Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université El Hadj Lakhdar, Batna

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

N° d'ordre:

N° de série:

THESE

Présentée par

Hanifa ZEKRAOUI

Pour l'obtention du grade de

Docteur en Sciences

En Mathématiques

OPTION

ALGÈBRE

SUR LES PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES G_{k}–INVERSES DES MATRICES

Soutenue le 3 Juillet 2011

Devant le jury:

Lemnouar Noui	Président	Professeur	Université El Hadj Lakhdar, Batna
Said Guedjiba	Encadreur	M. C. A	Université El Hadj Lakhdar, Batna
Rachid Benacer	Examinateur	Professeur	Université El Hadj Lakhdar, Batna
A/ Ouahab Kadem	Examinateur	M. C. A	Université Ferhat Abbas, Sétif
Khaled Melkemi	Examinateur	Professeur	Université Mohamed Khider, Biskra
BoudjemaaTeniou	Examinateur	Professeur	Université Mentouri, Constantine

Reconnaissances

J'aimerais remercier le Professeur. S. Guedjiba, mon encadreur, pour les suggestions secourables et pour le support constant pendant cette recherche. Je tiens aussi à remercier les membres du Jury pour m'avoir donné l'occasion de discuter ce travail, spécialement le Professeur. L. Noui pour les questions stimulantes et les suggestions utiles.

Sommaire

Sommaire .... **iii**

Introduction **1**

Table des notations 6

1 Préliminaires. **8**

1.1 Existence de G^k-inverses 8

1.2 Quelques exemples sur les inverses généralisés 9

1.3 Quelques méthodes de calcul 11

1.3.1 Calcul de l'inverse généralisé par factorisation préservant le rang 11

1.3.2 Méthode de la matrice bordante 11

1.3.3 Méthode de la matrice partitionnée 14

1.4 L'inverse généralisé d'une matrice carrée 15

1.4.1 L'inverse généralisé d'un bloc de Jordan 15

1.5 Quelques propriétés concernant l'image et le rang 18

1.6 Equations matricielles et classes des G^k-inverses 21

1.6.1 L'equation $AXB = C$

2 Quelques types d'inverses généralisés **27**

2.1 Introduction 27

2.2 L'inverse de Moore-Penrose 28

2.2.1 Propriétés algébriques 29

2.2.2 Relation entre l' adjointe et l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice . 32

2.3 Le Groupe inverse 34

2.3.1 Existence et unicité 35

2.3.2 Quand $A^{\#}$ est égale à A^{+} 37

2.3.3 Le groupe cyclique 37

2.4 L'inverse de Drazin 40

2.5 Indice d'un inverse généralisé d'un endomorphisme 42

2.5.1 L'indice d'un $\{1\}$ $-$inverse de f 42

2.5.2 Comparaison des indices 45

2.5.3 Indice d'un $\{1,\ 2\}$ $-$inverse de f 48

2.6 Application à l'inverse de Drazin 51

3 Opérations algébriques et inverses généralisés 52

3.1 Introduction 52

3.2 Sur les inverses généralisés de la somme de deux matrices 53

3.2.1 Le cas où $R(A) \cap R(B) = \{0\}$ 58

3.2.2 Le cas où $R(A) \cap R(B) \neq \{0\}$ 59

3.2.3 Quand $(A + B)^{+} = A^{+} + B^{+}$? 64

3.2.4 La forme générale de $(A + B)^{+}$ 65

3.3 Sur les inverses généralisés du produit de deux matrices 66

3.3.1 Méthode de la matrice partitionnée 66

3.3.2 Méthode des projecteurs 69

3.4 L'invariance de la loi d'ordre inverse 72

3.5 Quand $(AB)^+ = B^+A^+$ 75

3.5.1 Quelques applications 76

4 Quelques structures algébriques sur $A^{\{1\}}$ 78

4.1 Introduction 78

4.2 Structure d'un semi-groupe sur $A^{\{1\}}$ 79

4.2.1 Factorisation et commutativité 79

4.2.2 Régularité et $\pi-$régularité de $A^{\{1\}}$ 84

4.2.3 Matrices équivalentes et semi-groupes asociés 85

4.3 Relation entre $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ et l'ensemble des semi-groupes associés 87

4.3.1 Intersection des semi-groupes 88

4.3.2 Relation d'ordre partiel dans $M^{\{1\}}_{m\times n}(\mathbb{K})$ 90

4.4 Structure d'un espace affine et d'une algèbre 92

5 Appendice 97

Bibliographie 102

Introduction

Il est bien connu qu'une matrice sur un corps a un inverse, si elle est carrée de déterminant non nul. Cependant, dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées on a besoin de quelques types d'inverses partiels d'une matrice singulière, ou même rectangulaires. Par exemple, les solutions d'un système linéaire peuvent exister même si la matrice définissant ce système est singulière. Ce qui conduit à l'inverse ainsi nommé généralisé d'une matrice. L'inversibilité est l'une des disciplines les plus répandues en Mathématique, beaucoup de problèmes sont interprétés par une équation du type $Ax = y$, où A est une transformation linéaire donnée, qui est dans notre situation une matrice de type $m \times n$ sur $\mathbb{K}$ (un opérateur linéaire défini d'un espace vectoriel E dans un autre F de dimensions respective n et m): comme l'analyse numérique, l'optimisation, la théorie de contrôle, théorie de codage, la statistique et les modèles linéaires, ce problème est aussi manipulé via le concept d'un inverse généralisé (ou le pseudo inverse) d'une matrice (ou d'un opérateur linéaire). Devant des questions de ce type on cherche un opérateur ayant le maximum de propriétés dont l'inverse usuel réjouit, et d'une manière que cet inverse existe pour une classe aussi large d'opérateurs linéaires.

Si A est un opérateur linéaire, considérons A_0, un opérateur linéaire vérifiant $AA_0A = A$ et $A_0AA_0 = A_0$, ces propriétés, qui sont celles de l'inverse ordinaire, rendent A_0 aussi proche de l'inverse de A, ou autrement dit on est proche d'obtenir $A_0A = I_n$; l'identité dans E. Les opérateurs les plus proches de l'identité du point de vue propriétés, sont les projecteurs (l'application identique est une projection dont l'image est l'espace tout entier), pour cela, cherchons A_0 vérifiant l'une ou les deux équations:

$$\begin{cases} A_0A = & P_E \\ AA_0 = & P_F \end{cases}$$

où P_E et P_F sont des projecteurs vérifiant de plus $P_F\ A = A$ et (ou) $P_E\ A_0 = A_0$. La question a été connue depuis longtemps; utilisée par Fredholm (1903) pour traiter les équations intégrales, aussi par Hurwitz, Hilbert, ..., et ainsi des définitions de ce genre d'opérateurs apparaissent, donnant naissance à une terminologie variée, suivie de notations différentes, mais possédant toutes un point commun, faisant apparaître leurs propriétés proches de celles de l'inverse usuel.

Parmi la terminologie existante, citons par exemple : inverse partiel, inverse intérieur, inverse extérieur, quasi inverse, pseudo inverse, inverse généralisé,.... D'autres inverses portent les noms de leurs fondateurs, par exemple: l'inverse de Moore, l'inverse de Moore-Penrose, l'inverse de Drazin, de Duffin,...

La majorité des propriétés de l'inverse généralisé ont été traitées dans le livre de A. Ben Israël et T. N. E. Greville $[3]$, et aussi dans le livre du Z. Nashed $[14]$.

Les travaux, desquels notre thème est inspiré ont traité les propriétés algébriques des inverses généralisés A_0 d'une matrice A vérifiant le système suivant:

$$\begin{cases} AA_0A = & A \\ A_0AA_0 = & A_0 \end{cases}.$$

Également, on va traiter les inverses généralisés de la somme, du produit et l'invariance de la loi d'ordre inverse sous le choix d'un inverse généralisé. Certaines de ces propriétés sont apparues depuis plus de cinquante ans. Une représentation très compliquée pour l'inverse généralisé de la somme a été donnée par R. Cline $[4]$. Cette représentation utilise la somme de deux matrices semi définie- positives, et a été récemment utilisé par J. A. Fill et D. E. Fishkind pour obtenir une autre représentation $[7]$. En utilisant le théorème d' additivité des rangs, nous étudions un inverse généralisé de la somme, et nous obtenons quelques résultats sur le Moore-Penrose inverse de la somme. Dans $[5]$, R. Cline a donné une représentation pour le Moore-Penrose inverse du produit de deux matrices en utilisant le Moore-Penrose inverse d'autres produits, i. e $(AB)^{+} = (A^{+}AB)^{+}\left(AB\left(A^{+}AB\right)^{+}\right)^{+}$ $[16]$. Baser sur ce dernier résultat, la représentation: $(AB)^{-} = B^{-}\left(A^{-}ABB^{-}\right)^{-}A^{-}$ pour certains inverses généralisés A^{-}, B^{-} et $\left(A^{-}ABB^{-}\right)^{-}$, a été donnée par X. M. Ren, Y. Wang et K. P. Shum $[17]$. Dans notre contribution $[20]$, nous utilisons les projecteurs afin d'obtenir l'égalité $(AB)^{-} = B^{-}P_{(R(A^{-}))}P_{(R(B))}A^{-}$, où $R\left(X\right)$ désigne l'espace image d'une matrice X et $P_{(R(X))}$ un projecteur sur $R\left(X\right)$.

En 1964, dans $[6]$, I. Erdelyi avait montré l'équivalence: $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$ si et seulement si $\left(A^{+}ABB^{+}\right)^{*} = \left(A^{+}ABB^{+}\right)^{+}$, $\left(ABB^{+}A^{+}\right)^{*} = ABB^{+}A^{+}$ et $\left(B^{+}A^{+}AB\right)^{*} = B^{+}A^{+}AB$. Après, dans $[9]$, T. N. E. Greville a prouvé la relation: $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$ si et seulement si $R(A^{*}AB) \subset R(B)$ et $R(BB^{*}A^{*}) \subset R(A^{*})$. Nous montrons que $B^{-}A^{-} \in (AB)^{\{1\}}$ si et seulement si $R(A^{+}AB) \subset R(B)$ et $R(BB^{+}A^{*}) \subset R(A^{*})$. Remarquons que si A et B sont des isométries partielles (c'est à dire $A^{+} = A^{*}$ et $B^{+} = B^{*}$), alors nous obtenons les conditions de T. N. E. Greville. Plus généralement ses conditions ne donnent que l'ordre inverse de l'inverse de Moore-Penrose du produit de deux matrices. Il est à souligner que de nos conditions, alors que nous avons toujours l'ordre inverse, le produit $B^{+}A^{+}$ ne peut être $(AB)^{+}$. Les propriétés topologiques et certaines propriétés algébriques ont été étudiées par M. Z. Nashed $[14]$, S. Guedjiba et R. Benacer $[11]$.

Rappelons que les puissances d'une matrice carrée A et de son Groupe inverse $A^{\#}$ avec le projecteur $AA^{\#}$ constituent un groupe abélien en vertu du produit de matrices, et ce groupe a d'abord été défini par I. Erdelyi $[3]$. Notre contribution et de montrer que si ce groupe est fini ayant un ordre k, alors la matrice A est réduite à la $k-$racine de l'unité.

Concernant les questions sur la structure algébrique de l'ensemble $A^{\{1\}}$ des inverses généralisés d'une matrice A, et les relations entre les indices d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel fini, et d'un inverse généralisé f^{-}, nous constatons que l'ensemble $A^{\{1\}}$ n'est qu'un semi-groupe. Un semi-groupe quotient de $A^{\{1\}}$ est isomorphe au semi-groupe de projecteurs sur $R(A)$, et pour deux matrices équivalentes, A et B, les semi-groupes $A^{\{1\}}$ et $B^{\{1\}}$ sont isomorphes. Enfin un endomorphisme f *et son* $\{1,2\}$ $-$inverse f^{-} ont le même indice p si et seulement si $\ker f^{p} = \ker (f^{-})^{p}$. En particulier, f^{-} est nilpotent si et seulement si f l'est. Cela est un travail original dont la première question fait l'objet de la publication $[21]$.

La thèse se compose de quatre chapitres. Le premier, en plus de son caractère introductif, est consacré à rappeler quelques propriétés de plusieurs types d'inversion généralisée et leurs représentations. Nous illustrons cela en donnant différentes méthodes de constructions des inverses généralisés, et en citant quelques propriétés algébriques de l'espace image, le rang et les classes des inverses généralisés.

Le deuxième chapitre traite principalement l'inverse de Moore-Penrose A^{+} de la matrice A. Etant donné que cette dernière inverse conserve de nombreuses propriétés de l'inverse ordinaire, nous discutons la relation entre A^{+} et la matrice A^{*} adjointe de A. Pour les propriétés non- conservées par l'inverse de Moore-Penrose, comme la forme normale de

Jordan, valeurs propres et les puissances d'une matrice carrée, nous considérons le Groupe inverse, (quand il existe), pour sa ressemblance avec l'inverse ordinaire. Comme l'indice d'une matrice est une source essentielle de l'inverse de Drazin, qui est le cas général, ce concept prendra également une part importante de l'intérêt du deuxième chapitre .

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des inverses généralisés de la somme et du produit de deux matrices. Nous y discutons également l'invariance de l'ordre inverse sous le choix des inverses généralisés des facteurs, et nous appliquons nos conditions de la loi d'ordre inverse à des résultats précédents de R. E. Cline, I. Erdelyi et T. N. E. Greville.

Enfin, le quatrième chapitre traite certaines structures algébriques liées aux classes des inverses généralisés cités dans le premier chapitre, comme semi- groupes, espaces affines et algèbres, et on en déduit certaines propriétés, comme la commutativité, la régularité et la norme matricielle. En outre, nous construisons l'ensemble $M_{m\times n}^{\{1\}}(\mathbb{K})$ des classes des inverses généralisés des matrices de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ en établissant une bijection entre les semi- groupes $\left(M_{m\times n}^{\{1\}}(\mathbb{K}),\cap\right)$ et $(M_{m\times n}(\mathbb{K}),+)$. Comme cette bijection n'est pas un homomorphisme, nous présentons des propriétés symétriques, comme l'équivalence des matrices et l'isomorphisme entre les semi- groupes associés, la somme des matrices dont les images sont d'intersection nulle et l'intersection des semi- groupes associés, et finalement, la relation d'ordre "$\prec^{-}$" entre les matrices, et la relation d'ordre "$\subset$" entre les semi-groupes associés, respectivement $[21]$.

Table des notations

$\mathbb{K}$ le corps des nombres réels ou complexes.

$M_{m\times n}(\mathbb{K})$ l'espace des matrices de type $m \times n$ sur $\mathbb{K}$.

$I = I_n$ la matrice identique d'ordre n.

A_0 ou A^- inverse généralisé de A.

$r(A)$ le rang de A.

$N(A)$ le noyau de A.

$R(A)$ l'espace image de A.

$ind\,(A)$ l'indice de A.

A^t la matrice transposée de A.

A^* la matrice adjointe de A.

$W^\perp$ l'espace orthogonal d'un espace vectoriel W.

$\oplus$ la somme directe .

$\mathbf{J}_\lambda(n)$ bloc de Jordan associé à la valeur propre λ d'ordre n.

A^+ le Moore-Penrose inverse de A.

$A^\#$ le Groupe inverse de A.

A^D le Drazin inverse de A.

$C(A)$ le groupe cyclique constituée des puissances de A et $A^\#$.

$\ell(E)$) l'espace vectoriel d'endomorphismes de l'espace E.

$\operatorname{Im} f$ l'image de l'endomorphisme f.

$\ker f$ le noyau de l'endomorphisme f.

$\sim$ relation d'équivalence

$\prec^{-}$l'ordre partiel "moins".

$M_{m\times n}^{\{1\}}(\mathbb{K})$ l'ensemble des inverses généralisés des matrices appartenant à $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

$\overrightarrow{E}$ la direction de l'espace vectoriel E.

$\|.\|_F$ la norme matricielle.

Chapter 1
Préliminaires.

Dans tout le contenu, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou complexes et les coefficients de nos matrices appartiennent à ce corps.

Définition 1.0.1 *Soient A une matrice de type $m \times n$ et k un entier positif. Un G^k-inverse de A est une matrice A_0* de type *$n \times m$ satisfaisant les deux équations:*

$$\begin{cases} (AA_0)^k A &= A \\ (A_0A)^k A_0 &= A_0 \end{cases} \tag{(1)}$$

Si *A_0 vérifie la première équation, alors A_0 s'appelle 1^k-inverse de A. Un G^1-inverse est dit aussi g$-$inverse réflexif ou $\{1,2\}-$inverse de A, et un 1^1-inverse est dit simplement g$-$inverse ou un $\{1\}-$inverse de A. Par l'inverse généralisé on désigne un 1^k ou un G^k-inverse.*

Remarque 1.0.1 *Soit A_0 un 1^k-inverse de A, alors*

$$(AA_0)^{2k} = (AA_0)^k \ , \ (A_0A)^{2k} = (A_0A)^k \, .$$

En effet, comme $A = (AA_0)^k A = A (A_0A)^k$, on a

$$(AA_0)^{2k} = \left((AA_0)^k A\right) A_0 (AA_0)^{k-1} = AA_0 (AA_0)^{k-1} = (AA_0)^k \, ,$$

$$(A_0A)^{2k} = (A_0A)^{k-1} A_0 \left(A (A_0A)^k\right) = (A_0A)^{k-1} A_0A = (A_0A)^k \, .$$

1.1 Existence de G^k-inverses

Lemme 1.1.1 *Toute matrice possède un G^k- inverse, qui en général, n'est pas unique.*

Preuve. Soient P et Q deux matrices inversibles telles que

$$A = Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P, \text{ avec } r = r(A).$$

Si on prend $A_0 = P^{-1}\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$, avec $S^k = I_r$, alors A_0 est un G^k- inverse de A.

Prenons $A_0' = P^{-1}\begin{pmatrix} S & SX \\ Y & YX \end{pmatrix} Q^{-1}$, avec X et Y des matrices non nulles, alors on obtient

$$(AA_0')^k = Q\begin{pmatrix} I_r & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}, (AA_0')^k A = A,$$

$$(A_0'A)^k = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ YS^{k-1} & 0 \end{pmatrix} P \text{ et } (A_0'A)^k A_0' = A_0'.$$

ce qui montre que, A_0' est un autre G^k- inverse de A. ■

Si on est concerné par l'unicité de l'inverse généralisé, les équations du système (1) doivent être complétées par d'autres conditions, comme nous allons le voir pour l'inverse de Moore-Penrose, et aussi pour le Groupe inverse.

1.2 Quelques exemples sur les inverses généralisés

1- Soit $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice par blocs, alors $M_0 = \begin{pmatrix} A_0 & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$ est un $\{1\}$ $-$inverse de $M,$ avec A_0 un $\{1\}$ $-$inverse de A et X, Y et Z sont arbitraires.

2- Considère $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $M_0 = \begin{pmatrix} X & Y \\ A_0 & Z \end{pmatrix}$ est un $\{1\}$ $-$inverse de M telle que A_0 est un $\{1\}$ $-$inverse de A et X, Y et Z sont arbitraires.

3- Si A est une matrice inversible, alors $A_0 = A^{-1}$ est le seule $\{1\}$ $-$inverse de A. Cependant les G^k- inverse de A sont de la forme SA^{-1} et $A^{-1}S$ où S est une $k-$racine de l'unité (on verra plus tard que $(AA_0)^k$ et $(A_0A)^k$ sont des projecteurs de rangs $r(A)$, donc pour A inversible, $(AA_0)^k$ et $(A_0A)^k$ sont des $k-$racine de l'unité).

4- Étant donné une matrice symétrique $A = P^t \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$, avec P orthogonal. On voit aisément que $A_0 = P^t \begin{pmatrix} I_r & X \\ Y & YX \end{pmatrix} P$ est un $\{1,2\}-$inverse de A. Pour X et Y différentes, $(A_0)^t$ est un autre$\{1,2\}-$inverse de A.

5- Pour une matrice inversible à droite (resp. à gauche) A, un inverse à droite (resp. à gauche) est un $\{1,2\}-$inverse de A.

6- Soient A et A_0 satisfaisant $AA_0 = -I$. Alors A_0 est un G^2-inverse de A.

7- Considérons les matrices A et A_0 telles que $AA_0 = S$ où S une racine de l'unité d'ordre k, alors A_0 est un G^k-inverse de A.

8- Une racine de l'unité d'ordre k est un G^k-inverse de l' identité.

Remarque 1.1.1 *1) Un $\{1\}-$inverse (resp. $\{1,2\}-$inverse) est un 1^k- inverse (resp. G^k- inverse).*

En effet, soit A_0 un $\{1\}-$inverse de A. Alors

$$A = AA_0A = (AA_0)A, \ (AA_0) = (AA_0)^2,$$

et une simple récurrence montre que $(AA_0)^kA = A$ pour tout $k \succeq 2$.

2) Si A_0 est un G^k- inverse de A, alors $(A_0)^t$(resp. $(A_0)^*$) est un G^k- inverse de A^t (resp. A^*). En particulier, si A est symétrique (resp. auto- adjointe) et A_0 est un G^k- inverse de A, on a $(A_0)^t$ (resp. $(A_0)^*$) est un G^k- inverse de A qui , en général est différent de A_0.

1.3 Quelques méthodes de calcul d'un inverse généralisé

On a déjà dans la section 1.1 une méthode de détermination des inverses généralisés d'une matrice. On se propose ici d'exposer d'autres méthodes permettent aussi le calcul des inverses généralisés .

1.3.1 Calcul de l'inverse généralisé par factorisation préservant le rang

La méthode se résume dans le lemme suivant:

Lemme 1.3.1 *Pour toute matrice A de type $m \times n$ de rang r, il existe une matrice inversible à gauche B et une matrice inversible à droite C, de rang r telles que $A = BC$. De plus, B^tB et CC^t sont inversibles. Alors, $A_0 = C^t \left(CC^t\right)^{-1} S \left(B^tB\right)^{-1} B^t$, où $S^k = I$, est un G^k-inverse de A. Alternativement, on peut choisir un inverse à gauche B_l de B et un inverse à droite C_r de C afin d'avoir $A_0 = C_rSB_l$.*

La preuve de ce lemme figure dans l'appendice.

1.3.2 Méthode de la matrice bordante

Considérons une matrice A de type $m \times n$ de rang r, et B et C deux matrices de rangs maximums, telles que

$$R\left(B\right) = R(A)^{\perp}, R\left(C^t\right) = R(A^*)^{\perp}. \qquad \text{(C)}$$

Alors, B est une matrice de type $m \times (m-r)$ de rang $m-r$, donc inversible à gauche, C est une matrice de type $(n-r) \times n$ de rang $n-r$, donc inversible à droite, et s'il existe X

et Y tels que

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} Y,$$

on a

$$AX = BY \in R(A) \cap R(B), \text{ et } CX = 0.$$

De la condition (C), on a aussi $R(A) \cap R(B) = \{0\}$, ce qui donne $Y = 0$, car B est inversible à gauche, et $R(X) \subset N(A)$. Comme $N(A) = R(C^*)$, il existe $X = C^* X'$ pour un certain X'. Par suite, $0 = CX = CC^* X'$ ce qui implique $X' = 0$, puisque CC^* est inversible. D'où $X = 0$. Par conséquent,

$$R \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \cap R \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = \{0\}.$$

D'autre part, $N(A) = R(C^*)$ implique

$$R(A^*) \cap R(C^*) = \{0\}.$$

La matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

est dite matrice bordante de A. M est d'ordre $(n + m - r)$, de plus, les intersections précédentes donnent

$$\begin{aligned} r(M) &= r \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = r(A) + r(C) + r(B) \\ &= r + (n - r) + (m - r) = n + m - r, \end{aligned}$$

ainsi M est inversible. Si $M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ où E est une matrice de type $n \times m$, on a,

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE & CF \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

$$M^{-1}M=\left(\begin{array}{cc}E&F\\G&H\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}A&B\\C&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}EA+FC&EB\\GA+HC&GB\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}I_n&0\\0&I_{m-r}\end{array}\right). \quad (1.2)$$

De (1.1), on a

$$AE+BG=I_m,\ AF=-BH,\ CE=0,\ CF=I_{n-r}$$

Comme $R(A)\cap R(B)=\{0\}$ et B est inversible à gauche, on a $H=0$, ce qui donne $AF=-BH=0$. L'équation (1.2) donne

$$EA+FC=I_n,\ EB=0, GA+HC=0, GB=I_{m-r}$$

Multiplions à gauche l'équation $EA+FC=I_n$ par A, on a

$$AEA+AFC=AEA=A. \quad (1.3)$$

Multiplions à gauche l'équation $AE+BG=I_m$ par E, on a

$$EAE+EBG=EAE=E \quad (1.4)$$

Les équations (1.3) et (1.4) montrent que E est un $\{1,2\}$ $-$inverse de A. De plus les matrices G et F sont des inverses à gauche et à droite de B et C respectivement. Les équations $EB=0$ et $CE=0$ impliquent $R\left(B\right)\subset N\left(E\right)$ et $R\left(E\right)\subset N\left(C\right)$. De l'orthogonalité dans la condition $\left(C\right)$, il s'ensuit que $N\left(A^{*}\right)\subset N\left(E\right)$ et $R\left(E\right)\subset R\left(A^{*}\right)$. Les relations concernant l'image et le rang de Moore-Penrose inverse (ce qu'on va voir plut tard) montre que E est le Moore-Penrose inverse de A. si nous remplaçons la condition $\left(C\right)$ par un supplémentaire quelconque de $R\left(A\right)$ ou $R\left(A^{t}\right)$ nous obtenons un $\{1,2\}$ $-$inverse de A.

Exemple 1.3.1 *Soit*

$$A=\left(\begin{array}{ccc}1&0&1\\1&0&1\end{array}\right).$$

Si on prend

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ et } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

et

$$AEA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

1.3.3 Méthode de la matrice partitionnée

La méthode exposée dans le lemme 1.1.1 est l'une des matrices partitionnées, afin d'être plus praticable, il est commode de mettre la matrice A sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

où A_{11} est une matrice inversible d'ordre $r = r(A)$. De l'identité

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_{m-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix},$$

on obtient $r\left(A_{11}\right) = r = r(A) = r\left(A_{11}\right) + r\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)$, puisque les matrices $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_r & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$ sont inversibles. Il s'ensuit que

$$\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right) = 0, \ A_{22} = A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

Un simple calcul montre alors que $A_0 = \begin{pmatrix} SA_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une G^k-inverse de A.

Exemple 1.3.2 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$r(A) = 3,\ A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est un $\{1,2\}$ *$-$inverse de* A.

1.4 Méthode de calcul de l'inverse généralisé d'une matrice carrée

1.4.1 L'inverse généralisé d'un bloc de Jordan

Définition 1.4.1 *Une matrice carrée d'ordre* n *de la forme*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & . & .0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & .0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & . & . & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

est dite bloc de Jordan correspondant à la valeur propre λ, *on le note par* $\mathbf{J}_n(\lambda)$.

Lemme 1.4.1 *Tout bloc de Jordan* $J_n(\lambda)$, *a un* $\{1,2\}$ *$-$inverse* $J_n^{(1,2)}(\lambda)$ *tel que*

$$J_n^{(1,2)}(\lambda) = \begin{cases} J_n^{-1}(\lambda) & \textit{pour } \lambda \neq 0 \\ J_n^t(\lambda) & \textit{pour } \lambda = 0 \end{cases}.$$

En effet, un calcul direct montre que $J_n^{(1,2)}(\lambda)$ défini précédemment est un $\{1,2\}$ *$-$inverse de* $\mathbf{J}_n(\lambda)$.

Rappelons que $\mathbf{J}_n(0)$ est la matrice nilpotente d'ordre $n,$ partitionnée par blocs comme suit:

$$\mathbf{J}_n(0) = \begin{pmatrix} 0_{(n-1)\times 1} & I_{n-1} \\ 0_{1\times 1} & 0_{1\times(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Par un calcul direct, il s'ensuit que

$$\mathbf{J}_n^t(0) = \begin{pmatrix} 0_{1\times(n-1)} & 0_{1\times 1} \\ I_{n-1} & 0_{(n-1)\times 1} \end{pmatrix} = J_n^{(1,2)}(0),$$

on vérifie que

$$J = \begin{pmatrix} 0_{1\times(n-1)} & 0_{1\times 1} \\ SI_{n-1} & 0_{(n-1)\times 1} \end{pmatrix}$$

est un G^k-inverse de $\mathbf{J}_n(0)$, où S étant une racine carrée d'ordre k de $I_{n-1}.$ ■

1..1 Forme normale de Jordan

Il est bien connu que pour une matrice carrée $A,$ il existe une matrice inversible P et des blocs de Jordan $\mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1), \mathbf{J}_{n_2}(\lambda_2), ..., \mathbf{J}_{n_m}(\lambda_m)$ tels que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1) & 0 & . & . & .0 \\ 0 & \mathbf{J}_{n_2}(\lambda_2) & . & . & .0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \mathbf{J}_{n_m}(\lambda_m) \end{pmatrix},$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont les valeurs propres de la matrice $A.$ Ainsi, de la définition du G^k-inverse, nous avons l'assertion suivante.

Proposition 1.4.1 *Considérons*

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1) & 0 & . & . & .0 \\ 0 & \mathbf{J}_{n_2}(\lambda_2) & . & . & .0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \mathbf{J}_{n_m}(\lambda_m) \end{pmatrix} P.$$

Alors, il existe un $\{1,2\}$ *−inverse de* A *de la forme:*

$$A^{(1,2)} = P^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{n_1}^{(1,2)}(\lambda_1) & 0 & . & . & .0 \\ 0 & \mathbf{J}_{n_2}^{(1,2)}(\lambda_2) & . & . & .0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \mathbf{J}_{n_m}^{(1,2)}(\lambda_m) \end{pmatrix} P.$$

Posons

$$A_0 = P^{-1}\begin{pmatrix} S_1\mathbf{J}_{n_1}^{(1,2)}(\lambda_1) & 0 & . & . & .0 \\ 0 & S_2\mathbf{J}_{n_2}^{(1,2)}(\lambda_2) & . & . & .0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & S_m\mathbf{J}_{n_m}^{(1,2)}(\lambda_m) \end{pmatrix} P,$$

S_i *étant une racine de l'unité d'ordre* n_i. *Si* k *est le plus petit commun multiple de* $n_1, ..., n_m$, *alors* A_0 *est un* G^k*−inverse de* A.

Corollaire 1.4.1 *La méthode précédente peut- être employée pour déterminer l'inverse généralisé d'une matrice rectangulaire* A *à l'aide d'un inverse généralisé de la matrice* A^*A, *en prenant* $A^{(1,2)} = (A^*A)^{(1,2)} A^*$.

Preuve. Rappelons que pour toute matrice X, le produit X^*X est semi-défini positif, d'où, $X^*X = 0$ entraîne $X = 0$, et de la remarque 1.1.1, si $(X^*X)^{(1,2)}$ est un $\{1,2\}$ −inverse de X^*X, alors $\left((X^*X)^{(1,2)}\right)^*$ est un autre $\{1,2\}$ −inverse de X^*X. Appliquons cet argument à A^*A, nous avons:

$$\begin{aligned} \left(A(A^*A)^{(1,2)}A^*A - A\right)^*\left(A(A^*A)^{(1,2)}A^*A - A\right) &= \\ \left(A^*A\left((A^*A)^{(1,2)}\right)^*A^* - A^*\right)\left(A(A^*A)^{(1,2)}A^*A - A\right) &= \\ \left(A^*A\left((A^*A)^{(1,2)}\right)^*A^*A - A^*A\right)\left((A^*A)^{(1,2)}A^*A - I_n\right) &= \\ (A^*A - A^*A)\left((A^*A)^{(1,2)}A^*A - I_n\right) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui entraîne $A\left(A^{*}A\right)^{(1,2)}A^{*}A=A$, d'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left(\left(A^{*}A\right)^{(1,2)}A^{*}\right)A\left(\left(A^{*}A\right)^{(1,2)}A^{*}\right) &= \left(\left(A^{*}A\right)^{(1,2)}\left(A^{*}A\right)\left(A^{*}A\right)^{(1,2)}\right)A^{*}\\ &= \left(A^{*}A\right)^{(1,2)}A^{*}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\left(A^{*}A\right)^{(1,2)}A^{*}=A^{(1,2)}$. ■

1.5 Quelques propriétés concernant l'image et le rang

Lemme 1.5.1 *Étant donné une matrice A de type $m\times n$, et A_0 un 1^k- inverse de A. Alors*

1) $r(A)=r(AA_0)=\ r(A_0A)\leq r(A_0)$.

2) $r(A)=r((AA_0)^k)=\ r((A_0A)^k)\leq r(A_0)$.

3) Il existe au moins un 1^k-inverse de A de rang maximum.

4) A_0 est un G^k- inverse de A si et seulement si $r(A_0)=r(A)$.

Preuve. L'égalité $\left(AA_0\right)^kA=A$ donne $r(A)=r(\left(AA_0\right)^kA)\leq r(\left(AA_0\right)^k)\leq r(AA_0)\leq\min\left(r(A),r(A_0)\right)$,ce qui montre la première assertion du lemme.

D'une façon analogue, et par l'égalité $A(A_0A)^k=A$, on montre la deuxième.

La troisième assertion s'obtient en prenant

$$A=Q\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}, A_0=P\begin{pmatrix} SI_r & 0\\ 0 & U\end{pmatrix}Q^{-1}$$

avec $r\left(U\right)=\min\left(m,n\right)-r$, et notamment, si $r\left(U\right)=i\preceq\min\left(m,n\right)-r$, on obtient un 1^k-inverse de A de rang $r+i$.

Soit A_0 un G^k- inverse de A, puis A et A_0 sont 1^k-inverse l'un de l'autre. La première partie du lemme donne

$$r(A) \leq r(A_0),\ r(A_0) \leq r(A).$$

Réciproquement, supposons que A_0 est un 1^k- inverse de A avec $r(A_0) = r(A)$. Alors, $R(A_0A)^k \subseteq R(A_0)$.

Appliquons le résultat 1, on a $r(A_0) = r(A_0A)^k$, ainsi

$$R(A_0A)^k = R(A_0) \text{ et } A_0 = (A_0A)^k X,$$

pour une matrice X. En outre,

$$(A_0A)^k A_0 = (A_0A)^k (A_0A)^k X = (A_0A)^k X = A_0. \blacksquare$$

Lemme 1.5.2 *Soit A une matrice de type $m \times n$, et A_0 un G^k- inverse de A. Alors*

1) $R\left((AA_0)^k\right) = R(A)$ et $N\left((AA_0)^k\right) = N(A_0)$.

2) $R\left((A_0A)^k\right) = R(A_0)$ et $N\left((A_0A)^k\right) = N(A)$.

3) $(AA_0)^k$ et $(A_0A)^k$ sont des projecteurs sur $R(A)$ et $R(A_0)$ respectivement.

4) $\mathbb{K}^m = R(A) \oplus N(A_0)$ et $\mathbb{K}^n = R(A_0) \oplus N(A)$.

Preuve. 1) Evidemment, on a $R\left((AA_0)^k\right) \subset R(A)$,et du fait que $r(A) = r((AA_0)^k)$, les deux sous-espaces sont confondus. Pour l'égalité des noyaux,et comme A_0 est un G^k- inverse de A, nous avons $A_0 = A_0(AA_0)^k$, ce qui donne $N(A_0) \subseteq N\left((AA_0)^k\right) \subseteq N\left(A_0 (AA_0)^k\right) = N(A_0)$.

2) La preuve de la deuxième assertion est analogue à celui ci-dessus.

3) de la deuxième assertion, et de la remarque 1.0.1, on a $(AA_0)^k$ est un projecteur sur $R(A)$. Pour la même raison, on a $(A_0A)^k$ est un projecteur sur $R(A_0)$.

4) La preuve de la quatrième partie est une conséquence simple des résultats antérieurs (Pour tout projecteur p d'un espace vectoriel E, on a $E = R(P) \oplus N(P)$). ■

Remarque 1.5.1 *Si A_0 est un 1^k-inverse seulement, alors, on a $N(A_0) \subset N(AA_0)$. D'où, la décomposition $K^m = R(A) \oplus N(A_0)$ n'est pas toujours vraie.*

En effet, soient $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$,avec Z une matrice non nulle. Alors, $r(A_0) = r + r(Z) \succ r(A)$, d'où, $\dim(N(A_0)) = m - r(A_0) = m - r - r(Z) \prec m - r$.

Notons également que si A_0 est un G^k- inverse de A, alors, les matrices AA_0 et A_0A sont des involutions d'ordre k sur $R(A)$ et $R(A_0)$ (resp. nilpotentes d'indice k sur $N(A_0)$ et $N(A)$). On note aussi qu'on peut décomposer $R(A)$ et $R(A_0)$ en somme directe. Le théorème qui suit donne une décomposition $R(A)$ et $R(A_0)$, on se base sur le lemme suivant dont la démonstration figure dans l'annexe.

Lemme 1.5.3 *Étant donné un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, un endomorphisme T de E, et $g(t)$* et *$h(t)$ deux polynômes premiers entre eux. Si $f(t)$le polynôme produit*

$$f(t) = g(t)\, h(t)$$

vérifie $f(T) = 0$, alors,

$$E = N(g(T)) \oplus N(h(T)).$$

Théorème 1.5.1 *Soient $k \succ 1$ et A_0 un G^k- inverse d'une matrice A de type $m \times n$. Alors*

1) $R(A) = N(AA_0 - I) \oplus N\left(I + AA_0 + ... + (AA_0)^{k-1}\right)$,

$R(A_0) = N(A_0A - I) \oplus N\left(I + A_0A + ... + (A_0A)^{k-1}\right)$.

2) La matrice AA_0 (resp. A_0A) peut être représentée sur $N(A_0)$ (resp. sur $N(A)$) par une matrice diagonale par blocs $Diag(J_0(n_1), ...J_0(n_l))$, où $J_0(n_1), ...J_0(n_l)$ sont des blocs *de Jordan nilpotents, où $l = \dim N(A_0)$ (resp. $\dim N(A)$), et au moins l'un des blocs est d'ordre k et les autres sont d'ordre ne dépassant pas k.*

3) Sur K^m, AA_0(resp. A_0A) peut être représentée par une matrice diagonale par blocs $Diag\left(1, z, ...z^{k-1}, J_0(n_1), ...J_0(n_l)\right)$, où z est une racine de l'unité d'ordre k et $J_0(n_1), ...,$ $J_0(n_l)$ sont des blocs de Jordan nilpotents d'ordre $n_1, ..., n_l$, avec $l = \dim N(A_0)$, ($l =$ $\dim N(A)$).

Preuve. La preuve de la seconde assertion du théorème est similaire à celle de la première assertion. Donc on va démontrer la première seulement, et on va utiliser le lemme 1.5.2 et les résultats obtenus dans ces deux partie pour démontrer la troisième assertion .

Signalons que la restriction de $(AA_0)^k$ à $R(A)$ (resp. à $N(A_0)$) est la matrice identique (resp. la matrice nulle), il suffit de prendre $T = AA_0, f(t) = t^k - 1, g(t) = t - 1,$ et $h(t) = 1 + t + ...t^{k-1}$ dans le lemme 1.5.3, pour avoir le résultat mentionné. Selon le lemme 1.5.2, nous avons $\mathbb{K}^m = R(A) \oplus N(A_0)$. Puis, l'expression de AA_0, dans la forme réquise, est une combinaison des expressions correspondantes sur $R(A)$ et $N(A_0)$, en tant que valeurs propres de AA_0 sur $R(A)$ sont les racines de $f(t)$. ■

1.6 Equations matricielles et classes des G^k-inverses

1.6.1 L'equation $AXB = C$

Nous avons vu qu'une matrice peut admettre un nombre infini d'inverses généralisés. Afin de donner une représentation de l'ensemble des inverses généralisés d'une matrice, nous allons résoudre certaines équations matricielles.

Considérons le système

$$\begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \end{cases} \tag{1.5}$$

Remarquons que la première équation de ce système est un cas particulier de l'équation $AXB = C$, et peut également être représentée par le système suivant:

$$\begin{cases} XB = Y \\ AY = C\ . \end{cases} \tag{1.6}$$

Comme les équations $XB = Y$ et $B^*X^* = Y^*$ sont équivalentes, on considère la forme générale: $AX = C$.

Lemme 1.6.1 *Soient A et C deux matrices de types $m \times n$ et $m \times l$. Nous avons les conditions suivantes:*

1) L'équation $AX = C$ admet une solution si et seulement si $R(C) \subseteq R(A)$.

2) Si la condition 1) est satisfaite, alors la solution générale est de la forme

$$X = A_0(AA_0)^{k-1}C + (I - (A_0A)^k)U,$$

où A_0 un 1^k-inverse de A et U est une matrice quelconque de type $n \times l$.

Preuve. 1) Soit A_0 un 1^k-inverse de A. Alors, $(AA_0)^k$ est un projecteur sur $R(A)$, et si $R(C) \subseteq R(A)$, on a $(AA_0)^kC = C$, d'où $A(A_0(AA_0)^{k-1}C) = C$, et il s'ensuit que $X_0 = A_0(AA_0)^{k-1}C$ est une solution de l'équation $AX = C$. Réciproquement, si $AX = C$ admet une solution, alors il existe une matrice X_0 telle que $AX_0 = C$. Par suite $R(C) \subseteq R(A)$.

2) Soit X_0 une matrice, telle que $AX_0 = C$, alors, pour tout X telle que $AX = C$. Alors $A(X - X_0) = 0$, et par suite $R(X - X_0) \subset N(A)$. Le lemme 1.5.2 donne $N(A) = N((A_0A)^k) = R((I - A_0A)^k)$, et déduit qu'il existe une matrice U, telle que $X - X_0 = (I - A_0A)^kU = U - (A_0A)^kU$, d'où la solution générale est sous la forme

$$X = X_0 + U - (A_0A)^kU = A_0(AA_0)^{k-1}C + (I - (A_0A)^k)U. \blacksquare$$

Corollaire 1.6.1 *Soient B et C deux matrices de types $q \times l$ et $m \times l$. Alors*

1) L'équation $XB = C$ admet une solution si et seulement si $R(C^*) \subseteq R(B^*)$.

2) Si la condition 1) est satisfaite, alors la solution générale est de la forme

$$X = C(B_0B)^{k-1}B_0 + U(I - (BB_0)^k)$$

où B_0 est un 1^k-inverse de B et U est une matrice quelconque de dimensions $m \times q$.

Preuve. *L'équation $XB = C$* est satisfaite si et seulement si $B^*X^* = C^*$. Le lemme 1.6.1 donne la première assertion. Le lemme 1.6.1 donne également dans ce cas

$$X^* = B_0^*(B^*B_0^*)^{k-1}C^* + (I - (B_0^*B^*)^k)U^*,$$

on prend l'adjointe des deux membres, on a

$$X = C(B_0B)^{k-1}B_0 + U(I - (BB_0)^k). \blacksquare$$

Corollaire 1.6.2 *Soient* A, B et C *trois matrices de types* $m \times n$,$q \times l$ *et* $m \times l$ *respectivement. Alors on a*

1) L'équation $AXB = C$ *admet une solution si et seulement si*

$$R(C) \subseteq R(A) \text{ et } R(C^*) \subseteq R(B^*).$$

2) Si la condition 1) est satisfaite, alors la solution générale est de la forme

$$X = A_0(AA_0)^{k-1}C(B_0B)^{k-1}B_0 + ((I-(A_0A)^k)U)((B_0B)^{k-1}B_0) + V(I-(BB_0)^k),$$

où A_0, B_0 sont des *1*$^k-$ *inverse de* A *et* B *respectivement et* U *et* V *sont arbitraires.*

Preuve. Comme le système (2) est équivalent à $AXB = C$, alors en appliquant les résultats précédents, on a

$$X = A_0(AA_0)^{k-1}C(B_0B)^{k-1}B_0 + ((I-(A_0A)^k)U)((B_0B)^{k-1}B_0) + V(I-(BB_0)^k),$$

où A_0, B_0 sont des *1*$^k-$ *inverse de* A *et* B *respectivement et* U *et* V *sont arbitraires.* ■

Corollaire 1.6.3 *La solution générale de l'équation* $AXA = A$ *est de la forme:*

$$X = (A_0A)^{k-1}A_0 + V(I-(AA_0)^k) + (I-(A_0A)^k)U, \tag{1.7}$$

où A_0 *est un 1*$^k-$ *inverse de* A *et* U *et* V *sont des matrices arbitraires.*

Preuve. Prenons $A = B = C$ dans les résultats précédents, nous avons les inclusions triviales: $R(A) \subseteq R(A), R(A^*) \subseteq R(A^*)$, d'où, la solution est sous la forme:

$$X = (A_0A)^{k-1}A_0 + V(I-(AA_0)^k) + (I-(A_0A)^k)U. \blacksquare$$

De l'étude précédente, nous avons le théorème suivant:

Théorème 1.6.1 *La classe des* G^k-*inverses d'une matrice* A *est donnée par*

$$X = (A_0A)^{k-1}A_0 + (I-(A_0A)^k)U(AA_0)^k + (A_0A)^kU(I-(AA_0)^k), \tag{1.8}$$

où A_0 est un G^k- inverse donné de A et *U est une matrice de dimension convenable.*

Preuve. Soit X un 1^k-inverse de A, de l'équation (1.7), on a

$$\begin{aligned} XAX &= (A_0A)^{k-1}A_0A(A_0A)^{k-1}A_0 + V(I-(AA_0)^k)A(A_0A)^{k-1}A_0 \\ &+(I-(A_0A)^k)UA(A_0A)^{k-1}A_0 + (A_0A)^{k-1}(A_0A)V(I-(AA_0)^k) \\ &+V(I-(AA_0)^k)AV(I-(AA_0)^k) + (I-(A_0A)^k)UAV(I-(AA_0)^k) \\ &+(A_0A)^{k-1}(A_0A)(I-(A_0A)^k)U + V(I-(AA_0)^k)A(I-(A_0A)^k)U \\ &+(I-(A_0A)^k)UA(I-(A_0A)^k)U. \end{aligned}$$

Comme $A(A_0A)^{k-1}A_0 = (AA_0)^k$, $(I-(AA_0)^k)A = 0$ et $A(I-(A_0A)^k) = 0$, en remplaçant tous ces termes dans l'équation précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} XAX &= (A_0A)^{k-1}A_0 + (I-(A_0A)^k)U(AA_0)^k + (A_0A)^kV(I-(AA_0)^k) \\ &+(I-(A_0A)^k)UAV(I-(AA_0)^k). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Maintenant, si on pose A sous la forme $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec A_1 inversible, et

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}.$$

Il suffit de prendre $A_0 = \begin{pmatrix} SA_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $S^k = I$ afin d'avoir

$$V(I-(AA_0)^k = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & V_{12} \\ 0 & V_{22} \end{pmatrix}$$

et

$$(I-(A_0A)^k)U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix},$$

ainsi, nous obtenons

$$X = (A_0A)^{k-1}A_0 + \begin{pmatrix} 0 & V_{12} \\ 0 & V_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}.$$

Ce qui signifie que X est de la forme générale $X = (A_0A)^{k-1}A_0 + \begin{pmatrix} 0 & e \\ f & g \end{pmatrix}$ où e, f, g sont des matrices arbitraires de dimensions appropriées.

On remarque que le terme $\begin{pmatrix} 0 & e \\ f & g \end{pmatrix}$ est indépendant de la matrice A. D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} (I-(A_0A)^k)U(AA_0)^k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U_{21} & 0 \end{pmatrix} \\ (A_0A)^kV(I-(AA_0)^k) &= \begin{pmatrix} 0 & V_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (I-(A_0A)^k)UAV(I-(AA_0)^k) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U_{21}A_1V_{12} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ainsi, en remplaçant les égalités précédentes dans l'équation (1.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} XAX &= (A_0A)^{k-1}A_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & V_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U_{21}A_1V_{12} \end{pmatrix} \\ &= (A_0A)^{k-1}A_0 + \begin{pmatrix} 0 & V_{12} \\ U_{21} & U_{21}A_1V_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le terme $U_{21}A_1V_{12}$ n'est pas arbitraire, car il est dépendant de A_1, puis $XAX = X$ ne tient que si le terme $\begin{pmatrix} 0 & V_{12} \\ U_{21} & U_{21}A_1V_{12} \end{pmatrix}$ est indépendant de la matrice A. Comme cela n'est satisfait que si

$$(I-(A_0A)^k)UAV(I-(AA_0)^k) = 0,$$

on a,

$$X = (A_0A)^{k-1}A_0 + \begin{pmatrix} 0 & V_{12} \\ U_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, la classe des G^k-inverses de la matrice A est donnée par la forme:

$$X = (A_0A)^{k-1}A_0 + (I-(A_0A)^k)U(AA_0)^k + (A_0A)^kU(I-(AA_0)^k),$$

où A_0 est un G^k-inverses donné de la matrice A et U une matrice arbitraire de type approprié. ■

Chapter 2
Quelques types d'inverses généralisés

2.1 Introduction

Il est bien connu que les inverses généralisés les plus importants sont l'inverse de Moore-Penrose et le Groupe inverse (s'il existe), ils conservent une bonne partie des propriétés de l'inverse ordinaire, que l'unicité de l'inverse, les propriétés de symétrie et beaucoup d'autres qui font un concept central en algèbre linéaire, analyse numérique et dans diverses applications $[1], [3], [14]$. Dans ce chapitre, nous allons comparer les propriétés algébriques de l'inverse de Moore-Penrose et du groupe inverse à ceux de l'adjointe d'une matrice. En particulier, nous allons donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que le groupe formé des puissances d'une matrice et celles de son Groupe inverse soit un groupe fini (Théorème 2.3.1). En outre; en comparant entre les indices d'une matrice et de son inverse généralisé, nous avons démontré sous certaines conditions que l'indice d'un inverse généralisé est inférieur ou égal à l'indice de la matrice. En particulier, la matrice est nilpotente si et seulement si elle possède un inverse généralisé nilpotent (Proposition 2.5.1, Proposition 2.5.2 et ses corollaires).

Définition 2.1.1 *Étant donné une matrice A de type $m \times n$. De l'équation $(1.6.1)$ et l'équation $(1.6.2)$, et pour $k = 1$, on a: la classe des $\{1\}$ −inverses de A est donnée par*

$$X = A_0 + U(I - (AA_0)) + (I - (A_0A))V, \tag{\{1\}}$$

avec A_0 est un $\{1\}$ $-$inverse de A, et U et V sont arbitraires de types appropriés.

La classe des $\{1,2\}$ $-$inverses ou des g$-$inverses réflexifs de A est donnée par

$$A_0 + (A_0A)U(I-(AA_0)) + (I-(A_0A))U(AA_0), \tag{\{1,2\}}$$

avec A_0 est un $\{1,2\}$ $-$inverse de A, et U est arbitraire de type approprié.

L'inverse de Moore-Penrose noté A^+ [16], *est l'unique matrice X satisfaisant les équations:*

$$\begin{array}{rcll} AXA & = & A & (1) \\ XAX & = & X & (2) \\ (AX)^* & = & AX & (3) \\ (XA)^* & = & XA & (4) \end{array} \tag{\{1,2,3,4\}}$$

Les matrices satisfaisant la première et la troisième équations sont données par

$$X = A_0 + (I-(A_0A))\,U, \text{ où } U \text{ est arbitraire de type approprié.} \tag{\{1,3\}}$$

Les matrices satisfaisant la première et la quatrième équations sont données par

$$X = A_0 + U(I-(AA_0)), \text{ où } U \text{ est arbitraire de type approprié.} \tag{\{1,4\}}$$

2.2 L'inverse de Moore-Penrose

Étant donné une matrice A de type $m \times n$. Citons quelques propriétés de A^*.

1) A^* existe et unique.

2) $(A^*)^* = A$ (ce qu'on appelle l'involution de $*$).

3) A^*A et AA^* sont auto- adjoints positives.

4) $A^*AX = A^*AY$ entraîne $AX = AY$ (la règle de $*-$ simplification).

5) $\forall \alpha \succ 0$, $A^*A + \alpha I$, $AA^* + \alpha I$ sont inversibles. De plus, si A est une matrice carrée, alors $A^*A + AA^* + \alpha I$ est inversible et $AA^* - A^*A \neq I$.

6) Si A est une matrice carrée, alors $\forall k \succ 0$, $(A^*)^k = (A^k)^*$. (la commutativité de la puissance avec l'involution).

7) Pour toutes matrices A et B de type $m \times n, (A+B)^* = A^* + B^*$ (l'involution est additive).

8) Pour toutes matrices A et B telles que le produit est défini, on a $(AB)^* = B^*A^*$ (l'ordre inverse pour l'involution).

2.2.1 Propriétés algébriques de l'inverse de Moore-Penrose

Toutes les propriétés de A^* ci-dessus restent valables pour A^+ sauf 6, 7 et 8, qui ne sont vraies que sous certaines conditions équivalentes, ce qui a été le sujet de plusieurs articles. Un document de I. Erdelyi [6] a donné des conditions équivalentes pour $(AB)^+ = B^+A^+$ à tenir. D'autres conditions ont été données par T. N. E. Greville [9]. Dans le chapitre suivant, nous allons étudier ce sujet. En outre, par un théorème fameux dû à Cochran connu par " Rank additivity », un document de remplissage [7] a été rédigé; sous des conditions appropriées, on obtient une relation entre l'inverse de Moore-Penrose de la somme de deux matrices et les inverses de Moore-Penrose des termes se servant de la somme parallèle de matrices. Autrement dit, l'invariance de $A(A+B)^- B$ sous le choix d'un $\{1\}-$inverse. Nous allons étudier les conditions équivalentes pour que $(A+B)^+ = A^+ + B^+$ dans le troisième chapitre.

Maintenant, nous allons prouver des propriétés en commun pour A^+, en ajoutant la propriété de commutativité de l'involution $(*)$ avec le signe $(+)$ de Moore-Penrose.

1. **L'existence et l'unicité :**

Il y a un résultat qui assure les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de l'inverse de Moore-Penrose sur un corps quelconque. Pearl $[15]$ est peut-être le premier ayant examiné la question de l'existence de divers inverses généralisés d'une matrice (à l'exception du Groupe inverse) sur un corps quelconque en vertu d'un automorphisme involutif. Plus précisément, il a prouvé le résultat suivant:

Lemme 2.2.1 *($[14]$Théorème 1) Étant donné une matrice rectangulaire A. Alors A^{+} existe si et seulement si $r(A) = r(A^{t}A) = r(AA^{t})$.*

Ce résultat semble également avoir été obtenu indépendamment par Kalman ($[12]$, section 3, p. 116). L'existence des g$-$inverses réflexifs et des g$-$inverses normalisés ont également été obtenus par Pearl (voir, par exemple, $[15]$ théorème 4 et corollaire 3). Fulton $[8]$, a étudié la factorisation d'une matrice donnée A et obtenu des conditions pour l'existence d'un g$-$inverse normalisé (tout g$-$inverse réflexif X d'une matrice A satisfaisant $(AX)^{t} = AX$) et l'existence de l'inverse de Moore-Penrose A^{+}.

Preuve. L'existence de A^{+} est assurée par la condition du lemme ci-dessus, puisque $\mathbb{K}$ est le corps réel ou le domaine complexe (voir la preuve du lemme 1.3.1). Pour l'unicité, on suppose qu'on a A_1^{+}, A_2^{+} deux inverses de Moore-Penrose de A. De la définition de A^{+} et la partie 2 de la remarque 1.1.1, on obtient

$$A_1^{+} = A_1^{+}AA_1^{+} = A_1^{+}\left(AA_1^{+}\right)^{*} = A_1^{+}\left(A_1^{+}\right)^{*}A^{*} = A_1^{+}\left(A_1^{+}\right)^{*}A^{*}\left(A_2^{+}\right)^{*}A^{*}$$
$$= A_1^{+}\left(AA_1^{+}\right)^{*}\left(AA_2^{+}\right)^{*} = A_1^{+}\left(AA_1^{+}\right)\left(AA_2^{+}\right) = A_1^{+}AA_2^{+} = A_1^{+}AA_2^{+}AA_2^{+}$$
$$= \left(A_1^{+}A\right)^{*}\left(A_2^{+}A\right)^{*}A_2^{+} = A^{*}\left(A_1^{+}\right)^{*}A^{*}\left(A_2^{+}\right)^{*}A_2^{+} = A^{*}\left(A_2^{+}\right)^{*}A_2^{+}$$
$$= \left(A_2^{+}A\right)^{*}A_2^{+} = \left(A_2^{+}A\right)A_2^{+} = A_2^{+}.$$

En outre, on peut en déduire l'existence et l'unicité en utilisant la factorisation plein rang de A, en prenant $A = BC$. Puis, par une vérification directe dans $(\{1,2,3,4\})$, nous constatons que $C^* (CC^*)^{-1} (B^*B)^{-1} B^* = A^+$. ■

2. **L'application $A \to A^+$ est une involution:**

Si on remplace $C^* (CC^*)^{-1}$ et $(B^*B)^{-1} B^*$ dans l'équation précédente par des matrices X et Y, on obtient $A^+ = XY$ une factorisation à plein rang de A^+. Puis, à partir de l'involution de $(*)$ et l'inversibilité et par un calcul similaire utilisé pour A^+, nous constatons que $(A^+)^+ = A$.

3. **A^+A et AA^+ auto-adjoints (orthoprojecteurs):**

Les projecteurs A^+A et AA^+ sont auto- adjoints par définition de A^+.

4. **La règle de $+-$simplification:**

Pour toutes matrices X et Y, si $A^+AX = A^+AY$, alors, $AA^+AX = AA^+AY = AX = AY$.

5. **L'inversibilité de $A^+A + \alpha I_n$, $AA^+ + \alpha I_m$ pour $\alpha \succ 0$:**

Comme A^+A (resp. AA^+) est un projecteur, alors, ses valeurs propres sont 0 ou 1. D'autre part, $\det(A^+A + \alpha I_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$ ou 0. Par conséquent, $\forall \alpha \succ 0$, $\det(A^+A + \alpha I_n) \neq 0$, ce qui signifie que $A^+A + \alpha I_n$ (resp. $AA^+ + \alpha I_m$) est inversible. Toutefois, si A est une matrice carrée, on a $AA^+ - A^+A \neq I$, sinon, $AA^+ = A^+A + I$

est inversible. D'autre part, AA^+ est un projecteur, se qui implique $AA^+ = I$, A^+ est l'inverse à droite de la matrice carrée A, ce qui exige d'être de rang maximum, et que $AA^+ = I = A^+A$. Par conséquent, nous avons $I = 2I$, ce qui est impossible.

6. Moore-Penrose inverse d'une puissance:

Pour prouver que, pour $k \succ 0$, $(A^+)^k = \left(A^k\right)^+$ n'est pas vrai pour toutes les matrices, nous allons donner un contre exemple, dans le chapitre prochain, nous discutons cette question.

Exemple 2.2.1 *On considère* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *alors* $A^2 = A$, $A^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $(A^2)^+ = A^+$ *tandis que* $(A^+)^2 = \frac{1}{2}A^+$.

7. L'adjoint de Moore-Penrose inverse:

Pour finir notre comparaison, remarquons que les équations $(1), (2), (3)$ et (4) dans la définition de Moore-Penrose nous conduisent, par prendre l'adjointe des deux parties, à $(A^+)^* = (A^*)^+$.

2.2.2 Relation entre l' adjointe et l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice

De l'étude faite, on peut se demander quelle est la relation entre A^* et A^+. En fait, nous pouvons utiliser l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice symétrique pour calculer l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice quelconque. En outre, nous avons le lemme suivant

Lemme 2.2.2 *Étant donné une matrice A de type $m \times n$. Alors*

$$(A^*A)^+ A^* = A^+ = A^* (AA^*)^+ .$$

Preuve. Pour toute matrice A, on a

$$A^*A \left((A^*A)^+ A^*\right) A = A^*A (A^*A)^+ (A^*A) = A^*A.$$

Appliquons la règle de $*-$simplification, nous obtenons $A \left((A^*A)^+ A^*\right) A = A$. En revanche,

$$\left((A^*A)^+ A^*\right) A \left((A^*A)^+ A^*\right) = \left((A^*A)^+ (A^*A) (A^*A)^+\right) A^* = (A^*A)^+ A^*,$$

$$\left(A (A^*A)^+ A^*\right)^* = A \left((A^*A)^+\right)^* A^* = A \left((A^*A)^*\right)^+ A^* = A (A^*A)^+ A^*.$$

De même,

$$\left((A^*A)^+ A^*A\right)^* = A^*A (A^*A)^+ = \left(A^*A (A^*A)^+\right)^* = (A^*A)^+ A^*A.$$

Par conséquent, nous obtenons $(A^*A)^+ A^* = A^+$. De la même manière, nous pouvons prouver que $A^+ = A^* (AA^*)^+$. ■

Remarque 2.2.1 *On a $R(A^*) = R(A^+)$ et $N(A^*) = N(A^+)$*

en effet, $A^+ = A^* (AA^*)^+$ implique $R(A^+) \subset R(A^*)$. D'autre part, prenons l'adjointe des deux membres de l'équation: $AA^+A = A$, nous obtenons $A^* = (A^+A) A^*$, d'où, $R(A^*) = R(A^+)$. De l'égalité $(R(A))^\perp = N(A^+)$, on a $N(A^*) = N(A^+)$.

2.2.1 Applications

1) Considérons deux matrices A et B telles que $AB = 0$, alors

$$B^+A^+ = (B^*B)^+ B^*A^* (AA^*)^+ = (B^*B)^+ (AB)^* (AA^*)^+ = 0 = (AB)^+ .$$

2) Le calcul de A^+, en se servant de la matrice $(A^*A)^+$, est plus facile que celui utilisant la méthode de la factorisation préservant le rang, parce que A^*A est semi-définie positive. Puis elle est semblable à une matrice diagonale. Il existe alors, une matrice unitaire U telle que $A^*A = U^*diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) U$. Donc

$$(A^*A)^+ = U^*diag\left(\lambda_1^+, ..., \lambda_n^+\right) U \text{ où } \lambda_i^+ = \begin{cases} \lambda_i^{-1} & \text{si } \lambda_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda_i = 0 \end{cases} , \text{ pour } i = 1, ...n .$$

En revanche, cela n'est pas vrai pour d'autres matrices. (c. à. d. la forme normale de Jordan d'une matrice n'est pas conservée en prenant l'inverse de Moore-Penrose; dans l'exemple de la propriété 6, les valeurs propres de A sont 0 et 1, tandis que celles de A^+ sont 0 et $\frac{1}{2}$. Toutefois, nous verrons dans la section suivante que lorsque le Groupe inverse d'une matrice carrée existe, alors la forme normale de Jordan est préservée en prenant le Groupe inverse. Ce fait rend le Groupe inverse plus proche de l'inverse ordinaire que l'inverse de Moore-Penrose.

2.3 Le Groupe inverse

Définition 2.3.1 *Étant donné une matrice carrée A d'ordre n. Le groupe inverse de A notée $A^\#$ est la matrice carrée, du même ordre satisfaisant les équations suivantes:*

$$\begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \\ AX = XA \end{cases}$$

Remarque 2.3.1 *Le système précédent est équivalent à*

$$\begin{cases} A^2X = A \\ X^2A = X \\ AX = XA \end{cases}$$

Remarque 2.3.2 *De la troisième équation, nous obtenons:*

$$R(A) = R\left(A^{\#}\right) \text{ et } N(A) = N\left(A^{\#}\right)$$

2.3.1 Existence et unicité

Lemme 2.3.1 *Étant donné une matrice carrée A. Les conditions suivantes sont équivalentes*

1) $r(A) = r(A^2)$.

2) $R(A) = R(A^2)$.

3) $R(A) \oplus N(A) = \mathbb{K}^n$ *(* $R(A)$ *et* $N(A)$ *sont supplémentaires).*

4)$A^{\#}$ *existe et il est unique.*

Preuve. Évidemment, les assertions 1 et 2 sont équivalentes.

Nous allons prouver l'équivalence entre 2 et 3. Partons du fait que

$$r(A) + \dim N(A) = n,$$

et que

$$N(A) \subset N\left(A^2\right),$$

il suffit de montrer que $N(A) \cap R(A) = \{0\}$. En raison des dimensions, si $r(A) = r(A^2)$, alors $N(A) = N(A^2)$. Pour tout $x \in N(A) \cap R(A)$, il existe y telle que $Ay = x \in N(A)$, d'où, $A^2y = Ax = 0$, ce qui donne $y \in N(A^2) = N(A)$. Par conséquent,

$$x = Ay = 0.$$

Inversement, on suppose que $N(A) \cap R(A) = \{0\}$, alors si $x \in R(A)$ avec $Ax = 0$, on a $x = 0$. Il en résulte que, la restriction de A à $R(A)$ (comme endomorphisme) est un automorphisme. Donc

$$R\left(A^2\right) = A\left(R\left(A\right)\right) = R\left(A\right).$$

Maintenant on montre l'équivalence entre 2 et 4. Supposons que $R(A) = R(A^2)$, alors, il existe une matrice X telle que $A = A^2X$. Soit $A = BC$ la factorisation préservant le rang de A, et B_l et C_r les inverses à gauche et à droite de B et C respectivement, on obtient

$$A = BC = BCBCX,\ (B_lB)\left(CC_r\right) = I = (CB)CXC_r$$

ce qui montre que (CB) est inversible. On pose

$$X = B(CB)^{-2}C.$$

On a

$$AXA = BCB(CB)^{-2}CBC = BC = A,$$

$$XAX = B((CB)^{-2}CBCB)(CB)^{-2}C = B(CB)^{-2}C = X,$$

et

$$AX = BCB(CB)^{-2}C = B(CB)^{-1}C = XA.$$

Il s'ensuit que $X = A^{\#}$. Inversement, si $A^{\#}$ existe, alors l'équation $A^2X = A$ est équivalente à $R(A) = R(A^2)$.

Unicité: Supposons que G_1 et G_2 sont deux Groupe inverses de A, on obtient:

$$\begin{aligned} G_1 &= G_1^2 A = G_1^2 \left(A^2 G_2\right) = G_1 \left(G_1 A^2\right) G_2 = G_1 A G_2 \\ &= G_1 \left(A^2 G_2\right) G_2 = \left(G_1 A^2\right) G_2^2 = A G_2^2 = G_2. \blacksquare \end{aligned}$$

2.3.2 Quand $A^{\#}$ est égale à A^{+}

Nous avons vu que l'existence de $A^{\#}$ est équivalente au fait que $R(A)$ et $N(A)$ sont supplémentaires. Maintenant, si

$$R(A) = R(A^*) \text{ ou } N(A) = N(A^*),$$

alors, $A^{\#}$ existe, et comme $R(A^+) = R(A^*)$ et $N(A^+) = N(A^*)$, alors,

$$AA^+ \left(A^+ A\right) = A^+ A,\ A^+ A \left(AA^+\right) = AA^+,$$

du fait que AA^+ et A^+A sont des projecteur sur $R(A) = R(A^*)$. Par conséquent,

$$A^+ A = \left(A^+ A\right)^* = \left(AA^+ \left(A^+ A\right)\right)^* = \left(A^+ A\right)^* \left(AA^+\right)^* = A^+ A \left(AA^+\right) = AA^+.$$

Ainsi, on a $A^+ = A^{\#}$. $\blacksquare$

Remarque 2.3.3 *Si A est idempotente, alors $A = A^{\#}$.*

En effet, $A = A^2$ implique l'existence de $A^{\#}$. De la remarque 2.3.1, nous obtenons

$$A = A^2 A^{\#} = AA^{\#} = A\left(A\left(A^{\#}\right)^2\right) = A^2 \left(A^{\#}\right)^2 = A\left(A^{\#}\right)^2 = A$$

2.3.3 Le groupe cyclique

Le nom du groupe inverse a été donné par I. Erdelyi, parce que les puissances positives et négatives d'une matrice donnée A (les puissances négatives de A étant interprétées comme puissances positives de $A^{\#}$), avec le projecteur $AA^{\#}$ comme élément neutre, constituent un groupe abélien en vertu de la multiplication des matrices.

En effet, soit A une matrice carrée et $A^{\#}$ son Groupe inverse. On pose $G = \left\{A^k, \ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$, $A^0 = AA^{\#}$. Comme $AA^{\#} = A^{\#}A$, il suffit de vérifier la multiplication dans le côté gauche. Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\left(AA^{\#}\right) A^k = \ AA^{\#}AA^{k-1} = AA^{k-1} = A^k,$$

d'où $AA^{\#}$ est l'élément neutre de G. Comme $AA^{\#} = A^{\#}A$, alors A est l'inverse de $A^{\#}$ (au sens de l'inversion dans le groupe) .

Notons aussi que G est cyclique, engendré par A ou $A^{\#}$, donc il sera noté $C\left(A\right)$. Dans le théorème suivant nous allons donner les conditions équivalentes pour l'existence d'un entier positif k vérifiant $A^k = AA^{\#}$.

Théorème 2.3.1 *Étant donné une matrice carrée A telle que $A^{\#}$ existe.. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) Il existe un entier positif k pour lequel $A^k = AA^{\#}$.

2) $C\left(A\right)$ est un groupe fini d'ordre k.

3) A est semblable à $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où S est une $k-$racine de l'unité.

Preuve. Les deux premières conditions sont juste une simple conséquence des groupes cycliques.

3) On sait que, si $A^k = AA^{\#}$, alors A^k est un projecteur sur $R\left(A\right)$, d'où

$$\begin{cases} A^k & = I \ \text{ sur } R\left(A\right) \\ A^k & = 0 \text{ sur } N\left(A\right) \end{cases}.$$

En forme de Jordan, cela signifie que: sur $R(A)$, les valeurs propres non nulles de A sont les k-racines de l'unité, et sur $N(A), A = N$ une matrice en blocs diagonale, nilpotente d'indice de nilpotence k. On en déduit qu'il existe une matrice inversible P, telle que

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P\ ,$$

où S est une racine de l'unité d'ordre k. Si on prend

$$X = P^{-1} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & N^t \end{pmatrix} P,$$

alors X est un $\{1,2\}$ $-$inverse de A (voir bloc de Jordan, Lemme 1.4.1). On a aussi

$$AX = (AX)^k = P^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & (NN^t)^k \end{pmatrix} P \tag{2.1}$$

du fait que AX est idempotent. Pour obtenir le Groupe inverse, il faut avoir $AX = XA$, ce qui implique $NN^t = N^tN$, et cela donne $(NN^t)^k = N^k (N^t)^k = 0$. De l'équation (2.1), on obtient $NN^t = (NN^t)^k = 0$, et par suite $N = 0$, du fait que NN^t est semi-définie positive. Finalement,

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P.$$

Réciproquement, si

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P,$$

alors le polynôme caractéristique de A est $t^{(n-k)}\left(t^k - 1\right)$,ce qui entraîne la décomposition: $\mathbb{K}^n = \ker\left(A^k - I\right) \oplus \ker A^{n-k}$. Comme $\ker\left(A^k - I\right) = R\left(A\right), \ker A^{n-k} = N\left(A\right)$, on a

$$\begin{cases} A^k & = I \text{ sur } R\left(A\right) \\ A^k & = 0 \text{ sur } N\left(A\right) \end{cases}$$

ce qui donne $A^kAA^\# = AA^\#$, d'où $A^k = AA^\#$ du fait que $AA^\#$ est l'élément neutre. ■

2.4 L'inverse de Drazin

Étant donné une matrice carrée A. On sait que la suite des sous-espaces suivante

$$R(I) = R\left(A^0\right) \supset R(A) \supset R\left(A^2\right) ... \supset R\left(A^k\right) \supset R\left(A^{k+1}\right) ...$$

est stationnaire. Soit p le plus petit entier non négatif pour lequel $R(A^p) = R(A^{p+1})$. On dit dans ce cas que A est d'indice p noté $ind(A)$. Si $R(A^p) = \{0\}$, on dit que f est nilpotent d'indice de nilpotence p. Le lemme suivant résume les propriétés les plus importantes de l'indice.

Lemme 2.4.1 *Soit $f \in \ell(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) f est d'indice p.

2) $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1}$.

3) $E = \ker f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$.

Pour la preuve, voir l'appendice

Remarque 2.4.1 *D'après le lemme précédent, nous concluons que: si $ind(A) = p$, alors $ind(A^p)$ =1, donc $(A^p)^{\#}$ existe. Par conséquent, pour toute matrice A d'indice $p \succeq 1$ il existe un groupe $C(A^p)$.*

Définition 2.4.1 *Soit A une matrice carrée d'indice p. L'inverse de Drazin de A est une matrice carrée notée A^D, qui satisfait les équations suivantes:*

$$\begin{cases} A^D A A^D & = & A^D \\ A^D A & = & A A^D \\ A^D A^{p+1} & = & A^p \end{cases}.$$

On a

Corollaire 2.4.1 *1) $A^D A$ est un projecteur sur $R\left(A^D\right)$.*

2) $R\left(A^D\right) = R\left(A^p\right)$ et $N\left(A^D\right) = N\left(A^p\right)$.

3) Si A est inversible, alors $A^D = A^{-1}$.

4) Si $ind\left(A\right) = 1$, alors $A^D = A^{\#}$.

Preuve. 1) L'égalité $AA^D = A^D A$, entraîne $\left(A^D A\right)^2 = A^D AA^D A = A^D A$, donc $A^D A$ est un projecteur sur $R\left(A^D\right)$.

2) De la troisième équation de la définition 2.4.1 , on a $R\left(A^p\right) \subset R\left(A^D\right)$. De ce qui précède, on a:

$$A^p \left(A^D\right)^{p+1} = \left(AA^D\right)^p A^D = A^D AA^D = A^D,$$

ce qui signifie que $R\left(A^D\right) \subset R\left(A^p\right)$. D'où, $R\left(A^D\right) = R\left(A^p\right)$. Maintenant, les équations:

$$A^{p+1} A^D = A^p, \left(A^D\right)^{p+1} A^p = A^D$$

entraînent $N\left(A^D\right) = N\left(A^p\right)$.

3) Si A est inversible, nous avons $R\left(A\right) = R\left(A^0\right) = R\left(I\right)$. D'où, $A^D A = I = AA^D$. Ainsi $A^D = A^{-1}$.

4) Nous avons vu que si $ind\left(A\right) = 1$, alors, $A^{\#}$ existe. Ainsi, à partir des définitions du Groupe inverse et l'inverse de Drazin, il suffit de prouver que $AA^D A = A$. D'après les deux dernières équations de la définition 2.4.1 , nous avons

$$A = A^D A^2 = A^D AA = AA^D A. \blacksquare$$

2.5 Indice d'un inverse généralisé d'un endomorphisme

Dans cette section, nous allons étudier la relation entre l'indice d'un inverse généralisé donné A^- d'une matrice carrée A et l'indice de A. Nous allons les comparer et de trouver des relations entre A^D et $(A^-)^D$. Des cas particuliers pour $A^\#$ et A^{-1} également auront lieu. Soient f et f^- les endomorphismes associés à A et A^-. L'espace vectoriel des endomorphismes de E sera désigné par $\ell(E)$. Les lemmes suivants ne sont qu'une version fonctionnelle du lemme 1.5.2, lorsque $k = 1$. Donc nous n'avons pas besoin de les redémontrer.

Lemme 2.5.1 *Soit* $f \in \ell(E)$. f^- *est un* $\{1\}-$*inverse de* f. *Alors*

1) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f f^-$, $\ker f^- f = \ker f$, $\ker f^- \subset \ker f f^-$, *et* $\operatorname{Im} f^- f \subset \operatorname{Im} f^-$.

2) $E = \ker f f^- \oplus \operatorname{Im} f$.

3) $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f^- f$.

Lemme 2.5.2 *Soit* $f \in \ell(E)$. f^- *un* $\{1, 2\}$-*inverse de* f. *Alors*

1) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f f^-$, $\ker f^- f = \ker f$, $\ker f^- = \ker f f^-$, $\operatorname{Im} f^- f = \operatorname{Im} f^-$,*et* $r(f) = r(f^-)$.

2) $E = \ker f^- \oplus \operatorname{Im} f$.

3) $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f^-$.

2.5.1 L'indice d'un $\{1\}$ $-$inverse de f

Proposition 2.5.1 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie sur* $\mathbb{K}$. $f \in \ell(E)$ *et* f^- *un* $\{1\}$ $-$*inverse de* f. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $ind(f^-) = p$.

ii) $\forall k \succeq p$, $\ker ff^- \subseteq \ker (f^-)^k$ *et* $\operatorname{Im} f \subseteq \ker (f^-)^k$ *ou* $\ker ff^- \subset \ker (f^-)^k$ *et* $(f^-)^{k+1} \operatorname{Im} f = (f^-)^k \operatorname{Im} f$ *ou* $(f^-)^{k+1} \ker ff^- = (f^-)^k \ker ff^-$ *et* $\operatorname{Im} f \subset \ker (f^-)^k$ *ou* $(f^-)^{k+1} \ker ff^- = (f^-)^k \ker ff^-$ *et* $(f^-)^{k+1} \operatorname{Im} f = (f^-)^k \operatorname{Im} f$.

Preuve. Comme $E = \ker ff^- \oplus \operatorname{Im} f$, on a

$$\forall k \succeq 1, \operatorname{Im} \left(f^-\right)^k = \left(f^-\right)^k \ker ff^- + \left(f^-\right)^k \operatorname{Im} f. \tag{2.2}$$

Remarquons d'abord que $\left((f^-)^k \ker ff^-\right)_{k\succeq 1}$, $\left((f^-)^k \operatorname{Im} f\right)_{k\succeq 1}$ sont des suites décroissantes de sous-espaces de E, d'où, chacune d'elles, soit tend vers l'espace nul ou reste stationnaire. On va envisager quatre cas:

1) Si les deux suites ont tendent vers l'espace nul, il existe deux entiers k_0 et k_1, tels que

$$\ker ff^- \subset \ker \left(f^-\right)^{k_0}, \quad \operatorname{Im} f \subset \ker \left(f^-\right)^{k_1}.$$

On pose $p = \max(k_0, k_1)$ tel que

$$\forall k \succeq p, \ker ff^- \subseteq \ker \left(f^-\right)^k, \operatorname{Im} f \subseteq \ker \left(f^-\right)^k. \tag{2.3}$$

Remplaçons (2.3) dans (2.2), nous avons, $\operatorname{Im} (f^-)^p = \{0\}$, d'où f^- est nilpotent d'indice $p = \max(k_0, k_1)$. Inversement, si f^- est nilpotent d'indice p, alors de (2.2), on a

$$\{0\} = \left(f^-\right)^p \ker ff^- + \left(f^-\right)^p \operatorname{Im} f,$$

ce qui signifie que les deux termes sont des espaces nuls, d'où les inclusions (2.3) sont triviales.

2) $\left((f^-)^k \ker ff^-\right)_{k\succeq 1}$ tend vers l'espace nul et $\left((f^-)^k \operatorname{Im} f\right)_{k\succeq 1}$ est stationnaire. Il existe k_0, k_1 tels que,

$$\ker ff^- \subset \ker\left(f^-\right)^{k_0}, \left(f^-\right)^{k_1+1}\operatorname{Im} f = \left(f^-\right)^{k_1}\operatorname{Im} f,$$

d'où,

$$\forall k \succeq \max(k_0, k_1), \ \ker ff^- \subset \ker\left(f^-\right)^k, \left(f^-\right)^{k+1}\operatorname{Im} f = \left(f^-\right)^k \operatorname{Im} f\ . \tag{2.4}$$

Remplaçons (2.4) dans (2.2), nous avons

$$\forall k \succeq p = \max(k_0, k_1), \operatorname{Im}\left(f^-\right)^k = \left(f^-\right)^k \operatorname{Im} f = \left(f^-\right)^p \operatorname{Im} f = \operatorname{Im}\left(f^-\right)^p.$$

ce qui montre que f^- est d'indice $p = \max(k_0, k_1)$.

3) $\left((f^-)^k \ker ff^-\right)_{k\succeq 1}$ est stationnaire et $\left((f^-)^k \operatorname{Im} f\right)_{k\succeq 1}$ tend vers l'espace nul. Il existe k_0, k_1 tels que,

$$\operatorname{Im} f \subset \ker\left(f^-\right)^{k_1}, \left(f^-\right)^{k_0+1}\ker ff^- = \left(f^-\right)^{k_0}\ker ff^-,$$

d'où $\forall k \succeq \max(k_0, k_1)$,

$$\operatorname{Im} f \subset \ker\left(f^-\right)^k, \left(f^-\right)^{k+1}\ker ff^- = \left(f^-\right)^k \ker ff^-. \tag{2.5}$$

Remplaçons (2.5) dans (2.2), nous avons

$$\forall k \succeq p = \max(k_0, k_1), \ \operatorname{Im}\left(f^-\right)^k = \left(f^-\right)^k \ker ff^- = \left(f^-\right)^p \ker ff^- = \operatorname{Im}\left(f^-\right)^p,$$

d'où f^- est d'indice $p = \max(k_0, k_1)$.

4) Les deux suites sont stationnaires. Il existe k_0, k_1 tels que,

$$\left(f^-\right)^{k_0+1}\ker ff^- = \left(f^-\right)^{k_0}\ker ff^-, \left(f^-\right)^{k_1+1}\operatorname{Im} f = \left(f^-\right)^{k_1}\operatorname{Im} f,$$

d'où

$$\forall k \succeq \max(k_0, k_1), \left(f^-\right)^{k+1} \ker ff^- = \left(f^-\right)^k \ker ff^-, \left(f^-\right)^{k+1} \operatorname{Im} f = \left(f^-\right)^k \operatorname{Im} f. \tag{2.6}$$

Remplaçons (2.6) dans (2.2), nous avons

$$\forall k \succeq p = \max(k_0, k_1), \ \operatorname{Im}\left(f^-\right)^k = \left(f^-\right)^p \ker ff^- + \left(f^-\right)^p \operatorname{Im} f = \operatorname{Im}\left(f^-\right)^p,$$

d'où f^- est d'indice $p = \max(k_0, k_1)$.

Inversement, si f^- est d'indice p, on a $\forall k \succeq p$, $\operatorname{Im}(f^-)^k = \operatorname{Im}(f^-)^p$ si et seulement si l'un des cas précédents détient. ■

2.5.2 Comparaison des indices

Maintenant, nous allons comparer les indices de f et d'un f^- donné.

Proposition 2.5.2 *Soient $f \in \ell(E)$ d'indice p et f^- un $\{1\}-$inverse de f. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

i) Il existe $k_0 \succeq 1$ tel que, $\ker f^p \subseteq \ker (f^-)^{k_0}$ *ou* $\forall k \succeq k_0$, $(f^-)^k \ker f^p = (f^-)^{k_0} \ker f^p$ *ou* $(f^-)^{k_0} \ker f^p \subseteq \operatorname{Im} f^p$.

ii) f^- est d'indice k_0.

Preuve. Suite au lemme 2.4.1, nous avons $ind(f) = p \Leftrightarrow E = \ker f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$. D'où,

$$\forall k \succeq 1, \operatorname{Im}\left(f^-\right)^k = \left(f^-\right)^k \ker f^p + \left(f^-\right)^k \operatorname{Im} f^p. \tag{2.7}$$

Comme la restriction de f à $\operatorname{Im} f^p$ est un automorphisme, alors la restriction de f^- à $\operatorname{Im} f^p$ devient l'inverse ordinaire de f , en fait, pour tout $y \in \operatorname{Im} f^p$, il existe $x \in \operatorname{Im} f^p$ tel que

$f^{-1}(y) = x$, d'où

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(ff^{-}f(x)\right) = \left(f^{-1}f\right)f^{-}(y) = f^{-}(y).$$

Ainsi, $\forall k \succeq 1$, $(f^{-})^{k} \operatorname{Im} f^{p} = \operatorname{Im} f^{p}$. L'équation (2.7) devient

$$\forall k \succeq 1,\ \operatorname{Im}\left(f^{-}\right)^{k} = \left(f^{-}\right)^{k} \ker f^{p} + \operatorname{Im} f^{p}. \tag{2.8}$$

La suite $\left(\operatorname{Im}(f^{-})^{k}\right)_{k\succeq 1}$ ne dépend que de la suite $\left((f^{-})^{k} \ker f^{p}\right)_{k\succeq 1}$, donc, nous avons deux cas:

1) Il existe $k_0 \succeq 1$ tel que $\ker f^{p} \subset \ker(f^{-})^{k_0}$. Remplaçons cette inclusion dans (2.8), nous obtenons:

$$\forall k \succeq k_0,\ \operatorname{Im}\left(f^{-}\right)^{k} = \operatorname{Im} f^{p} = \operatorname{Im}\left(f^{-}\right)^{k_0}, \tag{2.9}$$

ce qui montre que f^{-} est d'indice k_0. On remarque aussi que, s'il existe $k_0 \succeq 1$ tel que $(f^{-})^{k_0} \ker f^{p} \subseteq \operatorname{Im} f^{p}$, alors,

$$\forall k \succeq k_0, \left(f^{-}\right)^{k} \ker f^{p} \subseteq \left(f^{-}\right)^{k_0} \ker f^{p} \subseteq \operatorname{Im} f^{p},$$

Donc,

$$\forall k \succeq k_0,\ \operatorname{Im}\left(f^{-}\right)^{k} = \operatorname{Im} f^{p} = \operatorname{Im}\left(f^{-}\right)^{k_0},$$

ce qui montre que f^{-} est d'indice k_0.

2) Il existe $k_0 \succeq 1$ tel que

$$\forall k \succeq k_0,\ \left(f^{-}\right)^{k} \ker f^{p} = \left(f^{-}\right)^{k_0} \ker f^{p} \neq \{0\}.$$

Remplaçons cette égalité dans l'équation (2.8), nous avons

$$\forall k \succeq k_0, \operatorname{Im}\left(f^{-}\right)^{k} = \left(f^{-}\right)^{k_0} \ker f^{p} + \operatorname{Im} f^{p} = \operatorname{Im}\left(f^{-}\right)^{k_0}.$$

Ce cas montre que

$$\operatorname{Im} f^p \subsetneq \operatorname{Im}\left(f^-\right)^{k_0}. \tag{2.10}$$

Par suite, f^- est d'indice $k_0 \succeq 1$.

Inversement, si f^- est d'indice k_0, on a $\forall k \succeq k_0, \operatorname{Im}(f^-)^k = \operatorname{Im}(f^-)^{k_0}$ si et seulement si l'un des cas précédents détient. ■

Corollaire 2.5.1 *Soient $f \in \ell(E)$ d'indice p et de rang $r \prec n$, et f^- un $\{1\}$ −inverse de f d'indice k_0. Alors nous avons:*

1) $p \preceq k_0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im}(f^-)^{k_0}$.

2) $p \succeq k_0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f^p \subsetneq \operatorname{Im}(f^-)^{k_0}$ et f^- est un $\{1,2\}$−inverse de f.

Preuve. 1) Selon les équations (2.9) et (2.10), f^- est d'indice k_0 si et seulement si $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im}(f^-)^{k_0}$, ou $\operatorname{Im} f^p \subsetneq \operatorname{Im}(f^-)^{k_0}$.

Si $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im}(f^-)^{k_0}$, alors, de (2.8), on a $\operatorname{Im}(f^-)^{k_0} \subseteq \operatorname{Im}(f^-)^p$, d'où $p \preceq k_0$, du fait que la suite $\left(\operatorname{Im}(f^-)^k\right)_{k \succeq 1}$ est décroissante.

2) Le cas de $\operatorname{Im} f^p \subsetneq \operatorname{Im}(f^-)^{k_0}$ détient si $(f^-)^k \ker f^p = (f^-)^{k_0} \ker f^p$. Par l'inégalité de Frobenius ($r(AB) \succeq r(A) + r(B) - n$), on a

$$n - p(n-r) \preceq r(f)^p \prec r\left(f^-\right)^{k_0},$$

et de l'inégalité $n - k_0(n-s) \preceq r(f^-)^{k_0}$, avec $r(f^-) = s$, on a

$$n - p(n-r) \preceq n - k_0(n-s).$$

Par conséquent,

$$k_0(n-s) \preceq p(n-r).$$

Donc, si f^- est un $\{1,2\}$ −inverse de f , on a $r = s$, et, dans ce cas on a $k_0 \preceq p$. ■

2.5.3 Indice d'un $\{1,\ 2\}$ $-$inverse de f

Dans ce paragraphe, nous citons quelques résultats déduits à partir de ce qui précède. Nous pouvons comparer les indices de f et de f^-quand f^- est un $\{1,\ 2\}$ $-$inverse de f .

Comme $r(f) = r(f^-)$, alors, pour $f \in \ell(E)$, on a $\dim\ker f = \dim\ker f^-$, et la restriction de f à $\operatorname{Im} f^-$ est un isomorphisme de $\operatorname{Im} f^-$ sur $\operatorname{Im} f$. On conclue que f et f^- sont, l'un est l'inverse ordinaire de l'autre sur $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f^-$.

Corollaire 2.5.2 *Soient $f \in \ell(E)$ d'indice p et f^- un $\{1,\ 2\}$-inverse de f. Alors*

1) f^- est d'indice p si et seulement si $\ker f^p = \ker (f^-)^p$.

2) f^- est d'indice p si et seulement si $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} (f^-)^p$.

3) f^- est nilpotent si et seulement si f est nilpotent.

Preuve. La suffisance dans les assertions du corollaire est satisfaite par la proposition 2.5.2. Ainsi on n'a besoin qu'à démontrer la nécessité, et le fait que les conditions nécessaires de ces deux dernières ne sont qu'un résultat de la première condition, alors nous allons démontrer ce dernier seulement

Selon les résultats mentionnés ci-dessus et les paragraphes précédents, si f est d'indice p alors, les restrictions de f^- et f à $\operatorname{Im} f^p$ sont l'un est inverse de l'autre. D'où,

$$\left(f^- f\right) \operatorname{Im} f^p = \left(f f^-\right) \operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1} ,$$

et

$$E = \ker f^p \oplus \operatorname{Im} f^p.$$

Appliquons f à l'équation précédente, on obtient

$$\operatorname{Im} f = f \ker f^p + \operatorname{Im} f^{p+1} = f \ker f^p + \operatorname{Im} f^p = f \ker f^p \oplus \operatorname{Im} f^p. \tag{2.11}$$

En effet, pour $x \in f \ker f^p$, il existe $y \in \ker f^p$, tel que

$$x = f(y).$$

D'autre part, $\ker f^p = \ker f^{p+1}$ entraîne

$$f^p(x) = f^{p+1}(y) = 0,$$

d'où $x \in \ker f^p$. Ainsi,

$$f(\ker f^p) \subseteq \ker f^p.$$

Par conséquent, on a une somme directe.

Appliquons f^- à l'équation (2.11), on a

$$\operatorname{Im} f^- = \operatorname{Im} f^- f = f^- f \ker f^p \oplus f^- \operatorname{Im} f^p = f^- f \ker f^p \oplus \operatorname{Im} f^p.$$

Nous avons une somme directe car, pour $x \in f^- f \ker f^p \cap \operatorname{Im} f^p$, il existe $y \in \ker f^p$, tel que

$$x = f^- f(y),$$

avec $x \in \operatorname{Im} f^p$. Appliquons f^p, on a

$$f^p(x) = f^{p-1}\left(f f^- f\right)(y) = f^p(y) = 0.$$

D'où, $x \in \ker f^p \cap \operatorname{Im} f^p = \{0\}$. De la même façon, on a

$$\forall k \succeq 1, \ \operatorname{Im}\left(f^-\right)^k = \left(f^-\right)^k f \ker f^p \oplus \operatorname{Im} f^p. \tag{2.12}$$

Maintenant, si f^- est d'indice p, d'une part on a

$$\ker f^p \oplus \operatorname{Im} f^p = E = \ker\left(f^-\right)^p \oplus \operatorname{Im}\left(f^-\right)^p.$$

d'autre part, pour $k = p$, on remplace $\mathrm{Im}\,(f^-)^p$ par l'équation (2.12), on obtient

$$\ker f^p \oplus \mathrm{Im}\, f^p = \ker \left(f^-\right)^p \oplus \left(f^-\right)^p f \ker f^p \oplus \mathrm{Im}\, f^p.$$

Comme f^- est l'inverse de f sur $\mathrm{Im}\, f$, nous avons pour $x \in (f^-)^p f \ker f^p$, il existe $y \in \ker f^p$ tel que

$$x = \left(f^-\right)^p f\left(y\right).$$

Appliquons f^{2p}, on a

$$f^{2p}\left(x\right) = f^{p+1}\left(y\right) = 0,$$

ce qui montre que

$$x \in \ker f^{2p} = \ker f^p.$$

Ainsi,

$$\left(f^-\right)^p f \ker f^p \subseteq \ker f^p.$$

Par conséquent,

$$\ker \left(f^-\right)^p \subseteq \ker f^p.$$

Comme f et f^- sont l'un est g$-$inverse de l'autre, par réciprocité, on procède de la même façon, afin d'avoir l'inclusion: $\ker f^p \subseteq \ker \left(f^-\right)^p$. ■

Corollaire 2.5.3 *Soient $f \in \ell\left(E\right)$ de rang $r \prec n$, et f^- un nilpotent $\{1,\ 2\}$ $-$inverse de f d'indice k_0. Alors f est nilpotent d'indice p, et soit*

$$\frac{n}{n-r} \preceq k_0 \prec p \textit{ ou } p = \frac{n}{n-r}. \tag{2.13}$$

Preuve. Comme f^- est nilpotent d'indice k_0, alors, f est nilpotent d'indice p, et $E = \ker f^p = \ker\left(f^-\right)^{k_0}$. Ainsi, si $k_0 \prec p$, alors par l'inégalité de Frobenius,

$$n \preceq k_0\left(n-r\right) \prec p\left(n-r\right).$$

D'où, $\frac{n}{n-r} \preceq k_0 \prec p$. Si $k_0 \succ p$, on a

$$\ker \left(f^-\right)^p \subsetneq \ker \left(f^-\right)^{k_0} = E = \ker f^p,$$

d'où

$$\dim \ker \left(f^-\right)^p \lneqq n \preceq p\left(n-r\right) \prec k_0\left(n-r\right).$$

D'autre part,

$$\dim \ker \left(f^-\right)^p \preceq p\left(n-r\right),$$

Donc, il faut que, $n = p\left(n-r\right) \prec k_0\left(n-r\right)$, ce qui implique $\frac{n}{n-r} = p \prec k_0$. On conclue que, si f^- est un $\{1,\ 2\}$ −inverse de f, avec un indice de nilpotence $k_0 \succ p =$ indice f, alors p divise n. ■

2.6 Application à l'inverse de Drazin

On considère une matrice carrée A, et A^- un $\{1\}$ −inverse de A. De se qui précède, on peut déduire deux résultats:

Corollaire 28 *1) $ind\left(A\right) \preceq ind\left(A^-\right)$ si et seulement si $R\left(A^D\right) = R\left(\left(A^-\right)^D\right)$.*

Dans ce cas, si $ind\left(A\right) \succ 1$, alors,

$$\left(A^-A - AA^-\right)A^{ind(A)} = 0.$$

2) Si A^- est un $\{1,2\}$ −inverse de A, alors $ind\left(A\right) \succeq ind\left(A^-\right)$ si et seulement si $R\left(A^D\right) \subsetneq R\left(\left(A^-\right)^D\right)$. Dans ce cas, si $ind\left(A\right) = 1$, alors

$$A^\# = A^D,\ \left(A^-\right)^\# = \left(A^-\right)^D \text{ et } R\left(A\right) = R\left(A^\#\right) = R\left(\left(A^-\right)^\#\right) = R\left(A^-\right).$$

3) Si A^- est nilpotente, alors, A est nilpotente, et $\left(A^-\right)^D = 0 = A^D$.

Chapter 3
Opérations algébriques et inverses généralisés

3.1 Introduction

Les inverses généralisés de la somme ont fait l'objet de plusieurs travaux. Le concept d'additivité des rangs (le théorème de Cochran) a été le mot clé dans [1], [2], [7]. Les inverses généralisés du produit ont fait l'objet des publications [5], [6], [9], [10], [18], [19]. Il est connu qu'ils ne suivent pas la règle de l'inverse ordinaire (ce qui est appelé la loi d'ordre inverse). Aussitôt, mais très compliquée, une représentation d'un inverse généralisé du produit de deux matrices a été donnée par Cline [5] où il a montré que pour des matrices A et B telles que le produit est défini, un inverse généralisé $(AB)^{+} = B_1^{+}A_1^{+}$, où $B_1 = A^{+}AB$ et $A_1 = AB_1B_1^{+}$. Pas trop loin de la représentation précédente, en utilisant un autre concept, la représentation $(AB)^{-} = B^{-}(A^{-}ABB^{-})^{-}A^{-}$ pour certains $\{1,2\}$ $-$inverses A^{-}, B^{-} et $(A^{-}ABB^{-})^{-}$ a été donnée par X. M. Ren, Y. Wang et K. P. Shum [17]. Vu l'importance de la propriété de la loi d'ordre inverse liée à l'inverse ordinaire du produit matriciel, dans les domaines de l'algèbre linéaire, analyse numérique, optimisation etc.., cette propriété liée à l'inverse généralisé a été étudiée par Erdelyi dans [6] où il a donné des conditions équivalentes pour avoir $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$, ensuite beaucoup de travaux concernant cette propriété ont été réalisé, à titre d'exemple, on peut citer les travaux de [10] et [19].

Dans ce chapitre, notre contributions majeure réside dans l'étude des propriétés algébriques de l'inversion généralisée de la somme (Théorème 3.2.1, Théorème 3.2.2,), et du produit de deux matrices (Proposition 3.3.1, Proposition 3.3.2, Proposition 3.3.3, Théorème 3.4.1). En utilisant l'additivité des rangs nous avons étudié l'inverse généralisé de la somme de deux matrices si leurs images ne sont pas disjointes et donné un exemple numérique dans ce cas. Ensuite nous avons utilisé les projecteurs pour exprimer la forme générale d'un inverse généralisé du produit de deux matrices. Enfin, en supposant que les conditions équivalentes pour avoir la propriété de l'ordre inverse sont satisfaites, nous avons établi les conditions équivalentes pour que l'ordre inverse soit invariant. Ce chapitre a été l'objet de la publication [20] .

3.2 Sur les inverses généralisés de la somme de deux matrices

Considérons A et B deux matrices de type $m \times n$, et A_0 et B_0 leurs $\{1\}$ $-$inverses respectivement. Commençons d'abord par citer quelques propriétés concernant la somme, en les regroupant dans les deux lemmes ci-dessous.

Lemme 3.2.1 *(L'additivité des rangs) Soient A et B deux matrices de type $m \times n$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1) $r(A+B) = r(A) + r(B)$.

2) $R(A) \cap R(B) = \{0\}$ et $R(A^t) \cap R(B^t) = \{0\}$.

Preuve. Posons $r(A) = r$, $r(B) = s$, $A = XY$, $B = UV$; les factorisations à plein rang de A et B, et $X = [x_1, x_2, ...x_r]$, $U = [u_1, u_2, ...u_s]$, alors $\{x_1, x_2, ...x_r\}$ et $\{u_1, u_2, ...u_s\}$ sont deux bases de $R(A)$ et $R(B)$ respectivement. De l'équation

$$A + B = [X, U] \begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

on a

$$r(A + B) \leq r([X, U]) \leq r + s = r(A) + r(B) = r(X) + r(U),$$

et de la donnée

$$r(A + B) = r(A) + r(B),$$

on obtient

$$r([X, U]) = r(X) + r(U) = r + s.$$

Ainsi $x_1, x_2, ...x_r,\ u_1, u_2, .., u_s$ sont linéairement indépendants. Pour tout $v \in R(A) \cap R(B)$, il existe $\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_r, \beta_1, \beta_{2,} ....\beta_s$, tels que

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ...\alpha_r x_r = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + ...\beta_s u_s.$$

d'où,

$$0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ...\alpha_r x_r + (-\beta_1) u_1 + (-\beta_2) u_2 + ...(-\beta_s) u_s.$$

Par suite,

$$\alpha_1 =, ... = \alpha_r = \beta_1 =, ... = \beta_s = 0$$

ce qui entraîne $v = 0$. Par conséquent, $R(A) \cap R(B) = \{0\}$.

Compte tenu du fait que

$$r(A^t) + r(B^t) = r(A) + r(B) = r(A + B) = r((A + B)^t) = r(A^t + B^t),$$

la relation $r(A^t) + r(B^t) = r(A^t + B^t)$ entraîne $R(A^t) \cap R(B^t) = \{0\}$.

Maintenant, nous supposons que la condition 2 est vérifiée. Du fait que $A = XY$, $B = UV$ sont des factorisations préservant les rangs, on a $R(A) = R(X)$ et $R(B) =$

$R(U)$, d'où, $R(X) \cap R(U) = \{0\}$ et $R(Y) \cap R(V) = \{0\}$. Ainsi l'équation (3.1) est une factorisation préservant le rang de $A + B$, ce qui entraîne

$$r(A + B) = r([X, U]) = r(X) + r(U) = r(A) + r(B). \blacksquare$$

Lemme 3.2.2 *Soient A et B deux matrices de type $m \times n$, telles que*

$$r(A + B) = r(A) + r(B).$$

Alors,

1) Il existe deux matrices inversibles P et Q telles que

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

2) Tout $\{1\}$ $-$inverse de $A + B$ est un $\{1\}$ $-$inverse de A et B à la fois.

3) Si X est un $\{1\}$ $-$inverse de $A + B$, alors $AXB = 0$ et $BXA = 0$.

Preuve. Sans restreindre de généralité, on peut supposer que $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $B = UV$ une factorisation à plein rang de B. On peut aussi présenter B par:

$$B = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1, & V_2 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

où U_1, V_1 sont des matrices de types $r \times s$ et $s \times r$ respectivement. Soient U_l, V_r des inverses à gauche et à droite de U et V respectivement. On va montrer que

$$r(U_2) = s = r(V_2).$$

Si $r(U_2) \prec s$, il existe $X \in \mathbb{C}^n$, $X \neq 0$, tel que $U_2 X = 0$. De l'égalité $B = UV$, on a

$$(BV_r)X = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} U_1 X \\ U_2 X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 X \\ 0_{(m-r)\times 1} \end{bmatrix} \in R(B) \tag{3.3}$$

$AX = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{(m-r)\times 1} \end{bmatrix} X \in R(A)$,d'où,

$$\begin{bmatrix} U_1 X \\ 0_{(m-r)\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{(m-r)\times 1} \end{bmatrix} U_1 X \in R(A). \tag{3.4}$$

De (3.3) et (3.4), on a $\begin{bmatrix} U_1 X \\ 0_{(m-r)\times 1} \end{bmatrix} \in (R(A) \cap R(B))$. Comme $r(A+B) = r(A) + r(B)$, appliquons le lemme 3.2.1, on obtient $\begin{bmatrix} U_1 X \\ 0_{(m-r)\times 1} \end{bmatrix} = 0$, ce qui donne $UX = 0$. D'autre part, U est de rang maximum, alors $X = 0$, ce qui contredit l'hypothèse, d'où $r(U_2) = s$, et il existe une matrice M telle que $U_1 = MU_2$.

D'autre part de l'égalité $B = UV$, on a $V = U_l B$, d'où, $V^t = B^t (U_l)^t$.

De manière analogue, et avec la condition 2 du lemme 3.2.1, on a $r(V_2) = s$.

On pose $V_1 = V_2 N$. Remplaçons U_1 et V_1 dans l'équation (3.2), nous obtenons

$$B = \begin{bmatrix} MU_2 \\ U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 N, & V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MU_2V_2N & MU_2V_2 \\ U_2V_2N & U_2V_2 \end{bmatrix}.$$

Soient S et T deux matrices, telles que $S \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} T = B$.

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{12}YT_{21} & S_{12}YT_{22} \\ S_{22}YT_{21} & S_{22}YT_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} MU_2V_2N & MU_2V_2 \\ U_2V_2N & U_2V_2 \end{bmatrix}.$$

Il suffit de prendre $Y = U_2V_2,\ S_{12} = M,\ T_{21} = N,\ S_{22} = I_{m-r},\ T_{12} = 0,\ S_{21} = 0, T_{11} = I_r,\ S_{11} = I_r,\ T_{22} = I_{n-r}$, pour avoir

$$S = \begin{pmatrix} I_r & M \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ N & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

On prend

$$P = S^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & -M \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix},\ Q = T^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -N & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

alors

$$PBQ = S^{-1}BT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix},\ PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient A, B et $A+B$ comme dans la preuve du lemme 3.2.2, alors pour toute $\{1\}$ $-$inverse $(A+B)_0$ de $A+B$, nous avons

$$[X,U]\begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}(A+B)_0\,[X,U]\begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix} = [X,U]\begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}.$$

de l'équation (3.1), il existe des inverses à gauche et à droite $[X,U]_l$ et $\begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}_r$ telles que

$$\begin{aligned} & [X,U]_l\,[X,U]\begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}(A+B)_0\,[X,U]\begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}_r \\ = & \begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}(A+B)_0\,[X,U] = \begin{bmatrix} Y(A+B)_0X & Y(A+B)_0U \\ V(A+B)_0X & V(A+B)_0U \end{bmatrix} = I_{r+s} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $Y(A+B)_0X = I_r \Rightarrow XY(A+B)_0XY = XI_rY = XY = A$.

$$Y(A+B)_0U = 0, V(A+B)_0X = 0. \tag{3.5}$$

et

$$V(A+B)_0U = I_s \Rightarrow UV(A+B)_0UV = UI_SV = UV.$$

Par suite

$$B(A+B)_0B = B.$$

L'assertion 3 peut-être déduite de l'équation (3.5), en multipliant à gauche les deux équations par X et U et à droite par V et Y respectivement, on obtient

$$XY(A+B)_0UV = 0, UV(A+B)_0XY = 0. \blacksquare$$

3.2.1 Le cas où $R(A) \cap R(B) = \{0\}$

Théorème 3.2.1 *Soient A et B deux matrices de type $m \times n$, telles que $r(A+B) = r(A) + r(B)$. Alors, il existe A_0 et B_0, $\{1\}$ −inverses de A et B tels que $A_0 + B_0 \in (A+B)^{\{1\}}$.*

Preuve. Appliquons le lemme 3.2.2, il existe deux matrices inversibles P et Q,

telles que

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1},\ B = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}Q^{-1},\ A+B = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

Il suffit de prendre

$$A_0 = Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P,\ B_0 = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix}P,$$

avec Y_0 est un $\{1\}$ −inverse de Y pour avoir

$$A_0 + B_0 = Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix}P.$$

On vérifie que

$$\begin{aligned}(A+B)(A_0+B_0)(A+B) &= P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}Q^{-1}Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix}PP^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}Q^{-1} \\ &= P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & YY_0Y \end{pmatrix}Q^{-1} = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}Q^{-1} = A+B. \blacksquare\end{aligned}$$

Remarque 3.2.1 *De l'assertion 2 du lemme 3.2.2, on a*

$$A(A_0+B_0)A = A \Rightarrow AB_0A = 0,\ B(A_0+B_0)B = B \Rightarrow BA_0B = 0.$$

Théorème 3.2.2 *Soient A et B deux matrices de type $m \times n$ telles que $r(A+B) = r(A) + r(B)$. Alors il existe A_0 et B_0, $\{1,2\}$ −inverses de A et B tels que $A_0 + B_0 = (A+B)_0$ est un $\{1,2\}$ −inverse de $A+B$.*

Preuve. Reprenons

$$A_0 = Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P,\ \ B_0 = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} P,$$

avec Y_0 est un $\{1,2\}$ $-$inverse de Y, et en appliquant le théorème précédent, on a A_0, B_0 et A_0 $+B_0$ sont des $\{1\}$ $-$inverses de A, B et $A+B$ respectivement et que

$$A_0 A A_0 = A_0,\ B_0 B B_0 = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_0 Y Y_0 \end{pmatrix} P = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} P = B_0,$$

$$\begin{aligned} (A_0+B_0)(A+B)(A_0+B_0) &= Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} P P^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} Q^{-1} Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} P \\ &= Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y_0 Y Y_0 \end{pmatrix} P = Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} P = A_0 + B_0. \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 3.2.2 *Du théorème 3.2.2, on a*

$$A_0(A+B)A_0 = A_0,\ B_0(A+B)B_0 = B_0.$$

Ainsi,

$$A_0 B A_0 = 0,\ B_0 A B_0 = 0.$$

En effet, comme $A_0 + B_0$ est un $\{1,2\}$ $-$inverse de $A+B$, alors $A+B$ est un $\{1\}$ $-$inverse de $A_0 + B_0$. Appliquons l'assertion 2 du lemme 3.2.2, on en déduit que $A+B$ est un $\{1\}$ $-$inverse de A_0 et B_0 .

3.2.2 Le cas où $R(A) \cap R(B) \neq \{0\}$

Dans ce cas, nous trouverons un $\{1\}$ $-$inverse de la somme. Soit $C = \{c_1, c_2, ...c_k\}$ une base de $R(A) \cap R(B)$. C peut être étendu à une base $X \cup C$ de $R(A)$ et peut être aussi étendu à une base $U \cup C$ de $R(B)$.

On pose $X = \{x_1, x_2, ...x_{r-k}\}$ et $U = \{u_1, u_2.....u_{s-k}\}$, et nous désignons par $C = [c_1, c_2, ...c_k]$, $X = [x_1, x_2, ...x_{r-k}]$ et $U = [u_1, u_2.....u_{s-k}]$, les matrices dont leurs colonnes sont c_i, x_i et u_i respectivement. D'après notre construction, nous avons

$$R(X) \cap R(C) = \{0\}\,,\; R(X) \cap R(U) = \{0\}\,,\; R(C) \cap R(U) = \{0\}\,.$$

$$A = \begin{bmatrix} C, & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix},\; B = \begin{bmatrix} C, & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}.$$

Comme $\begin{bmatrix} C, & X \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} C, & U \end{bmatrix}$ sont des matrices de types $m \times r$ et $m \times s$, alors on a les factorisations préservant les rangs de A et B respectivement. Envisageons deux cas:

i) $r(A) = r(B) = r$

$$A + B = \begin{bmatrix} C, & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C, & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = C(Y_1 + V_1) + (XY_2 + UV_2).$$

Posons

$$M = C(Y_1 + V_1),\; N = XY_2 + UV_2.$$

Comme C et $Y_1 + V_1$ sont des matrices de types $m \times k$ et $k \times n$ (de rang maximum k), on a une factorisation préservant le rang de M . On a aussi

$$R(X) \cap R(U) = \{0\}\,,$$

et X et Y_2 sont des matrices de types $m \times (r-k)$ et $(r-k) \times n$ de rang $r-k$. Des arguments similaires sont appliqués à UV_2. Appliquons le lemme 3.2.1, on a

$$r(N) = r(XY_2) + r(UV_2) = r(X) + r(U).$$

Comme $R(X) \cap R(C) = \{0\}$ et $R(U) \cap R(C) = \{0\}$, on a $R(M) \cap R(N) = \{0\}$. Appliquons encore le lemme 3.2.1, on a $r(M+N) = r(M)+r(N)$. Appliquons le lemme 3.2.2 à M et N, il existe deux matrices inversibles P et Q d'ordres m et n, telles que $PMQ = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où M_1 est une matrice carrée d'ordre k, avec $k = r(M)$. $PNQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}$, avec N_1 une matrice de type $(m-k) \times (n-k)$. Du théorème 3.2.1, il existe M_0 et N_0 des $\{1\}$ −inverses de M et N tels que

$$(A+B)_0 = (M+N)_0 = M_0 + N_0.$$

ii) Si $r(A) < r(B)$,alors, en mettant

$$A = \begin{bmatrix} C & ,X & ,0_{m\times(s-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ 0_{(s-r)\times n} \end{bmatrix},$$

on a

$$A + B = C(Y_1 + V_1) + ((XY_2 + 0) + UV_2).$$

Pour avoir un $\{1\}$ −inverse de $A+B$, nous prenons

$$M = C(Y_1 + V_1),\ N = (XY_2 + 0) + UV_2.$$

Exemple 3.2.1 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors, nous prenons

1)

$$\begin{bmatrix} C, & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

et, la factorisation préservant le rang de A:

$$A = \begin{bmatrix} C, & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2)

$$\begin{bmatrix} C, & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et la factorisation préservant le rang de B:

$$B = \begin{bmatrix} C, & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$M = C(Y_1 + V_1) \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$N = (XY_2 + UV_2) \Rightarrow N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Réduisons M *à la forme* $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *alors,*

$$\Delta^{-1} M \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta^{-1} N \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons $R(M) \cap R(N) = \{0\}$, $R(M^t) \cap R(N^t) = \{0\}$. *Posons* N *sous la forme:*

$$N = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1, & V_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme la base colonne est $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, *alors,*

$$N = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$U_1 = (2)\,, U_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}, U_1 = RU_2 \Rightarrow R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

et

$$V_1 = (1)\,, V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, V_1 = V_2 S \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors, nous avons:

$$P = \begin{pmatrix} I_1 & -R \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -S & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$P\Delta^{-1}N\Lambda Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P\Delta^{-1}M\Lambda Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Du calcul de $(P\Delta^{-1}M\Lambda Q)_0$ *et* $(P\Delta^{-1}N\Lambda Q)_0$, $\{1,2\}$ *−inverses de* $P\Delta^{-1}M\Lambda Q$ *et* $P\Delta^{-1}N\Lambda Q$,

nous avons:

$$\left((\Delta^{-1}M\Lambda)\right)_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ *avec* $Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *alors, si nous prenons* $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

comme un $\{1,2\}$ *−inverse de* Y, *nous avons*

$$\left(P\Delta^{-1}N\Lambda Q\right)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\left(P\Delta^{-1}M\Lambda Q\right)_0 + \left(P\Delta^{-1}N\Lambda Q\right)_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est un $\{1,2\}$ *−inverse de* $P\Delta^{-1}(A+B)\Lambda Q$.

3.2.3 Quand $(A+B)^+ = A^+ + B^+$?

Lemme 3.2.3 *Étant donné deux matrices* A *et* B *de type* $m \times n$, *telles que* $A^*B = 0$ *et* $BA^* = 0$. *Alors,* $(A+B)^+ = A^+ + B^+$.

Preuve. Du lemme 2.2.2, on a

$$A^+B = (A^*A)^+ A^*B = 0, BA^+ = BA^*(AA^*)^+ = 0.$$

Ainsi, $(A^+ + B^+)$ vérifie les quatre équations de l'inverse de Moore-Penrose de $A+B$. ■

En fait, si les espaces considérés sont euclidiens, la condition précédente est équivalente à $R(A) \perp R(B)$ et $R(A^*) \perp R(B^*)$, ce qui implique la condition d'additivité des rangs . Maintenant, si nous avons cette condition, quand $(A+B)^+ = A^+ + B^+$?

À partir des théorèmes précédents, il suffit de prendre

$$A^+ = Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P,\ B^+ = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y^+ \end{pmatrix} P.$$

telles que P et Q sont des matrices unitaires (orthogonales). Ainsi, par une vérification directe dans les quatre équations de la définition de Moore-Penrose, on trouve le résultat demandé. Notons que si P et Q sont définis comme dans le lemme 3.2.2, puis, cette condition implique que $P = I_m$ et $Q = I_n$. Par conséquent, A et B sont des matrices en blocs de la forme $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$, avec $R(X) \cap R(Y) = \{0\}$ et $R(X^*) \cap R(Y^*) = \{0\}$.

3.2.4 La forme générale de $(A+B)^+$ quand $r(A+B) = r(A) + r(B)$

Considérons deux matrices A et B de type $m \times n$ telles que $r(A+B) = r(A) + r(B)$. Du lemme 3.2.2, $(A+B)^+$ est un $\{1\}$ $-$inverse de A et B. D'où, il existe U_A et V_A, telles que

$$(A+B)^+ = A^+ + \left(I_n - A^+A\right)U_A + V_A\left(I_m - AA^+\right),$$

et

$$A\,(A+B)^+\,B = 0,\ B\,(A+B)^+\,A = 0.$$

Ainsi, on a

$$A\left(A^+ + \left(I_n - A^+A\right)U_A + V_A\left(I_m - AA^+\right)\right)B = 0,$$

et

$$B\left(A^+ + \left(I_n - A^+A\right)U_A + V_A\left(I_m - AA^+\right)\right)A = 0,$$

ce qui implique que

$$-AV_A\left(I_m - AA^+\right)B = AA^+B\ ,\ -B\left(I_n - A^+A\right)U_AA = BA^+A.$$

Ces deux dernières équations sont des équations matricielles de la forme $AXB = C$, d'où, il existe deux matrices V et U de type $n \times m$ telles que

$$\begin{aligned} V_A &= V - \left[A^+B - A^+AV\left(I_m - AA^+\right)B\right]\left(\left(I_m - AA^+\right)B\right)^+, \\ U_A &= U - \left(B\left(I_n - A^+A\right)\right)^+\left[BA^+ - B\left(I_n - A^+A\right)UAA^+\right]. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (A+B)^+ &= A^+ + \left(I_n - A^+A\right)U + V\left(I_m - AA^+\right) \\ &\quad - \left(I_n - A^+A\right)\left(B\left(I_n - A^+A\right)\right)^+\left[BA^+ - B\left(I_n - A^+A\right)UAA^+\right] \\ &\quad - \left[A^+B - A^+AV\left(I_m - AA^+\right)B\right]\left(\left(I_m - AA^+\right)B\right)^+\left(I_m - AA^+\right). \end{aligned}$$

3.3 Sur les inverses généralisés du produit de deux matrices

Les projecteurs sont les outils les plus répandus dans le concept des inverses généralisés des matrices partitionnées et des matrices bordantes. Ici, nous allons utiliser deux méthodes différentes basées sur ces concepts pour calculer un inverse généralisé du produit de matrices. Comme la propriété de loi d'ordre inverse est largement étudiée, elle trouvera sa place dans ce qui suit. De plus, nous allons étudier l'invariance de cette propriété en vertu des inverses généralisés.

3.3.1 Méthode de la matrice partitionnée

Étant donné deux matrices A et B telles que le produit est défini. Sans restreindre de généralité, on peut supposer que B est sous la forme

$$B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'idée de cette méthode est de décomposer la matrice A par blocs conformément à B, comme suit:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

L'étude suivante donnera les conditions équivalentes pour que la loi d'ordre inverse soit établie.

Proposition 3.3.1 *Soient A et B deux matrices définies comme dans le paragraphe* ***3.3.1****, alors,*

$\begin{pmatrix} (A_{11})_0 & (A_{21})_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est un* $\{1,2\}$ *−inverse de* AB *si et seulement si*

$$A_{11}\left(A_{21}\right)_0 A_{21}=0,\ A_{21}\left(A_{11}\right)_0 A_{11}=0. \tag{3.6}$$

et

$$\left(A_{11}\right)_0 A_{11}\left(A_{21}\right)_0=0.\left(A_{21}\right)_0 A_{21}\left(A_{11}\right)_0=0 \tag{3.7}$$

pour certains $\left(A_{11}\right)_0$ *et* $\left(A_{21}\right)_0$ *des* $\{1,2\}$ *−inverses de* A_{11} *et* A_{21}.

Preuve. Soient $\left(A_{11}\right)_0, \left(A_{21}\right)_0$ deux $\{1,2\}$ −inverses de A_{11} et A_{21} respectivement.

Alors,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (A_{11})_0 & (A_{21})_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}+A_{11}\left(A_{21}\right)_0 A_{21} & 0 \\ A_{21}+A_{21}\left(A_{11}\right)_0 A_{11} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

si et seulement si,

$$A_{11}\left(A_{21}\right)_0 A_{21}=0 \text{ et } A_{21}\left(A_{11}\right)_0 A_{11}=0,$$

et

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} (A_{11})_0 & (A_{21})_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (A_{11})_0 & (A_{21})_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} (A_{11})_0+(A_{21})_0 A_{21}(A_{11})_0 & (A_{21})_0+(A_{11})_0 A_{11}(A_{21})_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} (A_{11})_0 & (A_{21})_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{si et seulement si,} \end{aligned}$$

$\left(A_{11}\right)_0 A_{11}\left(A_{21}\right)_0=0$ et $\left(A_{21}\right)_0 A_{21}\left(A_{11}\right)_0=0.$ ■

Remarque 3.3.1 *Si* $\left(A_{11}\right)_0$ *et* $\left(A_{21}\right)_0$ *sont des* $\{1\}$ *−inverses seulement, la condition (3.6) est suffisante pour que* $\begin{pmatrix} (A_{11})_0 & (A_{21})_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *soit un* $\{1\}$ *−inverse de* AB.

Alternativement, regardons à la matrice partitionnée A comme une matrice bordante, l'inverse généralisé de cette dernière, nous permet d'avoir quelques conditions pour la loi d'ordre inverse pour le produit de deux matrices. A l'aide du théorème de Cochran (Rank additivity), l'inverse généralisé de la matrice bordante a été utilisée dans la plupart des travaux sur les inverses généralisés. En raison de la simplicité, on va utiliser le résultat de Bapat et Zheng ([2] Théorème 7):

Lemme 3.3.1 *Soit $A = (A_{i,j})$ une matrice en blocs de type $m \times n$ telle que $r(A) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} r(A_{i,j})$. Alors, une matrice $G = (G_{l,s})$ de type $n \times m$ est un $\{1\}-$inverse de A, si et seulement si,*

$$A_{i,j}G_{j,l}A_{l,s} = \begin{cases} A_{i,j} & (i,j) = (l,s) \\ 0 & (i,j) \neq (l,s) \end{cases} \tag{3.8}$$

Dans ce cas, on a:

$$A_0 = \begin{pmatrix} (A_{11})_0 & (A_{12})_0 \\ (A_{21})_0 & (A_{22})_0 \end{pmatrix}$$

est un $\{1,2\}-$inverse de A, si et seulement si, la condition (3.8) est satisfaite. Dans ce cas les conditions (3.6) et (3.7) ne sont qu'un cas particulier. Si on prend $B_0 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors,

$$B_0A_0 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A_{11})_0 & (A_{21})_0 \\ (A_{12})_0 & (A_{22})_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_{11})_0 & (A_{21})_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (AB)_0$$

est un $\{1,2\}-$inverse de AB.

Pour plus des détails sur ce lemme,voir [2] .

Dans le cas où la matrice B est quelconque, il suffit de la mettre sous la forme: $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors, il existe deux matrices inversibles P et Q, telles que

$$Q^{-1}BP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B_1.$$

Si on pose $Q^{-1}AP = A_1$, appliquons l'étude précédente à A_1 et B_1,on obtient:

$$(AB)_0 = \left(QA_1P^{-1}QB_1P^{-1}\right)_0 = P\left(B_1\right)_0 Q^{-1}P\left(A_1\right)_0 Q^{-1} = B_0A_0.$$

3.3.2 Méthode des projecteurs

L'idée est de décomposer un espace en somme directe de sous-espaces qui nous permet de calculer un inverse généralisé d'un produit sur chacun d'eux. Nous utiliserons la même notation pour désigner la matrice et son opérateur linéaire associé.

Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, A, B deux matrices de types $m \times n$ et $n \times\ k$ respectivement, et A_0 et B_0 leurs $\{1, 2\} -$ inverses telles que le diagramme suivant soit vérifié

$$E \xrightarrow{B} F \xrightarrow{A} G \xrightarrow{A_0} F \xrightarrow{B_0} E.$$

Appliquons le lemme 1.5.2 (pour $k = 1$) du chapitre 1, nous obtenons les décompositions de F suivantes:

$$F = R(B) \oplus N(B_0) = R(A_0) \oplus N(A). \tag{3.9}$$

Si $R(A_0) \subset N(B_0)$, alors $B_0A_0 = 0$. Supposons alors que, $R(A_0) \nsubseteqq N(B_0)$.

La proposition suivante donne la loi d'ordre inverse:

Proposition 3.3.2 *Avec les données précédentes, si* $R\left(A_0\right) \subseteq R\left(B\right)$ *ou* $R\left(B\right) \subseteq R\left(A_0\right)$, *alors* B_0A_0 *est un* $\{1, 2\}$ *−inverse de* AB.

Preuve. Supposons que $R(B) \subseteq R(A_0)$, il existe une matrice X telle que

$$B = A_0X,$$

d'où,

$$AB\left(B_0A_0\right)AB = ABB_0\left(A_0AA_0\right)X \;= ABB_0\left(A_0X\right) \;\;= ABB_0B = AB,$$

et

$$B_0A_0\left(AB\right)B_0A_0 = B_0\left(A_0AA_0\right)XB_0A_0 \;= B_0\left(A_0X\right)B_0A_0 = B_0BB_0A_0 = B_0A_0.$$

Maintenant, si $R(A_0) \subseteq R(B)$, il existe une matrice X telle que $A_0 = BX$, d'où,

$$AB\left(B_0A_0\right)AB = A\left(BB_0B\right)XAB \quad = A\left(BX\right)AB = \left(AA_0A\right)B \;= AB,$$

et

$$B_0A_0\left(AB\right)B_0A_0 = B_0A_0A\left(BB_0B\right)X = B_0A_0A\left(BX\right) \;= B_0\left(A_0AA_0\right) = B_0A_0,$$

ce qui montre que B_0A_0 est un $\{1,2\}-$ inverse de AB. ■

3.3.1 Forme Générale

La proposition suivante sert de présenter $(AB)_0$ sous la forme générale.

Proposition 3.3.3 *Avec les données de la sousection 3.3.2, si*

$$R\left(A_0\right)\cap R\left(B\right)\neq\{0\}\,, R\left(A_0\right)\cap N\left(B_0\right)\neq\{0\}\,, N\left(A\right)\cap R\left(B\right)\neq\{0\}\,.$$

Alors, il existe deux projecteurs $P_{(R(A_0))}$ *et* $P_{(R(B))}$ *sur* $R\left(A_0\right)$ *et* $R\left(B\right)$, *tels que* $B_0\left(P_{(R(A_0))}P_{(R(B))}\right)A_0$ *soit un* $\{1,2\}$ *−inverse de* AB.

Preuve. Étant donné trois matrices U, V, W telles que

$$R\left(A_0\right)\cap R\left(B\right) = R\left(U\right), R\left(A_0\right)\cap N\left(B_0\right) = R\left(V\right),\; N\left(A\right)\cap R\left(B\right) = R\left(W\right),$$

$$R\left(A_0\right) = R\left(U\right)\oplus R\left(V\right), R\left(B\right) = R\left(U\right)\oplus R\left(W\right).$$

Les décompositions (3.9) donnent

$$F = R(U) \oplus R(V) \oplus N(A) = R(U) \oplus R(W) \oplus N(B_0) \tag{3.10}$$

Posons

$$C = P_{(R(A_0))} P_{(R(B))},$$

produit de deux projecteurs, $P_{(R(A_0))}$ et $P_{(R(B))}$ sur $R(A_0)$ et $R(B)$ respectivement.

Nous allons prouver que B_0CA_0 est un $\{1,2\}-$ inverse de AB. Pour tout $x \in E$, on a $Bx \in R(B)$, d'où il existe $a \in R(U)$ et $b \in R(W)$ tels que $Bx = a + b$. Comme $b \in R(W) \subset N(A)$, alors $Ab = 0$. On en déduit,

$$ABx = Aa + Ab = Aa. \tag{3.11}$$

D'autre part, $a \in R(U) = R(A_0) \cap R(B)$ implique

$$A_0ABx = A_0Aa = a \text{ et } CA_0ABx = Ca = \left(P_{(R(A_0))} P_{(R(B))}\right) a = a.$$

Ainsi, on a $BB_0CA_0ABx = BB_0a = a$. Il en résulte que,

$$(AB)(B_0CA_0)(AB)x = Aa = ABx. \tag{3.12}$$

De l'équation (3.11) et de l'équation (3.12), on obtient $AB(B_0CA_0)AB = AB$. Maintenant, pour tout $x \in G$,on a $A_0x \in R(A_0)$, d'où , il existe $a \in R(U)$ et $b \in R(V)$ tels que $A_0x = a + b$. Multiplions à gauche par la matrice C, nous obtenons

$$CA_0x = Ca + Cb = P_{(R(A_0))} P_{(R(B))} a + P_{(R(A_0))} P_{(R(B))} b, \tag{3.13}$$

et du fait que

$$b \in R(V) \subset N(B_0), a \in R(U) = R(A_0) \cap R(B)$$

on a

$$P_{(R(A_0))}P_{(R(B))}b = P_{(R(A_0))}0 = 0, \text{ et } P_{(R(A_0))}P_{(R(B))}a = a$$

Remplaçons ces valeurs dans l'équation (3.13), nous obtenons

$$CA_0x = a,$$

d'où

$$B_0CA_0x = B_0a. \tag{3.14}$$

Raisonnons de la même manière, nous obtenons

$$(B_0CA_0)(AB)(B_0CA_0)x = B_0a.$$

De l'équation (3.14), nous avons

$$(B_0CA_0)(AB)(B_0CA_0) = B_0CA_0,$$

ce qui fait de B_0CA_0 un$\{1,2\}$ $-$inverse de AB. ■

3.4 L'invariance de la loi d'ordre inverse

Étant donné deux matrices A et B telles que le produit AB soit défini. On entend par la loi d'ordre inverse relative aux inverses généralisés d'un produit AB le fait que $(AB)^- = B^-A^-$ pour certains A^-, B^- et $(AB)^-$, inverses généralisés de A, B et AB, respectivement. Lorsque cette propriété est réalisée pour tous les A^- et les B^-, nous disons que l'ordre inverse est invariant. Rappelons que, pour toute matrice X, XX^+ et X^+X sont des projecteurs hermitiens sur $R(X)$ et $R(X^*) = R(X^+)$ respectivement. Dans cette section, nous allons utiliser les conditions équivalentes pour l'invariance de la matrice produit de la forme $CE^{-}D$ pour $E^{-} \in E^{\{1\}}$ afin de donner des conditions équivalentes pour les $B^{\{1\}}A^{\{1\}} \subset (AB)^{\{1\}}$ à tenir. La preuve sera basée sur le résultat suivant

Lemme 3.4.1 *Le produit $CE^{-}D$ est invariant sous le choix de E^{-} si et seulement si $R(D) \subset R(E)$ et $R(C^{*}) \subset R(E^{*})$.*

La preuve de ce lemme se trouve dans l'appendice.

Théorème 3.4.1 *Étant donné deux matrices A et B telles que le produit AB soit défini. Alors, on a les assertions suivantes:*

1) $ABB^{-}A^{+}AB$ est invariant sous le choix de B^{-} si et seulement si

$$R\left(A^{+}AB\right) \subset R(B).$$

2) $ABB^{+}A^{-}AB$ est invariant sous le choix de A^{-} si et seulement si

$$R\left(BB^{+}A^{*}\right) \subset R(A^{*}).$$

3) $B^{-}A^{-} \in (AB)^{\{1\}}$ pour tout $B^{-} \in (AB)^{\{1\}}$ et tout $A^{-} \in (A)^{\{1\}}$ si et seulement si

$$R\left(A^{+}AB\right) \subset R(B) \text{ et } R\left(BB^{+}A^{*}\right) \subset R(A^{*}).$$

Preuve. Il est évident de montrer que les assertions 1 et 2 sont vérifiées par le lemme précédent. Nous allons démontrer la troisième.

3) La nécessité: La première inclusion donne

$$BB^{+}A^{+}AB = A^{+}AB.$$

La multiplication à gauche par la matrice A donne

$$ABB^{+}A^{+}AB = AB.$$

De la première assertion, pour tout $B^{-} \in B^{\{1\}}$,

$$ABB^{-}A^{+}AB = ABB^{+}A^{+}AB = AB. \tag{3.15}$$

de la seconde inclusion, on a

$$A^{+}ABB^{+}A^{*} = BB^{+}A^{*}.$$

Prenons les adjoints des deux termes de l'égalité précédente, et multiplions à droite par B, nous obtenons

$$ABB^{+}A^{+}AB = ABB^{+}B = AB.$$

De la seconde assertion on a, pour tout $A^{-} \in A^{\{1\}}$,

$$ABB^{+}A^{-}AB = ABB^{+}A^{+}AB = AB. \tag{3.16}$$

de l'équation (3.15) et de l'équation (3.16), il s'en suit que, pour tout $B^{-} \in B^{\{1\}}$ et pour tout $A^{-} \in A^{\{1\}}$, on a

$$ABB^{-}A^{-}AB = AB. \tag{3.17}$$

ce qui montre que $B^{-}A^{-} \in (AB)^{\{1\}}$.

La suffisance: Si l'équation (3.17) est vérifiée pour tout $A^{-} \in A^{\{1\}}$ et tout $B^{-} \in B^{\{1\}}$, alors, comme $A^{+} \in A^{\{1\}}$ et $B^{+} \in B^{\{1\}}$, on a

$$ABB^{-}A^{+}AB = AB = ABB^{+}A^{-}AB.$$

C'est-à-dire que $ABB^{-}A^{+}AB$ est invariant sous le choix de B^{-}, et ainsi la première inclusion est vérifiée. Inversons les rôles de A et B, nous obtenons la seconde inclusion. ∎

3.5 Quand $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$

Rappelons que I. Erdelyi est le premier qui s'est intéressé à ce problème, dans ([6], théorème 3), il avait montré que $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$, si et seulement si,

$$\left(A^{+}ABB^{+}\right)^{*} = \left(A^{+}ABB^{+}\right)^{+}, \ \left(ABB^{+}A^{+}\right)^{*} = ABB^{+}A^{+} \text{ et } \left(B^{+}A^{+}AB\right)^{*} = B^{+}A^{+}AB.$$

(c. à. d. $A^{+}ABB^{+}$ est une isométrie partielle et que $ABB^{+}A^{+}$ et $B^{+}A^{+}AB$ sont Hermitiens). Dans [9] T. N. E. Greville a démontré que $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$, si et seulement si, $R(A^{*}AB) \subset R(B)$ et $R(BB^{*}A^{*}) \subset R(A^{*})$. Aussi, on a démontré dans [3] que $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$, si et seulement si, $A^{*}ABB^{*}$ est gamme hermitienne. c. à. d. si $R\left((A^{*}ABB^{*})^{*}\right) = R\left(A^{*}ABB^{*}\right)$.

Revenons à nos conditions précédentes concernant l'invariance de l'ordre inverse, on peut remarquer que $B^{-}A^{-} \in (AB)^{\{1\}}$, si et seulement si, $R(A^{+}AB) \subset R(B)$ et $R(BB^{+}A^{*}) \subset R(A^{*})$. Notons que cette dernière proposition est le résultat de T. N. E. Greville lorsque A et B sont des isométries partielles. A savoir $A^{+} = A^{*}$ et $B^{+} = B^{*}$, et généralement les conditions de T. N. E. Greville ne donnent que l'ordre inverse de l'inverse de Moore-Penrose du produit de deux matrices. Il est à souligner que selon nos conditions, nous avons toujours l'ordre inverse, le produit $B^{+}A^{+}$ peut ne pas être égal à $(AB)^{+}$. L'exemple suivant illustre le mauvais conditionnement entre eux.

Exemple 3.5.1 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$A^{*}AB=\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix},A^{+}=A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix},A^{+}AB=B,$$

$$BB^{*}A^{*}=\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix},B^{+}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},BB^{+}A^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}.$$

Ces calculs montrent que

$$R\left(A^{+}AB\right)=R\left(B\right),\ R\left(BB^{+}A^{*}\right)\subset R\left(A^{*}\right).$$

Par suite, $B^{-}A^{-1}\in(AB)^{\{1\}}$ *pour tous* $B^{-}\in B^{\{1\}}$. *En particulier,*

$$\begin{pmatrix}0&0\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}=B^{+}A^{-1}\in(AB)^{\{1\}},$$

tandis que,

$$(AB)^{+}=\begin{pmatrix}0&0\\\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}\neq B^{+}A^{-1}.$$

Nous concluons qu'au moins l'une des conditions de T. N. E. Greville n'est pas satisfaite.

Nous allons l'examiner: Du calcul précédent, nous avons

$$R\left(A^{*}AB\right)=vect\left\{(2,3)\right\}\nsubseteq vect\left\{(1,1)\right\}=R\left(B\right).$$

3.5.1 Quelques applications

1) Soit A une matrice de type $m\times n$. Comme $R\left(AA^{*}A\right)\subseteq R\left(A\right)$, alors les conditions de T. N. E. Greville donnent $\left(A^{*}A\right)^{+}=A^{+}\left(A^{*}\right)^{+}=A^{+}\left(A^{+}\right)^{*}$.

2) Soit A une matrice carrée. D'après nos conditions, l'égalité

$$\left(A^{-}\right)^{k}=\left(A^{k}\right)^{-},\forall A^{-}\in A^{\{1\}}$$

est vraie si et seulement si $R(A^{+}A^{2}) \subset R(A)$. En particulier, $(A^{+})^{k} = \left(A^{k}\right)^{+}$ si et seulement si $R(A^{*}A^{2}) \subset R(A)$. Rappelons que si $R(A^{*}A^{2}) = R(A)$, alors , $R(A^{*}) = R(A)$, ce qui implique $A^{+} = A^{\#}$ comme nous l'avons démontré dans le chapitre précédent.

3) Soit $B = PAQ = (PA)\,Q$ telle que P et Q sont inversibles. Comme

$$R\left(P^{-1}PA\right) = R(A)$$

et

$$R\left(AA^{+}P^{*}\right) \subset R(I) = R(P^{*}),$$

appliquons nos conditions consécutivement, nous obtenons $(PA)^{+} = A^{+}P^{-1}$,d'où,

$$R\left((PA)^{+}PAQ\right) = R\left(A^{+}P^{-1}PAQ\right) = R\left(A^{+}AQ\right) \subset R(I) = R(Q),$$

et

$$R\left(QQ^{-1}A^{*}P^{*}\right) = R(A^{*}P^{*}) \subset R(A^{*}).$$

Par conséquent, pour tout $A^{-} \in A^{\{1\}}$, il existe $B^{-} \in B^{\{1\}}$ telle que

$$B^{-} = Q^{-1}A^{-}P^{-1}.$$

En particulier, si P et Q sont unitaires, on a $B^{+} = Q^{*}A^{+}P^{*}$.

Chapter 4
Quelques structures algébriques sur $A^{\{1\}}$

4.1 Introduction

Nous avons déjà vu une structure de groupe cyclique relatif au groupe inverse (Chapitre 2). Le but du chapitre présent est d'établir des structures possibles relatives à $\{1\}$-inverse d'une matrice. L'étude a été divisée en trois sections. Dans la première, nous allons donner une structure de semi- groupe pour l'ensemble des inverses généralisés d'une matrice A et étudier des propriétés algébriques, comme la décomposition et la commutativité. Nous allons également définir une relation d'équivalence en vue d'établir un isomorphisme entre le quotient de ce semi- groupe et le semi- groupe des projecteurs sur $R(A)$. Dans la deuxième section, nous allons étudier une relation entre semi- groupes associés aux matrices équivalentes et établir une correspondance entre l'ensemble des matrices et l'ensemble des semi-groupes associés. Nous allons également étudier certaines propriétés algébriques dans cet ensemble; comme l'intersection et l'ordre partiel. La troisième section est indépendante dans le contexte, mais aussi sur les structures algébriques dans l'ensemble des inverses généralisés. La forme des éléments dans cet ensemble liée à un inverse généralisé donnée $(\{1\})$ (voir chapitre 2, définition 4), nous permet de définir la structure d'un espace affine et en déduire d'autres structures comme les espaces vectoriels et les algèbres.

On note $A^{\{1\}}$ l'ensemble des $\{1\}$ $-$inverses de A et par $A^{\{1,2\}}$ l'ensemble des $\{1,2\}$ $-$ inverses de la matrice A. Nous noterons par lettres minuscules les sous- matrices d'une matrice X et par I et 0 pour l'identité et la matrice nulle ou identité et zéro sous- matrices. Ce chapitre est un travail original, il a fait l'objet de la publication [21]

Nous avons vu dans le chapitre 1 que, si A est une matrice de type $m \times \ n$ de rang r, on peut la mettre sous la forme $\begin{pmatrix} a_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc A^+ est sous la forme $\begin{pmatrix} a_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les éléments de $A^{\{1\}}$ sont sous la forme $\begin{pmatrix} a_r^{-1} & e \\ f & g \end{pmatrix}$ et ceux de $A^{\{1,2\}}$ sont sous la forme $\begin{pmatrix} a_r^{-1} & e \\ f & fa_re \end{pmatrix}$.

4.2 Structure d'un semi-groupe sur $A^{\{1\}}$

4.2.1 Factorisation et commutativité

Le point principal dans le théorème ci-dessous est la factorisation de $A^{\{1,2\}}$. Pour cela, nous introduisons deux classes ci-dessous:

$$P_{A^+A} = \left\{ X \in A^{\{1\}},\ X = \begin{pmatrix} a_r^{-1} & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } P_{AA^+} = \left\{ X \in A^{\{1\}},\ X = \begin{pmatrix} a_r^{-1} & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Les symboles P_{A^+A} et P_{AA^+} sont justifiés par le fait que ces deux classes sont les ensembles de points fixes en vertu des multiplications à droite et à gauche par des projecteurs orthogonaux A^+A et AA^+ respectivement.

En effet; pour tout $X \in A^{\{1\}}$, on a $A^+AX = X$ et $XAA^+ = X$.

Théorème 4.2.1 *On munit $A^{\{1\}}$ d'une loi de composition interne $*$ définie par: Pour tous $X, Y \in A^{\{1\}}$, $X * Y = XAY$. Alors,*

1) $A^{\{1\}}$ est un semi-groupe.

2) Pour tous $X, Y \in A^{\{1\}}$, $X * Y \in A^{\{1,2\}}$.

3) $A^{\{1,2\}}$ *est un idéal de* $A^{\{1\}}$.

4) $P_{AA^+} * P_{A^+A} = A^{\{1,2\}}$ *et* $P_{AA^+} \cap P_{A^+A} = \{A^+\}$.

5) Pour tous $X, Y \in A^{\{1\}}$,$X * Y = Y * X \Leftrightarrow AX = AY, XA = YA$.

Preuve. 1) Pour tous $X, Y \in A^{\{1\}}$, on a

$$A\,(XAY)\,A = (AXA)\,YA = AYA = A.$$

D'où

$$X * Y = XAY \in A^{\{1\}}.$$

L'associativité de la loi $*$ est induite de l'associativité de la multiplication des matrices. Par suite $A^{\{1\}}$ est semi- groupe.

2) Pour tous $X, Y \in A^{\{1\}}$, comme

$$A\,(XAY)\,A = (AXA)\,YA = AYA = A,$$

et

$$(XAY)\,A\,(XAY) = X\,(AYA)\,XAY = X\,(AXA)\,Y = XAY,$$

alors,

$$X * Y = XAY \in A^{\{1,2\}}.$$

3) Le résultat 2 entraîne: pour tout $X \in A^{\{1\}}$et tout $Y \in A^{\{1,2\}}$,

$$X * Y = XAY \in A^{\{1,2\}} \text{ et } Y * X = YAX \in A^{\{1,2\}},$$

ce qui fait de $A^{\{1,2\}}$ un idéal de $A^{\{1\}}$.

4) Il faut remarquer d'abord que pour

$$X = \begin{pmatrix} a_r^{-1} & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} a_r^{-1} & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \in P_{AA^+},$$

on a

$$X * Y = \begin{pmatrix} a_r^{-1} & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r^{-1} & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r^{-1} & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \in P_{AA^+},$$

ce qui montre que P_{AA^+} est un sous- semi-groupe de $A^{\{1,2\}}$. De manière analogue, on obtient le même résultat pour P_{A^+A}. Par suite, $P_{AA^+} * P_{A^+A}$ est un sous-semi-groupe de $A^{\{1,2\}}$. D'autre part, pour tout

$$Z = \begin{pmatrix} a_r^{-1} & x \\ y & ya_rx \end{pmatrix} \in A^{\{1,2\}},$$

il existe

$$Y = \begin{pmatrix} a_r^{-1} & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \in P_{AA^+},\ X = \begin{pmatrix} a_r^{-1} & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P_{A^+A}$$

tels que $Z = Y * X$. Par conséquent,

$$P_{AA^+} * P_{A^+A} = A^{\{1,2\}}.$$

Toutefois, par un calcul direct, nous constatons que $P_{A^+A} * P_{AA^+} = \{A^+\}$.

En effet, pour

$$Z = \begin{pmatrix} a_r^{-1} & x \\ y & ya_rx \end{pmatrix} \in P_{AA^+} \cap P_{A^+A},$$

on a $x = 0$ et $y = 0$, d'où

$$Z = \begin{pmatrix} a_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^+.$$

Cette affirmation peut être interprétée comme l'unicité de la factorisation dans $A^{\{1,2\}}$.

5) Pour tous X , Y $\in A^{\{1\}}$, on a

$$XAY = YAX \Rightarrow AXAY = AYAX \Rightarrow AY = AX.$$

et

$$XAY = YAX \Rightarrow XAYA = YAXA \Rightarrow XA = YA.$$

Réciproquement

$$AY = AX \Rightarrow XAY = XAX \text{ , } YA = XA \Rightarrow YAX = XAX,$$

d'où $X * Y = Y * X \Leftrightarrow AX = AY, XA = YA.$ ■

Notons que nous n'avons pas vraiment la commutativité dans $A^{\{1\}}$, mais nous avons une sorte de commutativité conditionnée par l'égalité des projecteurs associés. Il est facile de prouver que l'ensemble des projecteurs d'un espace vectoriel sur un sous-espace est un semi-groupe pour la composition ordinaire. Comme de nombreuses études sur les projecteurs et leurs propriétés ont été faites, nous allons l'exploiter pour rendre les propriétés de $A^{\{1\}}$ plus accessibles.

Pour atteindre ce but, on va définir une relation d'équivalence dans $A^{\{1\}}$, donc nous obtenons un isomorphisme entre le semi-groupe quotient de $A^{\{1\}}$ et celui des projecteurs sur $R(A)$. Il ne causera pas de confusion si l'on utilise la même lettre pour désigner un projecteur et sa matrice associée.

Théorème 4.2.2 *Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ et Π un semi-groupe des projecteurs de $\mathbb{K}^m$ sur $R(A)$. Alors, nous avons*

1) Pour tout $P \in \Pi$, il existe $X \in A^{\{1\}}$, tel que $AX = P$.

2) Il existe une relation d'équivalence $\sim$ dans $A^{\{1\}}$, telle que, sous la loi quotient de $*$, $\frac{A^{\{1\}}}{\sim}$ soit un semi-groupe isomorphe à Π.

Preuve. 1) Soient Π l'ensemble des projecteurs sur $R(A)$, $P \in \Pi$, et $A^- \in A^{\{1\}}$.

On sait que AA^{-} est un projecteur sur $R(A)$, d'où,

$$AA^{-}P = P \text{ et } PA = A,$$

donc, il suffit de prendre

$$X = A^{-}P$$

afin d'avoir

$$AXA = AA^{-}PA = A.$$

Ce qui montre que

$$X \in A^{\{1\}} \text{ et } AX = AA^{-}P = P,$$

et que

$$\Pi = \left\{ AX \ / \ X \in A^{\{1\}} \right\}.$$

2) On désigne par $\sim$ une relation dans $A^{\{1\}}$, définie par

$$\forall X, Y \in A^{\{1\}}, X \sim Y \Leftrightarrow AX = AY.$$

Il est évident que $\sim$ est une relation d'équivalence dans $A^{\{1\}}$. Soit χ l'application canonique de $A^{\{1\}}$ sur $\frac{A^{\{1\}}}{\sim}$. Alors, pour tous $\chi(X), \chi(Y) \in \frac{A^{\{1\}}}{\sim}$, on définit la loi quotient de $*$ par:

$$\chi(X) . \chi(Y) = \chi(X * Y).$$

Donc, il est facile de vérifier que $\frac{A^{\{1\}}}{\sim}$ est un semi-groupe pour la loi induite, et que χ est un homomorphisme. Ce qui suit immédiatement l'existence d'une application ψ de $\frac{A^{\{1\}}}{\sim}$ sur Π, définie par

$$\psi(\chi(X)) = AX.$$

Maintenant, nous vérifions que ψ est un homomorphisme. Comme

$$A(XAY) = (AXA)Y = AY,$$

nous avons

$$XAY \sim Y,$$

d'où,

$$\chi(XAY) = \chi(Y),$$

et

$$\begin{aligned}\psi(\chi(X)\chi(Y)) &= \psi(\chi(X * Y)) = \psi(\chi(XAY)) = \psi(\chi(Y)) = AY = (AXA)Y \\ &= (AX)(AY) = \psi(\chi(X))\psi(\chi(Y)).\end{aligned}$$

Comme

$$AX = AY \Leftrightarrow \chi(X) = \chi(Y),$$

nous concluons que, pour tout $AX \in \Pi$, il existe un, et un seul $\chi(X) \in \frac{A^{\{1\}}}{\sim}$ tel que $\psi(\chi(X)) = AX$. ■

4.2.2 Régularité et $\pi-$régularité de $A^{\{1\}}$

Définition 4.2.1 *Soient S un semi-groupe et $x \in S$. x est dit régulier s'il existe $y \in S$ tel que $xyx = x$. De plus, si $yxy = y$, alors y est dit inverse (ou inverse relatif) de x. S est dit semi-groupe régulier, si tous ses éléments sont réguliers, et il est dit éventuellement régulier (ou $\pi-$régulier) si une puissance de chaque élément de S est régulière. S s'appelle semi-groupe inverse si chaque élément de S possède un unique inverse.*

Proposition 4.2.1 *$A^{\{1\}}$ est éventuellement régulier (ou $\pi-$régulier), et $A^{\{1,2\}}$ est un sous-semi-groupe régulier de $A^{\{1\}}$.*

Preuve. Remarquons d'abord que pour $X, Y, Z \in A^{\{1\}}$, on a

$$X * Y * Z = XAYAZ = XAZ = X * Z,$$

ce qui entraîne, pour $X, Y \in A^{\{1\}}$, on a

$$X * Y * X = X^2.$$

Par suite, pour $X, Y \in A^{\{1,2\}}$, on a

$$X * Y * X = X^2 = XAX = X,$$

ce qui montre que $A^{\{1,2\}}$ est un semi-groupe régulier.

Pour $X, Y \in A^{\{1\}}$, on a

$$X^2 * Y * X^2 = X^2 * X^2 = (XAX)\,A\,(XAX) = X\,(AXAXA)\,X = XAX = X^2,$$

d'où $A^{\{1\}}$ est éventuellement régulier (ou $\pi-$régulier). ■

4.2.3 Matrices équivalentes et semi-groupes asociés

Lemme 4.2.1 *soient A et B deux matrices équivalentes telles que $B = Q^{-1}AP$. Alors, pour tout $Y \in B^{\{1\}}$, il existe $X \in A^{\{1\}}$ unique, tel que $Y = P^{-1}XQ$.*

Preuve. Pour tout $Y \in B^{\{1\}}$,

$$A\left(PYQ^{-1}\right)A = QBP^{-1}PYQ^{-1}QBP^{-1} = QBYBP^{-1} = QBP^{-1} = A.$$

Nous avons donc $PYQ^{-1} \in A^{\{1\}}$. Puisque P et Q sont inversibles, il en résulte que pour tout $Y \in B^{\{1\}}$, il existe $X \in A^{\{1\}}$ unique, tel que $Y = P^{-1}XQ$. ■

Nous allons aussi noter $*$ la loi interne dans $B^{\{1\}}$ définie par:

$$\forall X, Y \in B^{\{1\}}, X * Y = XBY.$$

Théorème 4.2.3 *Étant donné deux matrices équivalentes A et B. Alors $\left(A^{\{1\}}, *\right)$ et $\left(B^{\{1\}}, *\right)$ sont isomorphes.*

Preuve. Utilisons le lemme précédent pour définir une bijection φ de $A^{\{1\}}$ sur $B^{\{1\}}$ par: $\varphi(X) = P^{-1}XQ$, où φ^{-1} est la bijection réciproque de $B^{\{1\}}$ sur $A^{\{1\}}$ donnée par: $\varphi^{-1}(X) = PXQ^{-1}$. De plus, pour $X, Y \in A^{\{1\}}$,

$$\begin{aligned} \varphi(X * Y) &= \varphi(XAY) = P^{-1}(XAY)Q = \left(P^{-1}XQ\right)\left(Q^{-1}AP\right)\left(P^{-1}YQ\right) \\ &= \varphi(X)B\varphi(Y) = \varphi(X) * \varphi(Y). \end{aligned}$$

De manière analogue, pour $X, Y \in B^{\{1\}}$,

$$\varphi^{-1}(X * Y) = \varphi^{-1}(XBY) = \varphi^{-1}(X)A\varphi^{-1}(Y) = \varphi^{-1}(X) * \varphi^{-1}(Y).$$

ce qui montre que φ est un isomorphisme. ■

Remarquons que $\varphi(A^{+}) = P^{-1}A^{+}Q = B^{+}$, si seulement si, P et Q sont orthogonales.

4.3 Relation entre $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ et l'ensemble des semi-groupes associés

Pour toute matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, on désigne par

$$M^{\{1\}}_{m\times n}(\mathbb{K}) = \left\{A^{\{1\}},\ \ A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})\right\},$$

l'ensemble des semi-groupes $A^{\{1\}}$. Dans cette partie, nous allons établir une relation entre $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ et $M^{\{1\}}_{m\times n}(\mathbb{K})$, et déduire quelques propriétés dans $M^{\{1\}}_{m\times n}(\mathbb{K})$ comme l'isomorphisme des semi-groupes, l'intersection et la relation d'ordre. Pour cette raison, nous allons appliquer le lemme 3.2.2.

Théorème 4.3.1 *Il existe une correspondance entre $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ et $M^{\{1\}}_{m\times n}(\mathbb{K})$ qui applique 0 à $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ et préserve les isomorphismes entre les semi-groupes.*

Preuve. Soit ψ une application de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ sur $M^{\{1\}}_{m\times n}(\mathbb{K})$ définie par:

$$\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), \psi(A) = A^{\{1\}}.$$

D'après le lemme 3.2.2, si $A^{\{1\}} = B^{\{1\}}$, on a

$$r(A) + r(B-A) = r(B) \text{ et } r(B) + r(A-B) = r(A).$$

Ainsi,

$$r(A-B) = 0 = r(B-A).$$

D'où $A = B$. Maintenant, si $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$, alors d'après le lemme 4.2.1 et le théorème 4.2.3, on a

$$B^{\{1\}} = \left\{P^{-1}XQ,\ X \in A^{\{1\}}\right\} = \varphi\left(A^{\{1\}}\right).$$

Ainsi, on a $\psi(B) = \varphi(\psi(A))$. ■

4.3.1 Intersection des semi-groupes

Théorème 4.3.2 *1) Pour toute matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, il existe $A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, telle que*

$$A^{\{1\}} \cap A'^{\{1\}} \neq \emptyset.$$

2) Pour toutes matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, il existe un isomorphisme φ de $A^{\{1\}}$ sur $\varphi\left(A^{\{1\}}\right)$, tel que

$$\varphi\left(A^{\{1\}}\right) \cap B^{\{1\}} \neq \emptyset.$$

Preuve. 1) On pose $r(A) = r \leq \min(m,\ n)$. Il suffit de prouver que pour $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ avec $r(A) = r$, il existe une matrice $A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, telle que

$$r(A + A') = r(A) + r(A') = \min(m,\ n),$$

ensuite appliquons le lemme 3.2.2, nous avons: tout $\{1\}-$inverse de $(A + A')$ est un $\{1\}-$inverse de A et A' à la fois. Par suite,

$$A^{\{1\}} \cap A'^{\{1\}} \neq \emptyset.$$

Prenons deux matrices inversibles P et Q, telles que

$$A = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P.$$

D'où, il suffit de prendre

$$A' = Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} P,\ w \in M_{(m-r)\times(n-r)}(\mathbb{K}),$$

avec

$$r(w) = (\min(m, n)) - r.$$

2) On pose $r(A) = r,\ r(B) = s$. D'après 1, il existe deux matrices $A', B' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ de rangs $\min(m,n) - r$, $\min(m,\ n) - s$, telles que

$$\begin{aligned} r(A + A') &= r(A) + r(A') = \min(m,\ n), \\ r(B + B') &= r(B) + r(B') = \min(m,\ n), \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$(A + A')^{\{1\}} \subset A^{\{1\}} \cap A'^{\{1\}}, (B + B')^{\{1\}} \subset B^{\{1\}} \cap B'^{\{1\}}.$$

Comme $A + A'$, $B + B'$ ont le même rang, alors elles sont équivalentes, d'où l'existence d'un isomorphisme φ de $A^{\{1\}}$ sur $\varphi\left(A^{\{1\}}\right)$, tel que

$$\varphi(A + A')^{\{1\}} = (B + B')^{\{1\}}.$$

Ainsi, on a

$$\varphi(A + A')^{\{1\}} \subset \varphi\left(A^{\{1\}} \cap A'^{\{1\}}\right) = \varphi\left(A^{\{1\}}\right) \cap \varphi\left(A'^{\{1\}}\right),$$

et

$$\varphi(A + A')^{\{1\}} \subset B^{\{1\}} \cap B'^{\{1\}}.$$

Finalement, on a $\varphi\left(A^{\{1\}}\right) \cap B^{\{1\}} \neq \emptyset$. ■

Remarque 4.3.1 *Une question naturelle se pose de savoir s'il est possible de conclure que, pour toutes les matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, nous avons*

$$A^{\{1\}} \cap B^{\{1\}} \neq \emptyset.$$

La réponse est négative, en effet, si on prend $B = \alpha A$ pour un scalaire α non nul et différent de 1, alors pour $X \in A^{\{1\}} \cap B^{\{1\}}$, on a

$$\alpha A = \alpha A X \alpha A = \alpha^2 A$$

entraîne $\alpha \in \{0, 1\}$ ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent

$$A^{\{1\}} \cap B^{\{1\}} = \emptyset.$$

4.3.2 Relation d'ordre partiel dans $M_{m\times n}^{\{1\}}(\mathbb{K})$

Définition 4.3.1 *La relation d'ordre partiel "moins" notée $\prec^-$ est définie comme suit.*

$$\textit{Pour } A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \textit{alors } A \prec^- B \textit{ si } r(B) = r(A)) + r(B - A).$$

Théorème 4.3.3 *1) L'inclusion est une relation d'ordre partiel dans $M_{m\times n}^{\{1\}}(\mathbb{K})$, induite par l'ordre partiel "moins" dans le sens inverse.*

2) Soit $m_0 = \min(m, n)$. Pour toute matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ de rang r, il existe une suite de matrices

$$A = A_r \prec^- A_{r+1} \prec^- .... \prec^- A_{m_0} \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),$$

telles que,

$$r(A_r) = r,\ r(A_{r+i}) = r + i \ \textit{pour}\ i = 1, ...m_0 - r.$$

Ainsi, il existe une suite $A_{m_0}^{\{1\}} \subset .... \subset A_r^{\{1\}} = A^{\{1\}}$ et $A_{m_0}^{\{1\}}$ est le dernier terme.

Preuve. 1) Soient $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, telles que $A \prec^- B$. Alors

$$r(B) = r(A) + r(B - A).$$

D'où $B^{\{1\}} \subset A^{\{1\}}$. Évidemment l'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre partiel dans $M_{m\times n}^{\{1\}}(\mathbb{K})$.

2) Soit φ l'isomorphisme des semi-groupes associés aux matrices équivalentes, alors

$$B^{\{1\}} \subset A^{\{1\}} \Rightarrow \varphi\left(B^{\{1\}}\right) \subset \varphi\left(A^{\{1\}}\right).$$

Soit $\{v_1, v_2, ...v_r\}$ une base de $R(A)$. On le complète par $\{v_{r+1}, v_{r+2}, ...v_m\}$ à une base de $\mathbb{K}^m$. Soit $\{e_1, e_2, ...e_r, ...e_n\}$ une base de $\mathbb{K}^n$, telle que

$$A_r e_j = A e_j = \begin{cases} v_j & \text{pour } j = 1, ...r \\ 0 & \text{pour } j = r+1, ...m \end{cases},$$

et pour $i = 1, ...m_0 - r$, on pose:

$$A_{r+i} e_j = \begin{cases} v_j & \text{pour } j = 1, ...r+i \\ 0 & \text{pour } j = r+i+1, ...m \end{cases}.$$

Dans ces bases, les matrices $A = A_r,\ A_{r+i}$ sont de la forme:

$$A = A_r = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P,\ A_{r+i} = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_{r+i} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P, \text{ pour } i = 1, ...m_0 - r.$$

D'où,

$$r(A_r) = r,\ r(A_{r+1}) = r(A_r) + 1 = r + 1 = r(A_r) + r(A_{r+1} - A_r)$$

et

$$r(A_{r+i+1}) = r + i + 1 = r(A_{r+i}) + r(A_{r+i+1} - A_{r+i}), \text{ pour } i = 1, ...m_0 - r - 1.$$

Ainsi

$$A = A_r \prec^- A_{r+1} \prec^- ..... \prec^- A_{m_0}.$$

Par 1, on a

$$A_{m_0}^{\{1\}} \subset .... \subset A_r^{\{1\}} = A^{\{1\}},$$

avec $A_{m_0}^{\{1\}}$ est le dernier terme, car A_{m_0} est de rang maximum. ■

4.4 Structure d'un espace affine et d'une algèbre

Étant donné une matrice A de type $m \times n$ de rang r. Comme $A^{\{1\}}$ a été exprimé par

$$A^{\{1\}} = \left\{A^{+} + U\left(I_m - AA^{+}\right) + \left(I_n - A^{+}A\right)V,\ \ U, V \in M_{n\times m}(\mathbb{K})\right\},$$

on va montrer que $A^{\{1\}}$ est un espace affine dirigé par

$$\overrightarrow{A^{\{1\}}} = \left\{U\left(I_m - AA^{+}\right) + \left(I_n - A^{+}A\right)V,\ \ U, V \in M_{n\times m}(\mathbb{K})\right\}.$$

On va d'abord montrer le lemme suivant:

Lemme 4.4.1 $\overrightarrow{A^{\{1\}}}$ *est un espace vectoriel de dimension* $m \times n - r^2$*sur* $\mathbb{K}$, *et indépendant du choix de* A^{+}.

Preuve. Puisque $\overrightarrow{A^{\{1\}}} \subset M_{n\times m}(\mathbb{K})$, il suffit de montrer que $\overrightarrow{A^{\{1\}}}$ et un sous espace vectoriel. On a pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$U\left(I_m - AA^{+}\right) + \left(I_n - A^{+}A\right)V, U'\left(I_m - AA^{+}\right) + \left(I_n - A^{+}A\right)V' \in \overrightarrow{A^{\{1\}}},$$

$$\begin{aligned} & \alpha\left(U\left(I_m - AA^{+}\right) + \left(I_n - A^{+}A\right)V\right) + \beta\left(U'\left(I_m - AA^{+}\right) + \left(I_n - A^{+}A\right)V'\right) \\ = \ & (\alpha U + \beta U')\left(I_m - AA^{+}\right) + \left(I_n - A^{+}A\right)(\alpha V + \beta V') \in \overrightarrow{A^{\{1\}}} \end{aligned}$$

du fait que

$$(\alpha U + \beta U'), (\alpha V + \beta V') \in M_{n\times m}(\mathbb{K}).$$

Mettons A sous la forme canonique, nous avons ainsi, tout élément de $\overrightarrow{A^{\{1\}}}$ est équivalent à la forme $\begin{pmatrix} 0 & e \\ f & g \end{pmatrix}$, où $e \in M_{r\times(m-r)}(\mathbb{K})$, $f \in M_{(n-r)\times r}(\mathbb{K})$, $g \in M_{(n-r)\times(m-r)}(\mathbb{K})$, alors,

$$\dim \overrightarrow{A^{\{1\}}} = n \times m - r^2.$$

Maintenant, si on choisit $A^- \in A^{\{1\}}$, il existe $U', V' \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, telles que

$$A^- = A^+ + U'\left(I_m - AA^+\right) + \left(I_n - A^+A\right)V'.$$

D'où, pour tous $U, V \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, il existe

$$W = U\left(I_m - AU'\right) \text{ et } W' = \left(I_n - V'A\right)V,$$

telles que

$$U\left(I_m - AA^-\right) + \left(I_n - A^-A\right)V = W\left(I_m - AA^+\right) + \left(I_n - A^+A\right)W',$$

ce qui implique que la forme des éléments de $\overrightarrow{A^{\{1\}}}$ est indépendante du choix de A^-. ■

Théorème 4.4.1 $A^{\{1\}}$ *est un espace affine de direction* $\overrightarrow{A^{\{1\}}}$.

Preuve. Pour tous $X, Y \in A^{\{1\}}$, il existe $U, V, U', V' \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, telles que

$$Y - X = \left(U' - U\right)\left(I_m - AA^+\right) + \left(I_n - A^+A\right)\left(V' - V\right) \in \overrightarrow{A^{\{1\}}}.$$

Ainsi, nous pouvons définir une application "$\longrightarrow$" par

$$\underset{(X,Y)\mapsto \overrightarrow{XY} = Y - X}{\longrightarrow : A^{\{1\}} \times A^{\{1\}} \to \overrightarrow{A^{\{1\}}}}.$$

Pour tous $X, Y \in A^{\{1\}}$, on a

$$\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = (Y - X) + (Z - Y) = Z - X = \overrightarrow{XZ},$$

et que

$$\left(Y - A^+\right) - \left(X - A^+\right) = Y - X$$

D'où

$$\overrightarrow{A^+X} = \overrightarrow{A^+Y} \Rightarrow X = Y.$$

Par conséquent, il existe ζ_{A^+} une bijection de $A^{\{1\}}$ sur $\overrightarrow{A^{\{1\}}}$. ■

Corollaire 4.4.1 *Les ensembles*

$A^{\{1,2\}} = \{A^+ + A^+AU(I_m - AA^+) + (I_n - A^+A)UAA^+, U \in M_{n\times m}(\mathbb{K})\}$,

$A^{\{1,3\}} = \{A^+ + (I_n - A^+A)U, U \in M_{n\times m}(\mathbb{K})\}$ *et*

$A^{\{1,4\}} = \{A^+ + V(I_m - AA^+), V \in M_{n\times m}(\mathbb{K})\}$ *sont des sous-espaces affines de* $A^{\{1\}}$.

En effet, il suffit de vérifier que les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels de $\overrightarrow{A^{\{1\}}}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A^{\{1,2\}}} &= \left\{A^+AU\left(I_m - AA^+\right) + \left(I_n - A^+A\right)UAA^+ \ , \ U \in M_{n\times m}(\mathbb{K})\right\}, \\
\overrightarrow{A^{\{1,3\}}} &= \left\{\left(I_n - A^+A\right)U \ , U \in M_{n\times m}(\mathbb{K})\right\} \\
\overrightarrow{A^{\{1,4\}}} &= \left\{V\left(I_m - AA^+\right) \ , \ V \in M_{n\times m}(\mathbb{K})\right\}
\end{aligned}$$

Par une vérification directe, nous pouvons voir que $\overrightarrow{A^{\{1\}}}$ est un sous anneau de $M_{n\times m}(\mathbb{K})$. Par conséquent, $\overrightarrow{A^{\{1\}}}$ est une algèbre. Si on prend A^+ comme origine, alors, $A^{\{1\}}$ est une algèbre sous l'addition $(\dot{+})$, la multiplication $(\bullet)$ et la multiplication par un scalaire $(\circ)$ définies par

$$\begin{aligned}
\forall\left(A^+ + t\right), \ \left(A^+ + s\right) &\in A^{\{1\}}, \ \left(A^+ + t\right) \dot{+} \left(A^+ + s\right) = A^+ + (t + s). \\
\forall\left(A^+ + t\right), \ \left(A^+ + s\right) &\in A^{\{1\}}, \ \left(A^+ + t\right) \bullet \left(A^+ + s\right) = A^+ + (ts). \\
\forall\left(A^+ + t\right) &\in A^{\{1,3\}}, \forall\lambda \in \mathbb{K}, \ \lambda \circ \left(A^+ + t\right) = A^+ + \lambda t.
\end{aligned}$$

Maintenant, si on prend la norme de Frobenius $\|A\|_F = (tr \ (A^*A))^{\frac{1}{2}}$, alors on peut avoir ainsi, une algèbre normée, telle que la norme est définie par:

$$\forall X \in A^{\{1\}}, \ \|X\| = \left\|X - A^+\right\|_F.$$

Pour tout $X = (A^{+} + t)\,,\ Y = (A^{+} + s) \in A^{\{1\}}$, on a

$$\|X \bullet Y\| = \left\|X \bullet Y - A^{+}\right\|_F = \|ts\|_F \preceq \|t\|_F \|s\|_F = \|X\| \|Y\|\,,$$

donc $\|.\|$ est une norme matricielle. Ainsi, $A^{\{1\}}$ est une algèbre de Banach.

Étant donné $L_{(I_n - A^+A)}$ et $R_{(I_m - AA^+)}$, la multiplication à gauche et la multiplication à droite dans $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ respectivement. Alors, pour tout $U \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} L_{(I_n-A^+A)}\left(L_{(I_n-A^+A)}U\right) &= \left(I_n - A^+A\right)^2 U = \left(I_n - A^+A\right)U = L_{(I_n-A^+A)}U, \\ R_{(I_m-AA^+)}\left(R_{(I_m-AA^+)}U\right) &= U\left(I_m - AA^+\right)^2 = U\left(I_m - AA^+\right) = R_{(I_m-AA^+)}U, \end{aligned}$$

ce qui montre que $L_{(I_n-A^+A)}$ et $R_{(I_m-AA^+)}$ sont des projecteurs, et que leurs images sont respectivement $\overrightarrow{A^{\{1,3\}}}$ et $\overrightarrow{A^{\{1,4\}}}$. Finalement, $A^{\{1,3\}}$ et $A^{\{1,4\}}$ sont des sous algèbres dans $A^{\{1\}}$ telles que $A^{\{1\}} = A^{\{1,3\}} \dot{+} A^{\{1,4\}}$. Remarquons que cette factorisation n'est pas unique, car $\overrightarrow{A^{\{1,3\}}} \cap \overrightarrow{A^{\{1,4\}}} \neq \{0\}$.

En effet, si on prend

$$A = \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^+A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ AA^+ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où, pour $U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & W \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 \\ V_{21} & W \end{pmatrix}$, avec $W \neq 0$, on a

$$\left(I_n - A^+A\right)U = V\left(I_m - AA^+\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \in \overrightarrow{A^{\{1,3\}}} \cap \overrightarrow{A^{\{1,4\}}}.$$

Conclusion *Dans le présent chapitre nous avons doté l'ensemble des* $\{1\}$ *−inverses d'une matrice, d'une structure d'un semi-groupe et décomposé ses éléments en facteurs réguliers. Malheureusement, ce n'est pas un semi-groupe commutatif. Pour obtenir un bon résultat structurel, nous avons défini une relation d'équivalence afin d'avoir un isomorphisme entre le semi-groupe quotient et celui des projecteurs. En outre, nous avons établi* *une correspondance bijective entre l'ensemble des matrices et celui des semi-groupes associés. Cette correspondance préserve les isomorphismes entre semi-groupes et applique la matrice nulle (ce qui est le zéro du groupe additif des matrices) sur l'espace des matrices (qui est l'unité liée à l'intersection des ensembles). Nous avons aussi prouvé que pour toute matrice, il existe une suite de semi-groupes ordonnés par l'inclusion. Le semi-groupe de* $\{1\}$ *$-$inverses d'une matrice est aussi une algèbre de Banach qui* contient des sous-algèbres de $\{1,3\}$ $-$inverses et $\{1,4\}$ $-$inverses d'une matrice.

Chapter 5
Appendice

Lemme 1.3.1 *Pour toute matrice A de type $m \times n$ de rang r, il existe une matrice inversible à gauche B et une matrice inversible à droite C, de rang r telles que $A = BC$. De plus, B^tB et CC^t sont inversibles. Alors, $A_0 = C^t\left(CC^t\right)^{-1}S\left(B^tB\right)^{-1}B^t$, où $S^k = I$, est un G^k-inverse de A.*

Preuve. Soit $\{B_1, ..., B_r\}$ une base de $R(A)$. Si on pose $B = [B_1, ..., B_r]$ une matrice colonne, alors B est une matrice de type $m \times r$ de rang r, et toute colonne de A est une combinaison linéaire des vecteurs $B_1, ..., B_r$. Par suite pour chaque colonne A_j de A, il existe $c_{ij} \in \mathbb{K}$, tels que $A_j = c_{1j}B_1 + ... + c_{rj}B_r$, d'où, il existe une matrice unique C constituée de c_{ij} qui est de type $r \times n$, telle que $A = BC$, et du fait que

$$\min(r, n) \geq r(C) \geq r(BC) = r(A) = r,$$

on déduit que $r(C) = r$.

Rappelons que pour toute matrice X, on a $N(X) = N(X^tX)$. D'où, $r(X^tX) = r(X)$ .En effet, si $Xx = 0$ pour un certain x, alors $X^tXx = 0$. Inversement, si $X^tXx = 0$, alors $x^tX^tXx = 0$,ce qui donne $Xx = 0$. Appliquons cela à B et C,on a, B^tB et CC^t sont des matrices carrées d'ordre r de rang r, donc inversibles.

Posons, $A_0 = C^t\left(CC^t\right)^{-1}S\left(B^tB\right)^{-1}B^t$, où $S^k = I$, nous obtenons:

$$\begin{aligned}(AA_0)^k A &= \underbrace{BCC^t\left(CC^t\right)^{-1}S\left(B^tB\right)^{-1}B^t...BCC^t\left(CC^t\right)^{-1}S\left(B^tB\right)^{-1}B^t}_{k \text{ facteurs}}BC \\ &= BS^kC = BC = A,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A_0 A)^k A_0 &= \underbrace{C^t \left(CC^t\right)^{-1} S \left(B^t B\right)^{-1} B^t BC ... }_{k \text{ facteurs}} C^t \left(CC^t\right)^{-1} S \left(B^t B\right)^{-1} B^t \\ &= C^t \left(CC^t\right)^{-1} S \left(B^t B\right)^{-1} B^t = A_0 \,.\end{aligned}$$

Ainsi A_0 est un G^k-inverse de A. Alternativement, si on prend un inverse à gauche B_l de B et un inverse à droite C_r de C, alors, une vérification immédiate montre que $A_0 = C_r S B_l$ est aussi un G^k-inverse de A. ■

lemme 1.5.3 *Étant donné un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, T un endomorphisme de E, et $g(t), h(t)$ deux polynômes premiers entre eux. Si $f(t)$le polynôme produit $f(t) = g(t)\,h(t)$vérifie $f(T) = 0$, alors,*

$$E = N\left(g\left(T\right)\right) \oplus N\left(h\left(T\right)\right).$$

Preuve. Comme $g(t)$ et $h(t)$ sont premiers entre eux, alors, il existe deux polynômes $r(t)$ et $s(t)$ tels que

$$r(t)\,g(t) + s(t)\,h(t) = 1.$$

Substituons par T, nous obtenons:

$$r(T)\,g(T) + s(T)\,h(T) = I, \tag{5.1}$$

d'où

$$\forall v \in E,\ v = r(T)\,g(T)\,v + s(T)\,h(T)\,v. \tag{5.2}$$

Du fait que pour tout polynôme $f(t)$, on a $tf(t) = f(t)\,t$, alors, $Tf(T) = f(T)\,T$. Ainsi,

$$\forall v \in E,\ h(T)\,r(T)\,g(T)\,v = r(T)\,g(T)\,h(T)\,v = r(T)\,f(T)\,v = 0,$$

ce qui entraîne $r(T)\, g(T)\, v \in \ker h(T)$. De la même manière, on a $s(T)\, h(T) \in \ker g(T)$. Par suite, la relation (5.2) montre que $E = \ker h(T) + \ker g(T)$. De la relation (5.1) on a:

$$\forall u \in \ker g(T), w \in \ker h(T),\ s(T)\, h(T)\, u = u,\ r(T)\, g(T)\, w = w.$$

Maintenant, si on écrit $v = u + w$, alors,

$$r(T)\, g(T)\, v = r(T)\, g(T)\, w = w$$

et

$$s(T)\, h(T)\, v = s(T)\, h(T)\, u = u,$$

ce qui entraîne l'unicité de la représentation de v. D'où, $E = \ker g(T) \oplus \ker h(T)$. ■

Lemme 2.4.1 *Soit $f \in \ell(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) f est d'indice p.

2) $\mathrm{Im}\, f^p = \mathrm{Im}\, f^{p+1}$.

3) $E = \ker f^p \oplus \mathrm{Im}\, f^p$.

Preuve. 1⇔2) f est d'indice $p \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f^{p+1} = \mathrm{Im}\, f^p \Leftrightarrow \dim \ker f^p = n - \dim \mathrm{Im}\, f^p = n - \dim \mathrm{Im}\, f^{p+1} = \dim \ker f^{p+1}$.

Comme $\ker f^p \subset \ker f^{p+1}$, nous avons $\ker f^p = \ker f^{p+1}$.

2⇔3) Pour la raison des dimensions, il suffit de montrer que $\ker f^p \cap \mathrm{Im}\, f^p = \{0\}$. Soit $x \in \ker f^p \cap \mathrm{Im}\, f^p$, alors, il existe $y \in E$, tel que $x = f^p(y)$ avec $x \in \ker f^p$, d'où,

$$0 = f^p(x) = f^{2p}(y) \Rightarrow y \in \ker f^{2p}.$$

Comme $\ker f^p = \ker f^{p+1}$, nous avons $\ker f^{2p} = \ker f^p$. ce qui fait $y \in \ker f^p$. Par conséquent, $x = f^p(y) = 0$. Réciproquement, comme $\ker f \subset \ker f^p$, alors, si

$$\ker f^p \cap \operatorname{Im} f^p = \{0\},$$

on a: pour $x \in \operatorname{Im} f^p$ tel que $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Par suite, la restriction de f à $\operatorname{Im} f^p$ est un automorphisme, d'où $\operatorname{Im} f^p = f(\operatorname{Im} f^p) = \operatorname{Im} f^{p+1}$. ■

Lemme 3.4.1 L*e produit CE^-D est invariant sous le choix de E^- si et seulement si $R(D) \subset R(E)$ et $R(C^*) \subset R(E^*)$.*

Preuve. Les inclusions dans le lemme nous permettent d'écrire:

$$C = ME \text{ et } D = EN$$

pour certaines matrices M et N. Alors, $CE^-D = MEE^-EN = MEN$ est indépendant de E^-.

Réciproquement, supposons que CE^-D est indépendant du choix de E^-, et que $R(D) \nsubseteq R(E)$, alors

$$D' = \left(I - EE^-\right) D \neq 0.$$

Soient $C = C_l C_r$ et $D' = P_l P_r$ deux factorisations qui préservent les rangs de C et D'.

Pour tout E^- g$-$inverse de E, on a $E^- + C_r^- P_l^- (I - EE^-) = E'^-$ est un autre g$-$inverse de E (voir chapitre 2). Multiplions E'^- à gauche par C et à droite par D, nous obtenons,

$$CE'^-D = CE^-D + C_l P_r \neq CE^-D$$

parce que $C_l P_r \neq 0,$ du fait que C_l est inversible à gauche et P_r est inversible à droite. Ainsi, nous obtenons une contradiction. Supposons que $R(C^*) \nsubseteq R(E^*)$. En raisonnant de la même manière précédente, nous obtenons une contradiction. ■

Bibliographie

[1] R. B. Bapat, *Linear Algebra and Linear Models,* Springer, (2000).

[2] R. B. Bapat and B. Zheng, *Generalized inverses of bordered matrices,* Electron. J. Lin. Algeb. **10** (2003), 16–30.

[3] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, *Generalized inverses, theory and applications*, Springer-Verlag NewYork, Inc, (2003).

[4] S. L. Campbell and C. D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations,* SIAM. **56** (2009).

[5] R. E. Cline, *Note on the generalized inverse of the product of matrices,* SIAM. **6** (1964), 57-58.

[6] I. Erdelyi, *On the "Reverse Order Law" Related to the Generalized Inverse of Matrix Products,* Olivetti-General Electric, Milano, Italy. Journal of the Association for Computing Machinery. **13** (1966), 493-443.

[7] J. A. Fill and D. E. Fishkind, *The Moore-Penrose Generalized Inverse for Sums of Matrices,* SIAM. **21** (1998), 629– 635.

[8] J.D. Fulton, *Generalized inverses of matrices over a finite field,* Discrete Math. **21** (1978), 23–29.

[9] T. N. E. Greville, *Note on the generalized inverse of a matrix product,* J. Soc. Indust. Appl. Math. **9** (1966), 109–115.

[10] J. Gros and Y. Tian, *Invariance properties of a triple matrix product involving generalized inverses,* Linear Algebra Appl. **417** (2006), 94–107.

[11] S.Guedjiba - R.Benacer, *Inversion généralisée d'opérateurs linéaires*, Math. Maghreb Rev. vol **11** (2000).

[12] R.E. Kalman, *Algebraic aspects of the generalized inverse of a rectangular matrix,* in: M.Z. Nashed (Ed.), Generalized Inverses and Applications, Academic Press, New York (1976), 111–124.

[13] G. Marsaglia and G.P.H. Styan, *Equalities and inequalities for ranks of matrices*, Linear and Multilinear Algebra. **2** (1974), 269–292.

[14] M. Z. Nashed, *Generalized Inverses, Theory and Applications,* Academic Press, NY (1976).

[15] M. H. Pearl, *Generalized inverses of matrices with entries taken from an arbitrary field,* Linear Algebra Appl. **1** (1968), 571–587.

[16] R.Penrose, *A generalized inverse for matrices,* Proc.camb.Phil.Soc. **52** (1955).

[17] X. M. Ren, Y. Wang and K. P. Shum, *On finding the generalized inverse matrix of the product of matrices,* PU.M.A. **16** (2005), 191-197.

[18] Y. Tian, S. Cheng, *The maximal and minimal ranks of A - BXC with applications,* New York J. Math. **9** (2003), 345–362.

[19] Zhiping Xiong and Bing Zheng, *The reverse order laws for {1, 2, 3}- and {1, 2, 4}−inverses of a two-matrix product*, Appl. Math. Lett. **21** (2008), 649–655.

[20] H. Zekraoui and S. Guedjiba, *On algebraic properties of generalized inverses of matrices, International Journal of Algebra*. **2** (2008), 633 - 643.

[21] H. Zekraoui and S. Guedjiba, *Semi-group of generalized inverses of a matrix, Applied Sciences*. **12** (2010), 146-152.

Résumé

Un *inverse généralisé* d'une matrice A est une matrice X, sensée de satisfaire:

(i) X est définie pour une classe contenant les matrices non singulières

(ii) X est l'inverse usuel de A lorsque A est non singulière.

(iii) X possède quelques propriétés de l'inverse usuel.

La racine génétique du concept des inverses généralisés apparaît essentiellement dans le contexte de l'ainsi nommé les problèmes linéaires "mal- posé". Toutefois, il semble que cette terminologie a été premièrement mentionnée dans un manuscrit en 1903, attribué à Fredholm, où un inverse particulier généralisé, prénommé aussi "le Pseudo- inverse", d'un opérateur intégral a été donné. Depuis ce temps, ce concept a crû considérablement et devint un domaine actif de la recherche. Le but de la présente thèse est l'étude de quelques propriétés algébriques des inverses généralisés des matrices finies sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) comme la somme, le produit, la loi d'ordre inverse, l'invariance de la loi d'ordre inverse, l'invariance de la forme de Jordan, la puissance d'un inverse généralisé, .. etc. En particulier, nous définissons quelques structures algébriques sur la classe des inverses généralisés d'une matrice, comme les semi- groupes, et l'espace affine, ce qui permet d'obtenir certaines propriétés telles que l'isomorphisme des semi- groupes, la commutativité, la décomposition en facteurs, relation d'ordre...

Mots clé: Matrice, inverse généralisé, projecteur, somme, produit.

Clasification MSC [2010]: 15A09, 15A03, 15A23, 15A24, 15A04, 15A21.