République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université du colonel El Hahdj-Lakhdhar-Batna-
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire des Techniques de Mathématiques

École Doctorale de Mathématiques -Pôle de Constantine-

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**

OPTION : **Mathématiques Appliquées**

Thème :

Contrôlabilité des systèmes linéaires de dimension infinie

Présenté par :

Belkacem Keltoum

Devant le jury composé de :

Mr R. Bennacer	**Professeur**	**Univ-Batna**	**Président**
Mr S. E. Rebiai	**Professeur**	**Univ-Batna**	**Rapporteur**
Mr A. Ayadi	**Professeur**	**Univ-O-Elboughi**	**Examinateur**
Mr A. Youkana	**Maitre de conférence**	**Univ-Batna**	**Examinateur**

Remerciements

Je remercie avant tout Allah, le tout puissant de m'avoir aidé pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements et présenter mon plus profond respect à mon encadreur : Monsieur S. E. Rebiai, Professeur à l'université de Batna, de m'avoir proposé le sujet de ce mémoire et en me faisant profiter de ses conseils judicieux et son savoir faire.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur R. Bennacer, Professeur à l'université de Batna pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de mon mémoire. Des remerciements vont de même aux membres de jury examinateurs qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire, il s'agit, en l'occurrence de :

Pr A. Ayadi	Professeur à l'université d'Oum Elboughi
Dr A. Youkana	Maitre de Conférence à l'université de Batna

Je tiens également à remercier ma famille, toutes les personnes qui m'ont enseignées et toutes les personnes qui m'ont aidées durant ma formation.

Table des matières

Résumé

L'objectif de ce mémoire est l'étude de la contrôlabilité des systèmes linéaires de dimension infinie.
Premièrement, on considère les systèmes avec contrôle distribué. On définit quelques concepts de contrôlabilité et on les caractérise en termes des opérateurs décrivant le système.
Ensuite, on adopte la méthode de pénalisation (Lions [12]), pour déterminer le contrôle optimal qui ramène à l'origine l'état d'une classe des systèmes décrits par un C_0-Groupe.
Enfin, on étudie quelque problème de contrôlabilité pour les systèmes de contrôle frontière en utilisant les résultats obtenus précédemment.

Mots clés : système de dimension infinie, contrôlabilité, contrôle optimal, méthode de pénalisation, contrôle frontière.

Introduction

L'objectif de ce mémoire est l'étude de la contrôlabilité d'un système linéaire de dimension infinie.

La notion de la contrôlabilité est d'une grande importance dans la théorie du contrôle ; c'est une propriété de base dans l'analyse des systèmes dynamiques. De nombreux problèmes fondamentaux de la théorie du contrôle (stabilité et stabilisation, contrôle optimal) ne peuvent être résolus que sous l'hypothèse que le système soit contrôlable. Il s'agit d'imposer à un système un comportement souhaité par exemple dans notre cas amener un système d'un certain état initial à une sortie désirée en respectant éventuellement certains critères.

Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'un contrôle ou d'une commande.

Un modèle simple englobant une large classe des systèmes de contrôle linéaire est décrit par :

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt}(t) = Az(t) + Bu(t) & t \in]0, T[\\ z(0) = z^0 \in \mathbb{Z} & \\ y(t) = Cz(t) & t \in]0, T[\end{cases} \tag{I}$$

où :

$A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, A est un opérateur linéaire, fermé, de domaine dense dans $\mathbb{Z}$ et engendrant un C_0-Semi groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}$. A fournit le dynamique du système.

$B : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{Z}$, B est un opérateur linéaire borné. B excite le système pour modifier l'état (chercher un état convenable).

$C : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Y}$, C est un opérateur linéaire borné. C récupère les informations d'observation.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{Y}$ sont des espaces de Hilbert munis des produits scalaires et des normes notés par :
$\langle .,. \rangle_{\mathbb{Z}}$, $\langle .,. \rangle_{\mathbb{U}}$, $\langle .,. \rangle_{\mathbb{Y}}$
et
$\|.\|_{\mathbb{Z}}$, $\|.\|_{\mathbb{U}}$, $\|.\|_{\mathbb{Y}}$ respectivement.
$\mathbb{Z}$ désigne l'espace d'état du système (I), $\mathbb{U}$ l'espace de contrôle et $\mathbb{Y}$ est l'espace d'observation.

La fonction $z(.) \in \mathbb{Z}$ est dite l'état du système (I), $u(.) \in \mathbb{U}$ est le contrôle (l'entrée) et la fonction $y(.) \in \mathbb{Y}$ représente la sortie du système (I).

Le problème de contrôlabilité du système (I) ou du triplet (A,B,C) est un problème classique, sa présence dans divers domaines de recherches ne cesse de susciter l'intérêt des scientifiques.

Dans le cas où $\mathbb{Y} = \mathbb{Z}$, $C = Id_{\mathbb{Z}}$ (l'opérateur identique dans $\mathbb{Z}$) ce problème était l'objectif d'une vaste et riche littérature parue depuis les années 60 et d'un sujet qui a tenu l'attention des plusieurs auteurs comme : Fattorini [6], Curtain et Pritchard [3], Lions [11] , Lasiecka et Triggiani [9], Bensoussan et al [1], Curtain et Zwart [4], Weiss et Tucsnak [18].

Dans le cas où C est quelconque des études ont été faites par :

Triggiani [17] a considéré le système (I) dans deux cas (autonome et non autonome) avec $\mathbb{Z}$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{Y}$ des espaces de Banach séparables et sous l'hypothèse de base que l'opérateur agissant sur l'état soit borné. Il a caractérisé les notions de contrôlabilité (d'état et de sortie) et d'observabilité du système (I) en terme des coefficients du système et le théorème de catégorie de Baire. Il a également fourni une relation entre la contrôlabilité du triplet (A,B,C) et du couple (A,B).

Germani et Monaco [8] ont étudié la notion de ϵ-contrôlabilité fonctionnelle du système (I). Pour arriver à leur but les auteurs ont supposé dans un premier temps que l'espace $\mathbb{Y}$ est de dimension finie et ont montré que le système admet cette propriété sous certaines conditions, puis ils ont étendu le résultat obtenu au cas général.

Lions [12] a caractérisé le contrôle optimal qui ramène l'état du système (I) à un sous espace fermé de $\mathbb{Z}$, en adoptant l'approche de pénalisation.

El Jai et Pritchard [5] ont traité le problème de contrôlabilité du système (I) dans le cas où $C = \chi_\omega$ (opérateur restriction sur ω), avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et ω un sous ensemble non vide de Ω.

Chen et Lasiecka [2] ont caractérisé le contrôle optimal qui minimise la fonctionnelle :

$$J(u, z) = \frac{1}{2} \int_0^T [|u(t)|^2_{\mathbb{U}} + |Rz(t)|^2_{\mathbb{Z}}]dt$$

où R est un opérateur linéaire borné de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{H}$ (espace de Hilbert donné) et sous l'hypothèse que $Cz(t) = 0$ via l'équation différentielle de Riccati.

M. Sirbu [16] a considéré le système (I), il a étudié la relation entre la contrôlabilité exacte nulle du couple (A,B) et les propriétés de l'équation de Riccati associée au problème de minimisation suivant :

$$\min\{\int_0^T \|u(t)\|^2_{\mathbb{U}}\ dt, u \in L^2(0, T; \mathbb{U}), \frac{dz}{dt}(t) = Az(t) + Bu(t), z(T) = 0\}$$

E. Zerrik et al [19] ont considéré une classe particulière de système de dimension infinie à savoir les systèmes paraboliques. Ils ont caractérisé le contrôle optimal qui ramène l'état de ce système à une région limitée par deux fonctions $\alpha(.)$ et $\beta(.)$ (deux fonctions réelles tel que : $\alpha(.) \leq \beta(.)$) en employant deux approches, l'une basée sur les outils des fonctions sous-différentielles, l'autre sur les multiplicateurs de Lagrange.

Dans ce mémoire, nous allons examiner quelques concepts de contrôlabilité du système (I). Puis on adopte l'approche développée par Lions [12], pour caractériser le contrôle optimal dans le cas où l'opérateur A engendre un groupe et le système (I) est exactement nul contrôlable et on procède comme suit :

Dans le premier chapitre on étudie quelques concepts de contrôlabilité du système (I) ou du triplet (A,B,C).

Le deuxième chapitre est réservé pour la caractérisation du contrôle optimal par un système d'optimalité.

En tenant compte des résultats obtenus dans le premier chapitre, on établit dans le dernier chapitre la contrôlabilité d'un système de contrôle frontière.

Chapitre 1

Définitions et caractérisations de contrôlabilité d'un système de contrôle linéaire

Dans ce chapitre on va considérer quelques concepts de contrôlabilité du système (I), puis on établit des critères pour les caractériser et enfin on illustre les résultats théoriques obtenus par des exemples.

1.1 Définitions et remarques

1.1.1 Définitions

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, $\langle .,. \rangle_{\mathbb{H}}$ son produit scalaire et $\|.\|_{\mathbb{H}}$ la norme correspondante.
On note par $\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H})$ l'espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H})}$ défini par :

$$\langle f,g \rangle_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{H})} = \int_0^T \langle f(t),g(t) \rangle_{\mathbb{H}} dt$$

Nous collectons ici les définitions de tous les concepts de contrôlabilité du système (I).

Définition 1.1.1. *Le triplet (A,B,C) est dit exactement contrôlable sur l'intervalle de temps* $[0,T]$ *si et seulement s'il est possible de trouver une fonction d'entrée* $u(t)$

qui puisse transférer tout état initial $z^0 \in \mathbb{Z}$ *à la sortie désirée* $y_d \in \mathbb{Y}$ *au bout d'un temps fini* T.
Ceci est équivalent à dire :

$$\forall z^0 \in \mathbb{Z}\ \forall y_d \in \mathbb{Y}\ \exists u \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})\ \textit{tel que : } y(T) = y_d \tag{1.1.1}$$

Définition 1.1.2. *Le triplet (A,B,C) est dit exactement nul contrôlable sur l'intervalle de temps* $[0,T]$ *si et seulement s'il est possible de ramener tous les points dans l'espace* $\mathbb{Z}$ *à l'origine au temps* T *via un contrôle* u *c-à-d :*

$$\forall z^0 \in \mathbb{Z}\ \ \exists u \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})\ \textit{tel que : } y(T) = 0 \tag{1.1.2}$$

Définition 1.1.3. *Le triplet (A,B,C) est dit approximativement contrôlable sur l'intervalle de temps* $[0,T]$ *si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall z^0 \in \mathbb{Z}\ \forall y_d \in \mathbb{Y}\ \exists u \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})\ \textit{tel que : } \|y_d - y(T)\|_{\mathbb{Y}}\ \leq\ \varepsilon \tag{1.1.3}$$

1.1.2 Remarques

Remarque 1.1.1. *Pour* $\mathbb{Y} = \mathbb{Z}$, $C = Id$ *(Id l'opérateur identique dans* $\mathbb{Z}$ *), on dit que le couple (A,B) est contrôlable au lieu de dire que le triplet (A,B,Id) est contrôlable.*

Remarque 1.1.2. *Reprenons le système* (I), *et supposons que le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable sur l'intervalle [0,T] alors pour chaque* $y_d \in \mathbb{Y}$ *on a contrôlabilité exacte élargie [Lions [12]] par rapport à* $G = C^{-1}\{y_d\}$.

Remarque 1.1.3. *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *de frontière* Γ *assez régulière et* $T > 0$*, et soit* ω *un sous domaine de* Ω *supposé non vide et non nécessairement connexe.*
On considère les espaces suivants : $\mathbb{Z}_\Omega$, $\mathbb{Y}_\omega$ *et* $\mathbb{U}$
Où :
$\mathbb{Z}_\Omega$ *espace de Hilbert dépendant de l'ouvert* Ω *désignant l'espace d'état.*
$\mathbb{Y}_\omega$ *espace de Hilbert dépendant de* ω *désignant l'espace d'observation.*
$\mathbb{U}$ *espace de Hilbert désignant l'espace de contrôle.*
• *Le couple (A,B) est dit exactement* ω*-régionale contrôlable sur l'intervalle de temps [0,T] si et seulement si : (El jai et Pritchard [5])*

$$\forall z^0 \in \mathbb{Z}_\Omega\ \ \forall z_d \in \mathbb{Y}_\omega\ \exists u \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})\ \textit{tel que : } z_u(T,z^0)|_\omega = z_d \tag{1.1.4}$$

Pour $C = \chi_\omega$ *(opérateur restriction sur* ω *) tel que :*

$$\begin{array}{rccl} \chi_\omega : & \mathbb{Z}_\Omega & \longrightarrow & \mathbb{Y}_\omega \\ & z & \longmapsto & \chi_\omega z = z|_\omega \end{array}$$

$C \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}_\Omega, \mathbb{Y}_\omega)$

• *Dans ce cas là, la notion de contrôlabilité exacte du triplet* (A, B, χ_ω) *coïncide avec la notion de contrôlabilité exacte* ω*-régionale du couple (A,B).*

Remarque 1.1.4. *Contrairement aux systèmes distribués, pour les systèmes de dimension finie, les concepts de contrôlabilité du triplet (A,B,C) (exacte et approchée) se coïncident.*

1.2 Caractérisations de quelques concepts de contrôlabilité

On introduit les opérateurs suivants :

$L_T : \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \longrightarrow \mathbb{Z}$
$L_T u = \int\limits_0^T S(T-s)Bu(s)ds \ \forall u \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})$
L_T est un opérateur linéaire borné.
$\mathcal{L}_T : \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \longrightarrow \mathbb{Y}$
$\mathcal{L}_T u = C\int\limits_0^T S(T-s)Bu(s)ds \ \forall u \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})$
$\mathcal{L}_T$ est un opérateur linéaire borné

Dans les paragraphes suivants on va formuler et prouver des conditions nécessaires et suffisantes pour caractériser les concepts de contrôlabilité du triplet (A,B,C) sur l'intervalle de temps [0,T].

1.2.1 Caractérisation de la contrôlabilité exacte et de la contrôlabilité exacte nulle

1.2.1.1 Caractérisation de la contrôlabilité exacte

Théorème 1.2.1. *Le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable sur l'intervalle de temps [0,T] si et seulement si :*

$$Im\ \mathcal{L}_T = \mathbb{Y} \tag{1.2.1}$$

Démonstration. Supposons que le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable alors selon la définition (1.1.1) on a :

$$\forall z^0 \in \mathbb{Z}\ \forall y_d \in \mathbb{Y}\ \exists u \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } CS(T)z^0 + \mathcal{L}_T u = y_d \tag{1.2.2}$$

Pour $z^0 = 0$ on a :

$$\forall y_d \in \mathbb{Y}\ \exists u \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } \mathcal{L}_T u = y_d \tag{1.2.3}$$

Alors $Im\ \mathcal{L}_T = \mathbb{Y}$
Maintenant supposons que (1.2.1) est vérifié et soit $z^0 \in \mathbb{Z}$, $y_d \in \mathbb{Y}$

On a aussi : $(y_d - CS(T)z^0) \in \mathbb{Y}$ et d'après (1.2.1) on a :

$$\exists u_0 \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } \mathcal{L}_T u_0 = y_d - CS(T)z^0$$

Alors :

$$\exists u_0 \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } CS(T)z^0 + \mathcal{L}_T u_0 = y_d$$

et on déduit que :

$$\forall z^0 \in \mathbb{Z}\ \forall y_d \in \mathbb{Y}\ \exists u \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } y(T) = y_d$$

d'où la contrôlabilité exacte du triplet (A,B,C) □

Théorème 1.2.2. *Le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable sur l'intervalle de temps [0,T] si et seulement si :*

$$\exists \gamma > 0 \textit{ tel que : } \|\mathcal{L}_T^{*} y\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} \ \geq\ \gamma \|y\|_{\mathbb{Y}} \quad \forall y \in \mathbb{Y} \tag{1.2.4}$$

où : $\mathcal{L}_T^{*}$ *est l'opérateur adjoint de* $\mathcal{L}_T$

Démonstration. D'après le théorème (1.2.1) le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable si et seulement si l'opérateur $\mathcal{L}_T$ est surjectif, et appliquons le corollaire 3.5 chap 3 page 55 [3] on obtient :
l'opérateur $\mathcal{L}_T$ est surjectif si et seulement si :

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que : } \|\mathcal{L}_T^{*} y\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} \ \geq\ \gamma \|y\|_{\mathbb{Y}} \quad \forall y \in \mathbb{Y}$$

□

Théorème 1.2.3. *Le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable sur l'intervalle de temps [0,T] si et seulement si :* $\ker \mathcal{L}_T^{*} = \{0\}$ *et* $Im\ \mathcal{L}_T^{*}$ *est fermé.*

Démonstration. On suppose que le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable sur l'intervalle [0,T] alors selon le théorème (1.2.2) on a :

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que : } \|\mathcal{L}_T^{*} y\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} \ \geq\ \gamma \|y\|_{\mathbb{Y}}\ \forall y \in \mathbb{Y} \tag{1.2.5}$$

et donc : $\ker \mathcal{L}_T^{*} = \{0\}$
Reste à montrer que $Im\ \mathcal{L}_T^{*}$ est fermé ; soit $(z_n = \mathcal{L}_T^{*} y_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})$.
D'après l'inégalité (1.2.5) on obtient :

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que : } \|\mathcal{L}_T^{*} y_n\|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} \geq \gamma \|y_n\|^2_{\mathbb{Y}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy et comme l'opérateur $\mathcal{L}_T^*$ est linéaire borné alors :

$\mathcal{L}_T^* y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}_T^* y$ et donc $Im\ \mathcal{L}_T^*$ est fermé

Maintenant on suppose que $\ker \mathcal{L}_T^* = \{0\}$ et $Im\ \mathcal{L}_T^*$ est fermé alors l'opérateur $\mathcal{L}_T^*$ réalise une bijection sur son image c-à-d : $\exists\ (\mathcal{L}_T^*)^{-1} : Im\ \mathcal{L}_T^* \longrightarrow \mathbb{Y}$ et comme $\mathcal{L}_T^*$ est borné et $Im\ \mathcal{L}_T^*$ est de Hilbert alors $(\mathcal{L}_T^*)^{-1}$ est borné donc :

$$\begin{cases} \exists k > 0 \ / \ \|(\mathcal{L}_T^*)^{-1}u\|_{\mathbb{Y}} \leq k\|u\|_{\mathbb{L}^2(0.T;\mathbb{U})} \\ \forall u \in Im\ \mathcal{L}_T^* \end{cases}$$

pour $u = \mathcal{L}_T^* y \in D((\mathcal{L}_T^*)^{-1}) = Im\ (\mathcal{L}_T^*)$ on obtient :

$$\exists k > 0 \text{ telque : } \|y\|_{\mathbb{Y}} \leq k\|\mathcal{L}_T^* y\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})}$$

Alors :

$$\exists \gamma = \frac{1}{k} > 0 \text{ telque :} \|\mathcal{L}_T^* y\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} \geq \gamma\|y\|_{\mathbb{Y}}$$

et d'après le théorème (1.2.2) le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable. □

Corollaire 1.2.1. *Une condition nécessaire pour que le triplet (A,B,C) soit exactement contrôlable sur l'intervalle [0,T] est la surjectivité de l'opérateur C.*

Démonstration. On suppose que le triplet (A,B,C) soit exactement contrôlable sur l'intervalle [0,T] alors selon le théorème (1.2.1) on a : $Im\ \mathcal{L}_T = \mathbb{Y}$ et selon la structure de l'opérateur $\mathcal{L}_T$ on obtient :

$$\mathbb{Y} = Im\ \mathcal{L}_T \subset Im\ C \subset \mathbb{Y}$$

et donc l'opérateur C est surjectif. □

Corollaire 1.2.2. *Le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable sur l'intervalle [0,T] si et seulement si :*

i) L'opérateur C est surjectif.

ii) $\exists \gamma > 0$ tel que :

$$\int_0^T \|B^*\varphi\|_{\mathbb{U}}^2 dt \ \geq \ \gamma\|\varphi_0\|_{\mathbb{Z}}^2 \tag{1.2.6}$$

Pour chaque φ solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} + A^*\varphi = 0 \\ \varphi(T) = \varphi^0 \in (\ker C)^{\perp} \end{cases}$$

Démonstration. Selon le théorème (1.2.2) le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable sur l'intervalle [0,T] si et seulement si :

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que : } \int_0^T \|B^* S^*(T-t) C^* y\|_{\mathbb{U}}^2 dt \ \geq \ \gamma \|y\|_{\mathbb{Y}}^2 \ \ \forall y \in \mathbb{Y}$$

Comme l'opérateur C^* est borné on obtient :

$$\exists \gamma_0 > 0 \text{ tel que : } \int_0^T \|B^* S^*(T-t) C^* y\|_{\mathbb{U}}^2 dt \ \geq \ \gamma_0 \|C^* y\|_{\mathbb{Z}}^2 \ \ \forall y \in \mathbb{Y}$$

Si on pose : $\varphi_0 = C^* y \ \ \forall y \in \mathbb{Y}$ alors :

$$\exists \gamma_0 > 0 \text{ tel que : } \int_0^T \|B^* S^*(T-t) \varphi_0\|_{\mathbb{U}}^2 dt \ \geq \ \gamma_0 \|\varphi_0\|_{\mathbb{Z}}^2 \ \ \forall \varphi_0 \in \overline{Im\ C^*} = (\ker C)^{\perp}$$

Si on pose : $\varphi = S^*(T-t)\varphi_0$ alors :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} + A^* \varphi = 0 \\ \varphi(T) = \varphi^0 \in (\ker C)^{\perp} \end{cases}$$

Donc on obtient : $\exists \gamma_0 > 0$ tel que :

$$\int_0^T \|B^* \varphi\|_{\mathbb{U}}^2 dt \ \geq \ \gamma_0 \|\varphi_0\|_{\mathbb{Z}}^2$$

Pour chaque φ solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} + A^* \varphi = 0 \\ \varphi(T) = \varphi^0 \in (\ker C)^{\perp} \end{cases}$$

□

Corollaire 1.2.3. *Si le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable sur l'intervalle de temps [0,T] alors le triplet* $(A - \lambda\ Id, B, C)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ *a la même propriété.*

Démonstration. Supposons que le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable alors d'après le théorème (1.2.2) on a :

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que : } \int_0^T \|B^* S^*(T-t) C^* y\|_{\mathbb{U}}^2 dt \ \geq \ \gamma \|y\|_{\mathbb{Y}}^2 \ \ \forall y \in \mathbb{Y}$$

L'opérateur $(A - \lambda\ Id)$ engendre un C_0-semi groupe $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$ défini par :

$$\mathcal{T}(t) z = (\exp -\lambda t)\ S(t) z \quad \forall z \in \mathbb{Z}$$

Soit $y \in \mathbb{Y}$ on a :

• Pour $\lambda < 0$ on a : $\exp -\lambda(T-t) \geq 1 \quad \forall t \in [0,T]$

Alors :

$$\begin{aligned}\int_0^T \|B^*\mathfrak{T}^*(T-t)C^*y\|_{\mathbb{U}}^2 dt &= \int_0^T \|B^*S^*(T-t)\exp -\lambda(T-t)\ C^*y\|_{\mathbb{U}}^2 dt \\ &\geq \gamma\|y\|_{\mathbb{Y}}^2\end{aligned}$$

• Pour $\lambda > 0$ on a : $\exp -\lambda(T-t) \geq \exp -\lambda T \quad \forall t \in [0,T]$

Alors :

$$\begin{aligned}\int_0^T \|B^*\mathfrak{T}^*(T-t)C^*y\|_{\mathbb{U}}^2 dt &= \int_0^T \|B^*S^*(T-t)\exp -\lambda(T-t)\ C^*y\|_{\mathbb{U}}^2 dt \\ &\geq \gamma\|\exp -\lambda T y\|_{\mathbb{Y}} \\ &= \gamma_0\|y\|_{\mathbb{Y}}\end{aligned}$$

Donc : $\exists \gamma_0 = \gamma \exp -\lambda T$ tel que :

$$\int_0^T \|B^*\mathfrak{T}^*(T-t)C^*y\|_{\mathbb{U}} dt \geq \gamma_0\|y\|_{\mathbb{Y}}\ \forall y \in \mathbb{Y}$$

□

1.2.1.2 Relation entre la contrôlabilité exacte du triplet (A,B,C) et du couple (A,B)

On rappelle que :

• Le couple (A,B) est exactement contrôlable sur l'intervalle de temps [0,T] si et seulement si :

$$Im\ L_T = \mathbb{Z} \tag{1.2.7}$$

• Le couple (A,B) est approximativement contrôlable sur l'intervalle [0,T] si et seulement si :

$$\ker L_T^* = \{0\} \tag{1.2.8}$$

Pour plus de détails voir Curtain et Zwart [4]

Corollaire 1.2.4. *Si le couple (A,B) est exactement contrôlable sur l'intervalle [0,T] et si l'opérateur C est surjectif alors le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable sur [0,T].*

Démonstration. Comme l'opérateur C est surjectif alors :

$$\forall y \in \mathbb{Y}\ \exists z \in \mathbb{Z}\ telque : Cz = y \tag{1.2.9}$$

Comme $Im\ L_T = \mathbb{Z}$ alors :

$$\forall z \in \mathbb{Z}\ \exists u \in \mathbb{L}^2(0.T; \mathbb{U})\ telque : L_T u = z \tag{1.2.10}$$

Insérant (1.2.9) et (1.2.10) on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{Y}\ \exists u \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{U})\ \text{tel que} : CL_T u = y$$

Alors : $Im\ \mathcal{L}_T = \mathbb{Y}$; d'où la contrôlabilité exacte du triplet (A,B,C). □

Corollaire 1.2.5. *Supposons que le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable sur l'intervalle [0,T] et que l'opérateur C est injectif alors le couple (A,B) est exactement contrôlable sur [0,T].*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{Z}$ alors on a :

$$\exists y \in \mathbb{Y}\ telque :\ Cz = y \tag{1.2.11}$$

Comme $Im\ \mathcal{L}_T = \mathbb{Y}$ alors :

$$(1.2.11) \Longrightarrow \exists u \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{U})\ \text{tel que} : Cz = CL_T u$$

et selon l'injectivité de l'opérateur C on obtient :

$$\exists u \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{U})\ \text{tel que} : L_T u = z$$

Alors :

$$\forall z \in \mathbb{Z}\ \exists u \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{U})\ telque : L_T u = z$$

Donc $ImL_T = \mathbb{Z}$ d'où la contrôlabilité exacte du couple (A,B). □

1.2.1.3 Caractérisation de la contrôlabilité exacte nulle

Théorème 1.2.4. *Le triplet (A,B,C) est exactement nul contrôlable sur l'intervalle [0,T] si et seulement si :*

$$Im\ \mathcal{L}_T \supset\ Im\ CS(T) \tag{1.2.12}$$

Démonstration. Supposons que le triplet (A,B,C) est exactement nul contrôlable sur l'intervalle [0,T] alors selon la définition (1.1.2) on a :

$$\forall z^0 \in \mathbb{Z} \ \ \exists u \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } CS(T)z^0 + \mathcal{L}_T u = 0 \tag{1.2.13}$$

Soit $y \in Im\ CS(T)$ alors :

$$\exists z_1 \in \mathbb{Z} \text{ tel que : } CS(T)z_1 = y$$

On applique (1.2.13) pour $z_1 \in \mathbb{Z}$ on obtient :

$$\exists u_1 \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que :} CS(T)z_1 + \mathcal{L}_T u_1 = 0$$

Alors :

$$\exists u_2 \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que :} CS(T)z_1 = \mathcal{L}_T u_2$$

Donc :

$$\forall y \in Im\ CS(T)\ \exists u \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } y = \mathcal{L}_T u$$

Maintenant supposons que (1.2.12) est vérifié et soit $z^0 \in \mathbb{Z}$ alors $CS(T)z^0 \in Im\ CS(T)$ et selon l'hypothèse on a : $CS(T)z^0 \in Im\ (\mathcal{L}_T)$ alors :

$$\exists u \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } CS(T)z^0 + \mathcal{L}_T u = 0$$

et donc le triplet (A,B,C) est exactement nul contrôlable.

□

Théorème 1.2.5. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le triplet (A,B,C) soit exactement nul contrôlable sur l'intervalle [0,T] est :*

$$\exists \gamma > 0 \textit{ tel que : } \|\mathcal{L}_T^* y\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} \ \geq \ \gamma \|S^*(T)C^* y\|_{\mathbb{Z}} \ \ \forall y \in \mathbb{Y} \tag{1.2.14}$$

Démonstration. D'après le théorème (1.2.4) le triplet (A,B,C) est exactement nul contrôlable sur l'intervalle [0,T] si et seulement si :

$$Im\ \mathcal{L}_T \supset Im\ CS(T)$$

appliquons le théorème 3.5 chap3 page 55 [3] on obtient :

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que : } \|\mathcal{L}_T^* y\|_{\mathbb{L}^2(0.T;\mathbb{U})} \ \geq \ \gamma \|S^*(T)C^* y\|_{\mathbb{Z}} \ \ \forall y \in \mathbb{Y}$$

□

Corollaire 1.2.6. *Si le triplet (A,B,C) est exactement nul contrôlable sur l'intervalle de temps [0,T] alors le triplet* $(A - \lambda\ Id, B, C)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ *a la même propriété.*

Démonstration. Supposons que le triplet (A,B,C) est exactement nul contrôlable alors d'après le théorème (1.2.5) on a :

$$\exists\gamma > 0 \text{ tel que : } \int_0^T \|B^*S^*(T-t)C^*y\|_{\mathbb{U}}dt \ \geq\ \gamma\|S^*(T)C^*y\|_{\mathbb{Z}} \ \ \forall y \in \mathbb{Y}$$

Soit $y \in \mathbb{Y}$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|B^*\mathfrak{T}^*(T-t)C^*y\|_{\mathbb{U}}dt &\geq \|S^*(T)\exp -\lambda(T-t)\ C^*y\|_{\mathbb{Z}} \\
&\geq \gamma\|S^*(T)\exp -\lambda(T)\ C^*y\|_{\mathbb{Z}} \\
&= \gamma\|\mathfrak{T}^*(T)C^*y\|_{\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

□

1.2.1.4 Relation entre la contrôlabilité exacte et la contrôlabilité exacte nulle du triplet (A,B,C)

Théorème 1.2.6. *Si l'opérateur A du système* (I) *engendre un groupe* $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *alors le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable sur l'intervalle [0,T] si et seulement s'il est exactement nul contrôlable sur l'intervalle [0,T].*

Démonstration. On suppose que le triplet (A,B,C) est exactement nul contrôlable sur l'intervalle [0,T] alors selon la définition (1.1.2) on a :

$$\forall z^0 \in \mathbb{Z} \ \ \exists u \in \mathbb{L}^2(0.T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } Cz(T) = 0 \qquad (1.2.15)$$

Soient $z^0 \in \mathbb{Z}$, $y_d \in \mathbb{Y}$

On pose :

$$\begin{cases} z(t) = z_1(t) + z_2(t) \\ y(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ z_1^0 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Alors on peut décomposer le système (I) comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt}(t) = Az_1(t) \\ z_1(0) = z_1^0 \\ y_1(t) = Cz_1(t) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{dz_2}{dt}(t) = Az_2(t) + Bu(t) \\ z_2(0) = z^0 - z_1^0 \\ y_2(t) = Cz_2(t) \end{cases}$$

Par hypothèse on a :

$$\exists u_0 \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{U}) \text{ tel que : } Cz_2(T) = 0$$

Alors :

$$\begin{aligned} y(T) &= Cz_{u_0}(T) \\ &= Cz_1(T) + Cz_2(T) \\ &= Cz_1(T) \end{aligned}$$

Si on peut choisir $z_1(T) \in C^{-1}\{y_d\}$ alors le contrôle u_0 ramène le système (I) de l'état initial z^0 à la sortie désirée y_d.

Le choix de $z_1(T)$ tel que : $z_1(T) \in C^{-1}\{y_d\}$ est revenu au choix de z_1^0 dans $S^{-1}(T)C^{-1}\{y_d\}$ et cela est possible, car $S(t)$ est un groupe et donc on peut déduire que :

$$\forall z^0 \in \mathbb{Z}\ \forall y_d \in \mathbb{Y}\ \exists u_0 \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{U}) \text{ tel que : } y(T) = y_d$$

d'où la contrôlabilité exacte du triplet (A,B,C). $\square$

1.2.2 Caractérisation de la contrôlabilité approchée

Théorème 1.2.7. *Le triplet (A,B,C) est approximativement contrôlable sur l'intervalle [0,T] si et seulement si :*

$$\overline{Im\ \mathcal{L}_T} = \mathbb{Y} \tag{1.2.16}$$

Démonstration. Supposons que le triplet (A,B,C) est approximativement contrôlable alors selon la définition (1.1.3) on a :

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall z^0 \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall y_d \in \mathbb{Y}\ \exists u_\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0.T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } \|y_d - y(T)\|_{\mathbb{Y}}\ \leq\ \varepsilon \tag{1.2.17}$$

Pour $y \in \mathbb{Y}$ et $z^0 = 0$ (1.2.17) implique :

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists u_\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } \|\mathcal{L}_T u_\varepsilon - y\|_{\mathbb{Y}}\ \leq\ \varepsilon \tag{1.2.18}$$

Si on passe à la limite dans (1.2.18) quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ on obtient :

$$\exists u_\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } \lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathcal{L}_T u_\varepsilon - y\|_{\mathbb{Y}} = 0$$

Alors :

$$\exists u_\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } \underset{\varepsilon\to 0}{\mathcal{L}_T u_\varepsilon} = y$$

Donc on déduit que :

$$\overline{Im\mathcal{L}_T} = \mathbb{Y}$$

Maintenant on suppose que (1.2.16) est vérifié et soit $z^0 \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Y}$, on a aussi : $(y - CS(T)z^0) \in \mathbb{Y}$ alors :

$$\exists (u_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } \lim_{n\to +\infty} \mathcal{L}_T u_n = y - CS(T)z^0$$

Par définition de la limite d'une suite on obtient :

$$\exists (u_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } \forall\tau > 0\ \exists n_\tau \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\tau\ :\ \|CS(T)z^0 + \mathcal{L}_T u_n - y\|_{\mathbb{Y}} \leq \tau \tag{1.2.19}$$

Pour $\tau = \varepsilon > 0$ on a :

$$\exists (u_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon\ :\ \|CS(T)z^0 + \mathcal{L}_T u_n - y\|_{\mathbb{Y}} \leq \varepsilon$$

Pour $n_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon}$, $n = n_\varepsilon$ on a :

$$\exists (u_\varepsilon)_{\varepsilon\geq 0} \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } \|CS(T)z^0 + \mathcal{L}_T u_\varepsilon - y\|_{\mathbb{Y}} \leq \varepsilon$$

Alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall z^0 \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall y_d \in \mathbb{Y} \ \exists u_\varepsilon \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ tel que : } \|y_d - y(T)\|_{\mathbb{Y}} \ \leq \ \varepsilon$$

d'où la contrôlabilité approchée du triplet (A,B,C). □

Théorème 1.2.8. *Le triplet (A,B,C) est approximativement contrôlable sur l'intervalle [0,T] si et seulement si :*

$$\ker \mathcal{L}_T^* = \{0\} \tag{1.2.20}$$

Démonstration. Selon le théorème (1.2.7), le triplet (A,B,C) est approximativement contrôlable si et seulement si :

$$\overline{Im\ \mathcal{L}_T} = \mathbb{Y} \tag{1.2.21}$$

(1.2.21) $\Longleftrightarrow [\ker \mathcal{L}_T^*]^\perp = \mathbb{Y}$
Cette dernière égalité est équivalente à : $\ker \mathcal{L}_T^* = \{0\}$

□

Corollaire 1.2.7. *Une condition nécessaire pour que le triplet (A,B,C) soit approximativement contrôlable sur [0,T] est :*

$$\overline{Im\ C} = \mathbb{Y} \tag{1.2.22}$$

Démonstration. Supposons que le triplet (A,B,C) soit approximativement contrôlable alors selon le théorème (1.2.7) on a : $\overline{Im\ \mathcal{L}_T} = \mathbb{Y}$,mais comme $\mathcal{L}_T = CL_T$ alors :

$$\mathbb{Y} = \overline{Im\ \mathcal{L}_T} \subset \overline{ImC} \subset \mathbb{Y}$$

Donc : $\overline{Im\ C} = \mathbb{Y}$

□

Corollaire 1.2.8. *Si le triplet (A,B,C) est approximativement contrôlable sur l'intervalle de temps [0,T] alors le triplet $(A - \lambda\, Id, B, C)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ a la même propriété.*

Démonstration. Supposons que le triplet (A,B,C) est approximativement contrôlable alors :

$$\forall y \in \mathbb{Y} : \ B^* S^*(T-t) C^* y = 0 \Longrightarrow y = 0 \ \ \forall t \in [0,T] \tag{1.2.23}$$

Soit $y \in \mathbb{Y}$ tel que :

$$B^*S^*(T-t)\exp -\lambda(T-t)C^*y = 0$$

D'après (1.2.23) on a :

$$\exp -\lambda(T-t)y = 0 \ \forall t \in [0,T]$$

Pour $t = T$ on obtient : $y = 0$ □

1.2.2.1 Relation entre la contrôlabilité approchée du triplet (A,B,C) et du couple (A,B)

Corollaire 1.2.9. *Si le couple (A,B) est approximativement contrôlable sur l'intervalle [0,T] et* $\ker C^* = \{0\}$ *alors le triplet (A,B,C) est approximativement contrôlable sur [0,T].*

Démonstration. Supposons que le couple (A,B) est approximativement contrôlable alors :

$$\overline{Im\ L_T} = \mathbb{Z}$$

ceci implique :

$$\ker L_T^* = \{0\} \tag{1.2.24}$$

Soit $y \in \ker \mathcal{L}_T^*$ alors : $L_T^* C^* y = 0$
Selon (1.2.24) on a : $C^*y = 0$
Et comme $\ker C^* = \{0\}$ alors :
$y = 0$ et donc on déduit que :$\ker \mathcal{L}_T^* = \{0\}$ □

Corollaire 1.2.10. *Si le triplet (A,B,C) est approximativement contrôlable sur [0,T] et si l'opérateur* C^* *est surjectif alors le couple (A,B) est approximativement contrôlable sur [0,T].*

Démonstration. Selon le théorème (1.2.8) on a : $\ker \mathcal{L}_T^* = 0$
Soit $z \in \mathbb{Z}$ tel que : $L_T^* z = 0$ comme l'opérateur C^* est surjectif alors :

$$\exists y \in \mathbb{Y} \text{ tel que } : \ C^*y = z$$

et donc : $L_T^* C^* y = 0$ et comme le triplet (A,B,C) est approximativement contrôlable alors : $y = 0$ et on déduit que $z = 0$. □

1.2.2.2 Relation entre la contrôlabilité approchée du triplet (A,B,C) et la contrôlabilité exacte nulle du triplet (A,B,C)

Théorème 1.2.9. *Si le triplet (A,B,C) est exactement nul contrôlable sur l'intervalle [0,T] et si* $\overline{Im\ CS(t)} = \mathbb{Y}$ *alors le triplet (A,B,C) est approximativement contrôlable.*

Démonstration. Supposons que $\overline{Im\ CS(t)} = \mathbb{Y}$ et que le triplet (A,B,C) est exactement nul contrôlable alors d'après le théorème (1.2.4) on a :

$$\overline{Im\ \mathcal{L}_T} \supset \overline{Im\ CS(T)} = \mathbb{Y}$$

Alors :

$$\overline{Im\ \mathcal{L}_T} = \mathbb{Y}$$

□

1.3 Le contrôle d'énergie minimum

Supposons que le système (I) est exactement contrôlable sur l'intervalle [0,T], alors il existe plusieurs contrôles différents $u \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{U})$ qui peuvent le ramener de l'état initial z^0 à la sortie désirée y_d. La question qui se pose est comme suit : Parmi ces contrôles admissibles, quel est le contrôle optimal (selon des critères près définis) et qui aboutit au même résultat ?

Dans ce paragraphe on va donner la formule analytique pour le contrôle qui minimise la fonction coût suivante :

$$\mathfrak{J}(u) = \int_0^T \|u\|_{\mathbb{U}}^2 dt$$

Théorème 1.3.1. *Pour $z^0 \in \mathbb{Z}$, $y_d \in \mathbb{Y}$ le contrôle*

$$u_0(t) = \mathcal{L}_T^*(\mathcal{L}_T\mathcal{L}_T^*)^{-1}(y_d - CS(T)z^0) \tag{1.3.1}$$

ramène le système (I) *de l'état initial z^0 à la sortie désirée y_d dans le temps T.*

Démonstration. Pour $z^0 \in \mathbb{Z}$, $y_d \in \mathbb{Y}$ on a :

$$\begin{aligned} y(T) &= Cz_{u_0}(T, z^0) \\ &= CS(T)z^0 + \int_0^T CS(T-s)Bu_0(s)ds \\ &= CS(T)z^0 + \int_0^T CS(T-s)BB^*S^*(T-s)C^*(\mathcal{L}_T\mathcal{L}_T^*)^{-1}(y_d - CS(T)z^0)ds \\ &= CS(T)z^0 + (\mathcal{L}_T\mathcal{L}_T^*)(\mathcal{L}_T\mathcal{L}_T^*)^{-1}(y_d - CS(T)z^0) \\ &= y_d \end{aligned}$$

□

Théorème 1.3.2. *Le contrôle donné par le théorème* (1.3.1) *minimise la fonction coût $\mathfrak{J}$.*

Démonstration. Soit $u_1 \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{U})$ un contrôle qui ramène le système (I) de l'état initial z^0 à la sortie désirée y_d alors on a :

$$\int_0^T CS(T-s)Bu_1(s)ds = \int_0^T CS(T-s)Bu_0(s)ds \tag{1.3.2}$$

On soustrait les deux termes, on obtient :

$$\int_0^T CS(T-s)B(u_1(s)-u_0(s))ds = 0 \tag{1.3.3}$$

Cette dernière inégalité implique :

$$\langle \int_0^T CS(T-s)B(u_1(s)-u_0(s))ds, (\mathcal{L}_T\mathcal{L}_T^*)^{-1}(y_d - CS(T)z^0)\rangle_{\mathbb{U}} = 0 \tag{1.3.4}$$

Utilisant les propriétés du produit scalaire de l'espace $\mathbb{U}$ dans (1.3.4) on obtient :

$$\int_0^T \langle u_1(s)-u_0(s), B^*S^*(T-s)C^*(\mathcal{L}_T\mathcal{L}_T^*)^{-1}(y_d - CS(T)z^0)\rangle_{\mathbb{U}} ds = 0 \tag{1.3.5}$$

Insérant (1.3.1) et (1.3.5) on obtient l'égalité suivante :

$$\int_0^T \langle u_1(s)-u_0(s), u_0(s)\rangle_{\mathbb{U}} ds = 0 \tag{1.3.6}$$

Avec les propriétés du produit scalaire et après quelques calculs simples on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u_1\|_{\mathbb{U}}^2 dt &= \int_0^T \langle u_1(t), u_1(t)\rangle_{\mathbb{U}} dt \\
&= \int_0^T \langle u_1(t)+u_0(t)-u_0(t), u_1(t)+u_0(t)-u_0(t)\rangle_{\mathbb{U}} dt \\
&= \int_0^T \langle u_1(t)-u_0(t), u_1(t)-u_0(t)\rangle_{\mathbb{U}} dt + \int_0^T \langle u_0(t), u_1(t)-u_0(t)\rangle_{\mathbb{U}} dt \\
&\quad + \int_0^T \langle u_1(t)-u_0(t), u_0(t)\rangle_{\mathbb{U}} dt + \int_0^T \langle u_0(t), u_0(t)\rangle_{\mathbb{U}} dt \\
&= \int_0^T \|u_1(t)-u_0(t)\|_{\mathbb{U}}^2 dt + \int_0^T \|u_0\|_{\mathbb{U}}^2 dt
\end{aligned}$$

Alors : $\int_0^T \|u_1(t)\|_{\mathbb{U}}^2 dt \geq \int_0^T \|u_0(t)\|_{\mathbb{U}}^2 dt$ □

1.4 Exemples

Dans cette section, on va donner quelques exemples pour illustrer l'utilisation des résultats théoriques obtenus.

1.4.1 Exemple 1

On considère le système (entrée, sortie) suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) & t \in]0,T[\ ; \ x \in]0,1[\\ z(x,0) \ = \ z^0(x) & x \in]0,1[\\ z(0,t) \ = \ z(1,t) \ = \ 0 & t \in]0,T[\\ y(x,t) \ = \ \sum\limits_{j=1}^{m} \langle z, \varphi_j \rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)} & t \in]0,T[\end{cases} \tag{1}$$

tel que :

$$\varphi_j(x) = \sqrt{2}\ sinj\pi x \quad \forall j \geq 1$$

Le système (1) est sous la forme (I) avec :

$$\mathbb{Z} \ = \ \mathbb{L}^2(0,1), \mathbb{U} \ = \ \mathbb{L}^2(0,1), \mathbb{Y} \ = \ \mathbb{R}$$

$$Az \ = \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ \forall z \in \mathcal{D}(A)$$

tel que :

$$\mathcal{D}(A) = \mathbb{H}^2(0,1) \cap \mathbb{H}_0^1(0,1)$$

A est un opérateur linéaire engendrant un C_0-semi groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}$ défini par :

$$\forall \ z \in \ \mathbb{Z} \ ; S(t)z \ = \ \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2 t} \langle z, \varphi_j \rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)} \varphi_j$$

La famille $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ représente les fonctions propres associées aux valeurs propres $(\lambda_j = -j^2\pi^2)_{j\geq 1}$ de l'opérateur A et cette dernière forme une base orthonormale dans $\mathbb{L}^2(0,1)$.

$B \ : \ \mathbb{L}^2(0,1) \ \longrightarrow \ \mathbb{L}^2(0,1) \quad B \ = \ Id$ (opérateur identique dans $\mathbb{L}^2(0,1)$)

B est un opérateur linéaire borné

$$\begin{array}{llll} C: & \mathbb{L}^2(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & Cz \ = \ \sum\limits_{j=1}^{m} \langle z, \varphi_j \rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)} \end{array}$$

C est un opérateur linéaire borné

En effet :

$$\begin{array}{rcl} |Cz|_{\mathbb{R}} & = & |\sum\limits_{j=1}^{m} \langle z, \varphi_j\rangle|_{\mathbb{R}} \\ & \leq & \sum\limits_{j=1}^{m} \|\langle z, \varphi_j\rangle\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} \\ & \leq & \sum\limits_{j=1}^{m} \|z\|_{\mathbb{L}^2(0,1)}\|\varphi_j\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} \\ & = & m\|z\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} C^* : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{L}^2(0,1) \\ & y & \longmapsto & C^*y = \sum\limits_{j=1}^{m} y\varphi_j \end{array}$$

On définit l'opérateur $\mathcal{L}_T$ comme suit :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{L}_T : & \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(0,1)) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \mathcal{L}_T u \end{array}$$

tel que :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_T u & = & \int\limits_0^T CS(T-s)Bu(s)ds \\ & = & \int\limits_0^T CS(T-s)u(s)ds \\ & = & \int\limits_0^T C\sum\limits_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2(T-s)}\langle u(s), \varphi_j\rangle\varphi_j ds \\ & = & \int\limits_0^T \sum\limits_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2(T-s)}\langle u(s), \varphi_j\rangle C\varphi_j ds \\ & = & \int\limits_0^T \sum\limits_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2(T-s)}\langle u(s), \varphi_j\rangle \sum\limits_{k=1}^{m}\langle \varphi_j, \varphi_k\rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)} ds \\ & = & \int\limits_0^T \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2(T-s)}\langle u(s), \varphi_j\rangle \langle \varphi_j, \varphi_k\rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)} ds \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{m}\int\limits_0^T e^{-k^2\pi^2(T-s)}\langle u(s), \varphi_k\rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)} ds \end{array}$$

L'opérateur $\mathcal{L}_T^*$ est défini par :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{L}_T^* : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{L}^2(0,1)) \\ & y & \longmapsto & \mathcal{L}_T^* y \end{array}$$

tel que :

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{L}_T^* y(t) & = & B^* S^*(T-t) C^* y \\
& = & S^*(T-t) C^* y \\
& = & \sum\limits_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2(T-t)} \; \langle C^* y, \varphi_j \rangle \; \varphi_j \\
& = & \sum\limits_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2(T-t)} \; \langle \sum\limits_{k=1}^{m} \langle y, \varphi_k \rangle, \varphi_j \rangle \; \varphi_j \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2(T-t)} \; y \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)} \; \varphi_j \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{m} e^{-k^2\pi^2(T-t)} \; y \varphi_k \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{m} e^{-k^2\pi^2(T-t)} \; y\sqrt{2} \; sin(k\pi x)
\end{array}$$

On a :

$$\begin{array}{lcl}
\|\mathcal{L}_T^* y\|^2_{\mathbb{L}^2(0,1)} & = & \| \sum\limits_{j=1}^{m} e^{-j^2\pi^2(T)} \; y\varphi_j \|_{\mathbb{L}^2(0,1)} \\
& = & \langle \sum\limits_{j=1}^{m} e^{-j^2\pi^2(T)} \; y\varphi_j, \sum\limits_{j=1}^{m} e^{-j^2\pi^2(T)} \; y\varphi_j \rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)} \\
& = & \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{m} y^2 e^{-j^2\pi^2(T)} e^{-k^2\pi^2(T)} \; \langle \varphi_j(x), \varphi_k(x) \rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)} \\
& = & \sum\limits_{j=1}^{m} y^2 e^{-2j^2\pi^2(T)} \\
& \leq & \sum\limits_{j=1}^{m} y^2 e^{-2j^2\pi^2(T-t)}
\end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{lcl}
\|\mathcal{L}_T^* y\|^2_{\mathbb{L}^2(0.T;\mathbb{L}^2(0,1))} & = & \int\limits_0^T \|\mathcal{L}_T^* y\|^2_{\mathbb{L}^2(0,1)} dt \\
& = & \int\limits_0^T \sum\limits_{j=1}^{m} y^2 e^{-2j^2\pi^2(T-t)} \; dt \\
& \geq & \int\limits_0^T \sum\limits_{j=1}^{m} y^2 e^{-2j^2\pi^2(T)} \; dt \\
& = & y^2 T \sum\limits_{j=1}^{m} e^{-2j^2\pi^2(T)}
\end{array}$$

On pose : $M = \sum\limits_{j=1}^{m} e^{-2j^2\pi^2(T)}$

Alors : $\exists \gamma(\gamma = TM) > 0$ tel que :

$$\|\mathcal{L}_T^* y\|^2_{\mathbb{L}^2(0.T;\mathbb{L}^2(0,1))} \geq \; \gamma \|y\|^2_{\mathbb{R}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

d'où **la contrôlabilité exacte du triplet (A,B,C)**.

1.4.2 Exemple 2

On considère le système (entrée, sortie) suivant :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t) \;=\; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) + \; u(x,t) & \forall t \in]0,T[\; ; \; \forall x \in]0,1[\\
z(x,0) \;=\; z^0(x) \;\; ; \;\; \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,0) \;=\; z^1(x) & \forall x \in]0,1[\\
z(0,t) \;=\; z(1,t) \;=\; 0 & \forall t \in]0,T\,[\\
y(x,t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{m} \langle \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x} \rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)} \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \langle \dfrac{\partial z}{\partial t}, \varphi_k \rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)} \end{pmatrix} &
\end{cases}
\tag{2}
$$

tel que :

$$\varphi_k(x) \;=\; \sqrt{2} sin\; k\pi x \quad \forall k \geq 1$$

La famille $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ forme une base orthonormale dans $\mathbb{L}^2(0,1)$

Le système (2) peut être réécrit sous la forme abstraite (I) avec :

$$\mathbb{Z} \;=\; \mathbb{H}_0^1(0,1) \times \mathbb{L}^2(0,1)$$

$$\forall \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} : \|\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\|_{\mathbb{Z}} = \sqrt{\|\frac{\partial v_1}{\partial x}\|^2_{\mathbb{L}^2(0,1)} + \|v_2\|^2_{\mathbb{L}^2(0,1)}}$$

$$\mathbb{U} \;=\; \mathbb{L}^2(0,1)$$

$$\mathbb{Y} \;=\; \mathbb{R}^2$$

$$A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} v_2 \\ \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \end{pmatrix} \forall \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A)$$

tel que :

$$\mathcal{D}(A) = \mathbb{H}_0^1(0,1) \cap \mathbb{H}^2(0,1) \times \mathbb{H}_0^1(0,1)$$

A est un opérateur linéaire générateur du groupe unitaire $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{Z}$ défini par :

$$S(t)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \;=\sum_{n\in Z} e^{in\pi t}[\langle \frac{dv_1}{dx}, \cos n\pi x\rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)} - \langle v_2, \sin n\pi x\rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)}]\Phi_n$$

tel que :

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{n\pi}\varphi_n \\ -\varphi_n \end{pmatrix}$$

La famille $(\Phi_n)_{n\in Z}$ forme une base orthonormale dans $\mathbb{Z}$ formée par les fonctions propres de A associées aux valeurs propres $\lambda_n = in\pi$ $(n \in Z)$

$$\begin{array}{rlcl} B: & \mathbb{L}^2(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & u & \longmapsto & Bu = \binom{0}{Id}u = u \end{array}$$

B est un opérateur linéaire borné

$$\begin{array}{rlcl} C: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \binom{v_1}{v_2} & \longmapsto & C\binom{v_1}{v_2} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=1}^{m} \langle \dfrac{dv_1}{dx}, \dfrac{d\varphi_n}{dx} \rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)} \\ \sum\limits_{n=1}^{m} \langle v_2, \varphi_n \rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \|C\tbinom{v_1}{v_2}\|_{\mathbb{R}^2} &= |\sum_{n=1}^{m} \langle \frac{dv_1}{dx}, \frac{d\varphi_n}{dx} \rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)}|_{\mathbb{R}} + |\sum_{n=1}^{m} \langle v_2, \varphi_n \rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)}|_{\mathbb{R}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{m} \|\frac{dv_1}{dx}\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} \|\frac{d\varphi_n}{dx}\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} + m\|v_2\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} \\ &= \sum_{n=1}^{m} n\pi \|\frac{dv_1}{dx}\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} + m\|v_2\|_{\mathbb{L}^2(0,1)}) \\ &\leq \max\{m, \pi M\}[\|\frac{dv_1}{dx}\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} + \|v_2\|_{\mathbb{L}^2(0,1)})] \\ &\leq 4\max\{m, \pi M\}\sqrt{\|\frac{dv_1}{dx}\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} + \|v_2\|_{\mathbb{L}^2(0,1)})} \\ &= \gamma \|\tbinom{v_1}{v_2}\|_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

tel que : $M = \sum\limits_{n=1}^{m} n$

Alors C est un opérateur linéaire borné.

$$\begin{array}{rlcl} C^*: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \binom{y_1}{y_2} & \longmapsto & C^*\binom{y_1}{y_2} \end{array}$$

tel que :

$$\begin{cases} \left\langle C\tbinom{v_1}{v_2}, \tbinom{y_1}{y_2} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = \left\langle \tbinom{v_1}{v_2}, C^*\tbinom{y_1}{y_2} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \\ \forall\ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall\ (v_1, v_2) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle C\binom{v_1}{v_2}, \binom{y_1}{y_2} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} &= \left\langle \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{m} \langle \frac{dv_1}{dx}, \frac{d\varphi_k}{dx} \rangle \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \langle v_2, \varphi_k \rangle \end{pmatrix}, \binom{y_1}{y_2} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \langle \frac{dv_1}{dx}, \frac{d\varphi_k}{dx} \rangle y_1 + \sum_{k=1}^{m} \langle v_2, \varphi_k \rangle y_2 \\
&= \left\langle \frac{dv_1}{dx}, \sum_{k=1}^{m} y_1 \frac{d\varphi_k}{dx} \right\rangle + \left\langle v_2, \sum_{k=1}^{m} y_2 \varphi_k \right\rangle \\
&= \left\langle \binom{v_1}{v_2}, \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{m} y_1 \varphi_k \\ \sum\limits_{k=1}^{m} y_2 \varphi_k \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \\
&= \left\langle \binom{v_1}{v_2}, C^* \binom{y_1}{y_2} \right\rangle_{\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

• Le couple (A,B) du système (2) est exactement contrôlable (voir exemple 4.1.8 chap4 page 149 [4]) alors selon le corollaire (1.2.4) il suffit de montrer la surjectivité de l'opérateur C pour prouver la contrôlabilité exacte du triplet (A,B,C).
Appliquant le corollaire 3.5 chap3 page 55 [3] il suffit de montrer l'inégalité suivante :

$$\exists \gamma > 0 \text{tel que : } \| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \|_{\mathbb{R}^2} \leq \gamma \| C^* \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \|_{\mathbb{Z}}^2$$

$$\begin{aligned}
\|C^* \tbinom{y_1}{y_2}\|_{\mathbb{Z}}^2 &= \| \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{m} y_1 \varphi_k \\ \sum\limits_{k=1}^{m} y_2 \varphi_k \end{pmatrix} \|_{\mathbb{Z}}^2 \\
&= \| \sum_{k=1}^{m} y_1 \frac{d\varphi_k}{dx} \|_{\mathbb{L}^2(0,1)}^2 + \| \sum_{k=1}^{m} y_2 \varphi_k dx \|_{\mathbb{L}^2(0,1)}^2 \\
&= y_1^2 \| \sum_{k=1}^{m} \frac{d\varphi_k}{dx} \|_{\mathbb{L}^2(0,1)}^2 + m y_2^2 \\
&\geq \min\{m, A\}[y_1^2 + y_2^2] \text{ tel que : } A = \| \sum_{k=1}^{m} \frac{d\varphi_k}{dx} \|_{\mathbb{L}^2(0,1)}^2
\end{aligned}$$

Alors :

$$\exists \gamma = \frac{1}{\min(m, A)} > 0 \text{ tel que : } \| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \|_{\mathbb{R}^2} \leq \gamma \| C^* \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \|_{\mathbb{Z}}^2$$

Donc le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable.

Chapitre 2

Caractérisation du contrôle optimal par la méthode de pénalisation

Notre étude dans ce chapitre est consacrée à la caractérisation par la méthode de pénalisation, le contrôle optimal, lorsque l'opérateur agissant sur l'état engendre un groupe et le système considéré est exactement nul contrôlable .

Après un bref rappel sur la méthode de pénalisation, on adoptera dans le deuxième paragraphe l'approche introduite par Lions [12] pour caractériser le contrôle optimal par un système d'optimalité.

2.1 Rappels sur la méthode de pénalisation

Principe

Pour résoudre les problèmes d'optimisations (minimisations ou maximisations selon les cas) on est conduit à des méthodes numériques par exemple la méthode de relaxation, méthode de gradient, méthode de pénalisation.....

Dans ce paragraphe on donne quelques éclairages sur la méthode de pénalisation qui permet de transformer un problème d'optimisation avec contraintes en un ou une suite de problèmes sans contraintes. Elle consiste à associer à un problème d'optimisation une suite de problèmes approximés ou pénalisés dont les solutions convergent vers la solution du problème initial.

Soit dans $\mathbb{E}$ (espace de Hilbert) le problème

$$\inf_{v \in K} \mathcal{J}(v) \tag{$\mathcal{P}$}$$

avec : $\mathcal{J} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{J}$ est une fonction coercive, semi continue inférieurement (s.c.i), K est un sous ensemble dans $\mathbb{E}$ non vide convexe et fermé.
L'idée de la méthode de pénalisation est de supprimer les contraintes, tout en ajoutant dans le critère un terme **pénalisant** si $v \notin K$, de sorte que le problème pénalisé traduise au mieux le problème initial.
De façon précise on introduit une fonction $\varphi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\begin{cases} \varphi \text{ est convexe semi-continue inférieurement (s.c.i). (faiblement)} \\ \varphi(v) = 0 \Longleftrightarrow v \in K \end{cases} \tag{2.1.1}$$

La fonction φ vérifie alors la propriété suivante, utile pour la suite :

$$\text{si } \; v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} v \text{ faiblement et si } \; \varphi(v_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \text{alors } v \in K \tag{2.1.2}$$

En effet la s.c.i. faible de φ entraine

$$0 \leq \varphi(v) \leq \liminf_{n \to +\infty} \varphi(v_n) = 0$$

donc $\varphi(v) = 0$ et $v \in K$
- On introduit à présent la famille de problèmes pénalisés

$$\inf_{v \in \mathbb{E}} \; (\mathcal{J}_\varepsilon(v) = \mathcal{J}(v) + \frac{1}{\varepsilon}\varphi(v)) \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

Le problème ($\mathcal{P}$) (respectivement ($\mathcal{P}_\varepsilon$)) admet une solution unique u (respectivement u_ε) (il suffit d'appliquer le théorème 1.1 chap1 [13]).

Théorème 2.1.1. *Sous les hypothèses faites, u_ε converge fortement vers u si ε tend vers 0*

Démonstration. D'après les hypothèses on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\varphi(u_\varepsilon) &= \inf_{v\in\mathbb{E}} \left(\mathcal{J}(v) + \frac{1}{\varepsilon}\varphi(v)\right) \\
&\leq \inf_{v\in K} \left(\mathcal{J}(v) + \frac{1}{\varepsilon}\varphi(v)\right) \\
&= \inf_{v\in K} \mathcal{J}(v) \\
&= \mathcal{J}(u)
\end{aligned}$$

Alors :

$$\mathcal{J}(u_\varepsilon) \leq \mathcal{J}(u) \tag{2.1.3}$$

et

$$\varphi(u_\varepsilon) \leq C\varepsilon \tag{2.1.4}$$

On en déduit que $\varphi(u_\varepsilon) \longrightarrow 0$ que la suite u_ε est borné (car $\mathcal{J}$ est ∞ a l'∞) on peut donc extraire une sous suite $u_\varepsilon \longrightarrow \widetilde{u}$ faiblement et d'après (2.1.2) $\widetilde{u} \in K$.
La s.c.i. faible de $\mathcal{J}$ entraine

$$\mathcal{J}(\widetilde{u}) \leq \liminf \mathcal{J}(u_\varepsilon) \leq \limsup \mathcal{J}(u_\varepsilon) \leq \mathcal{J}(u)$$

d'où l'on déduit que $\widetilde{u} = u$ et que (sans extraction de sous suite)

$$\begin{cases} u_\varepsilon \longrightarrow u \text{ (faiblement)} \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{J}(u_\varepsilon) = \mathcal{J}(u) \end{cases}$$

Utilisant la coercitivité de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ on déduit que : $u_\varepsilon \longrightarrow u$ fortement $\square$

2.2 Système d'optimalité et méthode de pénalisation

Reprenons le système (I) et supposons que l'opérateur A engendre un groupe $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ et que le triplet (A,B,C) est exactement nul contrôlable.
Définissons $\mathcal{U}_{ad}$ (ensemble des contrôles admissibles) par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\text{ad}} \quad = \quad & \{\ (v,z) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \times \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z}) \text{ tel que :} \\
& \frac{dz}{dt}(t) - Az(t) - Bv = 0 \ \ \forall t \in [0,T] \\
& z(0) = z^0 \\
& y(T) = 0\ \}
\end{aligned}$$

Formulons notre problème comme suit :

$$\inf_{v\in\mathcal{U}_{\text{ad}}} J(v) \tag{2.2.1}$$

tel que :

$$J(v) \ = \ \frac{1}{2}\int_0^T \|v\|^2_{\mathbb{U}}\ dt$$

- Le problème (2.2.1) est un problème de contrôle optimal avec contraintes sur la sortie.
- Ce problème n'a de sens que si $\mathcal{U}_{\text{ad}} \neq \phi$.
- Le problème (2.2.1) admet une solution unique telle que :

$$\inf_{v\in\mathcal{U}_{\text{ad}}} J(v) = J(\hat{v})$$

En effet :
La fonctionnelle J est continue alors elle est s.c.i et vérifie :

$$\forall\ 0 < \alpha < \frac{1}{2} : J(v) \geq \alpha\|v\|^2_{\mathbb{L}^2(0.T;\mathbb{U})}$$

donc on déduit que la fonctionnelle J est coercive.
Par hypothèse l'ensemble $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ n'est pas vide.
<u>$\mathcal{U}_{\text{ad}}$ est convexe</u>

Soit $t \in [0,1]$ et $\binom{v}{z}, \binom{u}{\eta} \ \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ on montre que :

$t(\binom{v}{z}) + (1-t)(\binom{u}{\eta}) \ \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ c-à-d : $\binom{tv+(1-t)u}{tz+(1-t)\eta} \ \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$

- Comme $\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})$ et $\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})$ sont des espaces de Hilbert (espaces vectoriels) alors $((tv+(1-t)u),(tz+(1-t)\eta)) \ \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \times \mathbb{L}^2(0.T;\mathbb{Z})$
- $\dfrac{d(tz+(1-t)\eta)}{dt} - A(tz+(1-t)\eta) - B(tv+(1-t)u)$
  $= \ t(\dfrac{dz}{dt} - Az - Bv) + (1-t)(\dfrac{d\eta}{dt} - A\eta - Bu) \ = 0$
- $(tz+(1-t)\eta)(0) = tz(0) + (1-t)\eta(0) \ = \ z^0$
- $$\begin{aligned} C(tz+(1-t)\eta)(T) &= tCz(T) + (1-t)C\eta(T) \\ &= 0 \end{aligned}$$

<u>$\mathcal{U}_{\text{ad}}$ est fermé</u>

Soit $(\binom{v_n}{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{U}_{\text{ad}}$, on suppose qu'elle est convergente vers $\binom{v}{z}$, et on montre que $\binom{v}{z} \ \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$

Par hypothèse on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n_0 \geq n : \| \begin{pmatrix} v_n \\ z_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \times \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} < \varepsilon$$

Alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n_0 \geq n : \|v_n - v\|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} + \|z_n - z\|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})} < \varepsilon$$

Ceci implique :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n_0 \geq n$

$$\|(v_n - v)\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} \leq \varepsilon$$

$$\|(z_n - z)\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})} \leq \varepsilon$$

Alors on peut déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = v \ \text{ dans } \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \tag{2.2.2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \ \text{ dans } \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z}) \tag{2.2.3}$$

- De (2.2.2) et (2.2.3) on en déduit que : $\binom{v}{z} \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \times \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})$ (comme $\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}), \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})$ sont des espaces fermés), et par conséquent : $\dfrac{dz}{dt} - Az - Bv = 0$

$$\begin{aligned} z(0) &= \lim_{n\to+\infty} z_n(0) \\ &= \lim_{n\to+\infty} z^0 \\ &= z^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cz(T) &= C\lim_{n\to+\infty} z_n(T) \\ &= \lim_{n\to+\infty} Cz_n(T) \\ &= 0 \end{aligned}$$

alors d'après le théorème 1.1 chap 1 [13] le problème (2.2.1) admet une solution unique.

• La question posée est la suivante : le problème (2.2.1) admet une solution unique peut-on la caractériser par un système d'optimalité **S.O** ?
Pour répondre à cette question on adopte une méthode générale c'est **la méthode de pénalisation** introduite par Lions [12] pour laquelle on suit les étapes :

Étape 1

Dans cette étape on approche le problème de minimisation (2.2.1) par une famille de problèmes pénalisés où z et v deviennent des variables indépendantes, puis on montre l'existence et l'unicité de la solution du problème pénalisé.
On introduit l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\text{pn}} \;=\; \{\; & (v,z) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \times \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z}) \text{ tel que :} \\ & \frac{dz}{dt} - Az - Bv \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z}) \\ & z(0) = z^0 \\ & Cz(T) = 0 \;\} \end{aligned}$$

• Notons que L'ensemble $\mathcal{U}_{\text{pn}}$ n'est pas vide : pour chaque $v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ le couple $(v, z(v))$ est un élément de cet ensemble.
• L'ensemble $\mathcal{U}_{\text{pn}}$ muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_{\mathcal{U}_{\text{pn}}}$ induit de la norme $\|.\|_{\mathcal{U}_{\text{pn}}}$ définie par :

$$\left\| \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{U}_{\text{pn}}} = \left(\|v\|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} + \|z\|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})} + \left\|\frac{dz}{dt} - Az\right\|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})}\right)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Hilbert.

• Définissons sur $\mathcal{U}_{\text{pn}}$ la fonctionnelle J_ε telle que :

$$J_\varepsilon(v,z) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^T \|v\|_{\mathbb{U}}^2\,dt \;+\; \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T \|\frac{dz}{dt} - Az - Bv\|_{\mathbb{Z}}^2\,dt$$

• Le terme $\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T \|\frac{dz}{dt}(t) - Az(t) - Bv(t)\|_{\mathbb{Z}}^2\,dt$ est dit terme de pénalisation.

Maintenant on considère le nouveau problème de minimisation dont on dit qu'il est déduit de (2.2.1) par pénalisation :

$$\inf_{v,z} J_\varepsilon(v,z) \tag{2.2.4}$$

Théorème 2.2.1. *Pour chaque* $\varepsilon > 0$ *le problème* (2.2.4) *admet une solution unique tel que :*

$$\inf_{v,z} J_\varepsilon(v,z) = J_\varepsilon(u_\varepsilon, z_\varepsilon)$$

Démonstration. Avant de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème pénalisé (2.2.4) , on prouve d'abord que :

1. $\mathcal{U}_{\text{pn}}$ est un ensemble convexe et fermé.
2. La fonctionnelle J_ε est strictement convexe et semi-continue inférieurement.

<u>$\mathcal{U}_{\text{pn}}$ est convexe</u>

Soit $t \in [0,1]$ et $\binom{v}{z}, \binom{u}{\eta} \in \mathcal{U}_{\text{pn}}$ on montre que :

$t(\binom{v}{z}) + (1-t)(\binom{u}{\eta}) \in \mathcal{U}_{\text{pn}}$ c-à-d : $\binom{tv+(1-t)u}{tz+(1-t)\eta} \in \mathcal{U}_{\text{pn}}$

• Comme $\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})$ et $\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})$ sont des espaces de Hilbert (espaces vectoriels) alors $((tv+(1-t)u),(tz+(1-t)\eta)) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \times \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})$

• $\dfrac{d(tz+(1-t)\eta)}{dt} - A(tz+(1-t)\eta) - B(tv+(1-t)u)$
$= t(\dfrac{dz}{dt} - Az - Bv) + (1-t)(\dfrac{d\eta}{dt} - A\eta - Bu) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})$

• $(tz+(1-t)\eta)(0) = tz(0) + (1-t)\eta(0) \;=\; z^0$

• $$\begin{aligned} C(tz+(1-t)\eta)(T) &= tCz(T) + (1-t)C\eta(T) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\mathcal{U}_{\text{pn}}$ est fermé

Soit $(\binom{v_n}{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{U}_{\text{pn}}$, on suppose qu'elle est convergente vers $\binom{v}{z}$ par rapport à la norme $\|.\|_{\mathcal{U}_{\text{pn}}}$, et on montre que $\binom{v}{z} \in \mathcal{U}_{\text{pn}}$

Par hypothèse on a :

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n_0 \geq n : \| \begin{pmatrix} v_n \\ z_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \|_{\mathcal{U}_{\text{pn}}} < \varepsilon$$

Alors :

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n_0 \geq n : \| \begin{pmatrix} v_n - v \\ z_n - z \end{pmatrix} \|_{\mathcal{U}_{\text{pn}}} < \varepsilon$$

Par définition de la norme dans l'ensemble $\mathcal{U}_{\text{pn}}$ on obtient :

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n_0 \geq n : \|v_n - v\|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} + \|z_n - z\|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})} + \|(\frac{dz_n}{dt} - \frac{dz}{dt}) - A(z_n - z)\|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})} < \varepsilon^2$$

Ceci implique :

$\forall\varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n_0 \geq n$

$$\|(v_n - v)\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} \leq \varepsilon$$

$$\|(z_n - z)\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})} \leq \varepsilon$$

et :

$$\|(\frac{dz_n}{dt} - \frac{dz}{dt}) - A(z_n - z)\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})} < \varepsilon$$

Alors on peut déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = v \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \tag{2.2.5}$$

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z}) \tag{2.2.6}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{dz_n}{dt} - Az_n = \frac{dz}{dt} - Az \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z}) \tag{2.2.7}$$

• De (2.2.5) et (2.2.6) on en déduit que : $\binom{v}{z} \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \times \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})$ (comme $\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}), \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})$ sont des espaces fermés).

• De (2.2.7) on déduit que : $z' - Az - Bv \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned} z(0) &= \lim_{n\to+\infty} z_n(0) \\ &= \lim_{n\to+\infty} z^0 \\ &= z^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cz(T) &= C \lim_{n\to+\infty} z_n(T) \\ &= \lim_{n\to+\infty} Cz_n(T) \\ &= y_d \end{aligned}$$

J_ε est semi-continue inférieurement (s.c.i)

On remarque qu'on peut réécrire la fonctionnelle J_ε sous la forme suivante :

$$J_\varepsilon(v,z) = \frac{1}{2}a(\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}) - \langle l, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}\rangle \tag{2.2.8}$$

tel que : l : $\mathcal{U}_{\text{pn}} \longrightarrow \mathbb{R} \quad l = 0$

l est une forme linéaire et continue

a(.,.) est défini par :

$$\begin{array}{lccc} a(.,.): & \mathcal{U}_{\text{pn}} \times \mathcal{U}_{\text{pn}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\binom{v}{z}, \binom{u}{\eta}) & \longmapsto & a(\binom{v}{z}, \binom{u}{\eta}) \end{array}$$

$$a(\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix}) = \int_0^T \langle u, v\rangle_{\mathbb{U}}\, dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \langle \frac{dz}{dt}(t) - Az(t) - Bv(t), \frac{d\eta}{dt}(t) - A\eta(t) - Bu(t)\rangle_{\mathbb{Z}}\, dt \tag{2.2.9}$$

$a(.,.)$ est une forme bilinéaire, symétrique et vérifie que :

$$a(\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}) \geq 0$$

Alors d'après le théorème (2,XXIII,1 ;3) page 388 chap XXIII [15] la forme $a(.,.)$ vérifie l'inégalité suivante :

$$|a(\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix})|_{\mathbb{R}} \leq \sqrt{a(\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix})}\sqrt{a(\begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix})}$$

Alors :

$$
\begin{aligned}
|a(\tbinom{v}{z},\tbinom{u}{\eta})|_{\mathbb{R}} \quad \leq \quad & (\int_0^T \|v\|_{\mathbb{U}}^2\ dt \ + \ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \|\frac{dz}{dt} - Az - Bv\|_{\mathbb{Z}}^2\ dt)^{\frac{1}{2}} \\
& \times(\int_0^T \|u\|_{\mathbb{U}}^2\ dt \ + \ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \|\frac{d\eta}{dt} - A\eta - Bu\|_{\mathbb{Z}}^2\ dt)^{\frac{1}{2}} \\
= \quad & (\int_0^T \|v\|_{\mathbb{U}}^2\ dt \ + \ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \|\frac{dz}{dt}(t) - Az(t)\|_{\mathbb{Z}}^2 dt \\
& +\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \|Bv(t)\|_{\mathbb{Z}}^2\ dt \\
& +\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T -2\langle\frac{dz}{dt}(t) - Az(t), Bv(t)\rangle_{\mathbb{Z}} dt)^{\frac{1}{2}} \\
& \times(\int_0^T \|u\|_{\mathbb{U}}^2\ dt \ + \ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \|\frac{d\eta}{dt}(t) - A\eta(t)\|_{\mathbb{Z}}^2 dt \\
& +\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \|Bu(t)\|_{\mathbb{Z}}^2\ dt \\
& +\frac{1}{2}\int_0^T -2\langle\frac{d\eta}{dt}(t) - A\eta(t), Bu(t)\rangle \mathbb{Z} dt)^{\frac{1}{2}} \\
\leq \quad & (\int_0^T \|v\|_{\mathbb{U}}^2\ dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \|\frac{dz}{dt}(t) - Az(t)\|_{\mathbb{Z}}^2 dt \\
& +\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \|B\|^2\|v(t)\|_{\mathbb{U}}^2\ dt \\
& +\frac{2}{\varepsilon}\int_0^T \|\frac{dz}{dt}(t) - Az(t)\|_{\mathbb{Z}}\|Bv(t)\|_{\mathbb{Z}} dt)^{\frac{1}{2}} \\
& \times(\int_0^T \|u(t)\|_{\mathbb{U}}^2\ dt \\
& +\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \|\frac{d\eta}{dt}(t) - A\eta(t)\|_{\mathbb{Z}} dt \\
& +\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \|B\|^2\|u(t)\|_{\mathbb{U}}^2\ dt \\
& +\frac{2}{\varepsilon}\int_0^T \|\frac{d\eta}{dt}(t) - A\eta(t)\|_{\mathbb{Z}}\|Bu(t)\|_{\mathbb{Z}} dt)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Alors :

$$\begin{aligned}
|a(\tbinom{v}{z},\tbinom{u}{\eta})|_{\mathbb{R}} &\leq ((\frac{2}{\varepsilon}\|B\|^2+1)\int_0^T \|v(t)\|_{\mathbb{U}}^2\, dt \\
&+\frac{2}{\varepsilon}\int_0^T \|\frac{dz}{dt}(t)-Az(t)\|_{\mathbb{Z}}dt+\int_0^T \|z\|_{\mathbb{Z}}^2 dt-\int_0^T \|z\|_{\mathbb{Z}}^2 dt)^{\frac{1}{2}} \\
&\times((\frac{2}{\varepsilon}\|B\|^2+1)\int_0^T \|u(t)\|_{\mathbb{U}}^2\, dt \\
&+\frac{2}{\varepsilon}\int_0^T \|\frac{d\eta}{dt}(t)-A\eta(t)\|_{\mathbb{Z}}dt+\int_0^T \|\eta\|_{\mathbb{Z}}^2 dt-\int_0^T \|\eta\|_{\mathbb{Z}}^2 dt)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \max\{\frac{2}{\varepsilon}\|B\|^2+1,\frac{2}{\varepsilon}\}\|\tbinom{v}{z}\|_{\mathcal{U}_{\text{pn}}}\|\tbinom{u}{\eta}\|_{\mathcal{U}_{\text{pn}}}
\end{aligned}$$

Alors : $\exists\ c=\max\{\frac{2}{\varepsilon}\|B\|^2+1,\frac{2}{\varepsilon}\}>0$ tel que :

$$|a(\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix},\begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix})|_{\mathbb{R}} \leq c\|\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}\|_{\mathcal{U}_{\text{pn}}}\|\begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix}\|_{\mathcal{U}_{\text{pn}}} \tag{2.2.10}$$

Alors la forme $a(.,.)$ est continue, tenant compte (2.2.8) on peut déduire que la fonctionnelle J_ε est continue et donc elle est semi continue inférieurement.

<u>J_ε est strictement convexe</u>

Soit $t\in[0,1]$ et soit $\binom{v}{z},\binom{u}{\eta}\in\mathcal{U}_{\text{pn}}$

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon(t\tbinom{v}{z} + (1-t)\tbinom{u}{\eta}) &= J_\varepsilon\tbinom{tv+(1-t)u}{tz+(1-t)\eta} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \|tv+(1-t)u\|_{\mathbb{U}}^2\, dt \\
&\quad + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T \|\frac{d(tz+(1-t)\eta)}{dt} - A(tz+(1-t)\eta) - B(tv+(1-t)u)\|_{\mathbb{Z}}^2\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T t^2\|v\|_{\mathbb{U}}^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T (1-t)^2\|u\|_{\mathbb{U}}^2 dt \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^T 2\langle tv, (1-t)u\rangle_{\mathbb{U}} dt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T t^2\|\tfrac{dz}{dt} - Az - Bv\|_{\mathbb{Z}}^2 dt \\
&\quad + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T (1-t)^2\|\frac{d\eta}{dt} - A\eta - Bu\|_{\mathbb{Z}}^2 dt \\
&\quad + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T 2\langle t(\frac{dz}{dt} - Az - Bv), (1-t)(\frac{d\eta}{dt} - A\eta - Bu)\rangle_{\mathbb{U}} dt \\
&< \frac{1}{2}\int_0^T t^2\|v\|_{\mathbb{U}}^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T (1-t)^2\|u\|_{\mathbb{U}}^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T t(1-t)\|v\|_{\mathbb{U}}^2 \\
&\quad + t(1-t)\|u\|_{\mathbb{U}}^2 dt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T t^2\|\frac{dz}{dt} - Az - Bv\|_{\mathbb{Z}}^2 dt \\
&\quad + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T (1-t)^2\|\frac{d\eta}{dt} - A\eta - Bu\|_{\mathbb{Z}}^2 dt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T t(1-t)\|(\frac{dz}{dt} - Az - Bv)\|_{\mathbb{Z}}^2 dt \\
&\quad + t(1-t)\|(\frac{d\eta}{dt} - A\eta - Bu)\|_{\mathbb{Z}}^2 dt \\
&= tJ_\varepsilon\tbinom{v}{z} + (1-t)J_\varepsilon\tbinom{u}{\eta}
\end{aligned}$$

• On montre maintenant l'existence et l'unicité du problème (2.2.4).

<u>Existence</u>

On pose : $\lambda = \inf\limits_{v,z} J_\varepsilon(v,z)$

Par définition de la borne inférieure on a :

$$\forall\delta > 0\ \exists\begin{pmatrix} v_\delta \\ z_\delta \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{\text{pn}} \text{ tel que : } \lambda + \delta > J_\varepsilon(v_\delta, z_\delta) \tag{2.2.11}$$

Si on prend : $\delta = \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*$ dans (2.2.11) alors on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \exists \begin{pmatrix} v_n \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{\text{pn}} \text{ tel que : } \lambda \leq J_\varepsilon(v_n, z_n) < \lambda + \frac{1}{n}$$

Alors on en déduit qu-il existe une suite minimisante $\binom{v_n}{z_n} \in \mathcal{U}_{\text{pn}}$ tel que :

$$J_\varepsilon(v_n, z_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda \tag{2.2.12}$$

Donc la fonctionnelle J_ε est bornée et selon sa structure on déduit que :
$\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\|v_n\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} \leq \sqrt{k} \tag{2.2.13}$$

$$\|\frac{dz_n}{dt} - Az_n - Bv_n\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})} \leq \sqrt{k\varepsilon} \tag{2.2.14}$$

D'après l'inégalité (2.2.14) et comme l'opérateur A engendrant un C_0-Semi groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ alors pour toute donnée initiale $z^0 \in \mathbb{Z}$ l'équation différentielle $z_n'(t) = Az_n(t) + f(t)$ tel que : $f(t) = Bv_n(t) + \sqrt{\varepsilon k}$ admet une solution unique z_n tel que : $z_n \in \mathcal{C}(0, T; \mathbb{Z})$.
Alors la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{Z})$ et donc :

$$\exists c > 0 \text{ tel que : } \|z_n\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})} \leq c \tag{2.2.15}$$

Insérant (2.2.13) , (2.2.14) et (2.2.15) on déduit que la suite $(\binom{v_n}{z_n})_{n \geq 0}$ est bornée dans $\mathcal{U}_{\text{pn}}$.Alors on peut extraire une sous-suite notée encore $(\binom{v_n}{z_n})_{n \geq 0}$ convergente tel que :

$$v_n \rightharpoonup u_\varepsilon \text{ dans } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{U}) \text{ (faible)}$$

$$z_n \rightharpoonup z_\varepsilon \text{ dans } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{Z}) \text{ (faible)}$$

Comme $\mathcal{U}_{\text{pn}}$ est convexe et fermé et la suite $(\binom{v_n}{z_n})_{n \geq 0} \in \mathcal{U}_{\text{pn}}$ et converge faiblement vers $\binom{u_\varepsilon}{z_\varepsilon}$ alors : $\binom{u_\varepsilon}{z_\varepsilon} \in \mathcal{U}_{\text{pn}}$.
D'autre part comme J_ε est convexe et s.c.i alors J_ε est s.c.i faiblement et donc :

$$\begin{aligned} \binom{v_n}{z_n} \underset{\mathcal{U}_{\text{pn}}}{\rightharpoonup} \binom{u_\varepsilon}{z_\varepsilon} \implies J_\varepsilon\binom{u_\varepsilon}{z_\varepsilon} &\leq \liminf_{n \to +\infty} J_\varepsilon\binom{v_n}{z_n} \\ &\leq \lambda \\ &\leq J_\varepsilon\binom{v}{z} \quad \forall \binom{v}{z} \in \mathcal{U}_{\text{pn}} \end{aligned}$$

Alors : $\binom{u_\varepsilon}{z_\varepsilon}$ est une solution du problème (2.2.4).

Unicité

On suppose que le problème (2.2.4) admet deux solutions $\binom{v_1}{z_1}, \binom{v_2}{z_2} \in \mathcal{U}_{\text{pn}}$ et comme $\mathcal{U}_{\text{pn}}$ est convexe alors :

$$\forall t \in [0,1] : t\begin{pmatrix} v_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix} v_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{\text{pn}}$$

Comme J_ε est strictement convexe alors :

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(t\tbinom{v_1}{z_1} + (1-t)\tbinom{v_2}{z_2}) &< tJ_\varepsilon(\tbinom{v_1}{z_1}) + (1-t)J_\varepsilon\tbinom{v_2}{z_2} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Contradiction et donc l'unicité de la solution du problème (2.2.4). $\square$

Étape 2

Maintenant on va montrer que :

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} J(u_\varepsilon) \;=\; J(\hat{v}) \text{ avec } \inf_{v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} J(v) \;=\; J(\hat{v})$$

Par hypothèse l'ensemble $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ n'est pas vide alors pour $v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ on a :

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, z_\varepsilon) \leq J(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \;\; \forall \varepsilon > 0 \tag{2.2.16}$$

Ceci implique :

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, z_\varepsilon) \leq \inf_{v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} J(v) \tag{2.2.17}$$

D'après l'inégalité (2.2.17), il résulte que la fonctionnelle J_ε est bornée, alors on peut déduire que : $\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\frac{1}{2}\int_0^T \|u_\varepsilon\|_{\mathbb{U}}^2 \, dt \;+\; \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T \|\frac{dz_\varepsilon}{dt} - Az_\varepsilon - Bu_\varepsilon\|_{\mathbb{Z}}^2 \, dt \;\leq\; \inf_{v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} J(v) \;<\; k \tag{2.2.18}$$

Alors on obtient les inégalités suivantes :

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} \;\leq\; \sqrt{k} \tag{2.2.19}$$

$$\|\frac{dz_\varepsilon}{dt} - Az_\varepsilon - Bu_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})} \;\leq\; \sqrt{\varepsilon k} \tag{2.2.20}$$

De (2.2.20) il résulte que :

$$\exists\; M \in \mathbb{R}_+^* \text{ telle que : } \|z_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})} \leq M \tag{2.2.21}$$

(2.2.19) joint à (2.2.20) et (2.2.21) montre que la suite $(\binom{u_\varepsilon}{z_\varepsilon})_{n\geq 0}$ est bornée dans $\mathcal{U}_{\text{pn}}$. Alors on peut extraire une sous-suite notée encore $(\binom{u_\varepsilon}{z_\varepsilon})_{n\geq 0}$ convergente tel que :

$$u_\varepsilon \rightharpoonup \hat{v} \text{ dans } \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \ (faible)$$

$$z_\varepsilon \rightharpoonup \hat{z} \text{ dans } \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z}) \ (faible)$$

D'après (2.2.20) et comme $(\hat{v},\hat{z}) \in \mathcal{U}_{\text{pn}}$ on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{z}}{dt} - A\hat{z} - B\hat{v} = 0 \\ \hat{z}(0) = z^0 \\ 0 = C\hat{z}(T) \end{cases} \tag{2.2.22}$$

alors :

$$\hat{v} \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$$

De (2.2.17) on obtient :

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_{v\in\mathcal{U}_{\text{ad}}} J(v) \tag{2.2.23}$$

Par ailleurs on a :

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, z_\varepsilon) \geq J(u_\varepsilon) \tag{2.2.24}$$

Tenant compte de la semi-continuité inférieure de J on a :

$$u_\varepsilon \ \rightharpoonup \ \hat{v} \quad \Longrightarrow \quad J(\hat{v}) \ \leq \ \liminf_{\varepsilon\longrightarrow 0} J(u_\varepsilon) \tag{2.2.25}$$

Insérant (2.2.25) et (2.2.24) on obtient :

$$J(\hat{v}) \ \leq \ \liminf_{\varepsilon\longrightarrow 0} J(u_\varepsilon) \ \leq \ \liminf_{\varepsilon\longrightarrow 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon, z_\varepsilon) \tag{2.2.26}$$

(2.2.17) implique :

$$\liminf_{\varepsilon\longrightarrow 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon, z_\varepsilon) \ \leq \ \inf_{v\in\mathcal{U}_{\text{ad}}} J(v) \leq \ J(\hat{v}) \tag{2.2.27}$$

(2.2.26) joint à (2.2.27) on obtient :

$$J(\hat{v}) \leq \liminf_{\varepsilon\longrightarrow 0} J(u_\varepsilon) \leq \liminf_{\varepsilon\longrightarrow 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon, z_\varepsilon) \leq \inf_{v\in\mathcal{U}_{\text{ad}}} J(v) \ \leq \ J(\hat{v}) \tag{2.2.28}$$

De (2.2.28) et (2.2.26) on déduit que :

$$\inf_{v\in\mathcal{U}_{\text{ad}}} J(v) \ = \ J(\hat{v}) \text{ et } \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} J(u_\varepsilon) \ = \ J(\hat{v})$$

Reste à montrer la convergence forte de :

$$u_\varepsilon \longrightarrow \hat{v} \text{ dans } \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})$$

$$z_\varepsilon \longrightarrow \hat{z} \text{ dans } \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})$$

On pose :

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, z_\varepsilon) = \alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon$$

Où :

$$\alpha_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^T \|u_\varepsilon\|^2_{\mathbb{U}}\ dt$$

$$\beta_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T \|\frac{dz_\varepsilon}{dt} - Az_\varepsilon - Bu_\varepsilon\|^2_{\mathbb{Z}}\ dt$$

Comme

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, z_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} J_\varepsilon(\hat{v}, \hat{z}) = J(\hat{v})$$

Alors :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon) \longrightarrow \alpha$$

Où :

$$\alpha = \frac{1}{2}\int_0^T \|\hat{v}\|^2_{\mathbb{U}}\ dt$$

Comme $\liminf\limits_{\varepsilon\to 0}\alpha_\varepsilon \geq \alpha$ (grâce à la convergence faible) on peut déduire que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \alpha_\varepsilon = \alpha \tag{2.2.29}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \beta_\varepsilon = 0 \tag{2.2.30}$$

De (2.2.29) et (2.2.30) on en déduit que :

$$u_\varepsilon \longrightarrow \hat{v} \text{ dans } \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \text{ fort}$$

$$z_\varepsilon \longrightarrow \hat{z} \text{ dans } \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z}) \text{ fort}$$

Étape 3

D'après la première étape le problème pénalisé (2.2.4) admet une solution unique, alors elle est caractérisée par l'équation d'Euler suivante :

$$2a(\begin{pmatrix} u_\epsilon \\ z_\epsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \eta \end{pmatrix}) \ = \ 0 \quad \forall \begin{pmatrix} v \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{\text{pn}} \tag{2.2.31}$$

Alors :

$$\frac{1}{2}\int_0^T \langle u_\varepsilon, v\rangle_{\mathbb{U}}\ dt \ + \ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \langle \frac{dz_\varepsilon}{dt} - Az_\varepsilon - Bu_\epsilon, \frac{d\eta}{dt} - A\eta - Bv\rangle_{\mathbb{Z}}\ dt = 0 \ \ \forall \begin{pmatrix} v \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{\mathrm{pn}} \tag{2.2.32}$$

Si on pose : $P_\varepsilon \ = \ -\frac{1}{\varepsilon}\ (\frac{dz_\varepsilon}{dt} - Az_\varepsilon - Bu_\varepsilon)$ alors l'équation (2.2.32) relative au problème (2.2.4) est donnée par :

$$\frac{1}{2}\int_0^T \langle u_\varepsilon, v\rangle_{\mathbb{U}}\ dt \ - \ \int_0^T \langle P_\varepsilon, \frac{d\eta}{dt} - A\eta - Bu\rangle_{\mathbb{Z}}\ dt \ = \ 0 \tag{2.2.33}$$

pour chaque couple $\binom{v}{\eta}$ vérifie :

$$\begin{cases} (v,\eta) \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U}) \times \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z}) \\ \dfrac{d\eta}{dt} - A\eta - Bv \ \in \mathbb{L}^2(0.T;\mathbb{Z}) \\ \eta(0) = z^0 \\ 0 = C\eta(T) \end{cases} \tag{2.2.34}$$

Moyennant l'intégration par partie dans (2.2.33) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^T \langle u_\varepsilon, v\rangle_{\mathbb{U}}\ dt \ - \ \int_0^T \langle P_\varepsilon, \frac{d\eta}{dt} - A\eta - Bv\rangle_{\mathbb{Z}}\ dt \ &= \ \frac{1}{2}\int_0^T \langle u_\varepsilon, v\rangle_{\mathbb{U}}\ dt \\ &\quad - \int_0^T \langle P_\varepsilon, \frac{d\eta}{dt}\rangle_{\mathbb{Z}}\ dt + \int_0^T \langle A^*\ P_\varepsilon, \eta\rangle_{\mathbb{Z}}\ dt \\ &= \ + \int_0^T \langle B^* P_\varepsilon, v\rangle_{\mathbb{U}} dt \\ &= \ \frac{1}{2}\int_0^T \langle u_\varepsilon, v\rangle_{\mathbb{U}}\ dt \ - \ \langle P_\varepsilon(T), \eta(T)\rangle_{\mathbb{Z}} + \ \langle P_\varepsilon(0), \eta(0)\rangle_{\mathbb{Z}} \\ &\quad + \int_0^T \langle \frac{dP_\varepsilon}{dt}, \eta\rangle_{\mathbb{Z}}\ dt + \int_0^T \langle A^*\ P_\varepsilon, \eta\rangle_{\mathbb{Z}}\ dt \\ &\quad + \int_0^T \langle B^* P_\varepsilon, v\rangle_{\mathbb{U}} dt \\ &= \ 0 \end{aligned}$$

Alors on peut déduire que :

$$\begin{cases} \dfrac{dP_\varepsilon}{dt} \ + \ A^* P_\varepsilon = 0 \\ P_\varepsilon(T) = P_\varepsilon^0 \\ -B^* P_\varepsilon \ = \ u_\varepsilon \end{cases} \tag{2.2.35}$$

Avec :

$$\begin{cases} \langle P_\varepsilon(T), \eta(T)\rangle_{\mathbb{Z}} = 0 \quad \forall \eta(T) \in \ker C \\ \langle P_\varepsilon(0), z^0\rangle_{\mathbb{Z}} = 0 \end{cases}$$

Étape 4

Lemme 2.2.1. *Pour chaque $\varepsilon > 0$ on a :*

$$\|P_\varepsilon\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})} \leq c \quad (c \in \mathbb{R}_+^*) \tag{2.2.36}$$

Démonstration. Par hypothèse le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable alors selon le corollaire (1.2.2) chap 1 on a :
$\exists \gamma > 0$ tel que :

$$\int_0^T \|B^*\varphi\|_{\mathbb{U}}^2 dt \ \geq \ \gamma \|\varphi_0\|_{\mathbb{Z}}^2$$

Pour chaque φ solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} + A^*\varphi = 0 \\ \varphi(T) = \varphi^0 \in (\ker C)^\perp \end{cases}$$

Alors : $\exists \gamma > 0$ tel que :

$$\int_0^T \|B^* P_\varepsilon\|_{\mathbb{U}}^2 dt \ \geq \ \gamma \|P_\varepsilon(T)\|_{\mathbb{Z}}^2$$

Pour P_ε solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{dP_\varepsilon}{dt} + A^* P_\varepsilon = 0 \\ P_\varepsilon(T) = P_\varepsilon^0 \in (\ker C)^\perp \end{cases}$$

Mais comme : $B^* P_\varepsilon = -u_\varepsilon$ alors :
$\exists \gamma > 0$ tel que :

$$\int_0^T \|u_\varepsilon\|_{\mathbb{U}}^2 dt \ \geq \ \gamma \|P_\varepsilon(T)\|_{\mathbb{Z}}^2$$

Donc : $P_\varepsilon(T)$ est borné dans $\mathbb{Z}$.
Comme $P_\varepsilon(t) = S(t) P_\varepsilon(T)$ alors on déduit que : P_ε est borné dans $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{Z})$. $\square$

Étape 5

Comme $(P_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est borné dans $\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z})$, alors on peut extraire une sous suite notée encore $(P_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ tel que : on a lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$P_\varepsilon \longrightarrow P \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z}) \tag{2.2.37}$$

et la fonction P est une solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} + A^*P = 0 \\ P(T) = P^0 \in (\ker C)^\perp \\ -B^*P = \hat{v} \end{cases} \tag{2.2.38}$$

Avec :

$$\begin{cases} \langle P(T), \eta(T)\rangle_{\mathbb{Z}} = 0 \\ \langle P(0), \eta(0)\rangle_{\mathbb{Z}} = 0 \\ \dfrac{d\eta}{dt}(t) - A\eta - B\hat{v} \ \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{Z}) \\ \eta(0) = z^0 \\ C\eta(T) = 0 \end{cases}$$

Étape 6

On considère l'espace suivant :

$G = (\ker C)$, G est un sous espace fermé de $\mathbb{Z}$.

On introduit $G^\perp = (\ker C)^\perp \subseteq \mathbb{Z}$ espace orthogonale de G.

On pose : $\Phi = P$, $\Phi^0 = P^0$ et $\Psi = \hat{z}$

D'après (2.2.22) et (2.2.38) on a :

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi}{dt} + A^*\Phi = 0 \\ \Phi(T) = \Phi^0 \in G^\perp \quad (2) \\ -B^*\Phi = \hat{v} \\ \dfrac{d\Psi}{dt} = A\Psi + B\hat{v} \\ \Psi(0) = z^0 \\ C\Psi(T) = 0 \end{cases} \tag{S.O}$$

Si l'on peut trouver Φ^0 avec (2) tel que : $\Psi(T) \in G \quad (3)$ alors $\hat{v} = -B^*\Phi$ donne un contrôle désirable et on a :$\Psi = \hat{z}$.

Pour exprimer (3) par une équation il est naturelle d'introduire l'opérateur suivant :
Π projection orthogonale dans $\mathbb{Z}$ sur l'espace $G^{\perp}$.
$\Pi : \mathbb{Z} \longrightarrow G^{\perp}$
Puis on définit l'opérateur M.
$M : G^{\perp} \longrightarrow G^{\perp}$ tel que : $M\{-\Phi^0\} = \Pi\{\Psi(T)\}$
On a ainsi défini un opérateur affine M de $\mathbb{Z}$ sur l'espace $G^{\perp}$.
L'objectif est d'avoir :

$$\Psi(T) \in G$$

c'est à dire :

$$\Pi\{\Psi(T)\} = 0$$

Par conséquent tout revient à résoudre l'équation :

$$M\{-\Phi^0\} = 0$$

Décomposons M en sa partie linéaire + partie constante.
Introduisons Ψ_1 solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{d\Psi_1}{dt} = A\Psi_1 \\ \Psi_1(0) = z^0 \end{cases}$$

et Ψ_2 solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{d\Psi_2}{dt} = A\Psi_2 - BB^*\Psi_2 \\ \Psi_2(0) = 0 \end{cases}$$

On a alors :
$M\{-\Phi^0\} = \Pi\{\Psi(T)\}$
$\Psi(T) = \Psi_1(T) + \Psi_2(T)$

$$\begin{aligned} M\{-\Phi^0\} &= \Pi(\Psi_1(T) + \Psi_2(T)) \\ &= \Pi\{\Psi_1(T)\} + \Pi\{\Psi_2(T)\} \end{aligned}$$

Si on pose : $M_0\{-\Phi^0\} = \Pi\{\Psi_2(T)\}$
Alors tout revient à résoudre l'équation :

$$M_0\{-\Phi^0\} = -\Pi\{\Psi_1(T)\} \tag{2.2.39}$$

L'opérateur M_0 vérifie :

$$M_0 \in \mathcal{L}(G^{\perp}, G^{\perp}) \text{ et } M_0 = M_0^*$$

Calculons le produit scalaire : $\mu = \langle M_0\{-\Phi^0\}, \{-\Phi^0\}\rangle$
Par définition on a :

$$\langle \Pi\{\Psi_2^0\} - \{\Psi_2^0\}, \widetilde{g}\rangle = 0 \ \ \forall \widetilde{g} \in G^{\perp} \tag{2.2.40}$$

Appliquons (2.2.40) avec : $\widetilde{g} = -\Phi^0, \Psi_2^0 = \Psi(T)$ alors on obtient :

$$\langle \Pi\{\Psi_2(T)\} - \{\Psi_2(T)\}, -\Phi^0\rangle = 0$$

Alors :

$$\langle \Pi\{\Psi_2(T)\}, -\Phi^0\rangle + \langle -\Psi_2(T), -\Phi^0\rangle = 0$$

Donc :

$$\langle M_0\{-\Phi^0\}, \{-\Phi^0\}\rangle = \langle \Psi_2(T), -\Phi^0\rangle$$

Il résulte que : $\mu = \langle \Psi_2(T), -\Phi^0\rangle$
Multipliant

$$\begin{cases} \dfrac{d\Psi_2}{dt} = A\Psi_2 - BB^*\Psi_2 \\ \Psi_2(0) = 0 \end{cases}$$

par Φ on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_2', \Phi\rangle &= \langle A\Psi_2, \Phi\rangle - \langle BB^*\Phi, \Phi\rangle \\ &= \langle \Psi_2, A^*\Phi\rangle - \langle B^*\Phi, B^*\Phi\rangle \end{aligned}$$

Ceci implique :

$$\begin{aligned} \|B^*\Phi\|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} &= \langle \Psi_2, A^*\Phi\rangle - \langle \frac{d\Psi_2}{dt}, \Phi\rangle \\ &= \langle \Psi_2, A^*\Phi\rangle - \langle \Psi_2, \Phi\rangle|_0^T - \langle \frac{d\Psi_2}{dt}, \frac{d\Phi}{dt}\rangle \\ &= \langle \Psi_2, A^*\Phi + \Phi'\rangle - \langle \Psi_2(T), \Phi(T)\rangle \\ &= \mu \\ &= \langle M_0\{-\Phi^0\}, \{-\Phi^0\}\rangle \end{aligned}$$

Alors M_0 est isomorphisme et l'équation (2.2.39) admet une solution unique Φ^0 et donc : $-B^*\Phi = \hat{v}$ et le système (S.O) est bien posé.

Chapitre 3

Contrôlabilité d'un système de contrôle frontière

Dans ce chapitre on étudie en utilisant les résultats obtenus dans le premier chapitre, la contrôlabilité d'un système de contrôle frontière décrit par :

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt}(t) = Lz(t) \\ Gz(t) = u(t) \\ y(t) = Cz(t) \\ z(0) = z^0 \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{II}$$

où :

$$\begin{array}{llcll} L: & \mathbb{X} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & L \text{ est un opérateur linéaire borné.} \\ G: & \mathbb{X} & \longrightarrow & U & G \text{ est un opérateur linéaire borné.} \\ C: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Y} & C \text{ est un opérateur linéaire borné.} \end{array}$$

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ sont des espaces de Hilbert munis des produits scalaires et des normes notés par :

$\langle .,. \rangle_{\mathbb{Z}}$, $\langle .,. \rangle_{\mathbb{U}}$, $\langle .,. \rangle_{\mathbb{Y}}$, $\langle .,. \rangle_{\mathbb{X}}$

et

$\|.\|_{\mathbb{Z}}$, $\|.\|_{\mathbb{U}}$, $\|.\|_{\mathbb{Y}}$, $\|.\|_{\mathbb{X}}$ respectivement.

$\mathbb{X}$ est dense dans $\mathbb{Z}$ avec injection continue.

3.1 Étude de contrôlabilité d'un système de contrôle frontière

L'approche qui va être suivie est comme suit :

1. **Formulation abstraite d'un système de contrôle frontière** On transforme le système (II) sous la forme abstraite :

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad z(0) = z^0 \in \mathbb{Z} \\ y(t) = Cz(t) \end{cases} \tag{III}$$

   Où :

$$Af = Lf \quad \forall f \in \mathcal{D}(A) = \ker\{G\} \cap \mathcal{D}(L)$$

   L'opérateur $B \in \mathcal{L}(U, (\mathcal{D}(A^*))'$ est déterminé par la formule suivante :

$$\langle Lz, \psi \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle z, A^*\psi \rangle_{\mathbb{Z}} + \langle Gz, B^*\psi \rangle_{\mathbb{U}} \quad \forall z \in \mathbb{X}, \psi \in \mathcal{D}(A^*) \tag{3.1.1}$$

   Des fois l'expression (3.1.1) peut être écrite dans une forme simple en utilisant l'intégration par partie.

2. On montre que le nouveau système (III) est bien posé (Voir définition (3.1.2)).
3. On applique les critères de contrôlabilité établis dans le premier chapitre sur le triplet (A,B,C).

Système bien posé

Définition 3.1.1. *L'opérateur de contrôle $B \in \mathcal{L}(U, (\mathcal{D}(A^*))')$ est dit admissible pour le semi groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ si pour $t > 0$ on a : $Im\ L_t \subset \mathbb{Z}$.*
Bien étendu chaque opérateur borné B est admissible pour $(S(t))_{t\geq 0}$.

Théorème 3.1.1. *L'opérateur de contrôle $B \in \mathcal{L}(U, (\mathcal{D}(A^*))')$ est admissible pour le semi groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ si et seulement s'il existe une constante $k_t > 0$ tel que :*

$$\int_0^t \|B^*S^*(t)z_0\|_{\mathbb{U}}^2 dt \leq K_t \|z_0\|_{\mathbb{Z}}^2 \quad \forall z_0 \in \mathcal{D}(A^*) \tag{3.1.2}$$

Démonstration. On pose : $\mathbb{Z}_{-1} = (\mathcal{D}(A^*))'$
Supposons que $B \in \mathcal{L}(U, \mathbb{Z}_{-1})$ est admissible pour $(S(t))_{t\geq 0}$ alors pour $t > 0$ l'opérateur $L_t \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^2(0, T; U)), \mathbb{Z})$.

Soit $z_0 \in \mathcal{D}(A^*)$ et $u \in \mathbb{L}^2(0,T;U)$.

$$\langle L_t u, z_0\rangle_{\mathbb{Z}} = \langle u, L_t^* z_0\rangle_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})}$$

Alors :

$$\langle L_t u, z_0\rangle_{\mathbb{Z}} = \int_0^t \langle u(s), B^*S^*(T-s)z_0\rangle_{\mathbb{U}} ds$$

Ceci implique :

$$\begin{aligned}
|\int_0^t \langle u(s), B^*S^*(T-s)z_0\rangle_{\mathbb{U}} ds|_{\mathbb{R}} &= |\langle L_t u, z_0\rangle_{\mathbb{Z}}|_{\mathbb{R}} \\
&\leq \|L_t u\|_{\mathbb{Z}} \|z_0\|_{\mathbb{Z}} \\
&\leq \|L_t\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}^2(0,T;U)),\mathbb{Z})} \|u\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} \|z_0\|_{\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

Prenons l'élément supérieur sur tous les u dans $\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})$ avec : $\|u\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})} \leq 1$, on obtient :

$$\sup_{\|u\|_{\mathbb{L}^2(0,\infty;\mathbb{U})}\leq 1} |\int_0^t \|B^*S^*(T-s)z_0\|_{\mathbb{U}}^2 ds| \leq \|L_t\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}^2(0,T;U)),\mathbb{Z})} \|z_0\|_{\mathbb{Z}}$$

Donc :

$$\left(\int_0^t \|B^*S^*(T-s)z_0\|_{\mathbb{U}}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|L_t\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}^2(0,T;U)),\mathbb{Z})} \|z_0\|_{\mathbb{Z}}$$

Posons $k_t = \|L_t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}^2(0,\infty;U)),\mathbb{Z})}$ alors on peut déduire que :

$$\exists k_t > 0 \text{ tel que : } \int_0^t \|B^*S^*(t)z\|_{\mathbb{U}}^2 dt \leq K_t^2 \|z_0\|_{\mathbb{Z}}^2 \quad \forall z_0 \in \mathcal{D}(A^*)$$

Supposons maintenant que (3.1.2) est vérifié, et soit $z_0 \in \mathcal{D}(A^*)$ et $u \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})$ on a :

$$\sup_{\|u\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})}\neq 0} \left| \frac{\int_0^t \langle B^*S^*(T-s)z_0, u(s)\rangle_{\mathbb{U}} ds}{\|u\|_{\mathcal{L}^2(0,\infty;U)}} \right| \leq \alpha\ k_t\ \|z_0\|_{\mathbb{Z}}$$

Avec $\alpha > 0$ vérifie :

$$\sup_{\|u\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})}\neq 0} \left| \frac{\int_0^t \langle B^*S^*(T-s)z_0, u(s)\rangle_{\mathbb{U}} ds}{\|u\|_{\mathcal{L}^2(0,\infty;U)}} \right| \leq \alpha \sup_{\|u\|_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})}\leq 1} \left| \int_0^t \langle B^*S^*(T-s)z_0, u(s)\rangle_{\mathbb{U}} ds \right|$$

Alors $\forall u \in \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})$ et $\forall z_0 \in \mathbb{Z}$ on a :

$$|\int_0^t \langle B^* S^*(T-s)z_0, u(s)\rangle_{\mathbb{U}} ds| \leq \alpha\ k_t \|u\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}^2(0,T;U))}\|z_0\|_{\mathbb{Z}}$$

Ceci implique :

$$\sup_{\|z_0\|_{\mathbb{Z}}\leq 1} |\int_0^t \langle S(T-s)Bu(s), z_0\rangle_{\mathbb{U}} ds| \leq \alpha\ k_t \|u\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{U})}$$

Alors :

$$\|L_t u\|_{\mathbb{Z}} \leq \alpha\ k_t \|u\|_{\mathbb{L}^2(0,T;U)}$$

□

Définition 3.1.2. *Si l'opérateur de contrôle B est admissible pour le semi groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ alors le système* (III) *est dit système bien posé.*

3.2 Exemples

Pour illustrer notre approche, des exemples sont présentés.

3.2.1 Exemple 3

On considère le système de contrôle frontière suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t) \;=\; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) \qquad \forall t \in]0,T[\;;\; \forall x \in]0,\pi[\\ z(x,0) \;=\; z^0(x)\;\;;\;\; \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,0) \;=\; z^1(x) \quad \forall x \in]0,\pi[\\ z(\pi,t) \;=0\;;\;\; \dfrac{\partial z}{\partial x}(0,t) = u(t) \qquad \forall t \in]0,T\;[\\ y(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1}\langle \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} \\ \frac{1}{\lambda_2}\langle \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} \\ . \\ . \\ \frac{1}{\lambda_m}\langle \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} \\ \langle \frac{\partial z}{\partial t}, \varphi_1\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} \\ \langle \frac{\partial z}{\partial t}, \varphi_2\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} \\ . \\ . \\ \langle \frac{\partial z}{\partial t}, \varphi_m\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} \end{pmatrix} \end{array}\right. \tag{3}$$

tel que :

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(\frac{2n+1}{2})x \;\text{ si } 1 \le n \le m$$

$$\mu_n = \frac{2n+1}{2} \quad \text{si } n \in Z$$

$(\varphi_n)_{n\geq 0}$ forme une base orthonormale dans $\mathbb{L}^2(0,\pi)$.

$$\lambda_n = i\mu_n \;\; 1 \le n \le m$$

Le système (2.2) est de la forme (II) avec :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{H}^1_R(0,\pi) \times \mathbb{L}^2(0,\pi)$$

tel que :

$$\mathbb{H}^1_R(0,\pi) = \{f \in \mathbb{H}^1(0,\pi), \text{tel que :} f(\pi) = 0\}$$

Le produit scalaire défini sur $\mathbb{Z}$ est :

$$\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{Z}} = \int_0^{\pi} \frac{df_1}{dx} \overline{\frac{df_1}{dx}(x)} dx + \int_0^{\pi} g_1 \overline{g_2(x)} dx$$

$$\mathbb{U} = \mathbb{C}, \mathbb{Y} = \mathbb{C}^{2m}, \mathbb{X} = \mathbb{H}^2(0,\pi) \cap \mathbb{H}^1_R(0,\pi) \times \mathbb{H}^1_R(0,\pi)$$

$$L\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ \dfrac{d^2 f}{dx^2} \end{pmatrix} \ \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathbb{X}$$

$$G\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \frac{df}{dx}(0) \ \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathbb{X}$$

Le système (2.2) peut être réécrit sous la forme abstraite (III) avec :

$$A\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ \dfrac{d^2 f}{dx^2} \end{pmatrix} \ \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A)$$

tel que :

$$\mathcal{D}(A) = \{ f \in \mathbb{H}^2(0,\pi) \cap \mathbb{H}^1_R(0,\pi) : \frac{df}{dx}(0) = 0 \} \times \mathbb{H}^1_R(0,\pi)$$

A est un opérateur linéaire générateur du groupe unitaire $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{Z}$ défini par :

$$S(t)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \sum_{n\in Z} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp i\mu_n t [\frac{1}{i\mu_n} \langle \frac{df}{dx}, \frac{d\varphi_n}{dx} \rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} + \langle g, \varphi_n \rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)}] \Phi_n$$

tel que :

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{i\mu_n} \varphi_n \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad n \in Z$$

La famille $(\Phi_n)_{n\in Z}$ constitue une base orthonormale dans $\mathbb{Z}$ formée par les fonctions propres de A.
Soit $\binom{z_1}{z_2} \in \mathbb{Z}$, $\binom{\psi_1}{\psi_2} \in \mathcal{D}(A^*)$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle L\tbinom{z_1}{z_2}, \tbinom{\psi_1}{\psi_2}\rangle_{\mathbb{Z}} &= \langle \Big(\frac{\overset{z_2}{d^2 z_1}}{dx^2}\Big), \tbinom{\psi_1}{\psi_2}\rangle_{\mathbb{Z}} \\
&= \int_0^\pi \frac{dz_2}{dx}\frac{d\psi_1}{dx}(x)dx + \int_0^\pi \frac{d^2 z_1}{dx^2}\psi_2(x)dx \\
&= -\int_0^\pi z_2 \frac{d^2\psi_1}{dx^2}dx + [\frac{d\psi_1}{dx}z_2]_0^\pi \\
&\quad +[\frac{dz_1}{dx}\psi_2]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{dz_1}{dx}\frac{d\psi_2}{dx}(x)dx \\
&= \langle \tbinom{z_1}{z_2}, \Big(\frac{\overset{-\psi_2}{d^2\psi_1}}{-dx^2}\Big)\rangle + \langle -\frac{dz_1}{dx}(0), \psi_2(0)\rangle \\
&= \langle \tbinom{z_1}{z_2}, A^*\tbinom{\psi_1}{\psi_2}\rangle + \langle G\tbinom{z_1}{z_2}, B^*\tbinom{\psi_1}{\psi_2}\rangle
\end{aligned}$$

Alors :

$$B^*\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = -\psi_2(0)$$

et on déduit que :

$$Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\pi}\delta_0 u\end{pmatrix}$$

• Maintenant on montre que B^* est admissible pour le semi groupe $S(t)$ c-à-d : $\exists k_\tau > 0$ tel que :

$$\int_0^\tau \|B^* S(t)\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\|_{\mathbb{U}}^2 dt \le K_\tau \|\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}\|_{\mathbb{Z}}^2 \quad \forall \begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A^*)$$

$S(t)\tbinom{f}{g} =$

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z} \exp i\mu_n t[\frac{1}{i\mu_n}\langle \frac{df}{dx}, \frac{d\varphi_n}{dx}\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} + \langle g, \varphi_n\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)}]\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{i\mu_n}\varphi_n \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z} \exp i\mu_n t[\frac{1}{i\mu_n}\langle \frac{df}{dx}, \frac{d\varphi_n}{dx}\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} + \langle g, \varphi_n\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)}]\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_n
\end{pmatrix}$$

$B^* S(t)\tbinom{f}{g} =$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in Z} \exp i\mu_n t[\frac{1}{i\mu_n}\langle \frac{df}{dx}, \frac{d\varphi_n}{dx}\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} + \langle g, \varphi_n\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)}]$$

Comme $\exp i\mu_n t$ est une base orthogonale dans $\mathbb{L}^2(0,\pi)$ alors :

$$\int_0^{2\pi} \|B^* S^*(t)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\|_{\mathbb{U}}^2 dt = \sum_{n\in Z} |\frac{1}{i\mu_n}\langle \frac{df}{dx}, \frac{d\varphi_n}{dx}\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} + \langle g, \varphi_n\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)}|^2$$

Comme $\varphi_{-n} = -\varphi_n$ alors :

$$\int_0^{2\pi} \|B^* S^*(t)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\|_{\mathbb{U}}^2 dt = 2\sum_{n\in Z} (\frac{1}{i\mu_n^2}|\langle \frac{df}{dx}, \frac{d\varphi_n}{dx}\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)}|^2 + |\langle g, \varphi_n\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)}|^2)$$

Comme $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale dans $\mathbb{L}^2(0,\pi)$ alors :

$$\int_0^{2\pi} \|B^* S^*(t)\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\|_{\mathbb{U}}^2 dt = 2\|\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\|_{\mathbb{Z}}^2$$

Alors B^* est admissible pour $S(t)$ mais comme $A^* = -A$ et $S(t)$ est inversible alors B^* est admissible pour $S^*(t)$ et donc B est admissible pour $S(t)$. Alors on déduit que le système de contrôle frontière (3) est bien posé.
On définit l'opérateur $(\mathcal{L}_T^\sharp)^*$ par :

$(\mathcal{L}_T^\sharp)^* : \mathbb{C}^{2m} \longrightarrow \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{C})$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_T^\sharp)^* y &= B^* S^*(T-t) C^* y \\
&= B^* S^*(T-t) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\lambda_j} y_j \varphi_j \\ \sum_{j=1}^{m} y_{m+j} \varphi_j \end{pmatrix} \\
&= B^* S(t-T) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\lambda_j} y_j \varphi_j \\ \sum_{j=1}^{m} y_{m+j} \varphi_j \end{pmatrix} \\
&= B^* \begin{pmatrix} \sum_{n\in Z} \frac{1}{2i\mu_n} \exp i\mu_n(t-T)[\frac{1}{i\mu_n}\langle \frac{d\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_j} y_j\varphi_j}{dx}, \frac{d\varphi_n}{dx}\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} + \langle \sum_{j=1}^{m} y_{m+j}\varphi_j, \varphi_n\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)}]\varphi_n \\ \sum_{n\in Z} \frac{1}{2} \exp i\mu_n(t-T)[\frac{1}{i\mu_n}\langle \frac{dd\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_j} y_j\varphi_j}{dx}, \frac{d\varphi_n}{dx}\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} + \langle \sum_{j=1}^{m} y_{m+j}\varphi_j, \varphi_n\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)}]\varphi_n \end{pmatrix} \\
&= -\sum_{n\in Z} \frac{1}{2} \exp i\mu_n(t-T)[\frac{1}{i\mu_n}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_j} y_j \langle \frac{d\varphi_j}{dx}, \frac{d\varphi_n}{dx}\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} + \sum_{j=1}^{m} y_{m+j}\langle \varphi_j, \varphi_n\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)}]\varphi_n(0) \\
&= -\sum_{n\in Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp i\mu_n(t-T)[\frac{1}{i\mu_n}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda_j} y_j \langle \frac{d\varphi_j}{dx}, \frac{d\varphi_n}{dx}\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} + \sum_{j=1}^{m} y_{m+j}\langle \varphi_j, \varphi_n\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)}] \\
&= -\sum_{n\in Z} \textstyle\sum_{j=1}^{m} \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp i\mu_n(t-T)[\frac{1}{i\mu_n}\frac{1}{\lambda_j} y_j \langle \frac{d\varphi_j}{dx}, \frac{d\varphi_n}{dx}\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} + y_{m+j}\langle \varphi_j, \varphi_n\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)}] \\
&= -\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp i\mu_j(t-T)[\frac{1}{i\mu_j}\frac{1}{\lambda_j} y_j + y_{m+j}]
\end{aligned}
$$

Pour $y \in \mathbb{C}^{2m}$ tel que : $\forall 1 \leq j \leq m : 0 \neq y_j$ et $y_{m+j} = -\dfrac{1}{\lambda_j i\mu_j} y_j$ on a :

$(\mathcal{L}_T^\sharp)^* y = 0$ et donc on déduit que $\ker(\mathcal{L}_T^\sharp)^* \neq \{0\}$ et par conséquent le triplet (A,B,C) n'est pas approximativement contrôlable.

3.2.2 Exemple 4

On considère le système de contrôle frontière suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,t) \;=\; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) & \forall t \in]0,T[\;;\; \forall x \in]0,\pi[\\ z(x,0) \;=\; z^0(x) & \forall x \in]0,\pi[\\ z(\pi,t) \;=0 \;;\; \dfrac{\partial z}{\partial x}(0,t) = u(t) & \forall t \in]0,T\ [\\ y(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} \langle z, \varphi_k \rangle_{\mathbb{L}^2(0,1)} \end{cases} \tag{4}$$

tel que :

$$\varphi_k(x) = \sqrt{2}\cos(\frac{2n+1}{2})x \;\; \forall\ 1 \leq k \leq m$$

Le système (2.2) est sous la forme (II) avec :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{L}^2(0,\pi), \mathbb{U} = \mathbb{R}, \mathbb{Y} = \mathbb{R}^m, \mathbb{X} = \mathbb{H}^2(0,\pi) \cap \mathbb{H}^1_R(0,\pi)$$

tel que :

$$\mathbb{H}^1_R(0,\pi) = \{f \in \mathbb{H}^1(0,\pi), \text{tel que :} f(\pi) = 0\}$$

$$Lf = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$G\binom{f}{g} = \frac{df}{dx}(0)$$

Le système (2.2) peut être réécrit sous la forme abstraite (III) avec :

$$Af = \frac{d^2 f}{dx^2} \;\forall f \in \mathcal{D}(A)$$

tel que :

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathbb{H}^2(0,\pi) \cap \mathbb{H}^1_R(0,\pi) : \frac{df}{dx}(0) = 0\}$$

A est un opérateur linéaire générateur d'un C_0-Semi groupe $(S(t))$ sur $\mathbb{Z}$ défini par :

$$S(t)z = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp -(\frac{n+1}{2})^2 t \langle z, \varphi_n \rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} \varphi_n$$

La famille $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ qui représente les fonctions propres de A forme une base orthonormale dans $\mathbb{L}^2(0,\pi)$.

Soit $z \in \mathbb{Z}$, $\psi \in \mathcal{D}(A^*)$ on a :

$$\begin{array}{rcl}
\langle Lz, \psi\rangle_{\mathbb{Z}} & = & \langle \frac{d^2z}{dx^2}, \psi\rangle_{\mathbb{Z}} \\
& = & \int\limits_0^\pi \frac{d^2z}{dx^2}\psi(x)dx \\
& = & -\int\limits_0^\pi \frac{dz}{dx}\frac{d\psi}{dx}dx + [\frac{dz}{dx}\psi(x)]_0^\pi \\
& & [\frac{dz}{dx}\psi(x)]_0^\pi + \int\limits_0^\pi \frac{d^2\psi}{dx^2}z - [\frac{d\psi}{dx}z(x)]_0^\pi \\
& = & \langle \frac{d^2z}{dx^2}, \psi\rangle_{\mathbb{Z}} + \langle \frac{dz}{dx}, -\psi(0)\rangle \\
& = & \langle z, A^*\psi\rangle + \langle Gz, B^*\psi\rangle
\end{array}$$

Alors :

$$B^*\psi = -\psi(0)$$

$$B = -\delta_0$$

• Maintenant on montre que B est admissible pour le semi groupe $S(t)$ c-à-d : $\exists k_\tau > 0$ tel que :

$$\int\limits_0^\tau \|B^*S^*(t)\psi\|_R^2 dt \leq K_\tau \|\psi\|_{\mathbb{Z}}^2 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(A)$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(A)$ on a :

$$S^*(t)\psi = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp -(\frac{n+1}{2})^2 t \langle \psi, \varphi_n\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)}\varphi_n$$

$$B^*S^*(t)\psi = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \exp -(\frac{n+1}{2})^2 t \langle \psi, \varphi_n\rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)}$$

Alors :

$$\|B^*S^*(t)\psi\|_{\mathbb{R}} \leq \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \| \exp -(\frac{n+1}{2})^2 t\| \|\psi\|$$

et on déduit que :

$$\exists K_\tau > 0 \text{ tel que : } \int\limits_0^\tau \|B^*S^*(t)\psi\|_R^2 dt \leq 2K_\tau \|\psi\|_{\mathbb{Z}}^2 \ \ \forall \psi \in \mathcal{D}(A)$$

Alors B est admissible pour $S(t)$ et on déduit que le système de contrôle frontière (3) est bien posé.

• Maintenant on va étudier la contrôlabilité du triplet (A,B,C).
On définit l'opérateur $(\mathcal{L}_T)^*$ par :

$$(\mathcal{L}_T)^* : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_T)^* y &= B^* S^*(T-t)C^* y \\
&= B^* \sum_{n=1}^{+\infty} \exp -(\frac{2n+1}{2})^2 (T-t) \langle \sum_{k=1}^{m} y\varphi_k, \varphi_n \rangle_{\mathbb{L}^2(0,\pi)} \varphi_n \\
&= \sqrt{2} \sum_{k=1}^{m} y \exp -(\frac{2k+1}{2})^2 (T-t)
\end{aligned}$$

On peut prouver que :

$$\exists \gamma = 2TM > 0 \ : \ \|\mathcal{L}_T^* y\|^2_{\mathbb{L}^2(0,T;\mathbb{R})} \geqslant 2TM \|y\|^2_{\mathbb{R}} \ \ \forall y \in \mathbb{R}$$

tel que : $M = \sum_{k=1}^{m} e^{-(\frac{2k+1}{2})^2 T}$

Alors on déduit que le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable.

Conclusion

Ce mémoire s'est présenté en trois parties :
La première partie est consacrée à l'étude de quelques concepts de contrôlabilité d'un système linéaire de dimension infinie avec contrôle distribué.
Nous nous sommes penchés dans la deuxième partie sur la caractérisation du contrôle optimal par la méthode de pénalisation.
La troisième partie est réservé pour l'étude de contrôlabilité d'un système de contrôle frontière.
Des exemples on été réalisés afin d'illustrer les résultats théoriques obtenus.

Cette étude ouvre la voie aux questions suivantes :

1. Comment peut-on étudier la contrôlabilité du triplet (A,B,C) où l'opérateur C n'est pas borné ?
2. Une autre question est l'étude de contrôlabilité du triplet (A,B,C) dans le cas non autonome.
3. Les résultats obtenus pour la caractérisation du contrôle optimal par la méthode de pénalisation ont exigé l'hypothèse que l'opérateur A engendre un groupe. Il est intéressant d'affaiblir cette hypothèse.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة مرَاقبة نظَام خطي ذو بعد غير منته.
في البدَاية نعتبر نظَامًا ذو مرَاقب دَاخلي، نعرف بعض مفَاهيم المرَاقبة و نميّزهَا من حيث المؤَثرَات الوَاصفة لَلنظَام.
ثم نعتمد طريقة المعَاقبة (ليونس [١٢]) لتمييز المرَاقب الأَمثل الذي ينقل إلَى الأَصل حَالة صنف من الأَنظمة الموصوفة ب C_0− زمرة.
أخيرًا ندرُس بعض مشَاكل مرَاقبة نظَام ذو مرَاقب حَافي.

أَلكلِمَات المفتَاحية : نظَام ذو بَعد غير منته، اَلمرَاقبة، اَلمرَاقب الأَمثل، طريقة المعَاقبة، نظَام ذو مرَاقب حَافي.

Abstract

The goal of this dissertation is to study the controllability of linear infinite dimensional system.
Initially, we consider systems with distributed control. We define some concepts of controllability and we caracterise them in terms of operators describing the system.
Then, we adopt the penalization method (Lions [12]) to characterize the optimal control which steers to the oroginal state of a class of systems described by a C_0-Group.
Finally, we study some problems of controllability for boundary control systems using the previous results.

Keywords : linear infinite dimensional system, controllability, optimal control, penalization method, boundary control system.

Bibliographie

[1] A. Bensoussan, G. Da Prato, M. C. Delfour et S. K. Mitter, *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems*, Volume 1 et 2, Birkhauser, Boston, 1993.

[2] S. Chen et I. Lasiecka, *Feedback Exact Null Controllability For Unbounded Control Problems in Hilbert Space*, Journal of Optimization Theory and Applications., 74 (1992), pp. 191-219.

[3] R. F. Curtain et A. J. Pritchard, *Infinite Dimensional Linear Systems Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[4] R. F. Curtain et H. J. Zwart, *An introduction to infinite dimensional linear systems theory*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[5] A. El Jai et A. J. Pritchard, *Regional controllability of distributed systems* , dans Analysis and Optimization of Systems : State and Frequency Domain Approaches for Infinite-Dimensional Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 185 (1993), pp. 326-335.

[6] H. O. Fattorini, *Some remarks on complete controllability*, Siam J. Control., 4 (1966), pp. 686-694.

[7] P. Faurre, *Analyse Numérique notes d'optimisation*, Ellipses, France, 1988.

[8] A. Germani et S. Monaco, *Functional output ε-controllability for linear systems on Hilbert spaces*, Systems & Control Letters., 2 (1983), pp. 313-320.

[9] I. Lasiecka et R. Triggiani, *Exact Controllability of the Wave Equation with Neumann Boundary Control*, Appl Math Optim., 19 (1989), pp. 243-290.

[10] J. L. Lions, *Control of Distributed Singular Systems* , Bordas, Paris, 1983.

[11] J. L. Lions, *Contrôlabilité exacte perturbation et stabilisation de systèmes distribues*, Masson, Paris, 1988.

[12] J. L. LIONS, *Sur la contrôlabilité exacte élargie*, in Partial Differential Equations and the Calculus of Variations, Essays in honor of E. De Giorgi, Volume II, edited by F. Colombini, A. Marino, L. Modica and S. Spagnolo, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications., 2 (1989), pp. 703-727.

[13] J. L. LIONS, *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux drivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.

[14] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[15] L. SCHWARTZ, *Analyse : topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris, 1970.

[16] M. Sirbu, A Riccati Equatioin Approach to the Null Controllability of Linear Systems, communications in Applied Analysis., 2 (2002), pp. 163-177.

[17] R. TRIGGIANI, *Controllability and Observability in Banach Space with Bounded Operators*, SIAM J. Control., 13 (1975), pp. 462-491.

[18] M. TUCSNAK et G. WEISS, *Observation and Control for Operator Semigroups*, Birkhauser, Berlin, 2009.

[19] E. ZERRIK, F. GHAFRANI et M. RAISSOULI, *An Extended Controllability Problem with Minimum Energy* , Journal of Mathematical Sciences., 161 (2009), pp. 344-354.