République Algérienne Démocratique et Populaire
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ HADJ LAKHDAR BATNA
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire des Techniques Mathématiques LTM

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques

par

Menkad Safa

THÈME

INÉGALITÉS SUR LES NORMES D'OPÉRATEURS

Soutenue le :
Devant le jury composé de :

L. Noui :	PR	Université Hadj Lakhdar Batna	**Président**
S. Guedjiba :	PR	Université Hadj Lakhdar Batna	**Rapporteur**
R. Benacer :	PR	Université Hadj Lakhdar Batna	**Examinateur**
K. Melkemi :	PR	Université Khider Mohamed Biskra	**Examinateur**
A.O. Kadem :	PR	Université Ferhat Abbas Setif	**Examinateur**
A. Menouni :	MCA	Université de Bordj Bou-Arréridj	**Examinateur**
A. Seddik :		Université Hadj Lakhdar Batna	**Invité**

Année Universitaire 2012/2013

A mes parents

A mon mari

A mes filles :

- NESRINE
- HADILE
- YASMINE

A MON FRERE ET MA SOEUR

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier le Professeur Said Guedjiba pour l'excellence de son encadrement et sa disponibilité totale durant la préparation de cette thèse.

Mes remerciements, également, vont au Professeur Ameur Seddik pour les orientations et l'appui qu'il m'a accordés pour la réalisation de la premiére partie de cette thèse.

J'exprime mes vifs remerciements au Professeur Lemnouar Noui pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

J'adresse mes plus vifs remerciements aux Professeurs Rachid Benacer, Khaled Melkemi et Abdelouahab Kadem ainssi qu'au Docteur Abdelaziz Menouni qui m'ont Honnorée en acceptant de faire partie du jury.

Merci aussi à tous mes collégues du département de mathématiques, notamment le Docteur Mohamed Zerguine, le professeur Fadhila Bentalha et Mme Megri Sabra pour la sympatie et l'encouragement qu'ils m'ont témoignés.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mes parents et à mon mari pour leurs soutiens très précieux.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la théorie des opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert. Pour bien préciser ses spécificités, un rappel historique sur le développement de l'analyse fonctionnelle n'est pas inutile.

La théorie des opérateurs linéaires trouve ses origines d'une part dans l'étude des systèmes finis d'équations linéaires à un nombre fini d'inconnues et d'autres part dans des équations linéaires différentielles et intégrales. En effet c'est l'analogie entre les systèmes d'équations linéaires en dimension finie et les équations intégrales, qui a permis à quelques mathématiciens du début du siècle tels que I. Fredholm ou J. Volterra de dégager les éléments essentiels de la théorie qui porte aujourd'hui le nom de la théorie des équations de Fredholm. Dans un effort pour compléter les travaux de I. Fredholm, Hilbert parvient à des conceptions plus générales. En particulier il découvre que le succés de la méthode de I. Fredholm repose sur la notion de « complète continuité » qu'il dégage en la formulant pour les formes bilinéaires et qu'il étudie de façon approfondie. Puis juste après, E. Schmidt et M. Frechet introduisent délibérément le langage de la géométrie euclidienne dans l'espace de Hilbert. La notion d'application linéaire complètement continue se trouve pour la première fois définie de façon générale dans le cèlèbre mémoire de F. Riesz 1918 sur la théorie de I. Fredholm. Vers les années vingt de ce ciècle, S. Banach ajoute une étude poussée des relations entre une application linéaire continue et sa transposée, étendue aux espaces normés. Cette période verra naître de grands théorèmes tels que le théorème du graphe fermé ou le théorème de Banach-Steinhaus. La publication traité de Banach sur les opérations linéaires marque le début de l'âge adulte de l'Analyse Fonctionnelle et de la théorie des opérateurs.

On constate que beaucoup de problèmes dans cette théorie ou dans d'autres domaines des mathématiques comme l'algèbre, analyse numérique, contrôle optimal, théorie spectrale. . ., sont fortement liés à la notion d'inversibilité des éléments. C'est la raison pour laquelle, certains mathématiciens ont pensé introduire de nouvelles notions d'inversibilité qui sont utiles aux solutions à ces problèmes. Parmi eux, nous citons J. Von Neumann, I. Kaplansky, M. Z Nashed, C. R. Cardus, J. J. koliha . . .et bien d'autres.

En 1936, J. Von Neumann [42] a introduit la notion d'inverse généralisé pour les éléments d'un anneau, plus tard et plus précisément en 1948, I. Kaplansky [24] a donné une extention de cette notion pour les algébres. Enfin la notion d'inverse de Moore-Penrose ou Pseudo-inverse a été établie indépendament par E. H. Moore [32], en 1922 et R. [34] Penrose en 1955, où ce dernier a prouvé que toute matrice rectangulaire (et plus particulierement toute matrice carrée singulière) A possède un genre d'inverse unique appelé l'inverse de Moore-Penrose, noté A^+, vérifiant :

$$\begin{cases} AA^+A = A, \\ A^+AA^+ = A^+, \\ (AA^+)^* = AA^+, \\ (A^+A)^* = A^+A. \end{cases}$$

Dans un cadre plus générale et dans le cas de la C^*- algèbre des opérateurs linéaire bornés agissant sur un espace de Hilbert H, R. Hart et M. Mbekhta [22] ont montré que tout opérateur $A \in \mathfrak{L}(H)$ admet un inverse de Moore-Penrose A^+ si et seulement si A est à image fermée, de plus A^+ est unique.

Vu l'importance de l'inverse de Moore-Penrose tout au long de ce travail, on a tenu à rappeler ses propriétés algébriques et topologiques dans le premier chapitre de cette thèse. D'autre notions préliminaires à savoir : EP opérateur, groupe inverse, l'ascente et la descente d'un opérateur et l'indice d'un opérateur ont été établis aussi dans ce premier chapitre.

Les trois autres chapitres sont indépendants l'un de l'autre.

Chapitre 2. L'objectif de ce chapitre concerne des caractérisations de différentes classes remarquables d'opérateurs à image fermée par des inégalités de normes d'opérateurs.
L'une des plus essentielles des inégalités d'opérateurs dans la théorie des opérateurs est l'inégalité de Heinz [23], donnée comme suit, pour tous opérateurs positifs P, Q de $\mathfrak{L}(H)$ et pour $\alpha \in [0, 1]$, on a

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H), \quad \|PX + XQ\| \geq \|P^\alpha XQ^{1-\alpha} + P^{1-\alpha} XQ^\alpha\|.$$

En se basant sur des concepts d'analyse complexe, Heinz a établi cette inégalité par une démonstration vraiment difficille.
En 1978, [29] McIntosh a donné une preuve abordable à celle de l'inégalité de Heinz, en montrant que cette dernière est une conséquence de l'inégalité suivante :

$$\forall A, B, X \in \mathfrak{L}(H), \quad \|A^*AX + BB^*X\| \geq 2\|AXB\|.$$

Dans la littérature, cette inégalité est appelée l'inégalité de la moyenne arithmétique géométrique (Arthmetic-Geometric-Mean-Inegality).
En 1990, [10] Corach, Porta et Recht , ont obtenu que tout opérateur auto-adjoint inversible S, vérifie l'inégalité suivante :

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H), \quad \|SXS^{-1} + S^{-1}XS\| \geq 2\|X\|.$$

Trois ans plus tard , en 1993, J. I. Fujji, M. Fujji, Furita et Nakamoto [19], ont montré que ces trois inégalités précédentes sont équivalentes entre elles et également à trois autres et ceci en donnant une preuve simple à l'une d'elles, d'où ils déduisent une preuve plus simple que celles de Heinz et McIntosh.
En 2001, Seddik [35] a prouvé que la classe $\mathbb{C}^*\mathscr{S}_0(H) = \{\lambda S : \lambda \in \mathbb{C}^* \ et\ S\ auto-adjoint\ inversible\ de\ \mathfrak{L}(H)\}$ est caractérisée par l'inégalité de normes d'opérateurs suivante :

$$(1) \qquad \forall X \in \mathfrak{L}(H), \quad \|SXS^{-1} + S^{-1}XS\| \geq 2\|X\| \quad (S\ inversible).$$

Récemment, dans [37], Seddik a donné aussi deux autres caractérisations de cette dernière classe par l'une des deux inégalités suivantes :

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^{-1} + S^{-1}XS\| = \|S^*XS^{-1} + S^{-1}XS^*\| \ \ (S\ inversible),$$

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^{-1} + S^{-1}XS\| \geq \|S^*XS^{-1} + S^{-1}XS^*\| \ \ (S\ inversible).$$

Notons que cette dernière classe n'est autre que la classe des opérateurs normaux inversibles de $\mathfrak{L}(H)$, dont le spectre est inclus dans une ligne droite passant par l'origine.
Concernant la classe de tous les opérateurs normaux inversibles, Seddik a obtenu dans [36] qu'elle est caractérisée par l'une des quatre inégalités suivantes

$$(2) \quad \forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^{-1}\| + \|S^{-1}XS\| \geq 2\|X\| \qquad (S\ inversible),$$

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^{-1}\| + \|S^{-1}XS\| = \|S^*XS^{-1}\| + \|S^{-1}XS^*\| \quad (S\ inversible),$$
$$\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^{-1}\| + \|S^{-1}XS\| \geq \|S^*XS^{-1}\| + \|S^{-1}XS^*\| \quad (S\ inversible),$$
$$\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^{-1}\| + \|S^{-1}XS\| \leq \|S^*XS^{-1}\| + \|S^{-1}XS^*\| \quad (S\ inversible).$$

Une autre remarquable sous classe d'opérateurs normaux, à savoir la classe $\mathbb{C}^*\mathfrak{U}(H) = \{\lambda S : \lambda \in \mathbb{C}^*\ et\ S\ unitaire\ de\ \mathfrak{L}(H)\}$ a été caractérisée dans [38], par l'inégalité suivante :

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H), \quad \|SXS^{-1}\| + \|S^{-1}XS\| = 2\|X\| \quad (S\ inversible)$$

Il est clair que la notion d'inverse joue un rôle essentiel dans toutes les caractérisations précédentes.
Dans ce deuxième chapitre nous donnons une généralisation des pécédents résultats obtenus par Seddik ameur en remplaçant la notion d'inverse par une notion plus générale, celle de l'inverse de Moore-Penrose .

Chapitre 3. Dans ce chapitre on s'intéresse à un problème posé par J. Benítez et V. Rakočević [5], où ils proposent l'étude de la classe des matrices co-EP, qui est la classe des matrices carées A, vérifiant l'inversibilité de la matrice $AA^+ - A^+A$.
J. Benítez et V. Rakočević ont montré que A est co-EP si et seulement si $A + A^*$ est inversible et s'il exite un idempotent $P \in \mathbb{C}_{n,n}$, vérifiant $AP = A$ et $P^*A = 0$.

La généralisation des résultats obtenus dans [5], dans le cadre des espaces de Hilbert de dimension infinie, fera l'objet de la première partie de ce chapitre.
Nous donnons également dans cette partie d'autres caractérisations de la classe des opérateurs $A \in \mathfrak{R}(H)$, vérifiant $AA^+ - A^+A$ inversible.
Il est aussi intéressant de caractériser la classe des opérateurs $A \in \mathfrak{R}(H)$, vérifiant $AA^+ - A^+A$ non inversible.
Cette classe contient les opérateurs EP, en particulier la classe des normaux de $\mathfrak{R}(H)$, et nous montrons qu'elle contient également la classe des hyponormaux. Notons bien que cette dernière classe n'est pas contenue dans la classe des EP.
Notre point de départ dans la troisiéme partie de ce chapitre est l'étude de l'inversibilité de $AA_0 - A_0A$, où A_0 est un G^k- inverse de A.
On signale que la notion du G^k-inverse est introduite pour la première fois par S. Guedjiba et R. Benacer dans [21].
Tous les résultas obtenus dans cette partie restent valables si A_0 est le Moore-Penrose inverse de A.

Chapitre 4. Le but de ce chapitre est l'étude de l'inverse de Moore-penrose de sommes, différences et produits de projections orthogonales P et Q de $\mathfrak{L}(H)$.
Dans le cadre des matrices, en 1957, S. N. Afriat [1], a montré que si $R(P) \cap R(Q) = \{0\}$, alors $I - PQ$ est inversible et en plus $(I - PQ)^{-1}P\overline{Q}$ est une projection d'image $R(P)$ et de noyau $R(Q) \oplus^{\perp} [N(P) \cap N(Q)]$, (où $\overline{Q} = I - Q$).
Récemment en 2010, dans le même cadre des matrices, O. M. Baksalary et G. Trenkler [3], ont généralisé ce résultat, en remplaçant la notion d'inverse usuel par celle de l'inverse de Moore-Penrose, où ils ont montré que $(\overline{Q}P)^+ = (I - PQ)^+P\overline{Q}$ est une projection d'image $R(P) \cap [N(P) + N(Q)]$ et de noyau $R(Q) \oplus^{\perp} [N(P) \cap N(Q)]$.
Dans ce chapitre nous donnons une généralisation de ces résultats dans le cadre des espaces de Hilbert, en ajoutant l'hypothèse $P + Q$ est à image fermée . Cela nous a permis de donner également d'autres formes à $(\overline{Q}P)^+$.
Dautres résultats obtenus dans [5] concernant les deux projections suivantes :

$$(I - QP)^+\,\overline{Q} \quad , \quad P\,(P + Q - QP)^+$$

ont été généralisés dans ce travail.

0.1 Terminologie

(1) On désigne par H un espace de Hilbert complexe et $\mathfrak{L}(H)$ désigne l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H. Si $A \in \mathfrak{L}(H)$, $R(A)$ (resp. $N(A)$) désigne l'image de A, (resp. le noyau de A).

(2) On désigne par $\mathfrak{R}(H)$ la classe des opérateurs de $\mathfrak{L}(H)$ à image fermée.

(3) Differentes classes d'opérateurs dans $\mathfrak{L}(H)$.

Un opérateur A est dit :

(i) auto-adjoint si $A = A^*$, où A^* est l'adjoint hilbertien de A.

(ii) positif si $(Ax, x) \geq 0$, pour $x \in H$, ce qui est noté $A \geq 0$.

(iii) normal si $A^*A = AA^*$.

(iv) hyponormal si $A^*A - AA^* \geq 0$.

(v) isométrie si $A^*A = I$.

(vi) isométrie partielle si $\|Ax\| = \|x\|$, pour tout $x \in N(A)^\perp$.

(vii) unitaire si $A^*A = AA^* = I$.

(viii) idempotent ou projection si $A^2 = A$.

(ix) projection orthogonale si $A^2 = A$ et $A = A^*$.

(x) d'ascente finie s'il existe un entier positif n tel que $N(A^n) = N(A^{n+1})$.

(xi) descente finie s'il existe un entier positif n tel que $R(A^n) = R(A^{n+1})$.

(xii) d'indice fini s'il a une ascente et une descente finies.

(4) $x \otimes y$ est l'opérateur de rang 1 défini comme suit : $(x \otimes y)(z) = (z, y)x$.

(5) Pour $k \in \mathbb{N}$, Le G^k inverse de $A \in \mathfrak{L}(H)$ est l'opérateur $A_0 \in \mathfrak{L}(H)$ vérifiant

$$(AA_0)^k A = A \quad \text{et} \quad (A_0A)^k A_0 = A_0.$$

(6) L'inverse généralisé de $A \in \mathfrak{L}(H)$ est l'opérateur $B \in \mathfrak{L}(H)$ vérifiant

$$\begin{cases} ABA = A, \\ \\ BAB = B. \end{cases}$$

.

(7) L'inverse de Moore-Penrose de $A \in \mathfrak{L}(H)$ est l'opérateur $A^+ \in \mathfrak{L}(H)$ vérifiant

$$\begin{cases} AA^+A = A, \\ \\ A^+AA^+ = A^+, \\ \\ (AA^+)^* = AA^+, \\ \\ (A^+A)^* A^+A. \end{cases}$$

Chapitre 1

Préliminaires

Dans toute la suite, H designe un espace de Hilbert complex et $\mathfrak{L}(H)$ l'algèbre de Banach des opérateurs bornés sur H. Pour $A \in \mathfrak{L}(H)$, on note par A^* l'adjoint de A, $N(A)$ le noyau de A et $R(A)$ l'image de A.

1.1 Sur l'image d'un opérateur linéaire borné

Dans cette section on introduit quelques notions de base de la théorie des opérateurs qui joueront un rôle essentiel dans ce travail. Pour une lecture détaillée sur cette théorie on renvoie le lecteur à [4] et [8].

Théorème 1.1.1. [18], [15] *Soient $A, B \in \mathfrak{L}(H)$. Alors on a :*

(i) $R(A) = R\left[(AA^*)^{\frac{1}{2}}\right]$,

(ii) $R(A) + R(B) = R\left[(AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}}\right]$,

(iii) $R(A)$*est fermé si et seulement si* $R(AA^*)$ *est fermé. Dans ce cas* $R(A) = R(AA^*)$,

(iv) $R(A)$ *est fermé si et seulement si* $R(A^*)$ *est fermé.*

Preuve. (i) Il suffit d'appliquer un résultat, dû à R.G. Douglas, affirmant que pour tous $A, B \in \mathfrak{L}(H)$, s'il existe $\lambda > 0$ tel que $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$, alors $R(A) \subset R(B)$ voir [15].

(ii) Soit $T = \begin{bmatrix} A & -B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ un opérateur de $\mathfrak{L}(H \oplus H)$. D'après (i) on a :

$$R(T) = R(TT^*)^{\frac{1}{2}} = R\begin{bmatrix} (AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = R[(AA^* + AA^*)^{\frac{1}{2}}] \oplus \{0\},$$

et comme

$$R(T) = (R(A) + R(B)) \oplus \{0\}$$

,
alors on obtient $R(A) + R(B) = R\left[(AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}}\right]$.

(iii) Supposons que $R(A)$ est fermé, alors $H = \overline{R(A^*)} \oplus^\perp N(A) = R(A) \oplus^\perp N(A^*)$. Donc A admet une représentation de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \overline{R(A^*)} \oplus^\perp N(A) \to R(A) \oplus^\perp N(A^*),$$

où A_1 est un opérateur linéaire borné inversible de $\overline{R(A^*)}$ dans $R(A)$. Alors :

$$AA^* = \begin{bmatrix} A_1 A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus^\perp N(A) \to R(A) \oplus^\perp N(A^*).$$

Comme A_1 est inversible, alors $A_1 A_1^*$ est un opérateur inversible de $\mathfrak{L}(R(A))$, et comme $R(AA^*) = R(A_1 A_1^*)$, on obtient $R(AA^*) = R(A)$, d'ou $R(A)$ est fermé.

Inversement, supposons que $R(AA^*)$ est fermé, alors $H = R(AA^*) \oplus N(AA^*)$.
comme $N(AA^*) = N(A^*)$, alors obtient :

$$H = R(AA^*) \oplus N(AA^*) \subset R(A) \oplus N(A^*) \subset H,$$

d'où $R(A) = N(A^*)^\perp$. Donc $R(A)$ est fermé et $R(A) = R(AA^*)$.

(iv) Supposons que $R(A)$ est fermé, alors en utilisant (iii), on a $R(A) = R(AA^*)$, donc pour tout $x \in H$, il existe $y \in H$ tel que $Ax = AA^*y$, ce qui implique $x - A^*y \in Ker(A)$ et $x = (x - A^*y) - A^*y \in Ker(A) + R(A^*)$, donc $R(A^*) = Ker(A)^\perp$; d'où $R(A^*)$ est fermé.
L'implication réciproque s'obtient par symètrie avec l'adjoint. □

Comme conséquence directe du Théorème 1.1.2, on a la proposition suivante :

Proposition 1.1.2. *Soit A un opérateur positif de $\mathfrak{L}(H)$. Alors on a :*

(i) $R(A) \subset R(A^{\frac{1}{2}})$ *et* $\overline{R(A)} = \overline{R(A^{\frac{1}{2}})}$,

(ii) $R(A)$ *est fermé si et seulement si* $R(A^{\frac{1}{2}})$ *est fermé,*

(iii) A *est inversible si et seulement si* $R(A) = H$.

1.2 L'inverse généralisé de Moore-Penrose

Définition 1.2.1. *Soit $A \in \mathfrak{L}(H)$. On appelle :*

(i) *inverse généralisé de A, l'opérateur $B \in \mathfrak{L}(H)$ vérifiant :*

$$\begin{cases} ABA = A, \\ BAB = B. \end{cases} \tag{1.1}$$

(ii) *inverse de Moore-Penrose de A (MP inverse de A), l'inverse généralisé B de A, noté $B = A^+$, verifiant :*

$$\begin{cases} (AB)^* = AB, \\ (BA)^* = BA \end{cases} \tag{1.2}$$

A partir de (1.1) et (1.2), on déduit que :

- $0^+ = 0$ et $\lambda^+ = \frac{1}{\lambda}$, pour $\lambda \neq 0$,
- $(A^+)^+ = A$,
- Si A est inversible alors A^{-1} est l'inverse de Moore-Penrose de A,
- AA^+ est une projection orthogonale sur $R(A)$, de noyau $N(A^+)$,
- A^+A une projection orthogonale sur $R(A^+)$, de noyau $N(A)$.

1.2.1 Existence et unicité

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur admet un Moore-Penrose, est fournie par Harte et Mbekhta dans le Théorème suivant :

Théorème 1.2.2. [22] *Soit $A \in \mathfrak{L}(H)$. alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A posséde un inverse généralisé,*

(ii) *$R(A)$ est fermé,*

(iii) *A^+ existe et il est unique.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$(ii). Supposons que B est un inverse généralisé de A. D'après (1.1), AB est un idempotent sur $R(A)$. Donc $R(A)$ est fermé.
(ii) $\Rightarrow$(iii). si $R(A)$ est fermé, alors d'après le Théorème 1.1.2, $R(A^*)$ est fermé et par conséquent $H = R(A^*) \oplus^\perp N(A) = R(A) \oplus^\perp N(A^*)$. Donc A est sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A^*) \oplus^\perp N(A) \to R(A) \oplus^\perp N(A^*),$$

où A_1 est un opérateur linéaire borné inversible de $R(A^*)$ dans $R(A)$.
Posons

$$B = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : R(A) \oplus^\perp N(A^*) \to R(A^*) \oplus^\perp N(A),$$

on a alors :

$$\begin{cases} ABA = A, \\ BAB = B, \\ AB = (AB)^* = \begin{bmatrix} I_{R(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ BA = (BA)^* = \begin{bmatrix} I_{R(A^*)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Donc B est l'inverse de Moore-Penrose de A.

Pour montrer l'unicité, on suppose qu'il existe A_1^+, A_2^+ deux inverses de Moore-Penrose de A. Donc AA_1^+, AA_2^+ sont deux projections orthogonales sur $R(A)$ ce qui implique $AA_1^+ = AA_2^+$. En multipliant cette Dernière équation à gauche par A_1^+, et en utilisant la définition du Moore-Penrose inverse, on obtient $A_1^+ = A_1^+AA_2^+$. Comme A_1^+A et A_2^+A sont deux projections orthogonales sur $N(A)^\perp$, alors $A_1^+A = A_2^+A$. Donc $A_1^+ = A_2^+AA_2^+ = A_2^+$.
(iii) $\Rightarrow$ (ii). Evidente. □

D'après la démonstration du Théorème précédent, on conclut que si l'inverse de Moore-Penrose de $A \in \mathfrak{L}(H)$ existe alors :

- $R(A^+) = R(A^+A) = R(A^*)$,
- $N(A^+) = N(AA^+) = N(A^*)$,
- $H = R(A) \oplus^\perp N(A^+) = R(A^+) \oplus^\perp N(A)$.

1.2.2 Relation entre l'adjoint et l'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur

Théorème 1.2.3. *Soit $A \in \mathfrak{L}(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A^+ *existe,*

(ii) $(AA^*)^+$ *existe,*

(iii) $(A^*)^+$ *existe,*

(iv) $(A^*A)^+$ *existe.*

Preuve. Découle immédiatement des Théorèmes 1.1.2 et 1.2.1. □

Les assertions de la proposition suivante seront souvent utilisées.

Proposition 1.2.4. *Soit $A \in \mathfrak{L}(H)$. Si $R(A)$ est fermé, alors on a :*

(i) $(A^*)^+ = (A^+)^*$,

(ii) $(A^*A)^+ = A^+(A^+)^*$,

(iii) $(AA^*)^+ = (A^+)^*A^+$,

(iv) $A^* = A^+AA^* = A^*AA^+$,

(v) $A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+$,

(vi) $(A^*)^+ = A(A^*A)^+ = (AA^*)^+A$.

Preuve. (i). D'après la définition de A^+, on obtient :

$(A^+)^*A^*(A^+)^* = (A^+AA^+)^* = (A^+)^*$,
$A^*(A^+)^*A^* = (AA^+A)^* = A^*$,
$(A^*(A^+)^*)^* = A^+A = (A^+A)^* = A^*(A^+)^*$ et

$((A^+)^*A^*)^* = AA^+ = (AA^+)^* = (A^+)^*A^*$.
Donc $(A^+)^*$ est le Moore-Penrose inverse de A^*.

(ii). Puisque on a :

$A^*AA^+(A^+)^*A^*A = A^*AA^+(AA^+)^*A = A^*AA^+AA^+A = A^*A$,
$A^+(A^+)^*A^*AA^+(A^+)^* = A^+(AA^+)^*AA^+(A^+)^* = A^+AA^+(A^+)^* = A^+(A^+)^*$,
$(A^*AA^+(A^+)^*)^* = A^+AA^+A = A^+A = (A^+A)^* = (AA^+A)^*(A^+)^* = A^*AA^+(A^+)^*$
et $(A^+(A^+)^*A^*A)^* = (A^+(A)A^+A)^* = A^+A = A^+(A^+)^*A^*A$,

donc $A^+(A^+)^*$ est le Moore-Penrose inverse de A^*A.

(iii) Se déduit de (ii), en remplaçant A par A^+.

(iv). Comme A^+A est une projection sur $R(A^*)$, alors on obtient

$$A^* = A^+AA^* = (A^+A)^*A^* = A^*(AA^+)^* = A^*AA^+.$$

(v). Il est bien claire que $A^+ = A^+(A^+)^*A^*$. Par l'utilisation de (ii), on obtient la première égalité de (v). De la même méthode, on peut trouver la deuxième égalité de (v).

(vi) Se déduit de (v).

$\square$

1.2.3 Quelques resultats sur l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice d'opérateurs en blocs 2×2

Recemment, la caractérisation et la représentation de l'inverse de Moore-Penrose des matrices d'opérateurs dans un espace de Hilbert ont été étudiées par plusieures auteurs. Dans cette section, on cite les résultats obtenus par C. Y. Deng et H. K. Du dans [14] et qui seront souvent utilisés dans le présent travail.

Lemme 1.2.5. *Soient $A, \in \mathfrak{L}(H)$ et $B \in \mathfrak{L}(K, H)$. Alors l'opérateur $T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ de $\mathfrak{L}(H \oplus K)$ admet un inverse de Moore-Penrose si et seulement si $R(A) + R(B)$ est fermé, et*

$$T^+ = \begin{bmatrix} A^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \\ B^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \end{bmatrix}.$$

Preuve. d'après le Théorème 1.1.1 (iii), $R(T)$ est fermée si et seulement si $R(TT^*)$ est fermée. Comme

$$R(TT^*) = R(AA^* + BB^*) \oplus 0,$$

et

$$R(AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}} = R(A) + R(B) \text{ (voir Théorème 1.1.1 (ii))},$$

alors, par la proposition 1.1.2, on en déduit que T^+ existe si et seulement si $R(A)+R(B)$ est fermée.
Comme $T^+ = T^*(TT^*)^+$, on obtient :

$$T^+ = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (AA^*+BB^*)^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^*(AA^*+BB^*)^+ & 0 \\ B^*(AA^*+BB^*)^+ & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Remarquons que si A est un opérateur inversible alors l'opérateur $T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{L}(H \oplus H)$ posséde un Moore-Penrose inverse $T^+ = \begin{bmatrix} A^*(AA^*+BB^*)^{-1} & 0 \\ B^*(AA^*+BB^*)^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

Le corollaire suivant découle immédiatement du Lemme précédent.

Corollaire 1.2.6. *Soient $A \in \mathfrak{L}(H)$ et $B \in \mathfrak{L}(K,H)$. Alors :*

(i) *L'opérateur $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}$ de $\mathfrak{L}(H \oplus K)$ posséde un inverse de Moore-Penrose si et seulement si $R(A^*)+R(B^*)$ est fermé, et*

$$T^+ = \begin{bmatrix} (A^*A+B^*B)^+A^* & (A^*A+B^*B)^+B^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) *L'opérateur $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & B \end{bmatrix}$ de $\mathfrak{L}(H \oplus K)$ posséde un inverse de Moore-Penrose si et seulement si $R(A)+R(B)$ est fermé, et*

$$S^+ = \begin{bmatrix} 0 & B^*(AA^*+BB^*)^+ \\ 0 & A^*(AA^*+BB^*)^+ \end{bmatrix}.$$

1.3 EP opérateurs

Définition 1.3.1. *Soit $A \in \mathfrak{L}(H)$ à image fermée. On dit que A est EP opérateur si $AA^+ = A^+A$, ce qui est equivalent au fait que $R(A) = R(A^*)$.*

Il est bien clair que chaque opérateur normal à image fermée est un EP opérateur. la réciproque n'est pas vraie même en dimension finie. La classe des EP opérateurs a été considérée par D. S. Djordevic et J. J. Koliha dans [17], où ils ont établi le résultat suivant :

Lemme 1.3.2. *Soient $A \in \mathfrak{L}(H)$ et $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ la représentation matricielle de A suivant la somme direct orthogonale $H = R(A) \oplus N(A^*)$, alors on a*

(i) *A est EP opérateur si et seulement si $A_2 = 0$,*

(ii) *A est normal si et seulement si $A_2 = 0$ et A_1 normal,*

(iii) *A est auto-adjoint si et seulement si $A_2 = 0$ et A_1 auto-adjoint.*

1.4 Le groupe inverse

Définition 1.4.1. *Soit $A \in \mathfrak{L}(H)$ avec image fermée. On appelle groupe inverse de A, l'opérateur $B \in \mathfrak{L}(H)$, noté $B = A^{\#}$, vérifiant :*

$$\begin{cases} ABA = A, \\ \\ BAB = B, \\ \\ AB = BA. \end{cases} \tag{1.3}$$

De la troisième équation, on obtient $R(A^{\#}) = R(A)$ et $N(A^{\#}) = N(A)$.

Théorème 1.4.2. *Soit $A \in \mathfrak{R}(H)$. alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$A^{\#}$ existe et il est unique,*

(ii) *$H = R(A) \oplus N(A)$,*

(iii) *$R(A^2) = R(A)$ et $N(A^2) = N(A)$*

Remarque 1.4.3. *Soit $A \in \mathfrak{L}(H)$. Alors A est un EP opérateur si et seulement si $A^{\#}$ existe et $A^{\#} = A^{+}$.*

1.5 L'ascente et la descente d'un opérateur

On rappelle que pour un opérateur $A \in \mathfrak{L}(H)$, l'ascente, $asc(A)$, et la descente, $dsc(A)$, sont définies respectivement par :

$$asc(A) = inf\{n \in \mathbb{N} : N(A^n) = N(A^{n+1})\}$$

et

$$dsc(A) = inf\{n \in \mathbb{N} : R(A^n) = R(A^{n+1})\}.$$

Dans [41], on trouve les deux caractérisations suivantes d'ascente et de descente finies :

$$asc(A) \text{ est finie} \Leftrightarrow R(A^d) \cap N(A) = \{0\} \text{ pour certain } d \geq 0,$$

et

$$dsc(A) \text{ est finie} \Leftrightarrow R(A) \cap N(A^d) = \{0\} \text{ pour certain } d \geq 0$$

Comme conséquence immédiate des deux caractérisations précédentes, A. Taylor et D. Lay ont obtenu le Théorème suivant :

Théorème 1.5.1. [40] *Soit $A \in \mathfrak{L}(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'ascente et la descente de A sont finies,*

(ii) *$asc(A) = dsc(A) = d$,*

(iii) *$H = R(A^d) \oplus N(A^d)$.*

La valeur d est appellée l'indice de A et notée par $d = ind(A)$.

Remarques 1.5.2. *Soit $A \in \mathfrak{L}(H)$.*

(i) *Si H est de dimension finie, alors L'ascente et la descente de l'opérateur A sont finies. donc $ind(A) < \infty$.*

(ii) *A est inversible si et seulement si $ind(A) = 0$,*

(iii) *D'après les Thèorémes 1.42 et 1.5.1, $A^{\#}$ existe si et seulement si $ind(A) \leq 1$.*

(iv) *Si A est d'indice fini, alors il n'est pas en général à image fermé. Par exemple : Soient $H = l^2$ et A définit par*

$$A = (x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, 0, \frac{x_3}{3}, 0, \frac{x_5}{5}, ...).$$

Il est évident que $A^2 = 0$. Donc $ind(A) = 2$ par contre $R(A)$ n'est pas fermé.

Le Lemme suivant sera souvant utilisé dans le deuxième chapitre .

Lemme 1.5.3. [17] *Soient $A \in \mathfrak{L}(H)$ et $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sa représentation matricielle suivant la somme direct orthogonale $H = R(A) \oplus N(A^*)$. Alors, $ind(A) \leq 1$ si et seulement si A_1 est inversible.*

Preuve. Supposons que $ind(A) \leq 1$. D'aprés la Remarque 1.5.2, $A^{\#}$ existe.
Soit $\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$ la représentation matricielle de $A^{\#}$, suivant la somme direct orthogonale $H = R(A) \oplus N(A^*)$. en utilisant (1.3), on obtient :

$$\begin{cases} A_1B_1A_1 = A_1, \\ B_1A_1B_1 = B_1, \\ A_1B_1 = B_1A_1, \\ B_3 = B_4 = 0, B_2 = B_1^2A_2. \end{cases} \tag{1.4}$$

Alors B_1 est le groupe inverse de A_1. D'après le Théorème 1.4.2, on a $R(A_1) \cap N(A_1) = \{0\}$ et comme A_1 est surjective, on deduit A_1 est inversible, d'ou on obtient $B_1 = A_1^{-1}$ et

$$A^{\#} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & (A_1^{-1})^2A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Inversement, si A_1 est inversible, alors il est facile de voir que $A^{\#} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & (A_1^{-1})^2A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est le groupe inverse de A. Donc $ind(A) \leq 1$. □

Chapitre 2

Caracterisations de sous classes d'opérateurs normaux par des inégalités d'opérateurs

2.1 Introduction

Notations. on désigne par :

- $\mathfrak{I}(H)$ la classe des opérateurs inversibles de $\mathfrak{L}(H)$,
- $\mathscr{S}(H)$ la classe des opérateurs auto-adjoints de $\mathfrak{L}(H)$,
- $\mathscr{S}_0(H)$ la classe des opérateurs auto-adjoints inversibles de $\mathfrak{L}(H)$,
- $\mathfrak{U}(H)$ la classe des opérateurs unitaires de $\mathfrak{L}(H)$,
- $\mathfrak{U}_r(H)$ la classe des opérateurs auto-adjoints unitaires de $\mathfrak{L}(H)$,
- $\mathfrak{F}_1(H) = \{x \otimes y : x, y \in (H)_1\}$, où $(H)_1$ est la sphère unité de H.

Corach-Porta-Recht [10], ont prouvé que si $S \in \mathscr{S}_0(H)$, alors

$$\forall X \in \mathfrak{B}(H),\ \left\|SXS^{-1} + S^{-1}XS\right\| \geq 2\left\|X\right\|$$

Dans [35], Seddik a montré que si S est un opérateur inversible de $\mathfrak{L}(H)$, alors l'inégalité précédente caractérise la classe $\mathbb{C}^*\mathscr{S}_0(H)$.
Notons que cette dernière classe n'est autre que la classe des opérateurs normaux inversibles de $\mathfrak{L}(H)$, dont le spectre est inclus dans une ligne droite passant par l'origine.
Concernant la classe de tous les opérateurs normaux inversibles, Seddik a obtenu dans [36], qu'elle est caractérisée par l'inégalité suivante

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \ \|SXS^{-1}\| + \|S^{-1}XS\| \geq 2\|X\|,\quad (S \in \mathfrak{I}(H)).$$

Une autre remarquable sous classe d'opérateurs normaux, à savoir la classe $\mathbb{C}_0^*\mathfrak{U}(H)$ a été caractérisée dans [37], par l'inégalité suivante :

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H),\quad \|SXS^{-1}\| + \|S^{-1}XS\| = 2\|X\|,\quad (S \in \mathfrak{I}(H)).$$

Il est clair que la notion d'inversibilté joue un rôle important dans toutes les caractérisations précédentes. D'où la question qui nous motive :

Peut-on caractériser les classes précédentes, où la notion d'inverse est remplacée par une notion plus générale, celle d'inverse de Moore-Penrose ?

Une première idée, est de remplacer dans les trois dernières inégalités, l'hypothèse S inversible par S à image fermée et S^{-1} par S^{+}. Ainsi, on obtient :

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H), \quad \|SXS^{+} + S^{+}XS\| \geq 2\|SS^{+}XS^{+}S\|, \qquad (S \in \mathfrak{R}(H)), \tag{2.1}$$

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H), \quad \|SXS^{+}\| + \|S^{+}XS\| \geq 2\|SS^{+}XS^{+}S\|, \qquad (S \in \mathfrak{R}(H)), \tag{2.2}$$

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H), \quad \|SXS^{+}\| + \|S^{+}XS\| = 2\|S^{+}SXS^{+}S\|, \qquad (S \in \mathfrak{R}(H)). \tag{2.3}$$

Une deuxième idée est de remplacer dans les trois premières inégalités, S par SXS et l'hypothèse S inversible par S à image fermée. Ainsi on obtient

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H), \quad \left\|S^2X + XS^2\right\| \geq 2\left\|SXS\right\|, \qquad (S \in \mathfrak{L}(H)), \tag{2.4}$$

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H), \quad \left\|S^2X\right\| + \left\|XS^2\right\| \geq 2\left\|SXS\right\|, \qquad (S \in \mathfrak{L}(H)), \tag{2.5}$$

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H), \quad \left\|S^2X\right\| + \left\|XS^2\right\| = 2\left\|SXS\right\|, \qquad (S \in \mathfrak{L}(H)). \tag{2.6}$$

Dans ce deuxième chapitre, on démontre que si $S \in \mathfrak{R}(H)$ et $indS < \infty$, alors :

- chacune des deux inégalités (2.1)et (2.4), caractérise la classe $\mathbb{C}\mathscr{S}(H)$,
- chacune des deux inégalités (2.2), (2.5) caractérise la classe des normaux,
- l'inégalité (2.6) caractérise la classe des isométries partielles normales.

Si $dimH < \infty$, on démontre que l'inégalité suivante :

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H), \quad \left\|S^2X + XS^2\right\| = 2\left\|SXS\right\|, \quad (S\ \grave{a}\ imagefermée),$$

caractérise la classe $\mathbb{C}^{*}\mathfrak{U}_r(H) = \{\lambda T : \lambda \in \mathbb{C}^{*}\ et\ T\ unitaire\ auto-adjoint\ de\ \mathfrak{L}(H)\}$.

Signalons que ce travail a fait l'objet d'une publication dans [30].

Rappelons maintenant quelques résultats utiles dans ce chapitre.

Théorème 2.1.1. [29] *Soient A et B deux opérateurs de $\mathfrak{L}(H)$, alors on a*

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H), \quad \|A^{*}AX + BB^{*}X\| \geq 2\|AXB\|.$$

La proposition ci-dessous a été établie par M. Khosravi dans [25]. On fournit ici une preuve plus simple de ce résultat.

Proposition 2.1.2. *Soient* $S, T \in \mathfrak{R}(H)$. *Alors on a :*

$$\forall X \in \mathfrak{B}(H),\ \left\|S^*XT^+ + T^+XS^*\right\| \geq 2\left\|SS^+XT^+T\right\|.$$

Preuve. $1^{\text{ère}}$ étape. Supposons que $S = T$.
A partir de la Proposition 1.2.4 et par l'application de l'inégalité McIntosh [29], on obtient pour tout $X \in \mathfrak{L}(H)$:

$$\left\|S^*XS^+ + S^+XS^*\right\| = \left\|S^*SS^+XS^+ + S^+XS^+SS^*\right\| \geq 2\left\|SS^+XS^+S\right\|.$$

$2^{\text{ème}}$ étape. Supposons maintenant que S et T deux opérateurs arbitraires de $\mathfrak{R}(H)$, et soient P et Y deux opérateurs de $\mathfrak{L}(H \oplus H)$ donnés par :

$$P = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \text{ et } Y = \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Comme l'image de P est fermée, alors en vertu de la $1^{\text{ère}}$ étape on a :

$$\left\|P^*YP^+ + P^+YP^*\right\| \geq 2\left\|PP^+YP^+P\right\|.$$

Donc on obtient :

$$\left\|S^*XT^+ + T^+XS^*\right\| \geq 2\left\|SS^+XT^+T\right\|.$$

□

Proposition 2.1.3. *Soit* $S \in \mathfrak{L}(H)$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) S *est normal,*

(ii) $\forall x \in H$, $\|S^*x\| = \|Sx\|$,

(iii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H)$, $\|S^*X\| = \|SX\|$,

(iv) $\forall X \in \mathfrak{L}(H)$, $\|XS^*\| = \|XS\|$.

Preuve. L'equivalence (i) ⇔(ii) est une conséquence immédiate de définition de l'opérateur normal.
Les équivalences (ii)⇔(iii) et (iii)⇔(iv) sont évidentes. □

Proposition 2.1.4. (i) *L'inégalité (2.1) est satisfaite pour tout opérateur auto-adjoint de* $\mathfrak{R}(H)$,

(ii) *L'inégalité (2.4) est satisfaite pour tout opérateur auto-adjoint de* $\mathfrak{L}(H)$,

(iii) *L'inégalité (2.2) est satisfaite pour tout opérateur normal de* $\mathfrak{R}(H)$,

(iv) *L'inégalité (2.5) est satisfaite pour tout opérateur normal de* $\mathfrak{L}(H)$.

Preuve. (i) Découle immédiatement de la proposition 2.1.2.

(ii) Résulte du Théorème 2.1.1.

(iii) Soient S un opérateur normal de $\mathfrak{R}(H)$ et X de $\mathfrak{L}(H)$.

Comme S est normal, d'après la Propositions 2.1.3, on obtient :

$$\|SXS^+\| = \|S^*XS^+\| \text{ et } \|S^+XS\| = \|S^+XS^*\|.$$

Ce qui donne alors :

$$\left\|SXS^+\right\| + \left\|S^+XS\right\| = \left\|S^*XS^+\right\| + \left\|S^+XS^*\right\| \geq \left\|S^*XS^+ + S^+XS^*\right\|.$$

Donc, par la Proposition 2.1.2, on trouve :

$$\left\|SXS^+\right\| + \left\|S^+XS\right\| \geq 2\left\|SS^+XS^+S\right\|.$$

(iv) Supposons que S est un opérateur normal de $\mathfrak{L}(H)$. alors on a pour tout $X \in \mathfrak{L}(H)$:

$$\|S^2X\| = \|S^*SX\| \text{ et } \|XS^2\| = \|XSS^*\|.$$

Finalement, le Théorème 2.1.1 permet de conclure (iv). □

2.2 Caractérisations de la classe des opérateurs normaux à image fermé

Dans cette section, nous caractérisons les opérateurs normaux à image fermée. Le résultat principale de cette section est le théoème suivant.

Théorème 2.2.1. *Soit $S \in \mathfrak{R}(H)$ tel que $ind(S) < \infty$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) *S est normal,*

(ii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^+\| + \|S^+XS\| \geq 2\|SS^+XS^+S\|$,

(iii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|S^2X\| + \|XS^2\| \geq 2\|SXS\|$.

Preuve. L'implication (i) ⇒ (ii) est déja établie dans la proposition précédente.

(ii)⇒(iii). Si on suppose (ii), alors on obtient :

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \left\|S^2XSS^+\right\| + \left\|S^+SXS^2\right\| \geq 2\left\|SS^+SXSS^+S\right\| = 2\|SXS\|.$$

Comme $\|SS^+\| = \|S^+S\| = 1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit que :

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \left\|S^2X\right\| + \left\|XS^2\right\| \geq 2\|SXS\|.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

suivant la somme direct orthogonale $H = R(A) \oplus N(A^*)$.

La preuve se fait en deux étapes :

1ère étape. Montrons que S_1 est inversible. D'après le Lemme 1.5.3, il suffit de prouver que $ind(S) \leq 1$.

Supposons par l'absurde que $ind(S) > 1$. En posant $X = x \otimes y$ pour tout $x, y \in (H)_1$, on a d'après (iii) :

$$\forall x, y \in (H)_1\,,\ \|S^2(x \otimes y)\| + \|(x \otimes y)S^2\| \geq 2\|S(x \otimes y)S\|,$$

ce qui donne alors :

$$\forall x, y \in (H)_1\,,\ \left\|S^2 x\right\| + \left\|(S^*)^2\, y\right\| \geq 2\,\|Sx\|\,\|S^* y\|\,. \tag{2.7}$$

Comme $ind(S) > 1$, alors $N(S^2) \neq N(S)$. Donc il existe $x \in (H)_1$ tel que $S^2 x = 0$ et $Sx \neq 0$. En utilisant (2.1), il vient que $\|(S^*)^2 y\| \geq k\,\|S^* y\|$, pour tout $y \in (H)_1$ (où $k = 2\,\|Sx\| > 0$). Ce qui implique $S^2(S^*)^2 \geq k^2 SS^*$, d'où alors $R(S^2) = R(S)$ (voir [15]), ce qui contredit l'hypothése $ind(S) > 1$. Finalement, on obtient $ind(S) \leq 1$, d'où S_1 est inversible.

2ème étape. supposons maintenant que $X = S_1^{-2} \oplus 0$, alors

$$S^2 X = I_1 \oplus 0 \ \text{ et } \ XS^2 = SXS = \begin{bmatrix} I_1 & S_1^{-1}S_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où I_1 est l'opérateur d'identité défini sur $R(S)$.

Ce qui implique

$$\|S^2 X\| = 1 \ \text{ et } \ \|XS^2\|^2 = \|SXS\|^2 = \left\|I_1 + \left(S_1^{-1}S_2\right)\left(S_1^{-1}S_2\right)^*\right\|.$$

En appliquant (iii) pour S et X, on obtient :

$$1 \geq \left\|I_1 + \left(S_1^{-1}S_2\right)\left(S_1^{-1}S_2\right)^*\right\|, \tag{2.8}$$

mais comme $\left(S_1^{-1}S_2\right)\left(S_1^{-1}S_2\right)^*$ est un opérateur positif, alors

$$\left\|I_1 + \left(S_1^{-1}S_2\right)\left(S_1^{-1}S_2\right)^*\right\| > 1 \text{ si } \left(S_1^{-1}S_2\right)\left(S_1^{-1}S_2\right)^* \neq 0.$$

Donc $\left(S_1^{-1}S_2\right)\left(S_1^{-1}S_2\right)^* = 0$, d'où $S_2 = 0$ et par conséquent $S = S_1 \oplus 0$.

Par suite, en utilisant (iii) pour $S = S_1 \oplus 0$ et $X = S^{-1}X_1S^{-1} \oplus 0$ (où X_1 un opérateur arbitraire de $\mathfrak{L}(R(S))$, on obtient :

$$\left\|S_1 X_1 S_1^{-1}\right\| + \left\|S_1^{-1} X_1 S_1\right\| \geq 2\,\|X_1\|$$

pour tout opérateur $X_1 \in \mathfrak{L}(R(S))$. Alors d'après [36, théorème 5], S_1 est normal, d'où S l'est aussi. $\square$

Remarque 2.2.2. *Dans le Théorème précédent, l'équivalence entre les assertions (i) et (ii) a été obtenue pour la premiére fois par A. Seddik dans* [36]*, pour S inversible i.e $indS = 0$.*

Corollaire 2.2.3. *Si P est un idempotent de $\mathfrak{L}(H)$, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *P une projection orthogonale,*

(ii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|PX\| + \|XP\| \geq 2\,\|PXP\|$.

Preuve. Comme P est un idempotent de $\mathfrak{L}(H)$, alors $R(P)$ est fermé et $ind(P) = 1$. Donc (i) et (ii) sont équivalentes, d'après le Théorème 2.2.1. □

Corollaire 2.2.4. *Soit $S \in \mathfrak{R}(H)$ tel que $ind(S) < \infty$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *S est normal,*

(ii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^{+}\| + \|S^{+}XS\| = \|S^{*}XS^{+}\| + \|S^{+}XS^{*}\|$,

(iii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^{+}\| + \|S^{+}XS\| \geq \|S^{*}XS^{+}\| + \|S^{+}XS^{*}\|$.

Preuve. (i)$\Rightarrow$ (ii). Résulte de la Proposition 2.1.2.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). trivial.

Supposons (iii). En vertu de la proposition 2.1.2, on a

$$\left\|S^{*}XS^{+}\right\| + \left\|S^{+}XS^{*}\right\| \geq 2\left\|SS^{+}XS^{+}S\right\|,$$

donc S est normal, d'après le Théorème 2.2.1. □

Si H est de dimension finie, tout opérateur $S \in \mathfrak{L}(H)$ est à image fermée et d'indice fini. Comme conséquence immédiate de la Proposition 2.1.2 et du Théorème 2.2.1, on a le Corollaire suivant :

Corollaire 2.2.5. *Supposons que* $\dim H < \infty$ *et* $S \in \mathfrak{L}(H)$*. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) *S est normal,*

(ii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^{+}\| + \|S^{+}XS\| = \|S^{*}XS^{+}\| + \|S^{+}XS^{*}\|$,

(iii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^{+}\| + \|S^{+}XS\| \geq \|S^{*}XS^{+}\| + \|S^{+}XS^{*}\|$,

(iv) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^{+}\| + \|S^{+}XS\| \geq 2\,\|SS^{+}XS^{+}S\|$,

(v) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|S^{2}X\| + \|XS^{2}\| \geq 2\,\|SXS\|$.

Théorème 2.2.6. *Soit $S \in \mathfrak{R}(H)$. Si $S^{+}S = I$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *S est normal,*

(ii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^{+}\| + \|S^{+}XS\| \leq \|S^{*}XS^{+}\| + \|S^{+}XS^{*}\|,$

(iii) $\forall X \in \mathfrak{F}_1(H),\ \|SXS^{+}\| + \|S^{+}XS\| \leq \|S^{*}XS^{+}\| + \|S^{+}XS^{*}\|.$

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$. Résulte de la Proposition 2.1.2.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i). De (iii), on a :

$$\forall x, y \in (H)_1,\ \|Sx \otimes (S^{*})^{+}y\| + \|S^{+}x \otimes S^{*}y\| \leq \|S^{*}x \otimes (S^{*})^{+}y\| + \|S^{+}x \otimes Sy\|.$$

Donc

$$\forall x, y \in (H)_1,\ \|Sx\|\|(S^{*})^{+}y\| + \|S^{+}x\|\|S^{*}y\| \leq \|S^{*}x\|\|(S^{*})^{+}y\| + \|S^{+}x\|\|Sy\|.$$

Ainsi

$$\forall x, y \in (H)_1,\ (\|Sx\| - \|S^{*}x\|)\|(S^{*})^{+}y\| \leq (\|Sy\| - \|S^{*}y\|)\|\|S^{+}x\|. \tag{2.9}$$

Nous considèrons l'un des deux cas $\|Sx\| \geq \|S^{*}x\|$ ou $\|Sx\| \leq \|S^{*}x\|$, l'autre se démontre de la même manière.

Supposons que $\|Sx\| \geq \|S^{*}x\|$ pour tout $x \in (H)_1$. Comme $S^{+}S = I$, alors

$$\frac{1}{\|S^{+}\|} \leq \|Sx\| \leq \|S\|.$$

Donc de (2.3), on en déduit que :

$$\forall x, y \in (H)_1,\ \|Sx\| - \|S^{*}x\| \leq k(\|Sy\| - \|S^{*}y\|),$$

où $k = \|S\|\ \ \|S^{+}\|$. D'où

$$\forall x, y \in (H)_1,\ \|Sx\| + k\,\|S^{*}y\| \leq \|S^{*}x\| + k\,\|Sy\|,$$

et par conséquent

$$\forall x \in (H)_1,\ \underset{\|y\|=1}{sup}(\|Sx\| + k\,\|S^{*}y\|) \leq \underset{\|y\|=1}{sup}(\|S^{*}x\| + k\,\|Sy\|).$$

Donc

$$\forall x \in (H)_1,\ \|Sx\| + k\,\|S\| \leq \|S^{*}x\| + k\,\|S\|, \tag{2.10}$$

d'où $\|Sx\| \leq \|S^{*}x\|$, pour tout $x \in (H)_1$. Comme $\|Sx\| \geq \|S^{*}x\|$, on obtient $\|Sx\| = \|S^{*}x\|$ pour tout $x \in (H)_1$. Donc $\|Sx\| = \|S^{*}x\|$ pour tout $x \in\ H$, d'où S est normal, d'après la Proposition 2.1.2.

$\square$

2.3 Caractérisations de la classe des opérateurs auto-adjoints à image fermé

Dans cette section, la classe des opérateurs auto-adjoints à image fermée multiplié par un scalaire est caractérisée.
Le Théorème suivant est démontré par Seddik ameur dans [35] dans le cas des opérateurs inversibles (opérateurs d'indice 0). Il l'est aussi démontré dans [25], dans le cas des EP opérateurs (opérateurs d'indice 1).

Théorème 2.3.1. *Soit $S \in \mathfrak{R}(H)$ tel que $ind(S) < \infty$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $S \in \mathbb{C}\mathscr{S}(H)$,

(ii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^{+} + S^{+}XS\| \geq 2\|SS^{+}XS^{+}S\|$,

(iii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|S^2X + XS^2\| \geq 2\|SXS\|$.

Preuve. Les deux implications (i)⇒(ii) et (i)⇒ (iii) découlent directement de la Proposition 2.1.3.
Ainsi il sufit de montrer que (ii) ⇒ (i) et (iii)⇒ (i).

Supposons (ii) ou (iii). alors on a pour tout $X \in \mathfrak{L}(H)$:

$$\left\|SXS^{+}\right\| + \left\|S^{+}XS\right\| \geq 2\left\|SS^{+}XS^{+}S\right\|,$$

ou

$$\left\|S^2X\right\| + \left\|XS^2\right\| \geq 2\|SXS\|.$$

Donc S est normal, d'après le Théorème 2.2.1. Par conséquent

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} :\ R(S) \oplus^{\perp} N(S^*) \rightarrow R(S) \oplus^{\perp} N(S^*).$$

Soit l'opérateur

$$X = X_1 \oplus 0 \text{ suivant la décomposition } R(S) \oplus^{\perp} N(S^*),$$

où X_1 est un opérateur arbitraire dans $R(S)$. En appliquant (ii) ou (iii) pour S et X, on obtient :

$$\forall X_1 \in \mathfrak{L}(R(S)),\ \left\|S_1^2X_1 + X_1S_1^2\right\| \geq 2\|S_1X_1S_1\|.$$

D'où

$$\forall X_1 \in \mathfrak{L}(R(S)),\ \left\|S_1X_1S_1^{-1} + S_1^{-1}X_1S_1\right\| \geq 2\|X_1\|.$$

Alors il s'ensuit du [35, Théorème 4.4] que $S_1 \in \mathbb{C}\mathscr{S}(R(S))$. En conséquence on obtient $S \in \mathbb{C}\mathscr{S}(H)$. □

Comme conséquence immédiate du théorème précédent on a :

Corollaire 2.3.2. *Si P est un idempotent de $\mathfrak{L}(H)$, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *P est une projection orthogonale,*

(ii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|PX\| + \|XP\| \geq 2\,\|PXP\|$.

Aussi par le théorème 2.3.1, on obtient les deux corollaires suivants :

Corollaire 2.3.3. *Soit $S \in \mathfrak{R}(H)$ tel que $ind(S) < \infty$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $S \in \mathbb{C}\mathscr{S}(H)$,

(ii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^+ + S^+XS\| = \|S^*XS^+ + S^+XS^*\|$,

(iii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^+ + S^+XS\| \geq \|S^*XS^+ + S^+XS^*\|$.

Preuve. Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont claires.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons (iii), d'après la proposition 2.1.2, on obtient :

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \left\|SXS^+ + S^+XS\right\| \geq \left\|SS^+XS^+S\right\|.$$

Donc, il vient par le Théorème 2.3.1 que $S \in \mathbb{C}^*\mathscr{S}(H)$. □

Corollaire 2.3.4. *Supposons que* $\dim H < \infty$ *et* $S \in \mathfrak{L}(H)$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $S \in \mathbb{C}\mathscr{S}(H)$,

(ii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^+ + S^+XS\| = \|S^*XS^+ + S^+XS^*\|$,

(iii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^+ + S^+XS\| \geq \|S^*XS^+ + S^+XS^*\|$.

(iv) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|SXS^+ + S^+XS\| \geq 2\,\|SS^+XS^+S\|$,

(v) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|S^2X + XS^2\| \geq 2\,\|SXS\|$.

2.4 Caractérisations de la classe des isométries partielles

Définition 2.4.1. *Un opérateur $S \in \mathfrak{L}(H)$ est appelé isométrie partielle si et seulement si $\|Sx\| = \|x\|$ pour tout $x \in Ker(S)^\perp$.*

Donnons à présent quelques propriétés d'une isometrie partielle qui seront utiles dans la suite de ce chapitre.

Proposition 2.4.2. *Soit $S \in \mathfrak{L}(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *S est une isométrie partielle,*

(ii) *S^* est une isométrie partielle,*

(iii) SS^* *est une projection orthogonale sur* $R(S)$,

(iv) S^*S *est une projection orthogonale sur* $Ker(S)^\perp$,

(v) $SS^*S = S$,

(iv) $S^*SS^* = S^*$.

Preuve. (i)$\Rightarrow$ (v) Supposons que S est une isométrire partielle, alors pour tous $x \in \mathfrak{L}(H)$ et $y \in N(S)$ on a

$$< S^*SS^*z, x >=< SS^*z, Vx >=< SS^*z, Sx >= 0 =< z, sx >=< S^*z, x > .$$

Comme S est une isométrie sur $N(S)^\perp = \overline{R(S^*)}$, alors on obtient

$$< S^*SS^*z, x >=< SS^*z, Sx >=< S^*z, x > .$$

Puisque $H = N(S) \oplus N(S)^\perp$, alors on en déduit que $< S^*SS^*z, x >=< S^*z, x >$. Donc $S^*SS^* = S^*$.

(v)$\Rightarrow$ (vi) Évidente.

(v)$\Rightarrow$ (iii) Supposons que $S^*SS^* = S^*$, alors $(SS^*)^2 = SS^*$. Donc SS^* est une projection orthogonale, du fait qu'il est auto-adjoint.

(v)$\Rightarrow$ (iv) On fait un raisonnement analogue à celui de (v)$\Rightarrow$ (iii).

(iii)$\Rightarrow$ (i) Supposons que $SS^* = I$ et $x \in N(S)^\perp = \overline{R(S^*)}$. Donc il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$, telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} S^*(x_n) = x$. Comme

$$\|Sx\|^2 = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \|SS^*x_n\|^2 = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \|S^*x_n\|^2 = \|x\|,$$

alors on en déduit que S est une isométrie partielle.

L'equivalence entre (ii), (iv), (vi) est obtenue, en remplaçant S par S^* dans (iv).

$\square$

En vertu de la Proposition précédente, $S \in \mathfrak{L}(H)$ est une isométrie partielle si et seulement si S^+ existe et $S^+ = S^*$.

Théorème 2.4.3. *Soit* $S \in \mathfrak{R}(H)$ *tel que* $indS < \infty$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $S = \lambda T$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* T *une EP isométrie partielle,*

(ii) $S = \lambda T$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* T *une isométrie partielle normale,*

(iii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H)$, $\|SXS^+\| + \|S^+XS\| = 2\|SS^+XS^+S\|$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons que $S = \lambda T$ tels que $\lambda \in \mathbb{R}$ et T une isométrie partielle normal. Alors on peut écrire :

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \ R(T) \oplus^{\perp} N(T^*) \to R(T) \oplus^{\perp} N(T^*),$$

où T_1 est opérateur unitaire dans $R(T)$. Donc

$$T^+ = \begin{bmatrix} T_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \ R(T) \oplus^{\perp} N(T^*) \to R(T) \oplus^{\perp} N(T^*).$$

Pour tout opérateur

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} : \ R(T) \oplus^{\perp} N(T^*) \to R(T) \oplus^{\perp} N(T^*).$$

On a

$$\left\|SXS^+\right\| + \left\|S^+XS\right\| = \|T_1X_1T_1^*\| + \|T_1^*XT_1\| .$$

Puisque T_1 est unitaire, alors $\|T_1X_1T_1^*\| = \|T_1^*X_1T_1\| = \|X_1\|$. D'où on obtient

$$\left\|SXS^+\right\| + \left\|S^+XS\right\| = 2\,\|X_1\| = 2\left\|SS^+XS^+S\right\| .$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons (iii). En appliquant le Théorème 2.2.1, on obtient S est normal. Donc

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \ R(S) \oplus^{\perp} N(S^*) \to R(S) \oplus^{\perp} N(S^*),$$

où S_1 est un opérateur inversible normal dans $R(S)$. En utilisant (ii), il vient

$$\forall X \in \mathfrak{L}(R(S)), \ \left\|S_1XS_1^{-1}\right\| + \left\|S_1^{-1}XS_1\right\| = 2\,\|X\| .$$

Donc, $S \in \mathbb{R}^*\mathfrak{U}(H)$, d'après [38]. D'où on obtient (i). □

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème précédent.

Corollaire 2.4.4. *Supposons que* $\dim H < \infty$ *et* $S \in \mathfrak{L}(H)$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $S = \lambda T$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* T *une EP isométrie partielle,*

(ii) $S = \lambda T$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* T *une isométrie partielle normale,*

(iii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H), \ \|SXS^+\| + \|S^+XS\| = 2\,\|SS^+XS^+S\| .$

Théorème 2.4.5. *Supposons que* $\dim H < \infty$ *et* $S \in \mathfrak{L}(H)$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $S \in \mathbb{C}\mathfrak{U}_r(H)$,

(ii) $\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \|S^2X + XS^2\| = 2\,\|SXS\|$.

Preuve. (i)$\Rightarrow$ (ii) Evidente.

(ii)$\Rightarrow$ (i).

Supposons (ii).
D'après le Theorem 2.3.1, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ et T un opérateur auto-adjoint de $\mathfrak{L}(H)$, tel que $S = \lambda_0 T$. Par (ii), on a

$$\forall X \in \mathfrak{L}(H),\ \left\|T^2X + XT^2\right\| = 2\,\|TXT\|\,. \tag{2.11}$$

Comme T est auto-adjoint, alors il existe une valeur propre λ_1 de T, telle que $|\lambda_1| = \|T\|$. Soit λ une valeur propre arbitraire de T, donc il existe deux vecteurs $x,\ y \in (H)_1$, tels que $Tx = \lambda_1 x$ et $Ty = \lambda y$. En appliquant (2.5) pour $X = x \otimes y$, on obtient

$$\lambda^2 + \lambda_1^2 = 2\,|\lambda|\,|\lambda_1|\,.$$

Ce qui donne $|\lambda| = |\lambda_1|$. Par conséquent $\sigma(\frac{T}{\|T\|}) \subset \{-1, 1\}$ et comme $\frac{T}{\|T\|}$ est auto-adjoint, alors $\frac{T}{\|T\|} \in \mathfrak{U}_r(H)$. Donc $S = (\lambda_0\,\|T\|)\frac{T}{\|T\|}$. □

Chapitre 3

Inversibilité du commutateur $AA_0 - A_0A$

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à un problème posé par J. Benítez et V. Rakočević [5], où ils proposent l'étude de la classe des matrices co-EP, qui est la classe des matrices carées A, vérifiant $AA^+ - A^+A$ est inversible.
Comme AA^+ et A^+A sont deux projections orthogonales, alors ce problème est fortement lié à la question de l'inversibilité de l'opérateur $P - Q$, où P et Q sont deux projections orthogonales . Cette question a été étudiée par plusieurs chercheurs.
Dans le cas d'un espace de Hilbert H, Buckholtz [6] a démontré que $P - Q$ est inversible si et seulement si $R(P) \oplus R(Q) = H$ (voir [26], [27], [28], [42]).
Dans ce même article, il est démontré que si $P - Q$ est inversible, alors il existe un idempotent $M \in \mathfrak{L}(H)$ d'image $R(P)$ et de noyau $R(Q)$ vérifiant $(P-Q)^{-1} = M+M^*-I$.
La généralisation des résultats obtenus dans [5], dans le cadre des espaces de Hilbert, fera l'objet de la première partie de ce chapitre. D'autre caractérisations de la classe des opérateurs $A \in \mathfrak{R}(H)$, vérifiant $AA^+ - A^+A$ est inversible, seront données dans cette partie.
La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la caractérisation de la classe des opérateurs $A \in \mathfrak{R}(H)$, satisfaisant $R(A^*) = R(A)^\perp$.
La troisième partie de ce chapitre est essentiellement liée à l'étude de l'inversibilité de $AA_0 - A_0A$, où A_0 est un G^k- inverse de A.

Signalons que les résultats obtenus dans la première et la deusième partie de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication dans [31] .

3.2 Inversibilité de l'opérateur $AA^+ - A^+A$, où A^+ est l'inverse de Moore- Penrose de A

Dans [5], J. Benítez et V. Rakočević ont montré que pour toute matrice $A \in \mathbb{C}_{n,n}$, $AA^+ - A^+A$ est inversible si et seulement si $R(A) \oplus R(A^*) = \mathbb{C}_{n,n}$. Dans le Théorème suivant on généralise ce résultat dans le cadre des espaces de Hilbert.

Théorème 3.2.1. *Soit $A \in \mathfrak{R}(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $AA^+ - A^+A$ *est inversible,*

(ii) $R(A) \oplus R(A^*) = H$,

(iii) $AA^+ + A^+A$ *est inversible et* $R(A) \cap R(A^*) = \{0\}$,

(iv) $AA^+ + A^+A$ *est inversible et* $\left\| A(A^+)^2 A \right\| < 1$,

(v) *Il existe un idempotent* $P \in \mathfrak{L}(H)$ *tel que* $R(P) = N(A^*)$ *et* $N(P) = N(A)$,

(vi) $AA^* + A^*A$ *est inversible et* $R(A) \cap R(A^*) = \{0\}$,

(vii) $AA^* - A^*A$ *est inversible et* $R(A) \cap R(A^*) = \{0\}$.

Preuve. Comme AA^+ et A^+A sont deux projections orthogonales sur $R(A)$ et $R(A^*)$ respectivement, alors l'équivalence entre (i), (ii), (iii) et (iv) découle immédiatement du [27].

(ii)$\Leftrightarrow$ (v). Supposons que $R(A) \oplus R(A^*) = H$. Alors il existe un idempotent $M \in \mathfrak{L}(H)$, tel que

$$R(M) = R(A) \quad \text{et} \quad N(M) = R(A^*).$$

Posons $P = I - M^*$. Il est facile de voir que P est un idempotent, son image est $N(M^*)$ et son noyau est $R(M^*)$. Du fait que pour tout opérateur $B \in \mathfrak{R}(H)$, on a

$$N(B^*) = R(B)^{\perp} \quad \text{et} \quad R(B^*) = N(B)^{\perp},$$

on en déduit que

$$R(P) = N(A^*) \quad \text{et} \quad N(P) = N(A).$$

Réciproquement, Si P est un idempotent tel que $R(P) = N(A^*)$ et $N(P) = N(A)$, alors $I - P^*$ est un idempotent, son image, $R(A)$ et son noyau, $R(A^*)$. Donc (ii) s'obtient du fait que $H = R(I - P^*) \oplus N(I - P^*)$.

(ii)$\Leftrightarrow$(vi). En utilisant le Thórème 1.1.1, on a

$$R\left((AA^* + A^*A)^{\frac{1}{2}}\right) = R(A) + R(A^*).$$

Comme $(AA^* + A^*A)^{\frac{1}{2}}$ est un opérateur positif, par la Proposition 1.1.2, on en déduit que $R(A) + R(A^*) = H$ si est seulement si $(AA^* + A^*A)^{\frac{1}{2}}$ est inversible. Ce qui équivaut à $AA^* + A^*A$ est inversible. D'où l'équivalence entre (ii) et (vi).

(vi)$\Rightarrow$ (vii). Supposons (vi). Comme (vi)$\Leftrightarrow$ (v), alors il existe un idempotent P tel que

$$R(P) = N(A^*) \quad \text{et} \quad N(P) = N(A).$$

Ceci implique

$$A^*P = 0 \quad \text{et} \quad A(I-P) = 0.$$

Donc

$$AP = A \quad \text{et} \quad P^*A = 0.$$

A partir de ces deux dernières égalités, il vient

$$(AA^* + A^*A)(I-2P) = AA^* - A^*A.$$

Comme $I-2P$ est inversible car $(I-2P)^2 = I$ et par Hypothèse, on obtient $AA^* - A^*A$ est inversible.

(vii)$\Rightarrow$(vi). En effet si $AA^* - A^*A$ est inversible, alors

$$H = R(AA^* - A^*A) \subset R(A) + R(A^*) \subset H.$$

D'où $H = R(A) + R(A^*)$. Donc $AA^* + A^*A$ est inversible, d'après le Théorème 1.1.1 et la Proposition 1.1.2. $\square$

Remarque 3.2.2. *Soit $A \in \mathfrak{R}(H)$ tel que $AA^+ - A^+A$ est inversible.*
Si P est l'idempotent donné par le Théorème 3.2.1, alors en vertu de la démonstration de l'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$(iii), on en déduit que

$$A^+AP = A^+A, \quad AA^+P = 0, \quad AA^+(I-P^*) = I - P^*, \quad A^+AP^* = P^*.$$

Ceci entraîne que

$$\left(AA^+ - A^+A\right)(I - P - P^*) = I - P^* + P^* = I.$$

Comme $AA^+ - A^+A$ et $I - P - P^*$ sont auto-adjoints, alors on obtient

$$(I - P - P^*)\left(AA^+ - A^+A\right) = I.$$

Donc $(AA^+ - A^+A)^{-1} = I - P - P^*$.

D'aprés le Théorème 3.2.1, l'inversibilité de $AA^+ - A^+A$ implique l'inversibilité $AA^* + A^*A$. Cependant La réciproque n'est pas vraie. pour cela, considérons l'exemple suivant

Exemple 3.2.3. *Considérons l'opérateur shift à gauche A, défini sur l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$ par*

$$A(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...).$$

Il est facile de vérifier que

$$A^*(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...),$$

et

$$AA^* = I \quad et \quad A^*A\,(x_1, x_2, ...) = (0, x_2, x_3, ...).$$

Comme AA^* est une projection orthogonale, alors il vient par la Proposition 2.4.2, (iii), que A est une isométrie partielle. Donc A^+ existe et $A^+ = A^*$. D'ou on en déduit que l'opérateur $AA^* + A^*A$ est inversible mais l' opérateur $AA^+ - A^+A = AA^* - A^*A$ ne l'est pas.

Comme généralisation du résultat [5, Théorème 2.3], dans le cadre des espaces de Hilbert, on énonce le Théorème suivant.

Théorème 3.2.4. *Soit $A \in \mathfrak{R}(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$AA^+ - A^+A$ est inversible,*

(ii) *$A + A^*$ est inversible et il existe un idempotent $P \in B\,(H)$ tel que $AP = A$ et $P^*A = 0$,*

(iii) *$A - A^*$ est inversible et il existe un idempotent $P \in B\,(H)$ tel que $AP = A$ et $P^*A = 0$, ,*

(iv) *$A + A^*$ est inversible, $A\,(A + A^*)^{-1}\,A = A$ et $A^*\,(A + A^*)^{-1}\,A = 0$,*

(v) *$A - A^*$ est inversible, $A\,(A - A^*)^{-1}\,A = A$ et $A^*\,(A - A^*)^{-1}\,A = 0$.*

Preuve. (i)$\Rightarrow$(ii). Supposons que $AA^+ - A^+A$ est inversible. D'après la démonstration du Théorème 3.2.1, il exite un idempotent $P \in \mathfrak{L}(H)$ tel que

$$AP = A \quad \text{et} \quad P^*A = 0.$$

Ceci entraîne que

$$(A + A^*)\,(I - P - P^*)\,(A + A^*) = A^*A - AA^*.$$

Comme $AA^* - A^*A$ est inversible (voir le Théorème 3.2.1), alors on en déduit que $A + A^*$ l'est aussi.

(ii)$\Rightarrow$ (i). Si $A + A^*$ est inversible, alors on obtient $R\,(A) + R\,(A^*) = H$. D'autre part, s'il existe un idempotent $P \in B\,(H)$, vérifiant $AP = A$ et $P^*A = 0$, alors on vérifie facilement que

$$R\,(A^*) \subset R\,(P^*) \quad \text{et} \quad R\,(A) \subset N\,(P^*),$$

Donc

$$R\,(A) \cap R\,(A^*) = \{0\}.$$

Par conséquent $R\,(A) \oplus R\,(A^*) = H$.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii). En effet si $P \in \mathfrak{L}(H)$ est un idempotent tel que $AP = A$ and $P^*A = 0$, alors $(A + A^*)\,(2P - I) = A - A^*$. Puisque $2P - I$ est inversible, alors $A + A^*$ est inversible si et seulement si $A - A^*$ l'est aussi .

(ii)$\Rightarrow$(iv). A partir de

$$AP = A \text{ et } P^*A = 0,$$

on obtient $(A + A^*) P = A$. Comme $A + A^*$ est inversible, alors $P = (A + A^*)^{-1} A$. ce qui implique que

$$\begin{cases} A (A + A^*)^{-1} A = AP = A, \\ \\ A^* (A + A^*)^{-1} A = A^*P = 0. \end{cases}$$

(iv)$\Rightarrow$ (ii). Posons $P = (A + A^*)^{-1} A$. En utilisant

$$A (A + A^*)^{-1} A = A \text{ et } A^* (A + A^*)^{-1} A = 0,$$

on obtient

$$P^2 = P, \ AP = A \text{ et } A^*P = 0.$$

(iii)$\Leftrightarrow$(v). On la démontre comme (ii) $\Leftrightarrow$(iv). □

Remarque 3.2.5. *Soit $A \in \mathfrak{R}(H)$. Dans le Théorème 3.2.4, il est nécessaire de supposer l'existence d'un idempotent P, vérifiant $AP = A$ and $P^*A = 0$. En effet si A est un opérateur auto-adjoint inversible, alors $A + A^*$ est inversible, mais $AA^+ - A^+A = 0$.*

Corollaire 3.2.6. *Soit $A \in \mathfrak{R}(H)$. Si $AA^+ - A^+A$ est inversible, alors l'idempotent P donné dans le Théorème 3.2.4, est unique et $R(P) = N(A^*)$ et $N(P) = N(A)$.*

Preuve. Soit P l'idempotent donné dans le Théorème 3.2.4.
Donc $P = (A + A^*)^{-1} A$ (voir la preuve Théorème 3.2.4, (ii) $\Rightarrow$(iv)). Ce qui prouve d'une part l'unicité de P, et d'autre part $N(P) = N(A)$.
Maintenant montrons que $R(P) = N(A^*)$.
Puisque $A^*P = (P^*A)^* = 0$, alors on obtien $R(P) \subset N(A^*)$. Pour montrer l'inclusion inverse, remarquons d'abord que

$$(A + A^*) \left(I - AA^+\right) = A \left(I - AA^+\right) + \left[\left(I - AA^+\right) A\right]^* = A \left(I - AA^+\right).$$

Ainsi

$$I - AA^+ = (A + A^*)^{-1} A \left(I - AA^+\right) = P \left(I - AA^+\right).$$

D'ou on en déduit

$$R(I - AA^+) \subset R(P).$$

Comme

$$R\left(I - AA^+\right) = N\left(AA^+\right) = N(A^*),$$

il s'ensuit que

$$N(A^*) \subset R(P),$$

et par conséquent

$$R(P) = N(A^*).$$

□

Corollaire 3.2.7. *Soit $A \in \mathfrak{R}(H)$. Si $AA^+ - A^+A$ est inversible, alors*

(i) $(AA^+ - A^+A)^{-1} = (A + A^*)^{-1} (A^*A - AA^*) (A + A^*)^{-1}$,

(ii) $(AA^+ - A^+A)^{-1} = (A - A^*)^{-1} (AA^* - A^*A) (A - A^*)^{-1}$.

Preuve. Par la démonstration du Théorème 3.2.4, ((i)⇒ (*ii*)), on a

$$(A + A^*) (I - P - P^*) (A + A^*) = A^*A - AA^*.$$

Puisque $A + A^*$ est inversible (voir Théorème 3.2.4) et $I - P - P^* = (AA^+ - A^+A)^{-1}$ (voir la Remarque 3.2.2), on en déduit que

$$\left(AA^+ - A^+A\right)^{-1} = (A + A^*)^{-1} (A^*A - AA^*) (A + A^*)^{-1}.$$

(ii) On le montre comme (i). □

Lemme 3.2.8. [20] *Soit $P \in \mathfrak{L}(H)$ un idempotent. Si $\|P\| \leq 1$, alors P est une projection orthogonale.*

D'autres caractérisations de la classe des opérateurs $A \in \mathfrak{R}(H)$, vérifiant $AA^+ - A^+A$ est inversible, sont données dans le Théorème suivant :

Théorème 3.2.9. *Soit $A \in \mathfrak{R}(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$AA^+ - A^+A$ est inversible,*

(ii) *$AA^* + A^*A$ est inversible et $A^*A (AA^* + A^*A)^{-1} A^*A = A^*A$,*

(iii) *$AA^* - A^*A$ est inversible et $A^*A (A^*A - AA^*)^{-1} A^*A = A^*A$.*

Preuve. (i)⇒(ii). Supposons (i). En vertu du Théorème 3.2.4, il existe un idempotent $P \in \mathfrak{L}(H)$, tel que $AP = A$ et $P^*A = 0$. Ceci implique que

$$(AA^* + A^*A) P = A^*A$$

Comme $AA^* + A^*A$ est inversible (voir Théorème 3.4.1), alors

$$P = (AA^* + A^*A)^{-1} A^*A.$$

Donc

$$A^*A (AA^* + A^*A)^{-1} A^*A = A^*A.$$

(ii)⇒(i). Posons $P = (AA^* + A^*A)^{-1} A^*A$. Par l'application des Hypothèses on obtien

$$P^2 = P \quad \text{et } N(P) = N(A^*A) = N(A).$$

Remarquons maintenant

$$A^*A\left(AA^* + A^*A\right)^{-1} AA^* = A^*A - A^*A\left(AA^* + A^*A\right)^{-1} A^*A = 0.$$

Donc $AA^*P = 0$. Ainsi, $R(P) \subset N(A^*)$. Comme $R(P) + N(P) = H$, on obtient $N(A) + N(A^*) = H$. Ce qui implique que $N(A)^\perp \cap N(A^*)^\perp = \{0\}$. D'où $R(A) \cap R(A^*) = \{0\}$. Finalement, il résulte du Théorème 3.2.1, que $AA^+ - A^+A$ est inversible.
Par un raisonnement analogue à celui de (i)$\Leftrightarrow$ (ii), on en déduit l'équivalence entre (i) et (iii). $\square$

Comme conséquence directe de la preuve précédente et du Théorème 3.2.4, on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.10. *Soit $A \in \mathfrak{R}(H)$ tel que $AA^+ - A^+A$ est inversible. Si P est l' idempotent donné dans les Théorèmes 3.2.4, alors*

(i) $P = \left(AA^* + A^*A\right)^{-1} A^*A = \left(A^*A - AA^*\right)^{-1} A^*A = \left(A + A^*\right)^{-1} A = \left(A - A^*\right)^{-1} A,$

(ii) $A\left(AA^* + A^*A\right)^{-1} A^*A = A\left(A^*A - AA^*\right)^{-1} A^*A = A,$

(iii) $A^*\left(AA^* + A^*A\right)^{-1} A^*A = A^*\left(A^*A - AA^*\right)^{-1} A^*A = 0.$

Il est aussi intéressant de caractériser la classe des opérateurs $A \in \mathfrak{R}(H)$, vérifiant $AA^+ - A^+A$ non inversible.
Cette classe contient les opérateurs EP, en particulier la classe des normaux de $\mathfrak{R}(H)$.
Nous montrons qu'elle contient aussi la classe des hyponormaux. Notons bien que cette dernière classe n'est pas contenue dans la classe des EP.

Théorème 3.2.11. *Soit $A \in \mathfrak{R}(H)$. Si $AA^+ - A^+A$ est inversible, alors A^* et A ne sont pas hyponormaux.*

Avant de démontrer ce Théorème, le résultat suivant nous sera très utile.

Théorème 3.2.12. [16] *Soit $A \in \mathfrak{R}(H)$. Si l'image de l'opérateur $AA^* + A^*A$ est fermée, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *A hyponormal,*

(ii) $2AA^*(AA^* + A^*A)^+AA^* \leq AA^*$.

Preuve. du Théorème 3.2.11.
Supposons $AA^+ - A^+A$ est inversible, d'après le Théorème 3.2.9, on a

$$A^*A\left(AA^* + A^*A\right)^{-1} A^*A = A^*A.$$

En vertu du Théorème 3.2.12, on en déduit que A n'est pas hyponormal.

De façon similaire, on déduit que A^* n'est pas hyponormal. $\square$

3.3 La caractérisation de la classe d'opérateurs A, vérifiant $R(A^*) = R(A)^\perp$

Théorème 3.3.1. *Soit $A \in \mathfrak{R}(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $R(A) \oplus^\perp R(A^*) = H$,

(ii) $AA^+ + A^+A = I$,

(iii) $(AA^+ - A^+A)^2 = I$,

(iv) $A + A^*$ *est inversible et il existe une projection orthogonale unique* P *telle que* $AP = A$ *et* $PA = 0$,

(v) $A - A^*$ *est inversible et il existe une projection orthogonale unique* P *telle que* $AP = A$ *et* $PA = 0$.

Preuve. (i)⇔(ii). On a $R(A) \oplus^\perp R(A^*) = H$ si et seulement si $R(A)^\perp = R(A^*)$. Puisque AA^+ et A^+A sont deux projections orthogonales sur $R(A)$ et $R(A^*)$ respectivement, alors $R(A)^\perp = R(A^*)$ si et seulement si $A^+A = I - AA^+$. Donc, (i)⇔(ii).

(ii)⇔(iii). Supposons $P_1 = AA^+$ et $P_2 = A^+A$. Si $P_1 + P_2 = I$, alors

$$P_1P_2 = P_1(I - P_1) = 0 \quad \text{et} \quad P_2P_1 = P_2(I - P_2) = 0$$

Donc $(P_1 - P_2)^2 = P_1 + P_2 = I$.
Réciproquement, si $(P_1 - P_2)^2 = I$, alors

$$P_1 + P_2 - P_1P_2 - P_2P_1 = I.$$

Par multiplication à gauche par P_1 cette derniére équation, on obtient $P_1P_2P_1 = 0$. D'où on en déduit $(P_2P_1)^*(P_2P_1) = 0$. Ce qui équivaut à $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$. Donc $P_1 + P_2 = I$.

(iii)⇒(iv). Supposons (iii). Donc $AA^+ - A^+A$ est inversible et $(AA^+ - A^+A)^{-1} = AA^+ - A^+A$. D'après le Théorème 3.2.4, $A + A^*$ est inversible et il existe un idempotent unique $P \in B(H)$ tel que

$$AP = A \quad \text{et} \quad P^*A = 0.$$

Par la Remarque 3.2.2, on a

$$I - P - P^* = AA^+ - A^+A. \tag{3.1}$$

En multipliant (3.1) à gauche par P^* , on obtient

$$P^*P = P^*A^+A = \left(A^+AP\right)^* = A^+A$$

Donc $\|P\| = (\|P^*P\|)^{\frac{1}{2}} = 1$. D'après le Lemme précédent, P est une projection orthogonale vérifiant $AP = A$ et $PA = 0$.

(iv)⇒(i) Comme $A + A^*$ est inversible, alors $R(A) + R(A^*) = H$.
Maintenant, on montre que $R(A) \perp R(A^*)$.
A partir de $AP = A$ et $PA = 0$, on obtient $A^2 = 0$. ce qui implique que $R(A) \subset N(A)$.
Comme $N(A) = R(A^*)^\perp$, on en déduit que $R(A) \perp R(A^*)$.

(iv)⇔(v). On fait un raisonnement analogue à celui de (i)⇔ (ii). □

Corollaire 3.3.2. *Soit $A \in \mathfrak{R}(H)$. Si l'une des conditions citées dans le Théorème 3.3.1, est satisfaite, alors on a :*

(i) $A^+ = (A + A^*)^{-1} A (A + A^*)^{-1}$,
(ii) $A^+ = (A - A^*)^{-1} A (A - A^*)^{-1}$,
(iii) $A^+ + (A^+)^* = (A + A^*)^{-1}$,
(iv) $A^+ - (A^+)^* = (A - A^*)^{-1}$,
(v) $A^+ = \frac{1}{2}\left[(A + A^*)^{-1} + (A - A^*)^{-1}\right]$.

Preuve. (i) Comme par la preuve du Théorème 3.3.1,((iv) ⇒(i)), on a $A^2 = 0$, alors

$$(A + A^*) A^+A = (A^+A(A + A^*))^* = (A^*)^* = A,$$

et comme $A + A^*$ est inversible, alors il est facile de vérifier que

$$A^+ = \left(A^+A\right)^+ (A + A^*)^{-1} = A^+A (A + A^*)^{-1}.$$

En utilisant $A^+A = (A + A^*)^{-1} A$, on en déduit (i).
(ii) On le montre comme (i).
(iii) Puisque $A + A^*$ est auto-adjoint, alors de (i) et (ii), on obtient

$$\begin{aligned} A^+ + \left(A^+\right)^* &= (A + A^*)^{-1} A (A + A^*)^{-1} + (A + A^*)^{-1} A^* (A + A^*)^{-1} \\ &= (A + A^*)^{-1}. \end{aligned}$$

De la même manière on montre (iv).
(v) Découle de (iii) et (iv). □

Exemple 3.3.3. *Soient P une projection de $\mathcal{M}_2(C)$ et $A \in \mathcal{M}_2(C)$. Suivant la décomposition orthogonale $H = R(P) \oplus R(P)^\perp$, on peut écrire :*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & p_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad et \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

D'après le Théorème 3.3.1, $R(A^*) = R(A)^\perp$ si et seulement si $p_1 = a = c = d = 0$ et $b \neq 0$. Donc

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad et \quad A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}.$$

D'où $AA^+ + A^+A = I$.

3.4 Définition et existance du G^k-inverse

Définition 3.4.1. *Soient $A \in \mathfrak{L}(H)$ et k un entier positif. On appelle G^k-inverse de A, l'opérateur $A_0 \in \mathfrak{L}(H)$, vérifiant les deux équations suivantes :*

$$\begin{cases} (AA_0)^k A = A, \\ \\ (A_0A)^k A_0 = A_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Remarques 3.4.2. *Soient $A \in \mathfrak{L}(H)$ et k un entier positif.*

1- *Si S est un inverse généralisé de A, alors S est un G^k-inverse de A. La réciproque n'est pas vraie, car si A_0 est un G^k-inverse de A et $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$, tel que $\lambda^k = 1$. Donc λA_0 est un G^k-inverse de A qui n'est pas un inverse généralisé de A.*

2- *Si A_0 est G^k-inverse de A, alors :*

a- $A(AA_0)^k = A$, $A_0(A_0A)^k = A_0$.

b- $(AA_0)^k$ *et* $(A_0A)^k$ *sont des idempotents tels que :*

$$R((AA_0)^k) = R(A),\ N((AA_0)^k) = N(A_0),$$

et

$$R((A_0A)^k) = R(A_0),\ N((A_0A)^k) = N(A),$$

c- $H = R(A) \oplus N(A_0) = N(A) \oplus R(A_0)$.

Proposition 3.4.3. *Soient $A \in \mathfrak{L}(H)$ et k un entier positif. Alors A possède un G^k-inverse si et seulement si $R(A)$ est fermé.*

Preuve. Supposons que A_0 est un G^k-inverse de A. D'après la Remarque 3.4.2,(b), $(AA_0)^k$ est idempotent. Donc $R(A)$ est fermé. Réciproquement, si $R(A)$ est fermé, alors A^+ existe et il est un G^k-inverse de A. □

3.5 L'inversibilité de l'opérateur $AA_0 - A_0A$, où A_0 est un G^k-inverse de A

La plupart des résultats obtenus dans cette section sont basés sur le Lemme suivant :

Lemme 3.5.1. [26] *Soient $P, Q \in \mathfrak{L}(H)$ deux idempotents. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$P - Q$ est inversible,*

(ii) *$R(P) \oplus R(Q) = H$ et $R(P^*) \oplus R(Q^*) = H$,*

(iii) *Il existe deux idempotents $F, K \in \mathfrak{L}(H)$, tels que*

$$PF = F,\ FP = P,\ Q(I - F) = I - F,\ (I - F)Q = Q,$$

$$KP = K,\ KP = P,\ (I - K)Q = I - K,\ (I - K)Q = Q.$$

Si $P-Q$ est inversible, alors

- $F=(P-Q)^{-1}(I-Q)$,
- $K=(I-Q)(P-Q)^{-1}$,
- $(P-Q)^{-1}=F+K-I$.

Théorème 3.5.2. *Soient $A\in\mathfrak{R}(H)$ et k un entier positif non nul. Si A_0 est un G^k-inverse de A, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(AA_0)^k-(A_0A)^k$ *est inversible,*

(ii) $R(A)\oplus R(A_0)=H$ *et* $R(A_0^*)\oplus R(A^*)=H$.

(iii) $A+A_0$ *est inversible et il existe deux idempotents* $F,K\in\mathfrak{L}(H)$, *tels que* $FA=A,\ FA_0=0,\ AK=0,\ A_0K=A_0$,

(iv) $A-A_0$ *est inversible et il existe deux idempotents* $F,K\in\mathfrak{L}(H)$, *tels que* $FA=A,\ FA_0=0,\ AK=0,\ A_0K=A_0$,

(v) $A+A_0$ *est inversible et* $A\,(A+A_0)^{-1}A=A$,

(vi) $A+A_0$ *est inversible et* $A\,(A+A_0)^{-1}A_0=0$,

(vii) $A-A_0$ *est inversible et* $A\,(A-A_0)^{-1}A=A$,

(viii) $A-A_0$ *est inversible et* $A\,(A-A_0)^{-1}A_0=0$.

Preuve. (i)$\Leftrightarrow$ (ii) Comme $(AA_0)^k$ et $(A_0A)^k$ sont des idempotents sur $R(A)$ et $R(A_0)$ respectivement, alors l'équivalence entre (i) et (ii) résulte du Lemme précédent.

(i) $\Rightarrow$(iii) Supposons (i). Par le Lemme 3.5.1, il existe deux idempotents $F,K\in\mathfrak{L}(H)$, tels que

$$(3.3)\qquad \begin{cases} (AA_0)^kF=F,\\ F(AA_0)^k=(AA_0)^k,\\ (A_0A)^k(I-F)=I-F,\\ (I-F)(A_0A)^k=(A_0A)^k,\end{cases}$$

et

$$(3.4)\qquad \begin{cases} K(AA_0)^k=K,\\ (AA_0)^kK=(AA_0)^k,\\ (I-K)(A_0A)^k=I-K,\\ (A_0A)^k(I-K)=(A_0A)^k.\end{cases}$$

En multipliant à droite la deuxième et la derniére égalité de (3.3) par A et A_0 respectivement, on obtient

$$FA = A, \quad FA_0 = 0. \tag{3.5}$$

En multipliant à gauche la deuxième et la derniére égalité de (3.4) par A_0 et A respectivement, et en utilisant la Remarque 3.4.2, on obtient :

$$A_0K = A_0, \quad AK = 0. \tag{3.6}$$

Montrons maintenant que $A + A_0$ est inversible.
En utilisant (3.3) et (3.4), il vient

$$\begin{aligned} I &= (I-K)(A_0A)^k + K(AA_0)^k \\ &= (I-K)A_0(AA_0)^{k-1}A + KA(A_0A)^{k-1}A_0 \\ &= (I-K)A_0(AA_0)^{k-1}FA + KA(A_0A)^{k-1}(I-F)A_0. \end{aligned}$$

Comme

$$(I-K)A_0(AA_0)^{k-1}FA_0 = 0 \text{ et } KA(A_0A)^{k-1}(I-F)A = 0,$$

on en déduit que

$$[(I-K)A_0(AA_0)^{k-1}F + KA(A_0A)^{k-1}(I-F)](A + A_0) = I$$

En utilisant la même maniére on démontre que :

$$(A + A_0)[(I-K)A_0(AA_0)^{k-1}F + KA(A_0A)^{k-1}(I-F)] = I$$

Donc, $A + A_0$ est inversible et $(A+A_0)^{-1} = (I-K)A_0(AA_0)^{k-1}F + KA(A_0A)^{k-1}(I-F)$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Si $A + A_0$ est inversible, alors

$$H = R(A + A_0) \subset R(A) + R(A_0) \subset H,$$

et ainsi, $R(A) + R(A_0) = H$. D'autre part, s'il existe un idempotent $F \in \mathfrak{L}(H)$ tel que $FA = A$ and $FA_0 = 0$, alors

$$R(A) \subset R(F) \quad \text{et} \quad R(A_0) \subset N(F)$$

Comme $R(F) \cap N(F) = \{0\}$, alors il s'ensuit que $R(A) \cap R(A_0) = \{0\}$. Par conséquent, $R(A) \oplus R(A_0) = H$.
Comme il existe un idempotent $K \in \mathfrak{L}(H)$, tel que $A_0K = A_0$ et $AK = 0$, alors $K^*A_0^* = A_0^*$ and $K^*A^* = 0$. En appliquant les mêmes arguments précédents et le fait que $A_0^* + A^*$ est inversible, on obtient $R(A_0^*) \oplus R(A^*) = H$.

(iii)$\Leftrightarrow$ (iv). Supposons que $F, K \in \mathfrak{L}(H)$ sont deux idempotents, tels que

$$FA = A,\ FA_0 = 0,\ AK = 0,\ KA_0 = 0.$$

Alors

$$(2F - I)(A + A_0) = A - A_0.$$

Comme $2F - I$ est inversible car $(2F - I)^2 = I$, il s'ensuit que $A + A_0$ est inversible si et seulement si $A - A_0$ est inversible. Donc (iii)$\Leftrightarrow$ (iv).

(iii) $\Rightarrow$(v). A partir de $FA = A$ et $FA_0 = A_0$, on a $F(A + A_0) = A$. Puisque $A + A_0$ est inversible, alors $F = A(A + A_0)^{-1}$. Donc $A(A + A_0)^{-1}A = FA = A$.
(v)$\Rightarrow$ (iii). Supposons (v).
Remarquons d'abord que si $A + A_0$ est inversible, alors

$$A(A + A_0)^{-1}A_0 = A(A + A_0)^{-1}(A + A_0) - A(A + A_0)^{-1}A,$$

$$A_0(A + A_0)^{-1}A_0 = (A + A_0)(A + A_0)^{-1}A_0 - A(A + A_0)^{-1}A_0,$$
$$A_0(A + A_0)^{-1}A = (A + A_0)(A + A_0)^{-1}A - A(A + A_0)^{-1}A.$$

Par conséquent les égalités suivantes sont équivalentes

(3.7) $$A(A + A_0)^{-1}A = A,$$

(3.8) $$A(A + A_0)^{-1}A_0 = 0,$$

(3.9) $$A_0(A + A_0)^{-1}A_0 = A_0,$$

(3.10) $$A_0(A + A_0)^{-1}A = 0.$$

Posons maintenant

$$F = A(A + A_0)^{-1},\ K = (A + A_0)^{-1}A.$$

Par hypothèse et en utilisant (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10), on en déduit que F et K sont deux idempotents et

$$FA = A,\ FA_0 = 0,\ AK = 0,\ KA_0 = 0.$$

(v)$\Leftrightarrow$ (vi). Se déduit de la démonstration de (v)$\Rightarrow$ (iii).

(vi)$\Leftrightarrow$ (vii). Supposons (vi). Par (3.7), on a $A(A + A_0)^{-1}A = A$.
Considérons l'opérateur $F = A(A + A_0)^{-1}$, il est facile de voir que F est un idempotent ($F^2 = F$) et $FA = A$. Ce qui implique

$$(2F - I)(A + A_0) = A - A_0.$$

Comme $2F - I$ et $A + A_0$ sont inversibles, alors $A - A_0$ l'est aussi, et ainsi

$$A(A - A_0)^{-1}A = A(A + A_0)^{-1}(2F - I)A = A.$$

(vii)$\Rightarrow$(viii). Le même raisonnement utilisé dans (v)$\Rightarrow$ (vi), montre que si $A - A_0$ est inversible, alors les égalités suivantes sont équivalentes

$$A(A - A_0)^{-1}A = A, \tag{3.11}$$

$$A(A - A_0)^{-1}A_0 = 0, \tag{3.12}$$

$$A_0(A - A_0)^{-1}A_0 = A_0, \tag{3.13}$$

$$A_0(A - A_0)^{-1}A = 0. \tag{3.14}$$

Ainsi l'implication (vii)$\Rightarrow$(viii) découle immédiatement de (3.11), (3.12), (3.12) et (3.14).
(viii) $\Rightarrow$(vi). Supposons (viii). De (3.11), on obtient $A(A - A_0)^{-1}A = A$.
Soit $F = A(A - A_0)^{-1}$, alors $F^2 = F$ and $FA = A$. Ce qui donne

$$(2F - I)(A - A_0) = A + A_0.$$

Donc $A + A_0$ est inversible et $A(A + A_0)^{-1}A = A$. □

Théorème 3.5.3. *Soient $A \in \mathfrak{R}(H)$ et k un entier positif non nul. Si A_0 est un G^k-inverse de A, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(AA_0)^k - (A_0A)^k$ *est inversible,*

(ii) $AA_0 - A_0A$ *est inversible,* $R(A) \cap R(A_0) = \{0\}$ *et* $R(A^*) \cap R(A_0^*) = \{0\}$,

(iii) $AA_0 + A_0A$ *est inversible,* $R(A) \cap R(A_0) = \{0\}$ *et* $R(A^*) \cap R(A_0^*) = \{0\}$,

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons (i). On montre d'abord que $AA_0 - A_0A$ est inversible.
En vertu du théorème 3.5.2, $A + A_0$ est inversible et il existe deux idempotents $F, K \in \mathfrak{R}(H)$, tels que

$$FA = A,\ FA_0 = 0,\ AK = 0,\ A_0K = A_0,$$

alors on obtient :

$$(A + A_0)(F + K - I)(A + A_0) = AA_0 - A_0A.$$

D'où en on déduit que

$$R(AA_0 - A_0A) \subset R(A + A_0) \quad \text{et} \quad N(A + A_0) \subset N(AA_0 - A_0A)$$

Comme $A + A_0$ est inversible, alors $R(AA_0 - A_0A) = H$ et $N(AA_0 - A_0A) = \{0\}$. Donc $AA_0 - A_0A$ est invesible.
Maintenant, comme F est un idempotent tel que $FA = A$ et $FA_0 = 0$, on a

$$R(A) \subset R(F) \text{ et } R(A_0) \subset N(F).$$

Donc $R(A) \cap R(A_0) \subset R(F) \cap N(F) = \{0\}$. D'où, $R(A) \cap R(A_0) = \{0\}$.
D'autre part, puisque K^* est un idempotent et satisfait

$$K^*A_0^* = A_0^* \text{ et } K^*A^* = 0,$$

et en utilisant la même méthode précédente, on obtient $R(A^*) \cap R(A_0^*) = \{0\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i).Puisque $AA_0 - A_0A$ est inversible, alors $R(A) + R(A_0) = H$. et comme $R(A) \cap R(A_0) = \{0\}$, Donc on en déduit $R(A) \oplus R(A_0) = H$.
Du fait que $A_0^*A^* - A^*A_0^*$ est inversible (de (ii)) et $R(A^*) \cap R(A_0^*) = \{0\}$, on obtient par la même manière précédente que $R(A_0^*) \oplus R(A^*) = H$.
Finalement, en vertu du Théorème 3.5.2, en on déduit que $(AA_0)^k - (A_0A)^k$ est inversible.
(ii)$\Rightarrow$ (iii). Supposons (ii).

Puisque (ii)$\Rightarrow$ (i). D'après le Théorème 3.5.1, il existe un idempotent F vérifiant

$$FA = A \text{ et } FA_0 = 0.$$

Donc

$$(2F - I)(AA_0 - A_0A) = AA_0 + A_0A.$$

Comme $AA_0 - A_0A$ et $2F - I$ sont inversibles, alors $AA_0 - A_0A$ est aussi inversible.
(iii)$\Rightarrow$ (i). On utilise la même démonstration que (ii)$\Rightarrow$(i). □

Corollaire 3.5.4. *Soient $A \in \mathfrak{R}(H)$ et k un entier positif non nul. Si A_0 est un G^k-inverse de A et $(AA_0)^k - (A_0A)^k$ est inversible, alors les deux idempotents F et K donnés dans le Théorème 3.5.2, sont uniques et satisfont :*

(i) $F = A(A + A_0)^{-1} = A(A - A_0)^{-1}$,

(ii) $K = (A + A_0)^{-1}A_0 = (A - A_0)^{-1}A_0$,

(iii) $((AA_0)^k - (A_0A)^k)^{-1} = F + K - I$,

(iv) $(A + A_0)^{-1} = (I - K)A_0(AA_0)^{k-1}F + KA(A_0A)^{k-1}(I - F)$,

(v) $(A - A_0)^{-1} = (I - K)A_0(AA_0)^{k-1}F - KA(A_0A)^{k-1}(I - F)$,

(vi) $(AA_0 + A_0A)^{-1} = (A - A_0)^{-1}((AA_0)^k - (A_0A)^k)(A + A_0)^{-1}$,

(vii) $(AA_0 - A_0A)^{-1} = (A - A_0)^{-1}((AA_0)^k - (A_0A)^k)(A - A_0)^{-1}$,

(viii) $(A_0A - AA_0)^{-1} = (A + A_0)^{-1}((AA_0)^k - (A_0A)^k)^{-1}(A + A_0)^{-1}$.

Preuve. D'après la démonstration du Théorème 3.5.2, on a

$$F = A(A + A_0)^{-1} \text{ et } K = (A + A_0)^{-1}A.$$

Donc F et K sont uniques.
(i), (ii), (iv) sont déja établies dans la démonstration du Théorème 3.5.2.
(iii)se déduit du Lemme 3.5.1.
(v) Comme $(2F-I)(A+A_0) = A - A_0$ et $(2F-I)^2 = I$, alors

$$(A - A_0)^{-1} = (A + A_0)^{-1}(2F - I).$$

De plus, comme

$$(A + A_0)^{-1} = (I - K)A_0(AA_0)^{k-1}F + KA(A_0A)^{k-1}(I - F) \text{ (voir (iv))},$$

on obtient

$$(A - A_0)^{-1} = (I - K)A_0(AA_0)^{k-1}F - KA(A_0A)^{k-1}(I - F).$$

(vi). D'après la démonstration du Théorème 3.5.2, (i) $\Rightarrow$ (ii), on a

$$(A + A_0)(F + K - I)(A + A_0) = AA_0 - A_0A.$$

Puisque

$$((AA_0)^k - (A_0A)^k)^{-1} = F + K - I, \text{ (voir (iii))},$$

on en déduit que

$$(AA_0 - A_0A)^{-1} = (A - A_0)^{-1} \left((AA_0)^k - (A_0A)^k\right) (A - A_0)^{-1}.$$

(vii). On mène la même preuve qu'en (v). $\square$

Chapitre 4

L'inverse de Moore-Penrose de sommes et différences de projections orthogonales

4.1 Introduction

Soient P et Q deux projections orthogonales de $\mathfrak{L}(H)$.
Dans le cadre des matrices, en 1957, S. N. Afriat [1], a montré que si $R(P) \cap R(Q) = \{0\}$, alors $I - PQ$ est inversible et en plus $(I - PQ)^{-1} P\overline{Q}$ est une projection d'image $R(P)$ et de noyau $R(Q) \oplus^{\perp} [N(P) \cap N(Q)]$, (où $\overline{Q} = I - Q$).
Récemment en 2010, dans le même cadre des matrices, O. M. Baksalary et G. Trenkler [3] ont généralisé ce résultat, en remplaçant la notion d'inverse usuel par celle de l'inverse de Moore-Penrose, où ils ont montré que $(\overline{Q}P)^{+} = (I - PQ)^{+} P\overline{Q}$ est une projection d'image $R(P) \cap [N(P) + N(Q)]$ et de noyau $R(Q) \oplus^{\perp} [N(P) \cap N(Q)]$.
Dans ce chapitre nous donnons une généralisation de ces résultats dans le cadre des espaces de Hilbert, en ajoutant l'hypothèse $P + Q$ est à image fermée . Cela nous a permis également d'étudier l'opérateur $(\overline{Q}P)^{+}$.
Dautres résultats obtenus dans [3] concernant les deux projections suivantes :

$$(I - QP)^{+}\,\overline{Q} \quad , \quad P\,(P + Q - QP)^{+},$$

ont été généralisés dans ce travail.

4.2 Préliminaires

Dans cette section, on rappelle quelques résultats nécessaires pour la suite

Lemme 4.2.1. *Soient A et B deux opérateurs de $\in \mathfrak{L}(H)$. S'il exite un opérateur inversible $C \in \mathfrak{R}(H)$ tels que $A = BC$ ou $A = CB$, alors $R(A)$ est fermée si et seulement si $R(B)$ l'est aussi.*

Lemme 4.2.2. [40] *Soit* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ *un opérateur de* $\mathfrak{L}(H \oplus H)$, *tel que* A *est inversible. Alors on a* M *inversible si et seulement si* $S_A = D - CA^{-1}B$ *l'est aussi. Dans ce cas*

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS_A^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS_A^{-1} \\ -S_A^{-1}CA^{-1} & S_A^{-1} \end{bmatrix}.$$

Lemme 4.2.3. [26] *Soient* P *et* Q *deux projections orthogonales de* $\mathfrak{L}(H)$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $R(P+Q)$ *est fermé,*

(ii) $R(P-Q)$ *est fermé,*

(iii) $R(P) + R(Q)$ *est fermé,*

(iv) $N(P) + N(Q)$ *est fermé.*

Le Lemme technique suivant sera souvent utilisé par la suite.

Lemme 4.2.4. [12] *Si* P *et* Q *sont deux projections orthogonales de* $\mathfrak{L}(H)$. *On note par :*

$$H_1 = R(P) \cap R(Q), \quad H_2 = R(P) \cap N(P), \quad H_3 = N(P) \cap R(Q),$$

$$H_4 = N(P) \cap N(Q), \quad H_5 = R(P) \ominus (H_1 \oplus H_2) \quad et \quad H_6 = H \ominus (\oplus_{i=1}^{5} H_i),$$

alors

$$H = H_1 \oplus^{\perp} H_2 \oplus^{\perp} H_3 \oplus^{\perp} H_4 \oplus^{\perp} H_5 \oplus^{\perp} H_6 = \bigoplus_{i=1}^{6} H_i, \tag{4.1}$$

est une décomposition de l'espace H *en somme directe orthogonale, pour laquelle* P *et* Q *sont représentées comme suit :*

$$P = I \oplus I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

et

$$Q = I \oplus 0 \oplus I \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} Q_0 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I-Q_0)^{\frac{1}{2}} D \\ D^* Q_0^{\frac{1}{2}}(I-Q_0)^{\frac{1}{2}} & D^*(I-Q_0)D \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Où Q_0 *est une contraction positive dans* H_5 *n'admettant pas 0 et 1 comme valeurs propres, et* D *un opérateur unitaire de* H_6 *dans* H_5.

4.3 Résultats principaux

On débute cette partie par l'étude de l'inverse de Moore-penrose de sommes et produits de projections orthogonales P et Q de $\mathfrak{L}(H)$.

Théorème 4.3.1. *Supposons que P et Q sont deux projections orthogonales de $\mathfrak{L}(H)$, ayant les représentations matricielles (4.2) et (4.3) respectivement du Lemme 4.2.4. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $P+Q$ *est MP inversible,*

(ii) $P-Q$ *est MP inversible,*

(iii) $I-PQ$ *est MP inversible ;*

(iv) $\overline{Q}P$ *est MP inversible,*

(v) $I-PQP$ *est MP inversible,*

(vi) $P+Q-QP$ *est MP inversible,*

(vii) $I-Q_0$ *est inversible.*

Preuve. L'équivalence entre les assertions (i), (ii), (iii), (iv) et (v) a été obtenue dans [27].

(ii)$\Leftrightarrow$ (vii) voir [13, Théorème 5].

(vi)$\Leftrightarrow$ (vii). Par (4.1)et (4.2) on obtient

$$P+Q-QP = I\oplus I\oplus I\oplus 0\oplus \begin{bmatrix} I & Q^{\frac{1}{2}}(I-Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ 0 & D^*(I-Q_0)D \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

Supposons maintenant que

$$S = I\oplus I\oplus I\oplus I\oplus \begin{bmatrix} I & -Q^{\frac{1}{2}}(I-Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Il est clair que S est un opérateur inversible vérifiant

$$S(P+Q-QP) = I\oplus I\oplus I\oplus 0\oplus \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D^*(I-Q_0)D \end{bmatrix}.$$

Puisque S est inversible et que D est un opérateur unitaire de H_6 dans H_5, alors en vertu du Lemme 4.2.1 , on en déduit que $P+Q-QP$ est MP inversible si et seulement si $R(I-Q_0)$ est fermée. De plus comme $I-Q_0$ est positif et $\overline{R(I-Q_0)} = H_5$ car $I-Q_0$ est injectif, donc en utilisant la Proposition 1.1.2 (iii), on obtient l'équivalence entre (vi) et (vii). $\square$

Remarque 4.3.2. *Le Théorème précédent ne reste pas vrai dans le cas ou P et Q sont deux idempotents. Pour cela, considérons dans $H\oplus H$ les deux idempotents suivants :*

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{et} \quad Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix},$$

où $A \in \mathfrak{L}(H)$ *à image non fermée. Il est facile de voir que*

$$P + Q = \begin{bmatrix} 2I & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{et} \quad P - Q = \overline{Q}P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A & 0 \end{bmatrix}.$$

D'après le Corollaire 1.2.6, $P + Q$ *est MP inversible et*

$$(P+Q)^{+} = \begin{bmatrix} 2(I + A^*A)^{-1} & (I + A^*A)^{-1}A \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mais les opérateurs $P - Q$ *et* $\overline{Q}P$ *ne sont pas MP inversibles.*

Proposition 4.3.3. *Soient* P *et* Q *deux projections orthogonales de* $\mathfrak{L}(H)$ *telles que* $R(P+Q)$ *est fermé. Suivant la décomposition orthogonale (4.1) de* H*, on a*

(i) $P_{N(P)+N(Q)} = 0 \oplus I \oplus I \oplus I \oplus \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$

(ii) $P_{R(P)+R(Q)} = I \oplus I \oplus I \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$

(iii) $P_{R(P)\cap[N(P)+N(Q)]} = 0 \oplus I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$

(iv) $P_{R(Q)\cap[N(P)+N(Q)]} = 0 \oplus 0 \oplus I \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} Q_0 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I - Q_0)D \\ D^*Q_0^{\frac{1}{2}}(I - Q_0)^{\frac{1}{2}} & D^*Q_0D \end{bmatrix},$

(v) $P_{R(Q)\oplus[N(P)\cap N(Q)]} = I \oplus 0 \oplus I \oplus I \oplus \begin{bmatrix} Q_0 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ D^*Q_0^{\frac{1}{2}}(I - Q_0)^{\frac{1}{2}} & D^*(I - Q_0)D \end{bmatrix},$

(vi) $P_{\{R(P)\cap[N(P)+N(Q)]\}\oplus[N(P)\cap N(Q)]} = 0 \oplus I \oplus 0 \oplus I \oplus \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(vii) $P_{\{R(Q)\cap[N(P)+N(Q)]\}\oplus[N(P)\cap N(Q)]} = 0 \oplus 0 \oplus I \oplus I \oplus \begin{bmatrix} Q_0 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I - Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ D^*Q_0^{\frac{1}{2}}(I - Q_0)^{\frac{1}{2}} & D^*(I - Q_0)D \end{bmatrix}.$

Preuve. Il est facile de voir que selon la décomposition orthogonale (4.1) de H, on a

$$P_{R(P)\cap R(Q)} = I \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

et

$$P_{N(P)\cap N(Q)} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus I \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

(i) Puisque $R(P+Q)$ est fermé, d'après le Lemme 4.2.3, $N(P) + N(Q)$ est fermé aussi. Donc

$$N(P) + N(Q) = [R(P) \cap R(Q)]^{\perp}.$$

Ce qui équivaux à

$$P_{N(P)+N(Q)} = I - P_{R(P)\cap R(Q)} = 0 \oplus I \oplus I \oplus I \oplus \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \text{(par 4.5)}.$$

De la même manière on obtient (ii).

(iii). En utilisant (4.2) et (ii), on en déduit que

$$PP_{N(P)+N(Q)} = P_{N(P)+N(Q)}P.$$

Donc

$$P_{R(P)\cap[N(P)+N(Q)]} = PP_{N(P)+N(Q)} = 0 \oplus I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iv). Remarquons d'abord que

$$P_{R(Q)\oplus[N(P)\cap N(Q)]} = I - P_{(R(Q)\oplus[N(P)\cap N(Q)])^{\perp}} = I - P_{N(Q)\cap(R(P)+R(Q))}.$$

De (ii), il vient

$$P_{N(Q)} = I - Q = 0 \oplus I \oplus 0 \oplus I \oplus \begin{bmatrix} I - Q_0 & Q^{\frac{1}{2}}(I-Q_0)^{\frac{1}{2}} D \\ D^* Q^{\frac{1}{2}}(I-Q_0)^{\frac{1}{2}} & D^* Q_0 D \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

ce qui donne

$$P_{N(Q)}P_{R(P)+R(Q)} = P_{R(P)+R(Q)}P_{N(Q)},$$

alors

$$P_{R(Q)\oplus[N(P)\cap N(Q)]} = I - P_{N(Q)}P_{R(P)+R(Q)}.$$

Ainsi (iv) découle de (ii) et (4.7).

(v), (vi) et (vii) se démontrent de la même manière. $\square$

Théorème 4.3.4. *Soient P et Q deux projections orthogonales de $\mathfrak{L}(H)$. Si $P+Q$ est MP inversible, alors*

(i) $\left(\overline{Q}P\right)^{+}$ *est une projection d'image $R(P)\cap[N(P)+N(Q)]$ et de noyau $R(Q)\oplus[N(P)\cap N(Q)]$,*

(ii) $P\left(\overline{Q}P\right)^{+}\overline{Q} = \left(\overline{Q}P\right)^{+}$,

(iii) $\left(\overline{Q}P\right)^{+} = (I-PQ)^{+}P\overline{Q} = P(I-PQ)^{+}\overline{Q}$,

(iv) $\left(\overline{Q}P\right)^{+} = (I-PQP)^{+}P\overline{Q}$.

Preuve. En effet, suivant la décomposition orthogonale (4.1) de H, P et Q sont sous les deux formes (4.2) et (4.3), respectivement. Alors il s'ensuit que

$$\overline{Q}P = 0 \oplus I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} I - Q_0 & 0 \\ -D^* Q^{\frac{1}{2}}(I-Q_0)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

et

$$P\overline{Q}P == 0 \oplus I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} I - Q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Si P+Q est MP inversible, alors le Théorème 4.3.1, implique que $\left(\overline{Q}P\right)^+$ existe et $I - Q_0$ est inversible dans H_5. En vertu de la Proposition 1.2.4, on a

$$\left(\overline{Q}P\right)^+ = \left[P\left(\overline{Q}\right)P\right]^+ \left(P\overline{Q}\right).$$

Donc en appliquant (4.9) et (4.8), on obtient

$$\left(\overline{Q}P\right)^+ = 0 \oplus I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} (I - Q_0)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I - Q_0 & -Q_0^{\frac{1}{2}} (I - Q_0)^{\frac{1}{2}} D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$\left(\overline{Q}P\right)^+ = 0 \oplus I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} I & -Q_0^{\frac{1}{2}} (I - Q_0)^{-\frac{1}{2}} D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

A partir de (4.10) et (4.9), il est facile de vérifier que $\left(\overline{Q}P\right)^+$ est un idempotent,

$$\left(\overline{Q}P\right)^+ \overline{Q}P = 0 \oplus I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

et

$$I - \overline{Q}P\left(\overline{Q}P\right)^+ = I \oplus 0 \oplus I \oplus I \oplus \begin{bmatrix} Q_0 & Q^{\frac{1}{2}} (I - Q_0)^{\frac{1}{2}} D \\ D^* Q^{\frac{1}{2}} (I - Q_0)^{\frac{1}{2}} & D^* (I - Q_0) D \end{bmatrix}.$$

Alors, en vertu de la Proposition 1.2.4, (iii) et (v), on a

$$\left(\overline{Q}P\right)^+ \overline{Q}P = P_{R(P)\cap[N(P)+N(Q)]} \text{ et } I - \overline{Q}P\left(\overline{Q}P\right)^+ = P_{R(Q)\oplus[N(P)\cap N(Q)]},$$

et comme

$$\left(\overline{Q}P\right)^+ \overline{Q}P \text{ et } I - \overline{Q}P\left(\overline{Q}P\right)^+,$$

sont deux projections orthogonales respectivement sur $R\left[\left(\overline{Q}P\right)^+\right]$ et $N\left[\left(\overline{Q}P\right)^+\right]$, donc on endéduit que

$$R\left[\left(\overline{Q}P\right)^+\right] = R(P) \cap [N(P) + N(Q)],$$

et

$$N\left[\left(\overline{Q}P\right)^+\right] = R(Q) \oplus [N(P) \cap N(Q)].$$

(ii). A partir de (i), on en déduit que

$$R\left[\left(\overline{Q}P\right)^+\right] \subset R(P) \text{ et } R(Q) \subset N\left[\left(\overline{Q}P\right)^+\right].$$

Ceci implique $P(\overline{Q}P)^{+}Q = 0$. D'où $P(\overline{Q}P)^{+}\overline{Q} = (\overline{Q}P)^{+}$, du fait que $\overline{Q} = I - Q$.

D'après le Théorème 4.3.1, $I - PQ$ et $I - PQP$ sont MP inversibles.

Calculons maintenant $(I - PQ)^{+}$ et $(I - PQP)^{+}$.

Par l'application de (4.2) et (4.3), on obtient

$$I - PQ = 0 \oplus I \oplus I \oplus I \oplus \begin{bmatrix} I - Q_0 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I - Q_0)\, D \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{4.11}$$

et

$$I - PQP = 0 \oplus I \oplus I \oplus I \oplus \begin{bmatrix} I - Q_0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Puisque $I - Q_0$ est inversible et en appliquant le Lemme 4.2.2, on en déduit que

$$\begin{aligned} (I - PQ)^{+} &= 0 \oplus I \oplus I \oplus I \oplus \left(\begin{bmatrix} I - Q_0 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I - Q_0)^{\frac{1}{2}}\, D \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= 0 \oplus I \oplus I \oplus I \oplus \begin{bmatrix} (I - Q_0)^{-1} & -Q_0^{\frac{1}{2}}(I - Q_0)^{-\frac{1}{2}}\, D \\ 0 & I \end{bmatrix}, \qquad (4.12) \end{aligned}$$

et

$$(I - PQP)^{+} = 0 \oplus I \oplus I \oplus I \oplus \begin{bmatrix} (I - Q_0)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

Donc (iii) et (iv) se déduisent en utilisant (4.2), (4.3), (4.10), (4.12) et (4.13). □

Remarque 4.3.5. *Le Théorème précédent généralise les Théorèmes 2 et 5 dans [3] , énoncé pour* $P, Q \in \mathbb{C}_n^{op}$.

Corollaire 4.3.6. *Soient* P *et* Q *deux projections orthogonales de* $\mathfrak{L}(H)$, *Si* $R(P) \oplus R(Q) = H$, *alors*

(i) $(\overline{Q}P)^{+}$ *est un projection d'image* $R(P)$ *et de noyau* $R(Q)$,

(ii) $(\overline{Q}P)^{+} = (I - PQ)^{-1} P\overline{Q} = P(I - PQ)^{-1}\overline{Q} = (I - PQP)^{-1} P\overline{Q}$,

(iii) $(P - Q)^{-1} = (\overline{Q}P)^{+} + (P\overline{Q})^{+} - I$.

Preuve. Supposons que $R(P) \oplus R(Q) = H$, alors

$$R(P) + R(Q) = H \ \text{ et } \ R(P) \cap R(Q) = \{0\}.$$

Ce qui équivaut à

$$N(P) \cap N(Q) = \{0\} \ \text{ et } \ N(P) + N(Q) = H.$$

Ainsi par le Théorème 4.3.4 (i), on en déduit (i).

(ii). Comme $R(P) \oplus R(Q) = H$, d'après [27, Théorème 6.2] et [27, Remarque 6.4], $I - PQ$ et $I - PQP$ sont inversibles. Donc (ii) découle du Théorème 4.3.4, (iii), du fait que

$$(I - PQ)^+ = (I - PQ)^{-1} \text{ et } (I - PQP)^+ = (I - PQP)^{-1}.$$

(iii). En vertu de [27, Théorème 2.5], $P - Q$ est inversible et

$$(P - Q)^{-1} = M + M^* - I,$$

où M est un idempotent d'image $R(P)$ et de noyau $R(Q)$. compte tenu de l'unicité de M et par (i), on conclut que $M = (\overline{Q}P)^+$. Donc $(P - Q)^{-1} = (\overline{Q}P)^+ + (P\overline{Q})^+ - I$.

□

Théorème 4.3.7. *Soient P et Q deux projections orthogonales de $\mathfrak{L}(H)$, Si $P + Q$ est MP inversible, alors*

$$(P - Q)^+ = P_{[R(P)\cap R(Q)]\oplus^\perp[N(P)\cap N(Q)]} + (\overline{Q}P)^+ + (P\overline{Q})^+ - I.$$

Preuve. En effet, si $P + Q$ est MP inversible, il s'ensuit du Théorème 4.3.1, que $P - Q$ l'est aussi. Donc, par [13], $(P - Q)^+$ s'écrit suivant la décomposition (4.1) de H comme suit :

$$(P - Q)^+ = 0 \oplus I \oplus -I \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} I & -Q_0^{\frac{1}{2}} (I - Q_0)^{-\frac{1}{2}} D \\ -D^*(I - Q_0)^{-\frac{1}{2}} Q_0^{\frac{1}{2}} & -I \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

Aussi on a.

$$P_{[R(P)\cap R(Q)]\oplus^\perp[N(P)\cap N(Q)]} = I \oplus 0 \oplus 0 \oplus I \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Par suite, en utilisant (4.10), (4.14) et (4.15), on obtient le résultat. □

Théorème 4.3.8. *Soient P et Q deux projections orthogonales de $\mathfrak{L}(H)$. Si $P + Q$ est MP inversible, alors*

(i) $(I - QP)^+ \overline{Q}$ *est un projection d'image* $R(P) \cap [N(P) + N(Q)] \oplus [N(P) \cap N(Q)]$ *et de noyau* $R(Q)$.

(ii) $P(P + Q - QP)^+$ *est un projection d'image* $R(P)$ *de noyau* $\{R(Q) \cap [N(P) + N(Q)]\} \oplus^\perp [N(P) \cap N(Q)]$.

Preuve. Si $P + Q$ est MP inversible, d'après le Théorème 4.3.4, $I - PQ$ et $P + Q - QP$ le sont aussi.

(i) Comme $I - PQ = (I - QP)^*$, alors en vertu du Théorème 1.2.3 et de la Proposition 1.2.4, $I - QP$ est MP inversible et

$$(I - QP)^+ = \left[(I - PQ)^+\right]^*.$$

En utilisant les égalités (4.12) et (4.7), on a

$$(I-QP)^{+} = 0 \oplus I \oplus I \oplus I \oplus \begin{bmatrix} (I-Q_0)^{-1} & 0 \\ -D^{*}Q_0^{\frac{1}{2}}(I-Q_0)^{-\frac{1}{2}} & I \end{bmatrix},$$

et

$$(I-QP)^{+}\overline{Q} = 0 \oplus I \oplus 0 \oplus I \oplus \begin{bmatrix} I & Q^{\frac{1}{2}}_{\cdot}(I-Q_0)^{-\frac{1}{2}}D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc $(I-QP)^{+}\overline{Q}$ est un idempotent et par la Proposition 1.2.4, on obtient

$$\left[(I-QP)^{+}\overline{Q}\right]^{+} = \left[\overline{Q}(I-PQ)^{+}\right]\left[(I-QP)^{+}\left(\overline{Q}\right)^{2}(I-PQ)^{+}\right]^{+}$$

$$= 0 \oplus I \oplus 0 \oplus I \oplus \begin{bmatrix} I-Q_0 & 0 \\ D^{*}Q^{\frac{1}{2}}_{\cdot}(I-Q_0)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Par conséquent

$$P_{R[(I-QP)^{+}\overline{Q}]} = (I-QP)^{+}\overline{Q}[(I-QP)^{+}\overline{Q}]^{+} = 0 \oplus I \oplus 0 \oplus I \oplus \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et

$$P_{N\left[(I-QP)^{+}\overline{Q}\right]} = I - \left[(I-QP)^{+}\overline{Q}\right]^{+}(I-QP)^{+}\overline{Q} = Q.$$

Donc on en déduit que

$$N[(I-QP)^{+}\overline{Q}] = R(Q),$$

et d'après la Proposition 4.3.3, on obtient

$$R[(I-QP)^{+}\overline{Q}] = R(P) \cap [N(P)+N(Q)] \oplus [N(P) \cap N(Q)].$$

(ii). Par le Lemme 4.2.4 , on a

$$P+Q-QP = I \oplus I \oplus I \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} I & Q^{\frac{1}{2}}_{\cdot}(I-Q_0)^{\frac{1}{2}}D \\ 0 & D^{*}(I-Q_0)D \end{bmatrix},$$

et par l'application du Lemme 4.2.2, il vient

$$(P+Q-QP)^{+} = I \oplus I \oplus I \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} I & -Q^{\frac{1}{2}}_{\cdot}(I-Q_0)^{-\frac{1}{2}}D \\ 0 & D^{*}(I-Q_0)^{-1}D \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$P(P+Q-QP)^{+} = I \oplus I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} I & -Q^{\frac{1}{2}}_{\cdot}(I-Q_0)^{-\frac{1}{2}}D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc $P(P+Q-QP)^+$ est une projection et en vertu du Lemme 1.2.5, on a

$$(P(P+Q-QP)^+)^+ = I \oplus I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} (I+Q_0(I-Q_0)^{-1})^{-1} & 0 \\ -D^*(I-Q_0)^{-\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}}(I+Q_0(I-Q_0)^{-1})^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

et puisque $I + Q_0(I-Q_0)^{-1} = (I-Q_0)^{-1}$, alors

$$(P(P+Q-QP)^+)^+ = I \oplus I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} I-Q_0 & 0 \\ -D^*(I-Q_0)^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Par suite

$$P(P+Q-QP)^+(P(P+Q-QP)^+)^+ = P,$$

et

$$I-(P(P+Q-QP)^+)^+P(P+Q-QP)^+ = 0 \oplus 0 \oplus I \oplus I \oplus \begin{bmatrix} Q_0 & Q_0^{\frac{1}{2}}(I-Q_0)^{\frac{1}{2}} D \\ D^* Q_0^{\frac{1}{2}}(I-Q_0)^{\frac{1}{2}} & D^*(I-Q_0)D \end{bmatrix}.$$

Alors il en résulte d'après la Proposition 4.3.3, que

$$R(P(P+Q-QP)^+) = R(P),$$

et

$$N\left(P(P+Q-QP)^+\right) = \{R(Q) \cap [N(P) + N(Q)]\} \oplus^{\perp} [N(P) \cap N(Q)].$$

□

En inversant les rôles de P et Q dans le Théorème précédent, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.3.9. *Soient P et Q deux projections orthogonales de $\mathfrak{L}(H)$. Si $P+Q$ est MP inversible, alors*

(i) $R[(I-QP)^+\overline{Q}] = N[Q(P+Q-PQ)^+]$,

(ii) $N[(I-QP)^+\overline{Q}] = R[Q(P+Q-PQ)^+]$.

Le Corollaire suivant est une conséquence immédiate des Théorèmes 4.3.4 et 4.3.8.

Corollaire 4.3.10. *Si P et Q sont deux projections orthogonales de $\mathfrak{L}(H)$, telles que $P+Q$ est MP invertible, alors*

(i) $\left(\overline{Q}P\right)^+ = (I-QP)^+\,\overline{Q} \Leftrightarrow R(P) + R(Q) = H,$

(ii) $\left(\overline{Q}P\right)^+ = P(P+Q-QP)^+ \Leftrightarrow R(P) \cap R(Q) = \{0\},$

(iii) $(I-QP)^+\,\overline{Q} = P(P+Q-QP)^+ \Leftrightarrow R(P) \oplus R(Q) = H.$

Symboles et Notations

H	l'espace de Hilbert complex
$\mathfrak{L}(H)$	l'espace des opérateurs linéaires bornés sur H
A^*	adjoint Hilbertien de A
A^{-1}	l'inverse de A
A^+	le Moore-Penrose inverse de A
$A^\#$	le groupe inverse de A
N(A)	noyau de A
R(A)	image de A
$\|A\|$	norme de A
$ind(A)$	indice de A
$\mathfrak{R}(H)$	la classe des opérateurs à image fermée de $\mathfrak{L}(H)$
$\mathfrak{I}(H)$	la classe des opérateurs inversibles de $\mathfrak{L}(H)$
$\mathscr{S}(H)$	la classe des opérateurs auto-adjoints de $\mathfrak{L}(H)$
$\mathscr{S}_0(H)$	la classe des opérateurs auto-adjoints inversibles de $\mathfrak{L}(H)$
$\mathfrak{U}(H)$	la classe des opérateurs unitaires de $\mathfrak{L}(H)$
$\mathfrak{U}_r(H)$	la classe des opérateurs auto-adjoints unitaires de $\mathfrak{L}(H)$
$\oplus$	signe de somme direct
$\oplus^\perp$	signe de somme direct orthogonale
$\otimes$	signe de produit tensoriel.

Bibliographie

[1] S. N. Afriat, Orthogonal and oblique projectors and the characterisation of pairs of vector spaces, Proc. Cambridge Philos. Soc. 53 (1957)800-816.

[2] J. K. Baksalary and O.M. Baksalary, Particular formulae for the Moore-Penrose inverse of a columnwise partitioned matrix, Linear Algebra Appl. 41 (2007), 16-23.

[3] O. M. Baksalary and G. Trenkler, Function of orthogonal projectors involving the Moore-Penrose inverse, Computer and Applications 59 (2010) 764-778.

[4] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, Generalized Inverses, Theory and Applications, second ed., Springer, 2003.

[5] J. Benítez and V. Rakočević, Matrices A suth that $AA^+ - A^+A$ are nonsingular, Applied Mathematics and computation 217 (2010) 3493-3503.

[6] D. Buckholtz, Inverting the difference of Hilbert space projection, Amer. Math. Monthly 104 (1997) 60-61.

[7] D. Buckholtz, Hilbert space idempotents and involutions, Proc. Am. Math. Soc. 128 (2000) 1415-1418.

[8] S. R. Caradus, Generalised Inverse and operator Theory, Queen's Paper in Pure and Appl Math, vol. 50, Quenn's Univ., Kingston, ON,1978

[9] S. L. Compbell, CD, Meyer, Generalized inverses of linear transformations, Pitman Publishing limited, 1979, Reprinting, SIMA, 2010.

[10] G. Corach, R. Porta, and L. Recht, An operator inequality, Linear Algebra Appl. 142(1990), 153-158.

[11] C. Conde, M. S. Moslehian, and A. Seddik, Operator inequalities related to the Corach-Porta-Recht inequality, Linear Algebra Appl., 436(2012), 3008-3017.

[12] C. Y. Deng, H.K. Du, Common complements of two subspaces and an answer of GroB's question, Acta Math. Sinica 49 (2006) 1099-1112.

[13] C. Y. Deng, The drazin inverse of products and differences of orthogonal projections, J. Math. Appl. 335, (2007), 64-71.

[14] C. Y. Deng and H. K. Du, Representations of the Moore-Penrose inverse of 2 by 2 Block operator valued partial matrices, Linear and multilinear Algebra 58 (2010), 15-26.

[15] R. G. Douglas, On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 17(1966), 413-415.

[16] D. S. Djordjević, Characterizations of normal, hyponormal and EP operators, J. Math. Appl. 329 (2007) 1181-1190.

[17] D. S. Djordjević and J.j. Koliha, Characterizing Hermitian, normal and EP operators, Filomat 21 (1) (2007) 39-54.

[18] P. A. Fillmore, J.P. Williams. On operator ranges, Adv. Math. 7, 254-281.

[19] J. I. Fujii, M.Fujii, T.Furuta and R. Nakamoto, Norm inequalities equivalent to Heinz inequality, Pros, mer, Math, Soc 118 (1993), 827-830.

[20] T. Furuta and R. Nakamoto, some theorems on certain contraction operators, Proc. Japan Acad., 45 (1969), 565-567.

[21] S. Guedjiba and R. Benacer, Inversion généralisée d'opérateurs linéaires, Math Maghreb, Rev. vol. 11 (2000).

[22] R. Hart and M. Mbekhta, on generalized inverse in C^* -algebra, Studia mathematica, 103 (1992) , 71-77.

[23] E. Heinz, Beitrage zur storungstheory der spctralzerlegung, Math. Ann 123 (1951) 415-438.

[24] I. Kaplansky, Rings with a polynomial identity, Bull. Amer. Math. Soc, 54 (1948), 575-580.

[25] M. Khosravi, Corach-Porta-Recht inequality for closed range operators, Mathematical Inequalities and Applications, Volum 16, Number 2 (2012), 477-481.

[26] J. J. Koliha and V. Rakočević, Invertibility of difference of idempotents, Linear Multilinear Algebra 51 (2003) 97-110.

[27] J. J. Koliha and V. Rakočević, Fredholm properties of the difference of orthogonal projections in a Hilbert space, Integr. Equ. Oper. Theory 52 (2005) 125-134.

[28] J.J. Koliha, V. Rakočević and I. Straškraba, The difference and sum of projectors, Linear Algebra Appl. 388 (2004), 279-288.

[29] A. McIntosh, Heinz inequalities and perturbation of spectral families, Macquarie Mathematical Reports, Macquarie Univ., 1979.

[30] S. Menkad and A. Seddik, Operator inequalities and normal opérators, Banach J. Math. Anal. 6 (2012), no. 2, 204-210.

[31] S. Menkad and S.Guedjiba, on the invertibility of $AA^+ - A^+A$ in a Hilbert space, Math. Vesnik.

[32] E. H. Moore, On the reciprocal of the general algebraic matrix , Bull. Amer. Math. Soc, 26 (1920), 394-395.

[33] M. Z. Nashed, Generalized inverses, Theory and Application, Academic Press, NY, (1976).

[34] R. Penrose, Ageneralized inverse for matrices, Procedings of the Combridge Philosophical, Society, 51 (1955), 406-413.

[35] A. Seddik, Some results related to Corach-Porta-Recht inequality, Proc. Amer. Math. Soc. 129(2001), 3009-3015.

[36] A. Seddik, On the injective norm and characterization of some subclasses of normal operators by inequalities or equalities, J. Math. Anal. Appl. 351(2009), 277-284.

[37] A. Seddik, Characterization of the class of unitary operators by operator inequalities, Linear and Multilinear algebra, 59(2011), 1069-1074.

[38] A. Seddik, Closed operator inequalities and open problems, Mathematical Inequalities and Applications, 14(2011), 147-154.

[39] Y. Tian and Y.Takane, The inverse of any two- by- two nonsingular partitioned matrix and tree matrix inverse completion problems, Computer Mathematics with applications, 57 (2009), no 8, 1294-1309.

[40] A. Taylor and D. Lay, introduction to functional analysis, 2nded ; John Wiley , sons, 1980.

[41] I. Vidav, On idempotent operators in Hilbert a space, Publ. Ins. Math.(Beograd), 4 (1964) 157-136.

[42] J. Von Neumann, On regular rings, Proc. Natl. Acad. Sci USA 1936, 22 (12), 707-713.

Résumé

Situé dans le cadre de la théorie des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert, ce travail s'articule sur trois parties.
La première partie concerne des caractérisations de différentes classes remarquables d'opérateurs à image fermée par des inégalités d'opérateurs, en généralisant des résultats obtenus par A. Seddik .
Dans la deuxième partie on s'intéresse à un problème posé par J. Benítez et V. Rakočević, où ils proposent l'étude de la classe des matrices carrées A, vérifiant $AA^{+} - A^{+}A$ inversible, où A^{+} est l'inverse de Moore-Penrose de A . La généralisation des résultats concernant cette classe, dans le cadre des espaces de Hilbert, fera l'objet essentiel de cette partie.
La troisième partie est essentiellement consacrée à l'étude de l'inverse de Moore-Penrose de sommes et différences de projections orthogonales P et Q de $\mathfrak{L}(H)$.

Mots-cles
Opérateur à image fermé, Moore-Penrose inverse, opérateur auto-adjoint, opérateur normal, opérateur unitaire, inégalité d'opérateur, idempotent, projection orthogonale.

Abstract
Being in the scope of bounded linear operators theory on a Hilbert space, this work is hinged into three parts.
In the first part, we characterize different classes of linear operators with closed range by operator inequalities, generalizing results obtained by A. Seddik.
In the second part, we are concerned by a problem given by J. Benítez and V. Rakočević, where thy investigate the invertibility of the square matrix $AA^{+} - A^{+}A$, here A^{+} denotes the Mooore-Penrose inverse of A. The related results are generalized to the Hilbert space setting.
In the third part, we investigate the Moore-Penrose inverse of the sums and differences of orthogonal projections P and Q in $\mathfrak{L}(H)$.

keywords
Closed range operator, Moore-Penrose inverse, selfadjoint operator, unitary operator, normal operator, operator inequality, idempotent, orthogonal projection.