



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE HADJ LAKHDAR DE BATNA



THESE

Présentée à la Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option : Mathématiques

Par

NOUIRI Brahim

THEME

ETUDE THEORIQUE ET NUMERIQUE DES PHENOMENES

VIBRATOIRES LIES AU FROTTEMENT SEC DES SOLIDES

DEFORMABLES

Soutenue le: 26 / 05 / 2011

Devant le jury composé de :

Dr. YOUKANA Ammar	M.C.A. Université H. L. de Batna	Président
Dr. BENABDERRAHMANE Benyattou	Prof. Université A. T. de Laghouat	Rapporteur
Dr. MEROUANI Boubakeur	Prof. Université F. A. de Sétif	Examineur
Dr. AYADI Abdelhamid	Prof. Université L. B. M. d'Oum EL Bouaghi	Examineur
Dr. DRABLA Salah	Prof. Université F. A. de Sétif	Examineur
Dr. BENTALHA Fadhila	M.C.A. Université H. L. de Batna	Examineur
Dr. BENSERIDI Hamid	M.C.A. Université F. A. de Sétif	Invité

Titre:

Etude théorique et numérique des phénomènes vibratoires liés au frottement sec des solides déformables.

Résumé

Dans cette thèse, nous avons considéré trois problèmes de contact avec frottement à coefficient dépendant de la vitesse de glissement dans les contextes horizontal et vertical. Notre contribution dans ce travail est d'analyser la question d'existence et d'unicité, en se basant sur la méthode de différences finis avec des schémas implicites d'Euler et de Newmark, ce qui nous permet d'obtenir une suite de problèmes des inéquations quasi-variationnelles elliptiques. L'analyse spectrale et l'analyse convexe, nous permettent d'avoir un résultat d'équivalence entre le problème elliptique et un problème de minimisation non linéaire sans contrainte. L'interpolation de la solution discrète, ainsi que l'utilisation de la méthode de compacité et les techniques de Faedo-Galerkin, nous permettent d'analyser l'existence d'une solution faible.

Mots-clés: *Contact, Elasticité, Frottement, Horizontal, Inéquation variationnelle, Schéma implicite, Vertical, Viscoélasticité, Vitesse de glissement.*

Title:

Theoretical and numerical study of vibration phenomena associated with dry friction of deformable solids.

Abstract

In this thesis, we considered three problems of contact with friction coefficient depending on sliding velocity in the horizontal and vertical contexts. Our contribution in this work is to analyze the existence and uniqueness based on the finite difference method with an implicit scheme of Euler and Newmark which allows us to obtain a series of inequalities quasi-variational elliptic problems. Spectral analysis and convex analysis, we permit to have a result of equivalence between elliptic problem and a nonlinear minimization problem without constraint. The interpolation of the discrete solution and using the method of compactness and Faedo-Galerkin techniques, allow us to analyze the existence of a weak solution.

Keywords: *Contact, Elasticity, Friction, Horizontal, Implicit scheme, Sliding velocity, Variational inequality, Vertical, Viscoelasticity.*

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail A

Mes grands parents

Mes parents

Ma femme et mes filles

Mes Frères et ma sœur

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire d'Informatique et de Mathématiques (LIM) à l'université de Laghouat sous la direction de Monsieur BENABDEERRAHMANE Benyattou, Professeur à l'université de Laghouat. Je tiens à le remercier pour leur disponibilité leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt.

Je remercie vivement Monsieur YOKANA Ammar, Maître de conférences à l'université de Batna, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Mes sincères remerciements vont à Messieurs, MAROUANI Boubakeur et DRABLA Salah, Professeurs à l'université de Sétif qui m'ont fait l'honneur d'être examinateurs de ma thèse. Je leur adresse tous mes remerciements et toute ma reconnaissance pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail.

Tous mes remerciements à Monsieur AYADI Abdelhamid, Professeur à l'université d'Oum Loubegui d'avoir été membre du jury et d'avoir examiné ce travail.

Je tiens à remercier à Madame BENTALHA Fadhlila, Maître de conférences à l'université de Batna d'avoir accepté de participer au jury.

Mes remerciements s'adressent à Monsieur BENSERIDI Hamid, Maître de conférences à l'université de Sétif d'avoir accepté de participer au jury comme invité.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents à qui je dédie ce travail ainsi qu'à toute ma famille et mes amis pour leur grand soutien.

Table des matières

Introduction générale	i
I Modélisation des problèmes de contact avec coefficient à coefficient variable	7
1 Modélisation du contact avec ou sans frottement.....	9
1.1 Cadre physique et modèle mathématique.....	10
1.2 Lois de comportement élastique et viscoélastique.....	13
1.3 Conditions de contact.....	13
1.4 Lois de frottement.....	15
1.5 Loi de Tresca avec un seuil de frottement dépendant de la vitesse de glissement.....	16
1.6 Loi de Coulomb dépendant de la vitesse glissement avec contrainte normale imposée	17
2 Modélisation des problèmes horizontaux et verticaux.....	18
2.1 Position du problème	19
2.2 Problèmes horizontaux.....	20
2.3.1 Problème élasto-quasi-statique.....	20
2.3.2 Problème élasto-dynamique.....	21
2.3.3 Problème viscoélastique.....	21
2.3 Problèmes verticaux	22
2.3.1 Problème élasto-quasi-statique.....	24
2.3.2 Problème élasto-dynamique.....	24
2.3.3 Problème viscoélastique.....	25
II Analyse mathématique des problèmes de contact avec frottement à coefficient variable	26
1 Problème élasto-quasi-statique de contact avec frottement à coefficient variable.....	28
1.1 Problème horizontal	29

1.1.1	Hypothèses, notations et préliminaires.....	30
1.1.2	Formulation variationnelle.....	33
1.2	Problème vertical	49
1.2.1	Formulation variationnelle	50
2	Problème élasto-dynamique de contact avec frottement à coefficient variable.....	51
2.1	Problème horizontal	52
2.1.1	Hypothèses et notations.....	53
2.1.2	Formulation variationnelle.....	54
2.2	Problème vertical.....	63
2.2.1	Formulation variationnelle	64
2.3	Cas d'un problème de cisaillement unidimensionnel.....	65
3	Problème viscoélastique de contact avec frottement à coefficient variable.....	69
3.1	Problème horizontal	70
3.2.1	Hypothèses, notations et formulation variationnelle.....	70
3.2.2	Existence et unicité.....	71
3.2	Problème vertical.....	78
3.2.1	Existence et unicité	78
3.3	Cas élastique	79
	Conclusion et perspectives.....	80
	Annexe.....	82
	Bibliographie	91

Introduction générale

Introduction générale

Le frottement sec désigne l'ensemble des phénomènes qui naissent dans les zones superficielles de deux corps maintenus en contact, et effectuant un mouvement l'un par rapport à l'autre, en l'absence de lubrification. Les premiers travaux que l'on connaît sur le frottement sont ceux de Léonard de Vinci au début du *XVI^{ème}* siècle. Malgré l'ancienneté de l'intérêt porté à ce domaine, la compréhension des mécanismes entrant en jeu est restée longtemps très lacunaire. Il faut attendre les dernières décennies et l'accumulation des données expérimentales et des résultats théoriques pour que des progrès importants soient faits.

Les phénomènes vibratoires induits par le frottement sec dans les structures élastiques ont fait l'objet de nombreux travaux. Un grand nombre d'entre eux concernent l'étude de loi de *frottement avec coefficient variable*. Une manière simple de rendre compte de ces phénomènes vibratoires est d'introduire un coefficient de frottement dépendant de la *vitesse de glissement* $\mu = \mu(|\dot{u}_\tau|)$ et qui admet une importante portion décroissante.

De nombreux exemples des phénomènes vibratoires peuvent être trouvés dans la vie de tous les jours: Le contact du piston avec la chemise, de la roue avec le rail, d'une chaussure avec le sol, archet sur une corde de Violon et glissement de faille dans les tremblements de terre. Ces phénomènes ont une grande importance pour de nombreuses sciences de l'ingénieur : Génie civil, Génie mécanique et Acoustique.

La modélisation des phénomènes vibratoires liés au frottement sec a été largement abordée sur des systèmes discrets (voir [8] pour une étude sur une loi de frottement variable, [13] pour la modélisation des failles géologiques, [3] pour une loi liée à un opérateur d'hystérésis).

L'analyse mathématique des problèmes liés au frottement sec a suscité beaucoup d'intérêt à cause de leur caractère non différentiable. Les premiers résultats sur l'existence et l'unicité pour les problèmes de contact avec frottement en élasto-statique et en élasto-dynamique ont été obtenus par Duvaut et Lions [10]. Il s'agit du cas avec contrainte normale imposée ou du cas du frottement de type Tresca, où la surface de contact est connue d'avance et le coefficient de frottement est constant par rapport au glissement.

Dans le cas du frottement avec coefficient dépendant de la vitesse de glissement $\mu = \mu(|\dot{u}_\tau|)$, le problème de contact le plus simple (cisaillement unidimensionnel) a été étudié par Ionescu et Paumier [17, 18]. Ils montrent que le problème est mal posé (non unicité, chocs, etc...), et ils proposent une règle de choix de la solution suivant le principe du "retard maximal" de la théorie des catastrophes, et qui s'énonce ainsi :

« Le système effectue un saut en vitesse quand il n'a plus d'autres choix possibles »

Ce problème ne peut être, malheureusement, défini correctement en bidimensionnel ou en tridimensionnel. Pour rendre le problème bien posé en gardant les mêmes propriétés physiques, trois approches ont été considérées. La première a été considérée par Renard [29, 30, 31], qui a défini le problème unidimensionnel en termes d'une perturbation singulière. Il a démontré que le problème perturbé est bien posé, et que sa solution converge dans un certain sens vers la solution sélectionnée suivant le principe du "retard maximal". La seconde approche a été proposée par Ionescu et Touzani [16] qui ont obtenu des résultats d'existence et d'unicité pour le problème viscoélastique tridimensionnel, vu comme une perturbation singulière du cas élastique. De plus, les calculs numériques montrent que si on se place dans le cas unidimensionnel et lorsque les effets de la viscosité diminuent, la solution converge vers la solution sélectionnée parmi les solutions du problème dynamique sans viscosité suivant le principe du "retard maximal". Dans la troisième, Favreau, Ionescu et Campillo [12] ont étudié le problème dynamique unidimensionnel dans le cas du frottement avec variables d'état. Ces trois approches, qui justifient l'application du principe du "retard maximal" ont de plus le mérite de proposer des schémas numériques adaptés pour aborder des problèmes plus réalistes en dimension supérieure.

Cette thèse représente une contribution à l'étude de quelques problèmes de contact avec frottement à coefficient variable. En effet, nous considérons des lois de comportement linéaires pour des matériaux élastiques et viscoélastiques, dans les processus quasi-statique et dynamique. Diverses lois de frottement sont envisagées, elles sont définies par des versions de la loi de Tresca et de Coulomb. Nous avons étudiés dans cette thèse trois problèmes : problème élasto-quasi-statique, problème élasto-dynamique et problème viscoélastique. Pour les deux premiers problèmes, en utilisant la méthode de différences finis avec les schémas implicites d'Euler et de Newmark, en supposant que les conditions sur le bord de frottement ne sont ni perturbées ni régularisées. Cependant, dans le troisième problème on utilise la méthode de Faedo-Galerkin, en perturbant les conditions de frottement.

Cette thèse est composée de deux parties que nous décrivons brièvement.

Dans la première, nous présentons la modélisation des problèmes de contact avec frottement à coefficient variable. Nous intéressons dans un premier chapitre à la modélisation de contact avec ou sans frottement. Nous précisons, le cadre physique et le modèle mathématique contenant les différentes équations et conditions de contact concernant le champ des déplacements et le champ des contraintes, ainsi que des constructions des lois de frottement. Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous considérons le modèle mathématique des processus particuliers: problème horizontal et problème vertical. Nous donnons une description détaillée des hypothèses de base et nous particularisons les équations d'équilibre et les lois de frottement de Tresca et de Coulomb dans le contexte vertical. Ce chapitre se termine par la formulation des différents problèmes dans les processus quasi-statique et dynamique qui seront étudiés dans la partie suivante.

La deuxième partie est composée de trois chapitres, dans le premier chapitre, on s'intéresse à l'étude de problème quasi-statique de contact avec frottement à coefficient dépendant de la vitesse de glissement. L'utilisation le schéma implicite d'Euler, nous permet d'obtenir une suite de problèmes des inéquations quasi-variationnelles elliptiques. Une étude spectrale, nous permet de démontrer un résultat d'équivalence entre le problème elliptique et un problème de minimisation non linéaire sans contraintes. Par l'interpolation de la solution discrète et la méthode de compacité, nous obtenons l'existence d'une solution faible.

Dans le deuxième chapitre, on poursuit l'étude initiée au chapitre précédent en considérant le cas dynamique pour un problème horizontal (cf. N. Brahim & B. Benyattou [5, 6]) et un problème vertical. La discrétisation par un schéma implicite de Newmark, nous permet d'obtenir une suite de problèmes des inéquations quasi-variationnelles elliptiques. L'utilisation de quelques outils d'analyse convexe et d'analyse spectrale, nous permettent d'avoir l'existence et l'unicité d'une solution discrète.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse au problème dynamique de contact avec frottement à coefficient dépendant de la vitesse de glissement pour des matériaux viscoélastiques. Sur le plan mathématique, le cas viscoélastique est le plus complet avec un résultat d'existence et d'unicité pour les problèmes horizontaux et verticaux. Finalement, lorsque les effets de la viscosité diminuent, on montre que le problème viscoélastique se ramène au cas du problème élastique.

Cette thèse se termine par une conclusion et quelques perspectives. Tous les outils mathématiques utilisés dans ce travail ont été regroupés à la fin de cette thèse sous forme d'une annexe.

Notations

On adaptera la convention de sommation sur l'indice répété usuelle: $u_i v_i = \sum_i u_i v_i$

$\sigma(u)$	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u
σ_{ij}	Les composantes du tenseur $\sigma(u)$ dans la base canonique.
$\varepsilon(u)$	Tenseur linéarisé des déformations dans la base canonique $(\varepsilon(u))_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$
\mathcal{A}	Tenseur de Hooke du quatrième ordre.
\mathcal{A}_{ijkl}	Les composantes du tenseur \mathcal{A} dans la base canonique.
σu	Produit tensoriel (matriciel) de u par σ , $(\sigma u)_i = \sigma_{ij} u_j$.
$\mathcal{A}\sigma$	Produit tensoriel de σ par \mathcal{A} , $(\mathcal{A}\sigma)_{ij} = \mathcal{A}_{ijkl} \sigma_{kl}$
$\sigma : \varepsilon$	Produit de deux tenseurs, $\sigma : \varepsilon = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$
σ_n	Contrainte normale, avec $\sigma_n = (\sigma n) \cdot n$, où n est la normale unitaire sortante au bord du domaine.
σ_τ	Contrainte tangentielle, $\sigma_\tau = \sigma n - (\sigma_n) n$.
u_n	Déplacement normal au bord du domaine $u_n = u \cdot n$.
u_τ	Déplacement tangentiel $u_\tau = u - (u_n) n$.
Ω	Domaine occupé par le corps élastique.
Γ	Frontière de Ω
Γ_c	Partie de Γ candidate au contact.
Γ_d	Partie de Γ où on impose le déplacement.
Γ_f	Partie de Γ où on impose les tractions.
$L^p(\Omega)$	$= \left\{ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_{\Omega} u ^p dx < \infty \right\}, 1 \leq p < \infty.$
$L^\infty(\Omega)$	$= \left\{ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et il existe } C > 0 \text{ tel que } u(x) \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}.$
$W^{m,p}(\Omega), H^m(\Omega)$	Espace de Sobolev
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	= produit entre la dualité E' (espace dual) et E .
$\partial_n f$	Dérivée normale d'une fonction f .

Première partie

Modélisation des problèmes de contact avec frottement à coefficient variable

Partie I

Dans cette partie, nous présentons la modélisation des problèmes de contact avec frottement à coefficient variable. Nous nous intéressons dans un premier chapitre à la modélisation de contact avec ou sans frottement. Nous précisons, le cadre physique et le modèle mathématique contenant les différentes équations et conditions de contact concernant le champ des déplacements et le champ des contraintes, ainsi que la formulation des lois de Tresca et Coulomb avec coefficients variables. Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous considérons le modèle mathématique des processus particuliers: problème horizontal et problème vertical. Nous donnons une description détaillée des hypothèses de base et nous particularisons les équations d'équilibre et les lois de frottement de Tresca et de Coulomb dans le contexte vertical. Ce chapitre se termine par la formulation des différents problèmes dans les processus quasi-statique et dynamique qui seront étudiés dans la partie suivante.

Chapitre 1

Modélisation du contact avec ou sans frottement

Dans ce chapitre, nous présentons la modélisation du contact avec ou sans frottement entre un corps élastique (viscoélastique) et une fondation rigide. Nous précisons, le cadre physique et le modèle mathématique contenant les différentes équations et les conditions du contact avec ou sans frottement concernant le champ des déplacements et le champ des contraintes, ainsi que la formulation de la loi de Tresca avec un seuil de frottement dépendant de la vitesse de glissement et la loi de Coulomb dépendant de la vitesse de glissement avec contrainte normale imposée.

1.1 Cadre physique et modèles mathématiques

Nous présentons dans cette section le cadre physique et les modèles mathématiques associés à l'étude des problèmes de contact avec ou sans frottement entre un corps élastique (viscoélastique) et une fondation rigide.

- **Cadre physique :**

Une grande variété des phénomènes de contact rencontrée dans différents processus industriels ainsi que dans la vie de tous les jours peut être considérée dans le cadre physique (I.1.1) suivant :

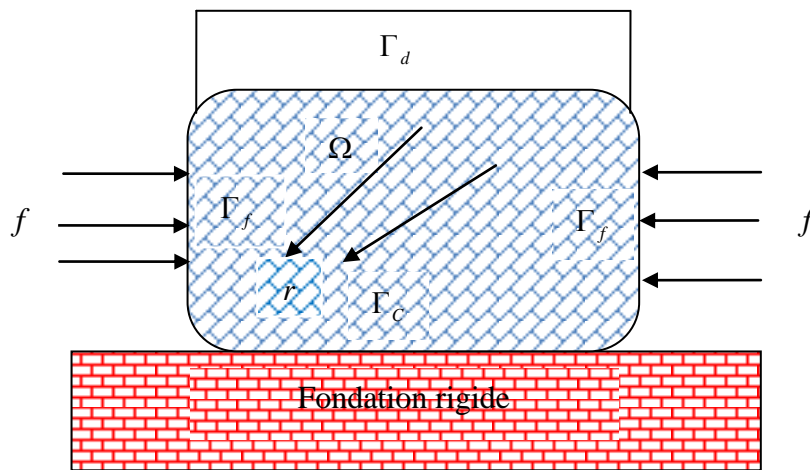


Fig.I.1.1 Cadre physique.

On considère un corps élastique ou viscoélastique occupe dans la configuration de références un ouvert borné connexe noté Ω de \mathbb{R}^N ($N = 2,3$) avec une frontière Γ . Nous notons le vecteur de position $x = (x_i) \in \Omega \cup \Gamma$. Les indices i, j, k et h variés de 1 à N . Nous notons aussi par S^N l'espace de tenseur de deuxième ordre de \mathbb{R}^N qui est équivalent à l'espace des matrices symétrique d'ordre N . Nous désignons par "." et $|\cdot|$ respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^N et S^N défini par :

$$u \cdot v = u_i v_i, \quad |v|^2 = v \cdot v \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^N$$

$$\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad |\tau|^2 = \tau \cdot \tau \quad \forall \sigma, \tau \in S^N$$

Ici et partout dans cette thèse on utilise la convention de « l'indice muet ».

Nous supposons que Γ est partitionnée en trois parties mesurables Γ_d , Γ_f et Γ_c telles que $mes(\Gamma_d) > 0$.

On suppose par ailleurs que Γ est de Lipschitz, et par conséquent le vecteur unitaire de la normale extérieure noté n existe presque partout sur Γ . Le corps est encastré sur Γ_d . Nous nous intéressons à l'étude de l'évolution du corps matériel due à l'application des forces volumiques de densité r dans Ω et de traction surfacique de densité f sur la frontière Γ_f . Le corps est en contact avec frottement sur la frontière Γ_c avec une base rigide. Nous supposons que les deux forces r et f varient très lentement par rapport au temps d'intervalle du $[0, T]$ avec $T > 0$. Nous utilisons ce cadre physique dans toute la partie II de cette thèse.

- **Modèle mathématique :**

Nous intéressons au modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps liée au cadre physique ci-dessus. Nous notons par $\sigma = (\sigma_{ij}(x, t))$ et $u = (u_i(x, t))$ respectivement le champ des contraintes et le champ des déplacements. Nous désignons par $\varepsilon = \varepsilon(u)$ le champ des déformations linéarisé.

Les fonctions $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ et $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathcal{S}^N$ vont jouer le rôle d'inconnues dans le problème de contact. Pour un vecteur v nous désignons par v_n et v_τ les composantes normale et tangentielle à la frontière, c'est-à-dire

$$\begin{cases} v_n = v \cdot n, \\ v_\tau = v - v_n n. \end{cases} \quad (\text{I.1.1})$$

Les composantes normale et tangentielle du champ des contraintes, notées respectivement σ_n et σ_τ sont définies par les égalités

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma n \cdot n, \\ \sigma_\tau = \sigma n - \sigma_n n. \end{cases} \quad (\text{I.1.2})$$

Nous utilisons (I.1.1) et (I.1.2), pour obtenir la relation suivante :

$$\sigma n \cdot v = \sigma_n v_n + \sigma_\tau \cdot v_\tau \quad (\text{I.1.3})$$

qui va intervenir tout le long de cette thèse. En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation d'une fonction par rapport au temps ; par exemple

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

où \dot{u} désigne le champ des vitesses et \ddot{u} désigne le champ des accélérations. Pour le champ des vitesses \dot{u} , les notations \dot{u}_n et \dot{u}_τ désignent respectivement la vitesse normal et la vitesse tangentielle à la frontière c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{u}_n = \dot{u} \cdot n, \\ \dot{u}_\tau = u - \dot{u}_n n. \end{cases} \quad (\text{I.1.4})$$

Rappelons que le tenseur des déformations linéarisé est donné par

$$\begin{cases} \varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)) \\ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq N \end{cases} \quad (\text{I.1.5})$$

Nous précisons par ailleurs que l'indice qui suit une virgule signifie une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante de la variable spatiale.

Les équations d'équilibre qui décrivent l'évolution du corps élastique (viscoélastique) sont

$$\operatorname{div} \sigma + r = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{I.1.6})$$

$$\operatorname{div} \sigma + r = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{I.1.7})$$

Où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la densité de masse du corps élastique ou viscoélastique et $\operatorname{div} \sigma = (\sigma_{ij,j})$ représente l'opérateur divergence.

Remarquons que ces équations décrivent les processus quasi-statiques et dynamiques.

La condition aux limite en déplacement est donnée par :

$$u = 0 \quad \text{dans } \Gamma_d \times]0, T] \quad (\text{I.1.8})$$

La condition aux limite en traction est donnée par :

$$\sigma n = f \quad \text{dans } \Gamma_f \times]0, T] \quad (\text{I.1.9})$$

Où $\sigma n = (\sigma_{ij} n_j)$ est le vecteur de Cauchy.

Afin de compléter le modèle mathématique, il faut préciser la loi de comportement du matériau ainsi que les conditions aux limites sur la frontière Γ_c , c'est-à-dire des conditions de contact avec ou sans frottement. Ceci fera l'objet des deux sections suivantes.

1.2 Lois de comportement élastique et viscoélastique

Nous décrivons dans ce paragraphe les lois de comportement des matériaux élastiques et viscoélastiques. La loi de comportement est une relation entre le tenseur des contraintes σ et le tenseur des déformations linéarisé $\varepsilon = \varepsilon(u)$.

La loi de comportement d'un matériau élastique anisotrope est décrite par l'équation suivante :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) \quad (\text{I.1.10})$$

Où $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ijkl})$ est le tenseur des coefficients élastiques.

Dans le cas d'un matériau isotrope, la relation (I.1.10) devient :

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\varepsilon(u)) \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}(u) \quad (\text{I.1.11})$$

Où λ et G sont les coefficients de Lamé.

La loi de comportement d'un matériau viscoélastique est décrite par l'équation suivante :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) + \eta \mathcal{C}\varepsilon(\dot{u}) \quad (\text{I.1.12})$$

où $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ijkl})$ est le tenseur des coefficients élastiques, $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{ijkl})$ est le tenseur de viscosité et $\eta > 0$ est le coefficient de viscosité.

1.3 Conditions de contact

La condition de contact est une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes et la loi de frottement est une relation entre la contrainte tangentielle σ_τ et la vitesse tangentielle \dot{u}_τ ou bien le déplacement tangentiel u_τ . La contrainte σ_τ s'appelle aussi force de frottement.

a) Contact bilatéral.

Le contact se fait d'une façon bilatéral c'est à dire le contact est maintenu pendant le mouvement et il n'y a pas de séparation entre le corps et une fondation rigide. La composante normale du champ des déplacements s'annule sur la surface de contact et donc :

$$u_n = 0 \quad (\text{I.1.13})$$

b) Contact unilatéral.

Cette condition modélise le contact avec une fondation rigide. Puisque la fondation est considérée rigide, elle ne subira donc pas de déformation. Le corps ne pourra pas donc y pénétrer. Cette propriété se traduit par la relation mathématique

$$u_n \leq 0 \quad (\text{I.1.14})$$

Aux points de Γ_c tel que $u_n < 0$, le corps déformable quitte la base rigide et les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent nous obtenons :

$$u_n < 0 \Rightarrow \sigma_n = 0 \quad (\text{I.1.15})$$

Aux points de Γ_c tel que $u_n = 0$, le contact est maintenu et la base rigide exerce une réaction normale orientée vers Ω et donc, nous pouvons écrire :

$$u_n = 0 \Rightarrow \sigma_n \leq 0 \quad (\text{I.1.16})$$

Les conditions de contact d'écrit par (I.1.14), (I.1.15) et (I.1.16), s'appellent « conditions de contact unilatéral » ou bien « conditions de contact de Signorini » (Fig.I.1.2). Elles peuvent être regroupées sous la forme :

$$\begin{cases} u_n \leq 0, \\ \sigma_n \leq 0, \\ \sigma_n u_n = 0. \end{cases} \quad (\text{I.1.17})$$

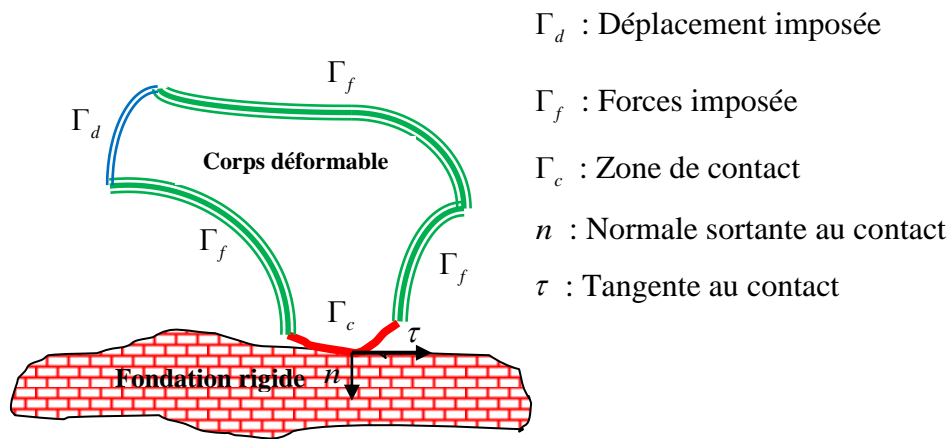


Fig. I.1.2 Corps élastique en contact sur une fondation rigide (problème de Signorini)

c) Condition avec compliance normale :

La fondation est supposée déformable. La contrainte normale σ_n satisfait la condition dite « compliance normale », c'est-à-dire

$$-\sigma_n = p(u_n) \quad (\text{I.1.18})$$

Où p est une fonction positive donnée, telle que $p(u_n) = 0$ si $u_n < 0$.

Cette condition montre que lorsqu'il y a pénétration, la fondation exerce une réaction vers le corps déformable, alors

$$u_n \geq 0 \Rightarrow \sigma_n \leq 0$$

et lorsqu'il y a séparation, la contrainte normale s'annule, donc

$$u_n < 0 \Rightarrow \sigma_n = 0$$

1.4 Lois de frottement

Nous décrivons dans cette section les conditions dans la direction tangentielle appelées généralement conditions de frottement ou lois de frottement.

a) Contact sans frottement

Nous supposons que le glissement est parfait ou sans frottement. Ceci se traduit par la relation :

$$\sigma_\tau = 0 \quad (\text{I.1.19})$$

b) Contact bilatéral sans frottement

Nous supposons que le contact est maintenu pendant le mouvement et il n'y a pas de séparation entre le corps et la base rigide et d'autre part, le glissement est parfait (sans frottement). Ceci se traduit par la relation :

$$\begin{cases} u_n = 0 \\ \sigma_\tau = 0 \end{cases} \quad (\text{I.1.20})$$

c) Contact unilatéral sans frottement

De (I.1.17) et (I.1.19), le contact unilatéral sans frottement est traduit par :

$$\begin{cases} \sigma_\tau = 0, \\ u_n \leq 0, \sigma_n \leq 0, \sigma_n u_n = 0 \end{cases} \quad (\text{I.1.21})$$

d) Loi de Tresca

Dans le cas où la force de frottement σ_τ ne s'annule pas sur la surface de contact, alors le contact est avec frottement. Le contact avec frottement est souvent modélisé avec la loi de Tresca ; dans cette loi la traction tangentielle σ_τ peut atteindre la borne g qui est appelée seuil de frottement. On a :

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq g & \text{si } \dot{u}_\tau = 0 \text{ (collement)} \\ \sigma_\tau = -g \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} & \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0 \text{ (glissement)} \end{cases} \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T[\quad (\text{I.1.22})$$

Où \dot{u}_τ est la vitesse de glissement.

Nous notons que la loi de Tresca (I.1.22) est caractérisée par l'existence d'une zone de collement et de glissement sur la région frontière de contact à chaque moment $t \in [0, T]$. Il suit de (I.1.22) que, lorsque x est un point de la frontière Γ_c et l'inégalité $|\sigma_\tau(x, t)| < g(x)$ est

vérifié, alors $\dot{u}_\tau(x, t) = 0$ et le point matériel x se trouve dans la zone de collement. Maintenant, si $|\sigma_\tau(x, t)| = g(x)$, alors le point x se trouve dans la zone de glissement.

Nous concluons que la loi de frottement de Tresca (I.1.22) modélise des phénomènes dont le glissement se produit seulement quand la force de frottement atteint une valeur critique.

e) Loi de Coulomb

Si le seuil de frottement g est choisi comme suit

$$g = g(\sigma_n) = \mu |\sigma_n| \quad (\text{I.1.23})$$

Où $\mu > 0$ étant le coefficient de frottement.

De (I.1.23) et (I.1.22), on peut définir la loi de Coulomb comme suit :

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq \mu |\sigma_n| & \text{si } \dot{u}_\tau = 0 \text{ (collement)} \\ \sigma_\tau = -\mu |\sigma_n| \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} & \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0 \text{ (glissement)} \end{cases} \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T[\quad (\text{I.1.24})$$

Récemment, les modèles mathématiques pour le frottement ont employés un coefficient de frottement variable. Par exemple :

$$\mu = \mu(|\dot{u}_\tau|) \quad (\text{I.1.25})$$

a été considérée [15].

Nous tenons compte de la dépendance de (I.1.25) en (I.1.23) pour obtenir que le seuil de frottement g satisfait :

$$g = g(|\dot{u}_\tau|) \quad (\text{I.1.26})$$

1.5 Loi de Tresca avec un seuil de frottement dépendant de la vitesse de glissement

De (I.1.22) et (I.1.26), la loi de Tresca avec un seuil de frottement dépendant de la vitesse de glissement donnée par :

$$|\sigma_\tau| \leq g(0) \quad \text{si } \dot{u}_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T[\quad (\text{I.1.27})$$

$$\sigma_\tau = -g(|\dot{u}_\tau|) \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T[\quad (\text{I.1.28})$$

1.6 Loi de Coulomb dépendant de la vitesse de glissement avec contrainte normale imposée

Nous supposons que la composante normale du contrainte et imposée sur la surface de contact. Donc, de (I.1.24) et (I.1.25), la loi de Coulomb dépendant de la vitesse de glissement avec contrainte normale imposée est donnée par :

$$\sigma_n = -S, S > 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{I.1.29})$$

$$|\sigma_\tau| \leq S\mu(0) \quad \text{si } \dot{u}_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{I.1.30})$$

$$\sigma_\tau = -S\mu(|\dot{u}_\tau|) \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{I.1.31})$$

Chapitre 2

Modélisation des problèmes horizontaux et verticaux

Dans ce chapitre, nous présentons la modélisation des problèmes horizontaux et verticaux de contact avec frottement à coefficient variable. Nous donnons une description détaillée des hypothèses de base et nous particularisons les équations d'équilibre et les lois de frottement de Tresca et de Coulomb dans le contexte vertical. Ce chapitre se termine par la formulation des différents problèmes dans les processus quasi-statique et dynamique.

2.1 Position du problème

Nous basons sur l'étude présentée dans le cadre physique du premier chapitre et nous supposons qu'on a un corps élastique occupant un domaine $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) infini suivant l'axe (Oz) et soit Ω la section horizontale de \mathcal{B} (voir Fig. I.2.1). Alors, Ω est un domaine régulier dans le plan (Oxy) où $(Oxyz)$ représente un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 en coordonnées cartésiennes. Nous avons, $\mathcal{B} = \Omega \times \mathbb{R}$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné de frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$. Nous supposons que Γ est partitionnée en trois parties disjointes mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 tel que $mes(\Gamma_1) > 0$. Nous choisissons $\Gamma_d = \Gamma_1 \times \mathbb{R}$, $\Gamma_f = \Gamma_2 \times \mathbb{R}$ et $\Gamma_c = \Gamma_3 \times \mathbb{R}$, et nous supposons que le corps élastique est encastré sur Γ_d et il est en contact avec une base rigide sur Γ_c durant le processus. De plus, le corps est soumis aux forces volumiques de densité r et des tractions surfaciques de densité f sur Γ_f . Soit $T > 0$ et $[0, T]$ désigne l'intervalle du temps dans lequel nous étudions l'évolution du corps élastique.

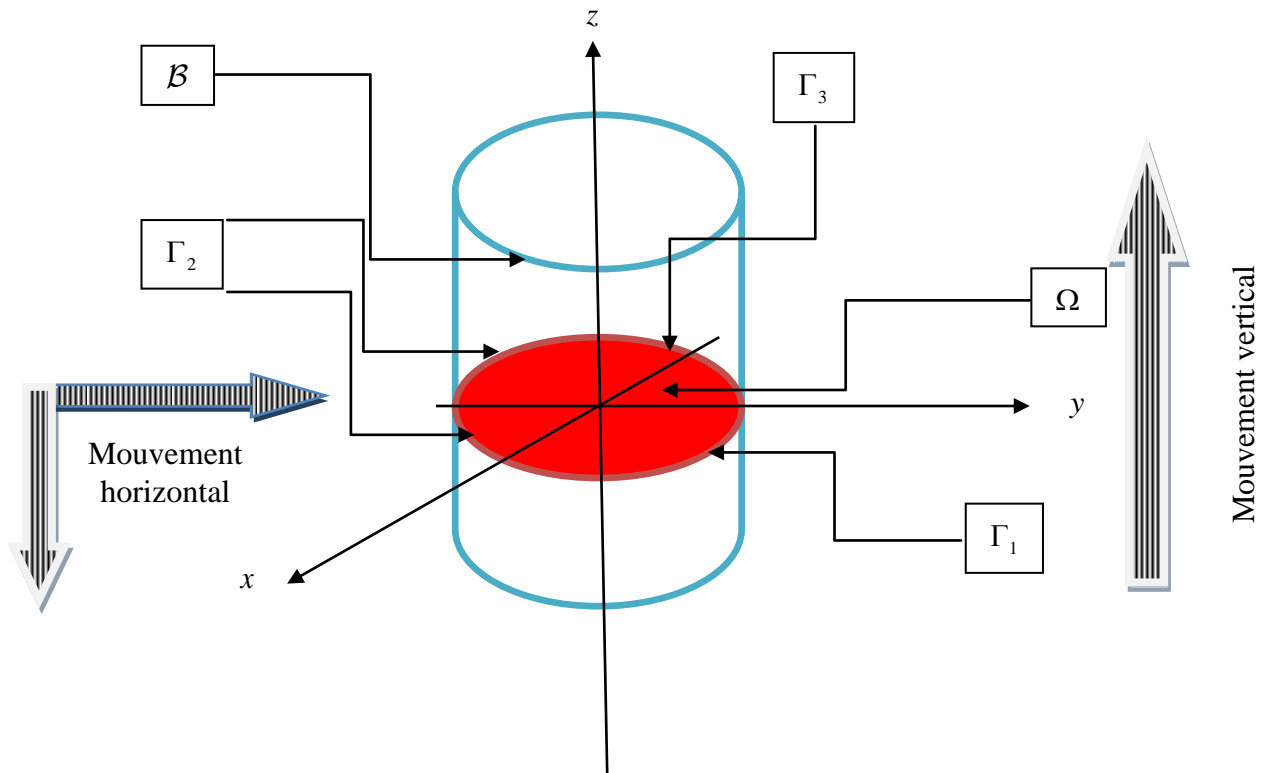


Fig. I.2.1 Problèmes: horizontal et vertical

2.2 Problèmes horizontaux

Nous supposons que les densités des forces volumiques r et surfaciques f sont données par:

$$\begin{cases} r = (r_1, r_2, 0) \\ r_1 = r_1(x, y, t) : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\ r_2 = r_2(x, y, t) : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{I.2.1})$$

$$\begin{cases} f = (f_1, f_2, 0) \\ f_1 = f_1(x, y, t) : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\ f_2 = f_2(x, y, t) : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{I.2.2})$$

et la contrainte imposée et les données initiales sont données comme suit:

$$\begin{cases} S = (S_1, S_2, 0), \\ \bar{u}_0 = (\bar{u}_1^0, \bar{u}_2^0, 0), \\ \bar{u}_1 = (\bar{u}_1^1, \bar{u}_2^1, 0) \end{cases} \quad (\text{I.2.3})$$

Nous supposons que les deux forces f et r définies par (I.2.1) et (I.2.2) engendrent une déformation sur le corps avec un déplacement u tel que

$$\begin{cases} u = (u_1, u_2, 0) \\ u_1 = u_1(x, y, t) : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\ u_2 = u_2(x, y, t) : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{I.2.4})$$

De (I.1.6)-(I.1.10), (I.1.12) et (I.1.29)-(I.1.31), les problèmes horizontaux envisagés dans ce chapitre sont les suivants :

2.2.1 Problème élasto-quasi-statique:

Le problème élasto-quasi-statique de frottement de Coulomb dépendant de la vitesse de glissement avec contrainte normale imposée consiste à trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et le champ de contrainte $\sigma : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{S}^2$ tels que :

$$\operatorname{div} \sigma(u) + r = 0 \text{ dans } \Omega \times]0, T], \quad (\text{I.2.5})$$

$$\sigma(u) = \mathcal{A} \varepsilon(u) \text{ dans } \Omega \times]0, T], \quad (\text{I.2.6})$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_d \times]0, T], \quad (\text{I.2.7})$$

$$\sigma(u)n = f \text{ sur } \Gamma_f \times]0, T], \quad (\text{I.2.8})$$

$$\sigma_n(u) = -S, \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{I.2.9})$$

$$|\sigma_\tau(u)| \leq S\mu(0) \quad \text{si } \dot{u}_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T], \quad (\text{I.2.10})$$

$$\sigma_\tau(u) = -S\mu\left(\left|\frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|}\right|\right) \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{I.2.11})$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{I.2.12})$$

2.2.2 Problème élasto-dynamique:

Le problème élasto-dynamique de frottement de Coulomb dépendant de la vitesse de glissement avec contrainte normale imposée consiste à trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et le champ de contrainte $\sigma : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{S}^2$ tels que:

$$\text{div}\sigma(u) + r = \rho\ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T], \quad (\text{I.2.13})$$

$$\sigma(u) = \mathcal{A}\varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T], \quad (\text{I.2.14})$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d \times]0, T], \quad (\text{I.2.15})$$

$$\sigma(u)n = f \quad \text{sur } \Gamma_f \times]0, T], \quad (\text{I.2.16})$$

$$\sigma_n(u) = -S \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{I.2.17})$$

$$|\sigma_\tau(u)| \leq S\mu(0) \quad \text{si } \dot{u}_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T], \quad (\text{I.2.18})$$

$$\sigma_\tau(u) = -S\mu\left(\left|\frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|}\right|\right) \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{I.2.19})$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1 \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{I.2.20})$$

2.2.3 Problème viscoélastique

Le problème viscoélastique de frottement de Coulomb dépendant de la vitesse de glissement avec contrainte normale imposée consiste à trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et le champ de contrainte $\sigma : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{S}^2$ tels que:

$$\text{div}\sigma(u) + r = \rho\ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T], \quad (\text{I.2.21})$$

$$\sigma(u) = \mathcal{A}\varepsilon(u) + \eta\mathcal{C}\varepsilon(\dot{u}) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T], \quad (\text{I.2.22})$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d \times]0, T], \quad (\text{I.2.23})$$

$$\sigma(u)n = f \quad \text{sur } \Gamma_f \times]0, T], \quad (\text{I.2.24})$$

$$\sigma_n(u) = -S \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{I.2.25})$$

$$|\sigma_\tau(u)| \leq S\mu(0) \text{ si } \dot{u}_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T], \quad (\text{I.2.26})$$

$$\sigma_\tau(u) = -S\mu(|\dot{u}_\tau|) \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} \text{ si } \dot{u}_\tau \neq 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{I.2.27})$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1 \text{ dans } \Omega. \quad (\text{I.2.28})$$

2.3 Problèmes verticaux

Nous supposons que les densités des forces surfaciques f et des forces volumiques r sont données par :

$$\begin{cases} r = (0, 0, r) \\ r = r(x, y, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{I.2.29})$$

$$\begin{cases} f = (0, 0, f) \\ f = f(x, y, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{I.2.30})$$

Nous supposons que les deux forces r et f définies par (I.2.29) et (I.2.30) engendrent une déformation sur le corps avec un déplacement u tel que

$$\begin{cases} u = (0, 0, u) \\ u = u(x, y, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{I.2.31})$$

Nous rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites déformations

$$\begin{cases} \varepsilon = (\varepsilon_{ij}(u)) \\ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq 3 \end{cases} \quad (\text{I.2.32})$$

Par conséquent, en utilisant (I.2.31) et (I.2.32) il résulte que le tenseur des déformations $\varepsilon(u)$ peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{u_{,1}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{u_{,2}}{2} \\ \frac{u_{,1}}{2} & \frac{u_{,2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.2.33})$$

On choisit dans le cas d'un matériau élastique linéaire isotrope et homogène, c'est-à-dire

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\varepsilon(u)) \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}(u) \quad (\text{I.2.34})$$

Où $\lambda > 0$ et $G > 0$ sont les coefficients de Lamé. Nous remplaçons (I.2.33) dans (I.2.34) pour obtenir

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Gu_{,1} \\ 0 & 0 & Gu_{,2} \\ Gu_{,1} & Gu_{,2} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.2.35})$$

Nous rappelons que l'équation d'équilibre est donnée par:

- **Statique:**

$$\operatorname{div}\sigma + r = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{I.2.36})$$

- **Dynamique:**

$$\operatorname{div}\sigma + r = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{I.2.37})$$

Où ρ est la densité de masse.

De (I.2.35)- (I.2.37) il vient

- **Statique :**

$$G\Delta u + r = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{I.2.38})$$

- **Dynamique :**

$$G\Delta u + r = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{I.2.39})$$

Soit n le vecteur unitaire normale sur $\Gamma \times]0, T]$ donné par:

$$n = (n_1, n_2, 0) \quad (\text{I.2.40})$$

et soit $\partial_n \varphi = \nabla \varphi \cdot n$ la dérivée normale de la fonction φ . Nous avons

$$\sigma n = f \quad (\text{I.2.41})$$

et ceci est équivalent à

$$\sigma n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Gu_{,1} \\ 0 & 0 & Gu_{,2} \\ Gu_{,1} & Gu_{,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \quad (\text{I.2.42})$$

En faisant le produit nous obtenons :

$$\sigma n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G\partial_n u \end{pmatrix} \quad (\text{I.2.43})$$

De (I.2.42)- (I.2.43), nous avons :

$$G\partial_n u = f \text{ sur } \Gamma_f \times]0, T] \quad (\text{I.2.44})$$

De (I.2.38)-(I.2.39), (I.2.44) et (I.1.27)-(I.1.28), les problèmes verticaux envisagés dans ce chapitre sont les suivants :

2.3.1 Problème élasto-quasi-statique :

Le problème élasto-quasi-statique de frottement de Tresca avec un seuil dépendant de la vitesse de glissement consiste à trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$G\Delta u + r = 0 \text{ dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{I.2.45})$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_d \times]0, T] \quad (\text{I.2.46})$$

$$G\partial_n u = f \text{ sur } \Gamma_f \times]0, T] \quad (\text{I.2.47})$$

$$G|\partial_n u| \leq g(0) \text{ si } \dot{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{I.2.48})$$

$$G\partial_n u = -g(|\dot{u}|) \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \text{ si } \dot{u} \neq 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{I.2.49})$$

$$u(0) = u_0 \text{ dans } \Omega \quad (\text{I.2.50})$$

2.3.2 Problème élasto-dynamique :

Le problème élasto-dynamique de frottement de Tresca avec un seuil dépendant de la vitesse de glissement consiste à trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$G\Delta u + r = \rho \ddot{u} \text{ dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{I.2.51})$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_d \times]0, T] \quad (\text{I.2.52})$$

$$G\partial_n u = f \text{ sur } \Gamma_f \times]0, T] \quad (\text{I.2.53})$$

$$G|\partial_n u| \leq g(0) \text{ si } \dot{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{I.2.54})$$

$$G\partial_n u = -g(|\dot{u}|) \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \text{ si } \dot{u} \neq 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{I.2.55})$$

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1 \text{ dans } \Omega \quad (\text{I.2.56})$$

2.3.3 Problème viscoélastique :

Le problème viscoélastique de frottement de Tresca avec un seuil dépendant de la vitesse de glissement consiste à trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$G\Delta u + \eta \Delta \dot{u} + r = \rho \ddot{u} \text{ dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{I.2.57})$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_d \times]0, T] \quad (\text{I.2.58})$$

$$G\partial_n u + \eta\partial_n \dot{u} = f \text{ sur } \Gamma_f \times]0, T] \quad (\text{I.2.59})$$

$$|G\partial_n u + \eta\partial_n \dot{u}| \leq g(0) \text{ si } \dot{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{I.2.60})$$

$$G\partial_n u + \eta\partial_n \dot{u} = -g(|\dot{u}|) \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \text{ si } \dot{u} \neq 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{I.2.61})$$

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1 \text{ dans } \Omega \quad (\text{I.2.62})$$

Deuxième partie

Analyse mathématique des problèmes de contact avec frottement à coefficient variable

Partie II

*L'*objet de cette partie est de proposer une analyse mathématique des problèmes de contact avec frottement à coefficient variable qui sont formulés au chapitre 2 de la partie précédente. Nous avons étudié les trois problèmes : problème élasto-quasi-statique, problème élasto-dynamique et problème viscoélastique dans les contextes horizontaux et verticaux. Pour les problèmes élasto-quasi-statique et élasto-dynamique en utilisant la méthode de différences finis, en supposant que les conditions sur le bord de frottement ne sont ni perturbées ni régularisées. Cependant, dans le problème viscoélastique, on utilise la méthode de Faedo-Galerkin en perturbant les conditions de frottement. Finalement, lorsque les effets de la viscosité diminuent nous déduisons que le problème viscoélastique se ramène au cas élastique.

Chapitre 1

Problème élasto-quasi-statique de contact avec frottement à coefficient variable

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux problèmes élasto-quasi-statiques horizontaux et verticaux de contact avec frottement à coefficient variable. L'utilisation de la méthode des différences finis avec le schéma implicite d'Euler, le problème variationnel se ramène au cas d'une suite de problèmes des inéquations quasi-variationnelles elliptiques. En se basant sur une étude spectrale, nous démontrons un résultat d'équivalence entre le problème elliptique et un problème de minimisation non linéaire sans contrainte. L'interpolation de la solution discrète et la méthode de compacité, nous permettent de prouver l'existence d'une solution faible.

1.1 Problème horizontal

On commence par le problème quasi-statique horizontal (I.2.5)-(I.2.12). Ce problème consiste à trouver le champ de déplacement $\bar{u} : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et le champ de contrainte $\sigma : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{S}^2$ tels que :

$$\operatorname{div} \sigma(\bar{u}) + r = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{II.1.1})$$

$$\sigma(\bar{u}) = \mathcal{A} \varepsilon(\bar{u}) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{II.1.2})$$

$$\bar{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d \times]0, T] \quad (\text{II.1.3})$$

$$\sigma(\bar{u})n = f \quad \text{sur } \Gamma_f \times]0, T] \quad (\text{II.1.4})$$

$$\sigma_n(\bar{u}) = -S, \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad (\text{II.1.5})$$

$$|\sigma_\tau(\bar{u})| \leq S\mu(0) \quad \text{si } \dot{\bar{u}}_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.1.6})$$

$$\sigma_\tau(\bar{u}) = -S\mu\left(\left|\frac{\dot{\bar{u}}_\tau}{|\dot{\bar{u}}_\tau|}\right|\right) \frac{\dot{\bar{u}}_\tau}{|\dot{\bar{u}}_\tau|} \quad \text{si } \dot{\bar{u}}_\tau \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.1.7})$$

$$\bar{u}(0) = \bar{u}_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{II.1.8})$$

Pour simplifier l'étude de ce problème, on va homogénéiser les équations (II.1.1), (II.1.4), (II.1.5) et (II.1.8) comme suit.

On désigne par $u^c : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la solution collée, i.e. $\dot{u}_\tau^c = 0$ sur $\Gamma_c \times]0, T]$, du problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(u^c) + r = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T] \\ \sigma(u^c) = \mathcal{A} \varepsilon(u^c) & \text{dans } \Omega \times]0, T] \\ u^c = 0 & \text{sur } \Gamma_d \times]0, T] \\ \sigma(u^c)n = f & \text{sur } \Gamma_f \times]0, T] \\ \sigma_n(u^c) = -S & \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \\ |\sigma_\tau(u^c)| \leq S\mu(0) & \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \\ u^c(0) = \bar{u}_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (\text{II.1.9})$$

En désignant par $-q = \sigma_\tau(u^c)$ la contrainte tangentielle sur Γ_c correspondant à la solution « collée » du problème (II.1.9).

En notant $u = \bar{u} - u^c$, de (II.1.1)-(II.1.8) et (II.1.9) nous déduisons le problème quasi-statique homogène de frottement avec contrainte normale imposée suivant :

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et le champ de contrainte $\sigma : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{S}^2$ tels que :

$$\operatorname{div} \sigma(u) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{II.1.10})$$

$$\sigma(u) = \mathcal{A} \varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{II.1.11})$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d \times]0, T] \quad (\text{II.1.12})$$

$$\sigma(u)n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_f \times]0, T] \quad (\text{II.1.13})$$

$$\sigma_n(u) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.1.14})$$

$$|\sigma_\tau(u) - q| \leq S\mu(0) \quad \text{si } \dot{u}_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.1.15})$$

$$\sigma_\tau(u) + S\mu \left(\left| \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} \right| \right) = q \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.1.16})$$

$$u(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.1.17})$$

Remarque 1.1. Dans le passage du problème (II.1.9) au problème (II.1.10)-(II.1.17), on remarque que les effets de r , f , S et \bar{u}_0 se réduisent aux effets de q et S .

1.1.1 Hypothèses, notations et préliminaires

Dans cette section, nous présentons les notations essentielles et quelques préliminaires que nous aurons utilisés dans la suite. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [10, 15, 18].

Nous utiliserons les notations :

$$H = L^2(\Omega)^2 = \{u = (u_i) / u_i \in L^2(\Omega)\},$$

$$\mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\},$$

$$H_1 = \{u = (u_i) / \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\},$$

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} / \operatorname{div} \sigma \in H\}.$$

Où $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ et $\operatorname{div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$ sont les opérateurs de déformation et de divergence respectivement, définis par:

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \operatorname{div} \sigma = (\sigma_{ij,j})$$

Où l'indice qui suit la virgule indique une dérivée partielle par rapport la composante correspondante de la variable indépendante. Les espaces H, \mathcal{H}, H_1 et \mathcal{H}_1 sont des espaces de Hilbert munis des produits scalaires suivants:

$$\begin{aligned} (u, v)_H &= \int_{\Omega} u_i v_i dx, \quad (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (u, v)_{H_1} &= (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} &= (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (\operatorname{div} \sigma, \operatorname{div} \tau)_H. \end{aligned}$$

Les normes associées de ces espaces sont notées par $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ respectivement.

Soient $H_{\Gamma} = H^{1/2}(\Gamma)^2$ et $\gamma : H_1 \rightarrow H_{\Gamma}$ l'opérateur de trace. Pour chaque élément $v \in H_1$, nous écrivons aussi v pour la trace γ de v sur Γ et nous notons par v_n et v_{τ} les composantes normale et tangentielle de v sur la frontière Γ données par:

$$v_n = v \cdot n, \quad v_{\tau} = v - v_n n \quad (\text{II.1.18})$$

Soit H'_{Γ} le dual de H_{Γ} et on désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre H'_{Γ} et H_{Γ} . Pour chaque $\sigma \in \mathcal{H}_1$ il existe un élément $\sigma n \in H'_{\Gamma}$ tel que

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\operatorname{div} \sigma, v)_H = \langle \sigma n, \gamma(v) \rangle \quad \forall v \in H_1 \quad (\text{II.1.19})$$

En outre, nous notons par σ_n et σ_{τ} , la contrainte normale et la contrainte tangentielle respectivement de σ et nous rappelons que, lorsque σ est une fonction régulière de classe C^1 , alors :

$$\langle \sigma n, \gamma(v) \rangle = \int_{\Gamma} \sigma n \cdot \gamma(v) da \quad \forall v \in H_1 \quad (\text{II.1.20})$$

$$\sigma_n = \sigma n \cdot n, \quad \sigma_{\tau} = \sigma n - \sigma_n n \quad (\text{II.1.21})$$

Finalement, pour tout espace de Hilbert réel X et $T > 0$, nous utilisons la notation classique pour les espaces $L^p(0, T; X)$ ($1 \leq p \leq \infty$). Nous utilisons aussi l'espace de Sobolev $W^{1, \infty}(0, T; X)$ avec la norme:

$$\|u\|_{W^{1, \infty}(0, T; X)} = \|u\|_{L^{\infty}(0, T; X)} + \|\dot{u}\|_{L^{\infty}(0, T; X)}$$

Ici et partout dans cette thèse, un point au-dessus représente la dérivée par rapport à la variable du temps.

Pour obtenir les formulations variationnelles des problèmes (II.1.9) et (II.1.10)-(II.1.17), nous avons besoin d'autres notations. Alors, nous introduisons le sous-espace fermé V de H_1 défini par:

$$V = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_d\}$$

D'après $\operatorname{mes}(\Gamma_d) > 0$, l'inégalité de Korn peut s'écrire, voir [15], sous la forme:

$$\|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq C \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V \quad (\text{II.1.22})$$

où $C > 0$ est une constante dépend uniquement de Ω et Γ_d .

Nous considérons le produit scalaire sur V suivant:

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \quad (\text{II.1.23})$$

Et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, i.e.

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V$$

De (II.1.22), Il résulte que les normes $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont équivalentes sur V , et donc $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert réel.

D'autre part, le théorème de trace de Sobolev et l'inégalité de Korn (II.1.22), nous donne l'inégalité suivante :

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq C_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V \quad (\text{II.1.24})$$

Où $C_0 > 0$ est une constante qui dépend uniquement de Ω et Γ_d .

Dans l'étude des problèmes mécaniques (II.1.9) et (II.1.10)-(II.1.17), nous supposons que le tenseur de l'élasticité $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ijkh})$ satisfait les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{A}: \Omega \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (b) \mathcal{A}_{ijkh} \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j, k, h \leq 2 \\ (c) \mathcal{A}\sigma \cdot \tau = \sigma \cdot \mathcal{A}\tau \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}, \text{ p.p. dans } \Omega \\ (d) \text{ Il existe } m > 0 \text{ tel que } \mathcal{A}\tau \cdot \tau \geq m|\tau|^2 \quad \forall \tau \in \mathbb{S} \end{array} \right. \quad (\text{II.1.25})$$

Le coefficient de frottement satisfait:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mu: \Gamma_c \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (b) \text{ Il existe } \ell_\mu > 0: |\mu(x, u_1) - \mu(x, u_2)| \leq \ell_\mu |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}_+ \text{ p.p. } x \in \Gamma_c \\ (c) \text{ Il existe } \mu_0 > 0: \mu(x, u) \leq \mu_0 \quad \forall u \in \mathbb{R}_+ \text{ p.p. } x \in \Gamma_c \\ (d) x \rightarrow \mu(x, u) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_c \quad \forall u \in \mathbb{R}_+ \\ (e) u \rightarrow \mu(x, u) \text{ est continûment différentiable sur } [0, +\infty[\text{ p.p. } x \in \Gamma_c \\ (f) x \rightarrow \mu(x, 0) \in L^2(\Gamma_c) \end{array} \right. \quad (\text{II.1.26})$$

La force volumique et la traction surfacique sont supposées pour satisfaire:

$$r \in W^{1,\infty}(0, T; H), f \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_f)) \quad (\text{II.1.27})$$

On suppose aussi que les chargements q et S ont les régularités suivantes :

$$q \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_c)) \text{ et } S \in L^\infty(\Gamma_c), S > 0 \quad (\text{II.1.28})$$

On définit la forme bilinéaire $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante:

$$a(u, v) = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad (\text{II.1.29})$$

Et les fonctionnelles $j: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} j(u, v) = \int_{\Gamma_c} S\mu(|u_\tau|)|v_\tau| dx \\ \varphi(v) = \int_{\Gamma_c} S\mu(0)|v_\tau| dx \end{cases} \quad (\text{II.1.30})$$

$$\varphi \text{ est une fonctionnelle convexe, propre et semi-continue inférieurement} \quad (\text{II.1.31})$$

En vertu du théorème A.1 de représentation de Riesz-Fréchet, $F: [0, T] \rightarrow V$ peut être représenté sous la forme :

$$(F, v)_V = \int_{\Omega} r \cdot v dx + \int_{\Gamma_f} f \cdot v dx - \int_{\Gamma_c} S \cdot v_n dx \quad (\text{II.1.32})$$

D'après (II.1.27) et (II.1.28) il vient :

$$F \in W^{1, \infty}(0, T; V) \quad (\text{II.1.33})$$

Nous supposons la condition initiale satisfaite :

$$\bar{u}_0 \in V \quad (\text{II.1.34})$$

$$a(\bar{u}_0, v) + \varphi(v) \geq (F(0), v)_V, \quad \forall v \in V \quad (\text{II.1.35})$$

Remarque 1.2 Du point de vu mécanique, $j(\cdot, \cdot)$ et $\varphi(\cdot)$ représentent le travail virtuel des forces de frottement, $(F, v)_V$ représentent le travail virtuel des forces extérieures et $a(\cdot, \cdot)$ représente le travail virtuel des forces élastiques.

De (II.1.22) et (II.1.25), nous déduisons que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue, symétrique et coercive, c'est-à-dire :

$$\exists M > 0, \forall u, v \in V : |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad (\text{II.1.36})$$

$$\forall u, v \in V : a(u, v) = a(v, u) \quad (\text{II.1.37})$$

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in V : a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad (\text{II.1.38})$$

1.1.2 Formulation variationnelle

Avec les notations ci-dessus, les problèmes (II.1.9) et (II.1.10)-(II.1.17) se ramènent aux problèmes variationnels suivants :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^c :]0, T] \rightarrow V \text{ tel que} \\ a(u^c, v - \dot{u}^c) + \varphi(v) \geq (F, v - \dot{u}^c)_V, \quad \forall v \in V \\ u^c(0) = \bar{u}_0 \end{cases} \quad (\text{II.1.39})$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u :]0, T] \rightarrow V \text{ tel que} \\ a(u, v - \dot{u}) + j(\dot{u}, v) - j(\dot{u}, \dot{u}) \geq (q, v_\tau - \dot{u}_\tau)_{L^2(\Gamma_c)}, \quad \forall v \in V \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.1.40})$$

Relativement à ces problèmes variationnels, nous avons le résultat suivant:

Théorème 1.1 *Sous les hypothèses (II.1.28), (II.1.31) et (II.1.33)-(II.1.38), nous avons :*

1) *Le problème (II.1.39) possède une unique solution ayant la régularité*

$$u^c \in W^{1,\infty}(0, T; V) \quad (\text{II.1.41})$$

2) *Le problème (II.1.40) possède au moins une solution ayant la régularité:*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; V) \quad (\text{II.1.42})$$

Démonstration :

1) Sous les hypothèses (II.1.31) et (II.1.33)-(II.1.38), en utilisant le Théorème A.19, le problème (II.1.39) admet une unique solution vérifiant la régularité (II.1.41).

2) Pour démontrer l'existence d'une solution du problème (II.1.40), nous allons utiliser la méthode de différences finis.

Soit la partition de l'intervalle $[0, T]$ suivante :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T, \text{ où } t_i = i\Delta t, 0 \leq i \leq m, \text{ avec } \Delta t = \frac{T}{m}.$$

En utilisant le schéma implicite d'Euler suivant :

$$\begin{cases} u^0 = 0, \\ u^{i+1} = u^i + \Delta t \dot{u}^{i+1}. \end{cases} \quad (\text{II.1.43})$$

Le problème (II.1.40) devient :

$$(P^i): \begin{cases} \text{Trouver } u^{i+1} \in V \text{ tel que } \forall v \in V: \\ a(u^{i+1}, v - u^{i+1}) + j\left(\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}, v - u^i\right) - j\left(\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}, u^{i+1} - u^i\right) \geq (q^{i+1}, v_\tau - u_\tau^{i+1})_{L^2(\Gamma_c)} \\ u^0 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.1.44})$$

On désigne par $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle d'énergie associée au problème (P^i) définie par :

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}a(v, v) + \Delta t \int_{\Gamma_c} S \psi \left(x, \frac{|v_\tau - u_\tau^i|}{\Delta t} \right) dx - (q^{i+1}, v_\tau)_{L^2(\Gamma_c)}, \quad v \in V \quad (\text{II.1.45})$$

Où ψ est la primitive du coefficient de frottement telle que

$$\psi(x, p) = \int_0^p \mu(x, \xi) d\xi$$

Nous avons le résultat suivant:

Lemme 1.1

1) Si Φ admet en $u = u^{i+1} \in V$ un minimum local, i.e.

$$\Phi(u) \leq \Phi(v) \text{ pour tout } v \in V \text{ tel que } \|u - v\|_V < \delta, \quad \delta > 0 \quad (\text{II.1.46})$$

alors u est une solution de (P^i) .

2) Il existe au moins un minimum global de la fonctionnelle d'énergie Φ , i.e.

$$\Phi(u) \leq \Phi(v) \text{ pour tout } v \in V$$

Preuve

1) On suppose que (II.1.46) est vérifiée, alors, il existe $\theta_0 \in]0, 1[$ tel que $\theta_0 \|u - v\|_V < \delta$.

Nous avons :

$$\forall \theta \in]0, \theta_0[, \Phi(u) \leq \Phi((1 - \theta)u + \theta v) .$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} & \theta a(u, v - u) + \frac{\theta^2}{2} a(v - u, v - u) + \\ & + \Delta t \int_{\Gamma_c} S \left[\psi \left(x, \frac{|u_\tau - u_\tau^i|}{\Delta t} + \theta \left(\frac{|v_\tau - u_\tau^i|}{\Delta t} - \frac{|u_\tau - u_\tau^i|}{\Delta t} \right) \right) - \psi \left(x, \frac{|u_\tau - u_\tau^i|}{\Delta t} \right) \right] dx \geq \theta (q^{i+1}, v_\tau - u_\tau^{i+1})_{L^2(\Gamma_c)} \end{aligned}$$

En divisant sur θ et en passant à la limite lorsque θ tend vers 0, nous obtenons :

$$a(u, v - u) + \int_{\Gamma_c} S \mu \left(x, \frac{|u_\tau - u_\tau^i|}{\Delta t} \right) (|v_\tau - u_\tau^i| - |u_\tau - u_\tau^i|) dx \geq (q^{i+1}, v_\tau - u_\tau^{i+1})_{L^2(\Gamma_c)}$$

Et par conséquent, d'après (II.1.30) et (II.1.44), nous déduisons que le minimum local $u = u^{i+1} \in V$ est une solution de problème (P^i) .

2) Pour démontrer que la fonctionnelle Φ admet au moins un minimum global, d'après le Théorème A.6, il suffit de vérifier que Φ est coercive et faiblement semi continue inférieure.

a) **Coercivité** : Pour toute suite (u_n) de V , de (II.1.24) et (II.1.45), nous avons :

$$\Phi(u_n) \geq \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{C_0 \|q^{i+1}\|_{L^2(\Gamma_c)}}{\|u_n\|_V} \right) \|u_n\|_V^2 .$$

Donc, $\lim_{\|u_n\|_V \rightarrow \infty} \Phi(u_n) = +\infty$ d'où la coercivité de Φ .

b) **Faiblement semi continue inférieure** :

Pour démontrer Φ est faiblement semi-continue inférieurement, il suffit de démontrer que le sous ensemble de V défini par :

$$C(\lambda) = \{v \in V, \Phi(v) \leq \lambda\}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

est faiblement fermé.

Soit (u_n) une suite de $C(\lambda)$ converge faiblement vers u , alors :

$$\forall w \in V : \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, w)_V = (u, w)_V \quad (\text{II.1.47})$$

Démontrons que $u \in C(\lambda)$, comme V est fermé alors $u \in V$ et nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi(u_n) - \Phi(u) &= \frac{1}{2} a(u_n - u, u_n - u) + a(u, u_n - u) - (q^{i+1}, u_{n\tau} - u_\tau)_{L^2(\Gamma_c)} + \\ &\quad + \Delta t \int_{\Gamma_c} S \left[\psi \left(x, \frac{|u_{n\tau} - u_\tau^i|}{\Delta t} \right) - \psi \left(x, \frac{|u_\tau - u_\tau^i|}{\Delta t} \right) \right] dx \end{aligned}$$

De (II.1.24), (II.1.26c) et (II.1.36), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &|\Phi(u_n) - \Phi(u)| \leq \\ &\leq \left[\frac{M}{2} \sqrt{(u_n - u, u_n - u)_V} + M \|u\|_V + C_0 \|q^{i+1}\|_{L^2(\Gamma_c)} + \mu_0 \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \right] \sqrt{(u_n - u, u_n - u)_V} \quad (\text{II.1.48}) \end{aligned}$$

On pose $w = u_n - u$, de (II.1.47), nous obtenons:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - u, u_n - u)_V = 0 \quad (\text{II.1.49})$$

De (II.1.48) et (II.1.49), il résulte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(u_n) - \Phi(u)) = 0$$

Nous avons :

$$\Phi(u_n) - \Phi(u) + \Phi(u) \leq \lambda \quad (\text{II.1.50})$$

Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, de (II.1.50) nous obtenons $\Phi(u) \leq \lambda$.

Alors $u \in C(\lambda)$, d'où $C(\lambda)$ est faiblement fermé.

L'étude de l'unicité de la solution du problème (P^i) dépendant de l'étude du problème spectral qui consiste à chercher $b \in \mathbb{R}$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, v \neq 0$ tel que

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(v) = 0; \quad \sigma(v) = \mathcal{A}\varepsilon(v) & \text{dans } \Omega \\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_d; \quad \sigma(v)n = 0 & \text{sur } \Gamma_f \\ \sigma_n(v) = 0; \quad \sigma_\tau(v) = bv_\tau & \text{sur } \Gamma_c \end{cases} \quad (\text{II.1.51})$$

dont la formulation variationnelle est

$$v \in V, v \neq 0 \text{ tel que } a(v, w) = b \cdot (v_\tau, w_\tau)_{L^2(\Gamma_c)}, \quad \forall w \in V \quad (\text{II.1.52})$$

On peut démontrer le résultat suivant :

Lemme 1.2 *Il existe une suite croissante des valeurs propres positives $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ pour le problème (II.1.52). Chaque b_n correspond à un espace de dimension finie de fonctions propres $W_n \subset V$. Toutefois, nous avons :*

$$\forall v \in V : a(v, v) \geq b_0 \|v_\tau\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 \quad (\text{II.1.53})$$

Preuve : Comme l'injection de V dans $L^2(\Gamma_c)$ est compact, alors il existe $C > 0$ telle que

$$\forall v \in V, \|\gamma_\tau(v)\|_{L^2(\Gamma_c)} = \|v_\tau\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq C \|v\|_V \quad (\text{II.1.54})$$

Pour $h \in L^2(\Gamma_c)$, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(v) = 0; \quad \sigma(v) = \mathcal{A}\varepsilon(v) & \text{dans } \Omega \\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_d; \quad \sigma(v)n = 0 & \text{sur } \Gamma_f \\ \sigma_n(v) = 0; \quad \sigma_\tau(v) = h & \text{sur } \Gamma_c \end{cases} \quad (\text{II.1.55})$$

ou encore sous forme variationnelle :

$$u \in V, a(u, v) = (h, v_\tau)_{L^2(\Gamma_c)}, \quad \forall v \in V \quad (\text{II.1.56})$$

Grâce au Théorème de Lax-Milgram, le problème (II.1.56) admet une unique solution $u \in V$.

On définit les applications suivantes :

$$\begin{cases} \mathfrak{R} : L^2(\Gamma_c) \rightarrow V \text{ tel que} \\ \mathfrak{R}(h) = u : \text{unique solution de (II.1.56)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathfrak{R}} : L^2(\Gamma_c) \rightarrow L^2(\Gamma_c) \text{ tel que} \\ \tilde{\mathfrak{R}}(h) = (\gamma_\tau \circ \mathfrak{R})(h) \end{cases}$$

Soient $h_1, h_2 \in L^2(\Gamma_c)$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, en utilisant (II.1.56), nous avons

$$\forall v \in V, a(\theta_1 \mathfrak{R}(h_1), v) = (\theta_1 h_1, v_\tau)_{L^2(\Gamma_c)} \quad \text{et} \quad a(\theta_2 \mathfrak{R}(h_2), v) = (\theta_2 h_2, v_\tau)_{L^2(\Gamma_c)}$$

Par sommation, nous obtenons

$$\forall v \in V, a(\theta_1 \mathfrak{R}(h_1) + \theta_2 \mathfrak{R}(h_2), v) = (\theta_1 h_1 + \theta_2 h_2, v_\tau)_{L^2(\Gamma_c)}$$

D'autre part, nous avons:

$$\forall v \in V, a(\mathfrak{R}(\theta_1 h_1 + \theta_2 h_2), v) = (\theta_1 h_1 + \theta_2 h_2, v_\tau)_{L^2(\Gamma_c)}$$

et par conséquent, nous avons :

$$\mathfrak{R}(\theta_1 h_1 + \theta_2 h_2) = \theta_1 \mathfrak{R}(h_1) + \theta_2 \mathfrak{R}(h_2)$$

Donc, l'application \mathfrak{R} est linéaire sur $L^2(\Gamma_c)$.

Comme $a(\cdot, \cdot)$ est coercive sur V et pour u solution de (II.1.56), nous avons

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = (h, u_\tau)_{L^2(\Gamma_c)} \leq \|h\|_{L^2(\Gamma_c)} \|u_\tau\|_{L^2(\Gamma_c)}$$

En utilisant (II.1.54), nous obtenons :

$$\|\mathfrak{R}(h)\|_V = \|u\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \|h\|_{L^2(\Gamma_c)}$$

Donc, \mathfrak{R} est continue, et par conséquent de (II.1.54), on conclut que $\tilde{\mathfrak{R}}$ est linéaire et continue.

Montrons que $\tilde{\mathfrak{R}}$ est définie positive, symétrique et compacte sur $L^2(\Gamma_c)$:

Comme $\tilde{\mathfrak{R}}$ est la composition de \mathfrak{R} et de γ_τ , qui est compacte, alors $\tilde{\mathfrak{R}}$ est compacte.

Soient $h, g \in L^2(\Gamma_c)$, nous avons

$$\begin{aligned} (h, \tilde{\mathfrak{R}}(g))_{L^2(\Gamma_c)} &= (h, (\gamma_\tau \circ \mathfrak{R})(g))_{L^2(\Gamma_c)} = a(\mathfrak{R}(h), \mathfrak{R}(g)) = a(\mathfrak{R}(g), \mathfrak{R}(h)) = \\ &= (g, (\gamma_\tau \circ \mathfrak{R})(h))_{L^2(\Gamma_c)} = (g, \tilde{\mathfrak{R}}(h))_{L^2(\Gamma_c)} \end{aligned}$$

et donc $\tilde{\mathfrak{R}}$ est symétrique sur $L^2(\Gamma_c)$.

Reste à montrer que $\tilde{\mathfrak{R}}$ est définie positive sur $L^2(\Gamma_c)$:

En prenant $h = g$ dans l'égalité précédente, on voit que, pour tout $h \in L^2(\Gamma_c)$,

$$(h, \tilde{\mathfrak{R}}(h))_{L^2(\Gamma_c)} = a(\mathfrak{R}(h), \mathfrak{R}(h)) \geq \alpha \|\mathfrak{R}(h)\|_V^2 \geq 0$$

Supposons que $(h, \tilde{\mathfrak{R}}(h))_{L^2(\Gamma_c)} = 0$, alors l'inégalité ci-dessus entraîne $\mathfrak{R}(h) = 0$.

De (II.1.56), nous avons :

$$\forall v \in V, a(\mathfrak{R}(h), v) = (h, \gamma_\tau(v))_{L^2(\Gamma_c)}$$

On déduit de $\mathfrak{R}(h) = 0$, que $(h, \gamma_\tau(v))_{L^2(\Gamma_c)} = 0, \forall v \in V$ et par conséquent $h = 0$.

Finalement, pour tout $h \in L^2(\Gamma_c)$ et $h \neq 0$, nous avons :

$$(h, \tilde{\mathfrak{R}}(h))_{L^2(\Gamma_c)} > 0$$

Donc, $\tilde{\mathfrak{R}}$ est définie positive dans $L^2(\Gamma_c)$.

En vertu du théorème de diagonalisation d'un opérateur défini positif, symétrique et compact, l'existence d'une suite (β_n) décroissante de valeurs propres positives de l'opérateur $\tilde{\mathfrak{R}}$.

De plus (β_n) tend vers zéro et chaque (β_n) correspond à un sous espace de dimension finie $W_n \subset V$ de vecteurs propres, c'est à dire $\tilde{\mathfrak{R}}(\varphi) = \beta_n \varphi$ pour tout $\varphi \in W_n$.

Revenons maintenant au problème spectral (II.1.52) qui peut s'écrire comme suit :

$$a(u, v) = b \cdot (u_\tau, v_\tau)_{L^2(\Gamma_c)} = b \cdot a(\mathfrak{R}(u_\tau), v), \quad \forall v \in V$$

Donc, $\forall v \in V, a(u - b\mathfrak{R}(u_\tau), v) = 0$ alors $u = b\mathfrak{R}(u)$, et par conséquent nous avons :

$$\gamma_\tau(u) = u_\tau = b\gamma_\tau(\mathfrak{R}(u_\tau)) = b\tilde{\mathfrak{R}}(u_\tau)$$

Donc les valeurs propres (b_n) du problème (II.1.52) sont exactement les inverses des valeurs propres (β_n) de $\tilde{\mathfrak{R}}$. En déduit le lemme 1.2 avec $b_n = \frac{1}{\beta_n}$.

Théorème 1. 2 Soit b_0 la plus petite valeur propre du problème (II.1.52). Si

$$\bar{b} = \sup_{x \in \Gamma_c} \left[-\inf_{v \in \mathbb{R}_+} (S(x) \partial_u \mu(x, v)) \right] < \Delta t b_0 \quad (\text{II.1.57})$$

Alors:

- 1) Le problème (P^i) admet une unique solution dépend continûment de q^{i+1} .
- 2) La fonctionnelle d'énergie Φ est fortement convexe sur V .i.e. il existe $k > 0$ tel que

$$\forall v_1, v_2 \in V, \langle \Phi'(v_1) - \Phi'(v_2), v_1 - v_2 \rangle \geq k \|v_1 - v_2\|_V^2 \quad (\text{II.1.58})$$

Démonstration

1) Soient $u_1, u_2 \in V$ deux solutions de (P^i) avec $q^{i+1} = q_1$ et $q^{i+1} = q_2$ respectivement. Nous avons:

$$\begin{aligned} & a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) + \\ & + \int_{\Gamma_c} S \left[\mu \left(x, \frac{|u_{1\tau} - u_\tau^i|}{\Delta t} \right) - \mu \left(x, \frac{|u_{2\tau} - u_\tau^i|}{\Delta t} \right) \right] \left[|u_{1\tau} - u_\tau^i| - |u_{2\tau} - u_\tau^i| \right] dx \leq \quad (\text{II.1.59}) \\ & \leq (q_1 - q_2, u_{1\tau} - u_{2\tau})_{L^2(\Gamma_c)} \end{aligned}$$

Soit la fonction $g : \Gamma_c \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ donnée par:

$$g(x, v) = \bar{b}v + S(x)\mu(x, v), \quad \forall v \in \mathbb{R}_+, \text{ p.p. } x \in \Gamma_c$$

La dérivée de g par rapport à v est donnée par:

$$\partial_v g(x, v) = \bar{b} + S(x)\partial_v \mu(x, v) \geq 0$$

Nous déduisons que g est une fonction croissante. Alors, nous avons :

$$(g(x, r_1) - g(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+ \text{ p.p. } x \in \Gamma_c \quad (\text{II.1.60})$$

De (II.1.53) et (II.1.59), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t b_0 - \bar{b}}{\Delta t b_0} a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) + \\ & + \Delta t \int_{\Gamma_c} \left[g\left(x, \frac{|u_{1\tau} - u_\tau^i|}{\Delta t}\right) - g\left(x, \frac{|u_{2\tau} - u_\tau^i|}{\Delta t}\right) \right] \left[\frac{|u_{1\tau} - u_\tau^i|}{\Delta t} - \frac{|u_{2\tau} - u_\tau^i|}{\Delta t} \right] dx \leq \\ & \leq (q_1 - q_2, u_{1\tau} - u_{2\tau})_{L^2(\Gamma_c)} \end{aligned}$$

Cette inégalité jointe au (II.1.60) et (II.1.57), nous donne :

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq \frac{\Delta t b_0}{\alpha(\Delta t b_0 - \bar{b})} \|q_1 - q_2\|_{L^2(\Gamma_c)}, \quad \forall q_1, q_2 \in L^2(\Gamma_c) \quad (\text{II.1.61})$$

Si $q_1 = q_2 = q^{i+1}$, de (II.1.61) nous déduisons que $u_1 = u_2$, d'où l'unicité de la solution.

La dépendance continue de la solution par rapport à q^{i+1} découle de (II.1.61).

2) Soient $v_1, v_2 \in V$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \langle \Phi'(v_1) - \Phi'(v_2), v_1 - v_2 \rangle \geq a(v_1 - v_2, v_1 - v_2) + \\ & + \int_{\Gamma_c} S \left[\mu\left(x, \frac{|v_{1\tau} - u_\tau^i|}{\Delta t}\right) - \mu\left(x, \frac{|v_{2\tau} - u_\tau^i|}{\Delta t}\right) \right] \left[|v_{1\tau} - u_\tau^i| - |v_{2\tau} - u_\tau^i| \right] dx \end{aligned}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} & \langle \Phi'(v_1) - \Phi'(v_2), v_1 - v_2 \rangle \geq \\ & \geq a(v_1 - v_2, v_1 - v_2) - \frac{\bar{b}}{\Delta t} \int_{\Gamma_c} \left[|v_{1\tau} - u_\tau^i| - |v_{2\tau} - u_\tau^i| \right]^2 dx + \\ & + \Delta t \int_{\Gamma_c} \left[g\left(x, \frac{|v_{1\tau} - u_\tau^i|}{\Delta t}\right) - g\left(x, \frac{|v_{2\tau} - u_\tau^i|}{\Delta t}\right) \right] \left[\frac{|v_{1\tau} - u_\tau^i|}{\Delta t} - \frac{|v_{2\tau} - u_\tau^i|}{\Delta t} \right] dx \end{aligned}$$

De (II.1.53), (II.1.57), (II.1.60) et (II.1.38), il vient :

$$\langle \Phi'(v_1) - \Phi'(v_2), v_1 - v_2 \rangle \geq \frac{\alpha(\Delta t b_0 - \bar{b})}{\Delta t b_0} \|v_1 - v_2\|_V^2 \quad (\text{II.1.62})$$

De (II.1.62), nous déduisons que la fonctionnelle d'énergie Φ est fortement convexe. Alors, Φ admet un minimum global sur V .

Revenons à l'existence de la solution du problème (II.1.40).

Lemme 1.3 *Il existe deux constantes $k_1, k_2 > 0$, telles que :*

$$\|u^{i+1}\|_V \leq k_1 \left[\|q^{i+1}\|_{L^2(\Gamma_c)} + \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \right] \quad (\text{II.1.63})$$

$$\|u^{i+1} - u^i\|_V \leq k_2 \left[\|q^{i+1} - q^i\|_{L^2(\Gamma_c)} + \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \right] \quad (\text{II.1.64})$$

Preuve

En posant $v = 0$ dans (P^i) , nous avons :

$$a(u^{i+1}, u^{i+1}) \leq j\left(\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}, u^i\right) - j\left(\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}, u^{i+1} - u^i\right) + (q^{i+1}, u_\tau^{i+1})_{L^2(\Gamma_c)},$$

De (II.1.26c), (II.1.38) et (II.1.24), nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha \|u^{i+1}\|_V^2 &\leq (q^{i+1}, u_\tau^{i+1})_{L^2(\Gamma_c)} + \mu_0 \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \int_{\Gamma_c} |u_\tau^{i+1}| dx \\ &\leq C_0 \left[\|q^{i+1}\|_{L^2(\Gamma_c)} + \mu_0 \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \right] \|u^{i+1}\|_V \end{aligned}$$

On pose $k_1 = C_0 \text{Max} \left\{ \frac{1}{\alpha}, \frac{\mu_0}{\alpha} \right\}$, nous avons l'inégalité (II.1.63).

On pose $v = u^i$, de (P^i) il découle :

$$a(u^{i+1}, u^{i+1} - u^i) \leq (q^{i+1}, u_\tau^{i+1} - u_\tau^i)_{L^2(\Gamma_c)} - j\left(\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}, u^{i+1} - u^i\right), \quad (\text{II.1.65})$$

On pose $v = u^{i+1}$, de (P^{i-1}) il résulte :

$$a(-u^i, u^{i+1} - u^i) \leq j\left(\frac{u^i - u^{i-1}}{\Delta t}, u^{i+1} - u^i\right) - (q^i, u_\tau^{i+1} - u_\tau^i)_{L^2(\Gamma_c)} \quad (\text{II.1.66})$$

Par sommation de (II.1.65) et (II.1.66), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 a(u^{i+1} - u^i, u^{i+1} - u^i) &\leq (q^{i+1} - q^i, u_\tau^{i+1} - u_\tau^i)_{L^2(\Gamma_c)} + \\
 &\quad + j\left(\frac{u^i - u^{i-1}}{\Delta t}, u^{i+1} - u^i\right) - j\left(\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}, u^{i+1} - u^i\right),
 \end{aligned}$$

De (II.1.26c), (II.1.38) et (II.1.24), nous avons :

$$\begin{aligned}
 \alpha \|u^{i+1} - u^i\|_V^2 &\leq (q^{i+1} - q^i, u_\tau^{i+1} - u_\tau^i)_{L^2(\Gamma_c)} + \\
 &\quad + \int_{\Gamma_c} S \left[\mu\left(x, \left|\frac{u_\tau^i - u_\tau^{i-1}}{\Delta t}\right|\right) - \mu\left(x, \left|\frac{u_\tau^{i+1} - u_\tau^i}{\Delta t}\right|\right) \right] |u_\tau^{i+1} - u_\tau^i| dx, \\
 &\leq (q^{i+1} - q^i, u_\tau^{i+1} - u_\tau^i)_{L^2(\Gamma_c)} + 2\mu_0 \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \int_{\Gamma_c} |u_\tau^{i+1} - u_\tau^i| dx \\
 &\leq C_0 \left[\|q^{i+1} - q^i\|_{L^2(\Gamma_c)} + 2\mu_0 \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \right] \|u^{i+1} - u^i\|_V
 \end{aligned}$$

On pose $k_2 = C_0 \text{Max} \left\{ \frac{1}{\alpha}, \frac{2\mu_0}{\alpha} \right\}$, nous avons l'inégalité (II.1.64).

Nous définissons la suite de fonctions continues par morceaux $u^m :]0, T] \rightarrow V$:

$$\begin{cases} u^m(0) = 0, & u^m(t) = u^i + \frac{(t - t_i)}{\Delta t} (u^{i+1} - u^i), \quad \forall t \in]t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, \dots, m-1 \\ u^0 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.1.67})$$

Où u^{i+1} est l'unique solution de (P^i) .

Proposition 1.1 *De la suite (u^m) , nous pouvons extraire une sous suite, notée encore (u^m) telle que (u^m) converge faiblement étoile dans $W^{1,\infty}(0, T; V)$.*

Preuve

De (II.1.63) et (II.1.64), nous déduisons que la suite (u^m) est bornée dans $C(0, T; V)$.

Alors, il existe un constant $C_1 > 0$ telle que :

$$\|u^m\|_{L^\infty(0, T; V)} = \mathbf{M} \mathbf{ax}_{0 \leq t \leq T} \|u^m(t)\|_V \leq C_1 \left[\|q\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_c))} + \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \right]$$

De (II.1.64), nous déduisons qu'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\|\dot{u}^m\|_{L^\infty(0, T; V)} = \mathbf{M} \mathbf{ax}_{0 \leq i \leq m-1} \left\| \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t} \right\|_V \leq C_2 \left[\|\dot{q}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_c))} + \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \right]$$

Nous déduisons que la suite (\dot{u}^m) est bornée dans $L^\infty(0, T; V)$. Alors, (u^m) est une suite bornée dans $W^{1,\infty}(0, T; V)$. Donc, on peut extraire une sous suite notée encore (u^m) telle que

$$u^m \rightarrow u \text{ faible étoile dans } W^{1,\infty}(0,T;V)$$

Nous introduisons les suites de fonctions escaliers :

$$\tilde{u}^m(0) = 0, \quad \tilde{u}^m(t) = u^{i+1}, \quad \tilde{q}^m(t) = q(t_{i+1}) \quad \forall t \in]t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, \dots, m-1.$$

Lemme 1.4 *De la suite (\tilde{u}^m) , nous pouvons extraire une sous suite, notée encore (\tilde{u}^m) satisfaisante aux résultats suivants :*

- 1) $\tilde{u}^m \rightarrow u$ faiblement étoile dans $L^\infty(0,T;V)$,
- 2) $\tilde{u}^m(t) \rightarrow u(t)$ faiblement dans V , p.p. $t \in [0,T]$.

Preuve

1) De (II.1.63), nous déduisons que la suite (\tilde{u}^m) est bornée dans $L^\infty(0,T;V)$, et par conséquent, on peut extraire une suite, notée encore (\tilde{u}^m) converge faible étoile vers un élément v dans $L^\infty(0,T;V)$.

D'autre part, de (II.1.67), nous déduisons pour tout $t \in]0,T[$:

$$\|\tilde{u}^m(t) - u^m(t)\|_V \leq \frac{T}{m} \|\dot{u}^m(t)\|_V$$

Comme la suite (\dot{u}^m) est bornée dans $L^\infty(0,T;V)$, nous déduisons :

$$\mathbf{Lim}_{m \rightarrow +\infty} \|\tilde{u}^m - u^m\|_{L^\infty(0,T;V)} = 0 \quad (\text{II.1.68})$$

Alors, nous avons

$$\tilde{u}^m \rightarrow u \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T;V)$$

2) Comme $W^{1,\infty}(0,T;V) \subset C(0,T;V)$, nous avons

$$u^m(t) \rightarrow u(t) \text{ faiblement dans } V, \text{ pour tout } t \in [0,T]$$

Donc, nous avons :

$$\forall v \in V : (\tilde{u}^m(t) - u(t), v)_V = (\tilde{u}^m(t) - u^m(t), v)_V + (u^m(t) - u(t), v)_V$$

De (II.1.68) et par passage à la limite lorsque m tend vers $+\infty$, nous obtenons :

$$\tilde{u}^m(t) \rightarrow u(t) \text{ faiblement dans } V, \quad \forall t \in [0,T]$$

Remarque 1.3 Tenant compte du fait que l'injection de $W^{1,\infty}(0,T;V)$ dans $L^2(0,T;L^2(\Gamma_c))$ est compacte, on vérifie aisément:

$$\tilde{q}^m \rightarrow q \text{ fortement dans } L^2(0,T;L^2(\Gamma_c)) \quad (\text{II.1.69})$$

Proposition 1.2 *Les suites (\tilde{u}^m) et (\dot{u}^m) sont fortement convergentes vers u et \dot{u} dans $L^2(0, T; V)$ respectivement. De plus, u est une solution de (II.1.40).*

Preuve

1) De (P^i) , nous avons:

$$a(u^{i+1}, v - u^{i+1}) + j\left(\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}, v - u^i\right) - j\left(\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}, u^{i+1} - u^i\right) \geq (q^{i+1}, v_\tau - u_\tau^{i+1})_{L^2(\Gamma_c)}, \forall v \in V$$

D'où, il résulte:

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}^m(t), v - \tilde{u}^m(t)) + j\left(\frac{\tilde{u}^m(t) - u^i}{\Delta t}, v - u^i\right) - j\left(\frac{\tilde{u}^m(t) - u^i}{\Delta t}, \tilde{u}^m(t) - u^i\right) &\geq \\ &\geq (\tilde{q}^m(t), v_\tau - \tilde{u}_\tau^m(t))_{L^2(\Gamma_c)} \end{aligned} \quad (\text{II.1.70})$$

Ou encore:

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}^{m+n}(t), v - \tilde{u}^{m+n}(t)) + \\ + j\left(\frac{\tilde{u}^{m+n}(t) - u^i}{\Delta t}, v - u^i\right) - j\left(\frac{\tilde{u}^{m+n}(t) - u^i}{\Delta t}, \tilde{u}^{m+n}(t) - u^i\right) &\geq \\ &\geq (\tilde{q}^{m+n}(t), v_\tau - \tilde{u}_\tau^{m+n}(t))_{L^2(\Gamma_c)} \end{aligned} \quad (\text{II.1.71})$$

En posant $v = \tilde{u}^m(t)$ dans (II.1.71), $v = \tilde{u}^{m+n}(t)$ dans (II.1.70) et par sommation nous obtenons :

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}^{m+n}(t) - \tilde{u}^m(t), \tilde{u}^{m+n}(t) - \tilde{u}^m(t)) &\leq \\ &\leq \left[j\left(\frac{\tilde{u}^m(t) - u^i}{\Delta t}, \tilde{u}^{m+n}(t) - u^i\right) - j\left(\frac{\tilde{u}^{m+n}(t) - u^i}{\Delta t}, \tilde{u}^{m+n}(t) - u^i\right) \right] - \\ &- \left[j\left(\frac{\tilde{u}^m(t) - u^i}{\Delta t}, \tilde{u}^m(t) - u^i\right) - j\left(\frac{\tilde{u}^{m+n}(t) - u^i}{\Delta t}, \tilde{u}^m(t) - u^i\right) \right] + \\ &+ (\tilde{q}^{m+n}(t) - \tilde{q}^m(t), \tilde{u}_\tau^{m+n}(t) - \tilde{u}_\tau^m(t))_{L^2(\Gamma_c)} \end{aligned}$$

Donc, nous avons :

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}^{m+n}(t) - \tilde{u}^m(t), \tilde{u}^{m+n}(t) - \tilde{u}^m(t)) - \frac{\bar{b}}{\Delta t} \int_{\Gamma_c} |\tilde{u}_\tau^{m+n}(t) - \tilde{u}_\tau^m(t)|^2 dx + \\ + \Delta t \int_{\Gamma_c} \left[g\left(x, \frac{|\tilde{u}_\tau^{m+n}(t) - u_\tau^i|}{\Delta t}\right) - g\left(x, \frac{|\tilde{u}_\tau^m(t) - u_\tau^i|}{\Delta t}\right) \right] \left[\frac{|\tilde{u}_\tau^{m+n}(t) - u_\tau^i|}{\Delta t} - \frac{|\tilde{u}_\tau^m(t) - u_\tau^i|}{\Delta t} \right] dx + \\ \leq (\tilde{q}^{m+n}(t) - \tilde{q}^m(t), \tilde{u}_\tau^{m+n}(t) - \tilde{u}_\tau^m(t))_{L^2(\Gamma_c)} \end{aligned}$$

De (II.1.38), (II.1.53), (II.1.57) et (II.1.60), nous avons :

$$\left\| \tilde{u}^{m+n}(t) - \tilde{u}^m(t) \right\|_V \leq \frac{\Delta t b_0}{\alpha(\Delta t b_0 - \bar{b})} \left\| \tilde{q}^{m+n}(t) - \tilde{q}^m(t) \right\|_{L^2(\Gamma_c)}$$

Alors,

$$\left\| \tilde{u}^{m+n} - \tilde{u}^m \right\|_{L^2(0,T;V)} \leq \frac{\Delta t b_0}{\alpha(\Delta t b_0 - \bar{b})} \left\| \tilde{q}^{m+n} - \tilde{q}^m \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_c))}$$

D'où

$$\tilde{u}^m \rightarrow u \text{ fortement dans } L^2(0,T;V) \quad (\text{II.1.72})$$

2) Revenons à la suite (\dot{u}^m) . Posons $v = u^i + w\Delta t$ dans (P^i) , il vient:

$$\begin{aligned} \Delta t a \left(\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}, w - \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t} \right) + a \left(u^i, w - \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t} \right) + \\ + j \left(\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}, w \right) - j \left(\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}, \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t} \right) \geq \left(q^{i+1}, w_\tau - \frac{u_\tau^{i+1} - u_\tau^i}{\Delta t} \right)_{L^2(\Gamma_c)}, \end{aligned}$$

Par dérivation par rapport à t de (II.1.67), nous avons

$$\begin{aligned} \Delta t a (\dot{u}^m(t), w - \dot{u}^m(t)) + a (u^i, w - \dot{u}^m(t)) + \\ + j (\dot{u}^m(t), w) - j (\dot{u}^m(t), \dot{u}^m(t)) \geq (\tilde{q}^m(t), w_\tau - \dot{u}_\tau^m(t))_{L^2(\Gamma_c)}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.73})$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta t a (\dot{u}^{m+n}(t), w - \dot{u}^{m+n}(t)) + a (u^i, w - \dot{u}^{m+n}(t)) + \\ + j (\dot{u}^{m+n}(t), w) - j (\dot{u}^{m+n}(t), \dot{u}^{m+n}(t)) \geq (\tilde{q}^{m+n}(t), w_\tau - \dot{u}_\tau^{m+n}(t))_{L^2(\Gamma_c)}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.74})$$

En posant $w = \dot{u}^m(t)$ dans (II.1.74), $w = \dot{u}^{m+n}(t)$ dans (II.1.73) et par sommation on obtient:

$$\begin{aligned} \Delta t a (\dot{u}^{m+n}(t) - \dot{u}^m(t), \dot{u}^{m+n}(t) - \dot{u}^m(t)) \leq \left[j (\dot{u}^m(t), \dot{u}^{m+n}(t)) - j (\dot{u}^{m+n}(t), \dot{u}^{m+n}(t)) \right] - \\ - \left[j (\dot{u}^m(t), \dot{u}^m(t)) - j (\dot{u}^{m+n}(t), \dot{u}^m(t)) \right] + (\tilde{q}^{m+n}(t) - \tilde{q}^m(t), \dot{u}_\tau^{m+n}(t) - \dot{u}_\tau^m(t))_{L^2(\Gamma_c)}, \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} \Delta t a (\dot{u}^{m+n}(t) - \dot{u}^m(t), \dot{u}^{m+n}(t) - \dot{u}^m(t)) - \bar{b} \int_{\Gamma_c} |\dot{u}_\tau^{m+n}(t) - \dot{u}_\tau^m(t)|^2 dx + \\ + \int_{\Gamma_c} \left[g(x, |\dot{u}_\tau^{m+n}(t)|) - g(x, |\dot{u}_\tau^m(t)|) \right] \left[|\dot{u}_\tau^{m+n}(t)| - |\dot{u}_\tau^m(t)| \right] dx + \\ \leq (\tilde{q}^{m+n}(t) - \tilde{q}^m(t), \dot{u}_\tau^{m+n}(t) - \dot{u}_\tau^m(t))_{L^2(\Gamma_c)} \end{aligned}$$

De (II.1.38), (II.1.53), (II.1.57) et (II.1.60), nous avons :

$$\|\dot{u}^{m+n}(t) - \dot{u}^m(t)\|_V \leq \frac{b_0}{\alpha(\Delta t b_0 - \bar{b})} \|\tilde{q}^{m+n}(t) - \tilde{q}^m(t)\|_{L^2(\Gamma_c)}$$

Alors

$$\|\dot{u}^{m+n} - \dot{u}^m\|_{L^2(0,T;V)} \leq \frac{b_0}{\alpha(\Delta t b_0 - \bar{b})} \|\tilde{q}^{m+n} - \tilde{q}^m\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_c))}$$

D'où

$$\dot{u}^m \rightarrow \dot{u} \text{ fortement dans } L^2(0,T;V) \quad (\text{II.1.75})$$

Reste à démontrer que u est une solution de (II.1.40).

On pose $v = u^i + \Delta t w$ dans (P^i) , il découle:

$$a\left(u^{i+1}, w - \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}\right) + j\left(\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}, w\right) - j\left(\frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}, \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}\right) \geq \left(q^{i+1}, w_\tau - \frac{u^{i+1} - u^i}{\Delta t}\right)_{L^2(\Gamma_c)},$$

D'où, pour tout $w \in L^2(0,T;V)$ il vient :

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}^m(t), w(t) - \dot{u}^m(t)) + j(\dot{u}^m(t), w(t)) - j(\dot{u}^m(t), \dot{u}^m(t)) &\geq \\ &\geq (\tilde{q}^m(t), w_\tau(t) - \dot{u}_\tau^m(t))_{L^2(\Gamma_c)} \end{aligned} \quad (\text{II.1.76})$$

Par intégration sur $]0, T[$, de (II.1.76) il résulte:

$$\begin{aligned} \int_0^T a\left(\tilde{u}^m(t), w(t) - \frac{d}{dt}u^m(t)\right) dt + \\ + \int_0^T j\left(\frac{d}{dt}u^m(t), w(t)\right) dt - \int_0^T j\left(\frac{d}{dt}u^m(t), \frac{d}{dt}u^m(t)\right) dt &\geq \\ &\geq \int_0^T (\tilde{q}^m(t), w_\tau(t) - \dot{u}_\tau^m(t))_{L^2(\Gamma_c)} dt \end{aligned} \quad (\text{II.1.77})$$

- Nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^T a\left(\tilde{u}^m(t), w(t) - \frac{du^m(t)}{dt}\right) dt = \\ = \int_0^T a\left(\tilde{u}^m(t) - u(t), w(t) - \frac{du^m(t)}{dt}\right) dt + \int_0^T a\left(u(t), w(t) - \frac{du^m(t)}{dt}\right) dt, \end{aligned}$$

De (II.1.36), nous avons:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^T a \left(\tilde{u}^m(t) - u(t), w(t) - \frac{du^m(t)}{dt} \right) dt \right| &\leq \int_0^T \left| a \left(\tilde{u}^m(t) - u(t), w(t) - \frac{du^m(t)}{dt} \right) \right| dt \\
 &\leq C \int_0^T \left\| \tilde{u}^m(t) - u(t) \right\|_V \left\| w(t) - \frac{du^m(t)}{dt} \right\|_V dt \\
 &\leq C \left\| \tilde{u}^m - u \right\|_{L^2(0,T;V)} \left\| w - \dot{u}^m \right\|_{L^2(0,T;V)}
 \end{aligned}$$

En utilisant (II.1.72), nous déduisons :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T a \left(\tilde{u}^m(t) - u(t), w(t) - \frac{du^m(t)}{dt} \right) dt = 0.$$

Et par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\int_0^T a \left(\tilde{u}^m(t), w(t) - \frac{d}{dt} u^m(t) \right) dt \right] &= \\
 &= \int_0^T a(u(t), w(t) - \dot{u}(t)) dt \quad \forall w \in L^2(0, T; V)
 \end{aligned} \tag{II.1.78}$$

- Nous avons

$$\begin{aligned}
 j(\dot{u}^m(t), \dot{u}^m(t)) - j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) &= \int_{\Gamma_c} S \left[\mu(x, |\dot{u}_\tau^m(t)|) - \mu(x, |\dot{u}_\tau(t)|) \right] |\dot{u}_\tau^m(t)| dx + \\
 &+ \int_{\Gamma_c} S \mu(x, |\dot{u}_\tau(t)|) \left[|\dot{u}_\tau^m(t)| - |\dot{u}_\tau(t)| \right] dx
 \end{aligned}$$

En utilisant (II.1.26b), (II.1.26c) et (II.1.24), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^T \int_{\Gamma_c} S \left[\mu(x, |\dot{u}_\tau^m(t)|) - \mu(x, |\dot{u}_\tau(t)|) \right] |\dot{u}_\tau^m(t)| dx dt \right| &\leq \ell_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \int_0^T \int_{\Gamma_c} |\dot{u}_\tau^m(t) - \dot{u}_\tau(t)| |\dot{u}_\tau^m(t)| dx dt \\
 &\leq C_0 \ell_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \left\| \dot{u}^m - \dot{u} \right\|_{L^2(0,T;V)} \left\| \dot{u}^m(t) \right\|_{L^2(0,T;V)}
 \end{aligned}$$

et

$$\left| \int_0^T \int_{\Gamma_c} S \mu(x, |\dot{u}_\tau(t)|) \left[|\dot{u}_\tau^m(t)| - |\dot{u}_\tau(t)| \right] dx dt \right| \leq C_0 \mu_0 \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \left\| \dot{u}^m - \dot{u} \right\|_{L^2(0,T;V)}$$

De (II.1.75), nous concluons :

$$\begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Gamma_c} S \left[\mu(x, |\dot{u}_\tau^m(t)|) - \mu(x, |\dot{u}_\tau(t)|) \right] |\dot{u}_\tau^m(t)| dx dt = 0 \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Gamma_c} S \mu(x, |\dot{u}_\tau(t)|) \left[|\dot{u}_\tau^m(t)| - |\dot{u}_\tau(t)| \right] dx dt = 0 \end{cases}$$

Et par conséquent, nous avons :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T j \left(\frac{d}{dt} u^m(t), \frac{d}{dt} u^m(t) \right) dt = \int_0^T j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) dt, \quad (\text{II.1.79})$$

- De (II.1.26b), (II.1.26c) et (II.1.24), nous avons encore

$$\begin{aligned} \forall w \in L^2(0, T; V) : \left| \int_0^T \left[j(\dot{u}^m(t), w(t)) - j(\dot{u}(t), w(t)) \right] dt \right| &\leq \\ &\leq \ell_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \int_0^T \int_{\Gamma_c} |\dot{u}_\tau^m(t) - \dot{u}_\tau(t)| |w_\tau(t)| dx \\ &\leq C_0 \ell_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \|\dot{u}^m - \dot{u}\|_{L^2(0, T; V)} \|w\|_{L^2(0, T; V)} \end{aligned}$$

En utilisant (II.1.75), nous obtenons :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T j(\dot{u}^m(t), w(t)) dt = \int_0^T j(\dot{u}(t), w(t)) dt \quad (\text{II.1.80})$$

- De (II.1.69), nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T (\tilde{q}^m(t), w_\tau(t) - \dot{u}_\tau^m(t))_{L^2(\Gamma_c)} dt &= \int_0^T \lim_{m \rightarrow +\infty} (\tilde{q}^m(t), w_\tau(t) - \dot{u}_\tau^m(t))_{L^2(\Gamma_c)} dt \\ &= \int_0^T (q(t), w_\tau(t) - \dot{u}_\tau(t))_{L^2(\Gamma_c)} dt \end{aligned} \quad (\text{II.1.81})$$

Grâce aux égalités (II.1.78)- (II.1.81), de (II.1.77) il résulte:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[a(u(t), w(t) - \dot{u}(t)) + j(\dot{u}(t), w(t)) - j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \right] dt &\geq \\ &\geq \int_0^T (q(t), w_\tau(t) - \dot{u}_\tau(t))_{L^2(\Gamma_c)} dt \end{aligned} \quad (\text{II.1.82})$$

Soit $w \in L^2(0, T; V)$ défini par :

$$w(s) = \begin{cases} v & \text{pour } s \in]t, t + \lambda[\\ \dot{u}(s) & \text{ailleurs} \end{cases}$$

L'inégalité (II.1.82) devient:

$$\frac{1}{\lambda} \int_t^{t+\lambda} \left[a(u(s), v - \dot{u}(s)) + j(\dot{u}(s), v) - j(\dot{u}(s), \dot{u}(s)) \right] ds \geq \frac{1}{\lambda} \int_t^{t+\lambda} (q(t), w_\tau(t) - \dot{u}_\tau(t))_{L^2(\Gamma_c)} ds$$

Par passage à la limite lorsque λ tend vers 0, on obtient que u est une solution de problème (II.1.40).

1.2 Problème vertical

On va étudier le problème vertical (I.2.45)-(I.2.50), qui consiste à trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$G\Delta\bar{u} + r = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{II.1.83})$$

$$\bar{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d \times]0, T] \quad (\text{II.1.84})$$

$$G\partial_n\bar{u} = f \quad \text{sur } \Gamma_f \times]0, T] \quad (\text{II.1.85})$$

$$G|\partial_n\bar{u}| \leq g(0) \quad \text{si } \dot{\bar{u}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.1.86})$$

$$G\partial_n\bar{u} = -g\left(\left|\frac{\dot{\bar{u}}}{|\dot{\bar{u}}|}\right|\right) \frac{\dot{\bar{u}}}{|\dot{\bar{u}}|} \quad \text{si } \dot{\bar{u}} \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.1.87})$$

$$\bar{u}(0) = \bar{u}_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.1.88})$$

Comme dans le cas horizontal, on désigne par $u^c : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ la solution collée du problème auxiliaire suivant:

$$\begin{cases} G\Delta u^c + r = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T] \\ u^c = 0 & \text{sur } \Gamma_d \times]0, T] \\ G\partial_n u^c = f & \text{sur } \Gamma_f \times]0, T] \\ G|\partial_n u^c| \leq g(0) & \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \\ u^c(0) = \bar{u}_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (\text{II.1.89})$$

En désignant par $-q = G\partial_n u^c$ la contrainte tangentielle sur Γ_c correspondante à la solution « collée » du problème (II.1.89). En notant $u = \bar{u} - u^c$, on déduit des problèmes (II.1.83)-(II.1.88) et (II.1.89) le problème vertical homogène avec frottement de Tresca suivant :

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{II.1.90})$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d \times]0, T] \quad (\text{II.1.91})$$

$$G\partial_n u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_f \times]0, T] \quad (\text{II.1.92})$$

$$G|\partial_n u| \leq g(0) \quad \text{si } \dot{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.1.93})$$

$$G\partial_n u + g\left(\left|\frac{\dot{u}}{|\dot{u}}|\right|\right) \frac{\dot{u}}{|\dot{u}} = q \quad \text{si } \dot{u} \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.1.94})$$

$$u(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.1.95})$$

1.2.1 Formulation variationnelle

Les problèmes (II.1.89) et (II.1.90)-(II.1.95) se ramènent aux problèmes variationnels suivants :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^c :]0, T[\rightarrow V \text{ tel que} \\ a(u^c, v - \dot{u}^c) + \varphi(v) \leq (F, v - \dot{u}^c)_V, \forall v \in V \\ u^c(0) = \bar{u}_0 \end{cases} \quad (\text{II.1.96})$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u :]0, T[\rightarrow V \text{ tel que pour tout } v \in V : \\ a(u, v - \dot{u}) + j(\dot{u}, v) - j(\dot{u}, \dot{u}) \geq (q, v - \dot{u})_{L^2(\Gamma_c)} \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.1.97})$$

Remarque 1.4

On remarque que l'hypothèse du déplacement vertical (I.2.31) et les conditions aux bords (I.2.29)-(I.2.30) nous permettent de simplifier certains termes dans (II.1.96) et (II.1.97).

De façon précise, on obtient pour tous $u, v \in V$:

$$a(u, v) = (G\nabla u, \nabla v)_{\mathcal{H}}, \quad (F, v)_V = \int_{\Omega} r \cdot v dx + \int_{\Gamma_f} f \cdot v dx, \\ j(u, v) = \int_{\Gamma_c} g(|u|)|v| dx, \quad \varphi(v) = \int_{\Gamma_c} g(0)|v| dx$$

Par la même façon de théorème 1.1, on peut démontrer le résultat suivant:

Théorème 1.2 *Sous les hypothèses (II.1.28), (II.1.31) et (II.1.33)-(II.1.38), nous avons :*

1) *Le problème (II.1.96) possède une unique solution ayant la régularité*

$$u^c \in W^{1,\infty}(0, T; V) \quad (\text{II.1.98})$$

2) *Le problème (II.1.97) possède au moins une solution ayant la régularité*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; V) \quad (\text{II.1.99})$$

Chapitre 2

Problème élasto-dynamique de contact avec frottement à coefficient variable

*D*ans ce chapitre, on poursuit l'étude initiée au chapitre précédent en considérant le cas dynamique pour un problème horizontal et un problème vertical. L'utilisation de la méthode de différences finis avec un schéma implicite de Newmark, le problème variationnel se ramène à une suite de problèmes des inéquations quasi-variationnelles elliptiques. Quelques résultats d'analyse spectrale et d'analyse convexe, nous permettent de démontrer un résultat d'existence et d'unicité d'une solution discrète.

2.1 Problème horizontal

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude d'un problème dynamique horizontal de frottement de Coulomb dépendant de la vitesse de glissement avec contrainte normale imposée (I.2.13)-(I.2.20). Ce problème consiste à trouver le champ de déplacement $\bar{u} : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et le champ de contrainte $\sigma : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{S}^2$ tels que :

$$\rho \ddot{\bar{u}} - \text{div} \sigma(\bar{u}) = r \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{II.2.1})$$

$$\sigma(\bar{u}) = \mathcal{A}\varepsilon(\bar{u}) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{II.2.2})$$

$$\bar{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d \times]0, T] \quad (\text{II.2.3})$$

$$\sigma(\bar{u})n = f \quad \text{sur } \Gamma_f \times]0, T] \quad (\text{II.2.4})$$

$$\sigma_n(\bar{u}) = -S \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.2.5})$$

$$|\sigma_\tau(\bar{u})| \leq S\mu(0) \quad \text{si } \dot{\bar{u}}_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.2.6})$$

$$\sigma_\tau(\bar{u}) = -S\mu\left(\left|\frac{\dot{\bar{u}}_\tau}{|\dot{\bar{u}}_\tau|}\right|\right) \frac{\dot{\bar{u}}_\tau}{|\dot{\bar{u}}_\tau|} \quad \text{si } \dot{\bar{u}}_\tau \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.2.7})$$

$$\bar{u}(0) = \bar{u}_0, \quad \dot{\bar{u}}(0) = \bar{u}_1 \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{II.2.8})$$

On désigne par $u^c :]0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ la solution collée du problème auxiliaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \dot{u}^c - \text{div} \sigma(u^c) = r & \text{dans } \Omega \times]0, T] \\ \sigma(u^c) = \mathcal{A}\varepsilon(u^c) & \text{dans } \Omega \times]0, T] \\ u^c = 0 & \text{sur } \Gamma_d \times]0, T] \\ \sigma(u^c)n = f & \text{sur } \Gamma_f \times]0, T] \\ \sigma_n(u^c) = -S & \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \\ |\sigma_\tau(u^c)| \leq S\mu(0) & \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \\ u^c(0) = \bar{u}_0, \quad \dot{u}^c(0) = \bar{u}_1 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (\text{II.2.9})$$

En désignant par $-q = \sigma_\tau(u^c)$ la contrainte tangentielle sur Γ_c correspondante à la solution « collée » du problème (II.2.9). En notant $u = \bar{u} - u^c$, de (II.2.1)-(II.2.8) et (II.2.9), nous déduisons le problème dynamique homogène de frottement de Coulomb avec contrainte normale imposée suivant :

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et le champ de contrainte $\sigma : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{S}^2$ tels que :

$$\rho \ddot{u} - \operatorname{div} \sigma(u) = 0 \text{ dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{II.2.10})$$

$$\sigma(u) = \mathcal{A} \varepsilon(u) \text{ dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{II.2.11})$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_d \times]0, T] \quad (\text{II.2.12})$$

$$\sigma(u)n = 0 \text{ sur } \Gamma_f \times]0, T] \quad (\text{II.2.13})$$

$$\sigma_n(u) = 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.2.14})$$

$$|\sigma_\tau(u) - q| \leq S\mu(0) \text{ si } \dot{u}_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.2.15})$$

$$\sigma_\tau(u) + S\mu(|\dot{u}_\tau|) \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} = q \text{ si } \dot{u}_\tau \neq 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.2.16})$$

$$u(0) = \dot{u}(0) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (\text{II.2.17})$$

Remarque 2.1 Dans le passage du (II.2.1)-(II.2.8) au problème (II.2.10)-(II.2.17), on remarque que les effets de r , f , S et \bar{u}_0, \bar{u}_1 se réduisent aux effets de q et S .

2.1.1 Hypothèses et notations

Comme dans le chapitre précédent, on suppose que le tenseur d'élasticité \mathcal{A} satisfait l'hypothèse (II.1.25) et le coefficient de frottement μ satisfait de plus les propriétés (II.1.26) et les deux hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} (a) \ x \rightarrow \partial_u \mu(x, u) \text{ est mesurable p.p. } u \in \mathbb{R}_+ \\ (b) \ \exists M' > 0 : |\partial_u \mu(x, u)| \leq M' \text{ p.p. } x \in \Gamma_c, u \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (\text{II.2.18})$$

La densité de masse est supposée à vérifier :

$$\rho(x) \geq \rho_0 > 0, \quad \rho \in L^\infty(\Omega), \quad (\text{II.2.19})$$

On suppose que les conditions initiales sont satisfaites :

$$\bar{u}_0, \bar{u}_1 \in V \quad (\text{II.2.20})$$

Soit $H = [L^2(\Omega)]^2$ l'espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} \rho u \cdot v dx, \quad \forall u, v \in H$$

et la norme associée $\|u\|_H = \left(\int_{\Omega} \rho u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$

2.1.2 Formulation variationnelle

Avec les notations ci-dessus, les problèmes (II.2.9) et (II.2.10)-(II.2.17) se ramènent aux problèmes variationnels suivants :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^c :]0, T] \rightarrow V \text{ tel que } \forall v \in V : \\ \left(\ddot{u}^c, v - \dot{u}^c \right)_H + a(u^c, v - \dot{u}^c) + \varphi(v) \geq (F, v - \dot{u}^c)_V \\ u^c(0) = \bar{u}_0, \dot{u}^c(0) = \bar{u}_1 \end{cases} \quad (\text{II.2.21})$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u :]0, T] \rightarrow V \text{ tel que } \forall v \in V : \\ \left(\ddot{u}, v - \dot{u} \right)_H + a(u, v - \dot{u}) + j(\dot{u}, v) - j(\dot{u}, \dot{u}) \geq (q, v_{\tau} - \dot{u}_{\tau})_{L^2(\Gamma_c)} \\ u(0) = \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.2.22})$$

Relativement à ces problèmes variationnels, nous avons le :

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses (II.1.28), (II.1.31), (II.1.33)-(II.1.38) et (II.2.18)-(II.20), nous avons :*

1) *Le problème (II.2.21) possède une unique solution ayant la régularité*

$$u^c \in W^{2,\infty}(0, T; V) \quad (\text{II.2.23})$$

2) *Le problème (II.2.22) possède au moins une solution ayant la régularité:*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; V), \ddot{u} \in L^{\infty}(0, T; H) \quad (\text{II.2.24})$$

Démonstration

1) Sous les hypothèses (II.1.31) et (II.1.33)-(II.1.38), il est aisé de vérifier que le problème (II.2.21) admet une unique solution vérifiant la régularité (II.2.23).

2) Pour démontrer l'existence du problème (II.2.22), nous allons utiliser la méthode de différences finis.

Soit la subdivision de l'intervalle $[0, T]$ suivante :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T, \text{ où } t_i = i\Delta t, 0 \leq i \leq m, \text{ avec } \Delta t = \frac{T}{m}$$

On désigne par $u^i, \dot{u}^i, \ddot{u}^i$ la solution discrétisée et leurs dérivées à l'instant $t = i\Delta t$, i.e.:

$$u^i = u(i\Delta t), \dot{u}^i = \dot{u}(i\Delta t) \text{ et } \ddot{u}^i = \ddot{u}(i\Delta t), 0 \leq i \leq m.$$

En utilisant le schéma de Newmark, avec les paramètres $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$ suivant :

$$\begin{cases} u^{i+1} = u^i + \frac{\Delta t}{2}(\dot{u}^i + \dot{u}^{i+1}) \\ \ddot{u}^{i+1} = \frac{2}{\Delta t}(\dot{u}^{i+1} - \dot{u}^i) - \ddot{u}^i \end{cases} \quad (\text{II.2.25})$$

De (II.2.25), le problème variationnel (II.2.22) se ramène à la suite de problèmes des inéquations quasi-variationnelles elliptiques suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^{i+1} \in V \text{ tel que } \forall v \in V: \\ \left(\dot{u}^{i+1}, v - \dot{u}^{i+1} \right)_H + \frac{\Delta t^2}{4} a(\dot{u}^{i+1}, v - \dot{u}^{i+1}) + \frac{\Delta t}{2} [j(\dot{u}^{i+1}, v) - j(\dot{u}^{i+1}, \dot{u}^{i+1})] \geq (G^{i+1}, v - \dot{u}^{i+1})_V \\ \dot{u}^0 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.2.26})$$

Où

$$(G^{i+1}, v)_V = \left(\frac{\Delta t}{2} q^{i+1}, v_\tau \right)_{L^2(\Gamma_c)} + \left(\dot{u}^i + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}^i, v \right)_H - \frac{\Delta t}{2} a \left(u^i + \frac{\Delta t}{2} \dot{u}^i, v \right)$$

On désigne par $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle d'énergie donnée par :

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} (v, v)_H + \frac{(\Delta t)^2}{8} a(v, v) + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_c} S\Psi(x, |v_\tau|) dx - (G^{i+1}, v)_V \quad (\text{II.2.27})$$

Où

$$\Psi(x, p) = \int_0^p \mu(x, \xi) d\xi$$

est la primitive du coefficient de frottement.

Théorème 2.2

1) Si Φ admet en $u = \dot{u}^{i+1} \in V$ un minimum local, i.e.

$$\Phi(u) \leq \Phi(v), \quad \forall v \in V : \|u - v\|_V < \delta, \quad \delta > 0, \quad (\text{II.2.28})$$

alors u est une solution de (II.2.26).

2) Il existe au moins un minimum global de la fonctionnelle d'énergie Φ , i.e.

$$\Phi(u) \leq \Phi(v), \quad \forall v \in V$$

Preuve

1) On suppose que l'inégalité (II.2.28) est satisfaite. Alors, il existe $\theta_0 \in]0, 1[$ tel que $\theta_0 \|u - v\|_V < \delta$. Nous avons :

$$\forall \theta \in]0, \theta_0[, \quad \Phi(u) \leq \Phi((1-\theta)u + \theta v)$$

Grâce à l'inégalité $|(1-\theta)u_\tau + \theta v_\tau| \leq |u_\tau| + \theta(|v_\tau| - |u_\tau|)$, il résulte

$$\begin{aligned} (u, v-u)_H + \frac{(\Delta t)^2}{4} a(u, v-u) + \frac{\theta}{2} (v-u, v-u) + \frac{\theta(\Delta t)^2}{4} a(v-u, v-u) + \\ + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_c} S \left[\frac{\Psi(|u_\tau| + \theta(|v_\tau| - |u_\tau|)) - \Psi(|u_\tau|)}{\theta} \right] dx \geq (G^{i+1}, v-u)_V \end{aligned}$$

En passant à la limite, lorsque θ tend vers 0, nous déduisons que $u = \dot{u}^{i+1} \in V$ est une solution de problème (II.2.26).

2) Pour démontrer que la fonctionnelle Φ admet au moins un minimum global, comme dans le chapitre précédent nous allons démontrer que Φ est coercive et faiblement semi continue inférieure.

a) Coercivité : Pour toute suite (u_n) de V , de (II.1.38) et (II.2.27), nous avons :

$$\Phi(v_n) \geq \left(\frac{\alpha(\Delta t)^2}{8} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\|G^{i+1}\|_V}{\|v_n\|_V} \right) \|v_n\|_V^2 .$$

Alors, $\lim_{\|v_n\|_V \rightarrow \infty} \Phi(v_n) = +\infty$ et par conséquent Φ est coercive.

b) Faiblement semi continue inférieure :

Pour démontrer Φ est faiblement semi-continue inférieurement, il suffit de démontrer le sous ensemble de V donné par :

$$C(\lambda) = \{v \in V, \Phi(v) \leq \lambda\}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

est faiblement fermé.

Soit (u_n) une suite de $C(\lambda)$ converge faiblement vers u , alors :

$$\forall w \in V : \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, w)_V = (u, w)_V \quad (\text{II.2.29})$$

Nous démontrons que $u \in C(\lambda)$. Comme V est fermé alors $u \in V$ et nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi(u_n) - \Phi(u) &= \frac{1}{2}(u_n - u, u_n - u)_H + (u, u_n - u)_H + \frac{(\Delta t)^2}{8} a(u_n - u, u_n - u) + \\ &+ \frac{(\Delta t)^2}{4} a(u, u_n - u) - (G^{i+1}, u_n - u)_V + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_c} S [\Psi(x, |u_{n\tau}|) - \Psi(x, |u_\tau|)] dx \end{aligned}$$

De (II.1.26c) et (II.1.36), nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\Phi(u_n) - \Phi(u)| &\leq \\ &\leq \left[C \sqrt{(u_n - u, u_n - u)_V} + C \|u\|_V + M \|G^{i+1}\|_V + \mu_0 \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \right] \sqrt{(u_n - u, u_n - u)_V} \quad (\text{II.2.30}) \end{aligned}$$

On pose $w = u_n - u$, de (II.2.29), nous obtenons:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - u, u_n - u)_V = 0 \quad (\text{II.2.31})$$

De (II.2.30) et (II.2.31), il résulte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(u_n) - \Phi(u)) = 0$$

Nous avons :

$$\Phi(u_n) - \Phi(u) + \Phi(u) \leq \lambda \quad (\text{II.2.32})$$

Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, de (II.2.32) nous obtenons $\Phi(u) \leq \lambda$.

Alors $u \in C(\lambda)$, d'où le résultat.

L'étude de l'unicité de la solution du problème (II.2.26) dépendant de l'étude du problème spectral, qui consiste à chercher $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$ tel que

$$\operatorname{div} \sigma(v) = \lambda \rho v \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.2.33})$$

$$\sigma(v) = \mathcal{A} \varepsilon(v) \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.2.34})$$

$$v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d \quad \text{et} \quad \sigma(v)n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_f \quad (\text{II.2.35})$$

$$\sigma_n(v) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_\tau(v) = g v_\tau \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (\text{II.2.36})$$

Où

$$g(x) = -S(x) \operatorname{Inf}_{v \in \mathbb{R}_+} (\partial_u \mu(x, v))$$

Lemme 2.1

1) Il existe une suite décroissante des valeurs propres (λ_n) de (II.2.33)-(II.2.36) telles que

$$\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = -\infty.$$

2) Soit $\beta > 0$, la fonction $\beta \rightarrow \lambda_0(\beta)$ est une fonction convexe et vérifiée l'inéquation variationnelle suivante :

$$a(v, v) + \lambda_0(\beta)(v, v)_H \geq \beta \int_{\Gamma_c} g v_\tau^2 dx, \quad \forall v \in V \quad (\text{II.2.37})$$

3) $\beta \rightarrow \lambda_0(\beta)$ est une fonction monotone.

Remarque 2.2 Généralement, λ_0 est positive et on peut avoir un nombre fini des valeurs propres positives.

Preuve

1) Comme l'injection $I: V \rightarrow H$ de V dans H est compacte, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall v \in V, \|I(v)\|_H = \|v\|_H \leq C \|v\|_V \quad (\text{II.2.38})$$

Soit γ une constante positive. De (II.2.33), il vient

$$-div\sigma(v) + \gamma\rho v = \delta\rho v \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.2.39})$$

Où $\gamma = \delta + \lambda$.

Le problème (II.2.39), (II.2.34)-(II.2.36) se ramène à la formulation variationnelle suivante:

$$v \in V, b(v, w) = \delta(v, w)_H, \quad \forall w \in V \quad (\text{II.2.40})$$

Où

$$b(v, w) = a(v, w) + \gamma(v, w)_H - (g v_\tau, w_\tau)_{L^2(\Gamma_c)}$$

Etant donné $\chi \in H$, soit le problème suivant :

$$-div\sigma(v) + \gamma\rho v = \rho\chi \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.2.41})$$

$$\sigma(v) = \mathcal{A}\mathcal{E}(v) \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.2.42})$$

$$v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d \quad \text{et } \sigma(v)n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_f \quad (\text{II.2.43})$$

$$\sigma_n(v) = 0 \quad \text{et } \sigma_\tau(v) = g v_\tau \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (\text{II.2.44})$$

ou sous la forme variationnelle suivante :

$$v \in V, b(v, w) = (\chi, v)_H \quad \forall w \in V \quad (\text{II.2.45})$$

En utilisant le corollaire A.14, nous avons :

$$b(v, v) \geq a(v, v) + \gamma(v, v)_H - C\bar{g} \|v\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V,$$

Où $\bar{g} = \mathbf{Sup}_{x \in \Gamma_c} (g(x))$.

De (II.1.38) et (II.2.19), nous tirons :

$$b(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 + \rho_0 \gamma \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 - C\bar{g} \|v\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V,$$

En posant $\gamma = \frac{C^2 \bar{g}^2}{2\alpha\rho_0}$, nous obtenons :

$$b(v, v) \geq \frac{\alpha}{2} \|v\|_V^2 \quad (\text{II.2.46})$$

Grâce au théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution $u \in V$ de (II.2.45).

On définit les applications suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S} : H \rightarrow V \text{ tel que} \\ \mathfrak{S}(\chi) = u \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathfrak{S}} : H \rightarrow H \text{ tel que} \\ \tilde{\mathfrak{S}}(\chi) = (I \circ \chi)(f) \end{array} \right.$$

Où u est l'unique solution de (II.2.45).

Soient $\chi_1, \chi_2 \in H$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, en utilisant (II.2.45), il vient :

$$\forall v \in V, a(\theta_1 \mathfrak{S}(\chi_1), v) = (\theta_1 \chi_1, v)_H \quad \text{et} \quad a(\theta_2 \mathfrak{S}(\chi_2), v) = (\theta_2 \chi_2, v)_H$$

Par sommation, nous obtenons :

$$\forall v \in V, a(\theta_1 \mathfrak{S}(\chi_1) + \theta_2 \mathfrak{S}(\chi_2), v) = (\theta_1 \chi_1 + \theta_2 \chi_2, v)_H$$

D'autre part, nous avons :

$$\forall v \in V, a(\mathfrak{S}(\theta_1 \chi_1 + \theta_2 \chi_2), v) = (\theta_1 \chi_1 + \theta_2 \chi_2, v)_H$$

Et par conséquent, nous avons :

$$\mathfrak{S}(\theta_1 \chi_1 + \theta_2 \chi_2) = \theta_1 \mathfrak{S}(\chi_1) + \theta_2 \mathfrak{S}(\chi_2)$$

Donc, l'application \mathfrak{S} est linéaire sur H . De (II.2.46), il résulte :

$$\frac{\alpha}{2} \|u\|_V^2 \leq b(u, u) = (\chi, u)_H = (\chi, I(u))_H \leq \|\chi\|_H \|I(u)\|_H$$

En utilisant (II.2.38), nous obtenons :

$$\|\mathfrak{S}(\chi)\|_V = \|u\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \|\chi\|_H$$

Alors, \mathfrak{S} est continue.

En utilisant (II.2.38), nous concluons que $\tilde{\mathfrak{S}}$ est linéaire et continue.

Comme $\tilde{\mathfrak{S}}$ est la composition de \mathfrak{S} et de I , qui est compacte, donc $\tilde{\mathfrak{S}}$ est compacte.

Soient $\chi_1, \chi_2 \in H$ nous avons :

$$\begin{aligned} (\chi_1, \tilde{\mathfrak{S}}(\chi_2)) &= (\chi_1, (I \circ \mathfrak{S})(\chi_2))_H \\ &= b(\mathfrak{S}(\chi_1), \mathfrak{S}(\chi_2)) \\ &= b(\mathfrak{S}(\chi_2), \mathfrak{S}(\chi_1)) \\ &= (\chi_2, (I \circ \mathfrak{S})(\chi_1))_H \\ &= (\chi_2, \tilde{\mathfrak{S}}(\chi_1))_H \end{aligned}$$

Donc, $\tilde{\mathfrak{S}}$ est symétrique sur H .

En posant $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ dans l'égalité précédente et de (II.2.42), pour tout $\chi \in H$, nous trouvons:

$$(\chi, \tilde{\mathfrak{S}}(\chi))_H = b(\mathfrak{S}(\chi), \mathfrak{S}(\chi)) \geq \frac{\alpha}{2} \|\mathfrak{S}(\chi)\|_V^2 \geq 0$$

Supposons que $(\chi, \tilde{\mathfrak{S}}(\chi)) = 0$, alors l'inégalité ci-dessus donne $\mathfrak{S}(\chi) = 0$.

D'après la formulation variationnelle (II.2.45), nous avons

$$\forall w \in V, b(\mathfrak{S}(\chi), w) = (\chi, w)_H$$

On déduit de $\mathfrak{S}(\chi) = 0$ que $(\chi, w)_H = 0$ pour tout $w \in V$. Et par conséquent $\chi = 0$.

Finalement, pour tout $\chi \in H, \chi \neq 0$, nous avons

$$(\chi, \tilde{\mathfrak{S}}(\chi))_H > 0$$

Donc, $\tilde{\mathfrak{S}}$ est définie positive dans H .

En vertu du théorème de diagonalisation d'un opérateur défini positif, symétrique et compact, l'existence d'une suite (β_n) décroissante de valeurs propres positives de $\tilde{\mathfrak{S}}$. De plus,

β_n tend vers zéro et $\tilde{\mathfrak{S}}(v) = \beta_n v$ pour tout $v \in V$.

De (II.2.40), nous trouvons :

$$b(u, v) = \delta(u, v)_H = \delta b(\mathfrak{S}(u), v), \quad \forall v \in V$$

Donc, l'égalité $b(u - \delta \mathfrak{S}(u), v) = 0, \quad \forall v \in V$ donne $u = \delta \mathfrak{S}(u)$.

Alors, nous avons

$$I(u) = u = \delta I(\mathfrak{S}(u)) = \delta \tilde{\mathfrak{S}}(u) .$$

Par conséquent, les valeurs propres (δ_n) de (II.2.40) sont exactement les inverses des valeurs propres (β_n) de $\tilde{\mathfrak{S}}$. Ceci termine la démonstration de la première partie du Lemme 2.1, pour $\lambda_n = \gamma - \delta_n$.

2) En remplaçant dans (II.2.36), g par βg , on remarque que δ_0 est une fonction de β qui est donnée par :

$$\delta_0(\beta) = \mathbf{Inf}_{v \in V, \|v\|_H=1} \left[a(v, v) + \gamma - \beta \int_{\Gamma_c} g v_\tau^2 dx \right] \quad (\text{II.2.47})$$

Alors, $\beta \rightarrow \delta_0(\beta)$ est une fonction concave, et par conséquent, $\lambda_0(\beta) = \gamma - \delta_0(\beta)$ est une fonction convexe. D'où de l'inégalité $\forall v \in V : b(v, v) \geq \delta_0(\beta)(v, v)$ nous déduisons (II.2.37).

3) Soient $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\beta_1 > \beta_2$. De (II.2.37), nous avons:

$$a(v, v) + \lambda_0(\beta_2)(v, v) = \beta_2 \int_{\Omega} g v_\tau^2 dx \quad (\text{II.2.48})$$

$$a(v, v) + \lambda_0(\beta_1)(v, v) = \beta_1 \int_{\Omega} g v_\tau^2 dx \quad (\text{II.2.49})$$

Par soustraction, nous obtenons :

$$(\lambda_0(\beta_1) - \lambda_0(\beta_2)) \|v\|_H^2 = (\beta_1 - \beta_2) \int_{\Omega} g v_\tau^2 dx$$

Donc, nous avons :

- Si $g < 0$, alors $\lambda_0(\beta_1) \leq \lambda_0(\beta_2)$, la fonction $\beta \rightarrow \lambda_0(\beta)$ est décroissante.
- Si $g > 0$, alors $\lambda_0(\beta_1) \geq \lambda_0(\beta_2)$, la fonction $\beta \rightarrow \lambda_0(\beta)$ est croissante.

Théorème 2.2 *S'il existe $\beta^* > \frac{2}{\Delta t}$ tel que*

$$\frac{(\Delta t)^2}{4} \lambda_0(\beta^*) < 1 \quad (\text{II.2.50})$$

Alors :

- 1) *Le problème (II.2.26) possède une unique solution;*
- 2) *La fonctionnelle Φ est fortement convexe sur V , i.e., il existe $k > 0$:*

$$\forall v_1, v_2 \in V, \langle \Phi'(v_1) - \Phi'(v_2), v_1 - v_2 \rangle \geq k \|v_1 - v_2\|_V^2 \quad (\text{II.2.51})$$

Preuve

1) Soient $u_1, u_2 \in V$ deux solutions de problème (II.2.26). En posant $G^{i+1} = G_1$ pour u_1 et $G^{i+1} = G_2$ pour u_2 , nous trouvons :

$$\begin{aligned} (u_1 - u_2, u_1 - u_2) + \frac{(\Delta t)^2}{4} a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) + \\ + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_c} S[\mu(x, |u_{1\tau}|) - \mu(x, |u_{2\tau}|)] [|u_{1\tau}| - |u_{2\tau}|] dx \leq \\ \leq (G_1 - G_2, u_1 - u_2)_V \end{aligned} \quad (\text{II.2.52})$$

Soit $h : \Gamma_c \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction définie par

$$h(x, v) = gv + S(x)\mu(x, v), \quad \forall v \in \mathbb{R}_+, \text{ p.p. } x \in \Gamma_c \quad (\text{II.2.53})$$

Comme

$$\partial_v h(x, v) = g + S(x)\partial_v \mu(x, v) \geq 0$$

Alors, nous déduisons que h est une fonction croissante, donc

$$(h(x, r_1) - h(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+ \text{ p.p. } x \in \Gamma_c \quad (\text{II.2.54})$$

De (II.2.53), l'inégalité (II.2.52) devient :

$$\begin{aligned} (u_1 - u_2, u_1 - u_2) + \frac{(\Delta t)^2}{4} a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_c} g |u_{1\tau} - u_{2\tau}|^2 dx + \\ + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_c} [h(x, |u_{1\tau}|) - h(x, |u_{2\tau}|)] [|u_{1\tau}| - |u_{2\tau}|] dx \leq (G_1 - G_2, u_1 - u_2)_V \end{aligned}$$

En utilisant (II.2.37) et (II.2.54), nous concluons :

$$\left(\frac{1 - \frac{(\Delta t)^2}{4} \lambda_0(\beta)}{\frac{\Delta t}{2} \beta} \right) \|u_1 - u_2\|_H^2 + \left(\frac{\frac{\Delta t \beta}{2} - 1}{\frac{\Delta t \beta}{2}} \right) \left[\|u_1 - u_2\|_H^2 + \frac{\alpha(\Delta t)^2}{4} \|u_1 - u_2\|_V^2 \right] \leq (G_1 - G_2, u_1 - u_2)_V$$

De (II.2.50), nous avons

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq \frac{4\beta^*}{\alpha\Delta t(\Delta t\beta^* - 2)} \|G_1 - G_2\|_V \quad (\text{II.2.55})$$

Si on pose $G_1 = G_2 = G^{i+1}$, dans (II.2.55), nous déduisons que $u_1 = u_2$.

2) Soient $v_1, v_2 \in V$, de (II.2.27) il résulte :

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(v_1) - \Phi'(v_2), v_1 - v_2 \rangle &\geq (v_1 - v_2, v_1 - v_2)_H + \frac{(\Delta t)^2}{4} a(v_1 - v_2, v_1 - v_2) + \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_c} S[\mu(x, |v_{1\tau}|) - \mu(x, |v_{2\tau}|)] [|v_{1\tau}| - |v_{2\tau}|] dx \end{aligned}$$

Donc, de (II.2.53) nous avons :

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(v_1) - \Phi'(v_2), v_1 - v_2 \rangle &\geq (v_1 - v_2, v_1 - v_2)_H + \frac{(\Delta t)^2}{4} a(v_1 - v_2, v_1 - v_2) - \\ &- \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_c} g [|v_{1\tau}| - |v_{2\tau}|]^2 dx + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_c} [h(x, |v_{1\tau}|) - h(x, |v_{2\tau}|)] [|v_{1\tau}| - |v_{2\tau}|] dx \end{aligned}$$

De (II.2.37), (II.1.38) et (II.2.54) nous avons :

$$\langle \Phi'(v_1) - \Phi'(v_2), v_1 - v_2 \rangle \geq \left(\frac{1 - \frac{(\Delta t)^2}{4} \lambda_0(\beta)}{\frac{\Delta t}{2} \beta} \right) \|v_1 - v_2\|_H^2 + \left(\frac{\frac{\Delta t \beta}{2} - 1}{\frac{\Delta t \beta}{2}} \right) \left[\|v_1 - v_2\|_H^2 + \frac{\alpha(\Delta t)^2}{4} \|v_1 - v_2\|_V^2 \right]$$

De (II.2.50), il résulte

$$\langle \Phi'(v_1) - \Phi'(v_2), v_1 - v_2 \rangle \geq \frac{\alpha \Delta t (\Delta t \beta^* - 2)}{4 \beta^*} \|v_1 - v_2\|_V^2$$

Alors, la fonctionnelle Φ est fortement convexe sur V , et par conséquent Φ admet un unique minimum global.

2.2 Problème vertical

On va étudier le problème vertical (I.2.51)-(I.2.56), qui consiste à trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\rho \ddot{u} - G \Delta \bar{u} = r \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{II.2.56})$$

$$\bar{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d \times]0, T] \quad (\text{II.2.57})$$

$$G \partial_n \bar{u} = f \quad \text{sur } \Gamma_f \times]0, T] \quad (\text{II.2.58})$$

$$G |\partial_n \bar{u}| \leq g(0) \quad \text{si } \dot{\bar{u}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.2.59})$$

$$G \partial_n \bar{u} = -g \left(\left| \frac{\dot{\bar{u}}}{\dot{\bar{u}}} \right| \right) \frac{\dot{\bar{u}}}{\dot{\bar{u}}} \quad \text{si } \dot{\bar{u}} \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.2.60})$$

$$\bar{u}(0) = \bar{u}_0, \quad \dot{\bar{u}}(0) = \bar{u}_1 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.2.61})$$

On désigne par $u^c : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ la solution du problème auxiliaire suivant avec la condition « collée » sur $\Gamma_c \times]0, T]$:

$$\begin{cases} \rho \ddot{u}^c - G \Delta u^c = r & \text{dans } \Omega \times]0, T] \\ u^c = 0 & \text{sur } \Gamma_d \times]0, T] \\ G \partial_n u^c = f & \text{sur } \Gamma_f \times]0, T] \\ G |\partial_n u^c| \leq g(0) & \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \\ u^c(0) = \bar{u}_0, \dot{u}^c(0) = \bar{u}'_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (\text{II.2.62})$$

En posant $q = -G \partial_n u^c$ sur Γ_c , des problèmes (II.2.56)-(II.2.61) et (II.2.62), nous déduisons le problème vertical homogène avec frottement de Tresca suivant :

Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$G \Delta u = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{II.2.63})$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d \times]0, T] \quad (\text{II.2.64})$$

$$G \partial_n u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_f \times]0, T] \quad (\text{II.2.65})$$

$$G |\partial_n u| \leq g(0) \quad \text{si } \dot{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.2.66})$$

$$G \partial_n u + g \left(|\dot{u}| \right) \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} = q \quad \text{si } \dot{u} \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.2.67})$$

$$u(0) = \dot{u}(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{II.2.68})$$

Où $u = \bar{u} - u^c$.

2.2.1 Formulation variationnelle

Les problèmes (II.2.62) et (II.2.63)-(II.2.68) se ramènent aux problèmes variationnels suivants :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^c :]0, T] \rightarrow V \text{ tel que pour tout } v \in V : \\ \left(\ddot{u}^c, v - \dot{u}^c \right)_H + a(u^c, v - \dot{u}^c) + \varphi(v) \leq \left(F, v - \dot{u}^c \right)_V \\ u^c(0) = \bar{u}_0, \dot{u}^c(0) = \bar{u}'_0 \end{cases} \quad (\text{II.2.69})$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u :]0, T] \rightarrow V \text{ tel que pour tout } v \in V : \\ \left(\ddot{u}, v - \dot{u} \right)_H + a(u, v - \dot{u}) + j(\dot{u}, v) - j(\dot{u}, \dot{u}) \geq \left(q, v - \dot{u} \right)_{L^2(\Gamma_c)} \\ u(0) = \dot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.2.70})$$

Remarque 2.3 L'hypothèse (I.2.31) et les conditions aux bords (I.2.29)-(I.2.30), justifient les simplifications dans (II.2.69) et (II.2.70) suivantes :

$$a(u, v) = (G \nabla u, \nabla v)_{\mathcal{H}}, (F, v)_V = \int_{\Omega} r \cdot v dx + \int_{\Gamma_f} f \cdot v dx$$

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_c} g(|u|)|v| dx, \quad \varphi(v) = \int_{\Gamma_c} g(0)|v| dx$$

Nous avons le résultat suivant:

Théorème 2.2 *Sous les hypothèses (II.1.28), (II.1.31), (II.1.33)-(II.1.38) et (II.2.18)-(II.2.20), nous avons :*

1) *Le problème (II.2.69) possède une unique solution ayant la régularité*

$$u^c \in W^{2,\infty}(0, T; V) \quad (\text{II.2.71})$$

2) *Le problème (II.2.70) possède au moins une solution ayant la régularité*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; V), \quad \ddot{u} \in L^\infty(0, T; H) \quad (\text{II.2.72})$$

Démonstration

La démonstration se fait de la même façon comme théorème 2.1.

2.3 Cas d'un problème de cisaillement unidimensionnel

Dans ce paragraphe, en se basant sur la méthode caractéristique nous allons démontrer que le problème de cisaillement unidimensionnel est mal posé.

Soit $\Omega =]0, \ell[$ où $\ell > 0$. On considère le problème dynamique horizontal en dimension un qui consiste à chercher la fonction $u : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \rho \ddot{u}(x, t), \quad (\text{II.2.73})$$

$$u(\ell, t) = d_0 + \mathcal{G}t, \quad (\text{II.2.74})$$

$$G \left| \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \right| \leq S \mu(0) \quad \text{si } \dot{u}(0, t) = 0, \quad (\text{II.2.75})$$

$$G \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = S \mu(|\dot{u}(0, t)|) \frac{\dot{u}(0, t)}{|\dot{u}(0, t)|} \quad \text{si } \dot{u}(0, t) \neq 0, \quad (\text{II.2.76})$$

$$u(x, 0) = u_0 + (d_0 - u_0) \frac{x}{\ell}, \quad \dot{u}(x, 0) = \frac{\mathcal{G}}{\ell} x. \quad (\text{II.2.77})$$

Où ρ, S et G sont des constantes strictement positives et u_0 le glissement initial en $x=0$ et d_0 la position initiale en $x = \ell$.

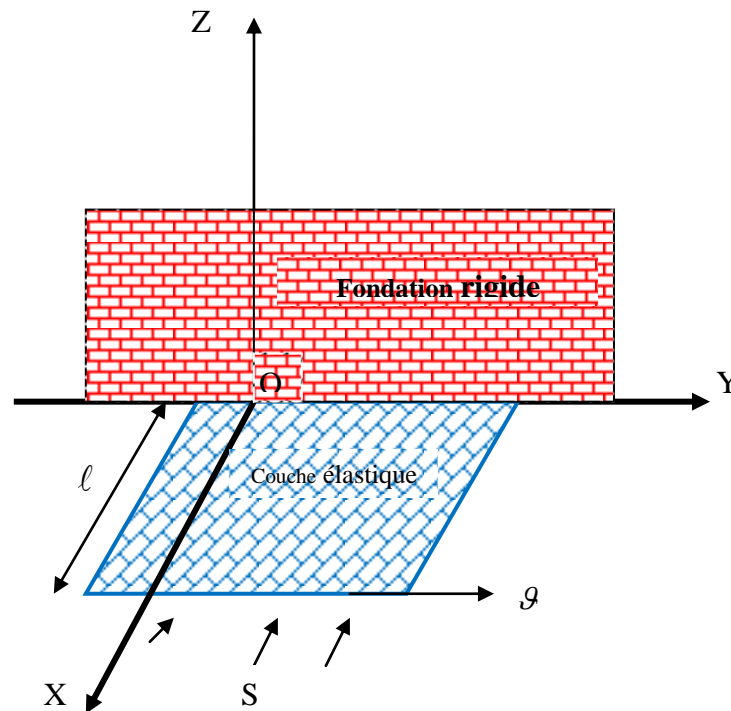


Fig.II.2.1 La géométrie du cisaillement dynamique d'une couche élastique. Le déplacement est imposé au bord supérieur $x = \ell$ et la couche élastique est en contact avec un bloc rigide au bord inférieur $x = 0$.

Le problème (II.2.73)-(II.2.77) représente un problème dynamique horizontal en dimension un d'une couche élastique glissant sur une fondation rigide fixe. La couche élastique est bloquée entre deux plans ($x=0$) et ($x = \ell$). Sur le plan ($x=0$), la couche fait un contact avec frottement sur la fondation rigide. Sur ($x = \ell$), la couche est tirée avec une vitesse tangentielle \mathcal{G} constante suivant la direction (Oy) et suivant la direction (Ox) on impose une force uniforme de la contrainte normale $\sigma_n = -S$. Nous considérons que le déplacement u_z est nul suivant la direction

(Oz) et $u_x = \frac{-S}{\lambda + 2G} x$. Nous désignons par : $u = u_y(x, t)$ le déplacement horizontal, $\dot{u}(x, t)$ la vitesse et $\sigma(x, t) = G \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ la contrainte de cisaillement. Sur le bord de frottement ($x = 0$), la

contrainte normale est $\sigma_n = -S$ et la contrainte tangentielle est $\sigma_\tau = -G \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$. (II.2.75) et (II.2.76) représentent la loi de frottement où $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne le coefficient de frottement dépendant de la vitesse de glissement $\mu = \mu(|\dot{u}(0, t)|)$. Nous supposons que $T \leq \frac{\ell}{c}$ où $c = \sqrt{G/\rho}$ est la vitesse de propagation d'ondes.

Proposition 2.1 *Le problème (II.2.73)-(II.2.77) est mal posé dans le sens où il admet plusieurs solutions.*

Démonstration

Pour $0 \leq t \leq \frac{\ell}{c}$, la quantité $A(x, t) = \dot{u}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est constante sur les lignes caractéristiques $D_k = \{x + ct = k\}$ (voir Fig. II.2.2).

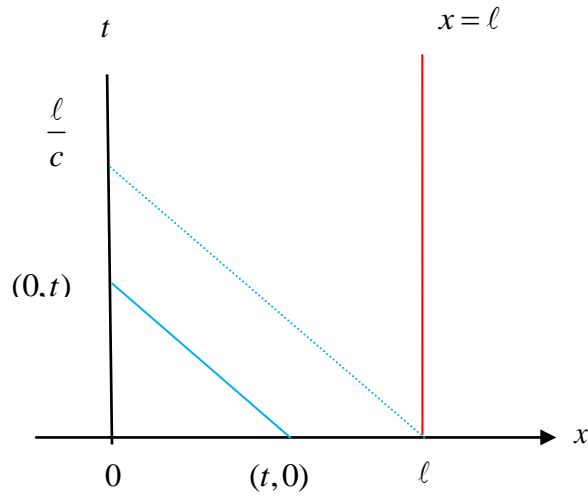


Fig. II.2.2: Lignes caractéristiques

Donc, $A(k - ct, t) = a(k)$ est indépendant de t . Pour $t = 0$, on a $a(k) = \dot{u}(k, 0) + c \frac{\partial u}{\partial x}(k, 0)$.

En utilisant (II.2.77) il vient

$$u(k, 0) = \frac{r}{\ell} k, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(k, 0) = \frac{d_0 - u_0}{\ell}$$

Alors, nous avons :

$$a(k) = \frac{1}{\ell}(rk + c(d_0 - u_0)) \quad (\text{II.2.78})$$

Par conséquent, en $(x = 0)$ et d'après l'expression $A(0, t) = a(ct)$, nous avons :

$$G \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \sqrt{\rho G} (a(ct) - \dot{u}(0, t)) \quad (\text{II.2.79})$$

De (II.2.78) et (II.2.79), le problème (II.2.73)-(II.2.77) se ramène à la résolution d'un problème de frottement sur le bord où l'inconnu est la vitesse de glissement $\dot{u}(0, t)$:

$$y(t) = \phi(\dot{u}(0, t)) \text{ si } \dot{u}(0, t) \neq 0 \quad (\text{II.2.80})$$

$$|y(t)| \leq S \mu(0) \text{ si } \dot{u}(0, t) = 0 \quad (\text{II.2.81})$$

Où

$$\begin{cases} y(t) = \frac{c}{\ell}(rt + d_0 - u_0) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{\ell}{c} \\ \phi(v) = \sqrt{\rho G} v + S \mu(|v|) \frac{v}{|v|} & \text{pour } v \neq 0 \end{cases}$$

Remarque 2.4 Du point de vue mathématique, l'équation (II.2.80) est une équation algébrique qui admet plusieurs solutions qui sont déterminées relativement à la monotonie de la fonction ϕ .

Chapitre 3

Problème viscoélastique de contact avec frottement à coefficient variable

Dans ce chapitre, nous considérons un problème dynamique de contact avec frottement pour un matériau viscoélastique. Le frottement est modélisé par les lois de Tresca et de Coulomb avec coefficients variables. En utilisant la méthode de Faedo-Galerkin, nous démontrons l'existence d'une solution faible. D'autre part, si le coefficient de viscosité est suffisamment grand, le problème considéré admet une unique solution. De plus, lorsqu'on néglige le coefficient de viscosité, nous obtenons un problème élastique.

3.1 Problème horizontal

Cette section est consacrée à l'analyse mathématique d'un problème viscoélastique horizontal de frottement de Coulomb avec coefficient variable. Ce problème consiste à trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et le champ de contrainte $\sigma : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{S}^2$:

$$\operatorname{div} \sigma(u) + r = \rho \ddot{u} \text{ dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{II.3.1})$$

$$\sigma(u) = \mathcal{A} \varepsilon(u) + \eta \mathcal{C} \varepsilon(\dot{u}) \text{ dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{II.3.2})$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_d \times]0, T] \quad (\text{II.3.3})$$

$$\sigma(u)n = f \text{ sur } \Gamma_f \times]0, T] \quad (\text{II.3.4})$$

$$\sigma_n(u) = -S \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.3.5})$$

$$|\sigma_\tau(u)| \leq S \mu(0) \text{ si } \dot{u}_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.3.6})$$

$$\sigma_\tau(u) = -S \mu(|\dot{u}_\tau|) \frac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} \text{ si } \dot{u}_\tau \neq 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.3.7})$$

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1 \text{ dans } \Omega. \quad (\text{II.3.8})$$

3.2.1 Hypothèses, notations et formulation variationnelle

On suppose les mêmes hypothèses (II.1.25)-(II.1.26) considérées dans le premier chapitre. Le tenseur de viscosité \mathcal{C} est supposé symétrique et continu, c'est-à-dire \mathcal{C} satisfait :

$$\begin{cases} \text{(a) } \mathcal{C}_{ijkh} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k, h \leq 2, \\ \text{(b) } \mathcal{C}_{ijkh}(x) = \mathcal{C}_{jikh}(x) = \mathcal{C}_{ijhk}(x) \text{ p.p. dans } \Omega \\ \text{(c) } \exists m' > 0 \text{ tel que } \mathcal{C}_{ijkh} \tau_{ij} \tau_{kh} \geq m' \tau_{ij} \tau_{ij} \text{ p.p. dans } \Omega, \forall \tau \in \mathbb{S}^2 \end{cases} \quad (\text{II.3.9})$$

Soit $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par :

$$b(u, v) = (\mathcal{C} \varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V$$

De (II.3.9) et (II.1.22), nous avons :

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } M'' > 0 : |b(u, v)| \leq M'' \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \\ \text{(b) } b(u, v) = b(v, u) \quad \forall u, v \in V, \\ \text{(c) Il existe } \beta > 0 : b(v, v) \geq \beta \|v\|_V^2, \forall v \in V. \end{cases} \quad (\text{II.3.10})$$

Le problème (II.3.1)-(II.3.8) se ramène au problème variationnel suivant :

Trouver $u :]0, T] \rightarrow V$ tel que pour tout $v \in V$:

$$(\ddot{u}, v - \dot{u})_H + a(u, v - \dot{u}) + \eta b(\dot{u}, v - \dot{u}) + j(\dot{u}, v) - j(\dot{u}, \dot{u}) \geq (F, v - \dot{u})_V \quad (\text{II.3.11})$$

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1 \quad (\text{II.3.12})$$

où

$$(F, v)_V = \int_{\Omega} r \cdot v dx + \int_{\Gamma_f} f \cdot v dx - \int_{\Gamma_c} S \cdot v_n dx$$

3.3.2 Existence et unicité

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses (II.1.26), (II.1.33), (II.1.38), (II.2.18)-(II.2.20) et (II.3.10), le problème variationnel (II.3.11)-(II.3.12) possède au moins une solution u ayant la régularité :*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; V); \quad \ddot{u} \in L^\infty(0, T; H) \quad (\text{II.3.13})$$

De plus, s'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$\eta \geq \frac{C_0 \ell_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)}}{\beta}, \quad (\text{II.3.14})$$

alors la solution est unique.

Démonstration

- **Unicité :** Soient u_1 et u_2 deux solutions de (II.3.11)-(II.3.12) satisfaisantes (II.3.13).

Pour $v = \dot{u}_2$, (II.3.11) devient :

$$(\ddot{u}_1, \dot{u}_2 - \dot{u}_1)_H + a(u_1, \dot{u}_2 - \dot{u}_1) + \eta b(\dot{u}_1, \dot{u}_2 - \dot{u}_1) + j(\dot{u}_1, \dot{u}_2) - j(\dot{u}_1, \dot{u}_1) \geq (F, \dot{u}_2 - \dot{u}_1)_V$$

Et pour $v = \dot{u}_1$, (II. 3.11) devient :

$$(\ddot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2)_H + a(u_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) + \eta b(\dot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) + j(\dot{u}_2, \dot{u}_1) - j(\dot{u}_2, \dot{u}_2) \geq (F, \dot{u}_1 - \dot{u}_2)_V$$

En posant $w = u_1 - u_2$, il résulte :

$$(\ddot{w}, \dot{w})_H + a(w, \dot{w}) + \eta b(\dot{w}, \dot{w}) \leq \int_{\Gamma_c} S \left[\mu(|\dot{u}_{1\tau}|) - \mu(|\dot{u}_{2\tau}|) \right] \left[|\dot{u}_{2\tau}| - |\dot{u}_{1\tau}| \right] dx$$

De (II.1.24) et (II.1.26b), nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\dot{w}\|_H^2 + a(w, w) \right] + \eta b(\dot{w}, \dot{w}) \leq C_0 \ell_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \|\dot{w}\|_V^2.$$

Par intégration sur $[0, T]$, en utilisant (II.1.38), (II.3.10c) et (II.3.12), il vient:

$$\frac{1}{2} \|\dot{w}(t)\|_H^2 + \frac{\alpha}{2} \|w(t)\|_V^2 + \left(\beta \eta - C_0 \ell_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \right) \int_0^t \|\dot{w}(\xi)\|_V^2 d\xi \leq 0$$

Moyennant la condition (II.3.14), nous déduisons que $w = 0$, d'où l'unicité.

- **Existence :** Pour démontrer l'existence, on va utiliser la méthode de Faedo-Galerkin.

Comme l'espace V est séparable, il existe une suite des fonctions (w_m) vérifiant :

- $\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_m\}$ est linéairement indépendante;
- L'espace $V_m = [w_1, \dots, w_m]$ engendré par $\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_m\}$ est dense dans V .

On peut supposer, sans perte de généralité, que pour m suffisamment grand nous avons :

$$u_0, u_1 \in V_m$$

On considère la fonction $\tilde{\mu} : \Gamma_c \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\tilde{\mu}(x, u) = \mu(x, |u|), \quad x \in \Gamma_c, \quad u \in \mathbb{R}$$

On introduit une famille de fonctions $\psi_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dépendantes de $\varepsilon > 0$:

$$\psi_\varepsilon(v) = \sqrt{|v|^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon, \quad v \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{II.3.15})$$

On remarque que les fonctions ψ_ε sont convexes, différentiables et satisfont les conditions suivantes :

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \psi_\varepsilon(v) \leq |v| \quad (\text{II.3.16})$$

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2 : |\psi'_\varepsilon(v) \cdot w| \leq |w| \quad (\text{II.3.17})$$

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 : |\psi_\varepsilon(v) - |v|| \leq \varepsilon \quad (\text{II.3.18})$$

On définit une famille de fonctionnelles régularisées de frottement :

$$j_\varepsilon : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$j_\varepsilon(u, v) = \int_{\Gamma_c} S \tilde{\mu}(x, u_\tau(x)) \psi_\varepsilon(v_\tau(x)) dx, \quad u, v \in V \quad (\text{II.3.19})$$

qui sont bien définies, différentiables au sens de Gâteaux par rapport à la deuxième variable et qui représentent une approximation de j , i.e. : il existe $C > 0$ telle que

$$|j_\varepsilon(u, v) - j(u, v)| \leq C\varepsilon, \quad \forall u, v \in V \quad (\text{II.3.20})$$

Soit $J_\varepsilon : V \times V \rightarrow V'$ la dérivée au sens de Gâteaux de j_ε par rapport à la deuxième variable au point $(u, v) \in V \times V$ définie par :

$$\langle J_\varepsilon(u, v), z \rangle = \int_{\Gamma_c} S \tilde{\mu}(x, u_\tau(x)) \psi'_\varepsilon(v_\tau) \cdot z_\tau dx, \quad \forall z \in V \quad (\text{II.3.21})$$

On considère le problème approché et régularisé de (II.3.11)-(II.3.12) suivant :

Trouver $u_\varepsilon^m : [0, T] \rightarrow V_m$ tel que pour tout $v^m \in V_m$ et p.p. $t \in [0, T]$ nous avons :

$$\left(\ddot{u}_\varepsilon^m, v^m \right)_H + a(u_\varepsilon^m, v^m) + \eta b(\dot{u}_\varepsilon^m, v^m) + \langle J_\varepsilon(\dot{u}_\varepsilon^m, \dot{u}_\varepsilon^m), v^m \rangle = (F, v^m)_V \quad (\text{II.3.22})$$

$$u_\varepsilon^m(0) = u_0, \quad \dot{u}_\varepsilon^m(0) = u_1 \quad (\text{II.3.23})$$

Proposition 3.1 *Sous les hypothèses (II.1.26)-(II.1.38) et (II.3.10), le problème (II.3.22)-(II.3.23) admet au moins une solution $u_\varepsilon^m \in L^\infty(0, T; V_m)$.*

Preuve

Pour démontrer l'existence d'une solution du problème (II.3.22)-(II.3.23), il suffit de vérifier que la fonctionnelle J_ε est continue sur $V_m \times V_m$. En effet, nous avons :

$$\|J_\varepsilon(u, u)\|_{V'} \leq C \|u\|_V, \quad C > 0, \quad \forall u \in V_m$$

D'où, la continuité de J_ε .

A) Estimations à priori I

On pose $v^m = \dot{u}_\varepsilon^m$, de (II.3.17) et (II.3.21), nous trouvons :

$$\langle J_\varepsilon(v^m, v^m), v^m \rangle \geq 0,$$

Nous avons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\dot{u}_\varepsilon^m\|_H^2 + a(u_\varepsilon^m, u_\varepsilon^m) \right] + \eta b(\dot{u}_\varepsilon^m, \dot{u}_\varepsilon^m) \leq (F, \dot{u}_\varepsilon^m)_V \quad (\text{II.3.24})$$

En intégrant (II.3.24) de 0 à t , de (II.1.38) et (II.3.10c), il résulte :

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_\varepsilon^m\|_H^2 + \alpha \|u_\varepsilon^m\|_V^2 + 2\eta\beta \int_0^t \|\dot{u}_\varepsilon^m(s)\|_V^2 ds &\leq \\ &\leq \|u_1\|_H^2 + \alpha \|u_0\|_V^2 + 2(F, u_\varepsilon^m)_V - 2(F(0), u_0)_V - 2 \int_0^t (\dot{F}(s), u_\varepsilon^m(s))_V ds \end{aligned} \quad (\text{II.3.25})$$

Nous avons les estimations suivantes :

$$\left| (F, u_\varepsilon^m)_V \right| \leq \frac{\alpha}{4} \|u_\varepsilon^m\|_V^2 + \frac{\|F\|_{L^\infty(0,T;V)}^2}{\alpha} \quad (\text{II.3.26})$$

$$\left| \int_0^t (\dot{F}(s), u_\varepsilon^m(s))_V ds \right| \leq \|\dot{F}\|_{L^2(0,T;V)} \left[\int_0^t \|u_\varepsilon^m(s)\|_V^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.3.27})$$

Moyennant de (II.3.26)-(II.3.27), (II.3.25) devient :

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_\varepsilon^m\|_H^2 + 2\|u_\varepsilon^m\|_V^2 &\leq \|\dot{u}_\varepsilon^m\|_H^2 + 2\|u_\varepsilon^m\|_V^2 + 2\eta\beta \int_0^t \|\dot{u}_\varepsilon^m(s)\|_V^2 ds \leq \\ &\leq C + C \int_0^t \left(\|\dot{u}_\varepsilon^m(s)\|_H^2 + 2\|u_\varepsilon^m(s)\|_V^2 \right) ds \end{aligned}$$

Où C est une constante positive indépendant de m .

Grâce au Lemme A.11 de Gronwall, il en résulte :

$$\|u_\varepsilon^m\|_V^2 + \|\dot{u}_\varepsilon^m\|_H^2 \leq C$$

et par conséquent,

$$\begin{cases} (u_\varepsilon^m) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; V) \\ (\dot{u}_\varepsilon^m) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \end{cases} \quad (\text{II.3.28})$$

B) Estimations à priori II

On pose $v^m = \dot{u}_\varepsilon^m$ dans (II.3.21), nous avons:

$$\langle J_\varepsilon(\dot{u}_\varepsilon^m(t), \dot{u}_\varepsilon^m(t)), \ddot{u}_\varepsilon^m(t) \rangle = \int_{\Gamma_c} S \tilde{\mu}(x, \dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(t)) \frac{d}{dt} (\psi_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(t))) dx$$

De (II.3.22), il résulte :

$$\begin{aligned} \|\ddot{u}_\varepsilon^m\|_H^2 + a(u_\varepsilon^m, \ddot{u}_\varepsilon^m) + \frac{\eta}{2} \frac{d}{dt} b(\dot{u}_\varepsilon^m, \dot{u}_\varepsilon^m) + \\ + \int_{\Gamma_c} S \tilde{\mu}(x, \dot{u}_{\varepsilon\tau}^m) \frac{d}{dt} (\psi_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m)) dx = (F, \ddot{u}_\varepsilon^m)_V \end{aligned}$$

Par intégration sur $[0, t]$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\ddot{u}_\varepsilon^m(s)\|_H^2 ds + \frac{\beta\eta}{2} \|\dot{u}_\varepsilon^m\|_V^2 \leq C + \int_0^t a(\dot{u}_\varepsilon^m(s), \dot{u}_\varepsilon^m(s)) ds - \\ - a(u_\varepsilon^m, \dot{u}_\varepsilon^m) + (F, \dot{u}_\varepsilon^m)_V - \int_0^t \langle \dot{F}(s), \dot{u}_\varepsilon^m(s) \rangle ds - \\ - \int_0^t \int_{\Gamma_c} S \tilde{\mu}(x, \dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s)) \frac{d}{ds} (\psi_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) dx ds \end{aligned} \quad (\text{II.3.29})$$

En utilisant (II.3.26), (II.3.27) et l'inégalité suivante :

$$|a(u_\varepsilon^m, \dot{u}_\varepsilon^m)| \leq M \|u_\varepsilon^m\|_V \|\dot{u}_\varepsilon^m\|_V \leq \frac{2M^2}{\beta\eta} \|u_\varepsilon^m\|_V^2 + \frac{\beta\eta}{8} \|\dot{u}_\varepsilon^m\|_V^2$$

de (II.3.29) nous déduisons :

$$\begin{aligned} \frac{\beta\eta}{4} \|\dot{u}_\varepsilon^m\|_V^2 + \int_0^t \|\ddot{u}_\varepsilon^m(s)\|_H^2 ds \leq C + C \int_0^t \|\dot{u}_\varepsilon^m(s)\|_V^2 ds + \\ + \left| \int_0^t \int_{\Gamma_c} S \tilde{\mu}(x, \dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s)) \frac{d}{ds} (\psi_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) dx ds \right| \end{aligned} \quad (\text{II.3.30})$$

Alors, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_{\Gamma_c} S \tilde{\mu}(x, \dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s)) \frac{d}{ds} (\psi_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) dx ds &= \\
&= \int_0^t \int_{\Gamma_c} S \tilde{\mu}(x, \psi_r(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) \frac{d}{ds} (\psi_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) dx ds + \\
&+ \int_0^t \int_{\Gamma_c} S \left[\tilde{\mu}(x, \dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s)) - \tilde{\mu}(x, \psi_r(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) \right] \frac{d}{ds} (\psi_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) dx ds
\end{aligned}$$

D'une part, en intégrant par partie, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_{\Gamma_c} S \tilde{\mu}(x, \psi_r(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) \frac{d}{ds} (\psi_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) dx ds &= \\
\int_{\Gamma_c} S \tilde{\mu}(x, \psi_r(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(t))) (\psi_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(t))) dx - \int_{\Gamma_c} S \tilde{\mu}(x, \psi_r(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(0))) (\psi_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(0))) dx &- \\
- \int_0^t \int_{\Gamma_c} S \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial u}(x, \psi_r(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) \psi_r'(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s)) (\psi_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) dx ds &
\end{aligned}$$

En utilisant (II.1.26c), (II.3.16) et (II.3.17), il en résulte :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t \int_{\Gamma_c} S \tilde{\mu}(x, \psi_r(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) \frac{d}{ds} (\psi_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) dx ds \right| &\leq C_1 + C_2 \int_{\Gamma_c} |\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(t)| dx + \\
&+ C_3 \int_0^t \int_{\Gamma_c} |\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s)| dx ds
\end{aligned} \tag{II.3.31}$$

D'autre part, en utilisant (II.1.26b) et (II.3.18), nous obtenons :

$$\left| \int_0^t \int_{\Gamma_c} S \left[\tilde{\mu}(x, \dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s)) - \tilde{\mu}(x, \psi_r(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) \right] \frac{d}{ds} (\psi_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) dx ds \right| \leq C_4 r \int_{\Gamma_c} |\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(t)| dx$$

Où C_4 est une constante indépendante de r .

Lorsque r tend vers 0, nous déduisons :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t \int_{\Gamma_c} S \tilde{\mu}(x, \dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s)) \frac{d}{ds} (\psi_\varepsilon(\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s))) dx ds \right| &\leq C + C \int_{\Gamma_c} |\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(t)| dx + \\
&+ C \int_0^t \int_{\Gamma_c} |\dot{u}_{\varepsilon\tau}^m(s)| dx ds
\end{aligned} \tag{II.3.32}$$

Où $C = \text{Max}\{C_1, C_2, C_3\}$

En utilisant les estimations (II.3.31) et (II.3.32), (II.3.30) devient :

$$\|\dot{u}_\varepsilon^m(t)\|_V^2 + \int_0^t \|\dot{u}_\varepsilon^m(s)\|_H^2 ds \leq C + C \int_0^t \|\dot{u}_\varepsilon^m(s)\|_V^2 ds \tag{II.3.33}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\dot{u}_\varepsilon^m(t)\|_V^2 \leq C \\ \int_0^t \|\ddot{u}_\varepsilon^m(s)\|_H^2 ds \leq C \end{array} \right.$$

Par conséquent, nous avons:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\dot{u}_\varepsilon^m) \text{ demeure dans un bornée de } L^\infty(0, T; V) \\ (\ddot{u}_\varepsilon^m) \text{ demeure dans un bornée de } L^2(0, T; H) \end{array} \right. \quad (\text{II.3.34})$$

C) Passage à la limite

De (II.3.28) et (II.3.34), on peut extraire de (u_ε^m) une sous suite notée encore (u_ε^m) telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\varepsilon^m \rightarrow u \text{ faible étoile dans } L^\infty(0, T; V) \\ \dot{u}_\varepsilon^m \rightarrow \dot{u} \text{ faible étoile dans } L^\infty(0, T; V) \\ \ddot{u}_\varepsilon^m \rightarrow \ddot{u} \text{ faible étoile dans } L^2(0, T; H) \end{array} \right. \quad (\text{II.3.35})$$

Pour $m \rightarrow +\infty$.

On pose $\Omega_1 = \Omega \times]0, T[$, de (II.3.35) nous déduisons :

$$(u_\varepsilon^m) \text{ et } (\dot{u}_\varepsilon^m) \text{ restent dans un borné de } H^1(\Omega_1).$$

Comme l'injection de $H^1(\Omega_1)$ dans $L^2(0, T; H)$ est compacte, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\varepsilon^m \rightarrow u \text{ fortement dans } L^2(0, T; H) \\ \dot{u}_\varepsilon^m \rightarrow \dot{u} \text{ fortement dans } L^2(0, T; H) \end{array} \right. \quad (\text{II.3.36})$$

Soit $w \in L^2(0, T; V)$, alors il existe une suite $(w^m) \subset L^2(0, T; V_m)$ telle que :

$$w^m \rightarrow w \text{ fortement dans } L^2(0, T; V).$$

En posant $v^m = w^m(t) - \dot{u}_\varepsilon^m(t)$. Par intégration sur $[0, T]$ et en utilisant l'inégalité suivante:

$$j_\varepsilon(v, w) - j_\varepsilon(v, z) \geq \langle J_\varepsilon(v, z), w - z \rangle, \quad \forall v, w, z \in V,$$

De (II.3.22), nous trouvons :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[(\dot{u}_\varepsilon^m, w^m - \dot{u}_\varepsilon^m)_V + a(u_\varepsilon^m, w^m - \dot{u}_\varepsilon^m) \right] dt + \eta \int_0^T b(\dot{u}_\varepsilon^m, w^m - \dot{u}_\varepsilon^m) dt + \int_0^T \left[j_\varepsilon(\dot{u}_\varepsilon^m, w^m) - j_\varepsilon(\dot{u}_\varepsilon^m, \dot{u}_\varepsilon^m) \right] dt \\ \geq \int_0^T (F, w^m - \dot{u}_\varepsilon^m)_V dt \end{aligned}$$

En utilisant (II.3.20), il vient :

$$\begin{aligned}
 C\varepsilon + \int_0^T (\ddot{u}_\varepsilon^m, w^m - \dot{u}_\varepsilon^m) dt + \int_0^T a(u_\varepsilon^m, w^m - \dot{u}_\varepsilon^m) dt + \eta \int_0^T b(\dot{u}_\varepsilon^m, w^m - \dot{u}_\varepsilon^m) dt + \\
 + \int_0^T [j(\dot{u}_\varepsilon^m, w^m) - j(\dot{u}_\varepsilon^m, \dot{u}_\varepsilon^m)] dt \geq \int_0^T (F, w^m - \dot{u}_\varepsilon^m)_V dt
 \end{aligned} \tag{II.3.37}$$

Nous avons:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T [j(\dot{u}_\varepsilon^m, w^m) - j(\dot{u}_\varepsilon^m, \dot{u}_\varepsilon^m)] dt = \int_0^T [j(\dot{u}_\varepsilon^m, w^m) - j(\dot{u}, w)] dt + \int_0^T [j(\dot{u}, w) - j(\dot{u}, \dot{u})] dt + \\
 + \int_0^T [j(\dot{u}, \dot{u}) - j(\dot{u}_\varepsilon^m, \dot{u}_\varepsilon^m)] dt
 \end{aligned}$$

De (II.1.26b) et (II.3.36), lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et $m \rightarrow +\infty$ nous obtenons :

$$\begin{cases} \int_0^T j(\dot{u}_\varepsilon^m, \dot{u}_\varepsilon^m) dt - \int_0^T j(\dot{u}, \dot{u}) dt \rightarrow 0 \\ \int_0^T j(\dot{u}_\varepsilon^m, w^m) dt - \int_0^T j(\dot{u}, w) dt \rightarrow 0 \end{cases}$$

Et par conséquent, par passage à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et $m \rightarrow +\infty$, de (II.3.37) il découle :

$$\begin{aligned}
 \int_0^T (\ddot{u}, w - \dot{u}) dt + \int_0^T a(u, w - \dot{u}) dt + \eta \int_0^T b(\dot{u}, w - \dot{u}) dt + \\
 + \int_0^T [j(\dot{u}, w) - j(\dot{u}, \dot{u})] dt \geq \int_0^T (F, w - \dot{u})_V dt
 \end{aligned} \tag{II.3.38}$$

Pour tout $v \in V$, on pose

$$w(s) = \begin{cases} v & \text{pour } s \in]t, t + \lambda[, \lambda > 0 \\ \dot{u}(s) & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Il est clair que $w \in L^2(0, T; V)$.

De (II.3.38), nous obtenons l'inégalité :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\lambda} \int_t^{t+\lambda} [(\ddot{u}(s), v - \dot{u}(s)) + a(u(s), v - \dot{u}(s)) + \eta b(\dot{u}(s), v - \dot{u}(s))] ds + \\
 + \frac{1}{\lambda} \int_t^{t+\lambda} [j(\dot{u}(s), v) - j(\dot{u}(s), \dot{u}(s))] ds \geq \frac{1}{\lambda} \int_t^{t+\lambda} \langle F(s), v - \dot{u}(s) \rangle ds
 \end{aligned}$$

Nous passons à la limite lorsque λ tend vers 0, on obtient (II.3.11), d'où u est une solution de (II.3.11)-(II.3.12).

3.2 Problème vertical

On s'intéresse dans cette section à l'analyse mathématique du problème viscoélastique vertical de frottement de Tresca avec un seuil de frottement dépendant de la vitesse de glissement (I.2.57)-(I.2.62).

Ce problème consiste à trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times]0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$G\Delta u + \eta\Delta \dot{u} + r = \rho \ddot{u} \text{ dans } \Omega \times]0, T] \quad (\text{II.3.39})$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_d \times]0, T] \quad (\text{II.3.40})$$

$$G\partial_n u + \eta\partial_n \dot{u} = f \text{ sur } \Gamma_f \times]0, T] \quad (\text{II.3.41})$$

$$|G\partial_n u + \eta\partial_n \dot{u}| \leq g(0) \text{ si } \dot{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.3.42})$$

$$G\partial_n u + \eta\partial_n \dot{u} = -g\left(\frac{|\dot{u}|}{|\dot{u}|}\right) \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \text{ si } \dot{u} \neq 0 \text{ sur } \Gamma_c \times]0, T] \quad (\text{II.3.43})$$

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1 \text{ dans } \Omega \quad (\text{II.3.44})$$

Le problème (II.3.39)-(II.3.44) se ramène au problème variationnel suivant :

Trouver $u :]0, T] \rightarrow V$ tel que pour tout $v \in V$:

$$(\ddot{u}, v - \dot{u})_H + a(u, v - \dot{u}) + \eta b(\dot{u}, v - \dot{u}) + j(\dot{u}, v) - j(\dot{u}, \dot{u}) \geq (F, v - \dot{u})_V \quad (\text{II.3.45})$$

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1 \quad (\text{II.3.46})$$

Remarque 3.1

On remarque que l'hypothèse du déplacement vertical (I.2.31) et les conditions aux bords (I.2.29)-(I.2.30) simplifient certains termes dans (II.3.46) et (II.3.47). De façon précise, nous obtenons pour tout $u, v \in V$:

$$a(u, v) = (G\nabla u, \nabla v)_{\mathcal{H}}, \quad (F, v)_V = \int_{\Omega} r \cdot v dx + \int_{\Gamma_f} f \cdot v dx, \quad j(u, v) = \int_{\Gamma_c} g(|u|)|v| dx$$

3.2.1 Existence et unicité

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses (II.1.26), (II.1.31), (II.1.33), (II.1.38), (II.2.18)-(II.2.20) et (II.3.10), alors le problème variationnel (II.3.45)-(II.3.46) possède au moins une solution u ayant la régularité :*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; V); \quad \ddot{u} \in L^\infty(0, T; H) \quad (\text{II.3.47})$$

De plus, s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\eta \geq \frac{C_0 \ell_\mu \|S\|_{L^\infty(\Gamma_c)}}{\beta} \quad (\text{II.3.48})$$

alors la solution est unique.

Démonstration : Comme dans la démonstration du Théorème 3.1, en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin, nous démontrons le Théorème 3.2.

3.3 Cas élastique

On considère le même problème élastodynamique horizontal (II.2.1)-(II.2.8) étudié dans le chapitre précédent. Sous les mêmes hypothèses considérées auparavant.

Le problème (II.2.1)-(II.2.8) est équivalent au problème variationnel (P) défini par :

$$(P) : \begin{cases} \text{Trouver } u : [0, T] \rightarrow V \text{ vérifiant pour tout } v \in V : \\ (\ddot{u}, v - \dot{u})_H + a(u, v - \dot{u}) + j(\dot{u}, v) - j(\dot{u}, \dot{u}) \geq (F, v - \dot{u})_V \\ u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1 \end{cases}$$

Proposition 3.2

Le problème variationnel (P) possède au moins une solution ayant la régularité :

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; V); \ddot{u} \in L^\infty(0, T; H)$$

Démonstration :

Soit $\eta > 0$, on note par (P_η) la formulation variationnelle de (II.3.1)-(II.3.8), suivante:

$$(P_\eta) : \begin{cases} \text{Trouver } u_\eta : [0, T] \rightarrow V \text{ tel que :} \\ (\ddot{u}_\eta, v - \dot{u}_\eta)_H + a(u_\eta, v - \dot{u}_\eta) + \eta b(\dot{u}_\eta, v - \dot{u}_\eta) + j(\dot{u}_\eta, v) - j(\dot{u}_\eta, \dot{u}_\eta) \geq (F, v - \dot{u}_\eta)_V, \forall v \in V \\ u_\eta(0) = u_0, \dot{u}_\eta(0) = u_1 \end{cases}$$

On sait d'après le théorème 3.1, que pour tout $\eta > 0$, (P_η) possède au moins une solution u_η vérifiant la régularité :

$$u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; V); \ddot{u}_\eta \in L^\infty(0, T; H) \quad (\text{II.3.49})$$

En utilisant la régularité (II.3.49) on vérifie aisément que $\lim_{\eta \rightarrow 0} u_\eta = u$ est une solution du problème (P) .

Remarque 3.2 De la même façon, on démontre que la solution du problème élasto-dynamique vertical (I.2.51)-(I.2.56) est une limite, lorsque $\eta \rightarrow 0$, de la solution du problème viscoélastique (II.2.57)-(II.2.62).

Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

L'étude dans cette thèse concerne essentiellement les deux points suivants :

- La modélisation des problèmes de contact avec frottement à coefficient variable.
- L'analyse mathématique des problèmes de contact avec frottement à coefficient variable.

Modélisation des problèmes :

Nous avons introduit le cadre physique et le modèle mathématique concernant les problèmes horizontaux et verticaux de contact avec frottement à coefficient variable. En effet, nous avons considéré des lois de comportement linéaires pour des matériaux élastiques et viscoélastiques. Diverses lois de frottement sont envisagées, elles sont définies par la loi de Tresca ou de Coulomb. Nous avons formulé différents problèmes dans les processus quasi-statique et dynamique des matériaux élastique et viscoélastique.

Analyse mathématique :

Nous avons considéré trois problèmes de contact avec frottement à coefficient dépendant de la vitesse de glissement dans les contextes horizontal et vertical. Notre contribution dans ce travail est d'analyser la question d'existence et d'unicité, en se basant sur la méthode de différences finis avec des schémas implicites d'Euler et de Newmark ce qui nous permet d'obtenir une suite de problèmes des inéquations quasi-variationnelles elliptiques. L'analyse spectrale et l'analyse convexe, nous permettent d'avoir un résultat d'équivalence entre le problème elliptique et un problème de minimisation non linéaire sans contrainte. L'interpolation de la solution discrète, ainsi que l'utilisation de la méthode de compacité et les techniques de Faedo-Galerkin, nous permettent d'analyser l'existence d'une solution faible.

Comme perspectives, nous avons prévu les deux problématiques suivantes :

- Pour des extensions envisageables de cette thèse sur le plan mathématique, il est clair que la non-unicité de la solution élastique pour un problème horizontal ou problème vertical constitue une étude très importante à réaliser. Par ailleurs, le rôle de la viscosité demande une considération plus approfondie : Peut-on considérer le problème élastique comme une limite d'une suite de problèmes viscoélastique dans le cas générale?
- D'autre part, sur le plan numérique, le développement des méthodes numériques par un couplage entre les méthodes des éléments finis, des différences finis et de la décomposition du domaine feront l'objet d'une étude ultérieure qui permet de proposer des algorithmes performants pour la résolution numérique des problèmes de contact avec frottement à coefficient variable.

Annexe

Annexe

1.1 Quelques résultats élémentaires

Dans ce paragraphe nous décrivons le cadre fonctionnel dans lequel on travaille dans la deuxième partie de cette thèse. On désigne par V un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ ainsi de la norme associée $\|\cdot\|_V$. On note aussi par V' l'espace dual de V muni par la norme $\|\cdot\|_{V'}$ et par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$ le produit de dualité entre V' et V .

Théorème A.1 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)

Pour toute fonction $\varphi \in V'$, il existe $f \in V$ unique tel que

$$\langle \varphi, v \rangle_{V' \times V} = (v, f)_V \quad \forall v \in V \quad (1)$$

En outre, on a :

$$\|\varphi\|_{V'} = \|f\|_V \quad (2)$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur V peut se représenter d'une manière unique à l'aide du produit scalaire.

Définition A.2 On dit que la suite $(u_n) \subset V$ converge faiblement vers $u \in V$ et on note $u_n \rightharpoonup u$ si

$$(u_n, v)_V \rightarrow (u, v)_V, \quad \forall v \in V \quad (3)$$

Dans ce cas, u s'appelle limite faible de la suite (u_n) .

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz, il résulte que si (u_n) converge fortement vers u dans V , alors la suite (u_n) converge faiblement vers u dans V . La réciproque n'est pas toujours vraie.

De plus, puisque tout espace de Hilbert est réflexif, nous avons le résultat suivant:

Théorème A.3 Soit (u_n) une suite bornée dans V . Il existe alors un élément $u \in V$ et une sous suite de (u_n) notée encore (u_n) telle que $u_n \rightharpoonup u$.

1.2 Optimisation sans contrainte

Définition A.4 Nous considérons la fonctionnelle Φ définie par :

$$\Phi : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

1) On dit que Φ est coercive si pour toute suite (v_n) de V , nous avons:

$$\|v_n\|_V \rightarrow +\infty \Rightarrow \Phi(v_n) \rightarrow +\infty$$

2) On dit que Φ est faiblement semi-continue inférieurement si et seulement si le sous-ensemble de V donné par:

$$C(\lambda) = \{v \in V / \Phi(v) \geq \lambda\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ est faiblement fermé}$$

Définition A.5 Soit $\varphi : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction. La fonction φ est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est-à-dire, s'il existe $v \in V$ tel que $\varphi(v) < +\infty$.

Théorème A.6: Soit V un espace de Hilbert de norme $\|\cdot\|_V$ et $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle propre. On suppose que Φ est coercive et faiblement semi-continue inférieurement. Alors, Φ atteint son minimum global i.e. :

$$\exists u \in V, \Phi(u) = \underset{v \in V}{\text{Min}} \Phi(v)$$

1.3 Fonctions convexes

Nous présentons dans ce paragraphe, quelques rappels sur les fonctions convexes, ensuite nous donnons une généralisation de la notion du gradient pour les fonctions convexes.

Définition A.7 La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi((1-\theta)u + \theta v) \leq (1-\theta)\varphi(u) + \theta\varphi(v) \quad \forall u, v \in V, \theta \in]0, 1[\quad (4)$$

La fonction φ est dite strictement convexe si

$$\varphi((1-\theta)u + \theta v) < (1-\theta)\varphi(u) + \theta\varphi(v) \quad \forall u, v \in V, u \neq v, \theta \in]0, 1[\quad (5)$$

La fonction φ est dite fortement convexe (α -convexe) s'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\theta \in]0, 1[$:

$$\varphi((1-\theta)u + \theta v) < (1-\theta)\varphi(u) + \theta\varphi(v) - \frac{\alpha\theta(1-\theta)}{2} \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V \quad (6)$$

Définition A.8 Une fonction $\varphi : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite Gâteaux différentiable au point $u \in V$, s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in V$ tel que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + \theta v) - \varphi(u)}{\theta} = (\nabla\varphi(u), v)_V \quad \forall v \in V \quad (7)$$

L'élément $\nabla\varphi(u)$ s'appelle le gradient de φ en u .

La fonction φ est dite Gâteaux différentiable sur V si elle est Gâteaux différentiable en tout point de V .

Théorème A.9 Soit $\varphi : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction Gâteaux différentiable. Les assertions suivantes sont équivalentes

$$\varphi \text{ est convexe sur } V \quad (8)$$

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v - u)_V \quad \forall u, v \in V \quad (9)$$

$$(\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(v), u - v)_V \geq 0 \quad \forall u, v \in V \quad (10)$$

Théorème A.10 Soit $\varphi : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction Gâteaux différentiable et $\alpha > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes

$$\varphi \text{ est } \alpha\text{-convexe sur } V \quad (11)$$

$$\varphi(v) \geq \varphi(u) + (\nabla\varphi(u), v - u)_V + \frac{\alpha}{2} \|v - u\|_V^2 \quad \forall u, v \in V \quad (12)$$

$$(\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(v), u - v)_V \geq \alpha \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V \quad (13)$$

Lemme A.11 (Inégalité de Gronwall) Soient f, g deux fonction positive de classe $C([a, b])$ et telles que

$$f(t) \leq g(t) + c \int_a^t f(s) ds \quad \forall t \in [a, b] \quad (14)$$

où c est une constante positive. Alors nous avons :

$$f(t) \leq g(t) + c \int_a^t g(s) e^{c(t-s)} ds \quad \forall t \in [a, b] \quad (15)$$

De plus, si la fonction g est croissante, alors nous avons :

$$f(t) \leq g(t) e^{c(t-a)} \quad \forall t \in [a, b] \quad (16)$$

Lemme A.12 (Gagliardo-Nirenberg)

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-a} \|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}^a \quad \forall u \in W^{1,N}(\Omega) \text{ avec } a = 1 - \frac{q}{p}.$$

Notons le cas particulier de cette inégalité, qui est utilisé dans la thèse :

Corollaire A.13 Pour $\Omega \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

Corollaire A.14 Pour $\Omega \in \mathbb{R}^2$ et tout $u \in H^1(\Omega)$ on a

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Lemme A.15 Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ telle que (\dot{f}_n) est aussi dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$; soit f une fonction de $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ telle que \dot{f} est dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$, f est la limite faible de la suite (f_n) dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et \dot{f} la limite faible de la suite (\dot{f}_n) dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Alors, nous avons les convergences faibles ponctuelles suivantes:

$$f_n(0) \rightarrow f(0) \text{ dans } H^1(\Omega),$$

$$f_n(T) \rightarrow f(T) \text{ dans } H^1(\Omega).$$

1.4 Inéquations variationnelles elliptiques

Dans cette section, nous présentons une classe des inéquations variationnelles elliptiques dont laquelle notre étude est fondée sur un résumé des résultats d'existence et d'unicité de la solution de ce genre de problèmes.

Soit $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, $j: V \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonctionnelle et $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nous considérons le problème suivant :

Problème (P_1) : Trouver $u \in V$ tel que

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in V \quad (17)$$

Une inéquation variationnelle sous la forme (17) est appelée inéquation variationnelle elliptique de deuxième espèce.

Hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une forme bilinéaire et} \\ (a) \text{ Il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \\ (b) \text{ Il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ a(v, v) \geq m \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (18)$$

$$j : V \rightarrow]-\infty, +\infty] \text{ est une fonctionnelle convexe, propre et s.c.i} \quad (19)$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème A.16 Sous les hypothèses (18) et (19), le problème (P_1) possède une solution unique $x \in V$. De plus, l'application $f \mapsto v$ est de Lipschitz.

1.5 Inéquations quasi-variationnelles elliptiques

Nous rappelons par la suite quelques résultats sur les inéquations variationnelles elliptiques, dans lesquelles la fonctionnelle j dépend de la solution.

Pour tout $f \in V$, nous considérons le problème suivant :

Problème (P_2) : Trouver $u \in V$ tel que

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V \quad \forall v \in V \quad (20)$$

Nous supposons que j satisfait les hypothèses suivantes :

Hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} j : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ et} \\ (a) \forall \eta \in V, j(\eta, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i sur } V \\ (b) \exists \alpha \geq 0 \text{ tel que} \\ j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \leq \\ \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in V \end{array} \right. \quad (21)$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème A.17 Sous les hypothèses (18 et (21), alors, si $m < \alpha$, le problème (P_2) possède une solution unique.

1.6 Inéquations variationnelles d'évolution

Dans cette section nous allons présenter une description détaillée sur les inéquations variationnelles d'évolution. La différence que l'on doit signaler ici consiste dans la présence de la dérivée de l'inconnue dans la formulation du problème ce qui rajoute aussi une condition initiale.

Nous considérons le problème suivant :

Problème (P_3) Trouver $u : [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (f, v - \dot{u}(t))_V \quad (22)$$

$$\forall v \in V, p.p. t \in [0, T]$$

$$u(0) = u_0 \quad (23)$$

Remarquons que (22) représente une inéquation variationnelle d'évolution car cette inégalité contient la dérivée de l'inconnue u . Par conséquent, la condition initiale (23) est nécessaire.

Dans l'étude du problème (P_3), nous considérons les hypothèses suivantes :

Hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une forme bilinéaire et vérifie} \\ \text{Il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une forme bilinéaire symétrique et vérifie} \\ \text{(a) Il existe } M' > 0 \text{ tel que} \\ |b(u, v)| \leq M' \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V \\ \text{(b) Il existe } m' > 0 \text{ tel que} \\ |b(v, v)| \geq m' \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (25)$$

$$\text{La fonctionnelle } j : V \rightarrow]-\infty, +\infty] \text{ est convexe, propre et s.c.i} \quad (26)$$

$$f \in W^{1, \infty}([0, T]; V) \quad (27)$$

$$u_0 \in V \quad (28)$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème A.18 Sous les hypothèses (24)-(28), le problème (P_3) possède une unique solution $u \in W^{1, \infty}([0, T]; V)$.

Nous considérons le cas $b(\cdot, \cdot) = 0$. Donc, le problème (P_3) devient:

Problème (P_4) Trouver $u : [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(v) - j(\dot{u}(t)) \geq (f, v - \dot{u}(t))_V, \forall v \in V, p.p. t \in [0, T] \quad (29)$$

$$u(0) = u_0 \quad (30)$$

Pour étudier ce problème nous faisons appel aux hypothèses suivantes:

Hypothèses :

$$\begin{cases} a: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une forme bilinéaire symétrique et vérifie} \\ (a) \text{ Il existe } M > 0 \text{ tel que } |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V \\ (b) \text{ Il existe } m > 0 \text{ tel que } |a(v, v)| \geq m \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (31)$$

$$\text{La fonctionnelle } j: V \rightarrow]-\infty, +\infty] \text{ est convexe, propre et s.c.i} \quad (32)$$

$$f \in W^{1, \infty}([0, T]; V) \quad (33)$$

$$u_0 \in V \quad (34)$$

$$a(u_0, v) + j(v) \geq (f(0), v)_V, \quad \forall v \in V \quad (35)$$

Théorème A.19 Sous les hypothèses (31)-(35), il existe une solution unique pour le problème (P_4) ayant la régularité $u \in W^{1, \infty}(0, T; V)$.

1.7 Inéquations quasi-variationnelles d'évolution avec viscosité

Dans cette section, nous étudions une inéquation quasi-variationnelle d'évolution avec viscosité, c'est-à-dire la fonctionnelle $j(\cdot, \cdot)$ dépend explicitement de la solution u ou de sa dérivée \dot{u} .

Soit $b(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire sur $V \times V$ et u_0 une donnée initiale.

Nous considérons le problème suivant

Problème (P_5) Trouver $u: [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f, v - \dot{u}(t))_V, \quad \forall v \in V, t \in [0, T] \quad (36)$$

$$u(0) = u_0 \quad (37)$$

Alternativement, nous considérons le second problème ou la fonctionnelle

$j: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est dépend uniquement de \dot{u} par :

Problème (P_6) Trouver $u: [0, T] \rightarrow V$ tel que

$$a(u(t), v - \dot{u}(t)) + b(\dot{u}(t), v - \dot{u}(t)) + j(\dot{u}(t), v) - j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \geq (f, v - \dot{u}(t))_V, \quad \forall v \in V, t \in [0, T] \quad (38)$$

$$u(0) = u_0 \quad (39)$$

Pour étudier ces problèmes nous faisons appel aux hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une forme bilinéaire symétrique et vérifie} \\ (a) \text{ Il existe } M > 0 \text{ tel que } |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V \\ (b) \text{ Il existe } m > 0 \text{ tel que } |a(v, v)| \geq m \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une forme bilinéaire symétrique et vérifie} \\ (a) \text{ Il existe } M' > 0 \text{ tel que } |b(u, v)| \leq M' \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V \\ (b) \text{ Il existe } m' > 0 \text{ tel que } |b(v, v)| \geq m' \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La fonctionnelle } j : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe, propre et s.c.i;} \\ (a) \forall \eta \in V, j(\eta, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i sur } V \\ (b) \exists \alpha \geq 0 \text{ telle que } j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \leq \\ \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V \end{array} \right. \quad (42)$$

$$f \in C^1([0, T]; V) \quad (43)$$

$$u_0 \in V \quad (44)$$

Nous avons le résultat suivant:

Théorème A.20 Nous supposons que (40)-(44) sont satisfaites. Alors :

- (1) Il existe une solution unique $u \in C^1([0, T]; V)$ des problèmes (P_5) et (P_6) ,
- (2) Si, de plus $m' > \alpha$, il existe une solution unique $u \in C^2([0, T]; V)$ de (P_5) et (P_6) .

1.8 Méthodes numériques

• Méthode d'Euler:

Soit le système de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}(t) = F(t, X(t)) \\ X(0) = d_0 \end{array} \right. \quad (45)$$

Où $F : \mathbb{R}_+ \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et de Lipschitz telle que $d_0 \in V$.

La résolution numérique du système (45) en se basant sur le schéma implicite d'Euler suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{n+1} = X_n + \Delta t \dot{X}_{n+1} \\ X_0 = d_0 \end{array} \right. \quad (46)$$

• Méthode de Newmark

Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F \\ X(0) = X_0 \text{ et } \dot{X}(0) = X_1 \end{cases} \quad (47)$$

Où

$$\begin{cases} M : \text{Matrice de masse;} \\ C : \text{Matrice d'amortissement;} \\ K : \text{Matrice de raideur;} \\ F : \text{Vecteur représente les forces extérieures;} \\ X : \text{Déplacement.} \end{cases}$$

La résolution numérique du système (47) en se basant sur le schéma implicite de Newmark suivant :

$$M\ddot{X}_{n+1} + C\dot{X}_{n+1} + KX_{n+1} = F_{n+1} \quad (48)$$

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + \Delta t \cdot \dot{X}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} [(1-2\beta) \cdot \ddot{X}_n + 2\beta \cdot \ddot{X}_{n+1}] \\ \dot{X}_{n+1} = \dot{X}_n + \Delta t [(1-\alpha) \cdot \ddot{X}_n + \alpha \cdot \ddot{X}_{n+1}] \end{cases} \quad (49)$$

Où X_n, \dot{X}_n et \ddot{X}_n sont les approximations respectives de $X(t), \dot{X}(t)$ et $\ddot{X}(t)$, de même que X_{n+1}, \dot{X}_{n+1} et \ddot{X}_{n+1} au temps $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Dans le cas particulier $\beta = \frac{1}{4}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, nous avons une accélération moyenne constante et une meilleure stabilité.

Dans ce cas, le schéma (49) devient:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + \Delta t \cdot \dot{X}_n + \frac{(\Delta t)^2}{4} [\ddot{X}_n + \ddot{X}_{n+1}] \\ \dot{X}_{n+1} = \dot{X}_n + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{X}_n + \ddot{X}_{n+1}] \end{cases} \quad (50)$$

Et par conséquent, de (50), nous avons:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + \Delta t \cdot \dot{X}_n + \frac{\Delta t}{2} [\dot{X}_{n+1} - \dot{X}_n] \\ \ddot{X}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} [\dot{X}_{n+1} - \dot{X}_n] - \ddot{X}_n \end{cases} \quad (51)$$

Bibliographie

- [1] N. Bay, T. Wanheim. Real area of contact and friction stresses at high pressure sliding contact. *Wear* 38,(1976), p.p. 107-116.
- [2] R. Bell, M. Burdekin. A study of the stick-slip motion of machine tool feed drivers. *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 184 N° 1: (1970), p.p. 543-557.
- [3] P. A. Bliman, A.M. Krasnosel'skii, M. Sorine, A.A. Vladimirov. Nonlinear resonance in systems with hysteresis. *Nonlinear Analysis, Methods & Applications*, 27 N° 5: (1996), p.p. 561-577.
- [4] F. P. Bowden, D. Tabor. *The friction and Lubrication of solids, Part II.* Clarendon Press, Oxford, (1964).
- [5] N. Brahim., B. Benyattou. Elasto-dynamic problem with friction depending on the speed of the slip. *Anal. Univ. Oradea, fasc. Math. Tom XV*(2008), p.p.11-22.
- [6] N. Brahim., B. Benyattou. Newmark method applied to the elasto-dynamic problem with slip-rate dependent friction, *Journal of concrete and applicable mathematics*, Vol. 7, NO.1, (2009), p.p.70-81.
- [7] M. Burdekin, A. Cowley, N. Back. An elastic mechanism for the micro-sliding characteristics between contacting machined surfaces. *J. Mech. Engng. Sci.*, N° 3: (1978) p.p. 121-227.
- [8] G. Capone, V. D'Agostino, S. Della Valle, D. Guida. Stick –Slip instability analysis. *Meccanica*, N° 27: (1.992), p.p. 111-118.
- [9] J. H. Dieterich. Modeling of rock friction, Part I. *J. Geophys. Res.*, 84 N° B5: (1979), p.p. 2161-2168.
- [10] G. Duvaut, J. L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, (1972).
- [11] L. Euler. *Histoire de l'Académie Royale à Berlin IV* (page 313), (1748).
- [12] P. Favreau, I. R. Ionescu, M. Campillo. On the dynamic sliding with rate and state friction laws. *Geophysical Journal*, 139, (1999), p.p. 671-678.
- [13] U. Galvanetto, S. R. Bishop. Stick-Slip vibrations of a two degree of freedom geophysical fault model. *Int. J. Mech. Sci.*, 36 N° 8: (1994), p.p. 683-698.
- [14] J. C. Gu, J. R. Rice, A. L. Ruina, T. Tse. Slip motion and stability of single degree of freedom elastic system with rate and state dependent friction. *J. Mech. Phys. Solids*, 32 N° 3: (1984), p.p. 167-196.
- [15] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas, J. Lovíšek, *Solutions of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verlag, New York, (1988).

- [16] I. R. Ionescu, A. Touzani. Viscosity solutions for dynamical problems with slip rate dependent friction. *Quarterly of Mathematics*, LX: (2002) p.p.461 - 476.
- [17] I. R. Ionescu, J. C. Paumier. Friction dynamique avec coefficient dépendant de la vitesse de glissement. *C.R.Acad. Sci.*, N° 316 sérieI: (1993), p.p. 121-125.
- [18] I. R. Ionescu, J. C. Paumier. On the contact problem with slip rate dependent friction in elastodynamic. *Eur. J. Mech., A/Solids*, N° 4: (1994), p.p. 555-568.
- [19] I. V. Kragelskii. *Friction and wear*. Butterworths, Washingtons, DC, (1965).
- [20] J. A. C. Martins, J. T. Oden, F. M. F. Simoes. A study of static and kinetic friction. *Int. J. Engng. Sci*, 28 N° 1: (1990), p.p. 29-92.
- [21] D. Mohamed. Etude des problèmes parabolique a données manquantes, Thèse de Doctorat, Université de Mentouri, Constantine, (2008).
- [22] D. F. Moore. *Principles and applications of tribology*. Pergamon press, Oxford, (1975).
- [23] J. T. Oden, J. A. C. Martins. Models and computational for dynamic friction phenomana. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, N° 52: (1985), p.p. 527-634.
- [24] M. Ohnaka. Non uniformity of the constitute law parameters for shear rupture and quasistatic nucleation to dynamic rupture: A physical model of earthquake generation model. In *Earthquake Prediction: The scientific Challenge*, Irvine, Calif., (1996). U. S. Acad. Of Sci.
- [25] M. Ohnaka, Y. Kuwahara, K. Yamamoto. Constitutive relations between dynamic physical parameters near a tip of the propagation slip during stick-slip shear failure. *Tectonophysics*, N° 144: (1987), p.p. 109-125.
- [26] E. Rabinowicz. The nature of the static and kinetic coefficients of friction. *J. Appl. Phys.*, 22 N° 11, (1951), p.p. 1373-1379.
- [27] E. Rabinowicz. The intrinsic variables affecting the stick-slip process. *Proceedings of the Royal Physic Society*, N° 71: (1985), p.p. 668-675.
- [28] E. Rabinowicz. *Friction and wear of Materials*. Wiley, New York, (1965).
- [29] Y. Renard. Dynamic dry friction with a slip velocity dependent coefficient. *Proceedings of the 3rd Summer Conference on Numerical Modeling in Continuum Mechanics*, Prague, Part II: (1997), p.p. 426-433.
- [30] Y. Renard. Modélisation des instabilités liées au frottement sec des solides élastiques, aspects théoriques et numériques. PhD Thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble I,

- (1998).
- [31] Y. Renard. Perturbation singulière d'un problème de frottement sec non monotone. C. R. Acad. Sci. Paris, N° 326, Série I: (1998), p.p. 131-136.
- [32] A. Ruina. Slip instability and state variable friction laws. J. Geoph. Res., 88 N° B12: (1983), p.p. 10359-10370.
- [33] A. Ruina. Friction laws and instabilities: A quasistatic analysis of some dry frictional behavior. PhD thesis, Brown University, Providence, RI, (1980).
- [34] J. B. Sampson, F. Morgan, D. W. Reed, M. Muskat. Friction behavior during the slip portion of the stick-slip process. J. Appl. Phys., N° 14: (1943), p.p. 689-700.
- [35] D.M. Tolstoi. Significance of the normal degree of freedom and natural vibrations in contact with friction. Wear, N° 10: (1967), p.p. 199-213.
- [36] A. Touzaline. A quasistatic unilateral contact problem with slip dependent coefficient of friction for nonlinear elastic materials. Electronic Journal of Differential Equations, N°144, (2006), p.p. 1-14.



العنوان : دراسة نظرية وعددية لظواهر اهتزازية خاضعة لاحتكاك جاف لمواد صلبة قابلة للتشوه.

ملخص. اهتمنا في هذه الرسالة بثلاثة مسائل مختلفة ذات الاحتكاك المتعلق بسرعة الانزلاق لمواد مرنة ومواد لزجة. مساهمتنا في هذا العمل تتمثل في تحليل مسألة الوجود والوحدانية. استعملنا طريقة الفروق المنتهية ذات الصيغ الضمنية لأولر و نيومارك فإن المسائل الشبه الساكنة و الديناميكية للمواد المرنة تحولت إلى متتالية من المسائل المتقطعة للمتراجحات التغيرية. استخدمنا وسائل رياضية في التحليل الطيفي والتحليل المحدب أدت إلى إثبات وحدانية الحل المتقطع وعلى المستوى الرياضي فإن مسألة اللزوجة هي الأكثر اكتمالا من حيث نتيجة الوجود والوحدانية بالنسبة للمسائل الأفقية والعمودية وفي النهاية برهنا عند انعدام اللزوجة أن المسألة تتحول إلى مسألة مواد مرنة.

كلمات البحث: احتكاك، اتصال، أفقي، سرعة الانزلاق، صيغة ضمنية، لزوجة، متراجحة تغيرية، مرونة، عمودي.

Titre : Etude théorique et numérique des phénomènes vibratoires liés au frottement sec des solides déformables.

Résumé. Dans cette thèse, nous avons considéré trois problèmes de contact avec frottement à coefficient dépendant de la vitesse de glissement dans les contextes horizontal et vertical. Notre contribution dans ce travail est d'analyser la question d'existence et d'unicité, en se basant sur la méthode de différences finies avec des schémas implicites d'Euler et de Newmark ce qui nous permet d'obtenir une suite de problèmes des inéquations quasi-variationnelles elliptiques. L'analyse spectrale et l'analyse convexe, nous permettent d'avoir un résultat d'équivalence entre le problème elliptique et un problème de minimisation non linéaire sans contrainte. L'interpolation de la solution discrète, ainsi que l'utilisation de la méthode de compacité et les techniques de Faedo-Galerkin, nous permettent d'analyser l'existence d'une solution faible.

Mots-clés: Contact, Elasticité, Frottement, Horizontal, Inéquation variationnelle, Schéma implicite, Vertical, Viscoélasticité, Vitesse de glissement.

Title: Theoretical and numerical study of vibration phenomena associated with dry friction of deformable solids.

Abstract. In this thesis, we considered three problems of contact with friction coefficient depending on sliding velocity in the horizontal and vertical contexts. Our contribution in this work is to analyze the existence and uniqueness based on the finite difference method with an implicit scheme of Euler and Newmark which allows us to obtain a series of inequalities quasi-variational elliptic problems. Spectral analysis and convex analysis, we permit to have a result of equivalence between elliptic problem and a nonlinear minimization problem without constraint. The interpolation of the discrete solution and using the method of compactness and Faedo-Galerkin techniques, allow us to analyze the existence of a weak solution.

Keywords: Contact, Elasticity, Friction, Horizontal, Implicit scheme, Sliding velocity, Variational inequality, Vertical, Viscoelasticity.