REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BATNA
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématiques pures

par

LOMBARKIA Farida

THEME

Sur l'image et le noyau d'une dérivation généralisée

Soutenue le 14/04/2010 devant le Jury composé de :

Président : A. Benbernou, Professeur Université de Mostaganem

Rapporteur : A. Bachir, Maître de conférences Université de Abha

Examinateur : B. Bendoukha, Professeur Université de Mostaganem

Examinateur : S. Guedjiba, Maître de conférences Université de Batna

Examinateur : S. E. Rebiai, Professeur Université de Batna

Examinateur : M. Nadir, Professeur Université de M'sila

Remerciements

Je remercie vivement le Docteur Ahmed Bachir qui a assuré la direction de ce travail avec amabilité et compétence. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma trés profonde gratitude. J'exprime mes vifs remerciements au professeur A. Benbernou pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse. Je tiens à remercier les professeurs S. E. Rebiai, B. Bendoukha, M. Nadir et le Docteur S. Guedjiba pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Je remercie mes collègues du département de mathématiques de la faculté des sciences de Batna. Je leur exprime ma profonde sympathie. Enfin mes remerciements vont à ma famille, mes amies et tous ceux qui m'ont soutenu durant l'élaboration de ce travail.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

Ce travail a pour but l'étude des opérateurs élémentaires satisfaisant le théorème généralisé de Weyl et la propriété de Fuglede-Putnam pour des classes d'op érateurs généralisant le cas normal.

Un opérateur élémentaire sur une algèbre de Banach complexe $\mathcal{A}$ est une application linéaire de la forme

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i,$$

où $a_i, b_i \in \mathcal{A}(1 \leq i \leq n)$. Dans le cas $\mathcal{A} = L(H)$, où H désigne un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, $L(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés agissant sur H, on appelle opérateur de multiplication à gauche par A (resp. à droite par B) l'opérateur L_A défini sur $L(H)$ par $L_A(X) = AX$, (resp. $R_B(X) = XB$), l'opérateur élémentaire de base est $M_{A,B} = L_A R_B$ défini sur $L(H)$ par $M_{A,B}(X) = AXB$, où $A, B \in L(H)$. On note par $d_{A,B}$ l'opérateur de dérivation généralisée $\delta_{A,B}$ défini sur $L(H)$ par $\delta_{A,B}(X) = AX - XB$ ou l'opérateur élémentaire $\Delta_{A,B}$ défini sur $L(H)$ par $\Delta_{A,B}(X) = M_{A,B}(X) - X$.

Soient $\mathcal{K}(H)$ l'idéal des opérateurs compacts et $\mathcal{F}(H)$ l'idéal des opérateurs de rang fini dans $L(H)$.

Le spectre de Weyl est par définition

$$\sigma_W(A) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(H)} \sigma(A + K).$$

H. Weyl [63] a prouvé que si A est un opérateur normal, alors

$$\sigma_W(A) = \sigma(A) \backslash E_0(A),$$

où $E_0(A)$ est l'ensemble des valeurs propres isolées de multiplicité finie. Dans la littérature, un opérateur qui vérifie la dernière égalité est dit satisfait le théorème de Weyl.

M. Berkani dans [18, Théorème 4.5] a montré que le spectre B-Weyl de A est

$$\sigma_{BW}(A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(H)} \sigma_D(A+F),$$

où $\sigma_D(A)$ est le spectre de Drazin de A, il a montré aussi dans [18, Théorème 4.5] que si A est un opérateur normal, alors

$$\sigma_{BW}(A) = \sigma(A) \setminus E(A),$$

où $E(A)$ est l'ensemble des valeurs propres isolées de A. Ceci donne une généralisation du théorème de Weyl. Dans la littérature, un opérateur qui vérifie la dernière égalité est dit satisfait le théorème généralisé de Weyl.

La recherche sur les opérateurs satisfaisant le théorème généralisé de Weyl et le théorème de Weyl a engendré de nombreux travaux depuis une trentaine d'années et le résultat de Weyl a été généralisé pour les opérateurs de Toeplitz par Coburn [29], pour les opérateurs p-hyponormaux par M. Cho, M. Itoh et S. Oshiro [27]. B. P. Duggal et S. V. Djordjevic [35] ont démontré que si A est p-hyponormal, alors $f(A)$ satisfait le théorème de Weyl pour toute fonction analytique f définie sur un voisinage ouvert de $\sigma(A)$, le théorème généralisé de Weyl a été généralisé par M. Berkani et Arroud [21] pour les opérateurs hyponormaux et pour les opérateurs totalement héréditairement normaloid par Duggal et S. V. Djordjevic [37].

Le théorème généralisé de Weyl pour un opérateur élémentaire a été considéré pour la première fois par B. P. Duggal [36], en démontrant que si A et B^* sont hyponormaux et f est une fonction analytique sur un voisinage du spectre de $d_{A,B}$, alors les opérateurs $d_{A,B}$ et $f(d_{A,B})$ satisfont le théorème généralisé de Weyl. Il est donc naturel de poser le problème de généralisation pour d'autres classes d'opérateurs.

Dans le cadre de cette thèse, nous donnons des généralisations de ce théorème pour les opérateurs élémentaires en considérant certaines classes d'opérateurs.

Vu l'importance de certaines proporiétés utilisées tout au long de ce travail, nous avons pour cela jugé utile de préciser leur principales propriétés en appendices.

Le premier chapitre de ce travail est consacré au rappel des principaux résultats et définitions concernant les spectres de Weyl et de B-Weyl. Nous présentons également un rappel de la propriété (gw), la propriété SVEP (propriété de l'extension unique) et les différents théorèmes qui leurs sont associés, ainsi que la transformation d'Aluthge des opérateurs p-hyponormaux et log-hyponormaux.

Dans la première partie du second chapitre, nous établissons que le théorème généralisé de Weyl reste valable lorsqu'on considère l'opérateur $d_{A,B}$ avec A et B^* sont des opérateurs log-hyponormaux, l'application des résultats précédents nous permettent de déduire des résultats concernant l'opérateur élémentaire

$$M_{A_1,B_1} - M_{A_2,B_2},$$

où A_1, A_2, B_1, B_2 sont des opérateurs linéaires bornés sur H.

A. Aluthge [6] a introduit une nouvelle transformation agissant sur $L(H)$ dite transformation d'Aluthge définie par $\widetilde{A} = |A|^{\frac{1}{2}} U |A|^{\frac{1}{2}}$, telle que $A = U|A|$ est la décomposition polaire de A. Elle jouit de propriétés remarquables, nous citons entre autre que la tranformation d'Aluthge d'un opérateur p-hyponormal tel que $\frac{1}{2} \leq p < 1$ est un opérateur hyponormal, ceci nous permet de revenir sur la classe des hyponormaux, partant de ce principe nous montrons dans la deuxième partie du second chapitre que si l'opérateur $d_{\widetilde{A},(\widetilde{B^*})^*} - \lambda$ possède certaines propriétés, alors l'opérateur $d_{AB} - \lambda$ possède les mêmes propriétés pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. l'application des résultats précédents nous permettent de déduire que les opérateurs $d_{A,B}$, $d^{\dagger}_{A,B}$(le dual topologique de $d_{A,B}$) et $f(d_{A,B})$ satisfont le théorème généralisé de Weyl ainsi que la propriété (gw), si l'une des conditions suivantes est satisfaite.

1. Si A, B^* sont $p-$hyponormaux ou $log-$hyponormaux.
2. Si A, B^* sont $w-$hyponormaux tels que $\ker A \subset \ker A^*$ et $\ker B^* \subset \ker B$.
3. Si A est $w-$hyponormal tel que $\ker A \subset \ker A^*$ et B^* est $p-$hyponormal ou $log-$hyponormal.
4. Si A est $p-$hyponormal ou $log-$hyponormal et B^* $w-$hyponormal tel que $\ker B^* \subset \ker B$.

Ces résultats généralisent ceux obtenus par B. P. Duggal dans [38]. Rappelons que la propriété (gw) a été introduite par M. Amouch et M. Berkani dans [10], cette dernière généralise la propriété (w) introduite par Rakocevic [55]. M. Amouch et M. Berkani dans [10] ont établit un rapport entre la propriété (gw) et les différents théorèmes de Weyl.

Au troisième chapitre, nous établissons que le théorème de Fuglede-Putnam reste valable lorsqu'on considére A un opérateur dominant et B^* w-hyponormal tel que $\ker B^* \subset \ker B$, il est aussi valable lorsque A est un opérateur w-hyponormal tel que $\ker A \subset \ker A^*$ et B^* est w-hyponormal tel que $\ker B^* \subset \ker B$, rappelons que le théorème de Fuglede-Putnam assure que si A et B sont des opérateurs normaux, alors

$AX = XB$, pour certain $X \in L(H)$ entraine $A^*X = XB^*$. Une autre formulation de cette propriété est $\ker \delta_{AB} \subseteq \ker \delta_{A^*B^*}$. Ce théorème a été généralisé par plusieurs auteurs, nous citons entre autres, A. Bachir and A. Segres [14, 15] pour le cas des opérateurs dominants et p-hyponormaux, I. H. Jeon, K. Tanahashi et A. Uchiyama [48] pour les opérateurs p-hyponormaux et log-hyponormaux.

Le quatrième chapitre est consacré aux exemples des différentes classes d'opérateurs utilisées tout au long de cet exposé.

Vu l'importance de la propriété SVEP et la propriété (gw), nous avons jugé utile de rappeler ces propriétés en appendices.

0.1 Terminologie

1. On désigne par H un espace de Hilbert complexe, $L(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur H. Si $A \in L(H)$, $ran(A)$ (resp. $\ker(A)$) désigne l'image (resp. le noyau) de A, $\alpha(A)$ (resp. $\beta(A)$) désigne la nullité (resp. la déficience) de A.

2. On désigne par $\mathcal{K}(H)$ l'idéal des opérateurs compacts, $\mathcal{F}(H)$ désigne l'idéal des opérateurs de rang fini.

3. On munit $L(H)$ par l'une des topologies suivantes.
   (i) **Topologie uniforme (de la norme).**
   Une suite $\{A_n\}$ d'opérateurs converges en norme vers 0, si $\| A_n \| \to 0$ quand $n \to \infty$, où $\| A \| = \sup\{\| Ax \|; x \in H, \| x \| = 1\}$.
   L'adhérence d'un sous-ensemble E en norme de $L(H)$ est $\overline{E}$.
   (ii) **Topologie forte d'opérateurs.**
   Une suite $\{A_n\}$ d'opérateurs converges fortement vers 0, si pour tout $x \in H$, $\| A_n x \| \to 0$, quand $n \to \infty$.

4. Un sous-ensemble E de H est dit invariant si $A(E) \subset E$. Un sous-ensemble E de H est dit réduisant si $A(E) \subset E$ et $A^*(E) \subset E$.

5. Soit $A = U|A|$ la décomposition polaire de A, la transformation d'Aluthge de A est l'opérateur $\widetilde{A}$ défini par $\widetilde{A} = |A|^{\frac{1}{2}} U |A|^{\frac{1}{2}}$.

6. Un opérateur A dans $L(H)$ est dit d'ascente finie s'il existe un entier positif n tel que $\ker A^n = \ker A^{n+1}$.

7. Un opérateur A dans $L(H)$ est dit de descente finie s'il existe un entier positif n tel que $ran(A^n) = ran(A^{n+1})$.

8. Les classes considérées dans $L(H)$.
Un opérateur A est dit :
(a) semi-Fredholm supérieur : si $ran(A)$ est fermé et $\alpha(A) < \infty$.
(b) semi-Fredholm inférieur : si $ran(A)$ est fermé et $\beta(A) < \infty$.
(c) semi-Fredholm : si A est semi-Fredholm supérieur ou inférieur.
(d) Fredholm : si $ran(A)$ est fermé et $\alpha(A) < \infty$ et $\beta(A) < \infty$.
(e) semi-B-Fredholm supérieur : si pour un entier naturel n, $A_n : ran(A^n) \rightarrow ran(A^n)$ est un opérateur semi-Fredholm supérieur et $ran(A^n)$ est fermé.
(f) semi-B-Fredholm inférieur : si pour un entier naturel n, A_n est un opérateur semi-Fredholm inférieur et $ran(A^n)$ est fermé.
(g) semi-B-Fredholm : si A est un opérateur semi-B-Fredholm supérieur ou semi-B-Fredholm inférieur.
(h) B-Fredholm : si pour un entier naturel n, A_n est un opérateur de Fredholm.
(i) Weyl : si A est un opérateur de Fredholm d'indice $(ind(A) = \alpha(A) - \beta(A))$ nul.
(j) Browder : si A est un opérateur de Fredholm d'ascente et de descente finies.
(k) B-Weyl : si A est un opérateur B-Fredholm d'indice 0.
(l) nilpotent d'ordre n : si $A^n = 0$ pour un certain entier naturel n.
(m) positif : si $(Ax, x) \geq 0$ pour tout $x \in H$, on note $A \geq 0$.
(n) auto-adjoint : si $A = A^*$, ou A^* est l'adjoint hilbertien de A
(o) normal : si $AA^* = A^*A$.
(p) hyponormal : si $A^*A \geq AA^*$.
(q) co-hyponormal : si $AA^* \geq A^*A$.
(r) semi-hyponormal : si $(A^*A)^{\frac{1}{2}} \geq (AA^*)^{\frac{1}{2}}$.
(s) dominant : si pour tout complexe λ, $ran(A - \lambda) \subset ran(A - \lambda)^*$.
(t) $p-$hyponormal$(0 < p < 1)$: si $(A^*A)^p \geq (AA^*)^p$.
(u) $\log -$hyponormal : si A est inversible et $\log(A^*A) \geq \log(AA^*)$.
(v) $w-$hyponormal : si $|\widetilde{A}| \geq |A|$, tel que $\widetilde{A}$ est la transformation d'Aluthge de l'opérateur A.
(w) normaloid : si $r(A) = \|A\|$.
(x) héréditairement normaloid : si la réstriction de A à un sous espace inva-

riant est normaloid.
(y) totalement héréditairement normaloid : si toute partie inversible est normaloid.

9. La dérivation généralisée induite par les opérateurs $A,\ B \in L(H)$ est : l'opérateur $\delta_{A,B}$ défini par $\delta_{A,B}(X) = AX - XB,\ X \in L(H)$.

10. Opérateur élémentaire de base induit par les opérateurs $A,\ B \in L(H)$ est : l'opérateur $M_{A,B}$ défini par $M_{A,B}(X) = L_A R_B(X) = AXB,\ X \in L(H)$.

11. Opérateur élémentaire :
l'opérateur $R_{(A_1,A_2),(B_1,B_2)}$ défini par $R_{(A_1,A_2),(B_1,B_2)}(X) = A_1XB_1 - A_2XB_2$, $X \in L(H)$. Si $A_2 = B_2 = I$, l'opérateur élémentaire est noté par : $\Delta_{A_1,B_1} = M_{A_1,B_1}(X) - X$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons les définitions et les principaux résultats sur les opérateurs B-Fredholm et semi-B-Fredholm et les différents spectres utilisés ainsi que les différents théorème de Weyl associés. Nous présentons aussi la transformation d'Aluthge des opérateurs p-hyponormaux et log-hyponormaux, ainsi que la propriété de l'extension unique.

1.1 Rappels et notations

Soient X un espace de Banach et $L(X)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur X. Si $A \in L(X)$ on note par $\ker A$ le noyau de A et par $ran(A)$ l'image de A. A est dit un opérateur de Fredholm si $ran\,(A)$ est fermé, $\alpha\,(A) = \dim\ker A$ et $\beta\,(A) = co\dim ran(A)$ sont finis.

A est dit semi-Fredholm si $ran\,(A)$ est fermé et $\alpha\,(A)$ ou $\beta\,(A)$ est fini. A est dit un opérateur semi-Fredholm supérieur (resp. inférieur) s'il est semi-Fredholm et $\alpha\,(A)$ fini (resp. $\beta\,(A)$ fini). L'indice de A est par définition $ind(A) = \alpha(A) - \beta(A)$. L'ascente de A, notée $asc\,(A)$ est le plus petit entier naturel n tel que $\ker A^n = \ker A^{n+1}$ et la descente de A, notée $des\,(A)$ est le plus petit entier naturel n tel que $ran\,(A^n) = ran\,(A^{n+1})$. Plus précisément on a la définition suivante :

Définition 1.1.1 *Pour $A \in L\,(X)$ on définit les suites $(c_n\,(A))$, $(c_n^{'}\,(A))$ et $(k_n\,(A))$ comme suit :*

1. $c_n\,(A) = \dim(ran(A^n)/ran(A^{n+1}))$,
2. $c_n^{'}\,(A) = \dim\left(\ker A^{n+1}/\ker A^n\right)$,
3. $k_n\,(A) = \dim[(ran(A^n) \cap \ker A)/(ran(A^{n+1}) \cap \ker A)]$.

La descente des (A) *et l'ascente* $asc\,(A)$ *sont définies par :*

$$\begin{array}{rcl} des\,(A) & = & \inf\{n : c_n\,(A) = 0\} = \inf\{n : ran(A^n) = ran(A^{n+1})\}, \\ asc\,(A) & = & \inf\{n : c'_n(A) = 0\} = \inf\{n : \ker A^n = \ker A^{n+1}\}, \end{array}$$

avec $\inf \phi = \infty$.

Définition 1.1.2 *Si* $d \in \mathbb{N}$, *on dit que* A *a une descente uniforme pour* $n \geq d$ *si* $ran\,(A) + \ker A^n = ran\,(A) + \ker A^d$, $\forall n \geq d$ *; (ce qui est équivalent à* $k_n\,(A) = 0, \forall n \geq d$*). Si de plus,* $ran\,(A) + \ker A^d$ *est fermé alors on dit que* A *a une descente uniforme topologique pour* $n \geq d$.

Définition 1.1.3 *Un opérateur* $A \in L\,(X)$ *est dit de Weyl s'il est de Fredholm d'indice 0. A est dit de Browder s'il est de Fredholm d'ascente et de descente finies.*

Définition 1.1.4 *Le spectre essentiel, le spectre de Weyl et le spectre de Browder sont définis respectivement par*

$$\begin{array}{rcl} \sigma_e\,(A) & = & \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \ \ n'est\ pas\ de\ Fredholm\}, \\ \sigma_W\,(A) & = & \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \ \ n'est\ pas\ de\ Weyl\}, \\ \sigma_B\,(A) & = & \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \ \ n'est\ pas\ de\ Browder\}. \end{array}$$

Soit $\mathcal{K}(X)$ l'espace des opérateurs compacts, alors d'aprés D. Lay [50] et M. Schechter [58], on a

$$\begin{array}{rcl} \sigma_W\,(A) & = & \displaystyle\bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma(A+K) \\ \sigma_B\,(A) & = & \displaystyle\bigcap_{K \in \mathcal{K}(X), KA = AK} \sigma(A+K). \end{array}$$

Par conséquent

$$\sigma_e(A) \subseteq \sigma_W(A) \subseteq \sigma_B(A).$$

Soit $\Pi_0\,(A)$ l'ensemble des pôles de rang fini de la résolvante de A, rappelons qu'un point isolé λ du spectre $\sigma(A)$ de A est un pôle de rang fini de la résolvante de A si la projection spectrale associé à l'ensemble $\{\lambda\}$ est de rang fini. On note que $\Pi_0\,(A) = iso\sigma(A) \backslash \sigma_e(A)$, et d'aprés S. R. Caradus, W. E. Pfaffenberger et Y. Bertram [25] on a si $\lambda \in \sigma(A)$, alors $\lambda \in \Pi_0\,(A)$ si et seulement si $A - \lambda I$ est un opérateur de Fredholm d'ascente et de descente finies. Par conséquent

$$\sigma_B\,(A) = \sigma\,(A) \backslash \Pi_0\,(A)\,.$$

Définition 1.1.5 *On dit que $A \in L(X)$ satisfait le théorème de Weyl si :*

$$\sigma_W(A) = \sigma(A) \setminus E_0(A),$$

où $E_0(A)$ l'ensemble des valeurs propres isolés de A de multiplicité finie et A satisfait le théorème de Browder si :

$$\sigma_W(A) = \sigma_B(A) = \sigma(A) \setminus \Pi_0(A).$$

Il est bien connu que

$$\Pi_0(A) \subseteq E_0(A).$$

Soit $SF_+(X)$, la classe des opérateurs semi-Fredholm supérieurs. On définit :

$$SF_+^-(X) = \{A \in SF_+(X) : ind(A) \leq 0\},$$

et

$$\sigma_{SF_+^-}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \notin SF_+^-(X)\}.$$

Le spectre approché de A est défini par :

$$\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \inf_{\|x\|=1} \|(A - \lambda I)(x)\| = 0\}.$$

Le spectre $\sigma_{SF_+^-}(A)$ est défini aussi par :

$$\sigma_{SF_+^-}(A) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma_a(A + K).$$

Soit $E_0^a(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A de multiplicité finie qui sont isolées dans $\sigma_a(A)$, on note que

$$E_0(A) \subseteq E_0^a(A).$$

Définition 1.1.6 *On dit que $A \in L(X)$ satisfait le théorème a-Weyl si :*

$$\sigma_{SF_+^-}(A) = \sigma_a(A) \setminus E_0^a(A).$$

Si A satisfait le théorème a-Weyl alors il satisfait le théorème de Weyl mais la réciproque est fausse [56].

Définissons l'ensemble $LD(X)$ par :

$$LD(X) = \{A \in L(X) : asc(A) < \infty \text{ et } ran\left(A^{asc(A)+1}\right) \text{ est fermé}\}.$$

On dit que $\lambda \in \sigma_a(A)$ est un pôle à gauche de A si $A - \lambda I \in LD(X)$, et que $\lambda \in \sigma_a(A)$ est un pôle à gauche de A de rang fini si λ est un pôle à gauche de A et $\alpha(A - \lambda I) < \infty$. On notera par $\Pi^a(A)$ l'ensemble de tous les pôles à gauche de A, et par $\Pi_0^a(A)$ l'ensemble de tous les pôles à gauche de A de rang fini.

Définition 1.1.7 *On dit que A satisfait le théorème a-Browder si :*

$$\sigma_{SF_+^-}(A) = \sigma_a(A) \setminus \Pi_0^a(A).$$

Un opérateur A défini sur un espace de Banach X est appelé B-Fredholm s'il existe un entier naturel n tel que $ran(A^n)$ soit fermé et la restriction de A à $ran(A^n)$ notée A_n vue comme une application de $ran(A^n)$ vers $ran(A^n)$ soit un opérateur de Fredholm.

Proposition 1.1.8 *[18] Soit $A \in L(X)$, s'il existe un entier naturel n tel que $ran(A^n)$ soit fermé et tel que A_n soit un opérateur de Fredholm, alors $ran(A^m)$ est fermé où A_m est un opérateur de Fredholm et $ind(A_m) = ind(A_n)$ pour tout $m \geq n$.*

Définition 1.1.9 *Soient $A \in L(X)$ un opérateur B-Fredholm et n un entier naturel quelconque tel que A_n soit un opérateur de Fredholm, l'indice de A est égal à l'indice de l'opérateur A_n.*

Les opérateurs B-Fredholm ont été introduits par M. Berkani qui a donné une caractérisation importante de cette classe d'opérateurs notée $BF(X)$.

Théorème 1.1.10 *[18] Soit $A \in L(X)$, alors A est un opérateur B-Fredholm si et seulement s'il existe deux sous espaces fermés M et N de X tels que $X = M \oplus N$ et :*

1. *$A(N) \subset N$ et $A\mid_N$ est un opérateur nilpotent,*
2. *$A(M) \subset M$ et $A\mid_M$ est un opérateur de Fredholm.*

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre unitaire d'unité e, suivant la définition dans [57], on dit qu'un élément $x \in \mathcal{A}$ est Drazin inversible s'il existe un élément $b \in \mathcal{A}$ et un entier naturel k tels que

$$x^k bx = x^k, \ \ bxb = b \ \text{ et } \ xb = bx.$$

Dans le cas d'un opérateur linéaire borné A sur un espace de Banach X, on sait que A est Drazin inversible si et seulement s'il a une ascente et une descente finies.

La notion de Drazin inversibilité joue un rôle important pour la classe $BF(X)$. En effet si $\pi : L(X) \to L(X)/\mathcal{F}(X)$ est la projection canonique, alors on a le résultat suivant

Théorème 1.1.11 *[20] Soit $A \in L(X)$, alors A est un opérateur B-Fredholm si et seulement si $\pi(A)$ est Drazin inversible dans l'algèbre $L(X)/\mathcal{F}(X)$.*

On a aussi la proposition suivante qui montre que la classe $BF(X)$ est invariante par les perturbations de rang fini avec conservation de l'indice.

Proposition 1.1.12 *[18] Soit $A \in L(X)$ un opérateur B-Fredholm et soit F un opérateur de rang fini. Alors $A+F$ est un opérateur B-Fredholm et $ind(A+F) = ind(A)$.*

Le spectre B-Fredholm $\sigma_{BF}(A)$ d'un opérateur $A \in L(X)$ est défini par :

$$\sigma_{BF}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ n'est pas B-Fredholm}\}.$$

Dans [17] il est démontré que :

1. $\sigma_{BF}(A)$ est fermé.
2. $\sigma_{BF}(A)$ est stable par les perturbations de rang fini.
3. $\sigma_{BF}(A)$ vérifie le théorème de l'application spectrale.

Définition 1.1.13 *Soit $A \in L(X)$, A est un opérateur B-Weyl s'il est un opérateur B-Fredholm d'indice 0.*

Le spectre B-Weyl est défini par :

$$\sigma_{BW}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ n'est pas B-Weyl}\}.$$

Le spectre de Drazin est défini par :

$$\sigma_D(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ n'est pas Drazin inversible}\}.$$

Remarquons que $\sigma_D(A) = \sigma(A) \setminus \Pi(A)$, où $\Pi(A)$ est l'ensemble de tous les pôles de la résolvante de A.

Rappelons les propriétés suivantes des opérateurs B-Fredholm et du spectre de B-Weyl pour un opérateur $A \in L(X)$, démontrées dans [18]

1. A est un opérateur B-Fredholm d'indice 0 si et seulement si $A = A_0 \oplus A_1$, où A_0 est un opérateur Fredholm d'indice 0 et A_1 est un opérateur nilpotent.
2. Si 0 est isolé dans le $\sigma(A)$, alors A est un opérateur B-Fredholm d'indice 0 si et seulement si A est Drazin inversible.
3. $\sigma_{BW}(A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(X)} \sigma_D(A+F)$.

Soit $E(A)$ l'ensemble des valeurs propres isolées de A. On dit que A satisfait le théorème généralisé de Weyl si :

$$\sigma_{BW}(A) = \sigma(A) \backslash E(A).$$

Dans [22, Théorème 3.9] M. Berkani et J. J. Koliha ont démontré que si A satisfait le théorème généralisé de Weyl alors il satisfait le théorème de Weyl. Dans ce même article il est démontré que si A satisfait le théorème généralisé de Browder :

$$\sigma_{BW}(A) = \sigma(A) \backslash \Pi(A),$$

alors il satisfait le théorème de Browder :

$$\sigma_{W}(A) = \sigma(A) \backslash \Pi_0(A).$$

S'il existe un entier n tel que $A_n : ran(A^n) \to ran(A^n)$ soit un opérateur semi-Fredholm, alors A est appelé un opérateur semi-B-Fredholm. A est un opérateur semi-B-Fredholm supérieur (resp. inférieur) si A_n est un opérateur semi-Fredholm supérieur (resp. inférieur).

Soit $SBF_+(X)$ la classe de tous les opérateurs semi-B-Fredholm supérieurs. On définit :

$$SBF_+^-(X) = \{A \in SBF_+(X) : ind(A) \leq 0\},$$

et

$$\sigma_{SBF_+^-}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \notin SBF_+^-(X)\}.$$

Soit $E^a(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A isolées dans le spectre approché $\sigma_a(A)$. Un opérateur $A \in L(X)$ satisfait le théorème généralisé a-Weyl si :

$$\sigma_{SBF_+^-}(A) = \sigma_a(A) \backslash E^a(A),$$

et il satisfait le théorème généralisé a-Browder si :

$$\sigma_{SBF_+^-}(A) = \sigma_a(A) \backslash \Pi^a(A).$$

Dans [22] M. Berkani et J. J. Koliha ont étudié les différents théorèmes de Weyl et théorèmes de Browder, ainsi que les implications possibles entre ces théorèmes, nous résumons les résultats (voir [22]) dans ce qui suit :

1. Si A satisfait le théorème généralisé a-Weyl, alors il satisfait le théorème généralisé a-Browder.

2. Si A satisfait le théorème a-Weyl, alors il satisfait le théorème a-Browder.
3. Si A satisfait le théorème généralisé a-Weyl, alors il satisfait le théorème généralisé de Weyl.
4. Si A satisfait le théorème généralisé a-Browder, alors il satisfait le théorème généralisé de Browder.
5. Si A satisfait le théorème généralisé de Weyl, alors il satisfait le théorème Weyl.
6. Si A satisfait le théorème généralisé a-Weyl, alors il satisfait le théorème de Weyl.
7. Si A satisfait le théorème généralisé a-Weyl, alors il satisfait le théorème a-Weyl.
8. Si A satisfait le théorème généralisé a-Browder, alors il satisfait le théorème a-Browder.

Dans [10] M. Amouch et M. Berkani ont introduit la propriété (gw) qui généralise la propriété (w) introduite par Rakocevic [55]. Il est démontré qu'un opérateur $A \in L(X)$ satisfait la propriété (gw) si et seulement si A satisfait la propriété (w) et $\Pi^a(A) = E(A)$. Aussi si A satisfait la propriété (gw), alors il satisfait le théorème généralisé de Weyl.

Définition 1.1.14 *Soit $A \in L(X)$, on dit que A satisfait*

(i) la propriété (gw) si, $\sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A) = E(A)$.

(ii) la propriété (w) si, $\sigma_a(A) \backslash \sigma_{SF_+^-}(A) = E_0(A)$.

Théorème 1.1.15 *[10] Soit $A \in L(X)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) A satisfait la propriété (gw),

(ii) A satisfait le théorème généralisé a-Browder et $\Pi^a(A) = E(A)$.

1.2 La transformation d'Aluthge des opérateurs p-hyponormaux et $\log$-hyponormaux

Définition 1.2.1 *Un opérateur $A \in L(H)$ admet la décomposition polaire $A = U|A|$, avec U est l'isométrie partielle et $|A|$ est la racine carrée de A^*A. L'isométrie U est déterminée d'une façon unique par $\ker U = \ker A = \ker|A|$ et $ran(U) = \overline{ran(A)}$.*

Définition 1.2.2 *[6] Soient $A \in L(H)$ et $A = U|A|$ la décomposition polaire de A, alors $\widetilde{A} = |A|^{\frac{1}{2}} U |A|^{\frac{1}{2}}$ est dite transformation d'Aluthge de l'opérateur A.*

Définition 1.2.3 *Soit $A \in L(H)$, on dit que A est :*

(i) p-hyponormal si et seulement si $(A^*A)^p \geq (AA^*)^p$, $(0 < p \leq 1)$, si $p = 1$ on dit que A est hyponormal et si $p = \frac{1}{2}$, A est dit semi-hyponormal.

(ii) log-*hyponormal si et seulement si A est inversible et $log(A^*A) \geq log(AA^*)$.*

(iii) w-hyponormal si et seulement si $|\widetilde{A}| \geq |A|$.

Proposition 1.2.4 *([67], [41]) Soient $A \in L(H)$ un opérateur p-hyponormal, $A = U|A|$ la décomposition polaire de A. Soit $A(s,t) = |A|^s U |A|^t$ tel que $s, t > 0$, la transformation d'Aluthge généralisée de A est donnée par*

$$A(s,t) A(s,t)^* \leq |A|^{2(s+t)} \leq A(s,t)^* A(s,t),$$

(i) si $\max(s,t) \leq p$, (i.e., la transformation d'Aluthge généralisée $A(s,t)$ est hyponormal), et

$$\{A(s,t) A(s,t)^*\}^{\frac{p+\min(s,t)}{s+t}} \leq |A|^{2(p+\min(s,t))} \leq \{A(s,t)^* A(s,t)\}^{\frac{p+\min(s,t)}{s+t}},$$

(ii) si $p < \max(s,t)$, (i.e., la transformation d'Aluthge généralisée $A(s,t)$ est $\frac{p+\min(s,t)}{s+t}$-hyponormal).

Corollaire 1.2.5 *Soit $A \in L(H)$ un opérateur p-hyponormal,*

(i) si $0 < p < \frac{1}{2}$, alors $\widetilde{A}$ est $(p + \frac{1}{2})$-hyponormal.

(ii) si $\frac{1}{2} \leq p < 1$, alors $\widetilde{A}$ est hyponormal.

Théorème 1.2.6 *[60] Soit $A \in L(H)$ un opérateur* log-*hyponormal. Alors*

$$\{A(s,t) A(s,t)^*\}^{\frac{\min(s,t)}{s+t}} \leq |A|^{2\min(s,t)} \leq \{A(s,t)^* A(s,t)\}^{\frac{\min(s,t)}{s+t}}.$$

Preuve. Soit $A \in L(H)$, $\log -$hyponormal et $A = U|A|$. Comme A est inversible, alors U est unitaire. Par définition on a $\log|A^*|^2 \leq \log|A|^2$et par suite $\log|A^*| \leq \log|A|$. D'aprés [40], pour tout $\delta \in (0,1)$ il existe $\alpha \in (0,1)$ tel que $(\exp(\delta)|A|)^\alpha \geq |A^*|^\alpha = U|A|^\alpha U^*$. Il s'ensuit que $\exp(\alpha\delta)|A|^\alpha \geq U|A|^\alpha U^*$ et $\exp(\alpha\delta) U^* |A|^\alpha U \geq |A|^\alpha$. En conséquence

$$\exp(2\alpha\delta) U^* |A|^\alpha U \geq \exp(\alpha\delta)|A|^\alpha \geq U|A|^\alpha U^*.$$

Soient $B = \exp(2\alpha\delta) U^* |A|^\alpha U$, $C = \exp(\alpha\delta)|A|^\alpha$ et $D = U|A|^\alpha U^*$.
Considérant le cas $s \leq t$. Alors

$$\begin{aligned}
\{A(s,t)^* A(s,t)\}^{\frac{s}{s+t}} &= \left(|A|^t U^* |A|^{2s} U |A|^t\right)^{\frac{s}{s+t}} \\
&= \left\{(\exp(-\alpha\delta) C)^{\frac{t}{\alpha}} (\exp(-2\alpha\delta) B)^{\frac{2t}{\alpha}} (\exp(-\alpha\delta) C)^{\frac{t}{\alpha}}\right\}^{\frac{s}{s+t}} \\
&= \exp\left(-\frac{2s\delta(2s+t)}{s+t}\right)\left(C^{\frac{t}{\alpha}} B^{\frac{2t}{\alpha}} C^{\frac{t}{\alpha}}\right)^{\frac{s}{s+t}}.
\end{aligned}$$

Si $p = \frac{2s}{\alpha}$, $q = \frac{s+t}{s}$ et $r = \frac{s}{\alpha}$, alors

$$\frac{2(s+t)}{\alpha} = p + 2r \leq (1+2r) q = \frac{(\alpha+2t)(s+t)}{\alpha s}.$$

En appliquant le théorème de Furuta [42], il vient

$$\begin{aligned}
\{A(s,t)^* A(s,t)\}^{\frac{s}{s+t}} &\geq \exp\left(-\frac{2s\delta(2s+t)}{s+t}\right)\left(C^{\frac{t}{\alpha}} C^{\frac{2t}{\alpha}} C^{\frac{t}{\alpha}}\right)^{\frac{s}{s+t}} \\
&= \exp\left(-\frac{2s\delta(2s+t)}{s+t}\right) C^{\frac{2t}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\{A(s,t) A(s,t)^*\}^{\frac{s}{s+t}} &= \left(|A|^s U |A|^{2t} U^* |A|^s\right)^{\frac{s}{s+t}} \\
&= \left\{(\exp(-\alpha\delta) C)^{\frac{s}{\alpha}} D^{\frac{2t}{\alpha}} (\exp(-\alpha\delta) C)^{\frac{s}{\alpha}}\right\}^{\frac{s}{s+t}} \\
&= \exp\left(-\frac{2s^2\delta}{s+t}\right)\left(C^{\frac{s}{\alpha}} D^{\frac{2t}{\alpha}} C^{\frac{s}{\alpha}}\right)^{\frac{s}{s+t}}.
\end{aligned}$$

Maintenant si $p = \frac{2t}{\alpha}$, $q = \frac{s+t}{s}$ et $r = \frac{s}{\alpha}$, alors

$$\frac{2(s+t)}{\alpha} = p + 2r \leq (1+2r) q = \frac{(\alpha+2s)(s+t)}{\alpha s}.$$

En vertu de [40],

$$\begin{aligned}
\{A(s,t) A(s,t)^*\}^{\frac{s}{s+t}} &\leq \exp\left(-\frac{2s^2\delta}{s+t}\right)\left(C^{\frac{s}{\alpha}} C^{\frac{2t}{\alpha}} C^{\frac{s}{\alpha}}\right)^{\frac{s}{s+t}} \\
&= \exp\left(-\frac{2s^2\delta}{s+t}\right) C^{\frac{2s}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\{A(s,t)^* A(s,t)\}^{\frac{t}{s+t}} &\geq \exp\left(-\frac{2t\delta(2s+t)}{s+t}\right) C^{\frac{2t}{\alpha}} \\ &= \exp\left(-\frac{2t\delta(2s+t)}{s+t}\right) \exp(2t\delta)\,|A|^{2t} \\ &\geq \exp\left(-\frac{2t\delta(2s+t)}{s+t}\right) \exp\left(\frac{2st\delta}{s+t}\right) \{A(s,t)\,A(s,t)^*\}^{\frac{t}{s+t}}.\end{aligned}$$

Comme $\delta \in (0,1)$ est arbitraire, on obtient

$$\{A(s,t)^* A(s,t)\}^{\frac{s}{s+t}} \geq |A|^{2s} \geq \{A(s,t)\,A(s,t)^*\}^{\frac{s}{s+t}}.$$

Considérant maintenant le cas $t < s$. Alors

$$\begin{aligned}\{A(s,t)^* A(s,t)\}^{\frac{t}{s+t}} &= \left(|A|^t\, U^*\, |A|^{2s}\, U\, |A|^t\right)^{\frac{t}{s+t}} \\ &= \left\{(\exp(-\alpha\delta)\,C)^{\frac{t}{\alpha}}\, (\exp(-2\alpha\delta)\,B)^{\frac{2s}{\alpha}}\, (\exp(-\alpha\delta)\,C)^{\frac{t}{\alpha}}\right\}^{\frac{t}{s+t}} \\ &= \exp\left(-\frac{2t\delta(2s+t)}{s+t}\right) \left(C^{\frac{t}{\alpha}} B^{\frac{2s}{\alpha}} C^{\frac{t}{\alpha}}\right)^{\frac{t}{s+t}}.\end{aligned}$$

Si $p = \frac{2s}{\alpha}$, $q = \frac{s+t}{t}$ et $r = \frac{t}{\alpha}$, alors

$$\frac{2(s+t)}{\alpha} = p + 2r \leq (1+2r)\,q = \frac{(\alpha+2t)(s+t)}{\alpha t}.$$

En vertu de [40],

$$\begin{aligned}\{A(s,t)^* A(s,t)\}^{\frac{t}{s+t}} &\geq \exp\left(-\frac{2t\delta(2s+t)}{s+t}\right) \left(C^{\frac{t}{\alpha}} C^{\frac{2s}{\alpha}} C^{\frac{t}{\alpha}}\right)^{\frac{t}{s+t}} \\ &= \exp\left(-\frac{2t\delta(2s+t)}{s+t}\right) C^{\frac{2t}{\alpha}}.\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}\{A(s,t)\,A(s,t)^*\}^{\frac{t}{s+t}} &= \left(|A|^s\, U\, |A|^{2t}\, U^*\, |A|^s\right)^{\frac{t}{s+t}} \\ &= \left\{(\exp(-\alpha\delta)\,C)^{\frac{s}{\alpha}}\, D^{\frac{2t}{\alpha}}\, (\exp(-\alpha\delta)\,C)^{\frac{s}{\alpha}}\right\}^{\frac{t}{s+t}} \\ &= \exp\left(-\frac{2st\delta}{s+t}\right) \left(C^{\frac{s}{\alpha}} D^{\frac{2t}{\alpha}} C^{\frac{s}{\alpha}}\right)^{\frac{t}{s+t}}.\end{aligned}$$

Si $p = \frac{2t}{\alpha}$, $q = \frac{s+t}{t}$ et $r = \frac{s}{\alpha}$, alors

$$\frac{2(s+t)}{\alpha} = p + 2r \leq (1+2r)\,q = \frac{(\alpha+2s)(s+t)}{\alpha t}.$$

Ainsi, encore une fois par [40],

$$\begin{aligned}\{A(s,t)\,A(s,t)^*\}^{\frac{t}{s+t}} &\leq \exp\left(-\frac{2st\delta}{s+t}\right)\left(C^{\frac{s}{\alpha}}C^{\frac{2t}{\alpha}}C^{\frac{s}{\alpha}}\right)^{\frac{t}{s+t}} \\ &= \exp\left(-\frac{2st\delta}{s+t}\right)C^{\frac{2t}{\alpha}}.\end{aligned}$$

Au total

$$\begin{aligned}\{A(s,t)^*\,A(s,t)\}^{\frac{t}{s+t}} &\geq \exp\left(-\frac{2t\delta\,(2s+t)}{s+t}\right)C^{\frac{2t}{\alpha}} \\ &= \exp\left(-\frac{2t\delta\,(2s+t)}{s+t}\right)\exp(2t\delta)\,|A|^{2t} \\ &\geq \exp\left(-\frac{2t\delta\,(2s+t)}{s+t}\right)\exp\left(\frac{2st\delta}{s+t}\right)\{A(s,t)\,A(s,t)^*\}^{\frac{t}{s+t}}.\end{aligned}$$

Comme $\delta \in (0,1)$ est arbitraire, on obtient

$$\{A(s,t)^*\,A(s,t)\}^{\frac{t}{s+t}} \geq |A|^{2t} \geq \{A(s,t)\,A(s,t)^*\}^{\frac{t}{s+t}}.$$

Corollaire 1.2.7 *Soit $A \in L(H)$ un opérateur* log-*hyponormal, alors $\widetilde{A}$ est semi-hyponormal.*

1.3 La propriété de l'extension unique

Soient $A \in L(X), \sigma(A)$ et $\rho(A)$ désignant le spectre et l'ensemble résolvant de A respectivement. L'ensemble résolvant local $\rho_A(x)$ de A au point $x \in X$ est la réunion de tous les sous ensembles ouverts U de $\mathbb{C}$ pour lesquels il existe une fonction analytique $f : U \to X$ qui satisfait :

$$(A-\lambda)\,f(\lambda) = x \text{ pour tout } \lambda \in U.$$

Le spectre local $\sigma_A(x)$ de A au point $x \in X$ est défini par :

$$\sigma_A(x) = \mathbb{C} \backslash \rho_A(x).$$

L'ensemble résolvant local $\rho_A(x)$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$. Pour tout $x \in X$, la fonction $f : \rho(A) \to X$ définie par : $f(\lambda) = (A - \lambda)^{-1} x$ est analytique sur $\rho(A)$ et satisfait $(A - \lambda) f(\lambda) = x$ pour tout $\lambda \in \rho(A)$.

Ainsi l'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un sous ensemble de $\rho_A(x)$, et par suite $\sigma_A(x)$ est un sous ensemble de $\sigma(A)$.

Définition 1.3.1 *Soient X un espace de Banach et $A \in L(X)$. On dit que A satisfait la propriété de l'extension unique qu'en note par SVEP au point $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, si pour tous ouvert U de λ_0 la seule fonction analytique $f : U \to X$ qui satisfait l'équation*

$$(A - \lambda) f(\lambda) = 0.$$

est la fonction constante identiquement nulle, i.e., $f \equiv 0$. L'opérateur A est dit satisfait SVEP si A satisfait SVEP pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Remarque 1.3.2 *Une conséquence importante de la propriété SVEP est l'existence d'une fonction analytique maximale $\widetilde{f}$ qui est une extension de $(A - \lambda)^{-1} x$ sur l'ensemble $\rho_A(x)$, pour tous $x \in X$. La fonction $\widetilde{f}$ vérifie aussi l'équation*

$$(A - \mu) \widetilde{f}(\mu) = x \text{ pour tout } \mu \in \rho_A(x).$$

Théorème 1.3.3 *[1] Soient $A \in L(X)$ et $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Si l'ascente de $A - \lambda_0 I$ est finie, alors A satisfait SVEP au point λ_0.*

Preuve. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\lambda_0 = 0$ et $asc(A) = p < \infty$. Ainsi $\cup_{n\in\mathbb{N}} \ker A^n = \ker A^p$.

Montrons que $ran(A^p) \cap \ker A^p = \{0\}$. Soit $y \in ran(A^p) \cap \ker A^p$, alors il existe $x \in X$ tel que $y = A^p x$ et $A^p y = 0$. On en déduit que $A^{p+n} x = A^n y = 0$ et par conséquent $x \in \ker A^{p+n} = \ker A^p$. Ainsi $y = A^p x = 0$. En vertu de [1, Théorème 2.22], on en conclut que A satisfait SVEP au point 0.

Théorème 1.3.4 *[31] Soit $A \in L(X)$ tel que A satisfait la propriété de l'extension unique SVEP, alors A satisfait le théorème de Weyl si et seulement si $ran(A - \lambda)$ est fermée pour tout $\lambda \in E_0(A)$.*

Chapitre 2

Le Théorème généralisé de Weyl pour $d_{A,B}$

2.1 Introduction

Soient $C = (A_1, A_2)$ et $D = (B_1, B_2)$ deux couples d'opérateurs linéaires bornés, définissons l'opérateur élémentaire de base M_{A_1,B_1} et l'opérateur élémentaire $R_{C,D}$ sur $L(H)$ respectivement par :

$$M_{A_1,B_1}(X) = A_1XB_1 \text{ et } R_{C,D}(X) = M_{A_1,B_1}(X) - M_{A_2,B_2}(X), X \in L(H).$$

Dans [36] B. P. Duggal a prouvé que si A et B^* sont hyponormaux alors

1. $asc(d_{A,B} - \lambda) \leq 1$,
2. $d_{A,B}$ est isoloid,
3. $ran(d_{A,B} - \lambda)$ est fermé pour tout $\lambda \in iso\sigma(d_{A,B})$.

Ainsi $d_{A,B}$ et $f(d_{A,B})$ satisfont le théorème de Weyl et le théorème généralisé de Weyl pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\sigma(d_{A,B}))$.

Dans la première partie de ce chapitre, on montre que l'opérateur $d_{A,B}$ vérifie ces propriétés si A et B^* sont log-hyponormaux. L'application de l'étude précédente nous permet d'établir des résultats concernant l'opérateur élémentaire $R_{C,D}$, en effet, on montre que si $C = (A_1, A_2)$ et $D = (B_1, B_2)$ sont deux couples d'opérateurs dans $L(H)$ avec A_1, A_2, B_1^*, B_2^* sont log-hyponormaux tels que A_1 double commute avec A_2 (A_1 commute avec A_2 et A_2^*) et B_1 double commute avec B_2, alors $R_{C,D}$ est d'ascente finie et satisfait SVEP au point zéro.

Signalons que ce travail a fait l'objet d'une publication dans [51].

Dans la deuxième partie, on prouve aussi que si $\ker A \subset \ker A^*$ et $\ker B^* \subset \ker B$, certaines propriétés sont préservées en passant de l'opérateur $d_{\widetilde{A},(\widetilde{B^*})^*} - \lambda$ à l'opérateur $d_{A,B} - \lambda$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme application de ces derniers résultas on généralise ceux obtenus par B. P. Duggal [38], en montrant que $d_{A,B}$, $d^{\dagger}_{A,B}$ et $f(d_{A,B})$ satisfont le théorème généralisé de Weyl et la propriété (gw), si l'une des conditions suivantes est satisfaite.

1. Si A, B^* sont $p-$hyponormaux ou $\log -$hyponormaux.
2. Si A, B^* sont $w-$hyponormaux tels que $\ker A \subset \ker A^*$ et $\ker B^* \subset \ker B$.
3. Si A est $w-$hyponormal tel que $\ker A \subset \ker A^*$ et B^* est $p-$hyponormal ou $\log -$hyponormal.
4. Si A est $p-$hyponormal ou $\log -$hyponormal et B^* $w-$hyponormal tel que $\ker B^* \subset \ker B$.

Indiquons que ce travail a aussi fait l'objet d'une publication dans [52].

2.2 Le théorème généralisé de Weyl pour l'opérateur $d_{A,B}$ avec A et B^* log-hyponormaux

Rappelons quelques définitions qui nous serons utiles dans ce chapitre.

Définition 2.2.1 *Soit $A \in L(H)$, on définit les suites $(c_n(A))$,$(c'_n(A))$ par :*

1. $c_n(A) = \dim(ran(A^n)/ran(A^{n+1}))$,

2. $c'_n(A) = \dim(\ker A^{n+1}/\ker A^n)$.

La descente $des(A)$ et l'ascente $asc(A)$ de A sont définies par

$$\begin{aligned} des(A) &= \inf\{n : c_n(A) = 0\} = \inf\{n : ran(A^n) = ran(A^{n+1})\}, \\ asc(A) &= \inf\{n : c'_n(A) = 0\} = \inf\{n : \ker A^n = \ker A^{n+1}\}. \end{aligned}$$

Définition 2.2.2 *Soit $A \in L(H)$ la partie quasi-nilpotente de A est le sous espace $H_0(A)$ de H définie par :*

$$H_0(A) = \{x \in H : \lim \|A^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0\}.$$

$H_0(A)$ est généralement non fermé et contient $\ker A$.

Définition 2.2.3 *Soit $A \in L(H)$, A est dit.*

(i) isoloide si $iso\sigma\,(A) \subseteq E\,(A)$, où $iso\sigma\,(A)$ est l'ensemble de tous les éléments isolés dans $\sigma\,(A)$.

(ii) polaroid si $iso\sigma\,(A) \subseteq \Pi\,(A)$.

Lemme 2.2.4 *Soient A, B^* deux opérateurs* $\log -$*hyponormaux, alors $asc(d_{A,B} - \lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Preuve. Nous considérons l'un des deux cas $d_{A,B} = \delta_{A,B}$ ou $d_{A,B} = \Delta_{A,B}$, l'autre se démontre de la même manière.

Soit $d_{A,B} = \delta_{A,B}$. Si A et B^* sont $\log -$hyponormaux, alors $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B^*}$ sont semi-hyponormaux et à fortiori, $\widetilde{\widetilde{A}}$ et $\widetilde{\widetilde{B^*}}$ sont des opérateurs hyponormaux inversibles. D'autres part compte tenu de [36, Proposition 2.3], on en déduit que

$$\ker(\delta_{\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{\widetilde{B}}} - \lambda) = \ker(\delta_{\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{\widetilde{B}}} - \lambda)^2, \text{ pour tout } \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Il suffit de montrer que

$$\ker(\delta_{\widetilde{A},\widetilde{B}} - \lambda) \supset \ker\left(\delta_{\widetilde{A},\widetilde{B}} - \lambda\right)^2.$$

En effet, soit $\widetilde{B} = V|\widetilde{B}|$ la décompositon polaire de $\widetilde{B}$, alors

$$\widetilde{\widetilde{A}}|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}} = |\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}\widetilde{A} \text{ et } (V|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}})\widetilde{\widetilde{B}} = \widetilde{B}(V|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}).$$

Cela étant, considérons $X \in \ker(\delta_{\widetilde{A},\widetilde{B}} - \lambda)^2$, alors on a

$$|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}(\delta_{\widetilde{A},\widetilde{B}} - \lambda)^2(X)V|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}} = (\delta_{\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{\widetilde{B}}} - \lambda)^2(|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}XV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}) = 0,$$

or par hypothèse

$$|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}XV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}} \in \ker(\delta_{\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{\widetilde{B}}} - \lambda)^2 = \ker(\delta_{\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{\widetilde{B}}} - \lambda),$$

ceci conduit à

$$|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}(\delta_{\widetilde{A},\widetilde{B}} - \lambda)(X)V|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}} = (\delta_{\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{\widetilde{B}}} - \lambda)(|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}XV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}) = 0,$$

mais comme $|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}$ et $V|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}$ sont inversibles, alors $X \in \ker(\delta_{\widetilde{A},\widetilde{B}} - \lambda)$, on en conclut que $asc(\delta_{\widetilde{A},\widetilde{B}} - \lambda) = 1$.

Théorème 2.2.5 *Soient* $A, B \in L(H)$. *Si* A *et* B^* *sont* log −*hyponormaux, alors* $d_{A,B}$ *est isoloid.*

Preuve. nous considèrons l'un des deux cas $d_{A,B} = \delta_{A,B}$ ou $d_{A,B} = \Delta_{A,B}$, l'autre se démontre de la même manière.

Soit $\lambda \in iso\sigma(\Delta_{A,B})$ tel que $\lambda \neq -1$, d'après [39, Théorème 3.2], on sait que

$$\sigma(\Delta_{A,B} - \lambda) = \cup\{\sigma(-(1+\lambda) + zA) : z \in \sigma(B)\},$$

et puisque $\sigma(A) = \sigma(\widetilde{A})$ pour tout opérateur A [8, corollaire 2.3], on en déduit que

$$\sigma(\Delta_{A,B}) = \sigma(\Delta_{\widetilde{A},\widetilde{B}}),$$

alors par [36, Théorème 2.7], il vient $\lambda \in \sigma_p(\Delta_{\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{\widetilde{B}}})$.

Montrons maintenant que $\sigma_p(\Delta_{\widetilde{A},\widetilde{B}}) \subset \sigma_p(\Delta_{A,B})$. Pour cela, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et supposons que $\Delta_{A,B} - \lambda$ est injectif et montrons que $\Delta_{\widetilde{A},\widetilde{B}} - \lambda$ est injectif.

Soit $A = U|A|$ la décomposition polaire de A. Si $X \in \ker(\Delta_{\widetilde{A},\widetilde{B}} - \lambda)$, alors

$$U|A|^{\frac{1}{2}}(\widetilde{A}X\widetilde{B} - (1+\lambda))|B|^{\frac{1}{2}} = 0,$$

comme

$$\widetilde{B}|B|^{\frac{1}{2}} = |B|^{\frac{1}{2}}B \text{ et } (U|A|^{\frac{1}{2}})\widetilde{A} = A(U|A|^{\frac{1}{2}}),$$

par conséquent

$$A(U|A|^{\frac{1}{2}}X|B|^{\frac{1}{2}})B - (1+\lambda)(U|A|^{\frac{1}{2}}X|B|^{\frac{1}{2}}) = 0,$$

ainsi $U|A|^{\frac{1}{2}}X|B|^{\frac{1}{2}} = 0$, on en conclut que $X = 0$, donc

$$\sigma_p(\Delta_{\widetilde{A},\widetilde{B}}) \subset \sigma_p(\Delta_{A,B}).$$

Cela fait, on obtient de suite que

$$\lambda \in iso\sigma(\Delta_{A,B}) = iso\sigma(\Delta_{\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{\widetilde{B}}}) \subset \sigma_p(\Delta_{\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{\widetilde{B}}}) \subset \sigma_p(\Delta_{A,B}).$$

Théorème 2.2.6 *Soient* $A, B \in L(H)$. *Si* A *et* B^* *sont* log-*hyponormaux, alors* $ran(d_{A,B} - \lambda)$ *est fermé pour tout* $\lambda \in iso\sigma(d_{A,B})$.

Preuve. Soient $d_{A,B} = \Delta_{A,B}$ et $\lambda \in iso\sigma(\Delta_{A,B})$, tel que $\lambda \neq -1$

Etant donné $Y \in \overline{ran(\Delta_{\widetilde{A},\widetilde{B}} - \lambda)}$, alors il existe une suite (X_n) dans $L(H)$ tel que

$$\widetilde{A}X_n\widetilde{B} - (1+\lambda)X_n \longrightarrow Y.$$

Soit $\widetilde{B} = V|\widetilde{B}|$ la décompositon polaire de $\widetilde{B}$, alors

$$|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}\widetilde{A}X_n\widetilde{B}V|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}} - (1+\lambda)\,|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}X_nV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}} \longrightarrow |\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}YV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}$$

Comme $|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}\widetilde{A} = \widetilde{\widetilde{A}}|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}$ et $\widetilde{B}(V|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}) = (V|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}})\widetilde{\widetilde{B}}$ alors

$$\widetilde{\widetilde{A}}|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}X_nV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}\widetilde{\widetilde{B}} - (1+\lambda)|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}X_nV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}} \quad\longrightarrow\quad |\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}YV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}.$$

En vertu de [36, Théorème 2.6] on en déduit que $(\Delta_{\widetilde{\widetilde{A}},\widetilde{\widetilde{B}}} - \lambda)$ est à image fermé pour tout $\lambda \in iso\sigma(\Delta_{\widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{\widetilde{B}}})$. Ainsi il existe $Z \in L(H)$ tel que

$$\widetilde{\widetilde{A}}|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}X_nV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}\widetilde{\widetilde{B}} - (1+\lambda)|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}X_nV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \widetilde{\widetilde{A}}Z\widetilde{\widetilde{B}} - (1+\lambda)Z.$$

Comme $M_{|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}},V|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}}$ est inversible, alors il existe $X \in L(H)$ tel que $Z = |\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}XV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}$.

Et par suite $\widetilde{\widetilde{A}}Z\widetilde{\widetilde{B}} - (1+\lambda)Z = \widetilde{\widetilde{A}}|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}XV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}\widetilde{\widetilde{B}} - (1+\lambda)|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}XV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}$, de l'unicité de la limite, il s'ensuit

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{A}}|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}XV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}\widetilde{\widetilde{B}} - (1+\lambda)|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}XV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}} &= |\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}YV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}, \text{ impliquant}\\ |\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}\widetilde{A}X\widetilde{B}V|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}} - (1+\lambda)|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}XV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}} &= |\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}YV|\widetilde{B}|^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Donc $\widetilde{A}X\widetilde{B} - (1+\lambda)X = Y$, et ainsi $\Delta_{\widetilde{A},\widetilde{B}} - \lambda$ est à image fermé pour tout $\lambda \in iso\sigma(\Delta_{\widetilde{A},\widetilde{B}})$.

Remarque 2.2.7

1. *On remarque que dans la preuve des théorèmes 2.2.5 et 2.2.6 on a supposé que $\lambda \neq -1$, en effet, si $\lambda = -1$, on obtient $\lambda \in iso\sigma(\Delta_{A,B})$ entraîne $0 \in iso\sigma(M_{A,B})$, et par suite $M_{A,B}$ n'est pas inversible.*

2. *On note que dans la preuve du lemme et des théorèmes précédents on a utilisé le fait que $\widetilde{A^*}$ est p-hyponormal si et seulement si $\left(\widetilde{A}\right)^*$ est p-hyponormal.*
   En effet, si $A = U|A|$ la décomposition polaire de A, alors A^* possède la décomposition polaire $A^* = U^*|A^*|$ et vérifie
   $$\widetilde{A^*} = |A^*|^{\frac{1}{2}}U^*|A^*|^{\frac{1}{2}} = U(\widetilde{A})^*U^*$$
   et
   $$(\widetilde{A})^* = U^*\widetilde{A^*}U.$$
   Ces dernières égalités nous assurent que $\widetilde{A^*}$ est p-hyponormal si et seulement si $\left(\widetilde{A}\right)^*$ est p-hyponormal.

Lemme 2.2.8 *Soient $A, B \in L(H)$ deux opérateurs* log*-hyponormaux, tels que A double commute avec B. Alors AB est* log*-hyponormal.*

Preuve. Si A et B sont log-hyponormaux, alors A et B sont inversibles est
$$\log|A|^2 \geq \log|A^*|^2, \log|B|^2 \geq \log|B^*|^2.$$
Puisque $AB = BA$ et $AB^* = B^*A$, on obtient
$$|AB|^2 = |A|^2|B|^2 = |B|^2|A|^2 \text{ et } |(AB)^*|^2 = |A^*|^2|B^*|^2 = |B^*|^2|A^*|^2.$$
Ceci entraîne que
$$\begin{aligned}\log|AB|^2 &= \lim_{p\to 0^+}\frac{(|AB|^2)^p - 1}{p} = \lim_{p\to 0^+}\frac{(|A|^2)^p(|B|^2)^p - 1}{p}\\ &= \lim_{p\to 0^+}\frac{((|A|^2)^p - 1)(((|B|^2)^p - 1) + (|A|^2)^p + (|B|^2)^p - 2}{p}\\ &= \log|A|^2 + \log|B|^2.\end{aligned}$$
De la même manière on démontre que
$$\log|(AB)^*|^2 = \log|A^*|^2 + \log|B^*|^2.$$
Ce qui donne, puisque AB est inversible et
$$\log|AB|^2 - \log|(AB)^*|^2 = \log|A|^2 - \log|A^*|^2 + \log|B|^2 - \log|B^*|^2 \geq 0,$$
AB est log-hyponormal.

Corollaire 2.2.9 *Soient* $C = (A_1, A_2)$ *et* $D = (B_1, B_2)$ *deux couples d'opérateurs dans* $L(H)$ *. Si* A_1, B_1^*, A_2, B_2^* *sont log-hyponormaux, tels que* A_1 *double commute avec* A_2 *et* B_1 *double commute avec* B_2*, alors* $asc(R_{C,D}) = 1$.

Preuve. En effet, on a

$$R_{C,D}(X) = A_2(\Delta_{(A_2^{-1}A_1),(B_1B_2^{-1})}(X))B_2.$$

Comme A_2^{-1} et $(B_2^{-1})^* = (B_2^*)^{-1}$ sont log-hyponormaux par [8, Lemme 1.1] et $A_2^{-1}A_1$, $(B_1B_2^{-1})^*$ sont *log*-hyponormaux en vertu du lemme 2.2.8. Par ailleurs, en appliquant le lemme 2.2.4 on obtient, d'une part

$$asc(\Delta_{(A_2^{-1}A_1),(B_1B_2^{-1})}) = 1,$$

et d'autre part, comme

$$\begin{aligned} \ker R_{C,D}^2 &= A_2^2(\ker \Delta^2_{(A_2^{-1}A_1),(B_1B_2^{-1})})B_2^2 \\ &= A_2(\ker \Delta_{(A_2^{-1}A_1),(B_1B_2^{-1})})B_2 \\ &= \ker R_{C,D}, \end{aligned}$$

on arrive ainsi à $asc(R_{C,D}) = 1$.

Corollaire 2.2.10 *Soient* $C = (A_1, A_2)$ *et* $D = (B_1, B_2)$ *deux couples d'opérateurs dans* $L(H)$*. Si* A_1, B_1^*, A_2, B_2^* *sont* log-*hyponormaux, tels que* A_1 *double commute avec* A_2 *et* B_1 *double commute avec* B_2*, alors* $R_{C,D}$ *satisfait SVEP au point zéro.*

Théorème 2.2.11 *Soient* $A, B \in L(H)$*. Si* A *et* B^* *sont* log-*hyponormaux, alors* $f(d_{A,B})$ *satisfait le théorème de Weyl, où* $f \in \mathcal{H}(\sigma(d_{A,B}))$*.*

Preuve. Compte tenu du Lemme 2.2.4, on en déduit que $d_{A,B}$ satisfait SVEP, ainsi il s'ensuit du [31, Théorème 2.5] et des théorèmes 2.2.5 et 2.2.6 que $d_{A,B}$ satisfait le théorème de Weyl.

Comme la propriété SVEP est stable par le calcul fonctionnel [49, Proposition 4.10.4] $f(d_{A,B})$ satisfait SVEP pour toute $f \in \mathcal{H}(\sigma(d_{A,B}))$, aussi par [54, Théorème 2.3] on a

$$\sigma_W(f(d_{A,B})) = f(\sigma_W(d_{A,B})).$$

Ainsi

$$f(\sigma_W(d_{A,B})) = f(\sigma(d_{A,B})\backslash E_0(d_{A,B})) = \sigma(f(d_{A,B}))\backslash E_0(f(d_{A,B})),$$

découle du théorème 2.2.5 et de [53, Proposition 1].

Théorème 2.2.12 *Soient $A, B \in L(H)$. Si A et B^* sont* log-*hyponormaux, alors $f(d_{A,B})$ satisfait le théorème généralisé de Weyl, pour toute $f \in \mathcal{H}(\sigma(d_{A,B}))$.*

Preuve. Montrons d'abord que $d_{A,B}$ satisfait le théorème généralisé de Weyl. Soit $\lambda \in \sigma(d_{A,B})\backslash\sigma_{BW}(d_{A,B})$, alors $d_{A,B} - \lambda I$ est un opérateur B-Fredholm d'indice 0 et par [23, Théorème 3.3], $asc(d_{A,B} - \lambda) < \infty$ et $des(d_{A,B} - \lambda) < \infty$, entraînant ainsi que $\lambda \in iso\sigma(d_{A,B})$ et $iso\sigma(d_{A,B}) = E(d_{A,B})$, ceci découle, bien entendu du fait que $d_{A,B}$ est isoloid.

Réciproquement, si $\lambda \in E(d_{A,B})$, alors $d_{A,B} - \lambda$ est de Fredholm d'indice 0 en vertu du théorème 2.2.5 et du théorème 2.2.6, par conséquent

$$E(d_{A,B}) \subset \sigma(d_{A,B})\backslash\sigma_{BW}(d_{A,B}).$$

Ainsi, $d_{A,B}$ satifait le théorème généralisé de Weyl.

Soit $f \in \mathcal{H}(\sigma(d_{A,B}))$, par [20, Corollaire 2.4], on a $\sigma_D(f(d_{A,B})) = f(\sigma_D(d_{A,B}))$.

Sachant que $d_{A,B}$ et $f(d_{A,B})$ possèdent la propriété SVEP, en appliquant [23, Théorème 3.3] on en tire

$$\sigma_D(d_{A,B}) = \sigma_{BW}(d_{A,B}) \text{ et } \sigma_D(f(d_{A,B})) = \sigma_{BW}(f(d_{A,B})),$$

ceci entraîne que

$$\begin{aligned} f(\sigma_{BW}(d_{A,B})) &= f(\sigma(d_{A,B})\backslash E(d_{A,B})) \\ &= \sigma(f(d_{A,B}))\backslash E(f(d_{A,B})) \\ &= \sigma_D(f(d_{A,B})) \\ &= \sigma_{BW}(f(d_{A,B})). \end{aligned}$$

Et ainsi $f(d_{A,B})$ satisfait le théorème généralisé de Weyl par [21, Théorème 2.10].

2.3 La propriété (gw) pour l'opérateur $d_{A,B}$

Dans cette partie, en considérant A et B deux opérateurs dans $L(H)$ vérifiant $\ker A \subset \ker A^*$ et $\ker B^* \subset \ker B$, On montre que si $(d_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)$ est d'ascente et de descente finies et $H_0(d_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda) = \ker(d_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $(d_{AB} - \lambda)$ possède les mêmes propriétés. Des applications à ces résultats seront données.

Théorème 2.3.1 *Soient $A, B \in L(H)$ tels que* $\ker A \subset \ker A^*$ *et* $\ker B^* \subset \ker B$.

1. *Si l'ascente de* $(d_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)$ *est finie pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$, *alors l'ascente de* $(d_{AB} - \lambda)$ *est finie pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $asc(d_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda) = asc(d_{AB} - \lambda)$.
2. *Si la descente de* $(d_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)$ *est finie pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$, *alors la descente de* $(d_{AB} - \lambda)$ *est finie pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $des(d_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda) = des(d_{AB} - \lambda)$.

Preuve. Le cas $d_{AB} = \delta_{AB}$.

1. La preuve se fait en deux étapes.
   - 1$^{\text{ère}}$ étape . Supposons que A et B^* sont injectifs, comme l'ascente $(\delta_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)$ est finie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, alors il existe un entier positif m tel que $asc(\delta_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda) = m$.

     Montrons que
     $$\ker(\delta_{AB} - \lambda)^{(m+1)} \subset \ker(\delta_{AB} - \lambda)^m.$$
     Soient $A = U|A|$ et $B^* = V^*|B^*|$ la décomposition polaire de A et B^* respectivement, alors
     $$\widetilde{A}|A|^{\frac{1}{2}} = |A|^{\frac{1}{2}}A \text{ et } |B^*|^{\frac{1}{2}}(\widetilde{B^*})^* = B|B^*|^{\frac{1}{2}}.$$
     Soit $X \in \ker(\delta_{AB} - \lambda)^{(m+1)}$, il vient
     $$|A|^{\frac{1}{2}}(\delta_{AB} - \lambda)^{m+1}(X)|B^*|^{\frac{1}{2}} = (\delta_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)^{m+1}(|A|^{\frac{1}{2}}X|B^*|^{\frac{1}{2}}) = 0.$$
     Comme
     $$|A|^{\frac{1}{2}}X|B^*|^{\frac{1}{2}} \in \ker(\delta_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)^{(m+1)} = \ker(\delta_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)^m,$$
     on a
     $$(\delta_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)^m(|A|^{\frac{1}{2}}X|B^*|^{\frac{1}{2}}) = |A|^{\frac{1}{2}}(\delta_{AB} - \lambda)^m(X)|B^*|^{\frac{1}{2}} = 0.$$
     De l'injectité de $|A|^{\frac{1}{2}}$ et $|B^*|^{\frac{1}{2}}$, il vient $(\delta_{AB} - \lambda)^m(X) = 0$ entraînant $\ker(\delta_{A,B} - \lambda)^{(m+1)} \subset \ker(\delta_{AB} - \lambda)^m$. D'autre par, puisque l'inclusion inverse est vérifiée pour tous les opérateurs, on en déduit que
     $$\ker(\delta_{AB} - \lambda)^{(m+1)} = \ker(\delta_{AB} - \lambda)^m,$$
     autrement dit $asc(\delta_{AB} - \lambda) = m$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

– 2ème étape. Supposons que A et B^* sont non injectifs, alors l'hypothèse $\ker A \subset \ker A^*$ et $\ker B^* \subset \ker B$ implique que

$$\begin{array}{rcl} A & = & 0 \oplus A_2 \text{ suivant la décomposition } H = \ker A \oplus (\ker A)^\perp, \\ B & = & 0 \oplus B_2 \text{ suivant la décomposition } H = \ker B^* \oplus (\ker B^*)^\perp, \end{array}$$

avec A_2 et B_2 sont injectifs. Considérons l'opérateur

$$X : \ker B^* \oplus (\ker B^*)^\perp \to \ker A \oplus (\ker A)^\perp,$$

qui possède la représentation matricielle suivante $X = [X_{ij}]_{i,j=1}^2$.
Si $X \in \ker(\delta_{AB} - \lambda)^{(m+1)}$, il vient

$$\begin{pmatrix} (-1)^{m+1}\lambda^{m+1}X_{11} & (\delta_{0B_2} - \lambda)^{m+1}(X_{12}) \\ (\delta_{A_20} - \lambda)^{m+1}(X_{21}) & (\delta_{A_2B_2} - \lambda)^{m+1}(X_{22}) \\ & \end{pmatrix} = 0.$$

En supposant $\lambda \neq 0$, on en tire

$$(-1)^m\lambda^m X_{11} = 0 \text{ et } X_{12} \in \ker(\delta_{0B_2} - \lambda)^{m+1},$$

$$X_{21} \in \ker(\delta_{A_20} - \lambda)^{(m+1)} \qquad X_{22} \in \ker(\delta_{A_2B_2} - \lambda)^{(m+1)}.$$

On montre par une méthode similaire comme celle considérée dans la première étape que

$$\ker(\delta_{0B_2} - \lambda)^{(m+1)} = \ker(\delta_{0B_2} - \lambda)^m$$

et

$$\ker(\delta_{A_20} - \lambda)^{(m+1)} = \ker(\delta_{A_20} - \lambda)^m,$$

Ce qui met en évidence en vertu de la première étape que

$$\ker(\delta_{A_2B_2} - \lambda)^{(m+1)} = \ker(\delta_{A_2B_2} - \lambda)^m,$$

et ainsi, $X \in \ker(\delta_{AB} - \lambda)^m$.
Le cas $\lambda = 0$ se démontre de la même manière.

2. La preuve se fait en deux étapes.
   – 1ère étape . Supposons que A et B^* sont injectifs. Comme la descente de $(\delta_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)$ est finie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, alors il existe un entier positif p tel que $des(\delta_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda) = p$.

Montrons alors que

$$ran(\delta_{AB} - \lambda)^p \subset ran(\delta_{AB} - \lambda)^{p+1}.$$

Soit $Y \in ran(\delta_{AB} - \lambda)^p$, alors il existe $X \in L(H)$ tel que $Y = (\delta_{AB} - \lambda)^p(X)$, par conséquent $|A|^{\frac{1}{2}}Y|B^*|^{\frac{1}{2}} \in ran(\delta_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)^p$.
Comme

$$ran(\delta_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)^p = ran(\delta_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)^{p+1},$$

il s'ensuit que $|A|^{\frac{1}{2}}Y|B^*|^{\frac{1}{2}} \in ran(\delta_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)^{p+1}$, et ainsi il existe $X \in L(H)$ tel que $|A|^{\frac{1}{2}}Y|B^*|^{\frac{1}{2}} = (\delta_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)^{p+1}(X) = |A|^{\frac{1}{2}}(\delta_{AB} - \lambda)^{p+1}(X)|B^*|^{\frac{1}{2}}$. De l'injectivité de $|A|^{\frac{1}{2}}$ et $|B^*|^{\frac{1}{2}}$, il vient $Y \in ran(\delta_{AB} - \lambda)^{p+1}$ et par conséquent

$$ran(\delta_{AB} - \lambda)^p \subset ran(\delta_{AB} - \lambda)^{p+1}.$$

Puisque l'inclusion inverse est vérifiée pour tous les opérateurs on en déduit que

$$ran(\delta_{AB} - \lambda)^{p+1} = ran(\delta_{AB} - \lambda)^p.$$

Ce qui permet de conclure que $des(\delta_{AB} - \lambda) = p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

– <u>2ème étape</u>. Supposons que A et B^* sont non injectifs, l'hypothèse $\ker A \subset \ker A^*$ et $\ker B^* \subset \ker B$ implique que

$$\begin{aligned} A &= 0 \oplus A_2 \text{ suivant la représentation } H = \ker A \oplus (\ker A)^{\perp}, \\ B &= 0 \oplus B_2 \text{ suivant la représentation } H = \ker B^* \oplus (\ker B^*)^{\perp}, \end{aligned}$$

avec A_2 et B_2 sont injectifs. Soit $Y \in ran(\delta_{AB} - \lambda)^p$, alors il existe $X \in L(\ker B^* \oplus (\ker B^*)^{\perp}, \ker A \oplus (\ker A)^{\perp})$ tel que

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^p\lambda^p X_{11} & (\delta_{0B_2} - \lambda)^p(X_{12}) \\ (\delta_{A_2 0} - \lambda)^p(X_{21}) & (\delta_{A_2B_2} - \lambda)^p(X_{22}) \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda \neq 0$, en vertu de la première étape il existe $X' \in L(H)$ tel que $Y = (\delta_{AB} - \lambda)^{p+1}(X')$, on en conclut que $Y \in ran(\delta_{AB} - \lambda)^{p+1}$.
Le cas $\lambda = 0$ se démontre de la même manière.

Le cas $d_{AB} = \Delta_{AB}$ se démontre de manière analogue.

Corollaire 2.3.2 *Soient $A, B \in L(H)$ tels que* $\ker A \subset \ker A^*$ *et* $\ker B^* \subset \ker B$, *alors* $\Pi(d_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*}) \subset \Pi(d_{AB})$.

Preuve. Soit $\lambda \in \Pi(d_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*})$, alors $d_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda$ est d'ascente et de descente finies, du théorème 2.3.1, on en tire que $d_{AB} - \lambda$ est d'ascente et de descente finies. Ainsi $\lambda \in \Pi(d_{AB})$.

Théorème 2.3.3 *Soient $A, B \in L(H)$ tels que* $\ker A \subset \ker A^*$ *et* $\ker B^* \subset \ker B$. *Si* $H_0(d_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda) = \ker(d_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$, *alors*

$$H_0(d_{AB} - \lambda) = \ker(d_{AB} - \lambda) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Preuve. Le cas $d_{AB} = \Delta_{AB}$.

- 1$^{\text{ère}}$ étape . Supposons que A et B^* sont injectifs.
  Soit $X \in H_0(\Delta_{AB} - \lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \|(\Delta_{AB} - \lambda)^n(X)\|^{\frac{1}{n}} = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme

  $$\|(\Delta_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)^n(|A|^{\frac{1}{2}}X|B^*|^{\frac{1}{2}})\|^{\frac{1}{n}} = \||A|^{\frac{1}{2}}(\Delta_{AB} - \lambda)^n(X)|B^*|^{\frac{1}{2}}\|^{\frac{1}{n}},$$

  on en déduit que $|A|^{\frac{1}{2}}X|B^*|^{\frac{1}{2}} \in \ker(\Delta_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*} - \lambda)$ impliquant $X \in \ker(\Delta_{AB} - \lambda)$. Comme l'inclusion inverse est vérifiée pour tous les opérateurs, alors

  $$H_0(\Delta_{AB} - \lambda) = \ker(\Delta_{AB} - \lambda) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}.$$

- 2$^{\text{ème}}$ étape. Supposons que A et B^* sont non injectifs, l'hypothèse $\ker A \subset \ker A^*$ et $\ker B^* \subset \ker B$ nous donne

  $$\begin{aligned} A &= 0 \oplus A_2 \text{ suivant la décomposition } H = \ker A \oplus (\ker A)^{\perp}, \\ B &= 0 \oplus B_2 \text{ suivant la décomposition } H = \ker B^* \oplus (\ker B^*)^{\perp}, \end{aligned}$$

  avec A_2 et B_2 sont injectifs.
  Considérons l'opérateur

  $$X : \ker B^* \oplus (\ker B^*)^{\perp} \to \ker A \oplus (\ker A)^{\perp},$$

  qui possède la repésentation matricielle $X = [X_{ij}]_{i,j=1}^2$.
  Si $X \in H_0(\Delta_{AB} - \lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

  $$\lim_{n\to+\infty} \| \begin{pmatrix} (-1)^n(1+\lambda)^n X_{11} & (-1)^n(1+\lambda)^n X_{12} \\ (-1)^n(1+\lambda)^n X_{21} & (\Delta_{A_2B_2} - \lambda)^n(X_{22}) \\ & \end{pmatrix} \|^{\frac{1}{n}} = 0,$$

ceci implique que $\lim_{n\to+\infty} \|(-1)^n(1+\lambda)^n X_{ij}\|^{\frac{1}{n}} = 0$ pour $(i,j) = (1,1)$, $(i,j) = (1,2)$, $(i,j) = (2,1)$ et $\lim_{n\to+\infty} \|(\Delta_{A_2B_2} - \lambda)^n(X_{22})\|^{\frac{1}{n}} = 0$.
Si $\lambda \neq -1$, alors $-(1+\lambda)X_{11} = -(1+\lambda)X_{12} = -(1+\lambda)X_{21} = 0$ et $X_{22} \in \ker(\Delta_{A_2B_2} - \lambda)$. Ainsi $X \in \ker(\Delta_{AB} - \lambda)$.
Comme l'inclusion inverse est vérifiée pour tous les opérateurs, on en déduit que

$$H_0(d_{AB} - \lambda) = \ker(d_{AB} - \lambda) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Pour le cas $\lambda = -1$, le résultat voulu est obtenu par une méthode similaire.
Le cas $d_{AB} = \delta_{AB}$ se démontre de la même manière.

Corollaire 2.3.4 *Soient $A, B \in L(H)$, alors*

1. *$asc(d_{AB} - \lambda) \leq 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. En particulier d_{AB} satisfait SVEP.*
2. *$H_0(d_{AB} - \lambda) = \ker(d_{AB} - \lambda)$ pour tout $\lambda \in iso\sigma(d_{AB})$.*
3. *d_{AB} est polaroid,*

si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1. *A, B^* sont $p-$hyponormaux ou $\log-$hyponormaux.*
2. *A, B^* sont $w-$hyponormaux tels que $\ker A \subset \ker A^*$ et $\ker B^* \subset \ker B$.*
3. *A est $w-$hyponormal tel que $\ker A \subset \ker A^*$ et B^* est $p-$hyponormal ou $\log-$hyponormal.*
4. *A est $p-$hyponormal ou $\log-$hyponormal et B^* $w-$hyponormal tel que $\ker B^* \subset \ker B$.*

Preuve.

1. Si A, B^* sont $\log-$hyponormaux ou $p-$hyponormaux $(0 < p \leq \frac{1}{2})$ ou $w-$hyponormaux avec $\ker A \subset \ker A^*$ et $\ker B^* \subset \ker B$, alors de [36, Proposition 2.3] on a $asc(d_{\widetilde{(\widetilde{A})}[(\widetilde{\widetilde{B^*}})]^*} - \lambda) \leq 1$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, en appliquant le théorème 2.3.1, il vient $asc(d_{AB} - \lambda) \leq 1$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Ainsi d_{AB} satisfait SVEP en tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. En vertu de la preuve du théorème 2.7 dans [36], on a si A et B^* sont hyponormaux, alors $H_0(d_{AB} - \lambda) = \ker(d_{AB} - \lambda)$ pour tout $\lambda \in iso\sigma(d_{AB})$. On applique les mêmes arguments et le théorème 2.3.3 pour obtenir le résultat voulu.

3. Par [36, Théorème 2.7], on a si A et B^* sont hyponormaux, alors d_{AB} est isoloid et par [36, Théorème 3.3] on a d_{AB} satisfait le théorème généralisé de Weyl, et par [24, Lemme 3.2], on obtient d_{AB} est polaroid.

   Comme $iso\sigma(d_{AB}) = iso\sigma(d_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*})$. On applique les mêmes arguments précédents et le Corollaire 2.3.2 pour obtenir

$$\lambda \in iso\sigma(d_{A,B}) = iso\sigma(d_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*}) \subset \Pi(d_{\widetilde{A}(\widetilde{B^*})^*}) \subset \Pi(d_{A,B}).$$

   Ainsi d_{AB} est polaroid.

Corollaire 2.3.5 *Soient $A, B \in L(H)$, alors d_{AB}, $d^{\dagger}_{AB}$, $f(d_{AB})$, $f(d^{\dagger}_{AB})$ satisfont le théorème généralisé de Weyl, pour toute $f \in \mathcal{H}(\sigma(d_{AB}))$, si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. *A, B^* sont $p-$hyponormaux ou $\log -$hyponormaux.*
2. *A, B^* sont $w-$hyponormaux tels que $\ker A \subset \ker A^*$ et $\ker B^* \subset \ker B$.*
3. *A est $w-$hyponormal tel que $\ker A \subset \ker A^*$ et B^* est $p-$hyponormal ou $\log -$hyponormal.*
4. *Si A est $p-$hyponormal ou $\log -$hyponormal et B^* $w-$hyponormal tel que $\ker B^* \subset \ker B$.*

Preuve. D'aprés le corollaire précédent on a d_{AB} est polaroid et $d^{\dagger}_{AB}$ est polaroid en vertu de [5, Théorème 2.5]. Comme d_{AB} est polaroid, on a $f(d_{AB})$ satisfait le théorème généralisé de Weyl par [2, Théorème 3.15], pour toute $f \in \mathcal{H}\ \sigma(d_{AB})$. Or $\sigma(d^{\dagger}_{AB}) = \sigma(d_{AB})$, $\sigma_{BW}(d^{\dagger}_{AB}) = \sigma_{BW}(d_{AB})$, $\Pi(d^{\dagger}_{AB}) = \Pi(d_{AB})$, $E(d^{\dagger}_{AB}) = E(d_{AB})$, et ainsi $d^{\dagger}_{AB}$ satisfait le théorème généralisé de Weyl. Puisque $d^{\dagger}_{AB}$ est polaroid, de [2, Théorème 3.15] on a $f(d^{\dagger}_{AB})$ satisfait le théorème généralisé de Weyl pour toute $f \in \mathcal{H}(\sigma(d_{AB}))$.

Théorème 2.3.6 *Soient $A, B \in L(H)$, alors d_{AB}, $d^{\dagger}_{AB}$, $f(d_{AB})$ satisfont la propriété (gw), pour tout $f \in \mathcal{H}(\sigma(d_{AB}))$ qui n'est pas constante sur aucune composante de $\sigma(d_{AB})$, si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. *A, B^* sont $p-$hyponormaux ou $\log -$hyponormaux.*
2. *A, B^* sont $w-$hyponormaux tels que $\ker A \subset \ker A^*$ et $\ker B^* \subset \ker B$.*
3. *A est $w-$hyponormal tel que $\ker A \subset \ker A^*$ et B^* est $p-$hyponormal ou $\log -$hyponormal.*

4. *A est $p-$hyponormal ou* $\log -$*hyponormal et B^* $w-$hyponormal tel que* $\ker B^* \subset \ker B$.

Preuve. Compte tenu des corollaires 2.3.4 et 2.3.5 et de [10, Théorème 2.8], on a $d^\dagger_{AB}$ satisfait la properiété (gw).

Par [3, Corollaire 2.5] d_{AB} satisfait le théorème généralisé a-Browder. Montrons que $\Pi^a(d_{AB}) = E(d_{AB})$.

Soit $\lambda \in E(d_{AB})$, alors $\lambda \in \Pi(d_{AB}) \subset \Pi^a(d_{AB})$. Si $\lambda \in \Pi^a(d_{AB})$, alors par [22] $d_{AB} - \lambda$ est un opérateur de descente topologique uniforme, et prouvons que $\lambda \in iso\sigma(d_{AB})$.

Si $\lambda \notin iso\sigma(d_{AB})$, alors il existe une suite $\{\mu_n\} \subset \sigma(d_{AB})$ telle que $\mu_n \to \lambda$. Ainsi $\alpha(d_{AB} - \mu_n) = c'_0(d_{AB} - \mu_n) = c'_0(d_{AB} - \lambda) = \alpha(d_{AB} - \lambda) > 0$, (voir [43]), ce qui implique que λ est un point d'accumulation du $\sigma_p(d_{AB})$. Ceci constitue une contradiction du fait que d_{AB} satisfait SVEP, donc $\lambda \in iso\sigma(d_{AB})$ et comme d_{AB} est polaroid, on à fortiori $\lambda \in \Pi(d_{AB}) = E(d_{AB})$.

Ainsi $\Pi^a(d_{AB}) = E(d_{AB})$.Par [10, Théorème 2.6] la propriété (gw) est satisfaite pour d_{AB}. Si d_{AB} satisfait SVEP alors $f(d_{AB})$ satisfait SVEP, par [1], et par [3] $f(d_{AB})$ satisfait le théorème généralisé a-Browder, pour $f \in \mathcal{H}(\sigma(d_{AB}))$ qui n'est pas constante sur aucune composante du $\sigma(d_{AB})$ et ainsi $\Pi(f(d_{AB})) = E(f(d_{AB}))$ par [24, Théorème 3.3].

Par une méthode similaire on prouve que $\Pi^a(f(d_{AB})) = E(f(d_{AB}))$ impliquant $f(d_{AB})$ satisfait la propriété (gw).

Corollaire 2.3.7 *Soient $A, B \in L(H)$, alors $d^\dagger_{AB}$ satisfait le théorème généralisé a-Weyl, si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. *A, B^* sont $p-$hyponormaux ou* $\log -$*hyponormaux.*
2. *A, B^* sont $w-$hyponormaux tels que* $\ker A \subset \ker A^*$ *et* $\ker B^* \subset \ker B$.
3. *A est $w-$hyponormal tel que* $\ker A \subset \ker A^*$ *et B^* est $p-$hyponormal ou* $\log -$*hyponormal.*
4. *A est $p-$hyponormal ou* $\log -$*hyponormal et B^* $w-$hyponormal tel que* $\ker B^* \subset \ker B$.

Preuve. En vertu du Corollaire 2.3.4, d_{AB} satifait SVEP et en appliquant [10, Théorème 2.8], le résultat en decoule.

Dans l'exemple suivant on donne un shift unilatéral pondéré qui satisfait la propriété (gw).

Exemple 2.3.8 *Soit T le shift unilatéral pondéré défini sur $H = l_2$ par :*

$$T(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, ...),$$

tel que (α_n) est une suite de nombres réels positifs et $\alpha_n \longrightarrow 0$, alors $\sigma_p(T) = \emptyset$ et $\sigma(T) = \{0\}$. Montrons que $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_a(T)$.

On a d'aprés [11]

$$\sigma_{SBF_+^-}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : A \text{ ne satisfait pas SVEP au point } \lambda\} = \sigma_{LD}(A),$$

pour tout $A \in L(H)$ et par [22, Théorème 3.1]

$$\sigma_{SBF_+^-}(A) \supseteq \sigma_a(A) \backslash E^a(A) \text{ si et seulement si } \sigma_{SBF_+^-}(A) = \sigma_{LD}(A),$$

pour tout $A \in L(X)$.

Comme l'opérateur T satisfait SVEP et d'aprés les résutats précédent on obtient $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_a(T) \backslash E(A) = \sigma_a(T)$, alors T satisfait la propriété (gw) ainsi que le théorème généralisé de Weyl.

Remarque 2.3.9 *Soit $A \in L(H)$, si A ne possède pas de valeurs propres, alors A satisfait la propriété (gw).*

Chapitre 3

Le théorème de Fuglede-Putnam

3.1 Introduction

Soient H_1 et H_2 deux espaces d'Hilbert complexes séparables de dimension infinie et $L(H_1, H_2)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de H_1 dans H_2. Si $H_1 = H_2 = H$ on note $L(H)$ au lieu de $L(H, H)$.

Un opérateur A est dit dominant d'après J. Stampli et B.L. Wadhwa [59] si pour tout complexe λ, $ran(A - \lambda) \subset ran(A - \lambda)^*$.

Ceci est équivalent à l'existence d'un réel M_λ tel que

$$\| (A - \lambda)^*)x \| \leq M_\lambda \| (A - \lambda)x \|, \text{ pour tout } x \in H.$$

S'il existe une constante M telle que $M_\lambda \leq M$, pour tout λ, A est appelé $M-$hyponormal, et si $M = 1$, A est hyponormal. Par conséquent nous avons les inclusions suivantes :

$$\{Normal\} \subseteq \{Hyponormal\} \subseteq \{M - Hyponormal\} \subseteq \{Dominant\}.$$

Soit $A \in L(H)$ et $A = U|A|$ la décomposition polaire de l'opérateur A, avec U une isométrie partielle et $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$.

On associe à A un opérateur trés utile, qu'on appelle transformation d'Aluthge $\widetilde{A} = |A|^{\frac{1}{2}}U|A|^{\frac{1}{2}}$. Il est connu que $\widetilde{A} = A$ si et seulement si A est quasinormal (A commute avec A^*A). Ainsi $\widetilde{A}$ est différent de A si A n'est pas quasinormal.

Un opérateur $A \in L(H)$ est dit w-hyponormal si $|\widetilde{A}| \geq |A|$. De la définition il s'ensuit que si A est w-hyponormal, alors $\widetilde{A}$ est semi-hyponormal. Aluthge et Wang dans [7] et [8] ont démontré que la classe des w-hyponormaux contient strictement la classe des p-hyponormaux et des log-hyponormaux, donc nous avons les inclusions suivantes :

$$\{hyponormaux\} \subset \{p - hyponrmaux\} \subset \{w - hyponormaux\}.$$

$$\{inversible - hyponormaux\} \subset \{inversible - p - hyponrmaux\}$$
$$\subset \{log - hyponormaux\} \subset \{w - hyponormaux\}.$$

Rappelons que le théorème de Fuglede-Putnam assure que si A et B sont des opérateurs normaux et $AX = XB$, pour certain $X \in L(H)$, alors $A^*X = XB^*$. Ce théorème a ètè généralisé par plusieurs auteurs, nous citons entre autres, A. Bachir et A. Segres [14, 15] pour le cas des opérateurs dominants et p-hyponormaux, I. H. Jeon, K. Tanahashi et A. Uchiyama [48] pour les opérateurs p-hyponormaux et log-hyponormaux.

Dans ce chapitre on prouve que le théorème de Fuglede-Putnam reste valable pour A un opérateur dominant et B^* w-hyponormal tel que $\ker B^* \subset \ker B$, le théorème de Fuglede-Putnam est vérifié aussi lorsque A et B^* sont w-hyponormal tels que $\ker A \subset \ker A^*$ et $\ker B^* \subset \ker B$. Signalons que ce travail a été soumis [16].

3.2 Le théorème de Fuglede-Putnam pour les opérateurs w-hyponormaux

Dans cette section nous présentons les principaux résultats sur le théorème de Fuglede-Putnam. Les théorèmes principaux de ce chapitre repose sur le Théorème 3.2.3 et lemme 3.2.4 qui ajoutent des propriétés importante à la classe des w-hyponormaux.

Définition 3.2.1 *On dit que la paire (A, B) vérifie le théorème de Fuglede-Putnam. Si $AX = XB$ pour un certain $X \in L(H)$, alors*

$$A^*X = XB^*.$$

Théorème 3.2.2 *[33] Soient $A \in L(H_1)$ et $B^* \in L(H_2)$ sont $p-$hyponormaux. Si $AX = XB$ pour certain $X \in L(H_2, H_1)$, alors $A^*X = XB^*$, $\overline{R(X)}$ réduit A, $\ker(X)^\perp$ réduit B, et $A\mid_{\overline{R(X)}}$, $B\mid_{(\ker X)^\perp}$ sont des opérateurs normaux unitairement équivalents.*

Théorème 3.2.3 *Soit E un sous-espace invariant par un opérateur w-hyponormal $A \in L(H)$, alors $A\mid_E$ la réstriction de A sur E est w-hyponormal.*

Preuve. Soit P la projection orthogonale sur E. On a $AP = PAP$.
Comme P est une projection, $I - P$ est aussi une projection et $I - P \geq 0$, d'oú $APPA^* \leq AA^*$ et ainsi on en déduit que

$$|(AP)^*|^2 \leq |A^*|^2.$$

En appliquant le théorème de Löwner Heinz [45], on obtient

$$|(AP)^*| \leq |A^*|. \tag{3.2.1}$$

Comme $|AP|^2 = PA^*AP = P|A|^2P$, de l'inégalité de Hansen [44], on obtient

$$|AP| \geq P|A|P,$$

ainsi

$$P|AP|P \geq P|A|P.$$

Comme $\ker P \subset \ker AP = \ker|AP| \subset \ker A = \ker|A|$, en appliquant [46, Lemme 8], on obtient

$$|AP| \geq |A|. \tag{3.2.2}$$

Comme A est w-hyponormal, alors

$$(|A^*|^{\frac{1}{2}}|A||A^*|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \geq |A^*|. \tag{3.2.3}$$

En appliquant l'inégalité (3.2.1), (3.2.3) et [65, Lemme 5], il vient

$$(|(AP)^*|^{\frac{1}{2}}|A||(AP)^*|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \geq |(AP)^*|. \tag{3.2.4}$$

De (3.2.2) on obtient

$$|(AP)^*|^{\frac{1}{2}}|A||(AP)^*|^{\frac{1}{2}} \leq |(AP)^*|^{\frac{1}{2}}|AP||(AP)^*|^{\frac{1}{2}}.$$

En appliquant le théorème de Löwner Heinz [45], on obtient

$$(|(AP)^*|^{\frac{1}{2}}|A||(AP)^*|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \leq (|(AP)^*|^{\frac{1}{2}}|AP||(AP)^*|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2.5}$$

De (3.2.4), (3.2.5) il en résulte que

$$(|(AP)^*|^{\frac{1}{2}}|AP||(AP)^*|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \geq |(AP)^*|.$$

D'où alors AP est w-hyponormal.

Lemme 3.2.4 *Soient $A \in L(H)$ un opérateur w-hyponormal et E un sous espace invariant par A et réduisant par $\widetilde{A}$, tel que $\widetilde{A}\mid_E$ la réstriction de $\widetilde{A}$ sur E soit un opérateur normal injectif, alors $A\mid_E = \widetilde{A}\mid_E$ et E réduit A.*

Preuve. Soient

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ sur } H = E \oplus E^{\perp}.$$

Comme A est w-hyponormal, alors $|\widetilde{A}| \geq |A| \geq |(\widetilde{A})^*|$. Soit P la projection orthogonale sur E, alors

$$(A_0^* A_0)^{\frac{1}{2}} = P|\widetilde{A}|P \geq P|A|P \geq P|(\widetilde{A})^*|P = (A_0 A_0^*)^{\frac{1}{2}}.$$

En appliquant le théorème de Löwner Heinz [45] on obtient

$$|A_0|^{\frac{1}{2}} = P|\widetilde{A}|^{\frac{1}{2}}P \geq P|A|^{\frac{1}{2}}P \geq P|(\widetilde{A})^*|^{\frac{1}{2}}P = |A_0^*|^{\frac{1}{2}}.$$

on a $|A|^{\frac{1}{2}}A = \widetilde{A}|A|^{\frac{1}{2}}$ et $P|A|^{\frac{1}{2}}P = |A_0|^{\frac{1}{2}}$, on en déduit que

$$|A_0|^{\frac{1}{2}}A_1 = A_0|A_0|^{\frac{1}{2}}$$

Comme A_0 est un opérateur injectif et normal. Alors $A_1 = A\mid_E = A_0 = \widetilde{A}\mid_E$, ainsi

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ sur } H = E \oplus E^{\perp}.$$

Ce qui donne

$$A^*A = \begin{pmatrix} A_0^*A_0 & A_0^*B \\ B^*A_0 & B^*B + D^*D \end{pmatrix} \text{ sur } H = E \oplus E^{\perp}.$$

Comme l'opérateur A_0 est normal, $|A|^{\frac{1}{2}}$ est de la forme

$$|A|^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} |A_0|^{\frac{1}{2}} & X \\ X^* & Y \end{pmatrix} \text{ sur } H = E \oplus E^{\perp}.$$

On a

$$P|A|^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}P = |A_0|,$$

on en déduit que $|A_0| = |A_0| + XX^*$, ainsi $X = 0$.

D'où alors $|A| = |A_0| \oplus Y^2$ impliquant $A^*A = A_0^*A_0 \oplus Y^4$. Par conséquent $A_0^*B = 0$, et $B = 0$. Ainsi E réduit A.

Théorème 3.2.5 *Si* $A \in L(H_1)$ *est dominant et* $B^* \in L(H_2)$ *est* w*-hyponormal tel que* $\ker B^* \subset \ker B$*, alors la paire* (A, B) *vérifie le théorème de Fuglede-Putnam.*

Preuve. Nous considérons deux cas.

Cas 1. Supposons que B^* est injectif et $AX = XB$ pour un certain $X \in L(H_2, H_1)$. Comme $\overline{R(X)}$ est invariant par A et $(\ker X)^\perp$ est invariant par B^*, on peut considérer les décompositions suivantes :

$$H_1 = \overline{R(X)} \oplus \overline{R(X)}^\perp, H_2 = (\ker X)^\perp \oplus \ker X,$$

et par suite les opérateurs A et B peuvent s'écrire sous les formes suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : (\ker X)^\perp \oplus \ker X \to \overline{R(X)} \oplus \overline{R(X)}^\perp.$$

De $AX = XB$ on obtient

$$A_1X_1 = X_1B_1. \tag{3.2.6}$$

Soit $B_1^* = U^*|B_1^*|$ la décomposition polaire de B_1^*. Multiplions les deux membres de (3.2.6) par $|B_1^*|^{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$A_1X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}} = X_1B_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}},$$

ainsi

$$A_1X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}} = X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}}(\widetilde{B_1^*})^*,$$

Comme A_1 est dominant par [59] et B_1^* est $w-$hyponormal par le Théorème 3.2.3, alors $\widetilde{B_1^*}$ est semi-hyponorml, en appliquant [62] on obtient la paire $(A_1, \widetilde{B_1^*})$ satisfait le théorème de Fuglede-Putnam. Par conéquent $A_1 \mid_{\overline{R(X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}})}}$ et $\widetilde{B_1^*} \mid_{\ker(X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}})^\perp}$ sont des opérateurs normaux.

Comme X_1 est injectif à image dense et $|B_1^*|^{\frac{1}{2}}$ est injectif ainsi

$$\overline{R(X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}})} = \overline{R(X_1)} = \overline{R(X)},$$

et

$$\ker(X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}}) = \ker(X_1) = \ker(X).$$

En appliquant le Lemme 3.2.4 on obtient $B_1^* |_{\ker(X)^\perp}$ est normal et $\ker(X)^\perp$ réduit B^*. Par suit $\overline{R(X)}$ réduit A et $\ker(X)^\perp$ réduit B, il vient $A_2 = B_2 = 0$. Comme A_1 et B_1 sont normaux alors $A_1^* X_1 = X_1 B_1^*$. D'où finalement $A^* X = X B^*$.

Cas 2. Si B^* n'est pas injectif, la condition $\ker B^* \subset \ker B$ implique que $\ker B^*$ réduit B^*, comme $\ker A$ réduit A, les opérateurs A et B s'écrivent suivant les décompositions

$$H_1 = (\ker A)^\perp \oplus \ker A, H_2 = (\ker B^*)^\perp \oplus \ker B^*,$$

comme suit

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme A_1 est un opérateur injectif dominant et B_1^* est un opérateur injectif $w-$hyponormal. Soit

$$X : (\ker B^*)^\perp \oplus \ker B^* \to (\ker A)^\perp \oplus \ker A,$$

et soit $X = [X_{ij}]_{i,j=1}^2$ la représentation matricielle de X, alors $AX = XB$ implique que $A_1 X_{11} = X_{11} B_1$ et $X_{12} = X_{21} = 0$. D'aprés le premier cas on en déduit que $A_1^* X_{11} = X_{11} B_1^*$. Ainsi $A^* X = X B^*$.

Corollaire 3.2.6 *[62] Si $A \in L(H_1)$ est dominant et $B^* \in L(H_2)$ est p-hyponormal ou log$-$hyponormal, alors la paire (A, B) vérifie le théorème de Fuglede-Putnam.*

Théorème 3.2.7 *Si $A \in L(H_1)$ est $w-$hyponormal et $B^* \in L(H_2)$ est injectif w-hyponormal, alors la paire (A, B) vérifie le théorème de Fuglede-Putnam.*

Preuve. Supposons que $AX = XB$ pour un certain $X \in L(H_2, H_1)$. Comme $\overline{R(X)}$ est invariant par A et $(\ker X)^\perp$ est invariant par B^*, nous considérons les décompositions suivantes :

$$H_1 = \overline{R(X)} \oplus \overline{R(X)}^\perp, H_2 = (\ker X)^\perp \oplus \ker X,$$

alors

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : (\ker X)^\perp \oplus \ker X \to \overline{R(X)} \oplus \overline{R(X)}^\perp.$$

De $AX = XB$ on obtient

$$A_1X_1 = X_1B_1. \tag{3.2.7}$$

Soient $A_1 = V|A_1|$ et $B_1^* = U^*|B_1^*|$ les décompositions polaire de A_1 et B_1^*. Multiplions les deux membres de (3.2.7) par $|A_1|^{\frac{1}{2}}$ et $|B_1^*|^{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$|A_1|^{\frac{1}{2}}A_1X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}} = |A_1|^{\frac{1}{2}}X_1B_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}},$$

ainsi

$$\widetilde{A_1}|A_1|^{\frac{1}{2}}X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}} = |A_1|^{\frac{1}{2}}X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}}(\widetilde{B_1^*})^*.$$

Comme A_1 et B_1^* sont $w-$hyponormaux par le Théorème 3.2.3, il s'ensuit que $\widetilde{A_1}$ et $\widetilde{B_1^*}$ sont semi-hyponormaux, en appliquant [33] on obtient $\widetilde{A_1}\ |_{\overline{R(|A_1|^{\frac{1}{2}}X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}})}}$ et $\widetilde{B_1^*}\ |_{\ker(|A_1|^{\frac{1}{2}}X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}})^{\perp}}$ sont des opératurs normaux et unitairement équivalents.

Comme $\widetilde{B_1^*}\ |_{\ker(|A_1|^{\frac{1}{2}}X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}})^{\perp}}$ est injectif, il vient $\widetilde{A_1}\ |_{\overline{R(|A_1|^{\frac{1}{2}}X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}})}}$ est injectif. Comme $X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}}$ est injectif à image dense et $|A_1|^{\frac{1}{2}}$ est injectif, il s'ensuit que

$$\overline{R(|A_1|^{\frac{1}{2}}X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}})} = \overline{R(X_1)} = \overline{R(X)},$$

et

$$\ker(|A_1|^{\frac{1}{2}}X_1|B_1^*|^{\frac{1}{2}}) = \ker(X_1) = \ker(X).$$

Alors $B_1^*\ |_{\ker(X)^{\perp}}$ et $A_1\ |_{\overline{R(X)}}$ sont injectifs normaux par le Lemm 3.2.4.
Par conséquent $\overline{R(X)}$ réduit A et $\ker(X)^{\perp}$ réduit B il vient $A_2 = B_2 = 0$. Comme A_1 et B_1 sont normaux alors $A_1^*X_1 = X_1B_1^*$. D'où finalement $A^*X = XB^*$.

Théorème 3.2.8 *Si* $A \in L(H_1)$ *est* $w-$*hyponormal tel que* $\ker A \subset \ker A^*$ *et* $B^* \in L(H_2)$ *est w-hyponormal tel que* $\ker B^* \subset \ker B$*, alors la paire* (A, B) *vérifie le théorème de Fuglede-Putnam.*

Preuve. Les conditions $\ker B^* \subset \ker B$ et $\ker A \subset \ker A^*$ impliquent que $\ker B^*$ réduit B^* et $\ker A$ réduit A, les opérateurs A et B s'écrivent suivant les décompositions

$$H_1 = (\ker A)^{\perp} \oplus \ker A, H_2 = (\ker B^*)^{\perp} \oplus \ker B^*,$$

comme suit

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme A_1 est injectif $w-$hyponormal et B_1^* est injectif $w-$hyponormal. Soit

$$X : (\ker B^*)^{\perp} \oplus \ker B^* \to (\ker A)^{\perp} \oplus \ker A,$$

et soit $X = [X_{ij}]_{i,j=1}^2$ la représentation matricielle de X, alors $AX = XB$ implique que $A_1X_{11} = X_{11}B_1$ et $X_{12} = X_{21} = 0$. Par le Théorème 3.2.7 on obtient $A_1^*X_{11} = X_{11}B_1^*$. Ainsi $A^*X = XB^*$.

Corollaire 3.2.9 *[48] Soient $A \in L(H_1)$ et $B^* \in L(H_2)$ sont $p-$hyponormaux ou $\log -$hyponormaux. Si $AX = XB$ pour certain $X \in L(H_2, H_1)$, alors $A^*X = XB^*$, $\overline{R(X)}$ réduit A, $\ker(X)^{\perp}$ réduit B, et $A \mid_{\overline{R(X)}}$, $B \mid_{(\ker X)^{\perp}}$ sont des opérateurs normaux unitairement équivalents.*

3.3 Orthogonalité de l'image et du noyau de $\delta_{A,B}$

Dans ce qui suit et comme application de la partie précédente, on montre que le noyau et l'image de la dérivation généralisée $\delta_{A,B}$ sont orthogonaux. L'orthogonalité ici est prise au sense des espaces normés.

Définition 3.3.1 *Soient E un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{C}$ et $x, y \in E$. On dit que x est orthogonal à y si*

$$\| x - \lambda y \| \geq \| \lambda y \|, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Définition 3.3.2 *Si F et G sont deux sous-espaces d'un espace vectoriel normé E. F est dit orthogonal à G si*

$$\| x + y \| \geq \| y \|, \ \forall x \in F, \ \forall y \in G.$$

Pour plus de détails concernant l'orthogonalité, consulter[12].

Il est prouvé dans [12] que si $A, B \in L(H)$ sont des opérateurs normaux alors, l'image et le noyau de la dérivation généralisée induite par A, B sont orthogonaux, i.e.,

$$\| AX - XB - C \| \geq \| C \|, \ \forall X \in L(H), \ \forall C \in \ker \delta_{A,B}.$$

On montre ci-dessous, que l'orthogonalié de l'image et le noyau de la dérivation généralisée induite par A, B reste valable pour les classes d'opérateurs considérées dans la section 3.2.

Théorème 3.3.3 *Soient $A, B \in L(H)$, alors $ran(\delta_{A,B})$ est orthogonale à $\ker \delta_{A,B}$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite.*

1. *A est dominant et B^* est $w-$hyponormal tel que $\ker B^* \subseteq \ker B$.*
2. *A est $w-$hyponormal et B^* est injectif $w-$hyponormal.*
3. *A est $w-$hyponormal tel que $\ker A \subseteq \ker A^*$ et B^* est $w-$hyponormal tel que $\ker B^* \subseteq \ker B$.*

Preuve. La paire (A, B) vérifie le Théorème de Fuglede-Putnam en appliquant les Théorèmes 3.2.5, 3.2.7, 3.2.8. Soit $C \in L(H)$ tel que $AC = CB$. nous considérons les décompositions suivantes de H.

$$H = H_1 = \overline{ran(C)} \oplus \overline{ran(C)}^{\perp}, \quad H = H_2 = (\ker C)^{\perp} \oplus \ker C,$$

alors A, B, C et X sont de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}.$$

tels que A_1 et B_1 sont des opérateurs normaux et X est un opérateur de H_1 dans H_2. Comme $AC = CB$, alors $A_1C_1 = C_1B_1$. Ainsi

$$AX - XB - C = \begin{pmatrix} A_1X_1 - X_1B_1 - C_1 & A_2X_2 - X_2B_2 \\ A_1X_3 - X_3B_1 & A_2X_4 - X_4B_2 \end{pmatrix}.$$

Comme $C_1 \in \ker(\delta_{A_1,B_1})$ et $A_1,\ B_1$ sont normaux, il s'ensuit par [12] que

$$\| AX - XB - C \| \geq \| A_1X_1 - X_1B_1 - C_1 \| \geq \| C_1 \| = \| C \|, \; \forall X \in L(H).$$

Ceci implique que $ran(\delta_{A,B})$ est orthogonale à $\ker(\delta_{A,B})$.

Chapitre 4

Exemples sur les Classes d'opérateurs

4.1 Introduction

Les classes d'opérateurs log-hyponormaux et w-hyponormaux sont introduite, et leurs propriétés sont étudiées dans [8] et [13].

T. Ando [13] et Wang [8] ont prouvé que la classe des w-hyponormaux contient les deux classes d'opérateurs p-hyponormaux et log-hyponormaux. Il est bien connu qu'un opérateur inversible p-hyponormal est log-hyponormal, mais la réciproque est fausse, Tanahashi [60] a donné un exemple d'un opérateur log-hyponormal qui n'est pas p-hyponormal pour $p > 0$.

Si un opérateur A est p-hyponormal, alors $\ker A \subset \ker A^*$, et si A est log-hyponormal, alors $\ker A = \ker A^*$. Cependant, si A est w-hyponormal, $\ker A$ ne contient pas $\ker A^*$ et $\ker A^*$ ne contient pas $\ker A$.

Dans ce chapitre on donne des exemples sur les opérateurs p-hyponormaux et log-hyponormaux, on donne aussi l'exemple de Tanahashi [60] d'un opérateur log-hyponormal qui n'est pas p-hyponormal, et un exemple de M. Cho et H. Jin [26] sur un opérateur A w-hyponormal.

4.2 Les opérateurs log- et p-hyponormaux

Exemple 4.2.1 *[66]. Soient A et B deux matrices carré complexe positives d'ordre 2 et T un opérateur défini sur $H = \underset{n=-\infty}{\overset{\infty}{\oplus}} \mathbb{C}^2$ par :*

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ \ddots & 0 & & & & & \\ & B & 0 & & & & \\ & & B & \boxed{0} & & & \\ & & & A & 0 & & \\ & & & & A & 0 & \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

avec $\boxed{0}$ montre la place de de la matrice $(0,0)$. Alors

1. *T est p-hyponormal $\iff A^{2p} \geq B^{2p}$.*
2. *T est log-hyponormal $\iff A$ et B sont inversible et $\log A^2 \geq \log B^2$.*
3. *T est w-hyponormal $\iff \left(B^{\frac{1}{2}} A B^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \geq B$.*

Exemple 4.2.2 *[60]. Soient $H = \underset{n=-\infty}{\overset{\infty}{\oplus}} \mathbb{C}^2$ et $x = (....., x_{-1}, x_0, x_1, ...) \in H$ avec $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \|x_j\|^2 < \infty$. Soient A, B des matrices positives telles que*

$$\log A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \log B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, alors V est unitaire et $V^* (\log A) V = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Et par suite

$$A^p = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3e^{2p} + 2e^{-\frac{p}{2}} & \sqrt{6}e^{2p} - \sqrt{6}e^{-\frac{p}{2}} \\ \sqrt{6}e^{2p} - \sqrt{6}e^{-\frac{p}{2}} & 2e^{2p} + 3e^{-\frac{p}{2}} \end{pmatrix} \text{ et } B^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-p} \end{pmatrix}$$

On remplace $x = e^p$, *on a*

$$\begin{aligned}
5\det(A^p - B^p) &= \begin{vmatrix} 3x^2 + 2x^{-\frac{1}{2}} - 5 & \sqrt{6}x^2 - \sqrt{6}x^{-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{6}x^2 - \sqrt{6}x^{-\frac{1}{2}} & 2x^2 + 3x^{-\frac{1}{2}} - 5x^{-1} \end{vmatrix} \\
&= \left(3x^2 + 2x^{-\frac{1}{2}} - 5\right)\left(2x^2 + 3x^{-\frac{1}{2}} - 5x^{-1}\right) - 6\left(x^2 - x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x^2 - x^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= -5x^{-\frac{3}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)\left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right)^4\left(2x + x^{\frac{1}{2}} + 2\right) \leq 0,
\end{aligned}$$

pour tout $x > 1$. *Par conséquent il n'existe pas* $p > 0$ *tel que* $B^p \leq A^p$.

Soit $x = (........, x_{-1}, x_0, x_1, ...) \in H$ *et* $(x)_n = x_n$.

On définit $P \in \mathcal{L}(H)$, *avec* $(Px)_n = P_n x_n$ *et* $P_n = \begin{cases} B & \textit{pour } n \leq 0, \\ A & \textit{pour } n \geq 1. \end{cases}$

Soit U *le shift unitaire* $(Ux)_n = x_{n-1}$ *et* $T = UP$. *Donc*

$$((T^*T)x)_n = P_n^2 x_n, ((TT^*)x)_n = P_{n-1}^2 x_n,$$

Alors

$$(((T^*T)^p - (TT^*)^p)x)_n = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ (A^{2p} - B^{2p})x_1 & n = 1 \end{cases}$$

et

$$((\log(T^*T) - \log(TT^*))x)_n = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ (2\log A - 2\log B)x_1 & n = 1. \end{cases}$$

Ainsi T *est log-hyponormal, mais* T *n'est pas p-hyponormal, pour* $p > 0$.

Exemple 4.2.3 *[28] Soit* $H = \bigoplus\limits_{n=-\infty}^{\infty} H_n$, *tel que* H_n *est un espace d'Hilbert de dimension deux. Soient* E *et* F *des matrices positives*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \textit{ et } F = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors les décompositions polaire de E *et* F *sont* $E = VE$ *et* $F = WF$ *respectivement, avec*

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \textit{ et } W = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soient $\{U_n\}$ *et* $\{P_n\}$ *tels que*

$$U_n = \begin{cases} V & n \leq 0 \\ W & n \geq 1 \end{cases} \textit{ et } P_n = \begin{cases} E & n \leq 0 \\ F & n \geq 1 \end{cases}.$$

On définit les opérateurs U et P sur H par $(Ux)_n = U_{n-1}x_{n-1}$ et $(Px)_n = P_n x_n$ avec $x = (....,x_{-1},x_0,x_1,....)$ pour $x_n \in H_n$. Alors $T = UP$ est w-hyponormal tel que $\ker T$ ne contient pas $\ker T^*$ et $\ker T^*$ ne contient pas $\ker T$.

Preuve. On a

$$E^{\frac{1}{2}} = E \text{ et } F^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour $T = UP$ et $\widetilde{T} = P^{\frac{1}{2}}UP^{\frac{1}{2}}$, on a

$$(T^*Tx)_n = P_n^2 x_n \text{ et } \left(\widetilde{T}^*\widetilde{T}x\right)_n = P_n^{\frac{1}{2}}U_{n+1}^*P_{n+1}U_nP_n^{\frac{1}{2}}x_n = P_n^{\frac{1}{2}}P_{n+1}P_n^{\frac{1}{2}}x_n,$$

et

$$\left(\widetilde{T}\widetilde{T}^*x\right)_n = P_n^{\frac{1}{2}}U_{n-1}P_{n-1}U_n^*P_n^{\frac{1}{2}}x_n = P_n^{\frac{1}{2}}P_{n-1}P_n^{\frac{1}{2}}x_n.$$

Par suite, pour $x = (....,x_{-1},x_0,x_1,....)$ on a

$$\left(\widetilde{T}^*\widetilde{T}x\right)_n = \begin{cases} Ex_n & n \leq -1 \\ 2Ex_0 & n = 0 \\ F^2x_1 = 10Fx_n & n = 1 \\ F^2x_n = 10Fx_n & n \geq 2 \end{cases},$$

$$(T^*Tx)_n = \begin{cases} Ex_n & n \leq -1 \\ Ex_0 & n = 0 \\ F^2x_1 = 10Fx_1 & n = 1 \\ F^2x_n = 10Fx_n & n \geq 2 \end{cases},$$

et

$$\left(\widetilde{T}\widetilde{T}^*x\right)_n = \begin{cases} Ex_n & n \leq -1 \\ Ex_0 & n = 0 \\ \frac{1}{5}Fx_1 & n = 1 \\ F^2x_n = 10Fx_n & n \geq 2 \end{cases}.$$

En comparant avec chaque $n \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$\left|\widetilde{T}\right| \geq |T| \geq \left|\widetilde{T}^*\right|.$$

D'où alors T est w-hyponormal.

Soit $x = (....,x_{-1},x_0,x_1,....)$, avec $x_n = 0$ si $n \neq 1$ et $x_1 = (-2,1)$, alors $Tx = 0$, mais $T^*x \neq 0$, donc $\ker T^*$ ne contient pas $\ker T$. De même soit $y = (....,y_{-1},y_0,y_1,....)$ avec $y_n = 0$ si $n \neq 1$ et $y_1 = (0,1)$, alors $Ty \neq 0$, mais $T^*y = 0$, donc $\ker T$ ne contient pas $\ker T^*$.

Chapitre 5

Appendices

5.1 Propriété de l'extension unique

Définition 5.1.1 *Un opérateur $A \in L(H)$ est dit possédant la propriété de l'extension unique dans le cas où la seule fonction analytique vérifiant $(A - \lambda)f(\lambda) = 0$, sur un ouvert quelconque du plan, est la fonction $f(\lambda) = 0$.*

Soit A un opérateur ayant la propriété de l'extension unique alors pour $x \in H$, la résolvante locale admet un prolongement unique sur un ouvert contenant $\rho(A)$. Ce domaine est noté $\rho_A(x)$ appelé ensemble résolvant local, et son complémentaire $\sigma_A(x) = \mathbb{C} \setminus \rho_A(x)$ est le spectre local du vecteur x.

Un ensemble d'opérateurs vérifiant cette propriété est l'ensemble des opérateurs dont le spectre ponctuel est vide, i.e., $\sigma_p(A) = \emptyset$.

Définition 5.1.2 *Pour un sous ensemble δ du plan, on définit le sous espace spectral local, comme suit :*

$$\mathcal{M}_A(\delta) = \{x \in H : \sigma_A(x) \subset \delta\}.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{M}_A(\delta)$ est un sous espace vectoriel invariant par A (non nécessairement fermé).

Lemme 5.1.3 *Soit N un opérateur normal, supposons que*

$$N = \int z \, dE_z$$

est la résolution spectrale de N. Si ν est un ensemble borélien et $x \in \bigcap_{\lambda \in \nu} ran(N-\lambda)$, alors $E(\lambda)x = 0$.

En particulier si $x \in \bigcap_{\lambda \in \sigma(N)} ran(N-\lambda)$, alors $x = 0$.

Preuve. Soit λ un nombre complexe fixé, pour $r > 0$, on note $D(\lambda : r)$ le disque ouvert de rayon r, de centre λ. On montrera d'abord que si $x \in ran(N-\lambda)$ alors

$$\overline{\lim_{r \to 0^+}} r^{-2} \int_{D(\lambda : r)} d \parallel E_z x \parallel^2 = 0. \tag{5.1.1}$$

Soit $f(\lambda)$ une solution arbitraire de $(N-\lambda)y(\lambda) = z$, et soit $z(\lambda)$ son projeté orthogonal sur $[\ker(N-\lambda)]^{\perp}$. Alors

$$\begin{aligned} r^{-2} \int_{D(\lambda : r)} d \parallel E_z x \parallel^2 &\leq \int_{D(\lambda : r)} \frac{1}{\mid z - \lambda \mid} d \parallel E_z x \parallel^2 \\ &= \int_{D(\lambda : r)} d \parallel E_z y(\lambda) \parallel^2 . \end{aligned}$$

Conséquence, (5.1.1) est vérifiée, quand $x \in ran(N-\lambda)$, maintenant si ν est un borélien et $x \in \bigcap_{\lambda \in \sigma(N)} ran(N-\lambda)$, alors (5.1.1) est vérifiée pour tout $\lambda \in \nu$, et par suite $\parallel E(\nu)x \parallel = 0$. En particulier si $x \in \bigcap_{\lambda \in \sigma(N)} ran(N-\lambda)$, alors

$$E(\sigma(N))x = x = 0.$$

Lemme 5.1.4 *Soit N un opérateur normal sur N, alors N admet la propriété de l'extension unique.*

Preuve. Soit Ω un sous-ensemble du plan, supposons qu'il existe une fonction analytique $\psi(\lambda)$ satisfaisant

$$(N-\lambda)\psi(\lambda) = 0, \ \lambda \in \Omega.$$

Le vecteur $\psi(\lambda)$ est un vecteur propre associé a λ. Comme les vecteurs propres d'un opérateur normal, associés a des valeurs propres sont orthogonaux, il vient pour tout $\lambda \neq \lambda_0 \in \Omega$

$$\parallel \psi(\lambda) - \psi(\lambda_0) \parallel^2 = \parallel \psi(\lambda) \parallel^2 + \parallel \psi(\lambda_0) \parallel^2 .$$

Comme $\psi(\lambda)$ est fortement continue, d'aprés la derniére égalité on a forcément $\psi(\lambda_0) = 0$, et par conséquent on en déduit que $\psi(\lambda) = 0$, pour tout $\lambda \in \Omega$.

Définition 5.1.5 *Soit H un espace de Hilbert complexe, un opérateur A est dit dominant d'après J. Stampli et B.L. Wadhwa [59] si, pour tout complexe λ, $ran(A-\lambda) \subset ran(A-\lambda)^*$.*

Ceci est equivalent à l'existence d'un réel M_λ tel que

$$\| (A-\lambda)^*)x \| \leq M_\lambda \| (A-\lambda)x \|, \ \textit{pour tout } x \in H.$$

S'il existe une constante M telle que $M_\lambda \leq M$, pour tout λ, A est appelé $M-$hyponormal, et si $M = 1$, A est hyponormal.

Théorème 5.1.6 *Soit A un opérateur dominant, alors on a*

(i) La réstriction de A a un sous-espace invariant est dominante ;

(ii) Si $\mathcal{M}$ est un sous-espace invariant pour lequel $A\mid_{\mathcal{M}}$ est normal, alors $\mathcal{M}$ est réduisant.

(iii) Si $\mu \in \sigma_p(A)$, alors $\overline{\mu} \in \sigma_p(A^*)$ et le sous-espace $\mathcal{M}_\mu$ associé a μ est réduisant, en plus si $\mu \neq \lambda$, alors $\mathcal{M}_\mu \perp \mathcal{M}_\lambda$.

Preuve.

(i) Soit P la projection orthogonale de H sur $\mathcal{M}$ (le sous-espace invariant). Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $x \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \| (A\mid_{\mathcal{M}} - \lambda)^* x \| &= \| P(A-\lambda)^* x \| \\ &\leq \| (A-\lambda)^* x \| \\ &\leq M_\lambda \| (A-\lambda)x \| \\ &\leq M_\lambda \| (A_{\mathcal{M}}-\lambda)x \| . \end{aligned}$$

(ii) Considérons la décomposition de l'espace $H = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$, A s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} N & T \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda \in \sigma(A) \supseteq \sigma(N)$, on a

$$M_\lambda (A-\lambda)(A-\lambda)^* \geq (A-\lambda)^*(A-\lambda);$$

sur $\mathcal{M}$ cette dernière égalité s'écrit :

$$M_\lambda (N-\lambda)(N-\lambda)^* \geq TT^*,$$

par conséquent $ran(B) \subset ran(N-\lambda)$ où $B = TT^{*1/2}$, ainsi par le lemme 5.1.3, il s'ensuit

$$Bx \in \bigcap_{\lambda \in \sigma(N)} ran(N-\lambda) = 0,$$

d'où $B = 0$ et par suite $T = 0$.

(iii) découle directement de la définition de A.

Corollaire 5.1.7 *Si A est dominant et* $\dim H < \infty$, *alors A is normal.*

Proposition 5.1.8 *Soit $A \in L(H)$, un opérateur dominant, alors A admet la propriété de l'extension unique.*

Preuve. D'aprés le théorème 5.1.6(iii) on peut écrire A sous la forme $A = N \oplus A_0$ où N est normal et A_0 un opérateur dominant pur, autrement dit $\sigma_p(A_0) = \emptyset$. Comme N, A_0 admettent la propriété de l'extension unique, il s'ensuit que A admet aussi cette propriété.

5.2 Propriété (GW)

Soit $L(X)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X.

Définition 5.2.1 *Soit $A \in L(X)$, on dit que A satisfait*

(i) la propriété (gw) si $\sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A) = E(A)$.

(ii) la propriété (w) si $\sigma_a(A) \backslash \sigma_{SF_+^-}(A) = E_0(A)$.

Théorème 5.2.2 *[10]*
Soit A un opérateur dans $L(X)$. Si A satisfait la propriété (gw), alors A satisfait la propriété (w).

Preuve. Supposons que A satisfait la propriété (gw) et $\lambda \in \sigma_a(A) \backslash \sigma_{SF_+^-}(A)$. Comme $\sigma_{SBF_+^-}(A) \subseteq \sigma_{SF_+^-}(A)$, donc $\lambda \in \sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A) = E(A)$. Comme $\alpha(A-\lambda) < \infty$, alors $\lambda \in E_0(A)$ et $\sigma_a(A) \backslash \sigma_{SF_+^-}(A) \subseteq E_0(A)$. Réciproquement si $\lambda \in E_0(A)$, alors $\lambda \in E(A) = \sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A)$. Ainsi $A - \lambda \in SBF_+(X)$. Comme $\dim\ker(A-\lambda) < \infty$, en appliquant [10, Lemme 2.2] on obtient $A - \lambda \in SF_+(X)$. Ainsi $\lambda \in \sigma_a(A) \backslash \sigma_{SF_+^-}(A)$. D'où finalement $\sigma_a(A) \backslash \sigma_{SF_+^-}(A) = E_0(A)$. et A satisfait la propriété (w).

L'exemple suivant montre que l'inverse du théorème précédent n'est pas en général vrai.

Exemple 5.2.3 *Soit $Q \in L(X)$ un opérateur quasi-nilpotent agissant sur un espace de Banach de dimension infini X tel que $ran(Q^n)$ n'est pas fermé pour tout n. Soit $T = 0 \oplus Q$, défini sur l'espace de Banach $X \oplus X$. Comme $ran(T^n) = ran(Q^n)$*

n'est pas fermé pour tout n, alors T n'est pas un opérateur semi-B-Fredholm, ainsi $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \{0\}$*. Comme* $\sigma_a(T) = \{0\}$ *et* $E(T) = \{0\}$*, alors T ne satisfait pas la propriété (gw),* $E_0(T) = \emptyset$ *et* $\sigma_{SF_+^-}(T) = \{0\}$*, alors T satisfait la propriété (w).*

Théorème 5.2.4 *[10]*
Soit A un opérateur dans $L(X)$*. Alors A satisfait la propriété (gw) si et seulement si :*

(i) A satisfait le théorème généralisée de Weyl,

(ii) $ind(A-\lambda) = 0$ *pour tout* $\lambda \in \sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A)$

Preuve. Supposons que A satisfait la propriété (gw), soit $\lambda \in \sigma(A) \backslash \sigma_{BW}(A)$. Comme $\sigma_{SBF_+^-}(A) \subseteq \sigma_{BW}(A)$, alors $\lambda \notin \sigma_{SBF_+^-}(A)$. Si $\alpha(A-\lambda) = 0$, comme $\lambda \notin \sigma_{BW}(A)$, alors $A-\lambda$ est inversible. Ceci est impossible car $\lambda \in \sigma(A)$. Ainsi $0 < \alpha(A-\lambda)$ et$\lambda \in \sigma_a(A)$. Comme A satisfait la propriété (gw), alors $\lambda \in E(A)$. Ceci implique que $\sigma(A) \backslash \sigma_{BW}(A) \subseteq E(A)$.
Pour l'inclusion inverse, soit $\lambda \in E(A)$. Comme A satisfait la propriété (gw), alors $\lambda \notin \sigma_{SBF_+^-}(A)$, ainsi $ind(A) \leq 0$. Comme $\lambda \in E(A)$, par suite λ est un point isolé dans $\sigma(A)$, alors $A^\dagger$ satisfait SVEP au point λ. Par [4, Théorème 2.11], $ind(A-\lambda) \geq 0$. Ainsi $ind(A-\lambda) = 0$ et $\lambda \notin \sigma_{BW}(A)$, d'où finalement $\sigma(A) \backslash \sigma_{BW}(A) = E(A)$, et $ind(A-\lambda) = 0$, pour tout $\lambda \in \sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A)$.
Inversement supposons que A satisfait le théorème généralisé de Weyl et $ind(A-\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A)$. Si $\lambda \in \sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A)$, alors $(A-\lambda)$ est un opérateur semi-B-Fredholm tel que $ind(A-\lambda) = 0$. Ainsi $(A-\lambda)$ est un opérateur B-Weyl et comme A satisfait le théorème généralisé de Weyl, alors $\lambda \in E(A)$ et ainsi $\sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A) \subset E(A)$. Pour démontrer l'inclusion inverse, soit $\lambda \in E(A)$, alors $(A-\lambda)$ est un opérateur B-Weyl et comme $\lambda \in \sigma(A)$, alors $\alpha(A-\lambda) > 0$. Ainsi $\lambda \in \sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A)$. Par conséquent A satisfait la propriété (gw).

Théorème 5.2.5 *[10] Soit A un opérateur dans* $L(X)$*. Alors A satisfait la propriété (gw) si et seulement si A satisfait la propriété (w) et* $\Pi^a(A) = E(A)$*.*

Preuve. Supposons que A satisfait la propriété (gw), alors A satisfait la propriété (w) et A satisfait le théorème généralisé de Weyl. Ainsi $\Pi(A) = E(A)$. Si $\lambda \in \Pi^a(A)$, alors par [22, Lemme 2.12], on a $\lambda \in \sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A)$, alors $\lambda \in E(A)$. Si $\lambda \in E(A)$, alors $\lambda \in \Pi(A) \subset \Pi^a(A)$, par conséquent $\Pi^a(A) = E(A)$.

Inversement supposons que A satisfait la propriété (w) et $\Pi^a(A) = E(A)$. Si $\lambda \in \sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A)$, alors $\lambda \in E(A)$, supposons que $\lambda = 0$. Alors A est un opérateur semi-B-Fredholm et $ind(A) \leq 0$. En particulier A est un opérateur de descente topologique uniforme [19].
Supposons que $asc(A) = \infty$. Comme A est un opérateur de descente topologique uniforme, par [43, Corollaire 4.18] il existe $\epsilon > 0$ tel que $asc(A - \mu) = \infty$ pour tout $0 < |\mu| < \epsilon$. $\epsilon > 0$ peut être choisit tel que $A - \mu$ est un opérateur semi-Fredholm supérieur, avec $ind(A - \mu) \leq 0$, pour tout $0 < |\mu| < \epsilon$. La propriété (w) implique que $\mu \in \sigma_a(A) \backslash \sigma_{SF_+^-}(A) = E_0(A)$. Il s'ensuit que $\mu \in iso\sigma(A)$. Ceci implique que A satisfait SVEP au point μ et comme $A - \mu$ est un opérateur semi-Fredholm, d'aprés [1, Théorème 3.16] ceci est équivalent à dire que $\alpha(A - \mu) = \infty$. Ceci constitue une contradiction. Ainsi A est d'ascente finie. Comme A est un opérateur semi-B-Fredholm, pour n assez grand $ran(A^n)$ est fermé, et $ran\left(A^{asc(A)+1}\right)$ est fermé. Ainsi A est Drazin inversible à gauche et $0 \in \Pi^a(A) = E(A)$.
Si $\lambda \in E(A)$, alors $\lambda \in \Pi^a(A)$. Par [22, Lemme 2.12], il s'ensuit que
$\lambda \in \sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A)$. Ainsi $\sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A) = E(A)$ et A satifait la propriété (gw).

Théorème 5.2.6 *[10] Soit A un opérateur dans $L(X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) A satisfait la propriété (gw),

(ii) A satisfait le théorème généralisé a-Browder et $\Pi^a(A) = E(A)$.

Preuve. Supposons que A satisfait la propriété (gw). Alors $\sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A) = E(A)$. D'aprés le théorème6.2.4 on a $\Pi^a(A) = E(A)$, ainsi $\sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A) = \Pi^a(A)$. Par conséquent A satisfait le théorème généralisé a-Browder et $\Pi^a(A) = E(A)$.
Pour l'implication inverse supposons que A satisfait le théorème généralisé
a-Browder et $\Pi^a(A) = E(A)$. Alors $\sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A) = \Pi^a(A)$ et $\Pi^a(A) = E(A)$.
Ainsi $\sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A) = E(A)$, et A satisfait la propriété (gw).

Théorème 5.2.7 *[10] Soit A un opérateur dans $L(X)$. Si $A^\dagger$ satisfait SVEP, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) A satisfait la propriété (gw),

(ii) A satisfait le théorème généralisé de Weyl,

(iii) A satisfait le théorème généralisé a-Weyl.

Preuve. Supposons que $A^{\dagger}$ satisfait SVEP, alors $\sigma_a(A) = \sigma(A)$, $\sigma_{SBF_+^-}(A) = \sigma_{BW}(A)$, $E^a(A) = E(A)$ et $\sigma_a(A) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(A) = \sigma(A) \backslash \sigma_{BW}(A)$. Par conséquent $(ii) \Leftrightarrow (iii)$, et $(iii) \Rightarrow (i)$ est evident.
Si A satisfait SVEP, alors de [49] on a $\sigma\left(A^{\dagger}\right) = \sigma_a\left(A^{\dagger}\right)$.

Théorème 5.2.8 *[10] Soit A un opérateur dans $L(X)$. Si A satisfait SVEP, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $A^{\dagger}$ satisfait la propriété (gw),

(ii) $A^{\dagger}$ satisfait le théorème généralisé de Weyl,

(iii) $A^{\dagger}$ satisfait le théorème généralisé a-Weyl.

Théorème 5.2.9 *[10] Soit A un opérateur dans $L(X)$. Si A est polaroid, alors*

(i) $A^{\dagger}$ satisfait SVEP, alors A satisfait la propriété (gw),

(ii) A satisfait SVEP, alors $A^{\dagger}$ satisfait la propriété (gw).

Preuve.i) Supposons que A est polaroid et $A^{\dagger}$ satisfait SVEP. Il s'ensuit de [9, Théorème 2.3], A satisfait le théorème généralisé de Browder. Comme A est polaroid, alors $E(A) = \Pi(A)$. Ainsi A satisfait le théorème généralisé de Weyl. Comme $A^{\dagger}$ satisfait SVEP, d'aprés le théorème (5.2.8), il s'ensuit que A satisfait la propriété (gw).
ii) Comme A satisfait SVEP et A est polaroid, alors de [23, Théorème 3.5], A satisfait le théorème généralisé de Weyl. Comme $\sigma(A) = \sigma\left(A^{\dagger}\right)$, $\sigma_{BW}(A) = \sigma_{BW}\left(A^{\dagger}\right)$, $\Pi(A) = \Pi\left(A^{\dagger}\right)$, $E(A) = E\left(A^{\dagger}\right)$, alors $A^{\dagger}$ satisfait le théorème généralisé de Weyl. D'aprés le théorème 5.2.8, il s'ensuit que$A^{\dagger}$ satisfait la propriété (gw).

Théorème 5.2.10 *[10] Soit A un opérateur dans $L(X)$, tel que A est polaroid. Si $A^{\dagger}$ satisfait SVEP et f une fonction analytique sur un voisinage du $\sigma(A)$, qui n'est pas constante sur aucune composante de $\sigma(A)$, alors $f(A)$ satisfait la propriété (gw).*

5.3 Symboles et Notations

$L(H)$	l'espace des opérateurs linéaires bornés sur H.
$\mathcal{K}(H)$	l'idéal des opérateurs compacts dans $L(H)$.
$\mathcal{F}(H)$	l'idéal des opérateurs de rang fini dans $L(H)$.
$\mathcal{H}(\sigma(A)$	les fonctions analytique sur un voisinage de $\sigma(A)$.
$r(A)$	le rayon spectrale de A.
A^*	adjoint hilbertien.
$A^\dagger$	dual topologique.
$\widetilde{A}$	la transformation d'Aluthge de A.
$\parallel A \parallel$	norm de A.
$\ker A$	noyau de A.
$\delta_{A,B}$	opérateur de dérivation généralisée induit par A et B.
$M_{A,B}$	opérateur élémentaire de base induit par A et B.
$R_{A,B}$	opérateur élémentaire somme de deux opérateurs élémentaires de base.
$ran(\delta_{A,B})$	image de $\delta_{A,B}$.
$\overline{ran(\delta_{A,B})}$	fermeture en norme de $\delta_{A,B}$.
$\rho(A)$	l'ensemble résolvant de A.
$\sigma(A)$	spectre de A
$\sigma_A(x)$	le spectre local de x.
$\rho_A(x)$	l'ensemble résolvant local de x.
$\sigma_e(A)$	spectre essentiel de A.
$\sigma_D(A)$	spectre de Deazin de A.
$\sigma_p(A)$	spectre ponctuel de A.
$\sigma_a(A)$	spectre approximatif de A.
$SF_+(H)$	classe des opérateurs semi-Fredholm supérieurs .
$SF_+^-(H)$	classe des opérateurs semi-Fredholm supérieurs tels que $ind(A) \leq 0$.
$SBF_+(H)$	classe des opérateurs semi-B-Fredholm supérieurs .
$SBF_+^-(H)$	classe des opérateurs semi-B-Fredholm supérieurs tels que $ind(A) \leq 0$.
$\sigma_{BF}(A)$	le spectre B-Fredholm de A.

$\sigma_W(A)$	le spectre de Weyl de A.
$\sigma_B(A)$	le spectre de Browder de A.
$\sigma_{BW}(A)$	le spectre de B-Weyl de A.
$E_0(A)$	l'ensemble des valeurs propres isolée de A.
$E^a(A)$	les valeurs propres isolée dans $\sigma_a(A)$.
$E_0^a(A)$	l'ensemble des valeurs propres de multiplicité finie isolée dans $\sigma_a(A)$.
$\Pi_0(A)$	l'ensemble des pôles de rang fini de la résolvante de A.
$\Pi^a(A)$	l'ensemble des pôles à gauche de A.
$\Pi_0^a(A)$	l'ensemble des pôles à gauche de rang fini de la résolvante de A.
$\Pi(A)$	l'ensemble des pôles de la résolvante de A.

Bibliographie

[1] P. Aiena, *Fredholm and local spectral theory, with application to multipliers* Kluewer Acad. publishers, 2004.

[2] P. Aiena and O. Garcia, *Generalized Browder's theorem and SVEP*, Mediterr. J. math, 4 (2007), 215-228.

[3] P. Aiena and T. L. Miller, *On generalized a-Browder's theorem*, Studia. Math, 180 (2007), 285-300.

[4] P. Aiena, *Quasi-Fredholm operators and localized SVEP*, Acta Sci. Math.(Szeged), 73 (2007), 251-263.

[5] P. Aiena, J. R. Guillen, and P. Pena, *Property(w) for perturbations of polaroid operators*, Linear Algebra Appl, 428 (2008), 1791-1802.

[6] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for* $0 < p < \frac{1}{2}$, Integral Equation and Operator Theory, 13(1990), 307-315.

[7] A. Aluthge and D. Wang, *An operator inequality which implies paranormaliy*, Math. Inequal. App, 2 (1999), 113-119.

[8] A. Aluthge and Wang, *w-hyponormal operators*, Integral Equation and Operator Theory, 36 (2000), 324-331.

[9] M. Amouch, *Weyl's type theorems for operator satisfying the single-valued extension property*, J. Math. Anal. Appl **326** (2007), 1476-1484.

[10] M. Amouch and M. Berkani, *On the Property (gw)*, Mediterr. J. math, **5** (2008), 371-378.

[11] M. Amouch and H. Zguitti, *B-Fredholm and Drazin invertible operators through localized SVEP*, arXiv :0906.3441v1 [math.FA], (2009).

[12] J.H. Anderson and C. Foias, *properties which normal operators share with normal derivations and related operators*, Pacific J. Math., 61(1975), 313–325.

[13] T. Ando, *operators with a norm condition*, Acta. Sci. Math. (Szeged), 33 (1972), 169-178.

[14] A. Bachir, *Generalized Derivation*, SUT Journal of Mathematics, Vol. 40, No. 2 (2004), 111–116.

[15] A. Bachir and A. Segres, *Generalized Fuglede-Putnam Theorem and orthogonality*, AJMAA, Vol. 1, No.1(2004), 1-5.

[16] A. Bachir et F. Lombarkia, *Fuglede-Putnam's theorem for w-hyponormal operators* (submitted).

[17] M. Berkani, *On a class of quasi-Fredholm operators*, Integ. equ. oper. theory, 34 (1999), 244-249.

[18] M. Berkani, *Index of B-Fredholm operators and generalization af A Weyl theorem*, Proc. Amer. Math. Soc, 130 (2002), 1717-1723.

[19] M. Berkani et M. Sarih, *On semi B-Fredholm operators*, Glasgow Math. J, 43 (2001), 457-465.

[20] M. Berkani et M. Sarih, *An Athinson-type theorem for B-Fredholm operators*, Studia Mathematica Journal, 148 (2001), 251-257.

[21] M. Berkani and A. Arroud, *Generaized Weyl's theorem and hyponormal operators*, J. Aust. Math. Soc, 76 (2004), 291-302.

[22] M. Berkani et J.J. Koliha, *Wel type theorems for bounded linear operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), 69 (2003), 359-376.

[23] M. Berkani, N. Castro and S. V. Djordjevic, *Single valued extension property and generalized Weyl's theorem*, Mathematica Bohemica, 131 (2006), 29-38.

[24] M. Berkani, *On the equivalence of Weyl theorem and generalized Weyl theorem*, Acta Mathematica Sinica, English Series, 23 (2007), 103-110.

[25] S. R. Caradus, W. E. Pfaffenberger and Y. Bertram,*Calkin Algebras and Algebras of operators on Banach spaces*, Marcel Dekker, New York, 1974.

[26] M. Cho and H. Jin, *p-hyponormal operators*, Nihonkai Math. J, 6 (1995), 201-206.

[27] M. Cho, M. Itoh and S. Oshiro, *Weyl's theorem holds for p-hyponormal operators*, Glasgow Math. J, 39 (1997), 217-220.

[28] M. Cho, T. Huruya and Y. O. Kim, *A note on w-hyponormal operators*, J. of Inequl. and Appl, 7 (2002), 324-331.

[29] L. A. Coburn, Weyl's theorem for non normal operators, Michigan Math. J, 13 (1966), 285-288.

[30] J. B. Conway, *Subnormal operators*, Research notes in Math. vol. 51, Pitman Advanced Pub. Program, Boston, 1981.

[31] S. V. Dordevic, B. P. Duggal and Y. M. Han, *The single valued extension property and Weyl's theorem*, Pre-Print.

[32] M. P. Drazin, *Pseudo inverse in assocative rings and semi groups*, Amer. Math. Monthly 65 (1958), 506-514.

[33] B. P. Duggal, *Quasi-similar p-hyponormal operators*, Integral Equation and Operator Theory, 26 (1996), 338-345.

[34] B. P. Duggal, *A remark on generalised Putnam-Fuglede theorems*, Proc. Amer. Math. Soc, 129 (2000), 83-87.

[35] B. P. Duggal and S. V. Djordjevic, *Dunford's property (C) and Weyl's theorem*, Integral Equation and Operator Theory, 43 (2002), 290-297.

[36] B. P. Duggal, *Weyl's theorem for generalized derivation and an elementary operator*, Math. Vesnik, 54 (2002), 71-81.

[37] B. P. Duggal and S. V. Djordjevic, G*eneraized Weyl's for class of operators satisfying a norm condition*, Mathematical Proceeding of the Royal Irish Academy, 106 (2006), 1-9.

[38] B. P. Duggal, *an elementary operator with log-hyponormal, p-hyponormal entries*, Linear Algebra Appl, 428 (2008), 1109-1116.

[39] M. R. Embry and M. Rosemblum, *Spectra, Tensor product and linear operator equation*, Pac. J. Math, 53 (1974), 95-107.

[40] M. Fujii, J. F. Jiang and E. Kamei, *Characterization of Chaotic order and its application to Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc, 125 (1997), 3655-3658.

[41] T. Furuya, A note on p-hyponormal operators, Proc. Amer. Math. Soc, 125 (1997), 3617-3624.

[42] T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ *assures* $(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{\frac{p+2r}{q}}$ *for* $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ *with* $(1+2r)\,q \geq (p+2r)$, Proc. Amer. Math. Soc, 101 (1987), 85-88.

[43] S. Grabiner, *Uniform ascent and descent of bounded operators,* J. Math. Soc. Japan, 34 (1982), 317-337.

[44] F. Hansen, *An inequality, Math. Ann*, 246 (1980), 249-250.

[45] E. Heinz, B*eiträge zur StÖrungstheorie der Spektralzerlegung*, Math. Ann, 123 (1951), 415-438.

[46] M. Ito, T. Yamazaki, *Relation between two inequalities* $\left(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r$ *and* $A^p \geq \left(A^{\frac{p}{2}} B^r A^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p}{p+r}}$ *and their applications,* Integral Equations Operator Theory, **44** (2002), 442-450.

[47] I. H. Jeon and B. P Duggal, *p-hyponormal operators and quasisimilarity.* Integral Equations Operator Theory 49 (2004), 397-403.

[48] I. H. Jeon, K. Tanahashi and A. Uchiyama, *On Quasisimilarity for Log-Hyponormal operators.*Glasgow Math. J. 46 (2004), 169-176.

[49] K. B. Laursen and M. M. Neumann,*An introduction to local spectral theory*, Lon. Math. Soc. Monographs, Oxford Univ. Press, 2000.

[50] D. Lay, *Characterisation of the essentiel spectrum of F. E. Browder*, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968),87-97.

[51] F. Lombarkia and A. Bachir, *Weyl's and Browder's theorem for an elementary operator*,Math. Vesnik, 59 (2007), 135-142.

[52] F. Lombarkia and A. Bachir, *Property (gw) for an elementary operator*, to appear in International Journal of Mathematics and statistics

[53] K. K. Oberai, *On the Weyl spectrum II*, Illinois J. Math. 21 (1977), 84-90.

[54] M. Oudghiri, *Weyl's and Browder's theorems for operators satisfying the SVEP*, Studia Math, 163 (2004), 85-101.

[55] V. Rakocevic, *On class of operators*, Mat. Vesnik. 37 (1985), 423-426.

[56] V. Rakocevic, *Operators obeying a-Weyl's theorem*, Rev. Raumaine Math. Pures Appl, 10 (1989), 915-919.

[57] S. Roch and B. Silbermann, *Continuity of generalized inverses in Banach algebras*,Studia Math. 136 (1999), 197227.

[58] M. Schechter, *Invariance of the essentiel spectrum*, Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965),365-367.

[59] J. Stampfli and B.L. Wadhwa, *On dominant Operators,* Monatsh Math. 84(1977), 143–153.

[60] K. Tanahashi, *On log-hyponormal operators*, Integral Equations Operator Theory, 34 (1999), 364-372.

[61] K. Tanahashi, *Putnam's inequality for log-hyponormal operators*,Integral Equatons Operator Theory, 48 (2004), 103-114.

[62] A. Uchiyama and K. Tanahashi, *Fuglede-Putnam's theorem for p-hyponormal or log-hyponormal operators*, Glasgow Math. J. 44 (2002), 397-410.

[63] H. Weyl, *Über beschränkte quadratische Formen,* deen Differenz vllsteig ist, Rend. Circ. Mat. Palermo 27 (1909), 373-392.

[64] L. R. Williams, *Quasisimilarity and hyponormal operators*, J. Operator Theory., **5** (1981), 127-139.

[65] M. Yanagida, *Power of class wA(s,t) Operators Associated with Generalized Aluthge Transformation*, J. of Inequal. & Appl., **7** (2002), 143-168.

[66] M. Yanagida, *Some applications of Tanahshi's result on the best possibility of Furuta inequality*, Math. Inequal. Appl. 2 (1999), 297-305.

[67] T. Yoshino, *The p-hyponormality of the Aluthge transform,* Interdisciplinary Information Sciences, 3 (1997), 91-93.