REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENEEIGNEMENT SUPERIEURE

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE HADJ LAKHDAR DE BATNA

THESE

Présentée à la Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématiques

Par

SALAH EDDINE ALLAOUI

THEME

INTEGRALES SINGULIÈRES

Soutenue le: 24 / 11 / 2011

Devant le jury composé de :

Mr. S.E.REBIAI	**Prof.**	**Université de Batna**	**Président**
Mr. M.MOUSSAI	**Prof.**	**Université de M'sila**	**Rapporteur**
Mr. G.BOURDAUD	**Prof.**	**Université de Paris VII**	**Co-Rapporteur**
Mr. A.AIBECHE	**Prof.**	**Université de Sétif**	**Examinateur**
Mr. R.BENACER	**Prof.**	**Université de Batna**	**Examinateur**
Mr. M.NADIR	**Prof.**	**Université de M'sila**	**Examinateur**

Remerciements

Je remercie mes deux directeurs de thèse, Messieurs Madani Moussai et Gérard Bourdaud qui m'ont donné la chance de travailler au sein de leurs équipes. Ils ont su m'encadrer tout au long de ces années et ont toujours su consacrer du temps à mes résultats ainsi qu'à ma rédaction. Je tiens également à les remercier sur le plan humain pour leur enthousiasme et leurs encouragements.

J'exprime mes remerciements à Monsieur le professeur S.E.Rebiai pour l'honneur qu'il me fait en président le jury de cette thèse.

Je remercie tout autant Messieurs les professeurs A.Aibeche, R.Benacer et M.Nadir qui ont bien voulu accepter d'être membres du jury.

Résumé

Dans une première partie on démontre que l'opérateur d'intégrales singulière défini par l'opérateur pseudo-différentiel, d'ordre m, de symbole de type-Dini est borné sur l'espace de Besov localisé $(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}$. On étudie également la continuité sur l'algèbre des multiplicateurs de Besov $M(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ quand $p \leq q$.
Dans une autre partie on s'intéresse aux opérateurs de composition $T_f(g) := f \circ g$ sur certains espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. On établit la nécessité de la condition de Lipschitz, et on étudie enfin la régularité de l'opérateur T_f.

Mots-clés : Opérateurs d'intégrales singulières, Opérateurs pseudo-différentiel, Espaces de Besov localisés, Espaces de Besov, Espaces de Lizorkin-Triebel, Opérateurs de composition.
2000 Mathematics Subject Classification : 46E35, 47G30, 47H30.

Abstract

On the localized Besov space $(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}$ we study the boundedness of the singular integral operators defined by pseudo differential operators of order m with symbols satisfying a condition of Dini-type. Then we deduce the continuity on pointwise multipliers Besov algebra space $M(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))$ when $p \leq q$.
We are interested in the superposition operators $T_f(g) := f \circ g$ on vector valued Besov and Lizorkin-Triebel spaces of positive smoothness exponent s. We establish that the local Lipschitz continuity of f is necessary if $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (or $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$) is imbedded into $L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, and that the uniform Lipschitz continuity of f is necessary if not. We study also the regularity of T_f.

Keywords : Singular integral operators, Pseudo-dierential operators, Localized Besov spaces, Lizorkin-Triebel spaces, Besov spaces, Composition operators.

2000 Mathematics Subject Classification : 46E35, 47G30, 47H30.

Table des matières

0.0.1 Introduction

Cette thèse se compose en deux parties : Continuité des opérateurs d'intégrales singulières sur les espaces de Besov localisés et Le calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeurs vectorielles. Nous pouvons remarquer que, les deux parties portent sur les espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et de Lizorkin-Triebel $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ pour des opérateurs linéaires ou non linéaires.

En ce qui concerne la première partie, la présence des majorations pour l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels O.P.D, d'ordre m, associe à la classe $\sum^m_{\rho,\delta}(\omega, N)$ sur les espaces de Besov localisés et de Lizorkin -Triebel est claire : il s'agit d'une majoration des O.P.D (à savoir, pour tout $s \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N}$, $1 \le p, q, r \le \infty$, $0 \le \delta < 1$, $\rho \ge 1$ et $m \ge 0$, l'O.P.D envoie $F^{s+m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $(B^{s+m}_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}$ dans $(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}$).
La deuxième partie du travail traite de l'opérateur de composition $T_f(g) := f \circ g$ sur $B^s_{p,q}$ et $F^s_{p,q}$ à valeurs vectorielles, dans le but de caractériser les fonctions $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ telles que T_f envoie $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ou $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ou $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, respectivement, à savoir que les conditions suivantes sont nécessaires pour qu'une telle propriété ait lieu :
- Pour $s > 0$, la condition de Lipschitz, locale ou globale suivant que l'espace $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ou $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ se plonge ou non dans L_∞.
- Pour $m \le n$, l'appartenance locale au même espace.
- Pour $1 + \frac{1}{p} \le s < \frac{n}{p}$, les seules fonctions qui opèrent sont les fonctions linéaires.

Les deux types de résultats reposent sur des majorations, cependant l'approche n'est pas la même dans tout le texte. La première partie porte sur le théorème de continuité des O.P.D sur les $(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}$, (pour plus de détails on consultera les travaux de J.Peetre [35], G.Bourdaud [5], [7], [8] et M.Moussai [32], [33]). La deuxième partie du texte s'intéresse aux opérateurs de composition, (voir par exemple les travaux de G.Bourdaud [9], [10], G.Bourdaud et M.Lanza De Cristoforis [16].
Présentons maintenant ces deux parties indépendamment.
La première partie, est réalisée sous la direction de Madani Moussai :
Dans le chapitre un, nous rappelons les définitions des espaces de $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ suivant le formalisme de Littlewood-Paley et quelques propriétés.
Dans le chapitre deux, nous généralisons les résultats de M.Moussai [32], la continuité des O.P.D, d'ordre m, associés à la classe $\sum^m_{\rho,\delta}(\omega, N)$ sur l'espace $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, (voir (2.1.2) et (2.1.3)). Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 *Si $s \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $m \ge 0$, $\sigma \in \sum^m_{1,0}(\omega, [s])$ et ω vérifiant*

$$\left(\int_0^1 \left(t^{-(s-[s])}\,\omega(t)\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} < +\infty\,, \tag{0.0.1}$$

alors

$$\|\sigma(.,D)f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le c\,\|f\|_{F^{s+m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Dans le troisième chapitre on démontre le même résultat du chapitre 2 sur les espaces de Besov localisés mais pour $\sigma \in \sum^m_{\delta,\rho}(\omega, [s])$. Notons que nous prouvons que (0.0.1) est optimale dans les deux résultats précédents.

La deuxième partie de notre travail, réalisée sous la direction de Gérard Bourdaud, concerne la composition. Elle est rédigée dans les chapitres 4, 5 et 6 :
Dans le quatrième chapitre, nous considérons le calcul symbolique pour les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel à valeurs vectorielles. Nous posons $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ou $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, quand il n'y a pas lieu de faire une distinction.
On cherche à caractériser les fonctions qui opèrent, par composition à gauche sur $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. On montrera que les conditions de Lipschitz sont *nécessaires* pour $s > 0$, résultat déjà obtenu par Bourdaud [10] dans le cas $m = 1$, autrement dit :

Théorème 2 *Soient $s > 0$, m et n entiers, et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Si T_f envoie $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors f est localement lipschitzienne.*

Théorème 3 *Soient $s > 0$, m et n entiers, et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. On suppose que $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \nsubseteq L_\infty(\mathbb{R}^n)$ (autrement dit : $s < \dfrac{n}{p}$ ou $s = \dfrac{n}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin- Triebel). Si T_f envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors f est globalement lipschitzienne.*

On sait que le calcul fonctionnel est trivial dans la zone $1 + \dfrac{1}{p} \leq s < \dfrac{n}{p}$, voir [5], [9].
Nous démontrons le théorème ci-dessous qui généralise un résultat de G.Bourdaud et M.Lanza De Cristoforis ([16], théorème 1).

Théorème 4 *Soient $1 + \dfrac{1}{p} < s < \dfrac{n}{p}$, (ou $s = 1 + \dfrac{1}{p} < \dfrac{n}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel) et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Si T_f envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors f est linéaire.*

Par ailleurs, l'appartenance locale au même espace est aussi nécessaire pour $m \leq n$. Nous établirons le thórème suivant.

Théorème 5 *Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et $1 \leq m \leq n$, m et n entiers. Si T_f envoie $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, alors $f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)_{loc}$.*

Dans le cinquième chapitre, on montrera que la condition que ∇f appartienne à $E^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ localement uniformément est *nécessaire*, quand l'ordre de régularité vérifie $s = \dfrac{n}{p} > 1$.

Nous notons $\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, pour lesquelles T_f est une application bornée de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $f(0) = 0$, $\overset{\circ}{E}{}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ désigne la fermeture de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Le chapitre six est consacré aux objectifs suivants : nous donnons des conditions *nécessaires* et *suffisantes* pour la régularité du calcul symbolique sur l'espace $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ pour $s > 0$, qui généralisent les résultats obtenus pour $m = 1$ par Bourdaud et Lanza de Cristoforis [16], autrement dit :

Théorème 6 *Soient* $r \in \mathbb{N}$ *et* $s > 0$*. Si* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue appartenant à* $cl_{W^r(\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)))}(C^\infty(\mathbb{R}^m) \cap W^r(\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))))$*, alors l'application* $T_f : \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \to \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est de classe* C^r*.*

Théorème 7 *Soient* $s > 0$*,* $r \in \mathbb{N}$*,* m, n *des entiers tels que* $1 \leq m \leq n$ *et* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Si l'application* $T_f : \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \to \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est de classe* C^r*. Alors* f *appartient à* $(\overset{\circ}{E}{}^{s+r}_{p,q}(\mathbb{R}^m))_{loc}$*.*

Les résultats principaux de ce travail :
- Les chapitres quatre et six, sont publiés dans Annales mathématiques Blaise Pascal. **16**, 2 (2009), 399–429.
- Le chapitre trois est actuellement soumis comme article. .

0.0.2 Notations

- $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique dans $\mathbb{R}^n$.
- $x.y = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.
- Pour α et β deux multi indices, on dit que $\alpha \leq \beta$, si $\forall j \in \{1, ..., n\} : \alpha_j \leq \beta_j$.
- Pour $k \in \mathbb{N}$, $Q_k = [-1, 1]^k$ est le cube unité dans $\mathbb{R}^k$ et Q^+ le cube $[0, 1/2]^k$.
- Si $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \sup |x_i - a_i| \leq r\}$ est le cube de centre $a = (a_1, ..., a_n)$ et de rayon $r > 0$, on désigne par λQ le cube de même centre et de rayon λr.
- $\mathbb{B}(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r.
- Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. La dérivée partielle $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_2} x_2}$ est notée $\partial^\alpha f$.
- Nous notons T_f l'opérateur de composition, défini par $T_f(g) = f \circ g$, sa version locale $S_f = (f \circ g)\varphi$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Schwartz des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$, le dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées.
- Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Fourier est

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix.\xi) f(x) \, \mathrm{d}x,$$

  et sa transformée de Fourier inverse est

$$\mathcal{F}^{-1} f(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix.\xi) f(x) \, \mathrm{d}x.$$

- Si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nous notons $g(D)$ l'opérateur pseudo-différentiel de symbole g, défini par

$$\widehat{g(D)f} := g\widehat{f} \quad , \forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \, .$$

- On note par $\sigma(., D)$ l'opérateur pseudo-différentiel $(O.P.D)$, défini par

$$\sigma(x, D) f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \sigma(x, \xi) \, \widehat{f}(\xi) \, d\xi \, , \quad (\forall f \in \mathcal{S}, \forall x \in \mathbb{R}^n).$$

- Pour une distribution f définie sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$, on définit l'opérateur de translation par $\tau_a f(x) = f(x - a)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
- Pour $m \in \mathbb{N}$, l'espace $C_b^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions de classe $C^m(\mathbb{R}^n)$, telles que

$$\|f\|_{C_b^m(\mathbb{R}^n)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_\infty < +\infty \, .$$

- Pour $s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$, $C^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hölder des fonctions $f \in C^{[s]}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{C^s(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{C_b^{[s]}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha| = [s]} \sup_{x \neq y} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x - y|^{s - [s]}} < +\infty \, .$$

- Pour $s \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$, $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de potentiels de Bessel des distributions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\|f\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} = \left\| (I - \Delta)^{s/2} f \right\|_p < +\infty \, .$$

- Pour $m \in \mathbb{N}$, $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev des fonctions $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_p < +\infty \, .$$

- Nous notons $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ou $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ l'espace de Besov ou l'espace de Lizorkin-Triebel.
- Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in [1, +\infty]$, $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ désigne l'espace des distributions tempérées à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $f = (f_1, ..., f_m)$ qui vérifient

$$\|f\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} := \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} + \|f\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} < +\infty \, .$$

- $\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, pour lesquelles T_f est une application bornée de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $f(0) = 0$.

- Pour $r \in \mathbb{N}$, $W^r(\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)))$ est l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ telles que $\partial^\alpha f \in \Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ pour tout $|\alpha| \leq r$.

- Nous notons $\overset{\circ}{E}{}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.
- Dans un espace topologique E, on note $\mathrm{cl}_E(A)$ la fermeture d'un sous-ensemble A.
- Le symbole $\hookrightarrow$ désigne l'inclusion avec continuité de l'injection canonique.
- p' l'exposant conjugué de $p \in [1, +\infty]$, i.e. $p' := \dfrac{p}{p-1}$.
- Par $\|.\|_p$ on désigne la norme dans $L_p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.
- $c, c_1, ...$ des constantes positives, leurs valeurs peuvent dépendre de certains paramètres et certaines fonctions auxiliaires, et changer d'une ligne à l'autre.

I
Première partie

Chapitre 1

Espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel

1.1 Définition des espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et de Lizorkin-Triebel $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

1.1.1 La décomposition de Littlewood-Paley

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ sur $|x| \leq 1$, et $\varphi(x) = 0$ hors de $|x| \leq \dfrac{3}{2}$.
On pose

$$\gamma(x) := \varphi(x) - \varphi(2x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \,.$$

Alors γ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, est portée par la couronne $\dfrac{1}{2} \leq |x| \leq \dfrac{3}{2}$ et de plus :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}x) = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

et

$$\varphi(x) + \sum_{j \geq 1} \gamma(2^{-j}x) = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1.1}$$

Les fonctions γ et φ dépendent clairement de n. Dans le cas où n prend plusieurs valeurs, nous utiliserons une notations indicielle, i.e. φ_n et γ_n.

Nous définissons les opérateurs $Q_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, par $Q_j := \gamma(2^{-j}D)$ $(j \geq 1)$ et $Q_0 := \varphi(D)$. On définit de même les opérateurs S_j $(j \geq 0)$ par $S_j = \varphi(2^{-j}D)$. Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, avec la notation $S_0 = Q_0$, on obtient la décomposition de f du type de Littlewood-Paley, i.e.

$$f = \sum_{j \geq 0} Q_j f \,. \tag{1.1.2}$$

Il est facile de prouver que la série (1.1.2) converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Nous introduisons les fonctions $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\tilde{\gamma} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ telles que

$$\tilde{\varphi}\varphi = \varphi \quad \text{et} \quad \tilde{\gamma}\gamma = \gamma \,. \tag{1.1.3}$$

Les opérateurs $\widetilde{Q_j}$ sont définis selon la propriété (1.1.3).

Remarque 1 Par l'inégalité de Young pour la convolution, il vient que les suites d'opérateurs $(Q_j)_{j\geq 0}$ et $(S_j)_{j\geq 0}$ sont bornées uniformément dans $\mathcal{L}(L_p)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1 *Soit $a > 0$, on pose*

$$Q_k^{*,a} f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|Q_k f(x-y)|}{1+|2^k y|^a}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$S_k^{*,a} f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|S_k f(x-y)|}{1+|2^k y|^a}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ces opérateurs maximaux associés aux Q_k et S_k, sont définis sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2 *Un espace de Banach de distributions (E.B.D) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ muni d'une norme complète $\| - \|_E$ telle que l'injection canonique $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ soit continue.*

Définition 3 *Soit E un E.B.D. On dit qu'une distribution g est un multiplicateur de E (on note $g \in M(E)$), s'il existe $c > 0$, tel que pour tout $f \in C^\infty \cap E$, on ait $gf \in E$ et $\|gf\|_E \leq c\|f\|_E$.*

On munit $M(E)$ de la norme

$$\|g\|_{M(E)} := \sup\{\|gf\|_E \,:\, f \in C^\infty \cap E\,,\, \|f\|_E = 1\}\,.$$

Définition 4 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$. L'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \left(\sum_{j\geq 0} \left(2^{sj}\|Q_j f\|_p\right)^q\right)^{1/q} < +\infty\,. \tag{1.1.4}$$

Définition 5 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty[$ et $q \in [1, +\infty]$. L'espace de Lizorkin-Triebel $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \left\| \left(\sum_{j\geq 0} \left(2^{sj}|Q_j f|\right)^q\right)^{1/q} \right\|_p < +\infty\,. \tag{1.1.5}$$

Remarque 2 Dans la formule (1.1.4) (resp. (1.1.5)) on peut remplacer Q_j par $Q_j^{*,a}$ avec $a > n/p$ (resp. $a > n/\min(p,q)$), et on obtient ainsi une norme équivalente dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$).

Voir Peetre [35] ou Triebel [38] pour plus de détails.

1.1.2 Opérateurs de différences

Pour toute distribution f sur $\mathbb{R}^n$, et tout $h \in \mathbb{R}^n$, on pose $\Delta_h := \tau_{-h} f - f$. On considère aussi les puissances successives de l'opérateur Δ_h, définie inductivement par

$$\Delta_h^1 := \Delta_h \quad \text{et} \quad \Delta_h^{m+1} := \Delta_h \circ \Delta_h^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

On vérifie aisément la formule suivante

$$\Delta_h^m f = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{j}{m} \tau_{-jh} f.$$

Nous utiliserons par la suite la notation suivante : pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1, +\infty]$, $t > 0$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ on pose

$$\omega_{p,\ell}(f;t) := \sup_{|h| \leq t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h^\ell f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \tag{1.1.6}$$

Les propositions suivantes présentent des normes équivalentes dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Pour la preuve, voir par exemple [37, Prop. 2.1.2/2, p. 19], [38] et [39, th. 2.6.1, p. 140].

Proposition 1 *Soient ℓ un entier, $0 < s < \ell$, $q \in [1, +\infty]$ et $1 \leq p \leq \infty$. Alors l'espace $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions tempérées f vérifiant*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h^\ell f(x)|^p dx \right)^{q/p} \frac{dh}{|h|^n} \right)^{1/q} < +\infty\,,$$

Pour $1 \leq p < \infty$, alors l'espace de Lizorkin-Triebel $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions tempérées f vérifiant

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_p + \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-n} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^\ell f(.)|^q dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_p < +\infty\,.$$

Preuve. Voir [37, p. 41].

Proposition 2 *Soit $s > 0$, alors une distribution f appartient à $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ et $\partial_j f \in B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $j = 1, ..., n$. De plus l'expression*

$$\|f\|_p + \sum_{j=1}^n \|\partial_j f\|_{B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$$

est une norme équivalente dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 3 *Soient ℓ un entier et $0 < s < \ell$, alors l'expression*

$$\|f\|_p + \left(\int_0^1 \left(\frac{\omega_{p,\ell}(f;t)}{t^s} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

est une norme équivalente dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

1.1.3 Plongements dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Nous rappelons quelques inclusions et égalités au sens des normes entre les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel. La plupart sont démontrées dans [35], [38, 23.5] et [39, 2.3.1].

Proposition 4 *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $C^s(\mathbb{R}^n) = B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)$, *si* $s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$.

(ii) $L_p(\mathbb{R}^n) = F^0_{p,2}(\mathbb{R}^n)$, *si* $1 < p < \infty$,

(iii) $W^m_p(\mathbb{R}^n) = F^m_{p,2}(\mathbb{R}^n)$, *si* $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{N}^*$,

(iv) $B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$, *si* $1 \leq p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$,

(v) $H^s_p(\mathbb{R}^n) = F^s_{p,2}(\mathbb{R}^n)$, *si* $1 < p < \infty$,

Pour la définition de $H^s_p(\mathbb{R}^n)$, voir les notations.

Proposition 5 *Soit* $s \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 6 *(i) Soient* $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ *et* $1 \leq q \leq \infty$, *alors*

$$B^s_{p,\min(p,q)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,\max(p,q)}(\mathbb{R}^n),$$

(ii) Soient $-\infty < \sigma < s < \infty$ *et* $1 \leq p, r, t \leq \infty$, *alors*

$$B^s_{p,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^\sigma_{p,t}(\mathbb{R}^n),$$

(iii) Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq r \leq t \leq \infty$ *et* $1 \leq p \leq \infty$, *alors*

$$B^s_{p,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,t}(\mathbb{R}^n),$$

(iv) Soient $1 \leq p_0 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ *et* $s - \frac{n}{p} \geq s_0 - \frac{n}{p_0}$, *alors*

$$B^{s_0}_{p_0,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n),$$

(v) Soient $s \geq \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$, $1 \leq q \leq \infty$ *et* $1 \leq p < r < \infty$, *alors*

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_r(\mathbb{R}^n).$$

(vi) Soient $s > \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$, $1 \leq q \leq \infty$ *et* $1 \leq p < \infty$ *ou* $s = \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$ *et* $q \leq r$, *alors*

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_r(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir [37, Coro 2, p. 36].

Proposition 7 *(i) Soit* $s > 0$, *alors*

$$B^s_{\infty,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)),$$

si $s < 0$, *alors*

$$B^{-s}_{\infty,q'}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)).$$

(ii) soit $t > 0$, *alors*

$$B^{t+(n/p)}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(B^0_{p,q}(\mathbb{R}^n))$$

Preuve. Voir [37, 4.7.1, p. 229].

1.2 Estimations élémentaires

Lemme 1 *Soient* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n$. *Il existe* $c = c(\alpha, p, q, n) > 0$, *tel que pour toute* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, *à spectre dans la boule* $\mathbb{B}(0, R)$, *on ait*

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_q \leq c R^{|\alpha| + n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \| f \|_p .$$

Preuve. Voir [11]. ■

Lemme 2 *Soient* $a \in]0.1[$ *et* $p \in [1, \infty]$. *Pour toute suite* $(\varepsilon_j)_{j \geq 0}$ *dans* $\ell^p(\mathbb{Z})$, *les suites* $\eta_k = a^k \sum_{j \leq k} a^{-j} \varepsilon_j$ *et* $\gamma_k = a^{-k} \sum_{j \geq k} a^j \varepsilon_j$ *appartiennent à* $\ell^p(\mathbb{Z})$. *De plus*

$$\| (\eta_k) \|_{\ell^p(\mathbb{Z})} + \| (\gamma_k) \|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \leq c \| (\varepsilon_j) \|_{\ell^p(\mathbb{Z})} .$$

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Young pour la convolution dans $\ell^p(\mathbb{Z})$. ■

1.3 Séries convergentes dans $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Ce paragraphe est consacré à des estimations du type de Yamazaki [41].

Proposition 8 *Soient* $s \in \mathbb{R}$ *et* $\gamma > 1$.

(i) Il existe $c > 0$, *telle que*

$$\left(\sum_{j \geq 0} 2^{qsj} \| f_j \|_p^q \right)^{1/q} \leq c \sup_{|\alpha| \leq [\frac{n}{2}] + 1} \left\| \theta^{(\alpha)} \right\|_\infty \| f \|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} , \tag{1.3.7}$$

pour toute fonction $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *à support dans* $\gamma^{-1} \leq |\xi| \leq \gamma$ *et toute suite de distributions* $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *définie par* $\hat{f}_j(\xi) = \theta(2^{-j}\xi) \hat{f}(\xi)$ *avec* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Il existe $c > 0$, *telle que*

$$\left\| \sum_{j \geq 0} f_j \right\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left(\sum_{j \geq 0} 2^{sqj} \| f_j \|_p^q \right)^{1/q} , \tag{1.3.8}$$

pour toute suite de fonctions $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *telle que supp* $f_j \subset$
$\{\xi : \gamma^{-1} 2^j \leq |\xi| \leq \gamma 2^j\}$, *pour tout* $j \in \mathbb{N}$.

Preuve. *Preuve de (1.3.7).* On part de la série

$$f_j = \sum_{k \geq 0} Q_k f_j, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

nous obtenons

$$f_j = \sum_{k \geq 0} \left(2^{kn} \mathcal{F}^{-1} \theta(2^k .) \right) * Q_k f_j,$$

avec $supp\,\theta(2^{-k}.) \cap supp\,\widehat{f_j} \neq \emptyset$ pour tout $|j-k| \leq N$, où $N = 2 + [\frac{\ln \gamma}{\ln 2}]$.
Nous avons

$$(1+|y|^2)^m \mathcal{F}^{-1}\theta(y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.y}(I-\Delta_x)^m \theta(x)dx,$$

alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'égalité de Bessel-Parseval on a

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{F}^{-1}\theta\right\|_1 &\leq \left(\int_{supp\,\theta} \left|(I-\Delta_x)^{m/2}\theta(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^{-m} dy\right)^{1/2} \\ &\leq c \sup_{|\alpha|\leq m} \left\|\theta^{(\alpha)}\right\|_\infty,\end{aligned}$$

avec $m = [\frac{n}{2}] + 1$.
Par l'inégalité de Young on en déduit

$$\|f_j\|_p \leq c(\theta) \sum_{j-N\leq k\leq j+N} \|Q_k f\|_p \leq c(\theta) \sum_{k=j}^{+\infty} \|Q_{k-N} f\|_p.$$

On distingue alors trois cas :

Le cas 1 : $s > 0$. Le lemme 2 donne l'inégalité

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j\geq 0} 2^{sqj} \|f_j\|_p^q\right)^{1/q} &\leq c_1(\theta) \left(\sum_{k\geq 0} 2^{sqk} \|Q_{k+N} f\|_p^q\right)^{1/q} \\ &\leq 2^{-sN} c_1(\theta) \|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}, \quad (N = 2 + [\frac{\ln \gamma}{\ln 2}]).\end{aligned}$$

Le cas 2 : $s < 0$. De manière analogue on a

$$2^{sj}\|f_j\|_p \leq c(\theta) 2^{sj} \sum_{j-N\leq k\leq j+N} \|Q_k f\|_p \leq c(\theta) 2^{-sN} 2^{s(j+N)} \sum_{0\leq k\leq j+N} 2^{-sk}(2^{sk}\|Q_k f\|_p).$$

Le lemme 2, permet de conclure.
Le cas 3 : $s = 0$. En utilisant l'inégalité de Hölder, il vient

$$\|f_j\|_p \leq c(\theta) (\sum_{j-N\leq k\leq j+N} 1)^{1/q'} \left(\sum_{j-N\leq k\leq j+N} \|Q_k f\|_p^q\right)^{1/q}, \quad (N = 2 + [\frac{\ln \gamma}{\ln 2}]),$$

d'où on en déduit

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j\geq 0} \|f_j\|_p^q\right)^{1/q} &\leq c(\theta)(2N+1)^{1/q'} \left(\sum_{j\geq 0} \sum_{j-N\leq k\leq j+N} \|Q_k f\|_p^q\right)^{1/q} \\ &= c(\theta)(2N+1)^{1/p+1/q'} \left(\sum_{k\geq 0} \|Q_k f\|_p^q\right)^{1/q} \\ &= c_1(\theta) \|f\|_{B^0_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Preuve de (1.3.8). On pose

$$f_j = \sum_{k\geq 0} \mathcal{F}^{-1}(\psi(2^{-k}.)) * Q_k f_j,$$

où $supp\, \psi(2^{-k}.) \cap supp\, \widehat{f_j} \neq \emptyset$ pour tout $|j-k| \leq N$, avec $N = 2 + [\frac{\ln \gamma}{\ln 2}]$, ce qui donne

$$\begin{aligned} 2^{ks} \left\| Q_k \left(\sum_{j\geq 0} f_j \right) \right\|_p &\leq \sum_{-N\leq \ell \leq N} 2^{ks} \left\| Q_k f_{k+\ell} \right\|_p \\ &\leq c(\psi) \sum_{-N\leq \ell\leq N} 2^{ks} \left\| f_{k+\ell} \right\|_p . \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k\geq 0} \left(2^{ks} \left\| Q_k \left(\sum_{j\geq 0} f_j \right) \right\|_p \right)^q \right)^{1/q} &\leq c \sum_{-N\leq \ell\leq N} \left(\sum_{k\geq 0} \left(2^{ks} \left\| f_{k+\ell} \right\|_p \right)^q \right)^{1/q} \\ &\leq c' \left(\sum_{k'\geq 0} \left(2^{k's} \left\| f_{k'} \right\|_p \right)^q \right)^{1/q} . \end{aligned}$$

■

Proposition 9 *Si* $s > 0$, *on peut remplacer les couronnes* $\gamma^{-1}2^j \leq |\xi| \leq \gamma 2^j$, *par les boules* $|\xi| \leq \gamma 2^j$, *dans la proposition 8.*

Preuve. Voir [33] ou [32, Prop. 2, p. 11].

Proposition 10 *Soit* $a > \dfrac{n}{\min(p,q)}$. *Alors il existe une constante* $c > 0$, *telle que*

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} |Q_k^{*,a} f|^q \right)^{1/q} \right\|_p \leq c \left\| f \right\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} ,$$

pour tout $f \in F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir [37, Prop. 2, p. 22].

Proposition 11 *Soient* $1 < p < \infty$ *et* $1 \leq q \leq \infty$. *Alors il existe une constante* $c > 0$, *telle que*

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |2^{kn} \mathcal{F}^{-1}\theta(2^k.) * f_k|^q \right)^{1/q} \right\|_p \leq c \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^q \right)^{1/q} \right\|_p ,$$

pour tout $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *et* $(f_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir [37, Prop. 4, p. 23].

Proposition 12 *Soient $s > 0$ et $\gamma \geq 1$. Il existe une constante $c > 0$, telle que*

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |Q_k f_k|^q \right)^{1/q} \right\|_p \leq c\gamma^s \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^q \right)^{1/q} \right\|_p ,$$

pour toute suite de fonctions $(f_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vérifiant supp $\widehat{f_k} \subset \mathbb{B}(0, \gamma 2^k)$.

Preuve. Voir [37, Prop. 3, p. 22].

Proposition 13 *Soit $s > 0$, alors*

$$M(F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)) \hookrightarrow M(F^{s-[s]}_{p,q}(\mathbb{R}^n)) \hookrightarrow L_\infty.$$

Preuve. Si $\phi \in M(F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))$, par la propriété $L_2 = \left(F^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n), F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right)_{\frac{1}{2},2}$ (voir [37, 2.5.2]) on a $\phi \in M(L_2) = L_\infty$. Dans l'autre plongement, on suppose que $\phi \in M(F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))$. Par la propriété $F^{s-[s]}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est un espace d'interpolation entre L_p et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ (voir [37, Prop.2.5.1, p. 86]) suivant la proposition 4 (*ii*), on conclut que $\phi \in M(F^{s-[s]}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$, pour tout $s > 0$.

Proposition 14 *Soient $s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ $(|\alpha| \leq [s])$ et $\phi \in M(F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))$. Alors $\partial^\alpha \phi$ est un multiplicateur de $F^{s-[s]+|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $F^{s-[s]}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Autrement-dit :*

$$\|(\partial^\alpha \phi) f\|_{F^{s-[s]}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|\phi\|_{M(F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\,\|f\|_{F^{s-[s]+|\alpha|}_{p,q}(\mathbb{R}^n)},$$

pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. On raisonne par récurrence sur $|\alpha|$, en utilisant la proposition 13 et la règle de Leibniz. Nous omettons la démonstration.

Proposition 15 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $\gamma > 1$. Alors il existe $c > 0$, telle que*

$$\left\| \left(\sum_{j \geq 0} 2^{qsj} |f_j|^q \right)^{1/q} \right\|_p \leq c(\theta)\,\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.3.9}$$

pour toute fonction $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\gamma^{-1} \leq |\xi| \leq \gamma$ et toute suite de distributions $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ définie par $\hat{f}_j(\xi) = \theta(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)$ avec $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Par la décomposition

$$f_j = \sum_{k\geq 0} Q_k f_j,$$

nous obtenons

$$f_j = \sum_{k\geq 0} \left(2^{kn}\mathcal{F}^{-1}\theta(2^k.)\right) * Q_k f,$$

avec *supp* $\theta(2^{-k}.) \cap$ *supp* $\widehat{f_j} \neq \emptyset$ pour tout $|j-k| \leq N$, où $N = 2 + [\frac{\ln \gamma}{\ln 2}]$.
Nous obtenons

$$|\left(\mathcal{F}^{-1}\theta(2^{-k}.)\right) * Q_k f| \leq c(\theta)|Q^{*,a}_k f|.$$

On a donc
$$2^{sj}|f_j| \leq c(\theta)2^{sj} \sum_{j-N\leq k\leq j+N} 2^{-sk}2^{sk}|Q_k^{*,a}f|.$$
Le cas 1 : $s \geq 0$. Par le lemme 2, il vient
$$\left(\sum_{j\geq 0} 2^{sjq}|f_j|^q\right)^{1/q} \leq c(\theta) \left(\sum_{k\geq 0} 2^{skq}|Q_k^{*,a}f|^q\right)^{1/q}.$$
La proposition 10, permet de conclure.
Le cas 1 : $s \leq 0$. De manière analogue, on majore
$$c(\theta)2^{sj} \sum_{j-N\leq k\leq j+N} 2^{-sk}2^{sk}|Q_k^{*,a}f|,$$
par
$$c'(\theta)2^{sj} \sum_{k\leq j} 2^{-sk}2^{sk}|Q_k^{*,a}f|,$$
on obtient le résultat.

1.4 Autres espaces de fonctions

Pour nos résultats dans les chapitres suivants, nous allons définir certains espaces de fonctions.

Définition 6 *Soit f une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On dit que f opère par multiplication sur $E \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si $fg \in E$ pour tout $g \in E$.*

Définition 7 *Soit $E \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ un espace de Banach de distributions. On dit que E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module si tout élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ opère par multiplication sur E.*

Définition 8 *Soient f et g dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si la limite de $(S_k f)\cdot(S_k g)$ quand $k \to +\infty$ existe dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on l'appelle produit de f par g, noté $f \cdot g$.*

■

Chapitre 2

Continuité des opérateurs d'intégrales singulières sur les espaces de Lizorkin-Triebel

2.1 Opérateurs pseudo-différentiels

2.1.1 Une classe du type de Hörmander

Dans ce chapitre, nous allons étudier la continuité des opérateurs d'intégrales singulières défini par des opérateurs pseudo-différentiels (O.P.D) sur les espaces de Lizorkin-Triebel. Il est utile de rappeler dans ce sens les travaux de G.Bourdaud [5], [6], R.R.Coifman et Y.Meyer [25], G.Métivier [31], Yabuta[40] ....
Nous rappelons qu'un O.P.D est une application linéaire définie comme suit :

$$\sigma(x,D)f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\,\widehat{f}(\xi)\,d\xi\,, \quad (\forall f \in \mathcal{S}, \forall x \in \mathbb{R}^n), \tag{2.1.1}$$

où $\sigma(x,y)$ est une fonction définie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 9 *Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\rho,\delta \in \mathbb{R}^+$ et $m \in \mathbb{R}$, on définit l'espace des symboles $\sum_{\rho,\delta}^m(\omega,N)$ comme l'ensemble des fonctions $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, de classe C^N par rapport à x vérifiant que pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$, tel que $|\beta| \leq N$, il existe c_1 et c_2 tels que*

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq c_1 (1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\,. \tag{2.1.2}$$

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\,| \leq c_2\,\omega\left(|h||\xi|^\delta\right)(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\,, \tag{2.1.3}$$

où ω est une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ continue, croissante,concave et $\omega(0)=0$ (ω est appelée module de continuité).

Il est à noter qu'on dispose de plusieurs résultats sur les O.P.D avec un module de continuité, voir par exemple Moussai [32, 33], Bourdaud [5, 6], Yabuta[40].... Voici des exemples de fonctions ω :

$$\omega(t) = t^s, 0 < s < 1,\;\; \omega(t) = \frac{1}{\log\frac{1}{t}},$$

pour t voisin de 0.
Un symbole σ de la classe $\sum_{\rho,\delta}^{m}(\omega, N)$ peut se ramener à la forme élémentaire d'après Coifman et Meyer [25]. Ceci nous allons le voir dans le paragraphe qui suit.

Remarque 3 L'espace des symboles vérifiant (2.1.2) est un espace de Fréchet pour les semi-normes

$$\Pi_{\alpha,N}(\sigma) = \sup_{|\beta|\leq N,\, \xi\in\mathbb{R}^n} \|\partial_\xi^\alpha \sigma(\cdot,\xi)\|_{C_b^N} (1+|\xi|)^{-m+\rho|\alpha|-\delta|\beta|} .$$

Il en est de même, pour l'espace des symboles vérifiant (2.1.3), avec les semi-normes

$$\widetilde{\Pi}_{\alpha,N}(\sigma) = \sup_{|\beta|\leq N,\, \xi\in\mathbb{R}^n,\, h\neq 0} \|\partial_\xi^\alpha \sigma(\cdot+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha \sigma(\cdot,\xi)\|_{C_b^N} \frac{(1+|\xi|)^{-m+\rho|\alpha|-\delta|\beta|}}{\omega\left(|h|(1+|\xi|)^\delta\right)} .$$

2.1.2 Réduction aux symboles élémentaires

La proposition suivante permet de passer d'un symbole de la classe $\sum_{\rho,\delta}^{m}$ quelconque, aux symboles élémentaires, qui sont eux même proches des séries de Littlewood-Paley (voir le paragraphe précédent). Ils ont été étudiés dans les années 1980 par Y.Meyer et ses élèves, voir [25].

Proposition 16 *Soit $N \in 2\mathbb{N}^*$ avec $N > n$. Si $\sigma \in \sum_{\rho,\delta}^{m}(\omega, K)$, alors*

$$\sigma(x,\xi) \;=\; \kappa(x,\xi) + \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|y|^2\right)^{-(n+1)/2} \sigma_y(x,\xi)\,\mathrm{d}y \;, \tag{2.1.4}$$

où $\sigma_y(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} 2^{mj} m_{j,y}(2^{\delta j}x)\eta_y(2^{-j}\xi)$ et $\kappa(x,\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq 1$. De plus

$$\left\|\partial_\xi^\alpha \kappa(\cdot,\xi)\right\|_{C_b^N} \leq c\,\Pi_{\alpha,N}(\sigma), \tag{2.1.5}$$

$$\left\|\partial_\xi^\alpha \kappa(\cdot+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha \kappa(\cdot,\xi)\right\|_{C_b^N} \leq c\,\widetilde{\Pi}_{\alpha,N}(\sigma)\,\omega(|h|) \tag{2.1.6}$$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left\|\partial_\xi^\alpha \eta_y\right\|_\infty \leq c_\alpha, \quad \text{pour tout } |\alpha| \leq N-n-1, \tag{2.1.7}$$

$$\sup_{j\geq 0, y\in\mathbb{R}^n} \left\|\partial_x^\beta m_{j,y}\right\|_\infty \leq c_\beta, \qquad \sup_{j\geq 0, y\in\mathbb{R}^n} \left\|\partial_x^\beta m_{j,y}(.+h) - \partial_x^\beta m_{j,y}(.)\right\|_\infty \leq c_\beta\,\omega(|h|). \tag{2.1.8}$$

Preuve. Posons

$$\sigma(x,\xi) = \varphi(\xi)\sigma(x,\xi) + (1-\varphi(\xi))\sigma(x,\xi) = \kappa(x,\xi) + \vartheta(x,\xi).$$

On vérifie aisément que le terme $\kappa(x,\xi)$, satisfait les estimations (2.1.5) et (2.1.6). Pour le second terme $\vartheta(x,\xi)$. On part d'une fonction $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ portée par $1/2 < |\xi| < 2$, telle que pour $|\xi| \geq 1/2$ on a

$$\sum_{j\geq 0} \left(\eta(2^{-j}\xi)\right)^2 = 1.$$

La construction de η n'est pas difficile, voir par exemple [4, Lem 6.1.7]. On pose maintenant

$$r_j(x,\xi) = 2^{-mj}\eta(\xi)\vartheta(2^{-\delta j}x, 2^j\xi),$$

il vient

$$r_j(x,\xi) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy.\xi}(1+|y|^2)^{-N/2} m_{j,y}(x)dy, \tag{2.1.9}$$

où

$$m_{j,y}(x) = \int_{1/2\leq|\xi|\leq 2} e^{-iy.\xi}(I-\Delta_\xi)^{N/2} r_j(x,\xi)\, d\xi.$$

Nous allons vérifier les inégalités (2.1.8). Compte tenu des propriétés (2.1.2) et (2.1.3), on a

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x^\beta m_{j,y}\right\|_\infty &\leq c_1 \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|\leq N}\int_{1/2\leq|\xi|\leq 2}|\eta^{(\alpha_2)}(\xi)|(2^{-i}+|\xi|)^{m-|\alpha_1|+\delta|\beta|}d\xi \\ &\leq c_2\sup_{|\alpha|\leq N}\int_{1/2\leq|\xi|\leq 2}|\eta^{(\alpha)}(\xi)|d\xi < +\infty,\end{aligned}$$

et de même on a

$$\left\|\partial_x^\beta m_{j,y}(.+h) - \partial_x^\beta m_{j,y}\right\|_\infty \leq c\omega(|h|)\sup_{|\alpha|\leq N}\int_{1/2\leq|\xi|\leq 2}|\eta^{(\alpha)}(\xi)|d\xi < +\infty.$$

Revenons à la construction de $\sigma_y(x,\xi)$. Par les différentes égalités (2.1.9), on en déduit

$$\vartheta(x,\xi) = \sum_{j\geq 0}\left(\eta(2^{-j}\xi)\right)^2\vartheta(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} 2^{mj}\eta(2^{-j}\xi)r_j\left(2^{\delta j}x, 2^{-j}\xi\right)$$

$$= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|^2)^{-\frac{n+1}{2}}(\sum_{j\geq 0}2^{mj}(1+|y|^2)^{\frac{n-N+1}{2}}\exp(i2^{-j}y.\xi)\eta(2^{-j}\xi)m_{j,y}(2^{j\delta}x))dy.$$

Nous définissons η_y et σ_y, par

$$\eta_y(\xi) = (2\pi)^{-n}(1+|y|^2)^{\frac{n-N+1}{2}}\exp(iy.\xi)\eta(\xi),$$

et

$$\sigma_y(x,\xi) = \sum_{j\geq 0}2^{mj}m_{j,y}(2^{j\delta}x))\eta_y(2^{-j}\xi).$$

Il découle

$$\partial_\xi^\alpha\eta_y(\xi) = (2\pi)^{-n}(1+|y|^2)^{\frac{n-N+1}{2}}\exp(iy.\xi)\sum_{0\leq\gamma\leq\alpha}c_{\alpha,\gamma}(iy)^\gamma\eta^{(\alpha-\gamma)}(\xi).$$

Puisque $|y|^{|\gamma|}(1+|y|^2)^{-\frac{n-N+1}{2}} \leq 1$ pour tout $y\in\mathbb{R}^n$ et tout $|\gamma|\leq N-n-1$, on obtient

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left\|\partial_\xi^\alpha\eta_y\right\|_\infty \leq c, \quad \text{pour tout } |\alpha|\leq N-n-1. \tag{2.1.10}$$

■

Lemme 3 *Pour tout $\kappa \in \sum_{\rho,\delta}^{m}(\omega, N)$ symbole défini par*

$$\sigma(x,\xi) \;=\; \kappa(x,\xi) + \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|y|^2\right)^{-(n+1)/2} \sigma_y(x,\xi)\,\mathrm{d}y \;, \tag{2.1.11}$$

où $\kappa(x,\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq 1$, il existe une famille de fonctions $(A_y)_{y\in\mathbb{R}^n}$ continues sur $\mathbb{R}^n$, telles que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, vérifiant $|\beta| \leq N$, il existe $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, tel que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left\|\partial_x^\beta A_y(.)\right\|_\infty \leq c_1, \quad \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left\|\partial_x^\beta A_y(.+h) - \partial_x^\beta A_y(.)\right\|_\infty \leq c_2\omega(|h|). \tag{2.1.12}$$

Preuve. On écrit A_y sous la forme

$$A_y(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-iy.\xi)\,(1-\Delta_\xi)^{2n}\,\kappa(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

par les inégalités (2.1.5) et (2.1.6), on établit (2.1.12).

■

2.2 O.P.D sur les espaces de Lizorkin-Triebel

Nous intéressons, dans ce paragraphe, à la continuité des O.P.D sur les espaces $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. On suppose qu'un symbole $\sigma \in \sum_{\rho,\delta}^{m}(\omega, [s])$, et on définit le module de continuité par

$$\left(\int_0^1 \left(t^{-(s-[s])}\,\omega(t)\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} < +\infty\,. \tag{2.2.13}$$

Rappelons que lorsqu'on a

$$\int_0^1 \omega^2(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} < +\infty\,, \tag{2.2.14}$$

l'opérateur pseudo-différentiel de symbole dans la classe $\sum_{1,\delta}^{m}(\omega)$ est borné sur $L_p(\mathbb{R}^n)$ (voir [32], [2], [5] et [8]). Ce résultat a été étendu aux espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ avec la condition (2.2.13) (voir [32]), aux espaces de potentiel de Bessel (voir [33]), avec (2.2.13) et $s = 2$.

Reverrons à notre cas, nous allons démontrer les deux résultats suivants :

Théorème 8 *Soient $s \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ et $m \geq 0$. Soit ω un module de continuité vérifiant (2.2.13). Il existe une constante $c > 0$, telle que pour tout $\sigma \in \sum_{1,0}^{m}(\omega, [s])$ on ait :*

$$\|\sigma(.,D)f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|f\|_{F_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Théorème 9 *Soient $s \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ et $m \geq 0$. Soit ω vérifiant*

$$\left(\int_0^1 \left(t^{-(s-[s])}\,\omega(t)\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} = +\infty\,, \tag{2.2.15}$$

alors il existe $\sigma \in \sum_{1,0}^{m}(\omega, [s])$ et $\phi \in F_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n)$ tels que $\sigma(.,D)\phi \notin F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 4 Compte tenu des propriétés de ω, il existe $c > 1$ telle que

$$\frac{1}{c}\left(\sum_{j\geq 0} 2^{jq(s-[s])}(\omega(2^{-j}))^q\right)^{1/q} \leq \left(\int_0^1 \left(t^{-(s-[s])}\ \omega\left(t\right)\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q}$$

$$\leq c\left(\sum_{j\geq 0} 2^{jq(s-[s])}(\omega(2^{-j}))^q\right)^{1/q}.$$

2.2.1 Un lemme de presque-orthogonalité

Proposition 17 *Soient $s \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\gamma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$. Soit ω vérifiant (2.2.13). Il existe $c > 0$, telle que pour toute suite $(M_j)_{j\geq 0}$ de fonctions vérifiant (2.1.8) et toute suite $(f_j)_{j\geq 0}$ à spectres dans les boules $\mathbb{B}(0, \gamma 2^j)$, on ait*

$$\left\|\sum_{j\geq 0} 2^{jm} M_j f_j\right\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sup_{j\geq 0} \|M_j\|_{C^{[s]}_\omega(\mathbb{R}^n)} \left\|\left(\sum_{j\geq 0} 2^{qj(s+m)}|f_j|^q\right)^{1/q}\right\|_p.$$

Preuve. *Le cas 1 : $m = 0$.* On suppose que

$$A = \sup_{j\geq 0} \|M_j\|_{C^{[s]}_\omega(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

La décomposition

$$M_j = S_j M_j + \sum_{k\geq j+1} Q_k M_j,$$

conduit à

$$\|Q_k M_j\|_\infty \leq cA2^{-k[s]}\omega(2^{-k}), \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \tag{2.2.16}$$

et

$$\|S_j M_j\|_\infty \leq cA.$$

Nous allons utiliser systématiquement la technique des représentations de Nikol'skij, en particulier [37, Prop. 2, p. 60]. Pour cela, posons

$$g(x) = \left(\sum_{j\geq 0} \left(2^{sj}|f_j(x)|\right)^q\right)^{1/q}.$$

Puisque *supp* $\widehat{S_j M_j} \subset \mathbb{B}(0, \gamma 2^j)$, il vient alors

$$\left\|\sum_{j\geq 0}(S_j M_j) f_j\right\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\|\left(\sum_{j\geq 0} \left(2^{sj}|(S_j M_j) f_j|\right)^q\right)^{1/q}\right\|_p$$

$$\leq cA\, \|g\|_p.$$

Alors, comme le spectre de $\sum_{j\leq k-1}(Q_k M_j) f_j$ est dans $\mathbb{B}(0, \gamma 2^j)$, nous obtenons

$$\left\|\sum_{j\geq 0}\sum_{j\leq k-1}(Q_kM_j)f_j\right\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|\left(\sum_{k\geq 1}\left(2^{sk}|\sum_{j\leq k-1}(Q_jM_j)f_j|\right)^q\right)^{1/q}\right\|_p.$$

Fixons $x\in\mathbb{R}^n$. Par l'estimation (2.2.16), on déduit

$$\left(\sum_{k\geq 1}\left(2^{sk}|\sum_{j\leq k-1}(Q_jM_j)f_j(x)|\right)^q\right)^{1/q} \leq cA\left(\sum_{k\geq 0}\left(2^{(s-[s])k}\omega(2^{-k})\sum_{j\leq k-1}|f_j(x)|\right)^q\right)^{1/q}. \tag{2.2.17}$$

Nous avons d'autre part

$$\sum_{j\leq k-1}|f_j(x)| \leq \left(\sum_{j\geq 0}2^{-sjq'}\right)^{1/q'} g(x).$$

L'inégalité (2.2.17) est estimée par

$$cA\left(\sum_{k\geq 0}\left(2^{(s-[s])k}\omega(2^{-k})\right)^q\right)^{1/q} g(x).$$

Comme par hypothèse on a

$$B=\left(\sum_{k\geq 0}\left(2^{(s-[s])k}\omega(2^{-k})\right)^q\right)^{1/q}<+\infty,$$

on conclut que

$$\left\|\sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq j+1}(Q_kM_j)f_j\right\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq cAB\left\|g\right\|_p.$$

Le cas 2 : $m>0$. Le résultat est immédiate, il suffit de poser $f_j=2^{jm}g_j$ ce qui nous ramène au 1^{er}-cas. ■

Proposition 18 *Pour $s\in\mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N}$, on a*

$$\|\kappa(.,D)f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\left(\int_0^1\left(t^{-(s-[s])}\ \omega(t)\right)^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q}\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.2.18}$$

où l'opérateur $\kappa(.,D)$ est défini en (2.1.4).

Preuve. Nous utiliserons les notations du lemme 3. Puisque

$$\|A_y\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}=\sum_{|\alpha|\leq[s]}\|\partial^\alpha_x A_y\|_{B^{s-[s]}_{p,q}(\mathbb{R}^n)},$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ (voir par exemple [37, Prop. 2.1.2/2, p. 19]), et comme $\{A_y(x)\}_{y\in\mathbb{R}^n}$ vérifie le lemme 3, on obtient

$$\|\partial_x^\alpha A_y\|_{B^{s-[s]}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\left(\int_0^1 \left(t^{-(s-[s])}\ \omega(t)\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q}.$$

Par le plongement (voir [37, th. 4.7.1, p. 229])

$$B^s_{\infty,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)), \quad \forall s>0, \tag{2.2.19}$$

on conclut que

$$\|A_y\|_{M(F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \leq c_2\left(\int_0^1 \left(t^{-(s-[s])}\ \omega(t)\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q}.$$

■

2.2.2 Preuve des théorèmes 8 et 9

Preuve du théorème 8 .
Étape 1 : On applique successivement les propositions 15, 17 et 16 sur le symbole élémentaire $\sigma_y(x,\xi)$, il vient alors

$$\|\sigma_y(.,D)f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq c(\theta) \sup_{j,h,y,|\beta|\leq[s]}\left(\left\|\partial_x^\beta m_{j,y}\right\|_\infty, \frac{\left\|\partial_x^\beta m_{j,y}(.+h)-\partial_x^\beta m_{j,y}(.)\right\|_\infty}{\omega(|h|)}\right)\|f\|_{F^{s+m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)},$$

où $c(\theta)=\sup_{|\alpha|\leq[\frac{n}{2}]+1}\left\|\theta_y^{(\alpha)}\right\|_\infty$ indépendant de y pour $N=n+[\frac{n}{2}]+2$, (N que l'on a utilisé dans la propositions 16). On conclut que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\|\sigma_y(.,D)f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c_1(\theta)\,\|f\|_{F^{s+m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Étape 2 : Soient $\kappa(x,\xi)$ un symbole suivant le lemme 3 et la proposition 18 et $(A_y(x))_{y\in\mathbb{R}^n}$ une famille de fonctions comme dans le lemme 3. Alors la proposition 18 permet de conclure. ■

Preuve du théorème 9. *Le cas 1 :* $0<s<1$ *et* $m=0$. On considère le symbole

$$\sigma(x)=\sum_{j\geq0}\omega(2^{-j})\exp(i2^jx_1)\in\Sigma^0_{1,0}(\omega,[s]).$$

Donnons une fonction $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que le support de $\hat{\phi}$ est inclus dans $\{\xi:|\xi|\leq1/4\}$ et $\|\phi\|=1$, telle que le spectre de $\exp(i2^jx_1)\phi$ reste dans la couronne $32^{j-2}\leq|\xi|\leq52^{j-2}$. Par la proposition 8 et le plongement

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n),$$

nous obtenons

$$\|\sigma\phi\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \geq c\,\|\sigma\phi\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \geq c\,\left\|(2^{sj}\omega(2^{-j}))_{j\geq 0}\right\|_{\ell^\infty} = \infty.$$

Le cas 2 : $s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$ *et* $m > 0$. On considère le symbole

$$\sigma_\nu(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} 2^{-j[s]}\omega(2^{-j})\exp(i2^j x_1)\xi_\nu^m\,, \quad \nu = 1, ..., n.$$

Donnons-nous une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ portée par $1/2 \leq |\xi| \leq 2$, telle que $\sum_{k\geq 1}\theta(2^{-k}\xi) = 1$ pour $|\xi| \geq 1/2$, ce qui donne

$$\sigma_\nu(x,\xi) = \sum_{k\geq 0}(\sum_{j\leq k} 2^{-j[s]}\omega(2^{-j})\exp(i2^j x_1))\xi_\nu^m\theta(2^{-k}\xi),$$

il vient alors $\sigma_\nu \in \sum^m_{\rho,\delta}(\omega,[s])$. Ensuite, supposons une fonction ϕ comme la preuve dans *Le cas 1*, on observe que

$$\begin{aligned}\|\sigma_\nu\|_{\mathcal{L}(F^{s+m}_{p,q}(\mathbb{R}^n),F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))} &= \sup_{\|\phi\|_{F^{s+m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\leq 1}\|\sigma_\nu\phi\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \\ &\geq c\left\|(2^{k(s-[s])}\omega(2^{-k}))_{k\geq 0}\right\|_{\ell^q} = \infty.\end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Continuité des opérateurs d'intégrales singulières sur les espaces de Besov localisés

3.1 Définition des espaces localisés

Nous utiliserons des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui seront fixées au cours de ce chapitre. Soient φ, ϕ et ψ des fonctions de classe C^∞, telles que $supp\,\varphi \subset \mathbb{B}(0,3)$, $supp\,\psi \subset \mathbb{B}(0,R)$ $(R > \sqrt{n})$, et ϕ portée par la couronne $1 \leq |\xi| \leq 3$ telles que

$$\varphi(\xi) + \int_0^1 \phi(t\xi)\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = 1\,, \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n)\,, \tag{3.1.1}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi(x-k) = 1\,, \qquad (x \in \mathbb{R}^n)\,.$$

Nous notons $\phi_t(\xi) = \phi(t\,\xi)$ et $\varphi_t(\xi) = \varphi(t\,\xi)$ pour $(t > 0\,,\, \xi \in \mathbb{R}^n)$.

Définition 10 *Soit $E \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ un espace de Banach. On définit l'espace $(E)_{\ell^r}$ $(1 \leq r \leq \infty)$ comme l'ensemble des distributions tempérées à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant*

$$\|f\|_{(E)_{\ell^r}} := (\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|(\tau_k\psi)f\|_E^r)^{1/r} < +\infty\,. \tag{3.1.2}$$

E sera l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. L'expression définie en (3.1.2) présente une norme sur $(E)_{\ell^r}$ pour $1 \leq r \leq \infty$, et une semi-norme pour $0 < r < 1$.

Lemme 4 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq r \leq \infty$ et $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ famille de fonctions, portées par $\mathbb{B}(k,R)$, alors*

$$\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k\Big\|_{(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}} \leq c\,R^n\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|f_k\|^r_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/r}.$$

Preuve. Pour $k, k' \in \mathbb{Z}^n$, on a

$$\mathbb{B}(k,R) \cap \mathbb{B}(k',R') = \varnothing \text{ pour } |k-k'| > R + R'. \tag{3.1.3}$$

Posons $m = 2[R + R'] + 1$, il vient

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tau_{k'}\psi f_k = \sum_{k\in\mathbb{B}(k',m)} \tau_{k'}\psi f_k.$$

Puisque $\sum_{k\in\mathbb{B}(k',m)} 1 \leq c\, R^n$, en appliquant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tau_{k'}\psi f_k \Big\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\, R^{n/r'} \Big(\sum_{k\in\mathbb{B}(k',m)} \Big\| \tau_{k'}\psi f_k \Big\|^r_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \Big)^{1/r}.$$

Il vient alors par la proposition 7,

$$\sup_{k'\in\mathbb{Z}^n} \Big\| \tau_{k'}\psi f_k \Big\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \Big\| f_k \Big\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)},$$

où la constante c varie suivant la valeur de s, i.e.
si $s > 0$:

$$c = c_1 \Big\| \psi \Big\|_{B^s_{\infty,q}(\mathbb{R}^n)},$$

si $s = 0$:

$$c = c_2 (\Big\| \psi \Big\|_\infty + \Big\| \psi \Big\|_{B^{1+(n/p)}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}),$$

si $s < 0$:

$$c = c_3 \Big\| \psi \Big\|_{B^{-s}_{\infty,q'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Ce qui donne

$$\Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k \Big\|_{(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}} \leq c_4\, R^{n/r'} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sup_{k''\in\mathbb{Z}^n} \|\tau_{k''}\psi f_k\|^r_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \sum_{k\in\mathbb{B}(k',m)} 1 \Big)^{1/r}$$

$$\leq c_5\, R^n\, \|\psi\|_{M(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|f_k\|^r_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \Big)^{1/r}.$$

■

3.2 Énoncé du résultat principal

Théorème 10 *Soient $s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \delta < 1$, $\rho \geq 1$ et $\sigma \in \sum^m_{\delta,\rho}(\omega, [s])$. Si ω vérifie*

$$\Big(\int_0^1 \big(t^{-(s-[s])}\ \omega\, (t^{1-\delta}) \big)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/q} < +\infty\,, \tag{3.2.4}$$

alors l'opérateur $\sigma(.,D)$ est borné de $(B^{s+m}_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}$ dans $(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}$.

La condition (3.2.4) est optimale dans le sens suivant :

Théorème 11 *Soient $s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $0 \le \delta < 1$ et $\rho \ge 1$. Soit ω un module de continuité vérifiant*

$$\left(\int_0^1 \left(t^{-(s-[s])} \, \omega\left(t^{1-\delta} \right) \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q} = +\infty. \tag{3.2.5}$$

Alors il existe $\sigma \in \sum_{\delta,\rho}^m(\omega, [s])$ et $h \in (B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}$, tel que $\sigma(., D)h \notin (B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}$.

3.3 Des estimations de presque-orthogonalité

Dans ce ce paragraphe, on fixe $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{\theta}^{(\alpha)}(0) = 0$ pour $|\alpha| \le [s]$ et $supp\, \widehat{\theta} \subset \mathbb{B}(0, \gamma)$ $(\gamma \ge 1)$. On définit $(\theta_t)_{0 \le t \le 1}$ par $\theta_t(x) = t^{-n}\theta(t^{-1}x)$.
On utilisera aussi un espace fonctionnel qui dépend de s et ω, c'est la définition suivante :

Définition 11 *Soit $s > 0$. On désigne par C_ω^s l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telles que*

$$\|f\|_{C_\omega^s} = \sum_{|\beta| \le [s]} \|f^{(\beta)}\|_\infty \; + \sum_{|\beta| = [s]} \sup_{h \ne 0} \frac{\|f^{(\beta)}\,(\cdot + h) - f^{(\beta)}\|_\infty}{\omega(|h|)} < +\infty\,. \tag{3.3.6}$$

Remarque 5 Si $\omega(t) = t^{s-[s]}$, alors C_ω^N est l'espace de Hölder $\mathcal{C}^s$.

Proposition 19 *Soient $s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $0 \le \delta < 1$, $\rho \ge 1$ et $m \in \mathbb{R}$. Soit ω un module de continuité vérifiant (2.2.13). Alors il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\left\| \int_0^1 t^{-m} \, \chi_t(t^{-\delta} \cdot) \, \theta_t {*} f \; \frac{\mathrm{d}t}{t} \right\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \le c\gamma^s \sup_{0<t\le 1} \left\| \chi_t \right\|_{C_\omega^s} \sup_{|\alpha| \le 1+M,\, \xi \in \mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^M \, |\widehat{\theta}^{(\alpha)}(\xi)| \|f\|_{B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n)},$$

pour tout $f \in B_{p,q}^{s+m}(\mathbb{R}^n)$ et tout $\{\chi_t\}_{t=0}^1 \subset C_\omega^s$; $(M \ge 4 + [s] + [n/2])$.

Pour démontrer cette proposition, on a besoin des quatre lemmes suivants :

Lemme 5 *Soit $s > 0$. Si $\eta \in L_q\left([0, 1], \mathrm{d}t/t\right)$, alors les fonctions définies par*

$$\lambda_1(t) = t^{-s} \int_0^t \tau^s \, \eta(\tau) \, \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \quad \text{ et } \quad \lambda_2(t) = t^s \int_t^1 \tau^{-s} \, \eta(\tau) \, \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}$$

appartiennent à $L_q\left([0, 1], \mathrm{d}t/t\right)$. De plus

$$\|\lambda_1\|_{L_q([0,1],\mathrm{d}t/t)} + \|\lambda_2\|_{L_q([0,1],\mathrm{d}t/t)} \le c \, \|\eta\|_{L_q([0,1],\mathrm{d}t/t)}\,.$$

Preuve. Puisque on a

$$|\lambda_1(t)| \le \left(\sup_{0 \le \tau \le 1} |\eta(\tau)| \right) t^s \int_0^t r^{-s} \frac{\mathrm{d}r}{r} \; \le \; c_1 \sup_{0 \le \tau \le 1} |\eta(\tau)|\,,$$

et
$$\int_0^1 |\lambda_1(t)|\,\frac{\mathrm{d}t}{t} \le \int_0^1 \tau^{-s}\,|\eta(\tau)|\Big(\int_\tau^1 t^s\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \;=\; c_2\int_0^1 |\eta(t)|\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\,.$$
Par interpolation, il vient

$$\|\lambda_1\|_{L_q([0,1],\mathrm{d}t/t)} \le c_3\,\|\eta\|_{L_q([0,1],\mathrm{d}t/t)}\,.$$

Il en est de même pour λ_2.

Lemme 6 *Soit $s\in\mathbb{R}$. Alors il existe une constante $c>0$ telle que*

$$\Big(\int_0^1 t^{-sq}\,\|\theta_t * f\|_p^q\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/q} \le c\gamma^{\mu-s+(n/2)}\sup_{|\alpha|\le M}\|\widehat{\theta}^{(\alpha)}\|_\infty\;\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)},$$

pour tout $f\in B^s_{p,q}(\mathbb{R})$; ($M\ge 3+[n/2]+\mu$, $\quad\mu=(1+[s])\max(\operatorname{sign} s\,,\,0))$.

Preuve. On pose $f_t=\theta_t * f$. On sait déjà que

$$\mathcal{F}^{-1}\phi_u * f_t = 0 \qquad \text{si} \quad u<t/\gamma\,, \tag{3.3.7}$$

donc on obtient

$$f_t(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\theta_t(y)\left\{\mathcal{F}^{-1}\varphi * f(x-y)+\int_{t/\gamma}^1 \mathcal{F}^{-1}\phi_u * f(x-y)\,\frac{\mathrm{d}u}{u}\right\}dy\,.$$

Nous distinguons deux cas.
Le cas $s<0$. Par le lemme 5, nous obtenons

$$\Big(\int_0^1 t^{-sq}\,\|f_t\|_p^q\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/q} \le c\,\|\theta\|_1\Bigg(\Big(\Big(\int_0^1 t^{-sq}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/q}\|\mathcal{F}^{-1}\varphi * f\|_p$$

$$+\;\gamma^{-s}\Big(\int_0^1\Big(\frac{t}{\gamma}\Big)^{-sq}\;\Big(\int_{t/\gamma}^1 u^s(u^{-s}\|\mathcal{F}^{-1}\phi_u * f\|_p)\frac{\mathrm{d}u}{u}\Big)^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/q}$$

$$\le c_1\|\theta\|_1\left\{\|\mathcal{F}^{-1}\varphi * f\|_p+\gamma^{-s}\Big(\int_0^1 u^{-sq}\|\mathcal{F}^{-1}\phi_u * f\|_p^q\frac{\mathrm{d}u}{u}\Big)^{1/q}\right\}.$$

D'autre part

$$x_\nu\theta(x)=i(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix.\xi}\frac{\partial\hat\theta}{\partial\xi_\nu}(\xi)d\xi,\quad(\nu=1,...,n),$$

ce qui donne

$$\big(1+|x|^2\big)^L\,\theta(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix.\xi}\,(1-\Delta_\xi)^L\,\hat\theta(\xi)d\xi,$$

pour tout $L\in\mathbb{N}$.
Alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'égalité de Bessel-Parseval, il vient

$$\|\theta\|_1\le\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\big(1+|x|^2\big)^{-2L}dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{|\xi|\le\gamma}\Big|(1-\Delta_\xi)^L\,\hat\theta(\xi)\Big|^2d\xi\Big)^{1/2}$$

$$\leq c \sup_{|\alpha|\leq 2L} \|\widehat{\theta}^{(\alpha)}\|_\infty \left(\int_{|\xi|\leq\gamma} d\xi\right)^{1/2}$$
$$\leq c_1\gamma^{n/2} \sup_{|\alpha|\leq 2L} \|\widehat{\theta}^{(\alpha)}\|_\infty \,,$$

où $M \geq 2L \geq 1 + [n/2]$.
Le cas $s \geq 0$. Grâce à la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi * f(x-y) = \sum_{|\alpha|<1+[s]} \frac{1}{\alpha!}(-y)^\alpha (\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)} * f(x)$$
$$+ \sum_{|\alpha|=1+[s]} \frac{1+[s]}{\alpha!}(-y)^\alpha \int_0^1 (1-r)^{[s]} (\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)} * f(x-ry)\,\mathrm{d}r.$$

Alors d'autre part, compte tenu de l'hypothèse $\widehat{\theta}^{(\alpha)}(0) = 0$ ($|\alpha| \leq [s]$), il vient

$$\|f_t\|_p \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{1+[s]}\,|\theta(y)|\,\mathrm{d}y\Big) \sum_{|\alpha|=1+[s]} \frac{1}{\alpha!}\Big(\|(\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)} * f\|_p$$
$$+ \int_{t/\gamma}^1 \|(\mathcal{F}^{-1}\phi_u)^{(\alpha)} * f\|_p \,\frac{\mathrm{d}u}{u}\Big)\,.$$

D'autre part l'inégalité de Bernstein donne

$$\int_0^1 t^{-sq}\|\theta_t * f\|_p^q \frac{dt}{t} \leq c_1\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{1+[s]}\,|\theta(y)|\,\mathrm{d}y\Big)^q \int_0^1 t^{(1+[s]-s)q}\,\big(\|\mathcal{F}^{-1}\varphi * f\|_p$$
$$+ \int_{t/\gamma}^1 u^{-1-[s]}\|\mathcal{F}^{-1}\phi_u * f\|_p \,\frac{\mathrm{d}u}{u}\Big)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$\leq c_2\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{1+[s]}\,|\theta(y)|\,\mathrm{d}y\Big)^q\,\big(\|\mathcal{F}^{-1}\varphi * f\|_p$$
$$+\gamma^{(1+[s]-s)q}\left(\int_0^1 \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{(1+[s]-s)q} \left(\int_{t/\gamma}^1 u^{s-1-[s]}(u^{-s}\|\mathcal{F}^{-1}\phi_u * f\|_p)\,\frac{\mathrm{d}u}{u}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)$$
$$\leq c_3\gamma^{(1+[s]-s)q}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{1+[s]}\,|\theta(y)|\,\mathrm{d}y\Big)^q \Big\|f\Big\|^q_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Pour un choix convenable de M, on voit aussitôt que

$$c_3 = c_4\,\gamma^{n/2}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2+2[s]}\,(1+|y|^2)^{-M}\,\mathrm{d}y\Big)^{1/2} \sup_{|\alpha|\leq M} \|\widehat{\theta}^{(\alpha)}\|_\infty\,.$$

■

Lemme 7 *Soit $s > 0$. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\Big\|\int_0^1 f_t\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\gamma^s \Big(\int_0^1 t^{-sq}\,\|f_t\|_p^q\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/q},$$

pour toute famille des fonctions $\{f_t\}_{t=0}^1$ avec supp $\widehat{f_t} \subset \mathbb{B}(0,\gamma/t)$.

Preuve. Par les inégalités de Young et Hölder, il vient

$$\Big\| \int_0^1 \mathcal{F}^{-1}\varphi * f_t \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big\|_p \le c_1 \, \|\mathcal{F}^{-1}\varphi\|_1 \Big(\int_0^1 t^{sq'} \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/q'} \Big(\int_0^1 t^{-sq} \|f_t\|_p^q \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/q}$$

$$= c_2 \Big(\int_0^1 t^{-sq} \|f_t\|_p^q \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/q} .$$

En raisonnant comme dans la preuve du lemme 6 : Puisque $\mathcal{F}^{-1}\phi_u * f_t = 0$ si $u < t/\gamma$, nous avons

$$\int_0^1 u^{-sq} \Big\| \int_0^1 \mathcal{F}^{-1}\phi_u * f_t \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big\|_p^q \frac{\mathrm{d}u}{u} \le c\gamma^s \|\mathcal{F}^{-1}\phi\|_1^q \int_0^1 \Big((\gamma u)^{-s} \int_0^{\gamma u} t^s (t^{-s} \|f_t\|_p) \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^q \frac{\mathrm{d}u}{u} .$$

■

Lemme 8 *Soient $s > 0$ et $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 2\gamma_1$. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\Big(\int_0^1 t^{-sq} \, \|f_t\|_p^q \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/q} \le c \Big\| \int_0^1 f_t \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)},$$

pour toute famille des fonctions $\{f_t\}_{t=0}^1$ à spectres dans les couronnes $\gamma_1/t \le |\xi| \le \gamma_2/t$.

Preuve. Soient $\gamma_2/2 < \widetilde{\gamma}_1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \widetilde{\gamma}_2 < 2\gamma_1$. Considérons une fonction $\vartheta \in \mathcal{S}$, telle que le spectre de ϑ est inclus dans la couronne $\widetilde{\gamma}_1 \le |\xi| \le \widetilde{\gamma}_2$ et $\widehat{\vartheta}(\xi) = 1$ pour $\gamma_1 \le |\xi| \le \gamma_2$. Puisque

$$\widehat{\vartheta}(t\xi)\widehat{f}_\tau(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad t \neq \tau \\ \widehat{f}_t(\xi) & \text{if} \quad t = \tau \, , \end{cases}$$

Par le lemme 6, on obtient

$$\Big(\int_0^1 t^{-sq} \, \|f_t\|_p^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/q} \le \Big(\int_0^1 t^{-sq} \int_0^1 \Big\| t^{-n}\vartheta(t^{-1}\cdot) * f_\tau \, \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \Big\|_p^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/q}$$

$$\le c \Big\| \int_0^1 f_\tau \, \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \Big\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} .$$

■

Preuve de la proposition 19.
Étape 1. Il suffit de voir une inégalité de la forme

$$\Big\| \int_0^1 \chi_t(t^{-\delta}\cdot) \, f_t \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le c \Big(\int_0^1 t^{-sq} \, \|f_t\|_p^q \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/q} , \qquad (3.3.8)$$

pour toute famille des fonctions $\{f_t\}_{t=0}^1$ à spectres dans les boules $\mathbb{B}(0, \gamma/t)$.
On commence par multiplier (3.1.1) par $\mathcal{F}(\chi_t(t^{-\delta}\cdot))(\xi)$ et ξ étant remplacé par $t\xi$ dans l'égalité (3.1.1), nous obtenons

$$\int_0^1 \chi_t(t^{-\delta}\cdot) f_t \,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^1 \Big(\mathcal{F}^{-1}\varphi_t * \chi_t(t^{-\delta}\cdot)\Big) f_t \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$+ \int_0^1 \int_u^1 \Big(\mathcal{F}^{-1}\phi_u * \chi_t(t^{-\delta}\cdot)\Big) f_t \,\frac{\mathrm{d}t}{t}\frac{\mathrm{d}u}{u} \quad (= g_1 + g_2)\,.$$

Estimation de g_1. Puisque le support de $\mathcal{F}\Big(f_t \cdot (\mathcal{F}^{-1}\varphi_t * \chi_t(t^{-\delta}\cdot))\Big)$ est inclus dans la boule $\mathbb{B}(0,(\gamma+3)/t)$, par le lemme 7, on a

$$\|g_1\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \;\le\; c\,\gamma^s \|\mathcal{F}^{-1}\varphi\|_1 \sup_{0\le\tau\le 1} \|\chi_\tau\|_\infty \Big(\int_0^1 t^{-sq}\, \|f_t\|_p^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/q}.$$

Estimation de g_2. On a

$$supp\, \mathcal{F}\Big(\int_u^1 f_t \cdot (\mathcal{F}^{-1}\phi_u * \chi_t(t^{-\delta}\cdot))\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big) \;\subset\; \{\xi\in\mathbb{R}^n \,:\, |\xi| \le (\gamma+3)/u\}\,.$$

Compte tenu du lemme 7, on obtient

$$\|g_2\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|=[s]} \Big\| \int_0^1 \int_u^1 \partial^\alpha\Big(f_t\cdot(\mathcal{F}^{-1}\phi_u * \chi_t(t^{-\delta}\cdot))\Big)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\,\frac{\mathrm{d}u}{u}\Big\|_{B^{s-[s]}_{p,q}(\mathbb{R})}$$

$$\le \gamma^s \sum_{|\alpha|=[s]} \sum_{0\le|\beta|\le|\alpha|} \frac{\beta!}{\alpha!(\alpha-\beta)!} \Big(\int_0^1 u^{-(s-[s])q} \Big\| \int_u^1 f_t^{(\beta)} (\mathcal{F}^{-1}\phi_u)^{(\alpha-\beta)} * \chi_t(t^{-\delta}\cdot)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big\|_p^q \frac{\mathrm{d}u}{u}\Big)^{1/q}.$$

Maintenant il suffit de voir l'inégalité

$$\big\|(\mathcal{F}^{-1}\phi_u)^{(\alpha)} * \chi_t(t^{-\delta}\cdot)\big\|_\infty \le c\,t^{-\delta[s]} u^{[s]-|\alpha|}\omega(t^{-\delta}u),$$

pour tout $0\le u,t\le 1$ et $|\alpha|\le[s]$. Pour la prouvée, on a

$$\chi_t(x-y) = \sum_{|\beta|\le[s]-1} \frac{1}{\beta!}(-y)^\beta \chi_t^{(\beta)}(x)$$

$$+\,[s] \sum_{|\beta|=[s]} \frac{1}{\beta!}(-y)^\beta \int_0^1 (1-r)^{[s]-1}\,(\chi_t^{(\beta)}(x-ry) - \chi_t^{(\beta)}(x))\mathrm{d}r,$$

et compte tenu de la propriété $\phi^{(\beta)}(0)=0$ pour tout $\beta\in\mathbb{N}^n$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-y)^\beta\,(\mathcal{F}^{-1}\phi_u)^{(\alpha)}(y)\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

D'autre part, puisque $u^{[s]-|\alpha|}\le 1$, il découle

$$|(\mathcal{F}^{-1}\phi_u)^{(\alpha)} * \chi_t(t^{-\delta}\cdot)(x)| \le c_1 t^{-\delta[s]} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{[s]}\,|(\mathcal{F}^{-1}\phi_u)^{(\alpha)}(y)|\,\omega(t^{-\delta}\,|y|)\,\mathrm{d}y$$

$$\le c_2\,t^{-\delta[s]}\,u^{[s]-|\alpha|}\,\omega(t^{-\delta}\,u).$$

Comme

$$t^{-\delta[s]}\, u^{[s]-|\alpha-\beta|}\, \omega(t^{-\delta}\, u) \leq t^{-\delta[s]+|\beta|}\, \omega(u^{1-\delta}),$$

pour tout $u \leq t$ et $|\alpha| = [s]$, alors on obtient

$$\|g_2\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2\gamma^s \sum_{|\alpha|=[s]} \sum_{0\leq|\beta|\leq|\alpha|} \Big(\int_0^1 u^{-(s-[s])q}\, \omega^q(u^{1-\delta}) \Big(\int_u^1 t^{|\beta|-\delta[s]}\, \|f_t^{(\beta)}\|_p \, \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^q \frac{\mathrm{d}u}{u}\Big)^{1/q}.$$

Par les inégalités de Bernstein et Hölder, on obtient

$$\int_\tau^1 t^{-\delta[s]}\, \|f_t^{(\beta)}\|_p \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq c_3 \Big(\int_0^1 t^{-sq}\, \|f_t\|_p^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/q} \Big(\int_0^1 t^{(s-\delta[s])q'}\, \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/q'},$$

et

$$\begin{aligned}
\|g_2^{(\alpha)}\|_p &\leq \sum_{0\leq|\beta|\leq|\alpha|} \binom{\beta}{\alpha} \int_0^1 \int_u^1 \big\|(\mathcal{F}^{-1}\phi_u)^{(\alpha-\beta)} * \chi_t(t^{-\delta}\cdot)\big\|_\infty\, \|f_t^{(\beta)}\|_p\, \frac{\mathrm{d}t}{t}\, \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&\leq c \sum_{0\leq|\beta|\leq|\alpha|} \int_0^1 u^{[s]-|\alpha|}\, \omega(u^{1-\delta}) \Big(\int_u^1 t^{|\beta|-\delta[s]}\, \|f_t^{(\beta)}\|_p\, \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big) \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&\leq c_1 \left(\int_0^1 u^{s-|\alpha|} u^{-(s-[s])}\, \omega(u^{1-\delta}) \frac{\mathrm{d}u}{u}\right) \Big(\int_0^1 (t^{-s}\, \|f_t\|_p) t^{s-\delta[s]}\, \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big) \\
&\leq c_2 \left(\int_0^1 u^{-(s-[s])q}\, (\omega(u^{1-\delta}))^q \frac{\mathrm{d}u}{u}\right)^{1/q} \Big(\int_0^1 (t^{-s}\, \|f_t\|_p)^q\, \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/q}.
\end{aligned}$$

La condition (3.1.1) implique enfin

$$\|g_2\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\gamma^s \Big(\int_0^1 (t^{-s}\, \|f_t\|_p)^q\, \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/q}.$$

Étape 2.
Posons $V = \mathcal{F}^{-1}\varphi * \theta$ et $W_u = \mathcal{F}^{-1}\phi_u * \theta$. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{-m}\chi_t(t^{-\delta}\cdot) f_t\, \frac{\mathrm{d}t}{t} &= \int_0^1 t^{-m}\chi_t(t^{-\delta}\cdot) \Big(\frac{1}{t^n} V\Big(\frac{\cdot}{t}\Big) * f\Big) \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&+ \int_0^1 \Big(\int_0^t t^{-m}\chi_t(t^{-\delta}\cdot) \Big(\frac{1}{t^n} W_u\Big(\frac{\cdot}{t}\Big) * f\Big) \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big) \frac{\mathrm{d}u}{u} \quad (= g_3 + g_4).
\end{aligned}$$

Estimation de g_3. Le lemme 6 et (3.3.8) donnent aussitôt

$$\begin{aligned}
\|g_3\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R})} &\leq c_1 \left(\int_0^1 t^{-(s+m)q} \left\| \frac{1}{t^n} V\Big(\frac{\cdot}{t}\Big) * f\right\|_p^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq c_2 \sup_{|\alpha|\leq M} \|\widehat{V}^{(\alpha)}\|_\infty) \|f\|_{B^{s+m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Dans ce cas il suffit de voir une estimation de la forme

$$\|\widehat{V}^{(\alpha)}\|_\infty \le c \sup_{|\beta|\le M,\, \xi\in\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^M |\widehat{\theta}^{(\beta)}(\xi)|;$$

où M est donné par le lemme 6, nous émittons les détails.
Estimation de g_4. Puisque le support de $\widehat{W_u}(t\,\cdot)$ est inclus dans la boule $\mathbb{B}(0, 2/t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|g_4\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} &\le \int_0^1 \Big\| \int_0^1 t^{-m}\chi_t(t^{-\delta}\cdot)\Big(\frac{1}{t^n}W_u\Big(\frac{\cdot}{t}\Big)*f\Big)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&\le c_1 \int_0^1 u^{-s}\left(\int_0^1 t^{-(s+m)q}\,\Big\|\frac{1}{t^n}W_u\Big(\frac{\cdot}{t}\Big)*f\Big\|_p^q\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q}\frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&\le c_2\Big(\int_0^1 u^{-[s]-1-(n/2)}\sup_{|\alpha|\le M}\|\widehat{W}_u^{(\alpha)}\|_\infty\,\frac{\mathrm{d}u}{u}\Big)\,\|f\|_{B^{s+m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

On observe que pour $|\alpha|\le M$, on a

$$\|\widehat{W}_u^{(\alpha)}\|_\infty \le c\,u^M \sup_{|\beta|\le M,\,\xi\in\mathbb{R}^n}(1+|\xi|)^M|\widehat{\theta}^{(\beta)}(\xi)|. \tag{3.3.9}$$

La preuve de (3.3.9) est élémentaire, en effet, comme $\widehat{W}_\tau^{(\alpha)}(\xi)$ est une combinaison linéaire de termes

$$u^{|\alpha_1|}\phi^{(\alpha_1)}(u\xi)\cdot\widehat{\theta}^{(\alpha_2)}(\xi) \qquad (\text{avec} \quad \alpha_1+\alpha_2=\alpha),$$

il suffit donc qu'on remarque que sur $supp\,(\phi^{(\alpha_1)}(u.))$ on a $u|\xi|\sim 1$.
Le choix de $M\ge 4+[s]+[n/2]$ permet de conclure. ■

3.4 Preuve des théorèmes

3.4.1 Réduction aux symboles élémentaires

Etant donné $N\in\mathbb{N}$, il existe une fonction $\eta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, radiale, réelle et telles que

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (|\alpha|\le N), \quad \text{et} \quad \int_0^\infty (\widehat{\eta}(t\,\xi))^2\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 \quad (\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}).$$

Pour trouver une telle fonction η, on se donne une fonction $\theta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ radiale, réelle, non nulle telle que

$$supp\,\theta\subset\mathbb{B}(0,\frac{1}{N+1}) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^n}\theta(\xi)d\xi = 0.$$

Et on pose

$$h = \underbrace{\theta*\ldots*\theta}_{(N+1)\,termes}\,.$$

Alors $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ radiale, réelle, non nulle et

$$supp\, h \subset \mathbb{B}(0,1).$$

De plus $\widehat{h} = (\widehat{\theta})^{N+1}$, avec $\widehat{\theta}(0) = 0$ implique

$$\widehat{h}^{(\alpha)}(0) = 0 \quad |\alpha| \leq N,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) x^\alpha dx = 0.$$

Vérifions que

$$\int_0^\infty \widehat{h}(t\xi)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < +\infty \qquad\qquad \forall \xi \neq 0.$$

Pour cela, on note que

$$|\widehat{h}(\xi)| \leq c \min(|\xi|, |\xi|^{-1}),$$

(à cause de $\widehat{h}(0) = 0$ et $\widehat{h} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) en conséquence

$$\int_0^\infty \widehat{h}(t\xi)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{|\xi|^{-1}} \widehat{h}(t\xi)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_{|\xi|^{-1}}^\infty \widehat{h}(t\xi)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leq c,$$

pour tout $\xi \neq 0$. Posons

$$u(\xi) = \int_0^\infty \widehat{h}(t\xi)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \forall \xi \neq 0,$$

on voit aussitôt que

$$u(\lambda\xi) = u(\xi) \quad \forall \xi \neq 0\,, \quad \forall \lambda > 0.$$

En conséquence la fonction u est constante sur $\mathbb{R}^n\{0\}$. Posons

$$c_0 = \int_0^\infty \widehat{h}(t\xi)^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad \forall \xi \neq 0.$$

Alors $c_0 > 0$ (en effet $c_0 \geq 0$) et si $c = 0$, alors $\widehat{h}(t\xi_0) = 0$ pour tout $t > 0$, ce qui contredit le fait que h est radiale et non nulle. On pose finalement $\eta = c_0^{-1/2} h$ et

$$\eta_0(\xi) = \int_1^\infty (\widehat{\eta}(t\xi))^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad\qquad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

On a $\eta_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Finalement nous obtenons la partition de l'unité

$$\eta_0\,(\xi) + \int_0^1 (\widehat{\eta}\,(t\xi))^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 \qquad\qquad (\xi \in \mathbb{R}^n)\,. \tag{3.4.10}$$

Retournons à la réduction aux symboles élémentaires :

Soit $\sigma \in \sum_{\rho,\delta}^m(\omega, [K])$. Multiplions la partition (3.4.10) par $\sigma(x,\xi)$, il vient

$$\sigma(x,\xi) = \varrho(x,\xi) + \int_0^1 t^{-m}\,\widehat{\eta}(t\xi)\,\kappa_t(t^{-\delta}x, t\,\xi)\,\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

où

$$\varrho(x,\xi) = \eta_0(\xi)\,\sigma(x,\xi) \qquad \text{et} \qquad \kappa_t(x,\xi) = t^m\,\widehat{\eta}(\xi)\,\sigma(t^\delta x, \xi/t)\,.$$

Posons

$$\chi_{t,y}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi}(I - \triangle_\xi)^{N/2}\kappa_t(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,,$$

$$a_y(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iu\cdot\xi}(I - \Delta_\xi)^{2n}\varrho(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

et

$$\vartheta_y(x) = (2\pi)^{-n}(1+|y|^2)^{n+(1/2)-(N/2)}\eta(x+y)\,.$$

On obtient

$$\sigma(x,\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|^2)^{-n-(1/2)}\varrho_y(x,\xi)\,\mathrm{d}y \;+\; \varrho(x,\xi)\,, \tag{3.4.11}$$

où

$$\varrho(x,\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|^2)^{-2n}e^{iy\cdot\xi}a_y(x)\,\mathrm{d}y\,, \tag{3.4.12}$$

et

$$\varrho_y(x,\xi) \;=\; \int_0^1 t^{-m}\,\chi_{t,y}(t^{-\delta}x)\,\widehat{\vartheta}_y(t\xi)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\,. \tag{3.4.13}$$

Proposition 20 *Soient $K \in \mathbb{N}^*$ et $\delta \geq 0$. Alors tout σ de $\sum_{\rho,\delta}^m(\omega, K)$ peut s'écrire sous la forme (3.4.11). De plus on a les propriétés suivantes :*
(i) ϱ est à décroissance rapide en ξ à ∞ et

$$\begin{cases} \|\partial_\xi^\alpha\varrho(\cdot,\xi)\|_{C_b^K} \leq c\,\pi_{\alpha,K}(\sigma)\,, \\ \|\partial_\xi^\alpha\varrho(\cdot+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha\varrho(\cdot,\xi)\|_{C_b^K} \leq c\,\overline{\pi}_{\alpha,K}(\sigma)\,\omega(|h|). \end{cases}$$

(ii) La famille $\{a_y\}_{y\in\mathbb{R}^n}$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$, est bornée uniformément dans C_ω^K.
(iii) La famille $\{\chi_{t,y}\}_{t\in[0,1]\,,\,y\in\mathbb{R}^n}$, est bornée uniformément dans C_ω^K.
(iv) La fonction ϑ_y est de classe C^∞ portée par la boule $\mathbb{B}(-y,1)$, satisfait $\forall L > 2n+1, \forall M > 0$, les inégalités suivantes :

$$\widehat{\vartheta}_y^{(\alpha)}(0) = 0 \quad (|\alpha| \leq N)\,, \qquad \text{et} \qquad |\widehat{\vartheta}_y^{(\beta)}(x)| \leq c(1+|x|)^M \quad (|\beta| \leq L-2n-1)\,.$$

Preuve. On vérifie facilement les propriétés (i), (ii) et (iv).
Vérifions que la famille $\{\chi_{t,y}^{(\beta)}\}$ satisfait (3.3.6). Comme la preuve de la proposition 16, il s'agit de montrer que la fonction

$$\xi \to |\xi|^{m-\rho|\alpha_1|+\delta|\beta|}\,\widehat{\eta}^{(\alpha_2)}(\xi) \in L^1 \qquad \text{pour} \quad |\alpha_1+\alpha_2| = N\,.$$

- Si $|\xi| \geq 1$, il existe $c > 0$, tel que $|\widehat{\eta}^{(\alpha_2)}(\xi)| \leq c(1+|\xi|)^{-n-1}$.

- Si $|\xi| < 1$, grâce à l'hypothèse $\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \eta(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pour $|\alpha| \le N$, on obtient

$$\widehat{\eta}^{(\alpha_2)}(0) = 0, \quad |\widehat{\eta}^{(\alpha_2)}(\xi)| \le c\,|\xi|^{N+m-\rho|\alpha_1|+\delta|\beta|}.$$

Par la condition $\rho \ge 1$, on conclut que

$$t^{(\rho-1)|\alpha_1|} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\eta}^{(\alpha_2)}(\xi)|(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha_1|+\delta|\beta|}\,\mathrm{d}\xi \le c.$$

■

3.4.2 Preuve du théorème 10

Étape 1. On commence par l'O.P.D $\varrho(.,D)$ de symbole comme dans (3.4.11).
Soit $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k$ appartient à $(B_p^{s+m,q})_{\ell^r}$ tel que le support de f_k est contenu dans la boule $\mathbb{B}(k,R)$. On observe que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ fixé et tout $k \in \mathbb{Z}^n$, le support de $\varrho_y(.,D)f_k$ est inclus dans le support de $\mathcal{F}^{-1}(\varrho_y(x,\cdot)\widehat{f_k})$, qui dans la boule $\mathbb{B}(k,(1+R)(1+|y|))$. D'après le lemme 4 et la proposition 19, nous avons

$$\Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}^{-1}(\varrho_y(x,\cdot)\widehat{f_k})\Big\|_{(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}} \le c_1\,(1+|y|)^n \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|f_k\|^r_{B^{s+m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/r}, \qquad (3.4.14)$$

où

$$c_1 = c_2 \sup_{|\alpha|\le M,\,\xi\in\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^L |\widehat{\vartheta}_y^{(\alpha)}(\xi)|\,, \quad M \le N-2n-1$$

et ϑ_y est donné par la proposition 20/(iv). Cela implique que nous pouvons choisir $N = 3+2n+[s]+[n/2]$. Puisque

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^{-n-1/2}(1+|y|)^n\,\mathrm{d}y\, < \infty.$$

En appliquant de nouveau le lemme 4 sur le second membre de (3.4.14), on conclut que

$$\Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}^{-1}(\varrho_y(x,\cdot)\widehat{f_k})\Big\|_{(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}} \le c_2(1+|y|)^n\,\|f\|_{(B^{s+m}_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}}.$$

Étape 2. Par la condition (2.2.13) et la proposition 20/(ii), on obtient

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \|a_y\|_{B^s_{\infty,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty\,.$$

D'autre part, le support de $a_y(\cdot)f_k(\cdot+y)$ est contenu dans la boule $\mathbb{B}(k,R+|y|)$, donc par le lemme 4 et la proposition 6, on obtient

$$\Big\|\varrho(.,D)f_k\Big\|_{(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}} \le c_3 \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \|a_y\|_{M(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))}\times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^{-2n}(1+|y|)^n\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|f_k(.+y)\|^r_{B^{s+m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/r}\,\mathrm{d}y,$$

Puisque

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^{-2n}(1+|y|)^n \mathrm{d}y < \infty,$$

et l'espace $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est invariant par translation, on conclut que

$$\left\|\varrho(.,D)f\right\|_{(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}} \le c\|f\|_{(B^{s+m}_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}}.$$

■

3.4.3 Preuve du théorème 11

Soit $v_t(x) = t^{-[s]}\omega(t^{1-\delta})\exp(\mathrm{i}x_1/t)$. On pose

$$\sigma(x,\xi) = (1+|\xi|)^m \int_0^1 v_t(x)\ \frac{\mathrm{d}t}{t}\,. \tag{3.4.15}$$

Soit $h \in \mathcal{S}$ une fonction positive telle que

$$supp\,\widehat{h} \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \le \frac{1}{8}\right\} \quad \text{et} \quad h(x) \neq 0 \quad \text{si} \quad x \in supp\,\psi.$$

On a le support de

$$\mathcal{F}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1/t}\, h(x)h(x-k)\Big)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\,\widehat{h}(\xi)\,\widehat{h}\Big(\xi_1 - \frac{1}{t},\xi'\Big)\ \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

est inclus dans $(1/t)-(1/4) \le |\xi| \le (1/t)+(1/8)$, qui est lui même inclus dans $(3/4t) \le |\xi| \le (5/4t)$. Posons

$$g = \mathcal{F}^{-1}((1+|\cdot|)^{-m}\,\widehat{h})\,. \tag{3.4.16}$$

Grâce aux inclusions suivantes

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subsetneqq (B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^p} \quad \text{si} \quad p>q, \quad (B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^p} \subsetneqq B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \quad \text{si} \quad p<q\,,$$

(voir [5] ou [34]) et le lemme 8, il vient

$$\begin{aligned}\|\sigma(\cdot,D)g\|_{(B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}} &= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\Big\|\int_0^1 v_t(x)\,h(x)h(x-k)\ \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big\|^r_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/r}\\ &\ge c_1\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|h(\cdot-k)\ h\|_p^r\Big)^{1/r}\Big(\int_0^1 \frac{\omega^q(t^{1-\delta})}{t^{q(s-[s])}}\ \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/q}\\ &\ge c_2\,\|h\|^2_{2p}\Big(\int_0^1 \frac{\omega^q(t^{1-\delta})}{t^{q(s-[s])}}\ \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/q} = +\infty\,.\end{aligned}$$

Enfin, pour montrer que $\sigma \in \sum^m_{\rho,\delta}(\omega,[s])$, on commence par multiplier l'égalité (3.4.15) par

$$\int_0^1 \theta(t\xi)\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 \qquad \text{pour} \quad |\xi| \ge 1\,,$$

où $\theta \in C^\infty$ et *supp* θ est inclus dans $1 \leq |\xi| \leq 3$. Alors

$$\sigma(x,\xi) = (1+|\xi|)^m \int_0^1 \Big(\int_0^\tau + \int_\tau^1 \dots \Big) \frac{\mathrm{d}t}{t} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}$$

$$= \int_0^1 \Big(\int_t^1 (1+|\xi|)^m \theta(t\xi) \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} \Big) v_t(x) \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_0^1 \Big(\int_\tau^1 v_t(x) \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big) (1+|\xi|)^m \theta(t\xi) \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} .$$

Ce qui termine la démonstration. ■

II
Deuxième partie

Chapitre 4

Le calcul symbolique dans les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel à valeurs vectorielles

4.1 Préliminaire et présentations des résultats

Le présent chapitre fait suite aux travaux de G.Bourdaud. Nous considérons le calcul symbolique pour les espaces de Besov et de Lizorkin -Triebel à valeurs vectorielles $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, avec $p, q \in [1, +\infty]$ dans le cas de l'espace de Besov, $q \in [1, +\infty]$ et $p \in [1, +\infty[$ dans le cas de l'espace de Lizorkin-Triebel. Nous posons $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ou $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, quand il n'y a pas besoin de distinguer les espaces B et F.
On cherche à caractériser les fonctions qui opèrent, par composition à gauche, sur l'espace $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. On montrera que les conditions de Lipschitz sont nécessaires pour $s > 0$, résultat déjà obtenu dans le cas $m = 1$, voir [10].
On sait que le calcul fonctionnel est trivial dans la zone $1 + \frac{1}{p} \leq s < \frac{n}{p}$, voir [5], [9] et le théorème 14. Le phénomène de trivialité étant dû à l'existence de fonctions non bornées dans les espaces concernés, il est naturel de considérer les espaces

$$\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\,.$$

Nous allons alors démontrer les résultats suivants, qui ont fait l'objet d'un article paru dans les Annales mathématiques Blaise Pascal en 2009, voir [1].

Théorème 12 *Soient $s > 0$, m et n entiers, et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Si T_f envoie $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors f est localement lipschitzienne.*

Théorème 13 *Soient $s > 0$, m et n entiers, et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. On suppose que $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \nsubseteq L_\infty(\mathbb{R}^n)$ (autrement dit : $s < \frac{n}{p}$ ou $s = \frac{n}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin- Triebel). Si T_f envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors f est globalement lipschitzienne.*

Théorème 14 *Soient* $1+\frac{1}{p} < s < \frac{n}{p}$, *(ou* $s = 1+\frac{1}{p} < \frac{n}{p}$ *et* $q > 1$ *dans le cas Besov,* $p > 1$ *dans le cas Lizorkin-Triebel) et* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. *Si* T_f *envoie* $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *dans* $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, *alors* f *est linéaire.*

Remarque 6 L'existence de fonctions non triviales opérant sur $B^{1+(1/p)}_{p,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, dans le cas où $n > p+1$, ou sur $F^2_{1,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, dans le cas où $n > 2$, est une question ouverte.

Théorème 15 *Soient* $s > 0$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *et* $1 \le m \le n$, m *et* n *entiers. Si* T_f *envoie* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *dans* $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, *alors* $f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)_{loc}$.

4.2 Une variante de la décomposition de Littlewood-Paley

Dans certains cas, il est utile de remplacer les fonctions standard γ et φ par des fonctions produits tensoriels. Nous donnons ici la construction relative à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Pour toutes fonctions f, g définies sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{n-m}$, respectivement, on pose

$$(f \otimes g)(t, x) := f(t)g(x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} .$$

Définissons

$$u_0 := \varphi_m \otimes \varphi_{n-m}, \qquad u_1 := \varphi_m(2(.)) \otimes \gamma_{n-m}, \qquad u_2 := \gamma_m \otimes \varphi_{n-m} .$$

Alors nous avons

$$u_0(t, x) - u_0(2t, 2x) = u_1(t, x) + u_2(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} .$$

Nous définissons les opérateurs U_0 et $U_{\alpha,j}$ $(j \ge 1 , \alpha = 1, 2)$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, par

$$U_{\alpha,j} := u_\alpha(2^{-j}D), \qquad U_0 := u_0(D) .$$

Proposition 21 *Soient* $1 \le m < n$ *et* $s \in \mathbb{R}$. *Alors une distribution tempérée* f *appartient à* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *et* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si*

$$\|U_0 f\|_p + \sum_{\alpha=1,2} \left(\sum_{j\ge 1} \left(2^{sj} \|U_{\alpha,j} f\|_p\right)^q \right)^{1/q} < +\infty ,$$

$$\|U_0 f\|_p + \sum_{\alpha=1,2} \left\| \left(\sum_{j\ge 1} \left(2^{sj} |U_{\alpha,j} f|\right)^q \right)^{1/q} \right\|_p < +\infty ,$$

et les expressions ci-dessus sont des normes équivalentes sur $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *et* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, *respectivement.*

Preuve. Voir par exemple Triebel [38, Prop. 2.3.2/1, p. 46], [39, chap. 2] ou Peetre [35, chap. 8].

Proposition 22 *Soient* $1 \le m < n$ *et* $s > 0$.

– *Si* $f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ *et* $g \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^{n-m})$, *alors* $f \otimes g \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\|f \otimes g\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)}\, \|g\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^{n-m})} \,. \tag{4.2.1}$$

– *Supposons que* $f \otimes g \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *et que* g *est une fonction non nulle*
  – *appartenant à* $L_p(\mathbb{R}^{n-m})$, *dans le cas Besov,*
  – *bornée uniformément continue, dans le cas Lizorkin-Triebel.*
  Alors il existe une constante $c(g) > 0$ *telle que*

$$\|f\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)} \le c(g)\, \|f \otimes g\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \,. \tag{4.2.2}$$

Preuve. On munit l'espace $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ des normes équivalentes données dans la proposition 21. Dans toute la preuve, on supposera, sans perte de généralité, que $f \neq 0$.
Étape 1 : Le cas Besov. Nous avons

$$\|f \otimes g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi_m(D)f\|_p\|\varphi_{n-m}(D)g\|_p + \left(\sum_{j\ge1}\left(2^{sj}\|u_1(2^{-j}D)f \otimes g\|_p\right)^q\right)^{1/q}$$
$$+ \left(\sum_{j\ge1}\left(2^{sj}\|u_2(2^{-j}D)f \otimes g\|_p\right)^q\right)^{1/q} .$$
$$= \|Q_0f\|_p\|Q_0g\|_p + \left(\sum_{j\ge1}\left(2^{sj}\|\varphi_m(2^{1-j}D)f\|_p\|Q_jg\|_p\right)^q\right)^{1/q}$$
$$+ \left(\sum_{j\ge1}\left(2^{sj}\|\varphi_{n-m}(2^{-j}D)g\|_p\|Q_jf\|_p\right)^q\right)^{1/q} .$$

En utilisant le plongement

$$E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}^n), \quad \forall s > 0, \tag{4.2.3}$$

et le fait que les opérateurs $\varphi(2^{-j}D)$ sont bornés sur L_p, uniformément par rapport à j, nous obtenons l'inégalité (4.2.1) dans le cas Besov.
Soit g une fonction non nulle dans $L_p(\mathbb{R}^{n-m})$. On a

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_{n-m}(2^{-j}D)g = g \quad \text{dans} \quad L_p(\mathbb{R}^{n-m})\,,$$

donc il existe j_0 tel que

$$\|\varphi_{n-m}(2^{-j}D)g\|_p \ge \frac{1}{2}\|g\|_p, \quad \forall j > j_0\,.$$

Donc on obtient

$$\frac{1}{2}\|g\|_p \left(\sum_{j>j_0}\left(2^{sj}\|Q_jf\|_p\right)^q\right)^{1/q} \le \|f \otimes g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Et d'autre part on a

$$\|Q_j f\|_p \le c_1 \|f\|_p \le \frac{c_2}{\|g\|_p} \|f \otimes g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \,.$$

Donc

$$\left(\sum_{j=0}^{j_0} \left(2^{sj} \|Q_j f\|_p \right)^q \right)^{1/q} \le \frac{c 2^{s j_0}}{\|g\|_p} \|f \otimes g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \,.$$

D'où l'inégalité (4.2.2).
Étape 2 : Le cas Lizorkin-Triebel. Nous avons

$$\begin{aligned} \|f \otimes g\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = {} & \|Q_0 f\|_p \|Q_0 g\|_p + \\ & \left\| \left(\textstyle\sum_{j \ge 1} |2^{sj} \varphi_m(2^{1-j} D) f \otimes Q_j g|^q \right)^{1/q} \right\|_p \\ & + \left\| \left(\textstyle\sum_{j \ge 1} |2^{sj} Q_j f \otimes \varphi_{n-m}(2^{-j} D) g|^q \right)^{1/q} \right\|_p \,. \end{aligned}$$

On a

$$\sum_{0 \le \alpha \le j-1} Q_\alpha f(t) = \varphi_m(2^{1-j} D) f(t) \,.$$

Par la condition $s > 0$, cela implique

$$|(\varphi_m(2^{1-j} D) f)(t)| \le c \left(\sum_{k \ge 0} \left| 2^{sk} Q_k f(t) \right|^q \right)^{1/q} , \quad \forall t \in \mathbb{R}^m \,, \forall j \ge 1 \,.$$

Alors on obtient

$$\left\| \left(\sum_{j \ge 1} \left| 2^{sj} \varphi_m(2^{1-j} D) f \otimes Q_j g \right|^q \right)^{1/q} \right\|_p \le c \|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)} \|g\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^{n-m})} \,.$$

En raisonnant de la même façon pour les autres termes, on termine la preuve de (4.2.1) dans le cas Lizorkin-Triebel.
Soit g une fonction non nulle et uniformément continue. On a

$$\lim_{j \to \infty} \varphi_{n-m}(2^{-j} D) g = g \quad \text{uniformément sur } \mathbb{R}^{n-m} \,,$$

donc il existe une boule $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{R}^{n-m}$, un nombre $r > 0$, et un entier j_0, tels que

$$|\varphi_{n-m}(2^{-j} D) g(x)| \ge r, \quad \forall x \in \mathbb{B} \,, \forall j > j_0 \,.$$

Il vient

$$\left\| \left(\sum_{j > j_0} \left| 2^{sj} Q_j f \otimes \varphi_{n-m}(2^{-j} D) g \right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \ge$$

$$r|\mathbb{B}|^{1/p}\left\|\left(\sum_{j>j_0}\left|2^{sj}Q_jf\right|^q\right)^{1/q}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^m)}.$$

Par hypothèse on a $f\otimes g\in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ donc $f\otimes g\in L_p(\mathbb{R}^n)$, grâce au plongement (5.1.7). Cela donne $f\in L_p(\mathbb{R}^m)$ et $g\in L_p(\mathbb{R}^{n-m})$. En utilisant le plongement $\ell^1\hookrightarrow\ell^q$, pour $q\geq 1$, il vient

$$\left(\sum_{0\leq j\leq j_0}\left|2^{sj}Q_jf(t)\right|^q\right)^{1/q}\leq c\sum_{0\leq j\leq j_0}\left|2^{sj}Q_jf(t)\right|\quad,\forall t\in\mathbb{R}^m.$$

En prenant les normes $L_p(\mathbb{R}^m)$, il vient

$$\left\|\left(\sum_{0\leq j\leq j_0}\left|2^{sj}Q_jf(t)\right|^q\right)^{1/q}\right\|_p\leq c_1\|f\|_p\leq\frac{c_2}{\|g\|_p}\|f\otimes g\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

D'où le résultat. ■

4.2.1 Quelques fonctions de test

Lemme 9 *Soit $s>0$. Si $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, il existe une constante $c=c(u,s,p,q,m,n)>0$ telle que*

$$\left\|\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\alpha_{jk}2^{j((n/p)-s)}u(2^j(.)-k)\right\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\leq c\left(\sum_{j\geq 0}(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\alpha_{jk}|^p)^{q/p}\right)^{1/q},$$

$$\left\|\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\alpha_{jk}2^{j((n/p)-s)}u(2^j(.)-k)\right\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\leq$$
$$c\left\|\left(\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(|\alpha_{jk}|\,2^{jn/p}\chi(2^j(.)-k))^q\right)^{1/q}\right\|_p,$$

où χ désigne la fonction caractéristique de Q.

Preuve. Les estimations résultent des théorèmes (3.1) de [29] et (5.3) de [28], appliqués à chaque fonction coordonnée de u.

Lemme 10 *Pour toute fonction $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, il existe une constante $c=c(u,s,p,q,m,n)>0$ telle que*

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\alpha_k u(.-k)\right\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\leq c(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\alpha_k|^p)^{1/p},$$

Preuve. En faisant $j=0$ dans le lemme 9, on a le résultat.

Lemme 11 *On suppose que* $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \nsubseteq L_\infty(\mathbb{R}^n)$ *(autrement dit :* $0 < s < \dfrac{n}{p}$ *ou* $s = \dfrac{n}{p}$ *et* $q > 1$ *dans le cas Besov,* $p > 1$ *dans le cas Lizorkin- Triebel), alors il existe une suite* $(\phi_\nu)_{\nu\geq 1}$ *de fonctions de classe* C^∞*, portées par* Q*, telles que* $\phi_\nu(x) = 1$ *sur le cube* $2^{-\nu}Q$ *et* $\lim_{\nu\to+\infty} \|\phi_\nu\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = 0$*.*

Preuve. Dans le cas $s < \dfrac{n}{p}$, on pose $\phi_\nu(x) := \varphi(2^\nu x)$, l'estimation

$$\|\phi_\nu\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{-\nu(\frac{n}{p}-s)} \|\varphi\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$$

permet de conclure.
Supposons maintenant $s = \dfrac{n}{p}$ et posons

$$\phi_\nu(x) := \nu^{-1} \sum_{1\leq j\leq\nu} \varphi(2^j x).$$

On a donc $\phi_\nu(x) = 1$ sur $2^{-\nu}Q$ et $\phi_\nu(x) = 0$ hors de Q. Le lemme 9 donne les inégalités

$$\|\phi_\nu\|_{B^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\nu^{(1/q)-1}.$$

De même

$$\|\phi_\nu\|_{F^{n/p}_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq c\nu^{-1} \left\| \sum_{1\leq j\leq\nu} 2^{jn/p}\chi_j \right\|_p ,$$

où χ_j désigne la fonction caractéristique du cube $2^{-j}Q$. Pour estimer la norme L^p qui apparaît au second membre, on pose

$$S_k := 2^{-k}Q \diagdown 2^{-k-1}Q, \quad k = 1, ..., \nu - 1,$$

et

$$S_\nu := 2^{-\nu}Q.$$

La fonction $\sum_{1\leq j\leq\nu} 2^{jn/p}\chi_j$ valant constamment $\sum_{1\leq j\leq\nu} 2^{jn/p}$ sur S_k, on obtient

$$\|\phi_\nu\|_{F^{n/p}_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq c\nu^{-1} \left(\sum_{1\leq k\leq\nu} 2^{kn}|S_k| \right)^{1/p} \leq c_1\nu^{(1/p)-1}.$$

■

Lemme 12 *Soient* $s = 1 + \dfrac{1}{p} < \dfrac{n}{p}$ *et* $q > 1$ *dans le cas Besov,* $p > 1$ *dans le cas Lizorkin-Triebel. Alors il existe une suite* $(\omega_\nu)_{\nu\geq 1}$ *de fonctions de classe* C^∞*, portées par* Q*, telle que* $\omega_\nu(x) = x_1$ *pour* $|x_1| \leq 2^{-\nu}$*,* $|x_j| \leq \frac{1}{2}$ $(j = 2, ..., n)$ *et*

$$\|\omega_\nu\|_{B^{1+\frac{1}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\nu^{(1/q)-1}, \qquad \|\omega_\nu\|_{F^{1+\frac{1}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\nu^{(1/p)-1}.$$

Preuve. Voir par exemple [9] ou [37, Lemme. 5.3.1/2, p. 308].

4.3 Preuves des théorèmes

4.3.1 Résultats préliminaires

Lemme 13 *Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, une fonction s'annulant à l'origine telle que T_f envoie $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (respectivement $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$) dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe des nombres $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que l'implication*

$$\|g\| \leq \delta \Longrightarrow \|f \circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M,$$

soit vérifiée par toute fonction g portée par Q, la norme de $\|g\|$ étant calculée respectivement dans $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Preuve. Supposons, au contraire, que, pour tout cube R et tous nombres M et δ, on puisse trouver une fonction g, portée par R, telle que

$$\|g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \leq \delta \quad \text{et} \quad \|f \circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} > M.$$

Donnons-nous une suite $(R_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de cubes disjoints et des fonctions $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ $(j \geq 0)$ telles que $\varphi_j(x) = 1$ sur $\frac{1}{2}R_j$ et $\varphi_j(x) = 0$ hors de R_j. On note M_j la norme de l'opérateur $g \mapsto \varphi_j g$, agissant sur $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, et on choisit des fonctions $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $j = 0, 1, ...$, telles que

$$supp\, g_j \subset \frac{1}{2}R_j, \quad \|g_j\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \leq 2^{-j}, \quad \|f \circ g_j\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} > jM_j.$$

Alors la fonction $g := \sum_{j\geq 0} g_j$ appartient à $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et on a $\varphi_j(f \circ g) = f \circ g_j$. Donc

$$jM_j \leq \|(f \circ g)\varphi_j\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M_j \|f \circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{pour tout } j,$$

ce qui est absurde. ■

Remarque 7 Avec la même démonstration on peut établir que l'opérateur S_f a la propriété énoncée dans le lemme 13.

Lemme 14 *Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Supposons que T_f envoie $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors quel que soit $a \in \mathbb{R}^m$, il existe un opérateur non linéaire $U_a : \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, et des nombres $\delta, M > 0$ tels que*

$$U_a g(x) = f(a + g(x)) - f(a), \forall x \in Q,$$

et

$$\|U_a g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M\,,$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, à support dans Q, satisfaisant

$$\|g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \leq \delta\,.$$

Preuve. Considérons l'opérateur non linéaire

$$V_a g(x) := \varphi(x)\left(f(a+g(x)) - f(a)\right) \quad ,\forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On a alors

$$V_a g(x) = \varphi(x)\left(f(\varphi(x/2)(a+g(x))) - f(\varphi(x/2)a)\right) \quad ,\forall x \in \mathbb{R}^n.$$

V_a envoie donc $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ et, en raisonnant comme dans la preuve du lemme 13, on voit qu'il existe un cube $Q' \subset Q$ et des nombres $\delta, M > 0$ tels que

$$\|g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \|V_a g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M\,,$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ telle que *supp* $g \subset Q'$.
Posons $Q' = rQ + b$, avec $r > 0$ et $b \in \mathbb{R}^n$, et

$$U_a g(x) := V_a\left(g(r^{-1}(. - b)\right)(rx+b) \quad ,\forall x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Alors

$$U_a g(x) = \varphi(rx+b)\left(f(a+g(x)) - f(a)\right) \quad ,\forall x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Par l'inclusion $Q' \subset Q$, nous avons $\varphi(rx+b) = 1$ sur Q, ce qui termine la preuve. ■

Lemme 15 *Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et $f_{a'} : x \mapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, x, a_{j+1}, ..., a_m)$, avec $a' := (a_1, ..., a_{j-1}, a_{j+1}, ..., a_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$. Supposons que T_f envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors l'opérateur $S_{f_{a'}}$, envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. Considérons l'opérateur linéaire $\Phi : E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \to E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, défini par

$$\Phi(u)(x) = (a_1\varphi(\frac{x}{2}), ..., a_{j-1}\varphi(\frac{x}{2}), u(x), a_{j+1}\varphi(\frac{x}{2}), ..., a_m\varphi(\frac{x}{2})).$$

Par définition de φ, on a $\varphi(\frac{x}{2}) = 1$ si $\varphi(x) \neq 0$. Il vient donc

$$\varphi(f_{a'} \circ u) = \varphi(f \circ \Phi(u)), \quad \forall u \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

Cela montre que l'opérateur $S_{f_{a'}}$ envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. ■

Lemme 16 *Soit $1 + \dfrac{1}{p} < s < \dfrac{n}{p}$, (ou $s = 1 + \dfrac{1}{p} < \dfrac{n}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel). Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que l'opérateur S_f, envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors f est une fonction affine.*

Preuve. Rappelons que S_f vérifie le lemme 13, voir la remarque 7.
Étape 1 : Le cas $1 + \dfrac{1}{p} < s < \dfrac{n}{p}$.
On pose $v(x) = x_1\varphi(x)$. Supposons $a > 0$, suffisamment grand, et $0 < \varepsilon \leq 1$. Nous avons

$$\|av(\frac{\cdot}{\varepsilon})\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq ca\varepsilon^{(n/p)-s}\|v\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

En choisissant

$$\varepsilon = \left(\frac{\delta}{ac\|v\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}} \right)^{\frac{1}{\frac{n}{p}-s}},$$

ce qui est possible si a est assez grand, et en définissant la fonction u par

$$u(x) := av(\frac{x}{\varepsilon}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

on obtient $\|u\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \delta$ et $supp\, u \subset 2Q$. On a donc $\|S_f(u)\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M$. Nous obtenons

$$S_f(u)(x) = f(\frac{a}{\varepsilon}x_1), \quad \text{sur}\, \varepsilon Q.$$

Fixons ℓ avec $\ell > s$. Pour tout $t \in]0,1]$ on en déduit

$$\Delta^\ell_{\varepsilon a^{-1}te_1} S_f(u)(x) = \Delta^\ell_t f(\frac{a}{\varepsilon}x_1), \quad \forall x \in \frac{\varepsilon}{2}Q,$$

pourvu que $a \geq 4\ell$. Par la proposition 3, nous obtenons

$$(\varepsilon a^{-1}t)^{-sp} \int_{\frac{\varepsilon}{2}Q} \left|\Delta^\ell_{\varepsilon a^{-1}te_1} S_f(u)(x)\right|^p dx \leq M^p, \quad \forall t \in]0,1],$$

ce qui donne

$$\int_{|x|\leq \frac{a}{4}} \left|\Delta^\ell_t f(x)\right|^p dx \leq M^p \varepsilon^{sp-n} a^{-sp+1}.$$

Compte tenu de la définition de ε, il vient

$$\int_{|x|\leq \frac{a}{4}} \left|\Delta^\ell_t f(x)\right|^p dx \leq c a^{-sp+1+p}, \qquad t \in]0,1].$$

En faisant tendre a vers $+\infty$ et en tenant compte de $s > 1 + \frac{1}{p}$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Delta^\ell_t f(x)\right|^p dx = 0, \quad \forall t \in]0,1],$$

ainsi f est une fonction polynomiale.
En évaluant l'opérateur S_f sur une fonction de type

$$u(x) = |x|^\tau \varphi(x), \quad \text{avec} \quad \tau < 0,$$

et en supposant que $f(x) = \sum_{j=0}^N c_j x^j$ avec $N > 1$ et $c_N \neq 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous obtenons

$$S_f(u)(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j |x|^{j\tau} \varphi(x)^{j+1} + c_N |x|^{N\tau} \varphi(x)^{N+1} = A(x) + B(x).$$

On a $A \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si $s < \frac{n}{p} + (N-1)\tau$, et d'autre part $B \notin B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ pour $s > \frac{n}{p} + N\tau$ (voir [37, Lemme. 2.2.3/1, p. 44]).

On choisit donc τ tel que

$$\frac{1}{N-1}(s-\frac{n}{p})<\tau<\frac{1}{N}(s-\frac{n}{p}).$$

On obtient une contradiction, car S_f envoie $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. On conclut que $f(x)=c_0+c_1x$.

Étape 2 : Le cas $s=1+\frac{1}{p}$ et $p>1$. Donnons-nous un grand entier ν dans le lemme 12, posons $a=\delta\left\|\omega_\nu\right\|^{-1}_{E^{1+\frac{1}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}$ et,

$$u(x):=2^\nu a\omega_\nu(\frac{x}{\varepsilon}),\quad \text{avec}\quad \varepsilon\in]0,1],$$

on choisit ε de sorte que

$$\varepsilon=(c^{-1}2^{-\nu})^{\frac{p}{n-p-1}}.$$

On a donc $\|u\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\leq\delta$ et *supp* $u\subset Q$. Définissons le pavé P par

$$|x_1|<2^{-\nu-1}\varepsilon,\quad |x_k|<\frac{\varepsilon}{2}\quad (k=2,...,n).$$

Soient $t\in]0,\frac{1}{2}]$ et $h=2^{-\nu}a^{-1}\varepsilon te_1$, ce qui implique pour tout $x\in P$,

$$\Delta^2_hS_f(u)(x)=\Delta^2_tf(2^\nu\frac{a}{\varepsilon}x_1),\quad \forall x\in P,$$

on a $0<s<2$, il vient alors par la proposition 2,

$$\|f\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}\sim\|f\|_p+\sum_{k=1}^{n}\|\partial_kf\|_{B^{s-1}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)},$$

et par la proposition 3 nous obtenons,

$$\int_P|\Delta_h\partial_1(S_fu)(x)|^p\,dx\leq M^p|h|,\tag{4.3.4}$$

il vient alors

$$(2^\nu a\varepsilon^{-1})^p\int_P\left|\Delta_tf'(2^\nu\frac{a}{\varepsilon}x_1)\right|^pdx\leq M^p2^{-\nu}ta^{-1}\varepsilon,$$

d'où on déduit

$$2^{\nu p}a^p\varepsilon^{n-1-p}\int_{|x|\leq\frac{a}{2}}|\Delta_tf'(x)|^pdx\leq M^p,$$

Compte tenu de la définition de ε, il vient

$$\int_{|x|\leq\frac{a}{2}}|\Delta_tf'(x)|^pdx\leq ca^{-p}.$$

Quand ν tend vers $+\infty$, il en est de même pour a; il vient $\Delta_tf'(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $t\in]0,1/2]$. Ainsi f' est une constante, ce qu'il fallait démontrer.

Étape 3 : Le cas $s = 2$ et $p = 1$. Examinons maintenant le cas de l'espace $B^2_{1,q}(\mathbb{R}^n)$ $(n > 2, q > 1)$. Le début de la démonstration est inchangé ; l'estimation (4.3.4) est remplacée par

$$\int_P \left|\Delta_h^2 \partial_1 (S_f u)(x)\right| dx \leq M|h|,$$

qui nous conduit à

$$\int_{|x| \leq \frac{a}{2}} \left|\Delta_t^2 f'(x)\right| dx \leq c a^{-1}.$$

Ainsi f est un polynôme de degré au plus 2 ; en raisonnant comme à la fin de l'étape 1, on conclut que $f(x) = c_0 + c_1 x$. ■

4.3.2 Preuve des théorèmes 12 et 13.

Soient b, b' dans $\mathbb{R}^m$, $N \geq 1$ et r, ν qui seront choisis en fonction de b et b'. Nous considérons l'ensemble.

$$A_N := \{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \, : \, |k_j| \leq N \, , \forall j = 1, \ldots, n\},$$

et nous définissons

$$\varkappa := \frac{1}{2\ell + 1},$$

où ℓ est un entier fixé tel que $\ell > s$, et la fonction

$$g(x) := \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{x}{r} - k\right)\right)(b' - b) + \phi_\nu(x) b \, . \tag{4.3.5}$$

Le lemme 10 donne l'inégalité

$$\left\| \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right) \right\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq c r^{(n/p) - s} N^{n/p} \, . \tag{4.3.6}$$

Preuve du théorème 12.
Supposons que T_f envoie $\mathcal{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ (c'est suffisant puisque l'espace $\mathcal{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ se plonge dans tous les $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$). Soit un nombre réel a qui reste fixé dans la suite de la preuve. Alors nous obtenons un opérateur U_a et des constantes δ, M selon le lemme 14. On prend $\nu = 1$ et

$$r := \frac{1}{6N}.$$

Puisque $\varkappa < 1/2$, les cubes $r(2\varkappa Q + k)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, sont deux à deux disjoints. Par définition de r, nous avons $r(Q + k) \subset Q/2$, pour tout $k \in A_N$. Alors

$$U_a g(x) = f(a + b') - f(a) \, , \text{si } x \in r(\varkappa Q + k) \text{ pour } k \in A_N \, , \tag{4.3.7}$$

$$U_a g(x) = f(a + b) - f(a) \, , \text{si } x \in (Q/2) \setminus \bigcup_{k \in A_N} r(2\varkappa Q + k) \, . \tag{4.3.8}$$

Grâce au choix de r, on a

$$c^{-1}r^{s-\frac{n}{p}}N^{-\frac{n}{p}}\left\|\sum_{k\in A_N}\varphi\left(\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\cdot}{r}-k\right)\right)\right\|_\infty = c^{-1}6^{\frac{n}{p}-s}N^{-s}\|\varphi\|_\infty \le c'.$$

On obtient

$$\left\|\sum_{k\in A_N}\varphi\left(\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\cdot}{r}-k\right)\right)\right\|_{\mathcal{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \le c_1 r^{(n/p)-s}N^{n/p}.$$

En utilisant la relation entre r et N, nous obtenons

$$\|g\|_{\mathcal{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \le c_2\left(N^s|b'-b|+|b|\right). \tag{4.3.9}$$

Maintenant on suppose

$$\max\left(|b|,|b-b'|\right) \le \frac{\delta}{2c_2} \tag{4.3.10}$$

et on définit N par la propriété :

$$N^s \le \frac{\delta}{2c_2|b-b'|} < (N+1)^s.$$

Remarquons que la définition de N implique

$$N^s \ge \frac{\delta}{2^{s+1}c_2|b-b'|}. \tag{4.3.11}$$

Par la condition (4.3.10) et par définition de N, nous avons $\|g\|_{\mathcal{B}^s_{p,1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \le \delta$. Puisque le support de g est inclus dans Q, on en déduit

$$\|U_a g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \le M. \tag{4.3.12}$$

Pour tout $x\in r(\varkappa Q^+ + k)$, nous avons

$$x + jr\varkappa e_1 \in r(Q+k)\,, \forall j = 0,\dots,\ell\,,$$

$$x + jr\varkappa e_1 \notin r(2\varkappa Q+k)\,, \forall j = 1,\dots,\ell\,.$$

(4.3.7) et (4.3.8) donne aussitôt

$$\left|\Delta^\ell_{r\varkappa e_1}(U_a g)(x)\right| = |f(a+b')-f(a+b)|\,.$$

Par la proposition 3, nous obtenons

$$\|U_a g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \ge (r\varkappa)^{-s}\left(\sum_{k\in A_N}\int_{r(\varkappa Q^+ + k)}\left|\Delta^\ell_{r\varkappa e_1}(U_a g)(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\ge c_3|f(a+b')-f(a+b)|r^{-s}N^{n/p}r^{n/p} = c_4 N^s|f(a+b')-f(a+b)|\,.$$

En prenant en compte les inégalités (4.3.11) et (4.3.12), nous voyons que la condition (4.3.10) implique

$$|f(a+b)-f(a+b')| \le \frac{2^{s+1}Mc_2}{c_4\delta}|b-b'|\,,$$

qui signifie que f est lipschitzienne dans un voisinage de a. ■

Preuve du théorème 13.

Soit f une fonction satisfaisant l'hypothèse du théoreme 13, on se propose de mettre en évidence des constantes $\sigma > 0$ et $K > 0$ telles que $|b' - b| \leq \sigma$ entraîne

$$|f(b') - f(b)| \leq K|b' - b|,$$

quels que soient b et b' dans $\mathbb{R}^m$.

Nous définissons la fonction g suivant (4.3.5). Les entiers positifs ν et N, ainsi que le nombre $r \in]0, 1]$, seront précisés dans un instant. Le lemme 11 nous autorise à choisir ν tel que $|b| \, \|\phi_\nu\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \delta/2$, de sorte que N et r devront satisfaire les relations :

$$\delta(3|b' - b|)^{-1} < c_1 r^{(n/p)-s} N^{n/p} \leq \delta(2|b' - b|)^{-1}\,, \tag{4.3.13}$$

$$rN < 2^{-\nu-2}. \tag{4.3.14}$$

L'estimation (4.3.6) et la relation (4.3.13) entraîneront $\|g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \leq \delta$. L'inégalité (4.3.14) nous garantit l'inclusion

$$r(Q + k) \subset 2^{-\nu} Q \text{ pour } k \in A_N \tag{4.3.15}$$

et par conséquent

$$g(x) = b'\,, \text{si } x \in r(\varkappa Q + k) \text{ pour } k \in A_N\,, \tag{4.3.16}$$

$$g(x) = b\,, \text{si } x \in 2^{-\nu} Q \setminus \bigcup_{k \in A_N} r(2\varkappa Q + k)\,. \tag{4.3.17}$$

Pour $s < \dfrac{n}{p}$, il suffit de poser

$$r = (\delta(2c_1|b' - b|)^{-1} N^{-n/p})^{\frac{1}{\frac{n}{p}-s}},$$

alors $rN = c|b' - b|^{\frac{1}{s-\frac{n}{p}}} N^{\frac{s}{s-\frac{n}{p}}}$ est de l'ordre de grandeur de $N^{\frac{s}{s-\frac{n}{p}}}$; l'hypothèse $0 < s < \dfrac{n}{p}$, un choix convenable $N = N(\delta, |b' - b|)$ permet d'avoir (4.3.14) . Supposons maintenant $s = \dfrac{n}{p}$.

Si $|b' - b| \leq \dfrac{\delta}{3}$, il est possible de trouver un entier $N \geq 1$ tel qu'on ait (4.3.13), on choisit alors r assez petit pour avoir (4.3.14). Il vient alors

$$\|f \circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

Pour tout $x \in r(\varkappa Q^+ + k)$, nous avons

$$x + jr\varkappa e_1 \in r(Q + k) \setminus \bigcup_{k' \in A_N} r(2\varkappa Q + k')\,, \quad \forall j = 1, \ldots, l\,.$$

Alors (4.3.15), (4.3.16) et (4.3.17) nous donnent

$$\left|\Delta^\ell_{r\varkappa e_1}(f \circ g)(x)\right| = |f(b') - f(b)|\,.$$

Par la proposition 3, nous obtenons

$$\|f\circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \geq (r\varkappa)^{-s}\left(\sum_{k\in A_N}\int_{r(\varkappa Q^+ + k)}\left|\Delta^{\ell}_{r\varkappa e_1}(f\circ g)(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$$
$$= |f(b')-f(b)|(2N+1)^{n/p}(r\varkappa)^{-s}|r\varkappa Q^+|^{1/p}.$$

L'encadrement (4.3.13) implique

$$|f(b')-f(b)| \leq c_1 M r^{s-n/p}N^{-n/p} \leq c_2 M\delta^{-1}|b'-b|,$$

qui signifie que f est globalement Lipschitzienne. ■

Preuve du théorème 14.
Supposons que T_f envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors par le lemme 15, $S_{f_{a'}}$ envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, et d'après le lemme 16 la fonction $x_j \mapsto f_{a'}(x_j)$ est affine pour tout $1\leq j\leq m$ et $a'\in\mathbb{R}^{m-1}$, donc

$$f_{a'}(x_j) = A_j(a') + B_j(a')x_j, \qquad \forall j\in\{1,...,m\},$$

où A_j et B_j sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{m-1}$. De là on déduit facilement qu'il existe des constantes c_α telles que

$$f(x) = \sum_{\alpha\in\{0,1\}^m} c_\alpha x^\alpha,$$

et on veut montrer que les seuls c_α qui sont non nuls sont ceux pour lesquels $\alpha_j = 0$ sauf pour une valeur de j. Puisque par hypothèse T_f envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ dans $L_p(\mathbb{R}^n)$, avec $1\leq p<\infty$, on a $c_0 = 0$. Maintenant supposons qu'il existe deux indices $j,k\in\{1,...,m\}$ $(j\neq k)$ tels que $c_\alpha\neq 0$ pour un α tel que $\alpha_j=\alpha_k=1$. En permutant les cordonnées, on peut faire en sorte que $j=1$ et $k=2$, donc on obtient

$$c_\alpha^{-1}f(x_1,...,x_m) = x_1x_2u(x_3,...,x_m) + x_1v(x_3,...,x_m) +$$
$$x_2w(x_3,...,x_m) + z(x_3,...,x_m)$$

où u,v,w et z sont des polynômes sur $\mathbb{R}^{m-2}$ tels que $u\neq 0$ et $z(0)=0$. On choisit $(a_3,...,a_m)\in\mathbb{R}^{m-2}$ tel que $u(a_3,...,a_m)\neq 0$.
On considère une fonction $\theta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ à support compact, telle que

$$\theta\in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \theta^2\notin B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n),$$

(voir : fin de l'étape 1 pour la construction de θ). On considère aussi $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\psi(x)=1$ sur $supp\,\theta$, on définit alors $g\in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ par

$$g(x) = (\theta(x),\theta(x),a_3\psi(x),...,a_m\psi(x)).$$

Alors

$$c_\alpha^{-1}(f\circ g)(x) = \theta^2(x)u(a_3,...,a_m) + \theta(x)v(a_3,...,a_m) +$$
$$\theta(x)w(a_3,...,a_m) + z(a_3\psi(x),...,a_m\psi(x)).$$

Finalement, on obtient

$$\theta^2(x) = \frac{1}{c_\alpha u(a_3, ..., a_m)}(f \circ g)(x) + b\theta(x) + \psi_1(x),$$

où $\psi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $b \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne $\theta^2 \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$; d'où une contradiction. ■

Preuve du théorème 15.
Par définition on a

$$f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{loc} \Longleftrightarrow uf \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Soit v une fonction non nulle dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-m})$ et à support dans une boule $\mathbb{B}_{n-m}$. Supposons que le support de u est inclus dans la boule $\mathbb{B}_m$.
Choisissons $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de façon que $g(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}_m \times \mathbb{B}_{n-m}$. Nous obtenons

$$fu \otimes v = (f \circ g)(u \otimes v).$$

On a par hypothèse $f \circ g \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Comme $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-module, on a $fu \otimes v \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Par la proposition 22, on conclut que $fu \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$. ■

Chapitre 5

Le calcul symbolique dans les espaces de Besov à valeurs vectorielles : le cas critique

On cherche à caractériser les fonctions qui opèrent, par composition à gauche, sur l'espace $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$. On montrera que la condition que ∇f appartienne à $E^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ localement uniformément est nécessaire, quand l'ordre de régularité vérifie $s = \dfrac{n}{p} > 1$.

Théorème 16 *Soient $s = \dfrac{n}{p} > 1$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel, $1 \leq k \leq n$, k et n entiers, et $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Si T_f envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, alors $\partial_j f$ appartient à $E^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k)$ localement uniformément, pour tout $j = 1, ..., k$.*

Avant d'aborder la preuve du théorème, nous commencerons par préciser ce qu'on entend par l'appartenance locale uniforme à un espace de distributions.

5.1 Localisation d'un espace de distribution

Un espace de Banach de distributions ($E.B.D.$) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ muni d'une norme complète $\| - \|_E$ telle que l'injection canonique $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ soit continue. On dit que l'espace E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module si $\varphi f \in E$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et tout $f \in E$.

Définition 12 *Si E est un espace de distributions dans $\mathbb{R}^n$, on appelle E_{loc} l'ensemble des distributions $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telles que $\varphi f \in E$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Du théorème du graphe fermé, on déduit l'énoncé suivant, voir [11, chap. 3].

Proposition 23 *Soit E un $E.B.D.$. Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module, alors l'opérateur linéaire $f \mapsto \varphi f$ est borné sur E, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Sous les hypothèses de la proposition 23, on posera

$$\|\varphi\|_{M(E)} := \sup\{\|\varphi f\|_E \, : \, f \in E \, , \, \|f\|_E = 1\} \, .$$

Proposition 24 *Soit E un E.B.D.. Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module et si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $f \in E_{loc}$.
(ii) Il existe une fonction positive non nulle $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $(\tau_a\varphi_0)\,f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$.
(iii) Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, il existe une boule ouverte B contenant a et $g \in E$ tels que $g|_B = f|_B$.

Preuve.
Supposons satisfaite la condition (ii). Sans perte de généralité, on peut supposer que φ_0 ne s'annule pas sur une boule ouverte B, de centre 0. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $supp\,\psi \subset B$ et $\psi(x) = 1$ pour $x \in B/2$. Alors $\psi = \theta\varphi_0$, pour une certaine fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Par la propriété (ii) et le fait que E $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module, on a $(\tau_a\psi)f \in E$. Comme les distributions $(\tau_a\psi)f$ et f ont la même restriction à la boule $(B/2) + a$, on obtient la propriété (iii).
Supposons que f a la propriété (iii) et considérons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Par la compacité du support de φ, il existe des boules ouvertes $B(x_j, r_j)$ et des distributions $g_j \in E$, pour $j = 1, ..., N$, telles que g_j et f ont la même restriction à $B(x_j, r_j)$, et telles que

$$supp\,\varphi \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j, r_j)\,.$$

Également par compacité, il existe $\varepsilon \in]0, \min(r_1, \ldots, r_N)[$ tel que

$$supp\,\varphi \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j, r_j - \varepsilon)\,.$$

Il existe classiquement des fonctions $\psi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telles que $0 \le \psi_j \le 1$, $\psi_j(x) = 1$ sur $B(x_j, r_j - \varepsilon)$, et $supp\,\psi_j \subset B(x_j, r_j - \varepsilon)$. Puisque la fonction $\sum_{j=1}^{N} \psi_j$ ne s'annule pas sur le support de φ, il existe $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\varphi = \theta \sum_{j=1}^{N} \psi_j\,.$$

Alors

$$f\varphi = \sum_{j=1}^{N} \theta\psi_j g_j \in E\,.$$

■

Un $E.B.D.$ est isométriquement invariant par translation si $\tau_a f \in E$ et $\|\tau_a f\|_E = \|f\|_E$ pour tout $f \in E$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$. De plus si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module, nous avons la propriété suivante :

$$\|\tau_a\varphi\|_{M(E)} = \|\varphi\|_{M(E)} \quad , \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \forall a \in \mathbb{R}^n \quad . \tag{5.1.1}$$

Proposition 25 *Soit E un E.B.D.. Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module isométriquement invariant par translation, on dit qu'une distribution f appartient localement uniformément à E si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*
(i) Il existe une fonction positive non nulle $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $(\tau_a\varphi_0)\, f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, et

$$\|f\|_{E_{lu}} := \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_a\varphi_0)\, f\|_E < +\infty\,.$$

(ii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a $(\tau_a\varphi)\, f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, et

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_a\varphi)\, f\|_E < +\infty\,.$$

L'ensemble des distributions ayant ces propriétés est noté E_{lu} ; c'est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module isométriquement invariant par translation pour la norme $\| - \|_{E_{lu}}$.

Preuve. Il est immédiat que $\| - \|_{E_{lu}}$ est une norme invariante par translation, et que E_{lu} est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module. Passons aux propriétés moins évidentes.
Étape 1. Supposons satisfaite la condition (i) et considérons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Soit B une boule ouverte où la fonction φ_0 ne s'annule pas. Par compacité, il existe $x_1, ..., x_N$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\mathit{supp}\,\varphi \subset \bigcup_{j=1}^{N}(B + x_j)\,.$$

et donc une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\varphi = \psi\left(\sum_{j=1}^{N} \tau_{x_j}\varphi_0\right)\,. \tag{5.1.2}$$

Par la propriété (5.1.1), il vient alors

$$\|(\tau_a\varphi)\, f\|_E \leq \sum_{j=1}^{N} \|(\tau_a\psi)\,(\tau_{a+x_j}\varphi_0)\, f\|_E \leq N\|\psi\|_{M(E)} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_x\varphi_0)\, f\|_E\,,$$

pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire la propriété (ii).
Étape 2. Considérons de nouveau une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, ainsi qu'une fonction ψ telle qu'on ait (5.1.2). La continuité du plongement $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ implique l'existence d'une constante $c = c(\psi)$ telle que $|\langle g, \psi\rangle| \leq c\|g\|_E$ pour tout $g \in E$. On en déduit que

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq \sum_{j=1}^{N} \left|\langle(\tau_{x_j}\varphi_0)f, \psi\rangle\right| \leq Nc\|f\|_{E_{lu}}\,,$$

ce qui établit la continuité du plongement $E_{lu} \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
Étape 3. Il reste à établir la complétude de E_{lu}. Soit (f_k) une suite de Cauchy dans E_{lu}. Comme on vient de le voir, (f_k) admet une limite f au sens des distributions. Par ailleurs la suite $((\tau_a\varphi_0)\, f_k)$ est de Cauchy dans E, elle a donc une limite $u_a \in E$, pour

tout $a \in \mathbb{R}$. Puisque u_a est aussi la limite de $((\tau_a\varphi_0)\, f_k)$, on a $(\tau_a\varphi_0)\, f = u_a$. Alors la définition de l'espace E_{lu} implique que $f \in E_{lu}$ et que

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_a\varphi_0)\,(f - f_k)\|_E = 0\,.$$

■

Remarque 8 De la preuve ci-dessus, il résulte qu'à équivalence près, la norme de E_{lu} ne dépend pas du choix de φ_0.

On va définir maintenant *l'espace de Sobolev* $W^m(E)$ *d'ordre* m de base E, où E est un *E.B.D.*, à savoir

$$W^m(E) := \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\ :\ f^{(\alpha)} \in E \quad, \text{pour tout } |\alpha| \leq m\}\,.$$

$W^m(E)$ est un E.B.D. pour la norme

$$\|f\|_{W^m(E)} := \sum_{|\alpha|\leq m} \|f^{(\alpha)}\|_E\,.$$

Proposition 26 *Soit E un E.B.D.. Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module, isométriquement invariant par translation, il en est de même pour $W^m(E)$ et on a*

$$\left(W^m(E)\right)_{lu} = W^m\left(E_{lu}\right)\ ,$$

avec des normes équivalentes.

Preuve. Elle résulte aisément de la formule de Leibniz et de la proposition 25.

Nous terminerons cette section en rappelant la description de $L_{p,lu}$.

Proposition 27 *Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors une fonction mesurable f sur $\mathbb{R}^n$ appartient à $L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ si et seulement si*

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{B+a} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < +\infty\,, \tag{5.1.3}$$

où B une boule ouverte donnée (ou un cube ouvert) dans $\mathbb{R}^n$. De plus l'expression ci-dessus est équivalente à la norme $\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}}$.

Preuve. *Étape 1.* Supposons que f a la propriété (5.1.3). En choisissant la fonction φ_0 selon la proposition 25, à support dans la boule B, on obtient

$$\|(\tau_a\varphi_0)\, f\|_p \leq \|\varphi_0\|_\infty \left(\int_{B+a} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}\,.$$

Cela montre que $f \in L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$.
Étape 2. Supposons que $f \in L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$. En choisissant la fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ de telle sorte que $\varphi(x) = 1$ sur B. On obtient

$$\left(\int_{B+a} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_{B+a} |f(x)\varphi(x-a)|^p dx\right)^{1/p} \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_z\varphi)\, f\|_p \,.$$

■

Remarque 9 On vérifie aisément que $L_{\infty,lu} = L_\infty$.

5.1.1 Localisation des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel

On dispose des formules suivantes, où $k \in \mathbb{N}^*$, $h \in \mathbb{R}^n$ et où f et g sont des fonctions quelconques

$$\Delta_h(fg) = (\Delta_h f)(\tau_{-h} g) + f(\Delta_h g)\,, \tag{5.1.4}$$

$$\Delta_h^2(fg) = (\Delta_h^2 f)(\tau_{-2h} g) + (\Delta_h^2 g)(\tau_{-h} f) + (\Delta_h f)(\Delta_{2h} g)\,, \tag{5.1.5}$$

$$\Delta_h = 2^{-k}\Delta_{2^k h} - \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1}\Delta_{2^l h}^2 \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{5.1.6}$$

Les deux premières sont immédiates ; la troisième s'obtient facilement par récurrence sur k.
Pour $j = 1, ..., n$, $1 \leq p \leq \infty$, et pour tout sous-ensemble borélien A de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\omega_{p,j,A}(f,t) := \sup_{|u|\leq t} \left(\int_A \left|\Delta_{ue_j} f(x)\right|^p dx\right)^{1/p},$$

$$\eta_{p,j,A}(f,t) := \sup_{|u|\leq t} \left(\int_A \left|\Delta_{ue_j}^2 f(x)\right|^p dx\right)^{1/p}.$$

Dans le cas $A = \mathbb{R}^n$, on pose $\omega_{p,j} = \omega_{p,j,\mathbb{R}^n}$, de même pour η.

Lemme 17 *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, il existe $c > 0$ tel que*

$$\omega_{p,j,Q+a}(f,t) \leq ct \left\{ \left(\int_{3Q+a} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + |\log t| \sup_{0<v\leq 1/2} \left(v^{-1}\eta_{p,j,Q+a}(f,v)\right) \right\},$$

pour tout $0 < t \leq 1/2$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$.

Preuve.
Le lemme est une variante de l'inégalité classique de Marchaud. On définit l'entier $k \geq 1$ par l'encadrement $2^{-k-1} < t \leq 2^{-k}$ et on pose

$$M_a := \sup_{0<v\leq 1/2} \left(v^{-1}\eta_{p,j,Q+a}(f,v)\right).$$

De la formule (5.1.6), on déduit, pour $|u| \leq t$,

$$\left(\int_{Q+a} \left|\Delta_{ue_j} f(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\leq 2^{-k}\left(\int_{Q+a} \left|\Delta_{2^k ue_j} f(x)\right|^p dx\right)^{1/p} + \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1}\left(\int_{Q+a} \left|\Delta^2_{2^l ue_j} f(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\leq 2^{-k+1}\left(\int_{3Q+a} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + ktM_a\,,$$

cela conclut la preuve du lemme 17.

Lemme 18 *Soit* $0 < s \leq 1$. *Si* $\partial_j f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$, *pour* $j = 1, \ldots, n$, *et* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$, *alors* $f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

Preuve.
Étape 1. Le cas $0 < s < 1$. Par le plongement

$$E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu} \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}, \tag{5.1.7}$$

les hypothèses sur f impliquent $f \in W^1\left(L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}\right)$. Compte tenu de la proposition 26, ceci nous donne $f \in \left(W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\right)_{lu}$. Puisqu'on a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ (dans le cas $s < 1$), on conclut que $f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$.
Étape 2. Le cas $s = 1$. Par hypothèse sur f, on a $\partial_j f \in E^{1/2}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ pour tout $j = 1, ..., n$, et $f \in L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$. Par l'étape 1, on obtient $f \in E^{1/2}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ et on conclut que $f \in E^{3/2}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$, qui est lui-même un sous-espace de $E^1_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

Proposition 28 *Si* $s > 0$ *et* $p, q \in [1, +\infty]$, *alors* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ *est l'ensemble des fonctions* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ *vérifiant de plus les conditions suivantes, respectivement :*
(i) dans le cas $0 < s < 1$,

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 \left(t^{-s}\omega_{p,j,Q+a}(f,t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < +\infty \quad , \text{ pour } j = 1, \ldots, n\,;$$

(ii) dans le cas $s = 1$,

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^1 \left(t^{-1}\eta_{p,j,Q+a}(f,t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < +\infty \quad , \text{ pour } j = 1, \ldots, n\,;$$

(iii) dans le cas $m < s \leq m+1$, *avec* $m = 1, 2, \ldots$,

$$f^{(\alpha)} \in B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu} \quad , \text{ pour } |\alpha| = m\,.$$

Preuve. On fixe les fonctions φ_0 et φ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telles que $\varphi_0(x) = 0$ hors de $Q/4$ et $\varphi_1(x) = 1$ sur $4Q$,
Étape 1. Le cas $0 < s < 1$.

Supposons satisfaite la condition (i) avec $f \in L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$. Par la formule (5.1.4) et pour $|u| \le t \le 1/2$, nous avons

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \Delta_{ue_j}((\tau_a \varphi_0) f)(x) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \Delta_{ue_j} f(x) \varphi_0(x + ue_j - a) \right|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \left| \Delta_{ue_j}(\tau_a \varphi_0)(x) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\le c \left(\int_{Q+a} \left| \Delta_{ue_j} f(x) \right|^p dx \right)^{1/p} + ct \left(\int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\le c \left(\omega_{p,j,Q+a}(f,t) + t \, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}} \right) .$$

Par la condition $s < 1$, on voit que

$$\left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s} \omega_{p,j}((\tau_a \varphi_0) f, t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

$$\le c \left(\left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s} \omega_{p,j,Q+a}(f,t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}} \right),$$

ce qui nous donne

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < +\infty .$$

Dans l'autre sens, on suppose que $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$. On voit aussitôt que

$$\Delta_{ue_j}((\tau_a \varphi_1) f)(x) = \Delta_{ue_j} f(x) ,$$

pour tout $x \in Q + a$ et $|u| \le 1$. On obtient ainsi l'inégalité

$$\omega_{p,j,Q+a}(f,t) \le \omega_{p,j}((\tau_a \varphi_1) f, t) ,$$

pour tout $0 < t \le 1$. La propriété (i) en découle aussitôt.
Étape 2. Le cas $s = 1$.
On suppose satisfaite la condition (ii) avec $f \in L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$. Par la formule (5.1.5), il vient, pour $|u| \le t \le 1/4$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \Delta^2_{ue_j}((\tau_a \varphi_0) f)(x) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \Delta^2_{ue_j} f(x) \varphi_0(x + 2ue_j - a) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

$$+ \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x + ue_j)|^p \left| \Delta^2_{ue_j}(\tau_a \varphi_0)(x) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

$$+ \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \Delta_{ue_j} f(x) (\varphi_0(x + 2ue_j - a) - \varphi_0(x - a)) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\leq c\left(\int_{Q+a}\left|\Delta_{ue_j}^2 f(x)\right|^p dx\right)^{1/p}+ct^2\left(\int_{Q+a}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$
$$+ct\left(\int_{Q+a}\left|\Delta_{ue_j}f(x)\right|^p dx\right)^{1/p}$$
$$\leq\ c(\eta_{p,j,Q+a}(f,t)+\ t^2\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}}+\ t\,\omega_{p,j,Q+a}(f,t))\,,$$

et donc

$$\left(\int_0^{1/4}\left(t^{-1}\eta_{p,j}((\tau_a\varphi_0)f,t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$
$$\leq c\left(\left(\int_0^{1/4}\left(t^{-1}\eta_{p,j,Q+a}(f,t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}+\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}}+\left(\int_0^{1/4}\left(\omega_{p,j,Q+a}(f,t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\right).$$

Compte tenu du lemme 17, on obtient

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n}\|(\tau_a\varphi_0)f\|_{B^1_{p,q}(\mathbb{R}^n)}<+\infty\,.$$

Dans l'autre sens, on procède exactement comme dans la preuve de l'étape 1, en remplaçant ω par η.
Étape 3. Le cas $m<s\leq m+1$.
On sait que

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)=W^m\left(B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right). \tag{5.1.8}$$

Par la proposition 26, et le lemme 18, on voit que $f\in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ si et seulement si $f^{(\alpha)}\in B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ pour $|\alpha|=m$ et $f\in L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

■

Lemme 19 *Soient $p,q\in[1,+\infty]$, il existe $c>0$ tel que*

$$\left\|\left(\int_0^{1/16}\left(t^{-n+1}\int_{|h|\leq t}|f(.+h)|\,dh\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\right\|_{L_p(Q+a)}$$
$$\leq\left\|\left(\int_0^{1/16}\left(t^{-n+1}\int_{|h|\leq t}|\Delta_h f(.)|\,dh\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\right\|_{L_p(Q+a)}+\ c\,\|f\|_{L_p(Q+a)}\ ,$$

pour tout $a\in\mathbb{R}^n$.

Preuve.
Nous pouvons écrire

$$\int_{|h|\leq t}|f(x+h)|\,dh\leq\int_{|h|\leq t}|\Delta_h f(x)|\,dh+ct^n\,|f(x)|\,,$$

qui signifie le résultat.

■

Proposition 29 *Si $s > 0$ et $p, q \in [1, +\infty]$, alors $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ est l'ensemble des fonctions $f \in L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$ vérifiant de plus les conditions suivantes, respectivement :*
(i) dans le cas $0 < s < 1$,

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-n} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h f(.)|\, dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(Q+a)} < +\infty \,;$$

(ii) dans le cas $s = 1$,

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-n-1} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h^2 f(.)|\, dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(Q+a)} < +\infty \,;$$

(iii) dans le cas $m < s \leq m+1$, avec $m = 1, 2, \ldots$,

$$f^{(\alpha)} \in F^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu} \quad , \text{ pour } |\alpha| = m \,.$$

Preuve. On fixe les fonctions φ_0 et φ_1 comme dans la preuve de la proposition 28.
Étape 1. Le cas $0 < s < 1$.
Supposons satisfaite la condition (i) avec $f \in L^p(\mathbb{R}^n)_{lu}$. Par la formule (5.1.4), nous avons

$$\int_{|h|\leq t} |\Delta_h((\tau_a\varphi_0)f)(x)|\, dh \leq$$

$$\int_{|h|\leq t} |\Delta_h f(x)|\, |\varphi_0(x+h-a)|\, dh + |f(x)| \int_{|h|\leq t} |\Delta_h(\tau_a\varphi_0)(x)|\, dh.$$

On obtient

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s-n} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h((\tau_a\varphi_0)f)(x)|\, dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}$$

$$\leq c \left(\int_{Q+a} \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s-n} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h f(x)|\, dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} +$$

$$c \left(\int_{Q+a} |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p},$$

ce qui nous donne

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n} \|(\tau_a\varphi_0)f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} < +\infty \,.$$

Dans l'autre sens, on suppose que $f \in F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$. On voit aussitôt que

$$\Delta_h((\tau_a\varphi_1)f)(x) = \Delta_h f(x) \,,$$

pour tout $x \in Q + a$ et $|h| \leq 1$. On obtient ainsi l'inégalité

$$\left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-n} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h(f)(.)|\, dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(Q+a)}$$

$$\leq \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-n} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h((\tau_a\varphi_1)f)(.)|\, dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_p .$$

pour tout $a \in \mathbb{R}^n$. La propriété (i) en découle aussitôt. *Étape 2.* Le cas $s = 1$. On suppose satisfaite la condition (ii) avec $f \in L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$. Par la formule (5.1.5), il vient

$$\int_{|h|\leq t} \left|\Delta_h^2((\tau_a\varphi_0)f)(x)\right| dh \leq$$

$$\int_{|h|\leq t} \left|\Delta_h^2 f(x)\right| |\varphi_0(x+2h-a)|\, dh + \int_{|h|\leq t} |f(x+h)| \left|\Delta_h^2(\tau_a\varphi_0)(x)\right| dh +$$

$$\int_{|h|\leq t} |\Delta_h f(x)|\, |\Delta_{2h}\tau_a\varphi_0(x)|\, dh.$$

Posons

$$U(x) = \left(\int_0^1 \left(t^{-n-1} \int_{|h|\leq t} \left|\Delta_h^2(f(x)\right| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} . \tag{5.1.9}$$

En tenant compte du support de $\tau_a\varphi_0$ et $|h| \leq 1/16$ dans l'expression ci-dessous, nous avons

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{1/16} \left(t^{-n-1} \int_{|h|\leq t} \left|\Delta_h^2((\tau_a\varphi_0)f)(x)\right| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int_{\frac{Q}{2}+a} \left(\int_0^{1/16} \left(t^{-n-1} \int_{|h|\leq t} \left|\Delta_h^2((\tau_a\varphi_0)f)(x)\right| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}$$

$$\leq c \left(\int_{\frac{Q}{2}+a} \left(\int_0^{1/16} \left(t^{-n-1} \int_{|h|\leq t} \left|\Delta_h^2 f(x)\right| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} +$$

$$c \left(\int_{\frac{Q}{2}+a} \left(\int_0^{1/16} \left(t^{-n+1} \int_{|h|\leq t} |f(x+h)|\, dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} +$$

$$c \left(\int_{\frac{Q}{2}+a} \left(\int_0^{1/16} \left(t^{-n} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h f(x)|\, dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} ,$$

$$= A + B + C.$$

On voit auussitôt que

$$A + B \leq c_1 \sup_{a\in\mathbb{R}^n} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-n-1} \int_{|h|\leq t} \left|\Delta_h^2 f(.)\right| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(Q+a)} + c_2 \|f\|_{L_p(Q+a)}$$

Estimation de C : Posons

$$C_1(x) = \left(\int_0^{1/16} \left(t^{-n} \int_{|h|\le t} |\Delta_h f(x)|\, dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Pour ce faire, on écrit

$$]0, 1/16] = \cup_{j\ge 4}]2^{-j-1}, 2^{-j}],$$

et en utilisant des majorations évidentes, on obtient

$$C_1(x) \le c C_2(x),$$

avec

$$C_2(x) = c \left(\sum_{j\ge 4} \left(2^{jn} \int_{|h|\le 2^{-j}} |\Delta_h f(x)|\, dh \right)^q \right)^{1/q}.$$

Par le changement de variable $h' = 2^{j-3}h$, on obtient

$$C_2(x) = c \left(\sum_{j\ge 4} \left(\int_{|h|\le 1/8} |\Delta_{2^{-j+3}h} f(x)|\, dh \right)^q \right)^{1/q}.$$

Par (5.1.6) on a

$$\Delta_{2^{-j+3}h} = 2^{-j+3}\Delta_h - \sum_{\ell=0}^{j-4} 2^{-l-1} \Delta^2_{2^{\ell-j+3}h},$$

ce qui donne

$$C_2(x) \le c \left(C_3(x) + C_4(x) \right),$$

avec

$$C_3(x) = c \left(\sum_{j\ge 4} \left(2^{-j} \int_{|h|\le 1/8} |\Delta_h f(x)|\, dh \right)^q \right)^{1/q},$$

et

$$C_4(x) = c \left(\sum_{j\ge 4} \left(\int_{|h|\le 1/8} \sum_{\ell=0}^{j-4} 2^{-\ell-1} \left| \Delta^2_{2^{\ell-j+3}h} f(x) \right| dh \right)^q \right)^{1/q}.$$

Estimation de C_3 : En utilisant le plongement $\ell^q \hookrightarrow \ell^1$, pour $q \ge 1$, il vient

$$C_3(x) \le c \sum_{j\ge 4} 2^{-j} \int_{|h|\le 1/8} |\Delta_h f(x)|\, dh = c \int_{|h|\le 1/8} |\Delta_h f(x)|\, dh.$$

Par Minkowski, on obtient

$$\left(\int_{\frac{Q}{2}+a} C_3(x)^p dx \right)^{1/p} \le \int_{|h|\le 1/8} \left\{ \int_{\frac{Q}{2}+a} |\Delta_h f(x)|^p\, dx \right\}^{1/p} dh$$

$$\le \int_{|h|\le 1/8} \left\{ \int_{\frac{Q}{2}+a} |f(x+h)|^p\, dx \right\}^{1/p} dh + \left(\int_{\frac{Q}{2}+a} |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p}$$

$$\le \int_{|h|\le 1/8}\left\{\int_{Q+a}|f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} dh + \left(\int_{\frac{Q}{2}+a}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$
$$\le c\left(\int_{Q+a}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Estimation de C_4 : On a de même

$$C_4(x) \le \sum_{j\ge 4}\int_{|h|\le 1/8}\sum_{\ell=0}^{j-4} 2^{-\ell-1}\left|\Delta^2_{2^{\ell-j+3}h}f(x)\right| dh.$$

On vérifie facilement que

$$\int_{|h|\le 1/8}\left|\Delta^2_{2^{\ell-j+3}h}f(x)\right| dh = c2^{(j-\ell)n}\int_{|h|\le 2^{\ell-j}}\left|\Delta^2_h f(x)\right| dh \tag{5.1.10}$$

Dans l'expression (5.1.9), on peut remplacer la norme $L_q([0,1],\frac{dt}{t})$ par une norme $L_\infty([0,1])$ en minorant (voir : [11, II.20, p.44]) ; ce qui donne.

$$\int_{|h|\le t}\left|\Delta^2_h f(x)\right| dh \le ct^{n+1}U(x),$$

de sorte que l'expression (5.1.10) est estimée par

$$2^{(\ell-j)n}U(x).$$

On obtient donc

$$C_4(x) \le cU(x)\sum_{j\ge 4}\sum_{\ell=0}^{j-4} 2^{-\ell-1}2^{\ell-j} = c_1U(x).$$

Par conséquence

$$\left(\int_{\frac{Q}{2}+a} C_4(x)^p dx\right)^{1/p} \le c\left(\int_{Q+a} U(x)^p dx\right)^{1/p}.$$

En tenant compte des estimations obtenues pour C_3 et C_4, on peut conclure que l'expression C est estimée par

$$\left(\int_{Q+a} U(x)^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_{Q+a}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Dans l'autre sens, on suppose que $f \in F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$. On voit aussitôt que

$$\Delta^\ell_h((\tau_a\varphi_1)f)(x) = \Delta^\ell_h f(x)\,,$$

pour tout $x \in Q+a$ et $|h| \le 1$, de sorte que f vérifie l'estimation souhaitée
Étape 3. Le cas $m < s \le m+1$.
On sait classiquement que

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = W^m\left(F^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right). \tag{5.1.11}$$

Par la proposition 26, et le lemme 18, en déduit que $f \in F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ si et seulement si $f^{(\alpha)} \in F^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{lu}$ pour $|\alpha| = m$ et $f \in L_p(\mathbb{R}^n)_{lu}$.

■

5.1.2 Preuve du théorème 16.

Lemme 20 *Soient $s = \dfrac{n}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel. Alors il existe une suite $(\theta_\nu)_{\nu\geq 1}$ de fonctions de classe C^∞, portées par $4Q$, telles que $\theta_\nu(x) = 1$ sur le cube $2^{2-\nu}Q$ et $\lim_{\nu\to+\infty} \|\theta_\nu\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = 0$.*

Preuve. Voir par exemple [1, lemme 2.11].

■

Soient $s = n/p$, $m < s \leq m+1$ avec $m \in \mathbb{N}$, $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel, et supposons que T_f envoie $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Par un lemme classique voir [1, lemme 3.6], ou [12, lemme 1], il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que

$$\|g\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} \leq c_1 \quad \Rightarrow \quad \|f \circ g\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \,, \tag{5.1.12}$$

pour toute fonction $g \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, dont le support est inclus dans $4Q$.
Soit u une fonction dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, à support dans $4Q$, telle que $u(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k)$ sur $2Q$. Pour $a \in \mathbb{R}^k$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $\nu \geq 1$, nous définissons la fonction

$$g(x) = bu(2^\nu x) + \theta_\nu(x)a \,. \tag{5.1.13}$$

Le lemme 20 nous autorise à choisir $\nu = \nu(a) \geq 1$ tel que $\|\theta_\nu\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c_1/2|a|$.
En utilisant l'estimation (voir [37, Prop. 2.1.3/3, p. 16])

$$\|u(\lambda(.))\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} \leq c\lambda^{s-(n/p)}\|u\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} \quad \forall\lambda \geq 1, \tag{5.1.14}$$

et en tenant compte de la condition $s = n/p$, on définit b par l'égalité

$$2b\|u\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} = c_1 \,.$$

Dans ces conditions on a $\|g\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} \leq c_1$.
On pose $x^{(k)} := (x_1, ..., x_k), h^{(k)} := (h_1, ..., h_k) \in \mathbb{R}^k$ et $\beta = (\alpha_1, ..., \alpha_k, 0, ..., 0) \in \mathbb{N}^n$.
Par la construction de g, on voit que

$$\Delta_h(\partial^\beta(f \circ g))(x) = c\Delta_{h^{(k)}}(\partial^\alpha f)(2^\nu bx^{(k)} + a) \,, \quad |\alpha| = m. \tag{5.1.15}$$

Compte tenu du théorème 13, f est lipschitzienne, on obtient

$$\partial_j f \in L_p(\mathbb{R}^k)_{lu} \,, \quad \forall j = 1, ..., k. \tag{5.1.16}$$

Pour la suite de la preuve on traitera successivement le cas Besov et le cas Lizorkin-Triebel.
Le cas des espaces de Besov
Étape 1. Le cas $m < s < m+1$.

En utilisant l'implication (5.1.12) et la propriété (5.1.8), on obtient

$$\|\partial^{\beta}(f\circ g)\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2\,,\quad |\beta| = m. \tag{5.1.17}$$

En appliquant (5.1.17) et (5.1.15), on voit aussitôt que

$$\left(\int_0^1 \left(t^{m-s}\left(\int_{2^{-\nu}Q_n} |\Delta_{2^{-\nu}te_j}(\partial^{\alpha}f)(2^{\nu}bx^{(k)}+a)|^p dx\right)^{1/p}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \leq c_3\,,$$

et donc

$$\left(\int_0^b \left(t^{m-s}\left(\int_{bQ_k+a} |\Delta_{te_j}(\partial^{\alpha}f)(x)|^p dx\right)^{1/p}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \leq c_4\,, \tag{5.1.18}$$

pour tout $a\in\mathbb{R}^k$. On obtient ainsi l'estimation

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^k}\left(\int_0^b \left(t^{m-s}\omega_{p,j,bQ_k+a}(\partial^{\alpha}f,t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \leq c_4.$$

Par la propriété (5.1.16), et la proposition 28 (i), (iii), on conclut que $\partial_j f\in (B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k))_{lu}$, pour tout $j=1,...,k$.
Étape 2. Le cas $s=m+1$. En utilisant l'implication (5.1.12) et par la propriété (5.1.8), on ait

$$\|\partial^{\beta}(f\circ g)\|_{B^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2. \tag{5.1.19}$$

Par l'estimation (5.1.19) et l'égalité (5.1.15), nous obtenons

$$\left(\int_0^b \left(t^{-1}\left(\int_{bQ_k+a} |\Delta^2_{te_j}(\partial^{\alpha}f)(x)|^p dx\right)^{1/p}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \leq c_3\,, \tag{5.1.20}$$

pour tout $a\in\mathbb{R}^k$, ce qui donne

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^k}\left(\int_0^b \left(t^{-1}\eta_{p,j,bQ_k+a}(\partial^{(\alpha)}f,t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \leq c_4,$$

Compte tenu la propriété (5.1.16), et la proposition 28 (ii), (iii), on conclut que $\partial_j f\in B^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k)_{lu}$, pour tout $j=1,...,k$.
Le cas des espaces de Lizorkin-Triebel
Étape 1. Le cas $m<s<m+1$.
En utilisant l'implication (5.1.12) et la propriété 5.1.11, donc on obtient

$$\|\partial^{\beta}(f\circ g)\|_{F^{s-m}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c_2, \tag{5.1.21}$$

Par l'estimation (5.1.21) et l'égalité (5.1.15), on a

$$\left\|\left(\int_0^{2^{-\nu}} \left(t^{m-n-s}\int_{|h|\leq 2^{\nu}bt} |\Delta_{2^{-\nu}b^{-1}h^{(k)}}\partial^{\alpha}f(2^{\nu}b(.)+a)|\,dh\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}\right\|_{L_p(2^{-\nu}Q_n)} \leq c_3,$$

on ait

$$\left\| \left(\int_0^b \left(t^{m-n-s} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h(\partial^\alpha f)(.)| \, dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(bQ_k+a)} \leq c_4. \tag{5.1.22}$$

Compte tenu la proposition 29 (i), (iii), et la propriété (5.1.16), on conclut que $\partial_j f \in F^{s-1}_{p,q}(\mathbb{R}^k)_{lu}$.

Étape 2. Le cas $s = m + 1$. La démonstration, se traite presque exactement comme dans l'étape 1, Δ_h étant remplacé par Δ_h^2, dans l'estimation (5.1.22).

■

Chapitre 6

La régularité du calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeurs vectorielles

Notre objet est ici de donner des conditions nécessaires et suffisantes de régularité pour la régularité du calcul symbolique sur l'espace $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ pour $s > 0$, qui généralisent les résultas obtenus pour $m = 1$ par Bourdaud et Lanza de Cristoforis [16].

6.1 Propriétés des espaces de distribution

Un espace topologique de distribution $(E.T.D)$ est un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ muni d'une topologie compatible avec la structure vectorielle rendant continue l'injection canonique $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si E est un espace de Banach, on dit que c'est un $E.B.D$, si E est un espace de Fréchet, on dit que c'est un $E.F.D$. L'espace E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module si $\varphi f \in E$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et tout $f \in E$.

Du théorème du graphe fermé, on déduit l'énoncé suivant, voir [11, chap. 3].

Proposition 30 *Soit E un $E.B.D$ ou $E.F.D$ Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module, alors l'opérateur linéaire $f \mapsto \varphi f$ est borné sur E, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Sous les hypothèses de la proposition 30, dans le cas où E un $E.B.D$, on posera

$$\|\varphi\|_{M(E)} := \sup\{\|\varphi f\|_E \ : \ f \in E \, , \ \|f\|_E = 1\} \, .$$

Un $E.B.D.$ est isométriquement invariant par translation si $\tau_a f \in E$ et $\|\tau_a f\|_E = \|f\|_E$ pour tout $f \in E$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$. Si E est de plus un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module, nous avons la propriété suivante :

$$\|\tau_a \varphi\|_{M(E)} = \|\varphi\|_{M(E)} \quad , \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \, . \tag{6.1.1}$$

Nous rappelons maintenant la relation classique entre la condition

$$\lim_{x \to 0} \|\tau_x f - f\|_E = 0 \, , \tag{6.1.2}$$

et l'approximation par des fonctions régulières. On considère une fonction $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \leq \rho \leq 1$, $\displaystyle\int \rho(x)\, dx = 1$ et on pose

$$\rho_j(x) := j^n \rho(jx)\,,$$

pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 31 *Soit E un E.B.D. isométriquement invariant par translation.*

(i) Si $f \in E$ et f vérifie (6.1.2), alors $f * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap E$, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, et

$$\lim_{j\to+\infty} f * \rho_j = f \quad \text{dans } E\,.$$

(ii) Si $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset E$, alors toute fonction $f \in \mathrm{cl}_E\left(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\right)$ vérifie la propriété (6.1.2).

On va définir maintenant *l'espace de Sobolev $W^r(E)$ d'ordre $r \in \mathbb{N}$* de base E, où E est un *E.F.D.*, à savoir

$$W^m(E) := \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \,:\, f^{(\alpha)} \in E \quad , \text{pour tout } |\alpha| \leq m\}\,.$$

On munira $W^m(E)$ de la famille de semi-normes

$$N_{r,k}(f) := \sum_{|\alpha|\leq r} N_k(f^{(\alpha)}) \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,,$$

où $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de semi-normes définissant la topologie de E.

Proposition 32 *Soit E un E.B.D. Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module, isométriquement invariant par translation, tel que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset E$. Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in \mathrm{cl}_{E_{loc}}\left(C^\infty(\mathbb{R}^n)\right)$,

(ii) $f \in \left(\mathrm{cl}_E \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\right)_{loc}$,

(iii) $f \in \left(\mathrm{cl}_E (C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap E)\right)_{loc}$,

(iv) $\lim_{x\to 0} \tau_x f = f$ *dans* E_{loc},

(v) $\lim_{j\to+\infty} f * \rho_j = f$ *dans* E_{loc}.

Preuve. Puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset E$, nous avons $C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset E_{loc}$, donc la propriété (i) a un sens.

Preuve de l'implication (i) ⇒ (ii). Soient $f \in \mathrm{cl}_{E_{loc}}\left(C^\infty(\mathbb{R}^n)\right)$, et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Par hypothèse, il existe une suite (f_k) dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers f dans E_{loc}. En conséquence, $\lim_{k\to+\infty} \psi f_k = \psi f$ dans E, et donc $\psi f \in \mathrm{cl}_E \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve de l'implication (ii) ⇒ (iii). Cela résulte aussitôt de l'inclusion $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap E$.

Preuve de l'implication (iii) ⇒ (iv). Nous prouvons d'abord les relations suivantes

$$\lim_{x\to 0} \|(\tau_x f)\psi - \tau_x(f\psi)\|_E = 0\,, \tag{6.1.3}$$

$$\lim_{x\to 0} \|\tau_x(f\psi) - f\psi\|_E = 0\,, \tag{6.1.4}$$

pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, qui impliquent la propriété (iv).

Preuve de (6.1.3). Supposons que f a la propriété (iii) et considérons $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\theta(x) = 1$ sur $\operatorname{supp}\psi + \mathbb{B}(0,1)$. Puisque l'espace E est isométriquement invariant par translation, il vient

$$\|(\tau_x f)\psi - \tau_x(f\psi)\|_E = \|(\tau_{-x}\psi - \psi)f\theta\|_E \le \|f\theta\|_E \|\tau_{-x}\psi - \psi\|_{M(E)}\,,$$

pour tout $|x| \le 1$. Par un argument standard (voir par exemple [18, inég. (36)]), nous obtenons

$$\lim_{x\to 0} \|\tau_x\psi - \psi\|_{M(E)} = 0\,.$$

Preuve de (6.1.4). Par hypothèse sur f, il existe une suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap E$ telle que $\lim_{k\to+\infty} g_k = f\psi$ dans E. Il vient alors $\lim_{k\to+\infty} g_k\theta = f\psi$ dans E, ce qui montre que $f\psi \in \mathrm{cl}_E\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On peut appliquer la proposition 31 (ii) et conclure que la propriété (6.1.4) est vraie.

Preuve de l'implication (iv) $\Rightarrow$ (v). Supposons que f a la propriété (iv). Soient ψ, θ des fonctions définies comme ci-dessus, il vient alors $\lim_{x\to 0} \tau_x(\theta f) = \theta f$ dans E. Puisque $(f * \rho_j)\psi = (f\theta * \rho_j)\psi$, par les propositions 30 et 31, on conclut que

$$\lim_{j\to+\infty} \psi(\theta f * \rho_j) = \psi f \quad \text{dans } E\,.$$

Preuve de l'implication (v) $\Rightarrow$ (i). Cela résulte immédiatement de $f * \rho_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

Proposition 33 *Soit E un E.F.D. Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)-$module, isométriquement invariant par translation, il en est de même pour $W^m(E)$ et on a*

$$(W^m(E))_{loc} = W^m(E_{loc})\;,$$

avec la même topologie de Fréchet.

Preuve. Elle résulte aisément de la formule de Leibniz et du théorème du graphe fermé.

Proposition 34 *Soit E un E.B.D. isométriquement invariant par translation, tel que $\mathrm{cl}_E\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = E$. Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\partial_j f \in E'$ *pour tout* $j = 1, \dots, n$,

(ii) $\|\tau_x f - f\|_{E'} = O(|x|)$ *pour* $|x| \to 0$.

Proof. Les propriétés (i) et (ii) résultent des formules suivantes (6.1.5) et (6.1.6).

$$\langle \tau_x f - f, u\rangle = -\sum_{j=1}^{n} x_j \int_0^1 \langle \partial_j f, \tau_{-tx} u\rangle dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n . \tag{6.1.5}$$

$$\langle \partial_j f, u\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \langle f - \tau_{te_j} f, u\rangle , \tag{6.1.6}$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 35 *Soit $s \in \mathbb{R}$, nous définissons la forme bilinéaire continue sur $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \times E^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)$, au moyen de la formule suivante*

$$\lhd f, g \rhd := \sum_{j\geq 0} \int_{\mathbb{R}^n} Q_j f(x) \widetilde{Q_j} g(x)\, dx . \tag{6.1.7}$$

La restriction de $\lhd -, -\rhd$ dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec la forme bilinéaire canonique sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. En utilisant la méthode de représentation de Nilkol'skij, voir par exemple Runst et Sickel [37, prop. 2.3.2 (1), p. 59] ou Yamazaki [41], il existe $c > 0$ tel que

$$\left(\sum_{j\geq 0} \left(2^{sj} \|\widetilde{Q_j} f\|_p\right)^q\right)^{1/q} \leq c\, \|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} ,$$

$$\left\| \left(\sum_{j\geq 0} \left(2^{sj} |\widetilde{Q_j} f|\right)^q\right)^{1/q} \right\|_p \leq c \|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} ,$$

pour tout $f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, respectivement. Une double application de l'inégalité de Hölder conduit alors à

$$|\lhd f, g\rhd| \leq c \|f\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{E^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)} \quad , \forall f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) , \forall g \in E^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n) . \tag{6.1.8}$$

Par la propriété (1.1.3) et l'égalité de Plancherel, il vient

$$\langle Q_j f, \widetilde{Q_j} g\rangle = \langle f, \widetilde{Q_j} g\rangle \quad , \forall f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) , \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) , \forall j \in \mathbb{N} . \tag{6.1.9}$$

Alors on obtient

$$\lhd f, g\rhd = \langle f, g\rangle \quad , \forall f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) , \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) . \tag{6.1.10}$$

Proposition 36 *Soit $s \in \mathbb{R}$. Alors une distribution f appartient à $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement s'il existe $A > 0$, telle que*

$$|\langle f, g\rangle| \leq A \|g\|_{E^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) . \tag{6.1.11}$$

De plus la plus petite des constantes A est une norme équivalente dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Voir par exemple [38, 2.11].

Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace $L_1(\mathbb{R}^n) + E^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des distributions $f_1 + f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, qui vérifient

$$\|f_1\|_1 + \|f_2\|_{E^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Proposition 37 *Soit $s \in \mathbb{R}$. Alors une distribution f appartient à $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement s'il existe $A > 0$, telle que*

$$|\langle f, g\rangle| \leq A\|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)+E^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)} \quad , \forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{6.1.12}$$

De plus la plus petite des constantes A est une norme équivalente dans $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. *Étape 1 :* Supposons que f a la propriété (6.1.12). En prenant les décompositions banales $g = 0 + g = g + 0$, nous obtenons les inégalités

$$|\langle f, g\rangle| \leq A\|g\|_1 \qquad \forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,, \tag{6.1.13}$$

$$|\langle f, g\rangle| \leq A\|g\|_{E^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{6.1.14}$$

L'inégalité (6.1.13) implique que $f \in (L_1(\mathbb{R}^n))' = L_\infty(\mathbb{R}^n)$, ce qui donne $\|f\|_\infty \leq A$. La proposition 36 et l'inégalité (6.1.14) donnent aussitôt

$$\|f\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq cA.$$

Étape 2 : Supposons que $f \in \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Soit $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, et $g = g_1 + g_2$, avec $g_1 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ et $g_2 \in E^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)$. Puisque $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, le crochet $\langle f, g_1\rangle$ a le sens usuel. Maintenant nous le prouvons

$$\langle f, g\rangle = \langle f, g_1\rangle + \lhd f, g_2 \rhd \;. \tag{6.1.15}$$

Puisque $g_2 = g - g_1$ appartient à $L_1(\mathbb{R}^n)$, on obtient

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} Q_j g_2 = g_2 \quad \text{dans} \quad L_1(\mathbb{R}^n)\,.$$

Par la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L_1(\mathbb{R}^n)$, l'égalité (6.1.9) est vraie aussi pour $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq E^0_{\infty,\infty}$ et $g \in L_1$. Donc on obtient

$$\lhd f, g_2 \rhd = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} \langle Q_j f, \widetilde{Q_j} g_2\rangle = \lim_{N\to\infty} \langle f, \sum_{j=0}^{N} Q_j g_2\rangle = \langle f, g_2\rangle\,,$$

ce qui termine la preuve de l'égalité (6.1.15). Maintenant par l'inégalité (6.1.8), on conclut que

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_\infty \|g_1\|_1 + c\|f\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \|g_2\|_{E^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

■

La proposition 37 a une conséquence importante, à savoir la propriété de Fatou.

Corollaire 1 *Soit $(f_k)_{k\geq 0}$ une suite de fonctions bornée sur $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, qui converge vers f dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alors $f \in \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\|f\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{6.1.16}$$

6.2 Régularité du calcul symbolique

6.2.1 Calcul symbolique borné

Si E et F sont deux espaces métriques, une application $T : E \to F$ est dite *bornée* si, pour toute partie bornée B de E, $T(B)$ est borné dans F.

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$; on dit que E est un $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$-module si tout élément de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ opère par multiplication sur E pour la multiplication usuelle entre les fonctions scalaires et les fonctions vectorielles.

Il est bien connu que pour $s > 0$ les espaces $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sont des $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$-modules (voir par exemple [37, 4.6.4]).

Proposition 38 *Soit $s > 0$. Pour toute fonction f appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ et s'annulant en 0, l'opérateur T_f est borné sur $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.*

Preuve. La démonstration résulte de [37, 5.3.4]. En effet il est possible de remplacer $C^\infty(\mathbb{R})$ par $C^\infty(\mathbb{R}^m)$, dans [16, prop. 1] à condition toutefois remplacer la formule de Taylor pour les fonctions scalaires par la formule de Taylor pour les fonctions vectorielles dans [37, lem. 1, p. 317] ou voir [37, th. 2, p. 368].

L'espace $\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ sera abrégé en Φ si le contexte est clair.

Proposition 39 *Soit $s > 0$. Alors l'espace $\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ est un espace de Fréchet pour les semi-normes*

$$\nu_r(f) := \sup\{\|f \circ g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \ : \ \|g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \leq r\} \qquad \forall r \in]0, +\infty[\,.$$

Preuve. Soit $(f_k)_{k\geq 1}$ une suite de Cauchy dans Φ. Par le théorème 12, on a le plongement

$$\Phi \hookrightarrow W^1_\infty(\mathbb{R}^m)_{loc}, \tag{6.2.17}$$

qui signifie que $(f_k)_{k\geq 1}$ admet une limite f dans $W^1_\infty(\mathbb{R}^m)_{loc}$, ce qui entraîne que la suite $(f_k)_{k\geq 1}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^m$. Supposons maintenant que $g \in \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, alors la suite $(f_k \circ g)_{k\geq 1}$ converge vers $f \circ g$ dans $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, en outre

$$\sup_{k\geq 0} \|f_k \circ g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{k\geq 0} \nu_{\|g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}}(f_k) < +\infty\,.$$

Par le corollaire 1, on obtient $f \circ g \in \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et le fait que l'opérateur T_f est borné. En appliquant de nouveau la propriété de Fatou, on conclut que

$$\lim_{k\to\infty} \nu_r(f_k - f) = 0 \qquad \forall r > 0\,.$$

■

6.2.2 Une condition suffisante pour que T_f soit localement lipschitzienne

Si f de classe $C^1(\mathbb{R}^m)$, nous notons $T_{\nabla f}$ l'opérateur de composition, défini par $T_{\nabla f}(g) = (\partial_1 f \circ g, ..., \partial_m f \circ g)$.

Théorème 17 *Soit $s > 0$. Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction continue appartenant à $W^1(\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)))$, alors l'application $T_f : \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est lipschitzienne sur tout borné de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.*

Preuve. Soient g, h deux fonctions dans $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. D'après (6.2.17), f est de classe C^1. Grâce la formule de Taylor avec reste intégral, il vient alors

$$(f \circ (g + h) - f \circ g)\,(x) = \int_0^1 (\nabla f \circ (g + th))(x).h(x)\, dt \quad , \forall x \in \mathbb{R}^n\,. \tag{6.2.18}$$

Maintenant nous considérons $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $\|u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)+E^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)} = 1$ (voir la proposition 6.1.11). Alors le théorème de Fubini nous donne

$$\langle f \circ (g + h) - f \circ g, u\rangle = \int_0^1 \langle(\nabla f \circ (g + th)).h, u\rangle\; dt\,.$$

Puisque $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre de Banach, on a

$$\|\nabla f \circ (g + th).h\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le c\|\nabla f \circ (g + th)\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\|h\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}.$$

Par hypothèse sur f, il vient

$$\|f \circ (g + h) - f \circ g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le c\|h\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \sup_{j=1,...,m} \nu_{\|g\|+\|h\|}(\partial_j f)\ , \tag{6.2.19}$$

qui signifie que T_f est lipschitzienne sur toute boule de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. ■

Le théorème 18 présente un résultat de trivialité pour $s > 1/p$.

Théorème 18 *Soient $s > 1/p$ et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour toute boule $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^n$, l'application*

$$T_f : \Big(\mathcal{D}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^m), \|-\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\Big) \to B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)_{loc}$$

est uniformément continue. Alors f est une fonction affine.

Preuve. Fixons j et, $a' := (a_1, ..., a_{j-1}, a_{j+1}, ..., a_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$, et définissons la fonction

$$f_{a'}(x) := f(a_1, ..., a_{j-1}, x, a_{j+1}, ..., a_m), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Considérons l'opérateur linéaire

$$\Psi : \Big(\mathcal{D}(\mathbb{B}), \|-\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\Big) \to \Big(\mathcal{D}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^m), \|-\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\Big)\,,$$

défini par

$$\Psi(u)(x) = (a_1\varphi(\frac{x}{2}), ..., a_{j-1}\varphi(\frac{x}{2}), u(x), a_{j+1}\varphi(\frac{x}{2}), ..., a_m\varphi(\frac{x}{2})).$$

Par définition de φ, on a $\varphi(\frac{x}{2}) = 1$ si $\varphi(x) \neq 0$. Il vient donc

$$\varphi(f_{a'} \circ u) = \varphi(f \circ \Psi(u)) \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{B}).$$

De l'hypothèse sur T_f, on déduit immédiatement que $T_{f_{a'}}$ est uniformément continue de $\Big(\mathcal{D}(\mathbb{B}), \| - \|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\Big)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)_{loc}$, ce qui donne que $f_{a'}$ est une fonction affine (voir [16, th. 6]). On obtient

$$f_{a'}(x_j) = A_j(a') + B_j(a')x_j, \qquad \forall j \in \{1, ..., m\},$$

où A_j et B_j sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{m-1}$, d'où l'existence de constantes c_α telles que

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^m} c_\alpha x^\alpha.$$

Maintenant supposons qu'il existe $\alpha \in \{0, 1\}^m$ tel que $\alpha_j = \alpha_k = 1$ pour deux indices $j \neq k$, tels $c_\alpha \neq 0$. Nous définissons la fonction

$$g_{a,b}(x) = (0, ..., 0, (ax_j + b)\varphi(x), 0, ..., 0, (ax_k + b)\varphi(x), 0, ..., 0),$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $j, k \in \{1, ..., m\}$ $(j \neq k)$.

En évaluant l'opérateur T_f sur la fonction $g_{a,b}$

$$T_f(g_{a,b})(x) = c_0 + c_1(ax_j + b)\varphi(x) + c_2(ax_k + b)\varphi(x) + c_3(ax_j + b)(ax_k + b)\varphi^2(x),$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $j, k \in \{1, ..., m\}$ $(j \neq k)$. Par hypothèse sur T_f, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|T_f(g_{a,b}) - T_f(g_{a,0})\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)_{loc}} \leq c \quad \forall b \in [-\eta, \eta], \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

On en déduit

$$\|S_f(g_{a,b}) - S_f(g_{a,0})\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c \quad \forall b \in [-\eta, \eta], \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Posons $\psi(x) = (x_j + x_k)\varphi^3(x)$, on obtient

$$|a| \leq \frac{1 + 2\eta\|\varphi^2\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} + \eta^2\|\varphi^3\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}}{\eta\|\psi\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}}, \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

il vient

$$|a| \leq c\,, \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

ce qui est absurde. ∎

6.2.3 Une condition nécessaire pour que T_f soit localement lipschitzienne

Théorème 19 *Soient $s > 0$, m, n des entiers tels que $1 \leq m \leq n$ et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour toute boule $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et tout compact K de $\Big(\mathcal{D}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^m), \| - \|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\Big)$, l'application $T_f : K \to \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est lipschitzienne. Alors f appartient à $E^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m)_{loc}$.*

Preuve. Nous divisons notre preuve en deux étapes.

Étape 1. Supposons le support de f inclus dans la boule $\mathbb{B}_m(a, 1)$. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ tel que $u(x) = 1$ sur $\mathbb{B}_m(a, 2)$ et $u(x) = 0$ hors de $\mathbb{B}_m(a, 3)$. On obtient

$$(\tau_t f - f)u = \tau_t f - f \qquad \forall t \in \mathbb{B}_m(0, 1)\,. \tag{6.2.20}$$

Soit v une fonction non nulle dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-m})$ et à support dans une boule $\mathbb{B}_{n-m}$. Choisissons $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de façon que $g(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}_m(a, 4) \times \mathbb{B}_{n-m}$. Nous obtenons

$$(\tau_t f - f) \otimes v = (f \circ \tau_{(t,0)} g - f \circ g)\,(u \otimes v) \qquad \forall t \in \mathbb{B}_m(0, 1)\,. \tag{6.2.21}$$

Par l'hypothèse sur f, T_f lipschitzienne sur l'ensemble

$$\{\tau_{(t,0)} g \;:\; t \in \mathbb{B}_m(0, 1)\}\,.$$

Par les propositions 36 et 34, il vient alors $\|\tau_{(t,0)} g - g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} = O(|t|)$ quand $|t| \to 0$. La proposition 22 et l'égalité (6.2.21) donnent aussitôt

$$\|\tau_t f - f\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)} = O(|t|) \qquad |t| \to 0\,.$$

Puisque $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ est le dual d'un E.B.D (voir la proposition 36), la proposition 34 donne $\partial_j f \in E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ pour tout $j = 1, ..., m$. En tenant compte de $s > 0$, il vient $\partial_j f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ pour tout $j = 1, ..., m$. Puisque la fonction f est à support compact, nous obtenons $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$. Par une propriété standard des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel, on a

$$E^r_{p,q}(\mathbb{R}^m) = \{v \in L_p(\mathbb{R}^m) \;:\; \nabla v \in E^{r-1}_{p,q}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)\},$$

pour tout $r > 0$. Donc $f \in E^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$.

Étape 2. Venons-en au cas général. On va vérifier que $uf \in E^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Par la proposition 38 et le théorème 17, nous voyons que

$$T_{u-u(0)-\nabla u(0).id_{\mathbb{R}^m}} = T_{u-u(0)} - T_{\nabla u(0).id_{\mathbb{R}^m}}\,,$$

est lipschitzienne sur tout borné de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Puisqu'il en est de même pour $T_{\nabla u(0).id_{\mathbb{R}^m}}$, $T_{u-u(0)}$ est lipschitzienne sur tout borné de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Il vient alors

$$T_{(u-u(0))f}(g) = T_{u-u(0)}(g)\, T_f(g) \qquad \forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\,, \tag{6.2.22}$$

Par l'hypothèse sur T_f, $T_{(u-u(0))f}$ est lipschitzienne sur tout compact de

$$\Big(\mathcal{D}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^m), \| \cdot \|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\Big)\,,$$

pour toute boule $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^n$. Puisque $T_{uf} = u(0)T_f + T_{(u-u(0))f}$, il en est de même pour T_{uf} et grâce à l'*étape 1*, on conclut que $uf \in E^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$. ■

6.2.4 Une condition suffisante pour que T_f soit régulier

Soit $r \in \mathbb{N}$. Par la proposition 38, toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ telle que $\partial^\alpha f(0) = 0$ pour tout $|\alpha| \le r$, appartient à $W^r(\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)))$.

Théorème 20 *Soient $r \in \mathbb{N}$ et $s > 0$. Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction continue appartenant à $cl_{W^r(\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)))}(C^\infty(\mathbb{R}^m) \cap W^r(\Phi(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))))$, alors l'application $T_f : \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est de classe C^r.*

Preuve.
Considérons l'opérateur linéaire continu

$$M : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)) \\ u & \mapsto & \{v \mapsto u.v\} \end{array} .$$

Fixons $g \in \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et supposons que h appartient à $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, avec $\|h\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \le 1$.
Étape 1. Continuité de T_f : le cas $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \cap \Phi$. On a

$$T_f = T_{f-\nabla f(0).\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}} + \nabla f(0).\mathrm{id}_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} .$$

Par la proposition 38, il vient $f - \nabla f(0).\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} \in W^1(\Phi)$. On voit aisément que T_f continue grâce au théorème 17 appliqué à $f - \nabla f(0).\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$.
Étape 2. Continuité de T_f : le cas général. Si $f \in cl_{W^r(\Phi)}(C^\infty(\mathbb{R}^m) \cap W^r(\Phi))$, et $\varepsilon > 0$, alors il existe $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \cap \Phi$ tel que

$$\nu_{1+\|g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}}(f - f_1) \le \varepsilon .$$

Il vient

$$\|f \circ (g + h) - f \circ g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le 2\varepsilon + \|f_1 \circ (g + h) - f_1 \circ g\|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)},$$

et suivant l'*étape 1* appliquée à f_1, on a alors la continuité de l'opérateur T_f.
Étape 3 : Nous allons montrer par récurrence sur r que T_f est de classe C^r si $f \in cl_{W^r(\Phi)}(C^\infty(\mathbb{R}^m) \cap W^r(\Phi))$. Le cas $r = 0$ est déjà prouvé par l'*étape 2*. Supposons maintenant que la propriété est vraie pour r et prouvons-la pour $r + 1$. On suppose que f appartient à $cl_{W^{r+1}(\Phi)}(C^\infty(\mathbb{R}^m) \cap W^{r+1}(\Phi))$. Puisque f est de classe $C^{r+1}(\mathbb{R}^m)$, on a

$$\langle f \circ (g + h) - f \circ g - (\nabla f \circ g).h, u\rangle = \int_0^1 \langle (\nabla f \circ (g + th) - \nabla f \circ g)\, .h, u\rangle \, dt \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{6.2.23}$$

Par l'*étape 2*, on obtient que $T_{\nabla f}$ est continue sur $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans lui même. En raisonnant comme à la fin de la preuve du théorème 17, on déduit de la formule (6.2.23) la différentiabilité de T_f, et l'égalité

$$dT_f = M \circ T_{\nabla f}.$$

Puisque

$$\partial_j f \in cl_{W^r(\Phi_s)}(C^\infty(\mathbb{R}^m) \cap W^r(\Phi)),$$

pour tout $j = 1, ..., m$, l'hypothèse de récurrence montre que $T_{\nabla f}$ est de classe C^r. On conclut que dT_f est de classe C^r, de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),\ \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))$, et donc que T_f est de classe C^{r+1}. ■

6.2.5 Une condition nécessaire pour que T_f soit régulier

On notera $\overset{\circ}{E}{}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Si $1 \leq p, q < \infty$, on a

$$\overset{\circ}{E}{}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\,, \tag{6.2.24}$$

(voir par exemple [38, 2.3.3]).

Proposition 40 *Soit $s > 0$. On suppose que $q \in [1, \infty[$. Alors*

(i) $\mathrm{cl}_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\big(C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\big) = E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$,

(ii) $\mathrm{cl}_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{loc}}\left(C^\infty(\mathbb{R}^n)\right) = E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)_{loc}$.

Preuve. Voir par exemple [16, prop. 7].

On dit que T_f a la propriété $(\mathcal{P}_r)$ si T_f est de classe C^r de

$$\big(\mathcal{D}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^m), \| - \|_{\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}\big)$$

dans $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, pour toute boule $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 21 *Soient $s > 0$, $r \in \mathbb{N}$, m, n des entiers tels que $1 \leq m \leq n$ et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si l'application $T_f : \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est de classe C^r. Alors f appartient à $(\overset{\circ}{E}{}^{s+r}_{p,q}(\mathbb{R}^m))_{loc}$.*

Lemme 21 *Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que T_f a la propriété $(\mathcal{P}_1)$, alors f est continûment différentiable et*

$$dT_f(g).h = (\nabla f \circ g).h \qquad \forall g, h \in \mathcal{D}(\mathbb{B}(0, R), \mathbb{R}^m)\,,\ \forall R > 0\,. \tag{6.2.25}$$

Preuve du lemme 21. Par la propriété $(\mathcal{P}_1)$, nous avons

$$dT_f(g).h = \lim_{t \to 0} \frac{f \circ (g + th) - f \circ g}{t} \tag{6.2.26}$$

dans $L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors par la continuité de f, on en déduit que $dT_f(g).h$ est continue, et que

$$(dT_f(g).h)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(g(x) + th(x)) - f(g(x))}{t}.$$

En choisissant $g(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_m)$ et $h(x) = e_j$, $j = 1, ..., m$, sur $\mathbb{B}(0, R/2)$, nous obtenons l'existence et la continuité de ∇f sur $\mathbb{B}(0, R/2)$, donc sur tout $\mathbb{R}^m$. En reprenant des fonctions g, h arbitraires, on conclut que l'identité (6.2.26) implique l'égalité (6.2.25).

Lemme 22 *Une distribution $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ appartient à $(\overset{\circ}{E}{}^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m))_{loc}$ si et seulement si*

(i) $f \in (\overset{\circ}{E}{}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^m))_{loc}$,

(ii) $\nabla f \in (\overset{\circ}{E}{}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m))_{loc}$.

Preuve du lemme 22. On a

$$(\overset{\circ}{E}{}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^m))_{loc} = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m) : \lim_{x\to 0} \tau_x f = f \,\text{dans}\, E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)_{loc} \right\}. \tag{6.2.27}$$

(voir la proposition 34). Par la propriété

$$E^{s+r}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = W^r(E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)) \quad \forall r \in \mathbb{N}, \tag{6.2.28}$$

par la proposition 33, nous avons $E^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m)_{loc} = W^1(E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)_{loc})$ en tout qu'espace de Fréchet. Alors f appartient à $(\overset{\circ}{E}{}^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m))_{loc}$ si et seulement si $\lim_{x\to 0} \tau_x f = f$ dans $E^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m)_{loc}$, autrement dit : si et seulement si $\lim_{x\to 0} \tau_x f = f$ et $\lim_{x\to 0} \nabla(\tau_x f) = \nabla f$, dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)_{loc}$ et $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)_{loc}$ respectivement. Puisque $\nabla(\tau_x f) = \tau_x(\nabla f)$, l'égalité (6.2.28) permet de finir la preuve du lemme.

Preuve du théorème 21. Nous allons raisonner par récurrence sur r.

Étape 1. Supposons que T_f a la propriété $(\mathcal{P}_0)$.

Étape 1.1. Si le support de f est compact, alors l'égalité (6.2.21) conduit à

$$\lim_{t\to 0} \|\tau_t f - f\|_{E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)} = 0\,. \tag{6.2.29}$$

Par la proposition 32 et (6.2.29), la compacité du support de f, il vient alors $f \in \overset{\circ}{E}{}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ (voir [16, prop. 11]).
Étape 1.2. Si le support de f n'est pas compact, nous raisonnons comme dans la preuve du théorème 19. D'après la proposition 38 et le théorème 20, nous savons que $T_{u-u(0)}$ est continu de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Par l'égalité (6.2.22), et par la continuité du produit dans l'algèbre $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $T_{(u-u(0))f}$ vérifie la propriété $(\mathcal{P}_0)$. Puisque $T_{uf} = T_{(u-u(0))f} + u(0)T_f$, il en est de même pour T_{uf}. Par l'*étape 1.1.* On conclut que $uf \in \overset{\circ}{E}{}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$.
Étape 2. Supposons que T_f a la propriété $(\mathcal{P}_{r+1})$. Fixons une boule $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et $j = 1, ..., m$. On considère une fonction $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ telle que $h(x) = e_j$ pour tout $x \in \mathbb{B}$. En appliquant le lemme 21 à une boule incluant $\mathbb{B}$ et le support de h, on obtient

$$T_{\partial_j f - \partial_j f(0)}(g) = dT_f(g).h - \partial_j f(0) \qquad \forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{B}, \mathbb{R}^m)\,.$$

Par hypothèse sur f, l'opérateur $g \mapsto dT_f(g).h$ vérifie la propriété $(\mathcal{P}_r)$, ce qui donne $\partial_j f - \partial_j f(0) \in \left(\overset{\circ}{E}{}^{s+r}_{p,q}(\mathbb{R}^m)\right)_{loc}$. Par le lemme 22, on conclut que $f \in \left(\overset{\circ}{E}{}^{s+r+1}_{p,q}(\mathbb{R}^m)\right)_{loc}$. ■

6.3 Remarques et problèmes ouverts

Pour $s > 1$, on a mis en évidence des conditions nécessaires qui ne sont généralement pas suffisantes. C'est évidemment le cas de la condition de Lipschitz et, même en lui adjoignant l'appartenance locale à $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$, on n'obtient pas pour autant une condition suffisante (c'est notamment le cas pour $1 \leq s \leq 1 + (1/p)$ — voir [16, rem. 5]). Il se pose donc la question suivante : si $s > 1$, comment caractériser les fonctions f qui opèrent sur $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$?
Au vu des résultats obtenus pour $m = n = 1$ et pour une large classe de paramètres s, p, q, par Bourdaud, Moussai, Sickel (voir [21], [22] et [23]), il est raisonnable de formuler la conjecture suivante :

Conjecture 1 *Soient $s > 1 + (1/p)$, $m \leq n$. Une fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ opère de $\mathcal{E}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dans $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si elle satisfait les trois conditions suivantes :*
- *$f(0) = 0$;*
- *f est localement lipschitzienne ;*
- *f appartient localement à $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^m)$.*

Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, on notera $\mathcal{I}_{m,n,E}$ l'ensemble des triplets (s, p, q) pour lesquels la conjecture est valide. Si $(s, p, q) \in \mathcal{I}_{m,n,E}$ et $s > \max(m/p, 1 + (1/p))$, on peut montrer, exactement comme le font Bourdaud et Lanza [16], que les théorèmes 20 et 21 débouchent sur une caractérisation des opérateurs de superposition de classe C^r. Le seul problème c'est qu'on ignore si $\mathcal{I}_{m,n,E}$ est non vide pour $m > 1$.
Pour $m > n$, la caractérisation du calcul symbolique est largement ouverte, car on ne connait pas encore les énoncés qui devraient remplacer les théorèmes 15, 19 et 21.

Bibliographie

[1] S.E. Allaoui. *Remarques sur le calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeurs vectorielles.* Annales mathématiques Blaise Pascal. **16**, 2 (2009), 399–429.

[2] S.E. Allaoui & M. Moussai. *Le lemme de Van Der Corput pour les intégrales oscillantes.* Annales de Mathématiques univ. Sidi-Bel-Abbes. **07** (2000), 39–45.

[3] A. Benedek & R. Panzone. *The spaces L^p, with mixed norm.* Duke Math. J. **28** (1961), 301–324.

[4] J. Bergh, J. Löfström. *Interpolation Spaces.* An, Introduction Springer-Verlag Berlin Heidel berg, Nework, 1976.

[5] G. Bourdaud. *Sur les opérateurs pseudo-différentiels à coefficients peu réguliers.* Thèse, Univ. Paris-Sud, Orsay, 1983.

[6] G. Bourdaud. *Une algèbre maximale d'opérateurs pseudo-différentiels de type 1 , 1.* Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)., **07** (1987-1988), 1–17.

[7] G. Bourdaud. *Localisations des espaces de Besov.* Studia Math., **90** (1988), 153–163.

[8] G. Bourdaud. *Analyse fonctionnelle dans l'espace euclidien.* Publ. Math. Univ. Paris VII, 1995.

[9] G. Bourdaud. *La trivialité du calcul fonctionnel dans l'espace $H^{3/2}(\mathbb{R}^4)$.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **314** (1992), 187–190.

[10] G. Bourdaud. *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov et de Triebel.* Ann. I. H. Poincaré - AN **10** (1993), 413–422.

[11] G. Bourdaud. *Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien,* 2ième édition, Pub. Math. Univ. Paris 7, **23** (1995).

[12] G. Bourdaud. *Superposition Operators in Zygmund and BMO spaces,* in : D. Haroske, T. Runst, H.-J. Schmeisser (Eds.), Proceedings on "Function Spaces, Differential Operators and Non Linear Analysis", Birkhäuser, Basel, (2003), pp. 59–74.

[13] G. Bourdaud. *Une propriété de composition dans l'espace H^s.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **340** (2005), 221–224.

[14] G. Bourdaud. *Une propriété de composition dans l'espace H^s (II).* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **342** (2006), 243–246.

[15] G. Bourdaud. *Le calcul symbolique dans certaines algèbres de type Sobolev.* In : Recent Developments in Fractals and Related Fields, J.Barral, S.Seuret (eds). Birkhäuser, (2010), 131–144.

[16] G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis. *Regularity of the symbolic calculus in Besov algebras.* Studia Math. **184**, 3 (2008), 271–298.

[17] G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis, W. Sickel, *Functional calculus in BMO and related spaces,* J. Functional Analysis, 189 (2002), 515–538.

[18] G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis and W. Sickel. *Superposition operators and functions of bounded p-variation II.* Nonlinear analysis, **62** (2005), 483–517.

G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis and W. Sickel. *Superposition operators and functions of bounded p-variation* . Revista Mat. Iberoamer. **22** (2006), 455–487.

[19] G. Bourdaud,Y. Meyer. *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev.* J. Functional Anal. **97** (1991), 351–360.

[20] G. Bourdaud,Y. Meyer. *Le calcul fonctionnel sous-linéaire dans les espaces de Besov homogènes* . Revista Mat. Iberoamer. **22** (2006), 725–746.

[21] G. Bourdaud, M. Moussai, W. Sickel. *An optimal symbolic calculus on Besov algebras.* Ann. I. H. Poincaré - AN **23** (2006), 949–956.

[22] G. Bourdaud, M. Moussai, W. Sickel. *Towards sharp Superposition Theorems in Besov and Lizorkin-Triebel spaces.* Nonlinear Analysis **68** (2008), 2889–2912.

[23] G. Bourdaud, M. Moussai, W. Sickel. *Composition operators on Lizorkin-Triebel spaces.* Journal of Fonctional Analysis **259** (2010), 1098–1128.

[24] G. Bourdaud, W. Sickel. *Composition Operators on Function Spaces with Fractional Order of Smoothness.* RIMS Kokyuroku Bessatsu (à paraître).

[25] R.R. Coifman, Y. Meyer. *Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels.* Astérisque. **57** (1978), S.M.F.

[26] B.E.J. Dahlberg. *A note on Sobolev spaces.* Proc. Symp. Pure Math. **35**,1 (1979), 183–185.

[27] J. Franke. *On the spaces $F^s_{p,q}$ of Triebel-Lizorkin type : Pointwise multipliers and spaces on domains.* Math. Nachr. **125** (1986), 29–68.

[28] M. Frazier, B. Jawerth. *Decomposition of Besov Spaces.* Indiana Univ. Math. J. **84** (1985), 777–799.

[29] M. Frazier, B. Jawerth. *A Discrete Transform and Applications to Distribution Spaces.* J. Funct. Anal. **93** (1990), 34–170.

[30] M. Kuczma. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities,* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Varsovie (1985).

[31] G. Métivier. *Intégrales Singulières.* Cours de DEA. Univ. Rennes, 1981-1982.

[32] M. Moussai. *Continuité de certains Opérateurs d'intégrales Singulières sur les espaces de Besov.* Thèse de Doctorat Université Paris VII, 1988.

[33] M. Moussai. *Continuity of pseudodifferential operators on Bessel and Besov spaces.* Serdica Math. J. **27** (2001), 249-262.

[34] M. Moussai, S.E. Allaoui. *Boundedness of pseudo-differential operators on localized Besov spaces.* (submitted).

[35] J. Peetre. *New thoughts on Besov spaces.* Duke Univ. Math. Series I, Durham, N.C., 1976.

[36] T. Runst. *Mapping properties of non-linear operators in spaces of Triebel-Lizorkin and Besov type.* Analysis Mathematica **12** (1986), 313–346.

[37] T. Runst, W. Sickel. *Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations.* de Gruyter, Berlin, 1996.

[38] H. Triebel. *Theory of Function Spaces.* Birkhäuser, Basel, 1983.

[39] H. Triebel. *Theory of Function Spaces II.* Birkhäuser, Basel, 1992.

[40] K. Yabuta, J. Osaka. *Weighted Norm Inequalities for pseudo-differential operators.* Math (23) 1986, 703–723.

[41] M. Yamazaki. *A quasi-homogeneous version of paradifferential operators, I : Boundedness on spaces of Besov type,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 33 (1986), 131–174, *II : A Symbolic calculus.* ibidem 33 (1986), 311–345.