République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de BATNA

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

Présenté Pour l'Obtention du Diplôme de Magister en Mathématiques

Option: Analyse Fonctionnelle

Thème:

Rôle des projections dans la théorie des inverses généralisés

Présenté Par: KARA Abdessalam

D.E.S en Mathématiques de l'Université de Batna

Soutenu publiquement le: 02/10/2012…….. devant le **jury** composé de:

NOUI Lemnouar	Prof	Université de Batna	Président
GUEDJIBA Said	Prof.	Université de Batna	Rapporteur
AYADI…Abdelhaid	Prof	Université d'Oum el Bouaghi	Examinateur
BENACER Rachid	Prof.	Université de Batna	Examinateur

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à:

- *Mes chers parents;*
- *Mes frères et mes sœurs;*
- *Mon encadreur Said;*
- *Tous mes amis surtout: Mohamed, Adel, Samir, , Noureddine Hakim et Hicham et kamel;*
- *Mes collègues des mathématiques;*
- *Tous les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.*

Remerciement

Au terme de ce travail, je voudrais exprimer mes sincères remerciements à Monsieur GUEDJIBA Said professeur au département de mathématiques de l'Université de Batna d'avoir accepter d'être le rapporteur de ce mémoire, pour ses précieux conseils et encouragements tout au long de ce travail.

Mes remerciements vont vivement à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je remercie également tous les enseignants des département de mathématiques de l'universités de Batna et d'Oum el bouaghi qui ont participé à ma formation pendant tout le cycle universitaire.

Sans oublier les membres du jury qui ont bien voulu examiné ce travail.

Sommaire

Notations:

$\mathcal{R}(A) := \{ \omega \in \mathrm{W};\ \omega = A(\mathrm{v}) \ , \mathrm{v} \in \mathrm{V} \}$.

$A_{/\mathrm{T}} :=$ La restriction de A au sous espace vectoriel T.

$\mathcal{N}(A) := \{\mathrm{v} \in \mathrm{V}\,, A(\mathrm{v}) = 0_{\mathrm{V}}\ \}$.

$\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2 := \{\ \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2\ ;\ \mathrm{v}_1 \in \mathrm{V}_1\,, \mathrm{v}_2 \in \mathrm{V}_2\}$.

$\mathrm{V}_1 \dot{+} \mathrm{V}_2 :=$ La somme directe de deux espaces vectoriel.

I :=L'application identitéque .

$\mathcal{I}(A) \coloneqq \{\mathcal{B}; A\mathcal{B}A = A, \mathcal{B}$ linéaire$\}$.

$\theta(A) \coloneqq \{\mathcal{B}; \mathcal{B}A\mathcal{B} = \mathcal{B}, \mathcal{B}$ linéaire$\}$.

$\mathrm{T}_{\mathcal{N}(A)} \coloneqq \{\mathrm{T}; \mathrm{T}$ un supplémentaire de $\mathcal{N}(A)$ dans $\mathrm{V}\}$.

$\mathrm{S}_{\mathcal{R}(A)} \coloneqq \{\mathrm{S}; \mathrm{S}$ un supplémentaire de $\mathcal{R}(A)$ dans $\mathrm{W}\}$.

$\mathrm{P}_{(\mathcal{N}(A))} \coloneqq \{\mathrm{P}; \mathrm{P}^2 = \mathrm{P};\ \mathcal{R}(\mathrm{P}) = \mathcal{N}(A)\ \}$.

$\mathrm{Q}_{(\mathcal{R}(A))} \coloneqq \{\mathrm{Q}; \mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q};\ \mathcal{R}(\mathrm{Q}) = \mathcal{R}(A)\}$.

$\mathcal{L}(\mathrm{V};\mathrm{W}) :=$ Espace vectoriel topologique des opérateurs linéaires continus.

$\mathrm{P}_{\mathcal{R}(A)} \coloneqq \{\mathrm{P}; \mathrm{P}^2 = \mathrm{P}, \mathcal{R}(\mathrm{P}) = \mathcal{R}(A)$ et $\mathrm{P}^* = \mathrm{P}\ \}$.

Span $\mathcal{A} := \{\sum_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \beta_{\mathrm{i}} \mathrm{x}_{\mathrm{i}}\ ;\ \ \mathrm{x}_{\mathrm{i}} \in \mathcal{A}, \beta_{\mathrm{i}} \in \mathbb{K}\}$

P_{L} Est un projecteur orthogonal où $\mathcal{R}(\mathrm{P}) = \mathrm{L}$.

$\mathrm{P}_{\mathrm{L,T}}$ Est un projecteur tels que $\mathrm{P} \in \mathcal{L}(\mathrm{V};\mathrm{W})$, $\mathcal{R}(\mathrm{P}) = \mathrm{L}$ et $\mathcal{N}(A) = \mathrm{T}$.

$\mathbb{k} \coloneqq$ Le corps des nombres réels ou complexes.

A^* La matrice adjoint de A.

$\underline{A}$ L'application linéaire accessit de la matrice A

$\mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{k})$ l'espace des matrices $m \times n$ sur $\mathbb{k}$

$\mathrm{A}\{1\} \coloneqq \{\mathrm{A}\mathcal{B}\mathrm{A} = \mathrm{A};\ A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{k})$ et $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{n,m}(\mathbb{k})\}$

$\mathrm{A}\{2\} \coloneqq \{\mathcal{B}\mathrm{A}\mathcal{B} = \mathcal{B};\ A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{k})$ et $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{n,m}(\mathbb{k})\}$

$\mathrm{A}\{1{,}2\} \coloneqq \{\mathrm{A}\mathcal{B}\mathrm{A} = \mathrm{A}$ et $\mathcal{B}\mathrm{A}\mathcal{B} = \mathcal{B};\ A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{k})$ et $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{n,m}(\mathbb{k})\}$

$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = 0 \Leftrightarrow \mathrm{XY} - \mathrm{YX} = 0$

$A^{\pi} \coloneqq$ Est un projecteur orthogonal sur $\mathcal{N}(A)$

Introduction générale

La notion d'inversibilité est une notion très importante dans tous les domaines de mathématiques. L'équation $Ax = y$ possède une solution unique lorsque l'opérateur linéaire A est inversible, malheureusement, on ne se trouve pas toujours dans ce cas, en pratique, on obtient souvent des données sous forme d'une matrice rectangulaire qui est un opérateur non inversible, ou bien dans le cas général on se trouve avec un opérateur non surjectif ou non injectif, ou d'inverse non borné. Dan ce cas on essaie de trouver un opérateur qui possède le maximum de propriété que possède l'inverse s'il existait, un tel opérateur sera appelé un inverse généralisé de A.

Pour un opérateur A on peut définir différents types d'inverses généralisés, qui, malgré leurs différences, possèdent tous des propriétés communes, notamment leurs relations avec les projections.

Dans ce travail, on contente d'exposer différents types d'inverses généralisés, en basant d'une manière essentielle, sur leurs liens avec les projecteurs en question.

Ce travail est constitué de quatre chapitres, le premier est une simple introduction à la notion de l'inverse généralisé, avec des propriétés élémentaires, le deuxième chapitre expose les propretés minimales des inverses généralisés dans un espace euclidien ou hilbertien dans un cas plus général, où le rôle des projecteurs est bien visible.

Dans le troisième chapitre on traite la notion d'inverse généralisé noté $A_{\mathrm{T,S}}^{(2)}$

C'est-à-dire lié à un projecteur à image et noyau prédéterminés.

Le quatrième chapitre est consacré aux inverses généralisés aux projecteurs égaux, notés EP inverses, l'étude est faite sur des espaces euclidiens de dimension finie, ou bien sur des espaces de Hilbert.

Chapitre 1:

Les inverses

Généralisés

Chapitre 1: les inverses généralisés

Introduction

Soient V et W deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{k}$ et A un opérateur linéaire défini de V dans W.

Au début de ce chapitre nous définissons l'inverse généralisé $\mathcal{B}$ de A, qui est la solution au système suivant:

$$\begin{cases} A\mathcal{B}A = A \\ \mathcal{B}A\mathcal{B} = \mathcal{B} \end{cases} \text{........(++)}$$

Où: $\mathcal{B}$ est un opérateur linéaire défini de W dans V .

Remarquons que le système précédent admet plusieurs solutions, ce qui a conduit à la définition de l'inverse généralisé $A^{\#}_{\mathrm{P},Q}$ unique de A , qui est la solution du système suivant:

$$(1) \begin{cases} \mathcal{B}A\mathcal{B} = \mathcal{B} \\ A\mathcal{B}A = A \\ A\mathcal{B} = Q \\ \mathcal{B}A = I - \mathrm{P} \end{cases}$$

Tels que P et Q des projecteurs sur $\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{R}(A)$ respectivement.

1-1 Préliminaires

1-1-1 Définition: Soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels de V ; on dit que V_1 et V_2 sont supplémentaires si $\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2 = \{0_\mathrm{V}\}$ et $\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2 = \mathrm{V}$.

De façon équivalente: tout vecteur $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$ s'écrit de manière unique $\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 = \mathrm{v}$

Où $\mathrm{v}_1 \in \mathrm{V}_1$ et $\mathrm{v}_2 \in \mathrm{V}_2$. V est alors somme directe de V_1 et V_2 , noté par $\mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2 = \mathrm{V}$.

1-1-2 Proposition: Tout sous espace vectoriel possède un supplémentaire.

1-1-3 Définition : On appelle opérateur linéaire $A: V \rightarrow W$, toute application telle que

$\forall\ v_1, v_2 \in V$, $A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2$ et $\forall\ v \in V$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{k}$, on ait $A(\alpha v) = \alpha A v$.

Soit P un opérateur linéaire défini de V dans lui même.

1-1-4 Définition: On dit que P est un projecteur si $P^2 = P$.

1-1-5 Proposition: tout projecteur P décompose V en somme directe de deux sous espaces V_1 et V_2 Tels que:

$$V_1 \oplus V_2 = V, \text{ Où } V_1 = \mathcal{N}(P) \text{ et } V_2 = \mathcal{R}(P).$$

1-1-6 Proposition: toute somme directe détermine un projecteur P.

Preuve:

Soit $V_1 \oplus V_2 = V$, quel que soit $v \in V$ il existe (v_1, v_2) Unique tel que $v_1 + v_2 = v$,

on définie P par $P(v_1 + v_2) = v_1$. Alors P est linéaire et $P = P^2$.

1-1-7 Proposition: Soit $P : V \longrightarrow V$ un opérateur linéaire, alors les assertions suivantes sont équivalentes:

a) $P = P^2$

b) $P(v) = v$; $\forall\ v \in \mathcal{R}(P)$

c) $\mathcal{R}(I - P) = \mathcal{N}(P)$

d) $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P)$

e) $V = \mathcal{R}(I - P) \oplus \mathcal{R}(P)$

1-2 Inverse intérieur

1-2-1 Définition: Soit $\mathcal{B}: W \longrightarrow V$ un opérateur linéaire, on dit que $\mathcal{B}$ est un inverse intérieur de A, si $A\mathcal{B}A = A$.

1-2-2 Proposition: Soit $\mathcal{B}$ un inverse intérieur de A, alors

a) $(A\mathcal{B})^2 = A\mathcal{B}$ et b) $(\mathcal{B}A)^2 = \mathcal{B}A$

c) $\mathcal{R}(A\mathcal{B}) = \mathcal{R}(A)$ et d) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(\mathcal{B}A)$

Preuve:

$a)$ $A\mathcal{B}A = A \Longrightarrow A\mathcal{B}A\mathcal{B} = A\mathcal{B} \Longrightarrow (A\mathcal{B})^2 = A\mathcal{B}$.

$b)$ $A\mathcal{B}A = A \Longrightarrow \mathcal{B}A\mathcal{B}A = \mathcal{B}A \Longrightarrow (\mathcal{B}A)^2 = \mathcal{B}A.$

$c)$ $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A\mathcal{B}A) \subset \mathcal{R}(A\mathcal{B}) \subset \mathcal{R}(A).$

d) $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(\mathcal{B}A) \subset \mathcal{N}(A\mathcal{B}A) = \mathcal{N}(A)$

1-2-3 Théorème : Tout opérateur linéaire admet un inverse intérieur linéaire.

Preuve:

Soit A est un opérateur linéaire défini de V dans W

On pose $V = \mathrm{T} \oplus \mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{R}(A) \oplus \mathrm{S} = W$ c'est-à-dire T est un Supplémentaire de $\mathcal{N}(A)$ dans V et S un supplémentaire de $\mathcal{R}(A)$ dans W, on considère

$A_{/\mathrm{T}} = \hat{A}$ $(i.e;\ \hat{A}: \mathrm{T} \longrightarrow \mathcal{R}(A))$, Alors $\hat{A}$ admet un inverse $\widehat{\mathcal{B}}: \mathcal{R}(A) \longrightarrow \mathrm{T}$, on définit

$\mathcal{B}$ sur W dans V par : $\mathcal{B}(v) = \widehat{\mathcal{B}}(v), \forall\, v \in \mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{B}(v) = 0$; $\forall\, v \in \mathrm{S}$.

Exemple:

Soit A est un opérateur linéaire de ℓ_2 dans lui mémé, définie par:

$$\mathrm{A}(x_1; x_2; ...) = (0; x_1; x_2; ...)$$

On définit l'opérateur $\mathcal{B}$ de ℓ_2 dans lui mémé par:

$$\mathcal{B}(x_1; x_2; ...) = (x_2; x_3; ...)$$

Donc,

$$\mathrm{A}\mathcal{B}\mathrm{A}(x_1; x_2; ...) = \mathrm{A}\mathcal{B}(0; x_1; x_2; ...) = \mathrm{A}(x_1; x_2; ...)$$

1-2-4 Remarque: On considère l'équation $Av = \omega$ tel que $v \in V$ et $\omega \in W$

Soit $\mathcal{B}$: $W \longrightarrow V$ un opérateur linéaire, alors $\mathcal{B}$ est un inverse intérieur de A si et seulement si $\mathcal{B}\omega$ est une solution de l'équation $Av = \omega$ pour tout ω appartenant à $\mathcal{R}(A)$.

1-2-5 Proposition: Soit $\mathcal{B}$ est un inverse intérieur de A, alors $(I - \mathcal{B}A)$ est un projecteur sur $\mathcal{N}(A)$.

Preuve:

$(I - \mathcal{B}A)^2 = I + \mathcal{B}A - 2\,\mathcal{B}A = I - \mathcal{B}A$

Et $(I - \mathcal{B}A)v = v - \mathcal{B}Av = v, \forall\, v \in \mathcal{N}(A)$; $(i.e; \mathcal{R}(I - \mathcal{B}A) = \mathcal{N}(A))$.

1-2-6 Proposition: Soit $\mathcal{B}: W \longrightarrow V$ est un inverse intérieur linéaire de A, alors

$V = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{B}A) \quad et \quad W = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A\mathcal{B})$.

1-2-7 Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) $\mathcal{B} \in \mathcal{J}(A)$.

b) $(A\mathcal{B})^2 = A\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}(A\mathcal{B}) = \mathcal{R}(A)$.

$c)$ $(\mathcal{B}A)^2 = \mathcal{B}A$ et $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(\mathcal{B}A)$.

d) $(\mathcal{B}A)^2 = \mathcal{B}A$ et $V = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{B}A)$.

e) $(A\mathcal{B})^2 = A\mathcal{B}$ et $W = \mathcal{N}(A\mathcal{B}) \oplus \mathcal{R}(A)$.

f) $(\mathcal{B}A)^2 = \mathcal{B}A$ et $\mathcal{N}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{R}(A) = \{0\}$.

Preuve:

a) $\Rightarrow b)$, on applique la proposition (1-2-2) ; nous trouvons $b)$

$b) \Rightarrow$ c), il est évident que $(A\mathcal{B})^2 = A\mathcal{B}$

Par (1-2-2) et (1-2-5) on a $\mathcal{R}(I - \mathcal{B}A) = \mathcal{N}(\mathcal{B}A) = \mathcal{N}(A)$

$c) \Rightarrow$ d), $V = \mathcal{N}(\mathcal{B}A) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{B}A) = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{B}A)$

$d) \Rightarrow$ e), Il est évident que $(A\mathcal{B})^2 = A\mathcal{B}$

$W = \mathcal{N}(A\mathcal{B}) \oplus \mathcal{R}(A\mathcal{B}) = \mathcal{N}(A\mathcal{B}) \oplus \mathcal{R}(A)$

$e) \Rightarrow$ f), il est évident que $(\mathcal{B}A)^2 = \mathcal{B}A$, On suppose $\omega \in \mathcal{N}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{R}(A)$ et $\omega \neq 0$

$\mathcal{B}\omega = 0 \Longrightarrow A\mathcal{B}\omega = 0$, on a donc contradiction parce que $\mathcal{N}(A\mathcal{B}) \cap \mathcal{R}(A) = \{0\}$.

Il est évident que f) implique $A\mathcal{B}A = A$.

1-2-8 Proposition: Soit $\mathcal{B}$ un inverse intérieur de A, on pose $\mathrm{P} = \mathrm{I} - \mathcal{B}A$ et $Q = A\mathcal{B}$

$\mathbb{Q}'$ et P' des projecteurs sur $\mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{N}(A)$ respectivement, on définit $\mathcal{B}'$ par :

$$\mathcal{B}' = (I + \mathrm{P} - \mathrm{P}')\mathcal{B}(I - Q + \mathbb{Q}')$$

Alors, $\mathcal{B}'$ est un autre inverse intérieur de A.

Preuve:

$A\mathcal{B}'A = A(I + \mathrm{P} - \mathrm{P}')\mathcal{B}(I - Q + \mathbb{Q}')A = A(I + \mathrm{P} - \mathrm{P}')\mathcal{B}A = A\mathcal{B}A = A$**.**

1-3 Inverse extérieur

1-3-1 Définition: Soit $\mathcal{B}: W \longrightarrow V$ est un opérateur linéaire, on dit que $\mathcal{B}$ est un inverse extérieur de A, si $\mathcal{B}A\mathcal{B} = \mathcal{B}$.

1-3-2 Proposition: Soit $\mathcal{B}: W \longrightarrow V$ un inverse extérieur de A, alors:

a) $(\mathcal{B}A)^2 = \mathcal{B}A$ et $(A\mathcal{B})^2 = A\mathcal{B}$.

b) $\mathcal{R}(\mathcal{B}A) = \mathcal{R}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{N}(\mathcal{B}) = \mathcal{N}(A\mathcal{B})$

c) $V = \mathcal{N}(\mathcal{B}A) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{B})$ et $W = \mathcal{N}(\mathcal{B}) \oplus \mathcal{R}(A\mathcal{B})$

Preuve:

Semblable à la preuve de la proposition (1-2-2)**.**

Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) $\mathcal{B} \in \theta(A)$

b) $(\mathcal{B}A)^2 = \mathcal{B}A$ et $\mathcal{R}(\mathcal{B}A) = \mathcal{R}(\mathcal{B})$

c) $(\mathcal{B}A)^2 = \mathcal{B}A$ et $V = \mathcal{N}(\mathcal{B}A) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{B})$

d) $(A\mathcal{B})^2 = A\mathcal{B}$ et $\mathcal{N}(\mathcal{B}) = \mathcal{N}(A\mathcal{B})$

e) $(A\mathcal{B})^2 = A\mathcal{B}$ et $W = \mathcal{N}(\mathcal{B}) \oplus \mathcal{R}(A\mathcal{B})$

e) $(A\mathcal{B})^2 = A\mathcal{B}$ et $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(\mathcal{B}) = \{0\}$

Preuve:

Semblable à la preuve de la proposition (1-2-7)**.**

1-3-4 Conséquence: Si $\mathcal{B}_1 \epsilon \mathcal{I}(A)$ et $\mathcal{B}_2 \epsilon \mathcal{I}(A)$, alors $\mathcal{B}_1 A\, \mathcal{B}_2 \ \epsilon\ \mathcal{I}(A) \cap \theta(A)$

1-4 Inverse généralisé

1-4-1 Définition: Soit $\mathcal{B}: W \longrightarrow V$ est un opérateur linéaire. Si $\mathcal{B}\ \epsilon\ \theta(A) \cap \mathcal{I}(A)$, on dit que $\mathcal{B}$ est un inverse généralisé de A.

1-4-2 Proposition: Tout opérateur linéaire admet un inverse généralisé.

Exemple:

On rappelle que C($[0;1]$) est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0;1]$

Soit A: C($[0;1]$) $\longrightarrow$ C($[0;1]$) un opérateur linéaire ,tel que $A(x(t)) = x(t^2)$.

On défini $\mathcal{B}$ de C($[0;1]$) dans lui même par : $\mathcal{B}(x(t)) = x(\sqrt{t})$

Nous avons,

$$A\mathcal{B}A\big(x(t)\big) = A\mathcal{B}(x(t^2)) = A(x(t))$$

$$\mathcal{B}A\mathcal{B}\big(x(t)\big) = \mathcal{B}A(x(\sqrt{t}) = \mathcal{B}(x(t))$$

Alors, $\mathcal{B}$ est un inverse généralisé de A.

1-4-3 Proposition: Soit $\mathcal{B}$ est un inverse généralisée de A, alors:

a) $(A\mathcal{B})^2 = A\mathcal{B}$ et $(\mathcal{B}A)^2 = \mathcal{B}A$.

b) $\mathcal{N}(\mathcal{B}) = \mathcal{N}(A\mathcal{B})$ et $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(\mathcal{B}A)$.

c) $\mathcal{R}(A\mathcal{B}) = \mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{R}(\mathcal{B}A) = \mathcal{R}(\mathcal{B})$.

D'autre part,

$$V = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{B}) \;, W = \mathcal{N}(\mathcal{B}) \oplus \mathcal{R}(A).$$

Preuve:

On utilise les propositions (1-2-2) et (1-3-2)**.**

1-4-4 Remarque: Si $\mathcal{B}$ est un inverse généralisé de A, alors $A\mathcal{B}$ est un projecteur sur $\mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{B}A$ est un projecteur sur $\mathcal{R}(\mathcal{B})$.

On suppose que

$$V = \mathrm{T} \oplus \mathcal{N}(A) \quad \text{et} \quad W = \mathcal{R}(A) \oplus \mathrm{S}.$$

Soient P et Q deux projecteurs sur $\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{R}(A)$ respectivement tels que

$\mathcal{N}(\mathrm{P}) = \mathrm{T}$ et $\mathcal{N}(Q) = \mathrm{S}$

Alors, le système suivant:

$$(1)\begin{cases} XAX = X \\ AXA = A \\ AX = Q \\ XA = I - \mathrm{P} \end{cases}$$

Admet une solution unique, on la note par $A^{\not\approx}_{\mathrm{P},Q}$.

Preuve: $X \neq Y$

$X = XAX = XAXAX = YAXAY = YAY = Y.$ ▼

La construction est illustrée par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift left, "I-\mathrm{P}"] & W \arrow[r, "A^{\not\approx}_{\mathrm{P},Q}"] \arrow[d, shift left, "Q"] & V \arrow[d, shift left, "I-\mathrm{P}"] \\
\mathrm{T} \arrow[u, shift left, "I"] \arrow[r, "\hat{A}"] & \mathcal{R}(A) \arrow[u, shift left, "\mathrm{J}"] \arrow[r, "\hat{A}^{-1}"] & \mathrm{T} \arrow[u, shift left, "I"]
\end{tikzcd}$$

L'inverse généralisé $A^{\not\approx}_{\mathrm{P},Q}$ est donné par: $A^{\not\approx}_{\mathrm{P},Q} = I\hat{A}^{-1}Q.$

1-4-5 Remarque: $(A^{\not\approx}_{\mathrm{P},Q})^{\not\approx}_{I-Q,I-\mathrm{P}} = A.$

1-4-6 Théorème: Soient P et Q deux projecteurs tels que $\mathcal{R}(\mathrm{P}) = \mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(A)$, alors, le système:

$$(2)\begin{cases} XAX = X \\ XA = I - \mathrm{P} \\ AX = Q \end{cases}$$

Admet la solution unique $X = A^{\approx}_{\mathrm{P},Q}$.

Preuve:

On supposeque $Y \neq X$

$X = XAX = (XA)X = (I - \mathrm{P})\, X = YAX = Y(AX) = YQ = YAY = Y.$

Il est évident que $A^{\approx}_{\mathrm{P},Q}$ est une solution du système (2).

1-4-7 Proposition: Soit Γ: $\mathrm{P}_{(\mathcal{N}(A))} \times Q_{(\mathcal{R}(A))} \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathcal{N}(A)} \times \mathrm{S}_{\mathcal{R}(A)}$ est une application

Définie par: $\Gamma(\mathrm{P}, Q)=(\mathrm{T}, \mathrm{S})$. Alors, Γ est une bijection.

Preuve:

Si $(\mathrm{T}, \mathrm{S}) \in \mathrm{T}_{\mathcal{N}(A)} \times \mathrm{S}_{\mathcal{R}(A)} \Longrightarrow V = \mathrm{T} \oplus \mathcal{N}(A)$; $W = \mathcal{R}(A) \oplus \mathrm{S}$

Par (1-1-6) il existe deux projecteurs P et Q sur $\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{R}(A)$ respectivement

alors, Γ est surjective.

$\Gamma(\mathrm{P}, Q) = \Gamma(\mathrm{P}', Q') \Longrightarrow (\mathrm{T}, \mathrm{S}) = (\mathrm{T}', \mathrm{S}') \Longrightarrow \mathrm{T} = \mathrm{T}'$ et $\mathrm{S} = \mathrm{S}'$

par (1-1-5) on a $\mathrm{P} = \mathrm{P}'$ et $Q = Q'$; donc Γ est injective.

1-4-8 Remarque: On note la solution par $A^{\approx}_{\mathrm{P},Q}$ ou $A_{\mathrm{T},\mathrm{S}}$.

1-4-9 Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\mathcal{B}$ est un inverse généralisé de A.

b) $(A\mathcal{B})^2 = A\mathcal{B}$ *et* $W = \mathcal{N}(\mathcal{B}) \oplus \mathcal{R}(A)$.

c) $(\mathcal{B}A)^2 = \mathcal{B}A$ et $V = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(\mathcal{B})$.

d) $(A\mathcal{B})^2 = A\mathcal{B}$, $\mathcal{N}(\mathcal{B}) = \mathcal{N}(A\mathcal{B})$ et $\mathcal{R}(A\mathcal{B}) = \mathcal{R}(A)$.

e) $(\mathcal{B}A)^2 = \mathcal{B}A$, $\mathcal{R}(\mathcal{B}A) = \mathcal{R}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(\mathcal{B}A)$.

f) $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathrm{T,S}} = \hat{A}^{-1}Q$ où $\hat{A} := A_{/\mathrm{T}}$, $V = \mathrm{T} \oplus \mathcal{N}(A)$, $W = \mathcal{R}(A) \oplus \mathrm{S}$.

Tel que Q est un projecteur sur $\mathcal{R}(A)$.

g) $\mathcal{B}$ est un inverse intérieur de A, s'il vérifie:

$\mathcal{B}A(x) = x,\ \forall\, x \in \mathrm{T}$ et $\mathcal{B}(y) = 0;\ \ \forall\, y \in \mathrm{S}$.

Et

$\mathcal{B}\,(y_1 + y_2) = \mathcal{B}(y_1)$ tels que $y_1 \in \mathcal{R}(A);\ \ \forall\, y_2 \in \mathrm{S}$.

h) $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathrm{T,S}} = (I - \mathrm{P})\mathcal{B}_1 Q$ tels que $A\mathcal{B}_1 A = A$.

P et Q sont des projecteurs sur $\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{R}(A)$ respectivement.

Preuve:

On utilise les propositions (1-2-7) et (1-4-3).

1-4-10 Proposition: Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ deux inverses intérieurs de A, on pose

$A\mathcal{B}_1 = Q_1, \quad A\mathcal{B}_2 = Q_2, \quad I - \mathrm{P}_1 = \mathcal{B}_1 A$ et $I - \mathrm{P}_2 = \mathcal{B}_2 A$,

Alors:

$a)$ $\mathcal{B}_1 A\mathcal{B}_2 = A^{\approx}_{\mathrm{P}_1,Q_2}$

b) $A^{\approx}_{\mathrm{P}_1,Q_1} = A^{\approx}_{\mathrm{P}_1,Q_2} A A^{\approx}_{\mathrm{P}_2,Q_1}$

Preuve:

$a)$ $A\mathcal{B}_1 A\mathcal{B}_2 = A\mathcal{B}_2 = Q_2, \quad I - \mathcal{B}_1 A\mathcal{B}_2 A = I - \mathcal{B}_1 A = \mathrm{P}_1$.

b) $A^{\approx}_{\mathrm{P}_1,Q_1} = \mathcal{B}_1 A\mathcal{B}_1 = (\mathcal{B}_1 A\mathcal{B}_2)A(\mathcal{B}_2 A\mathcal{B}_1) = A^{\approx}_{\mathrm{P}_1,Q_2} A A^{\approx}_{\mathrm{P}_2,Q_1}$.

1-5 Inverse intérieur topologique

a- Inverse droit intérieur topologique

Ci-après: W est un espace vectoriel topologique

$\overline{\mathcal{R}(A)}$:= la fermeture de $\mathcal{R}(A)$ dans W,

Q un projecteur sur W tels que :

$$Q \in \mathcal{L}(\mathrm{W}) \quad et \quad \mathcal{R}(Q) = \overline{\mathcal{R}(A)}$$

On écrit alors,

$$\mathrm{W} = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathrm{S}$$

$$\mathfrak{G}_Q := \mathcal{R}(A) \oplus \mathrm{S} = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(Q)$$

Maintenant on considère $A : V \longrightarrow \mathfrak{G}_Q$ et $Q^- := Q/\mathfrak{G}_Q$

Si $\mathcal{B}_{Q^\sim} : \mathfrak{G}_Q \longrightarrow V$ est un inverse intérieur de A et $A\mathcal{B}_{Q^\sim} = Q^-$, alors

$\mathcal{B}_{Q^\sim}$ est dit un inverse droit intérieur topologique.

Soit $\mathcal{B}$ un inverse intérieur de A, si $A\mathcal{B}$ est un projecteur (continue) sur $\mathcal{R}(A)$ dans $\mathfrak{G}_Q$

On a, par la Proposition (1-2-8)

$$\mathcal{B}_{Q^\sim} = \mathcal{B}(\mathrm{I} - A\mathcal{B} + Q^-)$$

est un inverse droit intérieur topologique.

Nous utilisons la notation $A_{d,Q}$:= inverse droit intérieure topologique.

1-5-1 Proposition: [18]Soit Q un projecteur continue sur $\overline{\mathcal{R}(A)}$, alors A admet inverse droit intérieur topologique si et seulement, s'il existe un opérateur linéaire, noté par $A_{d,Q}$ vérifiant :

$$(5)\begin{cases} A_{d,Q} : \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(Q) \longrightarrow V \\ A\, A_{d,Q}\, A = A \text{ sur } V \\ A\, A_{d,Q} = Q \text{ sur } \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(Q) \end{cases}$$

Soient V et W des espaces de dimension finie, où W est un espace de Hilbert et Q est le projecteur Orthogonal sur $\mathcal{R}(A)$, alors A admet un inverse droit intérieur topologique $A_{d,Q}$; vérifie:

$$(3)\begin{cases} A\,A_{d,Q}\,A = A \text{ sur } V \\ (\,AA_{d,Q})^{*} = AA_{d,Q} \end{cases}$$

b- Inverse gauche intérieur topologique

Soit A un opérateur défini sur $\mathrm{D}(A) \subset V$ dans W tel que V un espace vectoriel topologique

1-5-2 Définition: Soit $\mathrm{D}(A) \subset V$, on dit que le domaine de A est décomposable par rapport au projecteur $\mathrm{P} \in \mathcal{L}\,(V)$ si $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{R}(\mathrm{P})$, $\forall\, x \in \mathrm{D}(A)$; $\mathrm{P}\,(x) \in \mathcal{N}(A)$ et $\mathrm{D}(A) \cap \mathcal{N}(\mathrm{P})$ dense dans $\mathcal{N}(\mathrm{P})$.

Dans ce cas nous appelons :

$\mathrm{C_P} := \mathrm{D}(A) \cap \mathcal{N}(A)$, est le support de A

1-5-3 Définition: Soit $\mathcal{B}$ un inverse intérieur linéaire de $A.$ Si $\mathcal{B}A$ admet une extension au projecteur $(I - \mathrm{P}\,) \in \mathcal{L}\,(V)$ tel que $\mathcal{R}(I - \mathrm{P}) = \overline{\mathcal{R}(\mathcal{B}A)}$, alors on dit que $\mathcal{B}$ est un inverse gauche intérieur topologique.

Nous utilisons la notation $A_{g,\mathrm{p}}$:= Inverse gauche intérieur topologique.

1-5-4 Théorème: Soit A: $\mathrm{D}(A) \longrightarrow W$ un opérateur linéaire. Si $U = A_{g,\mathrm{p}}$, alors $\mathrm{D}(A)$ est décomposable par rapport à P .

Preuve:

$\forall\, z \in \mathcal{N}(A)$; $UAz = (I - \mathrm{P}\,)z = 0 \Longrightarrow \forall\, z \in \mathcal{N}(A)$; $\mathrm{P}z = z$

Donc, $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{R}(\mathrm{P})$

$UAz = (I - \mathrm{P}\,)z$; $\forall\, z \in \mathrm{D}(A) \Longrightarrow \mathrm{P}z = z - UAz$; $\forall\, z \in \mathrm{D}(A)$

$$\Longrightarrow A\mathrm{P}z = Az - AUAz = 0;\ \forall\, z \in \mathrm{D}(A)$$

Alors, $\mathrm{P}z \in \mathcal{N}(\mathrm{P})$; $\forall\, z \in \mathrm{D}(A)$

Nous avons, $\overline{\mathcal{R}(UA)} = \mathcal{N}(\mathrm{P})$; donc, $\mathrm{D}(A) \cap \mathcal{N}(\mathrm{P})$ est dense dans $\mathcal{N}(\mathrm{P})$.

1-5-5 Théorème: Si le domaine de A est décomposable par rapport au projecteur $\mathrm{P} \in \mathcal{L}\,(V)$, Alors, A admet un inverse gauche intérieur topologique.

Preuve:

Soit U' un inverse intérieur de A, on écrit

$\mathrm{P}' = I - U'A$. Soit $\widetilde{\mathrm{P}}$ la restriction de P à $\mathrm{D}(A)$

Par la propriété (1-2-8)

$$U = (2I - U'A - \widetilde{\mathrm{P}})U' \text{ et } UA = I - \widetilde{\mathrm{P}}$$

Aussi,

$\mathcal{R}(UA) = \mathcal{N}(\mathrm{P}) = \mathcal{N}(\mathrm{P}) \cap \mathrm{D}(A) = \mathrm{C}_{\mathrm{P}}$, qui est dense dans $\mathcal{N}(\mathrm{P}) = \mathcal{R}(I - \mathrm{P})$.

Si V et W sont des espaces de dimensions finies, où V est un espace de Hilbert, soit P le projecteur orthogonal sur $\mathcal{N}(A)$, alors

A admet un inverse gauche intérieur topologique $A_{g,\mathrm{p}}$, vérifie:

$$(4)\begin{cases} AA_{g,\mathrm{p}}\,A = A \\ (A\,A_{g,\mathrm{p}})^* = A\,A_{g,\mathrm{p}} \end{cases}$$

1-6 Inverse généralisé topologique

Ci-après: W et V sont des espaces vectoriels topologiques

1-6-1 Définition: Soit $A:\ \mathrm{D}(A) \subset V \longrightarrow W$ est un opérateur linéaire, si U vérifie :

1) U est un inverse droit intérieur topologique de A.

2) U est un inverse gauche intérieur topologique de A.

3) U A U = U.

Alors, U est dit un inverse généralisé topologique, on le note par $A^{\star}_{\mathrm{P},Q}$.

1-6-2 Théorème: [18]Soit $A : \mathrm{D}(A) \longrightarrow \mathrm{W}$ un opérateur linéaire, si le domaine de A est décomposable par rapport au projecteur $\mathrm{P} \in \mathcal{L}(\mathrm{V})$ et s'il existe un projecteur Q sur $\overline{\mathcal{R}(A)}$, alors A admet l'inverse généralisée topologique unique (relatif au choix de P et Q) noté par $A^{\star}_{\mathrm{P},Q}$ et vérifie:

- $\mathrm{D}\left(A^{\star}_{\mathrm{P},Q}\right) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(Q)$.
- $\mathcal{R}\left(A^{\star}_{\mathrm{P},Q}\right) = C_{\mathrm{p}}(A)$.
- $\mathcal{N}\left(A^{\star}_{\mathrm{P},Q}\right) = \mathcal{N}(Q)$.
- $A^{\star}_{\mathrm{P},Q}Ax = x - \mathrm{P}x$; pour tout $x \epsilon \mathrm{D}(A)$.
- $AA^{\star}_{\mathrm{P},Q}y = Qy$; pour tout $y \epsilon \mathrm{D}\left(A^{\star}_{\mathrm{P},Q}\right)$.

1-6-3 Théorème: Soit $A \epsilon \mathcal{L}$ (V, W). On suppose que $\mathcal{N}(A)$ admet un supplémentaire topologique dans V et $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(A)$ admet un supplémentaire topologique dans W, soient P un projecteur sur $\mathcal{N}(A)$ dans V et Q un projecteur sur $\mathcal{R}(A)$ dans W, alors A admet l'inverse généralisé topologique unique noté par $A^{\star}_{\mathrm{P},Q}$ qui vérifie les équations suivantes:

- $AA^{\star}_{\mathrm{P},Q}A = A$ sur V
- $A^{\star}_{\mathrm{P},Q}AA^{\star}_{\mathrm{P},Q} = A^{\star}_{\mathrm{P},Q}$ sur W
- $A^{\star}_{\mathrm{P},Q}Ax = x - \mathrm{P}x$; pour tout $x \epsilon$ V
- $AA^{\star}_{\mathrm{P},Q}y = Qy$; pour tout $y \epsilon$ W

Preuve:

On définie $A^{\star}_{\mathrm{P},Q}$ par:

$A^{\star}_{\mathrm{P},Q}Ax = x$; $x \epsilon \mathcal{N}(\mathrm{P})$

$A^{\star}_{\mathrm{P},Q}y = A^{\star}_{\mathrm{P},Q}y_1$, $A^{\star}_{\mathrm{P},Q}y_2 = 0$

où $y = y_1 + y_2$, $y_1 \epsilon \mathcal{R}(A)$ et $y_2 \epsilon \mathcal{N}(Q)$

Il est évident que l'inverse généralisé est unique

Remarque: $A^{\star}_{\mathrm{P},Q}$ dans ce cas est une application continue.

Ci-après on présente quelque des inverses généralisés**:**

1-7 Inverse généralisé de Moore- Penrose

Ce genre d'inverses généralisés est le plus important, car il conserve une bonne partie des propriétés des inverses ordinaires, telle que l'unicité de l'inverse, les propriétés de symétrie et beaucoup d'autres qui font concept central en algèbre linéaire, analyse numérique et dans diverses applications.

a- L'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire

Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ des espaces de Hilbert.

1-7-7 Proposition: Soient $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et $\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}$, Il existe l'inverse généralisé unique de A, on le note par A^+, qui vérifie les équations suivantes:

$$\begin{cases} XAX = X & \dots \quad (1) \\ AXA = A & \dots \quad (2) \\ XA = I - P_{\mathcal{N}(A)} & \dots \quad (3) \\ AX = P_{\mathcal{R}(A)} & \dots \quad (4) \end{cases}$$

A^+ est appelé l'inverse de Moore-Penrose de l'opérateur A.

Preuve:

$\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{R}(A)$ sont des sous espace fermé dans $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ alors ils existent deus projecteurs Orthogonaux $P_{\mathcal{N}(A)}$ et $P_{\mathcal{R}(A)}$ sur $\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{R}(A)$ respectivement, tels que

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}\left(P_{\mathcal{N}(A)}\right) = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(A)^{\perp}$$

Et

$$\mathcal{H}_2 = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}\left(P_{\mathcal{R}(A)}\right) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp}$$

Par (1-6-3) A^+ existe et A^+ défini par:

$A^{+}(y) = 0;\ \forall\, y \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$ et $A^{+}y = (A_{/\mathcal{R}(A^{*})})^{-1}y\ ;\ \forall\, y \in \mathcal{R}(A).$

b- L'inverse de Moore-Penrose d'une matrice

Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$, on définit $\underline{A}^{+}: \mathbb{C}^{n} \rightarrow \mathbb{C}^{m}$ par:

$\underline{A}^{+}(y) = 0;\ \forall\, y \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$ et $\underline{A}^{+}y = (\underline{A}_{/\mathcal{R}(A^{*})})^{-1}y\ ;\ \forall y \in \mathcal{R}(A)$.

Remarquons que $\underline{A}^{+}$ est un inverse généralisé de $\underline{A}$.

1-7-1 Proposition: Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$, alors

$a)$ $A^{+}A\,x = 0,\ \forall\, x \in \mathcal{N}(A)$ et $A^{+}Ax = x, \forall\, x \in \mathcal{R}(A^{*}) = \mathcal{R}(A^{+})$.

$b)$ $AA^{+}y = 0, \forall\, y \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$ et $AA^{+}y = y, \forall\, y \in \mathcal{R}(A)$.

$c)$ $A^{+}A$ est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{R}(A^{*}) = \mathcal{R}(A^{+})$ dans $\mathbb{C}^{m}$.

$d)$ AA^{+} est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{R}(A)$ dans $\mathbb{C}^{n}$.

Preuve:

$a)$ $Ax = 0\ ;\ \forall\, x \in \mathcal{N}(A) \Longrightarrow A^{+}Ax = 0;\ \forall\, x \in \mathcal{N}(A)$

Et

$$Ax \in \mathcal{R}(A);\ \forall\, x \in \mathcal{R}(A^{*}) \Longrightarrow A^{+}Ax = (A_{/\mathcal{R}(A^{*})})^{-1}Ax = x;\ \forall\, x \in \mathcal{R}(A^{*}).$$

b) $\forall\, y \in \mathcal{R}(A)^{\perp} \Longrightarrow A^{+}y = 0, \forall\, y \in \mathcal{R}(A) \Longrightarrow AA^{+}\,y = 0, \forall\, y \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$

Et

$\forall\, y \in \mathcal{R}(A) \Longrightarrow A^{+}y = (A_{/\mathcal{R}(A^{*})})^{-1}y \Longrightarrow AA^{+}y = A\,(A_{/\mathcal{R}(A^{*})})^{-1}y = y.$

$c)$ Nous avons, $\mathcal{R}(A^{+}A) = \mathcal{R}(A^{+})$

Appliquons a) de la Proposition (1-7-1) on trouve

$$A^{+}A \text{ est un projecteur de } \mathcal{R}(A^{+}) \text{ sur } \mathbb{C}^{m}$$

Soient $x, x' \in \mathbb{C}^{n}$, nous avons

$x = x_1 + x_2,\ x' = x_1' + x_2'$, tels que $x_1, x_1' \in \mathcal{N}(A)$ et $x_2\,, x_2' \in \mathcal{R}(A^{*})$

$\langle A^+Ax,\ x'\rangle = \langle A^+A(x_1+x_2), x_1'+x_2'\rangle$

$$= \langle A^+Ax_1, x_1'\rangle + \langle A^+Ax_1, x_2'\rangle + \langle A^+Ax_2, x_1'\rangle + \langle A^+Ax_2, x_2'\rangle \ = \langle\ x_1, x_1'\rangle.$$

$\langle x, A^+A\ x'\rangle = \langle x_1+x_2, A^+A(x_1'+x_2')\rangle$

$$= \langle\ x_1, A^+Ax_1'\rangle + \langle\ x_1, A^+Ax_2'\rangle + \langle\ x_2, A^+Ax_1'\rangle + \langle\ x_2, A^+Ax_2'\rangle \ = \langle\ x_1, x_1'\rangle.$$

Donc, $(A^+A\ )^* = A^+A$

d) De même façon, nous montrons que AA^+ est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{R}(A)$.

1-7-2 Définition de l'inverse généralisé de Moore: Si $A \epsilon\ \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$, alors A^+ l'unique inverse généralisé qui vérifie les équations suivantes:

1) $A^+A = \mathrm{P}_{\mathcal{R}(A^*)}$

2) $AA^+ = \mathrm{P}_{\mathcal{R}(A)}$

1-7-3 Définition de l'inverse généralisé de Penrose : $A\ \epsilon\ \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$, alors A^+est la solution unique du système suivant:

$$\textbf{(s)}\begin{cases} XAX = X & \dots \quad (1) \\ AXA = A & \dots \quad (2) \\ (XA)^* = XA & \dots \quad (3) \\ (AX)^* = AX & \dots \quad (4) \end{cases}$$

1-7-4 Théorème: Les deux définitions précédentes sont équivalentes .

Preuve:

supposons que, $A^+A = \mathrm{P}_{\mathcal{R}(A^*)}$ et $AA^+ = \mathrm{P}_{\mathcal{R}(A)}$, on applique (c) et (d) de (1-7-1), alors:

A^+A et AA^+ sont des projecteurs orthogonaux.

D'autre part,

$$A^+A\ A^+ = \mathrm{P}_{\mathcal{R}(A^*)}\ A^+ = \mathrm{P}_{\mathcal{R}(A^+)}\ A^+ = \ A^+.$$

Et

$$AA^+A = P_{\mathcal{R}(A)}A = A.$$

Enfin, A^+ est une solution du système (s).

Réciproquement, si A^+ est une solution du système (s) alors,

Nous avons, $AA^+A = A \Longrightarrow A^+AA^+A = A^+A \Longrightarrow (A^+A)^2 = A^+A$

Par (1-7-1) on a

$$(A^+A)^* = A^+A \ \text{ et } \mathcal{R}(A^+A) = \mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^*)$$

Donc, $A^+A = P_{\mathcal{R}(A^*)}$.

De la même façon, nous montrons que $AA^+ = P_{\mathcal{R}(A)}$.

1-7-5 Remarque: On montre que A^+ est une solution unique du système (**s**)

Preuve:

On suppose que l'on a A_1^+, A_2^+ deux inverses de Penrose de A

$$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^* = A_1^+(A_1^+)^*A^*A_2^+A^*$$

$$= A_1^+(AA_1^+)^*(AA_2^+)^* = A_1^+(AA_1^+)(AA_2^+) = A_1^+AA_2^+$$

$$= A_1^+AA_2^+AA_2^+ = (A_1^+A)^*(A_2^+A)^*A_2^+ = A^*(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A_2^+$$

$$= A^*(A_2^+)^*A_2^+ = (A_2^+A)^*A_2^+ = (A_2^+A)A_2^+ = A_2^+.$$

1-7-6 Proposition: Soient $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$; $\lambda \in \mathbb{C}$, alors:

a) $(A^+)^+ = A$

b) $(A^+)^* = (A^*)^+$.

c) $(\lambda A)^+ = A^+\lambda^+$ tels que si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^+ = \frac{1}{\lambda}$ et si $\lambda = 0$, alors $\lambda^+ = 0$.

d) $A^* = A^*AA^+ = A^+AA^*$.

e) $A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+$.

f) $(A^*A)^+ = A^+(A^*)^+$.

g) $(UAV)^+ = V^*A^+U^*$, tels que $U \; et \; V$ des matrices unitaires

Preuve:

a) $(A^+)^+ : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$

$\forall\, x \in \mathcal{R}(A^*)$; $(\underline{A}^+)^+ x = ((\underline{A}_{/\mathcal{R}(A^*)})^{-1})^+ x = ((\underline{A}_{/\mathcal{R}(A^*)})^{-1})^{-1} x = \underline{A}x$

Et

$\forall\, x \in \mathcal{R}(A^*)^\perp, (\underline{A}^+)^+ x = 0,$ Donc $(A^+)^+ = A$.

b) $\forall\, y \in \mathcal{R}(A^*)$, $(\underline{A}^*)^+ y = (\underline{A}^*{}_{/\mathcal{R}(A)})^{-1} y = ((\underline{A}_{/\mathcal{R}(A^*)})^{-1})^* = (\underline{A}^+)^* y$.

D'autre part,

$$\mathcal{N}((A^*)^+) = \mathcal{R}(A^*)^\perp;\ \mathcal{N}((A^+)^*) = \mathcal{R}(A^+)^\perp = \mathcal{R}(A^*)^\perp .$$

c) Evident.

d) $A^+A\,A^* = \mathrm{P}_{\mathcal{R}(A^*)}A^* = A^*$ et $A^*A\,A^+ = A^*\mathrm{P}_{\mathcal{R}(A)} = A^*$

Puisque A^+A et A^+A sont des projecteurs orthogonaux sur $\mathcal{R}(A^*)$ et $\mathcal{R}(A)$ respectivement .

e) $A^*(AA^*)^+ = A^*\,A^{*+}A^+ = A^*\,A^{+*}A^+ = (A^+A)^*A^+ = A^+AA^+ = A^+$

D'autre part,

$$(A^*A)^+A^* = A^+\,A^{*+}A^* = A^+\,A^{*+}A^* = A^+(A\,A^+)^* = A^+AA^+ = A^+$$

f) Il suffit de vérifier que la matrice $A^+(A^*)^+$est une solution du système de Penrose suivant:

$$(\mathrm{s1})\begin{cases} X(A^*A)\,X = X \\ (A^*A)\,X(A^*A) = A \\ (X(A^*A))^* = X(A^*A) \\ ((A^*A)\,X)^* = X(A^*A) \end{cases}$$

g) Il suffit de vérifier que la matrice $V^*A^+U^*$ est une solution du système de Penrose suivant:

$$(s11)\begin{cases} X(UAV)\,X = X \\ (UAV)\,X(UAV) \;= A \\ (X(UAV)\,)^* = X(UAV) \\ ((UAV)\,X)^* = (UAV)\,X \end{cases}$$

1-7-8 Proposition: Soit A $\in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$, alors:

1. $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^+) = \mathcal{R}(AA^*)$.

2. $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^+A) = \mathcal{R}(A^*A)$.

3. $\mathcal{R}(I - AA^+) = \mathcal{N}(AA^+) = \mathcal{R}(A^*A)^\perp$.

4. $\mathcal{R}(I - A^+A) = \mathcal{N}(A^+A) = \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^\perp$.

1-7-8 Théorème: Soit A $\in \mathbb{C}_r^{m,n}$ ($\mathbb{C}$), si $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ est une base de $\mathcal{R}(A^*)$ et

$\{w_1, w_2, \dots, w_{n-r}\}$ est une base de $\mathcal{N}(A^*)$, alors

$A^+ = [v_1, v_2, \dots, v_r, 0, \dots, 0][Av_1, Av_2, \dots, Av_r, w_1, w_2, \dots, w_{n-r}]^{-1}$

Preuve:

En utilisons la définition de A^+, nous trouvons

$$A^+[Av_1, \dots, Av_r, w_1, w_2, \dots, v_{n-r}] = [A^+Av_1, \dots, A^+Av_r, A^+w_1, A^+w_2, \dots, A^+w_{n-r}]$$
$$= [v_1, v_2, \dots, v_r, 0, \dots, 0]$$

Autre part,

$\{Av_1, Av_2, \dots, Av_r, w_1, w_2, \dots, w_{n-r}\}$ est une base de $\mathbb{C}^n$, donc

$A^+ = [v_1, v_2, \dots, v_r, 0, \dots, 0][Av_1, Av_2, \dots, Av_r, w_1, w_2, \dots, w_{n-r}]^{-1}$

Exemple: Calcul de A^+

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathcal{R}(\mathrm{A}^*)$

$\mathrm{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc,

$\mathrm{A}^+\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}^+\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Nous devons maintenant calculer la base de $\mathcal{R}(A)^\perp$

On remarque que $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(\mathrm{A}^*)$

On résout le système $\mathrm{A}^*x = 0$,

Nous obtenons

$x = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc, $\mathrm{A}^+\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$ et $\mathrm{A}^+\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$

Donc

$$\mathrm{A}^+\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons, $\mathbb{C}^4 = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$

Donc, $\mathrm{A}^+ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}$

1-8 Inverse de Drazin

1-8-1 Lemme: [3]pour toute matrice carrée A il existe un nombre positive k telle que

$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(\mathrm{A}^k) \oplus \mathcal{N}(\mathrm{A}^k)$

1-8-2 Définition: [3]Soit A est une matrice sur $\mathbb{C}^{n,n}$, le plus petit entier positif tel que

$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k)$, qui est aussi le plus petit entier positif tel que $\mathrm{rg}(A^{k+1}) = \mathrm{rg}(A^k)$ S'appelle l'indice de A, on le note par ind (A).

si A est inversible on a, ind $(A) = 0$.

1-8-3 Lemme: Si $\underline{A}$ est une application linéaire sur $\mathbb{C}^n$ et $\mathrm{ind}(\underline{A}) = k$, alors l'application définie par: $\underline{A}_1 : \mathcal{R}(\underline{A}^k) \longrightarrow \mathcal{R}(\underline{A}^k)$; telle que $\underline{A}_1 = \underline{A}_{/\mathcal{R}(A^k)}$ est inversible.

Preuve:

$\underline{A}\left(\mathcal{R}(\underline{A}^k)\right) = \mathcal{R}(\underline{A}^{k+1}) = \mathcal{R}(\underline{A}^k)$.

1-8-4 Définition: Si $A \in \mathbb{C}^{n,n}(\mathbb{C})$, l'inverse de Drazin de A est une matrice carrée d'ordre n notée A^D qui satisfait les équations suivantes:

$$\begin{cases} XAX = X \\ XA = AX \qquad\qquad k : \text{est l'indice de } A \\ XA^{k+1} = A^k \end{cases}$$

1-8-5 Définition: Soit $A \in \mathbb{C}^{n,n}(\mathbb{C})$, $\mathrm{ind}(A) = k$ et tout vecteur x de $\mathbb{C}^n$ s'ecrit de manière unique $x = u + v$ aù $u \in \mathcal{R}(A^k)$ et $v \in \mathcal{N}(A^k)$. On définit $\underline{A}^D$ sur $\mathbb{C}^n$ par:

$\underline{A}^D x = \underline{A}_{/\mathcal{R}(A^k)} u$, $\underline{A}^D$est appelée l'inverse de Drazin de l'opérateur $\underline{A}$

1-8-6 Proposition: Soit $A \in \mathbb{C}^{n,n}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{ind}(A) = k$, alors :

a) $\mathcal{R}(A^D) = \mathcal{R}(A^k)$ et $\mathcal{N}(A^D) = \mathcal{N}(A^k)$.

b) $A^D A = AA^D = \mathrm{P}_{\mathcal{R}(A^k),\ \mathcal{N}(A^k)}$.

c) $(I - A^D A) = (I - AA^D) = \mathrm{P}_{\mathcal{N}(A^k),\ \mathcal{R}(A^k)}$.

d) $A^{\alpha+1} A^D = A^\alpha ; \forall \alpha \geq k$ où α est un nombre entier positif.

e) Si A est inversible alors, $A^D = A^{-1}$

Preuve:

a), c) et e) sont évidents.

b) Nous avons, $\mathcal{R}(A^D) = R(A^D A A^D) \subset \mathcal{R}(A^D A) = \mathcal{R}(A A^D) \subset \mathcal{R}(A^D)$

Donc, $\mathcal{R}(A^D) = \mathcal{R}(A^D A) = \mathcal{R}(A A^D)$

Aussi,

$$\mathcal{N}(A^D) = \mathcal{N}(A^D A A^D) \supset \mathcal{N}(A A^D) = \mathcal{N}(A^D A) \supset \mathcal{N}(A^D)$$

Donc, $\mathcal{N}(A^D) = \mathcal{N}(A A^D) = \mathcal{N}(A^D A)$

D'autre part, il est évident que $(\mathrm{AA^D})^2 = (\mathrm{A^D A})^2 = \mathrm{AA^D}$.

d) $\forall \alpha \geq k$, $A^{\alpha+1} A^D = A^{\alpha-k+k+1} A^D = A^{\alpha-k} A^{k+1} A^D = A^{\alpha-k} A^k = A^\alpha$

1-9 Le groupe inverse

1-9-1 Définition: Soit A une matrice carrée d'ordre n, on considère le système suivant :

$$(\mathrm{G}) \begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \\ AX = XA \end{cases}$$

si X est une solution du système (G) , alors on dit que X est le groupe inverse de A on le note par $A^\#$

1-9-2 Proposition: Soit A une matrice carrée d'ordre n, et de rang r, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) rg (A)= rg (A^2).

2) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^2)$.

3) $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A) = \mathbb{C}^n$.

4) $A^\#$ existe.

Preuve:

On a évidemment que 1) et 2) sont équivalentes.

Par l'application des définition (1-8-2), donc 2) et 3) sont équivalents.

On va montrer l'équivalence entre 2) et 4)

4)$\Longrightarrow$ 2), le système (G) est équivalent au système suivant:

$$(\mathrm{G1})\begin{cases} A^2X = A \\ X^2A = X \\ AX = XA \end{cases}$$

Donc,

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^2X) \subset \mathcal{R}(A^2) \subset R(A) \text{ , alors } \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^2).$$

2)$\Longrightarrow$ 4), Soit $A = FE$ tels que $F \in \mathbb{C}_r^{n,r}$, $E \in \mathbb{C}_r^{r,n}$ et rg $A = r$;(i, e F et E forment la factorisation de même rang de A).

Remarquons que, $EF \in \mathbb{C}^{r,r}$

D'autre part, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^2)$

Alors, EF est inversible

On pose $X = F(EF)^{-2}E$, remarquons que X une solution du système (G) .

1-9-3 Proposition: Quand le groupe inverse de A existe, il est unique**.**

Preuve:

Supposons que nous avons deux groupe inverses $A_1^{\#}$ et $A_2^{\#}$.

On applique successivement les trois équations de (G), on obtient:

$$A_1^{\#} = {A_1^{\#}}^2 A = {A_1^{\#}}^2 (A^2 A_2^{\#}) = A_1^{\#}(A_1^{\#}A^2)A_2^{\#} = A_1^{\#}A\,A_2^{\#} = A_1^{\#}(A^2A_2^{\#})A_2^{\#}$$

$$= (A_1^{\#}A^2){A_2^{\#}}^2 = A{A_2^{\#}}^2 = A_2^{\#}.$$

1-10 Inverse pondéré

1-10-1 définition: Soit B $\in$ $\mathbb{C}^{n,n}(\mathbb{C})$, on dit que la matrice B est auto-adjointe, ou Hermitienne, si $\mathrm{B}^* = \mathrm{B}$.

1-10-2 Définition: (Matrice positive)

Soit B une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels ou complexes.

On dit que la matrice B est positive, si $\forall\, x \in \mathbb{C}^n \quad \langle \mathrm{B}x, x\rangle \geq 0$.

1-10-3 Définition : (Matrice définie positive)

Soit B une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels ou complexes. . On dit que B est une définie positive si B est positive et $x = 0 \Leftrightarrow \langle \mathrm{B}x, x\rangle = 0$.

On rappelle que le produit scalaire standard sur $\mathbb{C}^{\mathrm{n}}$, est défini par :

$\forall\, z, y \in \mathbb{C}^n$: $\langle z, y\rangle = \sum_{i=0}^{n} \bar{y}_i\, z_i$; $z = (z_1, \dots, z_{\mathrm{n}})$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Soit N une matrice définie positive d'ordre n

La formule ci –dessous, définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}^{\mathrm{n}}$

$$[z, y] = \langle z, y\rangle_{\mathrm{N}} = \langle \mathrm{N}z, y\rangle$$

1-10-4 Proposition: Soit B une matrice hermitienne. La matrice B est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives .

Elle est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

1-10-5 Remarque: toute matrice hermitienne et définie positive est inversible.

Soient M et N deux matrices d'ordre m et n respectivement. Alors, le système suivant :

$$(\mathrm{w}1)\begin{cases} XAX = X \\ AXA = A \\ (XA)^* = \mathrm{N}^{-1} XA\, \mathrm{N} \\ (AX)^* = \mathrm{M} AX \mathrm{M}^{-1} \end{cases}$$

Admet une solution unique, elle s'appelle l'inverse généralisé pondéré de A, on le note par $A^{+}_{\mathrm{M,N}}$.

L'inverse généralisé $A^{+}_{\mathrm{M,N}}$ est donné par: $A^{+}_{\mathrm{M,N}} = \mathrm{N}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{M}^{\frac{1}{2}} A \mathrm{N}^{-\frac{1}{2}})^{+} \mathrm{M}^{\frac{1}{2}}$

1-10-6 Proposition: le système **(**w1**)** admet une solution unique.

Preuve:

On suppose que l'on a X_1, X_2 deux inverses généralisés pondérés de A

$$X = X_1AX_1 = \mathrm{M}^{-1}(X_1A)^*\mathrm{M}X_1 = \mathrm{M}^{-1}(X_2A)^*\mathrm{M}X_1 = X_2AX_1 = X_2\,\mathrm{N}(AX_1)^* = X_2\,\mathrm{N}(AX_2)^*\mathrm{N}^{-1}$$

$$= X_2AX_2 = X_2.$$

1-10-7 Proposition: On suppose que X est une solution de (w1)

1) Si $\mathbb{C}^m$ muni du produit scalaire

$$[z, y] = \langle z, y\rangle_{\mathrm{M}} = \langle \mathrm{M}z, y\rangle \qquad z, y \in \mathbb{C}^m$$

Alors, XA est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{N}^{-1}\mathcal{R}(\mathrm{A}^*)$, on note par : $\mathrm{I} - \mathrm{P}_{\mathcal{N}(A)}^{\mathrm{N}^{-1}}$

2) Si $\mathbb{C}^{\mathrm{n}}$ muni du produit scalaire

$$[z, y] = \langle z, y\rangle_{\mathrm{N}} = \langle \mathrm{N}z, y\rangle \quad ; \qquad z, y \in \mathbb{C}^n$$

Alors, AX est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{R}(A)$, on le note par : $\mathrm{P}_{\mathcal{R}(A)}^{\mathrm{M}}$

Preuve:

1) $AXA = A \Longrightarrow XAXA = XA \Longrightarrow (XA)^2 = XA$

$z, y \in \mathbb{C}^n \quad [XAz, y] = \langle(\mathrm{N}XAz), y\rangle = \langle z, (\mathrm{N}XA)^*y\rangle = \langle z, (\mathrm{N}XA\,)y\rangle = \langle \mathrm{N}z, (XA\,)y\rangle$

$$= [z, XAy]$$

Donc, $(XA)^* = XA$

$\mathcal{R}(XA) = \mathcal{N}(\mathrm{N}^{-1}XA\mathrm{N})^{\perp} = \mathcal{N}(\mathrm{N}^{-1}\mathrm{A}^{+}A\mathrm{N})^{\perp} = \mathcal{N}((A\mathrm{N}\,)^{+}A\mathrm{N})^{\perp} = \mathcal{N}(\mathrm{N}A\,)^{\perp} = \mathrm{N}^{-1}\mathcal{R}(\mathrm{A}^*)$

2) De la même manière, nous pouvons prouver que AX est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{R}(A)$.

Chapitre 2:

Propriétés

minimales

Chapitre 2: Propriétés minimales

Introduction

Dans ce chapitre on utilise les inverses généralisés pour déterminer les solutions approximantes de l'équation linéaire $\mathrm{A}x = b$

2-1 Orthogonalité dans les espaces normés

Soit N un espace normé et $\mathcal{A} \subset N$. $d(x, \mathcal{A}) = inf\ \{\|x - y\|; y \in \mathcal{A}\}$

On définit une notion d'orthogonalité comme suite :

$x \perp y \Leftrightarrow d(x, \mathrm{span}\{y\}) = \|x\|$.

$\mathfrak{B} \perp \mathcal{A} \Leftrightarrow d(x, \mathcal{A}) = \|x\|;\ \forall x \in \mathfrak{B}\ ; \mathfrak{B} \subset N$.

L'orthogonalité dans un espace normé n'est pas nécessairement symétrique.

Soit $\mathcal{M}$ un sous espace vectoriel dans N et $\mathcal{M}$ admet un supplémentaire topologique dans N

$\mathrm{P}_{\mathcal{M}} := \{ \mathrm{P} \in \mathcal{L}(N) /\ \mathrm{P} = \mathrm{P}^2$ et $\mathcal{R}(\mathrm{P}) = \mathcal{M}\}$

$d(I, \mathrm{P}_{\mathcal{M}}) \geq 1 := \{\mathrm{P} \in \mathrm{P}_{\mathcal{M}} :\ d(I, \mathrm{P}) \geq 1\ \}$

2-1-1 Proposition: Soit $\mathrm{P}_0 \in \mathrm{P}_{\mathcal{M}}$; alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

$a)$ $\| I - \mathrm{P}_0 \| = 1$.

$b)$ $\mathcal{N}(\mathrm{P}_0) \perp \mathcal{R}(\mathrm{P}_0)$.

$c)$ $\forall\, x \in N$, $\|\, x - \mathrm{P}_0 x\| \leq \|\, x - y\|$; $\forall\, y \in \mathcal{M}$.

Preuve:

Supposons $a)$, soit $x \in \mathcal{N}(\mathrm{P}_0)$, $z \in \mathcal{R}(\mathrm{P}_0)$, alors

$$\|x\| = \|(I - \mathrm{P}_0)(x - z)\| \leq \|x - z\|$$

Donc,

$$\forall\, x \in \mathcal{N}(\mathrm{P}_0) \;\; d\big(x\,,\mathcal{R}(\mathrm{P}_0)\big) = \|x\|,$$

Supposons b), soit $x \in N$ et $z \in \mathcal{R}(\mathrm{P}_0)$, alors

$$\|x - z\| = \|(I - \mathrm{P}_0)x - \mathrm{P}_0(z - x)\| \geq d\big((I - \mathrm{P}_0)x, \mathcal{R}(\mathrm{P}_0)\big) = \|x - \mathrm{P}_0 x\|.$$

Supposons c), $\forall\, x \in N$; il existe (y, z) unique tel que $\quad x = y + z$

Où $\quad y = \mathrm{P}_0 x \in \mathcal{R}(\mathrm{P}_0)$ et $\quad z = (I - \mathrm{P}_0)x \in \mathcal{N}(P_0)$

$$\|x\| = \|\, y - (-z)\| \geq \|z - \mathrm{P}_0 z\| = \|z\| = \|(I - \mathrm{P}_0)x\|$$

Par conséquent, $\qquad \|\, I - \mathrm{P}_0 \,\| = 1.$

Si $\mathrm{P} \in \mathrm{P}_{\mathcal{M}}$ et P vérifie l'une des conditions de la proposition précédente, alors

$\mathcal{R}(\mathrm{P}_0)$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{N}(\mathrm{P}_0)$.

Mais, $\mathcal{N}(\mathrm{P}_0)$ n'est pas nécessairement un supplémentaire orthogonal de $\mathcal{R}(\mathrm{P}_0)$.

2-1-2 Exemple:

Tout sous espace de co-dimension égale à 1 admet un hyperplan supplémentaire orthogonal.

Soit $x_0 \in N$ et $x_0 \neq e$ (par Hahn –Banach) existe $A \in N^*$ tels que $A(x_0) = 1$, $\|\, A \,\| = 1$

on définit P par : $\mathrm{P}x = x - A(x)\frac{x_0}{\|\, x_0 \,\|}$, alors $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(\mathrm{P})$ et $\|\, \mathrm{P} - I\| = 1$

En général, dans les espaces normés les supplémentaires orthogonaux des sous espaces sont rares.

2-2 Solution minimale d'une équation linéaire dans un espace normé.

Soit $A\colon V \longrightarrow N_2$ un opérateur linéaire et N_2 un espace normé.

$v_0 \in V,$ on dit que v_0 est une solution approximante de l'équation $Av = y$ si v_0 minimise

$\|Av - y\,\|$ C'est-à-dire $\|Av_0 - y\,\| \leq \|Av - y\,\|$; $\forall\, v \in V.$

Soit V un espace normé, on dit que v_0 est une solution minimale si v_0 une solution approximante et $\|\, v_0 \,\| < \|\, w \,\|$; $\forall\, w \in \mathcal{T}$

$\mathcal{T}$ est l'ensemble des solutions approximantes de l'équation $Av = y$

Inverse intérieur orthogonal.

2-2-1 Définition: Soit $A: V \longrightarrow N_2$ un opérateur linéaire. On dit que U est un inverse droite intérieur orthogonal de A si $U = A_{d,Q}$ et $\| I - Q \| = 1$, on le note par $A_{d,Q}{}^{\perp}$.

Soit $A: N_1 \longrightarrow W$ un opérateur linéaire. On dit que U est un inverse gauche intérieur orthogonal de A, si $U = A_{g,\mathrm{p}}$ et $\| I - \mathrm{P} \| = 1$, on le note par $A_{g,\mathrm{p}}{}^{\perp}$.

On dit que U est un inverse intérieur orthogonal de A, si U est un inverse droite intérieur orthogonal et U est un inverse gauche intérieur orthogonal de A; C'est-à-dire

$U = A_{g,\mathrm{p}}{}^{\perp} = A_{d,Q}{}^{\perp}$. On le note par $A_{\mathrm{p},Q}{}^{\perp}$.

2-2-2 Théorème: Soit $A: V \longrightarrow N_2$ un opérateur linéaire, si $A_{d,Q}{}^{\perp} = U$ est un inverse Droite intérieur de A, alors:

$$\forall\, y \in \mathfrak{G}_Q\,; \quad Uy \text{ est une solution approximante de l'équation } Av = y.$$

Preuve:

Par la proposition (2-1-1) on a:

$$\|y - Qy\| \leq \|Av - z\|; \;\; \forall\, z \in \mathcal{R}(A)$$

Mais,

$$Qy = AUy\,; y \in \mathfrak{G}_Q \;=\; \mathcal{R}(A) \;\oplus\; \mathcal{N}(Q)$$

Alors,

$$v = Uy \quad \text{Minimise } \|Av - y\,\|$$

2-2-3 Théorème: Soit $A: \mathrm{D}(A) \longrightarrow W$ un opérateur linéaire; $\mathrm{D}(A) \subset N_1$, $A_{g,\mathrm{p}}{}^{\perp} = U$ est un inverse gauche intérieur orthogonal de A et l'équation $Ax = w$ admet une solution , alors Uw est une solution minimale de l'équation $Ax = w$.

Preuve:

Remarquons que,

$Uw + z$ est une solution de l'équation $Ax = w$ où $z \epsilon \mathcal{N}(A)$. Maintenant nous cherchons la solution minimale. Par la proposition (2-1-1) on a:

$$\|(\mathrm{I} - \mathrm{P})Uw\| \leq \|Uw - z\|;\ \forall\, z \,\epsilon\, \mathcal{R}(\mathrm{P})$$

Mais; $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{R}(\mathrm{P})$. Donc,

$$\|(\mathrm{I} - \mathrm{P})Uw\| \leq \|Uw - z\|;\ \forall\, z \,\epsilon\, \mathcal{N}(A)$$

Alors, $(\mathrm{I} - \mathrm{P})Uw$ est une solution minimale de l'équation $Ax = w$

Mais, $(\mathrm{I} - \mathrm{P})Uw = UAUw = UQy = Uw$.

2-2-4 Théorème: Soient $A\colon \mathrm{D}(A) \subset N_1 \longrightarrow N_2$ un opérateur linéaire et U est un inverse orthogonal de A, si pour tout x appartenant à N_2, il existe z dans $\overline{\mathcal{R}(A)}$ unique tel que

$$\|x - z\| < \|x - \mathrm{y}\|;\ \ \forall\, y \,\epsilon\, \overline{\mathcal{R}(A)}$$

Alors, Uy est une solution minimale de l'équation $Ax = y$.

Preuve:

Par le théorème (2-2-2) on a:

Uy est l'unique solution approximante de l'équation $Ax = y$, donc Uy est l'unique solution de l'équation $Ax = Qy$.

On applique le théorème (2-2-3) à l'équation $Ax = Qy$, nous trouvons

$UQy = UAUy = Uy$ est une solution minimale de l'équation $Ax = y$.

2-3 Solution minimale d'une équation linéaire dans un espace de Hilbert

2-3-1 Théorème:**[17]** Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et C une partie convexe Fermée non vide de $\mathcal{H}$. Pour tout $x \,\epsilon\, \mathcal{H}$; il existe un et un seul point y_0 de C en lequel la fonction

$y \longrightarrow \|x - y\|$ Atteint son minimum, pour tout y ϵ C .

2-3-2 Définition: Si $\mathcal{F}$ est un sous espace vectoriels fermé d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

On appelle projecteur orthogonal sur $\mathcal{F}$ l'opérateur $P_{\mathcal{F}}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui associe à tout vecteur $x \in \mathcal{H}$ sa projection orthogonal sur $\mathcal{F}$. On pose $P_{\mathcal{F}}x = y_0$

2-3-3 Proposition: Si $\mathcal{F}$ est un sous espace vectoriel fermé dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, alors pour tout $x \in \mathcal{H}$, $d(x, y) = inf\{d(x,z); z \in \mathcal{F}\} \Leftrightarrow \langle x-y, z\rangle = 0 \,; \forall\, z \in \mathcal{F}$

Preuve:

$\|x-y\|^2 \leq \|x-(y+\beta z)\|^2 = \|x-y\|^2 - 2Re\beta\langle z, x-y\rangle + \beta^2\|z\|^2$

Par conséquent,

$$2Re\beta\langle z, x-y\rangle \leq \beta^2\|z\|^2, \text{ on pose } \beta = \xi\overline{\langle z, x-y\rangle}\,, \xi \in \mathbb{R}, \text{ alors}$$

$2\,|\langle z, x-y\rangle| \leq \xi\,|\langle z, x-y\rangle|\,\|z\|$ et quand $\xi \longrightarrow 0$, alors

$$\langle z, x-y\rangle = 0\,; \forall z \in \mathcal{F}.$$

$\Leftarrow$) Si $\langle x-y, z\rangle = 0\,; \forall z \in \mathcal{F}$, alors

$$\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \leq \|x-y\|^2;\ \forall\, z \in \mathcal{F}.$$

2-3-4 Proposition: Soient $\mathcal{H}$ un espace Hilbertien et $\mathcal{F}$ un sous-espace vectoriel fermé Dans $\mathcal{H}$, alors $\mathcal{H} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^{\perp}$.

Nous rappelons que si $\mathcal{F}$ est un sous espace fermé d'un espace de Hilbert, alors $\mathcal{F}$ admet un supplémentaire orthogonal $\mathcal{F}^{\perp}$, dans ce cas le projecteur est auto-adjoint.

Réciproquement, si P est un projecteur auto-adjoint sur un espace de Hilbert, alors

$\mathcal{N}(P) \perp \mathcal{R}(P)$ et $\perp$ est symétrique.

2-3-5 Proposition: Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, alors :

a) $\mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^*)$

b) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^{\perp}$

Preuve:

a) $y \in \mathcal{R}(A)^{\perp} \Leftrightarrow \langle Ax;\, y\rangle = 0\,;\ \forall\, x \in \mathbb{C}^{n} \Leftrightarrow \langle x;\, A^{*}y\rangle = 0\,;\ \forall\, x \in \mathbb{C}^{n}$

$$\Leftrightarrow\ A^{*}y = 0\,;\ \forall\, x \in \mathbb{C}^{n}$$

$$\Leftrightarrow\ y \in \mathcal{N}(A^{*}).$$

2-3-6 Définition: Soient $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$ et $b \in \mathbb{C}^{m}$. On dit que $u \in \mathbb{C}^{n}$ est une solution minimale de l'équation $Ax = b$ si pour tout $x \in \mathbb{C}^{n}$ $\|Au - b\| \leq \|Ax - b\|$ et $\|u\| < \|u'\|;\ u' \in \mathcal{T}$

$\mathcal{T}$ est l'ensemble des solutions approximantes de l'équation $Ax = b$.

2-3-7 Proposition: Si $E \in \mathbb{C}_{r}^{n,n}$ et $E^{2} = E$, alors

$a)$ E est projecteur sur $\mathcal{R}(E)$, on le note par $P_{\mathcal{R}(E),\ \mathcal{N}(E)}$.

b) $\mathbb{C}^{n} = \mathcal{R}(E) \oplus \mathcal{N}(E)$.

Preuve:

a) $\forall\, y \in \mathcal{R}(E) \Longrightarrow \exists\, x \in \mathbb{C}^{n} : Ex = y \Longrightarrow \exists\, x \in \mathbb{C}^{n}\ \ E\,Ex = y$

$$\Longrightarrow\ E\,y = y.$$

b) Evident.

2-3-8 Proposition: Soient $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $AXA = A$ et $X \in \mathbb{C}^{n,m}$, alors :

$$AX = P_{\mathcal{R}(AX),\ \mathcal{N}(AX)}\ ,\quad XA = P_{\mathcal{R}(XA),\ \mathcal{N}(XA)}.$$

Preuve:

$AXA = A \Longrightarrow (AX)^{2} = AX$ et $AXA = A \Longrightarrow (XA)^{2} = XA$

On applique (2-3-7) sur AX et XA on a :

$AX = P_{\mathcal{R}(AX),\ \mathcal{N}(AX)} = P_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{N}(AX)}$ et $XA = P_{\mathcal{R}(XA),\ \mathcal{N}(XA)} = P_{\mathcal{R}(XA),\ \mathcal{N}(A)}$.

2-3-9 Proposition: Si $\mathbb{C}^{n} = L \oplus M$, alors:

$$\mathcal{R}(P_{L,M}^{*}) = M^{\perp},\ \mathcal{N}(P_{L,M}^{*}) = L^{\perp}\ \text{ et }\ P_{L,M}^{*} = p_{M^{\perp},L^{\perp}}.$$

Preuve:

On utilise la proposition (2-3-5) on trouve :

$$\mathcal{R}(\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}^{*}) = \mathcal{N}(\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}})^{\perp} = M^{\perp} \text{ et } \mathcal{N}(\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}^{*}) = \mathcal{R}(\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}})^{\perp} = L^{\perp}.$$

Par (2-3-7) nous pouvons écrire, $\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}^{*} = \mathrm{P}_{M^{\perp},L^{\perp}}$.

2-3-10 Théorème: Soit $\mathbb{C}^n = L \oplus M$ on a:

$M = L^{\perp}$ si et seulement si $\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}} = \mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}^{*}$

Preuve:

$\Longrightarrow)$ $\mathcal{R}(\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}^{*}) = \mathcal{N}(\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}})^{\perp} = M^{\perp} = L$

et $\mathcal{N}(\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}^{*})^{\perp} = \mathcal{R}(\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}})^{\perp} = L^{\perp} = \mathrm{M}$

D'autre part, on emploie la proposition (2-3-9) on a: $\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}^{*} = \mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}$.

$\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}^{*} = \mathrm{P}_{L,\mathrm{M}} \Longrightarrow \mathcal{R}(\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}^{*}) = L$, donc $M^{\perp} = L$.

2-3-11 Proposition: Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ on a:

$a)$ $AXA = A$ et $(AX)^{*} = AX \iff AX = \mathrm{P}_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(A)^{\perp}}$.

$b)$ $AXA = A$ et $(XA)^{*} = XA \iff AX = \mathrm{P}_{\mathcal{R}(X),\ \mathcal{R}(X)^{\perp}}$.

Preuve:

a) $\Longrightarrow)$ $AXA = A \Longrightarrow (AX)^{2} = AX$ et par (2-3-8) on a :

$$AX = \mathrm{P}_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{N}(AX).}$$

D'autre part, par la proposition (2-3-10) on a : $\mathcal{N}(AX) = \mathcal{R}(A)^{\perp}$

Donc; $AX = \mathrm{P}_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(A)^{\perp}}$.

$\Longleftarrow)$ $AX = \mathrm{P}_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(A)^{\perp}} \Longrightarrow AXA = \mathrm{P}_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(A)^{\perp}} A = A$.

$(AX)^{2} = AX \Longrightarrow \mathbb{C}^{\mathrm{n}} = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(AX) = \mathcal{R}(A) \oplus R(A)^{\perp}$

Car $\mathcal{N}(AX) = \mathcal{R}((AX)^{*})^{\perp}$

2-3-12 Proposition: Soient $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $\mathrm{Y} \in \mathbb{C}^{n,m}$, $A\mathrm{Y}A = A$ et $(A\mathrm{Y})^{*} = A\mathrm{Y}$ **.**

X est une solution de l'équation $AX = A\mathrm{Y}$ si et seulement si $AXA = A$ et $(AX)^{*} = AX$

Preuve:

Si X est une solution de l'équation $AX = AY$, alors :

$$AX = AY \Longrightarrow AXA = AYA = A$$

$$AX = AY \Longrightarrow (AX)^* = (AY)^* = AY \Longrightarrow (AX)^* = AX$$

Réciproquement, $AY = AXAY = (AX)^*(AY)^* = X^*A^*Y^*A^*$

$$= X^*A^* = (AX)^* = AX.$$

2-3-13 Théorème: Soient $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $b \in \mathbb{C}^m$ et $X \in \mathbb{C}^{n,m}$.

Si $AXA = A$ et $(AX)^* = AX$ alors, Xb une solution approximante de l'équation $Ax = b$.

Réciproquement, si Yb minimise l'équation $Ax = b$, alors $AYA = A$ et $(AY)^* = AY$.

Preuve:

$\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\forall b \in \mathbb{C}^m$ on a:

$$Ax - P_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(A)^\perp} b \in \mathcal{R}(A)$$

et

$$P_{\mathcal{R}(A),\mathcal{R}(A)^\perp} b - b = \left(P_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(A)^\perp} - I\right)b = P_{\mathcal{R}(A)^\perp,\ \mathcal{R}(A)} b \in \mathcal{R}(A)^\perp$$

On écrit, $Ax - b = (Ax - P_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(A)^\perp} b) + (P_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(A)^\perp} b - b)$

Nous avons;

$$\|Ax - b\|^2 = \left\|Ax - P_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(A)^\perp} b\right\|^2 + \left\| P_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(A)^\perp} b - b\right\|^2$$

Donc, $\|Ax - b\| \geq \left\|Ax - P_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(A)^\perp} b\right\|$

Par conséquent, u minimise l'équation $Ax = b$ si et seulement si u est une solution de l'équation $Ax = P_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(A)^\perp} b$.

Par la proposition (2-3-11) nous avons, $AX = P_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(A)^\perp}$

$Ax = P_{\mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}(A)^\perp} b \Longrightarrow Ax = AXb$, donc Xb minimise $Ax = b$

Réciproquement, si Yb minimise l'équation de $Ax = b$, alors :

$\mathrm{Y}b$ est une solution de l'équation $\mathrm{A}x = \mathrm{p}_{\mathcal{R}(\mathrm{A}),\ \mathcal{R}(\mathrm{A})^{\perp}}\, b$ c'est –à-dire $\mathrm{AY}b = \mathrm{p}_{\mathcal{R}(\mathrm{A}), \mathcal{R}(\mathrm{A})^{\perp}}\, b$

donc, $\mathrm{AY} = \mathrm{p}_{\mathcal{R}(\mathrm{A}),\ \mathcal{R}(\mathrm{A})^{\perp}}$

par la proposition (2-3-12) nous avons: $A\mathrm{Y}A = A$ et $(A\mathrm{Y})^* = A\mathrm{Y}$.

2-3-14 Proposition: Soient $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $\mathrm{Y} \in \mathbb{C}^{n,m}$, $A\mathrm{Y}A = A$ et $(A\mathrm{Y})^* = \mathrm{Y}A$

X une solution de l'équation $XA = \mathrm{Y}A$ si et seulement si $AXA = A$ et $(XA)^* = XA$**.**

Preuve:

si X une solution de l'équation $XA = \mathrm{Y}A$, alors :

$$XA = \mathrm{Y}A \Longrightarrow AXA = A\mathrm{Y}A = A$$

et

$$XA = \mathrm{Y}A \Longrightarrow (XA)^* = (\mathrm{Y}A)^* = \mathrm{Y}A \Longrightarrow (XA)^* = XA.$$

Réciproquement, $\mathrm{Y}A = \mathrm{Y}AXA = (\mathrm{Y}A)^*(XA)^* = A^*\, \mathrm{Y}^* A^*\, X^*$

$$= A^* X^* = (XA)^* = XA.$$

2-2-15 Lemme: Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, on définie $\widetilde{A}$ sur $\mathcal{R}(A^*)$ dans $\mathcal{R}(\mathrm{A})$**,** par:

$$\tilde{A}x = Ax\ ;\quad \forall\, x \in \mathcal{R}(A^*)$$

alors**,** $\widetilde{A}$ est une bijection

Preuve:

$\forall\, y \in \mathcal{R}(\mathrm{A}) \Longrightarrow \exists\, x \in \mathbb{C}^{\,n}: \tilde{A}x = Ax = y$

Donc, $\tilde{A}$ est surjective.

$\forall\, x, x' \in \mathcal{R}(A^*), \tilde{A}x = \tilde{A}x' \Longrightarrow Ax = Ax' \Longrightarrow (Ax - Ax') = 0 \Longrightarrow A(x - x') = 0$

Nous avons,$\mathbb{C}^{\mathrm{n}} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^*) \Longrightarrow \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A^*) = \{0\}$

$A(x - x') = 0$ et $(x - x') \in \mathcal{R}(A^*) \Longrightarrow x - x' = 0 \Longrightarrow x = x'$

Donc, $\tilde{A}$ est injective.

2-3-16 Proposition: Soient $A \in \mathbb{C}^{m,n}$**,** $b \in \mathcal{R}(\mathrm{A})$, alors L'équation $\mathrm{A}x = b$ admet une solution minimale unique.

Preuve:

Par le lemme (2-2-15) on a :

L'équation $\mathrm{A}x = b$ admet une solution unique x_0 telle que $x_0 \in \mathcal{R}(A^*)$

$\forall\, y \in \mathcal{N}(A)$; $x = x_0 + y$ est une solution de l'équation $\mathrm{A}x = b$

D'autre part, nous avons :$\|x\| = \|x_0\| + \|y\| \Longrightarrow \|x\| \geq \|x_0\|$.

2-3-17 Théorème: Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $X \in \mathbb{C}^{n,m}$ telles que $AXA = A$ et $(XA)^* = XA$.

Si l'équation $\mathrm{A}x = b$ admet une solution, alors Xb est une solution minimale unique.

Réciproquement, si l'équation $\mathrm{A}x = b$ admet une solution, et $\mathrm{Y}b$ est une solution minimale telle que $\mathrm{Y} \in \mathbb{C}^{n,m}$, alors $AYA = A$ et $(YA)^* = YA$.

Preuve:

Nous avons, $\mathrm{A}x = b \Longrightarrow AXAx = b \Longrightarrow AXb = b$

Donc, par conséquent, Xb est solution de l'équation $\mathrm{A}x = b$

On utilise (2-3-16); il existe $x_0 \in \mathcal{R}(A^*)$ unique telle que x_0 soit solution minimale de l'équation $\mathrm{A}x = b$.

D'ailleurs, $\mathcal{R}(XA) = \mathcal{N}(XA)^{\perp} = \mathcal{R}(A^*)$ et

par le lemme (2-3-15) on a : $x_0 = Xb$.

Réciproquement, si b est une colonne de la matrice A, alors $\mathrm{Y}b \in \mathcal{R}(A^*)$

Par (2-3-14) on a: $Xb = \mathrm{Y}b$; donc $XA = \mathrm{Y}A$,

Et par la Proposition **(**2-3-12) on a :

$$AYA = A \text{ et } (YA)^* = YA.$$

Exemple:

Soient $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $b \in \mathbb{C}^{m}$ **,** On considère l'équation $\mathrm{A}x = b$

Par le théorème (2-3-13)**:** $A^{+}b$ est une solution approximante de l'équation $\mathrm{A}x = b$.

Donc, $A^{+}b$ est une solution de l'équation $\mathrm{A}x = \mathrm{A}A^{+}b$

Par le théorème (2-3-17): $A^{+}\mathrm{A}A^{+}b$ est une solution minimale unique de l'équation $\mathrm{A}x = \mathrm{A}A^{+}b$

Alors, $A^{+}b$ est une solution minimale de l'équation $\mathrm{A}x = b$.

Chapitre 3: Inverse généralisé à projections Prédéterminées $A_{\mathrm{T,S}}^{(2)}$

Chapitre 3: Inverse généralisé à projections prédéterminées $A^{(2)}_{\mathrm{T,S}}$

Introduction

Dans ce chapitre plusieurs méthodes sont exposées pour trouver l'inverse généralisé d'une matrice dont le noyau S et l'image T sont donnés, on le note par $A^{(2)}_{\mathrm{T,S}}$.

3-1 Propriétés de l'inverse intérieur

3-1-1 Rappel: Soit E une matrice carrée d'ordre n**.** On dit que E est un projecteur si $\mathrm{E}^2 = \mathrm{E}$.

3-1-2 Proposition: Si $A \in \mathbb{C}^{\mathrm{m,n}}$, $X \in A\,\{1\}$ et $b \in \mathbb{C}^{\mathrm{m}}$, alors $A\,Xb = b$ admet une solution si et seulement si l'équation $Ax = b$ admet une solution.

Preuve:

$\Longrightarrow)$ $A\,Xb = b \Longrightarrow A\,x = b$ avec $x = Xb$.

$\Longleftarrow)$ $A\,x = b \Longrightarrow AXA\,x = b \Longrightarrow AXb = b$.

3-1-3 Lemme: Soient $A \in \mathbb{C}^{\mathrm{m,n}}$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{C}^{\mathrm{n,q}}$, alors

a) $\mathcal{R}(A\mathrm{B}) = \mathcal{R}(A) \Longleftrightarrow \mathrm{rg}\, A\mathrm{B} = \mathrm{rg}\, A$

b) $\mathcal{N}(A\mathrm{B}) = \mathcal{N}(\mathrm{B}) \Longleftrightarrow \mathrm{rg}\, A\mathrm{B} = \mathrm{rg}\, \mathrm{B}$

3-1-4 Lemme: Soient $A \in \mathbb{C}^{\mathrm{m,n}}_r$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $X \in A\,\{1\}$, alors

a) $X^* \in A^*\,\{1\}$

b) $\mathrm{rg}\, A \leq \mathrm{rg}\, X$

c) Si $U \in \mathbb{C}^{\mathrm{n,n}}$ et $V \in \mathbb{C}^{\mathrm{m,m}}$ sont inversibles, alors:

$$U^{-1}X\,V^{-1} \in VAU\,\{1\}$$

d) XA et AX sont projecteurs.

e) $\mathrm{rg}\, XA = \mathrm{rg}\, AX = \mathrm{rg}\, A$

Preuve:

a) $AXA = A \Longrightarrow (AXA)^* = A^* \Longrightarrow A^*X^*A^* = A^* \Longrightarrow X^* \in A^*\{1\}$.

b) rg (A) = rg $(AXA) \leq \min\{\text{rg}(A), \text{rg}(X)\} \leq \text{rg}(X)$.

c) et d) sont évidentes.

e) Par le lemme (3-1-3) on a:

$$\text{rg}\,(A) = \text{rg}\,(XA) \quad \text{et} \quad \text{rg}(AX) = \text{rg}\,(A)$$

Par conséquent, nous obtenons,

$$\text{rg}\,XA = \text{rg}\,AX = \text{rg}\,A.$$

3-1-5 Lemme: Soients $A \in \mathbb{C}_r^{m,n}$, $X \in A\,\{1\}$, alors

a) $XA = I_n \Leftrightarrow r = n$

b) $AX = I_m \Leftrightarrow r = m$

Preuve:

a) $\Longrightarrow$) $XA = I_n \Longrightarrow$ rg $(XA) = n \Longrightarrow$ rg $(A) = n$;

car, rg $(XA) =$ rg(A)

$\Longleftarrow$) rg $(XA) = n$, ce qui implique que XA est inversible.

$AXA = A \Longrightarrow (XA)^2 = XA \Longrightarrow (XA)^{-1}(XA)(XA) = (XA)^{-1}(XA) \Longrightarrow XA = I_n$.

b) De la même manière, nous pouvons prouver que $AX = I_m \Leftrightarrow r = m$

3-1-6 Lemme: Soients $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $X \in A\,\{1\}$, alors

$$X \in A\,\{1,2\} \Leftrightarrow \text{rg}\,(A) = \text{rg}(X).$$

Preuve:

$\Longrightarrow$) $XAX = X \Longrightarrow \mathcal{R}(XA) = \mathcal{R}(X) \Longrightarrow$ rg $(XA) =$ rg(X)

Par le Lemme (3-1-4) rg $(XA) =$ rg(A)

Donc, par conséquent

$$\text{rg}(X) = \text{rg}(A).$$

$$\Longleftarrow)\begin{cases} \mathrm{rg}(XA) = \mathrm{rg}(X) \\ \mathcal{R}(XA) \subset \mathcal{R}(X) \end{cases} \quad \Longrightarrow \mathcal{R}(XA) = \mathcal{R}(X)$$

D'autre part,

$$XB = XAB \quad \forall\, B \in \mathbb{C}^{n,m}$$

Alors, $AXB = AXAB = AB \Longrightarrow XAXB = XAB = XB.$

3-1-7 Définition: Soit A une matrice rectangulaire, telle que $A \in \mathbb{C}_r^{m,n}$. On dit que les matrices E et F forment la décomposition de même rang de A si $A = FE$, $F \in \mathbb{C}_r^{m,r}$ et $E \in \mathbb{C}_r^{r,n}$

3-1-8 Théorème: Soit $A \in \mathbb{C}_r^{m,n}$, alors il existe deux matrices F et E telles que $F \in \mathbb{C}_r^{m,r}$, $E \in \mathbb{C}_r^{r,n}$ et $A = FE$.

Preuve:

Soit $F \in \mathbb{C}^{m,r}$, les colonnes de F forment une base de $\mathcal{R}(A)$, donc

rg $(F)= r$ et E est la matrice unique qui vérifie l'équation $A = FE$

Nous avons $\mathrm{rg}(FE) \leq \mathrm{rg}(E)$, donc $\mathrm{rg}(E) = r$

3-1-9 Lemme: (Langenhop) Soit A une matrice carrée d'ordre n, on suppose que

$FG = A$, $F \in \mathbb{C}_r^{n,r}$ et $G \in \mathbb{C}_r^{r,n}$. Alors,

$$A^2 = A \text{ si et seulement si } GF = I_r$$

Preuve:

Par le lemme (3-1-5)

$$XF = GY = I_r \;\; X \in A\{1\}, Y \in A\{1\}.$$

D'autre part,

$$A^2 = A \Longrightarrow A^2 = = FG \Longrightarrow XFGFGY = XFGY \Longrightarrow GF = I_r$$

Maintenant, on suppose que $GF = I_r$

$A^2 = FGFG \Longrightarrow A^2 = FI_rG = FG = A.$

3-1-10 Lemme: Si $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $B \in \mathbb{C}^{n,m}$ et $X \in AB\{1\}$, alors

a) $ABXA = A \Leftrightarrow$ rg $(AB) =$ rg(A).

b) $BXAB = B \Leftrightarrow$ rg $(AB) =$ rg(B).

3-1-11 Lemme: Si $E \in \mathbb{C}^{n,n}$ et $E^2 = E$, alors

a) E^* et $I - E$ sont projecteurs.

b) $E \in E\{1,2\}$.

c) $E\,y = y \Leftrightarrow y \in R(E)$.

d) $\mathcal{N}(E) = \mathcal{R}(I - E)$

e) $E(I - E) = (I - E)E = 0$.

f) sont $\{0,1\}$ les valeurs propres de E.

Preuve:

a), b) et e) sont évidentes.

c) $E\,y = y \Leftrightarrow EE\,y = y \Leftrightarrow Ex = y$ où $x = E\,y \Leftrightarrow y \in \mathcal{R}(E)$

d) $y \in \mathcal{N}(E) \Leftrightarrow y - Ey = y \Leftrightarrow (I - E)y = y \Leftrightarrow y \in \mathcal{R}(I - E)$

f) $Ex = \lambda x \Longrightarrow EEx = \lambda Ex \Longrightarrow (1-\lambda)Ex = 0$

$$\Longrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } Ex = 0x.$$

3-1-12 Lemme: Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, $\mathbb{C}^n = L \oplus M$, alors

a) $P_{L,M} A = A \Leftrightarrow \mathcal{R}(A) \subset L$.

b) $A\, P_{L,M} = A \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) \supset M$

$P_{L,M}$ est un projecteur sur L de direction M dans $\mathbb{C}^n$.

Preuve:

a) $\Longrightarrow$) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(P_{L,M} A) \subset \mathcal{R}(P_{L,M}) = L$.

$\Longleftarrow$) $\forall\, y \in L,\ P_{L,M}\, y = y \Longrightarrow \forall\, y \in \mathcal{R}(A),\ P_{L,M}\, y = y$

$$\Longrightarrow \forall\, x \in \mathbb{C}^n,\ P_{L,M} Ax = Ax$$

b) $\Longrightarrow$) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A\, \mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}\,) \supset \mathcal{N}(\, \mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}\,) = \mathrm{M}$

$\Longleftarrow$) Par le lemme (3-1-11)

$$\mathcal{N}(\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}\,) = \mathcal{R}(\mathrm{I} - \mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}\,) = \mathrm{M}$$

Donc $A(\mathrm{I} - \mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}\,) = 0$; car $\mathcal{N}(A) \supset \mathrm{M}$.

En 1974 Ben-Israel a introduit la notion de $A^{(2)}_{\mathrm{T,S}}$

a- Formule d'un projecteur

3-1-13 Théorème: Soit $\mathbb{C}^{\mathrm{n}} = \mathrm{M} \oplus L$, alors il existe un projecteur unique noté par $\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}$, vérifiant:

$$\mathcal{R}(\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}) = L \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}(\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}) = \mathrm{M}.$$

Preuve:

Soit $\{\, x_1,\, x_2, \dots,\, x_P\}$ une base de L et $\{\, x_{P+1},\, x_{P+2}, \dots,\, x_{\mathrm{n}}\}$ est une base de M,

On définit l'opérateur $\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}$ par:

$$\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}} x = \begin{cases} x_i & x_i \in \{\, x_1,\, x_2, \dots,\, x_P\} \\ 0 & x_i \in \{\, x_{P+1},\, x_{P+2}, \dots,\, x_{\mathrm{n}}\} \end{cases} \quad \dots\dots\dots\dots(*)$$

Il est évident que $\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}$ est un projecteur.

On va montrer que $\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}$ est unique

$(*) \iff \mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}[\mathrm{U},\mathrm{V}] = [\mathrm{U},0]$

$[\mathrm{U},0]$ est une matrice de la forme $[\, x_1,\, x_2, \dots,\, x_P,\, 0_{P+1}, \dots,\, 0_{\mathrm{n}}]$

$[\mathrm{U},\mathrm{V}]$ est une matrice de la forme $[\, x_1,\, x_2, \dots,\, x_P,\, x_{P+1},\, x_{P+2}, \dots,\, x_{\mathrm{n}}]$

$[\mathrm{U},\mathrm{V}]$ est inversible parce que $\{\, x_1,\, x_2, \dots,\, x_P\,, x_{P+1}, , \dots,\, x_{\mathrm{n}}\}$ est une base de $\mathbb{C}^n$

Donc l'équation $\mathrm{P}_{L,\mathrm{M}}[\mathrm{U},\mathrm{V}] = [\mathrm{U},0]$ admet une solution unique et $\mathrm{P}_{L\,,\mathrm{M}} = [\mathrm{U},0][\mathrm{U},\mathrm{V}]^{-1}$.

b- La définition de l'inverse $A^{(2)}_{\mathrm{T,S}}$

3-1-14 Théorème: Soient $A \in \mathbb{C}_r^{m,n}$, $\mathcal{R}(A) = L$, $\mathcal{N}(A) = \mathrm{M}$, $\mathbb{C}^n = \mathrm{M} \oplus \mathrm{T}$

$\mathbb{C}^m = L \oplus \mathrm{S}$ et $Y \in A\{1\}$, alors:

a) $X \in A\{1\}$ tel que $\mathcal{N}(AX) = \mathrm{S}$ et $\mathcal{R}(XA) = \mathrm{T} \Leftrightarrow AX = \mathrm{P}_{L,\mathrm{S}}$ et $XA = \mathrm{P}_{\mathrm{T,M}}$.

b) $\forall\, Y \in A\{1\}$, $Z = \mathrm{P}_{\mathrm{T,M}} Y \mathrm{P}_{L,\mathrm{S}}$ est une solution qui vérifie : $AZ = \mathrm{P}_{L,\mathrm{S}}$, $ZA = \mathrm{P}_{\mathrm{T,M}}$

c) $Z = \mathrm{P}_{\mathrm{T,M}} Y \mathrm{P}_{L,\mathrm{S}}$ est l'inverse généralisé de A tel que $\mathcal{N}(Z) = \mathrm{S}$ et $\mathcal{R}(Z) = \mathrm{T}$

Dans ce cas Z est unique, on le note par $A_{\mathrm{T,S}}^{(1)}$.

Preuve:

a) $\Longrightarrow$) $AXA = A \Longrightarrow XAXA = XA \Longrightarrow (XA)^2 = XA$ et $\mathcal{R}(XA) = \mathrm{T}$

Par le Théorème (2-3-7) on a: $XA = \mathrm{P}_{\mathrm{T,M}}$

$AXA = A \Longrightarrow AXAX = AX \Longrightarrow (AX)^2 = AX$ et $\mathcal{N}(AX) = \mathrm{S}$

Par le Théorème (2-3-7) on a:

$$AX = \mathrm{P}_{L,\mathrm{S}}\,.$$

$\Longleftarrow$) $AX = \mathrm{P}_{L,\mathrm{S}} \Longrightarrow AXA = \mathrm{P}_{L,\mathrm{S}} A = A$

$AX = \mathrm{P}_{L,\mathrm{S}} \Longrightarrow \mathcal{N}(AX) = \mathrm{S}$ et $XA = \mathrm{P}_{\mathrm{T,M}} \Longrightarrow \mathcal{R}(XA) = \mathrm{T}$

b) nous avons, $AZ = A\mathrm{P}_{\mathrm{T,M}} Y \mathrm{P}_{L,\mathrm{S}}$

Par b) et a) du Lemme (3-1-12) on a

$$AZ = AY\mathrm{P}_{L,\mathrm{S}} = \mathrm{P}_{L,\mathrm{S}}\,.$$

Nous avons, $ZA = \mathrm{P}_{\mathrm{T,M}} Y \mathrm{P}_{L,\mathrm{S}} A$

Par le Lemme (3-1-12) on a:

$$ZA = \mathrm{P}_{\mathrm{T,M}} YA = \mathrm{P}_{\mathrm{T,M}}\,.$$

c) On va montre que $Z \in A\{1,2\}$

il est évident que, $Z \in A\{1\}$.

Par le Lemme (3-1-4-e) on a

$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{P}_{L,\mathrm{S}}) = \mathrm{rg}(\mathrm{P}_{\mathrm{T,M}}) = r$$

$Z = \mathrm{P}_{\mathrm{T,M}} Y \mathrm{P}_{L,\mathrm{S}} \Longrightarrow \mathrm{rg}(Z) \leq \mathrm{rg}\,(\mathrm{P}_{L\,,\mathrm{S}}) = r$

et par le Lemme (3-1-4-b) on a

$$r = \mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}\,(Z)$$

Donc,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\,(Z) = r.$$

Maintenant, par le Lemme (3-1-6**)** nous trouvons $Z \in A\,\{2\}$.

$Z \in A\,\{2\} \Longrightarrow \mathcal{R}(ZA) = \mathcal{R}(Z) \Longrightarrow \mathcal{R}(\mathrm{P}_{\mathrm{T,M}}) = \mathcal{R}(Z) = \mathrm{T}$

$Z \in A\,\{2\} \Longrightarrow \mathcal{N}(AZ) = \mathcal{N}(Z) \Longrightarrow \mathcal{N}(\mathrm{P}_{L,\mathrm{S}}) = \mathcal{N}(Z) = \mathrm{S}.$

Unicité: supposons que nous avons deux inverses généralisés Z_1, Z_2

$$Z_1 = Z_1 A Z_1 = Z_1 A Z_2 = Z_2 A Z_2 = Z_2.$$

3-1-15 Théorème: Soient $A \in \mathbb{C}_r^{\mathrm{m},n}$, $\mathrm{U} \in \mathbb{C}^{n,p}$, $V \in \mathbb{C}^{q,\mathrm{m}}$ et $X = \mathrm{U}(VA\mathrm{U})^{(1)}V$

Telles que $(VA\mathrm{U})^{(1)} \in (VA\mathrm{U})\,\{1\}$.

a) $X \in A\,\{1\} \iff \mathrm{rg}\,(VA\mathrm{U}) = \mathrm{rg}(A)$.

b) $X \in A\,\{2\}$ et $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(\mathrm{U}) \iff \mathrm{rg}\,(VA\mathrm{U}) = \mathrm{rg}(\mathrm{U})$.

c) $X \in A\,\{2\}$ et $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(V) \iff \mathrm{rg}\,(VA\mathrm{U}) = \mathrm{rg}(V)$.

d) $X = A^{(2)}_{\mathcal{R}(\mathrm{U}),\ \mathcal{N}(V)} \iff \mathrm{rg}\,(VA\mathrm{U}) = \mathrm{rg}(\mathrm{U}) = \mathrm{rg}(V) = r$

Preuve:

a) $\Longrightarrow) A = AXA = AXAXA = A\mathrm{U}(VA\mathrm{U})^{(1)}VA\mathrm{U}(VA\mathrm{U})^{(1)}VA$

$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,\big(A\mathrm{U}(VA\mathrm{U})^{(1)}VA\mathrm{U}(VA\mathrm{U})^{(1)}VA\big) \leq \mathrm{rg}\,(VA\mathrm{U}) \leq \mathrm{rg}\,(A) = r$

Donc, $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(VA\mathrm{U})$

$\Longleftarrow)\ r = \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(VA\mathrm{U}) \leq \mathrm{rg}\,(A\mathrm{U}) \leq \mathrm{rg}\,(A) = r$

$\mathrm{rg}\,(A\mathrm{U}) = \mathrm{rg}\,(A) = r$ ce qui implique $A\mathrm{U} = A$

On remarque que, $A\text{UY} = A \quad \text{Y} \in \mathbb{C}^{\text{p},d}$

Par le lemme (3-1-10) on a

$$AXA = A\text{U}(VA\text{U})^{(1)}VA = A\text{U}(VA\text{U})^{(1)}VA\text{UY} = A\text{UY} = A$$

b) $\Longrightarrow$) Nous avons, $X = XAX = \text{U}(VA\text{U})^{(1)}VA\text{U}(VA\text{U})^{(1)}V$ et rg (U) $=$ rg (X)

Donc,

$$\text{rg}\,(X) = \text{rg}\,(VA\text{U}) \leq \text{rg}\,(\text{U}) = \text{rg}\,(X)$$

$\Longleftarrow$) On a, rg $(VA\text{U}) =$ rg(U)

Par le lemme (3-1-10-b**)** on a:

$$XA\text{U} = \text{U}(VA\text{U})^{(1)}VA\text{U} = \text{U}$$

$XA\text{U} = \text{U} \Longrightarrow XA(\text{U}(VA\text{U})^{(1)}V) = \text{U}(VA\text{U})^{(1)}V \Longrightarrow XAX = X.$

rg $(X) =$ rg (U) $\Longrightarrow \mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(\text{U})$

c) Semblable à b).

d) $\Longrightarrow$)Nous avons, $X \in A\,\{1,2\}$, $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(\text{U})$ et $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(V)$

Par le théorème (3-1-14) on a

$$\text{rg}\,(VA\text{U}) = r\ ,\ \text{rg}\,(VA\text{U}) = \text{rg}\,R(\text{U}) \ \text{ et } \ \text{rg}\,(VA\text{U}) = \text{rg}\,R(V)$$

Donc, rg $(VA\text{U}) =$ rg(U) $=$ rg$(V) = r$

$\Longleftarrow$) par a) ,b) et c) on trouve:

$$X \in A\,\{1,2\}, \mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(\text{U}) \text{ et } \mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(V)$$

et par le théorème (3-1-14) on obtient:

$$X = A^{(2)}_{\mathcal{R}(\text{U}),\ \mathcal{N}(V)}$$

3-1-16 Théorème: Soient $A \in \mathbb{C}_r^{\text{m},n}$, T un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$, dim $T = s \leq r$

S un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\text{m}}$ et dim $S = \text{m} - \text{s}$, alors

$X \in A\,\{2\}$ tel que $\mathcal{R}(X) = T$ et $\mathcal{N}(X) = S \iff AT \oplus S = \mathbb{C}^m$

X est dans ce cas unique, et on le note par $A_{T,S}^{(2)}$.

Preuve:

$\Longrightarrow$)Nous avons, $\mathcal{R}(X) = T \Longrightarrow A\mathcal{R}(X) = AT \Longrightarrow \mathcal{R}(AX) = AT$

et $\mathcal{N}(AX) = \mathcal{N}(X) = S$

Par le Théorème (2-3-7) on a:

$$\mathcal{R}(AX) \oplus \mathcal{N}(AX) = AT \oplus S = \mathbb{C}^{\mathrm{m}}$$

$\Longleftarrow$) Soit U $\in \mathbb{C}_S^{n,S}$ tel que les colonnes de U forment une base de T

$V^* \in \mathbb{C}_S^{\mathrm{m},S}$ tel que les colonnes de V^* forment une base de $S^{\perp}$

On remarque que, dim $AT =$ rang $A\mathrm{U} =$ s .

rg(VAU) = s car

$VA\mathrm{U}y = 0 \Longrightarrow A\mathrm{U}y \perp S^{\perp} \Longrightarrow A\mathrm{U}y \in S \Longrightarrow A\mathrm{U}y = 0$; parce que $AT \cap S = \{0\}$

$A\mathrm{U}y = 0$ et rang $A\mathrm{U} =$ s $\Longrightarrow$ $y = 0$.

Et par le Théorème (3-1-15), nous obtenons

$$\mathrm{U}(VA\mathrm{U})^{-1}V = X = A^{(2)}_{\mathcal{R}(\mathrm{U}),\ \mathcal{N}(V)}.$$

Donc,

$$\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(\mathrm{U}) = T.$$

et

$$\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(V) = \mathcal{R}(V^*)^{\perp} = (S^{\perp})^{\perp} = S.$$

Unicité: Supposons que nous avons deux $X_1, X_2 \in A\,\{2\}$

$$X_1 = (X_1A)\,X_1 = (X_2A\,)X_1 = X_2(AX_1) = X_2AX_2 = X_2.$$

Exemple: calcul $A_{T,S}^{(2)}$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^{2,3}$

T un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$, engendré par le vecteur $e_3(0\,;0\,;1)$

S un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$, engendré par le vecteur $e'_1(1\;;0)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0\,,2)$, AT est engendré par le vecteur $(0\,;2)$

Remarquons que, $AT \oplus S = \mathbb{C}^2$

On pose $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = (0\,;\,1)$

Par le Théorème (3-1-16) on a

Il existe $X \in A\,\{2\}$ tel que $X = \mathrm{U}(VA\mathrm{U})^{-1}V$, $\mathcal{R}(X) = T$, $\mathcal{N}(X) = S$

$VA\mathrm{U} = (0{,}1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$

$X = \mathrm{U}(VA\mathrm{U})^{-1}V = \frac{1}{2}\,V\mathrm{U} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0\,,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3-1-17 Proposition: [**1**] Soient $A \in \mathbb{C}_r^{\mathrm{m},n}$, T un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$, dim $T = r$

S un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathrm{m}}$ et dim $S = \mathrm{m} - r$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) $AT \oplus S = \mathbb{C}^{\mathrm{m}}$.

b) $\mathcal{R}(A) \oplus S = \mathbb{C}^{\mathrm{m}}$ et $\mathcal{N}(A) \oplus T = \mathbb{C}^{\mathrm{n}}$.

c) Il existe $X \in A\,\{1{,}2\}$ tel que $\mathcal{R}(X) = T$ et $\mathcal{N}(X) = S$.

Exemple: calcul $A^{(2)}_{T,S}$

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^{4,3}$

T un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$, engendré par les vecteurs $e_1(0\,;0\,;1)$ et $e_2(1\,;\,0\,;1)$

S un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$, S engendré par les vecteurs suivants:

e_1' (0; 0 ; 0 ; 1) e_2' (1 ; 0 ; 0 ; 1)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0;\ -2;\ 1;\ -3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (3\,;-4\,;\ -4\,;\ -3)$$

$e_1'(0\,;\ -2\,;1\,;-3)$ et $e_2'(3\,;\ -4\,;\ -4\,;-3)$ sont linéaire indépendants, alors AT est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$, engendré par les vecteurs suivants :

$e_1'(0;\ -2;\ 1;\ -3)\ et\ e_2'(3;\ -4;\ -4;\ -3)$

On remarque que, $AT \oplus S = \mathbb{C}^4$ et dim $AT = \text{rg}(A) = 2$.

On pose

$$\text{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad V^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par la Proposition (3-1-17) on a

Il existe $X \in A\,\{1,2\}$ tel que $X = \text{U}(VA\text{U})^{-1}V,\ \mathcal{R}(X) = T\,,\ \mathcal{N}(X) = S$

$$(VA\text{U})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3-2 Les Méthodes du calcul $A_{T,S}^{(2)}$

a- Méthode de groupe inverse

3-2-1 Proposition:[19] Soient $A \in \mathbb{C}_r^{m,n}$, T un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$, dim $T = s \leq r$

S un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathrm{m}}$ et dim $S = \mathrm{m} - \mathrm{s}$, soit $G \in \mathbb{C}_r^{n,\mathrm{m}}$ tel que

$\mathcal{R}(G) = T$, $\mathcal{N}(G) = S$. Si A admet $A_{\mathrm{T,S}}^{(2)}$, alors:

a) $\operatorname{ind}(AG) = \operatorname{ind}(GA) = 1$.

b) $A_{\mathrm{T,S}}^{(2)} = G(AG)^{\#} = (GA)^{\#}G$.

Exemple:

Soient $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{R}(G) = (3;1) = T$, $\mathcal{N}(G) = (0;1) = S$

$AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{C}^2$

Par (3-1-16) on a : $A_{\mathrm{T,S}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$

$AG = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc; $(AG)^{\#} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $G(AG)^{\#} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$

$GA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ donc; $(GA)^{\#} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $(GA)^{\#}G = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$

b- Méthode de décomposition

3-2-2 Proposition: Soient $A \in \mathbb{C}_r^{\mathrm{m},n}$, F et E forment la décomposition de même rang de A tel que $A = \mathrm{FE}$, alors:

$a)$ $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(\mathrm{F})$, $b)$ $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(\mathrm{E})$

Preuve:

$a)$ $A = \mathrm{FE} \Longrightarrow \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(\mathrm{FE}) \subset \mathcal{R}(\mathrm{F}) \Longrightarrow \mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(\mathrm{F})$

$\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(\mathrm{F})$ et $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\mathrm{F})$ ce qui implique $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(\mathrm{F})$.

$b)$ $A = \mathrm{FE} \Longrightarrow \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(\mathrm{FE}) \supset \mathcal{N}(\mathrm{E}) \Longrightarrow \mathcal{N}(A) \supset \mathcal{N}(\mathrm{E})$

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\mathrm{E}) \Longrightarrow \dim\mathcal{N}(A) = \dim\mathcal{N}(\mathrm{E})$

Donc, $\mathcal{N}(A) \supset \mathcal{N}(\mathrm{E})$ et $\dim\mathcal{N}(A) = \dim\mathcal{N}(\mathrm{E})$ ce qui implique $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(\mathrm{E})$.

3-2-3 Proposition: [20] Soient $A \in \mathbb{C}_r^{\mathrm{m},n}$, T un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$, $\dim T = s \leq r$

S un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathrm{m}}$ et $\dim S = \mathrm{m} - \mathrm{s}$, soit $G \in \mathbb{C}_r^{n,\mathrm{m}}$ tel que $\mathcal{R}(G) = T$,

$\mathcal{N}(G) = S$, U et V forment la décomposition de même rang de G où $\mathrm{U}V = G$.

Si A admet $A^{(2)}_{\mathrm{T,S}}$, alors:

a) $VA\mathrm{U}$ est inversible.

b) $A^{(2)}_{\mathrm{T,S}} = \mathrm{U}(VA\mathrm{U})^{-1}V$

Preuve:

a) Par la proposition (3-2-2) on a **:**

$$\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(\mathrm{U}) = T$$

$$\mathcal{N}(G) = \mathcal{N}(V) = S$$

D'autre part, par le Théorème (3-1-16**)** on a

$$\mathcal{R}(AG) = \mathcal{R}(A\mathrm{U}) = A\mathcal{R}(\mathrm{U}) = AT$$

Cela veut dire que , $\mathrm{rg}(A\mathrm{U}) = \dim(AT) = \dim(T) = \mathrm{s}$

Remarquons que les matrices $A\mathrm{U}$ et G forment la décomposition de même rang de AG telles que $A\mathrm{U} \in \mathbb{C}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{m,s}}$, $V \in \mathbb{C}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{s,m}}$

Par la proposition (3-2-1) on a

$$\mathrm{ind}\,(AG) = 1$$

$\mathrm{ind}\,(AG) = 1 \Leftrightarrow (AG)^2 = AG \Leftrightarrow AP(VA\mathrm{U})V = A\mathrm{U}V,\ A\mathrm{U} \in \mathbb{C}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{m,s}}$ et $V \in \mathbb{C}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{s,m}}$

Alors, $VA\mathrm{U} \in \mathbb{C}^{\mathrm{s,s}}$

D'autre part,

$$\mathrm{rg}(A\mathrm{U}V) = \mathrm{rg}\,(AG) = \dim(AT) = \mathrm{s}$$

Par conséquent,

$$AUV \in \mathbb{C}_s^{s,s}.$$

b) $\mathrm{U}(VA\mathrm{U})^{-1}VA\mathrm{U}(VA\mathrm{U})^{-1}V = \mathrm{U}(VA\mathrm{U})^{-1}V$

Comme U et V forment la décomposition de même rg de G et $\mathrm{U}V = G$, alors

$$\mathcal{R}(\mathrm{U}(VA\mathrm{U})^{-1}V) = \mathcal{R}(\mathrm{U}) = T$$

Et

$$\mathcal{N}(\mathrm{U}(VA\mathrm{U})^{-1}V) = \mathcal{N}(V) = S$$

Exemple:

Soit $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^{3,4}$$

T est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$, engendré par les vecteurs suivants:

e_1 (0 ,0 , 1 ,1) , e_2 (1 , 1 ,0 , 0)

S est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$, S engendré par le vecteur e_1' $(1, 1, -1)$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^{4,3}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose $$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^{4,2} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^{2,3}$$

Donc,

$$VAU = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 19 \end{pmatrix}$$

Et

$$(VAU)^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 19 & -9 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathrm{T,S}}^{(2)} = U(VAU)^{-1}V = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19 & -9 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -9 & 1 \\ 10 & -9 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

3-3 les Méthodes numériques de calcul du $\mathbf{A}_{\mathbf{T,S}}^{(2)}$

Dans ce qui suit on propose des méthodes de calcul du $A_{\mathrm{T},S}^{(2)}$.

3-3-1 lemme: [6] Soient $A \in \mathbb{C}_r^{\mathrm{m},n}$ et $X \in \mathbb{C}^{n,\mathrm{m}}$, T un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$, $\dim T = s \leq r$, S un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathrm{m}}$ et $\dim S = \mathrm{m} - \mathrm{s}$, alors

$XAX = X$, $\mathcal{N}(X) = \mathrm{S}$ et $\mathcal{R}(X) = \mathrm{T}$ si et seulement si l'une des propriétés suivantes est valable:

$A\mathrm{T} \oplus S = \mathbb{C}^{\mathrm{m}}$ ……….$\{a\}$

$A^* S^\perp \oplus \mathrm{T}^\perp = \mathbb{C}^n$ ……$\{b\}$

$\mathrm{P}_{S^\perp} AT = S^\perp$ ………….$\{c\}$

$\mathrm{P_T}\, A^* S^\perp = \mathrm{T}$ ………… .$\{d\}$

Dans ce cas ***X*** est unique, on le note par $\mathbf{A}_{\mathbf{T},S}^{(2)}$.

Dans cette section nous laissons les sous espace T et S même comme dans le lemme (3-3-1) et les conditions $\{a\}, \{b\}$ sont valable.

3-3-2 Théorème: [17] Soit $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes:

1) $\lim_{k\to+\infty} A^k = 0$, $0 \in \mathbb{C}^{n,n}$

2) $\forall\, v \in \mathbb{C}^n$; $\lim_{k\to+\infty} A^k v = 0$

3) $\rho(A) < 1$ (rayon spectral).

4) il existe au mois une norme matricielle induite, telle que $\|A\| < 1$.

3-3-3 lemme: [17] Soit $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ et $\|A\| < 1$, alors

a) $(\mathrm{I} - A)$ est inversible .

b) $(\mathrm{I} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} A^k$.

c) $\|A\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$

a- Méthode itérative d'ordre 1.

3-3-4 Théorème: Soient $Y \in \mathbb{C}^{n,\mathrm{m}}$, $\mathcal{R}(Y) \subset \mathrm{T}$, $\mathcal{N}(Y) \supset \mathrm{S}$ et $\beta \in \mathbb{k}$.

On définit la suite $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ par:

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + \beta\, Y(\mathrm{I} - AX_k) \dots\dots\dots\dots \{a1\} \\ \qquad k = 0; 1; 2; 3 \dots \end{cases}$$

1) pour tout $X_0 \in \mathbb{C}^{n,\mathrm{m}}$ tel que $\mathcal{R}(X_0) \subset \mathrm{T}$

La suite $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\rho(\mathrm{p_T} - \beta\, YA) < 1$.

2) si $\rho(\mathrm{P_T} - \beta\, YA) < 1$ et $\lim_{k\to+\infty} X_k = X_\infty$ alors:

- $X_\infty = A^{(2)}_{\mathrm{T},S}$.
- $\mathrm{A}^{(2)}_{\mathrm{T,S}} = \beta(\mathrm{P}_{\mathrm{T}^\perp} - \beta\,\mathrm{YA})^{-1}\mathrm{Y} \dots\dots\dots\dots \{a2\}$

En plus si $\|\mathrm{P_T} - \beta\, YA\| = q_1 < 1$ on a

$$\left\|X_\infty - \mathrm{A}^{(2)}_{\mathrm{T,S}}\right\| \leq {q_1}^k(\|X_0\| + \beta(\sqrt{n} + q_1(1-q_1)^{-1}\|\mathrm{Y}\|))$$

3) Si toutes les valeurs propres de YA sont positives on a :

- $\rho(\mathrm{P_T} - \beta YA) < 1 \Leftrightarrow \mathrm{rg}\,(YA) = \dim \mathrm{T}$ et $0 < \beta < \frac{2}{\rho(YA)} \dots\dots\dots\dots \{a3\}$

Preuve:

1) On a $Y\mathrm{P}_{S^\perp} = Y$, $\mathrm{P}_{S^\perp} AA^{(2)}_{\mathrm{T},S} = \mathrm{P}_{S^\perp}$

Donc, $X_{k+1} - A^{(2)}_{\mathrm{T},S} = X_k - A^{(2)}_{\mathrm{T},S} + \beta Y(\mathrm{P}_{S^\perp} - \mathrm{P}_{S^\perp} AX_k)$

$$= X_k - A^{(2)}_{\mathrm{T},S} + \beta\, Y(\mathrm{P}_{S^\perp} AA^{(2)}_{\mathrm{T},S} - \mathrm{P}_{S^\perp} AX_k)$$

$$= \mathrm{P}_{\mathrm{T}}\,(X_k - A^{(2)}_{\mathrm{T},S}) - \beta YA(X_k - A^{(2)}_{\mathrm{T},S})$$

$$= (\mathrm{P}_{\mathrm{T}} \ - \beta\mathrm{YA}\,)^{k+1}(X_k - A^{(2)}_{\mathrm{T},S})$$

Par récurrence on trouve,

$$X_{k+1} - A^{(2)}_{\mathrm{T},S} \ = \ (\mathrm{P}_{\mathrm{T}} \ - \beta\mathrm{YA}\,)^{k+1}(X_0 - A^{(2)}_{\mathrm{T},S}) \ \ldots\ldots\ldots\ldots \{\mathrm{a}4\}$$

Et par le Théorème (3-3-1) on a:

$$\lim_{k\to+\infty}(\mathrm{P}_{\mathrm{T}} \ - \beta\mathrm{YA}\,)^{k} = 0$$

$$\lim_{k\to+\infty}(\,X_{k+1} - A^{(2)}_{\mathrm{T},S}) = \lim_{k\to+\infty}(\,\mathrm{P}_{\mathrm{T}} \ - \beta\mathrm{YA}\,)^{k+1}(X_k - A^{(2)}_{\mathrm{T},S}) = 0$$

Donc, $\lim_{k\to+\infty} X_{k+1} = A^{(2)}_{\mathrm{T},S}$

Maintenant on suppose que $\lim_{k\to+\infty} X_{k+1} = A^{(2)}_{\mathrm{T},S}$ et $X_0 \in \mathbb{C}^{n,\mathrm{m}}$ tels que

$$\mathcal{R}(X_0) \subset \mathrm{T} \quad \text{et} \quad X_0 = \mathrm{P}_{\mathrm{T}}\, X_0$$

On écrit {a4} sous la forme:

$$X_{k+1} - A^{(2)}_{\mathrm{T},S} \ = \ (\mathrm{P}_{\mathrm{T}} \ - \beta\mathrm{YA})^{k+1}\mathrm{P}_{\mathrm{T}}\,(X_0 - A^{(2)}_{\mathrm{T},S})$$

$$= \ (\mathrm{P}_{\mathrm{T}} \ - \beta\mathrm{YAP}_{\mathrm{T}}\,)^{k+1}(X_0 - A^{(2)}_{\mathrm{T},S}) \ \ldots\ldots\ldots\ldots \{\mathrm{a}5\}$$

On considère $V = [V_1, V_2]$ une matrice unitaire telle que $\mathcal{R}(V_1)$ = T et $\mathcal{R}(V_2)$ =$\mathrm{T}^\perp$, alors

$$V^*(\mathrm{P}_{\mathrm{T}} \ - \beta\ \mathrm{YA})V \ = \ \begin{bmatrix} I_S - \beta V_1{}^*\mathrm{YA}V_1 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \{b1\}$$

$$V^*(\mathrm{P}_{\mathrm{T}} \ - \beta\ \mathrm{YAP}_{\mathrm{T}}\,)V \ = \ \begin{bmatrix} I_S - \beta V_1{}^*\mathrm{YA}V_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \{b2\}$$

Par {a5} , $\{b2\}$ et $\{b1\}$ on a :

$$V^*(X_{k+1} - A^{(2)}_{\mathrm{T},S}\,) \ = V^*(\mathrm{P}_{\mathrm{T}} \ - \beta\ \mathrm{YAp}_{\mathrm{T}}\,)^{k+1} VV^*(X_0 - A^{(2)}_{\mathrm{T},S})$$

$$= V^*\begin{bmatrix} I_S - \beta V_1{}^*\mathrm{YA}V_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} VV^*(\mathrm{W} - A^{(2)}_{\mathrm{T},S})$$

$$= (V^*(\mathrm{P_T} \ - \beta V_1{}^*\mathrm{YA}V_1)V)^{k+1}V^*(\mathrm{W} - A^{(2)}_{\mathrm{T},S} \,)$$

$$= \begin{bmatrix} (I_S - \beta V_1{}^*\mathrm{YA}V_1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\lim_{k\to+\infty} X_{k+1} - A^{(2)}_{\mathrm{T},S} \ = 0 \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty}(I_S - \beta V_1{}^*\mathrm{YA}V_1)^{k+1} \ = 0$

On applique le Théorème (3-1-1), nous obtenons,

$$\rho(I_S - \beta V_1{}^*\mathrm{YA}V_1) < 1$$

Et par $\{b1\}$ on a

$$\rho(I_S - \beta V_1{}^*\mathrm{YA}V_1) = \rho(\mathrm{P_T} \ - \beta\, YA) < 1$$

2) $X_{k+1} = \ X_k + \beta\, Y(\mathrm{I} - AX_k)$

$$= X_k - \beta YAX_k + \beta\, Y$$

$$= \ \beta Y + (\mathrm{P_T} - \beta YA)X_k \text{ ; Puisque } \mathcal{R}(X_k) \subset \mathrm{T}$$

$$= \ \beta Y + (\mathrm{P_T} - \beta YA)(\beta Y + (\mathrm{P_T} - \beta YA)X_{k-1} \,)$$

$$= \ \beta Y + (\mathrm{p_T} - \beta YA)\beta Y + (\mathrm{P_T} - \beta YA)^2\beta Y + \cdots + (\mathrm{P_T} - \beta YA)^k\beta Y$$

$$+(\mathrm{P_T} - \beta YA)^{k+1}X_0$$

$$= [\mathrm{I} + (\mathrm{P_T} - \beta YA) + (\mathrm{P_T} - \beta YA)^2 + \cdots + (\mathrm{P_T} - \beta YA)^k]\beta Y$$

$$+(\mathrm{P_T} - \beta YA)^{k+1}X_0$$

Par le lemme (3-3-3) on a:

$$\lim_{k\to+\infty} \textstyle\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{P_T} - \beta YA)^k = (\mathrm{I} - \mathrm{P_T} + \beta YA\,)^{-1} = (\mathrm{P}_{\mathrm{T}^\perp} + \beta\mathrm{YA}\,)^{-1}.$$

$$\lim_{k\to+\infty} X_{k+1} \ = \lim_{k\to+\infty} \ \ [(\textstyle\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{P_T} - \beta YA)^k)\beta\mathrm{Y} + (\mathrm{P_T} - \beta YA)^{k+1}X_0]$$

$$= \beta(\mathrm{P}_{\mathrm{T}^\perp} \ - \beta\mathrm{YA}\,)^{-1}\mathrm{Y} = X_\infty$$

$$\lim_{k\to+\infty}(\,X_{k+1} - A^{(2)}_{\mathrm{T},S}\,) = \lim_{k\to+\infty} \ (\mathrm{P_T} \ - \beta\mathrm{YA}\,)^{k+1}\Big(X_0 - A^{(2)}_{\mathrm{T},S}\Big) = 0$$

Donc, $\qquad A^{(2)}_{\mathrm{T},S} = X_\infty.$

$$X_k - A^{(2)}_{T,S} = -(P_T - \beta YA)^k[I + (P_T - \beta YA) + (P_T - \beta YA)^2 + \cdots + (P_T - \beta YA)^k + \cdots]\beta Y$$

$$+(P_T - \beta YA)^k X_0$$

$$= (P_T - \beta YA)^k[-(I + (P_T - \beta YA) + (P_T - \beta YA)^2 + \cdots)\beta Y + X_0].$$

$$\left\| X_k - A^{(2)}_{T,S} \right\| \leq \|(P_T - \beta YA)^k\| \|[-(I + (P_T - \beta YA) + (P_T - \beta YA)^2 + \cdots)\beta Y + X_0]\|$$

$$\leq \|(P_T - \beta YA)^k\|(\|[(I + (P_T - \beta YA) + (P_T - \beta YA)^2 + \cdots)\beta Y]\| + \|X_0\|)$$

$$\leq \|(P_T - \beta YA)^k\|(\|[\beta(I + (P_T - \beta YA) + \ldots)\|Y\|]\| + \|X_0\|)$$

$$\leq {q_1}^k(\|X_0\| + \beta(\sqrt{n} + q_1(1 - q_1)^{-1}\|Y\|)).$$

3) On suppose que les valeurs propres de YA sont positives, si $\rho(P_T - \beta YA) < 1$, alors par le lemme (3-1-3)

$$I - (P_T - \beta YA) = (P_{T^\perp} - \beta YA) \text{ est inversible}$$

Par le $\{b1\}$ donné ci-après

$$V^*(P_{T^\perp} - \beta YA)V = \begin{bmatrix} \beta {V_1}^* YAV_1 & * \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Donc, ${V_1}^*YAV_1$ est inversible

rg (YA) $= s =$ dim T, car s = rg $({V_1}^*YAV_1) \leq$ rg (YA) $\leq$ rg (Y) $\leq$ dim T $= s$

D'autre part, les matrices ${V_1}^*YAV_1$ et YA ont les mêmes valeurs propres.

Soient $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq s}$ les valeurs propres de la matrice ${V_1}^*YAV_1$

Par les conditions suivantes $\{b1\}$ et $\rho(p_T - \beta YA) < 1$, nous obtenons

$$\rho(P_T - \beta YA) = \rho(I_S - \beta {V_1}^*YAV_1) = \rho(-I_S + \beta {V_1}^*YAV_1)$$

$$= \max_{1 \leq i \leq s}|-1 + \beta\lambda_i| \Longrightarrow |-1 + \beta\lambda_i| < 1$$

Alors, $0 < \beta < \frac{2}{\rho(YA)}$

Donc, $\rho(p_T - \beta YA) < 1$ implique {a3}

Réciproquement, supposons que rg (YA) = dim T et $0 < \beta < \frac{2}{\rho(YA)}$

rg $({V_1}^{*}YAV_1) \geq$ rg $(V_1{V_1}^{*}YAV_1{V_1}^{*})$ = rg (YA) = dimT = s

On a donc,

${V_1}^{*}YAV_1$ est inversible et ses valeurs propres sont positives

Nous avons,

$$0 < \beta < \frac{2}{\rho(YA)} = \frac{2}{\rho({V_1}^{*}YAV_1)}$$

Ce qui implique que, $\rho(I_S - \beta {V_1}^{*}YAV_1) < 1$

3-4-5 Théorème: Soit $Y \in \mathbb{C}^{n,m}$, $\mathcal{R}(Y) \subset T$, $\mathcal{N}(Y) \supset S$ et $\beta \in \mathbb{k}$. On définit la suite $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

par: $$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + \beta\,(I - X_k A)Y \ldots\ldots\ldots\ldots \{c1\} \\ \quad k = 0; 1; 2; 3 \ldots \end{cases}$$

1) Pour toute $X_0 \in \mathbb{C}^{n,m}$ telle que $\mathcal{R}(X_0) \supset S$, La suite $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $A^{(2)}_{T,S}$ si et seulement si $\rho(p_{S^\perp} - \beta\, AY) < 1$.

2) Si $\rho(p_{S^\perp} - \beta\, AY) < 1$ et $\lim_{k\to+\infty} X_k = X_\infty$, alors:

- $X_\infty = A^{(2)}_{T,S}$.
- $A^{(2)}_{T,S} = \beta Y(P_S - \beta\, AY)^{-1}$

En plus si $\|P_{S^\perp} - \beta\, AY\| = q_2 < 1$ on a:

$\left\|X_\infty - A^{(2)}_{T,S}\right\| \leq {q_2}^{k}(\|X_0\| + \beta(\sqrt{m} + q_2(1-q_2)^{-1}\|Y\|))$

3) Si toutes les valeurs propres de AY sont positives on a:

- $\rho(P_{S^\perp} - \beta\, AY) < 1 \Leftrightarrow$ rg (AY) = dim AT et $0 < \beta < \frac{2}{\rho(AY)}$

Preuve:

Semblable à la preuve du théorème (3-3-4).

3-4-6 Conséquence: Soit $Y \in \mathbb{C}^{n,m}$, $\mathcal{R}(Y) \subset T$, $\mathcal{N}(Y) \supset S$

Pour tout $X_0 \in \mathbb{C}^{n,m}$, $\mathcal{R}(X_0) \subset T$ et $\mathcal{N}(X_0) \supset S$ alors, chacune des itérations $\{a1\}, \{c1\}$

converge vers $A_{T,S}^{(2)}$ si et seulement si l'une des conditions suivantes équivalentes est vérifiée:

a) $\rho(P_T - \beta YA) < 1$

$b)$ $\rho(P_{S^\perp} - \beta\, AY) < 1$

Preuve:

Nous considérons la matrice unitaire $U = [U_1, U_2]$ telle que $\mathcal{R}(U_1) = S$ et $\mathcal{R}(U_2) = S^\perp$

$$U^*(P_{S^\perp} - \beta\, AY)U = \begin{bmatrix} I_S - \beta U_1{}^* YAU_1 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots \{c2\}$$

Les matrices $U_1{}^*YAU_1$ et $V_1{}^*YAV_1$ admettent les mêmes valeurs propres non nulles.

L'application de $\{b1\}$ et $\{c2\}$ implique

$$\rho(P_T - \beta YA) < 1 = \rho(P_{S^\perp} - \beta\, AY) < 1$$

Autrement, si $\rho(P_T - \beta YA) < 1 \Leftrightarrow \rho(P_{S^\perp} - \beta\, AY) < 1$, il est évident que les itérations $\{a1\}, \{c1\}$ convergent vers $A_{T,S}^{(2)}$.

3-3-b Méthode d'ordre m

Les méthodes itératives définies dans les théorèmes (3-3-4), (3-3-5) sont du premier ordre, maintenant on étudie les méthodes itératives d'ordre m; $m \geq 2$ et $(m \in \mathbb{N})$.

3-3-7 Théorème: Soient $Y \in \mathbb{C}^{n,m}$, $(Y) \subset T$, $\mathcal{N}(Y) \supset S$ et $\beta \in \mathbb{k}$.

Supposons $X_0 = \beta Y$. On définit la suite $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ par:

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k[I + (I - AX_k) + (I - AX_k)^2 + \cdots + (I - AX_k)^{m-1}] \dots\dots\dots\dots \{\#\#1\} \\ \qquad k = 0; 1; 2; 3 \dots \end{cases}$$

1) Quand $(P_T - X_0\, A) < 1$ implique la suite $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $A_{T,S}^{(2)}$

Où $$A_{T,S}^{(2)} = (P_{T^\perp} + X_0\, A)^{-1} X_0 \dots\dots\dots\dots \{\alpha 1\}$$

Si $\|P_T - X_0\, A\| = q_1 < 1$, alors

$$X_{k+1} - A_{T,S}^{(2)} = (P_T - X_0 A)^m (X_k - A_{T,S}^{(2)}) \dots\dots\dots\dots \{\alpha 2\}$$

$$\left\|X_\infty - \mathrm{A}_{\mathrm{T,S}}^{(2)}\right\| \leq {q_1}^{m^k}(\sqrt{\mathrm{n}} + q_1(1-q_1)^{-1})\|X_0\| \dots\dots\dots\dots \{\alpha 3\}$$

2) Si les valeurs propres de la matrice AY (où YA) sont positives, alors

$\{\alpha 2\}$ est réalisable si et seulement si rg (YA) = dim T et $0 < \beta < \frac{2}{\rho(YA)}$

Preuve:

1) Posons $\mathrm{R}_K = \mathrm{P}_{S^\perp} - \mathrm{P}_{S^\perp} AX_k$. On remarque que $X_k = X_k \mathrm{P}_{S^\perp}$; $\forall\, k \geq 0$

On a, $X_k(\mathrm{I} - AX_k)^j = X_k(\mathrm{P}_{S^\perp} - \mathrm{P}_{S^\perp} AX_k)^j = X_k {\mathrm{R}_K}^j \quad j \geq 1.$

Exprimons X_{k+1} par,

$$X_{k+1} = X_k[\mathrm{I} + (\mathrm{I} - AX_k) + (\mathrm{I} - AX_k)^2 + \cdots + (\mathrm{I} - AX_k)^{m-1}]$$

$$= X_k + X_k\mathrm{R}_K + X_k{\mathrm{R}_K}^2 + \cdots X_k{\mathrm{R}_K}^{m-1}$$

$$= X_k(\mathrm{I} + \mathrm{R}_K + {\mathrm{R}_K}^2 + \cdots {\mathrm{R}_K}^{m-1}) \dots\dots\dots\dots \{ab\}$$

De plus, nous avons

$${\mathrm{R}_K}^j - \mathrm{P}_{S^\perp} AX_k{\mathrm{R}_K}^j = {\mathrm{R}_K}^j \mathrm{p}_{S^\perp} - \mathrm{P}_{S^\perp} AX_k{\mathrm{R}_K}^j = (\mathrm{P}_{S^\perp} - \mathrm{P}_{S^\perp} AX_k)\, {\mathrm{R}_K}^j = {\mathrm{R}_K}^{j+1}$$

Donc,

$$\mathrm{R}_{K+1} = {\mathrm{R}_K}^m = {\mathrm{R}_0}^{m^{K+1}} \dots\dots\dots\dots \{ba\}$$

Par $\{ab\}$ et $\{ba\}$ on a

$$X_k = X_0\left(\mathrm{I} + \mathrm{R}_0 + {\mathrm{R}_0}^2 + \cdots {\mathrm{R}_0}^{m^K-1}\right) \dots\dots\dots\dots \{**\}$$

Et

$$X_0{\mathrm{R}_0}^j = X_0(\mathrm{P}_{S^\perp} - \mathrm{P}_{S^\perp} AX_0){\mathrm{R}_0}^{j-1} = (X_0\mathrm{P}_{S^\perp} - X_0\mathrm{P}_{S^\perp} AX_0){\mathrm{R}_0}^{j-1}$$

$$= (X_0 - X_0\, AX_0){\mathrm{R}_0}^{j-1}$$

$$= (\mathrm{P}_{\mathrm{T}} - X_0 A)X_0{\mathrm{R}_0}^{j-1}$$

$$= \cdots = (\mathrm{P}_{\mathrm{T}} - X_0A)^j X_0 \dots\dots\dots\dots \{2\}$$

On remplace $X_0{\mathrm{R}_0}^j$ par $(\mathrm{P}_{\mathrm{T}} - X_0A)^j X_0$ dans la formule $\{**\}$, nous trouvons

$$X_k = \left(\mathrm{I} + (\mathrm{P_T} - X_0A) \ + (\mathrm{P_T} \ - X_0A)^2 + \cdots (\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m^K-1}\right) X_0 \ldots\ldots\ldots\ldots \{** \ 1\}$$

Si $(\mathrm{P_T} - X_0A) < 1$, alors

$$\lim_{k\to+\infty} X_k = \lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}(\mathrm{P_T} - \beta YA)^k\right)X_0 = (\mathrm{P_{T^\perp}} + X_0\mathrm{A}\ )^{-1}X_0 = X_\infty \ldots\ldots\ldots \{\alpha 11\}$$

Mais par {a2}, nous avons $A^{(2)}_{\mathrm{T},S} = X_\infty$.

Donc, $\lim\limits_{k\to+\infty} X_k = A^{(2)}_{\mathrm{T},S}$

En utilisant $\{** \ 1\}$ et $\{\alpha 11\}$, nous obtenons

$$X_k - A^{(2)}_{\mathrm{T},S} = (\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m^K}(\mathrm{I} + (\mathrm{P_T} - X_0A) \ + (\mathrm{P_T} - X_0A)^2 + \cdots)X_0.$$

$$A^{(2)}_{\mathrm{T},S} - X_k = (\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m^K}(\mathrm{I} + (\mathrm{P_T} - X_0A) + (\mathrm{P_T} - X_0A)^2 + \cdots)X_0$$

$$= \left((\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m^K} + (\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m^K+1} + \cdots\right)X_0$$

$$= \left((\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m^K} + (\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m^K+1} + \cdots\right)X_0 + ((\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m} +$$

$$(\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m+1} + \cdots (\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m^K-1})X_0 - ((\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m} + (\mathrm{P_T} - \ X_0A)^{\ m+1}$$

$$+ \cdots (\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m^K-1})X_0$$

$$= \left(\left(\mathrm{P_T} - X_0A\right)^{\ m} + \cdots + \left(\mathrm{P_T} - X_0A\right)^{\ m^K} + \ X_0A)^{\ m^K+1} + \cdots\right)X_0 -$$

$$\left(I + (\mathrm{P_T} \ - X_0A)^{\ 1} \ldots (\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m^{K-1}-1}\ \right)X_0$$

$$= \ \left(\mathrm{P_T} - X_0A\right)^{\ m}(\mathrm{I} + (\mathrm{P_T} - X_0A) \ + (\mathrm{P_T} - X_0A)^2 + \cdots \ )X_0 -$$

$$(\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m}\left(I + (\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ 1} \ldots (\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m^{K-1}-1}\ \right)X_0$$

$$= \left(\mathrm{P_T} - X_0A\right)^{\ m} A^{(2)}_{\mathrm{T},S} - (\mathrm{P_T} - X_0A)^{\ m} X_{k-1}$$

$$= \left(\mathrm{P_T} - X_0A\right)^{\ m}(A^{(2)}_{\mathrm{T},S} - X_{k-1}\ ).$$

$$\left\|X_k - A^{(2)}_{\mathrm{T},S}\ \right\| \le \left\|(\mathrm{P_T} \ - X_0A)^{\ m^K}\right\| \|(\mathrm{I} + (\mathrm{P_T} - X_0A) + (\mathrm{P_T} - X_0A)^2 + \cdots)X_0\|$$

$$\leq {q_1}^{m^K}(\sqrt{n} + q_1(1-q_1)^{-1})\|X_0\|.$$

2) Semblable à la preuve du théorème ((3-1-4)- (3)).

3-3-8 Théorème: Soient $Y \in \mathbb{C}^{n,\mathrm{m}}$, $\mathcal{R}(Y) \subset \mathrm{T}$, $\mathcal{N}(Y) \supset \mathrm{S}$ et $\beta \in \Bbbk$.

Supposons que $X_0 = \beta Y$. On définit la suite $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ par:

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k[\mathrm{I} + (\mathrm{I} - X_kA) + (\mathrm{I} - X_kA)^2 + \cdots + (\mathrm{I} - X_kA)^{m-1}]X_k \ldots\ldots\ldots\ldots \{\#, \#1\} \\ k = 0; 1; 2; 3 \ldots \end{cases}$$

1) Si $(\mathrm{P}_{S^\perp} - AX_0) < 1$, alors la suite $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $A^{(2)}_{\mathrm{T},S}$

Où $$A^{(2)}_{\mathrm{T},S} = X_0(\mathrm{p}_S + AX_0)^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \{\alpha, 1\}$$

Si $\|\mathrm{P}_{S^\perp} - AX_0\| = q_2 < 1$, alors

$$X_{k+1} - A^{(2)}_{\mathrm{T},S} = (\mathrm{p}_{S^\perp} - \mathrm{A}X_0)^m(X_k - A^{(2)}_{\mathrm{T},S}) \ldots\ldots\ldots\ldots \{\alpha, 2\}$$

$$\left\|X_k - \mathrm{A}^{(2)}_{\mathrm{T,S}}\right\| \leq {q_2}^{m^k}(\sqrt{\mathrm{n}} + q_2(1-q_2)^{-1})\|X_0\| \ldots\ldots\ldots\ldots \{\alpha, 3\}$$

Preuve:

On pose $\widetilde{\mathrm{R}}_k = \mathrm{P_T} - X_k\mathrm{AP_T}$, comme dans la preuve du théorème (3-3-4)

Nous pouvons obtenir

$$\widetilde{\mathrm{R}}_{k+1} = {\widetilde{\mathrm{R}}_k}^{m} = {\widetilde{\mathrm{R}}_0}^{m^{K+1}} \ldots\ldots\ldots\ldots \{b, a\}$$

$$X_k = X_0\left(\mathrm{I} + \widetilde{\mathrm{R}}_0 + {\widetilde{\mathrm{R}}_0}^2 + \cdots {\widetilde{\mathrm{R}}_0}^{m^K-1}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \{**\}$$

$$X_k = X_0\left(\mathrm{I} + (\mathrm{P}_{S^\perp} - AX_0) + (\mathrm{P}_{S^\perp} - AX_0)^2 + \cdots (\mathrm{P}_{S^\perp} - AX_0)^{m^K-1}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \{*, * 1\}$$

Si $(\mathrm{P}_{S^\perp} - AX_0) < 1$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} X_k = \lim_{k\to+\infty} X_0\left(\textstyle\sum_{n=0}^{k}(\mathrm{P}_{S^\perp} - AX_0)^k\right) = X_0(\mathrm{P}_S - AX_0)^{-1} = X_\infty \ldots\ldots\ldots \{\alpha, 11\}$$

3-3-9 Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) $\rho(\mathrm{P_T} - X_0A) < 1$.

2) $\rho(\mathrm{P}_{S^{\perp}} - AX_0) < 1.$

3) $\rho(\mathrm{R}_0) = \rho(\mathrm{P}_{S^{\perp}} - \mathrm{P}_{S^{\perp}} AX_0) < 1.$

4) $\rho(\widetilde{\mathrm{R}}_0) = \rho(\mathrm{P}_{\mathrm{T}} - X_0 \mathrm{AP}_{\mathrm{T}}) < 1.$

3-3-10 Proposition: [1] Si A est une matrice de type m×n, alors

$A^{+} = A^{(2)}_{\mathcal{R}(A^*),\mathcal{N}(A^*)}.$

$A^{+}_{\mathrm{M,N}} = A^{(2)}_{\mathrm{N}^{-1}\mathcal{R}(A^*),\ \mathrm{M}^{-1}\mathcal{R}(A^*)}$

M et N sont des matrices hermitiennes définies positives d'ordre m et n respectivement.

Si A une matrice de type n×n, alors

Si ind $(A) = \mathrm{k}$, on a

$$A^{D} = A^{(2)}_{\mathcal{R}(A^{\mathrm{k}}),\mathcal{N}(A^{\mathrm{k}})}.$$

Si ind $(A) = 1$, on a

$$A^{\#} = A^{(2)}_{\mathcal{R}(A),\mathcal{N}(A)}.$$

3-3-11 Exemples : Soit A une matrice de type m×n, On pose

$X_{k+1} = X_k + \beta Y(\mathrm{I} - AX_k),\qquad \mathrm{k} \geq 0$

Ou

$X_{k+1} = X_k + \beta(\mathrm{I} - AX_k)Y,\qquad \mathrm{k} \geq 0$

Si $Y = A^*$ et $0 < \beta < \frac{2}{\rho(A^*A)}$ alors

$$\lim_{k\to+\infty} X_{k+1} = A^{+}.$$

Si $Y = N^{-1}A^*M$ et $0 < \beta < \frac{2}{\rho(AN^{-1}A^*M)}$, alors

$$\lim_{k\to+\infty} X_{k+1} = A^{+}_{M,N}.$$

Si $Y = A^{\mathrm{k}} {A^*}^{2\mathrm{k}+1} A^{\mathrm{k}}$, alors

$$\lim_{k \to +\infty} X_{k+1} = A^{D}.$$

Si $Y = A\,(A^{*})^{3}A$ et $0 < \beta < \frac{2}{\rho(A^{2\mathrm{k}+1}A^{*2\mathrm{k}+1})}$, alors

$$\lim_{k \to +\infty} X_{k+1} = A^{\#}.$$

Chapitre 4:
EP
Opérateurs

Chapitre 4: EP Opérateurs

Introduction

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, un EP opérateur ou opérateur à projection égales et tel que $A^{+}A = A\,A^{+}$; mais notre exposé on commencera par une définition équivalente. Dans ce chapitre on présente aussi les conditions nécessaires et suffisantes pour que le produit de deux opérateurs EP avec images fermées soit un EP opérateur avec une image fermée .

4-1 EP opérateur et représentation matricielle

4 -1-1 Définition: Soit A un opérateur linéaire de $\mathcal{H}$ dans lui même. On dit que A est EP opérateur linéaire où bien opérateur à projection égales si $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^{*})$.

4-1-2 Proposition:[11] Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; s'il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que $\mathcal{R}(A^{k+1}) = \mathcal{R}(A^{k})$, alors A^{D} existe et $A^{D} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

A^{D} := L'inverse de Drazin de A.

4-1-3 Remarque: si k =1, alors $A^{D} = A^{\#}$

$A^{\#}$:= Groupe inverse de A

4-1-4 Proposition:[11] Soient $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{H} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A)$, alors la représentation matricielle de A par rapport à la somme orthogonale $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A) = \mathcal{H}$

est de la forme $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}$

et $A^{\#} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; où $A_1 = A_{/\mathcal{R}(A)} : \mathcal{R}(A) \longrightarrow \mathcal{R}(A)$ est bijectif.

4-1-5 Proposition: [11] Soient $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et $\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}$, alors on a la représentation :

$$A = \begin{bmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix}$$

Et $A^+ = \begin{bmatrix} \overline{A}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tel que $\overline{A} = A_{/\mathcal{R}(A^*)} : \mathcal{R}(A^*) \longrightarrow \mathcal{R}(A)$

4-1-6 Remarque: Si A est EP opérateur linéaire on a: $A^+ = A^\#$

4-1-7 Théorème: Soient $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}$. Si $[A^+A, A + A^+] = 0$ et $[AA^+, A + A^+] = 0$, alors A est EP opérateur.

Preuve:

$[A^+A, A + A^+] = 0 \Longrightarrow (A^+A)(AA^+) = AA^+$, donc $\mathcal{R}(A^+A) \subseteq \mathcal{R}(AA^+) \Leftrightarrow \mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(A)$

De la même manière, nous pouvons prouver que $[AA^+, A + A^+] = 0 \Longrightarrow \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$.

4-1-8 Proposition: Soit A une matrice de type $n \times n$ et $rg(A) = r$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) A est EP matrice

2) $A^+ = A^\#$.

3) $\mathbb{C}^n = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A)$.

4) il existe une matrice unitaire U telle que

$$A = U \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*; \text{ où } A_1 = A_{/\mathcal{R}(A)} : \mathcal{R}(A) \longrightarrow \mathcal{R}(A)$$

Preuve:

1) $\Longrightarrow$ 2) Par les définitions (1-7-2) et (1-9-1) on a: $A^+ = A^\#$.

2) $\Longrightarrow$ 3) $A^+ = A^\# \Longrightarrow \mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^\#) \Longrightarrow \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A)$.

3) $\Longrightarrow$ 1) $\mathbb{C}^n = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^*)$ alors, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$.

Nous allons prouver l'équivalence entre 3) et 4)

Il est évident que 4) implique 3)

Soit $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ une base de $\mathcal{R}(A)$ et $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-r}\}$ une base de $\mathcal{N}(A)$

Remarquons que $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_r, w_1, w_2, \dots, w_{n-r}\}$ est une base $\mathbb{C}^n$, par le théorème de Gram-Schmidt il est possible, à partir d'une famille libre $\mathfrak{B}$ de vecteurs de $\mathbb{C}^n$, de construire une famille orthonormées qui engendre le même espace. Donc U^* est une matrice de passage de la base $\mathfrak{B}$ à la base orthonormée.

4-1-9 Théorème: Soit A une matrice de type $n \times n$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) A est EP matrice
2) $[A^+A, A + A^+] = 0$
3) $[AA^+, A + A^+] = 0$
4) $[A^+A, A + A^*] = 0$
5) $[AA^+, A + A^*] = 0$
6) $[A, A^+A] = 0$
7) $[A, AA^+] = 0$

Preuve:

Il est évident que 1) implique les autre propriétés.

On va montrer que 2) ⟹1)

$[A^+A, A + A^+] = 0 \Leftrightarrow A^+A^2 + A^+ - {A^+}^2 = A \Leftrightarrow A^+(A^2 + I - A^+) = A \Rightarrow \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$

Donc; $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$ parce que $rg(A) = rg(A^*)$.

La preuve des 3) ⟹1), 4) ⟹1), 5) ⟹1) est semblable à celle de 2) ⟹1).

Maintenant; on montre que 6) implique 1)

$[A, A^+A] = 0 \Leftrightarrow A = A^+A^2 \Rightarrow AA^+ = (A^+A)(AA^+) \Rightarrow \mathcal{R}(A^+A) \subseteq \mathcal{R}(AA^+)$

Donc, $\mathcal{R}(A^+A) = \mathcal{R}(AA^+)$; parce que $rg(A^+A) = rg(AA^+)$

La démonstration de 7) ⟹1) est semblable à la preuve 6) ⟹1).

D'autre part, AA^+ et A^+A sont des projecteurs orthogonaux, alors $AA^+ = A^+A$

4-2 Caractérisations des EP opérateurs

4-2-1 Lemme:[12] Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Banach $B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ et $B_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$.

On définit A par:

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \end{bmatrix}$$

Alors, $B_1^{\#}$ existe si et seulement si $A^{\#}$ existe **;** Dans ce cas

$$A^{\#} = \begin{bmatrix} B_1^{\#} & (B_1^{\#})^2 B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4-2-2 Lemme: Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}$,

a) La représentation matricielle de A par rapport à la somme orthogonale $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*)$

est de la forme:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix} \ldots\ldots.(1\text{-}1)$$

$B = A_1 A_1^* + A_2 A_2^* : \mathcal{R}(A) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathrm{L})$ définie positive, alors:

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^* B^{-1} & 0 \\ A_2^* B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

En plus, si $\operatorname{ind}(A)=1$ alors: A_1 est inversible

et
$$A^{\#} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-2} A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) la représentation matricielle de A par rapport à la somme orthogonale $\mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A)$

est de la forme: $A = \begin{bmatrix} A_3 & 0 \\ A_4 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}$ …….(1-2)

$U = A_3^* A_3 + A_4^* A_4 : \mathcal{R}(A) \longrightarrow \mathcal{R}(A)$ est définie positive, alors

$$A^{+} = \begin{bmatrix} \mathrm{U}^{-1}{A_3}^{*} & \mathrm{U}^{-1}{A_4}^{*} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En plus, si ind(A)=1 alors,

A_3 est inversible et $A^{\#} = \begin{bmatrix} {A_3}^{-1} & 0 \\ A_4{A_3}^{-2} & 0 \end{bmatrix}$

Preuve:

a) On a, $A^{*} = \begin{bmatrix} {A_1}^{*} & 0 \\ {A_2}^{*} & 0 \end{bmatrix}$ nous obtenons $AA^{*} = \begin{bmatrix} \mathrm{B} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Donc, $(AA^{*})^{\#} = (AA^{*})^{+} = \begin{bmatrix} \mathrm{B}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

D'autre part,

A^{+}=$A^{*}(AA^{*})^{+}$=$\begin{bmatrix} {A_1}^{*} & 0 \\ {A_2}^{*} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{B}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {A_1}^{*}\mathrm{B}^{-1} & 0 \\ {A_2}^{*}\mathrm{B}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

Nous appliquons le lemme (4-2-1), on obtient l'expression de $A^{\#}$

$$A^{\#} = \begin{bmatrix} {A_1}^{-1} & {A_1}^{-2}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Nous appliquons les résultats de la partie précédente de la preuve à A^{*} et on trouve les adjoints de $(A^{*})^{+}$ et $(A^{*})^{\#}$.

Dans le théorème suivant nous considérons des opérateurs à l'image fermée et d'indice égale à 1 Ces opérateurs sont simultanément Moore-Penrose et groupe inverse, mais les deux inverses sont en général différents.

4-2-3 Théorème: Soient $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}$, alors A est EP opérateur si et seulement si ind(A) = 1 et l'une des conditions suivantes est vérifiée:

1) $A\,A^{+}A^{\#} = A^{+}A^{\#}A$. 2) $A\,A^{+}A^{\#} = A^{\#}A\,A^{+}$.

3) $AA^{\#}A^{*} = A^{*}A\,A^{\#}$. 4) $AA^{\#}A^{+} = A^{+}AA^{\#}$.

5) $AA^{\#}A^{+} = A^{\#}A^{+}A.$ 6) $A^{+}A\,A^{\#} = A^{\#}A^{+}A$

7) $A^{+2}A^{\#} = A^{+}A^{\#}A^{+}$ 8) $A^{+2}A^{\#} = A^{\#}A^{+2}$

9) $A^{+}A^{\#} = A^{\#2}$ 10) $A^{+2} = A^{\#2}$

11) $AA^{+2} = A^{\#}$ 12) $A^{+} = A^{*}A^{\#}$

13) $A^{+}A\,A^{\#} = A^{+}$ 14) $A^{\#}A^{+}A = A^{+}$

Preuve:

Si ind(A) = 1, il est évident que les conditions sont équivalentes.

Donc, il suffit montrer que , A est un EP opérateur si et seulement si ind(A) = 1

et la condition (4) est valable. Si A est un EP opérateur, alors de (4), on obtient les équations suivantes**:** $AA^{+} = A^{+}A$ et $A^{+}= A^{\#}$. Réciproquement, ind(A) = 1 $\Longrightarrow$ $A^{+} = A^{\#}$ et par la représentation (1-1) L'équation (4) est équivalente à $\begin{bmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-2}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

L'équation $A_1^{-2}A_2 = 0$ implique $A_2 = 0$

Donc, par le lemme (4 -3-2) A est un EP opérateur.

4-3 produit des EP opérateurs

4-3-1 Lemme: Soient A et B deux opérateurs linéaires de $\mathcal{H}$ dans lui même si $A = A^{*}$ et $B = B^{*}$, alors: $(AB)^{*} = AB$ si et seulement si $BA = AB$.

Preuve:

$(AB)^{*} = AB \Longrightarrow B^{*}A^{*} = AB \Longrightarrow BA = AB$.

Réciproquement, $(AB)^{*} = B^{*}A^{*} = BA = AB$.

4-3-2 Proposition: Soient $A , B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sont EP opérateurs tels que $\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}$ et $\mathcal{R}(B) = \overline{\mathcal{R}(B)}$. Si $BA = AB$, alors AB est un EP opérateur et $\mathcal{R}(AB) = \overline{\mathcal{R}(AB)}$.

Preuve:

Nous avons, $A^{\#}A = AA^{\#}$ et $B^{\#}B = BB^{\#}$

Par [10]; $A^{\#}, A, B^{\#}, B$ sont mutuellement commutatifs, et on a $(AB)^{\#} = B^{\#}A^{\#} = B^{+}A^{+}$ et

$(ABB^{\#}A^{\#})^{*} = (BB^{\#}AA^{\#})^{*} = (BB^{+}AA^{+})^{*} = (AA^{+})^{*}(BB^{+})^{*} = AA^{+}BB^{+} = AA^{\#}BB^{\#} = ABB^{\#}A^{\#}$

$(B^{\#}A^{\#}AB)^{*} = (A^{\#}AB^{\#}B)^{*} = (A^{+}AB^{+}B)^{*} = (B^{+}B)^{*}(A^{+}A)^{*} = B^{+}BA^{+}A = B^{\#}BA^{\#}A = B^{\#}A^{\#}$ AB.

Exemple:

Soient $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il est évident que A et B sont EP matrices

Nous avons, $BA = AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc, AB est EP matrices.

4-3-3 Remarque: Soient $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, dans [8] on a démontré que si $\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(B)$ et $\mathcal{R}(AB)$ sont fermés, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$.

b) $\mathcal{R}(A^{*}AB) \subset \mathcal{R}(B)$ et $\mathcal{R}(BB^{*}A^{*}) \subset \mathcal{R}(A^{*})$.

4-3-4 Théorème: Soient $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ des EP opérateurs tels que $\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}$ et $\mathcal{R}(B) = \overline{\mathcal{R}(B)}$. Si $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$, alors: $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$.

Preuve:

On a $\mathcal{R}(A^{*}) = \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(B^{*})$**.**

$\mathcal{R}(A^{*}AB) = A^{*}A\mathcal{R}(B) = A^{*}A\mathcal{R}(A^{*}) = \mathcal{R}(A^{*}) = \mathcal{R}(B)$

$\mathcal{R}(BB^{*}A^{*}) = BB^{*}\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(A^{*})$

Donc, par la remarque (4 -3-3**)**, on a $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$

4-3-5 Proposition: Soit A est EP matrice carrée de type $n \times n$, alors:

$$A = A^{2}A^{+} = A^{2}(A^{*}A)^{+}A^{*}$$

Preuve:

On a $A^{+} = (A^{*}A)^{+}A^{*}$ et $A = A^{2}A^{+}$, alors: $A = A^{2}(A^{*}A)^{+}A^{*}$

4-3-6 Proposition: Soient A, B des EP matrices de même ordre, les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) AB est EP matrice.

2) $(A\mathrm{B})A^{\pi} = 0$ et $\mathrm{B}^{\pi}(A\mathrm{B}) = 0$.

3) $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(A\mathrm{B})$ et $\mathcal{R}(A\mathrm{B}) \subset \mathcal{R}(\mathrm{B})$.

4) $\mathcal{N}(A\mathrm{B}) = \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(\mathrm{B})$ et $\mathcal{R}(A\mathrm{B}) = \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(\mathrm{B})$

Preuve:

1) $\Longrightarrow$ 2) On a , $A^{\pi}A = A^{\pi}A = 0$

Par la Proposition précédente on a:

$(A\mathrm{B})A^{\pi} = \mathrm{U}(A\mathrm{B})^{*}A^{\pi} = \mathrm{U}\mathrm{B}^{*}A^{*}A^{\pi} = \mathrm{U}\mathrm{B}^{*}(A^{\pi}A)^{*} = 0$

$(A\mathrm{B})^{*}$ est EP matrice, alors: $\mathrm{B}^{*}A^{*} = \mathrm{U}A\mathrm{B}$

$\mathrm{B}^{*}A^{*}\mathrm{B}^{\pi} = \mathrm{U}A\mathrm{B}\mathrm{B}^{\pi} = 0 \Longrightarrow (A\mathrm{B})^{*}\mathrm{B}^{\pi} = \mathrm{B}^{\pi}(A\mathrm{B}) = 0$

2) $\Longrightarrow$ 3) $(A\mathrm{B})A^{\pi} = 0$ et $\mathcal{R}(A^{\pi}) = \mathcal{N}(A)$, donc $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(A\mathrm{B})$

$\mathrm{B}^{\pi}(A\mathrm{B}) = 0$ et $\mathcal{R}(\mathrm{B}) = \mathcal{N}(\mathrm{B}^{\pi})$, donc $\mathcal{R}(A\mathrm{B}) \subset \mathcal{R}(\mathrm{B})$.

3) $\Longrightarrow$ 4) Supposons que $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(A\mathrm{B})$, on définit φ sur $\mathcal{N}(A\mathrm{B})/\mathcal{N}(\mathrm{B})$ dans $\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(\mathrm{B})$ par: $\varphi\left(x + \mathcal{N}(\mathrm{B})\right) = \mathrm{B}x$

φ est un isomorphisme, donc $\dim(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(\mathrm{B})) = \dim \mathcal{N}(A\mathrm{B}) - \dim \mathcal{N}(\mathrm{B})$

$\mathbb{C}^{n} = \mathcal{N}(\mathrm{B}) \oplus \mathcal{R}(\mathrm{B})$, nous déduisons que:

$(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(\mathrm{B})) \oplus \mathcal{N}(\mathrm{B}) \subset \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(\mathrm{B}) \subset \mathcal{N}(A\mathrm{B})$

par conséquent on a: $\dim(\left(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(\mathrm{B})\right) \oplus \mathcal{N}(\mathrm{B})) = \dim \mathcal{N}(A\mathrm{B})$

Et $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(\mathrm{B})) \oplus \mathcal{N}(\mathrm{B}) = \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(\mathrm{B}) = \mathcal{N}(A\mathrm{B})$

Ensuite, $\mathcal{R}(A\mathrm{B}) \subset \mathcal{R}(\mathrm{B})$ implique que $\mathcal{N}(\mathrm{B}^*) \subset \mathcal{N}((A\mathrm{B})^*)$

de la même manière, nous pouvons prouver que $\mathcal{N}((A\mathrm{B})^*) = \mathcal{N}(A^*) + \mathcal{N}(\mathrm{B}^*)$ ce que est équivalent à $\mathcal{R}(A\mathrm{B}) = \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(\mathrm{B})$.

4) $\Longrightarrow$ 1) $\mathcal{N}(A\mathrm{B}) = \mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(\mathrm{B})$ implique $\mathcal{R}(A\mathrm{B})^*) = \mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}(\mathrm{B}^*)$

$\mathcal{R}(A\mathrm{B})^*) = \mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}(\mathrm{B}^*) = \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(\mathrm{B}) = \mathcal{R}(A\mathrm{B})$.

ملخص :
نستعرض في هذا البحث دور الإسقاطات في دراسة نظرية المقلوبات المعممة للمؤثرات الخطية، حيث نبدأ بعرض الخواص الدنيا والتقريبية لهذه المؤثرات، كما نستعرض المقلوبات المعممة المتعلقة بإسقاطات محددة الصورة و النواة مسبقا؛ بينما نستعرض في الأخير نظرية المقلوبات المتساوية الإسقاطات.

Abstract :

We expose some topics related to the role of projectors in the theory of generalized inverses, we begin by mentioning some minimal and approximant properties , next we expose the theory of generalized inerses related to projectors with predetermined image and kernel, and in the end the EP operators are discussed.

Bibliographie

[1] A .Ben-Israel and T. N. E. Greville «generalized inverses, theory and application» New York ,London, 1973.

[2] R. H. Bouldin «Generalized inverses and factorizations, Recent applications of generalized inverses», Pitman Ser. Res. Notes in Math., vol. 66, 1982, pp. 233{249. MR 83j:47001

[3] S .L. Campbell and C. D. Meyer «Generalized inverses of Linear Transformations » North Carolina State university Raleigh, Pitman ,London, 1979.

[4] S. L. Campbell and C.D. Meyer «EP operators and generalized inverse» canad, math bull.vol 18 (3) 1975

[5] S. R. Caradus «Generalized inverses and operator theory» Queens paper in pure and applied mathematics, Queens University, Kingston, Ontario, 1978.

[6] Y .L. chen «Iterative methods for computing the generalized inverses $A_{T,S}^{(2)}$ of a matrix A » North-holland.

[7] N ·C. Dincic , D.S. Djordjevic and D.Mosic «Mixed type reverse order law and its equivalencies» , Nis. Serbia 2010 .

[8] D.S. Djordjevic «Characterizations of normal, hyponormal and EP operators» Linear Algebra Appl. 375 (2003), 181–195.

[9] D.S. Djordjevic «Characterizations of normal, hyponormal and EP operators» J. Math. Anal. Appl. 329 (2007) 1181–1190.

[10] D.S. Djordjevic «Characterizations of normal, hyponormal and EP operators» Visegradska 33,18000 Nis, Serbia.

[11] D. S. Djordjevic «Products of EP operators on Hilbert spaces» linear algebra 252 (1997) ,339-345 .

[12] D.S. Djordjevic and J. J. Koliha «characterizing hermitian, normal and EP operators » Filomat 21:1 (2007), 39–54 Received: November 1, 2006 .

[13] J .F. Durand « Eléments de calcul matriciel et d'analyse factorielle données », université Montpellier II, Novembre 2002.

[14] R. E. Hartwig and I. J. Katz «On products of EP matrices» Linear Algebra Appl.
252 (1997) 339-345.

[15] J. J. Koliha « A simple proof of the product theorem for EP matrices» may 2000.

[16] J. J. Koliha «A simple proof of the product theorem for EP matrices» parkville 3052, australia.

[17] V. Milman «An introduction to functional analysis» World 1999

[18] M. Z . Nashed « Generalized inverses and applications» Academic Press-1976.

[19] X .Sheng ,G. Chen,Y. Gong «The representation and computation of generalized inverse $A_{T,S}^{(2)}$ » Journal of computational and applied mathematics 248-257 213(2008).

[20] X.Sheng, G.Chen «Full-rank representation of generalized $A_{T,S}^{(2)}$ inverse and Its application» computers and mathematics with applications 1422-1430 54(2007).

.