الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE HADJ LAKHDAR

BATNA (ALGERIE)

THESE

Présentée à la Faculté des Sciences

Département de Mathématique

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématique

Par

Aissa DJERIOU

THÈME

Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur certains espaces fonctionnels

Soutenue le : 09/02/2012

Devant le jury d'examen :

S.E. REBIAI	Prof.	Université de Batna	Président
M. MOUSSAI	Prof.	Université de M'sila	Directeur de Thèse
A. AIBECHE	Prof.	Université de Sétif	Examinateur
R. BENACER	Prof.	Université de Batna	Examinateur
S. DRABLA	Prof.	Université de Sétif	Examinateur
M. NADIR	Prof.	Université de M'sila	Examinateur

Table des matières

Remerciment

Tout d'abord, je remercie MOUSSAI Madani qui a dirigé cette thèse. Il m'a proposé un sujet trés intéressant qui m'a donné l'opportunité de toucher à de nombreux domaines mathématiques. Il a su me laisser une grande liberté tout en restant exigeant et en recentrant mon travail lorsqu'il le fallait.

Je tiens à remercier Monsieur S.E. REBIAI qui a aimablement accepté de présider le jury.

Je suis très honoré que A. AIBECHE et R. BENACER aient accepté la charge de rapporter ma thèse de doctorat.

S. DRABLA et M. NADIR m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter sur ce travail. Je les remercie sincèrement pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à la lecture de ce document.

Enfin je tiens aussi à remercier mes camarades et mes amis qui m'ont soutenu moralement et à toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Au delà de tous, une pensée particulière va à ma famille qui m'a soutenu durant toutes ces années à qui je dédie ce travail.

ملخص

نتطرق في هذه الرسالة إلى دراسة استمرارية المؤثرات الشبه تفاضلية ذات الرتبة m والنواة $\sigma(x,\xi)$ التي تنتمي إلى صنف هرموندار $S_{1,\delta}^{m}(\omega,N)$ حيث $0\leq\delta<1$ ، على الفضاءات الدالية لزوركان تريبال المعمم $F_{p,q}^{v_\mu}$ ، $\left(F_{p,q}^{v_\mu}\right)_{\ell^p}$ ، $M\left(F_{p,q}^{v_\mu}\right)$ و $M\left(\left(F_{p,q}^{v_\mu}\right)_{\ell^p}\right)$.
هذه الفضاءات معرفة بواسطة الدالة $v_\mu : [0,\infty) \to]0,\infty)$ تحقق :

$$\sup_{0<t<1} t^{-\mu} \sup_{0<s\leq 1} \frac{v_\mu(s)}{v_\mu(ts)} < +\infty .$$

الكلمات المفتاحية:

المؤثرات الشبه تفاضلية، فضاء لزوركان تريبال، فضاء بوزوف، فضاء سوبلاف، فضاء هولدار، تحليل لتلوود بايلي، نواة أولية .

Abstract

We study the continuity of some pseudo-differential operators of order m , with a symbol $\sigma(x,\xi)$ that belongo to Hörmander's class $S_{1,\delta}^{m}$, $0 \leq \delta < 1$, on generalized Triebel-Lizorkin space $F_{p,q}^{v}(\mathbb{R}^n)$, generalized localized Triebel-Lizorkin space $(F_{p,q}^{v}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r}$, generalized pointwise multipliers Triebel-Lizorkin space $M(F_{p,q}^{v}(\mathbb{R}^n))$ and $M((F_{p,q}^{v}(\mathbb{R}^n))_{\ell^r})$. These spaces $F_{p,q}^{v}(\mathbb{R}^n)$ are defined from a positive function $v_\mu : [0,\infty) \to]0,\infty)$ satisfying the condition:

$$\sup_{0<t<1} t^{-\mu} \sup_{0<s\leq 1} \frac{v_\mu(s)}{v_\mu(ts)} < +\infty.$$

Key words:

Pseudo-differential operators, Triebel-Lizorkin spaces, Besov spaces, Sobolev spaces, Hölder spaces, Littlewood-Paley decomposition, elementary symbols.

Résumé

Nous étudions la continuité des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m, avec un symbole $\sigma(x,\xi)$, qui appartiennent à la classe de Hörmander $S^m_{1,\delta}$ où $0 \leq \delta < 1$, sur les espaces de Triebel-Lizorkin généralisé $F^{v_\mu}_{p,q}$, $(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}$, $M(F^{v_\mu}_{p,q})$ et $M((F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r})$. Ces espaces sont définis par une fonction positive $v_\mu : [0,\infty) \to]0,\infty)$ qui vérifie

$$\sup_{0<t<1} t^{-\mu} \sup_{0<s\leq 1} \frac{v_\mu(s)}{v_\mu(ts)} < +\infty.$$

Mot-clés:

Opérateurs Pseudo-differentiels, espace de Triebel-Lizorkin, espace de Besov, espace de Sobolev, espace de Hölder, décomposition de Littlewood-Paley, symboles élémentaires.

Notations

- Tous les espaces dans cette thèse sont définis sur $\mathbb{R}^n$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 .... \partial^{\alpha_n} x_n}$ est notée $\partial^\alpha f$ ou $f^{(\alpha)}$, si f une fonction de deux variables (x, y), on note $\partial_x^\alpha f$, $\partial_y^\alpha f$.
- Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $\beta \leq \alpha$ signifie $\beta_j \leq \alpha_j$ pour $j = 1, 2, ..., n$.
- $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, ..., \alpha_n - \beta_n)$ pour tout $\beta \leq \alpha$.
- $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_n!$.
- $\dbinom{\alpha}{\beta} = \dbinom{\alpha_1}{\beta_1}\dbinom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \dbinom{\alpha_n}{\beta_n}$ où $\beta \leq \alpha$.
- $(fg)^{(\alpha)} = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (f)^{(\beta)} (g)^{(\alpha - \beta)}$.
- $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$ est le produit du convolution des fonctions f et g.
- $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ est le laplacien de f.
- $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \xi_i$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$, $a_+ = \max(0, a)$, $a_- = \min(0, a)$.
- Si X un espace quasi-Banach, $\|\cdot\|_X$ sa quasi-norme.
- Pour $A \subset \mathbb{R}^n$: $|A|$ est la mesure de Lebesgue de A. $B(x, r)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r. S^{n-1} est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, la variable générique de S^{n-1} est notée parfois x', ξ'... et la mesure canonique de S^{n-1} est notée $dx', d\xi'$...
- On a
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} f(rx') dx' \right) r^{n-1} dr,$$
pour toute fonction intégrable f.
- $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$, intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.
- $\|f\|_p$ désigne la norme de f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Si $1 \leq p \leq \infty$, p' est l'exposant conjugué $p/(p-1)$.

• $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, appelé espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$.

• $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$ muni de la norme classique

$$\Im_M(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha|\le M} (1+|x|)^M |\partial^\alpha f| , \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Le dual $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées.

• W_p^m est l'espace de Sobolev tel que

$$W_p^m = \left\{ f \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n) : \partial^\alpha f \in L^p, \quad |\alpha| \le m \right\}$$

• Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est une fonction, le support de f est $\text{supp} f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$.

• Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sa transformée de Fourier est :

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\, dx$$

et sa transformée de Fourier inverse est :

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi} f(\xi)\, d\xi.$$

• Le spectre d'une distribution tempérée est le support de $\widehat{f}$.

• Si $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to C$ est une fonction, on note par $\sigma(x, D)$ l'opérateur pseudo-différentiel $(o.ps.d)$ de symbole σ est noté $\sigma(x, D)$ et défini, sur la classes $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, par :

$$\sigma(x, D)f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi} \sigma(x, \xi)\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi \qquad (\forall f \in \mathcal{S}) .$$

• Soient $v : [0, \infty) \longrightarrow]0, \infty)$ et $0 < q \le \infty$, ℓ_q^v désigne l'espace des suites $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ qui vérifient

$$\left\| \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} \right\|_{\ell_q^v} = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \big(v(2^{-j}) \, |a_j| \big)^q \Big)^{1/q} < +\infty,$$

et

$$\left\| \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} \right\|_{\ell_\infty^v} = \sup_{j\geq 0} \big(v(2^{-j}) \, |a_j| \big) < +\infty.$$

• Soient $v : [0,\infty) \longrightarrow \,]0,\infty)$ et $0 < p, q \leq \infty$, $\ell_q^v(L^p)$ (resp., $L^p(\ell_q^v)$) désigne l'espace des suites $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ qui vérifient

$$\left\| \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} \right\|_{\ell_q^v(L^p)} = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \big(v(2^{-j}) \, \|a_j\|_p \big)^q \Big)^{1/q} < +\infty$$

$$(\text{resp., } \left\| \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} \right\|_{L^p(\ell_q^v)} = \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \big(v(2^{-j}) \, |a_j| \big)^q \Big)^{1/q} \Big\|_p < +\infty).$$

• Si $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ est sa partie entière.

• Pour $m \in \mathbb{N}$, $C_b^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions de classe $C^m(\mathbb{R}^n)$ dont toutes les dérivées sont bornées et

$$\|f\|_{C_b^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha f\|_\infty .$$

• $C^\mu(\mathbb{R}^n)$, $\mu \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, est l'espace de Hölder des fonctions $f \in C^{[\mu]}(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\mu} = \|f\|_{C_b^{[\mu]}} + \sum_{|\alpha|=[\mu]} \sup_{x\neq y} \frac{\left|\partial_x^\alpha f(x) - \partial_y^\alpha f(y)\right|}{|x-y|^{\mu-[\mu]}} < +\infty.$$

• Si X et Y deux espaces de quasi-Banach, $X \hookrightarrow Y$ est l'injection continue i.e $\exists c > 0$

$$\|x\|_Y \leq c \, \|x\|_X , \qquad \forall x \in X.$$

• $C, c, c', c_1, ...$ désigneront des constantes strictements positives qui peuvent changer leurs valeurs d'une ligne à une autre.

• Opérateur de différence :

$$
\begin{aligned}
\triangle_h f(x) &= f(x+h) - f(x), \qquad x, h \in \mathbb{R} \\
\triangle_h^m f(x) &= \triangle_h^{m-1}(\triangle_h f(x)), \qquad m \in \mathbb{N}^* \\
\triangle_h^m f(x) &= \sum_{k=0}^{m} \binom{k}{m} (-1)^k f(x + (m-k)h).
\end{aligned}
$$

Introduction

Depuis les années 1970, plusieurs auteurs ont étudiés la continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur des espaces de fonctions, comme les espaces de Lebesgue L^p, Sobolev H^s, Hölder $\mathcal{C}^s$, Besov $B^s_{p,q}$ et autres. Ceci a une grande utilité dans le domaine des équations aux dérivée partielles par exemple. Un opérateur pseudo-différentiel ($o.ps.d$) n'est pas forcément continu sur L^p (même pour $p = 2$). Ces problèmes ont été étudiés par Hörmander, Vaillancourt, Calderón, Meyer, Stein, ... Hörmander dans [16] a prouvé que les $o.ps.d$ d'ordre $m = 0$, de symbole $\sigma(x, \xi)$ vérifiant

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq C(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \tag{1}$$

pour $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, sont bornés sur L^2, et il en est de même pour $\delta = \rho \neq 1$. Dans le cas $\delta = \rho = 1$, un contre-exemple de Ching [8] en 1972 montre que la continuité des $o.ps.d$ sur L^2 n'est pas assurée en général . En 1972, Calderón et Vaillancourt ont montré la continuité L^2 des opérateurs ayant des symboles dans $S^m_{1,\delta}$ où $0 \leq \delta < 1$. Un autre résultat dûe à Stein [32], qui démontre la continuité d'un tel opérateur sur les espaces de Sobolev H^s pour s strictement positif.

Dans cette thèse on intéresse à des $o.ps.d$ avec des symboles non réguliers, qui acquièrent un intérêt de plus en plus grand dans les vingt cinq dernières années en raison de leurs applications à la théorie des EDP non linéaires, ainsi que des problèmes applicatifs de natures différentes : la théorie du signal, la quantification,... D'intérêt particulier, nous citons ici les œuvres de Bourdaud [3] et de Nagase [25], [26]. Nous commençons en citant les résultats de Bourdaud et Moussai [6] et [22] comme exemple de base, ils ont étudié la continuité des $o.ps.d$ sur les espaces de Besov $B^s_{p,q}$, où la régularité du symbole par rapport à x est bornée dans les espaces de Besov et différentiables par rapport à la variable ξ, autrement-dit : on suppose que le symbole σ de tel *o.ps.d* satisfait, $\forall\beta \in \mathbb{N}^n$

$$\left\| \partial_\xi^\beta \sigma(\cdot,\xi) \right\|_{B^s_{p,q}} \leq C_\beta \left(1+|\xi|\right)^{-|\beta|}, \qquad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{2}$$

La condition (2) a été utilisée ensuite par Drihem et Moussai [11] pour obtenir la continuité des *o.ps.d* sur les espaces de Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}$. Notons que (2) a été remplacé par une condition qui contient un module de continuité, c'est la condition suivante : $\forall\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\left| \partial_\xi^\alpha a(x+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha a(x,\xi) \right| \leq C\omega(|h|) \left(1+|\xi|\right)^{-|\alpha|}, \qquad (\forall x, \xi \in \mathbb{R}^n), \tag{3}$$

où $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante, concave avec $\omega(0) = 0$ et

$$\left(\int_0^1 \left(\frac{\omega(t)}{t^{s-[s]}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < +\infty. \tag{4}$$

La condition (4) est une condition optimale et suffisante, pour la continuité des *o.ps.d* utilisée par plusieurs auteurs.

Moussai dans [22] a changé la condition (3) par la suivante :

$$\left| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi) \right| \leq C\omega(|h|\,|\xi|^\delta)\Omega(h\,|\xi|^\rho) \left(1+|\xi|\right)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \tag{5}$$

et la condition (4) par

$$\left(\int_0^1 \left(\omega(t)\,\Omega(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < +\infty, \tag{6}$$

pour obtenir la continuité des *o.ps.d* sur les espaces de Besov généralisés $B^{v_\mu}_{p,q}$, où Ω est une fonction qui satisfait

$$\forall c > 1,\ \exists A_c > 0,\ \forall (t,s) : \frac{1}{c} t < s < ct \Rightarrow \Omega(s) \leq A_c \Omega(t),$$

et

$$(\forall\nu > 0,\ \exists C_\nu > 0,\ \forall t \geq 1) \Rightarrow \int_1^t \frac{\Omega^{q'}(u)}{u^{\nu+1}} du \leq C_\nu \frac{\Omega^{q'}(t)}{t^\nu}.$$

Il est bien connu que si on prend $v_s(t) = t^{-s}$, $q = 2$, $\delta = 0$, $\rho = 1$, $N = [s]$, alors (6) impliquera que chaque opérateur avec un symbole satisfaisant (1) et (5) est continu de H_p^{s+m} dans H_p^s, voir [2]. Le même résultat est obtenu pour $v_s(t) = t^{-s}$, $q = 2$, $0 \leq \delta \leq 1 - \rho < 1$, $N \in \mathbb{N}$, voir [22].

Dans cette thèse, notre but est de donner une autre condition optimale et suffisante

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \left(v_\mu\left(2^{-k}\right) 2^{-(1-\delta)kN} \omega(2^{-(1-\delta)k})\right)^q\Big)^{1/q} < +\infty, \tag{7}$$

pour prouver la continuité des opérateurs pseudo-différentiels de symbole σ satisfait les deux conditions suivantes :

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|}$$

et

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\omega(|h|\,|\xi|^\delta)(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|},$$

sur les espaces de Triebel-Lizorkin généralisés $F_{p,q}^{v_\mu}$, localisés $(F_{p,q}^{v_\mu})_{\ell^r}$, espaces des multiplicateurs $M(F_{p,q}^{v_\mu})$ et espaces des multiplicateurs localisés $M((F_{p,q}^{v_\mu})_{\ell^r})$, qui sont défini par une fonction positive $v_\mu : [0,\infty) \longrightarrow]0,\infty)$ satisfaisant

$$\sup_{0<t<1} t^{-\mu} \sup_{0<s\leq 1} \frac{v_\mu(s)}{v_\mu(ts)} < +\infty. \tag{8}$$

Notons que (8) a été utilisée par Moussai pour démontrer la continuité sur les espaces de Besov géneralisés $B_{p,q}^{v_\mu}$, voir [23].

Les principaux résultats de cette thèse sont liés aux cinq chapitres suivants :

Dans le premier chapitre on rappelle quelques propriétés sur les séries de Littlewood-Paley, les espaces de Besov, de Triebel-Lizorkin et on termine par quelques inégalités qui seront utilisés dans la suite.

Le deuxième chapitre est consacré à une préparation sur les *o.ps.d*, en particulier certaines définitions (classe de Hörmander, module de continuité,...) et la décomposition en symboles élémentaires, voir Coifman et Meyer [9].

Dans le troisième chapitre nous démontrons que la condition (7) est optimale et suffisante pour la continuité des *o.ps.d* sur les espaces $F^{v_\mu}_{p,q}$.

Dans le quatrième chapitre, une première partie commence par des rappels sur des espaces localisables en norme ℓ^p et quelque résultats de Bourdaud [5], et dans la deuxième partie on va démontrer que l'espace $F^{v_\mu}_{p,q}$ est localisable en norme de $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$ (i.e. $F^{v_\mu}_{p,q} = \left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^p}$) qui nous donnera la continuité des *o.ps.d* de $(F^{\widetilde{v}_{\mu+m}}_{p,q})_{\ell^r}$ dans $\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^r}$ pour $r = p$. On termine ce chapitre par une généralisation de la continuité sur l'espace $\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^r}$ où $1 \leq r \leq \infty$. Parmi les travaux consacrés à cette direction, on a les travaux de Bourdaud et Moussai [6].

Dans le cinquième chapitre, on va étudier les espaces des multiplicateurs ponctuels dans les espace de Lebesgue, de Triebel-Lizorkin, et on va démontrer que pour $r = \infty$ et $\mu > \frac{n}{p}$ on a $M\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right) = \left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^\infty}$, ce qui implique la continuité sur $M\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)$. Pour $0 < \mu < \frac{n}{p}$ on donne un contre exemple pour les *o.ps.d* d'ordre m, ce sont des opérateurs non bornés sur les espaces des multiplicateurs de $F^{v_\mu}_{p,q}$. On termine ce chapitre par prouver que les *o.ps.d* d'ordre m sont continu sur $M(\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^r})$ pour $\mu > \frac{n}{p}$ et ils ne sont pas sur $M(\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^r})$ pour $0 < \mu < \frac{n}{p}$.

Finalement, on termine par une conclusion sur les résultats obtenus ainsi que les perspectives de ce travail.

Chapitre 1

Préparations

Nous rappelons les notions essentielles et nécessaires pour la suite, en particulier l'espace de Besov, l'espace de Triebel-Lizorkin, quelques propriétés principales. Nous rappelons aussi quelques inégalités classiques de l'analyse harmonique.

1.1 Séries de Littlewood-Paley

1.1.1 La décomposition de Littlewood-Paley

Nous allons rappeler la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée.

Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telles que

i) $\operatorname{supp} \phi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$,

ii) $\phi(\xi) > 0$ pour $2^{-1} < |\xi| < 2$,

iii) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(2^{-j}\xi) = 1$ pour $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

La construction de φ ne pose aucune difficulté voir par exemple [1, Section 4.2], [4, Section 4.2]. On pose $\varphi(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi)$, on obtient une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp} \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2\}$.

Alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ on a la partition de l'unité suivante :

$$\varphi(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi) = 1. \tag{1.1}$$

La relation (1.1) converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

A cette partition on associe une suite d'opérateurs de convolutions, notés

$$S_k : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad Q_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),$$

telles que

$$\begin{cases} (S_k f)(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}(\phi(2^{-k}\cdot)) * f\right)(x) & \text{pour } k = 1, 2, ... \\ (Q_j f)(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\left(\varphi(2^{-j}\cdot)\right) * f\right)(x) & \text{pour } j = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

avec la notation $S_0 = Q_0$.

Ecrivons la relation (1.1) au point $2^{-j}\xi$, alors il vient

$$\varphi(2^{-j}\xi) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi) = 1.$$

En multipliant par $\widehat{f}$ on obtient

$$\varphi(2^{-j}\xi)\widehat{f} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi)\widehat{f} = \widehat{f}. \tag{1.2}$$

En appliquant l'application $\mathcal{F}^{-1}$ sur (1.2), on obtient encore

$$Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} S_k f = f, \qquad (\forall j \in \mathbb{N}). \tag{1.3}$$

Pour $j = 0$, on obtient

$$\varphi(\xi)\widehat{f} + \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi)\widehat{f} = \widehat{f},$$

i.e.

$$Q_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} S_k f = f, \tag{1.4}$$

alors

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} S_k f. \tag{1.5}$$

On remplaçant f dans (1.3), on trouve

$$Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} S_k f = \sum_{k=0}^{j} S_k f + \sum_{k=j+1}^{\infty} S_k f.$$

Donc

$$Q_j f = \sum_{k=0}^{j} S_k f.$$

Remarque 1.1 Par l'inégalité de Young, nous montrons facilement que les opérateurs $\{S_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ et $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{L}(L^p)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

1.1.2 Décomposition du produit $f \cdot g$

Définition 1.2 *Soient f et g deux fonctions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On définit le produit $f \cdot g$ par :*

$$f \cdot g = \lim_{j\to\infty} (Q_j f) \cdot (Q_j g),$$

lorsque la limite existe dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(Voir [29, Section 4.2]), alors en combinant (1.4) et (1.5) on trouve

$$
\begin{aligned}
f \cdot g &= \sum_{j=0}^{\infty} S_j f \big(Q_j g + \sum_{k=j+1}^{\infty} S_k g \big) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} S_j f Q_j g + \sum_{k=1}^{\infty} S_k g \big(\sum_{j=0}^{k-1} S_j f \big),
\end{aligned}
$$

donc

$$
f \cdot g = \sum_{j=0}^{\infty} S_j f Q_j g + \sum_{k=1}^{\infty} S_k g Q_{k-1} f \tag{1.6}
$$

où $\mathrm{supp}\mathcal{F}(S_j f Q_j g) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < \gamma 2^j\}$.

On a aussi

$$
\begin{aligned}
f \cdot g &= \sum_{k=0}^{\infty} S_k (f \cdot g) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} S_k \big(\sum_{j=0}^{\infty} S_j f \sum_{\ell=0}^{\infty} S_\ell g \big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} S_k \left(S_j f S_\ell g \right).
\end{aligned}
$$

Calculons maintenant $\mathcal{F}\left(S_k (S_j f S_\ell g)\right)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(S_k \left(S_j f S_\ell g\right)\right)(\xi) &= \phi\left(2^{-k}\xi\right) [\mathcal{F}(S_j f S_\ell g)](\xi) \\
&= \phi(2^{-k}\xi)(\mathcal{F}(S_j f) * \mathcal{F}(S_\ell g)(\xi) \\
&= \phi(2^{-k}\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(S_j f)(\xi - \eta) \mathcal{F}(S_\ell g)(\eta) d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(2^{-k}\xi) \phi(2^{-j}(\xi - \eta)) \phi(2^{-\ell}\eta) \mathcal{F}(f)(\xi - \eta) \mathcal{F}(g)(\eta) d\eta.
\end{aligned}
$$

Donc, il y a trois cas où le support de $\mathcal{F}\left(S_k(S_j f S_\ell g)\right)$ n'est pas vide :

$$\begin{aligned}
\ell \leq k+1 \quad &\text{et} \quad k-2 \leq j \leq k+4, \\
j \leq k+1 \quad &\text{et} \quad k-2 \leq \ell \leq k+4, \\
\ell,\ j \geqslant k \quad &\text{et} \qquad |\ell - k| < 1.
\end{aligned}$$

Alors

$$S_k(f \cdot g) = \sum_{j,\ell=0}^{\infty} S_k(S_j f S_\ell g) = (\pi_k^{(1)} + \pi_k^{(2)} + \pi_k^{(3)})(f \cdot g),$$

avec

$$\begin{aligned}
\pi_k^{(1)}(f \cdot g) &= S_k(\widetilde{S}_k f Q_{k+1} g), \\
\pi_k^{(2)}(f \cdot g) &= S_k(Q_{k+1} f \widetilde{S_k} g), \\
\pi_k^{(3)}(f \cdot g) &= \sum_{j=k}^{\infty} S_k(S_j f \overline{S_j} g),
\end{aligned} \tag{1.7}$$

où $\widetilde{S_k} = \sum_{j=k-2}^{k+4} S_j$ et $\overline{S_k} = \sum_{j=k-1}^{k+1} S_j$.

1.2 Définitions et quelques propriétés des espaces de Besov et de Triebel-Lizorkin

Nous allons rappeler la définition des espaces de Besov généralisés $B^v_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et de Triebel-Lizorkin généralisés $F^v_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, ainsi que certaines propriétés, comme la coïncidence avec d'autres espaces, les inclusions des uns dans les autres,... où toutes les démonstrations dans le cas usuel se trouvent dans les livres de H. Triebel [35, 36] ; on pourra aussi voir le livre de T. Runst et W. Sickel [29].

1.2.1 Espace de Besov $B_{p,q}^{v}$

Définition 1.3 *Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Une fonction $v_\mu : [0,\infty) \to]0,\infty)$ est dite du type μ, si elle vérifie*

$$\sup_{0<t<1} t^{-\mu} \sup_{0<s\leq 1} \frac{v_\mu(s)}{v_\mu(ts)} < +\infty. \tag{1.8}$$

Remarque 1.4 La fonction v_μ à été utilisée par plusieurs auteurs, voir par exemple les travaux de Hartzstein et de Viviani [14, 15], W. Farkas et H.-g. Leopold [12], et le livre de Triebel [37, p. 53 and p. 108].

Remarque 1.5 Quelques exemples sur les fonctions v_μ de type μ.

- $v_\mu(t) = t^{-\mu}$, pour $t > 0$.
- $v_\mu(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } t \geq 1, \\ |\log t|^{\mu}, & \text{pour } 0 < t \leq 1. \end{cases}$
- $v_\mu(t) = \begin{cases} 1 & , \ t \geq 1, \\ \log|\log t|^{\mu}, & 0 < t < 1. \end{cases}$
- $v_\mu(t) = t^{-\mu}(1 + (\log t)_+)$.
- $v_\mu(t) = \max(t^{-\beta}, t^{-\mu})$ avec $\beta < \mu$.

Définition 1.6 *Soient $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$ et v_μ une fonction de type μ. L'espace de Besov généralisé $B_{p,q}^{v_\mu}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\left\|f\right\|_{B_{p,q}^{v_\mu}} = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \Big(v_\mu\left(2^{-j}\right) \left\|S_j f(\cdot)\right\|_p\Big)^q\Big)^{1/q} < +\infty. \tag{1.9}$$

Dans le cas où $q = +\infty$, l'expression (1.9) doit s'interpréter comme

$$\left\|f\right\|_{B_{p,\infty}^{v_\mu}} = \sup_{j\geq 0} \Big(v_\mu\left(2^{-j}\right) \left\|S_j f\right\|_p\Big).$$

Proposition 1.7 *(i)* $B^{v_\mu}_{p,q}$ *est un espace de Banach si* $\min(p,q) \geq 1$.

(ii) *Soient* $\mu \in \mathbb{R}$, p, q_0, $q_1 \in]0,\infty)$ *tels que* $0 < q_0, q_1 \leq \infty$ *et* $\varepsilon > 0$, *alors*

$$\mathcal{S} \hookrightarrow B^{\widetilde{v}_{\mu+\varepsilon}}_{p,q_0} \hookrightarrow B^{v_\mu}_{p,q_1} \hookrightarrow \mathcal{S}',$$

et si $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$ *on a*

$$B^{v_\mu}_{p,q_0} \hookrightarrow B^{v_\mu}_{p,q_1}.$$

(iii) *Soient* $p_0 < p$ *et* $\mu - \frac{n}{p_0} = \alpha - \frac{n}{p}$, *alors*

$$B^{v_\mu}_{p_0,q} \hookrightarrow B^{v_\alpha}_{p,q}.$$

(iv) $W^m_p \hookrightarrow B^{v_\mu}_{p,q}$ *pour tout entier* $m > \mu$.

Définition 1.8 *On dit qu'un espace vectoriel* E *est une algèbre si il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|f \cdot g\|_E \leq C \|f\|_E \|g\|_E$$

pour toutes f *et* g *appartiennent à* E.

Remarque 1.9 Cette définition signifie que si $f, g \in E$ alors $f \cdot g \in E$ au sens de norme.

Proposition 1.10 *Soient* $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$ *et* v_μ *une fonction de type* μ. *Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $B^{v_\mu}_{p,q}$ *est une algèbre,*

(ii) $B^{v_\mu}_{p,q} \hookrightarrow L^\infty$,

(iii) $\mu > \frac{n}{p}$ *où* $\mu = \frac{n}{p}$ *et* $0 < q \leq 1$.

Remarque 1.11 Si $v_\mu(t) = t^{-\mu}$. Alors $B^{v_\mu}_{p,q} = B^{\mu}_{p,q}$ est l'espace de Besov usuel.

1.2.2 Espace de Triebel-Lizorkin $F^{v}_{p,q}$

L'espace de Lizorkin-Triebel est une généralisation des espaces de potentiel de Bessel, on donne une rappel sur ces espaces et leur propriétés.

Définition 1.12 *Soient $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. Soit v_μ une fonction de type μ. L'espace de Triebel-Lizorkin généralisé $F^{v_\mu}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\left\|f\right\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} = \left\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(v_\mu\left(2^{-j}\right)\left|S_j f(\cdot)\right|\Big)^q\Big)^{1/q}\right\|_p < +\infty. \tag{1.10}$$

Dans le cas où $q = +\infty$, l'expression (1.10) *doit s'interpréter comme*

$$\left\|f\right\|_{F^{v_\mu}_{p,\infty}} = \sup_{j\geq 0}\Big(v_\mu\left(2^{-j}\right)\left|S_j f(\cdot)\right|\Big).$$

Proposition 1.13 *(i) $F^{v_\mu}_{p,q}$ est un espace de Banach si $\min(p,q) \geq 1$.*

ii) Soient $\mu \in \mathbb{R}$, p, q_0, $q_1 \in]0,\infty)$ tels que $0 < q_0, q_1 \leq \infty$ et $\varepsilon > 0$, alors

$$\mathcal{S} \hookrightarrow F^{\widetilde{v}_{\mu+\varepsilon}}_{p,q_0} \hookrightarrow F^{v_\mu}_{p,q_1} \hookrightarrow \mathcal{S}'$$

et si $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$ on a

$$F^{v_\mu}_{p,q_0} \hookrightarrow F^{v_\mu}_{p,q_1}.$$

iii) Soient $p_0 < p$ et $\mu - \frac{n}{p_0} = \alpha - \frac{n}{p}$, alors

$$F^{v_\mu}_{p_0,q} \hookrightarrow F^{v_\alpha}_{p,q}.$$

iv) $W^m_p \hookrightarrow F^{v_\mu}_{p,q}$ pour tout entier $m > \mu$.

v) Soient $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, et $q, t, v \in [1,\infty]$. Alors

$$B^{v_\mu}_{p,t} \hookrightarrow F^{v_\mu}_{p,q} \hookrightarrow B^{v_\mu}_{p,v} \iff 0 < t \leq \min(p,q) \ \ et \ \max(p,q) \leq v \leq \infty.$$

vi) Soient $0 < p_0 < p < p_1 \leq \infty$, $\mu \in \mathbb{R}$. *On pose* $\alpha - \frac{n}{p_0} = \mu - \frac{n}{p} = \beta - \frac{n}{p_1}$, *alors*

$$B^{v_\alpha}_{p_0,t} \hookrightarrow F^{v_\mu}_{p,q} \hookrightarrow B^{v_\beta}_{p_1,s} \Leftrightarrow 0 < t \leq p \leq s \leq \infty.$$

vii) Soient $0 < p < p_1 \leq \infty$ *et* $\mu - \frac{n}{p} = \alpha - \frac{n}{p_1}$, *alors*

$$F^{v_\mu}_{p,q} \hookrightarrow B^{v_\alpha}_{p_1,p}.$$

Proposition 1.14 *Soient* $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ *et* v_μ *une fonction de type* μ. *Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $F^{v_\mu}_{p,q}$ *est une algèbre,*

(ii) $F^{v_\mu}_{p,q} \hookrightarrow L^\infty$,

(iii) $\mu > \frac{n}{p}$ *où* $\mu = \frac{n}{p}$ *et* $0 < p \leq 1$.

Remarque 1.15 Si $v_\mu(t) = t^{-\mu}$. Alors $F^{v_\mu}_{p,q} = F^{\mu}_{p,q}$ est l'espace de Triebel-Lizorkin usuelle.

1.2.3 Interpolation

L'interpolation sert comme outil fort pour l'étude de la continuité d'un opérateur linéaire. Nous rappelons les résultats connus sur l'interpolation des espaces des Besov et Triebel-Lizorkin d'après les livres de Bergh [1], Peetre [28] et Triebel [35, 36, 37].

Définition 1.16 *Soient* A_0, A_1 *deux espaces des Banach,* $0 < \theta < 1$. *On dit que* $a \in A_{[\theta]} = \left(A_0, A_1\right)_\theta$ *si et seulement s'il existe* $f = f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, *tel que*

i) $f(z)$ *est analytique sur la bonde* $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ *et à valeur dans* $A_0 + A_1$, *continue et bornée sur la bonde* $\{z \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\}$.

ii) $f(j+it)$ *(où* $j = 0,1$*) continu sur* A_j *tel que tend vert* 0 *si* $|t| \to \infty$.

iii) $a = f(\theta)$.

On muni $A_{[\theta]}$ *par la norme*

$$\|a\|_{[\theta]} = \inf_f \max(\sup \|f(iy)\|_{A_0}, \sup \|f(1+iy)\|_{A_1}).$$

Remarque 1.17 $A_{[\theta]}$ est dit un espace d'interpolation de l'exposent θ.

Théorème 1.18 $A_{[\theta]}$ *est un espace de Banach.*

Théorème 1.19 *Soient* A_j, B_j $(j = 0,1)$ *quatre espaces de Banach et* T *un opérateur envoie* A_0 *dans* B_0 *et de* A_1 *dans* B_1. *Alors* T *envoie* $A_{[\theta]}$ *dans* $B_{[\theta]}$ *et*

$$\|T\|_{A_{[\theta]},B_{[\theta]}} \le \|T\|_{A_0,B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1,B_1}^{\theta},$$

où

$$\|T\|_{A_j,B_j} = \sup_{\|f\|_{A_j}=1} \|T(f)\|_{B_j}.$$

Théorème 1.20 (Riesz-Thorin) *Soient* $(X,\mu),(Y,\nu)$ *deux espaces mesurés et* p_0, p_1, q_0, $q_1 \in [1,\infty]$ *avec* $p_0 \ne p_1$, $q_0 \ne q_1$. *On suppose que* T *est un opérateur qui envoi* $L^{p_0}(X,\mu)$ *dans* $L^{q_0}(Y,\nu)$ *et* $L^{p_1}(X,\mu)$ *dans* $L^{q_1}(Y,\nu)$ *tel que, pour toute fonction simple* f :

$$\|Tf\|_{q_i} \le C_i \|f\|_{p_i} \qquad (i = 0,1).$$

Alors T *renvoie* $\left(L^{p_0}, L^{p_1}\right)_\theta = L^p$ *dans* $\left(L^{q_0}, L^{q_1}\right)_\theta = L^q$ *tels que* $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ *et* $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$, $(0 < \theta < 1)$ *de plus*

$$\|Tf\|_q \le C_0^{1-\theta} C_1^{\theta} \|f\|_p.$$

Proposition 1.21 *Pour* $0 < \theta < 1$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ *et* $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$ *tels que* $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_0} + \frac{1-\theta}{q_1}$, $\quad \eta_r = u_s^\theta v_t^{1-\theta}, \quad r = \theta s + (1-\theta)t$. *Alors*

$$\left(F_{p_0,q_0}^{u_s}, F_{p_1,q_1}^{v_t}\right)_\theta = F_{p,q}^{\eta_r} .$$

1.3 Inégalités de base

1.3.1 Inégalités classiques

Les propositions suivantes sont vraiment classiques, elle présentent un moyen nécessaire pour la suite de ce travail. Nous donnerons les preuves de quelques unes.

Proposition 1.22 (Inégalité de Hölder) *Soient* $f_i \in L^{p_i}(\mathbb{R}^n)$ *avec* $1 \leq p_i \leq \infty$ *où* $(i = 1, 2)$. *Alors*

$$f_1 \cdot f_2 \in L^1 \text{ et } \|f_1 \cdot f_2\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}, \qquad \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1\right).$$

Proposition 1.23 (Inégalité de Minskovski) *Pour tout* $1 \leq p \leq q \leq \infty$, *et* X *un élément dans* $\ell^p(\ell^q)$, *alors*

$$\|X\|_{\ell^q(\ell^p)} \leq \|X\|_{\ell^p(\ell^q)} .$$

Proposition 1.24 (Inégalité de Young) *Soient* $1 \leq p, q, r \leq \infty$, *tel que* $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. *Alors pour toute fonction* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *on a*

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n) \qquad \text{et} \qquad \|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Preuve. On fixe $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et on considère l'opérateur $Tf = g * f$,

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y)\, dy,$$

et comme $\|g(\cdot - y)\|_q = \|g\|_q$ alors on a

$$\|Tf\|_q \leq \|g\|_q \|f\|_1 .$$

D'autre part, l'inégalité de Hölder donne aussitôt

$$|Tf(x)| \leq \|g\|_q \|f\|_{q'} .$$

Par interpolation el vient

$$\begin{aligned} T: \quad L^1(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \quad L^q(\mathbb{R}^n) \\ L^{q'}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \quad L^\infty(\mathbb{R}^n) . \end{aligned}$$

Alors

$$T: L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^n), \text{ avec } \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

■

Proposition 1.25 *Soient $0 < b < 1$ et $0 < q \leq \infty$. Pour toute suite réelle à termes positifs $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\ell^q(\mathbb{N})$, les suites $\left\{\sum_{j=0}^{k} b^{k-j}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left\{\sum_{j=k}^{\infty} b^{j-k}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $\ell^q(\mathbb{N})$. De plus, il existe une constante $C = C(a,q) > 0$ telle que*

$$\left\|\left\{\sum_{j=0}^{k} b^{k-j}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^q} + \left\|\left\{\sum_{j=k}^{\infty} b^{j-k}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^q} \leq C\left\|\left\{\varepsilon_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^q}. \tag{1.11}$$

La valeur existe de C est : $(\frac{2}{1-b})$.

Preuve. Pour $1 \leq q \leq \infty$, on a

$$\sum_{j=0}^{k} b^{k-j}\varepsilon_j = \sum_{j=0}^{k} b^{(k-j)/q}\varepsilon_j b^{(k-j)/q'}.$$

Par l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\Big(\sum_{j=0}^{k}\ b^{k-j}\varepsilon_j\Big)^q \leq \Big(\sum_{j=0}^{k} b^{(k-j)}\varepsilon_j^q\Big)\Big(\sum_{j=0}^{k} b^{(k-j)}\Big)^{q/q'}.$$

Donc pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N}\Big(\sum_{j=0}^{k}\ b^{k-j}\varepsilon_j\Big)^q \quad &\leq \quad \Big(\sum_{i=0}^{N} b^i\Big)^{q/q'}\Big(\sum_{j=0}^{N}\varepsilon_j^q\sum_{k=j}^{N} b^{(k-j)}\Big)\\
&\leq \quad \Big(\sum_{i=0}^{\infty} b^i\Big)^{q}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j^q\Big).
\end{aligned}$$

Donc

$$\Big\|\Big\{\sum_{j=0}^{k}\ b^{k-j}\varepsilon_j\Big\}_{k\in\mathbb{N}}\Big\|_{\ell^q} \leq C\Big\|\Big\{\varepsilon_k\Big\}_{k\in\mathbb{N}}\Big\|_{\ell^q}.$$

Pour $0 < q < 1$, on a

$$\Big(\sum_{j=0}^{k} b^{k-j}\varepsilon_j\Big)^q \leq \sum_{j=0}^{k}\ b^{(k-j)q}{\varepsilon_j}^q,$$

ce qui implique

$$\sum_{k=0}^{N}\Big(\sum_{j=0}^{k}\ b^{k-j}\varepsilon_j\Big)^q \leq \Big(\sum_{j=0}^{N}\varepsilon_j^q\sum_{k=j}^{N} b^{(k-j)q}\Big).$$

par conséquent

$$\Big\|\Big\{\sum_{j=0}^{k}\ b^{k-j}\varepsilon_j\Big\}_{k\in\mathbb{N}}\Big\|_{\ell^q} \leq C\Big(\frac{1}{1-b^q}\Big)^{1/q}\Big\|\Big\{\varepsilon_k\Big\}_{k\in\mathbb{N}}\Big\|_{\ell^q}.$$

De même pour $\Big\{\sum_{j=k}^{\infty} b^{j-k}\varepsilon_j\Big\}_{k\in\mathbb{N}}$ ce qui prouve (1.11). ∎

1.3.2 Inégalités maximales

Nous rappelons d'abord la définition de la fonction maximale :

Définition 1.26 *A toute fonction localement intégrable f sur $\mathbb{R}^n$, on associe sa fonction maximale définie par*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy,$$

où $B(x,r)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r.

Les propositions suivantes concernent des estimations des suites et séries de fonctions dans les espaces $L^p(\ell^q)$, $\ell^q(L^p)$,...etc.

Proposition 1.27 *Soit $1 < p < \infty$ et $1 < q \leq \infty$. Alors*

(i) Si $\theta \in L^1$ et $g \in L_1^{loc}$, on a

$$\left|\left(t^{-n}\theta\left(\frac{\cdot}{t}\right)\right) * g(x)\right| \leq \|\theta\|_1 Mg(x), \qquad (\forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n).$$

(ii) Il existe une constante $c = c(n,p) > 0$ telle que pour tout $g \in L^p$ on a

$$\|Mg\|_p \leq c\, \|g\|_p .$$

(iii) Il existe une constante $c > 0$ telle que l'inégalité suivante

$$\Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty} (Mg_j)^q\Big)^{1/q}\Big\|_p \leq c\, \Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty} |g_j|^q\Big)^{1/q}\Big\|_p$$

est vérifiée, pour toute suite des fonctions de distributions $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ localement Lebesgue-intégrables.

Preuve. Voir par exemple [34, p. 55-57] et [29, p. 21] ou [36, p. 89]. ∎

Proposition 1.28 *Soient* $0 < r, b < \infty$ *et* f *une fonction telle que* $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq b\}$. *Alors pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|f(x-y)|}{(1+|y|)^{n/r}} \leq c\,(M\,|f|^r(x))^{1/r}.$$

Preuve. Voir [33, Théorème 1.3.1]. ∎

Définition 1.29 *Soient* $f \in \mathcal{S}'$ *et* $a > 0$. *On définit les opérateurs maximaux associés aux* S_k *et* Q_k *par :*

$$S_j^{*,a} f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|S_j f(x-y)|}{(1+2^j\,|y|)^a} \qquad et \qquad Q_j^{*,a} f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|Q_j f(x-y)|}{(1+2^j\,|y|)^a}.$$

Proposition 1.30 *Soient* $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $a > n/\min(p,q)$ *et* v_μ *une fonctions de type* μ. *Alors*

$$\left\| \{S_j^{*,a} f\}_{j\in\mathbb{N}} \right\|_{L^p(\ell_q^{v_\mu})} \leq c \|f\|_{F_{p,q}^{v_\mu}}.$$

Preuve. La preuve de cette proposition n'est pas compliqué. Il suffit de prendre $t > 0$ tel que $a > (n/t) > (n/q)$, la proposition 1.28 donne l'existence d'une constante c, indépendante de j, telle que

$$S_j^{*,a} g(x) \leq S_j^{*,n/t} g(x) \leq c(M(|S_j g|^t)(x))^{1/t}.$$

On peut majorer la norme $\ell_q^{v_\mu}$ du $S_j^{*,a} g$ par

$$c\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \left(v_\mu\left(2^{-j}\right)(M(|S_j g|^t))^{1/t}\right)^q\Big)^{1/q} = c\left\| \{M(|S_j g|^t)\}_{j\in\mathbb{N}} \right\|_{\ell_{q/t}^{v_\mu}}^{1/t},$$

on applique la proposition 1.27/(ii), on obtient

$$\big\| \{S_j^{*,a} g\}_{j\in\mathbb{N}} \big\|_{\ell_q^{v_\mu}} \leq c \big\| \{M(|S_j g|^t)\}_{j\in\mathbb{N}} \big\|_{\ell_{q/t}^{v_\mu}}^{1/t}.$$

D'où

$$\big\| \{S_j^{*,a} g\}_{j\in\mathbb{N}} \big\|_{L^p(\ell_q^{v_\mu})} \leq \big\| \{S_j g\}_{j\in\mathbb{N}} \big\|_{L^p(\ell_q^{v_\mu})}.$$

Ceci termine la preuve de la proposition. ■

1.3.3 Estimations du type de Littlewood-Paley

La proposition suivante est du "folklore" de l'analyse harmonique. Sa démonstration dans le cas usuel, existe dans plusieurs références, comme par exemple [21, Théorème 1.3.1] pour le cas de Besov, [18, Théorème 1.3.1] et [39, Théorème 1.3.1] pour le cas de Triebel-Lizorkin.

Proposition 1.31 *Soient $\gamma > 1$, $\mu \in \mathbb{R}$ et v_μ une fonction de type μ. Alors*

(i) *Il existe une constante $c > 0$ telle que l'inégalité suivante*

$$\big\| \sum_{j=0}^{\infty} g_j \big\|_{F_{p,q}^{v_\mu}} \leq c \big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \big(v_\mu\left(2^{-j}\right) |g_j(\cdot)|\big)^q \Big)^{1/q} \big\|_p \tag{1.12}$$

est vérifiée, pour toute suite des distributions tempérées $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\operatorname{supp} \mathcal{F} g_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \gamma^{-1} 2^j \leq |\xi| \leq \gamma 2^j\}$.

(ii) *Il existe une constante $c > 0$ telle que l'inégalité suivante*

$$\big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \big(v_\mu\left(2^{-j}\right) |g_j(\cdot)|\big)^q \Big)^{1/q} \big\|_p \leq c \Big(\sup_{|\alpha|\leq 1+[n/2]} \big\|\theta^{(\alpha)}\big\|_\infty \Big) \|g\|_{F_{p,q}^{v_\mu}} \tag{1.13}$$

est vérifiée, pour toute suite des distributions tempérées $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, définie par $g_j =$

$\theta(2^{-j}D)g$, *où* $g \in \mathcal{S}'$ *et* $\theta \in C_0^\infty$ *de support dans la couronne* $\gamma^{-1} \leq |\xi| \leq \gamma$.

(iii) *Soient* $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 2\gamma_1$. *Alors il existe une constante* $c > 0$ *telle que l'inégalité suivante*

$$\left\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \left(v_\mu \left(2^{-j} \right) |g_j(\cdot)| \right)^q \Big)^{1/q} \right\|_p \leq c \left\| \sum_{j=0}^{\infty} g_j \right\|_{F_{p,q}^{v_\mu}}$$

est vérifiée, pour toute suite des distributions tempérées $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *vérifiant* $\operatorname{supp} \mathcal{F} g_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \gamma_1 2^j \leq |\xi| \leq \gamma_2 2^j\}$

(iv) *Si* $\mu > 0$, *on peut dans* (i) *remplacer les couronnes* $\gamma^{-1}2^j \leq |\xi| \leq \gamma 2^j$ *par les boules* $|\xi| \leq \gamma 2^j$.

Preuve. (i) On remarque que

$$S_k g_j = 0 \quad \text{si} \quad j \geq k + L \quad \text{ou} \quad j \leq k - L, \quad (L = 2 + [\log \gamma / \log 2]) . \tag{1.14}$$

Alors par définition on a

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} g_j \right\|_{F_{p,q}^{v_\mu}} = \left\| \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \Big| \sum_{j=k-L}^{k+L} v_\mu \left(2^{-k} \right) S_k g_j \Big|^q \Big)^{1/q} \right\|_p .$$

On fait la décomposition de $S_k g_j(x)$ en $I_1(x) + I_2(x)$ telle que

$$I_1(x) = 2^{kn} \int_{|x-y| \leq 2^{-k}} \mathcal{F}^{-1}\varphi \left(2^k (x-y) \right) g_j(y) \mathrm{d}y,$$

$$I_2(x) = 2^{kn} \int_{|x-y| \geq 2^{-k}} \mathcal{F}^{-1}\varphi \left(2^k (x-y) \right) g_j(y) \mathrm{d}y.$$

Clairement du proposition 1.27/(i), nous avons $|I_1(x)| \leq c\, Mg_j(x)$, où c est indépendant de j et k. En outre nous avons

$$\begin{aligned}
|I_2(x)| &\leq 2^{kn}\sum_{\ell\geq 0}\int_{2^{-k+\ell}\leq|x-y|\leq 2^{-k+\ell+1}} \left|\mathcal{F}^{-1}\varphi\left(2^k\left(x-y\right)\right)\right| |g_j(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq c_1\, 2^{kn}\sum_{\ell\geq 0}\int_{2^{-k+\ell}\leq|x-y|\leq 2^{-k+\ell+1}} \left(1+2^k\,|x-y|\right)^{-(n+1)} |g_j(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq c_2\sum_{\ell\geq 0}\frac{2^{kn}}{\left(1+2^{\ell}\right)^{n+1}}2^{(k-\ell-1)n}\int_{|x-y|\leq 2^{-k+\ell+1}} |g_j(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq c_3\, Mg_j(x)\sum_{\ell\geq 0}2^{-\ell} \\
&\leq c_4\, Mg_j(x).
\end{aligned}$$

Maintenant selon le signe de μ, nous séparons les cas. En effet en utilisant (1.8) nous obtenons

$$v_\mu\left(2^{-k}\right) \leq c\, 2^{\mu(k-j)} v_\mu\left(2^{-j}\right). \tag{1.15}$$

D'où, dans le cas $\mu > 0$, nous aurons alors

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k-L}^{k+L} v_\mu\left(2^{-k}\right)|S_k g_j| &\leq c_1\, 2^{k\mu}\sum_{j=k}^{\infty} 2^{-\mu j} v_\mu(2^{-j})\,|S_{k+L} g_j| \\
&\leq c_2\, 2^{k\mu}\sum_{j=k}^{\infty} 2^{-\mu j} v_\mu(2^{-j}) M g_j\,.
\end{aligned}$$

Dans le cas $\mu < 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k-L}^{k+L} v_\mu\left(2^{-k}\right)|S_k g_j| &\leq c_3\, 2^{k\mu}\sum_{j=0}^{k} 2^{-\mu j} v_\mu\left(2^{-j}\right)|S_{k-L} g_j| \\
&\leq c_4\, 2^{k\mu}\sum_{j=0}^{k} 2^{-\mu j} v_\mu\left(2^{-j}\right) M g_j\,.
\end{aligned}$$

Maintenant, il suffit de calculer la $L^p(\ell^q)$–norme et appliquer successivement la proposition 1.25 et la proposition 1.27/(iii).

Si $\mu = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{j=k-L}^{k+L} v_0\left(2^{-k}\right)|S_k g_j| &\leq c_1 \sum_{j=k-L}^{k+L} v_0\left(2^{-j}\right) M g_j \\ &\leq c_2\,(2L+1)^{1/q'}\,\Big(\sum_{j=k-L}^{k+L}\left(v_0\left(2^{-j}\right) M g_j\right)^q\Big)^{1/q}.\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j=0}^{\infty} g_j\Big\|_{F_{p,q}^{v_0}} &\leq c_3\,\Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\left(v_0\left(2^{-j}\right) M g_j\right)^q \sum_{j=k-L}^{k+L} 1\Big)^{1/q}\Big\|_p \\ &\leq c_4\,\Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\left(v_0\left(2^{-j}\right) M g_j\right)^q\Big)^{1/q}\Big\|_p.\end{aligned}$$

Pour (ii) en utilisant (1.14), on observe que

$$g_j = \sum_{k=0}^{\infty} S_k g_j = \sum_{k=j-L}^{j+L} 2^{nj}\mathcal{F}^{-1}\theta(2^j\cdot) * S_k g.$$

Par (1.8) à nouveau, proposition 1.27/(i) et l'inégalité suivante

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\theta\right\|_1 \leq c_1 \sup_{|\alpha|\leq K}\left\|\theta^{(\alpha)}\right\|_\infty, \quad (K = [n/2]+1),$$

nous avons

$$\begin{aligned}v_\mu\left(2^{-j}\right)|g_j| &\leq c_2 \sup_{|\alpha|\leq K}\left\|\theta^{(\alpha)}\right\|_\infty \sum_{k=j-L}^{j+L}\frac{v_\mu\left(2^{-j}\right)}{v_\mu\left(2^{-j}2^{j-k}\right)} v_\mu\left(2^{-k}\right) M S_k g \\ &\leq c_3 \sup_{|\alpha|\leq K}\left\|\theta^{(\alpha)}\right\|_\infty \sum_{k=j-L}^{j+L} 2^{(j-k)\mu} v_\mu\left(2^{-k}\right) M S_k g.\end{aligned}$$

Finalement, il suffit de calculer la $L^p(\ell^q)$–norme et appliquer comme avant et successivement la proposition 1.25 et la proposition 1.27/(iii).

Pour (iii) il suffit de prendre a et b tels que $\gamma/2 < a < \gamma_1 < \gamma_2 < b < 2\gamma_1$ et une fonction $\lambda \in \mathcal{S}$ telle que $\widehat{\lambda}(\xi) = 1$ si $\gamma_1 < |\xi| < \gamma_2$ et $\widehat{\lambda}(\xi) = 0$ si $|\xi| < a$ ou $|\xi| > b$.

Nous avons $\widehat{\lambda}(2^{-j}\cdot)\widehat{g_k} = 0$ si $j \neq k$ et $\widehat{\lambda}(2^{-j}\cdot)\widehat{g_j} = \widehat{g_j}$, alors par (1.13) on a

$$\begin{aligned}
\Big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \left(v_\mu \left(2^{-j}\right) |g_j(\cdot)| \right)^q \Big)^{1/q} \Big\|_p &= \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \left(v_\mu \left(2^{-j}\right) \left| \left((2^{jn}\lambda(2^{-j}\cdot)) * g_j \right)(\cdot) \right| \right)^q \Big)^{1/q} \Big\|_p \\
&= \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \left(v_\mu \left(2^{-j}\right) (2^{jn}\lambda(2^{-j}\cdot)) * \Big(\sum_{k=0}^{\infty} g_k \Big) \right)^q \Big)^{1/q} \Big\|_p \\
&\leq c \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} g_k \Big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}.
\end{aligned}$$

Pour la preuve de (iv) on raisonne de la même façon qu'en (i). Nous émiettons les détailles

■

Proposition 1.32 *Soit $0 < p \leq \infty$. Soit $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ une suite de fonctions telle que le support de $\widehat{f_j}$ est dans la boule $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq c\, 2^j\}$. Alors*

$$|f_j(y)| \leq 2^{jn/p} \left(\int \left(1 + 2^j |y-z|\right)^{-Lp} |f_j(z)|^p \, dz \right)^{1/p}, \quad p, L > 0.$$

Preuve. Si $1 \leq p \leq \infty$, en appliquant l'inégalité de Hölder.

Pour $0 < p < 1$, on pose

$$f_j^{*,N}(x) = \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \frac{|f_j(z)|}{\left(1 + 2^j |z-x|\right)^N}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ tel que supp$\mathcal{F}\varphi = 1$ sur le support de $\widehat{f_j}$. Donc

$$\widehat{f_j} = \mathcal{F}\varphi\left(2^{-l}\cdot\right)\widehat{f_j}$$

et

$$\begin{aligned} |f_j(z)| &= \left|2^{jn}\varphi\left(2^j\cdot\right) * f_j(z)\right| \\ &\leq c\, 2^{jn}\int\left(1+2^j|z-y|\right)^{-N}|f_j(y)|\,dy. \end{aligned}$$

On sait que

$$\left(1+2^j|z-y|\right)^{-N} \leq \left(1+2^j|z-x|\right)^{N}\left(1+2^j|x-y|\right)^{-N},$$

d'ou

$$\begin{aligned} \frac{|f_l(z)|}{(1+2^j|x-z|)^N} &\leq 2^{jn}\int\left(1+2^j|x-y|\right)^{-N}|f_j(y)|\,dy \\ &= 2^{jn}\int\left(1+2^j|x-y|\right)^{-N}|f_j(y)|^{1-p}|f_j(y)|^p\,dy. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f_j^{*,N}(x) &\leq 2^{jn}\int\left(1+2^j|x-y|\right)^{-N}|f_j(y)|^{1-p}|f_j(y)|^p\,dy \\ &\leq 2^{jn}\int\left(1+2^j|x-y|\right)^{-N}|f_j(y)|^{1-p}|f_j(y)|^p\,dy \\ &\leq 2^{jn}\int\left(\left(1+2^j|x-y|\right)^{-N}|f_j(y)|\right)^{1-p}\left(1+2^j|x-y|\right)^{-Np}|f_j(y)|^p\,dy \\ &\leq \left(f_j^{*,N}(x)\right)^{1-p}2^{jn}\int\left(1+2^j|x-y|\right)^{-Np}|f_j(y)|^p\,dy \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left(f_j^{*,N}(x)\right)^p \leq 2^{jn} \int \left(1+2^j|x-y|\right)^{-Np} |f_j(y)|^p \, dy,$$

mais

$$f_j(x) \leq f_j^{*,N}(x)$$

donc le résultat. ∎

Proposition 1.33 *Soient* $0 < p \leq \infty$ *et* $\gamma > 0$. *Pour toute suite* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap L^p$, *telle que* $\mathrm{supp}\widehat{f_j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \gamma 2^j\}$, *on a*

$$\|S_k f_j\|_p \leq c 2^{(j-k)\epsilon} \|f_j\|_p$$

avec $j = k, k+1, ...$ *et* $\epsilon = \max(0, \frac{n}{p} - n)$. *La constante* c *dépend uniquement de* n, p *et* γ.

Preuve. On a

$$|S_k f_j(x)| \leq c\, 2^{kn} \int \left(1+2^k|x-y|\right)^{-N} |f_j(y)| \, dy.$$

Si $1 \leq p \leq \infty$, en appliquant l'inégalité de Hölder, on a

$$|f_j(y)| \leq 2^{jn/p} \left(\int \left(1+2^j|y-z|\right)^{-Lp} |f_j(z)|^p \, dz\right)^{1/p}, \quad p, L > 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} |S_k f_j(x)| &\leq 2^{kn+jn/p} \int \left(1+2^k|x-y|\right)^{-N} \left(\int \left(1+2^j|y-z|\right)^{-Lp} |f_j(z)|^p \, dz\right)^{1/p} dy \\ &= 2^{kn+jn/p} \left(\int \left(\int \left(1+2^k|x-z|\right)^{-Np} \left(1+2^j|y-z|\right)^{-Lp} |f_j(z)|^p \, dz\right)^{1/p} dy\right)^{p/p} \end{aligned}$$

On sait que $1 < 1/p$, la dernière formule est majorée par

$$\begin{aligned} & 2^{kn+jn/p}\left(\int\left(\int\left(1+2^k\left|x-z\right|\right)^{-N}\left(1+2^j\left|y-z\right|\right)^{-L}\left|f_j(z)\right|dy\right)^p dz\right)^{1/p} \\ = \ & 2^{kn+jn/p}\left(\int\left|f_j(z)\right|^p\left(1+2^k\left|x-z\right|\right)^{-Np}\left(\int\left(1+2^j\left|y-z\right|\right)^{-L}dy\right)^p dz\right)^{1/p} \\ \leq \ & 2^{kn+j(n/p-n)}\left(\int\left|f_j(z)\right|^p\left(1+2^k\left|x-z\right|\right)^{-Np}dz\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left\|S_k f_j\right\|_p & \leq 2^{kn+j(n/p-n)}\left(\int\int\left|f_j(z)\right|^p\left(1+2^k\left|x-z\right|\right)^{-N}dzdx\right)^{1/p} \\ & \leq 2^{(k-j)(n-n/p)}\left\|f_j\right\|_p. \end{aligned}$$

■

Chapitre 2

Généralités sur les opérateurs pseudo-différentiels

Ce chapitre est consacré à une préparation sur les opérateurs pseudo-différentiels, en particulier certaines définitions (classe de Hörmander, module de continuité,...) et la décomposition en symboles élémentaires introduite par Coifman et Meyer dans les années 1978 (voir [9]).

2.1 Une classe de Hörmander

L'étude de l'opérateur linéaire $f \longmapsto Tf(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$ sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ par exemple nécessite de supposer une ou plusieurs conditions sur la fonction $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $(x,\xi) \longmapsto \sigma(x,\xi)$. A cet effet il est très naturel de considérer (au moins) la condition de Hörmander, i.e

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|}. \tag{2.1}$$

Passer à d'autre espaces (Sobolev par exemple) nous aurons besoin que $\sigma(x,\xi)$ vérifie, en plus de (2.1), d'autres conditions. C'est pourquoi on fait appel à un module de continuité.

On a la définition suivante :

Définition 2.1 *Nous appellerons module de continuité toute fonction* $\omega : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *qui est continue, croissante, concave et telle que* $\lim_{t\to 0^+} \omega(t) = 0$.

Example 2.2 *Quelques exemples sur les fonctions* ω.

- $\omega(h) = h^\delta$, *si* $0 < \delta < 1$.
- $\omega(h) = (\log \frac{1}{h})^{-\delta}$, $0 < \delta$, *pour* $0 < h \leq \frac{1}{2}$.

Remarque 2.3 Le module de continuité ω permettra de mesurer la régularité minimale en x d'un symbole $\sigma(x, \xi)$.

Définition 2.4 *On appelle* $S^m_{1,\delta}(\omega, N)$, *pour* $N \in \mathbb{N}$, *la classe des symboles* $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *pour tout* α *et* β *dans* $\mathbb{N}^n$, *tels que* $|\beta| \leq N$ *de degré* m *et de type* $(1, \delta)$, *définie par les inégalités suivantes. Ils existent* $C_1 = C_{\alpha,\beta} > 0$ *et* $C_2 = C_{\alpha,\beta} > 0$ *tels que :*

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi)\right| \leq C_1 (1 + |\xi|)^{m - |\alpha| + \delta|\beta|}, \tag{2.2}$$

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x + h, \xi) - \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi)\right| \leq C_2 \omega(|h| \, |\xi|^\delta)(1 + |\xi|)^{m - |\alpha| + \delta|\beta|}, \tag{2.3}$$

où $0 \leq \delta < 1$, $m \geq 0$ *et* ω *un module de continuité.*

Example 2.5 *Si* $\vartheta(\xi)$ *est une fonction* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, *homogène de degré* m *(i.e.* $\vartheta\left(\lambda^{-1} x\right) = \lambda^{-m} \vartheta(x)$ *pour toute* $\lambda > 0$*), et si* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *vaut* 1 *autour de* 0. *Alors* $(1 - \varphi(\xi))\vartheta(\xi)$ *est un symbole de degré* m *du type* $(1, 0)$.

En effet par la formule de Leibniz, on a

$$\partial^\alpha (1 - \varphi(\xi))\vartheta(\xi) = \sum_{\alpha \geq \gamma \geq 0} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha - \gamma)!} \partial^\alpha (1 - \varphi(\xi)) \partial^{\alpha - \gamma} \vartheta(\xi),$$

la fonction $\xi \mapsto (1-\varphi(\xi))\vartheta(\xi)$ *est* C^{∞} *sur* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, *pour* $\xi = 0$ *elle est définie car* $\varphi(0) = 1$, *donc l'homogénéité de* ϑ *donne*

$$\lambda^{-|\alpha-\gamma|}\partial^{\alpha-\gamma}\vartheta\left(\lambda^{-1}x\right) = \lambda^{-m}\partial^{\alpha-\gamma}\vartheta\left(x\right),$$

par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\left|\partial^{\alpha}(1-\varphi(\xi))\partial^{\alpha-\gamma}\vartheta(\xi)\right| &= (1+|\xi|)^{m-|\alpha-\gamma|}\left\|\partial^{\alpha}(1-\varphi(\xi))\partial^{\alpha-\gamma}\vartheta(\frac{\xi}{1+|\xi|})\right\| \\
&\leq (1+|\xi|)^{m-|\alpha|}\sup_{|\gamma|\leq|\alpha|}((1+|\xi|)^{|\gamma|})\left\|\partial^{\alpha}(1-\varphi(\xi))\partial^{\alpha-\gamma}\vartheta(\frac{\xi}{1+|\xi|})\right\| \\
&\leq \Im_{|\alpha|}((1-\varphi(\xi))\vartheta(\frac{\xi}{1+|\xi|}))(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de poser $c = \Im_{|\alpha|}((1-\varphi(\xi))\vartheta(\frac{\xi}{1+|\xi|}))$.

Définition 2.6 *Soit* $\sigma \in S^m_{1,\delta}(\omega, N)$. *L'opérateur pseudo-différentiel de symbole* σ *est noté* $\sigma(x, D)$, *tel que pour toute* $f \in \mathcal{S}$ *on a*

$$\sigma(x,D)f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi\,.$$

L'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m, *associé à la classe* $S^m_{1,\delta}(\omega, N)$ *sera noté* $OP^m_{1,\delta}(\omega, N)$.

Remarque 2.7 L'espace des symboles vérifiant (2.2) est un espace de Fréchet pour les semis normes suivantes :

$$\pi_{\alpha,L}\left(\sigma\right) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n,|\beta|\leq L}\frac{\left|\partial_{\xi}^{\alpha}\partial_{x}^{\beta}\sigma(x,\xi)\right|}{(1+|\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|}}.$$

Il en est de même pour l'espace des symboles vérifiant (2.3) avec les semis normes :

$$\widetilde{\pi}_{\alpha,L}(\sigma) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n, |\beta|\leq L} \frac{\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(x+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(x,\xi)\right|}{\omega(|h|\,|\xi|^\delta)(1+|\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|}}.$$

2.2 Réduction aux symboles élémentaires.

Comme l'étude d'un tel opérateur pseudo-différentiels $\sigma(x,D)$ dépend des propriétés de son symbole $\sigma(x,\xi)$, il est très naturel que toute simplification sera porté sur $\sigma(x,\xi)$, en particulier la séparation entre les variables x et ξ. Ce qui nous ramène à la réduction aux symboles élémentaires à variables séparées.

Définition 2.8 *Soit $a > 0$. Soit ω module de continuité. L'espace $C^{a,\omega}$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$\left\|f\right\|_{C^{a,\omega}} = \left\|f\right\|_{C_b^{[a]}} + \sum_{|\beta|=[a]} \sup_{h\neq 0} \frac{\left\|f^{(\beta)}(\cdot+h) - f^{(\beta)}\right\|_\infty}{\omega(|h|)} < +\infty.$$

Remarque 2.9 Si $\omega(t) = t^{a-[a]}$, alors $C^{a,\omega}$ coïncide avec l'espace de Hölder C^a.

Définition 2.10 *Nous dirons que $\sigma \in S^m_{1,\delta}(\omega,N)$ est un symbole élémentaire, s'il existe une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ portée par la couronne $2^{-1} \leq |\xi| \leq 2$ et une suite $\{\mathcal{M}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $C^{a,\omega}$ telle que*

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} v_\mu(2^{-jm/\mu})\mathcal{M}_j(2^{\delta j}x)\theta(2^{-j}\xi). \tag{2.4}$$

La proposition suivante reprend une méthode due à Coifman et Meyer ([9], proposition 5, p.146), elle consiste à décomposer tout symbole de la classe $S^m_{1,\delta}$ sous forme élémentaire.

Proposition 2.11 *Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et υ_μ une fonction de type μ. Pour tout entier pair $L \geq n+1$, tout élément σ de $S^m_{1,\delta}(\omega, N)$ peut s'écrire sous la forme*

$$\sigma(x,\xi) = \tau(x,\xi) + \int_{\mathbb{R}^n} (1+|u|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \sigma_u(x,\xi)du, \tag{2.5}$$

où σ_u est un symbole élémentaire de $S^m_{1,\delta}(\omega, N)$, i.e.

$$\sigma_u(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon_\mu(2^{-jm/\mu}) \mathcal{M}_{j,u}(2^{j\delta}x)\theta_u(2^{-j}\xi), \tag{2.6}$$

avec $\left\{\mathcal{M}_{j,u}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$, convergant uniformément (en $u \in \mathbb{R}^n$) dans $C^{a,\omega}$, et $\theta_u \in C_0^\infty$ une fonction vérifiant l'inégalité

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^n} \left\|\partial_\xi^\alpha \theta_u\right\|_\infty \leq c \quad \textit{pour} \quad |\alpha| \leq L-n-1, \tag{2.7}$$

et

$$\tau(x,\xi) = 0 \quad \textit{pour} \quad |\xi| \geq 1 \tag{2.8}$$

et que

$$\left\|\partial_\xi^\alpha \tau(\cdot,\xi)\right\|_{C_b^N} \leq c\pi_{|\alpha|,N}(\sigma) \quad \textit{et} \quad \left\|\partial_\xi^\alpha \tau(\cdot+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha \tau(\cdot,\xi)\right\|_{C_b^N} \leq c\widetilde{\pi}_{|\alpha|,N}(\sigma)\omega(|h|). \tag{2.9}$$

Preuve. Nous décomposons $\sigma(x,\xi)$ à l'aide d'une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 si $|\xi| \leq 2^{-1}$ et 0 en dehors de $|\xi| \leq 1$, on a

$$\sigma(x,\xi) = \rho(x,\xi) + \tau(x,\xi),$$

où

$$\rho(x,\xi) = (1-\phi(\xi))\sigma(x,\xi) \quad \text{et} \quad \tau(x,\xi) = \phi(\xi)\sigma(x,\xi).$$

Etape 1. Nous étudions le premier terme $\rho(x,\xi)$:

On part d'une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ réelle portée par $2^{-1} \leq |\xi| \leq 2$, telle que pour $|\xi| \geq 2^{-1}$, et vérifiant :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta^2(2^{-j}\xi) = 1, \qquad \forall \xi : |\xi| \geq \frac{1}{2}.$$

(Pour la construction de θ, voir par exemple [1], lemme 6.1.7). On pose

$$\sigma_j(x,\xi) = (v_\mu(2^{-jm/\mu}))^{-1}\theta(\xi)\rho(2^{-\delta j}x, 2^j\xi),$$

et

$$\sigma_j(x,\xi) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{iu\cdot\xi}(1+|u|^2)^{-\frac{L}{2}}\mathcal{M}_{j,u}(x)du \tag{2.10}$$

où

$$\mathcal{M}_{j,u}(x) = \int_{2^{-1}\leq|\xi|\leq 2} e^{-iu\cdot\xi}(1-\Delta_\xi)^{\frac{L}{2}}\sigma_j(x,\xi)d\xi.$$

Nous allons vérifier que $\{\mathcal{M}_{j,u}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^{a,\omega}$. Soit $\beta \in N$ avec $|\beta| \leq N$, alors

$$\partial_x^\beta \mathcal{M}_{j,u}(x) = \int_{2^{-1}\leq|\xi|\leq 2} e^{-iu\cdot\xi}(1-\Delta_\xi)^{\frac{L}{2}}\partial_x^\beta\sigma_j(x,\xi)d\xi.$$

On observe que $(1-\Delta_\xi)^{\frac{L}{2}}\partial_x^\beta\sigma_j(x,\xi)$ est une combinaison linéaire finie de termes

$$2^{(|\alpha|-\delta|\beta|)j}(v_\mu(2^{-jm/\mu}))^{-1}\theta^{(\gamma)}(\xi)\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\rho(2^{-\delta j}x, 2^j\xi) \quad \text{avec} \quad |\gamma|+|\alpha| = L.$$

Par l'inégalité (1.8) nous avons $(v_\mu(2^{-jm/\mu}))^{-1} \leq c2^{-jm}$, alors l'inégalité (2.2) donne

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^\beta \mathcal{M}_{j,u}(x)\right| &\leq c_1(v_\mu(2^{-jm/\mu}))^{-1} \sum_{|\gamma|+|\alpha|=L} 2^{(|\alpha|-\delta|\beta|)j} \\
&\quad \times \int_{2^{-1}\leq|\xi|\leq 2} \left|\theta^{(\gamma)}(\xi)\right| (2^{-j}+|\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|} d\xi \\
&\leq c_2 \pi_{|\alpha|,L}(\sigma) \sum_{|\gamma|+|\alpha|=L} \int_{2^{-1}\leq|\xi|\leq 2} \left|\theta^{(\alpha)}(\xi)\right| (2^{-j}+|\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|} d\xi.
\end{aligned}$$

L'estimation est évident si $m-|\alpha|+\delta|\beta| \geq 0$ d'une part. D'autre part si $m-|\alpha|+\delta|\beta| = -\eta < 0$ nous introduisons un entier N tel que $n+N > \eta$. Nous avons $\left|\theta^{(\alpha)}(\xi)\right| \leq c(1+|\xi|)^{-N}$, par conséquent on trouve $\left\|\partial_x^\beta \mathcal{M}_{j,u}(x)\right\|_\infty \leq c$. De même pour l'estimation

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^\beta \mathcal{M}_{j,u}(x+h) - \partial_x^\beta \mathcal{M}_{j,u}(x)\right| &\leq c_1 \widetilde{\pi}_{|\alpha|,L}(\sigma) \sum_{|\gamma|+|\alpha|=L} \int_{2^{-1}\leq|\xi|\leq 2} \left|\theta^{(\gamma)}(\xi)\right| \\
&\quad \times \omega(|h|(1+2^{\delta j}|\xi|^\delta))(2^{-j}+|\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|} d\xi \\
&\leq c_2 \widetilde{\pi}_{|\alpha|,L}(\sigma)\omega(|h|) \sum_{|\gamma|+|\alpha|=L} \int_{2^{-1}\leq|\xi|\leq 2} \left|\theta^{(\gamma)}(\xi)\right| \\
&\quad \times (2^{-j}+|\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|}(1+2^{\delta j}|\xi|^\delta) d\xi \\
&\leq c_3 \omega(|h|),
\end{aligned}$$

par conséquent $\left\|\partial_x^\beta \mathcal{M}_{j,u}(\cdot+h) - \partial_x^\beta \mathcal{M}_{j,u}(\cdot)\right\|_\infty \leq c\omega(|h|)$.

Revenons à la construction de $\sigma_u(x,\xi)$: Par les différentes égalités (2.10), on a

$$\begin{aligned}
\rho(x,\xi) &= \sum_{j=0}^{\infty} (\theta(2^{-j}\xi))^2 \rho(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} v_\mu(2^{-jm/\mu})\theta(2^{-j}\xi)\sigma_j(2^{\delta j}x, 2^{-j}\xi) \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|u|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \Big\{(1+|u|^2)^{\frac{n+1-L}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} v_\mu(2^{-jm/\mu}) \\
&\quad \times e^{i2^{-j}u\cdot\xi}\theta(2^{-j}\xi)\mathcal{M}_{j,u}(2^{\delta j}x)\Big\} du.
\end{aligned}$$

On pose, enfin

$$\theta_u(\xi) = (2\pi)^{-n}(1+|u|^2)^{\frac{n+1-L}{2}} e^{iu\cdot\xi}\theta(\xi),$$

et

$$\sigma_u(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} v_\mu(2^{-jm/\mu})\mathcal{M}_{j,u}(2^{\delta j}x)\theta_u(2^{-j}\xi).$$

Pour terminer, il reste à vérifier les estimations (2.7) :

$$\partial_\xi^\alpha \theta_u(\xi) = (2\pi)^{-n}(1+|u|^2)^{\frac{n+1-L}{2}} e^{iu\cdot\xi} \sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}(iu)^\gamma \theta^{(\alpha-\gamma)}(\xi),$$

pour tous $u \in \mathbb{R}^n$, on a $|u|^{|\gamma|}(1+|u|^2)^{\frac{n+1-L}{2}} \leq 1$ dès que $|\gamma| \leq L-n-1$, donc

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^n} \left\|\partial_\xi^\alpha \theta_u\right\|_\infty \leq C \quad \text{pour} \quad |\alpha| \leq L-n-1.$$

Etape 2. En suite, nous étudions le second terme $\tau(x,\xi)$: On écrit $\tau(x,\xi)$ sous la forme

$$\tau(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|u|^2)^{-2n} e^{iu\cdot\xi} a_u(x)du \tag{2.11}$$

où

$$a_u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iu\cdot\xi}(1-\Delta_\xi)^{2n}\tau(x,\xi)d\xi. \tag{2.12}$$

Il est facile d'obtenir les estimations suivantes

$$\left\|\partial_\xi^\alpha \tau(\cdot,\xi)\right\|_{C_b^N} \leq c\pi_{|\alpha|,N}(\sigma) \tag{2.13}$$

et

$$\left\|\partial_\xi^\alpha \tau(\cdot+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha \tau(\cdot,\xi)\right\|_{C_b^N} \leq c\widetilde{\pi}_{\alpha,N}(\sigma)\omega(|h|). \tag{2.14}$$

Si $|\beta| \leq N$, les inégalités (2.13) et (2.14) impliquent les deux inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^\beta a_u(x)\right| &= \left|(2\pi)^{-n} \int_{|\xi|\leq 1} e^{-iu\cdot\xi}(1-\Delta_\xi)^{2n}\partial_x^\beta \tau(x,\xi)d\xi\right| \\ &\leq c\pi_{4n,N}(\sigma) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^\beta a_u(x+h) - \partial_x^\beta a_u(x)\right| &\leq c_1 \widetilde{\pi}_{4n,N}(\sigma) \int_{|\xi|\leq 1} \omega(|h|\,|\xi|^\delta)d\xi \\ &\leq c_2 \widetilde{\pi}_{4n,N}(\sigma)\omega(|h|) \int_{|\xi|\leq 1} (1+|\xi|^\delta)d\xi \\ &\leq c_3\omega(|h|), \end{aligned}$$

où les constants c,...,c_3 sont indépendants de u. Alors nous obtenons

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^n} \|a_u\|_{C^{N,\omega}} < +\infty.$$

■

Chapitre 3

Continuité des *o.ps.d* d'ordre m sur l'espace $F^v_{p,q}$

3.1 Énoncé du théorème principal

Le théorème suivant concerne la continuité d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m sur les $F^v_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Il est à noter qu'on dispose de la continuité d'un tel *o.ps.d* sur $L^p(\mathbb{R}^n)$, $H^s_p(\mathbb{R}^n)$, l'espace de $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et de $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, mais sur des espaces à caractères général, nous avons peu de travaux.

Théorème 3.1 *Soient $\mu > 0$, $\eta > 0$, $1 < p < \infty$, $1 < q \leq \infty$, $0 \leq \delta < 1$ et $N \in \mathbb{N}$. Soit v_μ une fonction de type μ. Si ω est un module de continuité vérifiant*

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \big(v_\mu\left(2^{-k}\right) 2^{-(1-\delta)kN} \omega(2^{-(1-\delta)k})\big)^q\Big)^{1/q} < +\infty, \tag{3.1}$$

alors tout opérateur $\sigma(x,D) \in OP^m_{1,\delta}(\omega, N)$ est borné de $F^{\widetilde{v}_{\mu+m}}_{p,q}$ dans $F^{v_\mu}_{p,q}$, avec $\widetilde{v}_{\mu+m}(t) = v_\mu(t)v_\mu(t^{m/\mu})$ une fonction de type $\mu + m$.

3.2 Lemmes de préparation

Lemme 3.2 *Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour toute suite $\left\{M_j^{(\beta)}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $C^{N,\omega}$ on a*

$$\left\| S_k \left(\mathcal{M}_j \left(2^{j\delta} \cdot \right) \right) \right\|_\infty \leq c(\sup_{\ell \in \mathbb{N}} \|\mathcal{M}_\ell\|_{C^{N,\omega}}) 2^{(j\delta - k)N} \omega(2^{j\delta - k}) \qquad (\forall j, k \in \mathbb{N}).$$

Preuve. Par le développement de Taylor on a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_j (x-y) &= \sum_{|\beta|<N} \frac{(-y)^\beta}{\beta!} \mathcal{M}_j^{(\beta)} (x) + N \sum_{|\beta|=N} \frac{(-y)^\beta}{\beta!} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \mathcal{M}_j^{(\beta)} (x-ty)\, dt \\ :&= \sum_{|\beta|\leq N} \frac{(-y)^\beta}{\beta!} \mathcal{M}_j^{(\beta)} (x) + R_j (x,y), \end{aligned}$$

tel que

$$R_j (x,y) = N \sum_{|\beta|=N} \frac{(-y)^\beta}{\beta!} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \left(\mathcal{M}_j^{(\beta)} (x-ty) - \mathcal{M}_j^{(\beta)} (x) \right) dt.$$

Par la concavité de ω on obtient

$$|R_j (x,y)| \leq C |y|^N \omega (|y|).$$

Puisque $0 \notin \operatorname{supp}\phi$ on a

$$2^{nk} \int_{\mathbb{R}^n} (-y)^\beta \mathcal{F}^{-1} (\phi) \left(2^k y\right) dy = \left(i 2^{-k}\right)^{|\beta|} \phi^{(\beta)} (0) = 0,$$

donc

$$\begin{aligned}
\left|S_k\left(\mathcal{M}_j\left(2^{j\delta}\cdot\right)\right)(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}(\phi)(y)\, R_j\left(2^{j\delta}x, 2^{j\delta-k}y\right) dy\right| \\
&\leq c_1(\sup_{j\in\mathbb{N}} \|\mathcal{M}_j\|_{C^{N,\omega}}) 2^{(j\delta-k)N} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{F}^{-1}(\phi)(y)\right| |y|^N \omega\left(2^{j\delta-k}|y|\right) dy \\
&\leq c_2 2^{(j\delta-k)N}\omega\left(2^{j\delta-k}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{F}^{-1}(\phi)(y)\right| |y|^N (1+|y|)\, dy \\
&\leq c_3 2^{(j\delta-k)N}\omega\left(2^{j\delta-k}\right) \qquad (\forall x\in\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Par conséquent nous obtenons le résultat. ■

Proposition 3.3 *Soient $\mu\in\mathbb{R}$, $\eta>0$, $1<p<\infty$, $1<q\leq\infty$, $0\leq\delta<1$, $N\in\mathbb{N}$ et v_μ une fonction de type μ. Si ω est un module de continuité vérifiant* (3.1). *Alors il existe une constante $c>0$ telle que l'inégalité suivante*

$$\Big\|\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{M}\left(2^{j\delta}\cdot\right) f_j\Big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \leq c\,\Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\left(v_\mu(2^{-j})\,|f_j(\cdot)|\right)^q\Big)^{1/q}\Big\|_p$$

est vérifié pour toute suite $\left\{\mathcal{M}^{(\beta)}_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $C^{N,\omega}$ et toute suite de fonctions $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}'$ vérifiant $\operatorname{supp}\mathcal{F}f_j\subset\left\{\xi\in\mathbb{R}^n : |\xi|\leq\eta 2^j\right\}$.

Remarque 3.4 Si v_μ est croissante, alors (3.1) est une condition du type de Dini, i.e. (3.1) est équivalent à

$$\left(\int_0^1\left(t^{(1-\delta)N}v_\mu(t)\,\omega(t^{1-\delta})\right)^q\right)^{1/q} < +\infty.$$

Preuve de la proposition 3.3. Par l'égalité (1.3) on obtient

$$\mathcal{M}_j = Q_j\mathcal{M}_j + \sum_{k=j+1}^{\infty} S_k\mathcal{M}_j,$$

ce qui implique que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_j \left(2^{j\delta}\cdot\right) f_j = h_1 + h_2,$$

où

$$h_1 = \sum_{j=0}^{\infty} f_j Q_j(\mathcal{M}j \left(2^{j\delta}\cdot\right)) \qquad \text{et} \qquad h_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{k-1} f_j S_k(\mathcal{M}j \left(2^{j\delta}\cdot\right))\Big).$$

Pour l'estimation de h_1, nous avons $Q_j(\mathcal{M}_j(2^{j\delta}\cdot))$ est à spectre dans $|\xi| \leq 2^{j+1}$ et

$$\left|Q_j(\mathcal{M}_j \left(2^{j\delta}\cdot\right))\right| \leq c \left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi\right\|_1 \sup_{j\in\mathbb{N}} \|\mathcal{M}_j\|_{\infty}. \tag{3.2}$$

Puisque

$$\operatorname{supp} \mathcal{F} \left(f_j Q_j(\mathcal{M}_j \left(2^{j\delta}\cdot\right))\right) \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq (\eta+2)\, 2^j\right\}.$$

Alors l'estimation de h_1 en norme de $F^{v_\mu}_{p,q}$, relève du proposition 1.31/(iv), et l'inégalité (3.2). Ce qui donne

$$\begin{aligned}
\left\|h_1\right\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} &\leq c_1 \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} (v_\mu(2^{-j}) \left|f_j Q_j(\mathcal{M}_j \left(2^{j\delta}\cdot\right))\right|)^q \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\|_p \\
&\leq c_2 \big(\sup_{j\geq 0} \left\|\mathcal{M}_j\right\|_{C^{N,\omega}} \big) \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} (v_\mu(2^{-j}) \left|f_j(\cdot)\right|)^q \Big)^{\frac{1}{q}} \Big\|_p.
\end{aligned}$$

Pour l'estimation de h_2 en norme de $F^{v_\mu}_{p,q}$ on a

$$\operatorname{supp} \mathcal{F} \Big(\sum_{j=0}^{k-1} f_j S_k(\mathcal{M}_j \left(2^{j\delta}\cdot\right)) \Big) \subset \Big\{ \xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \big(\frac{\eta}{2}+2\big) 2^k \Big\}.$$

Alors par la proposition 1.31/(iii) et le lemme 3.2 on obtient

$$\begin{aligned}
\|h_2\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} &= \| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} f_j S_k \mathcal{M}_j \left(2^{j\delta} \cdot\right) \|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \\
&\leq c_1 \big\| \big(\sum_{k=1}^{\infty} \big(v_\mu(2^{-k}) \sum_{j=0}^{k-1} \| S_k \mathcal{M}_j \left(2^{j\delta} \cdot\right) \|_\infty |f_j(\cdot)| \big)^q \big)^{1/q} \big\|_p \\
&\leq c_2 \big\| \big(\sum_{k=1}^{\infty} \big(v_\mu(2^{-k}) \sum_{j=0}^{k-1} 2^{(j\delta-k)N} \omega(2^{j\delta-k}) |f_j(\cdot)| \big)^q \big)^{1/q} \big\|_p .
\end{aligned}$$

La croissance de ω permet d'obtenir

$$c_3 \big\| \big(\sum_{k=1}^{\infty} \big(v_\mu(2^{-k}) 2^{-(1-\delta)kN} \omega(2^{-(1-\delta)k}) \sum_{j=0}^{k-1} |f_j(\cdot)| \big)^q \big)^{1/q} \big\|_p .$$

Par l'inégalité de Hölder et l'hypothèse (3.1) on a

$$\begin{aligned}
\|h_2\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} &\leq c_4 \big(\sum_{k=1}^{\infty} \big(v_\mu(2^{-k}) 2^{-(1-\delta)kN} \omega(2^{-(1-\delta)k}) \big)^q \big)^{1/q} \big\| \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\mu} v_\mu(2^{-j}) |f_j(\cdot)| \big\|_p \\
&\leq c_5 \big(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\mu q'} \big)^{1/q'} \big\| \big(\sum_{j=0}^{\infty} v_\mu(2^{-j}) |f_j(\cdot)| \big)^q \big)^{1/q} \big\|_p \\
&\leq c_6 \big\| \big(\sum_{j=0}^{\infty} v_\mu(2^{-j}) |f_j(\cdot)| \big)^q \big)^{1/q} \big\|_p .
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.5 *Soient $\mu > 0$, $\eta > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ et $1 < q \leq \infty$. Soit v_μ une fonction de type μ. Soit ω un module de continuité vérifiant* (3.1). *Alors il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\|f \cdot g\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \leq c \|f\|_{C^{N,\omega}} \|g\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}$$

pour toute $f \in C^{N,\omega}$ et pour toute $g \in F^{v_\mu}_{p,q}$.

Preuve. Soient $f \in C^{N,\omega}$ et $g \in F^{v_\mu}_{p,q}$. Le produit $f \cdot g$ se décompose en :

$$f \cdot g = \sum_{j=0}^{\infty}(Q_j f)(S_j g) + \sum_{k=1}^{\infty}(S_k f)(Q_{k-1} g)$$

$(Q_j f)(S_j g)$ ayant son spectre dans la boule $|\xi| \leq 4 \cdot 2^j$, on peut donc (grâce à l'hypothèse $\mu > 0$) appliquer (iv) de la proposition 1.31, ce qui donne

$$\big\| \sum_{j=0}^{\infty}(Q_j f)(S_j g)\big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \leq c\big\|f\big\|_\infty \big\|g\big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}.$$

En utilisant le lemme 3.2 en changeant de f par $\mathcal{M}_j$, et nous procédons comme dans l'évaluation de h_2 dans la preuve de la proposition 3.3. Par la proposition 1.31/(iv) (car $\mathcal{F}((S_k f)(Q_{k-1} g))$ ayant son spectre dans la boule $|\xi| \leq 3 \cdot 2^k$), on a

$$\begin{aligned}
\big\| \sum_{k=1}^{\infty}(S_k f)(Q_{k-1} g)\big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} &\leq c_1 \big\|\big(\sum_{k=1}^{\infty} \big(v_\mu(2^{-k})\, |(S_k f)(Q_{k-1} g)|\,\big)^q\big)^{1/q}\big\|_p \\
&\leq c_2 \big(\sum_{k=1}^{\infty} \big(2^{-Nk} v_\mu(2^{-k})\omega(2^{-k})\big)^q\big)^{1/q} \big\|f\big\|_{C^{N,\omega}} \big\|g\big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \\
&\leq c_3 \big\|f\big\|_{C^{N,\omega}} \big\|g\big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}.
\end{aligned}$$

■

3.3 Preuve du théorème principal

Etape 1. Suivant la proposition 2.11, le symbole $\sigma \in S^m_{1,\delta}(\omega, N)$ de $\sigma(x, D)$ se décompose en

$$\tau(x,\xi) \; + \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |u|^2)^{-(n+1)/2} \sigma_u(x,\xi) du\,,$$

voir (2.6) et (2.8). Pour l'opérateur associe au symbole élémentaire $\sigma_u(x,\xi)$, on applique la proposition 3.3 ce qui donne

$$\begin{aligned}
\left\|\sigma_u(x,D)f\right\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} &= \Big\|\sum_{j=0}^{\infty} v_\mu(2^{-jm/\mu})\mathcal{M}_{j,u}(2^{j\delta}\cdot)\mathcal{F}^{-1}(\theta_u(2^{-j}\cdot)\hat{f}(\cdot))\Big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \\
&= \Big\|\sum_{j=0}^{\infty} v_\mu(2^{-jm/\mu})\mathcal{M}_{j,u}(2^{j\delta}\cdot)f_j(\cdot)\Big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \\
&\leq c_1\Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\big(v_\mu(2^{-j})v_\mu(2^{-jm/\mu})\left|f_j(\cdot)\right|\big)^q\Big)^{1/q}\Big\|_p,
\end{aligned}$$

où $f_j(x)=\mathcal{F}^{-1}(\theta_u(2^{-j}\cdot)\hat{f}(\cdot))(x)$. Et comme la suite f_j est à spectre dans la boule $|x|<\gamma 2^j$. D'après la proposition 1.31/(ii) nous avons

$$\Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\big(v_\mu(2^{-j})v_\mu(2^{-jm/\mu})\left|f_j(\cdot)\right|\big)^q\Big)^{1/q}\Big\|_p \leq c_2\Big(\sup_{|\alpha|\leq L,\ u\in\mathbb{R}^n}\left\|\theta_u^{(\alpha)}\right\|_\infty\Big)\left\|f\right\|_{F^{\tilde{v}_\mu+m}_{p,q}}$$

où $(L=[n/2]+1)$ et $\sup_{|\alpha|\leq L,\ u\in\mathbb{R}^n}\left\|\theta_u^{(\alpha)}\right\|_\infty\leq c_3$, donc on a

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^n}\left\|\sigma_u(\cdot,D)f\right\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}\leq c_4\left\|f\right\|_{F^{\tilde{v}_\mu+m}_{p,q}}.$$

Etape 2. Nous prouvons la continuité de l'o.ps.d associe au symbole $\tau(x,\xi)$. D'aprés (2.11) et (2.12), on a

$$\tau(x,D)f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}(1+|u|^2)^{-2n}a_u(x)f(x+u)\mathrm{d}u.$$

Alors le lemme 3.5, l'invariance de la norme de $F^{v_\mu}_{p,q}$ par translation et l'inégalité $v_\mu(2^{-j})\leq$

$cv_\mu(2^{-j})v_\mu(2^{-jm/\mu})$ donnent aussitôt

$$\begin{aligned}
\left\|\tau(x,D)f\right\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} &\leq \int_{\mathbb{R}^n}(1+|u|^2)^{-2n}\left\|a_u(\cdot)f(\cdot+u)\right\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}\mathrm{d}u \\
&\leq c_1\big(\sup_{u\in\mathbb{R}^n}\|a_u\|_{C^{N,\omega}}\big)\left\|f\right\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \\
&\leq c_1\big(\sup_{u\in\mathbb{R}^n}\|a_u\|_{C^{N,\omega}}\big)\left\|f\right\|_{F^{\widetilde{v}_{\mu+m}}_{p,q}}.
\end{aligned}$$

Remarque 3.6 1) Si $v_s(t) = t^{-s}$ on trouve l'espace de Triebel-Lizorkin usuelle $F^s_{p,q}$, puis, si $s \in \mathbb{R}\backslash N$, le Théorème 3.1 donne une caractérisation complète de la continuité des o.ps.d de symbole dans $S^m_{1,\delta}(\omega,N)$ sur $F^s_{p,q}$.

2) Si $v_s(t) = t^{-s}$, $\omega(t) = t^{-\delta}$, $0 \leq \delta < 1$ et $q = 2$, nous retrouvons un théorème de Nagase [24].

3.4 Optimalité et remarques

Le théorème 3.1 admet une optimalité, qui concerne la non continuité sur les espaces de Triebel-Lizorkin des que (3.1) n'est pas vérifiée. Plus exactement, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.7 *Soient $\mu > 0$, $\eta > 0$, $1 < p < \infty$, $1 < q \leq \infty$, $0 \leq \delta < 1$ et $N \in \mathbb{N}$. Soit v_μ une fonction de type μ. On suppose que*

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\big(v_\mu\left(2^{-k}\right)2^{-(1-\delta)kN}\omega(2^{-(1-\delta)k})\big)^q\Big)^{1/q} = +\infty.$$

Alors il existe un opérateur $\sigma(x,D) \in OP^m_{1,\delta}(\omega,N)$ et une fonction h de $F^{\widetilde{v}_{\mu+m}}_{p,q}$ tel que $\sigma(x,D)h \notin F^{v_\mu}_{p,q}$. La fonction $\widetilde{v}_{\mu+m}(t)$ est définie dans le théorème 3.1.

Preuve. On note par $x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Nous considérons l'opérateur $\sigma(x, D)$ de symbole

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(1-\delta)jN}\omega(2^{-(1-\delta)j}) \exp(i2^j x_1)\xi_1^m \qquad (x, \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{3.3}$$

$\sigma(x, D)$ définit un opérateur de $OP^m_{1,\delta}(\omega, N)$. Pour prouver ceci, nous avons

$$\omega(2^{-(1-\delta)j}) \left|\exp(i2^j y_1) - 1\right| \leq c2\omega(2^{\delta j} |y|), \qquad (\forall y \in \mathbb{R}^n). \tag{3.4}$$

En effet, si $2^{-j} \leq |y|$, par la monotonicité de ω on obtient l'inégalité (3.4). Maintenant, si $2^j |y| \leq 1$ alors la concavité de ω donne

$$2^j |y_1| \leq 1\omega(2^{-(1-\delta)j}) < c\omega(2^{\delta j} |y|).$$

Posons

$$V_j = 2^{-(1-\delta)jN}\omega(2^{-(1-\delta)j}) \exp(i2^j x_1).$$

On multiplie $\sigma(x, \xi)$ par la partition de l'unité suivante

$$\lambda(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} \eta(2^{-k}\xi) = 1, \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n),$$

avec λ, $\eta \in C_0^\infty$ et $\operatorname{supp} \lambda \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2\}$ et $\operatorname{supp} \eta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$, ce qui permet d'écrire $\sigma(x, \xi) = \tau(x, \xi) + \rho(x, \xi)$ où

$$\tau(x, \xi = \lambda(\xi)\sigma(x, \xi) \qquad \text{et} \qquad \rho(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta(2^{-k}\xi)\sigma(x, \xi).$$

L'estimation de $\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \tau(x,\xi)$ et $\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \rho(x,\xi)$ sont identiques. On choisit de prendre la deuxième. Il est possible d'écrire

$$\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \rho(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{j} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Big) \partial^\beta_x V_j(x) \partial^\alpha_\xi (\xi_1^m \eta(2^{-k}\xi)).$$

Dans $\big(\sum_{k=0}^{j} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \big)$... on compte au maximum trois facteurs correspondant aux supports contenus dans la couronne $2^{j-1+l} \leq |\xi| \leq 2^{j+1+l}$, $(l = 0, 1, 2)$, alors $k \in L$ tels que L a au plus trois éléments. D'autre part, dans $\sum_{j=0}^{\infty}$ ... il existe au plus cinq facteurs correspondant aux supports contenus dans la couronne $2^{j-1+l} \leq |\xi| \leq 2^{j+3+l}$, $(l = 0, ..., 4)$, alors $j \in \widetilde{\mathbb{L}}$ tels que $\widetilde{\mathbb{L}}$ a au plus cinq éléments. Puis, sur supp$\eta^{(\gamma)}$ (avec $|\gamma| \leq |\alpha|$), on a $|\xi| \sim 2^k$ et $|\xi| \sim 2^j$ simultanément, donc

$$2^{j\delta|\beta|} \leq c(1 + |\xi|)^{\delta|\beta|} \qquad \text{et} \qquad \left| \partial^\alpha_\xi (\xi_1^m \eta(2^{-k}\xi)) \right| c(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}. \tag{3.5}$$

En combinant (3.5) et (3.4), on a

$$\left| \partial^\beta_x V_j(x) \right| \leq c 2^{j(1-\delta)(|\beta|-N)} (1 + |\xi|)^{\delta|\beta|}$$

et

$$\left| \partial^\beta_x V_j(x+y) - \partial^\beta_x V_j(x) \right| \leq c 2^{j(1-\delta)(|\beta|-N)} (1 + |\xi|)^{\delta|\beta|} \omega(2^{\delta j} |y|).$$

Pour $|\beta| \leq N$; et le fait que $0 \leq \delta < 1$ donne alors

$$\sum_{j \in \widetilde{\mathbb{L}}} 2^{j(1-\delta)(|\beta|-N)} \leq \max \big(5, \big(1 - 2^{-(1-\delta)(N-\beta-)}\big)^{-1}\big).$$

Par conséquent $\rho(x,\xi)$ satisfait les conditions du type de Hörmander (2.2) et (2.3).

On considère $g \in \mathcal{S}$ telle que

$$\|g\|_p = 1 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{supp}\widehat{g} \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \frac{1}{4}\right\}. \tag{3.6}$$

On pose

$$\widehat{h}(\xi) = \xi_1^{-m}\widehat{g}(\xi) \quad \text{si} \quad \xi \neq 0, \quad \widehat{h}(0) = 0 \quad \text{et} \quad g_j(x) = \exp(i2^j x_1)g(x). \tag{3.7}$$

Clairement le support de la fonction $\xi \longmapsto \widehat{g}_j(\xi) = \widehat{g}_j(\xi_1 - 2^j, \xi)$ est contenu dans la couronne $\frac{3}{4}2^j \leq |\xi| \leq \frac{5}{4}2^j$. Il vient par la proposition 1.31\(iii) que l'on a

$$\begin{aligned}
\left\|\sigma(x,D)h\right\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\big(\sigma(x,\xi)\widehat{h}\big)\right\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \\
&= \Big\|\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(1-\delta)jN}\omega(2^{-(1-\delta)j})g(\cdot)\Big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \\
&\geq c\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\big(v_\mu\left(2^{-j}\right)2^{-(1-\delta)jN}\omega(2^{-(1-\delta)j})\big)^q\Big)^{1/q}\|g\|_p \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

■

Remarque 3.8 Dans [23], Moussai a prouvé les Théorèmes 3.1 et 3.7 sur l'espace de Besov généralisé $B^{v_\mu}_{p,q}$, avec la condition de régularité

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\left(\omega\left(2^{-j}\right)\Omega(2^j)\right)^q\Big)^{1/q} < +\infty,$$

où Ω une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant les deux conditions suivantes :

$$\forall c > 1,\ \exists A_c > 0,\ \forall (t,s) : \frac{1}{c}t < s < ct \Rightarrow \Omega(s) \leq A_c\Omega(t),$$

et

$$(\forall\nu > 0,\ \exists C_\nu > 0,\ \forall t \geq 1) \Rightarrow \int_1^t \frac{\Omega^{q'}(u)}{u^{\nu+1}} du \leq C_\nu \frac{\Omega^{q'}(t)}{t^\nu}.$$

Si on note par $A_{1,\delta}^{m}(\omega, N)$ l'ensemble des symboles élémentaires (2.4) telles que $\{\mathcal{M}_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^{N,\omega}$, alors on a le résultat suivant :

Théorème 3.9 *Soient $\mu > 0$, $\eta > 0$, $1 < p < \infty$, $1 < q \leq \infty$, $0 \leq \delta < 1$ et $N \in \mathbb{N}$. Soit v_μ une fonctions de type μ. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*

(i) ω satisfait (3.1).

(ii) Alors tout opérateur $\sigma(x, D)$ de symbole $\sigma \in A_{1,\delta}^{m}(\omega, N)$ est borné de $F_{p,q}^{\widetilde{v}_{\mu+m}}$ dans $F_{p,q}^{v_\mu}$. La fonction $\widetilde{v}_{\mu+m}$ est définie dans le théorème 3.1.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème 3.1 pour la condition suffisante. Cependant le théorème 3.7 nous fournit la nécessité de la condition (3.1). ∎

Chapitre 4

Continuité des o.ps.d sur l'espace $(F^v_{p,q})_{\ell^r}$

Nous allons étudie la continuité des *o.ps.d* sur les espaces de Triebel-Lizorkin $F^v_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ localisés en norme de $\ell^r(\mathbb{Z}^n)$ pour $r \in [1,+\infty]$. On démontera rapidement le cas $r = p$. Le cas $r \neq p$ est traité séparément dans un dernier paragraphe, car ce cas demande l'utilisation des symboles élémentaires donnés dans le chapitre II, Section 2.2. Pour plus de théorie sur la localisation on pourra consulter [5], [28] et [29].

4.1 Préparation

On commence par la construction d'une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, portée par la boule $|x| \leq R$, $(R > \sqrt{n})$, telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi(x-k) = 1, \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \tag{4.1}$$

En effet, soit $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive qui vaut 1 sur le cube $|x_i| \leq 2^{-1}$ $(i = 1, ..., n)$.

Alors la fonction $G(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(x-k)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, bornée et $G(x) \geq 1$, (puisque pour tout x, il existe $k \in \mathbb{Z}^n$, tel que $|x_i - k_i| \leq \frac{1}{2}$ (pour tout $i = 1, ..., n$) et donc $g(x-k) = 1$). On a aussi $G(x-k) = G(x)$, $\forall k \in \mathbb{Z}^n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. La fonction $\dfrac{1}{G(x)}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. Il suffit de poser

$$\psi(x) = \frac{g(x)}{G(x)}.$$

On note par

$$\mathcal{A} = \left\{ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi(x-k) = 1 \right\}. \tag{4.2}$$

Définition 4.1 *Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si E est muni d'une norme $\|\cdot\|_E$ telle que :*

(i) L'injection canonique $E \to \mathcal{D}'$ soit continue,

(ii) $(E, \|\cdot\|_E)$ soit un espace de Banach,

on dit que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach de distributions, $(E.B.D)$.

Remarque 4.2 Nous ferons sur E $(E.B.D)$ les hypothèses suivantes :

- Invariance par translation : si on note τ_x l'opérateur $\tau_x f(t) = f(t-x)$, alors τ_x est une isométrie de E.
- Invariance par localisation, pour tout $f \in E$ et tout $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a $\eta \cdot f \in E$.

Définition 4.3 *Soient $1 \leq r < \infty$ et E un espace de Banach de distributions. Soit $\psi \in \mathcal{A}$. L'espace $(E)_{\ell^r}$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\left\| f \right\|_{(E)_{\ell^r}} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\| \psi(\cdot - k) f \right\|_E^r \Big)^{1/r} < +\infty. \tag{4.3}$$

Dans le cas où $r = +\infty$, l'expression (4.3) *doit s'interpréter comme*

$$\left\| f \right\|_{(E)_{\ell^\infty}} = \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\| \psi(\cdot - k) f \right\|_E < +\infty. \tag{4.4}$$

Remarque 4.4 La norme (4.3) (aussi (4.4)) ne dépend pas du choix de la fonction ψ dans l'ensemble $\mathcal{A}$ *; voir* (4.2) pour la définition de $\mathcal{A}$.

Définition 4.5 *On dit que l'espace E est localisable en norme ℓ^r $(1 \leq r \leq \infty)$, s'il existe une fonction $\psi \in \mathcal{A}$ et $c \geq 1$ telle que :*

$$c^{-1}\left\|f\right\|_E \leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\|\psi\left(\cdot - k\right)f\right\|_E^r\Big)^{1/r} \leq c\left\|f\right\|_E.$$

À titre d'exemple des espaces localisable en norme ℓ^r, nous allons redonner le théorème suivant (voir [5] ou [28]).

Théorème 4.6 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors l'espace L^p est localisable en norme ℓ^p.*

Preuve. Il suffit de montrer que l'opérateur

$$T_\lambda : f \longmapsto \{\lambda\left(\cdot - k\right)f\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$$

est un isomorphisme de $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ sur un sous espace fermé de $(L^p)_{\ell^p}$ pour une fonction $\lambda \in \mathcal{D}$ bien choisie. Pour cela, on introduit l'opérateur

$$S_\psi\left(\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\psi\left(\cdot - k\right)f_k, \tag{4.5}$$

où pour un choix convenable de $\psi \in \mathcal{D}$, S_ψ est un inverse de T_λ. Puisque λ est à support compact, il existe $c = c\left(\lambda\right) > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on ait

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|\lambda\left(x-k\right)\right| \leq c.$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda f\|_{(L^1)_{\ell^1}} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\lambda(x-k)|\,|f(x)|\,dx. \\
&\leq c\,\|f\|_1\,. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

D'autre part nous avons

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda f\|_{(L^\infty)_{\ell^\infty}} &= \sup_{k\in\mathbb{Z}^n,\ x\in\mathbb{R}^n}|\lambda(x-k)\,f(x)| \\
&\leq \|\lambda\|_\infty\,\|f\|_\infty\,. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

D'après (4.6) et (4.7) et en appliquant le théorème de Riesz-Thorin, T_ψ est continue de L^p dans $(L^p)_{\ell^p}$, (voir [28] pour cette application d'interpolation).

Autrement on a

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\Big\|\psi(\cdot-k)\,f\Big\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leq c\,\|f\|_p\,, \qquad (4.8)$$

la continuité de S_ψ de $(L^p)_{\ell^p}$ dans L^p se démontre de la même manière

$$\begin{aligned}
\big\|S_\psi\left(\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\right)\big\|_1 &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\Big\|\psi(\cdot-k)\,f\Big\|_1 \qquad \text{(Hölder)} \\
&\leq \Big\|\psi\Big\|_\infty\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\Big\|f_k\Big\|_1 \\
&= \Big\|\psi\Big\|_\infty\Big\|\,\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\,\Big\|_{(L^1)_{\ell^1}}, \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

et

$$\Big\|S_\psi\left(\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\right)\Big\|_\infty\leq\Big(\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\Big\|\,\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\,\Big\|_\infty\Big)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\psi(x-k)|\Big). \qquad (4.10)$$

Jusqu'ici, λ et ψ pouvaient être des fonctions à supports compacts quelconques. Maintenant on suppose que $\lambda\in\mathcal{A}$, et on choisit ψ de façon que $\psi=1$ sur le support de λ, alors

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda(\cdot - k) f \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi(\cdot - k)\cdot\lambda(\cdot - k)\cdot f \\ &= S_\psi\left(\{\lambda(\cdot - k)\cdot f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\right) \end{aligned}$$

et la continuité de S_ψ de $(L^p)_{\ell^p}$ dans L^p donne

$$\left\|f\right\|_p \le c\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\|\lambda(\cdot - k) f\right\|_p^p\Big)^{1/p}. \tag{4.11}$$

Les inégalités (4.8) et (4.11), impliquent la localisation de L^p en norme de ℓ^p. ■

4.2 Localisation des espaces $F^v_{p,q}$

Proposition 4.7 *Pour tout* $R > 0$ *il existe une constante* $c = c(n, R)$ *telle que pour toute famille* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ *des fonctions portées respectivement par les boules* $|x - k| \le R$*, on ait*

$$\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k\Big\|_p \le c\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\|f_k\right\|_p^p\Big)^{1/p}.$$

Preuve. La preuve est immédiate si on remarque que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\psi(\cdot - k) f = S_\psi\left(\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\right)$$

où $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est choisie de sort que $\psi = 1$ sur la boule $|x| \le R$, (voir (4.5) pour la définition de l'opérateur S_ψ). ■

Proposition 4.8 *Si* $\theta \in \mathcal{S}$ *ne s'annule pas sur le support de* ψ *(voir* (4.1) *pour la défi-*

nition de ψ). Alors on a

$$\left\|f\right\|_{(E)_{\ell^p}} \sim \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\|\theta\left(\cdot-k\right)f\right\|_E^p\Big)^{1/p}.$$

Preuve. D'une part, on peut écrire $\psi = g\cdot\theta$ où $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\left\|\psi\left(\cdot-k\right)f\right\|_E \leq \left\|g\right\|_{M(E)}\left\|\theta\left(\cdot-k\right)f\right\|_E,$$

voir plus loin, le début du chapitre 5 pour la définition de l'espace des multiplicateurs ponctuels $M(E)$, donc

$$\left\|f\right\|_{(E)_{\ell^p}} \leq c\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\|\theta\left(\cdot-k\right)f\right\|_E^p\Big)^{1/p}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\left\|\theta\left(\cdot-k\right)f\right\| &\leq \sum_{k'\in\mathbb{Z}^n}\left\|\psi\left(\cdot-k'\right)\theta\left(\cdot-k\right)f\right\|_E \\ &\leq \sum_{k'\in\mathbb{Z}^n}\left\|\lambda\left(\cdot-k'\right)\theta\left(\cdot-k\right)\right\|_{M(E)}\left\|\psi\left(\cdot-k'\right)f\right\|_E,\end{aligned} \tag{4.12}$$

où $\lambda\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda = 1$ sur le support de ψ. Par un changement de variables, et le fait que $\|\cdot\|_{M(E)}$ est invariant par translation, on a

$$\left\|\lambda\left(\cdot-k'\right)\theta\left(\cdot-k\right)\right\|_{M(E)} = \left\|\lambda\left(\cdot-(k-k')\right)\theta\right\|_{M(E)}. \tag{4.13}$$

En combinant (4.12), (4.13) et l'inégalité de Young discrète, on obtient le résultat. ∎

Lemme 4.9 *Soient $\mu>0$, $1\leq p<\infty$ et $1\leq q,r\leq\infty$. Soit v_μ une fonction de type μ. Il existe $c=c(n)>0$, tel que pour tout $Q>0$ et toute famille $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ de fonctions,* *portées respectivement par les boules* $|x-k|\leq Q$, *on ait*

$$\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k\Big\|_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}} \leq cQ^n\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\Big\|f_k\Big\|^r_{F^{v_\mu}_{p,q}}\Big)^{1/r}.$$

Preuve. Posons $m=2\left[R+Q\right]+1\in\mathbb{N}$. Pour tout k et k' dans $\mathbb{Z}^n$, l'intersection des boules $|x-k|\leq Q$ et $|x-k'|\leq R$ est vide dès que $|k-k'|\geq m$, donc quelque soit $k'\in\mathbb{Z}^n$, on a

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k\Big\|_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}} &= \Big(\sum_{k'\in\mathbb{Z}^n}\Big\|\psi\left(\cdot-k'\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k\Big\|^r_{F^{v_\mu}_{p,q}}\Big)^{1/r}\\ &= \Big(\sum_{k'\in\mathbb{Z}^n}\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\psi\left(\cdot-k'\right)f_k\Big\|^r_{F^{v_\mu}_{p,q}}\Big)^{1/r}.\end{aligned}$$

On estime $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\psi\left(\cdot-k'\right)f_k$ en norme de $F^{v_\mu}_{p,q}$, alors par l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\psi\left(\cdot-k'\right)f_k\Big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} &= \Big\|\sum_{|k-k'|\leq m}\psi\left(\cdot-k'\right)f_k\Big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}\\ &\leq \sum_{|k-k'|\leq m}\Big\|\psi\left(\cdot-k'\right)f_k\Big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}\\ &\leq \Big(\sum_{|k-k'|\leq m}1\Big)^{1/r'}\Big(\sum_{|k-k'|\leq m}\Big\|\psi\left(\cdot-k'\right)f_k\Big\|^r_{F^{v_\mu}_{p,q}}\Big)^{1/r},\end{aligned}\tag{4.14}$$

et comme

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,|k-k'|\leq m}1=\sum_{k'-m}^{k'+m}1\sum_{k'-m}^{k'+m}1\cdots\sum_{k'-m}^{k'+m}1=\underbrace{(2m)\cdots(2m)}_{(n\text{ fois})}=(2m)^n,$$

donc

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,|k-k'|\leq m}1\leq(2m+1)^n\leq cQ^n.$$

On remplace dans la relation (4.14) il vient

$$\Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi\,(\cdot - k')\, f_k \Big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \leq CQ^{n/r'} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n, \left|k-k'\right|\leq m} \Big\| \psi\,(\cdot - k')\, f_k \Big\|^r_{F^{v_\mu}_{p,q}} \Big)^{1/r}.$$

Montrons qu'il existe $C > 0$, tel que

$$\sup_{k'\in\mathbb{Z}^n} \Big\| \psi\,(\cdot - k')\, f_k \Big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \leq C \Big\| f \Big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}. \tag{4.15}$$

Pour démontrer (4.15) il suffit de vérifier que

$$B^{v_\mu}_{\infty,q} \hookrightarrow M(F^{v_\mu}_{p,q}) \tag{4.16}$$

pour tout v_μ du type μ. En effet la preuve du (4.16) se trouve dans le chapitre 5 qui suit, en particulier le théorème 5.6.

Revenons à la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k$, en utilisant (4.15) on obtient :

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k \Big\|_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}} &\leq c_1 Q^{n/r'} \Big(\sum_{k'\in\mathbb{Z}^n} \sum_{|k-k'|\leq m} \Big\| \psi\,(\cdot - k')\, f_k \Big\|^r_{F^{v_\mu}_{p,q}} \Big)^{1/r} \\
&\leq c_2 Q^{n/r'} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Big\| f_k \Big\|^r_{F^{v_\mu}_{p,q}} \sum_{|k-k'|\leq m} 1 \Big)^{1/r} \\
&\leq c_3 Q^{n} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Big\| f_k \Big\|^r_{F^{v_\mu}_{p,q}} \Big)^{1/r},
\end{aligned}$$

le lemme 4.9 est entièrement démontré. ■

Remarque 4.10 La norme de $\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^r}$ ne dépend pas du choix de ψ, ceci est une conséquence immédiate du lemme 4.9, en effet :

soit ψ_1, ψ_2 dans $D(\mathbb{R}^n)$ portées respectivement par les boules $|x| < R_1,\ |x| < R_2$ telles que $\psi_1 \in \mathcal{A},\ \psi_2 \in \mathcal{A},$ on note par $\|.\|^{(1)}_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}}$, $\|.\|^{(2)}_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}}$ les normes associées respectivement de ψ_1, ψ_2. Alors pour toute f on a

$$\begin{aligned}\left\|f\right\|^{(1)}_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}} &= \Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\psi_2\,(\cdot-k)\,f\Big\|^{(1)}_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}}\\ &\leq cR_2^n\left\|f\right\|^{(2)}_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}};\end{aligned}$$

demême

$$\left\|f\right\|^{(2)}_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}} \leq cR_1^n\left\|f\right\|^{(1)}_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}}.$$

Lemme 4.11 *Pour tout* γ_1 *vérifiant* $0<\gamma_1<1/2$*, il existe* $c>0$ *tel que pour toute suite* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ *d'éléments de* E*, portées respectivement par* $|x-k|<\gamma_1$*, on ait*

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\|f_k\right\|_E^r\Big)^{1/r} \leq c\left\|f_k\right\|_{(E)_{\ell^r}}.$$

Preuve. Soit γ_2 un réel vérifiant $0<\gamma_1<\gamma_2<2\gamma_1$. Considérons la fonction $\theta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ portée par $[-\gamma_2,\gamma_2]^n$, telle que $\theta=1$ sur $[-\gamma_1,\gamma_2]^n$. Si $f=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}f_k$, alors

$$\begin{aligned}\left\|\theta(\cdot-k)f\right\|_E &= \left\|f_k\right\|_E\\ &\leq \sum_{k'\in\mathbb{Z}^n}\left\|\psi(\cdot-k')\theta(\cdot-k)f\right\|_E\\ &\leq \sum_{k'\in\mathbb{Z}^n}\left\|\lambda(\cdot-k')\theta(\cdot-k)\right\|_{M(E)}\left\|\psi(\cdot-k')f\right\|,\end{aligned}$$

où $\lambda\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda=1$ sur le support de ψ. On utilise, ensuite, l'inégalité de Young dans $\ell^r(\mathbb{Z}^n)$ on obtient exactement

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\|f_k\right\|_E^r\Big)^{1/r} \leq c\left\|f_k\right\|_{(E)_{\ell^r}}.$$

■

4.3 Théorème de continuité, le cas $r = p$

Théorème 4.12 *Soient* $\mu > 0$, $\eta > 0$, $1 < p < \infty$, $1 < q \leq \infty$, $0 \leq \delta < 1$ *et* $N \in \mathbb{N}$. *Soit* v_μ *une fonction de type* μ. *Pour tout* ω *un module de continuité vérifiant* (3.1), *l'opérateur* $\sigma(x,D) \in OP^m_{1,\delta}(\omega, N)$ *est borné de* $(F^{\widetilde{v}_{\mu+m}}_{p,q})_{\ell^p}$ *dans* $\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^p}$. *La fonction* $\widetilde{v}_{\mu+m}(t)$ *est définit dans le théorème 3.1.*

Preuve. Il suffit de montrer que l'espace $F^{v_\mu}_{p,q}$ est localisable en norme ℓ^p et de appliquer le théorème 3.1.

Etape 1. Montrons que

$$\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^p} \hookrightarrow F^{v_\mu}_{p,q}.$$

Soit $f \in \left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^p}$

$$\|f\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} = \left\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \Big(v_\mu(2^{-j})\, |S_j f| \Big)^q \Big)^{\frac{1}{q}} \right\|_p. \tag{4.17}$$

Remplaçons dans (4.17) f par $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda\,(\cdot - k)\, f$, on a

$$\begin{aligned} \|f\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} &\leq \left\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} v_\mu(2^{-j})\, |S_j\,(\lambda\,(\cdot - k)\, f)| \Big)^q \Big)^{1/q} \right\|_p \\ &= \left\| \left\| \left\{ v_\mu(2^{-j})\, |S_j\,(\lambda\,(\cdot - k)\, f)| \right\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \right\|_{\ell^q(\ell^1)} \right\|_p. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Minskovski, la proposition 4.7 et la proposition 4.8, on a

$$\begin{aligned} \|f\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} &\leq \left\| \left\| \left\{ v_\mu(2^{-j})\, |S_j\,(\lambda\,(\cdot - k)\, f)| \right\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \right\|_{\ell^1(\ell^q)} \right\|_p \\ &\leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \Big(v_\mu(2^{-j})\, |S_j\,(\lambda\,(\cdot - k)\, f)| \Big)^q \Big)^{1/q} \right\|_p^p \Big)^{1/p} \\ &\leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\| (\lambda\,(\cdot - k)\, f) \right\|^p_{F^{v_\mu}_{p,q}} \Big)^{1/p} \\ &\leq c \left\| f \right\|_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^p}}. \end{aligned}$$

Etape 2. Montrons que

$$F^{v_\mu}_{p,q} \hookrightarrow \left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^p}.$$

Soit $f \in F^{v_\mu}_{p,q}$. Comme $f = \sum_{j=0}^{\infty} S_j f$, nous avons

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Big\|\lambda\left(\cdot - k\right) f\Big\|^p_{F^{v_\mu}_{p,q}}\Big)^{1/p} \leq c\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Big\|\sum_{j=0}^{\infty} \lambda\left(\cdot - k\right) \cdot S_j f\Big\|^p_{F^{v_\mu}_{p,q}}\Big)^{1/p}$$

En se reportant au proposition 1.31, on trouve

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Big\|\lambda\left(\cdot - k\right) f\Big\|^p_{F^{v_\mu}_{p,q}}\Big)^{1/p} &\leq c\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \Big(v_\mu(2^{-j})\left|\lambda\left(\cdot - k\right) S_j f\right|\Big)^q\Big)^{1/q}\Big\|^p_p\Big)^{1/p} \\
&\leq c\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Big\|\lambda\left(\cdot - k\right) \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \Big(v_\mu(2^{-j})\left|S_j f\right|\Big)^q\Big)^{1/q}\Big\|^p_p\Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

D'après la localisation de l'espace L^p en norme ℓ^p on obtient

$$\Big\|f\Big\|_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^p}} \leq c\Big\|f\Big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}.$$

■

Remarque 4.13 *Le Théorème 4.12, sous la version de l'espace de Besov généralisé, a été démontrée par Moussai [23].*

4.4 Théorème de continuité, le cas $r \neq p$

Le théorème suivant est presque une condition suffisante et optimale.

Théorème 4.14 *Soient* $\mu > 0$, $\eta > 0$, $1 < p < \infty$, $1 < q \leq \infty$, $1 < r \leq \infty$, $0 \leq \delta < 1$ *et* $N \in \mathbb{N}$. *Soit* v_μ *une fonction de type* μ.

i) Pour tout module de continuité ω *vérifiant* (3.1), *l'opérateur* $\sigma(x,D) \in OP^m_{1,\delta}(\omega, N)$ *est borné de* $(F^{\widetilde{v}_{\mu+m}}_{p,q})_{\ell^r}$ *dans* $\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^r}$.

ii) Si ω *un module de continuité vérifiant*

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \left(v_\mu\left(2^{-k}\right) 2^{-(1-\delta)kN} \omega(2^{-(1-\delta)k})\right)^q\Big)^{1/q} = +\infty,$$

alors il existe un opérateur $\sigma(x,D) \in OP^m_{1,\delta}(\omega, N)$ *et une fonction* h *de* $(F^{\widetilde{v}_{\mu+m}}_{p,q})_{\ell^r}$ *tels que* $\sigma(x,D)h \notin \left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^r}$. *La fonction* $\widetilde{v}_{\mu+m}$ *est définie dans le théorème 3.1.*

Preuve. i) Soit $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k \in \left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^r}$ où $f_k = \psi(\cdot - k)f$ a support dans la boule $|x-k| \leq R$. Alors par la formule (2.5) on a

$$\sigma(x,D)f\,(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tau(x,D)f_k\,(x) + \int_{\mathbb{R}^n} (1+|u|^2)^{\frac{-(n+1)}{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sigma_u(x,D)f_k\,(x)\,\mathrm{d}u.$$

On estime $\sigma(x,D)f$ en norme de $\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^r}$ on trouve

$$\Big\|\sigma(x,D)f\Big\|_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}} = \Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \tau(x,D)f_k\Big\|_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}} + \int_{\mathbb{R}^n} (1+|u|^2)^{\frac{-(n+1)}{2}} \Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sigma_u(x,D)f_k\Big\|_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}} \mathrm{d}u.$$

Pour l'estimation de $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sigma_u(x,D)f_k$ en norme de $\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^r}$: soit $u \in \mathbb{R}^n$ fixé. Comme le support de $\sigma_u\,(x,D)\,f_k$ est contenu dans la boule $|x-k| \leq (R+1)\,(1+|u|)$, on applique le lemme 4.9 ce qui donne

$$\Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sigma_u\,(x,D)\,f_k \Big\|_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}} \leq c_1\,(1+|u|)^n \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Big\|\sigma_u\,(x,D)\,f_k\Big\|^r_{F^{v_\mu}_{p,q}}\Big)^{1/r}.$$

Pour l'opérateur associe au symbole élémentaire $\sigma_u(x,\xi)$, on applique la proposition 3.3 ce qui donne

$$\big\|\sigma_u(x,D)f_k\big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \leq c_2 \big\|\big(\sum_{j=0}^{\infty}\big(v_\mu(2^{-j})v_\mu(2^{-jm/\mu})\,|f_j\,(\cdot)|\,\big)^q\big)^{1/q}\big\|_p,$$

telle que $f_j(x) = \mathcal{F}^{-1}(\theta_u(2^{-j}\cdot)\hat{f}_k(\cdot))(x)$. Et comme les fonctions f_j sont à spectres respectifs dans les boules $|x| < \gamma 2^j$, alors d'après la proposition 1.31/(ii) nous avons

$$\big\|\big(\sum_{j=0}^{\infty}\big(v_\mu(2^{-j})v_\mu(2^{-jm/\mu})\,|f_j\,(\cdot)|\,\big)^q\big)^{1/q}\big\|_p \leq c_2\big(\sup_{|\alpha|\leq L,\ u\in\mathbb{R}^n}\Big\|\theta_u^{(\alpha)}\Big\|_\infty\big)\big\|f_k\big\|_{F^{\tilde{v}_{\mu+m}}_{p,q}}$$

où $(L = [n/2]+1)$ et $\sup_{|\alpha|\leq L,\ u\in\mathbb{R}^n}\Big\|\theta_u^{(\alpha)}\Big\|_\infty \leq c_3$. D'où

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^n}\big\|\sigma_u(x,D)f_k\big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \leq c_4\big\|f_k\big\|_{F^{\tilde{v}_{\mu+m}}_{p,q}}.$$

Enfin, puisque

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|u|)^n\left(1+|u|^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}du < +\infty$$

on obtient

$$\Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sigma_u\,(x,D)\,f_k \Big\|_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}} \leq c\,\|f\|_{(F^{\tilde{v}_{\mu+m}}_{p,q})_{\ell^r}}.$$

Voyons maintenant l'opérateur $\tau(x,D)$:

On a vu au chapitre 2 (proposition 2.11) que

$$\tau(x,D)\,f_k(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|u|^2\right)^{-2n}a_u(x)\,f_k(x+u)\,du.$$

Le support de $x\longmapsto a_u(x)\,f_k(x+u)$ est contenu dans la boule $|x-k|\le R+|u|$, donc par le lemme 3.5, lemme 4.9, l'inégalité $v_\mu(2^{-j})\le cv_\mu(2^{-j})v_\mu(2^{-jm/\mu})$ et l'invariance de la norme de $F^{v_\mu}_{p,q}$ par translation on a aussitôt

$$\begin{aligned}
\big\|\tau(x,D)f\big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} &\le \int_{\mathbb{R}^n}(1+|u|^2)^{-2n}\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}a_u(\cdot)f_k(\cdot+u)\Big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}\mathrm{d}u\\
&\le c_1\big(\sup_{u\in\mathbb{R}^n}\|a_u\|_{C^{N,\omega}}\big)\int_{\mathbb{R}^n}(1+|u|)^n\left(1+|u|^2\right)^{-2n}\mathrm{d}u\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\big\|f_k\big\|^r_{F^{v_\mu}_{p,q}}\Big)^{1/r}\\
&\le c_1\big(\sup_{u\in\mathbb{R}^n}\|a_u\|_{C^{N,\omega}}\big)\big\|f\big\|_{(F^{\tilde{v}_\mu+m}_{p,q})_{\ell^r}}.
\end{aligned}$$

ii) Nous utilisons les mêmes $\sigma(x,\xi)$, g et h de (3.3), (3.6) et (3.7) respectivement. Comme $h\in\mathcal{S}$, alors par la proposition 1.31 et le lemme 4.11 nous obtenons

$$\begin{aligned}
\big\|\sigma(x,D)h\big\|_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}} &= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\Big\|\sum_{j=0}^{\infty}2^{-(1-\delta)jN}\omega(2^{-(1-\delta)j})g(\cdot)g(\cdot-k)\Big\|^r_{F^{v_\mu}_{p,q}}\Big)^{1/r}\\
&\ge c_1\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\left(v_\mu\left(2^j\right)2^{-(1-\delta)jN}\omega(2^{-(1-\delta)j})\right)^q\Big)^{1/q}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\big\|g(\cdot)g(\cdot-k)\big\|^r_p\Big)^{1/r}\\
&\ge c_2\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\left(v_\mu\left(2^j\right)2^{-(1-\delta)jN}\omega(2^{-(1-\delta)j})\right)^q\Big)^{1/q}\big\|g\big\|^2_{2p}=+\infty.
\end{aligned}$$

■

Remarque 4.15 *Bourdaud et Moussai ont montré le Théorème 4.14 dans le cas des espaces de Besov* $B^s_{p,q}$ *usuelles voir [6].*

Chapitre 5

Continuité des o.ps.d sur l'espace des multiplicateurs $M(E)$

Dans ce dernier chapitre nous allons étudier les multiplicateurs ponctuels dans les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ et de Triebel-Lizorkin $F^v_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Avant cette étude nous rappelons quelques notions sur l'espace de multiplicateurs $M(E)$. Nous rappelons aussi, que concernant la multiplication ponctuelle sur les espace de Triebel-Lizorkin classique $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, il existe une riche documentation sur ce type de théorie. Par exemple [10], [18], [19] et [29].

5.1 Préparation

Dans ce paragraphe on va étudier le produit de la forme $A_1.A_2$, où A_1 et A_2 sont des espaces de Banach.

Définition 5.1 *Soit E un espace de Banach de distributions $(E.B.D)$. On dit que $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est un multiplicateur ponctuel de E, s'il existe une constante $C > 0$, telle que* *pour toute $\phi \in C^\infty \cap E$, on a*

$$\|f \cdot \phi\|_E \leq C \|\phi\|_E .$$

L'espace linéaire de multiplicateurs sera noté $M(E)$ munie de la norme

$$\|f\|_{M(E)} = \sup \{\|f \cdot \phi\|_E : \forall \phi \in C^\infty \cap E \ \ et \ \ \|\phi\|_E \leq 1\} .$$

Remarque 5.2 1. Si E contient $C^\infty \cap E$ comme un sous-espace dense, on dit tout simplement, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$f \cdot \phi \in E \qquad et \qquad \|f \cdot \phi\|_E \leq c \|\phi\|_E .$$

2. $\left(M(E), \|\cdot\|_{M(E)}\right)$ est un espace de Banach .
3. Si $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset M(E)$ alors $M(E)$ est une algèbre

$$\text{(i.e. si } f, g \in M(E) \Longrightarrow f \cdot g \in M(E)).$$

On note par M_a l'opérateur de multiplication ponctuelle par la fonction $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, i.e. $M_a : f \to af$.

Voici un exemple, sur les multiplicateurs de l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 5.3 *Pour* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors*

$$M(L^p) = L^\infty.$$

Preuve. Voir [4] ∎

5.2 Multiplicateurs de $F^{v}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Proposition 5.4 *Soient $1 \leq p < \infty,\ 1 \leq q \leq \infty$, $N \in \mathbb{N}$ et $0 < \mu < N$. Soit v_μ une fonction de type μ. Posons*

$$\|f\|^{(1)}_{F^{v_\mu}_{p,q}} = \|f\|_p + \Big\| \Big(\int_0^1 \big(v_\mu(t) \sup_{|h|<t} \big| \Delta_h^N f \big| \big)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big)^{1/q} \Big\|_p.$$

Alors $\|\cdot\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}$ et $\|\cdot\|^{(1)}_{F^{v_\mu}_{p,q}}$ sont des normes équivalentes de $F^{v_\mu}_{p,q}$.

Preuve. Etape 1. Nous prouvons qu'il existe une constante $c > 0$ tel que

$$\|f\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \leq c\,\|f\|^{(1)}_{F^{v_\mu}_{p,q}}. \tag{5.1}$$

Le fait que $\phi(0) = 0$, alors

$$\begin{aligned}
S_j f(x) &= (\mathcal{F}^{-1}(\phi)(2^{-j}\cdot) * f)(x) - (-1)^n f(x)\phi(0) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn}\mathcal{F}^{-1}(\phi)(2^j(x-y)f(y)\mathrm{d}y - (-1)^n f(x)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i0\cdot k}\mathcal{F}^{-1}(\phi)(h)\mathrm{d}h \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}(\phi)(-h)f(x+2^{-j}h)\mathrm{d}h - f(x)\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}(\phi)(-h)\mathrm{d}h \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}(\phi)(-h)(f(x+2^{-j}h) - f(x))\mathrm{d}h \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}(\phi)(-h)\triangle^1_{2^{-j}h} f(x)\ \mathrm{d}h.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Nous combinons (5.2) avec l'égalité

$$\triangle_h^N f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} (-1)^k\, \Delta_h^1 f\left(x + (N-k-1)\,h\right),$$

nous obtenons

$$S_j f(x) + A_{j,N}(x) = (-1)^{N-1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}[\phi](-h) \triangle_{2^{-j}h}^N f(x) \, \mathrm{d}h, \tag{5.3}$$

où $A_{j,1} \equiv 0$ et pour $N \geq 2$

$$A_{j,N}(x) = \sum_{k=0}^{N-2} \binom{N-1}{k} (-1)^{k+N-1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}[\phi](-h) \triangle_{2^{-j}h}^1 f\left(x + 2^{-j}(N-k-1)h\right) \, \mathrm{d}h.$$

Nous utilisons maintenant l'idée de Koch et Sickel [17, Prouve de la proposition 26], mais pas dans le sens de Nikol'skij (voir [27, 5.2.1] ou [35, Section 2.5.10/(13)]). Soit $I_0 = [0,1)$ et soit $I_\ell = \left[2^{\ell-1}, 2^\ell\right)$, $\ell \in N$. Il s'ensuit que (5.3) devient

$$\begin{aligned} \left| S_j f(x) + A_{j,N}(x) \right| &\leq c_1 \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_{I_\ell} \int_{|h'|=1} t^{n-1} \left| \mathcal{F}^{-1}[\phi](-th') \right| \left| \triangle_{2^{-j}th'}^N f(x) \right| \mathrm{d}t \mathrm{d}h' \\ &\leq c_2 \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-\ell L} \sup_{|u| \leq 2^{\ell-j}} \left| \triangle_u^N f(x) \right|, \end{aligned} \tag{5.4}$$

où $L > 1$ est un nombre naturel arbitraire. Nous obtenons

$$\left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(v_\mu\left(2^{-j}\right) \left| S_j f \right| \right)^q \right)^{1/q} \right\|_p \leq c_1 \left\| \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-\ell L} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(v_\mu\left(2^{-j}\right) \sup_{|u| \leq 2^{\ell-j}} \left| \triangle_u^N f \right| \right)^q \right)^{1/q} \right\|_p . \tag{5.5}$$

Il est clair que la dernière estimation est obtenue en utilisant l'inégalité du triangle pour ℓ^q. D'autre part, le premier terme dans (5.5) est borné par

$$\begin{aligned} & c_2 \left\| \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-\ell L} \left[\sup_{k=\ell+1,\dots} \left(\frac{v_\mu\left(2^{-k}\right)}{v_\mu\left(2^{\ell-k}\right)} \right)^q \sum_{j=\ell+1}^{\infty} \left(v_\mu\left(2^{\ell-j}\right) \sup_{|u| \leq 2^{\ell-j}} \left| \triangle_u^N f \right| \right)^q \right]^{1/q} \right\|_p \\ \leq\ & c_3 \left\| \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell(\mu-L)} \left(\int_0^1 \left(v_\mu(t) \sup_{|u| \leq t} \left| \triangle_u^N f \right| \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q} \right\|_p . \end{aligned}$$

Le deuxième terme de la partie droite de (5.5) peut être estimer de cette façon, et il suffit de choisir $L > 2a$.

Etape 2. Nous prouvons l'assertion inverse de (5.1). Nous avons

$$v_\mu(t) \leq c\, 2^{-\mu\ell}\, t^{-\mu}\, v_\mu\left(2^{-\ell}\right) \qquad (0 < t < 1,\ \ell \in \mathbb{N}),$$

alors nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(v_\mu(t) \sup_{|u|\leq t} \left|\triangle_u^N f\right|\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} &\leq c_1 \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(2^{-\mu\ell} v_\mu\left(2^{-\ell}\right) \sup_{|u|\leq 2^{-\ell}} \left|\triangle_u^N f\right|\right)^q \int_{2^{-\ell}}^{2^{-\ell+1}} t^{-\mu q-1}\mathrm{d}t \\ &\leq c_2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(v_\mu\left(2^{-\ell}\right) \sup_{|u|\leq 2^{-\ell}} \left|\triangle_u^N f\right|\right)^q .\end{aligned}$$

Soit $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $|u| \leq 2^{-\ell}$ et $j = 0, .., \ell$ nous avons

$$\sup_{|u|\leq 2^{-\ell}} \left|\triangle_u^N (S_j f)(x)\right| \leq c \min(1,\ 2^{(j-\ell)N}) S_j^{*,d} f(x). \tag{5.6}$$

La preuve de (5.6) est donnée dans [35, 2.5.12/(8), p. 111]. Nous avons décomposé $\triangle_u^N f$ en

$$\left(\sum_{j=0}^{\ell} + \sum_{j=\ell+1}^{\infty}\right) \triangle_u^N (S_j f) = A_\ell + B_\ell$$

et nous estimons chacun des deux termes. Choisissons un nombre réel r tel que $0 < r < \mu < N$. Par (5.6), on obtient

$$\left\|\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(v_\mu\left(2^{-\ell}\right) |A_\ell|\right)^q\right)^{1/q}\right\|_p \leq c \left\|\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(2^{-(N-\mu)\ell} \sum_{j=0}^{\ell} 2^{(N-\mu)j} v_\mu\left(2^{-j}\right) \left|S_j^{*,d} f\right|\right)^q\right)^{1/q}\right\|_p \tag{5.7}$$

et

$$\Big\|\Big(\sum_{\ell=0}^{\infty}\Big(v_\mu\left(2^{-\ell}\right)|B_\ell|\Big)^q\Big)^{1/q}\Big\|_p \leq c\Big\|\Big(\sum_{\ell=0}^{\infty}\Big(2^{(\mu-r)\ell}\sum_{j=\ell+1}^{\infty}2^{-(\mu-r)j}v_\mu\left(2^{-j}\right)\left|S_j^{*,d}f\right|\Big)^q\Big)^{1/q}\Big\|_p. \tag{5.8}$$

A partir de maintenant, nous appliquons la proposition 1.25 à (5.7) et (5.8). ■

Proposition 5.5 *Soient $\mu > 0$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, et v_μ une fonction de type μ, alors*

i) $\left(F_{p,q}^{v_\mu}\right)' = F_{p',q'}^{1/v_\mu}$.

ii) $M\left(F_{p,q}^{v_\mu}\right) = M\left(F_{p',q'}^{1/v_\mu}\right)$.

iii) $M\left(F_{p,q}^{v_\mu}\right) \hookrightarrow L^\infty$.

Preuve. Soient $f \in F_{p,q}^{v_\mu}$ et $g \in F_{p',q'}^{1/v_\mu}$. Nous montrons d'abord le cas $\mu > 0$: Nous utilisons la décomposition

$$\langle f \mid g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=0}^{\infty}S_jf(x)\cdot Q_jg(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=1}^{\infty}S_k\widetilde{f}(x)\cdot Q_{k-1}\widetilde{g}(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.9}$$

où $\widetilde{f}(x) = f(-x)$ et $\widetilde{g}(x) = g(-x)$. Par l'inégalité de Hölder dans ℓ^q et le fait que $(1/v_\mu(2^{-j})) \leq c\,(2^{\mu(k-j)}/v_\mu(2^{-k}))$, nous avons,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=0}^{\infty}S_jf(x)\cdot Q_jg(x)\;\mathrm{d}x\right| &\leq c_1\int_{\mathbb{R}^n}\left\|\left\{v_\mu\left(2^{-j}\right)|S_jf(x)|\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^q}\\ &\times \left\|\left\{2^{-j\mu}\sum_{k=0}^{j}2^{\mu k}\frac{1}{v_\mu\left(2^{-k}\right)}|S_kg(x)|\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^{q'}}\mathrm{d}x\\ &\leq c_3\,\|f\|_{F_{p,q}^{v_\mu}}\,\|g\|_{F_{p',q'}^{1/v_\mu}}\,.\end{aligned}$$

La dernière estimation est obtenue par l'inégalité de Hölder et la proposition 1.25. De même,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=1}^{\infty}S_k\widetilde{f}(x)\cdot Q_{k-1}\widetilde{g}(x)\;\mathrm{d}x\right| \leq c_1\left\|\widetilde{f}\right\|_{F_{p,q}^{v_\mu}}\|\widetilde{g}\|_{F_{p',q'}^{1/v_\mu}}\;,$$

comme $\Delta_h^N \widetilde{f}(x) = \Delta_{-h}^N f(x)$ et par la proposition 5.4 on obtient

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} S_k \widetilde{f}(x) \cdot Q_{k-1} \widetilde{g}(x) \, \mathrm{d}x \Big| \leq c_2 \, \|f\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \, \|g\|_{F^{1/v_\mu}_{p',q'}} .$$

Nous prouvons le deuxième cas $\mu < 0$: Comme en (5.9), nous utilisons la décomposition

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f(x) \cdot S_j g(x) \, \mathrm{d}x \; + \; \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{\infty} Q_{k-1} \widetilde{f}(x) \cdot S_k \widetilde{g}(x) \, \mathrm{d}x \; ,$$

alors nous avons

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f(x) \cdot S_j g(x) \, \mathrm{d}x \Big| \leq c \, \|f\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \, \|g\|_{F^{1/v_\mu}_{p',q'}} .$$

Nous considérons maintenant le dernier cas $\mu = 0$: Remarquons que, pour tout j et x, il existe $y_{j,x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $|x - y_{j,x}| \leq 2^{-j}$. Nous avons choisi $d > (n/\min(p,q))$, d'où

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^{\infty} S_j f(x) \cdot Q_j g(x) \, \mathrm{d}x \Big| \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^{\infty} |S_j f(x)| \Big(\sum_{k=0}^{j} \frac{|S_k g(x)|}{1 + (2^k |x - y_{j,x}|)^d} \big(1 + \big(2^k |x - y_{j,x}|\big)^d\big) \Big) \mathrm{d}x \, . \tag{5.10}$$

Comme $v_0(2^{-j}) \leq c \, v_0\left(2^{-k}\right)$, alors le dernier terme de (5.10) est borné par

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \Big\| \big\{ v_0\left(2^{-j}\right) |S_j f(x)| \big\}_{k \in \mathbb{N}} \Big\|_{\ell^q} \Big\| \Big\{ \sum_{k=0}^{j} 2^{d(k-j)} \frac{1}{v_0\left(2^{-k}\right)} \big| S_k^{*,d} g(x) \big| \Big\}_{j \in \mathbb{N}} \Big\|_{\ell^{q'}}$$

et nous terminons par l'inégalité de Hölder. Ces cas impliquent que $F^{1/v_\mu}_{p',q'} \hookrightarrow \left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)'$.

Voyons maintenant l'inverse. Soit $g \in \left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)'$ et on considère l'application $f \in F^{v_\mu}_{p,q} \to g(f) = \langle f \mid g\rangle$. Par le théorème de Hahn-Banach et [35, Proposition 2.11.1/(i)], on obtient

$$\big\|\big(\sum_{k=0}^{\infty}\big(\frac{1}{v_\mu\left(2^{-k}\right)}\left|S_k g\right|\big)^{q'}\big)^{1/q'}\big\|_{p'} \sim \|g\|$$

(ici $\|g\|$ désigne la norme de l'application linéaire continue g), ce qui donne $g \in F^{1/v_\mu}_{p',q'}$. La preuve de (i) est terminée.

Soient $b \in M\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)$, $f \in F^{1/v_\mu}_{p',q'}$ et $g \in F^{v_\mu}_{p,q}$. Le produit $\langle bf \mid g\rangle$ peut être écrit comme :

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=0}^{\infty} Q_j f(x)\cdot S_j(bg)(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=1}^{\infty} Q_{k-1}\widetilde{f}(x)\cdot S_k\widetilde{bg}(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{si } \mu>0),$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=0}^{\infty} S_j f(x)\cdot Q_j(bg)(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=1}^{\infty} S_k\widetilde{f}(x)\cdot Q_{k-1}\widetilde{bg}(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{si } \mu<0),$$

ainsi que

$$\big|\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=0}^{\infty} Q_j f(x)\cdot S_j(bg)(x)\,\mathrm{d}x\big| \leq$$
$$c\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=0}^{\infty}\big(\sum_{k=0}^{j} 2^{d(k-j)}\frac{1}{v_0\left(2^{-k}\right)} S_k^{*,d} f(x)\big) v_0\left(2^{-j}\right)\left|S_j(bg)(x)\right| \quad (\text{si } \mu=0, \text{ voir } (5.10)).$$

L'estimation $|\langle bf \mid g\rangle| \leq c\,\|f\|_{F^{1/v_\mu}_{p',q'}}\|bg\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}$ peut être obtenue de la même manière que (i). Il s'ensuit que, (pour tout $\mu \in \mathbb{R}$),

$$\|bf\|_{F^{1/v_\mu}_{p',q'}} \;\leq\; \sup_{\|g\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}=1}|\langle bf \mid g\rangle| \;\leq\; c\,\|f\|_{F^{1/v_\mu}_{p',q'}}$$

et cela prouve que $M\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right) \hookrightarrow M\left(F^{1/v_\mu}_{p',q'}\right)$. Les inclusions inverses seront obtenus par la même technique. Nous omettons les détails ce qui termine la preuve de (ii).

Soit $b \in M\left(F_{p,q}^{v_\mu}\right)$, on considère l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} T_b: & \mathcal{S} & \rightarrow & \mathcal{S}' \\ & f & \rightarrow & b \cdot f \end{array}$$

on a T_b est borné de $F_{p,q}^{v_\mu}$ dans $F_{p,q}^{v_\mu}$ (car $b \in M(F_{p,q}^{v_\mu})$), et T_b est borné de $F_{p',q'}^{1/v_\mu}$ dans $F_{p',q'}^{1/v_\mu}$ (car $b \in M(F_{p,q}^{v_\mu}) = M(F_{p',q'}^{1/v_\mu})$). Donc par la proposition 1.21 on a $\left(F_{2,2}^{v_0}, F_{2,2}^{1/v_0}\right)_{1/2} = B_{2,2}^{v_0} = L^2$ ce qui donne T_b est borné de L^2 dans L^2 c'est-à-dire $b \in M\left(L^2\right) = L^\infty$.

Alors

$$M(F_{p,q}^{v_\mu}) \hookrightarrow L^\infty.$$

■

Le théorème suivant dans sa version Besov est dû à Drihem et Moussai [10].

Théorème 5.6 *Soient $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ et v_μ une fonction de type μ. Si $-\frac{n}{p} + \max\left(0, \frac{2n}{p} - n\right) < \mu < \frac{n}{p}$. Alors*

$$B_{p,\infty}^{v_{\frac{n}{p}}} \cap L^\infty \hookrightarrow M(F_{p,q}^{v_\mu}).$$

Preuve. Soient $f \in F_{p,q}^{v_\mu}$ et $g \in B_{p,\infty}^{v_{\frac{n}{p}}} \cap L^\infty$. D'après la décomposition de $f \cdot g$, on obtient

$$f \cdot g = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{3} \pi_k^{(i)}(f \cdot g).$$

On calcule $f \cdot g$ en norme de $F^{v_\mu}_{p,q}$, et d'après la proposition 1.31 on trouve

$$\begin{aligned}
\|f \cdot g\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} &= \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{3} \pi_k^{(i)} (f \cdot g) \Big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{3} \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k^{(i)} (f \cdot g) \Big\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \\
&\leq c_1 \sum_{i=1}^{3} \Big\| \Big(\left\{ v_\mu(2^{-k}) \pi_k^{(i)} (f \cdot g) \right\}_{k \in \mathbb{N}} \Big\|_{L^p(\ell^q)}.
\end{aligned}$$

On estime respectivement $\pi_k^{(1)} (f \cdot g)$, $\pi_k^{(2)} (f \cdot g)$ et $\pi_k^{(3)} (f \cdot g)$ en norme de $L^p(\ell_q^{v_\mu})$ (voir (1.7) pour la définition des $\pi_k^{(i)}$).

Estimation de $\pi_k^{(1)} (f \cdot g)$ **.**

$$\begin{aligned}
\left| \pi_k^{(1)} (f \cdot g)(x) \right| &= \left| S_k \left(Q_{k+1} g \cdot \widetilde{S}_k f \right)(x) \right|, \\
&= 2^{kn} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1} \phi \left(2^k y \right) \widetilde{S}_k f (x-y) \, Q_{k+1} g (x-y) \, dy \right|.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
v_\mu(2^{-k}) \left| \pi_k^{(1)} (f \cdot g)(x) \right| &\leq 2^{kn} v_\mu(2^{-k}) \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\mathcal{F}^{-1} \phi \left(2^k y \right) \right) \right| \left| \widetilde{S}_k f (x-y) \right| \left| Q_{k+1} g (x-y) \right| dy \\
&\leq 2^{kn} v_\mu(2^{-k}) \left\| Q_{k+1} g \right\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\mathcal{F}^{-1} \phi \left(2^k y \right) \right) \right| \left| \widetilde{S}_k f (x-y) \right| dy.
\end{aligned}$$

On pose

$$\left(\widetilde{S}_k^{*,a} f \right)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{\left| \widetilde{S}_k f (x-y) \right|}{1 + |2^k y|^a}, \qquad a > 0.$$

Donc

$$v_\mu(2^{-k}) \left| \pi_k^{(1)} (f \cdot g)(x) \right| \leq 2^{kn} v_\mu(2^{-k}) \left\| Q_{k+1} g \right\|_\infty (\widetilde{S}_k^{*,a} f)(x) \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\mathcal{F}^{-1} \phi \left(2^k y \right) \right) \right| \left(1 + \left| 2^k y \right|^a \right) dy.$$

Puisque

$$\|Q_{k+1}g\|_{\infty} = \left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi\left(2^{-(k+1)}\cdot\right) * g\right\|_{\infty}.$$

D'après l'inégalité de Young , on a

$$\|Q_{k+1}g\|_{\infty} \leq \left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi\right\|_{1} \|g\|_{\infty},$$

alors

$$\begin{aligned} v_{\mu}(2^{-k})\left|\pi_k^{(1)}(f\cdot g)(x)\right| &\leq v_{\mu}(2^{-k})\left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi\right\|_{1}\|g\|_{\infty}(\widetilde{S}_k^{*,a}f)(x)\int_{\mathbb{R}^n}\left|\left(\mathcal{F}^{-1}\phi(y)\right)\right|(1+|y|^a)\,dy \\ &\leq cv_{\mu}(2^{-k})\|g\|_{\infty}(\widetilde{S}_k^{*,a}f)(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\left\|\left\{v_{\mu}(2^{-k})\pi_k^{(1)}(f\cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^q} \leq c\|g\|_{\infty}\left\|\left\{v_{\mu}(2^{-k})\widetilde{S}_k^{*,a}f\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^q}$$

alors

$$\left\|\left\{v_{\mu}(2^{-k})\pi_k^{(1)}(f\cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{L^p(\ell^q)} \leq c\|g\|_{\infty}\left\|\left\{v_{\mu}(2^{-k})\widetilde{S}_k^{*,a}f\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{L^p(\ell^q)}.$$

Choisissons $a > \frac{n}{\min(p,q)}$, alors par la proposition 1.30 on a

$$\left\|\left\{v_{\mu}(2^{-k})\widetilde{S}_k^{*,a}f\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{L^p(\ell^q)} \leq c\|f\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}$$

ce qui donne

$$\left\|\left\{v_{\mu}(2^{-k})\pi_k^{(1)}(f\cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{L^p(\ell^q)} \leq c\|g\|_{\infty}\|f\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}.$$

Estimation de $\pi_k^{(2)}(f\cdot g)$. Soit u tel que

$$\max\left(p, n/(n/p-\mu)\right) < u < \infty.$$

On pose $\frac{1}{w} = \frac{1}{p} + \frac{1}{u}$, $\sigma = \mu - \frac{n}{p} + \frac{n}{w}$ et $\beta = \mu - \frac{n}{p} + \frac{n}{u}$ puisque $w < p$ alors pour tout $k \geq 0$ et d'après la proposition 1.33 on a

$$\begin{aligned}\left\|\pi_k^{(2)}(f \cdot g)\right\|_w &= \left\|S_k(Q_{k+1}f \cdot \widetilde{S_k}g)\right\|_w \\ &\leq c\left\|Q_{k+1}f \cdot \widetilde{S_k}g\right\|_w,\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder (puisque $\frac{1}{w} = \frac{1}{p} + \frac{1}{u}$), alors on a

$$\left\|\pi_k^{(2)}(f \cdot g)\right\|_w \leq c\left\|\widetilde{S_k}g\right\|_p \left\|Q_{k+1}f\right\|_u.$$

Donc

$$\begin{aligned}v_\sigma(2^{-k})\left\|\pi_k^{(2)}(f \cdot g)\right\|_w &\leq c_1\left\|\widetilde{S_k}g\right\|_p \sum_{j=0}^{k+1} \frac{v_\sigma(2^{-k})}{v_\beta(2^{-k}2^{k-j})}\left(v_\beta(2^{-j})\left\|S_jf\right\|_u\right) \\ &\leq c_2\left(v_{\frac{n}{p}}(2^{-k})\left\|\widetilde{S_k}g\right\|_p\right)2^{k\beta}\sum_{j=0}^{k+1} 2^{-j\beta}\left(v_\beta(2^{-j})\left\|S_jf\right\|_u\right),\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder en norme de ℓ^p, alors

$$\left\|\left\{v_\sigma(2^{-k})\pi_k^{(2)}(f \cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^p(L^w)} \leq c\sup_{k\geq 0}\left(v_{\frac{n}{p}}(2^{-k})\left\|\widetilde{S_k}g\right\|_p\right)\left\|2^{k\beta}\sum_{j=0}^{k+1} 2^{-j\beta}\left(v_\beta(2^{-j})\left\|S_jf\right\|_u\right)\right\|_{\ell^p}$$

et d'après la proposition 1.25 (puisque $\mu < \frac{n}{p} \Longrightarrow \beta < 0$), on a

$$\left\|\left\{v_\sigma(2^{-k})\pi_k^{(2)}(f \cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^p(L^w)} \leq c\left\|g\right\|_{B_{p,\infty}^{v_{\frac{n}{p}}}}\left\|f\right\|_{B_{u,p}^{v_\beta}}. \tag{5.11}$$

Nous avons aussi

$$\ell_p^{v_\sigma}(L^w) \hookrightarrow L^p(\ell_q^{v_\mu}) \qquad \text{et} \qquad F_{p,q}^{v_\mu} \hookrightarrow B_{u,p}^{v_\beta}.$$

Alors, la relation (5.11) devient

$$\left\|\left\{v_\mu(2^{-k})\pi_k^{(2)}(f\cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{L^p(\ell^q)} \le c\,\|g\|_{B^{v_{\frac{n}{p}}}_{p,\infty}}\|f\|_{F^{v_\mu}_{p,q}}.$$

Estimation de $\pi_k^{(3)}(f\cdot g)$. En considérant le cas $p\ge 2$.

Soit t tel que $p<t<\infty$. On pose $\frac{1}{u}=\frac{1}{p}+\frac{1}{t}$, $(u\ge 1)$, et $\eta=\mu-\frac{n}{p}+\frac{n}{u}$, puisque $u<p$, alors on a

$$\ell_p^{v_\eta}(L^u)\hookrightarrow L^p(\ell_q^{v_\mu}),$$

on pose $\beta=\mu-\frac{n}{p}+\frac{n}{t}\Longrightarrow \mu-\frac{n}{p}=\beta-\frac{n}{t}$, alors par la proposition 1.13, on a $F^{v_\mu}_{p,q}\hookrightarrow B^{v_\beta}_{t,p}$, et puisque $u\ge 1\Longrightarrow (\rho=\max(0,\frac{n}{u}-n)=0)$, alors d'après la proposition 1.33

$$\begin{aligned}\left\|\pi_k^{(3)}(f\cdot g)\right\|_u &= \Big\|\sum_{j=k}^{\infty}S_k(S_jf\cdot\overline{S_j}g)\Big\|_u\\ &\le c\sum_{j=k}^{\infty}\big\|(S_jf\cdot\overline{S_j}g)\big\|_u.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Par l'inégalité de Hölder ($\frac{1}{u}=\frac{1}{p}+\frac{1}{t}$), on a

$$v_\eta(2^{-k})\left\|\pi_k^{(3)}(f\cdot g)\right\|_u\le c_1\sum_{j=k}^{\infty}\frac{v_\eta(2^{-k})}{v_{\frac{n}{p}}(2^{-j})v_\beta(2^{-j})}2^{-j(\delta+\frac{n}{p})}\left(v_{\frac{n}{p}}(2^{-j})\left\|\overline{S_j}g\right\|_p\right)\left(v_\beta(2^{-j})\left\|S_jf\right\|_t\right).\tag{5.13}$$

Alors

$$\Big\|\left\{v_\eta(2^{-k})\pi_k^{(3)}(f\cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}\Big\|_{\ell^p(L^u)}\le c_2\Big\|2^{k(\beta+\frac{n}{p})}\sum_{j=k}^{\infty}2^{-j\left(\beta+\frac{n}{p}\right)}\left(v_{\frac{n}{p}}(2^{-j})\big\|\overline{S_j}g\big\|_p\right)\left(v_\beta(2^{-j})\big\|S_jf\big\|_t\right)\Big\|_{\ell^p}\tag{5.14}$$

d'après la proposition 1.25 (puisque $\beta+\frac{n}{p}>0$), la relation (5.14) devient

$$\Big\|\left\{v_\eta(2^{-k})\pi_k^{(3)}(f\cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}\Big\|_{\ell^p(L^u)}\le c_3\Big\|\left\{v_{\frac{n}{p}}(2^{-j})\big\|\overline{S_j}g\big\|_p\left(v_\beta(2^{-j})\big\|S_jf\big\|_t\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}\Big\|_{\ell^p}$$

et par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}\left\| \left\{ v_\eta(2^{-k})\pi_k^{(3)}(f\cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}} \right\|_{\ell^p(L^u)} &\leq c_4 \sup_{j\geq 0}\left(v_{\frac{n}{p}}(2^{-j})\left\|\overline{S_j}g\right\|_p\right)\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\left(v_\beta(2^{-j})\left\|S_jf\right\|_t\right)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c_5 \left\|g\right\|_{B_{p,\infty}^{v_{\frac{n}{p}}}} \left\|f\right\|_{B_{t,p}^{v_\beta}}. \qquad (5.15)\end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$F_{p,q}^{v_\mu} \hookrightarrow B_{t,p}^{v_\beta} \qquad \text{et} \qquad \ell^p(L^u)\hookrightarrow L^p(\ell^q).$$

Alors, on obtient

$$\left\|\left\{ v_\eta(2^{-k})\pi_k^{(3)}(f\cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{L^p(\ell^q)} \leq c\left\|g\right\|_{B_{p,\infty}^{v_{\frac{n}{p}}}}\left\|f\right\|_{F_{p,q}^{v_\mu}}.$$

Considérons maintenant le cas $p<2$. Soit β tel que

$$p<\beta<n/\max\left(0,n-n/p\right).$$

On pose $\frac{1}{w}=\frac{1}{p}+\frac{1}{\beta}$, $(w<1)$ et $\gamma=\mu-\frac{n}{p}+\frac{n}{w}$ alors, d'après la proposition 1.33, on a

$$\begin{aligned}\left\|\pi_k^{(3)}\left(f\cdot g\right)\right\|_w &= \left\|\sum_{j=k}^{\infty}S_k\left(S_jf\cdot\overline{S_j}g\right)\right\|_w \\ &\leq \sum_{j=k}^{\infty}\left\|S_k\left(S_jf\cdot\overline{S_j}g\right)\right\|_w \\ &\leq c\sum_{j=k}^{\infty}2^{(j-k)\rho}\left\|\left(S_jf\cdot\overline{S_j}g\right)\right\|_w\end{aligned}$$

avec $\rho=\frac{n}{p}+\frac{n}{\beta}-n$, donc

$$v_\gamma(2^{-k})\left\|\pi_k^{(3)}\left(f.g\right)\right\|_w \leq c_1\sum_{j=k}^{\infty}2^{(j-k)(\frac{n}{p}+\frac{n}{\beta}-n)}\left\|S_jf\cdot\overline{S_j}g\right\|_w. \qquad (5.16)$$

D'après l'inégalité de Hölder ($\frac{1}{w} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\beta}$), on a

$$\begin{aligned} v_\gamma(2^{-k})\big\|\pi_k^{(3)}(f\cdot g)\big\|_w &\le c_1\sum_{j=k}^{\infty}2^{(j-k)(\frac{n}{p}+\frac{n}{\beta}-n)}\big\|\overline{S_j}g\big\|_p\big\|S_jf\big\|_\beta \\ &\le c_2 2^{k\varepsilon}\sum_{j=k}^{\infty}2^{-j\epsilon}\left(v_{\frac{n}{p}}(2^{-j})\big\|\overline{S_j}g\big\|_p\right)\left(v_\rho(2^{-j})\big\|S_jf\big\|_\beta\right) \quad (5.17)\end{aligned}$$

où

$$\varepsilon = \mu - \frac{n}{p} + n > 0 \qquad \text{et} \qquad \rho = \mu - \frac{n}{p} + \frac{n}{\beta}.$$

Alors, on a

$$\Big\|\left\{v_\gamma(2^{-k})\pi_k^{(3)}(f\cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}\Big\|_{\ell^p(L^w)} \le c_3\Big\|2^{k\varepsilon}\sum_{j=k}^{\infty}2^{-j\varepsilon}\left(v_{\frac{n}{p}}(2^{-j})\big\|\overline{S_j}g\big\|_p\right)\left(v_\rho(2^{-j})\big\|S_jf\big\|_\beta\right)\Big\|_{\ell^p}.$$

D'après la proposition 1.25, (puisque $\mu > 0$), on a

$$\Big\|\left\{v_\gamma(2^{-k})\pi_k^{(3)}(f\cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}\Big\|_{\ell^p(L^w)} \le c_4\Big\|\left(v_{\frac{n}{p}}(2^{-j})\,\big\|\overline{S_j}g\big\|_p\left(v_\rho(2^{-j})\,\|S_jf\|_\beta\right)\right)_{j\ge 0}\Big\|_{\ell^p}. \quad (5.18)$$

Par l'inégalité de Hölder on trouve

$$\Big\|\left\{v_\gamma(2^{-k})\pi_k^{(3)}(f\cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}\Big\|_{\ell^p(L^w)} \le c_5\sup_{k\ge 0}\left(v_{\frac{n}{p}}(2^{-k})\big\|\overline{S_j}g\big\|_p\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(v_\rho(2^{-j})\big\|S_jf\big\|_\beta\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors

$$\left\|\left\{v_\gamma(2^{-k})\pi_k^{(3)}(f\cdot g)\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^p(L^w)} \le c_5\,\|g\|_{B_{p,\infty}^{v_{\frac{n}{p}}}}\,\|f\|_{B_{\beta,p}^{v_\rho}} \quad (5.19)$$

Nous avons $\rho = \mu - \frac{n}{p} + \frac{n}{\beta} \Rightarrow \mu - \frac{n}{p} = \rho - \frac{n}{\beta}$, alors d'après la proposition 1.13 on a

$$F_{p,q}^{v_\mu} \hookrightarrow B_{\beta,p}^{v_\rho}$$

puisque $\gamma > \mu$ et $w < p$, alors on a

$$\ell_p^{v_\gamma}\left(L^w\right) \hookrightarrow L^p\left(\ell_q^{v_\mu}\right).$$

Donc, la relation (5.19) devient

$$\left\|\left\{v_\mu(2^{-k})\pi_k^{(3)}\left(f\cdot g\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_{L^p(\ell^q)} \leq c_6\left\|g\right\|_{B_{p,\infty}^{v\frac{n}{p}}}\left\|f\right\|_{F_{p,q}^{v_\mu}}.$$

Alors

$$\left\|f\cdot g\right\|_{F_{p,q}^{v_\mu}} \leq c_7\left\|g\right\|_{B_{p,\infty}^{v\frac{n}{p}}}\left\|f\right\|_{F_{p,q}^{v_\mu}}.$$

■

Proposition 5.7 *Soient $\mu\in\mathbb{R}$, $1\leq p<\infty$, $1\leq q\leq\infty$ et v_μ une fonction de type μ. Alors*

i) Si $\mu>0$, on a

$$M(F_{p,q}^{v_\mu}) = \left(M(F_{p,q}^{v_\mu})\right)_{\ell^\infty}$$

ii) Si $\mu>\frac{n}{p}$, on a

$$M(F_{p,q}^{v_\mu}) = \left(F_{p,q}^{v_\mu}\right)_{\ell^\infty}.$$

Preuve. i) Montrons que $M(F_{p,q}^{v_\mu}) \subset \left(M(F_{p,q}^{v_\mu})\right)_{\ell^\infty}$. Soit $f\in M(F_{p,q}^{v_\mu})$, alors

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\|\psi\left(\cdot-k\right)f\right\|_{M(F_{p,q}^{v_\mu})} \leq c\left\|\psi\right\|_{M(F_{p,q}^{v_\mu})}\left\|f\right\|_{M(F_{p,q}^{v_\mu})}.$$

Inversement montrons que $\left(M(F_{p,q}^{v_\mu})\right)_{\ell^\infty} \subset M(F_{p,q}^{v_\mu})$. Soit $f\in\left(M(F_{p,q}^{v_\mu})\right)_{\ell^\infty}$, alors pour tout $g\in F_{p,q}^{v_\mu}$ on a

$$\left\|f\cdot g\right\|_{F_{p,q}^{v_\mu}} \leq c\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\|\psi\left(\cdot-k\right)f\cdot g\right\|_{F_{p,q}^{v_\mu}}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Car $F_{p,q}^{v_\mu}$ est localisable en norme de ℓ^p, d'où

$$\begin{aligned}\|f \cdot g\|_{F_{p,q}^{v_\mu}} &\leq c\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\psi(\cdot-k)\varphi(\cdot-k)f\cdot g\|_{F_{p,q}^{v_\mu}}^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq c\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\psi(\cdot-k)f\|_{M(F_{p,q}^{v_\mu})}^p\|\varphi(\cdot-k)g\|_{F_{p,q}^{v_\mu}}^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est identiquement 1 sur le support de ψ, alors

$$\|f \cdot g\|_{F_{p,q}^{v_\mu}} \leq c \sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\psi(\cdot-k)f\|_{M(F_{p,q}^{v_\mu})}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\lambda(\cdot-k)g\|_{F_{p,q}^{v_\mu}}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

car $F_{p,q}^{v_\mu}$ est localisable en norme de ℓ^p, donc

$$\|f \cdot g\|_{F_{p,q}^{v_\mu}} \leq c\|f\|_{(M(F_{p,q}^{v_\mu}))_{\ell^\infty}}\|g\|_{F_{p,q}^{v_\mu}}$$

d'où l'inclusion.

ii) On démontre que

$$\left(F_{p,q}^{v_\mu}\right)_{\ell^\infty} \subset M(F_{p,q}^{v_\mu}) = \left(M(F_{p,q}^{v_\mu})\right)_{\ell^\infty} \subset \left(F_{p,q}^{v_\mu}\right)_{\ell^\infty}.$$

Soit $\mu > \frac{n}{p}$, alors $F_{p,q}^{v_\mu} \subset M\left(F_{p,q}^{v_\mu}\right)$, autrement dit, qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\|f \cdot g\|_{F_{p,q}^{v_\mu}} \leq c\|f\|_{F_p^{s,q}}\|g\|_{F_{p,q}^{v_\mu}}, \qquad (\forall f, g \in F_{p,q}^{v_\mu}).$$

On a aussi $\left(F_{p,q}^{v_\mu}\right)_{\ell^\infty} \subset \left(M(F_{p,q}^{v_\mu})\right)_{\ell^\infty} = M(F_{p,q}^{v_\mu})$.

Inversement, si $f \in M\left(F_{p,q}^{v_\mu}\right)$, on a pour toute $g \in F_{p,q}^{v_\mu}$

$$\|\psi(\cdot-k)f\cdot g\|_{F_{p,q}^{v_\mu}} \leq \gamma\|\psi(\cdot-k)f\|_{F_{p,q}^{v_\mu}}\|g\|_{F_{p,q}^{v_\mu}},$$

d'où

$$\|\psi(\cdot - k) f\|_{M(F^{v_\mu}_{p,q})} \leq c \left(\sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\psi(\cdot - k) f\|_{F^{v_\mu}_{p,q}} \right),$$

donc

$$\left(M\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)\right)_{\ell^\infty} \subset \left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)_{\ell^\infty}.$$

■

5.3 Continuité des *o.ps.d* sur les espaces des multiplicateurs ponctuels

Dans ce paragraphe on démontre que les opérateurs pseudo-différentiels sont bornés sur l'espace des multiplicateurs de $F^{v_\mu}_{p,q}$ pour $\mu > \frac{n}{p}$ et ne sont pas bornée pour $0 < \mu < \frac{n}{p}$.

5.3.1 Théorème de continuité sur l'espace de $M(F^v_{p,q})$

Proposition 5.8 *Soient $1 \leq p, q \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $\mu \geq 0$. Soit v_μ une fonction de type μ. Posons*

$$\|f\|^{(1)}_{B^{v_\mu}_{p,q}} = \|f\|_p + \left(\int_0^1 \left(v_\mu(t) \sup_{|h|<t} \|\Delta^m_h f\|_p \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q}.$$

Alors $\|\cdot\|_{B^{v_\mu}_{p,q}}$ et $\|\cdot\|^{(1)}_{B^{v_\mu}_{p,q}}$ sont des normes équivalentes dans $B^{v_\mu}_{p,q}$.

Preuve. Etape 1. Nous prouvons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|f\|_{B^{v_\mu}_{p,q}} \leq c \|f\|^{(1)}_{B^{v_\mu}_{p,q}}. \tag{5.20}$$

Soit S^{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, nous avons

$$\eta(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{|h'|=1} (e^{ix\cdot h'} - 1)^m \mathrm{d}h' \qquad (m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^n)\,,$$

et comme $\mathcal{F}(\Delta_h^m f)(\xi) = (e^{i\xi\cdot h} - 1)^m (\mathcal{F}f)(\xi)$ il est clair que

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\eta\ \mathcal{F}f\right)(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{|h'|=1} \triangle_{h'}^m f\,(x)\,\mathrm{d}h'$$

et $\eta\,(x) \neq 0$ si $x \in \operatorname{supp} \phi$ ou $x \in \operatorname{supp} \varphi$, donc

$$\begin{aligned} S_j f\,(x) &= \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\phi\,(2^{-j}\cdot)}{\eta\,(2^{-j}\cdot)} \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\eta\left(2^{-j}\cdot\right)\mathcal{F}f\right)\right)\Big)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\phi\,(2^{-j}\cdot)}{\eta\,(2^{-j}\cdot)}\Big)(y)\ \mathcal{F}^{-1}\left(\eta\left(2^{-j}\cdot\right)\ \mathcal{F}f\right)(x-y)\ \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{|h'|=1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\phi\,(2^{-j}\cdot)}{\eta\,(2^{-j}\cdot)}\Big)(y)\ \triangle_{2^{-j}h'}^m f\,(x-y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}h'. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|S_j f\|_p &\leq \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{|h'|=1} \|\triangle_{2^{-j}h'}^m f\|_p\ \mathrm{d}h' \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\phi\,(2^{-j}\cdot)}{\eta\,(2^{-j}\cdot)}\Big)(y)\ \mathrm{d}y \\ &\leq c \sup_{u\in\mathbb{R}^n,\ |u|\leq 2^{-j}} \|\triangle_u^m f\|_p\ . \end{aligned}$$

Maintenant parce que

$$v_\mu\left(2^{-j}\right) \leq c\,2^{\mu j}\,t^\mu\,v_\mu\,(t) \qquad (t > 0,\ j \in \mathbb{N})\,,$$

par conséquent

$$c\Big(\int_0^1 \Big(v_\mu(t) \sup_{u\in\mathbb{R}^n,\ |u|\le t} \|\triangle_u^m f\|_p\Big)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/q} \ge$$
$$c\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(v_\mu\left(2^{-j}\right) \sup_{u\in\mathbb{R}^n,\ |u|\le 2^{-j}} \|\triangle_u^m f\|_p\Big)^q 2^{-\mu q t}\int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} t^{-\mu q-1}\mathrm{d}t\Big)^{1/q}$$
$$\ge c'\,\|f\|_{B^{v_\mu}_{p,q}} \ .$$

Etape 2. Nous prouvons l'assertion inverse de (5.20). Nous avons

$$v_\mu(t) \le c\,2^{-\mu k}\,t^{-\mu}\,v_\mu\left(2^{-k}\right), \qquad (0<t<1,\ k\in\mathbb{N}),$$

alors nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^1\Big(v_\mu(t)\sup_{|u|\le t}\|\triangle_u^m f\|_p\Big)^q\frac{\mathrm{d}t}{t} &\le c\sum_{k=0}^{\infty}\Big(2^{-\mu k}v_\mu\left(2^{-k}\right)\sup_{|u|\le 2^{-\ell}}\|\triangle_u^m f\|_p^q\Big)\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} t^{-\mu q-1}\mathrm{d}t\\ &\le c'\sum_{k=0}^{\infty}\Big(v_\mu\left(2^{-k}\right)\sup_{|u|\le 2^{-k}}\|\triangle_u^m f\|_p\Big)^q .\end{aligned}$$

Soit $u\in\mathbb{R}^n$ tel que $|u|\le 2^{-k}$, nous avons

$$|\triangle_u^m(U_j f)(x)| \le 2^m 2^{d(j-k)}\sup_{|y|\le 2^{-k}}\frac{|S_j f(x+y)|}{1+|2^j y|^d} \le c\,2^{d(j-k)}\cdot S_j^{*,d} f(x), \tag{5.21}$$

où $d>(n/\min(p,q))$. Nous avons décomposé $\triangle_u^m f$ en

$$\Big(\sum_{j=0}^{k}+\sum_{j=k+1}^{\infty}\Big)\triangle_u^m(S_j f) = A_k + B_k,$$

et nous estimons chacun des deux termes (le nombre naturel m n'aura pas un rôle important ici). Choisissez deux nombres réels r et t tels que $0<r<\mu<t$, et en utilisant

(5.21) où l'on remplace d par r et t dans l'estimation des A_k et B_k respectivement , on obtient

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\left(v_\mu\left(2^{-k}\right)\|A_k\|_p\right)^q\Big)^{1/q}\leq c\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(2^{-(t-\mu)k}\sum_{j=0}^{k}2^{(t-\mu)j}v_\mu\left(2^{-j}\right)\left\|S_j^{*,t}f\right\|_p\Big)^q\Big)^{1/q} \quad (5.22)$$

et

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\left(v_\mu\left(2^{-k}\right)\|B_k\|_p\right)^q\Big)^{1/q}\leq c\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(2^{(\mu-r)k}\sum_{j=k+1}^{\infty}2^{-(\mu-r)j}v_\mu\left(2^{-j}\right)\left\|S_j^{*,r}f\right\|_p\Big)^q\Big)^{1/q}. \quad (5.23)$$

A partir de maintenant, nous appliquons (1.11) et l'estimation élémentaire $\left\|S_j^{*,d}f\right\|_p\leq\|S_jf\|_p$ ($d=r$ ou t) à (5.22) et (5.23). ■

Définition 5.9 *Nous dirons qu'une distribution ϑ est homogène de degré $\alpha\in\mathbb{R}$, si*

$$\vartheta(tx)=t^\alpha\vartheta(x),\qquad(\forall t>0,\ x\in\mathbb{R}^n).$$

Lemme 5.10 *Soient $1\leq p\leq\infty$, $\tau>-\frac{n}{p}$, $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et ϑ une fonction homogène de degré 0, C^∞ en dehors de l'origine. Alors la fonction*

$$|x|^\tau\,\vartheta\left(\frac{x}{|x|}\right)\phi(x)$$

appartient à $B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}}$.

En outre, si $1\leq q\leq\infty$ et $u:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ une fonction positive telle que

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{(\mu+(n/p)k}u\left(2^{-k}\right)\right)^q\Big)^{1/q}<+\infty, \quad (5.24)$$

alors la fonction $|x|^\tau\,\vartheta(x)\,\phi(x)$ appartient à $B_{p,\infty}^u$.

Preuve. Etape 1 : Soit $g(x) = |x|^{\tau} \vartheta(x) \phi(x)$, pour prouver que $g \in B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$ on va montrer par récurrence sur $m = -[-\tau - \frac{n}{p}] - 1$, $(m \in \mathbb{N})$ que $g^{(\alpha)} \in B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}-m}(\mathbb{R}^n)$ où $|\alpha| \leq m$.

1. Le cas $m = 0,\ \sigma = \tau + \frac{n}{p} < 1$, posons $(\Delta_h g)(x) = g(x+h) - g(x)$, on a

$$\|\Delta_h g\|_p^p \leq \left(\int_{|x|\leq 2|h|} + \int_{|x|\geq 2|h|}\right) |\Delta_h g(x)|^p \, dx$$

dans la première intégrale, on majore $|\Delta_h g(x)|$ par $|g(x+h)| + |g(x)|$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leq 2|h|} |\Delta_h g(x)|^p \, dx &\leq 2^p \int_{|x|\leq 3|h|} |g(x)|^p \, dx \\
&\leq c \int_{|x|\leq 3|h|} |x|^{\tau p} \, dx \\
&\leq c' |h|^{\sigma p},
\end{aligned}$$

dans la deuxième intégrale, le théorème des accroissements finis donne

$$|\Delta_h g(x)| \leq c\,|h|\,|x|^{\tau-1}$$

d'où

$$\int_{|x|\geq 2|h|} |\Delta_h g(x)|^p \, dx \leq c\,|h|^p \int_{|x|\geq 2|h|} |x|^{p(\tau-1)} \, dx = \acute{c}\,|h|^{\sigma p}$$

ainsi $\|\Delta_h g\|_p \leq c\,|h|^{\sigma}$.

2. Le cas $m = 0,\ \sigma = 1$. Pour évaluer $\|g\|_{B_{p,\infty}^1}$, l'estimation porte sur la seconde différence

$$\Delta_h^2 g(x) = g(x+h) - 2g(x) + g(x-h).$$

De manière analogue au (1), on a

$$\begin{aligned} \int_{|x|\leq 2|h|} \left|\Delta_h^2 g\left(x\right)\right|^p dx &\leq 3^p \int_{|x|\leq 3|h|} \left|g\left(x\right)\right|^p dx \\ &\leq c\left|h\right|^p, \end{aligned}$$

et la formule de Taylor à l'ordre 2, permet d'obtenir

$$\left|\Delta_h^2 g\left(x\right)\right| \leq c\left|h\right|^2 \left|x\right|^{\tau-2} \qquad (\text{pour } \ |x| \geq 2\left|h\right|)$$

d'où

$$\int_{|x|\geq 2|h|} \left|\Delta_h^2 g\left(x\right)\right|^p dx \leq c\left|h\right|^{2p} \int_{|x|\geq 2|h|} \left|x\right|^{p(\tau-2)} dx = \acute{c}\left|h\right|^p$$

finalement $\left\|\Delta_h^2 g\right\|_p \leq c\left|h\right|.$

3. La récurrence sur m.

Fixons α dans $\mathbb{N}^n$, tel que $|\alpha| \leq m$, la fonction $g^{(\alpha)}$ est une combinaison linéaire des fonctions de la forme

$$g_j\left(x\right) = \left|x\right|^{\tau-j} \Lambda\left(x\right) \psi\left(x\right), \quad \left(j = 0, ... \left|\alpha\right|\right).$$

où Λ est homogène de degré 0, C^∞ sur $\mathbb{R}^n \diagdown 0$ et $\psi \in \mathcal{D}$. On a $m < \frac{n}{p}+\tau$ entraîne $j < \tau + \frac{n}{p}$, donc

$$\int \left|g_j\left(x\right)\right|^p dx \leq c \int_{x\in \operatorname{supp}\psi} \left|x\right|^{p(\tau-j)} dx,$$

ce qui prouve que $g_j \in L^p$. Il reste à montrer que pour $|\alpha| = m,\ g_j \in B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}-m}$.

- Si $j \neq 0$, l'hypothèse de récurrence s'applique et donne

$$g_j \in B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}-j} \hookrightarrow B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}-m}.$$

- Si $j = 0$, on a $1 \leq m < \tau + \frac{n}{p} < 1 + m$, d'où

$$g_j \in W_p^1 \hookrightarrow B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}-m}.$$

Alors toutes les dérivées de g, d'ordre α, $(|\alpha| \leq m)$, sont dans $B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}-m}$, d'où $g \in B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}}$.

Etape 2 : En utilisant (5.24) et comme $B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}} \hookrightarrow B_{p,\infty}^{u}$ alors on trouve le résultat. ■

Théorème 5.11 *Soient $\mu > 0$, $\eta > 0$, $1 < p < \infty$, $1 < q \leq \infty$, $0 \leq \delta < 1$ et $N \in \mathbb{N}$. Soit v_μ une fonction de type μ. Alors*

i) Si $\mu > \frac{n}{p}$, ω un module de continuité vérifié (3.1), alors tout opérateur $\sigma(x, D) \in OP_{1,\delta}^m(\omega, N)$ est borné de $M(F_{p,q}^{\widetilde{v}_{\mu+m}})$ dans $M(F_{p,q}^{v_\mu})$, où la fonction $\widetilde{v}_{\mu+m}$ est définie dans le théorème 3.1.

ii) Si $\mu > \frac{n}{p}$, ω un module de continuité qui ne vérifie pas (3.1), alors il existe un opérateur $\sigma(x, D) \in OP_{1,\delta}^m(\omega, N)$ et une fonction h de $M(F_{p,q}^{\widetilde{v}_{\mu+m}})$ tels que $\sigma(x, D)h \notin M(F_{p,q}^{v_\mu})$, où la fonction $\widetilde{v}_{\mu+m}$ est définie dans le théorème 3.1.

iii) Si $\mu < \frac{n}{p}$, alors tout opérateur $\sigma(x, D) \in OP_{1,\delta}^{[\mu]}(1, 1)$, n'est pas borné de $M(F_{p,q}^{v_\mu})$ dans $M(F_{p,q}^{v_\mu})$.

Preuve. i) et ii) Il Suffit d'appliquer la proposition 5.7 et le théorème 4.14

iii) On suppose que $\sigma(x, D) \in OP_{1,\delta}^{[s]}(1, N)$, est borné de $M(F_{p,q}^{v_\mu})$ dans $M(F_{p,q}^{v_\mu})$.

Soit la fonction

$$g(x) = |x|^{[s]} \vartheta\left(\frac{x}{|x|}\right) \phi(x), \qquad [s] \geq (n/p)$$

où ϑ est C^∞ sur la sphère unité S^{n-1}, positive et à support contenu dans l'ouvert

$$V = \left\{ x = (x_1, x') \in S^{n-1} : x_1 < -\frac{1}{2}|x| \right\}$$

$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, positive et $\phi(x) = 1$ sur la boule unité $|x| \leq 1$. Alors $g \in M\left(F_{p,q}^{v_\mu}\right)$ pour $0 < \mu < \frac{n}{p}$ puisque on a démontré dans le lemme 5.10 que $g \in B_{p,\infty}^{v_{\frac{n}{p}}} \cap L^\infty$, et d'après le théorème 5.6, on a $g \in M\left(F_{p,q}^{v_\mu}\right)$. Soit $\sigma(x, D)$ un *o.ps.d.* d'ordre $[s]$, de symbole

$$\sigma(\xi) = \frac{\xi_1^{1+[s]}}{|\xi|}\left(1 - \widehat{\lambda}(\xi)\right),$$

où $(\xi_1, \xi') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ et $\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 ou voisinage de 0. Pour tout $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, l'opérateur $\sigma(x, D)$ est défini par

$$\sigma(x, D)g = R_1 g - c_1(R_1 * (\partial_{x_1}^{[s]}\mathcal{F}^{-1}\lambda))g$$

où R_1 est la transformation de Riez associée à la première composante définie par

$$R_1 g(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^{n+1}} g(y)\, dy.$$

Puisque $R_1 g$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ (voir [34], p. 56 ou [9], p. 86) et $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on obtient par Young

$$\left\|(R_1 * (\partial_{x_1}^{[s]}\mathcal{F}^{-1}\lambda))g\right\|_\infty \leq c_2 \|g\|_2 \left\|\partial_{x_1}^{[s]}\mathcal{F}^{-1}\lambda\right\|_2.$$

De ce qui précède, il suffit de montrer que $R_1 g \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et par conséquent $\sigma(x, D)g \notin M\left(F_{p,q}^{v_\mu}\right)$.

En effet, Soit l'ouvert

$$U = \left\{x \in S^{n-1} : x_1 > \frac{1}{2}|x|\right\},$$

alors, quelques soient x et y dans $\mathbb{R}^n \diagdown 0$, tels que

$$\frac{x}{|x|} \in U,\ \frac{y}{|y|} \in V \qquad \text{entraîne} \qquad x_1 - y_1 > \frac{1}{2}|x-y|,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\frac{x}{|x|} \in U$, alors on a l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\xi_1^{1+[s]}}{|\xi|} \phi(\xi) d\xi = c_3 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_1^{1+[s]}}{|x|^{n+1+2[s]}} \mathcal{F}\phi(x) dx \qquad (\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)) \tag{5.25}$$

et comme $x_1 - y_1 > \frac{1}{2}|x-y|$ on trouve

$$\int\limits_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{(x_1-y_1)^{1+[s]}}{|x-y|^{n+1+2[s]}} g(y)\, dy \geq (\frac{1}{2})^{1+[s]} \int\limits_{|x-y|\geq\varepsilon} |x-y|^{-n-[s]} g(y)\, dy$$

par conséquent

$$\begin{aligned} R_1 g(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x-y|\geq\varepsilon} \frac{(x_1-y_1)^{1+[s]}}{|x-y|^{n+1+2[s]}} g(y)\, dy \\ &\geq (\frac{1}{2})^{1+[s]} \int\limits_{|x|\leq|y|\leq 1} 2^{-n} |y|^{-n} \vartheta\left(\frac{y}{|y|}\right) dy \\ &\geq 2^{-n-1-[s]} \|\vartheta\|_{L^1(S^{n-1})} |\log|x||\,. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $R_1 g$ n'appartient pas à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Alors $\sigma(x,D)g \notin L^\infty$ et puisque $M\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right) \hookrightarrow L^\infty$, (d'après le proposition 5.5) alors $\sigma(x,D)g \notin M\left(F^{v_\mu}_{p,q}\right)$ ce qui contredit que l'opérateur $\sigma(x,D)$ est borné.

Maintenant on prouve l'égalité (5.25). Il suffit de voir que la fonction localement intégrable $f(\xi) = \xi_1^k / |\xi|^s$ (pour $k = 1, 2, ...$ et $0 < s < n + 2k$), est la transformée de Fourier dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, de la fonction $\mathcal{F}^{-1} f(x) = x_1^k / |x|^{n-s+2k}$, (voir [33, ch. 3/(31) p. 73]). En effet, depuis la fonction $(i\xi_1)^k e^{-\frac{1}{2t}|\xi|^2}$et la transformée de Fourier de $(t/2\pi)^{\frac{n}{2}} \partial^k_{x_1}(e^{-\frac{t}{2}|x|^2})$, alors

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} t^{k+\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\tfrac{1}{2}x_1\right)^k e^{-\frac{t}{2}|x|^2} \widehat{\phi}(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} (i\xi_1)^k e^{-\frac{1}{2t}|\xi|^2} \phi(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Nous multiplions les deux côtés de cette égalité par $t^{-1-\frac{s}{2}}$, nous intégrons sur t dans $[0,\infty)$ et en utilisant le fait que

$$\int_0^\infty t^{\frac{n-a}{2}+k-1} e^{-\frac{t}{2}|x|^2}\, dt = \frac{2^{k+(n-a)/2}}{|x|^{n-a+2k}} \Gamma\left(k + \frac{n-a}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty t^{-1-\frac{s}{2}} e^{-\frac{1}{2t}|\xi|^2}\, dt = \frac{2^s}{|\xi|^s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right),$$

alors on obtient la conclusion désirée par le théorème de Fubini. ■

5.3.2 Théorème de continuité sur $M((F^v_{p,q})_{\ell^r})$

Nous prolongerons notre étude pour prouver, sur $M((F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r})$, le même résultat de [6] cas de l'espace de Besov usuel.

Théorème 5.12 *Soient $\mu > 0$, $\eta > 0$, $1 < p < \infty$, $1 < q \leq \infty$, $1 < r \leq \infty$, $0 \leq \delta < 1$, $N \in \mathbb{N}$ et v_μ une fonction de type μ. Alors*

i) Si $\mu > \frac{n}{p}$, ω un module de continuité vérifié (3.1), alors tout opérateur $\sigma(x,D) \in OP^m_{1,\delta}(\omega, N)$ est borné de $M((F^{\widetilde{v}_{\mu+m}}_{p,q})_{\ell^r})$ dans $M((F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r})$, où la fonction $\widetilde{v}_{\mu+m}$ est définie dans le théorème 3.1.

ii) Si $\mu > \frac{n}{p}$, ω un module de continuité qui ne réalise pas (3.1), alors il existe un opérateur $\sigma(x,D) \in OP^m_{1,\delta}(\omega, N)$ et une fonction h de $M((F^{\widetilde{v}_{\mu+m}}_{p,q})_{\ell^r})$ tels que $\sigma(x,D)h \notin M((F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r})$. La fonction $\widetilde{v}_{\mu+m}$ est définie dans le théorème 3.1.

iii) Si $\mu < \frac{n}{p}$, alors tout opérateur $\sigma(x,D) \in OP^{[\mu]}_{1,\delta}(1,1)$, n'est pas borné de $M((F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r})$ dans $M((F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r})$.

Nous aurons besoin de la proposition suivante.

Proposition 5.13 *Soient $\mu \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, $1 < p < \infty$ et $1 < r, q \leq \infty$. Alors* *i)* *On a*

$$M(F^{v_\mu}_{p,q}) \hookrightarrow M((F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r})\,.$$

ii) *Si $\mu > 0$, on a*

$$M((F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}) \hookrightarrow L_\infty\,.$$

Preuve. La preuve de (i) est évidente. Soit $b \in M((F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r})$ on considère l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} T_b: & \mathcal{S} & \to & \mathcal{S}' \\ & f & \to & b \cdot f \end{array}$$

on a T_b est borné de $(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}$ dans $(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}$ (car $b \in M((F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r})$), et T_b est borné de $(F^{1/v_\mu}_{p',q'})_{\ell^r}$ dans $(F^{1/v_\mu}_{p',q'})_{\ell^r}$ (car $b \in M((F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}) = M((F^{1/v_\mu}_{p',q'})_{\ell^{r'}})$). Donc par la proposition 1.21 et comme $F^{v_\mu}_{p,p} = (F^{v_\mu}_{p,p})_{\ell^p}$ on a

$$L^2 = F^{v_0}_{2\,,\,2} = (F^{v_0}_{2\,,\,2})_{\ell^2} = ((F^{v_0}_{2,2})_{\ell^2},\, (F^{1/v_0}_{2,2})_{\ell^2})_{\frac{1}{2}} = \Big((F^{v_0}_{2,2},\, F^{1/v_0}_{2,2})_{\frac{1}{2}}\Big)_{\ell^2}$$

ce qui donne que T_b est borné de L^2 dans L^2 c'est-à-dire $b \in M\,(L^2) = L^\infty$. Alors

$$M((F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}) \hookrightarrow L^\infty.$$

■

Preuve de Théorème 5.12. Pour la preuve de (i) il suffit d'appliqué la proposition 5.13/(i) et le théorème 4.14/(i) ce qui donne pour $g \in M(F^{v_\mu}_{p,q})$ que

$$\Big\|\sigma(x,D)f\Big\|_{M((F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r})} = \Big\|g \cdot \sigma(x,D)f\Big\|_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}} \le \Big\|g\Big\|_{M(F^{v_\mu}_{p,q})}\Big\|\sigma(x,D)f\Big\|_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}}.$$

Nous utilisons le même $\sigma(x,\xi)$, g et h de (3.3), (3.6) et (3.7) respectivement. puisque $h \in \mathcal{S}$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \|g \cdot \sigma(x,D)h\|_{(F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}} &\geq c\|g\|^3_{3p}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \big(v_\mu\left(2^j\right) 2^{-(1-\delta)jN}\omega(2^{-(1-\delta)j})\big)^q\Big)^{1/q} \\ &= +\infty\,. \end{aligned}$$

Dans le cas $\mu < \frac{n}{p}$ on utilise la proposition 5.13/(ii), puis le contre-exemple du théorème 5.11/(iii). Autrement dit, il existe un o.ps.d. $\sigma(x,D)$ d'ordre $[\mu]$ et une fonction $h \in M\left((F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}\right)$ tels que $\sigma(x,D)h \notin M\left((F^{v_\mu}_{p,q})_{\ell^r}\right)$. ■

Conclusion

L'objectif de ce travail est d'étudier la continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Triebel-Lizorkin généralisés $F_{p,q}^{v_\mu}$, l'espace $(F_{p,q}^{v_\mu})_{\ell^r}$, l'espace $M(F_{p,q}^{v_\mu})$ et l'espace $M((F_{p,q}^{v_\mu})_{\ell^r})$ avec la condition de régularité

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\big(v_\mu\left(2^{-k}\right)2^{-(1-\delta)kN}\omega(2^{-(1-\delta)k})\big)^q\Big)^{1/q}<+\infty.$$

Cette étude nous a permet de généraliser certains resultats dû a M. Moussai [22] et [23] et a Drihem-Moussai [11].

La globalité de ce travail c'est fructifier par des résultats apparues dans :

- Chapitre trois publié dans Analysis, **31** (2011), 13–29.
- Chapitre cinq publié dans Mathematica Balkanica. New Series Vol. 23, 2009, Fasc. 1-2 2009. 145-161.
- Chapitre quatre peut former une publication en collaboration avec le directeur de la thèse.

Questions ouvertes

Pour $\mu=\frac{n}{p}$, est-ce que les opérateurs pseudo-différentiels (de la classe concernée dans cette thèse) sont bornés sur L'espace $M\left(F_{p,q}^{v_\mu}\right)$? sur $M((F_{p,q}^{v_\mu})_{\ell^r})$?

Bibliographie

[1] J. Bergh et J. Löfstrom. Interpolation spaces. Springer-verlag, 1976.

[2] G. Bourdaud. *Régularité du commutateur des opérateurs pseudo-différentiel peu réguliers.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math **290**, (1980), 67–70.

[3] G. Bourdaud. *L^p-estimates for certain non-regular pseudodifferential operators.* Comm. Partial Differential Equations 7 (9) (1982), 1023–1033.

[4] G. Bourdaud. Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien. Pub. Math. Uni. Paris 7. N°29 (1987).

[5] G. Bourdaud. *Localisations des espaces de Besov.* Studia Math., **90** (1988), 153–163.

[6] G. Bourdaud et M. Moussai. *Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Besov localisés.* Bull. Sc. Math., 2ème série, **112** (1988), 419–432.

[7] G. Bourdaud et M. Moussai. *Continuité des commutateurs d'intégrales singulières sur les espaces de Besov.* Bull. Sci. Math, **118** (1994), 117–130.

[8] C.-H. Ching. *Pseudodifferential operators with non regular symbols.* J. Differential Equations **11** (1972), 436–447.

[9] R.R. Coifman et Y. Meyer. Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels. Astérisque Soc. Math. France, **57**, 1978.

[10] D. Drihem et M. Moussai. *Some embeddings into the multiplier spaces associated to Besov and Lizorkin-Triebel spaces.* Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen **21** (2002), no. 1, 179–184.

[11] D. Drihem et M. Moussai. *On the pointwise multiplication in Besov and Lizorkin-Triebel spaces.* Int.J.M.M.S. Vol. 2006, Article ID 76182, Pages 1–18 **21**.

[12] W. Farkas et H. G. Leopold. *Characterisations of function spaces of generalised smoothness.* Ann. Mat. Pura Appl., Vol. 1, **185** (2006), 1–62.

[13] J. Franke. *On the spaces* $F_p^{s,q}$ *of Triebel–Lizorkin type : Pointwise multipliers and spaces on domains.* Math. Nachr, **125** (1986), 29–68.

[14] S. I. Hartzstein et B. E. Viviani. *Integral and derivative operators of functional order on generalized Besov and Tirebel-Lizorkin spaces in the setting of spaces of homogeneous type.* Comment. Math. Univ. Carolinae, Vol. 4, **43** (2002), 723–754.

[15] S. I. Hartzstein et B. E. Viviani. *On the composition of the integral and derivative operators of functional order.* Comment. Math. Univ. Carolinae, Vol. 1, **44** (2003), 99–120.

[16] L. Hörmander. *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations*, in Proc. Symp. Pure math. X 1965, 138–183.

[17] H. Koch et W. Sickel. *Pointwise multipliers of Besov spaces of smoothness zero and spaces of continuous function.* Preprint 2001-24 (SFB 359) Universität Heidelberg. Revista Mat. Iberoamericana, **18**(3), 587–626, 2002.

[18] J. Marschall. *Remarks on nonregular pseudo-differential operators.* Z. Anal. Anwendungen 15 (1996), 109-148.

[19] V.G. Maz'ya and T.O. Shaposhnikova, Theory of Sobolev multipliers. With Applications to Differential and Integral Operators. Springer, 2009.

[20] Y. Meyer. *Remarques sur un théorème de J. M. Bony.* Rendiconti Circ. Mat. Palermo **II** 1 (1981), 1–20.

[21] M. Moussai. Thèse 3^{eme}cycle université Paris VII, 1986.

[22] M. Moussai. *Continuity of pseudo-differential operators on Bessel and Besov spaces.* Serdica Math. J, **27** (2001), 249–262.

[23] M. Moussai. *On the Continuity of Pseudo-differential Operators on Besov Spaces.* Analysis, **26** (2006), 491–506. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München 2006.

[24] M. Nagase. *L^p-boundedness of pseudodifferential operators with non regular symbols.* Comm. Partial Differential Equations **2** (10) (1977), 1045–1071.

[25] M. Nagase. *On a class of L^p-bounded pseudodifferential operators.* Sci. Rep. College Gen. Ed. Osaka Univ. **33** (4) (1985), 1–7.

[26] M. Nagase. *On sufficient conditions for pseudodifferential operators to be L^p bounded, Pseudodifferential operators.* Oberwolfach, 1986, Lecture Notes in Mathematics.

[27] S. M. Nikol'skij. *Approximation of function of several variables and imbedding theorems.* Springer, Berlin, 1975.

[28] J. Peetre. *New thoughts on Besov sapces.* Duke Uni.Math. series 1, Durham (1976).

[29] T. Runst et W. Sickel. Sobolev spaces of fractional order, Nemytskii operators and nonlinear partial differential equations. de Gruyter, Berlin 1996.

[30] W. Sickel et I. Smirnov. *Localization properties of Besov spaces and of its ossociated multiplier spaces.* Jenaer Schriften Math/ inf/ 99/ 21.

[31] W. Sickel. *On boundedness of superposition operators in spaces of Triebel-Lizorkin type.* Czechoslovak Mathematical. Journal, **39** (114) 1989, 323-347. Praha.

[32] E. M. Stein. : *Interpolation of linear operators*, Trans. Amer. math. Soc. **83** (1956), 482-492.

[33] E. M. Stein. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press. 1970.

[34] E. M. Stein. Harmonic Analysis, real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals. Press, Princeton New Jersey, 1993.

[35] H. Triebel. Theory of function spaces. Birkhäuser, Basel, 1983.

[36] H. Triebel. Theory of function spaces II. Birkhäuser, Basel, 1992.

[37] H. Triebel. Theory of function spaces III. Birkhäuser, Basel, 2006.

[38] K. Yabuta. Generalization of Calderón-Zygmund operators. Studia Math. **62** (1985), 17–31.

[39] A. Youssfi. Thèse 3^{eme}cycle université Paris VII, 1989.