La réponse est en général négative. L'article [Aro80] montre qu'il n'y a pas de théorème de Hahn-Banach pour les polynômes homogène de degré $m > 1$ sur un espace de Banach. Mais il y a des réponses positives à ces questions dans certains cas particuliers. L'objectif de cette section est d'étudier une version particulière du théorème de Hahn-Banach pour les opérateurs multilinéaires. Nous établissons, sous certaines hypothèses, une relation entre les opérateurs multilinéaires et multi-sous linéaires.

Formulation du problème. Soient X_j $(1 \leq j \leq m)$ des espaces de Banach et Y un espace de Banach complètement réticulé. Soit E_j un sous espace de X_j. Soit u_0 un opérateur m-linéaire borné de $E_1 \times ... \times E_m$ dans Y et T un opérateur sous linéaire sur $X_1 \times ... \times X_m$. Si on pose le problème comme dans le cas linéaire, c'est à dire

$$u_0\,(x) \leq T(x) \text{ sur } E_1 \times ... \times E_m$$

on aura une réponse négative. En effet, soit $u : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ le prolongement borné de u_0 tel que $u\,(x) \leq T\,(x)$ pour $x \in X_1 \times ... \times X_m$. S'il existe $x_0 \in X_1 \times ... \times X_m$ tel que $u\,(x_0) > 0$, alors $u\,(x_0) = 0$. En effet, pour $a \in \mathbb{R}_+$, $u(x_0) = u(x_0^1, ..., x_0^m) = a^{-m}u(ax_0^1, ..., ax_0^m) \leq a^{-m}T\,(ax_0) \leq a^{1-m}T\,(x_0)$, d'où

$$\|u(x_0)\| \leq a^{1-m}\,\|T\,(x_0)\|\,,$$

qui converge vers 0 quand $a \longrightarrow \infty$ $(m \neq 1)$, i.e., $u(x_0) = 0$. Finalement, $u\,(x) \leq 0$ pour tout x dans $X_1 \times ... \times X_m$, ce qui entraine $u = 0$.

On formule donc le problème de la façon suivante : Soit u un multilinéaire défini sur le sous espace $E_1 \times ... \times E_m \subset X_1 \times ... \times X_m$ $(E_j \subset X_j)$, tel que $u \leq T$ où $T \in \mathcal{SL}(X_1, ..., X_m; Y)$. Existe-t-il un opérateur multilinéaire $\tilde{u}$, défini sur $X_1 \times ... \times X_m$, prolongeant u et vérifiant

$$\tilde{u} \leq T \text{ sur } X_1 \times ... \times X_m?.$$

Le théorème suivant généralise le théorème de Hahn-Banach pour certains opérateurs multi-sous linéaires.

Théorème 5.7. *Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach et Y un espace de Banach complètement réticulé. Considérons T dans $\mathcal{SL}(X_1, ..., X_m; Y)$, de la forme*

$$T\left(x^1, ..., x^m\right) = T_1\left(x^1\right) ... T_m\left(x^m\right)$$

où les $T_j : X_j \to Y$ sont des opérateurs linéaires bornés symétriques. Alors, pour tout $x_0 \in X_1 \times ... \times X_m$ il existe $u_{x_0} \in \nabla T$ tel que $T(x_0) = u_{x_0}(x_0)$ (i.e., $T(x) = \sup\{u(x) : u \in \nabla T\}$) est atteint.

Preuve. Considérons l'opérateur linéaire $v_j : \mathbb{R}x_0^j \to Y$ défini par $v_j\left(\lambda x_0^j\right) = \lambda_j T_j\left(x_0^j\right)$. Pour $T_j : X_j \to Y$, on a $v_j \leq T_j$ sur $\mathbb{R}x_0^j$. Par le théorème de Hahn-Banach ($cf.$ [Zaa97]) appliqué aux opérateurs sous linéaires, il existe une extension linéaire de v_j noté u_j telle que $u_j \leq T_j$ sur X_j. Comme T_j est positif (T_j est symétrique) pour tout j, nous avons $|u_j(x^j)| \leq T_j(x^j)$, $x^j \in X_j$. Ainsi,

$$\left|u_1\left(x^1\right) ... u_m\left(x^m\right)\right| \leq T_1\left(x^1\right) ... T_m\left(x^m\right) \quad \forall x \in X_1 \times ... \times X_m,$$

ou encore, en posant $u(x) = u_1(x^1) ... u_m(x^m)$,

$$|u(x)| \leq T(x) \quad \forall x \in X_1 \times ... \times X_m.$$

Cela achève la démonstration car u multilinéaire prolonge $v_1...v_m$ et

$$u(x_0) = u(x_0^1, ..., x_0^m) = v_{x_0}(x_0^1, ..., x_0^m) = T_1\left(x_0^1\right)...T_m\left(x_0^m\right) = T(x_0). \quad \blacksquare$$

Corollaire 5.8. *Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach et Y un espace de Banach complètement réticulé. Soit $T \in \mathcal{SL}(X_1, ..., X_m; Y)$ tel que*

$$T\left(x^1, ..., x^m\right) = T_1\left(x^1\right)...T_m\left(x^m\right)$$

où $T_j : X_j \to Y$ est un opérateur borné symétrique. Alors

(i) $\|T(x)\| = \sup\limits_{u \in \nabla T} \|u(x)\|,$

(ii) $\|T\| = \sup\limits_{u \in \nabla T} \|u\|.$

Preuve. (i) Soit $x = (x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$. Par le Théorème précédent, il existe $u_x \in \nabla T$ tel que

$$\|T(x)\| = \|u_x(x)\| \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\|.$$

D'autre part, pour $u \in \nabla T$,

$$\begin{aligned} -u(x) &= u(-x^1, ..., x^m) \\ &\leq T(-x^1, ..., x^m) \\ &\leq T_1\left(-x^1\right)...T_m\left(x^m\right) \; (T_1 \text{ est symétrique}) \\ &\leq T_1\left(x^1\right)...T_m\left(x^m\right) \\ &\leq T(x). \end{aligned}$$

Ceci implique $|u(x)| \leq T(x)$ et $\|u(x)\| \leq \|T(x)\|$. Donc

$$\sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\| \leq \|T(x)\|.$$

(ii) se déduit immédiatement de (i). $\blacksquare$

Corollaire 5.9. *Dans les mêmes conditions que le corollaire précédent, les propriétés* *suivantes sont équivalentes*

(i) *L'opérateur T est borné.*

(ii) *Pour tout u dans ∇T, u est borné.*

La démonstration utilise le *Théorème de Banach-Steinhaus.*

Lemme 5.10 (*Théorème de Banach-Steinhaus*) ($cf.$[Bre87]). *Soient X, Y deux espaces de Banach. Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(X;Y)$ une famille d'opérateurs linéaires. Si*

$$\sup_{u \in \mathcal{S}} \|u(x)\| < \infty \text{ pour tout } x \in X,$$

alors il existe une constante $C < \infty$ telle que

$$\sup_{u \in \mathcal{S}} \|u\| \leq C.$$

Preuve du Corollaire (5.9). L'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$ est immédiate.

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Tout élément $v \in X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ admet une représentation

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m$$

telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\|x_i^1\right\| ... \left\|x_i^m\right\| < \infty.$$

Posons $\mathcal{S} = \{\tilde{u} \mid u \in \nabla T\}$. Soit $v \in X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$. Alors

$$\begin{aligned} \sup_{\tilde{u} \in \mathcal{S}} \|\tilde{u}(v)\| &= \sup_{u \in \nabla T} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} u\left(x_i^1, ..., x_i^m\right) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{u \in \nabla T} \left\| u\left(x_i^1, ..., x_i^m\right) \right\| \end{aligned}$$

D'après le Corollaire (5.8 ; (i)),

$$\begin{aligned}
\sup_{\tilde{u}\in\mathcal{S}}\|\tilde{u}(v)\| &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left\|T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\| \\
&\leq \|T\|\sum_{i=1}^{\infty}\left\|x_i^1\right\|...\|x_i^m\| < \infty
\end{aligned}$$

Par le Théorème de Banach-Steinhaus, il existe une constante positive $C < \infty$ telle que

$$\sup_{\tilde{u}\in\mathcal{S}}\|\tilde{u}\| \leq C$$

i.e., $\sup_{u\in\nabla T}\|u\| \leq C$. On conclut par le Corollaire (5.8 ; (ii)). $\blacksquare$

Remarque 5.11. En général, $\|u\| \leq 2\|T\|$. En effet, $u(x) \leq T(x)$ implique $-u(x^1,...,x^m) \leq T(-x^1,...,x^m)$ et

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq \sup\left\{T(x^1,...,x^m), T(-x^1,...,x^m)\right\} \\
&\leq \sup\left\{|T(x^1,...,x^m)|, |T(-x^1,...,x^m)|\right\} \\
&\leq |T(x^1,...,x^m)| + |T(-x^1,...,x^m)|.
\end{aligned}$$

Corollaire 5.12. *Soit $T \in \mathcal{SL}(X_1,...,X_m;\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) défini par*

$$T(x) = \left\|x^1\right\|...\|x^m\|.$$

Alors

(i) $\nabla T = \{u \in \mathcal{L}(X_1,...,X_m) : \|u\| \leq 1\} = B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}$.

(ii) $\|x^1\|...\|x^m\| = \sup_{u\in B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}}|u(x)|$ et

$$\|T\| = \sup_{u\in\in B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}}\|u\| = 1.$$

Preuve. (i) Facile à voir.

(ii) Vient du Corollaire (5.8). ■

5.4 Les opérateurs m-sous linéaires Cohen fortement p-sommants

Cette section est consacrée à étudier les opérateurs multi-sous linéaires Cohen fortement p-sommants. C'est une adaptation de [AM07]. Nous démontrons par une autre méthode le théorème de domination de Pietsch.

Définition 5.13. Soient $1 < p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach et soit Y un espace de Banach réticulé. Un opérateur m-sous linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est Cohen fortement p-sommant, si et seulement s'il existe une constante positive $C > 0$ telle que, pour tout $n \in N$, $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$ $(j = 1, ..., m)$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$,

$$\left\| \left(\left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right) \right\|_{l_1^n} \leq C\left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\| \left(y_i^*(y) \right) \right\|_{l_{p^*}^n}. \tag{5.2}$$

Rappelons que c'est la même définition que pour le cas multilinéaire. La classe des opérateurs multi-sous linéaires Cohen fortement p-sommants de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y est notée $\mathcal{SD}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$. On note aussi $d_p^m(T)$ la plus petite constante C telle que l'inégalité (5.2) soit vérifiée. Pour la définition des opérateurs multi-sous linéaires Cohen fortement p-sommant positifs, on remplace Y^* par $(Y^*)^+$.

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathcal{SL}(X_1, ..., X_m; Y)$. Par (5.2), l'opérateur T est Cohen fortement p-sommant, si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $v \in \mathcal{B}(l_p^n; Y^*)$,

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), v(e_i) \right\rangle \right| \leq C\left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \|v\|. \tag{5.3}$$

Pour $p = 1$, nous avons $\mathcal{SD}_1^m(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{SL}(X_1, ..., X_m; Y)$.

Proposition 5.14. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, ..., X_m, E_1, ..., E_m, Y, Z$ des espaces de Banach tels que Y, Z sont réticulés. Considérons $T \in \mathcal{SL}(X_1, ..., X_m; Y)$, $u \in \mathcal{B}(Y; Z)$ et $u_j \in \mathcal{B}(E_j, X_j)$ $(1 \leq j \leq m)$.*
(i) *Si T est Cohen fortement p-sommant, alors $u \circ T$ est Cohen fortement p-sommant et $d_p^m(uT) \leq \|u\| \, d_p^m(T)$.*
(ii) *Si T est Cohen fortement p-sommant, alors $T \circ (u_1, ..., u_m)$ est Cohen fortement p-sommant et $d_p^m(T \circ (u_1, ..., u_m)) \leq d_p^m(T) \prod\limits_{j=1}^{m} \|u_j\|$.*

Preuve. (i) Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$ et $z_1^*, ..., z_n^* \in Z^*$. Il suffit par (5.3) de prouver que

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle uT\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), z_i^*\right\rangle\right| \leq \|u\| \, d_p^m(T) (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\|x_i^j\right\|_{X_j}^p)^{\frac{1}{p}} \|v\|$$

où $v : Z \longrightarrow l_{p^*}^n$ vérifie $v(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^*(z) e_i$.
Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle uT\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), z_i^*\right\rangle\right| &= \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), u^*(z_i^*)\right\rangle\right| \\ &\leq d_p^m(T) (\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\|x_i^j\right\|_{X_j}^p)^{\frac{1}{p}} \|w\| \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} w(y) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle u^*(z_i^*), y\right\rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle z_i^*, u(y)\right\rangle e_i \\ &= \|u(y)\| \sum_{i=1}^{n} \left\langle z_i^*, \tfrac{u(y)}{\|u(y)\|}\right\rangle e_i. \end{aligned}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} \|w\| &\leq \|u\| \sup_{z \in B_Z} \left\|\left(z_i^*(z)\right)_{1 \leq i \leq n}\right\|_{l_{p^*}^n} \\ &\leq \|u\| \, \|v\|. \end{aligned}$$

(ii) Soient $n \in \mathbb{N}$, $e_1^j, ..., e_n^j \in E_j$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$. Nous avons

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T \circ (u_1, ..., u_m) \left(e_i^1, ..., e_i^m\right), y_i^* \right\rangle\right| \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T \left(u_1 \left(e_i^1\right), ..., u_m \left(e_i^m\right)\right), y_i^* \right\rangle\right| \\
\leq \quad & d_p^m(T)\left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\|u_j \left(e_i^j\right)\right\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \|v\| \ (v(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^*(y) e_i) \\
\leq \quad & d_p^m(T)\left(\prod_{j=1}^{m} \|u_j\|^p \sum_{i=1}^{n} \left\|e_i^j\right\|_{E_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \|v\| \\
\leq \quad & d_p^m(T) \prod_{j=1}^{m} \|u_j\| \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\|e_i^j\right\|_{E_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \|v\|.
\end{aligned}$$

Donc $d_p^m(T \circ (u_1, ..., u_m)) \leq d_p^m(T) \prod_{j=1}^{m} \|u_j\|$. ■

Le résultat principal de cette section est une extension du "*Théorème de domination de Pietsch*". Dans le cas multilinéaire, les auteurs de [AM07] utilisent le lemme de Ky Fan. Ici on va utiliser le lemme suivant.

Lemme 5.15. *Soit K un espace compact et soit $\mathcal{C}$ un cône convexe de $C(K)$ (l'espace des applications continues sur K) tel que*

$$\forall f \in \mathcal{C} \quad \sup_{t \in K} f(t) \leq 0.$$

Alors, il existe une mesure de probabilité μ sur K telle que

$$\forall f \in \mathcal{C} \quad \int_K f(t) d\mu(t) \leq 0.$$

Preuve. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble ouvert convexe des éléments $f \in C(K)$ tels que $\inf f > 0$. Dans $C(K)$, les ensembles $\mathcal{K}$, $\mathcal{C}$ sont disjoints. Par le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique), on peut séparer l'ensemble convexe K du cône ouvert convexe $\mathcal{C}$, i.e., il existe une mesure de probabilité μ sur K telle que $\mu(f) \leq 0$ pour toute $f \in \mathcal{C}$. ■

Théorème 5.16. *Un opérateur m-sous linéaire $T \in \mathcal{SL}(X_1, ..., X_m; Y)$* est *Cohen for-*

tement p-sommant ($1 < p \leq \infty$), *s'il existe une mesure de probabilité de Radon* μ *sur* $B_{Y^{**}}$ *telle que, pour tout* $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$,

$$\left|\left\langle T\left(x^1, ..., x^m\right), y^*\right\rangle\right| \leq d_p^m(T) \prod_{j=1}^m \left\|x^j\right\| \|y^*\|_{L_{p^*}(B_{Y^{**}},\mu)}. \tag{5.5}$$

Réciproquement, s'il existe une constante positive C *et un mesure de Radon* μ *sur* $B_{Y^{**}}$ *telles que, pour tout* $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$,

$$\left|\left\langle T\left(x^1, ..., x^m\right), y^*\right\rangle\right| \leq C \prod_{j=1}^m \left\|x^j\right\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu\right)^{\frac{1}{p^*}}, \tag{5.6}$$

alors $T \in \mathcal{SD}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ *et* $d_p^m(T) \leq C$.

Preuve. Prouvons d'abord la réciproque. Soient $x_i^1, ..., x_i^m \in X_1 \times ... \times X_m$ $(1 \leq i \leq n)$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$. Par (5.6)

$$\left|\left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| \leq C \prod_{j=1}^m \left\|x_i^j\right\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y_i^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**})\right)^{\frac{1}{p^*}},$$

pour tout $1 \leq i \leq n$. Donc

$$\begin{array}{rcl} & & \sum_{i=1}^n \left|\left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| \\ & \leq & C \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^m \left\|x_i^j\right\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y_i^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**})\right)^{\frac{1}{p^*}}\right) \\ \text{(par Hölder)} & \leq & C\left(\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^m \left\|x_i^j\right\|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y_i^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**})\right)\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ & \leq & C\left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left(\left\|x_i^j\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\|(y_i^*(y))_{1 \leq i \leq n}\right\|_{l_{p^*}^n}.\right. \end{array}$$

Cela implique $T \in \mathcal{SD}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ et $d_p^m(T) \leq C$.

Démontrons la première implication. Soit $K = B_{Y^{**}}$. Considérons l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$f_{((x_i^j),(y_i^*))}(y^{**}) = \sum_{i=1}^n \left(\left|\left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| - \frac{C}{p} \prod_{j=1}^m \left\|x_i^j\right\|^p - \frac{C}{p^*} \left|\langle y_i^*, y^{**}\rangle\right|^{p^*}\right) \tag{5.7}$$

où $\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n} \subset X_j, 1 \leq j \leq m$ et $(y_i^*)_{1\leq i\leq n} \subset Y^*$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est un cône convexe En effet, soient $f, g \in \mathcal{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\begin{aligned} & f_{\left(\left(x_i'^j\right),\left(y_i'^*\right)\right)}(y^{**}) \\ = & \textstyle\sum_{i=1}^{k}(\left|\left\langle T\left(x_i'^1,...,x_i'^m\right), y_i'^*\right\rangle\right| - \frac{C}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i'^j\right\|^p - \frac{C}{p^*}\left|\langle y_i'^*, y^{**}\rangle\right|^{p^*}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & g_{\left(\left(x_i''^j\right),\left(y_i''^*\right)\right)}(y^{**}) \\ = & \textstyle\sum_{i=1}^{l}(\left|\left\langle T\left(x_i''^1,...,x_i''^m\right), y_i''^*\right\rangle\right| - \frac{C}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i''^j\right\|^p - \frac{C}{p^*}\left|\langle y_i''^*, y^{**}\rangle\right|^{p^*}). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \alpha f &= \\ & \sum_{i=1}^{k}\alpha(\left|\left\langle T\left(x_i'^1,...,x_i'^m\right), y_i'^*\right\rangle\right| - \frac{C}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i'^j\right\|^p - \frac{C}{p^*}\left|\langle y_i'^*, y^{**}\rangle\right|^{p^*}) \\ &= \sum_{i=1}^{k}(\left|\left\langle T\left(\alpha^{\frac{1}{mp}}x_i'^1,...,\alpha^{\frac{1}{mp}}x_i'^m\right), \alpha^{\frac{1}{p^*}}y_i'^*\right\rangle\right| \\ & -\frac{C}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|\alpha^{\frac{1}{mp}}x_i'^j\right\|^p - \frac{C}{p^*}\left|\left\langle \alpha^{\frac{1}{p^*}}y_i'^*, y^{**}\right\rangle\right|^{p^*}) \\ &= f_{\left(\left(\alpha^{\frac{1}{mp}}x_i'^j\right),\left(\alpha^{\frac{1}{p^*}}y_i'^*\right)\right)}(y^{**}) \end{aligned}$$

$f+g$ est finalement associée aux (x_i) et aux (y_i^*) définis par

$$\begin{aligned} f+g &= \\ & \sum_{i=1}^{n}(\left|\left\langle T\left(x_i^1,...,x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| - \frac{C}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|^p - \frac{C}{p^*}\left|\langle y_i^*, y^{**}\rangle\right|^{p^*}) \end{aligned}$$

avec $n = k + l$,

$$x_i^j = \begin{cases} x_i'^j & \text{si} \quad 1 \le i \le k, \\ x_i''^j & \text{si} \quad k+1 \le i \le n \end{cases}$$

et

$$y_i^* = \begin{cases} y_i'^* & \text{si} \quad 1 \le i \le k, \\ y_i''^* & \text{si} \quad k+1 \le i \le n. \end{cases}$$

Par l'identité élementaire

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad \alpha\beta = \inf_{\epsilon>0} \left\{ \frac{1}{p} \left(\frac{\alpha}{\epsilon} \right)^p + \frac{1}{p^*} (\epsilon\beta)^{p^*} \right\}, \tag{5.8}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} & f_{((x_i^j),(y_i^*))}(y^{**}) \\ = \;& \sum_{i=1}^n \left| \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| - \frac{C}{p} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|x_i^j\|^p - \frac{C}{p^*} \sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, y^{**} \rangle|^{p^*} \\ \le \;& \sum_{i=1}^n \left| \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| - C(\sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^m \|x_i^j\|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, y^{**} \rangle|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Par (5.2) $\sup\limits_{y^{**}\in K} f_{((x_i^j),(y_i^*))}(y^{**}) \le 0$. Par le Lemme (5.15), il existe une mesure de probabilité μ de K telle que $\mu(f) \le 0$ pour toute $f \in \mathcal{C}$. Pour $x = (x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$ et $y^* \in Y^*$, nous avons $f(y^{**}) = f_{(x,y^*)}(y^{**}) = |\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle| - \frac{C}{p} \prod\limits_{j=1}^m \|x^j\|^p - \frac{C}{p^*} |\langle y^*, y^{**} \rangle|^{p^*}$.

Donc $|\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle| \le C(\frac{1}{p} \prod\limits_{j=1}^m \|x^j\|^p + \frac{1}{p^*} \int_K |\langle y^*, y^{**} \rangle|^{p^*} d\mu)$.

Pour $\epsilon > 0$, remplacons x^j par $\frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{m}}} x^j, y^*$ par ϵy^*, puis prenons l'infimum sur $\epsilon > 0$ (voir

(5.8)). On obtient

$$\begin{aligned}
& \left|\left\langle T\left(x^1,...,x^m\right),y^*\right\rangle\right| \\
\leq \quad & C(\tfrac{1}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|\frac{x^j}{\epsilon^{\frac{1}{m}}}\right\|^p+\tfrac{1}{p^*}\textstyle\int_K\left|\left\langle \epsilon y^*,y^{**}\right\rangle\right|^{p^*}d\mu) \\
\leq \quad & C(\tfrac{1}{p}\left(\frac{\prod_{j=1}^{m}\|x^j\|}{\epsilon}\right)^p+\tfrac{1}{p^*}\left(\epsilon(\textstyle\int_K\left|\left\langle y^*,y^{**}\right\rangle\right|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}\right)^{p^*}) \\
\leq \quad & C\prod_{j=1}^{m}\|x^j\|\,(\textstyle\int_K\left|\left\langle y^*,y^{**}\right\rangle\right|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Donc $\left|\left\langle T\left(x^1,...,x^m\right),y^*\right\rangle\right|\leq C\prod_{j=1}^{m}\|x^j\|\,\|y^*\|_{L_{p^*}(B_{Y^{**}},\mu)}$, ce qui termine la preuve. ■

Corollaire 5.17. *Soient* $1\leq p_1\leq p_2<\infty$. *Si* $T\in\mathcal{SD}_{p_2}^m(X_1,...,X_m;Y)$, *alors* $T\in\mathcal{SD}_{p_1}^m(X_1,...,X_m;Y)$ *et*

$$d_{p_1}^m(T)\leq d_{p_2}^m(T).$$

5.5 Comparaison avec le cas multilinéaire

Rappelons que le dual X^* d'un espace de Banach réticulé X est un Banach complètement réticulé pour la relation d'ordre

$$x_1^*\leq x_2^*\Longleftrightarrow\left\langle x_1^*,x\right\rangle\leq\left\langle x_2^*,x\right\rangle,\quad\forall x\in X^+ \tag{5.9}$$

où $\langle .,.\rangle$ est le crochet de dualité.

Un sous espace réticulé d'un espace réticulé X est un sous espace $E\subseteq X$ tel que : $x\vee y\in E$ dès que $x,y\in E$. Le plongement canonique $i:X\longrightarrow X^{**}$ de X dans son bidual, défini par $\langle i(x),x^*\rangle=\langle x^*,x\rangle$, est une isométrie d'ordre de X dans un sous espace réticulé de X^{**}, voir [LT96 ; Proposition 1.a.2]. En considérant X comme sous espace réticulé de X^{**}, nous avons, pour tous $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 \leq x_2 \Longleftrightarrow \langle x_1, x^* \rangle \leq \langle x_2, x^* \rangle , \quad \forall x^* \in (X^*)^+ . \tag{5.10}$$

Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach réticulés. Un opérateur multilinéaire u : $X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est dit positif si, pour tout $x \in X_1^+ \times ... \times X_m^+$, $u(x)$ est positif. Alors

$$|u(x^1, ..., x^m)| \leq u(|x^1| , ..., |x^m|).$$

Pour plus d'information sur les opérateurs multilinéaires positifs voir [Mas00].

La proposition suivante donne un lien entre T et le sous différentiel ∇T. Nous employons la notion d'opérateur p-sommant positif définie dans [Bla86].

Proposition 5.18. *Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach réticulés et Y un espace de Banach complètement réticulé. Soit T un opérateur m-sous linéaire borné de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y. Supposons que T est Cohen fortement p-sommant $(1 < p < \infty)$ et que ∇T est non vide. Alors, pour tout $u \in \nabla T$, u est Cohen fortement p-sommant positif et donc u^* est p^*-sommant positif.*

Preuve. Par (5.9), pour tout $x = (x^1, ..., x^m)$ *dans* $X_1 \times ... \times X_m$ et y^* dans $(Y^*)^+$,

$$\langle u(x), y^* \rangle \leq \langle T(x), y^* \rangle .$$

En conséquence, pour tout $1 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned} & - \langle u(x), y^* \rangle \\ = \quad & \langle u(x^1, ..., -x^j, ..., x^m), y^* \rangle \\ \leq \quad & \langle T(x^1, ..., -x^j, ..., x^m), y^* \rangle . \end{aligned}$$

Cela implique

$$\begin{aligned}
|\langle u(x), y^*\rangle| &\leq \sup\left\{\langle T(x), y^*\rangle, \langle T(x^1, ..., -x^j, ..., x^m), y^*\rangle\right\} \\
&\leq \sup\left\{|\langle T(x), y^*\rangle|, |\langle T(x^1, ..., -x^j, ..., x^m), y^*\rangle|\right\} \\
&\leq |\langle T(x), y^*\rangle| + |\langle T(x^1, ..., -x^j, ..., x^m), y^*\rangle|
\end{aligned}$$

et par (5.6)

$$|\langle u(x), y^*\rangle| \leq 2d_p^m(T) \prod_{j=1}^{m} \left\|x^j\right\| \|y^*\|_{L_{p^*}(B_{Y^{**}},\mu)}. \tag{5.11}$$

Donc, u est Cohen fortement p-sommant positif. Alors

$$\|u^*(y^*)\| \leq 2d_p^m(T) \int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}, \tag{5.12}$$

i.e., l'opérateur u^* est p^*-sommant positif et $\pi_{p^*}^+(u^*) \leq 2d_p^m(T)$. ■

Corollaire 5.19. *Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach réticulés et Y un espace de Banach complètement réticulé. Soit $T \in \mathcal{SL}(X_1, ..., X_m; Y)$ tel que*

$$T\left(x^1, ..., x^m\right) = T_1\left(x^1\right) ... T_m\left(x^m\right)$$

où $T_j : X_j \to Y$ est un opérateur sous linéaire symétrique. Si T est Cohen fortement p-sommant, alors pour tout $u \in \nabla T$, u^* est p^*-sommant positif.

Remarque 5.20. On ne sait pas si u est Cohen fortement p-sommant.

Maintenant, on étudie la réciproque de la proposition (5.19).

Théorème 5.21. *Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach réticulés et Y un espace de Banach complètement réticulé. Soit T un opérateur m-sous linéaire borné de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y. Supposons qu'il existe une constante positive $C > 0$, un ensemble I, un ultrafiltre*

$\mathcal{U}$ sur I et $\{u_i\}_{i\in I} \subset \nabla T$ tels que, pour tout x dans $X_1 \times ... \times X_m$ et $y^* \in Y^*$,

$$|\langle u_i(x), y^*\rangle| \underset{\mathcal{U}}{\longrightarrow} |\langle T(x), y^*\rangle|$$

et $d_p^m(u_i) \leq C$. Alors $T \in \mathcal{SD}_p^m(X_1, ..., X_m, Y)$ et $d_p^m(T) \leq C$.

Preuve. Comme $u_i \in \mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m, Y)$, il existe, par le Théorème 5.17, une mesure de probabilité de Radon μ_i sur $B_{Y^{**}}$ telle, que pour tout $x \in X$,

$$\left|\left\langle u_i\left(x^1, ..., x^m\right), y^*\right\rangle\right| \leq d_p^m(u_i) \prod_{j=1}^{m} \left\|x^j\right\| \|y^*\|_{L_{p^*}(B_{Y^{**}}, \mu_i)}.$$

Or, pour tout $y^* \in Y^*$,

$$\left|\left\langle u_i\left(x^1, ..., x^m\right), y^*\right\rangle\right| \underset{\mathcal{U}}{\longrightarrow} \left|\left\langle T\left(x^1, ..., x^m\right), y^*\right\rangle\right|$$

d'où

$$|\langle T(x), y^*\rangle| \leq \lim_{\mathcal{U}} d_p^m(u_i) \prod_{j=1}^{m} \left\|x^j\right\| \int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu_i(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}.$$

La boule unité $B_{Y^{**}}$ étant $*$-faiblement compacte, (μ_i) converge $*$-faiblement vers une probabilité μ sur $B_{Y^{**}}$; par conséquent, pour tout x dans $X_1 \times ... \times X_m$ et $y^* \in Y^*$,

$$|\langle T(x), y^*\rangle| \leq C \|x\| \int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}.$$

Cela implique $d_p^m(T) \leq C$. ■

Terminons cette sections par deux questions :

Question 1.

Soit T un opérateur sous linéaire de l'espace de Banach X dans un espace de Banach complètement réticulé. Alors, par [AM04 ; Proposition 2.3], $T(x) = \sup\{u(x) : u \in \nabla T\}$ et le sup est atteint. Si T est un opérateur m-sous linéaire borné de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y. L'ensemble ∇T est-il non vide ? Si ∇T est non vide, a-t-on $T(x) = \sup\{u(x) : u \in \nabla T\}$ et le sup est-il atteint ?

Question 2.

Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach réticulé et Y un espace de Banach réticulé. Soit T un opérateur m-sous linéaire borné de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y. Supposons ∇T non vide, $T(x) = \sup\{u(x) : u \in \nabla T\}$ et supposons que le sup est atteint. Est ce que $\nabla T \subset \mathcal{D}_p^m(X_1 \times ... \times X_m, Y)$ implique $T \in \mathcal{SD}_p^m(X_1 \times ... \times X_m, Y)$? On ne sait pas non plus si l'inverse est vraie.

Bibliographie

[Ale85] R. ALENCAR. *Multilinear mappings of nuclear and integral type.* Proc. Amer. Math. Soc. **94**(1),33–38 (1985).

[AHV83] R. M. ARON, C. HERVÉS AND M. VALDIVIA. *Weakly continuous mappings on Banach spaces.* J. Funct. Anal. **52**, 189–204 (1983).

[Aro80] R. ARON. *Extension and lifting theorem for analytic mappings.* Functional Analysis : Surveys and recent results II, Math. stud. **38**, North Holland (1980), 257-267.

[AM04] D. ACHOUR AND L. MEZRAG. *Little Grothendieck's theorem for sublinear operators.* J. Math. Anal. Appl. **296** (2004) 541-552.

[AM07] D. ACHOUR AND L. MEZRAG. *On the Cohen strongly p-summing multilinear operators.* J. Math. Anal. Appl. **327** (1) (2007), 550-563.

[ASaa10] A. ACOUR AND K. SAADI. *A polynomial caracterization of Hilbert spaces.* Collect. Math. 61, 3 (2010), 291 – 301

[BGV04] F. BOMBAL, D. PÉREZ-GARCÍA, I. VILLANUEVA. *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem.* Quart. J. Math. **55** (2004), 441-450.

[Bla86] O. BLASCO. *A class of operators from a Banach lattice into a Banach space.* Collect. Math. **37** (1986), 13-22.

[BFV01] F. BOMBAL, M. FERNÁNDEZ AND I. VILLANUEVA. *Unconditionally converging multilinear operators.* Math.Nachr. **226**, 5–15 (2001).

[Bra87] H. A. Braunss. *Multi-ideals with special properties,* Blätter Potsdamer Forschungen1/87, Potsdam, (1987).

[Bre87] Hïm Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987

[Bla97] F. Balsco. *Complementation in spaces of symmetric tensor products and polynomials*, Studia Math.123, 165-173, (1997).

[Ble88] R. C. Blei. *Multilinear measure theory and the Grothendieck factorization theorem.* Proc. London Math.Soc. **56**(3), 529–546 (1988).

[Bou81] Jean Bourgain. *New Classes of $\mathcal{L}_p$-spaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1981).

[Bot97] G. Botelho. *Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials*. Proc.Royal Irish Acad. **97**A(2), 145–153 (1997).

[Bot05] G. Botelho. *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note Mat. 25 (2005) 69-102.

[BPR07] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda. *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 43 (2007), 1139–1155

[BR01] C. Boyd and R. A. Ryan. *Geometric theory of spaces of integral polynomials and symmetric tensorproducts.* J. Funct. Anal. **179**, 18–42 (2001).

[Bu03] Q. Bu. *Some mapping properties of p-summing operators with hilbertian domain,* Contemp. Math. **328** (2003) 145–149.

[Coh70] J. S. Cohen. *A characterization of inner product spaces using 2-summing operators*. Studia Mathematica T.1970, 271-276.

[Coh73] J. S. Cohen. *Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates,* Math. Ann. **201** (1973), 177-200.

[Car99] D. Carando. *Extendible polynomials on Banach Spaces*. J. Math. Anal. App. **223** (1999), 359-372.

[CGJ] J. M. F. Castillo, R. García and J. A. Jaramillo. *Extension of bilinear forms on Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **129** (12), 3647-3656.

[CGMM94] P. Calindo, D. García, M. Maestre and J. Mujica. *Extension of multilinear mappings on Banach spaces.* Studia Math. **108** (1994), 55-76.

[CD'AG02] R. Cilia, M. D'Anna and J. Gutiérrez. *Polynomial characterization of $\mathcal{L}_\infty$-spaces.* J. Math.Anal. Appl. **275**, 900–912 (2002).

[CKMT01] Y. S. Choi, S. G. Kim, Y. Meléndez and A. Tonge. *Estimates for absolutely summing norms of polynomials and multilinear maps.* Quart. J. Math. 52, 1–12 (2001).

[CKP92] F. Cobos, T. Kyuhn and J. Peetre. *Schatten-von Neumann classes of multilinear forms.* DukeMath. J. **65**(1), 121–156 (1992).

[DJT95] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. *Absolutely summing operators.* Cambridge University Press, (1995).

[Dim03] Verónica Dimant. *Strongly p-summing multilinear operators.* J. Math. Anal. Appl. **278** (2003) 182–193.

[Din70] S. Dineen. *Holomorphic functions on a Banach space.* Bull. Amer. Math. Soc. 76, 883–886 (1970).

[Din99] S. Dineen. *Complex analysis on infinite dimensional spaces,* Springer Monographs in Math.(Springer, Berlin, 1999).

[Don90] K. Donner. *Extension of positive operators and Korovkin theorems.* Lectures notes in mathematics **90.**

[Dwy71] T. A. W. Dwyer III. *Partial differential equations in Fischer-Fock spaces for the Hilbert-Schmidtholomorphy type.* Bull. Amer. Math. Soc. **77**, 725–730 (1971).

[DF93] A. Defant, K. Floret. *Tensor Norms and Operator Ideals.* North-Holland (1993).

[Flo97] K. Floret. *Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces,* Note Mat. 17 (1997), 153–188.

[FMat95] K. Floret and M. C. Matos. *Applications of a Khintchine inequality to holomorphic mappings.* Math.Nachr. **176**, 65–72 (1995).

[GGut94] M. González and J. Gutiérrez. *When every polynomial is unconditionally converging.* Arch. Math.**63**, 145–151 (1994).

[Gro56] A. Grothendieck. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques.* Bol. Soc. Mat. SaoPaulo **8**, 1–79 (1956).

[GG95] M. González and J. Gutiérrez. *Unconditionally converging polynomials on Banach spaces.* Math. Proc.Cambridge. Philos. Soc. **117**, 321–331 (1995).

[Gre67] W. H. Greub. *Multilinear algebra.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1967).

[GGut99] Manuel Gonzalez and Joaquin M. Gutierrez. *Injective factorization of holomorphic mappings.* Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), no. 6, 1715–1721.

[GDP07] Geraldo Botelho, Daniel Pellegrino and Pilar Rueda. *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 43 (2007), no. 4, 1139–1155.

[GVill03] J. Gutiérrez and I. Villanueva. *Extensions of multilinear operators and Banach space properties.* Proc.Royal. Soc. Edinburgh Series A **133**, (2003).

[GVill05] D. Pérez-García and I. Villanueva, *A composition theorem for multiple summing operators.* Monatsh. Math. 146 (2005), 257-261.

[Hay67] T. L. Hayden. *A conjecture on the extension of bilinear functionals.* Amer. Math. Monthly **74** (9) (1967), 1108-1109.

[Hay67] T. L. Hayden. *The extension of bilinear functionals.* Pacific J. Math. **22** (1967), 99-108.

[Kwa70] S. Kwapień. *A linear topological characterization of inner product space.* Studia Mathematica T. 1970, 277-278.

[KPel80] S. Kwapień and A. Pełczyński. *Absolutely summing operators and translation-invariant spaces of functions on compact abelian groups.* Math. Nachr. **94** (1980), 303–340.

[Lin91] Y. E. Linke. *Linear operators without subdifferentials.* Sibirskii Mathematicheskii Zhurnal **32** (3) (1991), 219-221.

[LT71] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *On the complemented subspace problem;* Israel J. Math **9**(1971)63-269.

[LT96] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces, I and II.* Springer-Verlag, Berlin (1996).

[Mat03] M. C. Matos. *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings.* Collect. Math. **54**,111–136 (2003).

[Mas00] M. Mastylo. *Multilinear Interpolation Theorem.* Math. Proc. Roy. Irish. Acad. **100A** (2) (2000), 149-161.

[Muj86] J. Mujica. *Complex Analysis in Banach Spaces.* Math. Studies, Vol. **120**, North Holland, Amsterdam, (1986).

[MTon99] Y. Meléndez and A. Tonge. *Polynomials and the Pietsch domination theorem.* Math. Proc. Royal IrishAcad. 99A, 195–212 (1999).

[Pel63(1)] A. Pełczyński. *On weakly compact polynomial operators on B-spaces with Dunford-Pettis property.* Bull.Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 11, 371–378 (1963).

[Pel63(2)] A. Pełczyński. *A theorem of Dunford-Pettis type for polynomial operators.* Bull. Acad. Polon. Sci. Ser.Sci. Math. Astr. Phys. **11**, 379–386 (1963).

[Pel67] A. Pełczyński. *A characterization of Hilbert-Schmidt operators.* Studia Math. 28, 355–360 (1967).36.

[Pell03] D. M. Pellegrino. *Cotype and absolutely summing homogeneous polynomials in $\mathcal{L}_p$-spaces.* Studia Math.**157**, 121–131 (2003).

[Pie67] A. Pietsch. *Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen.* Studia Math. 28, 333–353(1967). 45

[Pie83] A. Pietsch. *Ideals of multilinear functionals* (designs of a theory), Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in Theoretical Physics, 185-199. Leipzig. Teubner-Texte, 1983.

[PSou05] D. Pellegrino, M. Souza. *Fully summing multilinear and holomorphic mappings into Hilbert spaces.* Math. Nachr. **278** (2005), 877-887

[Rya79] R. A. Ryan. *Dunford-Pettis properties.* Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 27, 373–379 (1979).

[Rya01] Raymound A. Ryan. *Introduction to tensor products of Banach spaces.* Springer Monographs in Mathematics. (2001).

[SR72] C.P. Stegall, J.R. Retherford. *Fully nuclear and completely nuclear operators with applications to $\mathcal{L}_1$- and $\mathcal{L}_\infty$-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 163 (1972) 457–492.

[Vill03] I. Villanueva. *Integral mappings between Banach spaces.* J. Math. Anal. Appl. **279**, 56–70 (2003).

[Zaa97] A. C. Zaanen. *Introduction to operator theory in Riesz space.* Springer-Verlag. (1997).