RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Hadj Lakhdar Batna

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée par

GUERARRA SIHEM

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité: MATHÉMATIQUES

THÈME

LES PROPRIÉTÉS MINIMALES DES INVERSES GÉNÉRALISÉS

Soutenue le : 25 / 02 / 2016

Devant le jury :

N. Lemnouar	Pr.	Président	Université de Batna
S. Guedjiba	Pr.	Encadreur	Université de Batna
A.H. Ayadi	Pr.	Examinateur	Université de O/ Bouaghi
A.O. Kadem	Pr.	Examinateur	Université de Setif
A. Seddik	M.C.A	Examinateur	Université de Batna
H. Zekraoui	M.C.A	Examinateur	Université de O/ Bouaghi

Remerciements

Je remercie DIEU tout puissant de m'avoir donné la force et le courage pour completer ce travail

Je tiens à exprimer mes profondes gratitudes et mes vifs remerciements à mon encadreur le Professeur : Said Guedjiba qui m'a proposé ce travail et qui n'a pas cessé de me consacrer de son temps chargé et de ses présieux conseils pendant la durée de cette recherche, ainsi que le Professeur : N. Lemnouar qui a accepté d'examiner cette thèse et de présider le jury de soutenance

Je tiens aussi à remercier les membres de jury de m'avoir honoré par leur présence pour discuter ce travail.

À mes parents

À mon mari

À mes frères

À mes enfants : Mohamed el amine

Ayat errahmane

Israâ

Table des Matières

0.1 Introduction

En 1920, E. H Moore a introduit la notion d'inverse généralisé d'une matrice. Cette notion d'inverse généralisé reformulée par M. Penrose en 1955, où il a donné un outil trés puissant pour la résolution d'un système d'équations linéaires.

La théorie des inverses généralisés a ses racines génétiques essentiellement dans le cadre des problèmes linéaires interprétés par une équation du type $Ax = b$, Où A est une transformation linéaire. Pour que l'équation proposée admette une solution pour x, il est nécessaire que A possède un inverse, et comme ce n'est pas toujours le cas, il peut être souhaitable de chercher une matrice possèdant des propriétés trés proches de celle de l'inverse, ce qui a été énoncé par M. Penrose en intoduisant une matrice A^+ verifiant les quatre équations suivantes :

$$(1) AXA = A, \ (2) XAX = X, \ \ (3) \, (AX)^* = AX, \ \ \text{et } (4) \, (XA)^* = XA.$$

Ainsi les systèmes d'équations linéaires connaissent l'apparition de la solution approchée comme : "la solution à moindres carrées", "la solution à norme minimale", "la solution à moindres carrées et à norme minimale", "la solution à rang minimal". La mojorité des propriétés de l'inverse généralisé ont été traitées dans les livres, voir [2], [3], [8], [19], [20], [32].

Donc, un inverse généralisé de la matrice A est une matrice ayant quelques propriétés de la matrice inverse de A (quand A est inversible). Le but de la construction de l'inverse généralisé est d'obtenir une matrice qui peut servir comme l'inverse en quelque sorte pour une classe de matrices plus large que celles des matrices inversibles. Autrement dit, l'inverse généralisé existe pour une matrice arbitraire, et quand une matrice est inversible, alors son inverse coincide avec son inverse généralisé.

L'une des équations linéaires les plus connues dans la théorie des matrices est l'équation matricielle

$$AXB = C \tag{1}$$

où A, B et C sont connues et X est inconnue.

Résoudre des équations matricielles est l'un des problèmes principaux du calcul matriciel. De nombreuses techniques ont été proposées et développées pour étudier des équations matricielles, par exemple, si l'équation matricielle (1) n'est pas consistente, les chercheurs essaient souvent de trouver ses solutions approximées qui satisfont certains critères optimaux.

L'une des solutions approximées les plus utilisées de (1) est "*la solution à moindres carrées*", qui est définie comme étant une matrice X qui minimise la norme de la différence $AXB - C$, c-à-d $\|AXB - C\|_F = \min$. Une autre solution approximées moins utilisée par rapport à celle des moindres carrées, est "*la solution à rang minimal*" de (1) qui est définie comme étant une matrice X qui minimise le rang de la différence $AXB - C$, c-à-d $r(AXB - C) = \min$. Le concept de *la solution à rang minimal* d'équations matricielle a été proposé dans [27], [30], par Yongge Tian dans l'étude du rang minimal de la fonction matricielle linéaire $C - AXB$. De toute évidence, la solution à moindres carrées, la solution à rang minimal et la solution ordinaire de (1) toutes coïncident si (1) est consistente. Dans la litterature on rencontre l'étude de cette équation et ses applications, par exemple [15], [16], [17], S. K. Mitra, A. Navarra, P. L. Odell, D. M. Yong, ont étudié la solution commune de la paires d'équations $A_1X_1B_1 = C_1$, $A_2X_2B_2 = C_2$, et ils ont donné la représentation de cette solution commune.

Au cours des deux dernières décennies, de nombreuses recherches ont été traitées la résolution des problèmes de minimisation de rang associés aux équations matricielles et de leurs solutions qui se produisent dans les disciplines théoriques et appliquées, parce que la résolution des problèmes d'optimisation de rang est très difficile, sous les positions différentes des matrices inconnues, dans les expressions matricielles. Heureusement, les problèmes d'optimisation (max-min) sur le rang de $C - AXB$ peuvent être résolus algébriquement en utilisant des décompositions de matrices et de leurs inverses généralisées.

Le rang et l'inertie d'une matrice sont deux concepts de base de la théorie des matrices pour décrire la dimension des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs colonnes ou les vecteurs lignes, et la répartition des valeurs propres selon leurs signes afin de calculer l'inertie d'une matrice, qui est une opération simple en utilisant les opérations élémentaires et de congruence d'une matrice en blocs. Ces deux quantités jouent un rôle essentiel dans la caractérisation des propriétés algébriques des matrices hermitiennes. En fait, le rang et l'inerties de matrices hermitiennes ont été l'objet principal d'étude des solution hermitiennes définies positives et définies non négatives d'une équation matricielle non symetrique. voir [1], [5], [9], [11].

La thèse se compose de quatre chapitres, dans le premier chapitre on a commencé par donner des notions préléminaires, et vu que l'inverse de Moore-Penrose est l'outil le très important tout au long de ce travail, on a tenu de rappeler ses propriétés algébriques et son rôle dans la résolution d'équations linéaires.

Dans le deuxième chapitre nous établissons plusieurs formules de rang pour les expressions matricielles qui font intervenir l'inverse de Moore-Penrose. Ces formules de rang sont considérées comme des outils de base pour développer le contenu des chapitres suivants, nous utilisons la méthode de rang de la matrice pour déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour les quelles les équations matricielles $A_1XB_1 = C_1$ et $A_2XB_2 = C_2$ ont une solution commune à rang minimal. En plus nous avons donné l'expression de la solution générale commune à rang minimal de (1), aussi nous avons obtenu des conditions nécessaires et suffisantes pour les quelles la solution à rang minimal de l'équation matricielle $AXB = C$ soit hermitienne, et donné l'expression de la solution hermitienne générale à rang minimal de $AXB = C$.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse aux formules concernant l'inertie de matrices hermitiennes partitionnées, on s'intéresse aussi aux rang et à l'inertie de certaines expressions matricielles pour déterminer une solution hermitienne à rang minimal de (1) soumise à des restrictions d'inégalités. En particulier, on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution hermitienne définie (positive, négative, non-positive, nonnégative) à rang minimal de (1). Où nous étudions les inégalités $X \succ P$ ($\geq P$, $\prec P$, $\leq P$), en déterminant l'inertie maximale et minimale de $P - X$, où $P \in \mathbb{C}_H^n$ est donnée.

Enfin dans le quatrième chapitre, on a étudié une nouvelle équation matricielle: $AXA^* = B$, où X est inconnue, en cette étude, on s'intéresse à des formules de rang ce qui nous permet d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes pour les quelles, la paire d'équations matricielles $A_1XA_1^* = B_1$ et $A_2XA_2^* = B_2$ ait une solution hermitienne commune à rang minimal.

Aussi, nous étudions l'existence d'une matrice hermitienne définie (positive, négative, nonpositive, nonnégative) à rang minimal, par l'étude d'inégalités $X \succ P \, (\geq P, \ \prec P, \ \leq P)$ où $P \in \mathbb{C}_H^n$ est donnée.

0.2 Notations

$\mathcal{F}$: Le corps des nombres réels ou complexes.

$\mathbb{C}^{m\times n}$: l'espace des matrices du type $m\times n$ sur $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}^{m\times n}$: l'espace des matrices du type $m\times n$ sur $\mathbb{R}$.

$\mathbb{C}_H^n$: l'espace des matrices hermitiennes d'ordre n sur $\mathbb{C}$.

I_n : la matrice identique d'ordre n.

A^{-1} : l'inverse ordinaire de A.

A^- ou $A^{(1)}$: l'inverse généralisé de A.

A^+ : l'inverse de Moore-Penrose de A.

$r(A)$: le rang de A.

$N(A)$: le noyau de A.

$R(A)$: l'image de A.

A^T : le transposé de A.

A^* : l'adjoint de A.

$In(A) = \{i_+(A), i_-(A), i_0(A)\}$: l'inertie de A.

$i_+(A)$: le nombre de valeurs propres positives de A.

$i_-(A)$: le nombre de valeurs propres négatives de A.

$i_0(A)$: le nombre de valeurs propres nulles.

$E_A = I - AA^+$,

$F_A = I - A^+A$, (E_A, F_A: les projections orthogonales)

$\|A\|_F$: la norme de *Frobinius.*

$\langle\ ,\ \rangle$: le produit scalaire.

Chapitre 1

Préléminaires

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Transformations linéaires

Dans cette section, $\mathcal{F}$ désigne le corps des nombres réels ou complexes.

Définition 1.1 *Soient* V *et* W *deux espaces vectoriels sur le corps* $\mathcal{F}$*, et soit* $f : V \longrightarrow W$ *une application. Alors* f *est dite linéaire si elle satisfait les deux conditions:*

• *pour tous vecteurs* $v_1,\ v_2 \in V;\ f\left(v_1 + v_2\right) = f\left(v_1\right) + f\left(v_2\right).$

• *pour tout vecteur* $v \in V$ *et scalair* $t \in \mathcal{F};\ f\left(tv\right) = tf\left(v\right).$

On note $\mathcal{L}\left(V, W\right)$, l'ensemble des transformation linéaires de V dans W sur $\mathcal{F}$.

Définition 1.2 *Soit* $f : V \longrightarrow W$ *une transformation lineaire*

1) Le noyau (ou l'espace nul) de f *est le sous ensemble de* V *noté* $N\left(f\right) \subset V$

$N\left(f\right) = \left\{v \in V,\ f\left(v\right) = 0\right\}$

2) L'image de f est le sous ensemble de W noté $R(f) \subset W$

$R(f) = \{w \in W,\, \exists v \in V,\, f(v) = w\}$

1.1.2 Matrices associées aux applications linéaires entre les espaces vectoriels de dimensions finies

Soient V et W deux espaces vectoriels de dimensions finies n et m respectivement sur le corps $\mathcal{F}$, $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire, et soient $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ deux bases de V et W respectivement.

Définition 1.3 *On appelle matrice de l'application f dans les bases $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ et $\{u_j\}_{j=\overline{1,m}}$, la matrice notée $M(f)_{e_i,u_j}$, appartenant à $\mathcal{F}^{m\times n}$, dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$,...,$f(e_n)$ dans la base $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$.*

En particulier, $\mathbb{C}^{m\times n}$ $(\mathbb{R}^{m\times n})$ désignent l'ensemble de $m \times n$ matrices complexes (réelles).

Une matrice $A \in \mathcal{F}^{m\times n}$ est carrée si $m = n$, rectangulaire autrement.

Proposition 1.1 *L'application*

$$M : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow \mathcal{F}^{m\times n}$$

$$f \longmapsto M(f)_{e_i,u_j}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On a donc pour toutes les applications linéaires f et g de V dans W, et pour tout $\lambda \in \mathcal{F}$:

$M(f+g) = M(f) + M(g)$.

$M(\lambda f) = \lambda M(f)$.

et M est bijective.

Définition 1.4 *Soit la matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,*

- *le transposé de A est la matrice $A^t \in \mathbb{C}^{n\times m}$ avec $A^t[i,j] = A[j,i]$, pour tout i, j.*
- *l'adjoint de A est la matrice $A^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ avec $A^*[i,j] = \overline{A[j,i]}$, pour tout i, j.*

Définition 1.5 *1) Une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dite*

- *symetrique si $A^t = A$.*
- *anti-symetrique si $A^t = -A$.*
- *orthogonale si $A^t = A^{-1}$.*

2) Une matrice carrée $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est dite

- *hermitienne (auto-adjoint)si $A^* = A$.*
- *anti-hermitienne si $A^* = -A$.*
- *unitaire si $A^* = A^{-1}$*

Proposition 1.2 *1) Pour toutes matrices $A \in \mathcal{F}^{l\times m}$ et $B \in \mathcal{F}^{m\times n}$, $(AB)^t = B^t A^t$.,*

2) Pour toutes matrices $P \in \mathbb{C}^{l\times m}$ et $Q \in \mathbb{C}^{m\times n}$; $(PQ)^* = Q^* P^*$.

1.1.3 Matrice partitionnée

Définition 1.6 *Une matrice en blocs ou une matrice partitionnée est une matrice qui est interprétée comme ayant été divisée en sections appelées blocs ou sous-matrices. Intuitivement, une telle matrice peut être visualisée comme la matrice originale avec une collection de lignes horizontales et verticales qui la partitionnent, en une collection de petites matrices.*

Toute matrice peut être représentée comme une matrice en blocs sous une ou plusieures formes, avec chaque interprétation définie par la manière dont les lignes et les colonnes sont partitionnées

Exemple 1.1 *La matrice* $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$*, peut être divisée en :*

$P_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $P_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $P_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $P_{22} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$

la matrice partitionnée peut alors s'écrire $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$.

1.1.4 Norme de *Frobinius*

Définition 1.7 ***(Trace d'une matrice carrée)*** *Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients a_{ij} dans $\mathcal{F}$, on appelle trace de A, et on note $tr\,(A)$, la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ des coefficients diagonaux de A.*

Définition 1.8 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, on définit la norme matricielle de Frobinius notée par $\|A\|_F$*

$$\|A\|_F = (trace\ A^*A)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

1.1.5 Les valeurs propres d'une matrice

Définition 1.9 *Si* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$, *et* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tels que* $Ax = \lambda x$, *alors* λ *est une valeur propre de* A *associée au vecteur propre* x. *l'ensemble des valeurs propres de* A *est appelé le spectre de* A *et on a noté* $\lambda(A)$.

Si λ *est une valeur propre de* A, *le sous espace* $\{x \in \mathbb{C}^n,\ Ax = \lambda x\}$ *est appelé le sous espace propre de* A *associé à* λ, *sa dimension est appelée la multiplicité géometrique de la valeur propre* λ.

Proposition 1.3 *Si* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *est Hermitienne, alors*

i) les valeurs propres de A *sont réelles,*

ii) les vecteurs propres associés aux valeurs propres differentes sont orthogonaux.

1.1.6 Les matrices définies positives et définies négatives

Définition 1.10 *1) Une matrice hermitienne* $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *est dite definie positive si* $\langle Hx, x\rangle \succ 0$, *pour tout* $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ *ou d'une manière équivalente : ses valeurs propres sont strictement positives.*

2) Une matrice hermitienne $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *est dite definie négative si* $\langle Hx, x\rangle \prec 0$, *pour tout* $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ *ou d'une manière équivalente : ses valeurs propres sont strictement négatives.*

3) Une matrice hermitienne $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *est dite positive (définie non négative) si* $\langle Hx, x\rangle \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{C}^n$ *ou d'une manière équivalente : ses valeurs propres sont non négatives*

4) Une matrice hermitienne $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *est dite négative (définie non positive) si* $\langle Hx, x\rangle \leq$

0 *pour tout* $x \in \mathbb{C}^n$ *ou d'une manière équivalente : ses valeurs propres sont non positives*

1.1.7 Rang d'une matrice

Définition 1.11 *1) Soit* $\{v_i\}_{i \in I}$ *une famille de vecteurs. On appelle rang de la famille* $\{v_i\}$*, la dimension de l'espace engendré par cette famille.*
2) Soit $A \in \mathcal{F}^{m \times n}$*. On appelle rang de* A*, le rang de la famille formée par les vecteurs colonnes de* A*, c'est aussi le rang de famille formée par les vecteurs lignes*

Le rang d'une matrice est l'un des concepts les plus importants, le rang de la matrice A, noté $r(A)$, et on a $r(A) = 0$ si et seulement si $A = 0$.

1.1.7.1) Factorization à rang complet

Proposition 1.4 *Soit* $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ *de rang* r *,* $r \neq 0$ *. Alors, il existe des matrices* $B \in \mathbb{C}^{m \times r}$*,* $C \in \mathbb{C}^{r \times n}$ *telles que* $r(B) = r(C) = r$ *et* $A = BC$*.*

cette décomposition est appelée une factorisation à rang complet de la matrice A

Preuve. Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ de rang r, soit $\{b_1, b_2, ..., b_r\}$ une base de $R(A)$, soit $B \in \mathbb{C}^{m \times r}$ dont les vecteurs colonnes sont $b_1, b_2, ..., b_r$ donc $r(B) = r$. Pour une matrice $C \in \mathbb{C}^{r \times n}$, chaque vecteurs lignes de A est une combinaison linéaire des vecteurs lignes de C d'où on peut écrire: $A = BC$ pour une matrice $C \in \mathbb{C}^{r \times n}$, donc $r(C) \leq r$, d'aprés la proprités $r(BC) \leq \min(r(B), r(C))$, on a $r = r(A) \leq r(C)$, par conséquent $r(C) = r$. ■

Proposition 1.5 *Soient* A*,* $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ *. Alors,*
i) $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$*,*
ii) $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$*.*

Preuve. i) Un vecteur de $R(AB)$ est de la forme ABx pour un certain vecteur x, et par conséquent, il appartient à $R(A)$. Donc $R(AB) \subset R(A)$, en conséquence $r(AB) = \dim R(AB) \leq \dim R(A) = r(A)$. Maintenant, en utilisant ce fait nous avons : $r(AB) = r(B^*A^*) \leq r(B^*) = r(B)$.

ii) Soient $A = XY$, $B = UV$ les factorizations à rang complet de A et B respectivement. Alors , $A + B = XY + UV = [X, U] \begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}$

par conséquent et d'apres i) $r(A + B) \leq r[X, U]$

soient $\{x_1, ..., x_p\}$ et $\{u_1, ..., u_q\}$ des bases pour $R(X)$ et $R(U)$ respectivement. Tout vecteur dans l'espace image de $[X, U]$ peut être écrit comme combinaison linéaire de ces $p + q$ vecteurs. donc $r[X, U] \leq r(X) + r(U) = r(A) + r(B)$.

Par conséquent et d'apres i) $r(A + B) \leq r(X, U)$. ■

1.1.7.2) Les opérations élémentaires sur une matrice en blocs (Elemantary block matrix operations)

Afin de conduire des formules explicites pour le rang de matrices en blocs, nous utilisons les trois types de fonctionnement de la matrice de blocs suivants (abrégée par EBMO)

I) Interchange de deux blocs lignes (colonnes) dans une matrice partitionnée,

II) Multiplier un bloc ligne (colonne) par une matrice non singulière à gauche (à droite) dans une matrice partitionnée,

III) Ajouter à une bloc ligne (colonne) une autre bloc ligne (colonne) multiplié par une matrice appropriée à gauche (droite).

Exemple 1.2 *On effectue des opérations de ligne de typeIII on obtient*
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & B \\ C+XA & D+XB \end{bmatrix},$$
où $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *et* $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$, *notez que* A *est multipliée par* X *à gauche*

1.1.7.3) Les opérations élémentaires sur une matrice en blocs de congruence (Elemantary block congruence matrix operations)

Afin d'établir des formules explicites pour l'inertie d'une matrice hermitienne en blocs, nous utilisons les trois types de fonctionnement de la matrice en blocs de congruence (abrégée par EBCMO) pour une matrice hermitienne en blocs avec la même partition en lignes et en colonnes.

IV) Interchange $i^{ème}$ et $j^{ème}$ bloc ligne, avec l'échange de $i^{ème}$ et $j^{ème}$ bloc colonne de la matrice hermitienne en blocs.

V) Multilplier $i^{ème}$ bloc ligne par une matrice inversible P à gauche, de même que multiplier $i^{ème}$ bloc colonnes par P^* à droite dans la matrice hermitienne en blocs.

VI) Ajouter $i^{ème}$ bloc ligne multiplié par une matrice P à gauche au $j^{ème}$ bloc ligne, de même qu'ajouter $i^{ème}$ bloc colonne multiplié par P^*de la droite au $j^{ème}$ bloc colonnes de la matrice hermitienne en blocs.

Des exemples et propositions sur ces deux types élémentaires sur les matrice en blocs sont traités avec plusieures d'applications dans les chapitres 2, 3 et 4 respectivement .

1.2 L'inverse généralisé des matrices

Considérons le système linéaire

$$Ax = b \tag{1.1}$$

Soit A une matrice carrée d'ordre n, Si A est non singulière, donc $\ker(A) = \{0\}$, alors le vecteur solution x de l'équation linéaire $Ax = b$ est uniquement déterminé par $x = A^{-1}b$. Ici, A^{-1} est appelé la matrice inverse de A. Lorsque $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, l'équation (1.1) a une solution si et seulement si $b \in R(A)$, et si $b \notin R(A)$, il n'y a pas de solution à l'équation (1.1), alors on pose un problème où la solution peut être trouvée à l'aide de la définition suivante :

Définition 1.12 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, une matrice $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ est dite inverse généralisé ou (g-inverse) de la matrice A si $AXA = A$.*

Si A est carrée et non singulière, alors A^{-1} est l'unique inverse généralisé de A, sinon A a plusieures inverses généralisés.

Théorème 1.1 *Soient $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ et $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes*

i) X est un g-inverse de A.

ii) pour tout $b \in R(A)$, $x = Xb$ est une solution de $Ax = b$.

Preuve. i)$\Longrightarrow$ii) $\forall b \in R(A)$, b est de la forme $b = Ay$, pour tel y, alors $A(Xb) = AXAy = Ay = b$.

ii)$\Longrightarrow$i) lorsque $AXb = b$ pour tout $b \in R(A)$, on a $AXAy = Ay$ pour tout y, donc $AXA = A$. ■

Définition 1.13 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, une matrice $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ est dite inverse généralisé reflexif de la matrice A, si elle satisfait les deux conditions:* $\begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \end{cases}$

A^{-} designe un inverse généralisé reflexive de A.

1.2.1 Propriétés de l'inverse généralisé

Théorème 1.2 *[32] Soit $H = AA^{-}$, $F = A^{-}A$. Alors,:*

1) $H^2 = H$ et $F^2 = F$.

2) $r(H) = r(F) = r(A)$.

3) $r(A^{-}) \geq r(A)$.

4) $r(A^{-}AA^{-}) = r(A)$.

Preuve. 1) Il est clair de la définition de l'inverse généralisé

2) $r(A) \geq r(AA^{-}) = r(H)$, et $r(A) = r(AA^{-}A) = r(HA) \leq r(H)$, d'où on conclut $r(A) = r(H)$

$r(F) = r(A)$ prouvé d'une manière similaire

3) $r(A) = r(AA^{-}A) \leq r(AA^{-}) \leq r(A^{-})$.

4) $r(A^{-}AA) = r(A^{-}A)$, alors $r(A^{-}AA^{-}) = r(A^{-}A) = r(A)$. ■

Exemple 1.3 *Déterminer un inverse généralisé de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.*

soit $A^{-} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

il faut avoir $a + b + c + d = 1$, donc $A^{-} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 - a - b - c \end{bmatrix}$, *où a, b et c sont arbitraires*

1.3 L'inverse généralisé de Moore-Penrose

E. H Moore a introduit la notion d'un inverse généralisé d'une matrice dans l'année 1920. l'application de cette notion à la résolution de systèmes d'équations linéaires a conduit à un grand intérêt pour ce sujet, car depuis 1955, lorsque Penrose a démontré que, pour toute matrice A (carré ou rectangulaire) à éléments réels ou complexes, il existe une matrice X unique satisfaisant les quatre équations,

$$AXA = A \qquad (1)$$

$$XAX = X \qquad (2)$$

$$(AX)^* = AX \qquad (3)$$

$$(XA)^* = XA \qquad (4)$$

Cet unique inverse généralisé, est communément connu sous le nom de Moore-Penrose inverse et est souvent désigné par A^+.

Si A est non singulière, la matrice $X = A^{-1}$ satisfait trivialement les quatre équations, alors l'inverse de Moore- Penrose d'une matrice non singulière est le même que l'inverse ordinaire.

D'aprés les équations (3) et (4) ci-dessus, nous avons $(AA^+)^*(I_n - AA^+) = 0$ et $(A^+A)^*(I_m - A^+A) = 0$, donc $P_A = AA^+$ et $P_{A^+} = A^+A$ sont des projecteurs orthogonaux sur $R(A)$ et $R(A^*)$ respectivement.

Les deux projecteurs AA^+ et A^+A sont auto-adjoints par la définition de A^+

1.3.1 Existence et unicité

1) L'existence

Lemme 1.1 *[2] Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ avec $r(A) = r$, $r \succ 0$, et soit $A = BC$ une factorization à rang complet de la matrice A. Alors*

$$A^{+} = C^{*}\left(B^{*}AC^{*}\right)^{-1}B^{*} \tag{1.2}$$

Preuve. On montre d'abord que $B^{*}AC^{*}$ est non singulière.

De $A = BC$ on a $B^{*}AC^{*} = (B^{*}B)(C^{*}C)$, où $B^{*}B \in \mathbb{C}^{r\times r}$ et $C^{*}C \in \mathbb{C}^{r\times r}$.

d'aprés la proprités de rangs : pour tout matrice finie H, on $r(H) = r(H^{*}H) = r(HH^{*})$, alors on conclut que $r(B) = r(B^{*}B) = r(C^{*}C) = r(C) = r$, ce qui implique que $B^{*}AC^{*}$ est non singuliére puisqu'elle est produit de deux matrices non singulières $B^{*}B$ et $C^{*}C$, alors $(B^{*}AC^{*})^{-1} = (C^{*}C)^{-1}(B^{*}B)^{-1}$, par la substitution dans (1.2) on trouve une matrice $K = C^{*}(C^{*}C)^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$.

On remarque que la matrice K satisfait les quatres équations de Moore-Penrose. Alors A^{+} existe et $A^{+} = C^{*}(B^{*}AC^{*})^{-1}B^{*}$. ■

2) L'unicité

On suppose que X_1 et X_2 sont deux inverse de Moore-Penrose de A, alors d'aprés la définition de A^{+} on a :

$$X_1 = X_1(AX_1) = X_1X_1^{*}(A^{*}) = X_1X_1^{*}A^{*}(X_2^{*}A^{*})$$

$$= X_1(X_1^{*}A^{*})AX_2 = X_1(AX_1A)X_2 = X_1(A)X_2$$

$$= X_1 (AX_2A) X_2 = (X_1A) A^* X_2^* X_2 = (A^* X_1^* A^*) X_2^* X_2$$

$$= (A^* X_2^*) X_2 = X_2AX_2$$

$$= X_2$$

1.3.2 Propriétés principales de l'inverse généralisé de Moore-Penrose

Théorème 1.3 *[3] Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Alors,*

1) $(A^+)^+ = A$.

2) $(A^+)^* = (A^*)^+$.

3) si $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+$ où $\lambda^+ = \dfrac{1}{\lambda}$ si $\lambda \neq 0$, et $\lambda^+ = 0$ si $\lambda = 0$.

4) $A^* = A^*AA^+ = A^+AA^*$.

5) $(A^*A)^+ = A^+ (A^*)^+$.

6) $A^+ = (A^*A)^+ A^* = A^* (AA^*)^+$.

7) $(UAV)^+ = V^*A^+U^*$, où U, V sont des matrices arbitraires.

Théorème 1.4 *[3] Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, alors*

1) $R(A) = R(AA^+) = R(AA^*)$.

2) $R(A^+) = R(A^*) = R(A^+A) = R(A^*A)$.

3) $R(I - AA^+) = N(AA^+) = N(A^*) = N(A^+) = R(A)^\perp$.

4) $R(I - A^+A) = N(A^+A) = N(A) = R(A^*)^\perp$.

Nous avons besoin d' une notation pratique pour un inverse généralisé satisfaisant certaines équations spécifiées

Définition 1.14 *Pour toute $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A\{i, j,...,k\}$ désigne l'ensemble des matrices $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$, qui satisfont les équations (i), (j),..., (k) parmi les équations (1)-(4).*

Une matrice $X \in A\{i,\ j,...,k\}$ *est appelée* $\{i,\ j,...,k\}$ *−inverse de* A *et aussi notée par* $A^{(i,\ j,...,k)}$ *.*

En particulier, une matrice $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ de l'ensemble $A\{1\}$ est appelé un g -inverse de A et désignée par $A^{(1)}$. Ainsi, dans la suite nous noterons $A^{(1)}$ pour un inverse généralisé de A au lieu de A^{-}.

1.3.3 L'inverse généralisé et les équations linéaires

Dans cette section on représente des solutions aux équations linéaires en termes de l'inverses généralisés des matrices.

Corollaire 1.1 *[2] Soit* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^{m}$. *Alors l'équation* $Ax = b$ *est consistente si et seulement si* $AA^{(1)}b = b$, *dans ce cas la solution générale est donnée par*

$$x = A^{(1)}b + \left(I - A^{(1)}A\right)y, \tag{1.3}$$

où $y \in \mathbb{C}^{n}$ *est arbitraire.*

Preuve. La condition suffisante, c'est évident.

La condition nécessaire peut être démontrée par la substitution de $Ax = b$ dans $AA^{(1)}Ax = Ax$. ■

La caractérisation suivante de l'ensemble $A\{1\}$, en termes d'un élément arbitraire $A^{(1)}$ de cette ensemble.

Corollaire 1.2 *[2] Soit* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A^{(1)} \in A\{1\}$. *alors*

$$A\{1\} = \left\{A^{(1)} + Z - A^{(1)}AZAA^{(1)},\ Z \in \mathbb{C}^{n\times m}\right\} \tag{1.4}$$

1.3.4 Caractérisation de $A\{1,3\}$ et $A\{1,4\}$

Rappelons que X est un élément de l'ensemble $A\{1,3\}$ si X verifie les équations (1) et (3) parmi les quatres équations de Penrose c-à-d, $\begin{cases} AXA = A \\ (AX)^* = AX \end{cases}$

Aussi, X est un élément de l'ensemble $A\{1,4\}$ si X verifie les équations (1) et (4) parmi les quatres équations de Penrose c-à-d, $\begin{cases} AXA = A \\ (XA)^* = XA \end{cases}$

Théorème 1.5 *L'ensemble $A\{1,3\}$ se compose de toutes les solutions pour X.*

$$AX = AA^{(1,3)}, \tag{1.5}$$

où $A^{(1,3)}$ est un élément arbitraire de $A\{1,3\}$.

Preuve. Si X satisfait (1.5),donc $AXA = AA^{(1,3)}A = A$,

de plus, AX est hermitienne car $AA^{(1,3)}$ est hermitienne par définition, donc $X \in A\{1,3\}$.

D'autre part si $X \in A\{1,3\}$ donc $AA^{(1,3)} = AXAA^{(1,3)} = (AX)^* AA^{(1,3)} = X^*A^* \left(A^{(1,3)}\right)^* A^* =$

$X^*A^* = AX$,

où on a utilisé la propriétes $\left(A^{(1)}\right)^* \in A^*\{1\}$. ■

Corollaire 1.3 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$. Alors*

$$A\{1,3\} = \left\{A^{(1,3)} + \left(I - A^{(1,3)}A\right)Z,\ Z \in \mathbb{C}^{n\times m}\right\} \tag{1.6}$$

Théorème 1.6 *L'ensemble $A\{1,4\}$ est constitué de toutes les solutions pour X*

$$XA = A^{(1,4)}A. \tag{1.7}$$

Corollaire 1.4 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$. Alors*

$$A\{1,4\} = \left\{A^{(1,4)} + Y\left(I - AA^{(1,4)}\right),\ Y \in \mathbb{C}^{n\times m}\right\}. \tag{1.8}$$

1.3.5 Les solutions à moindres carrées d'un système linéaire non consistent

Pour la matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, et le vecteur $b \in \mathbb{C}^m$, le système linéaire

$$Ax = b$$

est consistent c'est à dire a une solution pour x, si et seulement si $b \in R(A)$. Autrement dit, le vecteur résidu,

$$r = b - Ax$$

est différent de zéro pour tous les $x \in \mathbb{C}^n$, et il peut être souhaitable de trouver une solution approximée de $Ax = b$, c-à-d: trouver un vecteur x de telle sorte que le vecteur résidu r est minimisé. Une solution approximée qui est souvent utilisée en particulier dans les applications statistiques est la solution à moindres carrées de $Ax = b$, qui définie par:

Définition 1.15 *Supposons que $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{C}^m$ alors le vecteur $u \in \mathbb{C}^n$ est appelé la solution à moindres carrées de $Ax = b$, si et seulement si $\|Au - b\| \leq \|Av - b\|$ pour tout $v \in \mathbb{C}^n$.*

Définition 1.16 *Un vecteur u est appelé solution à moindre carrées et à norme minimale de $Ax = b$ si u est une solution à moindre carrées de $Ax = b$ et $\|u\| \leq \|w\|$, pour toutes les autres solutions à moindres carrées w.*

Si $b \in R(A)$, alors les notions de "solution" et "solution à moindre carrées" coïncident évidemment.

Le théorème suivant montre que $\|Ax - b\|$ est minimisée par le choix de $x = Xb$, où $X \in A\{1,3\}$. Ainsi on établit une relation entre les $\{1,3\}$-inverses et les solutions à moindres carrés de $Ax = b$.

Théorème 1.7 *[2] Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, $\|Ax - b\|$ est minimisée lorsque $x = A^{(1,3)}b$. où $A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$. Inversement si $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ a la propriété que, pour tout b, $\|Ax - b\|$ est minimisée lorsque $x = Xb$, alors $X \in A\{1,3\}$.*

Corollaire 1.5 *Un vecteur x est la solution à moindre carrées de $Ax = b$ si et seulement si $Ax = P_{R(A)}b = AA^{(1,3)}b$.*

Dans ce cas, la solution générale à moindre carrées est

$$x = A^{(1,3)}b + \left(I_n - A^{(1,3)}A\right)y \tag{1.9}$$

avec $A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$ et $y \in \mathbb{C}^n$ est arbitraire.

1.3.6 La solution à norme minimale

Lorsque le système $Ax = b$ possède plusieurs solutions pour x, il existe une solution unique de norme minimale.

Lemme 1.2 *[2] Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Alors, A transforme injectivement $R(A^*)$ dans $R(A)$.*

Corollaire 1.6 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$. Alors, il exist une solution unique de*

$$Ax = b$$

donnée comme solution unique de $Ax = b$ appartenant à $R(A^*)$.

Preuve. D'aprés le lemme 1.1, l'équation $Ax = b$ a une solution unique x_0 dans $R(A^*)$. Maintenant la solution générale est donnée par $x = x_0 + y$, $y \in N(A)$.

puisque $N(A) = R(A^*)^{\perp}$, donc $\|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \|y\|^2$. cela prouve que $\|x\| \succ \|x_0\|$ à moins que $x = x_0$. ■

Le théorème suivant représente la relation entre la solution à norme minimale de $Ax = b$ et $\{1, 4\}$-inverses de A.

Théorème 1.8 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, si $Ax = b$ a une solution pour x, la solution unique pour la quelle $\|x\|$ est minimisée est donnée par $x = A^{(1,4)}b$, où $A^{(1,4)} \in A\{1, 4\}$. Inversement, si $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ est tel que, $Ax = b$ a une solution $x = Xb$ qui est la solution à norme minimale, alors $X \in A\{1, 4\}$.*

Preuve. Si $Ax = b$ est consistent, alors pour tout $A^{(1,4)} \in A\{1, 4\}$, $x = A^{(1,4)}b$ est une solution dans $R(A^*)$, et d'aprés le lemme 1.1, x est la solution unique dans $R(A^*)$, et par concéquent x est la solution unique de norme minimale d'aprés le corollaire 1.6. Inversement, soit X tel que pour tout $b \in R(A)$, $x = Xb$ est la solution à norme minimale de $Ax = b$. On pose b égal à chaque vecteur colonne de A, on conclut que $XA = A^{(1,4)}A$, et $X \in A\{1, 4\}$. ■

La solution unique à moindres carrées et à norme minimale de $Ax = b$, et l'inverse de Moore-Penrose A^+ sont liés comme suit

Corollaire 1.7 *[2] Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$. Alors, parmi les solutions à moindres carrées de $Ax = b$, A^+b est la solution de norme minimale.*
Inversement, si $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ a la propriété que pour tout b, Xb est la solution à moindre carrées et à norme minimale de $Ax = b$, alors $X = A^+$.

1.3.7 Les équations normales

Théorème 1.9 *[3] Soient $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, et $b \in \mathbb{C}^m$, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) u est la solution à moindre carrées de $Ax = b$.

ii) u est une solution de $Ax = AA^+b$.

iii) u est une solution de $A^*Ax = A^*b$.

Preuve. D'aprés le corollaire 1.7, i) et ii) sont équivalents.

si i) satisfaite, alors on multiple $Au = b$ à gauche par A^*, nous donne iii). D'autre part on multiple $A^*Au = A^*b$ à gauche par $(A^*)^+$, donne $Au = AA^+b$ donc iii) implique ii). ■

Notons que le système d'équations dans l'assertion iii) ne fait pas intervenir A^+ et il est consistent, ces équations sont appelés les *équations normales* .

Il a été souligné au cours de l' introduction de cette section que si X satisfait $AXA = A$, et $b \in R(A)$, alors Xb est une solution de $Ax = b$. Ainsi, pour les systèmes consistents, un type d'inverses plus faible que l'inverse de Moore-Penrose est suffisant, si $b \notin R(A)$, alors la condition $AXA = A$ n'est pas suffisante pour garantir que Xb est une solution à moindres carrées.

Il existent des matrices X, A et un vecteur b, $b \notin R(A)$, de sorte que $AXA = A$, mais Xb n'est pas une solution à moindres carrées de $Ax = b$.

Exemple 1.4 *Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, si X satisfait $AXA = A$, alors X est de la form $\begin{bmatrix} 1/2 & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$. soit $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, alors d'aprés le théorème 1.9 un vecteur u est une solution* *à moindres carrées de* $Ax = b$*, si et seulement si* $Ax = b_1$ *où* $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$*. Si* u *est une solution à moindres carrées, alors* $\|Au - b\| = \|b_1 - b\| = 1$*. mais* $A(Xb) = \begin{bmatrix} 1 + 2x_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$*. donc* $\|A(Xb) - b\| = \left(1 + 4|x_{12}|^2\right)^{1/2}$*. si* $x_{12} \neq 0$ *alors* $\|A(Xb) - b\| \succ 1$ *et* Xb *ne sera pas une moindres carrées solution de* $Ax = b$*.*

Cet exemple montre également que l'on peut obtenir la solution à moindres carrées de la forme Xb où X n'est pas A^+. Exactement quelles conditions doit verifier X pour garantir que Xb est une solution à moindres carrées ou la solution à norme minimale ou la solution à moindres carrées et à norme minimale de $Ax = b$. La réponse à ces questions est donnée dans le théorème 1.7, le théorème 1.8, et corollaire 1.7.

1.4 L'équation matricielle $AXB = C$

Considérons l'équation matricielle linéaire

$$AXB = C$$

où A, B et C sont des matrices connues de types appropriés, et X est inconnue. L'équation $AXB = C$ est l'une des équations matricielles les plus connues de la théorie des matrices.

Les conditions de la consistence et la solution générale de l'équation $AXB = C$ ont été calculées de manière analytique à l'aide de l'inverse généralisé et le résultat classique suivant a été obtenu

Lemme 1.3 *L'équation* $AXB = C$ *est consistent si et seulement si* $R(C) \subseteq R(A)$ *et* $R(C^*) \subseteq R(B^*)$, *ou d'une manière équivalente,* $AA^+CB^+B = C$. *Dans ce cas, la solution générale est donnée soue la forme parametrique suivante*

$$X = A^+CB^+ + F_AU_1 + U_2E_B \tag{1.10}$$

où U_1, $U_2 \in \mathbb{C}^{n\times p}$ *sont arbitraires.*

En particulier, l'unique solution de l'équation $AXB = C$ *ayant la* $F-$*norme minimale est exprimée comme suit* $X = A^+CB^+$ *où* $F-$*norme désigne la norme de Frobinious .*

Preuve. 1) La condition suffisante

on pose $X = A^+CB^+$ dans $AXB = C$, alors $AA^+CB^+B = C$

2) La condition nécessaire

on multiple $AXB = C$ par AA^+ et B^+B on obtient $AA^+AXBB^+B = AXB = AA^+CB^+B$. ■

Remarquons que (1.10) est donnée sous la forme paramétrique, nous pouvons facilement en tirer des propriétés diverses de la solution à moindres carrées, comme l'unicité, rang maximal et minimal, la norme de la solution à moindres carrées...etc, à titre d'exemple dans [10], Y. H. Liu étudie le rang maximal et minimal de la solution à moindres carrées de l'équation $AXB = C$, dans [18] A.B. Özgüler, N. Akar donnent les conditions nécessaires et suffisantes au paire d'équations $A_1XB_1 = C_1$ et $A_2XB_2 = C_2$ pour avoir une solution à moindres carrées commune. ces résultats sont données dans les lemmes suivants

Lemme 1.4 *[10] Soit* $S = \left\{ X \in \mathbb{C}^{p\times q} /\ X \in \min\limits_X \|AXB - C\|_F \right\}$ *alors,*

le rang maximal et le rang minimal de la solution à moindres carrées de l'équation $AXB = C$

sont données par

$$\max_{X \in S} r(X) = \min\{p, q, p + q - r(A) - r(B) + r(A^*CB^*)\}$$

$$\min_{X \in S} r(X) = r(A^*CB^*)$$

Lemme 1.5 *[18] Soient $A_j \in \mathbb{C}^{m_j \times n}$, $B_j \in \mathbb{C}^{p \times q_j}$ et $C \in \mathbb{C}^{m_j \times q_j}$ sont données, $j = 1, 2$, alors il existe un $X \in \mathbb{C}^{n \times p}$ tel que $A_1XB_1 = C_1$ et $A_2XB_2 = C_2$ si et seulement si*

$$R(C_j) \subset R(A_j),\ R\left(C_j^*\right) \subset R\left(B_j^*\right),\ r\begin{bmatrix} C_1 & 0 & A_1 \\ 0 & -C_2 & A_2 \\ B_1 & B_2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}.$$

$j = 1, 2$

Chapitre 2

Solution commune à rang minimal d'équations $A_1XB_1 = C_1$ et $A_2XB_2 = C_2$

2.1 Introduction

Considérons dans cette section l'équation matricielle linéaire

$$AXB = C$$

où $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$ et $C \in \mathbb{C}^{m\times q}$, sont données et $X \in \mathbb{C}^{n\times p}$ est une matrice inconnue.

De nombreuses recherches ont été effectuées sur la résolution des problèmes de minimisation de rang, et de nombreux résultats ont été obtenus sur la minimisation de rang associé aux équations matricielles et de leurs solutions qui se produisent dans les disciplines théoriques et appliquées.

La résolution de problèmes d'optimisation de rang est très difficile, sous les positions différentes des matrices inconnues, exprimées sous formes matricielles. Heureusement, les problèmes d'optimisation (max-min) sur le rang de $C - AXB$ peuvent être résolus algébriquement en utilisant des décompositions de matrices et en se servant les propriétés des inverses généralisés de matrices.

Vu l'interét de l'inverse de Moore-Penrose dans cette section, nous établissons plusieurs formules de rang pour les expressions matricielles faisant intervenir cet inverse généralisé. Ces formules de rang sont considérées comme les outils de base pour developer le contenu des chapitres suivants.

Les matrices considérées dans cette section sont définies principalement sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, nous utilisons A^*, $r(A)$ et $R(A)$ pour désigner l'adjoint, le rang et l'image de A respectivement.

Il est bien connu que l'inverse de Moore-Penrose de la matrice A, noté par A^+ est définie comme l'unique solution X qui verifie les quatre équations de Penrose :

$$(1)\ AXA = A,\ (2)\ XAX = X,\ (3)\ (AX)^* = AX \text{ et } (4)\ (XA)^* = XA$$

Pour plus de simplicité, notons par E_A et F_A les deux projecteurs orthogonaux $E_A = I - AA^+$, $F_A = I - A^+A$ induits par A. Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, alors les rangs des ces deux projecteurs sont données par :

$$r(E_A) = r\left(I_m - AA^+\right) = m - r(A).$$

$$r(F_A) = r\left(I_n - A^+A\right) = n - r(A).$$

2.2 Formules fondamentales de rang impliquants l'inverse de Moore-Penrose

Nous listons des résultats qui seront appliqués dans ce chapitre.

Lemme 2.1 *[24] Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times k}$, $C \in \mathbb{C}^{l\times n}$ et $D \in \mathbb{C}^{l\times k}$. Alors,*

$$r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = r(A) + r\left(B - AA^{+}B\right) = r(B) + r\left(A - BB^{+}A\right). \tag{2.1}$$

$$r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r\left(C - CA^{+}A\right) = r(C) + r\left(A - AC^{+}C\right). \tag{2.2}$$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C) + r(E_B A F_C) \tag{2.3}$$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r(A) + r\begin{bmatrix} 0 & E_A B \\ CF_A & S_A \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(A) + r\left[J(D)\right] \tag{2.5}$$

où $S_A = D - CA^{+}B$ est le complement de Schur de A dans $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, et $J(D) = \left[I - (CF_A)(CF_A)^{+}\right] S_A \left[I - (E_A B)^{+}(E_A B)\right]$ est appelé le complement de rang de D dans M .

En particulièr si $R(B) \subseteq R(A)$ et $R(C^*) \subseteq R(A^*)$, alors

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r(A) + r\left(D - CA^{+}B\right) \tag{2.6}$$

Les six égalités de rang dans (2.1)-(2.6) sont aussi valables Lorsqu'on remplace A^{+} par un inverse généralisé $A^{(1)}$ de A.

Lemme 2.2 *[24] Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times k}$ et $C \in \mathbb{C}^{l\times n}$, et $D \in \mathbb{C}^{l\times k}$. Alors,*

i) $r\begin{bmatrix} A, & B \end{bmatrix} = r(A) \Longleftrightarrow R(B) \subseteq R(A)$. *(2.7)*

ii) $r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) \Longleftrightarrow R(C^{*}) \subseteq R(A^{*})$.

iii) $r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(A)+r(B)+r(C) \Longleftrightarrow R(A)\cap R(B) = \{0\}$ *et* $R(A^{*})\cap R(C^{*}) = \{0\}$.

iv) $r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r(A) \Longleftrightarrow R(B) \subseteq R(A)$ *et* $R(C^{*}) \subseteq R(A^{*})$ *et* $D = CA^{+}B$.

Théorème 2.1 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times k}$, $C \in \mathbb{C}^{l\times n}$ et $D \in \mathbb{C}^{l\times k}$. Alors le rang du complement de Schur $S_A = D - CA^{+}B$ satisfait l'égalité*

$$r\left(D - CA^{+}B\right) = r\begin{bmatrix} A^{*}AA^{*} & A^{*}B \\ CA^{*} & D \end{bmatrix} - r(A) \tag{2.8}$$

Preuve. il est évident que $R(A^{*}B) \subseteq R(A^{*}) = R(A^{*}AA^{*})$, et $R(AC^{*}) \subseteq R(A) = R(AA^{*}A)$.

alors d'aprés (2.6) on a $r(D - CA^{+}B) = r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - r(A)$, et de fait que $A^{*}(A^{*}AA^{*})^{+}A^{*} = A^{+}$, et que $r\begin{bmatrix} A^{*}AA^{*} & A^{*}B \\ CA^{*} & D \end{bmatrix} = r(A^{*}AA^{*}) + r\left[D - CA^{*}(A^{*}AA^{*})^{+}A^{*}B\right] = r(A) + r(D - CA^{+}B)$., alors (2.8) est démontrée. ■

La formule (2.8) signifie que le rang du complément de Schur S_A peut être évalué par le rang d'une matrice en blocs formée par A, B, C et D, où l'inverse de Moore-Penrose n'apparaît plus dans la partie droite de (2.8), en fait, cette formulle nous fournit un outil puissant pour exprimer les rangs des expressions matricielles impliquant l'inverse de Moore-Penrose.

L'équation (2.8) peut être étendue à des formules plus générales. Nous présentons ensuite certaines d'entre elles, ce qui est largement utilisé dans ce travail.

Théorème 2.2 *[24] Soient A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, et D des matrices de telle sorte que l'expression $D - C_1 A_1^+ B_1 - C_2 A_2^+ B_2$ soit définie. Alors,*

$$r\left(D - C_1 A_1^+ B_1 - C_2 A_2^+ B_2\right) = r\begin{bmatrix} A_1^* A_1 A_1^* & 0 & A_1^* B_1 \\ 0 & A_2^* A_2 A_2^* & A_2^* B_2 \\ C_1 A_1^* & C_2 A_2^* & D \end{bmatrix} - r\left(A_1\right) - r\left(A_2\right). \quad (2.9)$$

En particulier, si

$R\left(B_1\right) \subseteq R\left(A_1\right)$, $R\left(C_1^*\right) \subseteq R\left(A_1^*\right)$, $R\left(B_2\right) \subseteq R\left(A_2\right)$, $R\left(C_2^*\right) \subseteq R\left(A_2^*\right)$. Alors,

$$r\left(D - C_1 A_1^+ B_1 - C_2 A_2^+ B_2\right) = r\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{bmatrix} - r\left(A_1\right) - r\left(A_2\right).$$

On peut généraliser le théorème 2.2 comme suit

Théorème 2.3 *[24] Soient A_t, B_t, C_t, $(t = 1, 2, ..., k)$ et D des matrices de telle sorte que* *l'expression* $D - C_1A_1^+B_1 - ... - C_kA_k^+B_k$ *soit définie. Alors*

$$r\left(D - C_1A_1^+B_1 - ... - C_kA_k^+B_k\right) = r\begin{bmatrix} A^*AA^* & A^*B \\ CA^* & D \end{bmatrix} - r(A)$$

où $A = diag(A_1,\ A_2,...,A_k)$, $B^* = [B_1^*,\ B_2^*, \quad ,B_k^*]$ *et* $C = [C_1,\ C_2,...,C_k]$

Lemme 2.3 *[23], [25] Soient* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times k}$, $C \in \mathbb{C}^{l\times n}$. *Alors,*

i) $\min\limits_{X\in\mathbb{C}^{k\times n}, Y\in\mathbb{C}^{m\times l}} r(A - BX - YC) = r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} - r(B) - r(C)$.

ii) Si $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $A^* = -A$. *Alors,*

$\min\limits_{X\in\mathbb{C}^{k\times m}} r(A - BX - X^*B^*) = r\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} - 2r(B)$.

2.3 Solution à rang minimal de $AXB = C$

Considérons à nouveau l'équation matricielle linéaire

$$AXB = C \tag{2.10}$$

où $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times q}$, sont données et $X \in \mathbb{C}^{n\times p}$ est une matrice inconnue.

L'équation (2.10) est l'une des équations matricielles les plus connues de la théorie des matrices. Résoudre des équations matricielles est l'un des problèmes principaux du calcul matriciel. De nombreuses techniques ont été proposées et developées pour étudier plusieurs types d'équations matricielles. Par exemple, si l'équation matricielle dans (2.10) n'est pas consistente, les chercheurs essaient souvent de trouver des solutions approchées qui satisfont certains critères optimaux.

L'une des solutions approchées les plus utilisées de (2.10) est la solution à moindres carrées, qui est définie comme étant une matrice X qui minimise la norme de la différence

$AXB - C$:

$$\|AXB - C\|_F = \min \tag{2.11}$$

Une autre solution approchées moins utilisée, est *la solution à rang minimal* de (2.10) qui est définie comme étant une matrice X qui minimise le rang de la différence $AXB - C$:

$$r\,(AXB - C) = \min \tag{2.12}$$

Le concept de *la solution à rang minimal* d'équations matricielle a été proposé dans [27], [30] par Yongge Tian dans l'étude du rang minimal de la fonction matricielle linéaire $C - AXB$. De toute évidence, la solution à moindres carrées, la solution à rang minimal, la solution ordinaire de (2.10) coïncident si (2.10) est consistente.

Ensuite Nous introduisons comment Yongge Tian dans [21] a obtenu *la solution à rang minimal* de (2.10)

Soit

$$P\,(X) = C - AXB \tag{2.13}$$

où $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times q}$, sont données et $X \in \mathbb{C}^{n\times p}$ est une matrice inconnue. Nous l'appelons l'expression matricielle linéaire associée à (2.10). Dans les deux articles [27], [30] une formule précieuse pour le rang de (2.10) a été établie comme suit

$$r\,(C - AXB) = r\begin{bmatrix} C \\ B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} C & A \end{bmatrix} - r\,(M) + r\left[E_{T_1}\left(X + TM^{+}S\right)F_{S_1}\right]. \tag{2.14}$$

où $M = \begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}$, $T_1 = TF_M$, $S_1 = E_M S$.

Pour plus de commodité, soit

$$\widehat{P}(X) = E_{T_1}\left(X + TM^{+}S\right)F_{S_1} \tag{2.15}$$

où on l'appelle *la forme réduite de rang de* $P(X)$ dans (2.13)

Il est évident que le rang maximal et minimal de $\widehat{P}(X)$ dans (2.15) sont donnés par

$$\max r\left[\widehat{P}(X)\right] = \min\left\{r(E_{T_1}),\, r(F_{S_1})\right\} \text{ et } \min r\left[\widehat{P}(X)\right] = 0.$$

D'aprés ces résultats, nous avons

Lemme 2.4 *[27] Le rang maximal et minimal du $C - AXB$ suivant X sont donnés par*

$$\max_{X\in\mathbb{C}^{n\times p}} r(C - AXB) = \min\left\{ r\begin{bmatrix} C & A \end{bmatrix},\, r\begin{bmatrix} C \\ B \end{bmatrix} \right\} \tag{2.16}$$

$$\min_{X\in\mathbb{C}^{n\times p}} r(C - AXB) = r\begin{bmatrix} C & A \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} C \\ B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Preuve. Soit $M = \begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}$, et $S = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}$. Alors il est facile de verifier que :

$$r(C - AXB) = r\begin{bmatrix} C & A & 0 \\ B & 0 & I_p \\ 0 & I_n & -X \end{bmatrix} - n - p = r\begin{bmatrix} M & S \\ T & -X \end{bmatrix} - n - p. \tag{2.18}$$

de (2.5), $r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(A) + r\left[E_{C_1}\left(D - CA^{(1)}B\right)F_{B_1}\right]$

où $C_1 = C - CA^{(1)}A$, $B_1 = B - AA^{(1)}B$.

donc :

$$r\begin{bmatrix} M & S \\ T & -X \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} M \\ T \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} M & S \end{bmatrix} - r\left(M\right) + r\left[E_{T_1}\left(X + TM^{(1)}S\right)F_{S_1}\right]$$

$$= r\begin{bmatrix} C \\ B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} C & A \end{bmatrix} + n + p - r\left(M\right) + r\left[E_{T_1}\left(X + TM^{(1)}S\right)F_{S_1}\right]$$

où $T_1 = TF_M,\ \ S_1 = E_M S$. en remplaçant dans (2.18)

$$r\left(C - AXB\right) = r\begin{bmatrix} C \\ B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} C & A \end{bmatrix} - r\left(M\right) + r\left[E_{T_1}\left(X + TM^{(1)}S\right)F_{S_1}\right] \qquad (2.19)$$

on a

$$\max_X r\left[E_{T_1}\left(X + TM^{(1)}S\right)F_{S_1}\right] = \max r\left[E_{T_1}YF_{S_1}\right] = \min\left\{r\left(E_{T_1}\right), r\left(F_{S_1}\right)\right\} \qquad (2.20)$$

$$\min_X r\left[E_{T_1}\left(X + TM^{(1)}S\right)F_{S_1}\right] = \min r\left[E_{T_1}YF_{S_1}\right] = 0 \qquad (2.21)$$

où par (2.1) et (2.2) on obtient

$$r(E_{T_1}) = n - r\left(T_1\right) = n - r\left(TF_M\right) = n - r\begin{bmatrix} M \\ T \end{bmatrix} + r\left(M\right) = r\left(M\right) - r\begin{bmatrix} C \\ B \end{bmatrix}.$$

$$r\left(F_{S_1}\right) = p - r\left(S_1\right) = p - r\left(E_M S\right) = p - r\begin{bmatrix} M & S \end{bmatrix} + r\left(M\right) = r\left(M\right) - r\begin{bmatrix} C & A \end{bmatrix}$$

En remplacant dans (2.20) puis dans (2.19) on obtient (2.16)

Par substitution de (2.21) dans (2.19) on obtient (2.17). $\blacksquare$

Il est évident, qu'à partir de (2.14) la matrice X satisfaisant (2.17), est la solution de l'équation matricielle consistente suivante

$$E_{T_1}\left(X + TM^{+}S\right)F_{S_1} = 0 \tag{2.22}$$

D'aprés le lemme 1.3, du chapitre 1, la solution générale de (2.22) appelée *la solution générale à rang minimal* de (2.10) est donnée sous la forme

$$X = -TM^{+}S + T_1U + VS_1 \tag{2.23}$$

où $U \in \mathbb{C}^{(q+n)\times p}$ et $V \in \mathbb{C}^{n\times(m+p)}$ sont arbitraires.

Lemme 2.5 *[30] La solution à rang minimal de (2.10) est unique si et seulement si*

$$r(A) = n,\ r(B) = p,\ r\begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} C \\ B \end{bmatrix} + r(A) = r\begin{bmatrix} C & A \end{bmatrix} + r(B)$$

2.4 Solution commune à rang minimal d'équations $A_1XB_1 = C_1$ et $A_2XB_2 = C_2$

Considérons la paire d'équations matricielles

$$A_1XB_1 = C_1 \text{ et } A_2XB_2 = C_2 \tag{2.24}$$

où $A_1 \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B_1 \in \mathbb{C}^{p\times q}$, $C_1 \in \mathbb{C}^{m\times q}$, $A_2 \in \mathbb{C}^{s\times n}$, $B_2 \in \mathbb{C}^{p\times t}$, $C_2 \in \mathbb{C}^{s\times t}$ sont données, $X \in \mathbb{C}^{n\times p}$ est inconnue.

Dans cette section, nous utilisons la méthode de rang de la matrice pour déterminer les conditions sous les quelles les équations matricielles $A_1XB_1 = C_1$, $A_2XB_2 = C_2$ ont une solution commune à rang minimal. En plus, l'expression de la solution générale commune à rang minimal de (2.24) est établie.

2.4.1 Conditions nécessaires et suffisantes

Lemme 2.6 *[4] Soient* $A_1 \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B_1 \in \mathbb{C}^{p\times q}$, $A_2 \in \mathbb{C}^{m\times l}$, $B_2 \in \mathbb{C}^{s\times q}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times q}$ *des matrices données,* $X_1 \in \mathbb{C}^{n\times p}$, $X_2 \in \mathbb{C}^{l\times s}$ *sont inconnues.*

Soit $M = E_{A_1}A_2$, $N = B_2F_{B_1}$, $S = A_2F_M$, *alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i)Le système

$$A_1X_1B_1 + A_2X_2B_2 = C \tag{2.25}$$

est résoluble.

ii) Les équalités de rang suivantes satisfont

$$r\begin{bmatrix} A_1 & C \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} A_2 & C \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix},$$

$$r\begin{bmatrix} C & A_1 & A_2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ C \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas la solution générale de (2.25) est donnée sous la forme :

$$X_1 = A_1^+CB_1^+ - A_1^+A_2M^+E_{A_1}CB_1^+ - A_1^+SA_2^+CF_{B_1}N^+B_2B_1^+ - A_1^+SVE_NB_2B_1^+ + F_{A_1}U + ZE_{B_1},$$

$$X_2 = M^+E_{A_1}CB_2^+ + F_MS^+SA_2^+CF_{B_1}N^+ + F_M\left(V - S^+SVNN^+\right) + WE_{B_2},$$

où U, V, W *et* Z *sont arbitraires.*

Théorème 2.4 ***Théorème 2.5*** *La paire des équations matricielles dans (2.24) a une solution commune à rang minimal si et seulement si*

$$r\begin{bmatrix} M_1 & 0 & S_1 \\ 0 & -M_2 & S_2 \\ T_1 & T_2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} T_1, & T_2 \end{bmatrix} + r(M_1) + r(M_2). \tag{2.26}$$

Preuve. La solution générale à rang minimal de l'équation matricielle $AXB = C$ est définie par

$X = -TM^{+}S + T_1U + VS_1$,

où $M = \begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}$, $T_1 = TF_M$, $S_1 = E_MS$, et U, V sont arbitraires.

Soient les équations matricielles:

$$\begin{aligned} A_1XB_1 &= C_1 \qquad (1) \\ A_2XB_2 &= C_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Soient X_1 et X_2 les solutions des équations (1) et (2) respectivement. Alors,

$X_1 = -T_1M_1^{+}S_1 + T_{11}U_1 + V_1S_{11}$,

$X_2 = -T_2M_2^{+}S_2 + T_{22}U_2 + V_2S_{22}$,

où $T_{ii} = T_iF_{M_i}$, $S_{ii} = E_{M_i}S_i$, avec i =1, 2, et U_1, V_1, U_2, V_2 sont arbitraires. Dans ce cas, $X_1 - X_2 = T_2M_2^{+}S_2 - T_1M_1^{+}S_1 + [T_{11}, T_{22}] \begin{bmatrix} U_1 \\ -U_2 \end{bmatrix} + [V_1, -V_2] \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \end{bmatrix}$.

Donc d'aprés le lemme 2.3 on trouve

$$\min_{X_1,X_2} r\left(X_1 - X_2\right) = r \begin{bmatrix} T_2M_2^{+}S_2 - T_1M_1^{+}S_1 & T_{11} & T_{22} \\ S_{11} & 0 & 0 \\ S_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\left[T_{11}, T_{22}\right] - r \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \end{bmatrix}. \qquad (2.27)$$

On a

$$r\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} S_1 & M_1 & 0 \\ S_2 & 0 & M_2 \end{bmatrix} - r(M_1) - r(M_2) = r\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} M_1, & M_2 \end{bmatrix} - r(M_1) - r(M_2),$$

et

$$r[T_{11}, T_{22}] = r\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} - r(M_1) - r(M_2) = r\begin{bmatrix} T_1, & T_2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} - r(M_1) - r(M_2).$$

En appliquant le lemme 2.3 et le théorème 2.2 et les opérations élémentaires sur les matrices en blocs, on obtient :

$$r\begin{bmatrix} T_2M_2^+S_2 - T_1M_1^+S_1 & T_{11} & T_{22} \\ S_{11} & 0 & 0 \\ S_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} T_2M_2^+S_2 - T_1M_1^+S_1 & T_1 & T_2 & 0 & 0 & 0 \\ S_1 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 \\ S_2 & 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2r(M_1) - 2r(M_2)$$

$$= r\begin{bmatrix} M_1^*M_1M_1^* & 0 & M_1^*S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_2^*M_2M_2^* & M_2^*S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_1M_1^* & T_2M_2^* & 0 & T_1 & T_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & 0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 3r(M_1) - 3r(M_2)$$

$$= r\begin{bmatrix} M_1 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_2 & S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 3r(M_1) - 3r(M_2)$$

$$= r\begin{bmatrix} M_1 & 0 & S_1 \\ 0 & -M_2 & S_2 \\ T_1 & T_2 & 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} M_1, & M_2 \end{bmatrix} - 3r(M_1) - 3r(M_2).$$

Par substitution dans (2.27) on obtient (2.26) ■

2.4.2 Expression de la solution générale commune à rang minimal de $A_1XB_1 = C_1$ et $A_2XB_2 = C_2$

Théorème 2.6 *Soient*

$P_1 = E_{T_{22}}T_{11}$,

$Q_1 = S_{11}F_{S_{22}}$,

$K_1 = E_{T_{22}}F_{P_1}$,

$P_2 = E_{T_{11}}T_{22}$,

$Q_2 = S_{22}F_{S_{11}}$,

$K_2 = E_{T_{11}}F_{P_2}$,

$H_1 = E_{T_{22}}T_1M_1^+S_1F_{S_{22}} - E_{T_{22}}T_2M_2^+S_2F_{S_{22}}$,

$H_2 = E_{T_{11}}T_2M_2^+S_2F_{S_{11}} - E_{T_{11}}T_1M_1^+S_1F_{S_{11}}$.

Supposons que le système (2.24) a une solution commune à rang minimal. Alors, les solutions générales communes à rang minimal est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} X &= -T_1M_1^+S_1 + P_1^+H_1F_{S_{22}} - P_1^+E_{T_{22}}K_1^+E_{P_1}H_1F_{S_{22}} + K_1^+E_{P_1}H_1Q_1^+ - P_1^+E_{T_{22}}F_{K_1}V_1Q_1F_{S_{22}} \\ &\quad + T_{11}F_{P_1}U_1 + T_{11}Z_1E_{F_{S_{22}}} + F_{K_1}V_1S_{11} + W_1F_{Q_1}S_{11}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

ou

$$\begin{aligned} X &= -T_2M_2^+S_2 + P_2^+H_2F_{S_{11}} - P_2^+E_{T_{11}}K_2^+E_{P_2}H_2F_{S_{11}} + K_2^+E_{P_2}H_2Q_2^+ - P_2^+E_{T_{11}}F_{K_2}V_2Q_2F_{S_{11}} \\ &\quad + T_{22}F_{P_2}U_2 + T_{22}Z_2E_{F_{S_{11}}} + F_{K_2}V_2S_{22} + W_2F_{Q_2}S_{22}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

où U_1, U_2, V_1, V_2, W_1, W_2, Z_1, Z_2, sont des matrices arbitraires de types appropriés.

Preuve. La solution générale à rang minimal de $AXB = C$ est la solution de l'équation consistente $E_{T_1}XF_{S_1} = -E_{T_1}TM^+SF_1$, telle que $\widehat{P}(X) = E_{T_1}(X + TM^+S)F_{S_1}$, appellée la forme réduite de rang de $P(X) = C - AXB$.

l'expression de la solution générale à rang minimal de $A_1XB_1 = C_1$ est donnée comme suit:

$$X = -T_1M_1^+S_1 + T_{11}\widetilde{U}_1 + \widetilde{V}_1S_{11}. \tag{2.30}$$

La paire d'équations matricielles (2.24) a une solution commune à rang minimal si et seulement s'ils existent $\widetilde{U}_1$ et $\widetilde{V}_1$ tels que X soit la solution à rang minimal du système $A_2XB_2 = C_2$. c-à-d, $E_{T_{22}}\left(-T_1M_1^+S_1 + T_{11}\widetilde{U}_1 + \widetilde{V}_1S_{11}\right)F_{S_{22}} = -E_{T_{22}}T_2M_2^+S_2F_{S_{22}}$, alors

$$E_{T_{22}}T_{11}\widetilde{U}_1F_{S_{22}} + E_{T_{22}}\widetilde{V}_1S_{11}F_{S_{22}} = E_{T_{22}}T_1M_1^+S_1F_{S_{22}} - E_{T_{22}}T_2M_2^+S_2F_{S_{22}}. \tag{2.31}$$

En appliquant le lemme 2.6 à (2.31), la solution générale du système (2.31) est

$$\widetilde{U}_1 = P_1^+H_1F_{S_{22}} - P_1^+E_{T_{22}}K_1^+E_{P_1}H_1F_{S_{22}} - P_1^+E_{T_{22}}F_{K_1}V_1Q_1F_{S_{22}} + F_{P_1}U_1 + Z_1E_{F_{S_{22}}}, \tag{2.32}$$

$$\widetilde{V}_1 = K_1^+E_{P_1}H_1Q_1^+ + F_{K_1}V_1 + W_1E_{Q_1}, \tag{2.33}$$

où U_1, V_1, W_1, Z_1, sont des matrices arbitraires.

Par substitution de (2.32) et (2.33) dans (2.30) on obtient (2.28), de la même manière l'expression (2.29) est obtenue ■

2.5 Solution hermitienne à rang minimal d'équation $AXB = C$

Dans cette section, nous allons obtenir les conditions nécessaires et suffisantes sous les quelles la solution à rang minimal de l'équation matricielle $AXB = C$ soit hermitienne, et donnons l'expression de cette solution.

2.5.1 Conditions nécessaires et suffisantes

Considérons l'équation matricielle

$$AXB = C \tag{2.34}$$

où $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times q}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times q}$ sont données, et $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est une matrice inconnue.

Lemme 2.7 *[4] Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times q}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times q}$, sont données. L'équation matricielle (2.10) a une solution hermitienne si et seulement si la paire des équations matricielles*

$$AXB = C \quad \text{et } B^*XA^* = C^* \tag{2.35}$$

possède une solution commune, et si une telle solution (commune) est hermitienne, alors, une représentation de la solution hermitienne générale de (2.34) est donnée sous la forme

$$X_s = \frac{X + X^*}{2},$$

où X est la représentation de la solution générale commune de (2.35).

Théorème 2.7 *L'équation matricielle (2.34) a une solution hermitienne à rang minimal si et seulement si*

$$r\begin{bmatrix} M & 0 & S \\ 0 & -M^* & T^* \\ T & S^* & 0 \end{bmatrix} = 2r\begin{bmatrix} T, & S^* \end{bmatrix} + 2r\left(M\right). \tag{2.36}$$

Dans ce cas, la solution générale hermitienne à rang minimal peut être formulée comme suit :

$$X_s = \frac{X + X^*}{2}, \tag{2.37}$$

où

$$\begin{aligned} X &= -TM^{+}S + P^{+}HF_{S_1} - P^{+}F_{S_1}K^{+}E_PHF_{S_1} + K^{+}E_PHP^{+} - P^{+}E_{T_{22}}F_KV_1PF_{S_1} \\ &\quad + T_1F_PU + T_1ZE_{F_{S_1}} + F_KVS_1 + WF_PS_1. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Preuve. La solution générale à rang minimal de (2.34) est donnée comme suit : $X = -TM^{+}S + T_1U + VS_1$, où U, V sont arbitraires. Alors, $X^{*} = -\left(TM^{+}S\right)^{*} + U^{*}T_1^{*} + S_1^{*}V^{*}$. Alors,

$$X - X^{*} = \left(TM^{+}S\right)^{*} - \left(TM^{+}S\right) + \begin{bmatrix} T_1 & S_1^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ -V^{*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V & -U^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ T_1^{*} \end{bmatrix}.$$

Donc, d'aprés le lemme 2.3 on obtient

$$\min_X r\left(X - X^{*}\right) = r \begin{bmatrix} \left(TM^{+}S\right)^{*} - \left(TM^{+}S\right) & T_1 & S_1^{*} \\ S_1 & 0 & 0 \\ T_1^{*} & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2r \begin{bmatrix} T_1 & S_1^{*} \end{bmatrix}. \tag{2.39}$$

On a

$$r \begin{bmatrix} T_1 & S_1^{*} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} T & S^{*} \\ M & 0 \\ 0 & M^{*} \end{bmatrix} - 2r\left(M\right) = r \begin{bmatrix} T, & S^{*} \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} M \\ M^{*} \end{bmatrix} - 2r\left(M\right). \tag{2.40}$$

Et en appliquant le lemme 2.3 et le théorème 2.2 et les opérations élémentaires sur les matrices en blocs, on obtient

$$r \begin{bmatrix} \left(TM^{+}S\right)^{*} - \left(TM^{+}S\right) & T_1 & S_1^{*} \\ S_1 & 0 & 0 \\ T_1^{*} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} (TM^+S)^* - (TM^+S) & T & S^* & 0 & 0 & 0 \\ S & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ T^* & 0 & 0 & 0 & M^* & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 4r\left(M\right)$$

$$= r\begin{bmatrix} M^*MM^* & 0 & M^*S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -MM^*M & MT^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ TM^* & S^*M & 0 & T & S^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & T^* & 0 & 0 & 0 & M^* \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M^* & 0 & 0 \end{bmatrix} - 6r\left(M\right)$$

$$= r\begin{bmatrix} M & 0 & S \\ 0 & -M^* & T^* \\ T & S^* & 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} M \\ M^* \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} M, & M^* \end{bmatrix} - 6r\left(M\right). \tag{2.41}$$

Par substitution de (2.40) et (2.41) dans (2.39) on obtient (2.36). ■

2.5.2 Expression de la solution hermitienne générale à rang minimal de $AXB = C$

D'aprés le lemme 2.7, l'équation matricielle (2.34) a une solution hermitienne à rang minimal si et seulement si la paire d'équations matricielles

$$E_{T_1} X F_{S_1} = -E_T \left(TM^+S\right) F_{S_1} \text{ et } F_{S_1} X E_{T_1} = -F_{S_1} \left(TM^+S\right)^* E_{T_1},$$

a une solution commune. Alors d'aprés la formule (2.28) on a

$$\begin{aligned} X &= -TM^+S + P^+HF_{S_1} - P^+F_{S_1}K^+E_PHF_{S_1} + K^+E_PHP^+ - P^+E_{T_{22}}F_KV_1PF_{S_1} \\ &\quad +T_1F_PU + T_1ZE_{F_{S1}} + F_KVS_1 + WF_PS_1. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Où $P = E_{T_1}$, $H = -E_T\left(TM^+S\right)F_{S_1} - F_{S_1}\left(TM^+S\right)^* E_{T_1}$.

On substitue (2.42) dans (2.37) on obtient X_s.

Chapitre 3

Solution hermitienne définie (positive, négative, non positive, non négative) à rang minimal

3.1 Introduction

Le rang et l'inertie d'une matrice sont deux concepts de base de la théorie des matrices pour décrire la dimension des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs colonnes ou les vecteurs lignes, et la répartition des valeurs propres selon leurs signes afin de calculer l'inertie d'une matrice, qui est une opération simple en utilisant les opérations élémentaires et de congruence d'une matrice en blocs. Ces deux quantités jouent un rôle essentiel dans la caractérisation des propriétés algébriques des matrices hermitiennes. En fait, le rang et l'inerties de matrices hermitiennes ont été les objets principaux d'étude les solution hermitiennes définies positives et définies non négatives d'une équation matricielle non symetrique.

Tout au long de cette section, $\mathbb{C}^{m\times n}$ et $\mathbb{C}_H^n$ désignent l'ensemble de toutes les $m\times\, n$ matrices complexes, et les matrices hermitiennes complexes d'ordre n respectivement. Tous les symbols utilisés dans cette section sont les mêmes que dans le chapitre 2. Nous notons $A \succ 0$ $(A \geq 0)$ si A est hermitienne définie positive (définie non négative). On dit que les matrices hermitiennes A et B de la même taille, satisfont l'inégalité $A \succ B$ $(A \geq B)$, si et seulement si, $A - B$ est définie positive (définie non négative).
L'inertie de $A \in \mathbb{C}_H^m$ est définie comme étant le triplet $In\,(A) = \{i_+\,(A)\,,\, i_-\,(A)\,,\, i_0\,(A)\}$. Où $i_+\,(A)$, $i_-\,(A)$ et $i_0\,(A)$ sont le nombre de valeurs propres positives, négatives et nulles comptées avec multiplicités respectivement. Les deux nombres $i_+\,(A)$ et $i_-\,(A)$ sont généralement appelés les inerties partielles de A. Pour une matrice $A \in \mathbb{C}_H^m$, chaqu'un des $r\,(A) = i_+\,(A) + i_-\,(A)$ et $i_0\,(A) = m - r\,(A)$ sont satisfaits.

Considerons l'équation matricielle

$$AXB = C \tag{3.1}$$

Notre objectif dans cette section est de déterminer une solution hermitienne à rang minimal de (3.1) soumise à des restrictions d'inégalités. En particulier, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution hermitienne définie (positive, négative, non positive, non négative) à rang minimal de (3,1). Où nous étudions les inégalités $X \succ P$ $(\geq P,\, \prec P,\, \leq P)$, en déterminant l'inertie maximale et minimale de $P - X$, où $P \in \mathbb{C}_H^n$ est donnée.

3.2 Inerties de matrices hermitiennes en blocs

Lemme 3.1 *[22] Soit $\mathcal{L}$ un ensemble constitué de matrices définies sur $\mathbb{C}^{m\times n}$, et soit $\hbar$ un ensemble constitué de matrices Hermitiennes sur $\mathbb{C}_H^m$. Alors,*

a) Pour $m = n$, $\mathcal{L}$ a une matrice nonsingulière si et seulement si $\max\limits_{X\in\mathcal{L}} r(X) = m$.

b) Pour $m = n$, tout $X \in \mathcal{L}$ est nonsingulière si et seulement si $\min\limits_{X\in\mathcal{L}} r(X) = m$.

c) $0 \in \mathcal{L}$ si et seulement si $\min\limits_{X\in\mathcal{L}} r(X) = 0$.

d) $\hbar$ a une matrice $X \succ 0$ $(X \prec 0)$ si et seulement si $\max\limits_{X\in\hbar} i_+(X) = m$ $(\max\limits_{X\in\hbar} i_-(X) = m)$.

e) $\hbar$ a une matrice $X \geq 0$ $(X \leq 0)$ si et seulement si $\min\limits_{X\in\hbar} i_-(X) = 0$ $(\min\limits_{X\in\hbar} i_+(X) = 0)$.

Lemme 3.2 *[14], [24] Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times k}$, $C \in \mathbb{C}^{l\times n}$, $D \in \mathbb{C}^{l\times k}$. Alors,*

$$r\begin{bmatrix} A & BF_P \\ E_QC & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ C & 0 & Q \\ 0 & P & 0 \end{bmatrix} - r(P) - r(Q), \tag{3.2}$$

$$r\begin{bmatrix} M & N \\ E_PA & E_PB \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} M & N & 0 \\ A & B & P \end{bmatrix} - r(P), \tag{3.3}$$

$$r\begin{bmatrix} M & AF_P \\ N & BF_P \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} M & A \\ N & B \\ O & P \end{bmatrix} - r(P). \tag{3.4}$$

Lemme 3.3 *Soit $A \in \mathbb{C}_H^m$, $B \in \mathbb{C}_H^n$, $Q \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Alors,*

$$i_\pm\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = i_\pm(A) + i_\pm(B), \tag{3.5}$$

$$i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q^* & 0 \end{bmatrix} = r\left(Q\right). \tag{3.6}$$

Lemme 3.4 *[22] Soient $A \in \mathbb{C}_H^m$, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $D \in \mathbb{C}^{m\times n}$ et on définit*
$U = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix}$. *Alors,*

$$i_{\pm}\left(U\right) = r\left(B\right) + i_{\pm}\left(E_B A E_B\right), \tag{3.7}$$

$$i_{\pm}\left(V\right) = i_{\pm}\left(A\right) + i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & E_A B \\ B^* E_A & D - B^* A^+ B \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Les formules suivantes découlent de (3.7) et (3.8)

$$i_{\pm}\begin{bmatrix} A & BF_P \\ F_P B^* & 0 \end{bmatrix} = i_{\pm}\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B^* & 0 & P^* \\ 0 & P & 0 \end{bmatrix} - r\left(P\right). \tag{3.9}$$

Lemme 3.5 *[23] Soient $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times p}$ et $C \in \mathbb{C}^{m\times p}$, et supposons que l'équation matricielle $AXB = C$ est résoluble pour $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

a) L'équation matricielle $AXB = C$ possède une solution hermitienne pour X

b)

$$R\left(C\right) \subset R\left(A\right), R\left(C^*\right) \subset R\left(B^*\right), \text{ et } r\begin{bmatrix} C & 0 & A \\ 0 & -C^* & B^* \\ B & A^* & 0 \end{bmatrix} = 2r\begin{bmatrix} A^*, & B \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

c) La paire d'équations matricielles

$$AYB = C \text{ et } B^*YA^* = C^* \tag{3.11}$$

admet une solution commune pour Y*.*

Dans ce cas, la solution générale hermitienne de $AXB = C$ *peut être donnée comme suit :*

$$X = \frac{1}{2}(Y + Y^*) \tag{3.12}$$

où Y *est une solution commune de (3.11) ou*

$$X = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_0^*) + E_G U_1 + (E_G U_1)^* + F_A U_2 F_A + E_B U_3 E_B, \tag{3.13}$$

Y_0 *est une solution commune spéciele de (3.11),* $G = \begin{bmatrix} A^*, & B \end{bmatrix}$*, et les matrices* $U_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$*,* U_2*,* $U_3 \in \mathbb{C}_H^n$ *sont arbitraires.*

3.2.1 Rangs et inerties de certaines expressions matricielles

Les résultats suivants sont liés aux rangs et inerties de certaines expressions matricielles

Lemme 3.6 *[23] Soient* $A \in \mathbb{C}_H^m$*,* $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$*,* $C \in \mathbb{C}^{m\times p}$*,* $D \in \mathbb{C}^{m\times q}$*. On définit*

$$M = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B^* & 0 & 0 & 0 \\ C^* & 0 & 0 & 0 \\ D^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ N = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors,

$$\max_{X\in\mathbb{C}^{n\times m}, Y\in\mathbb{C}_H^p, Z\in\mathbb{C}_H^q} r\left[A - BX - (BX)^* - CYC^* - DZD^*\right] = \min\left\{m, r(N)\right\}, \tag{3.14}$$

$$\min_{X\in\mathbb{C}^{n\times m}, Y\in\mathbb{C}_H^p, Z\in\mathbb{C}_H^q} r\left[A - BX - (BX)^* - CYC^* - DZD^*\right] = 2r(N) - r(M) - 2r(B), \tag{3.15}$$

$$\max_{X\in\mathbb{C}^{n\times m},Y\in\mathbb{C}_H^p,Z\in\mathbb{C}_H^q} i_\pm\left[A-BX-(BX)^*-CYC^*-DZD^*\right]=i_\pm(M), \tag{3.16}$$

$$\min_{X\in\mathbb{C}^{n\times m},Y\in\mathbb{C}_H^p,Z\in\mathbb{C}_H^q} i_\pm\left[A-BX-(BX)^*-CYC^*-DZD^*\right]=r(N)-i_\mp(M)-r(B). \tag{3.17}$$

Lemme 3.7 *[22] Soient $A\in\mathbb{C}_H^m$, $B\in\mathbb{C}^{m\times n}$ et $D\in\mathbb{C}_H^n$. Alors,*

$$i_\pm\left(D-B^*A^+B\right)=i_\pm\begin{bmatrix} A^3 & AB \\ (AB)^* & D \end{bmatrix}-i_\pm(A). \tag{3.18}$$

3.3 Solution hermitienne à rang minimal de $AXB=C$

Soit l'équation matricielle

$$AXB=C \tag{3.19}$$

où $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{n\times q}$, $C\in\mathbb{C}^{m\times q}$ sont données, et $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$ est inconnue.

La solution à rang minimal de (3.19) est une matrice X qui minimise le rang de $(C-AXB)$ c'est à dire :

$X=\min\limits_{X\in\mathbb{C}^{n\times p}} r(C-AXB)$. On sait que la solution générale à rang minimal de (3.19) est donnée comme suit :

$X=-TM^+S+T_1U+VS_1$,

où $M=\begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$, $T=\begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}$, $S=\begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}$, $T_1=TF_M$, $S_1=E_MS$, et U, V sont arbitraires.

Il est bien connu que la solution à moindres carrées de (3.19) est aussi la solution de son équation normale :

$$A^*AXBB^* = A^*CB^* \tag{3.20}$$

Et il est bien connu que la solution à rang minimal de (3.19) est la solution de l'équation consistente $E_{T_1}XF_{S_1} = -E_{T_1}TM^+SF_{S_1}$. D'après le lemme 3.5, nous pouvons écrire la solution générale hermitienne à rang minimal de (3.19) comme $X = \frac{1}{2}(Y+Y^*)$ où Y est la solution commune de

$$E_{T_1}YF_{S_1} = -E_{T_1}\left(TM^+S\right)F_{S_1} \text{ et } F_{S_1}YE_{T_1} = -F_{S_1}\left(TM^+S\right)^*E_{T_1}, \tag{3.21}$$

ou de façon équivalente

$$X = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_0^*) + E_G U_1 + (E_G U_1)^* + F_{E_{T_1}} U_2 F_{E_{T_1}} + E_{F_{S_1}} U_3 E_{F_{S_1}}, \tag{3.22}$$

où $G = \begin{bmatrix} E_{T_1}, & F_{S_1} \end{bmatrix}$, $U_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, U_2, $U_3 \in \mathbb{C}_H^n$ sont arbitraires.

3.3.1 Rangs et inerties de certaines expressions matricielles hermitiennes

Lemme 3.8 *Soient A, B, C, D des matrices telles que l'expression $\left(D - CA^+B - (CA^+B)^*\right)$ soit définie et D est hermitienne. On définit*

$$S = \begin{bmatrix} 0 & A^*AA^* & A^*B \\ AA^*A & 0 & AC^* \\ AB^* & A^*C & D \end{bmatrix}.$$

Alors,

$$i_\pm\left(D - CA^+B - \left(CA^+B\right)^*\right) = i_\pm(S) - r(A). \tag{3.23}$$

Preuve. En appliquant le lemme 3.7 et la formule (3.6)

$$i_{\pm}\left(D - CA^{+}B - \left(CA^{+}B\right)^{*}\right) = i_{\pm}\left(D - \begin{bmatrix} C, & B^{*} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & A^{*} \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C^{*} \\ B \end{bmatrix}\right)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^{*} \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & A^{*} \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & A^{*} \\ A & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & A^{*} \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C^{*} \\ B \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C, & B^{*} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & A^{*} \\ A & 0 \end{bmatrix} & D \end{bmatrix} - i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & A^{*} \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & A^{*}AA^{*} & A^{*}B \\ AA^{*}A & 0 & AC^{*} \\ AB^{*} & A^{*}C & D \end{bmatrix} - r\left(A\right).$$

■

Théorème 3.1 *Soient $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times q}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times q}$ et $P \in \mathbb{C}_{H}^{n}$. Supposons que (3.19) admet une solution hermitienne à rang minimal, X une solution hermitienne à rang minimal de (3.19). On définit*

$$Q_1 = \begin{bmatrix} M^{*}MM^{*} & 0 & 0 & 0 & M^{*}SF_{S_1} \\ 0 & MM^{*}M & 0 & MT^{*}E_{T_1} & 0 \\ -E_{T_1}TM^{*} & 0 & -E_{T_1} & 0 & E_{T_1}PF_{S_1} \\ 0 & F_{S_1}S^{*}M & F_{S_1} & F_{S_1}PE_{T_1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & M^*MM^* & 0 & 0 & M^*SF_{S_1} \\ MM^*M & 0 & 0 & -\frac{1}{2}MT^*E_{T_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{T_1} & F_{S_1} \\ 0 & -\frac{1}{2}M^*E_{T_1}T & -E_{T_1} & 0 & \frac{1}{2}E_{T_1}PF_{S_1} \\ MF_{S_1}S^* & 0 & F_{S_1} & \frac{1}{2}F_{S_1}PE_{T_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors,

$$\max_{\min r(C-AXB), X\in\mathbb{C}_H^n} r(P-X) = \min\{n, r(Q_1) + 2n - 2r(M) - r(E_{T_1}) - r(F_{S_1}) - r(G)\}, \tag{3.24}$$

$$\min_{\min r(C-AXB), X\in\mathbb{C}_H^n} r(P-X) = r(Q_1) - 2r(M), \tag{3.25}$$

$$\max_{\min r(C-AXB), X\in\mathbb{C}_H^n} i_\pm(P-X) = i_\pm(Q_2) + n - r(M) - r(E_{T_1}) - r(F_{S_1}), \tag{3.26}$$

$$\min_{\min r(C-AXB), X\in\mathbb{C}_H^n} i_\pm(P-X) = r(Q_1) - r(M) - i_\mp(Q_2). \tag{3.27}$$

Preuve. On substitue (3.22) dans $P - X$ on trouve

$$P - X = P - \frac{1}{2}(Y_0 + Y_0^*) - E_G U_1 - (E_G U_1)^* - F_{E_{T_1}} U_2 F_{E_{T_1}} - E_{F_{S_1}} U_3 E_{F_{S_1}}. \tag{3.28}$$

On définit

$$L = \begin{bmatrix} P - \frac{1}{2}(Y_0 + Y_0^*) & E_G & F_{E_{T_1}} & E_{F_{S_1}} \\ E_G & 0 & 0 & 0 \\ F_{E_{T_1}} & 0 & 0 & 0 \\ E_{F_{S_1}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} P - \frac{1}{2}(Y_0 + Y_0^*) & E_G & F_{E_{T_1}} & E_{F_{S_1}} \\ E_G & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

où $E_G = [E_{T_1}, F_{S_1}]$. en appliquant (3.14)-(3.17) à (3.28) on obtient :

$$\max_{\substack{\min r(C-AXB) \\ X\in\mathbb{C}_H^n}} r\left(P-X\right) = \max_{\substack{U_1\in\mathbb{C}^{n\times n}, \\ U_2,U_3\in\mathbb{C}_H^n}} r\left[P-\frac{1}{2}\left(Y_0+Y_0^*\right)-E_GU_1-\left(E_GU_1\right)^*-F_{E_{T_1}}U_2F_{E_{T_1}}-E_{F_{S_1}}U_3E_{F_{S_1}}\right]$$

$$= \min\left\{n, r\left(N\right)\right\}, \tag{3.29}$$

$$\min_{\substack{\min r(C-AXB) \\ X\in\mathbb{C}_H^n}} r\left(P-X\right) = \min_{\substack{U_1\in\mathbb{C}^{n\times n}, \\ U_2,U_3\in\mathbb{C}_H^n}} r\left[P-\frac{1}{2}\left(Y_0+Y_0^*\right)-E_GU_1-\left(E_GU_1\right)^*-F_{E_{T_1}}U_2F_{E_{T_1}}-E_{F_{S_1}}U_3E_{F_{S_1}}\right]$$

$$= 2r\left(N\right)-r\left(L\right)-2r\left(E_G\right), \tag{3.30}$$

$$\max_{\substack{\min r(C-AXB) \\ X\in\mathbb{C}_H^n}} i_{\pm}\left(P-X\right) = \max_{\substack{U_1\in\mathbb{C}^{n\times n}, \\ U_2,U_3\in\mathbb{C}_H^n}} i_{\pm}\left[P-\frac{1}{2}\left(Y_0+Y_0^*\right)-E_GU_1-\left(E_GU_1\right)^*-F_{E_{T_1}}U_2F_{E_{T_1}}-E_{F_{S_1}}U_3E_{F_{S_1}}\right]$$

$$= i_{\pm}\left(L\right), \tag{3.31}$$

$$\min_{\substack{\min r(C-AXB) \\ X\in\mathbb{C}_H^n}} i_{\pm}\left(P-X\right) = \min_{\substack{U_1\in\mathbb{C}^{n\times n}, \\ U_2,U_3\in\mathbb{C}_H^n}} i_{\pm}\left[P-\frac{1}{2}\left(Y_0+Y_0^*\right)-E_GU_1-\left(E_GU_1\right)^*-F_{E_{T_1}}U_2F_{E_{T_1}}-E_{F_{S_1}}U_3E_{F_{S_1}}\right]$$

$$= r\left(N\right)-i_{\mp}\left(L\right)-r\left(E_G\right). \tag{3.32}$$

Nous allons simplifier $r\left(N\right)$, $i_{\pm}\left(L\right)$, $r\left(L\right)$, en appliquant les trois types d'opérations élémentaires sur les matrices en blocs (voir [33]), opérations élémentaires de congruence d'une matrice partitionnée, et les formules (3.2) et (3.9), et le lemme 3.8, le théoreme 2.2.

En suite on va montrer que $R\left(E_G\right) \subseteq R\left(E_{F_{S_1}}\right)$,

D'aprés le lemme 2.2, pour montrer que $R\left(E_G\right) \subseteq R\left(E_{F_{S_1}}\right)$ il suffit de montrer que $r\begin{bmatrix} E_G, & E_{F_{S_1}} \end{bmatrix} = r\left[E_{F_{S_1}}\right]$.

En appliquant (3.2) sur $\begin{bmatrix} E_G, & E_{F_{S_1}} \end{bmatrix}$ et par les opérations élémentaires sur cette matrice, on obtient :

$$r\begin{bmatrix} E_G, & E_{F_{S_1}} \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ G^* & 0 \\ 0 & F_{S_1} \end{bmatrix} - r(G) - r(F_{S_1})$$

$$= r\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -G^* \\ 0 & F_{S_1} \end{bmatrix} - r(G) - r(F_{S_1})$$

$$= r\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & E_{T_1} \\ 0 & F_{S_1} \end{bmatrix} - r(G) - r(F_{S_1})$$

$$= n + r\begin{bmatrix} E_{T_1}, & F_{S_1} \end{bmatrix} - r(G) - r(F_{S_1})$$

$$= n - r(F_{S_1}). \tag{3.33}$$

D'autre part on a

$$r\left(E_{F_{S_1}}\right) = n - r(F_{S_1}) \tag{3.34}$$

Alors de (3.33) et (3.34), on conclut que $r\begin{bmatrix} E_G, & E_{F_{S_1}} \end{bmatrix} = r\left[E_{F_{S_1}}\right]$, ce qui prouve que $R(E_G) \subset R\left(E_{F_{S_1}}\right)$.

On a :

$$r(N) = r\begin{bmatrix} P - \frac{1}{2}(Y_0 + Y_0^*) & I_n & I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & E_{T_1} & F_{S_1} \\ 0 & E_{T_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{S_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(E_{T_1}) - r(F_{S_1}) - r[E_{T_1}, F_{S_1}]$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & I_n & I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & E_{T_1} & F_{S_1} \\ E_{T_1}P - \frac{1}{2}E_{T_1}\left(Y_0 + Y_0^*\right) & E_{T_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{S_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\left(E_{T_1}\right) - r\left(F_{S_1}\right) - r\left[E_{T_1}, F_{S_1}\right]$$

$$= n + r\begin{bmatrix} I_n & 0 & E_{T_1} & F_{S_1} \\ E_{T_1}P - \frac{1}{2}E_{T_1}\left(Y_0 + Y_0^*\right) & E_{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & F_{S_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\left(E_{T_1}\right) - r\left(F_{S_1}\right) - r\left[E_{T_1}, F_{S_1}\right]$$

$$= 2n + r\begin{bmatrix} E_{T_1} & E_{T_1}PE_{T_1} - \frac{1}{2}E_{T_1}\left(Y_0 + Y_0^*\right)E_{T_1} & E_{T_1}PF_{S_1} - \frac{1}{2}E_{T_1}\left(Y_0 + Y_0^*\right)F_{S_1} \\ F_{S_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\left(E_{T_1}\right) - r\left(F_{S_1}\right) - r\left[E_{T_1}, F_{S_1}\right]$$

$$= 2n + r\begin{bmatrix} E_{T_1} & 0 & E_{T_1}PF_{S_1} - E_{T_1}TM^+SF_{S_1} \\ F_{S_1} & F_{S_1}PE_{T_1} - F_{S_1}S^*\left(M^*\right)^+T^*E_{T_1} & 0 \end{bmatrix} - r\left(E_{T_1}\right) - r\left(F_{S_1}\right) - r\left[E_{T_1}, F_{S_1}\right], \tag{3.35}$$

Pour calculer : $r\begin{bmatrix} E_{T_1} & 0 & E_{T_1}PF_{S_1} - E_{T_1}TM^+SF_{S_1} \\ F_{S_1} & F_{S_1}PE_{T_1} - F_{S_1}S^*\left(M^*\right)^+T^*E_{T_1} & 0 \end{bmatrix}$, on applique le Théorème 2.2, alors

$$r\begin{bmatrix} E_{T_1} & 0 & E_{T_1}PF_{S_1} - E_{T_1}TM^+SF_{S_1} \\ F_{S_1} & F_{S_1}PE_{T_1} - F_{S_1}S^*\left(M^*\right)^+T^*E_{T_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\left(\begin{array}{c}\begin{bmatrix} E_{T_1} & 0 & E_{T_1}PF_{S_1} \\ F_{S_1} & F_{S_1}PE_{T_1} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{T_1} \\ 0 \end{bmatrix} M^{+} \begin{bmatrix} 0, & 0, & SF_{S_1} \end{bmatrix} - \\ \begin{bmatrix} 0 \\ F_{S_1}S^{*} \end{bmatrix} (M^{*})^{+} \begin{bmatrix} 0, & T^{*}E_{T_1}, & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right)$$

$$= r\begin{bmatrix} M^{*}MM^{*} & 0 & 0 & 0 & M^{*}SF_{S_1} \\ 0 & MM^{*}M & 0 & MT^{*}E_{T_1} & 0 \\ -E_{T_1}TM^{*} & 0 & -E_{T_1} & 0 & E_{T_1}PF_{S_1} \\ 0 & F_{S_1}S^{*}M & F_{S_1} & F_{S_1}PE_{T_1} & 0 \end{bmatrix} - 2r(M)$$

$$= r(Q_1) - 2r(M). \tag{3.36}$$

On substitue (3.36) dans (3.35), on obtient

$$r(N) = r(Q_1) - 2r(M) + 2n - r(E_{T_1}) - r(F_{S_1}) - r(G). \tag{3.37}$$

$$i_{\pm}(L) = i_{\pm}\begin{bmatrix} P - \frac{1}{2}(Y_0 + Y_0^{*}) & E_G & F_{E_{T_1}} & E_{F_{S_1}} \\ E_G & 0 & 0 & 0 \\ F_{E_{T_1}} & 0 & 0 & 0 \\ E_{F_{S_1}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} P - \frac{1}{2}(Y_0 + Y_0^{*}) & F_{E_{T_1}} & E_{F_{S_1}} \\ F_{E_{T_1}} & 0 & 0 \\ E_{F_{S_1}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} P-\frac{1}{2}\left(Y_0+Y_0^*\right) & I_n & I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & E_{T_1} & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 & F_{S_1} \\ 0 & E_{T_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{S_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\left(E_{T_1}\right) - r\left(F_{S_1}\right)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} P-\frac{1}{2}\left(Y_0+Y_0^*\right) & I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & -E_{T_1} & F_{S_1} \\ 0 & -E_{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & F_{S_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\left(E_{T_1}\right) - r\left(F_{S_1}\right)$$

$$= n + i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & -E_{T_1} & F_{S_1} \\ -E_{T_1} & 0 & -\frac{1}{2}E_{T_1}PF_{S_1}+\frac{1}{4}E_{T_1}\left(Y_0+Y_0^*\right)F_{S_1} \\ F_{S_1} & -\frac{1}{2}F_{S_1}PE_{T_1}+\frac{1}{4}F_{S_1}\left(Y_0+Y_0^*\right)E_{T_1} & 0 \end{bmatrix}$$
$$-r\left(E_{T_1}\right) - r\left(F_{S_1}\right)$$

$$= n + i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & -E_{T_1} & F_{S_1} \\ -E_{T_1} & 0 & -\frac{1}{2}E_{T_1}PF_{S_1}-\frac{1}{2}E_{T_1}TM^{+}SF_{S_1} \\ F_{S_1} & -\frac{1}{2}F_{S_1}PE_{T_1}-\frac{1}{2}F_{S_1}S^*\left(M^*\right)^{+}T^*E_{T_1} & 0 \end{bmatrix}$$
$$-r\left(E_{T_1}\right) - r\left(F_{S_1}\right), \tag{3.38}$$

pour calculer : $i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & -E_{T_1} & F_{S_1} \\ -E_{T_1} & 0 & -\frac{1}{2}E_{T_1}PF_{S_1}-\frac{1}{2}E_{T_1}TM^{+}SF_{S_1} \\ F_{S_1} & -\frac{1}{2}F_{S_1}PE_{T_1}-\frac{1}{2}F_{S_1}S^*\left(M^*\right)^{+}T^*E_{T_1} & 0 \end{bmatrix}$

on applique le lemme 3.8, alors

$$
i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & -E_{T_1} & F_{S_1} \\ -E_{T_1} & 0 & -\frac{1}{2}E_{T_1}PF_{S_1}-\frac{1}{2}E_{T_1}TM^{+}SF_{S_1} \\ F_{S_1} & -\frac{1}{2}F_{S_1}PE_{T_1}-\frac{1}{2}F_{S_1}S^{*}\left(M^{*}\right)^{+}T^{*}E_{T_1} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
=i_{\pm}\left(\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 & -E_{T_1} & F_{S_1} \\ -E_{T_1} & 0 & -\frac{1}{2}E_{T_1}PF_{S_1} \\ F_{S_1} & -\frac{1}{2}F_{S_1}PE_{T_1} & 0 \end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ E_{T_1}T \\ 0 \end{bmatrix}M^{+}\begin{bmatrix} 0, & 0, & SF_{S_1} \end{bmatrix}- \\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{S_1}S^{*} \end{bmatrix}\left(M^{*}\right)^{+}\begin{bmatrix} 0, & T^{*}E_{T_1}, & 0 \end{bmatrix}\end{array}\right)
$$

$$
=i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & M^{*}MM^{*} & 0 & 0 & M^{*}SF_{S_1} \\ MM^{*}M & 0 & 0 & -\frac{1}{2}MT^{*}E_{T_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{T_1} & F_{S_1} \\ 0 & -\frac{1}{2}M^{*}E_{T_1}T & -E_{T_1} & 0 & \frac{1}{2}E_{T_1}PF_{S_1} \\ MF_{S_1}S^{*} & 0 & F_{S_1} & \frac{1}{2}F_{S_1}PE_{T_1} & 0 \end{bmatrix}-r\left(M\right)
$$

$$
=i_{\pm}\left(Q_2\right)-r\left(M\right). \tag{3.39}
$$

On substitue (3.39) dans (3.38) on obtient

$$
i_{\pm}\left(L\right)=i_{\pm}\left(Q_2\right)+n-r\left(M\right)-r\left(E_{T_1}\right)-r\left(F_{S_1}\right). \tag{3.40}
$$

de la même manière, on obtient

$$
r\left(L\right)=r\left(Q_1\right)+2n-2r\left(M\right)-2r\left(E_{T_1}\right)-2r\left(F_{S_1}\right). \tag{3.41}
$$

Par substitution de (3.37), (3.40) et (3.41) dans (3.29)-(3.32) on obtient (3.24)-(3.27). ■

D'aprés le Théorème 3.1 et le lemme 3.1 on a le resultat.

3.3.2 Solution hermitienne définie (positive, négative, non positive, non négative) à rang minimal

Théorème 3.2 *Soient* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times q}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times q}$ *et* $P \in \mathbb{C}_H^n$. *et* G, Q_1, Q_2 *sont indiqués comme dans le théorème 3.1. Alors,*

a) Il existe $X \geq P$ *tel que* X *soit une solution hermitienne à rang minimal de* $AXB = C$ *si et seulement si :* $r(Q_1) = i_-(Q_2) + r(M)$,

b) Il existe $X \leq P$ *tel que* X *soit une solution hermitienne à rang minimal de* $AXB = C$ *si et seulement si :* $r(Q_1) = i_+(Q_2) + r(M)$,

c) Il existe $X \succ P$ *tel que* X *soit une solution hermitienne à rang minimal de* $AXB = C$ *si et seulement si :* $i_-(Q_2) = r(M) + r(E_{T_1}) + r(F_{S_1})$,

d) Il existe $X \prec P$ *tel que* X *soit une solution hermitienne à rang minimal de* $AXB = C$ *si et seulement si :* $i_+(Q_2) = r(M) + r(E_{T_1}) + r(F_{S_1})$,

e)Il existe une matrice nonsingulière $P-X$ *tel que* X *soit une solution hermitienne à rang minimal de* $AXB = C$ *si et seulement si :* $n + r(Q_1) \geq 2r(M) + r(E_{T_1}) + r(F_{S_1}) + r(G)$,

f) P *est une solution hermitienne à rang minimal de* $AXB = C$ *si et seulement si*

$$r(Q_1) = 2r(M).$$

Si P est la matrice nulle dans le théorème 3.2, nous avons la conclusion suivante

Corollaire 3.1 *Soient* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times q}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times q}$, $G = \begin{bmatrix} E_{T_1}, & F_{S_1} \end{bmatrix}$*.On définit*

$$R_1 = \begin{bmatrix} M^*MM^* & 0 & 0 & 0 & M^*SF_{S_1} \\ 0 & MM^*M & 0 & MT^*E_{T_1} & 0 \\ -E_{T_1}TM^* & 0 & -E_{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & F_{S_1}S^*M & F_{S_1} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & M^*MM^* & 0 & 0 & M^*SF_{S_1} \\ MM^*M & 0 & 0 & -\frac{1}{2}MT^*E_{T_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{T_1} & F_{S_1} \\ 0 & -\frac{1}{2}M^*E_{T_1}T & -E_{T_1} & 0 & 0 \\ MF_{S_1}S^* & 0 & F_{S_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors,

a) $AXB = C$ *possède une solution hermitienne définie non négative à rang minimal si et seulement si*

$$r(R_1) = i_-(R_2) + r(M),$$

b) $AXB = C$ *possède une solution hermitienne définie non positive à rang minimal si et seulement si*

$$r(R_1) = i_+(R_2) + r(M),$$

c) $AXB = C$ *possède une solution hermitienne définie positive à rang minimal si et seulement si*

$$i_-(R_2) = r(M) + r(E_{T_1}) + r(F_{S_1}),$$

d) $AXB = C$ *possède une solution hermitienne définie négative à rang minimal si et seulement si*

$$i_+(R_2) = r(M) + r(E_{T_1}) + r(F_{S_1}),$$

e) $AXB = C$ *possède une solution hermitienne non singulière à rang minimal si et seulement si*

$$n + r(R_1) \geq 2r(M) + r(E_{T_1}) + r(F_{S_1}) + r(G),$$

f) 0 *est la solution à rang minimal de* $AXB = C$ *si et seulement si* $r(R_1) = 2r(M)$.

Chapitre 4

Solution hermitienne commune à rang minimal des équations matricielles $A_1XA_1^* = B_1$ et $A_2XA_2^* = B_2$

4.1 Introduction

Considérons l'équation matricielles linéaire

$$AXA^* = B \tag{4.1}$$

où $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}_H^m$, sont données et $X \in \mathbb{C}_H^n$ est inconnue.

L'équation (4.1) est l'une des équations matricielles les plus connues dans la théorie des matrices et ses applications. Le problème de minimisation et maximisation de rang ou de l'inertie d'une matrice est un sujet essentiel dans la Théorie d'optimisation. Où par le rang ou l'inertie maximale ou minimale d'une expression matricielle on peut caracteriser :

1) Les dimensions maximals et minimals d'espaces image de l'expression matricielle.

2) Non singularité de la matrice lorsqu'elle est carrée.

3) Solvabilité de l'expression matricielle.

4) Classification de l'expression matricielle lorsqu'elle est hermitienne (la solution est définie positive, définie négative,...)

Beaucoup de résultats ont été établis sur la résolution de problèmes de minimisation de rang associés aux équations matricielles et leurs solutions. Par exemple dans [11], Y. Liu et Y. Tian, donnent la solution hermitienne partitionnée de (4.1) en 2×2 blocs, puis ils donnent des formules du rang maximal et minimal de sous matrices de cette solution hermitienne partitionnée, d'où ils obtiennent les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces sous matrices soient nulles ou uniques. Dans [12], Y. Liu.Y. Tian, et Y. Takane étudient l'équation (4.1), avec B soit hermitienne ou anti-hermitienne où ils donnent le rang maximal et minimal de matrices réelles X_0 et X_1 de la solution hermitienne ou anti hermitienne $X = X_0 + iX_1$. Plusieurs recherches sur cette équation sont trouvées dans la litérature, voir [13], [28], [29], [31], [35], [36], [37].

On conserve les mêmes notations introduits au chapitre 3.

Nous avons besoin des lemmes suivants, concernant le rang et l'inertie d'une matrice.

Lemme 4.1 *[22] Soient* $A \in \mathbb{C}_H^m$, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *et on note* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}$. *Alors,*

$i_\pm(M) = r(B) + i_\pm(E_B A E_B)$.

En particulier,

a) Si $A \geq 0$, *alors* $i_+(M) = r[A, B]$ *et* $i_-(M) = r(B)$,

b) Si $A \leq 0$, *alors* $i_+(M) = r(B)$ *et* $i_-(M) = r[A, B]$,

c) $i_\pm(A) \leq i_\pm(M) \leq i_\pm(A) + r(B)$.

Quelques formules utiles obtenues du lemme 4.1, sont données ci-dessous

$$i_\pm \begin{bmatrix} A & BF_P \\ F_P B^* & 0 \end{bmatrix} = i_\pm \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B^* & 0 & P^* \\ 0 & P & 0 \end{bmatrix} - r(P),$$

$$i_\pm \begin{bmatrix} E_Q A E_Q & E_Q B \\ B^* E_Q & D \end{bmatrix} = i_\pm \begin{bmatrix} A & B & Q \\ B^* & D & 0 \\ Q^* & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(Q).$$

Dans [26], la solution hermitienne à rang minimal de (4.1) est la matrice X qui minimise le rang de la différence $(B - AXA^*)$ c'est à dire :

$$r(B - AXA^*) = \min \tag{4.2}$$

La solution hermitienne à rang minimal de (4.1) est la solution de l'équation consistente

$$E_{T_1}\left(X - TM^+T^*\right)E_{T_1} = 0 \tag{4.3}$$

L'équation (4.3) est appelée l'équation normale associée à (4.2). Alors la solution hermitienne générale à rang minimal de (4.1) est donnée comme suit :

$$X = -TM^{+}T^{*} + T_1U + U^{*}T_1^{*}. \tag{4.4}$$

où $M = \begin{bmatrix} B & A \\ A^{*} & 0 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}$, $T_1 = TF_M$, et $U \in \mathbb{C}^{(m+n)\times n}$ sont arbitraires.

4.2 Solution hermitienne commune à rang minimal des équations matricielles $A_1XA_1^{*} = B_1$ et $A_2XA_2^{*} = B_2$

Dans cette section nous utilisons les formules de rang d'une matrice pour établir les conditions pour que la paire d'équations matricielles $A_1XA_1^{*} = B_1$ et $A_2XA_2^{*} = B_2$ aie une solution hermitienne commune à rang minimal. Aussi, nous étudions l'existence d'une matrice hermitienne satisfaisant les inégalités $X \succ P\,(\geq P,\ \prec P,\ \leq P)$ où $P \in \mathbb{C}_H^{n}$ est donnée.

Considérons la paire d'équations matricielles

$$A_1XA_1^{*} = B_1 \text{ et } A_2XA_2^{*} = B_2, \tag{4.5}$$

où $A_j \in \mathbb{C}^{m_j\times n}$, $B_j \in \mathbb{C}_H^{m_j}$, $j = 1, 2$.sont des matrices données et $X \in \mathbb{C}_H^{n}$ est inconnue.

On a besoin du lemme suivant

Lemme 4.2 *[23], [28] Soit* $M = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & A_1 \\ 0 & -C_2 & A_2 \\ A_1^{*} & A_2^{*} & 0 \end{bmatrix}$. *Alors la paire d'équations ma-*

tricielles $A_1X_1A_1^* = C_1$ *et* $A_2X_2A_2^* = C_2$ *possède une solution commune* $X \in \mathbb{C}_H^n$ *si et seulement si* $R(C_j) \subseteq R(A_j)$ *et* $r(M) = 2r(A)$, j *=1, 2,*

où $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$. *Dans ce cas la solution hermitienne générale commune de* $A_1X_1A_1^* = C_1$ *et* $A_2X_2A_2^* = C_2$ *est donnée sous la forme parametrique suivante:*

$$X = X_0 + F_AU_1 + (F_AU_1)^* + F_{A_1}U_2F_{A_2} + (F_{A_1}U_2F_{A_2})^*,$$

où X_0 *est une solution spécial de* $A_1X_1A_1^* = C_1$ *et* $A_2X_2A_2^* = C_2$, *et* U_1, U_2, $U_3 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *sont arbitraires.*

La solution hermitienne commune à rang minimal de la paire d'équations (4.5) est la solution hermitienne commune des équations matricielles consitentes

$$E_{T_{11}}XE_{T_{11}} = -E_{T_{11}}\left(T_1M_1^+T_1^*\right)E_{T_{11}} \text{ et } E_{T_{22}}XE_{T_{22}} = -E_{T_{22}}\left(T_2M_2^+T_2^*\right)E_{T_{22}}. \tag{4.6}$$

D'aprés le lemme 4.2, la solution hermitienne commune de (4.5) est donnée sous la forme parametrique suivante

$$X = X_0 + F_GU_1 + (F_GU_1)^* + F_{E_{T_{11}}}U_2F_{E_{T_{22}}} + \left(F_{E_{T_{11}}}U_2F_{E_{T_{22}}}\right)^*, \tag{4.7}$$

où $G^* = \begin{bmatrix} E_{T_{11}}, & E_{T_{22}} \end{bmatrix}$ et U_1, $U_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sont arbitraires.

Pour plus de commodité de représentation, la notation suivante pour l'ensemble de toutes les solutions hermitienne commune à rang minimal de (4.5) est adoptée

$$S = \left\{X \in \mathbb{C}_H^n / E_{T_{11}}XE_{T_{11}} = -E_{T_{11}}\left(T_1M_1^+T_1^*\right)E_{T_{11}},\, E_{T_{22}}XE_{T_{22}} = -E_{T_{22}}\left(T_2M_2^+T_2^*\right)E_{T_{22}}\right\}. \tag{4.8}$$

Lemme 4.3 *[34] Soit*

$$P(X,Y) = A - BX - (BX)^* - CYD - (CYD)^*, \tag{4.9}$$

où $A \in \mathbb{C}_H^m$, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times p}$ *et* $D \in \mathbb{C}^{q\times m}$ *sont données, et* $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $Y \in \mathbb{C}^{p\times q}$ *sont inconnues. Soient aussi*

$$M = \begin{bmatrix} A & B & C & D^* \\ B^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B^* & 0 & 0 \\ C^* & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} A & B & D^* \\ B^* & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} A & B & C & D^* \\ B^* & 0 & 0 & 0 \\ C^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} A & B & C & D^* \\ B^* & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors,

$$\max_{X,Y} r\left[P\left(X,Y\right)\right] = \min\left\{m,\ r\left(M\right),\ r\left(M_1\right),\ r\left(M_2\right)\right\}, \tag{4.10}$$

$$\min_{X,Y} r\left[P\left(X,Y\right)\right] = 2r\left(M\right) - 2r\left(B\right) + \max\left\{\begin{array}{c} s_+ + s_-,\ s_- + t_+, \\ s_+ + t_-,\ t_+ + t_- \end{array}\right\}, \tag{4.11}$$

$$\max_{X,Y} i_\pm\left[P\left(X,Y\right)\right] = \min\left\{i_\pm\left(M_1\right),\ i_\pm\left(M_2\right)\right\}, \tag{4.12}$$

$$\min_{X,Y} i_\pm\left[P\left(X,Y\right)\right] = r\left(M\right) - r\left(B\right) + \max\left\{s_\pm,\ t_\pm\right\}, \tag{4.13}$$

où $s_\pm = i_\pm\left(M_1\right) - r\left(N_1\right)$ *et* $t_\pm = i_\pm\left(M_2\right) - r\left(N_2\right)$.

Théorème 4.1 *Soient* $A_j \in \mathbb{C}^{m_j\times n}$, $B_j \in \mathbb{C}_H^{m_j}$, $j = 1,2$ *et* $P \in \mathbb{C}_H^n$ *sont données, on suppose que (4.5) a une solution hermitienne commune à rang minimal et* S *est indiqué comme dans (4.8). Soient*

$$Q_1 = \begin{bmatrix} M_1^*M_1M_1^* & 0 & 0 & M_1^*T_1^*E_{T_{11}} & 0 \\ 0 & M_2^*M_2M_2^* & 0 & 0 & M_2^*T_2^*E_{T_{22}} \\ -E_{T_{11}}T_1M_1^* & 0 & E_{T_{11}} & E_{T_{11}}PE_{T_{11}} & 0 \\ 0 & E_{T_{22}}T_2M_2^* & E_{T_{22}} & 0 & -E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} M_1^* M_1 M_1^* & 0 & M_1^* T_1^* E_{T_{11}} \\ -E_{T_{11}} T_1 M_1^* & E_{T_{11}} & E_{T_{11}} P E_{T_{11}} \\ 0 & E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} M_2^* M_2 M_2^* & 0 & M_2^* T_2^* E_{T_{22}} \\ E_{T_{22}} T_2 M_2^* & E_{T_{11}} & 0 \\ 0 & E_{T_{22}} & -E_{T_{22}} P E_{T_{22}} \end{bmatrix},$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} M_1^3 & 0 & M_1 T_1^* E_{T_{11}} \\ 0 & 0 & E_{T_{11}} \\ E_{T_{11}} T_1 M_1^* & E_{T_{11}} & -E_{T_{11}} P E_{T_{11}} \end{bmatrix},$$

$$Q_5 = \begin{bmatrix} M_2^3 & 0 & M_2 T_2^* E_{T_{22}} \\ 0 & 0 & E_{T_{22}} \\ E_{T_{22}} T_2 M_2^* & E_{T_{22}} & -E_{T_{22}} P E_{T_{22}} \end{bmatrix}.$$

Alors,

$$\max_{X \in S} r\left(P - X\right) = \min\left\{n,\ c_1,\ c_2,\ c_3\right\}, \tag{4.14}$$

$$\min_{X \in S} r\left(P - X\right) = 2r\left(Q_1\right) - 2r\left(M_1\right) - 2r\left(M_2\right) + \max\left\{s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4\right\}, \tag{4.15}$$

$$\max_{X \in S} i_{\pm}\left(P - X\right) = \min\left\{\begin{array}{c} n + i_{\pm}\left(Q_4\right) - i_{\pm}\left(M_1\right) - r\left(E_{T_{11}}\right), \\ n + i_{\pm}\left(Q_5\right) - i_{\pm}\left(M_2\right) - r\left(E_{T_{22}}\right) \end{array}\right\}, \tag{4.16}$$

$$\min_{X \in S} i_{\pm}\left(P - X\right) = r\left(Q_1\right) - r\left(M_1\right) - r\left(M_2\right) + \max\left\{\begin{array}{c} i_{\pm}\left(Q_4\right) - i_{\pm}\left(M_1\right) + r\left(M_1\right) - r\left(Q_2\right), \\ i_{\pm}\left(Q_5\right) - i_{\pm}\left(M_2\right) + r\left(M_2\right) - r\left(Q_3\right) \end{array}\right\}, \tag{4.17}$$

où

$$c_1 = 2n + r(Q_1) - r(E_{T_{11}}) - r(E_{T_{22}}) - r(G) - r(M_1) - r(M_2),$$

$$c_2 = 2n + r(Q_4) - r(M_1) - 2r(E_{T_{11}}), \qquad c_3 = 2n + r(Q_5) - r(M_2) - 2r(E_{T_{22}}),$$

$$s_1 = r(Q_4) - 2r(Q_2) + r(M_1), \qquad s_2 = r(Q_5) - 2r(Q_3) + r(M_2),$$

$$s_3 = i_+(Q_4) + i_-(Q_5) - r(Q_2) - r(Q_3) + i_-(M_1) + i_+(M_2),$$

$$s_4 = i_-(Q_4) + i_+(Q_5) - r(Q_2) - r(Q_3) + i_+(M_1) + i_-(M_2).$$

Preuve. Par substitution de (4.7) dans $P - X$ on obtient

$$P - X = P - X_0 - F_G U_1 - (F_G U_1)^* - F_{E_{T_{11}}} U_2 F_{E_{T_{22}}} - \left(F_{E_{T_{11}}} U_2 F_{E_{T_{22}}}\right)^*. \tag{4.18}$$

Soient

$$L = \begin{bmatrix} P - X_0 & F_G & F_{E_{T_{11}}} & F_{E_{T_{22}}} \\ F_G & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} P - X_0 & F_G & F_{E_{T_{11}}} \\ F_G & 0 & 0 \\ F_{E_{T_{11}}} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} P - X_0 & F_G & F_{E_{T_{22}}} \\ F_G & 0 & 0 \\ F_{E_{T_{22}}} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} P - X_0 & F_G & F_{E_{T_{11}}} & F_{E_{T_{22}}} \\ F_G & 0 & 0 & 0 \\ F_{E_{T_{11}}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} P - X_0 & F_G & F_{E_{T_{11}}} & F_{E_{T_{22}}} \\ F_G & 0 & 0 & 0 \\ F_{E_{T_{22}}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En appliquant le lemme 4.3 à (4.18) on trouve

$$\max_{X \in S} r(P - X) = \min\{n, r(L), r(G_1), r(G_2)\}, \tag{4.19}$$

$$\min_{X\in S} r\left(P-X\right)=2r\left(L\right)-2r\left(F_G\right)+\max\left\{t_1,\,t_2,\,t_3,\,t_4\right\}, \tag{4.20}$$

$$\max_{X\in S} i_{\pm}\left(P-X\right)=\min\left\{i_{\pm}\left(G_1\right),\,i_{\pm}\left(G_2\right)\right\}, \tag{4.21}$$

$$\min_{X\in S} i_{\pm}\left(P-X\right)=r\left(L\right)-r\left(F_G\right)+\max\left\{\begin{array}{c} i_{\pm}\left(G_1\right)-r\left(L_1\right), \\ i_{\pm}\left(G_2\right)-r\left(L_2\right) \end{array}\right\}, \tag{4.22}$$

où

$$t_1=r\left(G_1\right)-2r\left(L_1\right), \tag{4.23}$$

$$t_2=r\left(G_2\right)-2r\left(L_2\right), \tag{4.24}$$

$$t_3=i_{+}\left(G_1\right)+i_{-}\left(G_2\right)-r\left(L_1\right)-r\left(L_2\right), \tag{4.25}$$

$$t_4=i_{-}\left(G_1\right)+i_{+}\left(G_2\right)-r\left(L_1\right)-r\left(L_2\right). \tag{4.26}$$

Nous allons simplifier $r\left(L\right)$, $r\left(L_1\right)$, $r\left(L_2\right)$, $i_{\pm}\left(G_1\right)$, $i_{\pm}\left(G_2\right)$ en appliquant les trois types d'opérations élémentaires sur les matrices en blocs, opérations élémentaires de congruence d'une matrice en blocs, les lemmes 2.1, 4.1, et 3.7, et les théorèmes 2.1, et 2.2.

On montre d'abord que $R\left(F_G\right)\subseteq R\left(F_{E_{T_{11}}}\right)$ et $R\left(F_G\right)\subseteq R\left(F_{E_{T_{22}}}\right)$.

D'aprés le lemme 2.2, pour montrer que $R\left(F_G\right)\subseteq R\left(F_{E_{T_{11}}}\right)$ il suffit de montrer que $r\begin{bmatrix} F_G, & F_{E_{T_{11}}}\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}F_{E_{T_{11}}}\end{bmatrix}$.

En appliquant (3.2) sur $\begin{bmatrix} F_G, & F_{E_{T_{11}}}\end{bmatrix}$, et par les opérations élémentaires sur cette matrice, on obtient :

$$r\begin{bmatrix} F_G, & F_{E_{T_{11}}}\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ G^{*} & 0 \\ 0 & E_{T_{11}}\end{bmatrix}-r\left(G\right)-r\left(E_{T_{11}}\right)$$

$$= r\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -G^* \\ 0 & E_{T_{11}} \end{bmatrix} - r(G) - r(E_{T_{11}})$$

$$= r\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & E_{T_{11}} \\ 0 & E_{T_{22}} \end{bmatrix} - r(G) - r(E_{T_{11}})$$

$$= n + r\begin{bmatrix} E_{T_{11}}, & E_{T_{22}} \end{bmatrix} - r(G) - r(E_{T_{11}})$$

$$= n - r(E_{T_{11}}). \tag{4.27}$$

D'autre part on a :

$$r\left[F_{E_{T_{11}}}\right] = n - r(E_{T_{11}}). \tag{4.28}$$

Alors de (4.27) et (4.28), on conclut que $r\begin{bmatrix} F_G, & F_{E_{T_{11}}} \end{bmatrix} = r\left[F_{E_{T_{11}}}\right]$, ce qui prouve que $R(F_G) \subseteq R\left(F_{E_{T_{11}}}\right)$.

Et d'une manière similaire on montre que $R(F_G) \subseteq R\left(F_{E_{T_{22}}}\right)$.

On a :

$$r(L) = \begin{bmatrix} P - X_0 & F_G & F_{E_{T_{11}}} & F_{E_{T_{22}}} \\ F_G & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P - X_0 & F_{E_{T_{11}}} & F_{E_{T_{22}}} \\ F_G & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} P - X_0 & I_n & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 & G \\ 0 & E_{T_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix} - r(E_{T_{11}}) - r(E_{T_{22}}) - r(G)$$

$$= 2n+r\begin{bmatrix} E_{T_{11}} & 0 \\ E_{T_{22}} & E_{T_{22}}\left(X_0-P\right)G \end{bmatrix}-r\left(E_{T_{11}}\right)-r\left(E_{T_{22}}\right)-r\left(G\right)$$

$$= 2n+r\begin{bmatrix} E_{T_{11}} & 0 & 0 \\ E_{T_{22}} & E_{T_{22}}\left(X_0-P\right)E_{T_{11}} & E_{T_{22}}\left(X_0-P\right)E_{T_{22}} \end{bmatrix}-r\left(E_{T_{11}}\right)-r\left(E_{T_{22}}\right)-r\left(G\right)$$

$$= 2n+r\begin{bmatrix} E_{T_{11}} & -E_{T_{11}}\left(X_0-P\right)E_{T_{11}} & 0 \\ E_{T_{22}} & 0 & E_{T_{22}}\left(X_0-P\right)E_{T_{22}} \end{bmatrix}-r\left(E_{T_{11}}\right)-r\left(E_{T_{22}}\right)-r\left(G\right)$$

$$= 2n+r\begin{bmatrix} E_{T_{11}} & -E_{T_{11}}X_0E_{T_{11}}+E_{T_{11}}PE_{T_{11}} & 0 \\ E_{T_{22}} & 0 & E_{T_{22}}X_0E_{T_{22}}-E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix}$$

$$-r\left(E_{T_{11}}\right)-r\left(E_{T_{22}}\right)-r\left(G\right)$$

$$= 2n+r\begin{bmatrix} E_{T_{11}} & -E_{T_{11}}\left(T_1M_1^+T_1^*\right)E_{T_{11}}+E_{T_{11}}PE_{T_{11}} & 0 \\ E_{T_{22}} & 0 & E_{T_{22}}\left(T_2M_2^+T_2^*\right)E_{T_{22}}-E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix}$$
$$-r\left(E_{T_{11}}\right)-r\left(E_{T_{22}}\right)-r\left(G\right) \tag{4.29}$$

pour calculer: $r\begin{bmatrix} E_{T_{11}} & -E_{T_{11}}\left(T_1M_1^+T_1^*\right)E_{T_{11}}+E_{T_{11}}PE_{T_{11}} & 0 \\ E_{T_{22}} & 0 & E_{T_{22}}\left(T_2M_2^+T_2^*\right)E_{T_{22}}-E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix}$,
on applique le Théorème 2.2, alors

$$r\begin{bmatrix} E_{T_{11}} & -E_{T_{11}}\left(T_1M_1^+T_1^*\right)E_{T_{11}}+E_{T_{11}}PE_{T_{11}} & 0 \\ E_{T_{22}} & 0 & E_{T_{22}}\left(T_2M_2^+T_2^*\right)E_{T_{22}}-E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix}$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} E_{T_{11}} & E_{T_{11}}PE_{T_{11}} & 0 \\ E_{T_{22}} & 0 & -E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{T_{11}}T_1 \\ 0 \end{bmatrix} M_1^{+}\begin{bmatrix} 0, & T_1^{*}E_{T_{11}}, & 0 \end{bmatrix} \right.$$
$$\left. - \begin{bmatrix} 0 \\ E_{T_{22}}T_2 \end{bmatrix} M_2^{+}\begin{bmatrix} 0, & 0, & T_2^{*}E_{T_{22}} \end{bmatrix}\right)$$

$$= r\begin{bmatrix} M_1^{*}M_1M_1^{*} & 0 & 0 & M_1^{*}T_1^{*}E_{T_{11}} & 0 \\ 0 & M_2^{*}M_2M_2^{*} & 0 & 0 & M_2^{*}T_2^{*}E_{T_{22}} \\ -E_{T_{11}}T_1M_1^{*} & 0 & E_{T_{11}} & E_{T_{11}}PE_{T_{11}} & 0 \\ 0 & E_{T_{22}}T_2M_2^{*} & E_{T_{22}} & 0 & -E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix} - r\left(M_1\right) - r\left(M_2\right)$$
$$= r\left(Q_1\right) - r\left(M_1\right) - r\left(M_2\right) \tag{4.30}$$

on substitue (4.30) dans (4.29) on trouve

$$r\left(L\right) = 2n + r\left(Q_1\right) - r\left(E_{T_{11}}\right) - r\left(E_{T_{22}}\right) - r\left(G\right) - r\left(M_1\right) - r\left(M_2\right), \tag{4.31}$$

$$r\left(L_1\right) = r\begin{bmatrix} P - X_0 & F_G & F_{E_{T_{11}}} & F_{E_{T_{22}}} \\ F_G & 0 & 0 & 0 \\ F_{E_{T_{11}}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} P - X_0 & F_{E_{T_{11}}} & F_{E_{T_{22}}} \\ F_{E_{T_{11}}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} P - X_0 & I_n & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 & E_{T_{11}} \\ 0 & E_{T_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix} - 2r\left(E_{T_{11}}\right) - r\left(E_{T_{22}}\right)$$

$$= 2n + r\begin{bmatrix} E_{T_{11}} & -E_{T_{11}}\left(X_0 - P\right)E_{T_{11}} \\ E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix} - 2r\left(E_{T_{11}}\right) - r\left(E_{T_{22}}\right)$$

$$= 2n + r \begin{bmatrix} E_{T_{11}} & -E_{T_{11}} X_0 E_{T_{11}} + E_{T_{11}} P E_{T_{11}} \\ E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix} - 2r\left(E_{T_{11}}\right) - r\left(E_{T_{22}}\right)$$

$$= 2n + r \begin{bmatrix} E_{T_{11}} & -E_{T_{11}} \left(T_1 M_1^{+} T_1^{*}\right) E_{T_{11}} + E_{T_{11}} P E_{T_{11}} \\ E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix} - 2r\left(E_{T_{11}}\right) - r\left(E_{T_{22}}\right) \tag{4.32}$$

pour calculer : $r \begin{bmatrix} E_{T_{11}} & -E_{T_{11}} \left(T_1 M_1^{+} T_1^{*}\right) E_{T_{11}} + E_{T_{11}} P E_{T_{11}} \\ E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix}$, on applique le Théorème 2.1, alors

$$r \begin{bmatrix} E_{T_{11}} & -E_{T_{11}} \left(T_1 M_1^{+} T_1^{*}\right) E_{T_{11}} + E_{T_{11}} P E_{T_{11}} \\ E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r \left(\begin{bmatrix} E_{T_{11}} & E_{T_{11}} P E_{T_{11}} \\ E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -E_{T_{11}} T_1 \\ 0 \end{bmatrix} M_1^{+} \begin{bmatrix} 0, & T_1^{*} E_{T_{11}} \end{bmatrix} \right)$$

$$= r \begin{bmatrix} M_1^{*} M_1 M_1^{*} & 0 & M_1^{*} T_1^{*} E_{T_{11}} \\ -E_{T_{11}} T_1 M_1^{*} & E_{T_{11}} & E_{T_{11}} P E_{T_{11}} \\ 0 & E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix} - r\left(M_1\right)$$

$$= r\left(Q_2\right) - r\left(M_1\right) \tag{4.33}$$

on substitue (4.33) dans (4.32) on trouve

$$r\left(L_1\right) = 2n + r\left(Q_2\right) - 2r\left(E_{T_{11}}\right) - r\left(E_{T_{22}}\right) - r\left(M_1\right), \tag{4.34}$$

$$r\left(L_2\right)=r\begin{bmatrix} P-X_0 & F_G & F_{E_{T_{11}}} & F_{E_{T_{22}}} \\ F_G & 0 & 0 & 0 \\ F_{E_{T_{22}}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} P-X_0 & F_{E_{T_{11}}} & F_{E_{T_{22}}} \\ F_{E_{T_{22}}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=r\begin{bmatrix} P-X_0 & I_n & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 & E_{T_{22}} \\ 0 & E_{T_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix}-r\left(E_{T_{11}}\right)-2r\left(E_{T_{22}}\right)$$

$$=2n+r\begin{bmatrix} E_{T_{11}} & 0 \\ E_{T_{22}} & E_{T_{22}}\left(X_0-P\right)E_{T_{22}} \end{bmatrix}-r\left(E_{T_{11}}\right)-2r\left(E_{T_{22}}\right)$$

$$=2n+r\begin{bmatrix} E_{T_{11}} & 0 \\ E_{T_{22}} & E_{T_{22}}X_0E_{T_{22}}-E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix}-r\left(E_{T_{11}}\right)-2r\left(E_{T_{22}}\right)$$

$$=2n+r\begin{bmatrix} E_{T_{11}} & 0 \\ E_{T_{22}} & -E_{T_{22}}\left(T_2M_2^+T_2^*\right)E_{T_{22}}-E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix}-r\left(E_{T_{11}}\right)-2r\left(E_{T_{22}}\right) \tag{4.35}$$

$$r\begin{bmatrix} E_{T_{11}} & 0 \\ E_{T_{22}} & -E_{T_{22}}\left(T_2M_2^+T_2^*\right)E_{T_{22}}-E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix}$$

$$=r\left(\begin{bmatrix} E_{T_{11}} & 0 \\ E_{T_{22}} & -E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ E_{T_{22}}T_2 \end{bmatrix}M_2^+\begin{bmatrix} 0, & T_2^*E_{T_{22}} \end{bmatrix}\right)$$

$$=r\begin{bmatrix} M_2^*M_2M_2^* & 0 & M_2^*T_2^*E_{T_{22}} \\ E_{T_{22}}T_2M_2^* & E_{T_{11}} & 0 \\ 0 & E_{T_{22}} & -E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix}-r\left(M_2\right)$$

$$=r\left(Q_3\right)-r\left(M_2\right) \tag{4.36}$$

on substitue (4.36) dans (4.35) on obtient

$$r\left(L_2\right)=2n+r\left(Q_3\right)-r\left(E_{T_{11}}\right)-2r\left(E_{T_{22}}\right)-r\left(M_2\right), \tag{4.37}$$

$$i_{\pm}\left(G_1\right)=i_{\pm}\begin{bmatrix} P-X_0 & F_G & F_{E_{T_{11}}} \\ F_G & 0 & 0 \\ F_{E_{T_{11}}} & 0 & 0 \end{bmatrix}=i_{\pm}\begin{bmatrix} P-X_0 & F_{E_{T_{11}}} \\ F_{E_{T_{11}}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$=i_{\pm}\begin{bmatrix} P-X_0 & I_n & 0 \\ I_n & 0 & E_{T_{11}} \\ 0 & E_{T_{11}} & 0 \end{bmatrix}-r\left(E_{T_{11}}\right)$$

$$=i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & I_n & \frac{1}{2}\left(X_0-P\right)E_{T_{11}} \\ I_n & 0 & E_{T_{11}} \\ \frac{1}{2}E_{T_{11}}\left(X_0-P\right) & E_{T_{11}} & 0 \end{bmatrix}-r\left(E_{T_{11}}\right)$$

$$=n+i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & E_{T_{11}} \\ E_{T_{11}} & E_{T_{11}}\left(X_0-P\right)E_{T_{11}} \end{bmatrix}-r\left(E_{T_{11}}\right)$$

$$=n+i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & E_{T_{11}} \\ E_{T_{11}} & -E_{T_{11}}\left(T_1M_1^{+}T_1^{*}\right)E_{T_{11}}+E_{T_{11}}PE_{T_{11}} \end{bmatrix}-r\left(E_{T_{11}}\right)$$

pour calculer : $i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & E_{T_{11}} \\ E_{T_{11}} & -E_{T_{11}}\left(T_1M_1^{+}T_1^{*}\right)E_{T_{11}}+E_{T_{11}}PE_{T_{11}} \end{bmatrix}$, on applique le lemme 3.7, alors

$$i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & E_{T_{11}} \\ E_{T_{11}} & -E_{T_{11}}\left(T_1M_1^{+}T_1^{*}\right)E_{T_{11}}+E_{T_{11}}PE_{T_{11}} \end{bmatrix}$$

$$=i_{\pm}\left(\begin{bmatrix} 0 & E_{T_{11}} \\ E_{T_{11}} & -E_{T_{11}}PE_{T_{11}} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ E_{T_{11}}T_1 \end{bmatrix}M_1^{+}\begin{bmatrix} 0, & T_1^{*}E_{T_{11}} \end{bmatrix}\right),$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} M_1^3 & 0 & M_1T_1^*E_{T_{11}} \\ 0 & 0 & E_{T_{11}} \\ E_{T_{11}}T_1M_1^* & E_{T_{11}} & -E_{T_{11}}PE_{T_{11}} \end{bmatrix} - i_{\pm}(M_1).$$

par substitution ci-dessus on obtient

$$i_{\pm}(G_1) = n + i_{\pm}(Q_4) - i_{\pm}(M_1) - r(E_{T_{11}}), \tag{4.38}$$

$$i_{\pm}(G_2) = i_{\pm}\begin{bmatrix} P-X_0 & F_G & F_{E_{T_{22}}} \\ F_G & 0 & 0 \\ F_{E_{T_{22}}} & 0 & 0 \end{bmatrix} = i_{\pm}\begin{bmatrix} P-X_0 & F_{E_{T_{22}}} \\ F_{E_{T_{22}}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} P-X_0 & I_n & 0 \\ I_n & 0 & E_{T_{22}} \\ 0 & E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix} - r(E_{T_{22}})$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & I_n & \frac{1}{2}(X_0-P)E_{T_{22}} \\ I_n & 0 & E_{T_{22}} \\ \frac{1}{2}E_{T_{22}}(X_0-P) & E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix} - r(E_{T_{22}})$$

$$= n + i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & E_{T_{22}} \\ E_{T_{22}} & E_{T_{22}}(X_0-P)E_{T_{22}} \end{bmatrix} - r(E_{T_{22}})$$

$$= n + i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & E_{T_{22}} \\ E_{T_{22}} & -E_{T_{22}}\left(T_2M_2^+T_2^*\right)E_{T_{22}} - E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix} - r(E_{T_{22}})$$

pour calculer : $i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & E_{T_{22}} \\ E_{T_{22}} & -E_{T_{22}}\left(T_2M_2^+T_2^*\right)E_{T_{22}} - E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix}$, on applique le lemme 3.7, alors

$$i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & E_{T_{22}} \\ E_{T_{22}} & -E_{T_{22}}\left(T_2M_2^{+}T_2^{*}\right)E_{T_{22}} - E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix}$$

$$= i_{\pm}\left(\begin{bmatrix} 0 & E_{T_{22}} \\ E_{T_{22}} & -E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ E_{T_{22}}T_2 \end{bmatrix} M_2^{+} \begin{bmatrix} 0, & T_2^{*}E_{T_{22}} \end{bmatrix}\right)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} M_2^{3} & 0 & M_2T_2^{*}E_{T_{22}} \\ 0 & 0 & E_{T_{22}} \\ E_{T_{22}}T_2M_2^{*} & E_{T_{22}} & -E_{T_{22}}PE_{T_{22}} \end{bmatrix} - i_{\pm}\left(M_2\right)$$

par substitution ci-dessus, on obtient :

$$i_{\pm}\left(G_2\right) = n + i_{\pm}\left(Q_5\right) - i_{\pm}\left(M_2\right) - r\left(E_{T_{22}}\right). \tag{4.39}$$

par conséquent, on a

$$r\left(G_1\right) = 2n + r\left(Q_4\right) - r\left(M_1\right) - 2r\left(E_{T_{11}}\right), \tag{4.40}$$

$$r\left(G_2\right) = 2n + r\left(Q_5\right) - r\left(M_2\right) - 2r\left(E_{T_{22}}\right). \tag{4.41}$$

on substitue les resultats ci-dessus dans (4.23)-(4.26) on trouve

$$t_1 = r\left(Q_1\right) - 2r\left(Q_2\right) + r\left(M_1\right) + 2r\left(E_{T_{11}}\right) + 2r\left(E_{T_{22}}\right) - 2n, \tag{4.42}$$

$$t_2 = r\left(Q_5\right) - 2r\left(Q_3\right) + r\left(M_2\right) + 2r\left(E_{T_{11}}\right) + 2r\left(E_{T_{22}}\right) - 2n, \tag{4.43}$$

$$t_3 = i_{+}\left(Q_4\right) - i_{-}\left(Q_5\right) - r\left(Q_3\right) - r\left(Q_2\right) + 2r\left(E_{T_{11}}\right) + 2r\left(E_{T_{22}}\right) + i_{-}\left(M_1\right) + i_{+}\left(M_2\right) - 2n, \tag{4.44}$$

$$t_4 = i_{-}\left(Q_4\right) + i_{+}\left(Q_5\right) - r\left(Q_3\right) - r\left(Q_2\right) + 2r\left(E_{T_{11}}\right) + 2r\left(E_{T_{22}}\right) + i_{+}\left(M_1\right) + i_{-}\left(M_2\right) - 2n. \tag{4.45}$$

on substitue (4.42)-(4.45) dans (4.19)-(4.22) on trouve (4.14)-(4.17). ■

D'aprés le Théorème 4.1 et le lemme 3.1 on a le résultat :

Théorème 4.2 *Soient* $A_j \in \mathbb{C}^{m_j \times n}$, $B_j \in \mathbb{C}_H^{m_j}$, $j = 1,2$ *et* $P \in \mathbb{C}_H^n$ *sont données, on suppose que (4.5) admet une solution hermitienne commune à rang minimal et* S *est indiqué comme dans (4.8). Alors,*

a) L'équation (4.5) possède une solution hermitienne commune à rang minimal $X \geq P$ *si et seulement si*

$$\begin{aligned} r(Q_1) &= r(Q_2) + r(M_2) = r(Q_3) + r(M_1), \\ Q_4 &\geq 0, \qquad Q_5 \geq 0, \qquad M_1 \leq 0, \qquad M_2 \leq 0. \end{aligned}$$

b) L'équation (4.5) possède une solution hermitienne commune à rang minimal $X \leq P$ *si et seulement si*

$$\begin{aligned} r(Q_1) &= r(Q_2) + r(M_2) = r(Q_3) + r(M_1), \\ Q_4 &\geq 0, \qquad Q_5 \geq 0, \qquad M_1 \geq 0, \qquad M_2 \geq 0. \end{aligned}$$

c) L'équation (4.5) possède une solution hermitienne commune à rang minimal $X \succ P$ *si et seulement si*

$$i_-(Q_4) = i_-(M_1) + r(E_{T_{11}}), \quad i_-(Q_5) = i_-(M_2) + r(E_{T_{22}}).$$

d) L'équation (4.5) possède une solution hermitienne commune à rang minimal $X \prec P$ *si et seulement si*

$$i_+(Q_4) = i_+(M_1) + r(E_{T_{11}}), \quad i_+(Q_5) = i_+(M_2) + r(E_{T_{22}}).$$

e) Il existe une matrice non singulière $P - X$ de telle sorte que X soit une solution hermitienne commune à rang minimal de (4.5) si et seulement si

$$\begin{aligned} n + r(Q_1) &\geq r(E_{T_{11}}) + r(E_{T_{22}}) + r(G) + r(M_1) + r(M_2), \\ n + r(Q_4) &\geq r(M_1) + 2r(E_{T_{11}}) \qquad et \qquad n + r(Q_5) \geq r(M_2) + 2r(E_{T_{22}}). \end{aligned}$$

4.3 Solution hermitienne commune définie (positive, négative, non positive, non négative) à rang minimal

Si P est la matrice nulle dans le théorème 4.2 , nous pouvons obtenir des conditions équivalentes pour l'existence de solution hermitienne commune définie positive (non positive, négative, non négative ou nulle) à rang minimal de (4.5).

Corollaire 4.1 *Soient $A_j \in \mathbb{C}^{m_j \times n}$, $B_j \in \mathbb{C}_H^{m_j}$, $j = 1, 2$ sont données, on suppose que (4.5) a une solution hermitienne commune à rang minimal et S est indiqué comme dans (4.8). On définit*

$$R_1 = \begin{bmatrix} M_1^* M_1 M_1^* & 0 & 0 & M_1^* T_1^* E_{T_{11}} & 0 \\ 0 & M_2^* M_2 M_2^* & 0 & 0 & M_2^* T_2^* E_{T_{22}} \\ -E_{T_{11}} T_1 M_1^* & 0 & E_{T_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & E_{T_{22}} T_2 M_2^* & E_{T_{22}} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} M_1^* M_1 M_1^* & 0 & M_1^* T_1^* E_{T_{11}} \\ -E_{T_{11}} T_1 M_1^* & E_{T_{11}} & 0 \\ 0 & E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} M_2^* M_2 M_2^* & 0 & M_2^* T_2^* E_{T_{22}} \\ E_{T_{22}} T_2 M_2^* & E_{T_{11}} & 0 \\ 0 & E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} M_1^3 & 0 & M_1 T_1^* E_{T_{11}} \\ 0 & 0 & E_{T_{11}} \\ E_{T_{11}} T_1 M_1^* & E_{T_{11}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_5 = \begin{bmatrix} M_2^3 & 0 & M_2 T_2^* E_{T_{22}} \\ 0 & 0 & E_{T_{22}} \\ E_{T_{22}} T_2 M_2^* & E_{T_{22}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors,

a) L'équation (4.5) possède une solution hermitienne commune définie positive à rang minimal si et seulement si : $i_-(R_4) = i_-(M_1) + r(E_{T_{11}}), \quad i_-(R_5) = i_-(M_2) + r(E_{T_{22}})$.

b) L'équation (4.5) possède une solution hermitienne commune définie négative à rang minimal si et seulement si : $i_+(R_4) = i_+(M_1) + r(E_{T_{11}}), \quad i_+(R_5) = i_+(M_2) + r(E_{T_{22}})$.

c) L'équation (4.5) possède une solution hermitienne commune définie non positive à rang minimal si et seulement si : $r(R_1) = r(R_2) + r(M_2) = r(R_3) + r(M_1), \ R_4 \geq 0, \ R_5 \geq 0, M_1 \geq 0, \ M_2 \geq 0$

d) L'équation (4.5) possède une solution hermitienne commune définie non négative à rang minimal si et seulement si : $r(R_1) = r(R_2) + r(M_2) = r(R_3) + r(M_1), \ R_4 \geq 0, \ R_5 \geq 0, M_1 \leq 0, \ M_2 \leq 0.$

e) Il existe une solution hermitienne commune non singulière à rang minimal de (4.5) si et seulement si : $n + r(R_1) \geq r(E_{T_{11}}) + r(E_{T_{22}}) + r(G) + r(M_1) + r(M_2)$,

$$n + r\left(R_4\right) \geq r\left(M_1\right) + 2r\left(E_{T_{11}}\right) \quad et \quad n + r\left(R_5\right) \geq r\left(M_2\right) + 2r\left(E_{T_{22}}\right).$$

Bibliographie

[1] S.C. Alexandar, V.M.Gradimir, *Positive definite solutions of some matrix equations*, Linear Algebra Appl. **429** (2008) 2401-2414.

[2] A. Ben Israel and T. Greville, *Generalized Inverse ,Theory and Applications*, Kreiger, (1980).

[3] S.L. Cambell and C. D. Meyer, *Generalized Inverse of Linear Transformations*, Society for industrial and applied Mathematics, (2009).

[4] X. Fu Liu, Hu Yang, *An expression of the general common least squares solution to a pair of matrix equations with applications*, Comp. math. appl, **61** (2011), 3071-3078.

[5] J. Gross, *Nonnegative-definite and positive definite solutions to the matrix equation* $AXA^* = B$*-revisited*, Linear Algebra Appl. **321** (2000), 123-129.

[6] S. Guerarra and S. Guedjiba, *Common least-rank solution of matrix equations* $A_1X_1B_1 = C_1$ *and* $A_2X_2B_2 = C_2$ *with applications*, Facta universitatis (Niš). Ser. Math. Inform, **29** (2014), 313-323.

[7] S. Guerarra and S. Guedjiba, *Common Hermitian least-rank solution of matrix equa-*

tions $A_1XA_1^* = B_1$ and $A_2XA_2^* = B_2$ subject to inequality restrictions, Facta universitatis (Niš). Ser. Math. Inform, **30** (2015), 539-554.

[8] S. Karanasios and D. Pappas, *Generalized inverses and special type operator algebras*, Facta universitatis (Niš).Ser. Math. Inform, **21** (2006), 41-48.

[9] C.G. Khatri, S.K.Mitra, *Hermitian and nonnegative definite solutions of linear matrix equations*, SIAM J. Appl. Math. **31**(1976) 579-585.

[10] Y. Liu, *Ranks of least squares solutions of the matrix equation $AXB = C$*, Comp. math. appl, **55** (2008), 1270-1278.

[11] Y. Liu.Y. Tian, *Extremal ranks of submatrices in an Hermitian solution to the matrix equation $AXA^* = B$ with applications*, J. Appl. Math. Comput. **32** (2010), 289-301.

[12] Y. Liu.Y. Tian, Y. Takane, *Ranks of Hermitian and skew-Hermitian solutions to the matrix equation $AXA^* = B$*, Linear Algebra Appl. **431** (2009), 2359-2372.

[13] Y. Liu and Y. Tian, *More on extremal ranks of the matrix expressions $A - BX \pm X^*B^*$ with statistical applications*, Numer. Linear algebra Appl. **15** (2008), 307-325.

[14] G. Marsaglia, G.P.H. Styan, *Equalities and inequalities for rank of matrices*, Linear Multilinear Algebra **2** (1974) 269-292.

[15] S. K. Mitra, *A pair of of simultaneous linear matrix equations and a matrix programming problem*, Linear Algebra Appl, **131** (1990), 97-123.

[16] S. K. Mitra, *Common solution to a pair of linear matrix equations $A_1X_1B_1 = C_1$ and $A_2X_2B_2 = C_2$*, Proc. Cambridge philos, Soc **74** (1973), 213-216.

[17] A. Navarra, P. L. Odell, D. M. Yong, *A representation of the general common solution* $A_1X_1B_1 = C_1$ *and* $A_2X_2B_2 = C_2$ *with applications*, Comp. Math. Appl, **41** (2001), 929-935.

[18] A.B. Özgüler, N. Akar, *A common solution to a pair of linear matrix equations over a principal ideal domain*, Linear Algebra Appl. **144** (1991) 85-99.

[19] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Proc. camb. Phil. Soc, **52** (1955).

[20] P. S. Stanimirović, *G-inverses and canonical forms, Facta universitatis (Niš). Ser. Math. Inform,* **15** (2000), 1-14.

[21] Y. Tian, *Relations between least squares and least rank solution of the matrix equations* $AXB = C$. Appl. math. comput, **219** (2013), 10293-10301.

[22] Y. Tian, *Equalities and inequalities for inertias of Hermitian matrices with applications*, Linear Algebra Appl. **433** (2010), 263-296.

[23] Y. Tian, *Maximization and minimization of the rank and inertias of the Hermitian matrix expression* $A - BX - (BX)^*$ *with applications*, Linear Algebra Appl. **434** (2011), 2109-2139.

[24] Y. Tian, *Rank Equalities Related to Generalized Inverses of Matrices and Their Applications*, Master Thesis, Montreal, Quebec, Canada (2000).

[25] Y. Tian, *The minimal rank of the matrix expression* $A - BX - YC$, Missouri. J. Math. Sci. **14** (2002), 40-48.

[26] Y. Tian, *Least-squares solutions and least-rank solutions of the matrix equation $AXA^* = B$ and their relations*, Numer. Linear Algebra Appl. **20** (2013), 713-722.

[27] Y. Tian, *The maximal and minimal ranks of some expressions of generalized inverses of matrices*, Southeast Asian Bull. Math, **25** (2002), 745-755.

[28] Y. Tian, *Some optimization problems on ranks and inertias of matrix-valued functions subject to linear matrix equation restrictions*, Banach J. Math. Anal. **8** (2014), no 1, 148-178.

[29] Y. Tian, *Rank and inertia of submarices of the Moore-Penrose inverse of a Hermitian matrix*, Electron. J. Linear Algebra. **20** (2010), 226-240.

[30] Y. Tian, S. Cheng, *The maximal and minimal ranks of $A - BXC$ with applications*, N. Y. J. Math. **9** (2003), 345-362.

[31] M. Wei and Q. Wang, *On rank-constrained Hermitian nonnegative definite least squares solutions to the matrix equation $AXA^* = B$*, Int. J. Comput. Math. **84** (2007), 945-952.

[32] H. Yanai, K. Takeuchi, Y. Takane, *Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition*. Springer, 2011.

[33] F. Zhang, *Matrix Theory Basic Results and Techniques*, Second Edition, Springer, 2011.

[34] F. Zhang, Y. Li and J. Zhao, *Common Hermitian least squares solutions of matrix equations $A_1XA_1^* = B_1$ and $A_2XA_2^* = B_2$ subject to inequality restrictions*, Comput. Math. Appl. **62** (2011), 2424-2433.

[35] X. Zhang, *The general common Hermitian nonnegative definite solution to the matrix equation $AXA^* = BB^*$ and $CXC^* = DD^*$ with applications in statistics*, J. Multivariate Anal. **93** (2005), 257-266.

[36] X. Zhang and M. Cheng, *The rank-constrained Hermitian nonnegative-definite and positive-definite solutions to the matrix equation $AXA^* = B$*, Linear Algebra Appl. **370** (2003), 163-174.

[37] X. Zhang and M. Cheng, *The general common nonnegative-definite and positive-definite solutions to the matrix equations $AXA^* = BB^*$ and $CXC^* = DD^*$*, Applied Mathematics letters.**17** (2004), 543-547.

Résumé

Résoudre une équation matricielle est l'un des problèmes principaux du calcul matriciel. Si l'équation matricielle est non consistente nous essayons de trouver sa solution approchée d'aprés deux outils bien connus pour mesurer l'optimisation de cette solution qui sont : la solution à moindres carrées et la solution à rang minimal. Le concept de la solution à rang minimal a été proposé d'abord par Yongge Tian en étudiant le rang minimal de l'expression matricielle linéaire $C - AXB$. L'équation $AXB = C$ est l'une des équations matricielles les plus connues dans la théorie des matrices et ses applications. Pour cette importance, nous étudions cette équation dans de nombreux cas.

En premier lieu, nous étudions la solution commune à rang minimal des équations $A_1XB_1 = C_1$ et $A_2XB_2 = C_2$, et nous donnons l'expression de cette solution, aussi nous donnons des conditions pour que l'équation $AXB = C$ aie une solution hermitienne à rang minimal. En plus, nous donnons l'expression de cette solution hermitienne.

En deuxième lieu, nous donnons des conditions d'existence d'une solution hermitienne définie (positive, négative, nonpositive, nonnégative) à rang minimal de l'équation matricielle $AXB = C$.

Finalement, nous nous intéressons à l'équation matricielle $AXA^* = B$, où nous donnons des conditions d'existence de la solution hermitienne commune définie (positive, négative, nonpositive, nonnégative) à rang minimal du la paire d'équations $A_1XA_1^* = B_1$ et $A_2XA_2^* = B_2$.

Mots clés : équations matricielles, l'inverse de Moore Penrose, rang, Inertie.

MSC [2010]: 15A24, 15A03, 15A09, 15B57.

Abstract

Solving matrix equation is one of the key problems of matrix computation. If the matrix equation is inconsistent we try to find its approximate solution, the two well-known objective functions for measuring the optimality of approximation solution is the least squares solution and the least rank solution. The concept of the least rank solutions of matrix equations first was proposed by Yongge Tian in studying the minimal rank of the linear matrix expression $C - AXB$. The equation $AXB = C$ is one of the best known matrix equations in matrix theory and its applications. For this importance, we study this equation in many parts,

In the first one, we study the common least-rank solution of the pair of matrix equations $A_1XB_1 = C_1$ and $A_2XB_2 = C_2$, and give the expression of this solution, also we give conditions for the matrix equation $AXB = C$ to have a hermitian least-rank solution, in addition we investigate the expression of this hermitian solution.

In the second part we give necessary and sufficient conditions for the existence of positive (nonnegative, negative, nonpositive) definite least-rank solution to $AXB = C$.

Finally, we are interessed by the matrix equation $AXA^* = B$, where we give conditions for the existence of common hermitian positive (nonnegative, negative, nonpositive) definite least-rank solution to $A_1XA_1^* = B_1$ and $A_2XA_2^* = B_2$.

Keywords: Matrix equation, Moore Penrose Inverse, rank, Inertia.

MSC [2010]: 15A24, 15A03, 15A09, 15B57.