République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université El-Hadj Lakhdar Batna
Faculté des sciences
Département des Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES MATHEMATIQUES

Option: Mathématiques Appliquées

Par

Boudiaf Naima

Thème

Problème de complémentarité linéaire semi-défini. Etude théorique et algorithmique

Soutenue le : 28/02/2012 **Devant le jury composé de**

Président	: Dr. Rachid Bennacer	Pr	Université El-Hadj Lakhdar Batna
Rapporteur	: Dr. Mohamed Achache	Pr	Université Ferhat Abbes Sétif
Examinateurs:	Dr. Khaled Melkemi	Pr	Université de Biskra
	Dr. Naceurdine Bensalem	Pr	Université Ferhat Abbes Sétif
	Dr. Bachir Merikhi	M.C	Université Ferhat Abbes Sétif
	Dr. Lakhdar Djeffel	M.C	Université El-Hadj Lakhdar Batna

Année Universitaire 2011-2012

Remerciements

Je tiens à remercier mon encadreur Monsieur Mohamed Achache, professeur à l'Université Ferhat Abbas, Sétif, qui m'a offert la possibilité de réaliser ce travail et m'a encadré durant ces années.

Je remercie également les membres du jury:

Monsieur Rachid Bennacer, professeur à l'Université l'Hadj Lakhdar, Batna de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury et de juger mon travail.

Et Messieurs Naceurdine Bensalem, professeur à l'Université Ferhat Abbas, Sétif d'avoir évalué mon travail ; Bachir Merikhi , Maître de Conférences à l'Université Ferhat Abbas, Sétif ; Khaled Melkemi , professeur à l'Université de Biskra d'avoir accepté de faire partie de ce jury et Lakhdar Djeffel , Maître de Conférences à l'Université l'Hadj Lakhdar de Batna de faire partie de ce jury.

Mes remerciements s'adressent également à toute l'équipe administrative du département de mathématiques de Batna d'avoir mis à notre service tous les moyens disponibles, en particulier le comité et le conseil scientifique d'avoir entrepris avec une grande souplesse les démarches nécessaires pour la soutenance.

Je voudrais aussi adresser mes remerciements à tous les membres du Laboratoire de Mathématiques Fondamentales et Numériques de l'Université Ferhat Abbas Sétif.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma gratitude à mes parents pour leurs encouragements, leur patience et le soutien qu'ils m'ont apporté en toutes circonstances durant mes études. Que mon mari trouve ici l'expression de mes sentiments, les meilleurs, pour sa compréhension et ses encouragements durant ce travail.

Enfin, je tiens à remercier tous mes amis au Département de mathématiques et ailleurs, pour leur disponibilité et leur soutien.

Notations et terminologies

PCLSD	:	Problème de complémentarité linéaire semi-défini;
PSD	:	Programme linéaire semi-défini;
PL	:	Programmation linéaire;
PCL	:	Problème de complémentarité linéaire;
(P)	:	Programme linéaire;
(D)	:	Dual d'un programme linéaire (P);
(PO)	:	Problème d'optimisation;
SDLS	:	problème des moindres carrés semi-défini;
NS-SDLS	:	problème des moindres carrés semi-défini non symétrique;
LMI-LS	:	problème des moindres carrés d'inégalités matricielles linéaires;
(PQ)	:	Programme quadratique;
KKT	:	Karush-Kuhn-Tucker;
x^T	:	Le vecteur transposé de x de $\mathbb{R}^n$;
x_i	:	La $i-$ ème composante de x;
Diag(x)	=	A, La matrice diagonale dont $a_{ii} = x_i$;
diag(X)	=	xLe vecteur dont les composantes sont les éléments diagonaux de X;
$x \geq 0$	:	Les composantes de x, $x_i \geq 0$ pour tout i;
X^T	:	La matrice transposée de X;
$X \succeq 0$ $(X \succ 0)$	:	X est une matrice symétrique semi-définie positive (définie positive);
$X \preceq 0$ $(X \prec 0)$	:	X est une matrice symétrique semi-définie négative (définie négative);
$\mathbb{S}^n$	=	$\left\{X : X \in \mathbb{R}^{n\times n} , X = X^T\right\}$;
$\mathbb{S}^n_+$	=	$\{X : X \in \mathbb{S}^n , X \succeq 0\}$;
$\mathbb{S}^n_{++} = int(\mathbb{S}^n_+)$	=	$\{X : X \in \mathbb{S}^n , X \succ 0\}$;
$\lambda_i(X)$	:	les valeurs propres de la matrice $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
$\lambda_{\max}(X)$	=	$\max\limits_i (\lambda_i(X))$, si $\lambda_i(X) \in \mathbb{R} \ \ \forall i$;
$\lambda_{\min}(X)$	=	$\min\limits_i (\lambda_i(X))$, si $\lambda_i(X) \in \mathbb{R} \ \ \forall i$;
Tr(X)	=	$\sum\limits_i x_{ii} = \sum\limits_i \lambda_i(X)$, x_{ii} sont les composantes de la diagonale de la matrice X;
$< X, Y >$	=	$X \bullet Y$ =Tr$(X.Y)$, le produit scalaire (trace);

I	:	La matrice d'identité;
$\det(X)$	:	Déterminant de $X = \prod_i \lambda_i(X)$;
$\rho(X)$	=	$\max_i \|\lambda_i(X)\|$, rayon spectrale de X;
$X^{\frac{1}{2}}$	=	unique matrice symétrique qui vérifie $X = X^{\frac{1}{2}}.X^{\frac{1}{2}}$, $X \in \mathbb{S}^n_+$;
$O(g(x)) = f(x)$	:	$\exists k > 0$ tel que $g(x) \leq kf(x)$;
$\\|X\\|_F^2$	=	$< X, X >= \sum_i \sum_j x_{ij}^2 = \sum_i \lambda_i^2(X)$ (si $X \in \mathbb{S}^n$) norme de Frobenius;
$\\|X\\|_2$	=	$\left(\lambda_{\max}(X^T X)\right)^{\frac{1}{2}} = \rho(XX^T)$, désigne la norme spectrale de X dans $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Résumé

Dans cette thèse, nous présentons une étude théorique et algorithmique concernant le problème de complémentarité linéaire semi-défini (PCLSD) qui a fait l'objet de plusieurs recherches ces dernières années.

En effet, on présente dans une première partie, une synthèse sur les principaux travaux liés à ce dernier. La présentation est donnée de façon à rendre le bagage utilisé pour ce problème compréhensible et permettant de nouveaux développements.

Dans la deuxième partie,une étude algorithmique est faite où on présente une méthode Newtonienne de trajectoire de points intérieurs de type primal-dual pour résoudre le (PCLSD) monotone. On montre que l'algorithme correspondant admet une complexité polynomiale.

Mots clés: Problème de complémentarité linéaire semi-défini; méthodes de points intérieurs; algorithme primal-dual de trajectoire; compléxité polynomiale des algorithmes.

Abstract

In this thesis, we present a theoretical and an algorithmic study for the semidefinite linear complementarity problem which has made the object of many researchers in this last years.

Indeed, we present in a first part, a synthesis of principal works linked with this problem. The presentation is given so as to make the used knoweldge for this problem understandable and allowed new developments.

In the second part, an algorithmic study is done where we present a Newtonian primal-dual path-following interior point method to solve monotone (SDLCP). We prove that the corresponding algorithm has a polynomial complexity.

Keywords : The linear semidefinite complementarity problem; interior point methods; primal-dual path-following algorithms; polynomiale complexity of algorithms

Introduction

Le sujet traité dans cette thèse concerne le problème de complémentarité linéaire semi-défini (abbréviation PCLSD) qui est une généralisation du problème complémentaire linéaire standard dans le sens où les variables sont des matrices symétriques semi-définies positives au lieu d'être des vecteurs positifs. L'importance grandissante de ce problème est mesurée par les différentes applications qu'il couvre, aussi bien en mathématiques que dans la pratique, en l'occurence : la chimie quantique, la théorie de côntrole, la programmation linéaire semi-définie, les systèmes linéaires et bilinéaires, l'optimisation combinatoire, l'optimisation structurelle, l'analyse du facteur minimum de trace, les tests des problèmes éducationnels, et pour prouver le Théorème de Lyapunov (théorème de stabilité) et le Théorème de Stein (les problèmes différentiels dynamiques continus et discrets) on a besoin d'utiliser la notion de la complémentarité linéaire semi-définie. L'étude de ce problème est apparue pour la première fois dans le travail de Kojima, Shindoh et Hara en (1997) sous le nom de problème complémentaire linéaire semi-défini géométrique, La recherche des méthodes de résolution pour le (PCLSD) a évoqué un grand intérêt chez les chercheurs. Les propriétés analytiques telles que l'existence et l'unicité de la solution de (PCLSD) sont développées par Gowda et ses collaborateurs en l'an 2000. Il existe alors trés peu de résultats publiés et ils sont principalement d'ordre théorique. Actuellement, le (PCLSD) constitue l'un des sujets de recherche les plus convoités dans le domaine d'optimisation numérique. Le but étant de développer une méthodologie adéquate. A ce propos, il est impératif de traiter des questions ouvertes, déja étudiées au niveau du problème complémentaire linéaire: existence (et eventuellement l'unicité) de la solution qui sont ici plus complexes en raison de la structure complexe du problème.

Notre objectif est de contribuer à la résolution du (PCLSD) en utilisant des méthodes adéquates qui mènent au résultat le plus proche de la solution exacte.

Notre travail consiste d'abord à éffectuer une étude bibliographique approfondie concernant le (PCLSD), en mettant l'accent sur les principaux dévelopements en vue de synthétiser les travaux existants, qui sont trés peu, ce qui laisse la porte ouverte devant toutes les suggestions, tout en étant persuadé des difficultés qui peuvent faire face aux chercheurs comme :

• L'inéxistence d'une théorie adéquate pour la résolution du (PCLSD).

• Le problème complémentaire linéaire peut servir de base pour développer une véritable méthodologie pour (PCLSD).

Cependant, l'extension directe des résultats d'éxistence et d'unicité concernant le (PCL) au (PCLSD) n'est pas immédiate. Deux problèmes sont rencontrés, d'une part le cône des matrices symétriques semi-définies positives n'est pas polyédrique et d'autre part le produit de deux matrices symétriques n'est pas commutatif. De plus les notions utilisées dans dans le cas du (PCL) doivent être reconsidérées pour les besoins de (PCLSD).

Notre étude est répartie en trois volets :

• Le premier volet est une étude unificatrice en théorie.

• Le deuxième concerne la résolution d'un problème de complémentarité linéaire semi-défini monotone. En effet, nous avons pu formuler le (PCLSD) en un problème d'optimisation avec contraintes. Cette formualtion conduit au résultat suivant : que toute solution du problème d'optimisation, est une solution du (PCLSD) et vice-versa.

• Le troisième volet s'intèresse à la réalisation d'un algorithme pour résoudre le (PCLSD) qui était trés importante. Effectivement, nous avons établi un algorithme de points intérieurs approprié avec une étude détaillée sur sa complexité polynomiale.

La thèse est structurée comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques notions de base de calcul matriciel, de l'analyse convexe, les conditions d'optimalité d'un programme mathématique et les méthodes de points intérieurs.

Le deuxième chapitre est consacré à la définition du (PCLSD) en citant quelques exemples de ce dernier.

Dans le troisième chapitre, on propose une étude théorique du (PCLSD).

Le dernier chapitre est consacré à la résolution du (PCLSD) par les méthodes de points intérieurs. En effet, nous avons développés une méthode Newtonienne de trajectoire centrale de type primal dual pour le (PCLSD). Notre analyse de son complexité est inspirée des travaux faits pour la programmation semi-définie (SDP). On montre que l'algorithme à court pas (short-step) admet une complexité qui est de l'ordre $O(\sqrt{n}\log\frac{n}{\epsilon})$. Cette complexité est la meilleure complexité trouvée jusqu'à nos jours pour ce genre d'algorithmes. Tandis que, la complexité de l'algorithme à grand pas (long-step) est de l'ordre $O(n \log \frac{n}{\epsilon})$. Cette complexité est similaire pour certaines méthodes de points intérieurs pour la programmation linéaire (LP), la programmation quadratique convexe (PQC), le problème de complémentarité linéaire standard et la programmation linéaire semi-définie.

Finalement, on terminera cette thèse par une conclusion et perspectives pour d'autres recherches que ce soit dans leurs aspects théoriques et algorithmiques ou celui des applications numériques.

Table des matières

Chapitre 1

Calcul matriciel et analyse convexe

Dans ce chapitre, nous allons introduire certaines notions et résultats de calcul matriciel ainsi que des notions de base de l'analyse convexe et de la programmation mathématique qui seront utile par la suite. On terminera ce chapitre par une synthèse sur les méthodes de points intérieurs. Les propriétés non démontrées concernant les matrices dans ce chapitre sont la plupart classiques. On pourra consulter l'ouvrage de Horn et Johnson [15].

1.1 Calcul matriciel

Rappelons que $\mathbb{S}^n$ est l'ensemble des matrices carrées réelles symétriques d'ordre n de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n\times n}$, menu d'un produit scalaire noté $X \bullet Y$ définie par :

$$X \bullet Y = \mathrm{Tr}(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ij},$$

où $X = (x_{ij})$ et $Y = (y_{ij})$, $X, Y \in \mathbb{S}^n$ et Tr est la trace d'une matrice X définie par :

$$\mathrm{Tr}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

où $\lambda_i, i = 1, ..., n$ sont les valeurs propres de la matrice X. On a les propriétés importantes suivantes :

$$\forall X, Y \in \mathbb{S}^n : \mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX).$$

Si A est une matrice inversible alors :

$$\mathrm{Tr}(AXA^{-1}) = \mathrm{Tr}(X).$$

A ce produit scalaire, on associe une norme, dite de Frobenius :

$$\|X\|_F = \sqrt{X \bullet X},$$

et on a la propriètė suivante :

$$\|X\|_F \leq \mathrm{Tr}(X),$$

pour toute matrice semi-définie positive X.
On utilisera également la norme spectrale :

$$\|X\| = \sqrt{\lambda_{\max}(X^T X)},$$

où $\lambda_{\max}(X^T X)$ est la plus grande valeur propre de la matrice $X^T X$ (où X^Tdésigne le transposé de X).

Définition 1.1.1 *Soit* $X \in \mathbb{S}^n$.

• X *est dite semi-définie positive, et l'on notera* $X \in \mathbb{S}^n_+$ *ou* $X \succeq 0$ *si :*

$$\forall\ u \in \mathbb{R}^n, \quad u^T X u \geq 0.$$

• X *est dite définie positive et l'on notera* $X \in \mathbb{S}^n_{++}$ *ou* $X \succ 0$ *si :*

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0,\ u^T X u > 0.$$

Dressons maintenant une liste de définitions et de résultats du calcul matriciel :

1) $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice normale si $XX^T = X^T X$ et si de plus $XX^T = I$ alors X est dite orthogonale, où I est la matrice identité d'ordre n.

2) Une matrice normale X est dite positivement stable si et seulement si elle est définie positive.

3) Toute matrice $X \in \mathbb{S}^n$ est diagonalisable, c-à-d, il existe une matrice orthogonale U telle que : $X = UDU^T$ avec $D =$Diag $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^T$ où λ_i sont les valeurs propres de X.

4) Si $X \succeq 0 \Rightarrow UXU^T \succeq 0$ pour toute matrice orthogonale U.

5) Si X est une matrice symétrique alors :

$$\|X\|_2 = \lambda_{\max}(X) \text{ et } \left\|X^{-1}\right\|_2 = \frac{1}{\lambda_{\min}(X)},$$

avec $\lambda_{\max}(X)$ $(\lambda_{\min}(X))$ désigne la plus grande valeur propre de X (la plus petite valeur propre de X, respectivement).

6) $X \in \mathbb{S}^n$, et si $(< X, Y >\geq 0,\ \forall Y \succeq 0) \Rightarrow X \succeq 0$.

7) $X, Y \in \mathbb{S}^n$ si $XY = YX$, (X et Y sont des matrices commutatives), alors il existe une matrice orthogonale U, et deux matrices diagonales E et D telles que :

$$X = UDU^T \text{ et } Y = UEU^T.$$

8) Le rayon spectral de X, $\rho(X)$ est défini par :

$$\rho(X) = \max\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(X)\right\},$$

où

$$\sigma(X) = \{\lambda : \lambda \text{ valeur propre de } X\},$$

désigne le spectre de la matrice X et $|\lambda|$ est le module de λ. Si $X \in \mathbb{S}^n$ alors $\sigma(X) \subset \mathbb{R}$, si $X \in \mathbb{S}^n_+$ alors $\sigma(X) \subset \mathbb{R}_+$, et si $X \in \mathbb{S}^n_{++}$ alors $\sigma(X) \subset \mathbb{R}_{++}$.

9) Une matrice $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dite :

• Positivement stable si la partie réelle de chaque valeur propre λ de X est strictement positive ($\mathrm{Re}(\lambda) > 0$).

• Schur stable si $\rho(X) < 1$, c-à-d toutes les valeurs propres se trouvent dans le disque unité du plan complexe.

Définition 1.1.2 *Soit $X \in \mathbb{S}^n$, si $X \succeq 0$ où $X = UDU^T$, la matrice $\sqrt{X}$ est définie par :*

$$\sqrt{X} = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} U^T,$$

où λ_i, $i = 1, ..., n$ sont les valeurs propres de la matrice X (avec U matrice orthogonale et D =Diag($(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)^T$)). La matrice $\sqrt{X}$ s'appelle racine carrée de la matrice X qui est en outre une matrice symmétrique semi-définie positive.

Théorème 1.1.1 [42] *Soit $X, Y \in \mathbb{S}^n$ on a :*

1- *Tr$(XY) \geq 0$ pour toute matrice $X, Y \succeq 0$.*

2- *Pour $X, Y \succeq 0$, Tr$(XY) = 0$ si et seulement si $XY = YX = 0$.*

3- *$X \in \mathbb{S}^n$ et Tr$(XY) \geq 0$, $\forall Y \succeq 0 \Rightarrow X \succeq 0$.*

Théorème 1.1.2 [21] *Si $X, Y \succeq 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) Tr$(XY) = 0$,

2) $XY = 0$,

3) $\frac{1}{2}(XY + YX) = 0$.

1.2 Analyse Convexe

1.2.1 Ensembles et fonctions convexes

Définition 1.2.1 *Un sous enssemble Ω de $\mathbb{R}^n$ est dit affine si :*

$$\forall x, y \in \Omega \; et \; \forall \lambda \in \mathbb{R} : (1 - \lambda)\, x + \lambda y \in \Omega.$$

Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transforamation. L est dite affine si :

$$L((1 - \lambda)\, x + \lambda y) = (1 - \lambda)\, L(x) + \lambda L(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.2.2 *Un sous ensemble Ω de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si :*

$$\forall x, y \in \Omega \; et \; \forall \lambda \in [0, 1] : (1 - \lambda)\, x + \lambda y \in \Omega.$$

Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite convexe si :

$$f(tx + (1 - t)y) \leq t f(x) + (1 - t) f(y),\ \forall x, y \in \Omega,\ t \in [0, 1]\,,$$

et si l'inégalité au dessus est stricte, alors f est dite strictement convexe $\forall x \neq y$.

1.2.2 Cônes convexes et auto-adjoints

Définition 1.2.3 *Un sous ensemble Ω de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est appelé cône si $\mathbb{R}_+^* \Omega \subseteq \Omega$, c-à-d., si $\forall x \in \Omega, \forall \lambda > 0, \lambda x \in \Omega$. C'est la réunion des demi-droites (positives) passant par l'origine, ce dernier peut appartenir à Ω. Si $\Omega \cap (-\Omega) = \{0\}$, Ω est dit pointé ou saillant, c-à-d, ne contenant aucune droite. Si Ω est convexe, on l'appelle un cône convexe.*

Tout cône fermé non vide contiet l'origine. Dans notre cas $\mathbb{S}^n$ est un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbb{S}_+^n$ est un cône convexe de $\mathbb{S}^n$.

Proposition 1.2.1 *$\mathbb{S}_+^n$ est un cône auto-adjoint dans l'ensemble $\mathbb{S}^n$ car $(\mathbb{S}_+^n)^* = \mathbb{S}_+^n$.*

Preuve : $\mathbb{S}^n_+$ est un cône définie par :

$$\mathbb{S}^n_+ = \mathbb{R}^*_+ \mathbb{S}^n_+ = \left\{ tX : \ t \in \Re^*_+, X \in \mathbb{S}^n_+ \right\}.$$

Montrons que $(\mathbb{S}^n_+)^* = \mathbb{S}^n_+$ où

$$(\mathbb{S}^n_+)^* = \left\{ Y \in \mathbb{S}^n \ :< X, Y > \geq 0, \ \forall X \in \mathbb{S}^n_+ \right\}.$$

Supposons que $Y \in \mathbb{S}^n_+$: $\forall X \in \mathbb{S}^n_+$, X admet une racine carrée unique semi-définie positive$\sqrt{X}$ telle que :

$$X = \sqrt{X}\sqrt{X},$$

alors :

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}(\sqrt{X}\sqrt{X}Y) = \mathrm{Tr}(\sqrt{X}Y\sqrt{X}),$$

$Y \succeq 0$, implique $\sqrt{X}Y\sqrt{X} \succeq 0$, alors les valeurs propres de la matrice $\sqrt{X}Y\sqrt{X}$ sont positives, et

$$\mathrm{Tr}(\sqrt{X}Y\sqrt{X}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 0,$$

d'où $< X, Y > \geq 0$,$(\mathbb{S}^n_+ \subseteq (\mathbb{S}^n_+)^*)$.

Réciproquement, supposons que $Y \in (\mathbb{S}^n_+)^*$, alors $< X, Y > \geq 0$ pour toute matrice $X \in \mathbb{S}^n_+$, supposons que $Y \notin \mathbb{S}^n_+$, alors les valeurs propres λ_i, $i = 1, ..., n$ de Y ne sont pas toutes positives, soit $u \in \mathbb{R}^n$ le vecteur propre associé à λ (une valeur propre négative de Y). pour $X = uu^T$, on a $X \succeq 0$ et

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}(uu^T Y) = \mathrm{Tr}(u^T Y u) = \lambda \|u\| < 0,$$

d'où la contradiction, alors $Y \in \mathbb{S}^n_+$, $((\mathbb{S}^n_+)^* \subseteq \mathbb{S}^n_+)$.

1.3 Programmation mathématique

Un programme mathématique est en général défini comme suit :

$$\textbf{(PM)} \qquad \begin{cases} \min\limits_{x} f(x) \\ h_j(x) \leq 0, \quad j = 1 \ldots p \\ g_i(x) = 0, \; i = 1 \ldots n \\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où l'ensemble

$$\mathcal{F} \; = \{x \in \mathbb{R}^n : \; h_j(x) \leq 0, \;\; j = 1 \ldots p \text{ et } \; g_i(x) = 0, \; i = 1 \ldots n \; \}$$

est souvent appelé ensemble des contraintes (ou des solutions admissible), dit aussi domaine de faisabilité. La fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction objectif ou économique.

Définition 1.3.1 *Une contrainte d'inégalité $h_j(x) \leq 0, \; \forall j,$ est dite saturée ou (active) en $x^* \in \mathcal{F}$ si $h_j(x^*) = 0$.*

Remarque 1.3.1 *Une contrainte d'égalité $g_i(x) = 0,$est par définition saturée en tout point x de $\mathcal{F}$.*

1.3.1 Solutions optimales locales et globales

Définition 1.3.2 *On appelle solution réalisable (admissibles) de (PM) tout point vérifiant les contraintes, c-à-d, appartenant à $\mathcal{F}$. Une solution réalisable qui minimise l'objectif sur $\mathcal{F}$ est dite solution optimale globale de (PM). On note par :*

$$\arg\min_{x} f(x),$$

l'ensemble des solutions optimales globales.

Un point $x^* \in \mathcal{F}$ est une solution optimale locale de (PM) s'il existe un voisinage V de x^* tel que :

$$f(x^*) \leq f(x), \ \forall \ x \in V,$$

et on note par $loc\min\limits_{x} f(x)$ l'ensemble des solutions optimales locales de (PM). Nous avons toujours :

$$\arg\min_{x} f(x) \subset loc\min_{x} f(x),$$

et si (PM) est convexe les deux ensembles sont égaux.

Remarque 1.3.2 *Le problème d'optimisation précédent consiste :*

- *Soit à chercher un point optimal (local ou global).*
- *Soit, si un tel point n'existe pas on cherche une borne inférieure à f.*
- *Soit à établir que f est non bornée inférieurement sur $\mathcal{F}$, auquel cas on adopte la convention $\inf\limits_{\mathcal{F}} f(x) = -\infty$.*
- *Lorsque $\mathcal{F}$ est vide on pose par convention $\inf\limits_{\mathcal{F}} f(x) = +\infty$.*

1.3.2 Classification d'un programme mathématique

On classifie un programme mathématique à partir de deux propriétés fondamentales à savoir la convexité et la différentiabilité de la fonction objectif et les contraintes.

- (PM) est un problème différentiable si les fonctions f, h_i, g_j sont toutes différentiables.
- (PM) est un problème convexe si f et h_i sont convexes et g_j affines.

La classe modèle des programmes mathématiques est celle des programmes convexes différentiables, les programmes non convexes ou non différentiables sont difficiles à traiter. Enfin, le cas le plus simple est celui de la programmation linéaire où f, h_i et g_j sont affines.

1.3.3 Qualification des contraintes

La qualification des contraintes est satisfaite pour tout $x^* \in \mathcal{F}$ dans les cas suivants :

• Les contraintes sont affines (linéaires).

• Les gradients des contraintes saturées en x^*sont linéairement indépendants.

• $\mathcal{F}$ est convexe et $int(\mathcal{F}\ ) \neq \varnothing$ (condition de *Slater).*

On dit que le point x^*est régulier si les contraintes sont qualifiées en x^*.

1.4 Résolution d'un programme mathématique

La solution complète de (PM) est traitée dans l'ordre des points suivants :

• L'existence (et éventuellement l'unicité) d'une solution optimale ;

• Caractérisation de la solution ;

• Elaboration d'algorithmes pour calculer numériquement cette solution.

1.4.1 Existence et unicité d'une solution optimale d'un programme mathématique

Théorème 1.4.1 *(**Weirstrass**) Si f est une fonction continue sur $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ est compact (fermé et borné), alors (PM) admet au moins une solution optimale $x^* \in \mathcal{F}$.*

Corollaire 1.4.1 *Si $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$est non vide et fermé et si f est continue et cœrcive sur $\mathcal{F}$, alors (PM) admet au moins une solution optimale. Si f est strictement convexe et l'ensemble $\mathcal{F}$ est convexe, alors si (PM) admet une solution optimale, cette solution est unique.*

La stricte convexité n'assure pas l'éxistence de la solution mais assure l'unicité.

Proposition 1.4.1 [5] *Soit l'ensemble $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ non vide et fermé, si l'ensemble des courbes de niveaux :*

$$\{x \in \mathcal{F} : \ f(x) \leq \beta\}$$

est borné, alors (PM) admet un minimum global. ($f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$, et $\beta \in \mathbb{R}$).

1.4.2 Conditions d'optimalités

Soit le programme mathématique :

$$\textbf{(PM)} \quad \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathcal{F}, \end{cases}$$

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : h_j(x) \leq 0, \ \ j = 1 \dots p, g_i(x) = 0, \ i = 1 \dots n\},$$

où f, h_j, g_i sont continûment différentiables.
La théorie de Karush-Kuhn-Tuker (K.K.T) permet d'écrire les conditions nécessaires d'optimalité pour tout problème d'optimisation avec contraintes possédant une fonction objectif différentiable.

Théorème 1.4.2 *Si x^* est une solution optimale locale de (PM) satisfaisant l'une des conditions de qualifications précédentes, alors il existe des multiplicateurs $\lambda \in \mathbb{R}^p_+$ et $\mu \in \mathbb{R}^n$ tels que :*

$$\textbf{(K.K.T)} \quad \begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla h_j(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0, & \textit{(condition d'optimalité)}, \\ \lambda_j h_j(x^*) = 0, \quad j = 1, ..., p & \textit{(condition de complémentarité)}, \\ g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, ..., n. & \end{cases}$$

Remarque 1.4.1 *1- Si (PM) est convexe, les conditions de* ***(K.K.T)*** *sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que x^* soit un minimum global.*
2- Si les contraintes ne sont pas qualifiées en x^*, les conditions de ***(K.K.T)*** *ne s'appliquent pas (x^* peut être optimal sans vérifier ces conditions).*

1.4.3 Cas d'un programme mathématique particulier

Considérons le programme mathématique (ou bien le problème d'optimisation) suivant :

$$\textbf{(PO)} \quad \min_x f(x) \text{ sujet à } : \ Cx = d, \, Gx \geq h, \, x \in \Omega,$$

où f est une fonction différentiable, Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, C et G sont deux matrices de $\mathbb{R}^{n\times n}$ et d et h deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors les condtions nécessaires de Karush-Kuhn-Tucker du premier ordre sont données dans le cadre du théorème suivant :

Théorème 1.4.3 [45] *Supposons que x^*est une solution locale de (PO), et f est une fonction différentiable au voisinage de x^*. Alors, il existe deux vecteurs y et z vérifiant les conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} \bigtriangledown f(x^*) - C^T y - G^T z &= 0 \\ Cx^* &= d \\ Gx^* &\geq h \\ z &\geq 0 \\ z^T(Gx^* - h) &= 0, \end{aligned}$$

où les vecteurs y et z sont les multiplicateurs de Lagrange.

Définition 1.4.1 *La solution x^* du problème (PO) et les multiplicateurs de Lagrange correspondants (y, z) qui satisfaient les conditions du Théorème précédent sont dits strictement complémentaires si $z + (Gx^* - h) > 0$. D'aprés cette définition, on a :*

$$\begin{aligned} z_i &= 0, \, (Gx^* - h)_i > 0 \\ z_i &> 0, \, (Gx^* - h)_i = 0. \end{aligned}$$

1.4.4 Solution globale et convexité

[45] Soit Ω un ensemble ouvert convexe, alors l'ensemble des solutions réalisables de (PO) est un ensemble convexe. Si la fonction objectif f est convexe dans l'ensemble des contraintes, alors (PO) est un problème d'optimisation convexe.

1- Si le problème (PO) est convexe, alors x^*est une solution globale de (PO) s'il existe deux vecteurs y et z multiplicateurs de Lagrange vérifiant les conditions du Théorème 1.4.3.

2- Si f est une fonction strictement convexe dans l'ensemble des solutions réalisables, alors toute solution locale est une solution globale.

Rappelons maintenant le principe de la méthode de Newton-Raphson pour résoudre un système non linéaire qui sera utile par la suite dans la thèse.

1.5 Méthode de Newton pour un système non linéaire

L'un des moyens pour résoudre un système non linéaire, est l'application de la méthode de Newton-Raphson, dont le principe est : étant donnée une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux fois continuement différentiable et soit $J(x)$ la matrice jacobienne de f où :

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & . & . & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ . & . & & . \\ . & & . & . \\ \frac{\delta f_n}{\delta x_1} & . & . & \frac{\delta f_n}{\delta x_n} \end{pmatrix}.$$

Soit donc le système non linéaire :

$$f(x) = 0,$$

avec x^0 est un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$, alors la formule d'itération de Newton à l'itération (k) est donnée par :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J(x^{(k)})^{-1} f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \cdots,$$

où $J(x^{(k)})^{-1}$est la matrice inverse de $J(x^{(k)})$. On obtient donc une suite de points :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)},$$

où $\Delta x^{(k)}$ est la solution (direction de Newton) du système linéaire suivant :

$$J(x^{(k)}) \Delta x^{(k)} = -f(x^{(k)}).$$

Si x^0 est suffisament à l'interieur de l'ensemble des solutions de f, alors cette suite est convergente vers une racine de $f(x) = 0$. Le choix de la méthode de Newton est trés important au point de vue des méthodes de points intérieurs à cause de son efficacité numérique.

1.6 Méthodes de points intérieurs primales duales de trajectoire centrale

Les méthodes primales-duales de trajectoire centrale sont les plus éfficaces parmi les méthodes de points intérieurs. Dans le cadre de la programmation mathématique avec contraintes, on désigne par méthode de points intérieurs, toute procédure itérative de résolution générant une suite de points appartenant à l'intérieur relatif du domaine réalisable et convergeant vers une solution optimale. De même, on appelle fonction barrière toute fonction f qui vérifie,

- f est à valeurs finies à l'intérieur relatif du domaine réalisable,

- $f(x) \to \infty$ quand x s'approche de la frontière.Cette fonction est de grandes importances pour le developpement des méthodes de points intérieurs.

Ces méthodes sont réputées pour leur complexité polynomiale, leur rapidité et efficacité et se sont révélées comme de véritables concurrentes des méthodes classiques (simplexe, pivotage de Lemke, etc). La littérature sur ces méthodes a connu une grande expansion et s'est enrichie de plusieurs classes et variantes dans le but de réduire la complexité et améliorer l'efficacité numérique. Il y a pratiquement quatres catégories des méthodes de points intérieurs : les méthodes projectives, les méthodes affines, les méthodes de réduction de potentiel, et les méthodes de trajectoire centrale.

Dans cette thèse on présente uniquement les méthodes de trajectoire centrale qui seront utilisées par la suite.

1.6.1 Méthodes de trajectoire centrale

Ces méthodes sont le fruit direct d'une grande partie des études acharnées menées par plusieurs chercheurs vers la fin des années 80, et pleinement développées au début des années 90. Elles possèdent les propriétés théoriques les plus esthétiques : complexité polynômiale et caractère algorithmique Newtonien. Ces qualités de confort placent cette classe de méthodes au centre de l'intêret primordial des chercheurs, pour résoudre effectivement des programmes mathématiques avec contraintes.

L'idée générale des méthodes de trajectoire centrale consiste à suivre un chemin particulier (dit des centres ou chemin central), en prenant comme direction de déplacement celle de Newton. Autrement dit, l'algorithme génère une suite $(x^{(k)}, y^{(k)})$ strictement réalisable et une suite $(\mu^{(k)})$ qui exprime la condition de complémentarité, cette dernière est vérifiée lorsque $(\mu^{(k)})$ tend vers zéro.

Autrement dit, le principe des méthodes de suivi de chemin central revient à définir un certain voisinage autour du chemin central et à faire évoluer les itérés à l'interieur de ce voisinage tout en progressant vers la solution.

Dans la prochaine sous Section, on va donner un bref résumé sur les techniques de ces méthodes dans le cas d'un (PCLSD).

1.6.2 Déscription de la méthode dans le cas de (PCLSD)

On va voir dans la suite que la résolution du (PCLSD) revient à résoudre les sous systèmes nonlinéaires perturbés suivants :

$$\begin{pmatrix} L(X) + Q - Y \\ XY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu I \end{pmatrix}.$$

Le mot " sous-système " est lié au paramètre μ car à chaque μ fixé on a un système à résoudre et la solution du (PCLSD) est obtenue quand $\mu \to 0$.
La deuxième équation du système est appelée équation complémentaire perturbée. Le système précédent peut s'exprimer comme une équation non linéaire $F(X, Y) = 0$, où

$$F : \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n \times n},$$

telle que :

$$(X, Y) \longrightarrow (L(X) + Q - Y,\, XY - \mu I),$$

on remarque que la dimension de l'espace de départ est différente de la dimension de l'espace d'arrivé. Pour appliquer la méthode de Newton afin de résoudre le système précédent, il est nécessaire de symétriser la deuxième équation du système. Il existe plusieurs procédures, à ce propos on définit un opérateur de symétrisation H_p pour toute matrice P régulière comme suit :

$$\begin{aligned} H_p \quad &: \quad \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{S}^n \\ H_p(M) \quad &= \quad \frac{1}{2}(PMP^{-1} + (PMP^{-1})^T)\ ,\ \forall M \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

Posons $M = XY$, on obtient le système symétrique équivalent suivant :

$$\begin{pmatrix} L(X) + Q - Y \\ H_p(XY) - \mu I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où le système de Newton suivant :

$$\begin{cases} L(\Delta X) = \Delta Y \\ H_p(\Delta XY + X\Delta Y) = \mu I, \end{cases}$$

ce qui lui confère une solution, soit $(\Delta X, \Delta Y)$ totalement symétrique ($(X, Y) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$). Le choix de la matrice P sera justifiée dans le Chapitre 4.

1.6.3 Lien entre l'approche barrière logarithmique et méthodes de points intérieurs

Un des moyens pour définir une méthode de points intérieurs, est d'utiliser une fonction barrière logarithmique qui est définie par :

$$\Phi(X) = -\log\det X = -\log\prod_{i=1}^{n}\lambda_i(X) = -\sum_{i=1}^{n}\log\lambda_i(X),$$

où $\det X$ est le déterminant de la matrice X, et $\lambda_i(X)$, $i = 1, .., n$, sont les valeurs propres de la matrice X. Cette fonction joue un rôle important dans le développement des méthodes de trajectoire de points intérieurs. La fonction $X \to \det(X)$ est une fonction continue, qui est positive pour les matrices définies positives, et nulle pour les matrices semi-définies positives singulières. La fonction $X \to -\log\det(X)$ tend vers l'infini quand X approche la frontière du cône des matrices semi-définies positives, elle agit comme une barrière dans les itérations.Autrement dit, elle empêche la méthode de Newton de s'approcher des contraintes $X \succeq 0$ et $Y \succeq 0$, la théorie de Nesterov et Nemirovsky nous apprend qu'une telle fonction barrière entraîne une compléxité polynomiale de ces méthodes. Une de ces importantes propriétés est sa stricte convexité.

Lemme 1.6.1 [4] $\log\det(X)$ *est strictement concave sur* $\mathbb{S}^n_{++}$.

Lorsqu'on s'approche de la matrice $X \succeq 0$, $X \in \mathbb{S}^n_+$, une des valeurs propres de X doit tendre vers zéro ce qui fait tendre le determinant vers zéro et Φ vers $+\infty$, et cela justifier le mot "barrière". L'idée de cette approche sera étudiée en détails dans le Chapitre 4.

Chapitre 2

Problème de complémentarité linéaire semi-défini et ses applications

Les premiers travaux sur les propriétés analytiques (l'existence et éventuellement l'unicité) du problème complémentaire linéaire semi-défini sont développées par Gowda et ses collaborateurs en l'an 2000 [10]). Depuis ce temps, il est la cible de plusieurs chercheurs, cependant la majorité des recherches, qui sont d'ailleurs trés peu, sont d'ordre théorique. Le problème complémentaire linéaire semi-défini est reconnu comme une généralisation des problèmes complémentaires linéaires classiques. L'importance grandissante du problème complémentaire linéaire semi-défini est mesurée par les domaines pratiques et mathématiques qu'il couvre. En effet le problème (PCLSD) contient des classes importantes de problèmes mathématiques à savoir, la programmation quadratique semi-définie, la programmation linéaire semi-définie et d'autres. Aprés la définition du problème (PCLSD), on citera quelques applications et six exemples de ce dernier, les trois premiers problèmes sont cités dans la Thèse de Song [42] tels que :

• Le problème de complémentarité linéaire standard (PCL) ;

• (PCLSD) géométrique ;

• (PCLSD) par bloque.

Les trois derniers exemples sont donnés dans la Thèse de Master de Krislock [21] dans le traitement de trois types de problèmes d'optimisations des moindres carrés à savoir :

• Le problème des moindres carrés semi-défini (SDLS) ;

• Le problème des moindres carrés semi-défini non symétrique (NS-SDLS) ;

• Le problème des moindres carrés semi-défini avec contraintes dit aussi le problème des moindres carrés semi-défini d'inégalités matricielles linéaires (LMI-LS).

2.1 Définition du problème

Etant donné une transformation linéaire $L : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ et une matrice Q de $\mathbb{S}^n$, le problème de complémentarité linéaire semi-défini associé à (L, Q) (abréviation (PCLSD)(L, Q)) est défini comme suit : Trouver une matrice $X \in \mathbb{S}^n_+$ telle que :

$$L(X) + Q \in \mathbb{S}^n_+ \text{, et } < X, L(X) + Q >= \mathrm{Tr}(X(L(X) + Q)) = 0.$$

Autrement dit le (PCLSD)(L, Q) est équivalent à trouver un couple de matrices :

$$(X, Y) \in \mathcal{A} \text{ tel que :}$$
$$X, Y \in \mathbb{S}^n_+ \text{ et } \langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}(XY) = 0,$$

où

$$\mathcal{A} = \{(X, Y) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n : Y - L(X) = Q\},$$

est un sous ensemble affine de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. Cette forme de (PCLSD) est traitée par beaucoup de chercheurs voir les réferences suivantes : $[10, 24, 39, 42]$.

Le (PCLSD) est aussi un cas particulier des problèmes de complémentarité défini sur les cônes convexes fermés par :

$$\text{Trouver } x \in H \quad \text{tel que } x \in K, \quad y = L(x) + q \in K^*, \quad \text{et } < x, y >_K = 0,$$

où H est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $< .,. >_K$ et K est un cône convexe fermé auto-adjoint ($K = K^*$), K^*est le cône dual de K dans H défini par :

$$K^* = \{y \in H :< y, x >_K \geq 0\,,\, \forall x \in K\}\,.$$

Pour $H = \mathbb{S}^n,\ K = \mathbb{S}^n_+,\ K^* = \mathbb{S}^n_+,\ < X, Y > = \mathrm{Tr}(XY)$, on trouve le (PCLSD), qui est aussi un cas particulier du problème variationnel suivant : Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $< .,. >$, et K un convexe fermé dans H, alors le problème d'inégalité variationnelle (VIP) consiste à trouver $x \in K$ tel que :

$$< f(x), y - x > \geq 0, \forall y \in K,$$

où $f : H \to H$ est une fonction donnée. Si K est un cône, alors (VIP) est un problème de complémentarité et si $H = \mathbb{S}^n$, $K = \mathbb{S}^n_+$ et f est une fonction affine, on retrouve le (PCLSD).

2.2 Applications du (PCLSD)

2.2.1 Systèmes différentiels linéaires

Théorème 2.2.1 ***(Lyapunov)***[11] *Soit A une matrice carrée réelle et M une matrice définie positive, alors A est positive stable si et seulement s'il existe une matrice X définie positive telle que :*

$$XA + A^T X = M.$$

Le système différentiel linéaire $X' = AX$ est stable si A est positive stable, c-à-d, la partie réelle des valeurs propres de A est positive. Cela est verifié par Gowda et Song [11], en démontrant que :

$$\forall Q \in \mathbb{S}^n, \exists X \in \mathbb{S}^n \text{ où } \; X \succeq 0 \; \text{ tel que : } AX+XA^T+Q \succeq 0 \text{ et } \; X\left[AX+XA^T+Q\right]=0,$$

qui représente un problème de complémentarité linéaire semi-défini associè à la transformation de Lyapunov :

$$L_A(X) = AX + XA^T.$$

2.2.2 Les systèmes dynamiques

Les systèmes dynamiques continus :

$$\frac{dx}{dt} = -Ax(t),$$

et les systèmes dynamiques discrets :

$$x(k+1) = Ax(k), \;\; k \in \mathbb{N},$$

sont stables si la matrice A vérifie la stabilité de Schur, c-à-d $|\lambda| < 1$.

Théorème 2.2.2 ***(Stein)***[11] *A est une matrice carrée de $\mathbb{C}^{n\times n}$ et $Q \in \mathbb{H}^n$, $Q \succ 0$, alors $|\lambda| < 1$, $\forall \lambda \in \sigma(A)$ si et seulement si :*

$$\exists X \succeq 0, X \in \mathbb{H}^n \;\; \textit{telle que } X - AXA^* + Q \succeq 0 \;\; \textit{et } X\left[X - AXA^* + Q\right] = 0.$$

On déduit de ce théorème que, $|\lambda| < 1$ si et seulement si :

$$\forall Q \in \mathbb{H}^n, \exists X \succeq 0 \;\; \textit{telle que} \;\; X - AXA^* + Q \succeq 0 \;\; \textit{et} \;\; X\left[S_A(X) + Q\right] = 0,$$

qui représente un problème ((PCLSD)(S_A, Q)). Ici $\mathbb{H}^n$ désigne l'ensemble des matrices *hermitiennes (cas complexe) et*

$$S_A(X) = X - AXA^*,$$

s'appelle la transformation de Stein.

2.3 Exemples de (PCLSD)

2.3.1 Problème de complémentarité linéaire standard (PCL)

Reprenons le problème de complémentarité linéaire standard :

$$\text{(PCL)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver} \quad x \text{ et } y \in \mathbb{R}^n \text{ tels que :} \\ y = Mx + q, \; x, y \in \mathbb{R}^n_+ \quad \text{et} \quad x^T y = 0. \end{cases}$$

En effet, le (PCL) est un (PCLSD), si on se donne une matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et un vecteur $q \in \mathbb{R}^n$ et que nous définissons la transformation linéaire $L : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ par :

$$L(X) := \text{Diag}(M\text{diag}(X)),$$

où diag(X) est un vecteur dont les composantes sont les éléments diagonaux de la matrice$X$, et Diag(x) est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les composantes du vecteur x, on obtient le problème de complémentarité linéaire semi-défini (PCLSD)$(L$, Diag$(q))$:

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad X \in \mathbb{S}^n \quad \text{telle que :} \\ X \in \mathbb{S}^n_+, \; Y = L(X) + \text{Diag}(q) \in \mathbb{S}^n_+ \quad \text{et} \quad < X, Y >= 0, \end{cases}$$

et on a le résultat suivant :

X est une solution du (PCLSD)$(L$, Diag$(q))$, si diag(X) est une solution de LCP(M, q). Inversement si x est une solution de LCP(M, q), alors Diag(x) est une solution du

(PCLSD)(L, Diag(q)).

2.3.2 (PCLSD) géométrique

(PCLSD)($\mathcal{A}$) géométrique est apparut pour la première fois dans les travaux de Kojima, Shindoh et Hara en 1997, [19], sous le nom du problème complémentaire linéaire semi-défini géométrique défini comme suit :

$$\text{Trouver le couple } (X, Y) \in \mathcal{A} \cap \left(\mathbb{S}^n_+ \times \mathbb{S}^n_+\right) \quad \text{tel que : } < X, Y >= 0,$$

où $\mathcal{A}$ est un sous ensemble affine quelconque de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$, on remarque dans ce cas que la transformation linéaire L n'est pas donnée explicitement.Cette version de (PCLSD) inclut la programmation linéaire semi-définie (SDP). Le (SDP) est un problème récent et important car d'une part, il contient la programmation linéaire (LP) et d'autre part, il a beaucoup d'applications telles que la théorie du contrôle, la chimie quantique et l'optimisation combinatoire. Pour plus de détails sur la programmation linéaire semi-définie, on consulte les références [3,8,26].

Un programme semi-défini linéaire (PSD) sous format primal est un problème d'optimisation défini comme suit :

$$(P) \qquad \min_X \operatorname{Tr}(CX) \quad \text{sujet à :} < A_i, X >= b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ X \in \mathbb{S}^n_+,$$

où $b \in \mathbb{R}^m$, C, $A_i \in \mathbb{S}^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$ et son dual :

$$(D) \qquad \max_{(y,Z)} b^T y \quad \text{sujet à : } \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + Z = C,\ Z \in \mathbb{S}^n_+,$$

où $y \in \mathbb{R}^m$. Soit X et (Z, y) tel que $X \succeq 0$ et $Z \succeq 0$, sont des solutions des problèmes *(P)* et *(D)* respectivement, alors (X, Z) est une solution du (PCLSD) géométrique suivant :

$$\text{Trouver le couple } (X, Z) \in \mathcal{A} \cap \left(\mathbb{S}^n_+ \times \mathbb{S}^n_+\right) \quad \text{tel que } < X, Z >= 0,$$

avec l'ensemble affine $\mathcal{A}$ est donné par :

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{array}{c}(X,Z)\in\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^n,\ \text{tel que }:<A_i,X>=b_i,\ i=1,...,m,\ \sum_{i=1}^m y_iA_i+Z=C,\\ \text{pour quelques } y\in\mathbb{R}^m\end{array}\right\},$$

A_i, $C\in\mathbb{S}^n$, $b\in\mathbb{R}^m$. D'où la résolution des problèmes *(P)* et *(D)* est équivalente à la résolution du (PCLSD) géométrique précédent.

Il est clair que le (PCLSD) est un (PCLSD)-géométrique.
Considérons maintenant un sous ensemble affine $\mathcal{A}$ de $\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^n$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et le problème (PCLSD)($\mathcal{A}$) géométrique associé à $\mathcal{A}$. Supposons sans perte de généralité que :

$$\mathcal{A}=\{(X,Y)\in\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^n : L_1(X)+L_2(Y)=B\},$$

où L_1 et L_2 sont deux transformations linéaires de $\mathbb{S}^n$dans lui même et B est une matrice de $\mathbb{S}^n$. On définit :

$$L:\mathbb{S}^{3n}\to\mathbb{S}^{3n}\ \text{ et }\quad Q\in\mathbb{S}^{3n},$$

par :

$$L\left(\begin{bmatrix}X&*&*\\ *&Y&*\\ *&*&Z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}Y&0&0\\ 0&L_1(X)+L_2(Y)&0\\ 0&0&-L_1(X)-L_2(Y)\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}0&0&0\\ 0&-B&0\\ 0&0&B\end{bmatrix}.$$

Pour

$$W=\begin{pmatrix}X&*&*\\ *&Y&*\\ *&*&Z\end{pmatrix},$$

solution de (PCLSD)(L,Q), alors (X,Y) solution de (PCLSD)($\mathcal{A}$) géométrique.D'autre part, si (X, Y) est une solution du (PCLSD)($\mathcal{A}$) géométrique, alors :

$$W = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

est une solution du (PCLSD)(L, Q). Finalement, on déduit que la résolution de (PCLSD)($\mathcal{A}$) est équivalente à celle de (PCLSD)(L, Q).

2.3.3 (PCLSD) par bloc

Soient $n_1, n_2, \ldots, n_k$, des nombres entiers fixés et $\mathbb{S}^{n_i}$ l'ensemble des matrices réelles carrées symétriques d'ordre $n_i,\ i = 1, \ldots, k$. Soit $\mathbb{S}$ l'ensemble de toutes les matrices diagonales par bloc $X_i \in \mathbb{S}^{n_i},\ \ i = 1, \ldots, k$, défini par :

$$\mathbb{S} = \left\{ X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & X_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_k \end{pmatrix} : X_i \in \mathbb{S}^{n_i},\ i = 1, \ldots, k \right\}.$$

$\mathbb{S}$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant :

$$< X, Y >= \mathrm{Tr}(XY) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Tr}(X_i Y_i).$$

Soit $\mathbb{S}_+$, le cône convexe fermé des matrices semi-définies positives dans $\mathbb{S}$, et considérons le problème suivant :

$$\text{Trouver } \ X \in \mathbb{S} \ \text{ tel que } X \in \mathbb{S}_+,\ Y = \mathcal{L}(X) + Q \in \mathbb{S}_+ \ \text{ et } \ < X, Y >= 0, \tag{2.1}$$

où $\mathcal{L} : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ est une transformation linéaire donnée et Q une matrice de $\mathbb{S}$, ce problème inclut le (PCL) dans le cas où $n_i = 1$, pour tout i. De plus le (PCLSD) est un cas particulier de ce problème.

Reformulons (2.1) comme un (PCLSD). En effet, soit

$m = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, et $L \ :\mathbb{S}^m \longrightarrow \ \mathbb{S}^m$, une transformation linéaire telle que :

$$L\begin{pmatrix} X_1 & * & \dots & * \\ * & X_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & * & \ddots & * \\ * & * & * & X_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1(X_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_2(X_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_k(X_k) \end{pmatrix}.$$

où $L_i(X_i)$ est la i-ème matrice bloc de la matrice $\mathcal{L}(X)$, $L_i \ : \mathbb{S}^{n_i} \longrightarrow \mathbb{S}^{n_i}, i = 1, 2, \cdots, k$
Pour une matrice $Q \in \mathbb{S}$, si X est une solution de (2.1), alors X est une solution de (PCLSD)(L, Q) suivant :

$$\text{Trouver } \ X \in \mathbb{S}^m \text{ tel que } X \in \mathbb{S}^m_+, \ Y = L(X) + Q \in \mathbb{S}^m_+ \ \text{ et } \quad < X, Y >= 0.$$

Soit maintenant $X \in \mathbb{S}^m$ une solution du (PCLSD)(L, Q), alors la matrice :

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_k \end{pmatrix}$$

est une solution de (2.1) où X_i se sont des sous matrices de X dont les indices des lignes et des colonnes sont pris de l'ensemble :

$$\alpha = \left\{ \sum_{k=1}^{i} n_{k-1} + 1, \sum_{k=1}^{i} n_{k-1} + 2, \cdots, \sum_{k=1}^{i} n_{k-1} + n_i \right\},$$

avec $n_0 = 0$.

2.3.4 Problème des moindres carrés semi-défini (SDLS)

Le problème des moindres carrés semi-défini est un problème d'optimisation convexe défini par :

$$\text{(SDLS)} \qquad \min_{\text{s.à. } X \in \mathbb{S}^n_+} \frac{1}{2} \|AX - B\|_F^2 \,,$$

où $A,\, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $X \in \mathbb{S}^n$. Si la matrice A est de plein rang [21] , le problème (SDLS) admet un minimiseur global unique donné par les équations de Karush-Kuhn-Tucker (**K.K.T**) suivantes :

$$\begin{cases} A^T(AX - B) = Z, \\ \frac{1}{2}(Z + Z^T) = Y, \\ \langle X, Y \rangle = 0,\ X, Y \succeq 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Soit la transformation $L : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ définie par :

$$L(X) = \frac{1}{2}(A^T AX + XA^T A),$$

et

$$Q = -\frac{1}{2}(A^T B + B^T A),$$

et soit l'ensemble affine :

$$\mathcal{A} = \{(X, Y) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n : Y = L(X) + Q\} \,.$$

Alors (X, Y) satisfait le système d'équations (2.2), si et seulement si (X, Y) satisfait :

$$(X, Y) \in \mathcal{A},\ X \succeq 0,\, Y \succeq 0,\ \text{et } < X, Y >= 0.$$

Il est facile de vérifier que la transformation L est linéaire sur $\mathbb{S}^n$ d'où en effet (SDLS) est un (PCLSD).

2.3.5 Problème des moindres carrés semi-défini non symétrique (NS-SDLS)

Le problème des moindres carrés semi-défini non symétrique est aussi un problème d'optimisation convexe défini comme suit :

$$\text{(NS-SDLS)} \qquad \min_{\text{s.à. } X \in D} \frac{1}{2} \|AX - B\|_F^2 ,$$

où

$$D = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n \times n} : \frac{1}{2}(X + X^T) \succeq 0 \right\},$$

avec $\frac{1}{2}(X + X^T)$ est la partie symétrique de la matrice X et $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Ce problème admet un minimiseur unique sur l'ensemble D si la matrice A est de plein rang, dans ce cas (NS-SDLS) est équivalent à trouver les matrices symétriques Z et Y qui satisfont les équations de (K.K.T) suivantes :

$$\begin{cases} A^T(AX - B) = Z, \\ \frac{1}{2}(X + X^T) = Y, \\ \langle Z, Y \rangle = 0, \ Z, Y \succeq 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Alors (2.3) est équivalent au (PCLSD) suivant : Trouver le couple (Z, Y) tel que :

$$(Z, Y) \in \mathcal{A}, \ Z \succeq 0, Y \succeq 0, \text{ et } \quad < Z, Y >= 0,$$

avec

$$\mathcal{A} = \{(Z, Y) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n : Y = L(Z) + Q\},$$

où

$$L(Z) = \frac{1}{2}((A^T A)^{-1} Z + Z(A^T A)^{-1}),$$

et

$$Q = \frac{1}{2}((A^T A)^{-1} A^T B + B^T A (A^T A)^{-1}).$$

Si (Z, Y) solution du (PCLSD) alors :

$$X = (A^T A)^{-1}(Z + A^T B)$$

est une solution du système de (**K.K.T**). Il est aussi facile de vérifier que L est une transformation linéaire sur $\mathbb{S}^n$ dans lui même.

2.3.6 Problème des moindres carrés d'inégalités matricielles linéaires (LMI-LS)

Le problème des moindres carrés d'inégalités matricielles linéaires est un problème d'optimisation convexe défini par :

$$\text{(LMI-LS)} \qquad \min_{\text{s.à. } \mathcal{K}x \preceq C} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \, ,$$

où

$$\mathcal{K}x = \sum_{i=1}^{k} x_i K_i,$$

$\mathcal{K} : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{S}^n,\ K_i \in \mathbb{S}^n,\ (i = 1, \ldots, k), C \in \mathbb{S}^n,\ A \in \mathbb{R}^{m \times k},\ b \in \mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^k$. Sous les conditions suivantes :

• A est de plein rang.

• L'ensemble des points strictement réalisables,

$$\left\{x \in \mathbb{R}^k : \mathcal{K}x \prec C\right\}$$

est non vide. LMI-LS admet un minimiseur unique x caractérisé par le système d'équations de (**K.K.T**) suivant :

$$\begin{cases} A^T(Ax-b)+\mathcal{K}^*Z=0, \\ \quad\quad \mathcal{K}x+Y=C, \\ <Y,Z>=0,\ \ Z,Y\succeq 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

où $\mathcal{K}^*:\mathbb{S}^n\to\mathbb{R}^k$ est la transformation adjointe de $\mathcal{K}$ définie par $\langle Y,\mathcal{K}x\rangle=\langle\mathcal{K}^*Y,x\rangle$. Alors le système d'équations (2.4) définit un (PCLSD) comme suit : Trouver le couple de matrices (Z,Y) tel que :

$$(Z,Y)\in\mathcal{A},\ \ Z\succeq 0, Y\succeq 0,\ \text{ et }\ <Z,Y>=0,$$

où

$$\mathcal{A}=\{(Z,Y)\in S^n\times S^n : Y=L(Z)+Q\},$$

avec

$$L(Z)=\mathcal{K}(A^TA)^{-1}\mathcal{K}^*Z,$$

et

$$Q=C-\mathcal{K}(A^TA)^{-1}A^Tb.$$

Pour (Z,Y) solution de (PCLSD), alors :

$$x=(A^TA)^{-1}(A^Tb-\mathcal{K}^*Z)$$

est une solution de LMI-LS. On vérifie facilement que L est une transformation linéaire sur $\mathbb{S}^n$.

Remarque 2.3.1 *On montione que les transformations linéaires associés aux exemples (2.3.4) et (2.3.5) précédents sont des transformations de Lyapunov* $L_B(X)=BX+XB^T$ *avec* $B=A^TA$ *et* $B=(A^TA)^{-1}$, *respectivement.*

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution du (PCLSD)

Dans ce chapitre, on prèsente une synthèse sur les principaux résultats d'éxistence (éventuellement unicité) de la solution du (PCLSD). La présentation est donnée de façon à rendre le bagage utilisé comprehensible et conduisant à de nouveaux développements.

3.1 Résolution du problème complémentaire linéaire semi-défini

Dans cette partie, on donne les définitions de quelques propriétés liées à la transformation linéaire, qui sont utiles dans l'étude d'existence et l'unicité de la solution du (PCLSD).

3.1.1 Définitions et quelques propriétés

Définition 3.1.1 *Soit : $L : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une transformation linéaire donnée alors :*

1- *L est une P-transformation si :*

$$X \in \mathbb{S}^n, \quad XL(X) = L(X)X \quad et \;\; XL(X) \preceq 0 \Rightarrow X = 0.$$

2- *L est une P_0-transformation si $(L + \epsilon I)$ est une P-transformation pour tout $\epsilon > 0$, où I est la transformation identité dans S^n.*

3- *L est une P_2-transformation si :*

$$X \succeq 0, Y \succeq 0, [(X - Y)[L(X) - L(Y)](X + Y) \preceq 0] \Rightarrow X = Y.$$

4- *L est une transformation monotone (strictement monotone) si :*

$$< L(X), X > \geq 0 \,(> 0),$$

pour toute matrice $X \in \mathbb{S}^n$ $(X \neq 0)$.

Définition 3.1.2 *L est strictement semi-monotone (S.S.M) (ou L est dite E -transformation) si :*

$$X \succeq 0, \; XL(X) = L(X)X \quad et \quad XL(X) \preceq 0 \Rightarrow X = 0.$$

Si $(L+\epsilon I)$ est strictement semi-monotone pour tout $\epsilon > 0$, alors L est dite semi-monotone (S.M) (ou L est une E_0-transformation).

Le concept des propriétés $\mathbf{R}_0$ et $\mathbf{Q}$, est similaire à celui de (LCP), et on a pour le (PCLSD)(L, Q), les définitions suivantes :

Définition 3.1.3 *Soit $L : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une transformation linéaire.*

1- *L possède la propriété $\mathbf{R}_0$, si la matrice nulle est la seule solution du problème*

(PCLSD)$(L,0)$, *(*0 *est la matrice nulle).*

2**- L possède la propriété* **Q, si pour toute matrice* $Q \in \mathbb{S}^n$,*le (PCLSD)*(L,Q) *admet une solution.*

Définition 3.1.4 *L possède la (globaly uniquely solvable) (**GUS**)-propriété si pour toute matrice* $Q \in \mathbb{S}^n$, *le (PCLSD)*(L,Q) *admet une solution unique.*

Définition 3.1.5 *Soit* $L : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *une transformation linéaire. On dit que :*

***1-** L est une transformation de suffisance colonne CS (column sufficiency) si pour toute matrice* $Q \in \mathbb{S}^n$, *l'ensemble des solutions de (PCLSD)*(L,Q) *est convexe (peut être vide).*

***2-** L possède la propriété de CC (cross commutative) si pour* X_1, X_2 *sont deux solutions du (PCLSD)*(L,Q) *alors :*

$$X_1Y_2 = Y_2X_1 \text{ et } X_2Y_1 = Y_1X_2,$$

pour toute matrice $Q \in \mathbb{S}^n$, *où* $Y_i = L(X_i) + Q$, $i = 1, 2$.

Définition 3.1.6 *Soit* $L : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *une transformation linéaire. On appelle* $L^T : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *définit par :*

$$< L(X), Y > = < X, L^T(Y) > \quad \text{pour toutes } X, Y \in \mathbb{S}^n,$$

la transposée de L, *de plus, on dit que* L *est une transformation auto-adjointe sur* $\mathbb{S}^n$ *si* $L = L^T$ *et normale si* $LL^T = L^TL$.

3.1.2 Existence et unicité de la solution de (PCLSD)

L'existence de la solution du (PCLSD) est donnée par le Théorème de Karamardian [16].

Théorème 3.1.1 *Soit L :* $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *une transformation linéaire. Si les deux problèmes (PCLSD)(L, 0) et (PCLSD)(L, E) admettent une solution unique (la solution nulle),* *alors pour toute matrice $Q \in \mathbb{S}^n$, $(PCLSD)(L,Q)$ a une solution.(E est une matrice définie positive de $\mathbb{S}^n$).*

Ce Théorème est donné dans un cadre plus général (c-à-d) la transformation L est définie sur des cônes quelconques K qui sont convexes fermés auto-adjoints.Alors le Théorème 3.1.1 est restreint uniquement au cône $K = \mathbb{S}^n$.

Dans la théorie du (PCL), l'existence et l'unicité de la solution de (PCL) pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, est présentée dans le cadre de ces resultats :

1- Chaque mineur principal de la matrice M est positif.

2- Pour tout $x \in \mathbb{R}^n (x \neq 0)$, il existe un indice i tel que $x_i(Mx)_i > 0$.

3- L'implication $[x \in \mathbb{R}^n,\ x * Mx \leq 0] \Rightarrow x = 0$ est satisfaite ($x * Mx$ est le produit des vecteurs x et Mx composante par composante).

4- Pour tout $q \in \Re^n$, LCP(M, q) admet une solution unique.

On rapelle qu'une matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une P-matrice (ou M a la propriété P) si l'une des conditions 1, 2 ou 3 est satisfaite. L'unicité de la solution du (PCL)(M, q) est décrite par la propriété P de la matrice M (voir [42]).

Tandis que si la matrice M est semi-définie positive, alors dans ce cas le (PCL)(M, q) est dit monotone, de plus si son ensemble de points strictements realisables

$$\mathcal{F}_{str} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x > 0, \quad y = Mx + q > 0\right\}$$

est non vide, alors l'ensemble des solutions est un convexe non vide [7].

Si la condition (4) est satisfaite, (PCL) est dit (globaly uniquely solvable) ou (**GUS**)-propriété.

Maintenant, on donne quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution de (PCLSD) associés à des transformations qui vérifient la P-propriété et la (**GUS**)-propriété.

Théorème 3.1.2 [11] *Supposons que* $L : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *possède la* P*-propriété. Alors pour toute matrice* $Q \in \mathbb{S}^n$, *(PCLSD)*(L, Q) *admet une solution.*

Remarque 3.1.1 *La* P*-propriété de la transformation* L *assure l'existence de la solution mais pas l'unicité,(Voir un contre-exemple donné par (Gowda et Song,* [10]*). Contrairement au (PCL) où la* P*-propriété assure l'existence et l'unicité de la solution.*

Le théorème prochain assure l'unicité de la solution de (PCLSD)(L, Q).

Théorème 3.1.3 [10] *Soit* $L : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *une transformation linéaire.Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour toute matrice* $Q \in \mathbb{S}^n$, *(PCLSD)*(L, Q) *admet au plus une solution ;*

b) L *possède la* P*-propriété et la cross -commutativité ;*

c) L *possède la (GUS)-propriété.*

Introduisons maintenant des résultats pour les transformations linéaires monotones.

Théorème 3.1.4 [42] *Soit* $L : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *une transformation linéaire.Alors si* L *est monotone, l'ensemble des solutions du problème SDLCP*(L, Q) *est un convexe peut être vide, pour toute matrice* $Q \in \mathbb{S}^n$.

Corollaire 3.1.1 [12] *Si* $L : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *est une transformation linéaire monotone, alors :*

$$L \text{ a la propriété } GUS \Leftrightarrow L \text{ a la } P\text{- propriété.}$$

Dans ce qui se suit on donne les conditions suffisantes pour qu'une transformation L possède la (GUS)-propriété.

Théorème 3.1.5 [42] *Si* L *est une transformation strictement monotone, alors* L *possède la GUS-propriété.*

Théorème 3.1.6 [12] *Soit* $L : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *une transformation linéaire, les implications suivantes sont vérifiées :*

L *est strictement monotone* $\Rightarrow L$ *a la propriété* $P_2 \Rightarrow L$ *a la propriété* $GUS \Longrightarrow L$ *a la propriété* P.

Théorème 3.1.7 [12] *Soit* $L : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *une transforamtion qui possède la* P*-propriété. Si L est auto-adjointe, alors elle est strictement monotone.*

3.2 Etude de quelques formes de (PCLSD)

3.2.1 La forme de Lyapunov

La transfomation de Lyapunov associée à une matrice réelle carrée A est définie par :

$$L_A(X) = AX + XA^T.$$

La caractérisation de (GUS)-propriété est donnée dans le cadre du théorème suivant(Voir [12] , [13]).

Théorème 3.2.1 *Considérons la transformation de Lyapunov* L_A *avec* A *une matrice donnée dans* $\mathbb{R}^{n\times n}$*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
1) L_A *possède la GUS-propriété ;*
2) A *est positivement stable et semi-définie positive.*

Théorème 3.2.2 L_A *possède la* P_2*-propriété si et seulement si* A *est une matrice définie positive.*

Théorème 3.2.3 *Si* A *est une matrice normale.Alors on a :*

$$L_A \text{ est strictement monotone} \Leftrightarrow L_A \text{ a la GUS- propriété } \Leftrightarrow L_A \text{ a la P- propriété.}$$

3.2.2 La forme de Stein

Cette transformation est donnée par :

$$S_A(X) = X - AXA^T,$$

pour toute matrice A dans $\mathbb{R}^{n\times n}$.

On a les résultats suivants :

Théorème 3.2.4 [11] *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice normale.Alors on a :*

$$S_A \textit{ est strictement monotone} \Leftrightarrow S_A \textit{ a la GUS-propriété} \Leftrightarrow S_A \textit{ a la P-propriété.}$$

Remarque 3.2.1 *La caractérisation de la GUS-propriété pour la transformation de Stein reste un problème ouvert.*

3.2.3 La forme de Two-sided

La transformation de Two-sided est donnée par :

$$M_A(X) = AXA^T,$$

pour une matrice A dans $\mathbb{R}^{n\times n}$ donnée. On a les résultats suivants :

Théorème 3.2.5 [12] *M_A est la transformation de Two-sided, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) M_A possède la GUS-propriété ;

2) La matrice A est définie positive ou bien définie négative, (c-à-d $-A \succeq 0$) ;

3) M_A est une P-transformation.

Pour plus de détails sur les démonstrations des Théorèmes précédents, on consulte les références suivantes [10, 11, 12, 13] et [42] .

Remarque 3.2.2 *On mentionne que les formes du (PCLSD) données par les trois derniers Exemples [2.3.4, 2.3.5, 2.3.6] sont strictement monotones car leurs transformations sont strictement monotones. Alors elles possèdent la GUS-propriété, c'est à dire le problème complémentaire linéaire semi-défini associé à ses transformations admet une solution unique.*

Chapitre 4

Méthodes primales-duales de trajectoire centrale pour (PCLSD)

Les methodes de points interieurs fournissent une approche puissante pour résoudre beaucoup de problèmes d'optimisation et en particulier la programmation linéaire (LP), quadratique (QP), semi-défini (SDP) et les problèmes de complémentarité et conique. Les algorithmes primals-duals de trajectoire (ou bien suivi de chemin) sont parmi les meilleurs algorithmes de points intérieurs pour résoudre ces problèmes.Ces derniers ont une bonne réputation théorique et pratique notamment leur compléxité polynomiale et leur efficacité numérique.

L'idée de base des méthodes primales-duales de suivi de chemin est de suivre approximativement le chemin central.Brièvement, elles démarrent d'un point strictement réalisable $(X(\mu), Y(\mu))$ connu pour certain $\mu > 0$. Alors μ est réduit à $\mu_+ = (1-\theta)\mu$ pour un certain θ $(0 < \theta < 1)$ et avec la méthode de Newton, on construit un nouveau couple (X, Y) proche à $(X(\mu), Y(\mu))$. Cette procédure est répetée jusqu'au point (X, Y) soit dans un voisinage du chemin central.Puis $\mu = \mu_+$, est de nouveau réduit par le facteur $(1-\theta)$ et en appliquant la méthode de Newton visant un nouveau point du chemin et ainsi de suite.Nous continuons la procédure jusqu'à ce que μ soit assez petit.

Généralement, si le facteur θ est choisi en fonction de n (nottament $\theta = O(n)$), alors les algorithmes correspondants sont dits à pas court, mais si θ est une constante qui ne dépend pas de n, c-à-d $\theta = O(1)$,les algorithmes sont dits à grand pas. Dans l'analyse de ces méthodes, on a besoin de contrôler la qualité des itérations pour qu'elles soient proches au chemin central, c.à.d qu'elles soient dans un voisinage de celle ci.Pour cela, on définit une proximité (une mesure) notée par $\delta(X, Y, \mu)$, le choix de cette quantité sera décrit par la suite. On utilise aussi un seuil (défaut) τ pour la proximité et on suppose qu'un point (X^0, Y^0) est strictement réalisable tel que $\delta(X^0, Y^0, \mu^0) \leq \tau$ pour un certain μ^0 connu.

Récemment de nouvelles méthodes primales-duales de suivi de chemin basée sur des nouvelles classes de directions de Newton ont été proposées pour résoudre le problème (LP) et (SDP). Ces nouveaux algorithmes possèdent aussi la meilleure complexité polynomiale et ils sont plus rapides en pratique que les algorithmes classiques.Dans ce travail on continue ces travaux pour le (PCLSD). On propose aussi de nouvelles directions inspirées par les travaux de Peng, Roos et Terlaky ([33]) pour (LP) et (SDP). On montre aussi que ces algorithmes primals-duals à grands pas ont la même complexité polynomiale $(O(n \log \frac{n\mu^0}{\varepsilon}))$, cependant, on obtient la meilleure complexité connue pour les algorithmes primals-duals à pas court$(O(\sqrt{n} \log \frac{n\mu^0}{\varepsilon}))$. On mentionne que la propriété d'orthogonalité concernant le (PCLSD) entre les deux directions dans l'espace primal et dual n'est pas préservée contrairement aux cas de (LP) et (SDP). Cela rend l'analyse de la complexité de l'algorithme un peu difficile.

4.1 Méthodes de trajectoire centrale

Considérons le problème complémentaire linéaire semi-défini (PCLSD) suivant :

$$(\text{PCLSD}) \begin{cases} \text{Trouver une matrice } \ X \in \mathbb{S}^n \ \text{ telle que :} \\ Y = L(X) + Q\,, \\ \ < X, Y >= \text{Tr}(XY) = 0, \\ X, Y \in \mathbb{S}^n_+. \end{cases}$$

Autrement dit le (PCLSD) est équivalent à :

$$\begin{cases} \text{Trouver un couple de matrices } \ (X, Y) \in \mathcal{A} \ \text{ tel que :} \\ < X, Y >= \text{Tr}(XY) = 0 \Leftrightarrow XY = 0, \ X, Y \in \mathbb{S}^n_+, \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{A} = \{(X, Y) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n : Y = L(X) + Q\}\,.$$

Notons les ensembles des solutions réalisables et strictement réalisables de (PCLSD), respectivement par :

$$\mathcal{F} = \{(X, Y) \in \mathcal{A}\ ,\ X \succeq 0, Y \succeq 0\}\,,$$

$$\mathcal{F}^0 = \{(X, Y) \in \mathcal{F} : X \succ 0, Y \succ 0\}\,,$$

de même on a :

$$S_{(pclsd)} = \{(X, Y) \in \mathcal{F} \ : \ \text{Tr}(XY) = 0\}$$

est l'ensemble des solutions de (PCLSD).

Sans perte de généralité on suppose que le problème (PCLSD) vérifie les hypothèses suivantes :

Hypothèse1. $\mathcal{F}^0 \neq \varnothing$.

Hypothèse2. La transformation L est monotone, c-à-d :

$$< L(X), X > \geq 0 \text{ pour toute } X \in \mathbb{S}^n.$$

Hypothèse3. L est une transformation auto-adjointe c-à-d :

$$L = L^T, \text{ tel que : } < L(X), Y >=< X, L^T(Y) >, \forall X, Y \in \mathbb{S}^n.$$

Théorème 4.1.1 *Sous les hypothèses (H_1) et (H_2) l'ensemble :*

$$S_{(pclsd)} = \{(X, Y) \in \mathcal{F} \ : \ Tr(XY) = 0\},$$

des solutions de (PCLSD) est un ensemble convexe non vide.

Preuve : Voir [42].

Proposition 4.1.1 *Sous les hypothèses (H_2) et (H_3), la fonction $f(X) = Tr(X(L(X) + Q)) =< L(X) + Q, X >$ est convexe .*

Preuve : Pour toute $H \in \mathbb{S}^n$ on a :

$$\begin{aligned} f'(X, H) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(X + tH) - f(X)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} < 2L(X) + Q, H > +t < L(H), H >, \end{aligned}$$

d'où

$$\nabla f(X) = 2L(X) + Q,$$

et

$$\nabla^2 f(X) = 2L(H),$$

on a :

$$\langle \nabla^2 f(H), H \rangle \geq 0,$$

pour toute $H \in \mathbb{S}^n$, d'où $\nabla^2 f(X)$ est semi-définie positive. □

Théorème 4.1.2 *Supposons que les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) sont satisfaites, alors* *le (PCLSD) est équivalent au problème d'optimisation convexe semi-défini suivant :*

$$(PO)\begin{cases} \min\limits_{X} Tr(X(L(X)+Q)), \\ \textit{sujet à : } X \succeq 0,\ L(X)+Q \succeq 0. \end{cases}$$

Preuve : Soit $\overline{X}$ solution du problème (PO). Prouvons que $\overline{X}$ est une solution du problème complémentaire linéaire semi-défini suivant :

$$\text{(PCLSD)} \qquad L(X)+Q \succeq 0\ ,\ X \succeq 0\ ,\ < X, L(X)+Q >= 0,$$

comme (PO) est un problème d'optimisation convexe, alors (Théorème 1.4.3) $\overline{X}$ vérifie les conditions de **K.K.T** suivantes :

$$\begin{cases} 2L(\overline{X})+Q-L(\Lambda)-\Psi=0, \\ L(\overline{X})+Q \succeq 0, \\ \overline{X} \succeq 0, \\ \Lambda, \Psi \succeq 0, \\ < \Lambda, L(\overline{X})+Q >= 0, \\ < \overline{X}, \Psi >= 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

où Λ et Ψ sont les multiplicateurs de Lagrange, ce qui donne :

$$\begin{cases} 2L(\overline{X})+Q-L(\Lambda)=\Psi \succeq 0, \\ L(\overline{X})+Q \succeq 0, \\ \overline{X}, \Lambda \succeq 0, \\ < \Lambda, L(\overline{X})+Q >= 0, \\ < \overline{X}, \Psi >=< \overline{X}, L(\overline{X})+Q+L(\overline{X}-\Lambda) >= 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

de la dernière équation du système (4.2) on a :

$$< \overline{X}, L(\overline{X})+Q+L(\overline{X}-\Lambda) >= 0,$$

d'où

$$< \overline{X}, L(\overline{X}) + Q > + < \overline{X}, L(\overline{X} - \Lambda) >= 0,$$

du fait que :

$$\overline{X} \succeq 0, \text{ et, } L(\overline{X}) + Q \succeq 0, \text{ alors, } < \overline{X}, L(\overline{X} - \Lambda) > \leq 0. \tag{4.3}$$

On a : $\Lambda \succeq 0$ et $\Psi \succeq 0$ d'où

$$< \Lambda, L(\overline{X}) + Q > \geq - < \Lambda, L(\overline{X} - \Lambda) >,$$

$(L(\overline{X}) + Q = -L(\overline{X} - \Lambda) + \Psi, < \Lambda, L(\overline{X}) + Q >= - < \Lambda, L(\overline{X} - \Lambda) > + < \Lambda, \Psi >)$ De l'avant dernière équation du système (4.2) on a :

$$- < \Lambda, L(\overline{X} - \Lambda) > \leq 0, \tag{4.4}$$

de (4.3) et (4.4),

$$< \overline{X}, L(\overline{X} - \Lambda) > - < \Lambda, L(\overline{X} - \Lambda) > \leq 0 \Rightarrow < \overline{X} - \Lambda, L(\overline{X} - \Lambda) > \leq 0,$$

ce qui implique

$$< L(\overline{X} - \Lambda), (\overline{X} - \Lambda) > \leq 0,$$

et comme L est monotone on déduit :

$$< \overline{X} - \Lambda, L(\overline{X} - \Lambda) >= 0. \tag{4.5}$$

Maintenant de (4.3), (4.4) et (4.5) on a :

$$0 \geq < \overline{X}, L(\overline{X} - \Lambda) >=< \Lambda, L(\overline{X} - \Lambda) > \geq 0,$$

ce qui donne :

$$< \overline{X}, L(\overline{X} - \Lambda) >= 0, \tag{4.6}$$

de la dernière équation du système (4.2) on a :

$$< \overline{X}, L(\overline{X}) + Q + L(\overline{X} - \Lambda) >= 0,$$

d'où

$$< \overline{X}, L(\overline{X}) + Q > + < \overline{X}, L(\overline{X} - \Lambda) >= 0 \Rightarrow < \overline{X}, L(\overline{X}) + Q >= 0.$$

Alors : $\overline{X}$ est une solution de (PCLSD).

Réciproquement : toute solution faisable du problème (PO) doit vérifier :

$$\langle X, L(X) + Q \rangle = \mathrm{Tr}(X(L(X) + Q)) \geq 0$$

Soit $\overline{X}$ solution du problème (PCLSD) alors :

$$\overline{X} \succeq 0, L(\overline{X}) + Q \succeq 0 \text{ et } < \overline{X}, L(\overline{X}) + Q >= \mathrm{Tr}(\overline{X}(L(\overline{X}) + Q)) = 0$$

du fait que $\overline{X}$ atteint la valeur possible du minimum pour l'objectif, alors $\overline{X}$ est une solution de (PO) . □

La notion de la trajectoire centrale peut être introduite moyennant une fonction barrière logarithmique, il suffit d'associer à (PO) le problème d'optimisation (barrière non linéaire) suivant :

$$(\mathrm{PO})_\mu \begin{cases} \min\limits_{(X,Y)} \left[\mathrm{Tr}(XY) - \mu \log\det(XY)\right], \ \mu > 0, \\ Y = L(X) + Q, \\ X \succ 0, \ Y \succ 0. \end{cases}$$

Proposition 4.1.2 *Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), la fonction :*

$$\psi_\mu(X, Y) = Tr(XY) - \mu \log\det(XY), \quad \mu > 0,$$

est une fonction strictement convexe.

Preuve : Soit $\mu > 0$ fixé.

La fonction $\psi_\mu(X,Y)$ peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned}\psi_\mu(X) &= \operatorname{Tr}(X(L(X)+Q)) - \mu \log\det(X(L(X)+Q)) \\ &= \operatorname{Tr}(X(L(X)+Q)) - \mu \log\det(X) - \mu \log\det(L(X)+Q).\end{aligned}$$

ψ_μ est strictement convexe puisqu'elle se compose de deux fonctions l'une est convexe et l'autre est strictement convexe. $\square$

On a démontré que ψ_μ est strictement convexe, alors si le problème $(\mathrm{PO})_\mu$ admet une solution, elle est unique.
Démontrons maintenant que $(\mathrm{PO})_\mu$ admet une solution, $\forall \mu$ fixé, pour cela on a le théorème suivant :

Théorème 4.1.3 *Sous l'hypothèse (H_1), (H_2) et (H_3) il existe $(X^0, Y^0) \in \mathcal{F}^0$, tel que l'ensemble des courbes de niveaux :*

$$\Omega_\mu = \left\{ X \in \mathbb{S}^n : \psi_\mu(X) \leq \psi_\mu(X^0) \right\}$$

est compact.

Preuve : Pour $X \in \Omega_\mu$, on a :

$$< X, L(X) + Q > -\mu \log\det(X(L(X)+Q)) \leq \psi_\mu(X^0).$$

Notons que $Y^0 = L(X^0) + Q$, alors :

$$< X, L(X) > + < X, Y^0 > - < X, L(X^0) > -\mu \log\det(X(L(X)+Q)) \leq \psi_\mu(X^0),$$

on a :

$$< X, L(X) > - < X, L(X^0) >=< L(X-X^0), X-X^0 > + < L(X^0), X > - < L(X^0), X^0 >,$$

ce qui implique

$$< L(X - X^0), X - X^0 > - < L(X^0), X^0 >\geq - < L(X^0), X^0 >,$$

d'un autre côté on a :

$$Y^0 \succ 0, \text{ alors } < X, Y^0 >\geq \lambda_{\min}(Y^0)\mathrm{Tr}(X),$$

et

$$X^0 \succ 0 \overset{L \text{ monotone}}{\Longrightarrow} L(X^0) \succ 0, \text{ alors } < L(X^0), X >\geq \lambda_{\min}(L(X^0))\mathrm{Tr}(X),$$

d'où

$$\left(\lambda_{\min}(Y^0) + \lambda_{\min}(L(X^0))\right) \mathrm{Tr}(X) - < L(X^0), X^0 > -\mu \log\det(X(L(X) + Q)) \leq \psi_\mu(X^0),$$

ce qui implique que $\mathrm{Tr}(X)$ est bornée, alors $\|X\|$ est aussi bornée, d'où l'ensemble Ω_μ est bornée. Pour la fermeture de Ω_μ est facile à démontrer.Alors on déduit que l'ensemble Ω_μ est compact, et le problème $(\mathrm{PO})_\mu$ admet une solution unique. □

Comme le problème $(\mathrm{PO})\mu$ est un problème d'optimisation convexe, alors les conditions de **K.K.T** sont nécessaires et suffisantes, et on a :

Pour $\mu > 0$ fixé,

$$\textbf{K.K.T} \quad \begin{cases} Y = L(X) + Q, \\ XY - \mu I = 0, \\ X \succ 0, \;\; Y \succ 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Alors résoudre le problème $(\mathrm{PO})_\mu$ revient à résoudre (4.7) pour $\mu > 0$.

On note l'ensemble des solutions du système (4.7) par :

$$C = \{(X(\mu), Y(\mu)) \, : \mu > 0\},$$

qui s'appelle la trajectoire centrale (chemin central).

Lemme 4.1.1 *Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), l'ensemble :*

$$\{(X(\mu), Y(\mu)) : 0 \leq \mu \leq \overline{\mu}\},$$

est borné pour tout $\overline{\mu} > 0$ (fixé et assez large).

Preuve : Soit $(X^0, Y^0) \in \mathcal{F}^0$, et $(X(\mu), Y(\mu))$ un point interieur $((X(\mu), Y(\mu)) \in C)$, et par l'hypothèse (H_2) on a :

$$< L(X(\mu) - X^0), X(\mu) - X^0 > \geq 0,$$

ceci implique :

$$< Y(\mu) - Y^0, X(\mu) - X^0 > \geq 0.$$

Par la condition de centralité on a :

$$< Y(\mu), X(\mu) >= n\mu,$$

d'où

$$\mathrm{Tr}(X(\mu)Y^0) + \mathrm{Tr}(X^0Y(\mu)) \leq n\mu + \mathrm{Tr}(X^0Y^0),$$

alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(X(\mu)Y^0) &\leq n\mu + \mathrm{Tr}(X^0Y^0), \\ \mathrm{Tr}(X^0Y(\mu)) &\leq n\mu + \mathrm{Tr}(X^0Y^0), \end{aligned}$$

pour $\overline{\mu} > 0$, ($\overline{\mu}$ donné), on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(X(\mu)) &\leq \frac{n\overline{\mu} + \operatorname{Tr}(X^0Y^0)}{\lambda_{\min}(Y^0)}, \\
\operatorname{Tr}(Y(\mu)) &\leq \frac{n\overline{\mu} + \operatorname{Tr}(X^0Y^0)}{\lambda_{\min}(X^0)},
\end{aligned}$$

$\forall \mu < \overline{\mu}$. ($X^0 \succ 0$ et $Y^0 \succ 0$), ($\lambda_{\min}(Y^0)$ (resp $\lambda_{\min}(X^0)$) est la plus petite valeur propre de Y^0 (resp de X^0)).

En utilisant la propriété :

$$\|X\| \leq \operatorname{Tr}(X),$$

pour toute matrice semi-définie positive X on a :

$$\begin{aligned}
\|X(\mu)\| &\leq \frac{n\overline{\mu} + \operatorname{Tr}(X^0Y^0)}{\lambda_{\min}(Y^0)}, \\
\|Y(\mu)\| &\leq \frac{n\overline{\mu} + \operatorname{Tr}(X^0Y^0)}{\lambda_{\min}(X^0)},
\end{aligned}$$

$\forall \mu, 0 < \mu < \overline{\mu}$. □

Théorème 4.1.4 $\lim\limits_{\mu \mapsto 0} (X(\mu), Y(\mu)) = (X^*, Y^*)$, *où* (X^*, Y^*) *est une solution de (PCLSD).*

Preuve : Soit $(X(\mu_k), Y(\mu_k)) \in \{(X(\mu), Y(\mu)) : 0 \leq \mu \leq \overline{\mu}\}$, d'aprés le Lemme précédent, cet ensemble est borné, alors il existe une sous-suite extraite $(X(\mu_{n_k}), Y(\mu_{n_k}))$ de $(X(\mu_k), Y(\mu_k))$ convergente et vérifiant les conditions de **K.K.T (4.7),**

$$\begin{cases}
L(X(\mu_{n_k})) + Q = Y(\mu_{n_k}), \\
X(\mu_{n_k})Y(\mu_{n_k}) = \mu_{n_k} I, \\
X(\mu_{n_k}) \succ 0, Y(\mu_{n_k}) \succ 0,
\end{cases}$$

Supposons que $\lim\limits_{k \mapsto \infty} (X(\mu_{n_k}), Y(\mu_{n_k})) = (X^*, Y^*)$, alors en passant à la limite dans le système précédent on a :

$$\begin{cases} L(X^*) + Q = Y^*, \\ X^*Y^* = 0, \\ X^* \succ 0, Y^* \succ 0, \end{cases}$$

on déduit que (X^*, Y^*) est une solution du (PCLSD). En particulier on peut prendre $\mu_k = \dfrac{1}{k}$ $(k = 1, 2, ..,)$. $\square$

4.2 L'algorithme générique primal-dual et les directions de Nesterov-Todd pour le (PCLSD)

4.2.1 Résolution du système linéaire

Pour résoudre le système (4.7), on utilise les algorithmes primals-duals de suivi de chemin.L'idée de base de ces dernièrs est de suivre approximativement le chemin central et atteindre la solution de (4.7), en utilisant le pas de Newton α tel que :

$$X^{k+1} = X^k + \alpha \Delta X, \quad Y^{k+1} = Y^k + \alpha \Delta Y.$$

On note que (X, Y) est une solution du (PCLSD) si et seulement si elle est une solution du système (4.7) pour $\mu = 0$.

Etant donné que la deuxième équation du système (4.7) est non linéaire, une résolution directe est généralement impossible. Soit :

$$F_\mu(X, Y) = 0 \quad \text{et} \quad (X, Y) \in \mathbb{S}^n_{++} \times \mathbb{S}^n_{++} \ , \quad \mu \in \mathbb{R}^*_+, \tag{4.8}$$

qui représente un système d'équations non linéaires, où :

$$F_\mu : \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$$

est une fonction définie par :

$$F_\mu(X,Y) = \begin{pmatrix} L(X) + Q - Y \\ XY - \mu I \end{pmatrix}.$$

On applique la méthode de Newton au système (4.8), on obtient :

$$F_\mu(X,Y) + \nabla F_\mu(X,Y)(\Delta X, \Delta Y)^T = 0,$$

c'est à dire, le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} L(\Delta X) = \Delta Y \\ X\Delta Y + \Delta X Y = \mu I - XY. \end{cases} \tag{4.9}$$

Notons que le système (4.9) admet une solution unique $(\Delta X, \Delta Y)$ qui en général n'est pas symétrique.Pour palier à ce défaut, beaucoup de recherches sont faites dans la littérature pour symétriser la deuxième équation de Newton tel que le nouveau système doit avoir une solution unique symètrique. Dans toutes les propositions faites par les chercheurs, l'idée est d'introduire une matrice inversible P (Tableau 4.11) et de considérer la transformation lineaire suivante :

$$H_P(M) = \frac{1}{2}(PMP^{-1} + P^{-T}M^TP^T),$$

où M est une matrice carrée réelle d'ordre n donnée. En utilisant cette technique, la deuxième équation de Newton linéarisée dans (4.9) sera :

$$\begin{cases} L(\Delta X) = \Delta Y \\ P(X\Delta Y + \Delta X Y)P^{-1} + P^{-T}(Y\Delta X + \Delta Y X)P^T = \\ 2\mu I - PXYP^{-1} - P^{-T}YXP^T. \end{cases} \tag{4.10}$$

Il y a plusieurs choix pour la matrice P :

P	Références
I	Alizadeh, Haeberly et Overton (AHO) [3] ;
$Y^{1/2}$ ou $X^{1/2}$	Helmberg, Kojima et Monteiro (HKM) [21] ;
X^{-1}	Kojima [9] ;
Y	Kojima [9] .

(4.11)

Dans notre travail, on utilise la symétrisation de Nesterov-Todd.

4.2.2 La direction de Nesterov-Todd (N.T)

On utilise la direction de Nesterov-Todd où P est donnée par $P = D^{-1/2}$ avec

$$D = X^{1/2}(X^{1/2}YX^{1/2})^{-1/2}X^{1/2} = Y^{-1/2}(Y^{1/2}XY^{1/2})^{1/2}Y^{-1/2}.$$

Le rôle de la matrice symétrique définie positive D est la mise à l'echelle les deux matrices X et Y (scaling matrix) à une même matrice symétrique définie positive V donnée par :

$$V = D^{-\frac{1}{2}}XD^{-\frac{1}{2}} = D^{\frac{1}{2}}YD^{\frac{1}{2}}. \tag{4.12}$$

Les nouvelles (scaling) directions sont définies par :

$$D_X = D^{-\frac{1}{2}}\Delta XD^{-\frac{1}{2}} \ ; \ D_Y = D^{\frac{1}{2}}\Delta YD^{\frac{1}{2}}. \tag{4.13}$$

Utilisons (4.12) et (4.13), le système (4.10) est équivalent à :

$$\begin{cases} \bar{L}(D_X) = D_Y \\ VD_V + D_VV = 2\mu I - 2V^2, \end{cases} \tag{4.14}$$

où

$$D_V = D_X + D_Y,$$

et la transformation $\bar{L}$ est donnée par :

$$\bar{L}(D_X) = D^{\frac{1}{2}} L(D^{\frac{1}{2}} D_X D^{\frac{1}{2}}) D^{\frac{1}{2}},$$

la transformation $\bar{L}$ est aussi linéaire, et monotone si L monotone sur $\mathbb{S}^n$. Sous les hypothèses (H_1) et (H_2) le système linéaire (4.14) admet une solution unique symétrique (D_X, D_Y). De plus, les nouvelles directions vérifient

$$\mathrm{Tr}(D_X D_Y) = \mathrm{Tr}(D_Y D_X) \geq 0, \tag{4.15}$$

cette dernière inégalité confirme que les directions de Newton dans les deux espaces primal et dual ne sont pas orthogonales contrairement au cas de (LP) et (SDP).

4.2.3 Facteur de centralité

La qualité de chaque solution trouvée est mesurée par un facteur dit de centralité. C'est le scalaire δ défini par :

$$\delta(XY, \mu) = \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\sqrt{\mu}} V - \sqrt{\mu} V^{-1} \right\|. \tag{4.16}$$

On peut vérifier facilement que :

$$\delta^2(XY, \mu) = \frac{1}{4} (\frac{1}{\mu} \mathrm{Tr}(XY) - 2n + \mu \mathrm{Tr}(XY)^{-1}).$$

Cette proximité a été largement exploitée dans les méthodes de points interieurs pour les programmes linéaires, quadratiques, la programmation semi-défini et les problèmes complémentaires.

Remarque 4.2.1 [8] *L'unique solution de l'équation de sylvester :*

$$VD_V + D_V V = 2\mu I - 2V^2,$$

dans le système (4.14) est

$$D_V = \mu V^{-1} - V, \tag{4.17}$$

En utilisant (4.17) on déduit :

$$\|D_V\|^2 = 4\mu\delta^2. \tag{4.18}$$

4.2.4 Algorithme

Dans ce paragraphe, on va décrire formellement notre algorithme. La forme générique de cet algorithme est présentée dans la figure 2.

Algorithme générique primal-dual pour SDLCP

Début d'algorithme

Données :

Un paramètre de précision $\epsilon > 0$;

un paramètre de proximité τ ;

un paramètre $0 < \theta < 1$;

un pas de déplacement α;

un paramètre barrière μ^0 (fixé).

Initialisation : soit (X^0, Y^0) un point strictement réalisable tel que $\delta(X^0, Y^0, \mu^0) \leq \tau$;

Tant que $n\mu \geq \epsilon$ **faire**

- $\mu := (1-\theta)\mu$;

Tant que $\delta(X, Y, \mu) > \tau$ **faire**

- résoudre le système (4.14) ;
- calculer $(\Delta X, \Delta Y)$ via le système (4.13) ;
- calculer le pas α ;
- mise à jour $X = X + \alpha\Delta X,\ Y = Y + \alpha\Delta Y$;

Fin tant que.

Fin tant que.

Fin algorithme.

Fig.2. Algorithme 4.2.4

4.3 Analyse de compléxité (Résultats généraux et estimation du pas maximal de stricte faisabilité maximale)

Dans cette partie on va étudier la compléxité de l'algorithme 4.2.4. On commence par donner quelques résultats utiles.

4.3.1 Résultats généraux

Soit A une matrice de $\mathbb{R}^{n\times n}$. $\overline{A}$ est la partie symétrique de la matrice A, et $\widetilde{A}$ sa partie antisymétrique. Alors on a :

$$A = \overline{A} + \widetilde{A},\ \ \overline{A} = \frac{A + A^T}{2},\ \ \widetilde{A} = \frac{A - A^T}{2}.$$

Lemme 4.3.1 [34] *Si A est une matrice définie positive alors :*

$$TrA^{-1} \leq Tr(\overline{A}^{-1}).$$

L'égalité est vraie si et seulement si $A = A^T$.

Lemme 4.3.2 [34] *Soit A_1 et A_2 deux matrices symétriques définies positives , et $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Alors :*

$$Tr\left((\alpha A_1 + \beta A_2)^{-1}\right) \leq \alpha\, Tr\left((A_1)^{-1}\right) + \beta tr\left((A_2)^{-1}\right).$$

L'égalité est vraie si $\alpha = 1$ ou $\beta = 1$.

Lemme 4.3.3 [35] *Soit $0 \leq \alpha \leq 1$. Alors :*

$$1 - \alpha t \geq (1-t)^{\alpha},\ \ t \in [0,\ 1],$$

Si $\alpha_1 \geq \alpha_2 > 0$*, on a :*

$$\left|t - t^{-\alpha_1}\right| \geq \left|t - t^{-\alpha_2}\right|, \text{ pour } t > 0.$$

Lemme 4.3.4 [35] *Soit* $t_k > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{k}$, *une suite donnée vérifiant l'inégalité suivante :*

$$t_{k+1} \leq t_k - \beta t_k^{\gamma}\ , \quad \beta > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{k},$$

avec $\gamma \in [0, 1[$ *et* $t_{\bar{k}+1} < 0$ *. Alors :*

$$\bar{k} \leq \left[\frac{t_0^{1-\gamma}}{\beta(1-\gamma)}\right].$$

De plus, pour tout $\rho \geq 0$ *(fixé), on a :*

$$t_{k+1} \leq \rho \ \text{ pour tout } \ k \geq \left[\frac{t_0^{1-\gamma} - \rho^{1-\gamma}}{\beta(1-\gamma)}\right].$$

Définissons la matrice symétrique $\widetilde{D}$ par [34] :

$$\widetilde{D} = \frac{1}{2\mu}(D_X D_Y + D_Y D_X). \tag{4.19}$$

Soit $\lambda_i(\widetilde{D})$ les valeurs propres de la matrice $\widetilde{D}$, avec $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
Il existe deux nombres non négatifs tels que :

$$\sigma_+ = \sum_{i \in I_+} \lambda_i(\widetilde{D})\ ,\ \ \sigma_- = -\sum_{i \in I_-} \lambda_i(\widetilde{D}),$$

où

$$I_- = I - I_+ = \left\{i \in I : \lambda_i(\widetilde{D}) < 0\right\},$$

et

$$I_+ = \left\{i \in I : \lambda_i(\widetilde{D}) \geq 0\right\}.$$

Lemme 4.3.5 *On a :*

$$0 \leq Tr(\widetilde{D}) \leq 2\delta^2,$$

et

$$\sigma_- \leq \sigma_+ \leq 2\delta^2.$$

Preuve : Pour le premier résultat, puisque la matrice $\widetilde{D}$ est symétrique alors $\lambda_i(\widetilde{D})$ sont réelles et de (4.15) et (4.19) on a :

$$\mathrm{Tr}(\widetilde{D}\ ) = \sum_{i\in I} \lambda_i(\widetilde{D}) = \sigma_+ - \sigma_- \geq 0.$$

Soit $Q_{\widetilde{D}}$ une matrice orthogonale telle que :

$$Q_{\widetilde{D}}^T \widetilde{D} Q_{\widetilde{D}} = diag(\lambda_i(\widetilde{D})),\ \ i \in I_+,\ \ \lambda_i(\widetilde{D}),\ i \in I_-),$$

et soit :

$$\overline{D} = \frac{1}{2\mu} Q_{\widetilde{D}}^T (D_X^2 + D_Y^2) Q_{\widetilde{D}},$$

puisque la matrice

$$\frac{1}{2\mu} Q_{\widetilde{D}}^T (D_X + D_Y)^2 Q_{\widetilde{D}} = \overline{D} + diag(\lambda_i(\widetilde{D}),\ \ i \in I_+,\ \ \lambda_i(\widetilde{D}),\ i \in I_-)$$

est semi-définie positive, alors on a :

$$\overline{D}_{ii} + \lambda_i(\widetilde{D}) \geq 0\ ,\ \forall i \in I,$$

ce qui implique :

$$\overline{D}_{ii} \geq -\lambda_i(\widetilde{D}) > 0\ ,\ \forall i \in I_-,$$

et

$$\sum_{i\in I_-} \overline{D}_{ii} \geq \sum_{i\in I_-} -\lambda_i(\widetilde{D}) = \sigma_-,$$

d'un autre côté, la matrice

$$\frac{1}{2\mu} Q_{\widetilde{D}}^T (D_X - D_Y)^2 Q_{\widetilde{D}} = \overline{D} - diag(\lambda_i(\widetilde{D}),\ i \in I_+,\ \ \lambda_i(\widetilde{D}),\ i \in I_-)$$

est aussi semi-définie positive, d'où

$$\overline{D}_{ii} - \lambda_i(\widetilde{D}) \geq 0, \forall i \in I,$$

et

$$\overline{D}_{ii} \geq \lambda_i(\widetilde{D}) > 0 \ , \forall i \in I_+ \ \Rightarrow \sum_{i \in I_+} \overline{D}_{ii} \geq \sum_{i \in I_+} \lambda_i(\widetilde{D}) = \sigma_+,$$

ceci entraîne à :

$$\begin{aligned}
\sigma_+ + \sigma_- &\leq \operatorname{Tr}(\overline{D}) \\
&= \frac{1}{2\mu} \operatorname{Tr}(D_X^2 + D_Y^2) \\
&\leq \frac{1}{2\mu} \operatorname{Tr}(D_X^2 + D_Y^2) + 2\operatorname{Tr}(D_X D_Y)) \\
&= \frac{1}{2\mu} \operatorname{Tr}(D_V)^2 \\
&= \frac{1}{2\mu} \|D_V\|^2 \\
&= 2\delta^2,
\end{aligned}$$

d'où

$$\sigma_+ \leq 2\delta^2, \quad \sigma_- \leq 2\delta^2,$$

et

$$\begin{aligned}
2\mu \operatorname{Tr}(\widetilde{D}) &= 2\operatorname{Tr}(D_X D_Y) \\
&= \operatorname{Tr}(D_X D_Y + D_Y D_X) \\
&\leq \|D_X + D_Y\|^2,
\end{aligned}$$

d'où :

$$\operatorname{Tr}(\widetilde{D}) \leq \frac{1}{2\mu} \|D_X + D_Y\|^2,$$

de (4.18) on déduit que :

$$\mathrm{Tr}(\widetilde{D}) \leq 2\frac{1}{4\mu}\|D_V\|^2 = 2\delta^2,$$

d'où le résultat. $\square$

4.3.2 Influence d'une itération de Newton sur la mesure de proximité

On doit estimer la quantité $\delta_+^2 - \delta^2$, c-à-d, l'effet de l'itération de Newton sur la mesure de proximité. δ_+ est la mesure de proximité aprés le pas de déplacement α. Soit

$$\delta_+ = \delta(X^+Y^+, \mu)\ ,\ \ X^+ = X + \alpha\Delta X\ ,\ \text{ et, }\ Y^+ = Y + \alpha\Delta Y.$$

On donne quelques résultats qui seront utiles par la suite.

Lemme 4.3.6 *Supposons que le pas de déplacement est strictement faisable. Alors :*

$$\delta_+^2 \leq \frac{1}{4\mu} Tr(V^2 + \alpha V D_V + \alpha^2\mu\widetilde{D}) - \frac{n}{2} + \frac{\mu}{2} Tr((2V^2 + \alpha(VD_V + D_V V) + 2\alpha^2\mu\widetilde{D})^{-1}),$$

avec $\widetilde{D}$ est définie dans (4.19),et par conséquence, on déduit :

$$\delta_+^2 \leq \frac{1-\alpha}{4\mu} Tr(V^2) + \frac{\alpha n}{4} - \frac{n}{2} + \frac{\alpha^2}{4}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\widetilde{D}) + \frac{\mu(1-\alpha)}{4} Tr(V^{-2}) + \frac{\alpha}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\alpha\lambda_i(\widetilde{D})}.$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(X^+Y^+) &= \mathrm{Tr}((V+\alpha D_X)(V+\alpha D_Y)) \\ &= \mathrm{Tr}(V^2 + \alpha(D_X V + D_Y V)) + \alpha^2 D_X D_Y), \end{aligned}$$

et de (4.14) on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(X^+Y^+) &= \mathrm{Tr}(V^2) + \alpha \mathrm{Tr}(\mu I - V^2)) + \alpha^2 \mu \mathrm{Tr}(\widetilde{D}) \\ &= (1-\alpha)\mathrm{Tr}(V^2) + \alpha n \mu + \alpha^2 \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\widetilde{D}).\end{aligned}$$

D'un autre côté, et par un simple calcul en utilisant le lemme 4.3.1 on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}((X^+)^{-1}(Y^+)^{-1}) &= \mathrm{Tr}((V+\alpha D_X)^{-1}(V+\alpha D_Y)^{-1})) \\ &\leq 2\mathrm{Tr}\left[(V+\alpha D_X)(V+\alpha D_Y) + (V+\alpha D_Y)(V+\alpha D_X)\right]^{-1} \\ &= 2\mathrm{Tr}\left[(2V^2 + \alpha V D_V + \alpha D_V V + \alpha^2 D_Y D_X + \alpha^2 D_X D_Y)^{-1}\right] \\ &= 2\mathrm{Tr}\left[(2V^2 + \alpha V D_V + \alpha D_V V + 2\alpha^2 \mu \widetilde{D})^{-1}\right] \\ &= 2\mathrm{Tr}([(1-\alpha)2V^2 + 2\alpha\mu(I + \alpha\widetilde{D})]^{-1}).\end{aligned}$$

Si $0 < \alpha < 1$ est suffisament petit de telle façon que la matrice $(I + \alpha\widetilde{D})$ est définie positive [36]. Alors par le Lemme 4.3.2, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}([(1-\alpha)2V^2 + 2\alpha\mu(I+\alpha\widetilde{D})]^{-1}) &\leq \frac{1-\alpha}{2}\mathrm{Tr}(V^{-2}) + \frac{\alpha}{2\mu}\mathrm{Tr}(I+\alpha\widetilde{D})^{-1} \quad (4.20) \\ &\leq \frac{1-\alpha}{2}\mathrm{Tr}(V^{-2}) + \frac{\alpha}{2\mu}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\alpha\lambda_i(\widetilde{D})}.\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du Lemme. □

Théorème 4.3.1 [34] *Si* $0 < \alpha < \dfrac{1}{\sigma_+}$*. Alors le pas de déplacement est strictement réalisable et la matrice :*

$$(V + \alpha D_X)(V + \alpha D_Y)$$

est définie positive.

Par le Lemme (4.3.5) les valeurs propres $\lambda_i(\widetilde{D})$ de $\widetilde{D}$ vérifient $\left|\lambda_i(\widetilde{D})\right| \leq \sigma \leq 2\delta^2$, pour tout $i \in I$, où $\sigma = \sigma_+$, alors on a le résultat suivant :

Théorème 4.3.2 *Soit* $\delta = \delta(XY,\mu)$ *et* $\sigma = \sigma_+$. *Pour tout* $0 < \alpha < \dfrac{1}{\sigma}$ *on a :*

$$\delta_+^2 \leq (1-\alpha)\delta^2 + \frac{2\alpha^3\delta^4}{1-4\alpha^2\delta^4}.$$

Preuve : Par le Lemme 4.3.6, on a :

$$\begin{aligned}
\delta_+^2 &\leq \frac{1-\alpha}{4\mu}\mathrm{Tr}(V^2) + \frac{\alpha n}{4} - \frac{n}{2} + \frac{\alpha^2}{4}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\widetilde{D}) + \frac{\mu(1-\alpha)}{4}\mathrm{Tr}(V^{-2}) + \frac{\alpha}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\alpha\lambda_i(\widetilde{D})}\\
&= \frac{1-\alpha}{4}\mathrm{Tr}(\frac{1}{\mu}V^2 + \mu V^{-2} - 2I) - \frac{\alpha n}{4} + \frac{\alpha^2}{4}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\widetilde{D}) + \frac{\alpha}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\alpha\lambda_i(\widetilde{D})}\\
&= \frac{1-\alpha}{4}\mathrm{Tr}(\frac{1}{\mu}V^2 + \mu V^{-2} - 2I) + \frac{\alpha^2}{4}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\widetilde{D}) + \frac{\alpha}{4}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{1+\alpha\lambda_i(\widetilde{D})} - 1)\\
&= (1-\alpha)\delta^2 + \frac{\alpha^2}{4}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\widetilde{D}) - \frac{\alpha^2}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i(\widetilde{D})}{1+\alpha\lambda_i(\widetilde{D})},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\delta_+^2 &\leq (1-\alpha)\delta^2 + \frac{\alpha^2}{4}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\widetilde{D}) - \frac{\alpha^2}{4}\sum_{i\in I_+}\frac{\lambda_i(\widetilde{D})}{1+\alpha\lambda_i(\widetilde{D})} + \frac{\alpha^2}{4}\sum_{i\in I_-}\frac{-\lambda_i(\widetilde{D})}{1+\alpha\lambda_i(\widetilde{D})}\\
\delta_+^2 &\leq (1-\alpha)\delta^2 + \frac{\alpha^2}{4}\sigma_+ - \frac{\alpha^2}{4}\frac{\sigma_+}{(1+\alpha\sigma_+)} + \frac{\alpha^3}{4}\sum_{i\in I_-}\frac{(\lambda_i(\widetilde{D}))^2}{(1+\alpha\lambda_i(\widetilde{D}))}\\
&\leq (1-\alpha)\delta^2 + \frac{\alpha^3\sigma_+^2}{4(1+\alpha\sigma_+)} + \frac{\alpha^3\sigma_-^2}{4(1-\alpha\sigma_-)}.
\end{aligned}$$

Notons que $\sigma \leq 2\delta^2$, et $\sigma_- \leq \sigma$ on déduit :

$$\frac{\alpha^3\sigma_+^2}{1+\alpha\sigma_+} = \frac{\alpha^3\sigma^2}{1+\alpha\sigma} \leq \frac{4\alpha^3\delta^4}{1+2\alpha\delta^2},$$

et

$$\frac{\alpha^3\sigma_-^2}{1-\alpha\sigma_-} \leq \frac{\alpha^3\sigma^2}{1-\alpha\sigma} \leq \frac{4\alpha^3\delta^4}{1-2\alpha\delta^2}.$$

D'où le résultat. □

Remarque 4.3.1 *Si* $\alpha = 1$ *(la valeur maximale), alors de l'inégalité du théorème pré-*

cédent, on a :

$$\delta_+^2 \leq \frac{2\delta^4}{1-4\delta^4}.$$

Théorème 4.3.3 *Si $\delta \geq 1$ et $\alpha = \dfrac{1}{4\delta^2}$ alors :*

$$\delta_+^2 - \delta^2 \leq -\frac{5}{24}.$$

Preuve : Pour $\alpha = \dfrac{1}{4\delta^2} \leq \dfrac{1}{\sigma}$, le pas de déplacement est strictement réalisable et par le Théorème précédent on a :

$$\begin{aligned} \delta_+^2 - \delta^2 &\leq -\alpha\delta^2 + \frac{2\alpha^3\delta^4}{1-4\alpha^2\delta^4} \\ &\leq -\frac{1}{4} + \frac{1}{24\delta^2} \leq -\frac{5}{24}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve le Théorème. □

4.3.3 Les bornes d'itération (iteration bounds)

Dans cette partie on va calculer les bornes d'itérations de l'algorithme 4.2.4.

Lemme 4.3.7 *(Lemme IV.36 [40]) Soit (X, Y) un point strictement réalisable et $\mu > 0$. Si $\mu_+ = (1-\theta)\mu$ alors :*

$$\delta(XY, \mu_+)^2 \leq \frac{(2\delta + \theta\sqrt{n})^2}{4(1-\theta)}. \tag{4.21}$$

Lemme 4.3.8 *Si $\delta(XY, \mu) \leq \tau$ et $\tau \geq 1$. Alors aprés une mise à jour du paramétre barriére $\mu > 0$, le nombre d'itérations pour récentrer ne dépasse pas la valeur suivante :*

$$\left[\frac{6\theta}{5(1-\theta)}\left(n\theta + 4\tau\sqrt{n} + 4\tau^{\,2}\right)\right]. \tag{4.22}$$

Preuve : Du (4.21), aprés une mise à jour de μ, telle que $\mu_+ = (1-\theta)\mu$, on a :

$$\delta(XY, \mu_+)^2 \leq \frac{(2\delta + \theta\sqrt{n})^2}{4(1-\theta)} \leq \frac{(2\tau + \theta\sqrt{n})^2}{4(1-\theta)}$$

du Théorème (4.3.3) on a :

$$\delta(XY, \mu_+)^2 - \delta(XY, \mu)^2 \leq -\frac{5}{24},$$

ce qui implique :

$$\delta(XY, \mu_+)^2 \leq \delta(XY, \mu)^2 - \frac{5}{24}(\delta(XY, \mu)^2)^0,$$

du lemme (4.3.4) on a :

$$k \leq \left[\frac{t_0^{1-\gamma}}{\beta(1-\gamma)}\right],$$

tel que $t_0 = \dfrac{(2\tau + \theta\sqrt{n})^2}{4(1-\theta)}$, $\beta = \dfrac{5}{24}$, et $\gamma = 0$,d'où :

$$k \leq \frac{24}{5}\left(\frac{(2\tau + \theta\sqrt{n})^2}{4(1-\theta)}\right)$$

mais $\delta(XY, \mu) \leq \tau$, alors d'aprés le lemme (4.3.4) on a :

$$k \geq \frac{24}{5}\left(\frac{(2\tau + \theta\sqrt{n})^2}{4(1-\theta)} - \tau^2\right) = \frac{6\theta}{5(1-\theta)}(n\theta + 4\tau\sqrt{n} + 4\tau^2)$$

Alors pour une itération, la mesure de proximité δ^2 décroit au moins d'un taux de $\dfrac{5}{12}$.
Donc au plus aprés

$$\left[\frac{6\theta}{5(1-\theta)}(n\theta + 4\tau\sqrt{n} + 4\tau^2)\right]$$

itérations, la mesure de proximité dépasse le seuil τ.Cela implique le théorème suivant :

Théorème 4.3.4 *Si $\tau \geq 1$, alors le nombre total des itérations produites par l'algorithme* *primal-dual ne dépasse pas :*

$$\left[\frac{6\theta}{5(1-\theta)}(n\theta+4\tau\sqrt{n}+4\tau^2)\right]\left[\frac{1}{\theta}\log\frac{n\mu^0}{\epsilon}\right].$$

Preuve : Le nombre d'itérations produit par l'algorithme (lemme II.17 page 116 [40]) est donné par :

$$\frac{1}{\theta}\log\frac{n\mu^0}{\epsilon},$$

et par la multiplication de ce dernier par l'expression (4.22), on obtient le résultat demandé. Ce théorème nous indique qu'aprés les simplifications de cette dernière expression (cela n'influe pas sur l'ordre de magnitude de la borne des itérations) l'algorithme à grand pas ne dépasse pas le nombre d'itérations

$$O(\frac{6}{5(1-\theta)}(n\theta+4\tau\sqrt{n}+4\tau^2)\log\frac{n\mu^0}{\epsilon})$$

Si $\theta=\frac{1}{2}$ et $\tau=1$, la borne sera

$$O(\frac{12}{5}(\frac{n}{2}+4\sqrt{n}+4)\log\frac{n\mu^0}{\epsilon}) = O(n\log\frac{n\mu^0}{\epsilon}).$$

qui est la complexité connue pour les algorithmes primals-duals à grand pas pour la programmation linéaire et semi-définie.
Cependant, si $\theta=n^{-\frac{1}{2}}$ et $\tau=1$, on obtient la meilleure complexité connue pour les algorithmes primal-dual à pas court.

$$O(\sqrt{n}\log\frac{n\mu^0}{\epsilon}).$$

4.4 Conclusion et perspectives

Le problème complémentaire linéaire semi-défini (PCLSD) a été au centre d'intérêt de plusieurs chercheurs, son importance grandissante est mesurée par les domaines pratiques et mathématiques qu'il couvre.

Dans cette thèse nous avons apporté des contributions d'ordre algorithmique et théorique. En effet une étude bibliographique approfondie concernant le (PCLSD) été éffécuée, en citant quelques exemples du (PCLSD), permettant d'éclaircir l'importance de ce dernier, et quelques formes de la transformation associée au problème.

La reformulation du (PCLSD) en problème d'optimisation sous contraintes constitue un remède appréciable pour la résolution du (PCLSD). De même nous avons pu développer une méthode de points interieurs pour la minimisation d'une fonction convexe sous contraintes linéaires avec établissement de tout l'aspect théorique.

Les méthodes de points intérieurs de trajectoire centrale de type primal-dual sont connues par leurs éfficacité pour résoudre beaucoup de problèmes d'optimisation. Dans ce cadre un algorithme primal-dual de suivi de chemin a été proposé, avec une étude approfondie sur sa compléxité.

Nous avons fait une extension des résultats concernant l'analyse de compléxité de l'algorithme primal-dual de suivi de chemin désigné pour la programmation linéaire et semi-définie (SDP) à la classe des problèmes de complémentarité linéaire semi-défini monotone. Nous avons réussi à établir une analyse unificatrice pour la compléxité polynomial. Pour l'algorithme à grand pas la borne d'itération est $O(n \log \frac{n\mu^0}{\epsilon})$. Cette compléxité est similaire à celle des méthodes primal-dual (IPM). Pour l'algorithme à pas court la borne d'itération est $O(\sqrt{n} \log \frac{n\mu^0}{\epsilon})$ qui est une meilleure complexité polynômiale.

Perspectives

L'etude théorique de l'existence et l'unicité de la solution de PCLSD reste toujours un problème ouvert pour d'autres caractérisations de la transforamtion L. De plus l'étude numérique de l'algorithme proposée serait sans doute un objet de recherche.

Bibliographie

[1] M. Achache. Multidimensional primal-dual path-following interior point methods for linear programming and linear complementarity problems. Thèse de Doctorat d'Etat.Université Ferhat Abbas de Sétif 19000. Algérie, (2005).

[2] M. Achache, N. Boudiaf, et A. Keraghel. Le problème de complémentarité linaire semi-défini. revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation. Tome 38, No 2, 2009, pp. 115–129.

[3] F. Alizadeh, J.A. Haeberly, and M. Overton. Primal-dual interior point methods for semidefinite programming. Convergence rates, stability and numerical results. *SIAM J. Optimization* (8) pp 746-768, (1998).

[4] H. Alabboud. La programmation semi-définie combinée et comparée avec d'autres probèmes d'optimisation. Thèse de doctorat. Université de Havre (2007).

[5] J.M. Borwein, A.S. Lewis. Convexe analysis and nonlinear optimization. Theory and examples. Springer-Verlag. New-York Berlin Heidlberg.(2000).

[6] M.Bierlaire. Introduction à l'optimisation differetiable. Pressses polytechniques et universitaires romandes, 2006.

[7] R.W. Cottle, J.S. Pang, and R. Stone. The linear complementarity problem. Academic Press. Boston, (1992).

[8] E. De Klerk. Interior point methods for semidefinite programming. Thesis Technische Universiteit Delft. University of Pretoria, 1997.

[9] M.El ghami. New primal-dual interior methods based on kernel functions. Certificat d'études approfondies mathématiques. Université Mohammed V, Rabat, Marokko 2005.

[10] M.S. Gowda, Y. Song. On semidefinite linear complementarity problem. Mathematical Programming. Series A, (88) pp 575-587, (2000).

[11] M.S. Gowda, T.Pathasarathy, complementarity forms of the theorems of Lyapunov and Stein, and related results. Linear algebras and its applications (320) pp 131-144, (2000).

[12] M.S. Gowda, Y. Song and G. Ravindran. On some interconnections between strong monotonicity, GUS and P properties in semidefinite linear complementarity problems. Linear algebras and its applications (370) pp 355-386, (2003).

[13] M.S. Gowda, Y. Song. Some new results for the semidefinite linear complementarity problem. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 24(1) pp 25-39, (2003).

[14] R. Hauser. Nesterov-Todd directions are Newton directions. Numerical analysis report. Departement of applied mathematics and theoretical physics, silver street, Cambridge, England CB3 9EW. (1999).

[15] R. A. Horn and C.R, Johonson. Topics in Matrix Analysis. Cambridge university Press, 1991.

[16] S. Karamardian. The complementarity problem. Mathematical Programming 2 (1972).

[17] M.Kojima, S. Kojima, and S. Hara, linear algebra for semidefinite programming. Research Report B-290, Dept. of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo. Institute of Technology, Oh-Okayama, Meguro, Tokyo 152, Japan, RIMS Kokyuroku to appear.revised (1996).

[18] M.Kojima, M. Shida, S. Shindoh, Searche direction in the SDP and the monotone SDLCP ; generalization and inexact computation. Research Report B-327, Dept.

of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo. Institute of Technology, Oh-Okayama, Meguro, Tokyo 152, Japan, March (1997).

[19] M. Kojima, M. Shindoh, and S. Hara. Interior point methods for the monotone semidefinite linear complementarity in symetric matrices. *SIAM J. Optimization*, (7) pp 86-125, (1997).

[20] E. Kallel. Une synthèse sur les méthodes du point interieur. Mémoire pour l'obtention du grade de maître ès science. Université de Sherbbrooke, Québec, Canada 1998.

[21] N.G.B.Krislock, Numerical solution of semidefinite constrained least squares problems. Master of science. The university of british colombia, Canada (2003).

[22] Z. Liu and W. Sun. An infeasible interior-point algorithms with full-Newton step for linear optimization. Numer. Algor. (46) pp. 173-188.(2007).

[23] Z. Liu and W. Sun. Polynomial complexity of primal-dual interior point methods for convex quadratic programming . To appear in Applied mathematics and cxomputation.2008.

[24] M. Malik and S.R. Mohan. Some geometrical aspects of semidefinite linear complementarity problems. Linear and multilinear algebras , 54(1) pp 55-70, (2006).

[25] R. D. C. Monteiro and T. Tsuchiya. Polynomial convergence of a new family of primal-dual algorithms for semidefinite programming. Research Memorandum No. 647, the institute of statistical mathematics, Tokyo, 106, Japan, (to appear in SIAM journal on optimization). (1996).

[26] R. D. C. Monteiro. Polynomial convergence of primal-dual algorithms for semidefinite programming based on Monteiro and Zhang family of directions. SIAM Journal on optimization, 8 pp 797-812 (1998).

[27] R. D. C. Monteiro and Y. Zhang, A unified analysis for a class of path-following primal-dual interior-point algorithms for semidefinite programming. Mathematical programming 81 pp 281-299 (1998).

[28] R. D. C. Monteiro and T. Tsuchiya. Polynomiality of primal-dual algorithms for semidefinite linear complementarity problems based on the Kojima-Shindoh-Hara family of directions. Math. Program. 84 : pp 39-53, Springer. verlag (1999).

[29] K.G. Murty. Linear complementarity, linear and nonlinear programming. Heldermann Verlag, Berlin, (1988).

[30] Y. Nestrov and M.Todd. Self-scaled berrires and interior point methods for convex programming. Mathematics of operations Reseach, Vol.22 (1) : pp1-42, (1997).

[31] Y.E.Nesterov and M.J.Todd. Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones. SIAM J. Optimization, (8) pp 324–364, (1998).

[32] J.Peng, C.Roos, and T.Terlaky. New complexity analysis of the primal-dual Newton method for linear optimization. Technical report No.98-05, faculty of technical mathematics and informatics, Delft university of technology, the Netherlands. To appear in annals of operations research.(1998)

[33] J.Peng, C.Roos, and T.Terlaky. New complexity analysis of primal-dual Newton methods for $P_*(k)$ linear complementarity problem. Manuscript (1998).

[34] J.Peng, C.Roos, and T.Terlaky. New complexity analysis of the primal-dual Newton method for semidefinite optimization based on the Nestrov-Todd direction. Journal of optimization theory and application. Vol (109) (2) pp. 327-343. (2001).

[35] J. Peng, C. Roos, and T. Terlaky. Self-regular proximities and new search directions for linear and semidefinite optimization. Math. Programming. Accepted (2000).

[36] J.Peng, C.Roos, and T.Terlaky. A new and efficient large-update interior point method for linear optimization.Vychist.Tekhnol.(6) pp. 61-80.(2001).

[37] J. Peng, C. Roos, and T. Terlaky. Self-regularity : A new paradigm for primal-dual interior point algorithms. Princeton University Press, Princeton, NJ, (2002).

[38] J. Peng, C. Roos, and T. Terlaky. A new class of polynomial primal-dual methods for linear and semidefinite optimization. European J.Oper. Res. 143 , pp.234-256, (2002).

[39] T. Parthasarthy, D.S. Raman and B. Sriparna. Relationship between strong monotonicity property , P2-property, and the GUS-property in semidefinite linear complementarity problems. Mathematics of Operations reseach, 27 (2) pp 326-331, (2002).

[40] C.Roos, T.Terlaky and J. Ph. Vial. Theory and algorithms for linear optimization. An interior point approach. john Wiley and sons, chichester, UK. (1997).

[41] J.F. Sturm, S. Zhang. Symmetric primal-dual path-following algorithms for semidefinite programming, Technical report 9554/A, Tinbergen Institute, Erasmus University, Rotterdam, The netherlands, (1995).

[42] Y. Song. The P and globally uniquely solvable properties in semidefinite linear complementarity problem. Phd thesis, the university of Maryland, USA, (2000).

[43] J. Tao and M. S. Gowda. Some P-properties for nonlinear transformations on euclidean Jordan algebras. Mathematics of operations research. Vol, 30, No 4, pp 985-1004. (2005).

[44] M.J.Todd. Semidefinite optimization. Cambridge University Press, Acta Numerica 10, PP 515-560 (2001).

[45] S.J. Wright. Primal-dual interior point methods. SIAM, Philadelphia, USA, (1997).

ملخص

نقدم في هذه الأطروحة دراسة نظرية و عددية خاصة بمسألة التتام الخطية المعرفة التي كانت موضوع العديد من الدراسات في السنوات الأخيرة.
في الواقع, نقدم في الجزء الأول, ملخص يتعلق بأهم الأعمال المرتبطة بهذه المسألة. العرض قدم بطريقة تجعل المعلومات المستعملة لهذه المسألة مفهومة و تسمح للوصول لنتائج جديدة.

في الجزء الثاني, أجريت دراسة عددية أين نعرض طريقة نيوتن للمسار المركزي للنقاط الداخلية من الصنف أولي-مرادف لحل مسألة التتام الخطية المعرفة الرتيبة. نثبت أن الخوارزمية ذات تعقيد حدودي.

الكلمات المفتاحية

مسألة التتام الخطية المعرفة موجبة, طرق النقاط الداخلية, الخوارزميات الأولي-المرادف المسار المركزي, تعقيد الخوارزمي.

Résumé

Dans cette thèse, nous présentons une étude théorique et algorithmique concernant le problème de complémentarité linéaire semi-défini (PCLSD) qui a fait l'objet de plusieurs recherches ces dernières années.

En effet, on présente dans une première partie, une synthèse sur les principaux travaux liés à ce dernier. La présentation est donnée de façon à rendre le bagage utilisé pour ce problème compréhensible et permettant de nouveaux développements.

Dans la deuxième partie, une étude algorithmique est faite où on présente une méthode Newtonienne de trajectoire de points intérieurs de type primal-dual pour résoudre le (PCLSD) monotone. On montre que l'algorithme correspondant admet une complexité polynomiale.

Mots clés: Problème de complémentarité linéaire semi-défini; méthodes de points intérieurs; algorithmes primal-dual de trajectoire; complexité polynomiale des algorithmes.

Abstract

In this thesis, we present a theoretical and an algorithmic study for the semidefinite linear complementarity problem which has made the object of many researchers in this last years.

Indeed, we present in a first part, a synthesis of principal works linked with this problem. The presentation is given so as to make the used knoweldge for this problem understandable and allowed new developments.

In the second part, an algorithmic study is done where we present a Newtonian primal-dual path-following interior point method to solve monotone (SDLCP). We prove that the corresponding algorithm has a polynomial complexity.

Keywords : The linear semidefinite complementarity problem; interior point methods; primal-dual path-following algorithms; polynomiale complexity of algorithms