



Université Batna 2 – Mostefa Ben Boulaïd
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil



Thèse

Préparée au sein du (Laboratoire de Génie Civil, Interactions Risques et Structures)

Présentée pour l'obtention du diplôme de :
Doctorat en Sciences en Génie Civil
Option : Structures et Géo matériaux

Sous le Thème :

**Evaluation de la rigidité des poteaux élancés en béton armé
de section carrée et 'L' soumis à la flexion composée et
déviée**

Présentée par :

HAMZA OUI Leila

Devant le jury composé de :

M. LAHBARI Nouredine	Prof.	Université de Batna2	Président
M. BOUZID Tayeb	MCA.	Université de Batna 2	Rapporteur
M. BEROUAL Ahmed	Prof.	Université de Constantine 1	Examineur
M. YAHIAOUI Djarir	MCA.	Université de Batna 2	Examineur
M. MAMEN Belgacem	MCA.	Université de Khenchela	Examineur
M. BOUTRID Abdelaziz	MCA.	Université de Khenchela	Examineur

*A ma mère et mes frères
en témoignage de tout mon amour*

*et
ma famille
Salim, Ines, Darine et Safwa
pour tout le bonheur et le réconfort qu'ils m'apportent*

*A la mémoire de
mon père*

Remerciements

Je remercie avant tout **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné la force et le courage de réaliser ce travail.

Je remercie tout d'abord Monsieur **BOUZID Tayeb**, Maitre de conférences (A) à l'Université de Batna2, pour m'avoir accueilli et permis de réaliser ce travail sous sa direction. L'aide qu'il m'a apportée, les conseils qu'il m'a formulés ont été précieux. Je le remercie vivement et l'assure de ma reconnaissance.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur **LAHBARI Noureddine** professeur à l'Université de Batna2, pour m'avoir fait l'honneur d'examiner mon travail et d'accepter la présidence du jury.

Mes sincères remerciements vont à Monsieur **BEROUAL Ahmed**, professeur à l'Université de Constantine1, Monsieur **MAMEN Belgacem**, Maitre de conférence (A) à l'Université de Khenchela et Monsieur **BOUTRID Abdelaaziz**, Maitre de conférence (A) à l'Université de Khenchela pour avoir accepté d'être examinateurs de ce travail.

Je souhaite exprimer mes remerciements respectueux à Monsieur **YAHIAOUI Djarir**, Maitre de conférences (A) à l'Université de Batna2, pour avoir accepté d'être parmi les examinateurs de mon travail et pour son encouragement durant la préparation de ce travail.

J'adresse un message particulier à Monsieur **KHADEM Salim**, pour l'aide précieuse. Je le remercie pour tout.

Ma gratitude va également à tous les enseignants et au personnel technique et administratif du Département Génie Civil de l'Université de Batna2 pour leur aide et leur soutien.

Leila HAMZAOU

Résumé

La résistance et la stabilité des colonnes élancées en béton armé dépendent directement de la rigidité en flexion EI , qui est un paramètre majeur dans les calculs de déformation, y compris ceux avec charge de flexion et charge axiale. En raison de la non-linéarité de la courbe contrainte-déformation du béton, du fluage et de la fissuration sur la longueur de la colonne, la rigidité effective en flexion EI reste toujours variable ; Une simulation numérique est effectuée pour des sections carrées et en forme de L en béton armé de colonnes élancées soumises à une force axiale excentrique afin d'estimer la variation de EI résultant du comportement réel de la colonne ; Basée sur la relation moment-courbure. Des colonnes élancées hypothétiques, chacune avec une combinaison différente de variables, ont été utilisées pour étudier les principales variables qui affectent la rigidité en flexion (EI) des colonnes élancées RC. En utilisant l'analyse de régression linéaire, une nouvelle expression simple et linéaire de l' EI a été développée ; l'élancement, le niveau de charge axiale et la résistance du béton ont été identifiés comme les facteurs les plus importants affectant la rigidité effective EI . Enfin, la comparaison entre les résultats de la nouvelle équation et les méthodes proposées par l'ACI-318 et l'Euro Code-2 a été effectuée en relation avec les résultats expérimentaux de la littérature

Mots-clés : *Rigidité en flexion; Facteur de réduction; Béton armé; Rigidité; Colonnes élancées*

Abstract

The stability and strength of slender reinforced concrete columns depend directly on the flexural stiffness EI , which is a major parameter in strain calculations including those with bending and axial load. Due to the non-linearity of the stress-strain curve of the concrete, creep and cracking along the length of the unsupported column the effective bending stiffness EI always remains variable; Numerical simulation is performed for square and L-shaped reinforced concrete sections of slender columns subjected to an eccentric axial force to estimate the variation of EI resulting from the actual behavior of the column; Based on the moment-curvature relationship. Hypothetical slender columns, each with a different combination of variables, were used to investigate the main variables that affect the flexural stiffness (EI) of RC slender columns. Using linear regression analysis, a new simple and linear expression of EI was developed; Slenderness, axial load level and concrete strength have been identified as the most important factors affecting the effective stiffness EI . Finally, the comparison between the results of the new equation and the methods proposed by ACI-318 and Euro Code-2 was carried out in connection with the experimental results of the literature. A good agreement of the results was found.

Keywords : *Flexural stiffness; Reduction factor; Reinforced concrete; Rigidity; Slender columns*

المخلص

يعتمد ثبات الأعمدة الخرسانية المسلحة النحيلة وقوتها بشكل مباشر على صلابة الانحناء EI ، والتي تعد معلم رئيسي في حسابات الإجهاد بما في ذلك تلك التي تحتوي على ثني وحمل محوري. نظراً لعدم خطية منحنى الإجهاد والانفعال للخرسانة ، فإن صلابة الانحناء الفعالة EI تظل دائماً متغيرة ؛ يتم إجراء محاكاة عددية للأقسام الخرسانية المسلحة المربعة والشكلية للأعمدة النحيلة المعرضة لقوة محورية غير مركزية لتقدير تباين EI الناتج عن السلوك الفعلي للعمود ؛ بناءً على علاقة التقوس اللحظي. تم استخدام اعمدة افتراضية نحيفة ، لكل منها مجموعة مختلفة من المتغيرات ، لاستكشاف المتغيرات الرئيسية التي تؤثر على صلابة الانحناء (EI) للأعمدة النحيلة RC. باستخدام تحليل الانحدار الخطي ، تم تطوير تعبير بسيط وخطي جديد لمعامل صلابة العمود الخرساني ؛ تم تحديد النحافة ومستوى الحمل المحوري وقوة الخرسانة من أهم العوامل التي تؤثر على الصلابة الفعالة EI. أخيراً ، تم إجراء المقارنة بين نتائج المعادلة الجديدة والطرق المقترحة من قبل ACI-318 و Euro Code-2 فيما يتعلق بالنتائج التجريبية المقترحة لبعض الباحثين. بعد المقارنة وجدنا ان هناك تقارب كبير بين نتائج هذا البحث و النتائج المحصل عليها سواء من الناحية التجريبية او النظرية.

الكلمات المفتاحية : صلابة الانحناء. معامل النقص؛ خرسانة مسلحة؛ الاستعلاء؛ أعمدة رفيعة

Sommaire

Remercîments

Résumé

Abstract

ملخص

Sommaire

Liste des figures

Liste des tableaux

Principaux symboles utilisés

Introduction générale

1

CHAPITRE I : SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1	Introduction.	8
I.2	Approches d'analyse des poteaux courts sous chargement bi axial.	8
I.3	Approches d'analyse la stabilité des poteaux élancés.	12
I.4	Approches d'Evaluation de la Rigidité Flexionnelle des Poteaux Elancés.	17
I.5	Approches d'Analyse des Poteaux de Section en Forme L.	20
I.6	Conclusion.	22

CHAPITRE II : ANALYSE DES EFFETS DU PREMIER ORDRE

II.1	Introduction.	24
II.2	Analyse les effets du premier ordre.	25
II.2.1	Notion sur la flexion composée et déviée.	25
II.2.1.1	Problème uni axial.	26
II.2.1.2	Problème bi axial.	27
II .3	Hypothèse de calcul	28
II. 4	Lois de comportement des matériaux	29
II.4.1	Loi simulant le matériau acier	29
II.4.2	Lois simulant le matériau béton	30
II.4.3	Courbe d'interaction	35
II.5	Description de la méthode utilisée	36
II.5.1	Efforts internes	38
II.5.1.1	Forces dû au Béton	39
II.5.1.2	Forces dû aux Aciers	40
II.5.1.3	Forces totales	40
II.6	Etude paramétrique	44
II.6.1	Influence du choix de la loi de comportement du béton	47
II.7	Validation de la simulation numérique	49
II.8	Conclusion	53

CHAPITRE III : ANALYSE DES EFFETS DU SECOND ORDRE

III.1	Introduction	54
III.2	Comportement d'un poteau élancé	54
III.2.1	Théorie de second ordre	54
III.2.2	Classification des poteaux	56

III.2.3	Charge critique d' <i>Euler</i>	57
III.2.4	Longueur de flambement	58
III.2.5	Elancement	61
III.2.5.1	Elancement normalisé.	61
III.3	Vision de quelques codes concernant le calcul au second ordre	62
III.3.1	Vision d'Euro Code EC2	62
III.3.2	Norme SIA 162	65
III.3.3	Norme CSA A23.3-O4	65
III.3.4	Code ACI 318-08	66
III.3.5	Règles Parasismiques Algériennes RPA-99/2003	67
III.4	Méthode utilisée d'analyse les effets du second ordre	68
III.5	Conclusion .	71

CHAPITRE IV : RIGIDITE FLEXIONNELLE DE LA COLONNE ELANCEE

IV.1	Introduction	72
IV.2	Influence de la rigidité flexionnelle sur le comportement des colonnes	73
IV.3	Facteurs affectant la variation de la rigidité flexionnelle <i>EI</i>	73
IV.4	Formulations suggérées pour la rigidité flexionnelle <i>EI</i>	74
IV.4 .1	Formulation d' <i>EI</i> constante	74
IV.4 .2	Formulation de la tangente ($E_t I$) tranche	74
IV.4 .3	Formulation de la sécante (M/ϕ)	75
IV.4 .4	Formulation tangente (M/ϕ)	77
IV.5	Vision de quelques codes concernant le calcul de la rigidité flexionnelle	77
IV.6	Méthode utilisée pour le calcul la rigidité flexionnelle	79
IV.6 .1	Structure du programme	80
IV.7	Facteur de réduction de la rigidité flexionnelle	81
IV.8	Méthodes d'évaluation le facteur de réduction alfa	82
IV.9	Modèle d'évaluation ' α ' par régression	86
IV.10	Conclusion	89

CHAPITRE V : VALIDATION

V.1	Introduction	90
V.2	La validation du facteur de réduction	90
V.3	Validation par les spécimens de <i>Tsao</i>	98
V.4	Validation par spécimens <i>Resheidat</i>	101
V.5	Validation expérimentale	106
	Conclusion générale	112
	Bibliographie	115
	Annexe	120

LISTES DES FIGURES

Figure 2.1 Un pilier soumis à la compression excentrée.	25
Figure 2.2 Section d'un axe neutre oblique	27
Figure 2.3 Diagramme σ - ε des aciers	29
Figure 2.4 Diagramme parabole-rectangle	31
Figure 2.5 Le diagramme rectangulaire simplifié	31
Figure 2.6 Diagramme de Kent et Park pour le béton non confiné	32
Figure 2.7 Courbes Kent et Park pour le béton non confiné et confiné	34
Figure 2.8 Diagramme d'interaction M-P	35
Figure 2.9 Section de forme L.	36
Figure 2.10 Variation de la minceur de sections selon le rapport B_1/B	37
Figure 2.11 Les dimensions de la section de forme L.	37
Figure 2.12 Diagramme de contraintes et déformations de béton d'une section en L sous une charge bi axiale.	38
Figure 2.13 Les armatures dans une section d'axe neutre oblique.	40
Figure 2.14 Chargement bi axial balayage à partir du coin de la section	42
Figure 2.15 Chargement bi axial balayage à partir les ailes de la section	42
Figure 2.16 Chargement uni axial pour un angle de chargement $\theta=0^0$	42
Figure 2.17 Balayage de l'axe neutre à travers la section transversale	43
Figure 2.18 Influence de dimension de la section sur la capacité Balayage à partir du coin de la section	44
Figure 2.19 Influence de la quantité d'acier longitudinal Balayage à partir du coin de la section	44
Figure 2.20 Influence de la résistance du béton Balayage à partir du coin de la section	45
Figure 2.21 Influence de la quantité d'acier transversal Loi de comportement du béton <i>Kent et Park</i> confiné Balayage à partir les ailes de la section L.	45
Figure 2.22 Influence de l'angle de chargement $0 \leq \theta \leq 45^0$ Balayage à partir du coin de la section	46
Figure 2.23 Influence de l'angle de chargement $45^0 \leq \theta \leq 90^0$ Balayage à partir du coin de la section	46
Figure 2.24 Influence de la loi de comportement du béton	48
Figure 2.25 Comparaison entre courbes d'interaction selon le diagramme rectangulaire simplifié du béton.	49
Figure 2.26 Courbes d'interaction selon le diagramme Parabole-rectangle Balayage à partir le coin.	50
Figure 2.27 Courbes d'interaction selon le diagramme Park et Kent un confiné Balayage à partir les ailes.	50
Figure 2.28 Courbes d'interaction selon le diagramme Park et Kent un confiné Balayage à partir le coin .	51
Figure 2.29 Courbes d'interaction selon le diagramme rectangulaire simplifié Balayage à partir le coin de la section L.	51
Figure 2.30 Courbes d'interaction selon le diagramme Park et Kent confiné (comparaison avec la loi de Mander confinée) .	52
Figure 2.31 Courbes d'interaction selon le diagramme Park et Kent un confiné (comparaison avec la loi de Mander un confinée) .	52
Figure 3.1 Colonne sous l'effet du 2 ^{eme} ordre	55
Figure 3.2 Effet de l'élanement sur la résistance d'un poteau.	56
Figure 3.3 Longueurs de flambement pour un poteau isolée.	59

Figure 3.4	Flambement des poteaux à nœuds fixes	59
Figure 3.5	Flambement des poteaux à nœuds déplaçables	60
Figure 3.6	Courbes d'interaction de la section transversale et la colonne élancée.	69
Figure 3.7	Influence de l'élancement λ sur la résistance .	70
Figure 4.1	Relation moment –courbure	75
Figure 4.2	Variation de la rigidité en fonction de la charge axiale	76
Figure 4.3	Les coefficients de l'équation de ' α ' par la régression descendante.	87
Figure 4.4	Comparaison entre $\alpha_{\text{programme}}$ et $\alpha_{\text{équation proposée}}$ en fonction de P/P_0	88
Figure 5.1	Effet de pourcentage d'armature longitudinal (ρ) sur le facteur α .	91
Figure 5.2	Effet du rapport de la charge axiale ($\frac{P}{P_0}$) sur le facteur α .	91
Figure 5.3	Effet de la résistance de béton à la compression (f_c) sur le facteur α .	92
Figure 5.4	Effet de l'excentricité (e/B) sur le facteur α .	92
Figure 5.5	Effet de η sur le facteur de réduction (α) .	94
Figure 5.6	Effet de pourcentage d'armature longitudinal (ρ) sur le facteur α avec une variation de l'angle de chargement (θ).	95
Figure 5.7	Comparaison les rigidités de <i>Liu</i> et les rigidités trouvées par l'équation proposée.	97
Figure 5.8	Comparaison de la rigidité flexionnelle trouvée par des différentes expressions pour les spécimens testés par <i>Resheidat</i> .	102
Figure 5.9	Variation de ' α ' en fonction de ' ρ ' pour différentes valeurs de ' f_c ' pour $\theta=5^0$.	106
Figure 5.10	Variation de ' α ' en fonction de ' ρ ' pour différentes valeurs de ' f_c ' pour $\theta=45^0$.	107
Figure 5.11	Variation de ' α ' en fonction de ' ρ ' pour différentes valeurs de ' f_c ' pour $\theta=85^0$.	107
Figure 5.12	Variation de ' α ' en fonction de ' f_c ' pour différentes valeurs de ' ρ ' pour $\theta=45^0$.	108
Figure 5.13	Variation de ' α ' en fonction de ' f_c ' pour différentes valeurs de ' ρ ' pour $\theta=85^0$.	108
Figure 5.14	Variation de ' α ' en fonction de ' f_c ' pour différentes valeurs de la longueur de la colonne ' L/B '.	109
Figure 5.15	Variation de ' α ' en fonction de ' ρ ' pour différentes valeurs de l'angle de chargement $\theta=15^0$ à 45^0 .	109
Figure 5.16	Variation de ' α ' en fonction de ' ρ ' pour différentes valeurs de l'angle de chargement $\theta=45^0$ à 85^0 ,	110
Figure 5.17	Variation de ' α ' en fonction de ' ρ ' pour différentes valeurs de l'angle de chargement $\theta=15^0$ à 75^0 .	110

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1 Valeurs des coefficients de l'équation proposée par <i>Bouzid</i> pour $\varepsilon_{bu}=0.003$ et $h/b=1$.	84
Tableau 4.2 Paramètres inclus dans l'analyse.	86
Tableau 5.1 Comparaison de différentes expressions de (α) .	93
Tableau 5.2 Les caractéristiques de la colonne de Liu.	96
Tableau 5.3 Comparaison de résultats trouvés par Liu et celles de l'équation proposée	97
Tableau 5.4 Données expérimentales de <i>Tsao</i>	98
Tableau 5.5 Comparaison des moments totaux donnés par le programme avec celles donnés par <i>Tsao</i>	98
Tableau 5.6 Evaluation d' <i>EI</i> selon les différentes expressions.	99
Tableau 5.7 Comparaison d' <i>EI</i> calculée selon l'équation proposée avec <i>EI</i> de différentes expressions.	99
Tableau 5.8 Résultats de poteau <i>CI</i> trouvés par le programme proposé.	100
Tableau 5.9 Données expérimentales de <i>Resheidat</i>	101
Tableau 5.10 Données expérimentales de <i>Resheidat</i> .	102
Tableau 5.11 Evaluation d' <i>EI</i> .	103
Tableau 5.12 Comparaison d' <i>EI</i> déterminées par l'équation proposée avec les différentes expressions.	103
Tableau 5.13 Résultats de poteau 7 trouvés par le programme proposé.	105

PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES

A	Aire de béton .
AN	L'axe neutre .
As	Aire de l'acier.
B	Largeur d'une section .
b	Largeur d'une section
B ₁	Longueur d'aile d'une section en forme L .
c	Centre de compression
C _m	Coefficient de calcul du moment de flexion uniforme équivalent.
d	Hauteur d'utile d'une section
d'	Distance entre centre de gravité et l'axe neutre
D _c	L'enrobage.
e	Excentricité , écart type .
e/h	Rapport d'excentricité
E _c	Module d'élasticité du béton .
EI	Rigidité en flexion du poteau.
E _s	Module d'élasticité de l'acier .
ex,ey	Excentricité de la charge axiale par rapport aux axes x et y
f _c	Résistance caractéristique du béton à la compression
f _y	Limite d'élasticité de l'acier
G	Centre de gravité .
h	Largeur unitaire de la tranche i
i	Tranche appartenante d'une section
i	Rayon de giration ; Tranche appartenante d'une section
I _x ,I _y	Moment d'inertie par rapport aux axes x et y respectivement.
k	Représente un élément d'une section
L	Longueur de la colonne .
L/B	Rapport d'excentricité
M ^{col}	Moments fléchissant de la colonne .
M ^{sc}	Moments fléchissant de la section transversale .
M _{test}	Moments appliqués lors de test .
M _u	Moment fléchissant à l'E.L.U .
P _{cr}	Charge critique d'Euler
P _{test}	La charge appliquée lors de test .
P _u	Résultante des forces internes à l'E.L.U pour l'ensemble de la section .
P _{ub}	Charge axial au point de balancement .
U,V	Axes principaux de la section en L .
X _u	Distance de l'axe neutre à la fibre la plus comprimée d'une section à l'E.L.U .
Y _i	La distance de la tranche d'acier i par rapport au centre de la section .
α	Facteur de réduction de rigidité flexionnelle
β	Facteur de fluage
γ	Coefficients de sécurité
δ	Facteur d'amplification
Δ	La déflexion du poteau.
ε _c	Déformation du béton
ε _{cc}	Raccourcissement du béton comprimé
ε _{cu}	Raccourcissement du béton comprimé à l'E.L.U

ε_e	Raccourcissement élastique .
ε_y	Déformation à la limite élastique de l'acier
θ	Angle d'inclinaison de l'axe neutre
θ'	Coefficient prenant en compte la durée d'application des charges
λ	L'élancement de la colonne
ρ	Le pourcentage d'acier dans la section .
σ	Contrainte normal
ϕ	La courbure

Introduction

INTRODUCTION

Préambule

Dans les structures en béton armé les poteaux jouent un rôle très significatif servant à transmettre principalement les charges verticales jusqu'aux fondations. Le rôle des poteaux, ne se limite pas à assurer la reprise des charges verticales, mais contribue largement lorsqu'ils s'associent à des poutres pour former des cadres ou portiques à reprendre les actions horizontales dues au vent mais surtout dues aux séismes.

Un poteau est rarement soumis à une force de compression centrée, bien au contraire, il est plutôt soumis à une charge combinée, une compression due aux charges verticales et à un moment de flexion dû à un ou plusieurs effets tels que les moments de continuité transmis par le plancher, l'excentricité accidentelle due à un mauvais alignement ou un mauvais aplomb des poteaux, ou bien enfin les effets des forces horizontales dues entre autres au séisme et à l'effet du vent. Selon l'élancement de la colonne, il est possible de déterminer si celle-ci est élancée ou non. Il faut noter que l'élancement est un paramètre principal qui définit la sensibilité d'une colonne vis-à-vis l'instabilité en générale. Dans le premier cas il faut prévoir un dimensionnement en tenant compte des effets du second ordre par contre dans le second cas il faut se contenter d'un dimensionnement du premier ordre.

Ce fait est illustré par l'exemple suivant ; en admettant qu'une colonne bi-articulée supportant une charge de compression " P " appliquée avec une excentricité " e ", le moment correspondant qui est égal à " $P.e$ " est appelé "moment de premier ordre". Sous l'action de ce moment, la colonne se déforme en courbure simple et le moment de flexion est maximal à mi-hauteur et égal à $M=P.e+P.\Delta$. L'augmentation de ce dernier provoquée par le déplacement Δ est appelée l'effet $P\Delta$ ou moment de second ordre. Plus la colonne est élancée par rapport à sa section, plus les déplacements latéraux sont importants et plus le moment de second ordre est élevé.

Par conséquent, la rupture par flambement se produira sous une résistance plus faible que celle qui aurait pu provoquer la rupture du poteau court.

Le problème de flambement à été étudié par *Leonhard Euler* (1744) prenant en compte la loi de *Hook* et la relation moment–courbure. Ceci a finalement aboutit à l'équation qui prévoit ou prédit la valeur minimale de la charge de flambement, appelée aussi valeur critique d'Euler :

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (1)$$

Il est clair que l'équation d'*Euler* ne dépend pas de la résistance des sections mais de sa rigidité flexionnelle '*EI*'. Cette rigidité définit un paramètre majeur dans le calcul de la résistance au flambement ainsi que la déflexion due au moment du second ordre des colonnes élancées.

L'expression d'*Euler* n'est donc valable que si celle-ci au moment de flambage obéit encore à la loi de *Hook* et où la rigidité '*EI*' retenue est constante. Ceci a lieu dans le cas d'un matériau isotrope, homogène et élastique tel que les éléments de structure en charpente métallique. Dans ce cas, la rigidité de flexion est simple à calculer, ce qui n'est pas le cas pour le béton armé dont le comportement devient nettement non linéaire au niveau de la branche descendante de la courbe σ - ϵ , ainsi le flambement se produit dans le domaine non linéaire.

Pendant le chargement et en raison du comportement inélastique décrit par la courbe de contrainte/déformation du béton, la valeur de la rigidité en flexion '*EI*' varie en chaque point le long de la section, de sorte que la difficulté de choisir une valeur unique de '*EI*' apparaît parce que certaines méthodes considèrent que la rigidité de la colonne est constante tout le long de la section et de la longueur de la colonne.

L'expression d'*Euler* reste valable pour le béton armé si la rigidité en flexion '*EI*' est remplacée par une valeur représentative et réelle de la rigidité flexionnelle '*EI*' au moment de la rupture qui coïncide donc soit avec l'écrasement du matériau (colonnes courtes) soit avec le flambement (colonnes élancées).

La détermination d'un tel paramètre est hasardeuse car les facteurs d'incertitude sont fort nombreux. Il est à noter entre autres le système déformé de la colonne élancée dont la détermination des effets du second ordre ou bien la prise en compte de la non linéarité géométrique s'avère bien ardue. Compte tenu des lois de comportement des matériaux (non linéarité matérielle), ainsi cette double non linéarité constitue une difficulté numérique pour

raisonnablement déterminer la rigidité flexionnelle effective qu'au moyen d'un code de calcul informatique.

Ainsi, la difficulté augmente davantage lorsqu'il faut considérer les effets différés du béton (retrait et fluage). Aussi, tenant compte de la fissuration du béton, le calcul de la rigidité EI se complique de plus car une faible variation de l'état de fissuration peut provoquer des variations assez importantes de la rigidité flexionnelle.

Dans ce cas, la rigidité flexionnelle des colonnes élancées en béton armé est considérablement réduite. En plus des effets mentionnés ci-dessus, plusieurs autres facteurs contribuent à cette réduction. Il s'agit en revanche de la géométrie irrégulière de la section transversale de la colonne et le type de sollicitation appliquée : compression centrée ou excentrée, moment uni axial ou bi axial.

La présente recherche constitue une autre alternative par rapport aux études menées sur les colonnes élancées de bâtiment à l'état limite ultime. Le but est donc de développer un modèle analytique pour l'étude et l'analyse du comportement matériel et géométrique non linéaire des colonnes élancées de sections carrée et en "L" soumises à l'action d'un effort axial et d'une flexion bi axiale (déviée). Ceci dans le but de trouver une relation simple qui décrit explicitement le comportement réel de la rigidité flexionnelle effective ' EI ' en fonction de paramètres les plus influents. Ainsi les paramètres pris en compte sont la résistance du béton (f_c), la limite élastique de l'acier (f_y), les dimensions de la section, le pourcentage d'armatures longitudinales (ρ) et la longueur de la colonne (L). Il faut aussi noter que ces derniers varient d'une étude à l'autre mais globalement représentent les caractéristiques géométriques et physiques de la section en question.

La détermination de la rigidité flexionnelle doit en effet représenter fidèlement le comportement réel des poteaux élancés sous une charge combinée. La réduction du volume de calcul nécessaire ainsi obtenue est considérable, le but recherché par cette démarche est de doter l'ingénieur praticien d'un outil de travail simple, permettant de calculer avec rapidité la rigidité flexionnelle afin de dimensionner et de vérifier des pièces comprimées et élancées rencontrées dans la pratique.

Ainsi, pour traiter les sections des colonnes, il est recommandé d'utiliser une approche qui repose sur la confection des courbes d'interaction (M, N) pour des dimensions et un pourcentage d'armature donnés. C'est une méthode inverse qui consiste à faire un balayage de la section suivant un angle quelconque et de tracer le diagramme d'interaction correspondant.

Dans cette recherche deux types de sections ont été traitées et analysées : carré et en L. La section carrée est la forme standard la plus utilisée dans le domaine de la construction mais la section en L est souvent utilisée dans les angles. Celle-ci se prête bien d'un point de vue structural et intéressante d'un point de vue économique par rapport à une section carrée ou rectangulaire.

Dans ce contexte plusieurs méthodes pratiques ont été mises au point afin de calculer et d'analyser les poteaux élancés en béton armé. A cet effet, les différents codes de béton armé tels que le code américain ACI ^[1], le code européen Eurocode ^[18], le code Canadien de béton armé (NBC) ^[41], le code australien de béton armé (AS 3600) ^[4], et bien d'autres ont pris en charge ce type de situation en introduisant un facteur de réduction de rigidité pour déterminer la force critique du poteau considéré.

Ainsi, la méthode d'évaluation de la stabilité préconisée par le code ACI 318-08^[1], sera utilisée pour l'analyse de la stabilité des poteaux élancés en béton armé à nœuds fixes. Le principe de cette méthode est basé sur l'amplification du moment du premier ordre qui se détermine par l'analyse des sections et le diagramme d'interaction. Le comportement des sections en BA sous des charges axiales et des moments de flexion dans les deux plans principaux d'inertie (bi axiale) présente un grand intérêt pour l'analyse et la conception des structures. La difficulté dans ce cas réside dans le fait qu'il n'est pas possible de donner une formulation mathématique générale comme dans le cas de la flexion uni axiale car la position de l'axe neutre n'est pas connue à l'avance. La difficulté augmente si la section transversale de la colonne n'est pas symétrique, et augmente encore plus si la loi de comportement (σ - ϵ) n'est pas linéaire.

Les colonnes élancées de section de forme irrégulière sont nécessaires pour certain conception structurelle cependant, le comportement des charge et déformation des colonnes en béton armé élancées sont rarement disponibles dans la littérature.

Dans la plupart des codes de calcul des ouvrages en béton armé il est possible de trouver des indications générales sur la justification aux états limites des poteaux élancés de forme régulière carrée ou rectangle. Selon les travaux présentés par les chercheurs, la majorité se basent sur la détermination de la rigidité flexionnelle du premier ordre qui tient compte uniquement de la non linéarité des matériaux afin de calculer la déflexion latérale. Mais, il n'y a pas de données publiées à ce jour qui traitent la rigidité flexionnelle effective en fonction à la fois du comportement non linéaire matériel et géométrique pour des poteaux élancés en BA de forme 'L' sous sollicitation combinée. En effet, cette section présente plusieurs difficultés entre autre l'absence d'un axe de symétrie vertical et horizontal.

Il est donc intéressant d'explorer cette question afin de combler les lacunes des équations de la rigidité présentées dans la bibliographie car elles ne sont valables que pour des sections ordinaires, en revanche dans la pratique, il existe des sections de formes différentes telles que la section en T (T), en croix simple (+), les sections hexagonales ou à parois minces, et enfin la section en L. Cette dernière présente en effet plusieurs difficultés. Par conséquent une nouvelle équation de la rigidité EI pour la flexion bi axiale est proposée, car il n'existe pas dans la littérature pour une forme de section générale. La méthode sera limitée au cas où la longueur de flambement effectif et la longueur du poteau est égale dans les deux plans principaux d'inerties.

Les objectifs de la thèse

- Développer un model numérique pour l'étude et l'analyse du comportement non linéaire matériel et géométrique des colonnes élancées de forme carrées et L sous un chargement combiné, effort normal, moment de flexion.
- Trouver une relation décrivant la rigidité de flexion réelle EI en fonction des paramètres les plus influents, tels que les dimensions de la section, le pourcentage d'armatures, l'élancement du poteau, etc.
- Examiner la fiabilité de la méthode proposée.

Structuration de la thèse

La thèse est organisée sous forme d'un nombre définis de chapitre décrivant les différentes phases de l'étude de recherche allant de l'introduction à la conclusion en passant par la méthode d'analyse utilisée, l'analyse des résultats obtenus entre autres.

Une introduction générale sur la thématique traitée dans ce travail de recherche, où la problématique et les objectifs recherchés sont définis.

Chapitre I : Une bibliographie succincte des différentes méthodes utilisées pour l'analyse du comportement des: poteaux courts; poteaux élancés; la rigidité flexionnelle et à la fin une synthèse des recherches menées sur des poteaux de section en forme L .

-Chapitre II : Présente les hypothèses pour l'analyse avec une description détaillée de la caractérisation des matériaux utilisés ; béton et acier. La seconde partie de ce chapitre est dédiée à la présentation d'une approche théorique basée sur l'intégration par tranches de la section en flexion composée et déviée, tenant compte de l'influence de la loi de comportement non linéaire des matériaux au moyen d'un programme de calcul établi à cet effet. Une comparaison avec un logiciel professionnel est apportée afin de tester la validité du modèle.

-Chapitre III : Présente quant à lui les notions de base sur la stabilité des colonnes élancées avec un regard sur quelques codes concernant le calcul de ces éléments élancés, tels que l'ACI318-08^[1] , l'Eurocode 2-04^[18] , etc. Ainsi dans cette partie, il est présenté aussi le passage de l'analyse du comportement des sections à celui de l'élément que constitue la colonne tenant compte des effets du second ordre par la méthode d'amplification du moment du premier ordre .

-Chapitre IV : Présente les notions de base sur la rigidité en flexion tout en mettant en exergue quelques expressions pratiques des codes de calcul et règlements concernant le calcul de la rigidité flexionnelle. Pour ce faire, différentes méthodes proposées utilisées pour la simulation de la rigidité en flexion de poteaux élancés en béton armé sont ainsi présentées. Finalement une méthode d'analyse par régression linéaire a été utilisée pour trouver une expression de la rigidité flexionnelle et les effets des différents paramètres influents.

-Chapitre V : Présente les résultats obtenus et leur validation ainsi que de l'expérimentation des hypothèses et l'approche choisies. Des comparaisons sont réalisées entre des résultats expérimentaux et ceux donnés par l'approche de calcul proposée et ceux provenant des codes et des expressions proposées par la littérature.

Enfin, la thèse se termine comme à l'accoutumé par une conclusion générale ainsi que des perspectives de développement futur du présent travail.

Chapitre I

SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 Introduction :

Durant des années, des progrès considérables ont été réalisés dans le développement des méthodes de l'analyse non linéaire matérielle et géométrique des colonnes élancées en béton armé (BA). De nombreuses méthodes ont été élaborées pour la détermination de la capacité portante, de la charge critique, et la rigidité qui a un effet direct sur le calcul des effets du second ordre ainsi que la déflexion résultante.

Aussi, plusieurs méthodes ont été élaborées et mises au point pour l'analyse de la stabilité des poteaux élancés en béton armé. Vu l'importance de la stabilité dans la résistance et la sécurité de la construction, les codes ACI 318-08^[1] et l'Euro code 2^[18] exigent la vérification de la stabilité d'une manière très explicite, en adoptant des règles très précises. Cependant, en Algérie, la conception des poteaux des constructions en béton armé par les codes Algériens en vigueur (RPA-99/v2003^[51] et CBA-93^[11]) tient de manière implicite la prise en compte de la stabilité de forme dans le calcul de ferrailage en flexion composée. Dans ce chapitre une synthèse bibliographie résume des travaux de recherche et études concernant les colonnes courtes et élancées. Ces travaux publiés dans des revues et thèses concernent surtout les sections irrégulières de forme L. Il sera également question dans ce chapitre des différents travaux de recherche mis au point sur l'évaluation de la rigidité en flexion.

I.2 Approches d'analyse des poteaux courts sous chargement bi axial

Des études expérimentales ont montré que les poteaux dont le rapport entre la portée et la profondeur de la section varie entre 2.5 et 5 se rompent par flexion composée. Dans ce cas le comportement des poteaux en terme de stabilité est suffisamment faible pour ne pas l'influencer et le calcul revient au niveau des sections transversales. En général, le calcul des sections en béton armé est un problème bien connu et maîtrisé. Le comportement non élastique du béton sous des chargements combinés est resté un sujet de recherche d'actualité pendant des décennies. Il a été étudié par beaucoup de chercheurs après la deuxième guerre mondiale, ce qui a abouti à l'établissement de la théorie des états limites en tant qu'outil rationnel de conception et de calcul des structures.

Les chercheurs proposaient alors pour cerner le comportement non élastique du béton des diagrammes linéaires utilisés auparavant. Ces derniers convenaient dans une large mesure pour le calcul des poutres moyennant certaines corrections mais s'écartent sensiblement de la réalité lorsqu'il s'agit des poteaux comme en témoignent les recherches expérimentales. Des chercheurs avaient donc proposé des expressions rationnelles pour les contraintes lors de l'analyse des poteaux soumis à une charge centrée ou faiblement excentrée uni axialement, alors que les éléments soumis à une grande excentricité continuaient à être calculés par les méthodes élastiques.

Après un long programme expérimental, **Whitney**^[59] (1940) a proposé un diagramme rectangulaire équivalent pour la distribution des contraintes dans les poteaux et les poutres. **Hognestad**^[22] (1951) quant à lui avait mené des investigations sur les sections chargées excentriquement de formes carrée, rectangulaire et circulaire. Ce travail avait permis d'établir les bases de la méthode d'analyse des sections aux états limites soumises à la flexion composée avec compression. La conséquence essentielle des travaux de **Hognestad** fut l'adoption de la méthode des contraintes ultimes par les ingénieurs pour le calcul des poteaux situés à la périphérie et surtout aux angles des structures de bâtiments. Ces éléments de structures ont des sections souvent de formes carrée, rectangulaire, L et T.

Ainsi, des méthodes itératives ont été élaborées pour établir par essais successifs la position de l'axe neutre pour lequel les efforts internes dans la section soient en équilibre avec les charges extérieures.

Whitney et **Cohen**^[60] (1956) avaient proposé une procédure d'approximations successives concernant la section carrée et rectangulaire avec un diagramme rectangulaire pour le block des contraintes.

Chu^[13] (1958) , **Mattok** , **Kriz**, **Hognestad**^[23] (1960) , **Czerniak**^[14] (1962) avaient présentés des méthodes similaires à celle de **Whitney**^[60] . **Fleming** et **Werner**^[19] (1965) et cela dans le but de proposer des abaques pour les poteaux carrés qui donnaient la charge ultime pour différentes positions de l'axe neutre. Mais il y a d'autres méthodes qui elles reposent sur la confection des courbes d'interaction. Ces surfaces d'interaction ou contours de chargement ont été élaborés pour le calcul et la vérification. Ainsi, la première méthode ou technique mise au point à cet effet est celle de la charge réciproque de **Bresler**^[10] (1960) . C'est une méthode directe simple pour calculer la résistance ultime d'un poteau en béton armé soumis à une compression axiale et à une flexion bi axiale.

Une deuxième technique de Bresler appelée méthode de surface de rupture, où il est proposé une équation d'interaction adimensionnelle pour représenter la surface de rupture à une compression axiale constante.

Ramamurthy ^[47] (1965) après une recherche analytique et expérimentale et à travers une méthode d'approximations successives, a proposé deux équations simples pour définir les contours de chargement des poteaux de sections carrées et rectangulaires avec des armatures uniformément réparties.

Weber ^[58] (1966) a utilisé les conditions d'équilibre et de compatibilité pour les déformations pour tracer la première courbe d'interaction principale de coordonnées $(P_u, P_u \cdot e)$ pour les poteaux de sections carrées sous une charge appliquée en différentes positions le long de la diagonale de la section $\theta=45^\circ$. Il a utilisé le diagramme rectangulaire pour le block des contraintes du béton comprimé. La méthode consiste à déterminer l'armature nécessaire pour les efforts réduits $P_u / f_b \cdot h^2$ et $M_u / f_b \cdot h^3$ qui agissent en compression excentrée uni axiale ($\theta=0^\circ$) et ensuite pour une excentricité diagonale ($\theta = 45^\circ$). Le calcul pour un angle quelconque θ est obtenu par interpolation entre les deux valeurs données pour $\theta = 0$ et $\theta = 45^\circ$. La méthode proposée par **Weber** présente 5.3% d'erreur au maximum pour la détermination de la section d'armatures.

Row et Paulay ^[50] (1973) ont mené une investigation sur les poteaux sous compression bi axialement excentrée, ils supposèrent alors que l'excentricité de la charge axiale peut être exprimée en fonction d'un paramètre K' tel que : $K' = e_x \cdot h / e_y \cdot b$. Pour s'assurer de l'exactitude de la méthode, **Row et Paulay** ont tracé les courbes d'interaction avec un grand nombre de valeurs du coefficient K' . Les coordonnées du diagramme sont donc $P_u / f_b \cdot bh$ en ordonnées et $M_{ux} / (f_b \cdot bh^2 \cdot (1+(e_x \cdot h / e_y \cdot b)^2)^{1/2})$ en abscisses, avec $M_{ux} = P_u \cdot e_y$ et l'armature est supposée être uniformément distribuée sur les côtés. La loi de comportement du béton est une courbe parabolique.

Hsu ^[25] (1986) quant à lui propose une méthode basée sur les éléments finis. Ainsi, il divise la section en petites aires élémentaires et prend comme exemple deux sections l'une rectangulaire et l'autre carrée. Il a utilisé un maillage de 85 et 89 pour les deux types de sections respectivement avec : 8 éléments d'acier, 32 éléments en béton non confiné et le reste des éléments en béton confiné. Cette approche permet donc d'utiliser deux lois de comportement pour le béton non confiné (en zone d'enrobage) et confiné (à l'intérieur de la section).

Les diagrammes d'interaction sont des courbes à trois dimensions (contours de chargement et surfaces d'interaction). Les équations des contours de chargement proposées sont :

- pour la section carrée :

$$\frac{P_u}{P_{u0}} + \left(\frac{M_{ux}}{M_{ux0}}\right)^{1.75} + \left(\frac{M_{uy}}{M_{uy0}}\right)^{1.75} \leq 1 \quad (1.1)$$

- pour la section rectangulaire :

$$\frac{P_u}{P_{u0}} + \left(\frac{M_{ux}}{M_{ux0}}\right)^{1.5} + \left(\frac{M_{uy}}{M_{uy0}}\right)^{1.5} \leq 1 \quad (1.2)$$

Ces équations sont une extension de la méthode des contours de chargement développée par Bresler^[10] (1960) .

En 1988, Hsu^[27] propose une équation générale qui prend en compte le point de balancement comme point de référence :

$$\left(\frac{P_u - P_{ub}}{P_{u0} - P_{ub}}\right) + \left(\frac{M_{ux}}{M_{ubx}}\right)^{1.5} + \left(\frac{M_{uy}}{M_{ub y}}\right)^{1.5} = 1 \quad (1.3)$$

P_u : la charge axiale appliquée ;

P_{u0} : la charge axiale limite en compression centrée ;

M_{ux} et M_{uy} : les moments appliqués selon les deux directions;

$M_{ux0} = M_{ux}$ si M_{uy} est égal à zéro (cas uni axial);

$M_{uy0} = M_{uy}$ si M_{ux} est égal à zéro (cas uni axial);

P_{ub} : la charge axiale au point de balancement;

M_{ubx} et $M_{ub y}$: les moments dans les deux directions au point de balancement.

L'analyse concerne vingt et une (21) sections de formes carrée et rectangulaire en utilisant l'équation générale proposée. Enfin une comparaison des résultats ainsi obtenus avec ceux théoriques déduits des principes de la statique est faite. La comparaison a donné une bonne concordance des résultats.

I.3 Approches d'analyse la stabilité des poteaux élancés

La stabilité des poteaux a connu aussi d'énormes progrès et de nombreuses méthodes et techniques ont été élaborées pour considérer les effets du 2^{ème} ordre dans le calcul non linéaire matériel et géométrique des colonnes élancées en béton armé .

MacGregor, Breen et Pfrang ^[34] (1970), ont présenté une proposition de révision des procédures de conception des colonnes élancées du code de calcul ACI 318-63. Les colonnes étaient conçues pour reprendre les forces et les moments basés sur l'analyse structurelle de second ordre en introduisant le concept de l'amplification du moment dans la conception structurelle. La méthode est similaire à celle utilisée dans les spécifications règlementaires du code ACI 1963.

Al-noury ^[2] (1980), a utilisé la méthode des éléments finis pour analyser le poteau en béton armé à partir d'une structure spatiale. La section est divisée en éléments finis pour calculer sa rigidité tangentielle en résolvant les équations différentielles gouvernantes autour des axes principaux. L'approche de la rigidité tangentielle modifiée a été utilisée pour gérer la plasticité du matériau et le changement géométrique au cours des itérations ainsi effectuées.

Bazant et al ^[5] (1991), ont proposé une méthode simple pour tracer les diagrammes d'interaction des colonnes, qui prend en compte les effets d'élancement. La méthode consiste en un simple algorithme de chargement incrémentiel qui trace la courbe charge-déflexion avec une excentricité constante de la charge axiale. La rupture de la colonne est définie à des fins de conception comme étant le pic de diagramme de la charge axiale en fonction du moment de flexion à mi-longueur. La méthode est comparée à celle de l'amplification du moment du code ACI et avec la méthode de la colonne modèle CEB basée sur les relations moment-courbure. L'accord avec la méthode CEB est très proche, mais en ce qui concerne la méthode ACI, il existe de grandes divergences.

Shuaib et al ^[53] (1995), ont développé un modèle informatisé non linéaire pour prédire la résistance et le comportement de poteaux élancés. Le modèle développé pour le chargement à court terme, utilise des relations de contrainte-déformation réalistes des matériaux, c'est-à-dire le béton et l'acier d'armatures et l'hypothèse habituelle en mécanique de flexion. L'effet du confinement dû à des armatures transversales en cadres ou en spirales sur la relation contrainte-déformation du béton en compression et de raidissement en traction du béton est pris en compte dans le modèle.

Celui-ci est capable de prédire le comportement de la section en calculant la résistance du moment ultime et la relation moment-courbure d'une section sous une charge axiale et un angle d'excentricité donné. Lorsque la longueur, les conditions aux limites, les moments d'extrémités et la compression sont donnés, le modèle prédit le comportement des éléments et fournit alors des informations telles que les moments amplifiés, les déformations, la forme déviée et le mode éventuel d'effondrement (matériau ou stabilité).

Hong ^[24] (2001) a proposé une approche simple pour estimer la résistance d'un poteau élancé en béton armé sous flexion bi axiale et charge axiale. Le modèle prend en compte les relations contrainte-déformation non linéaires du béton et de l'acier d'armatures et peut être utilisé pour des poteaux en béton armé élancés avec une section transversale arbitraire. Le problème de la détermination de la résistance du poteau en béton armé élancé est formulé comme un problème d'optimisation à contraintes non linéaires. Enfin, la méthode est capable de prédire la résistance de la colonne élancée.

Rafika Hachem ^[46] (2005) a développé un code informatique pour aboutir à l'analyse inélastique des poteaux sous l'action combinée d'un effort axial de compression et d'une force latérale monotone croissante. Le programme inclut l'effet du confinement et des déformations dû à l'effet P- Δ . La rotule aux niveaux des sections critiques et sa progression le long du poteau est considérée. Les déformations inélastiques dues à la flexion et l'adhérence sont incluses alors que celles dues à l'effort tranchant sont négligées. Les résultats sont présentés sous formes de graphes donnant les relations Moment-Courbure et Force-Déplacement.

Bouزيد et Demagh ^[8] (2011) ont présenté une procédure numérique itérative pour l'analyse de la résistance et la conception des poteaux élancés de sections carrées sous flexion bi axiale et charge axiale en utilisant un modèle de contrainte-déformation de EC2. La procédure tient compte du comportement non linéaire des matériaux (béton et armatures) et inclut les effets du second ordre dus à l'excentricité supplémentaire de la charge axiale appliquée par la méthode d'amplification du moment. Une expression de la rigidité flexionnelle a été mise au point tenant compte de l'effort normale appliqué, du pourcentage d'armatures, de la longueur de la colonne. Une expression tenant compte des paramètres les plus influents a été mise au point, vérifiée et donnant des résultats intéressants.

Dundar et Tokgoz ^[17] (2012) ont présenté expérimentalement le comportement du béton armé à haute résistance et des colonnes composites élancées à charge excentrique.

Dans cette étude expérimentale, un total de 32 éprouvettes de section carrée en béton armé et en poteaux composites ont été fabriqués à 0, 0,5, 0,75 et 1,0% de fractions volumiques de la teneur en fibres d'acier et cela dans le but d'examiner les effets de ces fibres sur le comportement de la colonne. Outre ceci, les colonnes composites ont été construites et testées en utilisant presque les mêmes conditions que celles en béton pour étudier le comportement expérimental de la colonne. Le comportement complet en flexion-charge et la résistance des éprouvettes de colonnes ont été obtenus. De plus, les échantillons de colonnes ont été analysés sur la base d'une méthode théorique prenant en compte le comportement non-linéaire des matériaux. L'étude expérimentale présentée indique que l'inclusion de fibres d'acier dans la plage de 0,75 à 1,0% de fraction volumique améliore considérablement les caractéristiques de confinement et de ductilité du béton armé à haute résistance et des colonnes composites.

Domenico Raffaele ^[15], 2013, a présenté la méthode de dérivation des domaines d'interaction pour les poteaux de sections rectangulaires symétriquement renforcés, fournissant une analyse détaillée de la capacité de charge pour différentes classes de béton et de barres d'armature. Les domaines ont été obtenus selon la «méthode modèle-colonne», présentant un modèle analytique simplifié pour l'évaluation de la résistance des colonnes rectangulaires isolées en béton armé. Le modèle prend en compte les non-linéarités matérielle et géométrique et une approche graphique est adoptée pour définir les domaines d'interaction à l'état limite ultime. Ces derniers sont construits au moyen de paramètres sans dimension qui définissent les différentes parties du domaine. Le but de l'étude est donc de produire un outil efficace qui peut être utilisé pour la conception/ évaluation préliminaire simplifiée de la géométrie structurelle et du pourcentage d'armatures des poteaux isolés.

Parthasarathi N et al ^[45], (2016), ont mis au point une brève étude expérimentale concernant le comportement d'une colonne élancée en béton armé chargée bi-axialement avec différents pourcentages d'armatures longitudinales. Des études ont été aussi menées sur les propriétés mécaniques du béton et les paramètres des colonnes élancées tels que la fissuration, la déflexion, la rigidité, l'excentricité et la résistance limite. Au total, quatre colonnes de dimensions (2200x150x150) mm chargées bi-axialement avec des excentricités de 150 mm et 300 mm ont été expérimentées. Toutes les colonnes ont été testées dans des conditions de chargements axial et bi-axial constant.

José Milton de Araújo^[29] (2018), a présenté un modèle qui considère à la fois les non-linéarités matérielle et géométrique ainsi que les effets de fluage. L'analyse structurelle est réalisée par la méthode des éléments finis associée à un processus itératif pour résoudre le système d'équations non linéaires. La colonne peut avoir une section transversale polygonale arbitraire, y compris des ouvertures. Il a également proposé un nouveau diagramme parabole-rectangle pour le béton en compression. Ce nouveau diagramme fournit la valeur correcte du module d'élasticité tangent du béton permettant ainsi son utilisation pour l'analyse non linéaire des poteaux élancés. En modifiant la valeur de déformation correspondante à la contrainte maximale, il est possible d'utiliser un seul diagramme contrainte-déformation pour le calcul du déplacement et la vérification de la rupture, ce qui facilite donc la conception des colonnes élancées.

Biao yan^[6] (2019) a présenté des études de recherche expérimentale et analytique sur le comportement structurel de colonnes circulaires mixtes acier-béton soumises à une compression excentrique. Les échantillons ont été testés pour étudier les effets de l'excentricité de la charge, du rapport (diamètre/épaisseur) du tube en acier et de l'utilisation de goujons de connexion de cisaillement sur les sections en acier. Les résultats ont indiqué que tous les échantillons présentaient une défaillance dominée par la flexion et le confinement du tube diminuait avec l'élancement croissant des colonnes. Un modèle d'éléments finis non linéaire a été développé à l'aide du code de calcul ABAQUS dans lequel les imperfections géométriques initiales et les effets d'élancement sur le confinement des tubes ont été pris en compte. Une méthode modifiée de distribution des contraintes plastiques a été proposée pour prédire la résistance de la section critique de la colonne. Enfin, une équation pour estimer la rigidité effective du poteau a été proposée.

Mohamed Aiman Ezzat^[38] (2021) a étudié le comportement des colonnes élancées chargées excentriquement en béton armé par la méthode d'analyse non linéaire et de développer ainsi des outils de conception appropriés. Un programme par éléments finis est conçu pour exécuter l'analyse non-linéaire des colonnes. Une étude paramétrique est ensuite réalisée sur des groupes de charges excentriques appliquées sur des poteaux élancés en béton armé avec les combinaisons de différents paramètres affectant la capacité portante de la colonne. Une analyse par régression multiple est réalisée sur les résultats de l'étude paramétrique. Une formule empirique pour estimer l'excentricité initiale équivalente est

obtenue. L'équivalent de l'excentricité initiale peut être utilisé avec la charge appliquée pour estimer le moment maximum. Une approche pour évaluer la charge et le moment de rupture est suggérée. Cette approche donne la possibilité d'utiliser les diagrammes d'interaction ou son équation pour déterminer la charge de rupture.

Celso Pissinatti^[12] et al (2021) ont présenté une analyse sur l'influence du module d'élasticité du béton et du type de granulat sur la déformabilité des poteaux élancés et le dimensionnement conséquent, il sont proposé une équation de la ligne parabolique de l'inflexion, en insérant les influences du granulat (défini à travers le facteur αe) et le module d'élasticité tangent initial dans cette équation, pouvant l'utiliser pour évaluer les effets locaux du second ordre. Ainsi, La non-linéarité géométrique est définie à partir de la solution exacte de l'équation différentielle du second ordre. La non-linéarité physique est définie à partir du diagramme moment-courbure de la section sous l'action de la force de compression, ils ont examiné également la parabole de degré n , corrigée de la considération de non-linéarité locale (c'est-à-dire de la longueur de la colonne). Les résultats ont montré que l'influence du type de granulats peut être considéré comme non pertinente pour la détermination du renforcement des poteaux à faible élancement. Cependant, pour les poteaux à haut élancement et à haute résistance en béton, le type de granulat a eu une influence significative sur la conception de ces poteaux.

I. 4 Approches d'Evaluation de la Rigidité Flexionnelle des Poteaux Elancés

Au début des années 2000, des études portant sur la rigidité flexionnelle ont commencé à apparaître et cela est dû finalement à la certitude des chercheurs de l'importance de ce paramètre dans le calcul des poteaux élancés. Aussi différentes méthodes sont utilisées donc pour évaluer la rigidité flexionnelle EI et de tenir compte de tous les effets qui contribuent à sa diminution au niveau du bloc de contraintes et à travers la longueur du poteau et cela dans le but de calculer la charge critique de flambement la plus proche de la réalité.

Khuntia et Ghosh^[32] (2004) ont proposé une étude paramétrique et des formules simples pour déterminer les rigidités effectives des poteaux et poutres en béton armé. Les principales variables considérées sont le pourcentage d'armatures, le rapport de la charge axiale sur la capacité portante, l'excentricité et la résistance à la compression du béton. Les expressions de rigidité proposées sont applicables à tous les niveaux de la charge appliquée, y compris les charges de service et les charges ultimes. Les résultats analytiques montrent que l'hypothèse de la rigidité de flexion proposée par le code ACI318-02 utilisant la méthode de moment amplifié est extrêmement prudente pour la conception de colonnes élancées. Ainsi, des recommandations sont faites concernant les hypothèses de rigidité dans l'analyse des ossatures en béton armé sous charges latérales.

Tikka et Mirza^[56] (2008) ont mené une étude pour examiner l'influence de différentes variables sur la rigidité EI . Plus de 11.000 colonnes isolées en béton armé de section carrée, chacune avec une combinaison de différentes variables, de propriétés spécifiées, sous une flexion uni-axiale ont été simulées pour générer les données de rigidité. Une nouvelle équation de conception non linéaire pour calculer la rigidité EI (des colonnes en béton armé) est ensuite développée à partir des données de rigidité simulées qui est proposée comme alternative aux équations de conception proposé par le code ACI.

Al sarraf et al^[3] (2009) ont été utilisées 166.320 colonnes hypothétiques en béton armé chacune avec une combinaison de variables spécifiées pour étudier les principaux paramètres qui affectent la rigidité à la flexion ' EI ', en utilisant une analyse par régression linéaire. A cet effet, une nouvelle expression de rigidité a été développée statistiquement pour 131 colonnes élancées. Ces colonnes étaient testées expérimentalement et disponibles dans la littérature. L'expression proposée de la rigidité EI est ainsi introduite dans la procédure de conception des colonnes selon le code ACI 318-05 et cela pour effectuer des comparaisons entre les données expérimentales de 150 colonnes avec les estimations théoriques de la valeur

de la force nominale en utilisant d'autres méthodes théoriques. Ces estimations comprennent, en plus de l'expression proposée de la rigidité EI , d'autres calculs tirés de la littérature.

Bonet et al^[7] (2011), ont proposé une nouvelle équation pour obtenir la rigidité de flexion effective EI . L'expression est valable pour toute forme de section transversale, soumise à des charges axiales combinées à une flexion bi axiale à la fois et pour charges de courte durée. La recherche consiste à tenir compte des bétons normaux et à haute résistance, mais ne convient que pour les colonnes avec des longueurs de flambement effectives égales dans les deux plans principaux de flexion. La nouvelle équation a proposé une expression de la rigidité EI selon la «méthode d'amplification du moment ». Les résultats obtenus par cette méthode ont été comparés à 613 tests expérimentaux de la littérature et un bon degré de précision a été obtenu. Ils ont également été comparés à ceux des codes de conception ACI-318(2008) et EC-2 (2004) améliorant la précision. La méthode est capable de vérifier et de concevoir avec suffisamment de précision des colonnes en béton armé élancées dans des applications de conception technique pratiques.

Xiu ling feng et al^[61] , Xiu ling feng et al^[62] (2013) ont présenté une étude ayant pour objectif de réduire la rigidité et cela selon le code chinois en utilisant des coefficients d'excentricité amplifiés pour tenir compte des caractéristiques de non-linéarité de la structure en béton armé avec des colonnes de forme spéciale. Sur la base de la méthode par intégration numérique, ils ont proposé un facteur de réduction de la rigidité en flexion pour prendre en compte les caractéristiques de non-linéarité du matériau et de non-linéarité géométrique des poteaux en béton armé de section équiaxiale en forme de (T) et ultérieurement en forme de croix (+).

Özgür Avşar et al^[44] (2014) ont utilisé la méthode moment-courbure de sections diverses afin de représenter la rigidité effective. Quatre relations sont proposées concernant des poutres de sections de formes rectangulaires et T et des colonnes de sections de formes rectangulaire, carrée et circulaire. La géométrie, le niveau de charge axiale, la résistance du béton et la quantité d'armatures de compression et de traction ont été identifiées comme les facteurs les plus importants affectant la rigidité effective. L'efficacité des équations proposées ont été vérifiées au moyen de données expérimentales et d'études paramétriques.

Naci Caglar et al^[40] (2015), ont présenté une formule simple pour déterminer la rigidité en flexion effective des sections fissurées des colonnes circulaires en béton armé. La rigidité à la flexion effective déterminée est fonction de certains paramètres importants tels que le confinement, le niveau de charge axiale, les dimensions de la section et les propriétés du matériau du béton et de l'acier d'armature.

Mark D.Denavit et al^[37] (2018) ont présenté une étude sur le comportement des colonnes mixtes au niveau de la section transversale et des éléments à travers des comparaisons entre les analyses inélastiques et élastiques. Les propriétés géométriques et matérielles utilisées dans les analyses sont : la fissuration du béton qui se produit au niveaux de charge relativement faible, la plastification partielle de l'acier, le glissement entre le béton et l'acier et l'écrasement du béton qui contribuent également aux pertes de rigidité. Grâce à une vaste étude paramétrique, des recommandations de conception pratiques spécifiques sont développées pour la rigidité en flexion élastique des colonnes mixtes afin de déterminer des déformations latérales sous les charges de service.

Yinping Ma et al^[63] (2021) ont développé une nouvelle approche pour la prédiction de la rigidité en flexion des sections creuses rectangulaires pour un système en treillis articulée. La déflexion du treillis à section creuse rectangulaire au stade élastique peut être divisée en deux parties : la déformation des éléments et des joints. L'effet de la déformation du joint sur la déflexion globale du treillis reste incertain. Les croisillons de la ferme étaient reliés par les ressorts. La rigidité en flexion du système en treillis peut être calculée après avoir obtenu la rigidité des ressorts. L'approche a pris la rigidité axiale des joints de ferme comme égale à la rigidité des ressorts, l'approche proposée a été vérifiée par les résultats du test de treillis et des éléments finis EF. L'approche a également été comparée à deux autres approches existantes. Les résultats ont montré que l'approche proposée avait la meilleure précision dans la prédiction de la rigidité en flexion des fermes. L'erreur relative maximale de la rigidité en flexion par rapport aux résultats EF était toujours dans la plage de $\pm 25\%$. L'approche prend raisonnablement en compte la déformation du joint. L'approche a également le potentiel d'atteindre une grande précision avec différents types de fermes et modes de chargement.

I.5 Approches d'Analyse des Poteaux de Section en Forme L

Dans la plupart des codes de calcul des ouvrages en béton armé il est courant de trouver des indications sur la justification aux états limites des poteaux carrés et rectangulaires, alors que la section en 'L' n'est pas traitée. En effet cette section présente plusieurs difficultés entre autre l'absence d'un axe de symétrie vertical et horizontal. L'analyse et la conception de colonnes en L sous flexion bi axiale et une charge axiale est parfois rencontrée dans un projet de construction. Les colonnes d'angle dans une structure à ossature et les piliers de pont sont généralement soumis à des flexions bi axiales et charge axiale. Certains chercheurs avaient menés des investigations sur les sections L chargées excentriquement et ainsi une littérature riche et diverse est apparue.

Muller ^[39] (1959), a proposé la méthode de conception des colonnes en L avec de petites excentricités. L'application était limitée pour les sections de colonnes symétriques autour de l'axe de 45 degrés. Trois séries de tableaux pourraient être utiles pendant la procédure d'essai.

Hafeez Khan ^[20] (1975) a mené des recherches analytique et expérimentale sur la capacité portante des poteaux en béton armé de section en L selon les surfaces d'interaction. Il a proposé une équation simple pour définir le contour de chargement pour les poteaux à ailes égales ou inégales.

Marin ^[36] (1979) a présenté les aides à la conception des colonnes courtes en L soumis à une flexion bi axiale et à une charge axiale sous forme de chartes et d'abaques. L'idée a été illustrée par une surface de rupture isobare. Les sections transversales en béton sélectionnées sont également symétriques par rapport l'axe de diagonale inclinée à 45 degrés avec des distributions d'acier limitées. Les abaques de conception n'étaient alors disponibles que pour des géométries très simples.

Ramamurthy et Hafeez Khan ^[21] (1983) ont proposé une méthode alternative et simple basée sur le concept d'une colonne équivalente carrée ou rectangulaire pour déterminer les charges ultimes théoriques à l'aide des diagrammes d'interaction en colonnes carrées ou rectangulaires. Les charges théoriques calculées par les deux méthodes proposées sont comparées aux résultats d'essais de 45 colonnes. La première méthode était basée sur la surface de rupture dans les formes réelles des contours de charges. Une deuxième méthode a été proposée pour concevoir la section de forme en L par la méthode d'une section transversale équivalente carrée ou rectangulaire.

Hsu^[26] (1985) a étudié à la fois la résistance et le comportement de déformation des colonnes en L sous flexion bi axiale et compression axiale combinées. Un programme informatique a été développé pour satisfaire l'équilibre et la compatibilité des forces et des déformations. La méthode numérique de Newton-Raphson est utilisée pour gérer la convergence non linéaire. Pour des relations de contrainte de matériau données pour le béton et les aciers d'armatures, la section transversale en L été subdivisée en éléments finis pour l'analyse informatique.

Mallikarjuna et Mahadivappa^[35] (1992) ont présenté une étude numérique sur la résistance des colonnes courtes en béton armé en forme de L soumises à une charge axiale et une flexion combinées se basant sur un processus itératif. Par conséquent, une tentative a été faite pour informatiser la procédure d'analyse pour les profilés de section en L . Cette étude constitue la première à présenter les courbes d'interaction pour les sections de poteaux en L avec l'analyse des états limites. L'armature est supposée être uniformément distribuée sur les côtés. La loi de comportement du béton est prise comme une courbe parabole rectangle.

Tsao et Hsu^[57] (1994) ont été développé une analyse numérique pour évaluer les relations complètes charge-flèche et moment-courbure pour les poteaux en béton armé élancés carrés et en forme de L soumis à une flexion bi axiale et une charge axiale. Le modèle informatique peut être utilisé pour toute géométrie de section transversale et propriétés de matériau du béton normal. L'analyse était basée sur un contrôle de déformation et les branches ascendantes et descendantes des courbes peuvent être étudiées. La méthode des différences finies a été introduite pour calculer les déformations qui satisfont les équations de compatibilité. Six colonnes minces carrées et huit colonnes minces en forme de L ont été testées pour la vérification.

Dunder et al^[16] (2007) ont présenté une étude expérimentale du comportement des colonnes en béton armé et une procédure théorique pour l'analyse des colonnes armées et mixtes élancées de sections transversales de formes L et arbitraires soumises à une flexion bi axiale et à une charge axiale. Il faut noter que dans la méthode proposée des relations contrainte-déformation non linéaires sont supposées pour le béton, l'acier d'armatures et l'acier de construction .

La zone de compression de la section en béton et la section entière de l'acier de construction (profilé) sont divisées en un nombre adéquat de segments afin d'utiliser divers modèles de contrainte-déformation pour l'analyse. L'effet d'élançement de l'élément est pris en compte en utilisant la méthode d'amplification du moment.

Jianfei Liu ^[33] (2012) s'est basé sur la méthode de l'intégrale numérique pour analyser la loi de variation de la rigidité de flexion pour les modèles d'essai existants de colonnes en béton armé avec sections de forme L sous différents niveaux de charge axiale et différents niveaux de l'action sismique. Selon les résultats rapportés il est conclu que les valeurs théoriques sont en accord avec les valeurs de test expérimental. En conséquence, un facteur de réduction de la rigidité flexionnelle est proposé pour tenir compte des caractéristiques de non linéarité du matériau et non-linéarité géométrique des poteaux en béton armé avec sections de forme spéciale en L à ailes égales.

I.6 Conclusion

Une recherche bibliographique est présentée qui brosse un aperçu général du comportement du poteau en béton armé, sa stabilité et sa rigidité. Les chercheurs proposent alors pour cerner le comportement non élastique du béton sous une charge combinée des approches différentes :

- *Méthodes d'essais successifs* : Cette catégorie de méthodes consiste à établir par essais successifs la position de l'axe neutre pour laquelle les efforts internes développés dans la section sont en équilibre avec les charges extérieures P, M .
- *Méthodes de l'excentricité équivalente uni axiale* : qui consiste pour un poteau de section transversale soumis à une flexion bi axiale (M_{ux}, M_{uy}) et une charge ultime constante (P_u), à trouver une combinaison d'excentricité équivalente uni axiale ' e_0 ' pour la charge axiale ce qui permettrait de considérer un seul moment, de sorte que le problème devienne alors uni axial.
- *Méthode de superposition* : ce type de méthodes consiste à remplacer la charge bi axiale P_u par deux charges équivalentes P_{ux} et P_{uy} appliquées aux axes principaux x et y respectivement. L'armature nécessaire est prise égale à la somme des deux cas de chargement.
- *Méthode des courbes d'interaction* : Une courbe d'interaction est celle qui représente la charge ultime en chaque point d'une section repérée par ces coordonnées.

Elle donne une vision sur la localisation des points de rupture d'une section. Il est donc possible d'imaginer plusieurs types de surfaces d'interaction selon les variables prises comme coordonnées.

Dans ce travail est présentée une méthode indirecte d'analyse aux états limites ultimes des poteaux de sections L et carrée, basée sur une approche d'approximations successives et des courbes d'interaction dans le plan. La méthode ne consiste pas en la détermination de la position de l'axe neutre, ce qui est compliqué au vu des nombreux facteurs qui rentrent en jeu, mais à opérer un balayage de la section selon l'angle de chargement. Cette approche numérique permet de déterminer pour une colonne élancée à section donnée toutes les combinaisons (P, M, ϕ) de ruine. L'ensemble de ces points décrit une courbe de rupture ou courbe d'interaction P-M qui prend en compte l'effet de l'élancement. La rigidité en flexion effective est ainsi déterminée en fonction de M et ϕ en chaque point du poteau. La prise en compte du comportement non linéaire des matériaux et de la forme conduit à une évaluation de rigidité flexionnelle plus réaliste et permet généralement un dimensionnement plus fiable et plus économique des poteaux.

Chapitre II

METHODE D'ANALYSE

II.1 Introduction

Afin d'étudier les valeurs de rigidité flexionnelle effective du poteau élancé en *BA* sous une flexion bi axiale et une charge axial de compression, une analyse numérique non linéaire est présentée. La recherche en question concerne des poteaux élancés de section en forme de L et carrées. Les colonnes étudiées sont articulées au niveau des deux extrémités. En effet la procédure de calcul consiste en trois étapes principales :

1. *Analyse des effets du premier ordre* : dans ce cas il y a lieu de ne pas prendre en compte les effets d'élancement. La vérification de la colonne s'effectue par la théorie de la flexion composée et déviée du béton armé (étude de la résistance de la section transversale de la colonne). A partir cette analyse il est possible de déterminer les résistances (P_u , M_u) due aux effets de premier ordre ou seulement la non- linéarité matérielle est incluse.
2. *Analyse des effets du second ordre* : dans cette partie il est demandé de vérifier l'instabilité qui prend en compte l'effet de l'élancement sur la résistance de la colonne. A partir de cette analyse il est possible de déterminer la rigidité flexionnelle effective due aux effets de premier ordre et deuxième ordre à la fois où la non linéarité matérielle et géométrique sont incluses.
3. *L'évaluation de la rigidité flexionnelle* : la troisième étape qui est l'objectif principal de cette recherche est le développement d'une nouvelle expression de la rigidité flexionnelle EI en utilisant une méthode statistique. En fait, l'analyse consiste à déterminer le coefficient de réduction de la rigidité flexionnelle ' α ' à travers une analyse par régression linéaire prenant en compte les paramètres physiques et géométriques les plus influents des poteaux élancés.

Dans ce chapitre la première partie concerne l'analyse des effets du premier ordre, en introduisant les définitions de base, les hypothèses d'analyse, les lois de comportement utilisées pour le béton et l'acier, les étapes de calcul de la méthode indirecte pour une section sollicitée à la flexion combinée et enfin une vérification des résultats représentés par les diagrammes d'interactions afin de s'assurer l'efficacité du programme pour les prochaines étapes.

II.2 Analyse les effets du premier ordre

Cette partie consiste à étudier le comportement d'une section sollicitée par une charge excentrée (flexion composée et déviée) d'un matériau à comportement non linéaire (béton armé). Au lieu d'écrire l'équation de la ligne neutre afin de connaître sa position, ce qui n'est pas chose facile, il est proposé une position de la ligne ou axe neutre et chercher ensuite la résultante axiale et le moment résistant qui conduisent à l'état limite ultime correspondant à la ligne neutre supposée.

II.2.1 Notion sur la flexion composée et déviée

Une section rectiligne est sollicitée en compression excentrée lorsque le point d'application de la résultante axiale des forces extérieures P ne coïncide pas avec l'un des axes de symétrie de la section. La position de la résultante axiale des forces extérieures P entraîne donc l'existence de moments par rapport aux axes principaux GX et GY (fig.2.1) :

$$M_x = P \cdot e_x \quad , \quad M_y = P \cdot e_y$$

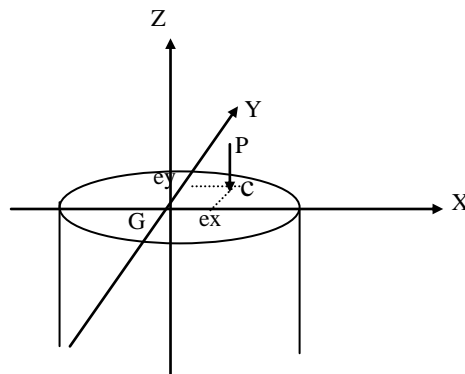


Figure 2.1 Un pilier soumis à la compression excentrée

Le point d'application de la résultante axiale C appelé *centre de pression* est défini par les coordonnées e_x et e_y qui représentent les excentricités par rapport aux axes principaux de la section dans le repère principale (G, X, Y) . Comme tout problème de flexion, des contraintes de compression et de traction apparaissent de part et d'autre de la ligne dite *axe neutre*. Ce dernier est le lieu des points de la section droite de contrainte normale nulle.

Son équation est donnée par :

$$\sigma = \left(\frac{P}{A}\right) + \left(\frac{Mx}{Ix}\right)y + \left(\frac{My}{Iy}\right)x = 0 \quad (2.1)$$

$$P \left[\left(\frac{1}{A}\right) + \left(\frac{ex}{Ix}\right)y + \left(\frac{ey}{Iy}\right)x \right] = 0 \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{1}{A}\right) + \left(\frac{ex}{Ix}\right)y + \left(\frac{ey}{Iy}\right)x = 0 \quad (2.3)$$

$$\left[\left(\frac{ey}{ex}\right) \left(\frac{Ix}{Iy}\right) \right] x - \left(\frac{Ix}{A.ex}\right) : \text{Équation de la droite de pente } \left(\frac{ey}{ex}\right) \left(\frac{Ix}{Iy}\right)$$

II.2.1.1 Problème uni axial

Si l'une des excentricités e_x ou e_y est nulle, la pente de l'axe neutre est soit nulle, soit infinie de sorte que ce dernier se retrouve parallèle à l'un des axes principaux donc l'excentricité se trouve uniquement par rapport à un axe. Ceci entraîne forcément l'existence d'un seul moment par rapport à cet axe. Ce comportement est celui d'une flexion composée droite.

Les contraintes sont données alors par :

$$\sigma = \left(\frac{P}{A}\right) + \left(\frac{Mx}{Ix}\right)y \quad (2.4)$$

et l'équation de l'axe neutre par :

$$\left(\frac{1}{A}\right) + \left(\frac{ex}{Ix}\right)y = 0 \quad (2.5)$$

II.2.1.2 Problème bi axial

Dans le problème bi axial, le point d'application de la résultante axiale, centre de pression, se trouve hors de la ligne des axes principaux et possède de ce fait une double excentricité par rapport au centre de gravité de la section (fig.2.2) :

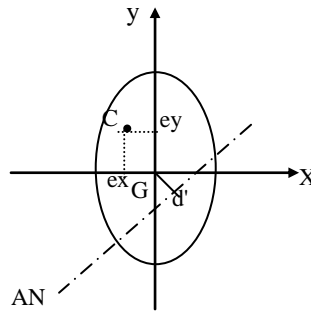


Figure2.2 Section d'un axe neutre oblique

Deux composantes apparaissent alors e_x selon l'axe horizontal et e_y selon l'axe vertical. L'équation de l'axe neutre est dans ce cas :

$$\left(\frac{1}{A}\right) + \left(\frac{e_x}{I_x}\right) y + \left(\frac{e_y}{I_y}\right) x = 0 \quad (2.6)$$

A cet effet le centre de pression et l'axe neutre sont situés de part et d'autre du centre de gravité G de la section droite et la distance entre le centre de gravité G et l'axe neutre AN est donnée par la formule :

$$d' = \frac{\left(\frac{1}{A}\right)}{\left[\left(\frac{e_x^2}{I_x^2}\right) + \left(\frac{e_y^2}{I_y^2}\right)\right]^{1/2}} \quad (2.7)$$

Par conséquent, au fur et à mesure que le point d'application de la force se rapproche du centre de gravité, la ligne neutre s'éloigne. A la limite lorsque $e_x = e_y = 0$, la résultante axiale passe par le centre de gravité et la ligne neutre est rejetée à l'infini, alors la section est totalement comprimée.

Les équations écrites précédemment ne sont valables que pour un matériau travaillant dans le domaine élastique. Pour un matériau sollicité au-delà de ce domaine, l'écriture des équations est complexe car elle dépend de la loi de comportement du matériau et de la géométrie de la section.

Dans cette partie de notre travail, il est procédé à l'étude du comportement d'une section conçue d'un matériau à comportement non linéaire (béton armé) et sollicitée en flexion bi axiale avec effort axial. Au lieu d'essayer d'écrire l'équation de la ligne neutre afin de connaître sa position, ce qui n'est pas chose facile, il est proposé une position de la ligne neutre et ensuite il faut chercher la résultante axiale et ses coordonnées propres (e_x , e_y) qui conduisent à l'état limite ultime correspondant à la ligne neutre supposée.

II. 3 Hypothèse de calcul

Les principales hypothèses utilisées sont :

- Les sections planes restent planes avant et après déformation, il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures et le béton, hypothèse de Navier-Bernoulli,
- Les déformations de l'acier et du béton à leurs interfaces sont supposées compatibles,
- La résistance du béton tendu est négligée,
- Les effets de la déformation axiale, de cisaillement et de torsion sont négligés,
- Les effets du retrait et du fluage sont négligés,
- la déformation est linéairement proportionnelle à la distance de l'axe neutre.

II.4 Lois de comportement des matériaux

Les poteaux étudiés dans ce travail sont tous en béton armé. Ce matériau composite acier béton est constitué de deux éléments aux caractéristiques différentes.

II.4.1 Loi simulant le matériau acier

L'acier des armatures actuelles possède une limite d'élasticité et un allongement à la rupture très importants. Lors des simulations numériques prévues dans cette recherche, la courbe bilinéaire (élasto-plastique) est utilisée. Elle nécessite aussi la connaissance des grandeurs caractéristiques suivantes : la déformation élastique ϵ_y qui est égale f_y/E_s (f_y est la contrainte de la limite d'écoulement ; E_s est le module d'élasticité de l'acier), la déformation ultime ϵ_u correspondant à la contrainte f_y égale à 10% , la contrainte dans les armatures σ_s exprimé par la relation suivante : $\sigma_s = f_y/\gamma_s$, γ_s : coefficient de sécurité qui égale 1.15 dans les situation normales et 1.0 dans les situation accidentelles selon le *EC2*.

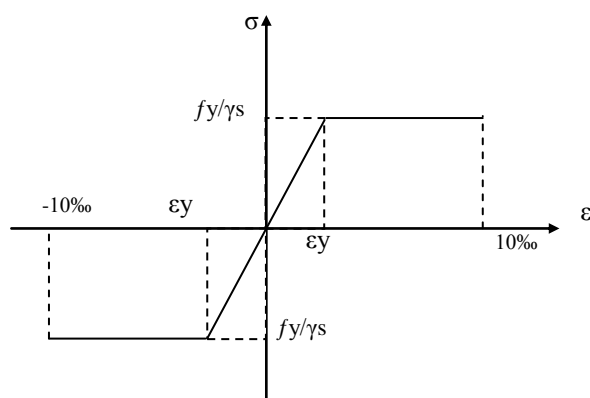


Figure 2. 3 Diagramme σ - ϵ des aciers

II.4.2 Lois simulant le matériau béton

Le béton travaillant principalement en compression, ses performances en traction sont très faibles. Beaucoup de chercheurs se sont intéressés à définir des lois de comportements pour le béton. Les propositions utilisées dans la simulation numérique de ce travail sont placées dans trois classes différentes :

- a) Pseudo loi de comportement pour la vérification des sections transversales,
- b) Loi de comportement du béton comprimé non confiné (non fretté) pour l'analyse structurale,
- c) Loi de comportement du béton comprimé confiné (fretté) pour l'analyse structurale.

a) Pseudo loi de comportement pour la vérification des sections transversales

a)-1 La courbe parabole-rectangle :

Selon la réglementation EC2^[18] le modèle de comportement adopté est la courbe de *Hognestad* appelée parabole-rectangle, (figure2.4). Elle se compose d'un arc de parabole ayant son sommet pour ε_{c2} et d'un palier horizontal au-delà jusqu'à la déformation limite ultime ε_{bu} .

La contrainte de calcul est déterminée de la manière suivante :

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.8)$$

- α_{cc} : Coefficient entre (1 à 0.85) dépendant de la durée d'application de la charge,
- γ_c : coefficient de sécurité pris égale à 1,5 pour la combinaison fondamentale et 1,15 pour la combinaison accidentelle,
- f_{ck} : résistance de compression à 28 jours.

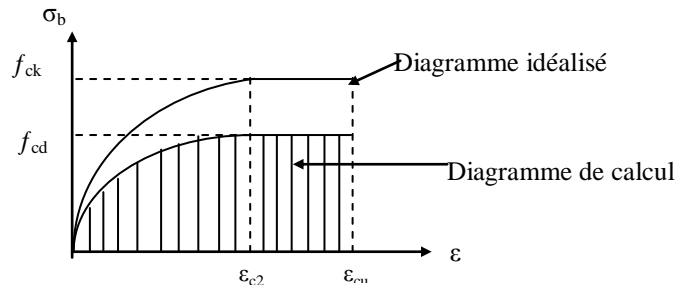


Figure 2.4 Diagramme parabolique-rectangle

$$\sigma_c = f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \dots\dots\dots \text{pour } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c2} \tag{2.9}$$

$$\sigma_c = f_{cd} \dots\dots\dots \text{pour } \epsilon_{ce} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} \tag{2.10}$$

si $f_{ck} \leq 50 \text{ Mpa} \dots\dots\dots n=2$; $\epsilon_{c2} = 2.10^{-3}$ et $\epsilon_{cu} = 3.5.10^{-3}$
 si $50 \text{ Mpa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{ Mpa} \dots\dots\dots n = 1.4 + 23.4 \times (90 - f_{ck} / 100)^4$;
 $\epsilon_{c2}(\%) = 2 + 0.085 \times (f_{ck} - 50)^{0.53}$ et $\epsilon_{cu}(\%) = 2.6 + 35 \times (90 - f_{ck} / 100)^4$

a)-2 Diagramme rectangulaire simplifié

Le diagramme parabolique-rectangle peut souvent être remplacé par un simple diagramme rectangulaire de même ordonnée maximale et de largeur $\lambda' X_u$.

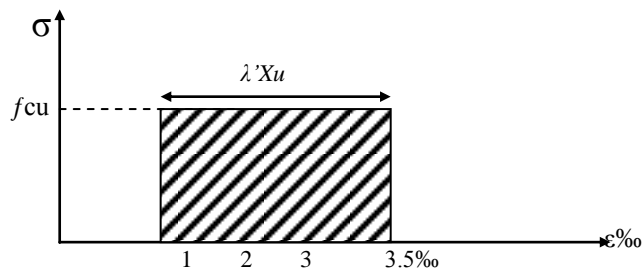


Figure 2.5 Le diagramme rectangulaire simplifié

$$f_{cu} = \eta \cdot f_{cd} \tag{2.11}$$

$$\eta = 1 \dots\dots\dots \text{si} \dots\dots\dots f_{ck} \leq 50 \text{ Mpa}$$

$$\eta = 1 - (f_{ck} - 50 / 100) \dots\dots\dots \text{si} \dots\dots\dots 50 \text{ Mpa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{ Mpa}$$

X_u : distance de l'axe neutre à la fibre la plus comprimée d'une section à l'E.L.U

$$\lambda' = 0.8 \dots \text{si} \dots f_{ck} \leq 50 \text{Mpa}$$

$$\lambda' = 0.8 - (f_{ck} - 50/400) \dots \text{si} \dots 50 \text{Mpa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{Mpa}$$

b) Loi de comportement du béton comprimé non confiné :

Pour effectuer des calculs de structure, il est nécessaire d'utiliser des lois représentant correctement le comportement du matériau. Lorsqu' une éprouvette cylindrique en béton est soumise à un essai de compression simple contrôlé en déformation, l'aspect qualitatif de la loi de comportement « contrainte axiale - déformation axiale » prend la forme de la courbe de la figure ci-dessous :

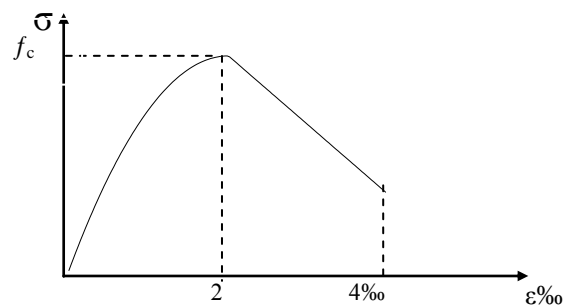


Figure 2.6 Diagramme de Kent et Park pour le béton non confiné

Les caractéristiques qualitatives de cette courbe sont :

- une branche ascendante, à concavité vers le bas, admettant un module tangent initial E_{ci} et un extremum (f_c, ϵ_{co}). Pour cet extremum de contrainte correspond la résistance à la compression (f_c);
- au-delà de ce maximum, une branche descendante présentant normalement un point d'inflexion, et finie (σ_c, ϵ_{cu}). Dans cette recherche la loi de *Kent* et *Park* est utilisée.

b)-1 Diagramme de Kent et Park pour béton non confiné

Kent et Park ^[31] avaient proposé une courbe composée par deux branches (Figure 2.6). Une branche ascendante à concavité vers le bas simulée de manière identique à celle de *Hognestad* mais seulement en remplaçant le coefficient $0.85f_c$ par f_c et 0.002 par ϵ_{co} :

$$\sigma = f_c \left[\left(2 \cdot \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{co}} \right) - \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{co}} \right)^2 \right] \dots\dots\dots \text{pour } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{co} = 0.002 \quad (2.12)$$

Par contre, une branche descendante présentée par l'équation suivante :

$$\sigma = f_c [1 - Z_u(\epsilon_c - \epsilon_{co})] \dots\dots\dots \text{pour } \epsilon_{co} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} = 0.004 \quad (2.13)$$

Tels que :

$$Z_u = \frac{0.5}{\epsilon_{50u} - \epsilon_{co}} \quad ; \quad \epsilon_{50u} = \frac{3 + 0.285 \cdot f_c}{142 f_c - 1000} \quad ; \quad \epsilon_{50u} \geq \epsilon_{co} \quad (f_c \text{ mpa}).$$

c) Loi de comportement du béton comprimé confiné

La difficulté principale pour la détermination de la relation σ - ϵ d'un béton confiné est la détermination de la résistance à la compression de confinement du béton. Cette dernière se définit comme une fonction de la valeur de la résistance au centre du béton f_{cc} , le volume totale d'acier ' ρ ', l'espacement des étriers ' s ', la limite élastique des étriers f_{yk} , la configuration des étriers (A , L_s , h et b), la section transversale, la longueur, le grand et le petit côtés des étriers respectivement et les dimensions de la section.

Définissons maintenant la surface de béton confiné. Elle se trouve à l'intérieur du quadrilatère formé par les axes de chaque brin des étriers.

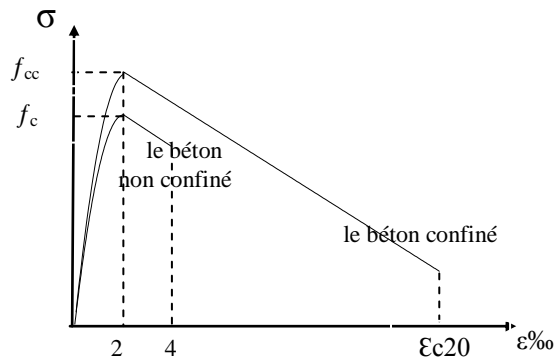


Figure 2.7 Courbes Kent et Park pour le béton non confiné et confiné

c)-1 Diagramme de Kent et Park pour béton confiné

Kent et Park^[31] avaient présenté une loi qui garde la même équation pour la branche ascendante (fig2.7) ; pour la partie post-maximum l'équation présentée comme suite :

$$\sigma = f_{cc}[1 - Zc(\epsilon_c - \epsilon_{coc})] \dots \dots \dots \text{pour : } \epsilon_{co} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} = \epsilon_{c20} \quad (2.14)$$

Tel que : $\epsilon_{c20} = 1.6(\epsilon_{50u} + \epsilon_{50h}) - 0.6 \epsilon_{coc}$; $\epsilon_{coc} = K \cdot \epsilon_{coc}$, $f_{cc} = K \cdot f_c$;

$$K = 1 + \left(\frac{\rho_s \cdot f_{ywK}}{f_c}\right) ; \quad \rho_s = \frac{A_0 \cdot L_s}{s.h.b} ; \quad \epsilon_{50h} = 0.75 \rho_s \left(\frac{b}{s}\right)^{0.5} ; \quad Zc = \frac{0.5}{\epsilon_{50u} + \epsilon_{50h} - \epsilon_{coc}} .$$

II.4.3 Courbe d'interaction

Pour une section donnée, chaque état de sollicitation ultime peut être représenté par une droite caractéristique du diagramme de déformation. Pour chacune de ces droites, les diagrammes σ - ε du béton et de l'acier permettent de déterminer les contraintes en tout point de la section, et par intégrations de connaître la résultante et le moment résultant des contraintes, c'est-à-dire, l'effort normal P et le moment fléchissant M . A chaque droite, on peut donc associer un couple de valeurs (M,P) caractérisant un état ultime.

Lorsque la droite pivote successivement autour de A, B et C, le point de coordonnées (M, P) décrit une courbe qui délimite le domaine de rupture ou de résistance de la section. Il faut que le point de coordonnées (M,P) soit à l'intérieur de ce domaine, convexe et fermé, pour que l'équilibre de la section soit assuré.

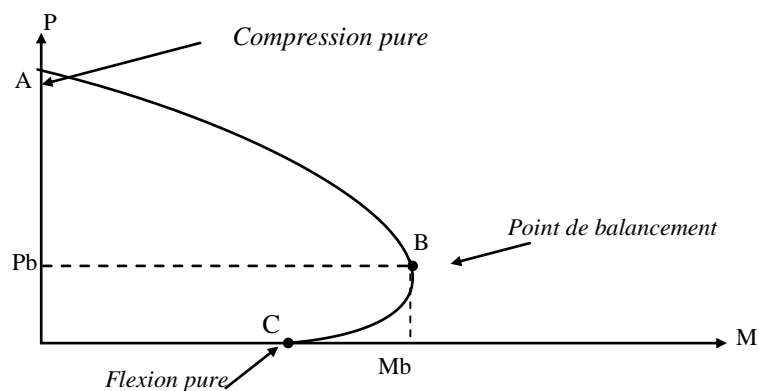


Figure 2.8 Diagramme d'interaction M-P

Il est évident que pour chaque forme de section, configuration des armatures tendues et comprimées, caractéristiques des matériaux correspond un diagramme d'interaction. La combinaison (P, M) qui permet de tracer la courbe d'interaction est la combinaison critique qui provoque la rupture. Dans ce cas, il faut distinguer deux états de rupture selon le chargement appliqué, (fig2.8) :

- domaine AB : la rupture arrive par compression, par plastification et écrasement du béton, c'est une rupture fragile,
- domaine BC : la rupture arrive par traction, par écoulement de l'acier, c'est une rupture ductile.
- Le point B appelé « *point de balancement* » correspond à la limite entre les deux modes de rupture. Il correspond à la section équilibrée dans laquelle le béton arrive à la plastification $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$ et l'acier arrive à l'écoulement $\varepsilon_s = \varepsilon_{es}$.

II.5 Description de la méthode utilisée

La modélisation est obtenue par le passage d'une section carrée de dimensions $(B \times B)$ à une section en L. Pour y arriver il faut alors considérer une autre section carrée de dimensions $(B_1 \times B_1)$ avec $(B_1 < B)$ écartée à partir du coin de l'origine du carré $(B \times B)$ de sorte en enlevant la section $(B_1 \times B_1)$, une section sous forme 'L' est obtenue figure 2.9.

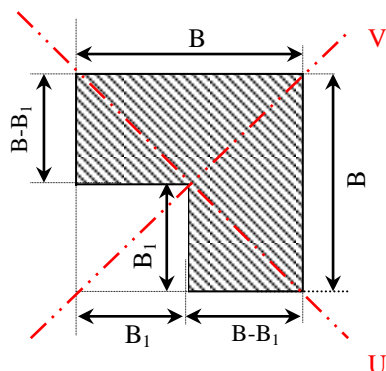


Figure 2.9 Section de forme L

Pour différentes valeurs de B_1 , diverses dimensions de la section 'L' sont obtenues. Si $B_1=0$: la section 'L' devient une section carrée, et le rapport B_1/B varie de 0 à 0.6 (fig2.10)

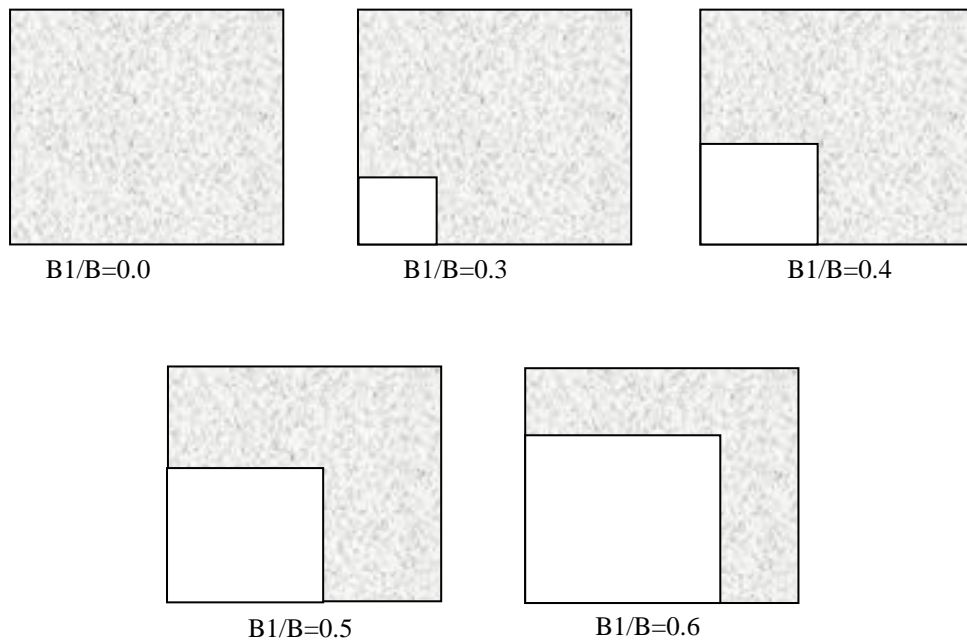


Figure 2.10 Variation de la minceur de sections selon le rapport B_1/B

Il faut également considérer que les paramètres de section sont symétriques par rapport à l'axe principal V-V. Ainsi, Les armatures sont supposées avoir une distribution répartie sur le périmètre (voir la figure ci-dessous). L'enrobage est représenté par le paramètre D_c .

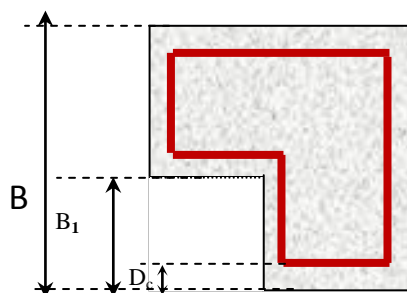


Figure 2.11 Les dimensions de la section de forme L

II.5.1 Efforts internes

La section géométrique transversale d'une colonne en béton armé est constituée de deux matériaux, d'une part le béton et d'autre part, l'acier (armatures longitudinales). La section est alors divisée en tranches infiniment petites. Pour chaque tranche les efforts internes (du béton, des armatures comprimées et tendues) sont évalués par rapport à une charge axiale et un moment ultime. Cette division des zones a pour objectif d'affiner la précision de l'intégration numérique de la distribution de contraintes. Deux cas distincts se présentent, les zones 100% béton et les zones mixtes. Il faut alors fixer une valeur pour l'épaisseur des tranches. Les zones mixtes béton-armatures sur chaque tranche située dans la zone comprimée ou tendue, la surface d'armature qui est supposée uniformément répartie sont représentées par un rectangle.

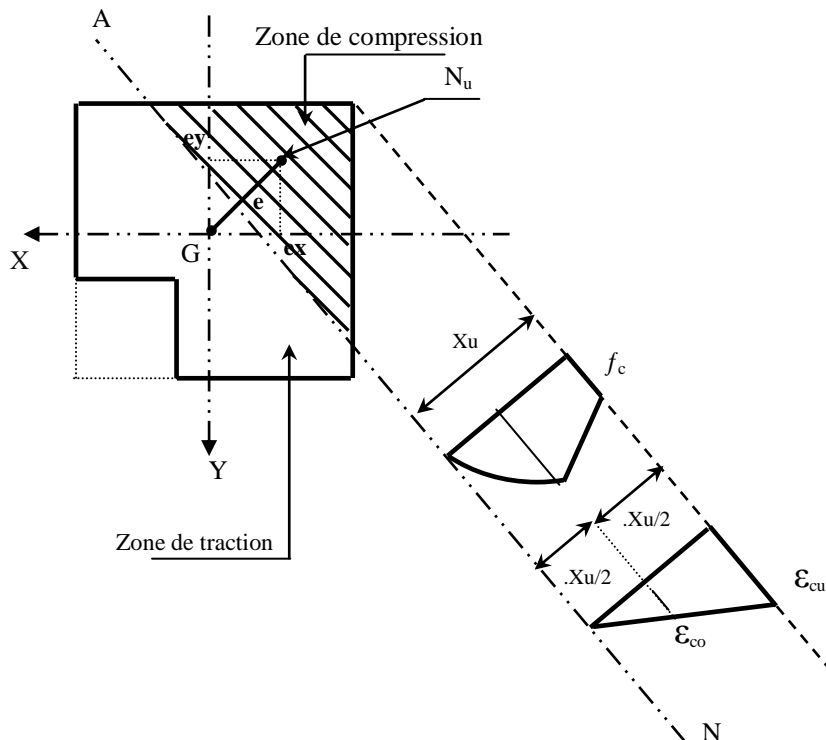


Figure 2.12 Diagramme de contraintes et déformations de béton d'une section en L sous une charge bi axiale.

Les épaisseurs des tranches sont conditionnées dont le but d'obtenir une bonne approximation des aires des armatures. Pour ce faire, il est choisi une épaisseur de tranche de 1.0 mm. Pour chaque tranche il faut évaluer les efforts internes (du béton, des armatures comprimées et tendues) sous une charge axiale et un moment ultime.

II.5.1.1 Forces dû au Béton

Les résultantes des forces et des moments par rapport au centre de gravité de la section sont calculées ainsi. Pour trouver les forces et les moments dus au béton seul dans la section en '*L*' soumise à une compression axiale avec un moment uni axial ou bi axial ($0^{\circ} \leq \theta \leq 90^{\circ}$), la procédure suivante est utilisée dans l'analyse :

- La zone comprimée est divisé en tranches unitaires de largeur fixée (largeur de la section).
- La force unitaire est égale à la surface de chaque tranche élémentaire multipliée par la contrainte en son centre de gravité.
- La somme des forces élémentaires de toutes les tranches donne la force totale dans le béton.
- La force unitaire multipliée par la distance entre le centre de gravité de la tranche et le centre de gravité de la section donne le moment unitaire.
- La somme de tous les moments donne le moment total du béton comprimé.

II.5.1.2 Forces dû aux Aciers

La méthode est la même que celle utilisée pour le béton. La contrainte dans l'armature pour la tranche 'i' est déterminée en fonction de la déformation ϵ_{si} :

$$\epsilon_{si} \leq \epsilon_{es} \dots\dots\dots f_{si} = \epsilon_{si} \cdot E_s \tag{2.15}$$

$$\epsilon_{si} > \epsilon_{es} \dots\dots\dots f_{si} = f_{su} \text{ tel que } (f_{su} = f_y / \gamma_s) \tag{2.16}$$

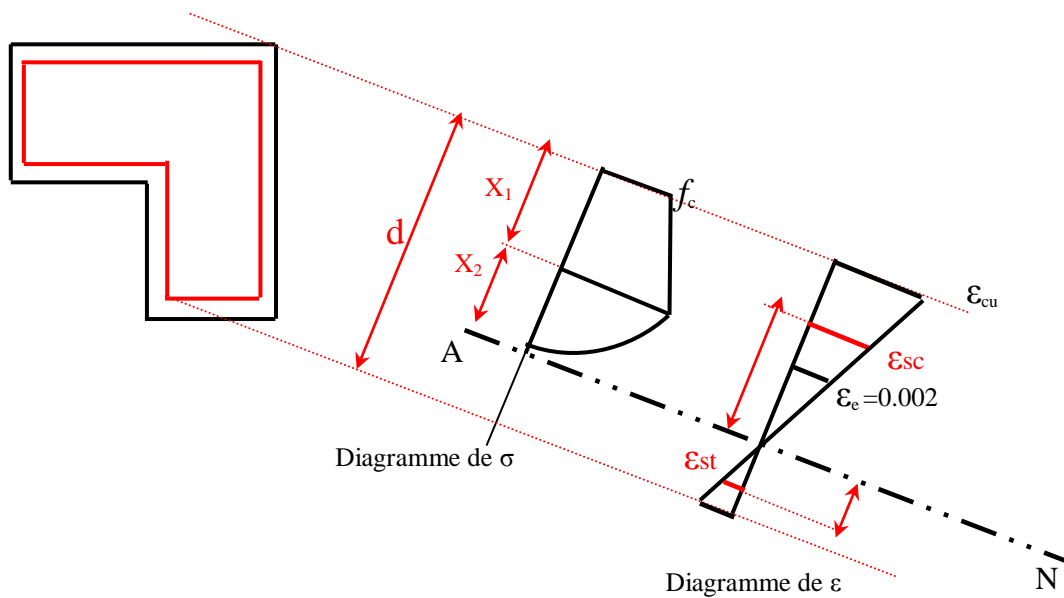


Figure2.13 Les armatures dans une section d'axe neutre oblique .

II.5.1.3 Forces totales

Les forces internes totales sont obtenues en faisant la sommation des forces élémentaires par :

$$P = \sum_{i=1}^n f_{ci} \cdot A_{ci} + \sum_{i=1}^n (f_{si} - f_{ci}) \cdot \rho \cdot \frac{A_{ci}}{100} \tag{2.17}$$

$$M = \sum_{i=1}^n f_{ci} \cdot A_{ci} \cdot Y_{ci} + \sum_{i=1}^n (f_{si} - f_{ci}) \cdot \rho \cdot Y_i \cdot \frac{A_{ci}}{100} \tag{2.18}$$

- n : Le nombre des tranches sur la longueur de la section ' L ' ,
- f_{si} : La résistance d'acier dans la tranche ' i ' ,
- f_{ci} : La résistance du béton au même niveau de la tranche ' i ' de l'acier,
- A_{ci} : aire de béton,
- $\rho = (A_{si}/A_{ci}) * 100$: pourcentage de l'acier dans la tranche ' i ' ,
- A_{si} : aire de l'armature dans la tranche ' i ' ,
- Y_{ci}, Y_i : la distance de la tranche ' i ' par rapport au centre de la section du béton et acier respectivement .

La méthode d'analyse se fait en balayant la section parallèlement à l'axe neutre. Pour la section en L , le programme informatique étudie différentes positions de l'axe neutre en fonction de l'angle d'inclinaison θ . Ainsi l'angle $\theta = \tan^{-1}(e_x/e_y)$ et e_x et e_y représentent les excentricités le long des axes 'x' et 'y' respectivement. Pour élaborer le programme final, quatre programmes indépendants ont été développés à cet effet. Le code ainsi mis au point correspond à la spécificité liée à la forme de la section et l'angle d'inclinaison de la charge θ . Ils sont expliqués ci-dessous selon les cas suivants(fig2.14-2.15) :

- *Cas 1* : balayage à partir du coin de la section, tel que l'angle d'inclinaison soit dans la limite ($0 \leq \theta \leq 45^0$).
- *Cas 2* : balayage à partir du coin de la section, tel que l'angle d'inclinaison soit dans la limite ($45^0 < \theta \leq 90^0$).
- *Cas 3* : balayage à partir des ailes de la section, tel que l'angle d'inclinaison soit dans la limite ($0 \leq \theta \leq 45^0$).
- *Cas 4* : balayage à partir des ailes de la section, tel que l'angle d'inclinaison soit dans la limite ($45^0 < \theta \leq 90^0$).

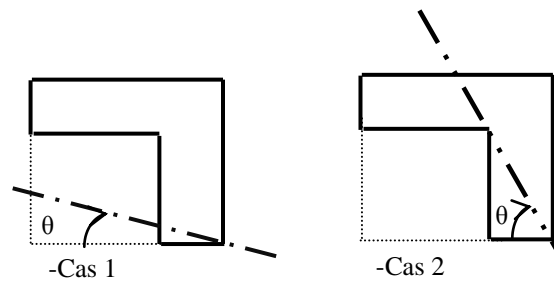


Figure 2.14 Chargement bi axial balayage à partir du coin de la section

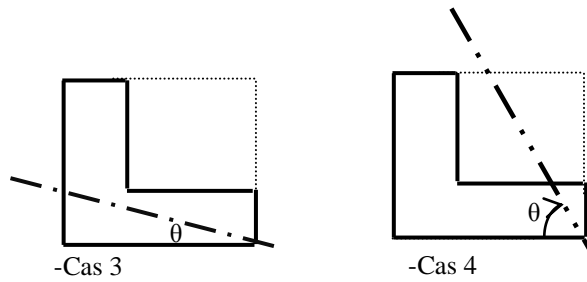


Figure 2.15 Chargement bi axial balayage à partir les ailes de la section

Pour les cas précédents donnés ci-dessus le chargement est bi axial alors que l'angle de chargement ' θ ' est différente de zéro et de 90° sinon le chargement devient un chargement uni axial (fig 2.16).

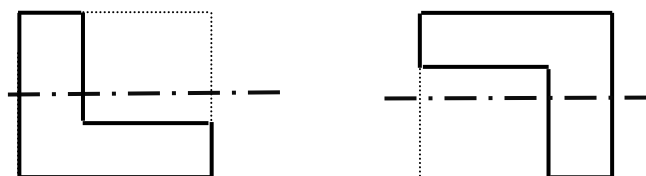


Figure 2.16 Chargement uni axial pour un angle de chargement $\theta=0^\circ$

Les codes de calcul des cas mentionnés ci-dessus sont respectivement développés en utilisant le langage *FORTRAN* pour obtenir la résistance ultime (P_u) et les moments (M_u) comme résultats de différentes positions de l'axe neutre. Les données d'entrée comprennent donc la taille du carré (B_I), la profondeur (B) de la section, la profondeur d'enrobage (D_c), les résistances caractéristiques du béton (f_c) et de l'acier (f_y), les modules d'élasticité de l'acier (E_s) et du béton (E_c), l'angle d'inclinaison (θ) et le pourcentage d'armatures (ρ).

Pour chaque position de l'axe neutre le couple d'efforts (P_u - M_u) est obtenu donnant ainsi un point de la courbe d'interaction. En faisant un balayage de la section totalement tendue ($X_u=0$) jusqu'à la section totalement comprimée (fig2.17) ;et à travers les résultats tous les points de la courbe d'interaction P - M sont enfin obtenus. Un sous programme pour l'analyse est annexé à ce mémoire (Annexe 1).

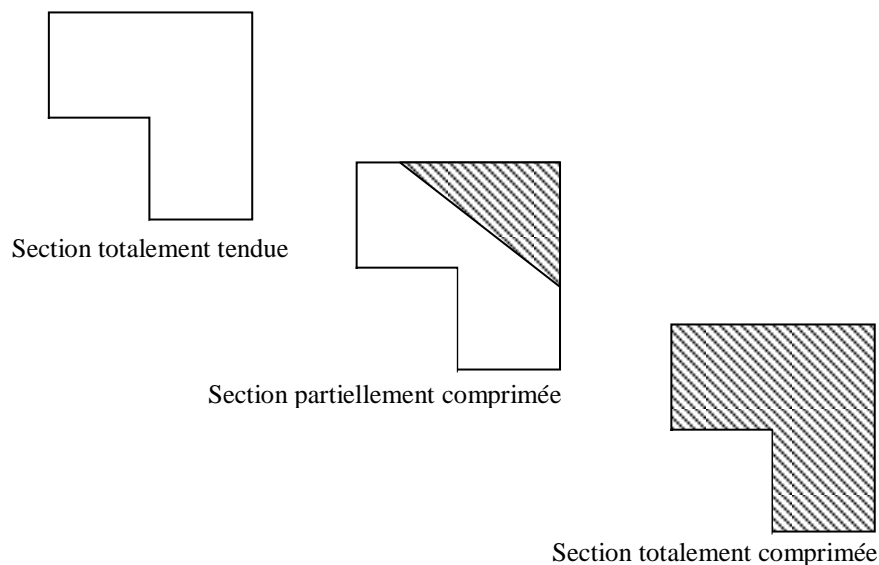


Figure 2. 17 Balayage de l'axe neutre à travers la section transversale

II.6 Etude paramétrique

La relation entre la charge et le moment est obtenue par les diagrammes d'interaction des coordonnées P_u selon l'ordonnée et M_u selon les abscisses. Les points qui forment le diagramme d'interaction sont obtenus par différentes positions de l'axe neutre. Chaque position à une distribution spécifique des déformations et un bloc de contraintes bien déterminé, les courbes ci-dessous présentent une étude paramétrique selon quelques facteurs pouvant avoir une influence sur le comportement de la colonne étudiée.

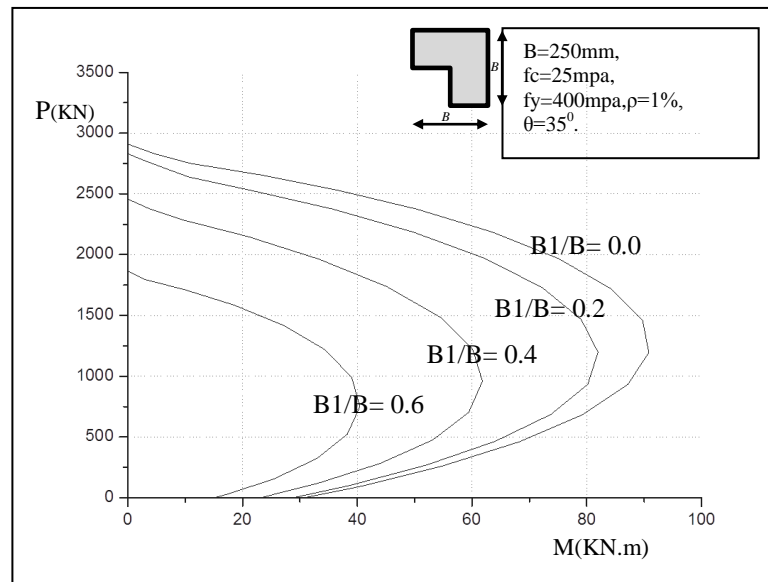


Figure 2.18 Influence des dimensions de la section
Balayage à partir du coin de la section

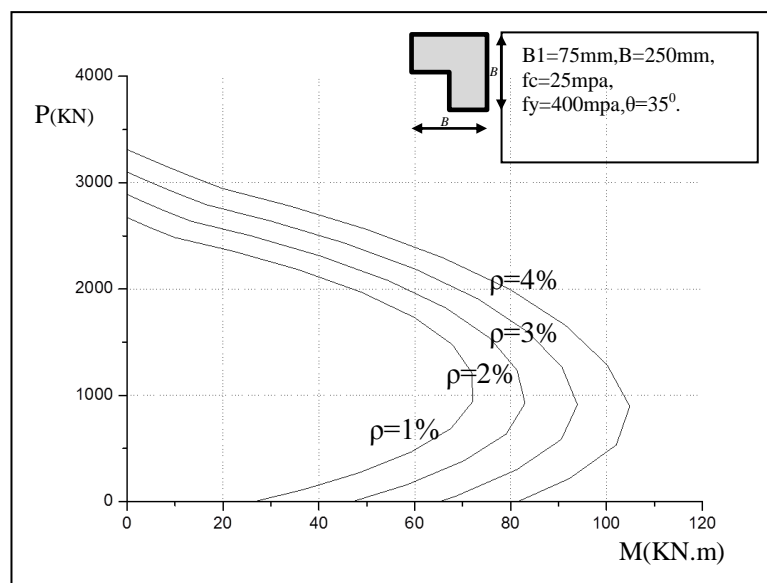


Figure 2.19 Influence de la quantité d'acier longitudinal
Balayage à partir du coin de la section

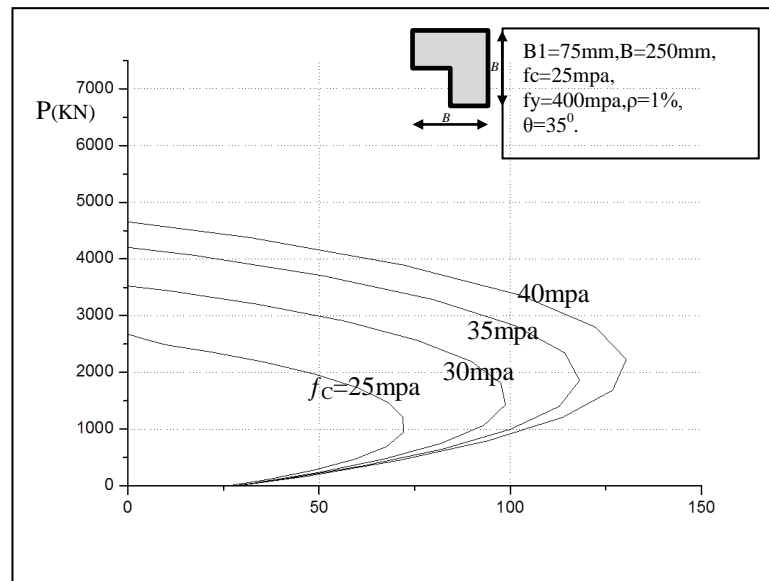


Figure 2.20 Influence de la résistance du béton
Balayage à partir du coin de la section

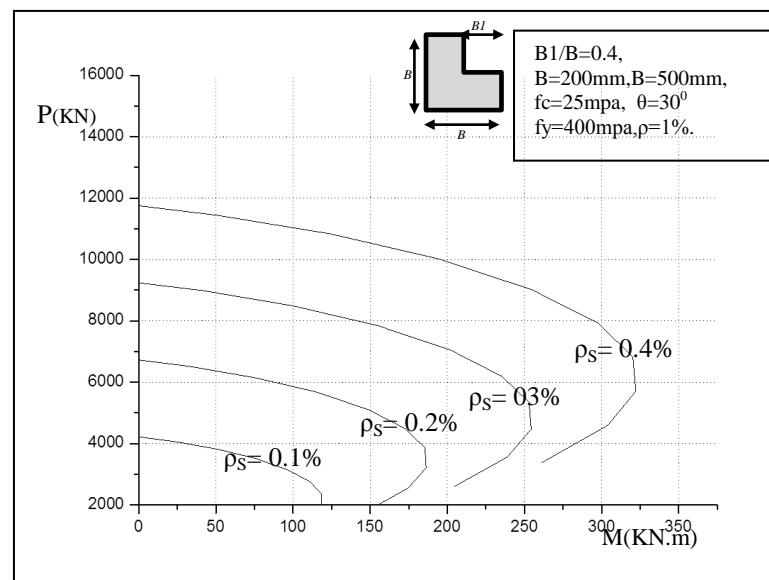


Figure 2. 21 Influence de la quantité d'acier transversal
Loi de comportement du béton *Kent* et *Park* confiné
Balayage à partir les ailes de la section L

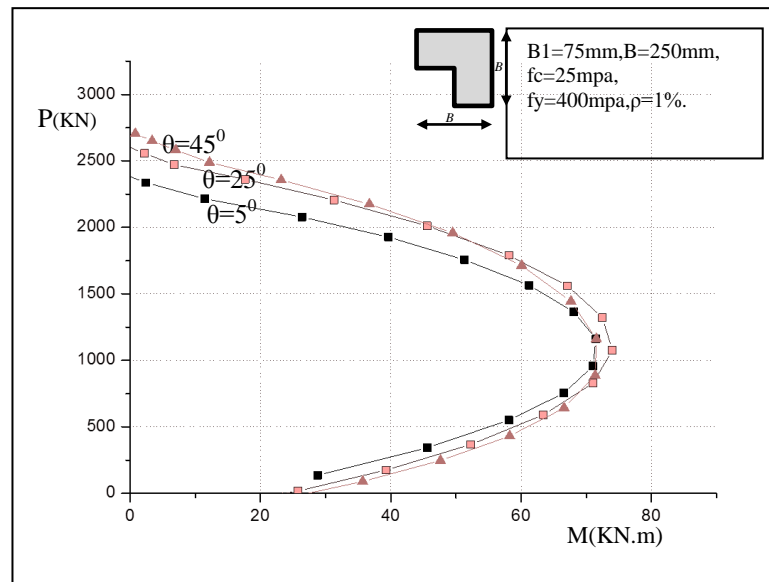


Figure 2.22 Influence de l'angle de chargement $0 \leq \theta \leq 45^\circ$
Balayage à partir du coin de la section

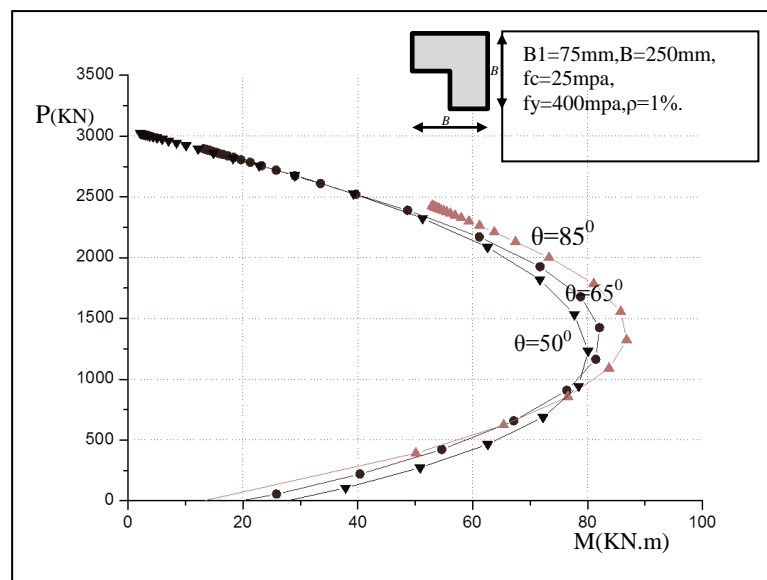


Figure 2.23 Influence de l'angle de chargement $45^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
Balayage à partir du coin de la section

II.6.1 Influence du choix de la loi de comportement du béton

La détermination de la courbe d'interaction $P-M$ d'une section est intimement liée à la courbe simulant les lois de comportements des matériaux. Cette courbe n'est donc pas unique. Les ingénieurs des bureaux d'études, quant à eux, utilisent préférentiellement la technique de la norme basée sur la loi « *parabole-rectangle* » ou bien « *rectangulaire simplifiée* » pour simuler le béton. Dans ce travail de recherche les deux lois précédentes ont été utilisées ainsi que la lois de comportement de *Kent et Park* pour le béton non confiné ce qui est plus proche du comportement réel du béton et leur deuxième loi de comportement pour le béton confiné .

En considérant la figure 2.24 et en superposant les relations $P-M$ des quatre techniques pour un béton de 44.88N/mm^2 et une quantité d'acier ($\rho=1\%$) donnée sur la figure ci-dessous les observations suivantes sont faites :

- la partie à flexion prédominante est pratiquement identique pour les quatre courbes. La ligne de la courbe parabole–rectangle est liée au modèle simplifiée et restent toutes les deux en dessous de celle de *Kent et Park*.
- la partie à effort normal prédominant et moment nul pour les courbes normalisées est pratiquement identique. Mais la courbe d'interaction de *Kent et Park* ^[31] pour le béton non confiné passe clairement en dessous de celle de *Kent et Park* relative au béton confiné et donc ne tend vers la valeur de la résistance de la section.

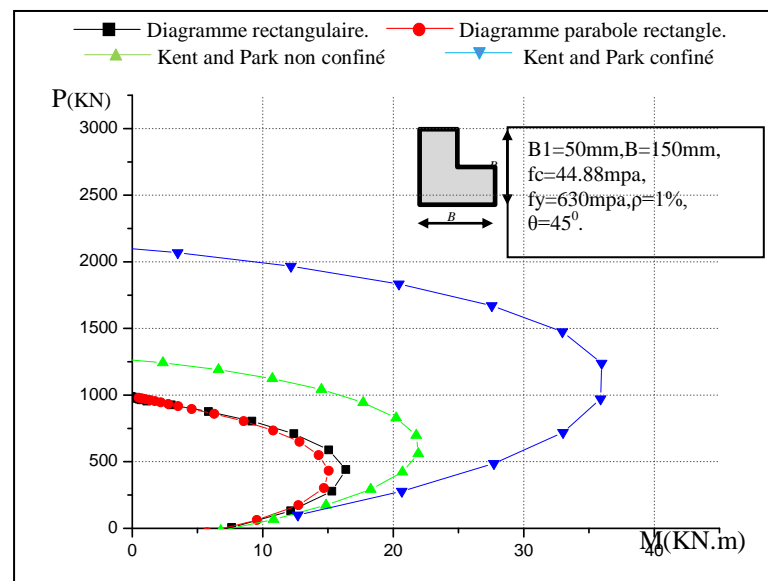


Figure 2.24 Influence de la loi de comportement du béton

Ceci s'explique par le fait que les courbes normalisées sont réduites par les coefficients de sécurité en plus la résistance du béton qui est toujours minimisée de 20% ou plus. Ainsi, la courbe *Kent et Park* du béton confiné donne des résistances plus élevées à cause de sa forte capacité vis-à-vis de la compression et la participation des armatures transversales dans la résistance de la section.

Dans les prochaines étapes de ce travail qui vise à déterminer la rigidité flexionnelle effective des colonnes élancées en béton armé la loi de comportement de *Kent et Park* du béton non confiné est utilisée. Elle présente un comportement plus proche de la réalité pour les bétons ordinaires en rappelant que cette loi est destinée à ce type de problème concernant l'analyse structural .

II.7 Validation de la simulation numérique

Pour s'assurer de l'exactitude du programme présenté une comparaison entre les résultats théoriques obtenus et ceux donnés par le logiciel professionnel « *section builder8* » est réalisée. Ce logiciel donne les coordonnées de la courbe d'interaction (P, M), connaissant la forme et les dimensions de la section étudiée, l'angle d'inclinaison de l'axe neutre et le pourcentage d'armatures longitudinale et transversale (pour le béton confiné). Ainsi des exemples de sections carrée et 'L' sont considérées tenant compte de différents pourcentages d'armatures pour lesquels les courbes d'interaction sont tracées avec le programme proposé et le logiciel « *section builder 8* ».

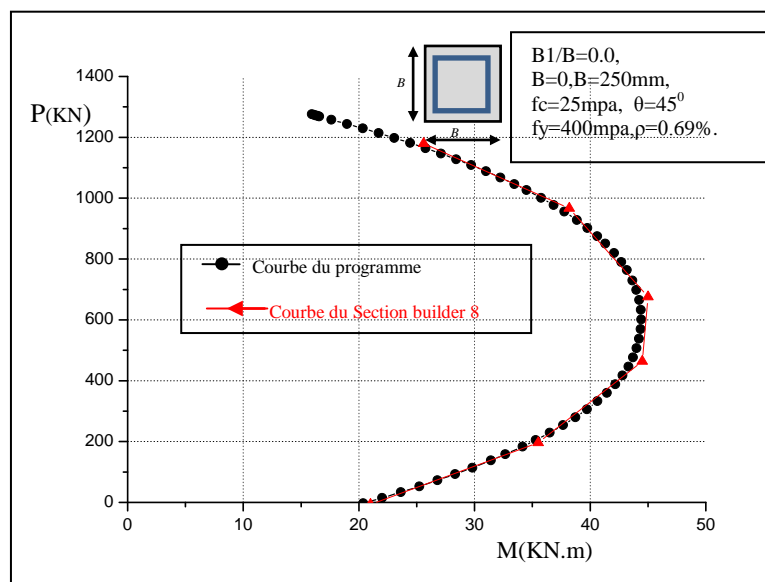


Figure 2.25 Comparaison entre courbes d'interaction selon le diagramme rectangulaire simplifié du béton .

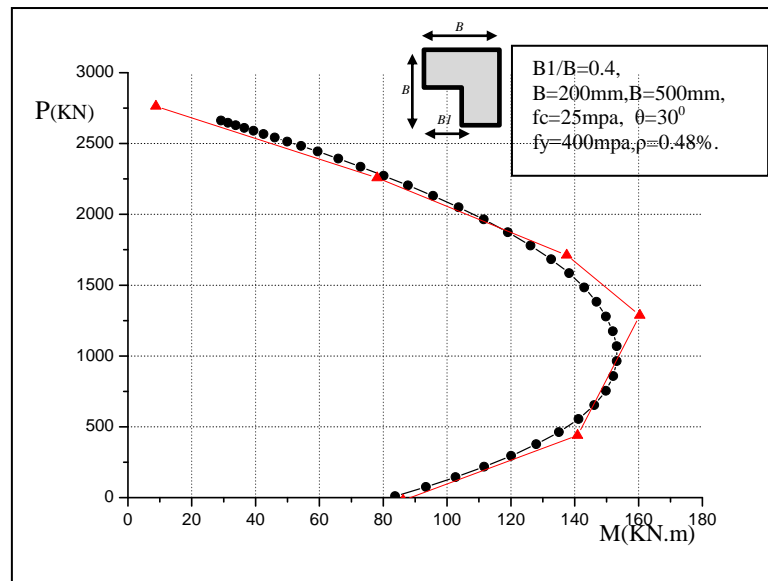


Figure 2.26 Courbes d'interaction selon le diagramme Parabole-rectangle Balayage à partir le coin .

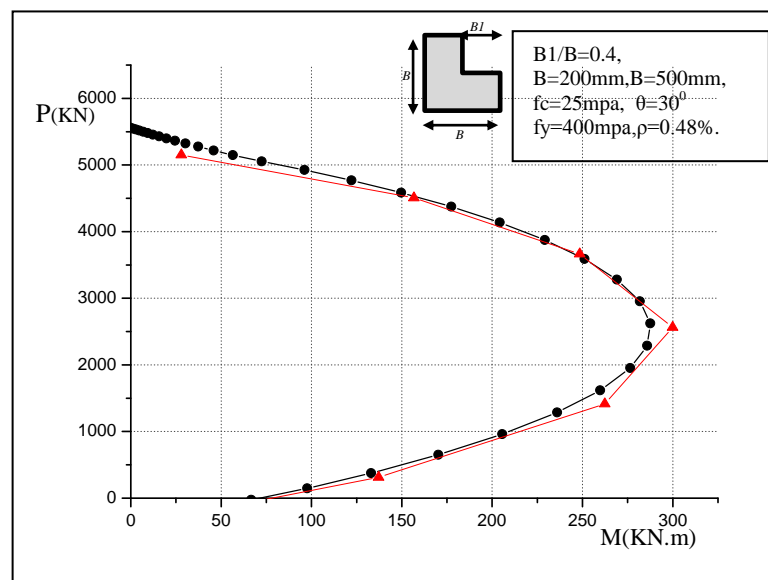


Figure 2.27 Courbes d'interaction selon le diagramme Park et Kent un confiné Balayage à partir les ailes.

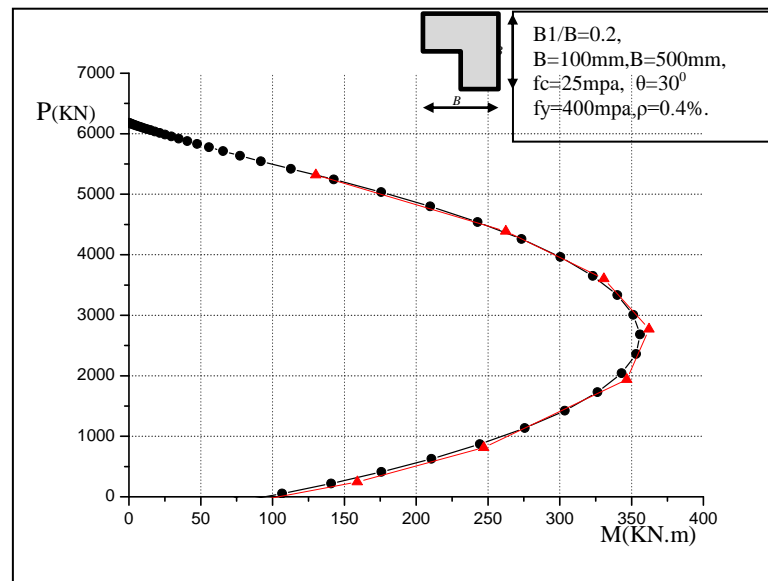


Figure 2.28 Courbes d'interaction selon le diagramme Park et Kent un confiné Balayage à partir le coin .

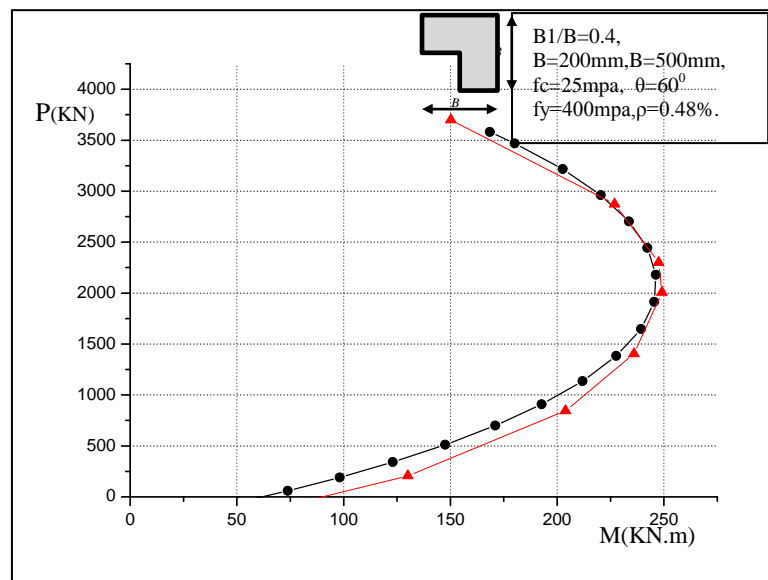


Figure 2.29 Courbes d'interaction selon le diagramme rectangulaire simplifier Balayage à partir le coin de la section L

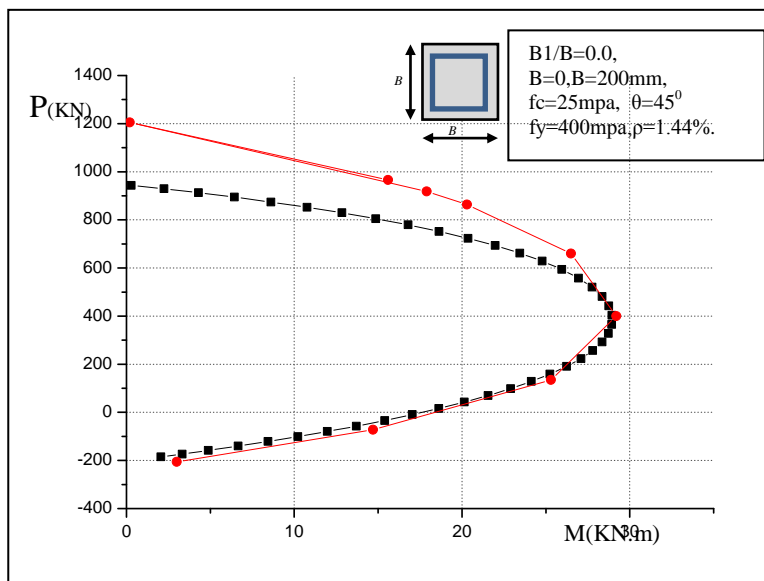


Figure 2.30 Courbes d'interaction selon le diagramme Park et Kent confiné (comparaison avec la loi de Mander confiné) .

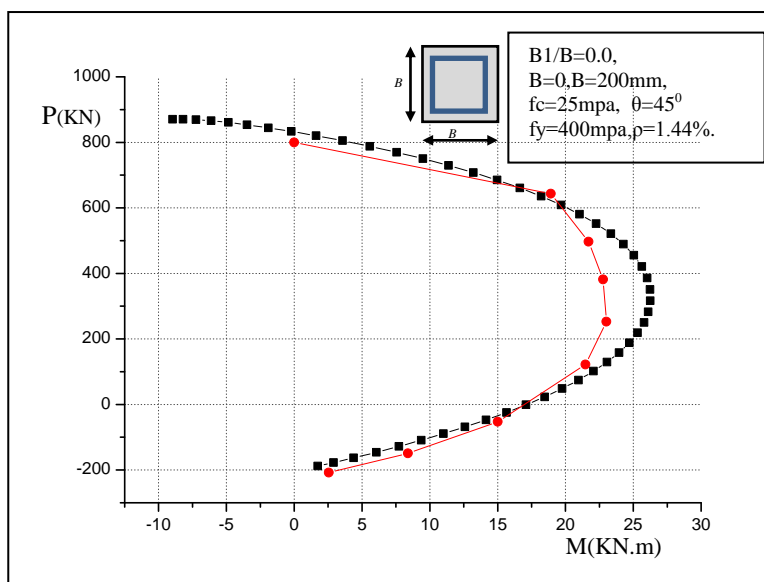


Figure 2.31 Courbes d'interaction selon le diagramme Park et Kent un confiné (comparaison avec la loi de Mander un confiné) .

II.8 Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre des notions concernant le calcul des effets du premier ordre et les hypothèses adoptées dans le calcul sont présentées.

La loi parabole–rectangle est utilisée pour représenter le comportement du béton. La courbe rectangulaire, loi de *Kent et Park* non confinée et confinée, sont ainsi introduite pour modéliser le comportement en compression du béton alors que le comportement en traction étant négligé. Pour l’acier la courbe élasto- plastique a été adoptée.

Dans la deuxième partie de ce chapitre il est exposé explicitement l’approche et le programme élaboré pour estimer et évaluer la résistance de sections des poteaux selon la méthode indirecte d’intégration par tranches. Cette approche représente la base de calcul qui sera employée dans les chapitres suivants pour l’analyse et la discussion de la stabilité et la rigidité des poteaux élancés. Les étapes de la méthode sont présentées et accompagnées d’études paramétriques.

L’étude paramétrique montre que :

- La diminution de dimensions de la section transversale représentée par le rapport B_1/B provoque la diminution de la résistance et la capacité portante de la section.
- Les figures 2.19 ; 2.20 et 2.21 montrent que l’augmentation le taux des armatures longitudinales ρ ; la résistance en compression du béton f_c ; ainsi que le taux des armatures transversales ρ_s cause l’augmentation de la résistance de la section.
- L’angle d’inclinaison de la charge de compression appliquée sur la section transversale ne joue pas un rôle important sur la capacité de la section.
- La comparaison faisant la synthèse de différentes lois de comportement montre une grande variation de résistance entre les différents modèles pour le béton confiné ou pour le béton non confiné.

Pour s’assurer de l’exactitude du programme présenté une comparaison entre les résultats théoriques obtenus et ceux données par un logiciel professionnel nommé ‘*section builder 8*’ est faite. En conclusion les comparaisons effectuées dont les caractéristiques sont très différentes (dimensions, armatures, matériaux, etc.) montrent que le programme élaboré, associé aux modèles admis pour le comportement des matériaux livrent des résultats dont la précision est très bonne.

Chapitre III

EFFETS DU SECOND ORDRE

III.1 Introduction

Dans l'analyse du comportement ultime des éléments comprimés élancés en béton armé, l'équilibre doit être établi dans le système déformé (calcul du second ordre, non linéarité géométrique) compte tenu des lois de comportement des matériaux (non linéarité matérielle). Dans ce chapitre les notions de base du comportement des poteaux élancés sont expliquées et clarifiées. Ainsi, la définition d'une colonne élancée et la conception de la théorie de second ordre, la stabilité qui sont mises en exergue et illustrées par des exemples sur les formes d'équilibre élastique stable et instable. A cet effet, les différentes expressions explicitant la notion du flambement des poteaux en béton armé, l'élancement, la charge et la contrainte critique d'Euler sont données. Enfin les différentes visions réglementaires d'analyse de la stabilité des colonnes sont elles aussi exposées ainsi que la méthode adoptée.

III.2 Comportement d'un poteau élancé

Un poteau est dit élancé si les dimensions de sa section transversale sont petites comparativement à sa longueur. L'élancement d'un poteau est mesuré par le rapport de la longueur sur le rayon de giration minimum de la section. Sachant que d'après la résistance des matériaux, qu'un poteau élancé soumis à une charge combinée est sujet au phénomène de flambement ou bien des effets du second ordre, la rupture intervient sous une force largement inférieure à la charge causant la rupture d'un poteau court. Il est dit alors que le poteau est instable.

III.2.1 Théorie de second ordre

Un poteau soumis à des charges extérieures subit des déplacements. La combinaison des déplacements horizontaux et des charges verticales engendre des moments secondaires de renversement qui ont pour conséquence d'augmenter ces déplacements et donc s'amplifier eux même. Le poteau se stabilise alors dans une configuration déformée d'autant plus amplifiée par rapport à celle obtenue sans prendre cet effet en considération. La prise en considération des déplacements horizontaux d'un poteau en présence de charges verticales importantes conduit donc, par rapport à un modèle d'analyse qui les ignore et qui est dit du « 1^{er} ordre », à des moments de flexion et des déplacements plus importants pour un même

chargement. Une telle situation est dite du « 2^{ème} ordre » conduit à une amplification dite « effet du 2^{ème} ordre » nommé aussi « effet $P-\Delta$ ».

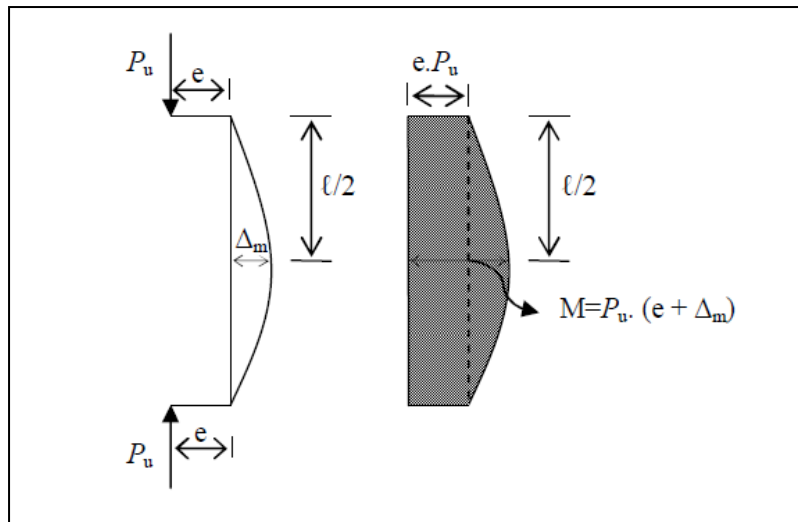


Figure 3.1 Colonne sous l'effet du 2^{ème} ordre

Déplacements	Ignorés	considérés
Moments	$M=P.e$	$M=P.e+P.\Delta$
Effets	1 ^{er} ordre	2 ^e ordre

Les facteurs influant sur l'effet $P-\Delta$ sont nombreux et peuvent être résumés ainsi :

1. la force de compression P et l'excentricité e ,
2. la longueur du poteau et les propriétés géométriques de sa section transversale définissant l'élancement du poteau (L),
3. la rigidité en flexion de la section du poteau (EI),
4. les conditions de liaisons des extrémités du poteau,
5. le contreventement ou non du poteau .

III.2.2 Classification des poteaux

En fonction du mode de rupture en compression excentrée les poteaux sont classifiés en trois classe :

- **Poteaux courts** : Les effets $P-\Delta$ sont négligeables, le moment reste pratiquement égal ($P.e$) et la réponse d'un poteau court suit une ligne droite avec une compression croissante P jusqu'à la rupture qui se produit par épuisement du matériau quand la courbe de réponse coupe la courbe de rupture.
- **Poteaux élancés** : Les déformations donnent lieu à des augmentations du moment $M=P.e+P\Delta$. Cet effet s'accroît avec l'augmentation de P , et le chemin de chargement suit une courbe plus ou moins prononcée. La rupture survient quand la courbe de réponse coupe la courbe de rupture $P-M$ en un point correspondant à une charge axiale inférieure à celle qui aurait causé la rupture du poteau court. Les effets $P-\Delta$ causent une diminution notable de la résistance du poteau causant ainsi la rupture par épuisement du matériau.
- **Poteaux très élancés** : Pour les poteaux très élancés, la rupture se produit par instabilité avant que la courbe de réponse du poteau ne coupe la courbe de rupture $P-M$. Dans ce cas précis, les effets $P-\Delta$ sont dominants et la rupture intervient par instabilité.

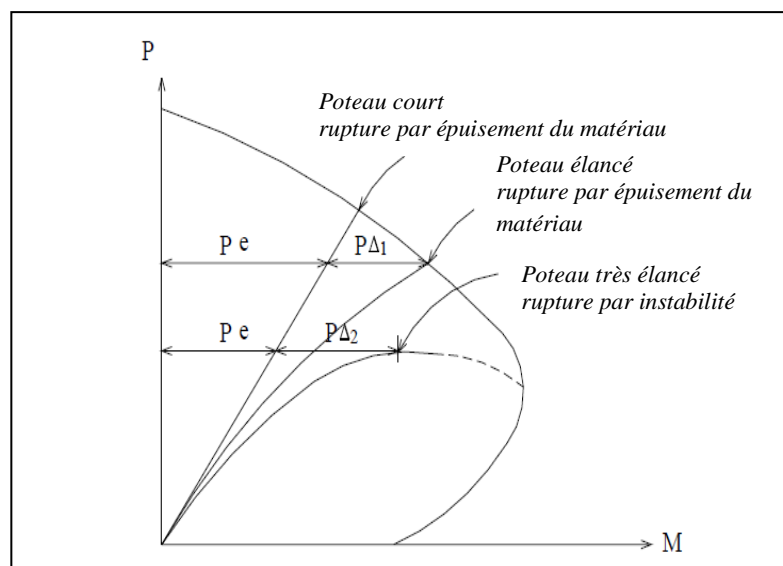


Figure 3.2 Effet de l'élancement sur la résistance d'un poteau

III .2.3 Charge critique d'Euler

Le problème de l'instabilité des poteaux ou leur flambage a été étudié pour la première fois par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) qui à partir d'équations différentielles, a établi la formule suivante :

$$P_{cr} = \frac{EI \cdot \pi^2}{L^2_{cr}} \quad (3.1)$$

L'analyse mathématique de ce problème est basé sur le comportement d'une colonne droite bi articulé d'une longueur 'L', soumise à un effort normal P centré, à laquelle un petit déplacement transversal (ou une excentricité) $e_0(x)$ est appliqué. La longueur de flambage l_{cr} est égale dans ce cas à la longueur de la colonne bi-articulée L. Cette excentricité initiale engendre en tout point un moment $M(x) = P \cdot e_0(x)$

Ce moment engendre quant à lui une rotation : $\omega = \int \frac{N \cdot e_0(x) \cdot dx}{EI}$

et une déformation $y = \int \omega \cdot dx$

Cette déformation est assimilable à une excentricité supplémentaire qui elle-même engendre à son tour un moment supplémentaire $M = P \cdot y$

A l'état d'équilibre, s'il existe ,a pour excentricité finale et totale :

$e_{tot} = y(x)$ et pour moment : $M = P \cdot y(x)$

Aussi, la relation moment-courbure de la théorie des poutres s'écrit :

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -\frac{M}{EI} \quad (3.2)$$

En négligeant le terme y'^2 devant 1 on obtient : $M = -EI \cdot y'' = N \cdot y$

D'où : $y'' + \frac{P}{EI} \cdot y = 0$

Cette équation différentielle du deuxième ordre a pour solution :

$$y = y_0 \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) \quad (3.3)$$

Les conditions aux limites, à savoir déformée nulle aux deux extrémités pour $x=0$ et $x=L$,

entraînent : $\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right) = 0$ soit $\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = \pi$ ou encore $P = \frac{EI \cdot \pi^2}{L^2}$

L'effort d'équilibre final vaut donc : $P_{cr} = \frac{EI \cdot \pi^2}{L^2}$

Cet effort est appelé effort critique de flambement ou effort critique d'Euler.

III.2.4 Longueur de flambement

Le même phénomène de flambage peut se produire pour des colonnes encastées ou libres à une extrémité. Dans ces cas, la longueur de flambage ($l_{cr}=k.L$) correspondante est définie comme la distance qui sépare les points d'inflexion de la déformée. Le poteau est alors traité comme un poteau bi-articulé fictif qui a la même charge critique que le poteau considéré.

Ainsi l'équation précédente de charge critique d'Euler est généralisée sous la forme suivante :

$$P_{cr} = \frac{EI \cdot \pi^2}{(K.L)^2} \quad (3.4)$$

Pour un poteau bi articulé $k=1$, et pour un poteau encasté-libre $k=2$, et $k=1/2$ pour un poteau bi-encasté (fig 3.3) , les extrémités des poteaux sont souvent partiellement retenues par les poutres, la longueur effective se situe entre $L/2$ et L de sorte que $1/2 < k < 1$.

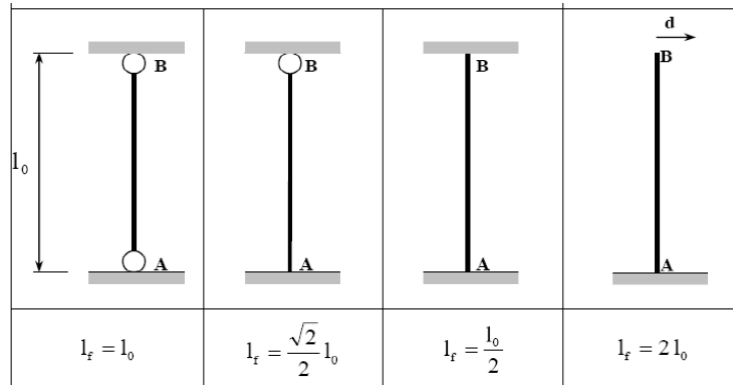


Figure 3.3 Longueurs de flambement pour un poteau isolée

En béton armé le système des structures est hautement hyperstatique à cause du monolithisme. Un assemblage de poutres et poteaux en portiques est soit soutenu latéralement par une structure beaucoup plus rigide (mur de refend, noyau de contreventement, cage d'escaliers), soit porteur des charge latérales (effet cadres). Dans le premier cas, le portique est dit contreventé ou à contreventement rigide appelé aussi portique à nœuds fixes. Les poteaux peuvent donc être traités comme s'ils sont isolés, et constater ainsi que le coefficient $k \leq 1$.

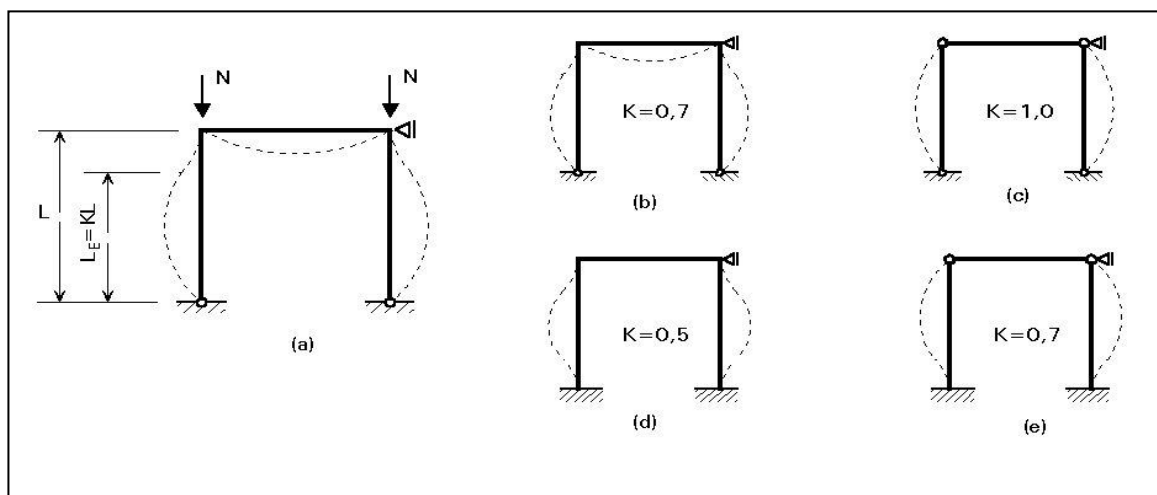


Figure 3.4 Flambement des poteaux à nœuds fixes

Pour le deuxième cas, le portique est non contreventé ou les nœuds sont déplaçables de sorte que les déplacements des nœuds induisent des efforts supplémentaires, et donc une étude complète doit être envisagée, et le mode de flambement de ces poteaux est plus grande que $2L$, tel que le coefficient $k > 2$.

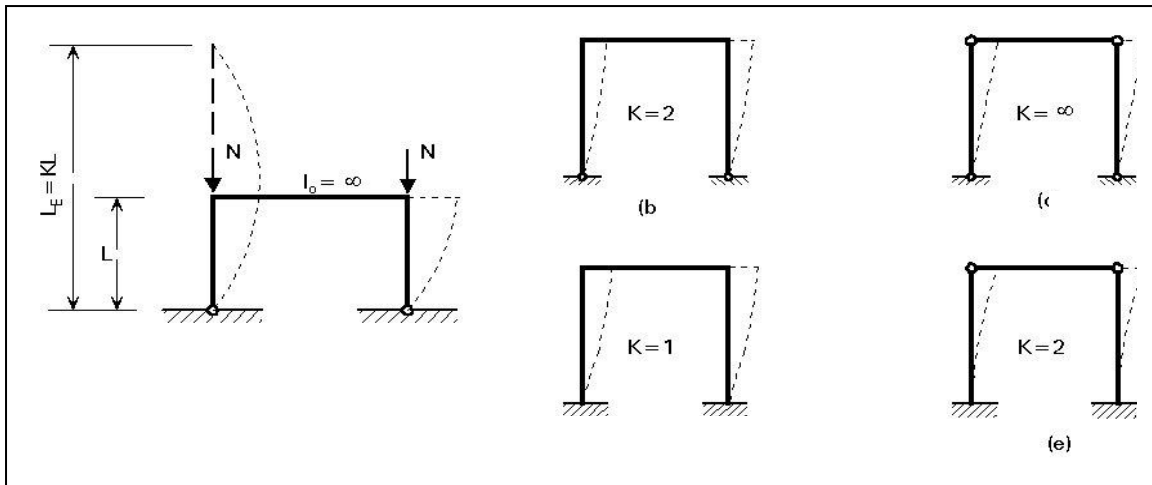


Figure 3. 5 Flambement des poteaux à nœuds déplaçables

III.2.5 Elancement

La notion de longueur de flambage est très souvent remplacée par celle de l'élancement. Celui-ci est défini comme le rapport entre la longueur de flambage d'une colonne l_{cr} et le rayon de giration de sa section ' i ' :

$$\lambda = k \cdot L \sqrt{\frac{A}{I}} = \frac{k \cdot l}{i} \quad (3.5)$$

$$\text{ou} \quad i = \sqrt{\frac{A}{I}}$$

L'élancement correspond à la notion de la colonne élancée, car cela dépend essentiellement de la longueur de la colonne est importante vis-à-vis des dimensions de sa section transversale. L'élancement est le paramètre principal qui définit la sensibilité d'une colonne vis-à-vis des effets du second ordre et du danger de flambage. Une colonne est dite peu élancée lorsque son élancement est de l'ordre de 15 à 20. Dans ce cas, il n'y a pas d'effets de second ordre et la colonne est dimensionnée selon la théorie du premier ordre.

III.2.5.1 Elancement normalisé

-L'Euro code 2^[18] permet de négliger l'élancement d'un poteau isolé si son élancement est :

$$\frac{kl}{i} \leq 25$$

-Selon le code **ACI 318-08**^[1], il n'est pas nécessaire de faire une vérification au flambement si pour les poteaux dont les extrémités ne peuvent se déplacer latéralement tel que :

$$\frac{kl}{i} \leq 34 - 12 \frac{M_1}{M_2} \quad (3.6)$$

Dans laquelle le terme $(34 - 12 \frac{M_1}{M_2})$ ne doit pas être pris plus grand que 40.

Pour les poteaux dans une ossature à nœuds déplaçables, le code ACI permet de négliger les effets de l'élancement quand :

$$\frac{kl}{i} \leq 22$$

Une fois la longueur de flambement déterminée, il est facile de calculer l'élancement λ de la colonne. Ensuite, il faut déterminer si le poteau est élancé ou non élancé. Dans le premier cas il faut prévoir un dimensionnement en tenant compte des effets du second ordre. Dans le second cas il faut se contenter d'une analyse du premier ordre.

III.3 Vision de quelques codes concernant le calcul au second ordre

III.3.1 Vision d'Euro Code EC2

Selon EC2^[18] les méthodes de vérification proposées relèvent d'une des deux grandes catégories suivantes :

- a) Méthodes dites générales,
- b) Méthodes dites simplifiées.

a) Méthodes générales

Elles sont aussi appelées méthodes de l'équilibre ou méthodes des déformations internes. Elles sont basées sur une analyse non linéaire incluant :

- la non-linéarité géométrique (effet du second ordre),
- la non-linéarité des lois de comportement des matériaux (diagrammes contraintes déformations)

b) Méthodes simplifiées

Ces méthodes consistent, pour un effort normal fixé, de déterminer un moment sollicitant de calcul qui devra être plus petit que le moment résistant correspondant mais également plus grand que le moment agissant réel. Dans le cas où ce moment serait plus grand que le moment résistant, alors la structure ne serait pas stable.

Le calcul du moment se représente de la manière suivante :

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 \quad (3.7)$$

M_{Ed} = moment de calcul [N.mm]

M_{0Ed} = moment comprenant : les effets du 1^{er} ordre et les imperfections [N.mm]

M_2 = moment du second ordre calculé par une des deux méthodes données [N.mm]

b)-1 Analyse du second ordre basée sur une rigidité nominale

Cette technique se base sur la détermination de la rigidité EI de l'élément élancé et ce, en fonction de plusieurs paramètres :

$$EI = K_c E_{cd} I_c + K_s E_s I_s \quad (3.8)$$

E_{cd} = module d'élasticité du béton [N/mm²] ($E_{cd} = E_{cm} * \gamma_{cE}$)

I_c = inertie de la section droite de béton [mm⁴]

E_s = module d'élasticité de l'acier [N/mm²]

I_s = inertie des armatures par rapport au centre de gravité [mm⁴]

pour $\rho \geq 0.002$

K_s coefficient tenant compte de la contribution des armatures, $K_s=1$

K_c : coefficient tenant compte des effets de la fissuration, du fluage,.....

$$K_c = \frac{K_1 K_2}{1 + \varphi_{eff}} \quad (3.9)$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}} \quad (3.10)$$

$$K_2 = n \frac{\lambda}{170} \leq 0.2 \quad (3.11)$$

n = effort normal relatif : $P_{Ed} / (A_c \cdot f_{cd})$

λ = coefficient d'élancement

f_{ck} = résistance caractéristique du béton [N/mm²]

φ_{eff} = coefficient de fluage effectif

et pour $\rho \geq 0.01$

K_s coefficient tenant compte de la contribution des armatures ; $K_s=0$

K_c : coefficient tenant compte des effets de la fissuration, du fluage,.....

$$K_c = \frac{0.3}{1 + 0.5 \varphi_{eff}} \quad (3.12)$$

Sur la base de cette rigidité EI , le moment de second ordre M_2 est calculé :

$$M_2 = \frac{\beta M_{0Ed}}{\frac{P_B}{P_{Ed}} - 1} \quad (3.13)$$

M_{0Ed} : moment de premier ordre [N.mm]

β : coefficient qui dépend de la distribution des moments du premier et du second ordre (π^2/c_0)

$c_0 = 8$ pour un moment de premier ordre constant, 9.6, pour une distribution parabolique, 12 pour une distribution triangulaire, dans les autres cas il est pris égal à 1

P_{Ed} : effort normal agissant de calcul [N]

P_B : charge de flambement « eulérienne » basée sur la rigidité nominale EI [N]

b)-2 Méthode basée sur une courbure nominale

Dans cette méthode, l'essentiel se trouve dans la détermination du moment de second ordre

M_2 qui est calculé avec la formule suivante : $M_2 = P_{sd} \cdot e_2$

$e_2 = \frac{l_0^2}{c} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)$; Excentricité du second ordre en mm

$\frac{1}{r} = K_r K_\varphi \cdot \left(\frac{1}{r_0}\right)$; Détermination de la courbure en mm^{-1}

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\varepsilon_{yd}}{0.45d}$$

$K_r = \frac{n_u - n_\varphi}{n_u - n_{bal}} \leq 1$; Coefficient de réduction dépendant de l'effort normal

$K_r = 1 + \beta \varphi_{eff} \geq 1$; Coefficient de fluage

P_{Ed} : effort normal fixé [N],

e_2 : excentricité de second ordre [mm],

l_0 : longueur de flambement [mm],

c : coefficient dépendant de la distribution des courbures,

$1/r$: courbure [mm^{-1}],

n : effort normal relatif = $P_{Ed} / (A_c \cdot f_{cd})$,

n_{bal} : valeur de n correspondant au moment résistant maximal,

$n_u = 1 + \omega$,

$\omega = A_s \cdot f_{yd} / (A_c \cdot f_{cd})$,

A_s = surface d'acier [mm^2],

A_c = surface de béton [mm^2],

f_{yd} = limite d'élasticité des aciers [N/mm²],

f_{cd} = résistance du béton [N/mm²],

ϕ = coefficient de fluage

$\beta = 0.35 + (f_{ck}/200) - (\lambda/150)$,

λ = coefficient d'élançement.

III.3.2 Norme SIA 162

Une méthode générale de dimensionnement des colonnes élancées en béton armé a été reprise à l'article 3-24-55 de la norme SIA162^[54]. Elle est basée sur l'hypothèse du calcul de la charge ultime d'une colonne élancée, en tenant compte des non linéarités géométriques et matérielles, et qui peut être considérablement simplifiée en admettant que sa rigidité flexionnelle est constante sur toute sa hauteur et qu'elle est égale à la rigidité sécante réduite $(EI)_R/\gamma_R$ définie dans la section critique la plus sollicitée. Notons ici que cette méthode est destinée pour les colonnes ayant un élançement modéré. La détermination de la capacité portante de ces colonnes au moyen des courbes de flambage et qui sont valables pour les sections rectangulaire ou circulaire. Elles ont été établies sur la base d'une colonne bi articulée ayant une excentricité initiale e_0 dont la valeur maximale vaut : $e_0 = l_{cr}/300$ dans la limite : $h/15 < e_0 < 0.1m$.

III.3.3 Norme CSA A23.3-04

La norme CSA A23.3-04^[42] recommande de déterminer les efforts verticaux pondérés P_f servant au dimensionnement des poteaux et des poutres à partir d'une analyse du second ordre tenant compte de l'effet $P-\Delta$.

Les poteaux élancés des ossatures à contreventement rigide doivent être dimensionnés pour les efforts P_f et le moment amplifié M_c suivant :

$$M_c = \left(\frac{C_m}{1 - \frac{P_f}{\phi_m P_{cr}}} \right) M_2 \geq M_2 \quad (3.14)$$

$$M_2 \geq P_f (15 + 0.03) h \quad (3.15)$$

La valeur $(15+0.03)h$ représente une excentricité minimum, h est la dimension du poteau en mm dans la direction de l'excentricité, $\phi_m=0.75$ et P_{cr} est la charge critique d'Euler.

Les poteaux des structures à nœuds déplaçables doivent être dimensionnés pour la charge axiale pondérée P_f , et pour la somme des moments pondérés correspondant aux charges de gravité et aux charges latérales en tenant compte des effets du second ordre :

$$M_i = M_{ins} + \delta_s M_{is} \quad i = 1,2 \quad (3.16)$$

Où $i=1,2$ renvois aux extrémités 1 et 2, M_{ins} est le moment à l'extrémité i causé par les charges de gravité pondérées et ne provoquant pas de déplacement latéral important aux abouts, M_{is} est le moment à l'extrémité i causé par les charges latérales pondérées et provoquant des déplacements latéraux importants aux abouts. δ_s est le facteur d'amplification :

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_f}{\phi_m \sum P_c}} \geq 1 \quad (3.17)$$

III.3.4 Code ACI 318-08

Le code ACI 318-08^[1] contient des dispositions détaillées régissant la stabilité de forme des poteaux. Il propose la méthode d'amplification du moment du premier ordre pour la justification de la stabilité de forme dans les poteaux. Le principe de cette méthode est basé sur la position du couple critique effort normal ultime et le moment critique amplifié par rapport au diagramme d'interaction de la section considérée du poteau dans le code ACI. Une approche fondamentale qui est approuvée, dans laquelle l'effet du déplacement latéral est expliqué directement dans l'analyse des portiques.

Pour un poteau bi articulé soumis à une charge axiale P et à des moments égaux M_0 aux abouts, le moment maximum après une déformation se produit à mi-hauteur du poteau est :

$$M_{max} = \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \right) M_0 \quad (3.18)$$

Si le poteau soumis à des moments différents aux abouts où $M_2 > M_1$ l'équation du moment maximum devient :

$$M_{max} = \left(\frac{C_m}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \right) M_0 \quad (3.19)$$

C_m : est le coefficient d'équivalence des moments. Il s'exprime comme :

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 \quad (3.20)$$

Pour les portiques non contreventés $C_m = 1$

En raison de la complexité croissante de l'approche de l'amplification du moment, et à cause de la disponibilité universelle des ordinateurs dans les bureaux d'études, il existe un intérêt croissant pour l'analyse du second ordre, formulée dans le code ACI, dans lequel l'effet de ces déplacements latéraux sera calculé directement.

III.3.5 Règles Parasismiques Algériennes RPA-99/2003

Contrairement au code américain ACI et à l'Euro code 2, Le code parasismique Algérien RPA-99/version 2003^[51] exige une vérification implicite de la stabilité dans le choix du pourcentage des armatures transversales ($\rho_h = A_t / a * b$) dans les poteaux, en imposant que :

- si $\lambda_g \geq 5$ $\rho_h = 0,3\%$.
- si $\lambda_g \leq 5$ $\rho_h = 0,8\%$.
- si $3 < \lambda_g < 5$ il faut interpoler entre les valeurs limites précédentes.

où λ_g est l'élançement géométrique du poteau défini par l'expression suivante :

$$\lambda_g = \frac{l_f}{a} \text{ ou } \frac{l_f}{b}$$

Avec : a et b représentent les dimensions de la section droite du poteau dans la direction de déformation considérée, et l_f est la longueur de flambement du poteau.

III.4 Méthode utilisée d'analyse les effets du second ordre

La méthode d'évaluation de la stabilité préconisée par le code ACI est développée pour l'analyse de la stabilité des poteaux en béton armé à nœuds fixes. Le principe de cette méthode est basé sur l'amplification du moment du premier ordre et le diagramme d'interaction. La méthode est dite « *Moment Magnifier Methode* ». Cette méthode est introduite depuis 1971 dans le code ACI comme une méthode d'estimation les moments du 2^{ème} ordre pour les poteaux élancés, ainsi le facteur δ est introduit pour amplifier le moment appliqué ' M_a ' afin de prendre en compte le moment du 2^{ème} ordre. Ce facteur peut être écrit en fonction de rapport de la charge ultime et la charge critique $\frac{P}{P_{cr}}$ tel que :

$$\delta = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \quad (3.21)$$

Le moment maximum (M_{max}) appliqué sur une colonne bi articulé soumis à ses extrémités à deux moments égaux tenant compte des effets du second ordre s'écrit comme suit :

$$M_{max} = \delta \cdot M_a \quad (3.22)$$

$$M_{max} = \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \right) M_a \quad (3.23)$$

M_a : le moment extérieur appliqué sur les deux extrémités d'un poteau.

M_{max} : moment maximum de calcul tenu en compte des effets du second ordre.

La méthode d'amplification de moment définie par l'équation donnée ci-dessus est décrite graphiquement sur la figure (3.6), montrant la relation entre le diagramme d'interaction de résistance de la section transversale et le diagramme d'interaction du moment de flexion bi axiale de la colonne pour une colonne à nœuds fixes en flexion à courbure simple. La figure montre que pour une charge axiale P_u donnée le moment d'extrémité du poteau M_a ou M_{col} au point A est multiplié par (δ) pour obtenir M_{max} au point B .

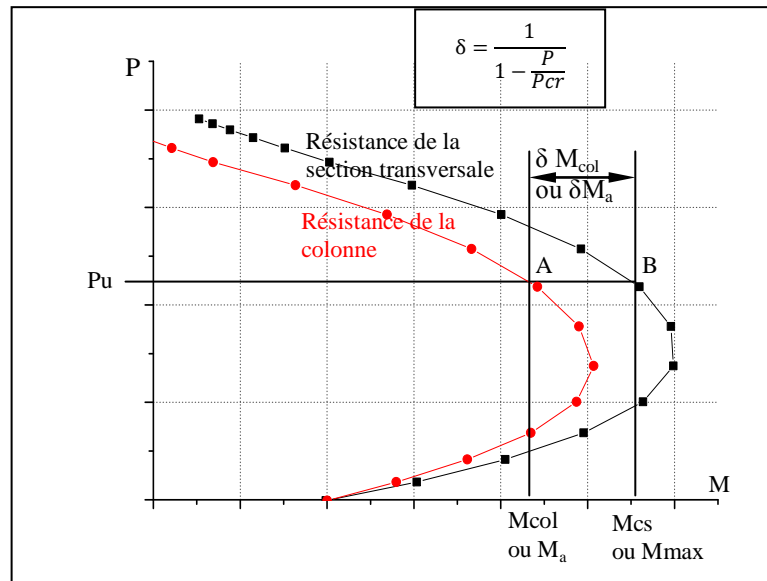


Figure 3.6 Courbes d'interaction de la section transversale et la colonne élancée.

Donc il est facile de conclure que le moment M_{max} est l'équivalent du moment résistant de la section transversale « M^{sc} » qui présente toujours les résistances les plus élevées et M_a est le moment résistant de la colonne élancée de sorte que l'équation devienne alors comme suit :

$$M^{SC} = \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \right) M^{col} \tag{3.24}$$

Pour plus d'illustration, lorsque les effets du 2^{ème} ordre existent, la valeur du moment résistant de la section transversale va se réduire à « M^{col} » qui représente la valeur de moment résistant compte tenu des effets du seconde ordre (M^{col} ou M_a). La détermination des moments résistants de la section est déjà réalisée dans la première partie de cette recherche et représentés par la somme des moments résistants de chaque tranche.

La détermination du moment résistant dû aux effets du deuxième ordre est comme suit :

$$M^{col} = M^{cs} \left(1 - \frac{P}{P_{cr}} \right) \tag{3.25}$$

A partir de cette expression il est donc possible de développer des abaques d'interaction prenant en considération l'effet de l'instabilité au flambement en se basant sur l'approche numérique qui est déjà exposée dans le chapitre précédent. Dans le cas où l'on peut s'affranchir des effets du second ordre, des abaques d'interaction (P, M^{cs}) pour le dimensionnement et la vérification de ces poteaux pourraient être exploités. Dans le cas où il doit être tenu compte des effets du second ordre, la vérification des poteaux élancés en béton armé se fait aussi à travers des abaques d'interaction (P, M^{col}) .

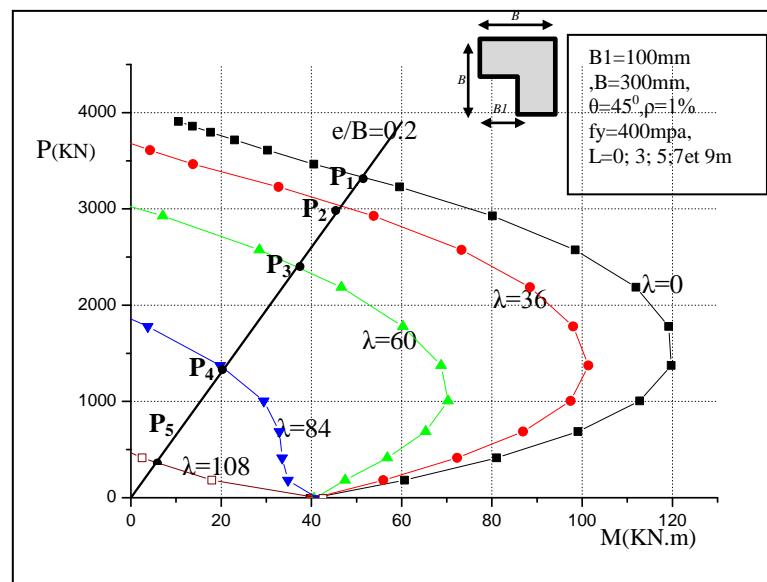


Figure 3.7 Influence de l'élancement λ sur la résistance

La Figure 3.7 des courbes d'interaction montre l'effet réducteur de la résistance en fonction de l'élancement. Chaque courbe délimite le domaine de résistance restant pour les efforts du 1^{er} ordre, il faut aussi remarquer son rétrécissement au fur et à mesure que l'élancement augmente.

Les points de résistances ultimes passent du point P_1 pour ($\lambda=0$) à P_5 ($\lambda=108$). Pour la réduction de la résistance des poteaux d'élancement ($\lambda=108$) qui est importante alors la capacité portante P est réduite de près ou plus de 80%.

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les notions de base sur le comportement des colonnes élancées soumis à un chargement combiné ont été présentées. A cet effet, un aperçu général est introduit sur la théorie des effets de deuxième ordre, la charge critique, et l'élancement avec une vision de quelques codes concernant le calcul les effets du second ordre des colonnes élancées afin de mieux appréhender ce problème. La méthode d'amplification des moments adoptée par le code ACI318-08^[1] considérée dans cette étude est basée sur les diagrammes d'interaction de la section transversale ($\lambda=0$) et de la colonne élancée ou ($\lambda\neq 0$). Des diagrammes d'interaction d'un poteau élancé en faisant varier l'élancement ont été présentés et analysés. Ainsi, les résultats de l'analyse montrent également une diminution des charges de rupture quand l'élancement augmente.

Chapitre IV

RIGIDITE FLEXIONNELLE DE LA COLONNE ELANCEE

IV.1 Introduction

La rigidité est une caractéristique qui indique la résistance à la déformation d'un élément de structure. Plus une pièce est rigide, plus il faut lui appliquer un effort important pour obtenir une déflexion donnée. En générale La rigidité exprime la relation de proportionnalité entre la force appliquée en un point et la déflexion résultante en ce point. La rigidité peut s'exprimer en termes de traction-compression, de cisaillement et de flexion. Elle s'exprime en newtons par mètre (N/m) ou ses multiples, dans le système international de mesures ou d'unités.

Ce travail de recherche traite de la rigidité en flexion, qui est définie par le produit du module d'élasticité E multipliée par l'inertie I . I est l'inertie de l'élément de structure suivant l'axe yy ou zz de la section considérée et la rigidité est désignée par l'expression EI . Dans ce chapitre, une description de la rigidité flexionnelle et son influence sur le comportement des colonnes en béton armée est donnée. Aussi, les différentes méthodes adoptées et suggérées par les règlements et les chercheurs pour prédire la rigidité en flexion et son facteur de réduction α sont passées en revue et analysées.

La 2^{ème} partie de ce chapitre qui est le but principal de ce travail est d'établir une nouvelle équation pour le calcul de la rigidité flexionnelle des poteaux élancés de sections de formes carrées et en forme L où les propriétés des matériaux constitutifs f_c ; f_y ; le pourcentage d'armatures ρ et la force axiale P ainsi que d'autres paramètres sont pris en compte.

IV.2 Influence de la rigidité flexionnelle sur le comportement des colonnes

La rigidité flexionnelle est une composante nécessaire dans le calcul des déformations des colonnes fléchies en béton armé. La déflexion de la colonne est importante car elle a un effet direct sur les moments secondaires induits par la charge axiale. La détermination de ces moments dépend de la charge critique, cette dernière à son tour dépend directement de la rigidité en flexion EI tel que :

$$P_{Cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(k \cdot L)^2} \quad (4.1)$$

Ainsi, la valeur de la rigidité en flexion EI , utilisée pour la détermination de la charge de rupture devrait être représentative de la rigidité réelle au moment de la rupture qu'elle soit par épuisement du matériau ou par flambement. Pour les éléments de structure en charpente métallique, la rigidité flexionnelle est simple à calculer par contre pour les éléments en béton armé (BA) il est difficile et laborieux de réaliser ce calcul du fait du comportement non linéaire du béton. Aussi, la non linéarité est l'une des principales raisons pour laquelle la rigidité en flexion prend des valeurs variables à travers les points de la section transversale du poteau. En revanche dans les modèles présentés dans la plus part des codes, la rigidité des colonnes est prise en compte comme une seule valeur constante dans tous les points de la section et à travers la longueur de la colonne. En réalité cette dernière est loin d'être constante. Ce paramètre de la rigidité, mal maîtrisé, est à l'origine de la plupart des dommages dus à une mauvaise conception de la structure.

IV. 3 Facteurs affectant la variation de la rigidité flexionnelle EI

Tenant compte de l'historique du chargement et due à la non linéarité du matériau du béton armé, la valeur de la rigidité diminue et reste variable, considérant les effets du retrait, de fluage et la déflexion latérale. Ainsi, la rigidité diminue de plus en plus et le calcul devient plus compliqué. Si l'on introduit la fissuration des sections, le calcul de la rigidité flexionnelle (EI) se complique davantage car une faible variation de l'état de fissuration peut provoquer des variations assez importantes de cette rigidité.

IV.4 Formulations suggérées pour la rigidité flexionnelle EI

Afin de concilier la définition de la rigidité pour un matériau tel que le béton qui se comporte de manière plastique, quatre solutions possibles sont étudiées et proposées (*Katrine M. Welp* ^[30]):

IV.4.1 Formulation d' EI constante

Pour une section donnée en béton armé (BA), le moment d'inertie de chaque matériau est multiplié par son module d'élasticité, puis sommé pour trouver la rigidité effective :

$$(EI)_{\text{eff}} = \sum EI \quad (4.2)$$

L'un des avantages est que dans le concept cette méthode est facile à imaginer car il existe une valeur pour représenter le moment d'inertie I , et une pour représenter le module d'élasticité E . L'un des inconvénients de cette méthode est qu'elle est imprécise car le module d'élasticité E , n'est en aucun cas une valeur constante, en fait, il varie en tout point le long de la section.

IV.4.2 Formulation de la tangente ($E_t I$) tranche

Cette méthode est basée sur la division de la section transversale en plusieurs fibres rectangulaires minces de dimensions $b \times h$. La déformation au centre de chaque fibre est utilisée pour attribuer un module tangent d'élasticité du béton à chaque fibre respectivement. Enfin, le moment d'inertie du béton est calculé par rapport à son propre centre de gravité puis transformé autour de l'axe neutre, ou transformé autour du centre de gravité de la section du poteau. A chaque fibre incrémentale est assigné un module d'élasticité tangent et un moment d'inertie autour d'un axe. Ces deux valeurs sont alors multipliées entre elles pour trouver l'incrément de rigidité fourni par chaque fibre. Les rigidités des fibres sont ensuite additionnées les unes aux autres pour trouver la rigidité efficace totale de la section.

$$EI = \sum \left[Et \left(\frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} - y' \right)^2 \right) + \sum nAs (y_i - y')^2 \right] \quad (4.3)$$

Le principal avantage de cette approche est qu'elle prend en compte le module d'élasticité tangent (E) réel pour le béton et l'acier. Mais, le principal inconvénient de cette méthode est qu'elle dépend toujours de la position de l'axe neutre qui est difficile à localiser.

IV.4.3 Formulation de la sécante (M/ϕ)

La méthode de la sécante (M/ϕ) utilise la relation le moment - courbure à la rupture pour trouver la rigidité. Cette relation moment-courbure est déduite de la théorie des poutres et s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -\frac{M}{EI} \quad (4.4)$$

En négligeant le terme y'^2 devant 1 on obtient :

$$\frac{1}{r} = y'' = -\frac{M}{EI} \quad (4.5)$$

$$-\frac{M}{\phi} = EI \quad (4.6)$$

$1/r$ ou bien ϕ représente la courbure.

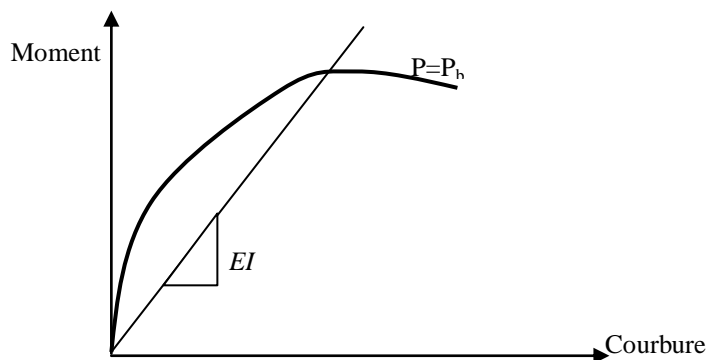


Figure 4.1 Relation moment-courbure

La ligne joignant l'origine au point d'intersection avec la courbe correspondant au moment maximum et représente ainsi la raideur sécante.

Par conséquent la rigidité sécante $EI_{sécante} = M/\phi$ peut être considérée comme une interprétation raisonnable de la rigidité en flexion.

Cette méthode a donné des résultats satisfaisants depuis les années 60. La rigidité est facile à calculer à l'aide d'un modèle informatique ou d'un diagramme d'interaction P - M . Cependant, cette méthode consiste en une seule valeur de la rigidité flexionnelle constante au moment de la rupture, mais diffère si le mode de rupture change.

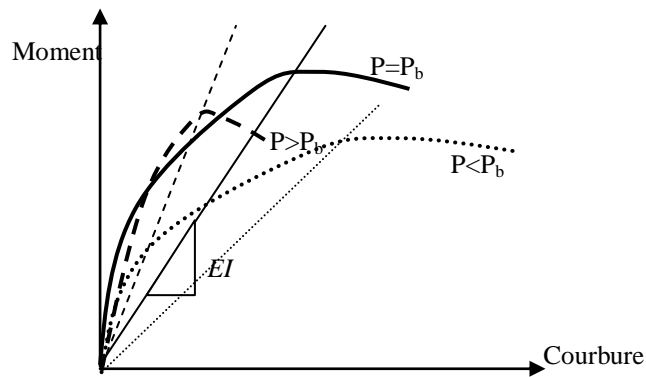


Figure 4. 2 Variation de la rigidité en fonction de la charge axiale

La figure 4.2 montre les courbes moments–courbures pour une seule section d'un poteau en béton armé (BA), trois courbes ont été générées correspondant à :

- charge axiale provoquant la condition d'équilibre $P=P_b$,
- charge axiale provoquant la rupture par l'épuisement du matériau $P<P_b$,
- charge axiale provoquant la rupture par flambement $P>P_b$.

La valeur de la rigidité flexionnelle EI utilisée pour la détermination de la charge de rupture, que ce soit par épuisement ou par flambement devrait être représentative de la rigidité réelle au moment de la rupture. Selon la figure il y a trois sécantes et donc trois valeurs de EI , ce qui dénote de la difficulté pour le choix d'une seule valeur d' EI .

IV.4.4 Formulation tangent (M/ϕ)

Du point de vue conceptuel, cette formulation doit être le moyen le plus précis pour calculer la rigidité. Ainsi, pour une relation moment-courbure dans laquelle la charge axiale est constante conduirait à la rigidité la plus exacte de toutes.

$$\frac{\Delta M}{\Delta \phi} = (EI)_{\text{tangent}} \quad (4.7)$$

La rigidité est faible pour les charges axiales faibles, augmente pour les charges médianes et diminue rapidement après car les charges axiales élevées réduisent le module d'élasticité du béton. En conséquence $\Delta M/\Delta \phi$ est positif pour les charges axiales faibles et négatif pour les charges axiales élevées lorsque la rigidité diminue. Ceci présente certains avantages qui ont lieu lorsque l'effort normal P est constant de sorte que la tangente $\Delta M/\Delta \phi$ fournit toujours une borne inférieure pour le calcul M/ϕ . En fait si P est constant, la tangente $\Delta M/\Delta \phi$ fournit alors une raideur exacte. Certains inconvénients de la formulation tangente $\Delta M/\Delta \phi$ font que les calculs sont laborieux prennent trop de temps sans l'apport d'un ordinateur.

IV.5 Vision de quelques codes concernant le calcul de la rigidité flexionnelle

Le code *ACI-318*^[1] recommande quant à lui l'utilisation des équations simples de la rigidité en flexion pour calculer les poteaux élancés en béton armé sous des charges à court terme et qui se présente comme suit :

$$EI = 0.2 \cdot E_c \cdot I_c + E_s \cdot I_s \quad (4.8)$$

où

$$EI = 0.4 \cdot E_c \cdot I_c \quad (4.9)$$

L'*Eurocode EC-2*^[18] est doté quant à lui d'un coefficient de flexibilité K_e qui est fonction d'un ensemble de paramètres tels que : la force normale relative (ν), l'élancement mécanique (λ_m), le pourcentage d'armatures (ρ), le taux de fluage (φ_{eff}), et la résistance caractéristique du cylindre de compression du béton à 28 jours (f_{ck}).

Dans ce cas, la relation de la rigidité flexionnelle s'écrit ainsi :

$$EI = K_c \cdot E_c \cdot I_c + K_s \cdot E_s \cdot I_s \quad (4.10)$$

$$\text{Si } \rho_l \geq 0.2\% \quad K_s = 1, \quad K_c = \frac{k_1 \cdot k_2}{1 + \phi_{\text{eff}}}, \quad K_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}}, \quad K_2 = \frac{v \cdot \lambda m}{170}$$

$$\text{Si } \rho_l \geq 1\% \quad K_s = 0, \quad K_c = \frac{0.3}{1 + 0.5 \cdot \phi_{\text{eff}}}$$

Le code russe (SNIP 2.03.01-84) ^[55] utilise différents paramètres pour déterminer la rigidité de flexion pour les colonnes en béton armé chargées excentriquement. La formule recommandée par le code russe (SNIP 2.03.01-84) prend en compte l'effet de la charge appliquée et la résistance du béton. Ainsi la formule s'écrit comme suit :

$$EI = 0.65 E_c \left[\frac{I_c}{\phi_1} \left(\frac{0.11}{0.1 + \frac{e_0}{R_{prh}}} + 0.1 \right) + I_s \right] \quad (4.11)$$

Où : R_{pr} est la résistance en compression du béton, $\phi_1 = 1 + M_{11} / M_1$ tels que M_{11} représente le moment de flexion dû aux charges appliquées, M_1 est le moment de flexion dû aux charges ultimes et e_0 est l'excentricité initiale.

Le code australien (AS3600) ^[4] quant à lui recommande l'équation suivante pour estimer la rigidité flexionnelle des colonnes en béton armé chargées excentriquement :

$$EI = 200d M_{ub} \quad (4.12)$$

Où : d est la profondeur de la section transversale du poteau et M_{ub} est le moment ultime maximal au point de balancement.

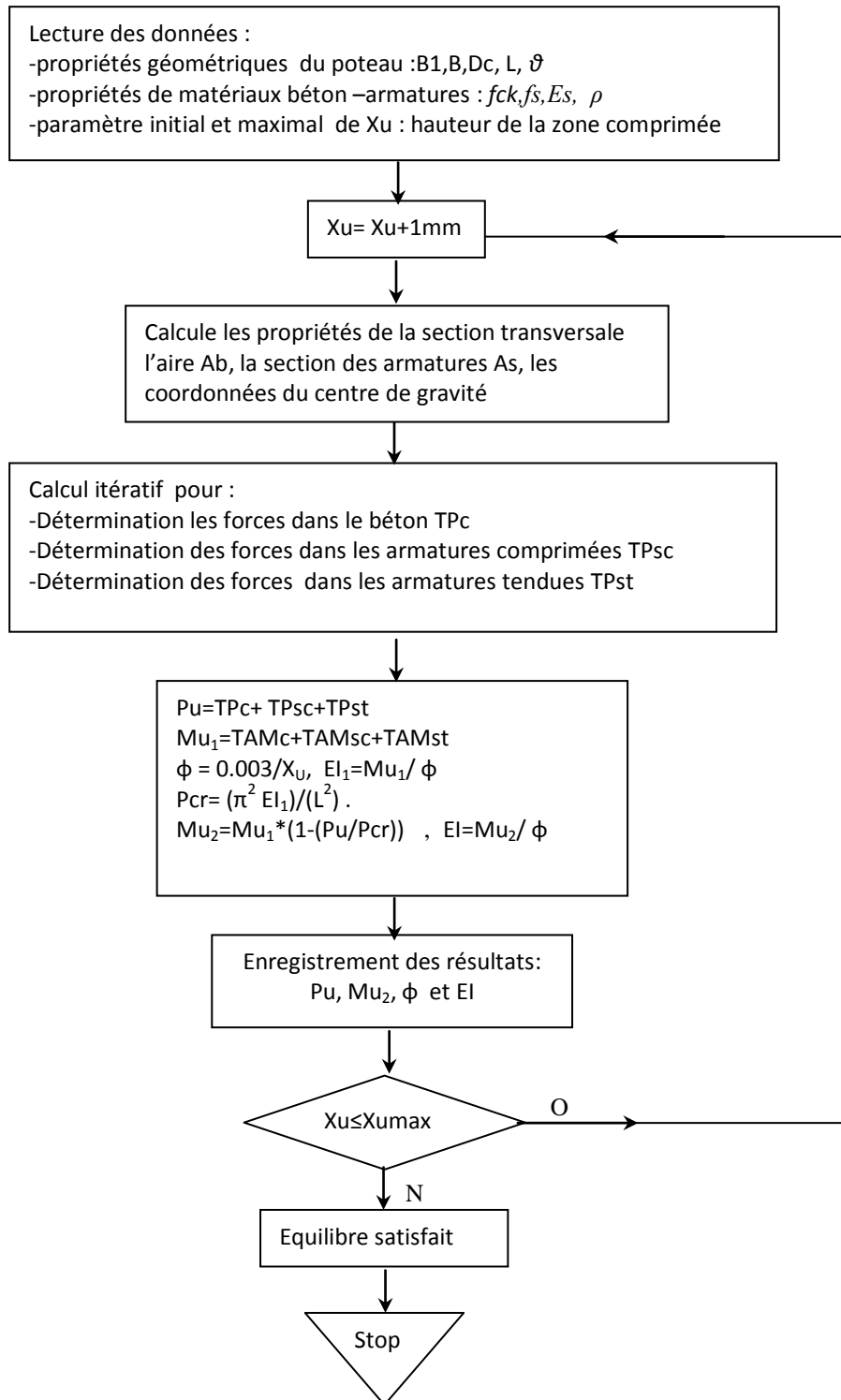
IV.6 Méthode utilisée pour le calcul la rigidité flexionnelle

La détermination de la rigidité par le rapport M/ϕ est la relation la plus raisonnable et donne ainsi des valeurs représentatives. Aussi, l'analyse numérique proposé est basée sur la relation (P, M, ϕ) en chaque tranche. La profondeur de l'axe neutre étant connue (Xu) la courbure est calculée directement comme étant le rapport de la déformation de la fibre extrême de la section (égale 0.003) sur la profondeur de l'axe neutre ($\phi = \epsilon_s / Xu$). Les contraintes et les déformations sont calculées à partir des relations de compatibilité. Enfin, la détermination des efforts axiaux et leurs moments résistants correspondants se fait selon les conditions d'équilibres par les relations précédentes indiquées dans le 2^{ème} chapitre. Dans cette étape, les valeurs (P, M_{sc}, ϕ) sont obtenues en chaque point de la section transversale. En présence des effets du second ordre les moments résistants sont multipliés par le facteur d'amplification δ pour donner les moments résistants de la colonne réduits en présence des moments de second ordre.

Ce coefficient d'amplification dépend de la charge critique *d'Euler* qui à son tour dépend de la rigidité flexionnelle déterminé par le rapport (M_{sc}/ϕ) . Dans ce cas, la rigidité ne tient compte que de la non linéarité matérielle. La rigidité flexionnelle effective prend en compte à la fois la non linéarité matérielle ainsi que géométrique qui est évaluée lorsque le moment résistant de la colonne est divisé par la courbure (ϕ) :

$$EI_{eff} = \frac{M_{col}}{\phi} \quad (4.13)$$

IV.6.1 Structure du programme



IV.7 Facteur de réduction de la rigidité flexionnelle

De nombreuses méthodes sont utilisées pour évaluer la rigidité flexionnelle (EI) en tenant compte de tous les facteurs qui contribuent à sa diminution au niveau du bloc de contraintes du béton en compression (comportement non linéaire du matériau) et au niveau de du déplacement latéral de la colonne (comportement géométrique non linéaire). Dans les bureaux d'étude, l'ingénieur concepteur trouve souvent des difficultés pour évaluer la rigidité flexionnelle effective représentant le comportement réel des colonnes élancées en béton armé (BA). L'utilisation des calculs et analyses numériques rend dans ce cas obligatoire la maîtrise de cette donnée ou propriété essentielle dans le calcul et conception des colonnes élancées. En conséquence, la rigidité effective en flexion des colonnes sous une charge à court terme peut être exprimée comme suit : $EI = \alpha.E_c.I_c + E_s.I_s$. Le coefficient α représente le facteur de réduction de la rigidité alors que les facteurs E_c et E_s représentent les modules d'élasticité du béton et de l'acier respectivement. Enfin, I_c et I_s sont les moments d'inertie de la section de béton et d'acier autour de l'axe central de la section respectivement. Après avoir déterminé le facteur α , la rigidité en flexion EI peut être facilement calculée. Le facteur α peut être évalué en fonction des propriétés du matériau, des dimensions de la section, du pourcentage de l'acier, de la charge axiale ainsi que d'autres paramètres.

Afin de simplifier le calcul de la rigidité de flexion pour les colonnes sous une charge de courte durée, des approches et des expressions ont été proposées et mises au point pour évaluer le coefficient de réduction α qui peut être exprimé comme suit :

$$\alpha = \frac{EI - E_s I_s}{E_c I_c} \quad (4.14)$$

A cet effet, pour évaluer la rigidité flexionnelle EI , il suffit donc de donner une expression simple pour ' α ' afin d'éviter des calculs sophistiqués et compliqués concernant la rigidité EI elle-même.

IV.8 Méthodes d'évaluation le facteur de réduction alfa

Le facteur de réduction de la rigidité de flexion (α) a été évalué et étudié par un certain nombre de chercheurs et certains codes actuels. Dans la littérature, de nombreuses formulations sont proposées et qui sont résumées ci-après :

Reshaidat et al^[48] (1994) ont présenté une évaluation statistique de la rigidité en flexion de poteaux en béton armé pour les sections circulaires de colonnes mixtes puis en 1995 pour des sections rectangulaires en béton armé **Reshaidat et al** (1995)^[49].

Pour les sections circulaires en béton armé

$$\beta_{max} = 0.6 - 0.004\sigma_y / f'_c - \beta\rho \quad \text{et} \quad \alpha_{max} = 0.65 - 0.02\sigma_y / f'_c - \beta\rho \quad (4.15)$$

Pour les sections rectangulaires en béton armé

$$\beta_{max} = 0.58 - 0.003\sigma_y / f'_c - \beta\rho \quad \text{et} \quad \alpha_{max} = 0.64 - 0.02\sigma_y / f'_c - \beta\rho \quad (4.16)$$

Pour les sections circulaires mixtes en béton et acier :

$$\alpha = \alpha_{max} \left[\frac{2\beta}{\beta_{max}} - \left(\frac{\beta}{\beta_{max}} \right)^2 \right] \dots \dots \beta < \beta_{max} \quad (4.17)$$

$\beta = P/P_0$ où P c'est la charge axiale et P_0 est la charge axiale sous compression pure .

Khuntia & Ghosh^[32] (2004) : le coefficient de réduction est déterminé en fonction de ρ , P_u et P_0 :

$$\alpha = (0.8 + 25 \rho)(0.3 + 0.5 \frac{P_u}{P_0}) \quad (4.18)$$

A.Ivanov^[28] (2004) a développé une formule pour estimer la rigidité de flexion sous des charges excentriques des colonnes en béton armé . Cette formule prend en compte l'effet de la charge de compression et donnée comme suit :

$$EI = 0.1 \frac{E_c I_c h}{\phi_1 e_0} + E_s I_s \quad (4.19)$$

K. Youssef^[64] (2005) a développé à l'aide d'une analyse de régression linéaire multiple des formules empiriques pour l'estimation de la rigidité flexionnelle. Les formules développées ont la forme suivante :

$$EI = \alpha \cdot E_c I_c \quad (4.20)$$

$$\alpha = \left(0.45 - 1.02 \left(\frac{e}{h} \right) + 0.012 \left(\frac{1}{h} \right) + 7.8\rho \right) \dots \dots \dots \text{pour } \left(\frac{e}{h} \right) \leq 0.4 \quad (4.21)$$

$$\alpha = \left(0.25 - 0.233 \left(\frac{e}{h} \right) - 0.0007 \left(\frac{1}{h} \right) + 11.1\rho \right) \dots \dots \dots \text{pour } \left(\frac{e}{h} \right) > 0.4 \quad (4.22)$$

Où ρ est le pourcentage des armatures longitudinales.

V.Obozov et H.El-Gohary^[43] (2007) ont développé une formule empirique pour estimer la flexion rigidité des colonnes en béton armé chargées excentriquement . La formule développée est comme suit :

$$EI = 0.45 \left(1 + \frac{e}{h} \right) (0.2E_c I_c + E_s I_s) \quad (4.23)$$

Tikka & Mirza^[56] (2008) ont proposé plusieurs expressions, la dernière est donnée la rigidité par l'équation suivante :

$$EI = \alpha \cdot E_c \cdot I_c + 0.8 \cdot E_s I_s \quad (4.24)$$

$$\alpha = 0.47 - 0.35 \left(\frac{e}{h} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \beta \left(\frac{e}{h} \right)} \right) + 0.003 \left(\frac{1}{h} \right) \quad (4.25)$$

Tel que $\beta = 7.0$ pour $\rho_{rs} \leq 2\%$; et $\beta = 8.0$ pour $\rho_{rs} > 2\%$.

Al-sarraf et al ^[3] (2009) ont également proposé un coefficient de réduction en fonction de divers paramètres tels que le rapport d'élancement (L/h), le rapport d'excentricité (e/h) et le rapport de charge axiale (P/P_0).

$$EI = \alpha \cdot E_c \cdot I_c + E_s I_s \tag{4.26}$$

$$\alpha = 0.38 - 0.011 \left(\frac{l}{h}\right) - 1.3 \left(\frac{e}{h}\right) + 0.45 \cdot \left(1 - \left(\frac{P}{P_0}\right)^2\right) \dots\dots\dots 0.1 \leq \alpha \leq 0.85 \tag{4.27}$$

Bonet et al ^[7] (2011) ont proposé une expression générale pour obtenir une rigidité de la flexion effective EI applicable à n'importe quelle forme de section transversale sous un chargement excentrique bi axial à court ou long terme pour une résistance normale et élevée du béton.

$$EI = \frac{\alpha \cdot E_c \cdot I_c}{1 + \phi_{eff}} + \frac{E_s \cdot I_s}{1 + \eta} \tag{4.28}$$

$$\alpha = (1.95 - 0.035 \cdot \lambda_m - 0.25 \cdot \phi_{eff}) \cdot (\eta - 0.2) + \left(\frac{f_c}{225} + 0.11\right) < 0.1 \dots\dots\dots \text{Si } \eta < 0.2 \tag{4.29}$$

$$\alpha = \left(\frac{f_c}{225} + 0.45\right) \cdot (\eta - 0.2) + \left(\frac{f_c}{225} + 0.11\right) < 0.1 \dots\dots\dots \text{Si } \eta \geq 0.2 \tag{4.30}$$

Bouzid Tayeb ^[9] (2011) a proposé des polynômes de 2^{ème} ordre pour des sections de forme carrées et rectangulaires correspondantes aux différentes déformations du béton. Ainsi pour une section carrée où la déformation du béton est égale à 0.003, l'équation du facteur de réduction s'écrit comme suit :

$$\alpha = a_0 + a_1 f_c + a_2 \theta + a_3 (P/P_0) + a_4 \rho + a_5 f_c^2 + a_6 \theta^2 + a_7 (P/P_0)^2 + a_8 \rho^2 + a_9 f_c \theta + a_{10} f_c (P/P_0) + a_{11} f_c \rho + a_{12} \theta (P/P_0) + a_{13} \theta \rho + a_{14} (P/P_0) \rho \tag{4.31}$$

Tableau 4. 1: Valeurs des coefficients de l'équation proposée par *Bouzid* pour $\epsilon_{bu}=0.003$ et $h/b=1$.

a₀	a₁	a₂	a₃	a₄	a₅	a₆	
-0.5581	0.0071	0.0048	1.565	17.99	-5.4E-05	-4.43E-05	
a₇	a₈	a₉	a₁₀	a₁₁	a₁₂	a₁₃	a₁₄
-1.57	-36.91	1.44E-06	0.0077	-0.12	-0.0007	-0.0055	-9.966

Jianfei Liu et al^[33] (2012) ont proposé un facteur de réduction de rigidité (α_e) multiplié par la rigidité totale du matériau. L'expression concerne les colonnes des sections de forme L et elle est égale :

$$EI_{liu} = \alpha_e \cdot (EI) \quad (4.32)$$

Özgür Avşar et al^[44] (2014) ont présenté de nouvelles expressions pour une poutre à section rectangulaire et en T, à sections carrée et circulaire pour les poteaux en fonction de la résistance du béton (f_c), du pourcentage d'acier (ρ) et du niveau de charge (P/P_0).

Pour les sections rectangulaires :

$$\alpha = 0.062 - 0.0022f_c + 0.854 \frac{N}{f_c A_g} + 10.802\rho_s \dots \text{pour } \frac{N}{f_c A_g} \geq 0.3 - 1.91\rho_s \quad (4.33)$$

$$\alpha = 0.257 - 0.0033f_c + 0.602 \frac{N}{f_c A_g} + 13.874\rho_s \dots \text{pour } \frac{N}{f_c A_g} \leq 0.3 - 1.91\rho_s \quad (4.34)$$

Pour les sections circulaires :

$$\alpha = 0.069 - 0.0032f_c + 0.876 \frac{N}{f_c A_g} + 9.512\rho_s \dots \text{pour } \frac{N}{f_c A_g} \geq 0.26 - 1.75\rho_s \quad (4.35)$$

$$\alpha = 0.239 - 0.0029f_c + 0.709 \frac{N}{f_c A_g} + 12.809\rho_s \dots \text{pour } \frac{N}{f_c A_g} \leq 0.26 - 1.75\rho_s \quad (4.36)$$

IV.9 Modèle d'évaluation ' α ' par régression

Dans cette recherche, le facteur de réduction de la rigidité a été suggéré pour traiter les colonnes élancées de section carrée et en L avec des ailes égales. L'approche proposée consiste à trouver une expression décrivant le coefficient de réduction ' α ' en fonction d'un certain nombre de paramètres qui influent sur la rigidité flexionnelle des poteaux élancés en béton armé. Afin d'observer les paramètres qui influent le plus sur le comportement de la rigidité, une analyse statistique s'avère donc utile. L'analyse par régression linéaire multiple a été utilisée dans le cadre de cette recherche. Ainsi plusieurs paramètres différents pouvant avoir de l'influence sur le facteur de réduction de la rigidité flexionnelle ' α '. Ce type d'analyse considère un nombre de paramètres qui ont une valeur maximum et minimum fixée au début de l'analyse. Ensuite, une matrice d'essai est construite en considérant toutes les combinaisons possibles des valeurs minimum au maximum.

Le tableau 4.2 présente un exemple de matrice d'essai. L'analyse statistique a été réalisée sur la base de plusieurs paramètres à savoir le pourcentage d'armatures longitudinale ρ , la contrainte limite du béton f_c , la contrainte limite d'acier f_y , l'angle d'inclinaison de l'axe neutre θ (angle de chargement), le niveau de chargement P/P_0 , la géométrie de la section et l'élancement de la colonne représenté par les rapports B_l/B et L/B respectivement. En premier lieu et afin de déterminer le coefficient de réduction de la rigidité flexionnelle exacte ' α ' notre code numérique a été utilisé en fonction de ces paramètres pour des niveaux de chargement différentes variant entre 0.01 à 0.9.

La recherche de la valeur optimale de EI ainsi que le facteur de réduction correspondant se fait par rapport aux déformations caractéristiques du béton à savoir pour $\varepsilon_{cu} = 2 ; 2.5 ; 3 ; 3.5$ et 4% , ce qui nous amène à créer plusieurs matrices correspondant aux déformations ultime du béton ε_{cu} où la courbure prend la formule ($\phi = \varepsilon_{cu} / Xu$).

Tableau 4.2 Paramètres inclus dans l'analyse.

Les paramètres	Valeurs spécifiées	Nombre de valeur Spécifiées
f_c	15 ; 60 incr 5mpa	10
f_y	200;600 incr 100mpa	5
B_f/B	0 ; 0.6 incr 0.1	7
L/B	10 ; 30 incr 5	5
P	0.5 ; 4% incr 0.5%	8
θ	0^0 ; 90^0 incr 10^0	8

Des essais et analyses représentant toutes les combinaisons des paramètres sélectionnés et les facteurs de réduction de la rigidité effective ont été calculées pour chaque cas. Les effets de ces paramètres sur la rigidité effective ont été évalués par le facteur de réduction alfa. Suite à l'analyse de toutes les combinaisons, les résultats ainsi que la matrice ont été introduits dans le logiciel d'analyse statistique *SPSS* pour être traités.

La matrice d'essai et les valeurs de ' α ' pour $\varepsilon_{cu} = 0.003$ sont présentée à l'annexe 2. A travers la méthode descendante de l'analyse par régression linéaire une élimination de certains paramètres est achevée et qui concerne ceux qui n'ont pas une grande influence. Le coefficient de réduction ' α ' de la rigidité flexionnelle EI pour les colonnes élancées en béton armé des sections carrées et de forme L sous chargement bi axiale est évalué par l'expression suivante : $\alpha = -0.074 + 0.007(f_c / 25) + 0.488(P/P_0) - 0.02(L/10.B)$.

Pour illustrer cela, la figure ci-dessous montre la représentation des coefficients de l'équation de ' α ' par la méthode de régression descendante.

La forme finale devient comme suit :

$$\alpha = - 0.074 + 0.0003 \cdot f_c + 0.488 \cdot \frac{P}{P_0} - 0.002 \cdot \frac{L}{B} \quad (4.37)$$

Dans lequel : $EI_{eff} = \alpha \cdot E_c \cdot I_c + E_s \cdot I_s$

Modèle		A	Erreur standard	Bêta	t	Sig.	Borne inférieure	Limite supérieure	Corrélation simple	Partielle	Partie	Tolérance
1	(Constante)	-.120	.084		-1.436	.157	-.288	.048				
	P	2.074	1.482	.057	1.400	.167	-.899	5.048	-.011	.191	.057	.991
	fc	.007	.001	.339	8.138	.000	.005	.009	.523	.748	.329	.941
	fs	.000	.000	.073	1.811	.076	.000	.001	.031	.244	.073	.996
	B1	-.127	.083	-.066	-1.541	.129	-.293	.038	-.128	-.209	-.062	.887
	teta	.001	.001	.059	1.394	.169	.000	.002	.001	.190	.056	.899
	RAPP	.488	.029	.722	17.101	.000	.431	.545	.751	.921	.691	.914
2	(Constante)	-.089	.081		-1.094	.279	-.252	.074				
	P	2.078	1.495	.057	1.390	.170	-.920	5.077	-.011	.188	.057	.991
	fc	.007	.001	.340	8.093	.000	.005	.009	.523	.743	.330	.941
	fs	.000	.000	.073	1.793	.079	.000	.001	.031	.239	.073	.996
	B1	-.091	.079	-.047	-1.155	.253	-.250	.067	-.128	-.157	-.047	.982
	RAPP	.487	.029	.721	16.924	.000	.429	.545	.751	.919	.689	.915
	L	-.020	.002	-.452	-10.994	.000	-.024	-.016	-.409	-.834	-.448	.984
3	(Constante)	-.118	.077		-1.526	.133	-.273	.037				
	P	2.080	1.500	.057	1.387	.171	-.926	5.087	-.011	.186	.057	.991
	fc	.007	.001	.337	8.012	.000	.005	.009	.523	.737	.327	.945
	fs	.000	.000	.074	1.797	.078	.000	.001	.031	.238	.073	.996
	RAPP	.491	.029	.727	17.154	.000	.434	.549	.751	.919	.701	.929
	L	-.020	.002	-.454	-11.016	.000	-.024	-.016	-.409	-.832	-.450	.985
	4	(Constante)	-.074	.071		-1.036	.305	-.216	.069			
fc		.007	.001	.337	7.943	.000	.005	.009	.523	.731	.327	.945
fs		.000	.000	.073	1.774	.082	.000	.001	.031	.233	.073	.996
RAPP		.488	.029	.722	16.956	.000	.430	.545	.751	.916	.699	.937
L		-.020	.002	-.454	-10.936	.000	-.024	-.016	-.409	-.828	-.451	.985

a. Variable dépendante : alpha

Figure 4.3 Les coefficients de l'équation de 'α' trouvés par la régression descendante.

Les résultats de l'analyse ont révélé que l'effet du pourcentage des armatures longitudinales ρ , les dimensions des sections B_1/B et l'angle de chargement θ ont influence négligeable sur EI_{eff} . Le niveau de charge axiale P/P_0 , la résistance du béton f_c et le rapport d'élancement L/B sont les paramètres les plus importants et qui influencent de manière significative la rigidité flexionnelle des poteaux élancés en BA de sections carrée et L.

L'effet de " f_c " a une influence croissante sur la rigidité en flexion du poteau élancé, en plus le niveau de charge axiale P/P_0 a un effet croissant sur l' EI de la colonne.

L'expression indique également qu'une diminution de la valeur EI se produit lorsque la longueur de la colonne qui est représenté par L/B est augmentée.

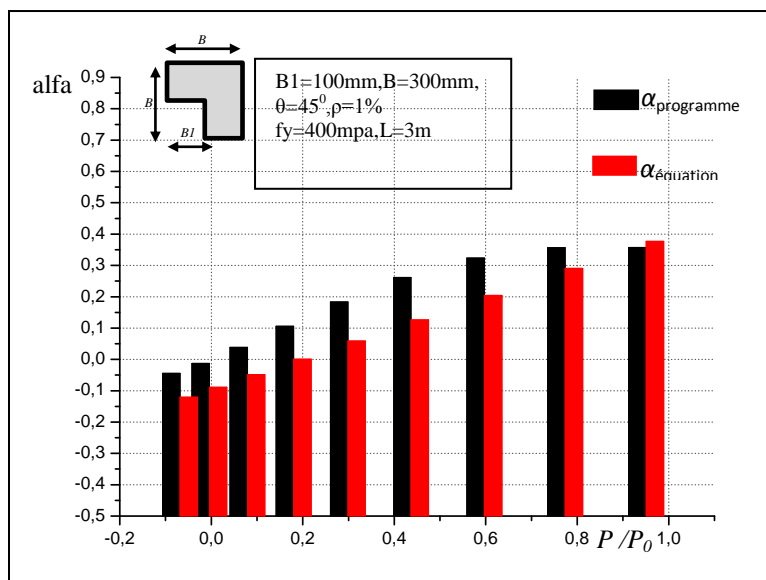


Figure 4.4 Comparaison entre $\alpha_{\text{programme}}$ et $\alpha_{\text{équation}}$ proposée en fonction de P/P_0

La figure 4.4 présente une comparaison entre les valeurs du facteur de réduction de la rigidité alfa donné par le programme de calcul réalisé et celles calculés par l'équation proposé en variant le rapport de la charge de compression. Il est aussi utile de remarquer que les valeurs de alfa présentés par le programme sont les plus grandes et cela est dû au fait que ces valeurs prennent en considération toutes les variables affectant la rigidité flexionnelle EI , par contre l'équation déduite a négligé certains paramètres.

IV.10 Conclusion

Ce chapitre a met l'accent sur les notions de la rigidité en flexion des poteaux et sections en BA , son influence sur le calcul des colonnes élancés et ainsi qu'un regard critique sur les codes et cela dans le but d'avoir une idée sur les différentes expressions représentatives de la rigidité. La 2^{ème} section de ce chapitre expose d'abord des méthodes proposées par la littérature et explique enfin la procédure employée afin de déterminer le facteur de réduction de la rigidité flexionnelle. Une description des analyses statistiques effectuées dans le but de faire ressortir une nouvelle équation pour le facteur de réduction en fonction de paramètres importants et nécessaires à la rigidité flexionnelle effective. Les résultats ainsi que les conclusions de ces analyses y sont également décrits.

Chapitre V

VALIDATION

V.1 Introduction

La validation ou caractérisation dont il est question représente en fait une étude paramétrique afin d'apprécier si le modèle d'analyse proposé donne des résultats conformes aux tests expérimentaux et aux limites réglementaires en vigueur. Elle concerne aussi bien l'équation de coefficient de réduction de la rigidité flexionnelle ' α ' que la validation en soi aussi bien expérimentale qu'analytique. Les résultats utilisés pour la validation sont ceux obtenus à partir d'exemples basés sur l'étude et l'analyse des colonnes élancées isolées par différents chercheurs. Cela étant fait en utilisant la méthode proposée qui comprend un ensemble de techniques pour la conception et la vérification de la résistance et la stabilité des colonnes par le biais de la rigidité flexionnelle.

V.2 La validation du facteur de réduction

Une étude par régression linéaire a été réalisée pour déterminer les coefficients d'un polynôme du 1^{er} ordre décrivant la rigidité flexionnelle EI en fonction de la résistance du béton (f_c), le niveau de chargement (P/P_0) et l'élancement de la colonne qui est représenté par le rapport (L/B). Pour une première validation, les résultats obtenus par le modèle proposé sont confrontés à ceux donnés par différents chercheurs. Cinq méthodes sont ainsi envisagées pour prédire le facteur de réduction de la rigidité flexionnelle des colonnes en béton armé (BA) de section carrée. A cet effet, les courbes ci-dessous montrent une comparaison entre la méthode proposée et celles relatives aux codes *ACI-318* ^[1], *Euro-code 2* ^[18] et les méthodes proposées par *Tikka & Mirza* ^[56], *Bonet* ^[7] et *Al -Sarraf* ^[3]. Toutes les équations respectives sont présentées dans le tableau 5.1.

Les courbes suivantes montrent une série de test réalisée afin de déterminer la variation du coefficient de réduction alfa ' α ' en fonction des différents paramètres influents le comportement des poteaux en béton armé (ρ , f_c , P/P_0 , e/B). Cette expérimentation a été réalisée tenant compte de l'expression du coefficient alfa ' α ' pour une déformation ultime du béton de 3‰ où la courbure prend la formule $\phi = 0.003/X_u$. L'expérimentation est réalisée sur une section carrée de dimensions (B1=0 et B=300 mm) .

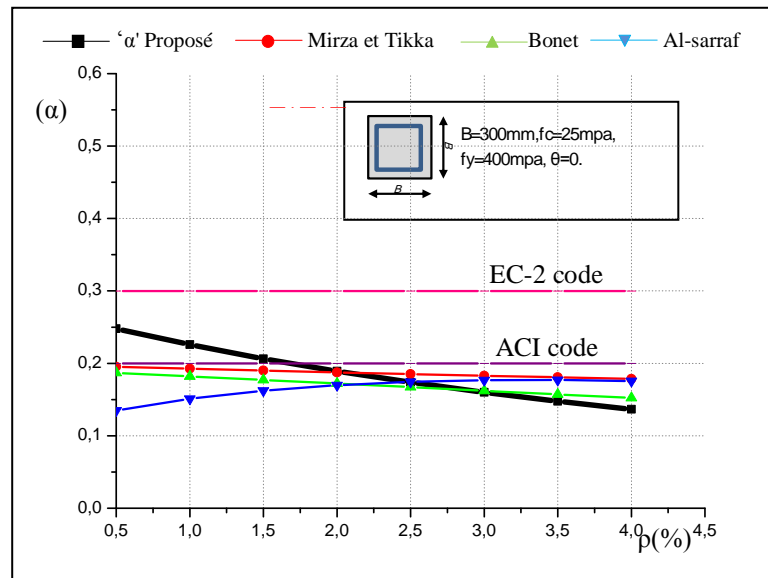


Figure 5.1 Effet de pourcentage d'armature longitudinale (ρ) sur le facteur α .

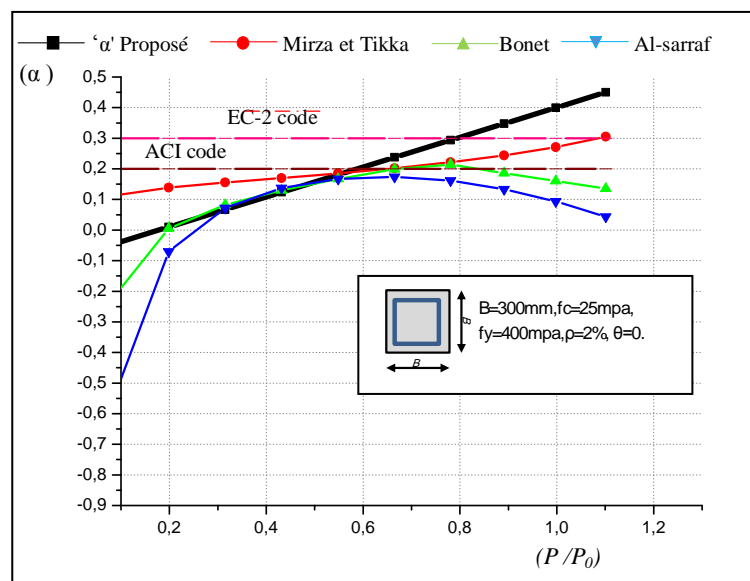


Figure 5.2 Effet du rapport de la charge axiale ($\frac{P}{P_0}$) sur le facteur α .

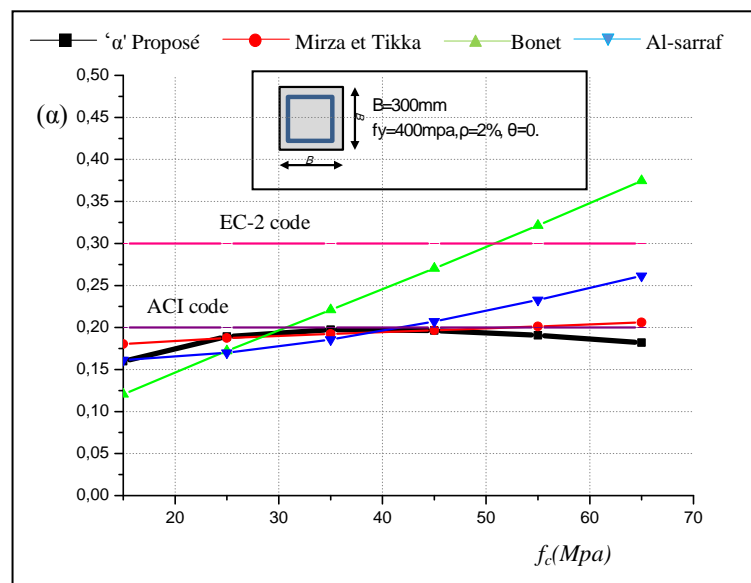


Figure 5.3 Effet de la résistance de béton à la compression (f_c) sur le facteur α .

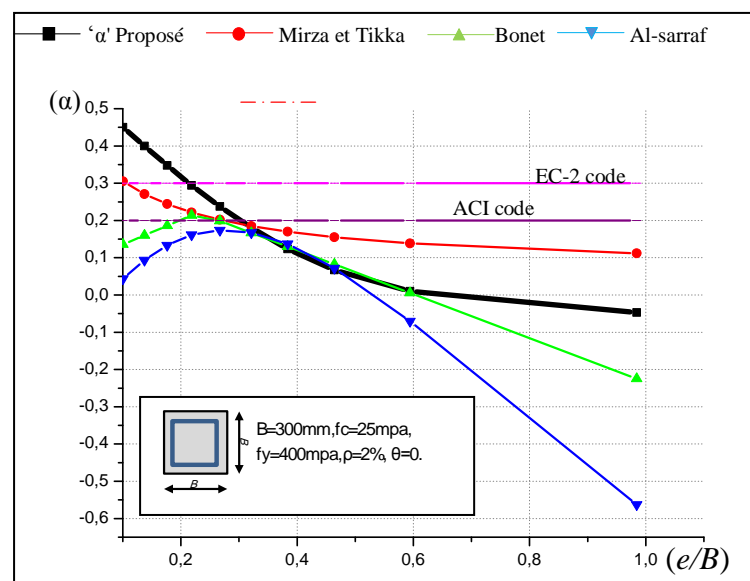


Figure 5.4 Effet de l'excentricité (e/B) sur le facteur α .

Tableau 5.1 Comparaison de différentes expressions de (α) .

Auteur	La rigidité flexionnelle effective EI
<i>EI_{proposé}</i>	$EI = \alpha \cdot E_c \cdot I_c + E_s I_s$ $\alpha = -0.074 + 0.0003 \cdot f_c + 0.488 \cdot \left(\frac{P}{P_0}\right) - 0.002 \left(\frac{L}{h}\right)$
ACI-318 code	$EI = 0.2 \cdot E_c \cdot I_c + E_s \cdot I_s$ ou bien $EI = 0.4 \cdot E_c \cdot I_c$ (le fluage est négligé)
EC-2 code	$EI = K_c \cdot E_c \cdot I_c + K_s \cdot E_s \cdot I_s$ si $\rho_l \geq 0.2\%$ $K_s = 1$, $K_c = \frac{k_1 \cdot k_2}{1 + \phi_{eff}}$, $K_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}}$, $K_2 = \frac{v \cdot \lambda_m}{170}$ si $\rho_l \geq 1\%$ $K_s = 0$, $K_c = \frac{0.3}{1 + 0.5 \cdot \phi_{eff}}$
Bonet	$EI = \frac{\alpha \cdot E_c \cdot I_c}{1 + \phi_{eff}} + \frac{E_s \cdot I_s}{1 + \eta}$ $\alpha = (1.95 - 0.035 \cdot \lambda_m - 0.25 \cdot \phi_{eff}) \cdot (\eta - 0.2) + \left(\frac{f_c}{225} + 0.11\right) / < 0.1$ si $\eta < 0.2$ $\alpha = \left(\frac{f_c}{225} + 0.45\right) \cdot (\eta - 0.2) + \left(\frac{f_c}{225} + 0.11\right) / < 0.1$ si $\eta \geq 0.2$
Tikka et Mirza	$EI = \alpha \cdot E_c \cdot I_c + 0.8 \cdot E_s I_s$ $\alpha = 0.47 - 0.35 \left(\frac{e}{h}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \beta \left(\frac{e}{h}\right)}\right) + 0.003 \left(\frac{1}{h}\right)$ tels que: $\beta = 7.0$ for prs $\leq 2\%$; $\beta = 8.0$ pour prs $> 2\%$.
Al-Sarraf	$EI = \alpha \cdot E_c \cdot I_c + E_s I_s$ $\alpha = 0.38 - 0.011 \left(\frac{1}{h}\right) - 1.3 \left(\frac{e}{h}\right) + 0.45 \cdot \left(1 - \left(\frac{P}{P_0}\right)^2\right)$ $0.1 \leq \alpha \leq 0.85$

EI = rigidité en flexion; E_c = module d'élasticité du béton ; E_s = module d'élasticité de l'armature ; I_c = moment d'inertie de la section brute de béton ; I_s = moment d'inertie de l'armature ; P = charge axiale ; P_0 = capacité de charge maximale ; e/h = rapport d'excentricité ; l/h = rapport d'élancement géométrique ; v = force normale relative ; λ_m = d'élancement mécanique ; ϕ_{eff} = taux de fluage effectif ; f_c = résistance du béton ; ρ_l = taux des armatures longitudinale ; f_{ck} =résistance à la compression du béton à 28 jours.

Une deuxième comparaison entre la méthode proposée et celle suggérée par Bonet et al ^[7] pour la section en forme de L de dimension ($B_1=100$ mm et $B=300$ mm) est présentée à la figure 5.5 montrant la variation du facteur de réduction en fonction de l'excentricité relative (η). Ce coefficient présenté par Bonet a été calculé comme suit : $\eta = e / 4.i_c$, où (i_c) est le rayon de giration de la section de béton par rapport à l'axe de flexion et (e) est l'excentricité du premier ordre. Le facteur de rigidité effective α montre un comportement descendant en fonction de l'excentricité relative (η).

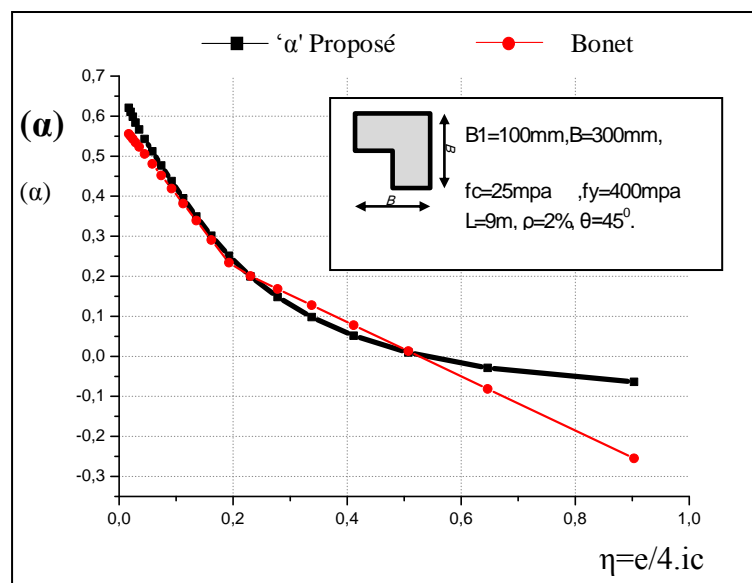


Figure 5.5 Effet de η sur le facteur de réduction (α) .

Une autre comparaison tenant compte de l'équation de Bonet présentée sur la figure 5.6 montre l'effet du pourcentage de ferrailage longitudinal (ρ) sur le facteur de réduction (α) du poteau élancé avec un angle de chargement différent (θ).

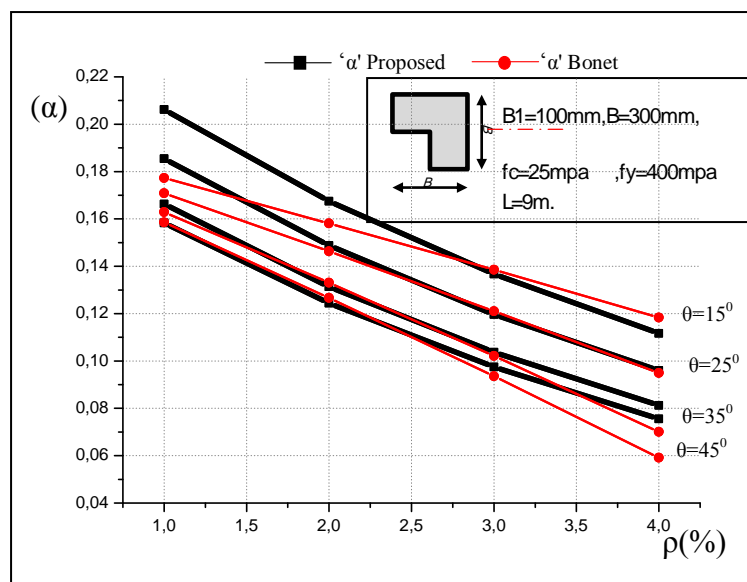


Figure 5.6 Effet de pourcentage d'armature longitudinale (ρ) sur le facteur α avec une variation de l'angle de chargement (θ).

Cette comparaison présente une analyse des paramètres affectant la rigidité flexionnelle des poteaux élancés soumis à charges à court termes avec flexion bi axiale. Ainsi, cinq méthodes ont été considérées pour cette comparaison prédisant la rigidité efficace. Afin de vérifier l'expression du coefficient alfa proposée, des variations des rapports e/B , P/P_0 et f_c ont été utilisés. Ces paramètres sont ceux qui apparaissent le plus dans les expressions proposées dans la littérature. Les résultats ainsi déterminés permettent de conclure que les deux codes de conception *ACI*^[1] et *EC2*^[18] proposent un facteur de réduction de la rigidité efficace α indépendant de tous les paramètres (figures 5.1-5.4), par contre les autres auteurs incluent sa dépendance.

En général, Les expressions du coefficient alfa proposées par *Mirza*^[56], *Bonet*^[7] et *Al-sarraf*^[31] prouvent que ce facteur de réduction diminue avec l'augmentation du rapport e/B et du pourcentage ρ , et augmente avec l'augmentation de f_c et P/P_0 . L'équation proposée confirme ce comportement et une très grande affinité est obtenue entre elles et d'autres équations. La majorité des expressions considère la section transversale carrée, à l'exception de l'expression de *Bonet*^[7] qui est une équation générale et valable pour la section en forme de 'L'. Une très grande correspondance peut être remarquée entre l'équation de *Bonet*^[7] et l'expression proposée (Figure 5.5-5.6) bien que celle de *Bonet* soit non linéaire alors que celle proposée est parfaitement linéaire.

Jianfei Liu et al^[33] ont proposé un facteur de réduction de rigidité (α_e) prenant toute la rigidité EI du matériau non seulement le matériau béton des colonnes élancées mais aussi les autres matériaux la composant. Le modèle de calcul des colonnes est une section en 'L' avec les dimensions (600 × 600 × 200) mm. Les détails de la section transversale et les dimensions de l'éprouvette sont indiqués dans le tableau 5.2.

Tableau 5.2 Les caractéristiques de la colonne de Liu

Caractéristiques de la colonne de Liu	B1 (mm)	B (mm)	Dc (mm)	ρ (%)	f_c (mpa)	f_y (mpa)	L (mm)	θ (°)	E_c (mpa)	E_s (mpa)	$E_c I_c + E_s I_s$ (KN.m ²)
Données	400	600	30	2.512	14.3	360	2900	45	30000	200000	77686

Les facteurs de réduction de la rigidité calculés avec la formulation de **Liu** et la rigidité en flexion EI correspondante à chaque niveau de charge axiale sont présentés dans le tableau 5.3.

Tableau 5.3 Comparaison de résultats trouvés par Liu et celles de l'équation proposée

Niveau de la charge axiale	α_e	$EI_{Liu} = \alpha_e \cdot (EI)$ (KN.m ²)	EI_{prop} (KN.m ²)	EI_{prop} / EI_{Liu}
0.10	0.4915	38182	31587	0.83
0.15	0.4782	37149	32662	0.87
0.20	0.4630	35968	33787	0.94
0.25	0.4464	34679	34790	1.00
0.30	0.4281	33257	35914	1.07
0.35	0.3996	31043	36981	1.19
La moyenne				0.983
Ecart type				0.133

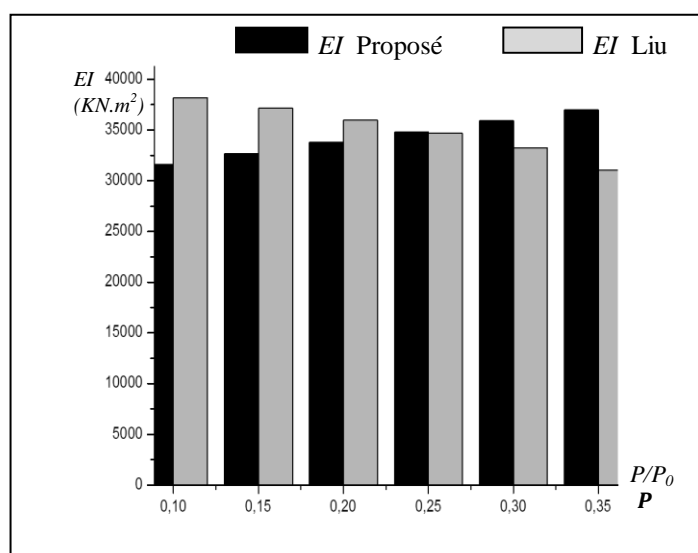


Figure 5.7 Comparaison les rigidités de Liu et les rigidités trouvées par l'équation proposée

Une comparaison des résultats de Liu^[33] avec la rigidité flexionnelle calculée selon l'équation proposée montre un bon degré de précision avec un ratio moyen de 0,983 et un écart type de 0.133 ont été obtenus. Un histogramme comparatif est présenté ci- après et qui illustre la précision dans les valeurs calculées.

V.3 Validation par les spécimens de *Tsao*

Dans cette partie, il a été procédé à une validation expérimentale. Ceci est obtenu par le calcul du moment total y compris l'effet du second ordre à partir du programme proposé et aussi par la rigidité flexionnelle obtenue à partir l'équation développée pour un certain nombre de spécimens étudiés par *Tsao*^[57]. Ceux-ci sont présentés dans le tableau ci-dessous. Les valeurs ainsi déterminées sont alors comparées à celles produites par le règlement *ACI 318 (08)*^[1] et *L'Eurocode 2 (EC2)*^[18] ainsi que celles proposées par *Mirza*^[56]; *Bouzid*^[9] et *Bonet*^[7]. Les différents résultats obtenus sont présentés dans les tableaux ci-après.

Tableau 5.4 Données expérimentales de *Tsao*

<i>Tsao</i>									
Poteau	B ₁ (mm)	B (mm)	dc (mm)	ρ (%)	f _c (KN/m ²)	f _y (KN/m ²)	L (mm)	λ	θ (deg)
C1	0	76.2	12.7	4.9	1.91	54.47	1220	55.4	22.5
C2	0	76.2	12.7	4.9	1.86	54.47	1220	55.4	45
C3	0	76.2	12.7	4.9	2.9	54.47	1220	55.4	45
C4	0	76.2	12.7	4.9	2.55	42.06	1220	55.4	45
C5	0	76.2	12.7	4.9	2.55	42.06	1220	55.4	22.5
C6	0	76.2	12.7	4.9	2.55	42.06	1220	55.4	22.5

Tableau 5.5 Comparaison des moments totaux donnés par le programme avec ceux donnés par *Tsao*

Poteau	P/P ₀	M _{Tsao} (KN.m)	M _{prop} (KN.m)	M _{prop} /M _{Tsao}
C1	0.277	3.020	2.501	0.828
C2	0.231	2.435	2.834	1.164
C3	0.134	2.807	3.495	1.245
C4	0.345	3.346	2.973	0.888
C5	0.194	3.319	2.702	0.814
C6	0.339	3.44	2.651	0.770
Moyenne				0.952

Tableau 5.6 Evaluation d'EI selon les différentes expressions.

Poteau	EI_{prop}	EI_{ACI} (KN.m ²)	EI_{EC2} (KN.m ²)	$EI_{Bouزيد}$ (KN.m ²)	EI_{mirza} (KN.m ²)	EI_{bonet} (KN.m ²)
C1	27.32	31.1	24.38	26,45	32.07	30.25
C2	25.52	30.9	24.38	21 ,54	32.07	30
C3	21.65	33.8	24.38	26,57	27.86	29.53
C4	30.80	27.7	24.38	30,51	28.93	28.68
C5	24.01	28	24.38	26,87	22.53	23.47
C6	30.34	28.4	24.38	29,86	29.63	29.4

Tableau 5.7 Comparaison de la rigidité EI calculée selon l'équation proposée avec EI de différentes expressions.

Poteau	EI_{prop}/EI_{ACI}	EI_{prop}/EI_{EC2}	$EI_{prop}/EI_{Bouزيد}$	EI_{prop}/EI_{mirza}	EI_{prop}/EI_{bonet}
C1	0.878	1.120	1.032	0.851	0.903
C2	0.825	1.046	1.185	0.795	0.850
C3	0.641	0.888	0.814	0.777	0.733
C4	1.111	1.263	1.009	1.064	1.073
C5	0.857	0.984	0.893	1.065	1.023
C6	1.068	1.244	1.016	1.023	1.031
La moyenne	0.897	1.090	0.991	0.929	0.936
Ecart type	0.171	0.147	0.127	0.136	0.130

Cette étude permet de conclure que la méthode utilisée décrit de façon très raisonnable le comportement de la colonne. Elle donne des résultats concernant la rigidité flexionnelle en fonction du coefficient alfa dont le rapport EI_{prop}/EI_{Test} qui est de l'ordre de 0.897 à 1.09 avec un écart type varie entre 0.127 à 0.171. Le tableau 5.8 présente l'exemple d'un fichier de résultat donnant le moment total y compris les effets du second ordre M_{col} et la rigidité flexionnelle EI_{prop} calculée en fonction de l'équation proposée pour un niveau de chargement P/P_0 allant de 0.1 à 0.99 et une profondeur de l'axe neutre X_u variant le long de la hauteur de la section transversale avec une incrémentation de 0.5mm pour le spécimen C1 de Tsao.

Tableau 5.8 : Résultats de poteau *CI* trouvés par le programme proposé.

XU	P/P ₀	M _{col}	EI _{prop}
38.733270	5.140758E-02	2.737029	18.179780
39.233270	6.293479E-02	2.675795	18.648690
39.733270	7.360429E-02	2.727820	19.082720
40.233270	8.512106E-02	2.665057	19.551210
40.733270	9.590372E-02	2.715805	19.989840
41.233270	1.073831E-01	2.651605	20.456810
41.733270	1.182459E-01	2.701114	20.898700
42.233270	1.297406E-01	2.634957	21.366300
42.733270	1.406447E-01	2.683380	21.809870
43.233270	1.521327E-01	2.615315	22.277190
43.733270	1.631279E-01	2.662083	22.724460
44.233270	1.745675E-01	2.592348	23.189820
44.733270	1.856344E-01	2.637501	23.640010
45.233270	1.970802E-01	2.565499	24.105620
45.733270	2.081721E-01	2.609362	24.556820
46.233270	2.196105E-01	2.535120	25.022130
46.733270	2.307818E-01	2.577059	25.476560
47.233270	2.421635E-01	2.500989	25.939560
47.733270	2.533996E-01	2.540991	26.396640
48.233270	2.647856E-01	2.462447	26.859810
48.733270	2.760237E-01	2.500959	27.316970
49.233270	2.874145E-01	2.419964	27.780340
49.733270	2.986534E-01	2.455897	28.237530
50.233270	3.100481E-01	2.373404	28.701050
50.733270	3.212234E-01	2.407459	29.155650
51.233270	3.322349E-01	2.326682	29.603590
51.733270	3.433501E-01	2.359949	30.055750
52.233270	3.539297E-01	2.281431	30.486120
52.733270	3.649329E-01	2.313478	30.933720
53.233270	3.751603E-01	2.237391	31.349760
53.733270	3.860587E-01	2.268168	31.793100
54.233270	3.958965E-01	2.193975	32.193290
54.733270	4.067507E-01	2.223780	32.634830
55.233270	4.162146E-01	2.151295	33.019820
55.733270	4.269808E-01	2.179790	33.457770
56.233270	4.361398E-01	2.109175	33.830350
56.733270	4.468179E-01	2.136293	34.264730
57.233270	4.556448E-01	2.067144	34.623800
57.733270	4.662878E-01	2.093150	35.056750
58.233270	4.747864E-01	2.025268	35.402470
58.733270	4.853653E-01	2.049934	35.832810
59.233270	4.935915E-01	1.983452	36.167440
59.733270	5.041015E-01	2.006700	36.594970
60.233270	5.120373E-01	1.941322	36.917800
60.733270	5.225229E-01	1.963376	37.344350
61.233270	5.301676E-01	1.898916	37.655330
61.733270	5.406063E-01	1.919615	38.079960
62.233270	5.480098E-01	1.856194	38.381130
62.733270	5.583891E-01	1.875432	38.803350
63.233270	5.655435E-01	1.812855	39.094380
63.733270	5.759004E-01	1.830818	39.515700
64.233270	5.827992E-01	1.768894	39.796330
64.733270	5.931225E-01	1.785499	40.216270
65.233270	5.998036E-01	1.724313	40.488060
65.733270	6.100796E-01	1.739452	40.906070
66.233270	6.165413E-01	1.678873	41.168930
66.733270	6.268016E-01	1.692703	41.586310

V.4 Validation par spécimens de *Resheidat*

Afin de mieux apprécier les résultats obtenus par cette méthode, une autre étude comparative par rapport à des spécimens représentant les tests expérimentaux mis en œuvre par *Resheidat*^[49]. Les spécimens sont caractérisés par une section transversale carrée pour des poteaux en béton armé élancés articulés. Les données pour chaque spécimen ainsi que les différents résultats sont présentés dans les tableaux ci-après.

Tableau 5.9 Données expérimentales de *Resheidat*

Resheidat							
Poteau	B ₁	B (mm)	dc (mm)	ρ (%)	f _c (KN/m ²)	f _y (KN/m ²)	θ (deg)
1	0	500	50	6.006	35	414	89.5
2	0	500	50	4.444	40	414	39.8
3	0	500	50	2.944	45	414	32.47
4	0	500	50	5.6	50	414	45
5	0	500	50	7.1	55	414	38.65
6	0	500	50	7.303	60	414	45
7	0	500	50	6.663	20	344.5	0.81
8	0	500	50	3.741	25	344.5	36.87
9	0	500	50	3.131	30	344.5	37.87
10	0	500	50	6.288	35	344.5	45
11	0	500	50	5.694	20	276	21.8
12	0	500	50	3.881	20	276	65.55
13	0	500	50	6.366	25	276	30.96
14	0	500	50	5.366	30	276	36.03

Tableau 5.10 Données expérimentales de *Resheidat*

Poteau	EsIs (KN.m ²)	EcIc (KN.m ²)	P/P ₀
1	145745	68504	0.605
2	155808	52266	0.432
3	165259	35844	0.567
4	174199	64358	0.853
5	182701	79419	0.714
6	190825	81409	0.412
7	110173	75094	0.721
8	123177	44681	0.539
9	134934	37948	0.450
10	145745	71343	0.605
11	110173	65319	0.756
12	136617	58146	0.635
13	123177	72129	0.533
14	134934	61943	0.410

Il faut noter que la comparaison des résultats (EI_{prop}) par rapport à ceux de *Resheidat*^[49] concerne également les rigidités de flexion déterminées par les équations du code *ACI* et *Avşar*^[44] qui ont été déjà évoquées dans le chapitre précédent.

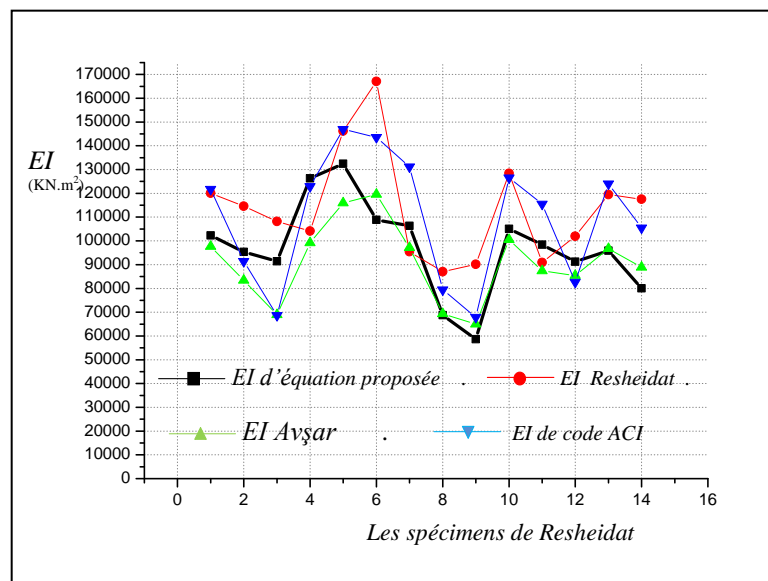


Figure 5. 8 Comparaison de la rigidité flexionnelle trouvée par des différentes expressions pour les spécimens testés par *Resheidat*

Tableau 5.11 Evaluation d' EI .

Poteau	EI_{Prop} (KN.m ²)	EI_{Resh} (KN.m ²)	EI_{ACI} (KN.m ²)	$EI_{Avşar}$ (KN.m ²)
1	102259	120024	97653	121725.7
2	95379.39	114558	83428	91401.06
3	91411.21	108179	68896	68695.5
4	126341	104171	99198	122899
5	132470	146161	115960	146929.8
6	108871	167101	119575	143588
7	106313.1	95490	97129	131174.8
8	68777.42	87007	69316	79440.42
9	58654.8	90182	64935	67907.2
10	105028.8	128428	100493	126583.8
11	98401.23	90914	87354	115524.8
12	91257.27	101919	85469	82664.1
13	95923.08	119500	96764	124014.8
14	80018.83	117527	88930	105450

Tableau 5.12 Comparaison d' EI déterminées par l'équation proposée avec les différentes expressions.

Poteau	EI_{Prop}/EI_{Resh}	EI_{Prop}/EI_{ACI}	$EI_{Prop}/EI_{Avşar}$
1	0,852	1,047	0,840
2	0,658	0,904	0,825
3	0,660	1,036	1,039
4	1,212	1,273	1,028
5	0,906	1,142	0,902
6	0,651	0,910	0,758
7	1,113	1,094	0,810
8	0,800	0,992	0,866
9	0,650	0,903	0,863
10	0,820	1,045	0,830
11	1,082	1,126	0,852
12	0,895	1,067	1,103
13	0,802	0,991	0,773
14	0,681	0,900	0,760
Moyenne	0.841	1.030	0.875
Ecart type	0.120	0.108	0.107

Au vu des résultats ainsi déterminés par cette comparaison, il ressort ce qui suit : La rigidité ainsi calculé est satisfaisante donne une moyenne qui varie entre 0.841 à 1.03 et un écart type de 0.12 pour l'expression de *Resheidat*^[49], 0.108 pour l'expression de code *ACI* et 0.107 pour l'équation proposée par *Avşar*^[44]. Le tableau 5.13 présente un exemple d'un fichier de résultat quant à lui qui donne la rigidité flexionnelle calculée en fonction de l'équation proposée EI_{prop} et celle déterminée par l'équation de *Avşar* pour un niveau de chargement P/P_0 allant de 0.1 à 0.99 et une profondeur de l'axe neutre X_u variant le long de la hauteur de la section transversale avec une incrémentation de 1mm pour le spécimen de *Resheidat* (numéro 7).

Tableau 5.13 : Résultats de poteau 7 trouvés par le programme proposé.

XU	P/P ₀	EI _{prop}	EI _{Avşar}
326.851600	5.944719E-01	99497.570000	128715.200000
327.851600	5.972481E-01	99646.840000	128769.000000
328.851600	6.000159E-01	99795.640000	128822.700000
329.851600	6.027754E-01	99944.010000	128876.300000
330.851600	6.055251E-01	100091.800000	128929.600000
331.851600	6.082666E-01	100239.200000	128982.800000
332.851600	6.109986E-01	100386.100000	129035.800000
333.851600	6.137229E-01	100532.600000	129088.700000
334.851600	6.164382E-01	100678.600000	129141.400000
335.851600	6.191447E-01	100824.100000	129193.900000
336.851600	6.218436E-01	100969.200000	129246.300000
337.851600	6.245330E-01	101113.800000	129298.400000
338.851600	6.272156E-01	101258.000000	129350.500000
339.851600	6.298884E-01	101401.700000	129402.300000
340.851600	6.325542E-01	101545.000000	129454.100000
341.851600	6.352120E-01	101687.900000	129505.600000
342.851600	6.378614E-01	101830.400000	129557.000000
343.851600	6.405032E-01	101972.400000	129608.300000
344.851600	6.431363E-01	102114.000000	129659.400000
345.851600	6.457631E-01	102255.200000	129710.400000
346.851600	6.483805E-01	102395.900000	129761.100000
347.851600	6.509919E-01	102536.300000	129811.800000
348.851600	6.535944E-01	102676.300000	129862.300000
349.851600	6.561903E-01	102815.800000	129912.700000
350.851600	6.587784E-01	102955.000000	129962.900000
351.851600	6.613591E-01	103093.700000	130013.000000
352.851600	6.639328E-01	103232.100000	130062.900000
353.851600	6.664988E-01	103370.100000	130112.700000
354.851600	6.690586E-01	103507.700000	130162.400000
355.851600	6.716098E-01	103644.800000	130211.900000
356.851600	6.741546E-01	103781.700000	130261.200000
357.851600	6.766927E-01	103918.100000	130310.500000
358.851600	6.792227E-01	104054.100000	130359.600000
359.851600	6.817476E-01	104189.900000	130408.500000
360.851600	6.842636E-01	104325.200000	130457.400000
361.851600	6.867747E-01	104460.200000	130506.100000
362.851600	6.892784E-01	104594.800000	130554.700000
363.851600	6.917752E-01	104729.000000	130603.100000
364.851600	6.942656E-01	104862.900000	130651.400000
365.851600	6.967491E-01	104996.400000	130699.600000
366.851600	6.992264E-01	105129.600000	130747.700000
367.851600	7.016973E-01	105262.500000	130795.600000
368.851600	7.041619E-01	105395.000000	130843.400000
369.851600	7.066196E-01	105527.100000	130891.100000
370.851600	7.090711E-01	105658.900000	130938.700000
371.851600	7.115170E-01	105790.400000	130986.100000
372.851600	7.139558E-01	105921.600000	131033.500000
373.851600	7.163895E-01	106052.400000	131080.700000
374.851600	7.188165E-01	106182.900000	131127.800000
375.851600	7.212381E-01	106313.100000	131174.800000
376.851600	7.236519E-01	106442.900000	131221.600000
377.851600	7.260621E-01	106572.400000	131268.400000
378.851600	7.284651E-01	106701.600000	131315.000000
379.851600	7.308627E-01	106830.500000	131361.500000
380.851600	7.332544E-01	106959.100000	131407.900000
381.851600	7.356398E-01	107087.400000	131454.200000
382.851600	7.380201E-01	107215.400000	131500.400000
383.851600	7.403936E-01	107343.000000	131546.400000

V.5 Validation expérimentale

L'expérimentation quant à elle concerne l'étude analytique du comportement de spécimens choisis et sélectionnés de sorte à prendre en compte les paramètres jugés les plus influents. Cette expérimentation est réalisée afin d'observer la variation du coefficient de réduction de la rigidité en fonction des caractéristiques mécaniques du matériau. Pour l'expérimentation du modèle proposé, une série de tests a été réalisée pour déterminer la variation du facteur de réduction (α) en fonction de différents paramètres influençant le comportement des poteaux élancés en béton armé. La méthode proposée a été réalisée selon l'expression du facteur de réduction (α) pour une déformation de compression ultime du béton égale à 0,003 car elle donne les meilleurs résultats parmi toutes les autres valeurs de niveaux de déformation qui variaient entre 0,002 et 0,004, La section transversale est de forme L de dimensions ($B1 = 100 \text{ mm}$ et $B = 300 \text{ mm}$).

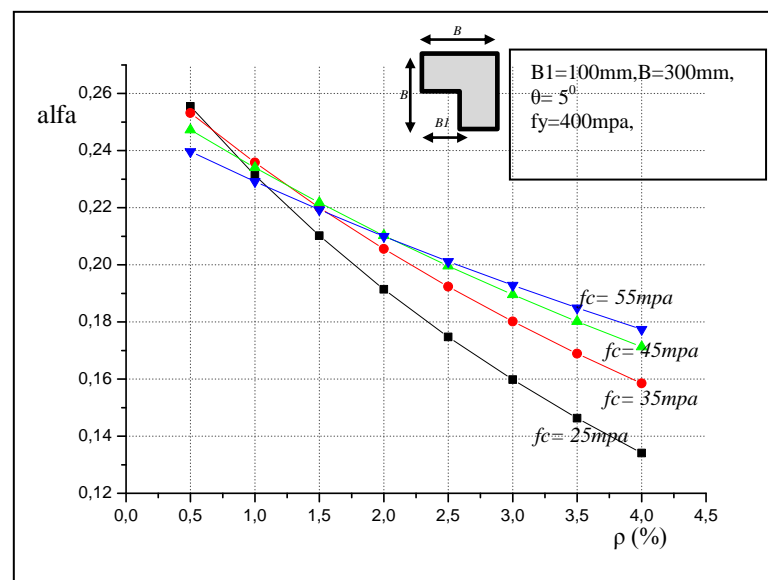


Figure 5.9 Variation de ' α ' en fonction de ' ρ ' pour différentes valeurs de ' f_c ' pour $\theta = 5^\circ$

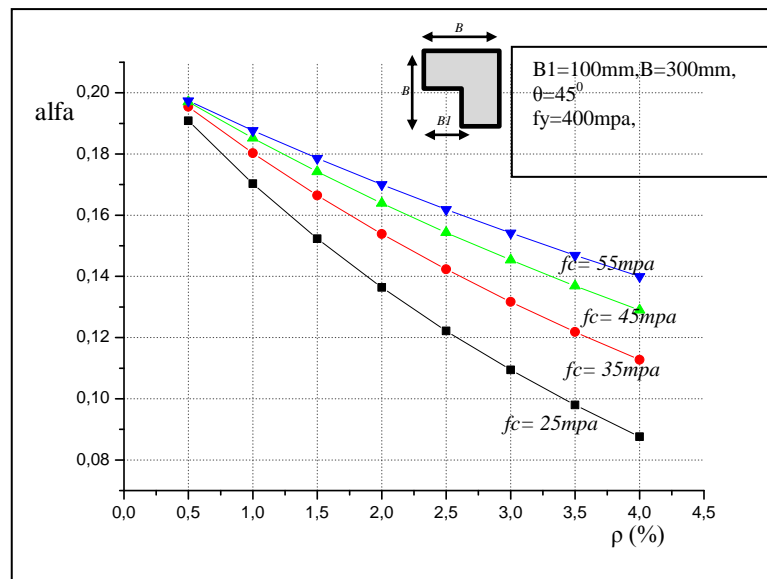


Figure 5.10 Variation de ' α ' en fonction de ' ρ ' pour différentes valeurs de ' f_c ' pour $\theta=45^\circ$

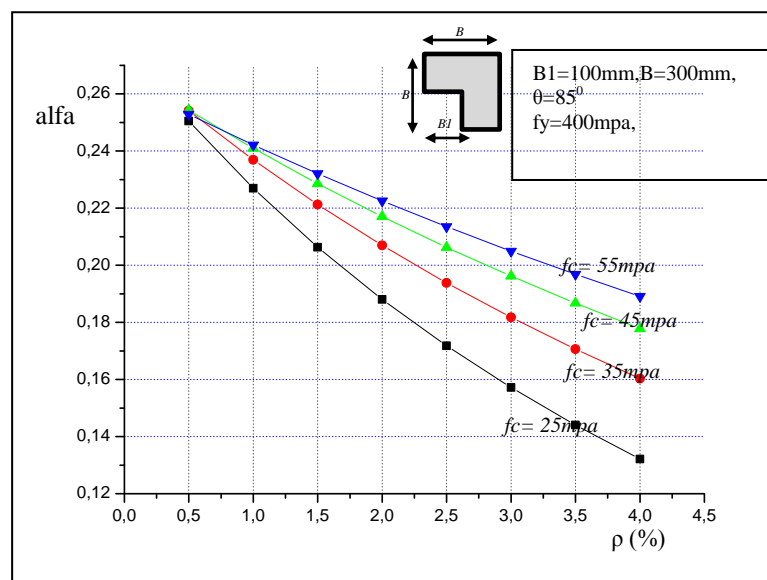


Figure 5.11 Variation de ' α ' en fonction de ' ρ ' pour différentes valeurs de ' f_c ' pour $\theta=85^\circ$

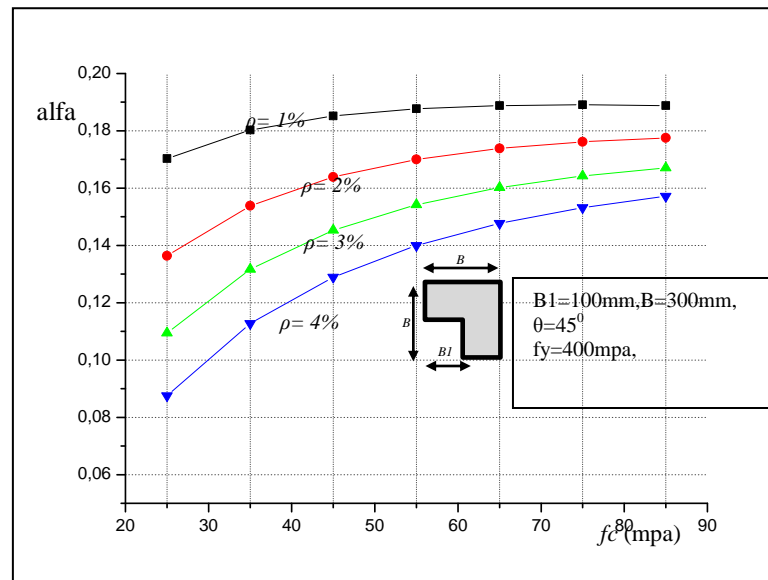


Figure 5.12 Variation de ' α ' en fonction de ' f_c ' pour différentes valeurs de ' ρ ' pour $\theta=45^\circ$

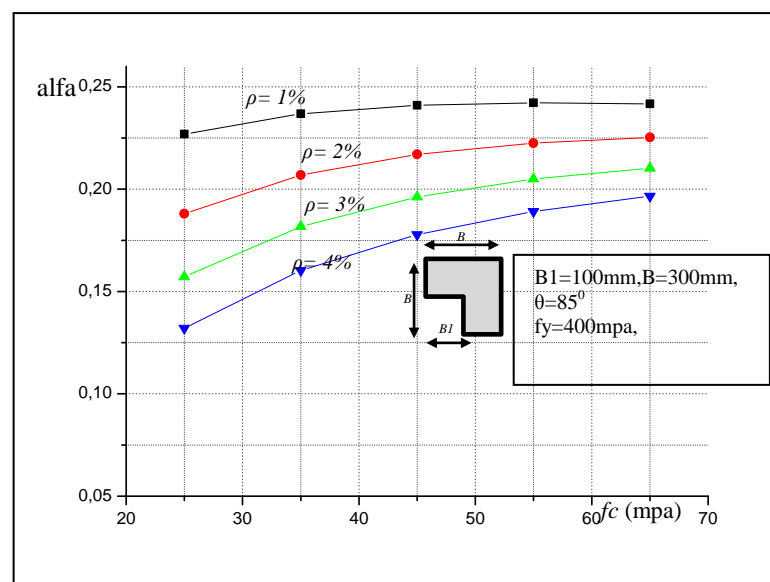


Figure 5.13 Variation de ' α ' en fonction de ' f_c ' pour différentes valeurs de ' ρ ' pour $\theta=85^\circ$

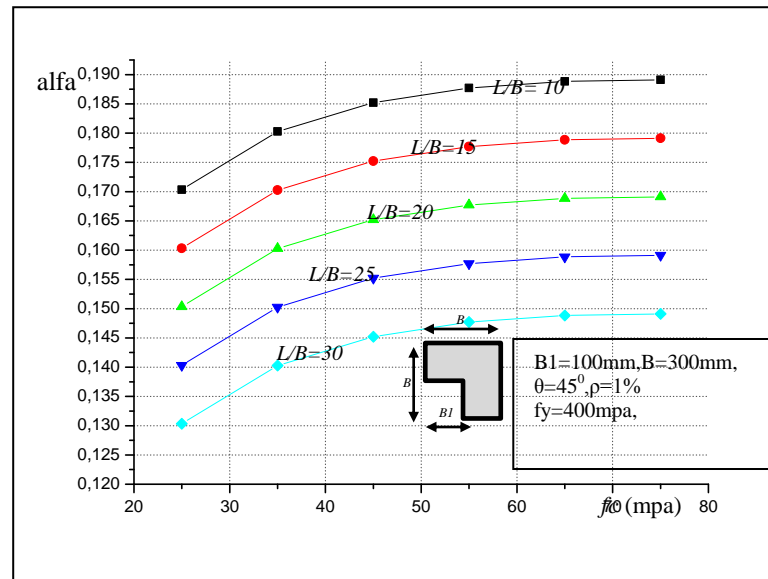


Figure 5.14 Variation de 'alpha' en fonction de 'fc' pour différentes valeurs de la longueur de la colonne 'L/B'

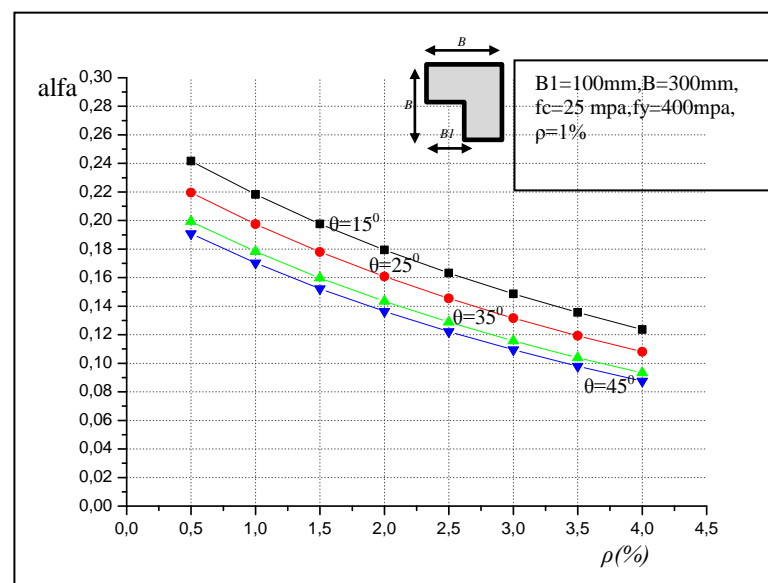


Figure 5.15 Variation de 'alpha' en fonction de 'rho' pour différentes valeurs de l'angle de chargement $\theta=15^\circ$ à 45°

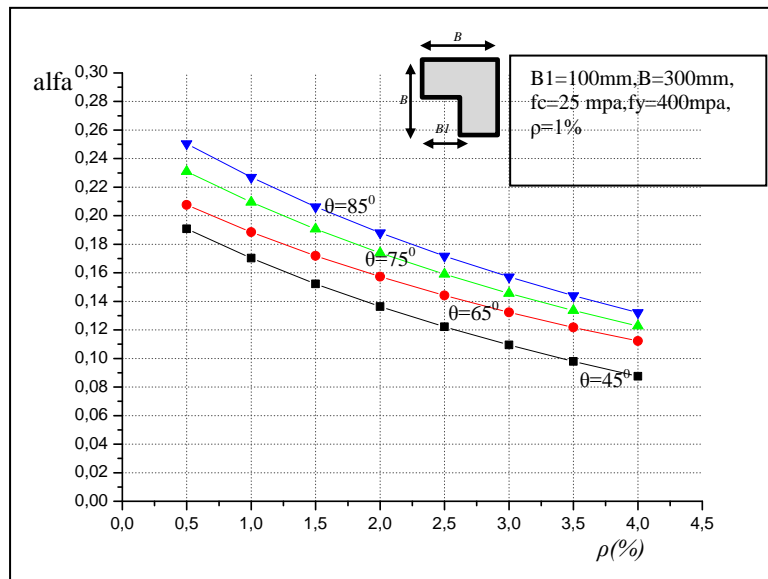


Figure 5.16 Variation de ' α ' en fonction de ' ρ ' pour différentes valeurs de l'angle de chargement $\theta=45^\circ$ à 85°

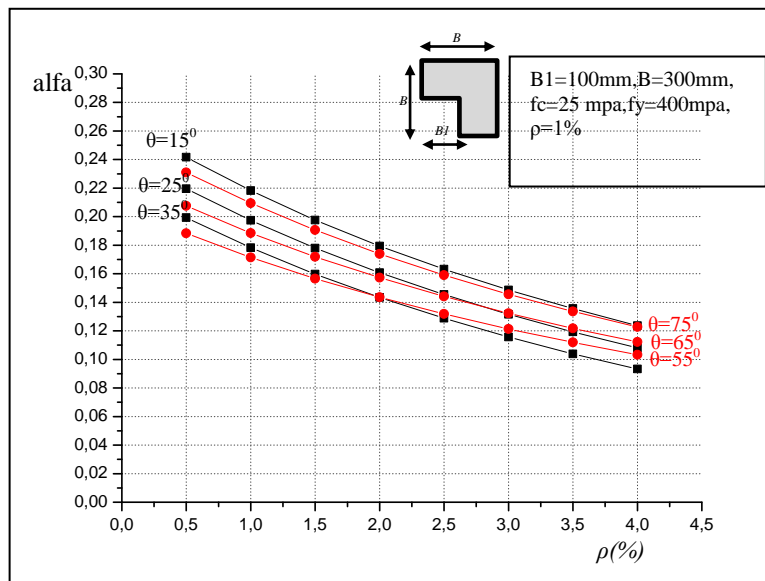


Figure 5.17 Variation de ' α ' en fonction de ' ρ ' pour différentes valeurs de l'angle de chargement $\theta=15^\circ$ à 75°

Une série de test a été réalisée afin de déterminer la variation du coefficient de réduction alfa ' α ' en fonction des différents paramètres considérés comme influent sur le comportement des poteaux en béton armé à savoir le pourcentage d'acier (ρ), la contrainte du béton (f_c), le rapport L/B et l'angle d'action de la charge (θ). Cette étude a été réalisée en tenant compte de l'expression du coefficient alfa pour une déformation ultime du béton 3‰ où la courbure est donnée par la formule : $\phi = 0.003/X_u$ pour une section en forme de L de dimensions ($B_1=100$ mm et $B=300$ mm, $D_c=30$ mm).

Les résultats ainsi obtenus permettent de conclure que :

- Une diminution du facteur de réduction alfa ' α ' lors de l'augmentation du pourcentage des armatures longitudinales ' ρ '.
- Une augmentation significative du facteur de réduction ' α ' lorsque la résistance du béton f_c augmente.
- La figure 5.14 présente une série des courbes pour des colonnes de longueurs égales : 3m, 4.5m, 6m, 7.5m et 9m dont les élancements ' λ ' sont respectivement de 36, 54, 72, 90 et 108 . Ainsi la figure montre que l'augmentation de la longueur de la colonne représentée par le rapport L/B ainsi que l'élancement provoquent une diminution de la valeur du facteur de réduction alfa ' α '.
- Les figures 5.15 ; 5.16 ; 5.17 montrent que l'augmentation ou la diminution de l'angle d'inclinaison θ ne joue pas un rôle important sur la variation du facteur de réduction de la rigidité flexionnelle.

Conclusion

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail de recherche, un model analytique est mis en œuvre pour l'étude et l'analyse du comportement non linéaire matériel et géométrique des poteaux élancés en béton armé de sections carrées et profilés de forme en 'L' soumis à l'action d'un effort axial et d'une flexion bi axiale par le biais de la rigidité flexionnelle EI . Afin d'étudier les valeurs de la rigidité flexionnelle effective, une analyse numérique non linéaire est présentée. L'approche suivie est basée sur la détermination des charges axiales résistantes, les moments résistants et les courbures (P_u , M_u , ϕ) de la colonne, pour des dimensions données, un angle de chargement et un pourcentage d'armatures donné. Ainsi la détermination de la rigidité flexionnelle effective est basée sur la relation moment – courbure.

La détermination de la courbure nécessite de connaître tout d'abord la valeur de la hauteur comprimée X_u . Dans la méthode des tranches adoptée, la solution est trouvée de manière itérative. Pour chaque tranche il faut évaluer les efforts internes (du béton, des armatures comprimées et tendues) sous l'effet d'une charge axiale et un moment ultime. Il est alors possible de tracer les courbes d'interaction en faisant un balayage de la section parallèlement à l'axe neutre. Chaque couple élémentaire effort-moment représente un point de la courbe.

Pour élaborer le code informatique final, il est ainsi développé deux programmes indépendants qui correspondent à la spécificité liée à la forme de la section transversale carrée ou profilé en L. Pour la dernière la résolution est rendue très difficile à cause de la non existences d'un axe de symétrie.

Le programme informatique mis au point est de type général. Ainsi, pour une inclinaison de l'axe neutre varie de 0 à 90⁰ il est possible d'obtenir les courbes d'interaction ou bien tracer les diagrammes des lois de comportement. Pour cela, les lois de comportement admises dans l'Eurocode $EC2$ sont utilisées à savoir parabole-rectangle et rectangle simplifié pour le béton et élastique-plastique pour l'acier d'armatures. Aussi deux lois de Kent et Park sont utilisées pour le béton confiné et non confiné. L'implantation d'autres modèles de comportement est possible par de petites manipulations, comme pour les bétons à haute performance (BHP), etc.

Pour s'assurer de l'exactitude des résultats ainsi obtenus, une validation est nécessaire en comparant les résultats obtenus avec le logiciel professionnel 'SECTION BUILDER 8' et le logiciel ainsi proposé. Expérimentalement, une variation des différents paramètres, pourcentage d'armatures, rapport BI/B a été faite pour couvrir un intervalle assez large. Une bonne corrélation est observée pour les différents exemples traités.

La présence des effets du second ordre ou la non linéarité géométrique s'impose, les moments résistants obtenus sont multipliés par le facteur d'amplification δ pour donner les moments résistants de la colonne réduits provoqués par la présence des moments fonction des effets du seconde ordre. Pour cela la méthode adopté par *ACI 318* est utilisée afin d'évaluer le facteur d'amplification δ . De cette façon, la rigidité flexionnelle effective qui prend en compte la non linéarité matérielle ainsi que géométrique est évaluée lorsque le moment résistant de la colonne est devisée par la courbure (ϕ) dans chaque tranche.

En revanche une analyse statistique des paramètres qui affectent la rigidité flexionnelle EI des poteaux élancés a été réalisée pour l'évaluation de la rigidité par l'introduction d'un facteur de réduction alfa. Ce facteur intervient sur la réduction de la rigidité du béton fissuré $E_c I_c$. Ce facteur réduit cette rigidité d'une certaine proportion qui est de l'ordre de $0.2E_c I_c$ en ce qui concerne le code *ACI 318*. Cette valeur représente la limite inférieure de la rigidité et par conséquent n'est pas très économique.

Une équation simple est proposée afin d'évaluer le coefficient de réduction à partir des paramètres jugés prépondérant dans le calcul de la rigidité. Les résultats de l'analyse statistique ont révélé que le niveau de charge axiale P/P_0 , la résistance du béton f_c et le rapport d'élancement L/B sont les paramètres les plus importants qui influencent de manière significative la rigidité flexionnelle des poteaux élancés en béton armé (BA) de section carrée et en 'L'. Une étude comparative des résultats obtenus par l'expression ainsi proposée a été faite par rapport à ceux calculés par les expressions des codes *ACI-318* ; *Euro-code 2* et les méthodes proposées par *Tikka & Mirza* , *Bonet*, *Al -Sarraf*.

A fin de mieux situer la précision de ce calcul, une validation sur des spécimens proposés par *Resheidat* et *Tsao* est réalisée. Un écart type sur $EI-prop/EI-test$ variant de 0.107 à 0.171 est observé. Le model proposé est très satisfaisant dans certaines limites. Celles-ci représentent, la section transversale $B1/B=0$ à 0.6, la résistance du béton $f_c=15$ à 60Mpa, l'élancement $\lambda=0$ à 108, le pourcentage d'armatures $\rho=0$ à 4% et enfin l'angle d'inclinaison $\theta=0^0$ à 90^0 .

Ainsi, l'expression proposée dans ce travail de recherche permettra aux ingénieurs d'avoir une méthode simple et rapide d'évaluation de la rigidité flexionnelle basée sur des résultats fiables provenant d'analyses par *la méthode de régression linéaire descendante*. En plus, il est clair qu'en regardant l'équation, la complexité des calculs n'a augmenté que légèrement en comparaison avec le coefficient constant 0.2 de l'équation de la norme *ACI 318-08*. Il faut noter également, en comparant les rigidités flexionnelles calculées par les méthodes proposées par le code *EC2* et les méthodes de *Liu*, *Bouzid*, *Avşar* et ceux calculés avec l'équation proposée, une meilleure corrélation est obtenue.

Enfin, il est important de rappeler qu'une étude plus approfondie du comportement des poteaux très élancés ($\lambda > 140$), est nécessaire à la confirmation des coefficients trouvés. Dans le domaine de recherche, il est souhaitable que d'autres études de la rigidité flexionnelle effective avec la prise en compte du retrait, du fluage, de la participation du béton tendu et l'effet P- Δ pour les poteaux élancés à nœuds déplaçables.

Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **ACI 318-08** ,«*Building code requirements for reinforced concrete* ». Detroit: American Concrete Institute, 471, 2008.
- [2] **Al-noury** «*A study of reinforced concrete compression members under biaxial bending* » Ph.D.thesis presented to Purdue University , 231p, 1980.
- [3] **Al-Sarraf. Z** , Sabeh. Z , Ihsan. , A.S. Al-Shaarbaf , Bassman.R, Al-Bakri & Kaiss,F.S « *Flexural Rigidity of Slender RC Columns* », Eng.& Tech. Journal ,Vol.27, No.1 ,pages.96-116,2009.
- [4] **AS3600** « Concrete structures Standards Australia », Standards Australia International , Australie, 170 pages, 2001.
- [5] **Bažant .Z.P**,Cedolin L & Mazen RT , « *New method of analysis for slender columns* » ,ACI structural journal, Vol.88 ,No.4 , pages.391-401,1991.
- [6] **Biao yan** « *Behaviour of circular tubed steel-reinforced-concrete slender columns under eccentric compression* » . Journal of Constructional Steel Research ,Vol.155 ,No.7, pages.342-354,2019.
- [7] **Bonet.J.L** ,Romero.M.L,Miguel .P.F .« *Effective flexural stiffness of slender reinforced concrete columns under axial forces and biaxial bending*» ,Engineering structures ,Vol.33,No.3, pages.881-893,2011.
- [8] **Bouzid .T**, Demagh.K ,« *Practical method for analysis and design of slender reinforced concrete columns subjected to biaxial bending and axial loads* » .Slovak journal of civil engineering Vol. 19, No. 1, pages 24 – 32,2011.
- [9] **Bouzid .T** « *Comportement des poteaux élancés en béton armé sous chargement bi axial*» thèse de doctorat ,Université de Batna ,2011.
- [10] **Bresler.B** ,« *Design criteria for reinforced concrete columns under axial loaded biaxial bending* » ,ACI journal ,Vol.10 ,No.6 , pages.481-490 ,1960.
- [11] **CBA-93** , « *Code de béton algérien 1993*». Document technique réglementaire DTR-BC CentreNational de Recherche Appliquée en Génie Parasismique (CGS), Alger,1994.
- [12] **Celso Pissinatti** ,Bernardo L.Poncetti , RobertoBuchaim,Romel D.Vanderlei «*The influence of the reinforced concrete deformability in the design of slender columns*» Engineering Structures Vol.245, pages. 112882, 2021.
- [13] **Chu K.H** . & Pebarcius .A , « *Biaxial loaded reinforced concrete columns* » Proceedings ASCE , Vol .84 ,No .ST8 ; pages.1865-1-27,1958 .

- [14] **Czerniak. E** ,« *Analytical approach to biaxial eccentricity* » Proceedings ASCE, Vol.88 ,No. 4, pages 105-158, 1962.
- [15] **Domenico Raffaele, Giuseppina Uva, Francesco Porco & Andrea Fiore** ,« *Buckling of Rectangular Isolated R.C. Columns: Closed-form Approximation for Interaction Domains* » .The Open Construction and Building Technology Journal, Vol.7, pages. 129-137,2013.
- [16] **Dundar.C** ,Serkan Tokgoz,Ahmed Kamil Tanrikulu,&Tarik Baran ,« *Behaviour of reinforced and concrete-encased composite columns subjected to biaxial bending and axial load* » Building and Environment ,Vol 43 ,No.6 ,pages.1109-1120 ,2007.
- [17] **Dundar.C** ,Serkan Tokgoz,Ahmed Kamil Tanrikulu,« *Experimental behaviour of steel fiber high strength reinforced concrete and composite columns*» Journal of Constructional Steel Research Vol.74 ,pages 98–107,2012.
- [18] **Eurocode 2-04**, European Committee for Standardization. « *Design of concrete Structures-part 1, general rules and rules for buildings* » . EN(1992-1) , 2004.
- [19] **Fleming . J.F & Werner S.D** , « *Design of columns subjected to biaxial bending*» .ACI journal ,Vol.62 , 1965.
- [20] **Hafeez Khan.T.A**« *An investigation of the ultimate strength of biaxially loaded reinforced concrete*» these PHD –ITT Karagpur Inde ,1975.
- [21] **Hafeez .K, T.A. Ramamurthy.T.A** ,« *L-shaped Column Design for Biaxial Eccentricity* » ASCE Journal of Structural Engineering ,Vol.109,No.8,pages.1903,1983.
- [22] **Hognestad .E** , « *A study of combined bending and axial load in reinforced concrete member*» bulletin N^o 399,University of Illinois engineering experimental station , 1951.
- [23] **Hognestad.E** , Mattock..A.H & Kriz.L.B, « *Rectangular stress distribution to biaxial bending*», ACI journal , Vol.75, pages 875 – 928,1960.
- [24] **Hong .H.P** « *Strength of slender reinforced concrete columns under biaxial bending*» Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 127, No. 7, pages. 758-762. ,Vol. 127, No. 7 , 2001 .
- [25] **Hsu .C.T.Thomas** ,« *Reinforced concrete members subject to combined biaxial bending and tension* » . ACI structural journal ,Vol.83,No.1, pages.137-144 ,1986.
- [26] **Hsu .C.T T** .« *Biaxially loaded L-shaped reinforced concrete columns* », Journal of structural engineering ,ASCE,Vol.111,No.12,pages 2576-2595,1985.
- [27] **Hsu .C.T.Thomas** , « *Analysis and design of square and rectangular columns by equation of failure surface* » . ACI structural journal ,Vol.85, pages.167-179,1988.

- [28] **Ivanov .A**, « *Special features for the design of slender columns in monolithic multi-storey buildings with the consideration of longitudinal bending* », Journal of concrete and reinforced concrete, VOL .5, pages 27-29,2004 .
- [29] **José Milton de Araújo** , « *A non-linear model for analysis and design of reinforced concrete slender columns*» .Magazine of Concrete Research ,Vol.71,No.6,pages.1-46 ,2018 .
- [30] **Katrine Marie.Welp,M.S** ,« *Effective stiffness of rectangular concrete columns* » these de Master en Science ,Université de Arizona, 1988.
- [31] **Kent .D.C**, Park .R ,« *Flexural members with confined concrete* ». Journal of Structural Division ASCE ,Vol.97,No.7, pages.1969–1990,1971.
- [32] **Khuntia .M**, S.K.Ghosh.S.K, « *Flexural stiffness of reinforced concrete columns and beams experimental verification* », ACI structural journal, technical paper,Vol.101, pages.364-374,2004.
- [33] **Liu .J**, Z .Yanjan ,L. Pengfei ,« *Flexural Stiffness Reduction Factor of Reinforced Concrete Column with Equal L Shaped Section* ». Multimodal Transportation systems-convenient safe cost-effective, efficient, pages.3187-3193, 2012.
- [34] **MacGregor.J.G**, Breen.J.E & Pfrang.E ,« *Design of slender concrete columns* » .ACI Journal Vol.67,No.2 ,pages.6-28,1970.
- [35] **Mallikarjina**, P.Mahadevappa « *Computer aided analysis of reinforced concrete columns subjected to axial compression and bending L shaped sections* » , Computers & Structures ,Vol.44,No.5, pages.1121-4138,1992.
- [36] **Marin**, Joaquin, « *Design aids for L-shaped reinforced concrete columns* », ACI Journal, Vol. 76, No. 11, pages. 1197-1216 ,1979.
- [37] **Mark D.Denavit** , Jerome F.Hajjar,TizianoPerea,Roberto T.Leon « *Elastic flexural rigidity of steel-concrete composite columns* »,Engineering Structures ,Vol.160,pages. 293-303,2018.
- [38] **Mohamed .E**, El-Gohary.H.A and Agag .Y.I ,« *Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slender Columns under Eccentric Compression: Equivalent Initial Eccentricity* ». Conference: The 7th International Engineering Conference, 2021.
- [39] **Muller .L. S** .« *Design of L shaped columns with small eccentricities* »,ACI Journal ,No.56-31,pages.487-498,1959.
- [40] **Naci.C** , Aydin.D, Hakan.O, Abdulhalim.A ,« *A Simple formulation for effective flexural stiffness of circular reinforced concrete columns* », Engineering applications of artificial intelligence,Vol.38,pages.79-87,2015.

- [41] **NBC** « *National Building Code of Canada* », National Research Council of Canada, 2015.
- [42] **Norme CSA A23.3-04** « *Calcul des ouvrages en béton* », National Research Council of Canada, 2006.
- [43] **Obozov.V**, and El-Gohary.H, « *Non-linear deflection of RC slender columns under eccentric compression* », Journal of earthquake engineering, safety of structures, CNIISK, Moscow, Russian, Vol.2, 2007.
- [44] **Özgür. Avşar**, Beyhan.B, & Ahmet. Y, « *Effective flexural rigidities for ordinary reinforced concrete columns and beams* », The Structural design of tall and special buildings, Vol.6, pages.464-482, 2014.
- [45] **Parthasarathi .N**, Satyanarayanan .K.S & Rajiv Kumar.N « *Behaviour of high strength reinforced concrete slender column under biaxial loading* ». ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, Vol. 11, No. 21, pages.12695-12699, 2016.
- [46] **Rafika Hachem**, Brahim Bousalem « *Analyse inélastique des poteaux en béton armé de section rectangulaire* » *Colloque CMEDIMAT*, 2005.
- [47] **Ramamurthy L.N**, « *An investigation of ultimate strength of biaxial loaded reinforced concrete columns* ». these de PHD-ITT (Indian institute of technology) Kharagpur, 1965.
- [48] **Resheidat.M**, Ghanma .M, Numayr.K, « *Improved 'EI' estimation for reinforced concrete circular columns* », Materials and Structures, Vol.27, pages.515-526, 1994.
- [49] **Resheidat.M**.Ghanma.M, Sutton.C, & Wai-Fah Chenf, « *Flexural rigidity of biaxially loaded reinforced concrete rectangular column sections* », Computer & Structure, Vol.55, No.4, pages.601-614, 1995.
- [50] **Row.D.G** & Paulay .T, « *Biaxial flexure and axial load interaction in short rectangular reinforced concrete columns* ». Bulltin of the New Zealand society for earthquake engineering, Vol.6, No.3, 1973.
- [51] **RPA-99**. « *Règles parasismiques Algériennes 1999. Document technique réglementaire* » DTR-BC 248 - Centre National de Recherche Appliquée en Génie sismique (CGS), Alger, 117p, VERSION, 2003.
- [52] **Serkan Tokgoz**, Cengiz Dundar, A. Kamil Tanrikulu, « *Experimental behaviour of steel fiber high strength reinforced concrete and composite columns* ». Journal of Constructional Steel Research, Vol.74, pages.98-107, 2012.
- [53] **Shuaib H. Ahmad** & Saranath L. Weekoon, 1995 « *Model for Behaviour of Slender Reinforced Concrete Columns Under Biaxial Bending* » Structural Journal, Vol. 92, No.2, pages. 188-198, 1995.

- [54] **SIA 162 Norme suisse** « Ouvrages en béton » Société suisse des ingénieurs et des architectes, 86 pages, 1993.
- [55] **SNiP 2.03.01-84** « Concrete and Reinforced Concrete Structures », National codes and Standards of Russia (SNIP), 142 pages, 1997.
- [56] **Tikka.T**, Mirza.A « *Effective flexural stiffness slender structural concrete columns* », Canadian journal of civil engineering, Vol.35, pages.384-399, 2008.
- [57] **Tsao .W.H., Hsu.C.T.T**, « *Behaviour of biaxially loaded square and L- shaped slender reinforced concrete columns* », Magazine of concrete research, Vol.46, No.169, pages.257-267, 1994.
- [58] **Weber. D.C**, « *Ultimate strength design charts for columns with biaxial bending* » .ACI journal, Vol.63, No.11, 1966.
- [59] **Whitney. C.S** « *Plastic theory of reinforced concrete design proceeding of American society of civil engineers* », transactions ASCE mVol.107, 1940.
- [60] **Whitney.C.S**, Cohene, « *Guide for ultimate strength design of reinforced concrete* » .ACI Journal, Vol.28, No .5, pages. 445-490, 1956.
- [61] **Xiuling .F, Meng .S, Xiang.Y.K, Z.Jie .Z, Peng.F.L**, « *Study on flexural stiffness reduction factor of reinforced concrete column with equiaxial T-shaped section* », Applied Mechanics and Materials, Vol.351, pages.319-324, 2013.
- [62] **Xiuling.F, Meng.S, Jing.C & Pengfei .L**, « *Research of flexural stiffness reduction factor of reinforced concrete column with equiaxial +shaped section* ».Procedia-social and behavioural sciences, Vol.96, pages.168-174, 2013.
- [63] **Yinping Ma**, YongjianLiu, TianyuMaMa, mpiandra N.H.Zafimandimby « *Flexural Stiffness of Rectangular Hollow Section (RHS) Trusses* » Engineering Structures Vol.239, pages 112-336, 2021.
- [64] **Youssef.K**, « *Prediction of second order effects in sway and non-sway reinforced concrete frames* », Ph.D. Thesis, Faculty of Engineering, Cairo University, 2005.

Annexe

ANNEXE 1

PROGRAMME DE CALCUL

Sous-programme de balayage à partir le petit coté (angle entre 0 et 45⁰)

```
C*****
C          BIAP
C    kent and park " L" unconfiné
C*****
  program principal
    OPEN (5, FILE=' R.DAT' )
    OPEN (7, FILE='r.OUT')
    READ(5,*,END=600)B1,B,DC,fck,FY,ES,teta,Ls,S,bs,h,prog
    WRITE(*,*)B1,B,DC,fck,FY,ES,teta,Ls,S,bs,h,prog
    if (prog.eq.2) then
      IF (teta.LE.45.0) call biag45(P,B1,B,DC,FCK,FY,ES,teta,bs,h,S,Ls)
      IF (teta.GT.45.0) call biag90(X,B1,B,DC,FCK,FY,ES,teta,bs,h,S,Ls)
    end if
    if(prog.eq.1) then
      IF (teta.LE.45.0) call biap45(B1,B,DC,FCK,FY,ES,teta,bs,h,S,Ls)
      IF (teta.GT.45.0)call biap90(XU,B1,B,DC,FCK,FY,ES,teta,bs,h,S,Ls)
    end if
299 CONTINUE
600 STOP
    END
C*****
C    *L* RENVERSE( BIAP ) balayage à partir le petit coté
C
C          angle entre 0 et 90
C*****
  subroutine biap045(B1,B,DC,FCK,FY,ES,teta,bs,h,S,Ls)
    p=0.0
7    p=p+0.5
    XU=DC*(cosd(45-(teta)))
8    XU=XU+5.0
    E50U=(3.0+0.285*FCK)/(142.0*FCK-1000.0)
    RO=(0.785*Ls*6.5*6.5)/(S*bs*h)
    CK=(RO*FY/FCK)+1.0
    FCC=CK*FCK
    ECOC=0.002*cK
    E50h=0.75*RO*(b/S)**0.5
    ZU=0.5/(E50U-0.002)
    ZC=0/5/(E50U+E50h-ECOC)
    EC20=1.6*(E50U+E50h)-0.6*ECOC
    FK=0.566*FCK
    A=B*(B-B1)+B1*(B-B1)
    Y2=(B*B*B*0.707-B1*B1*B1*0.707-B1*B1*(B-B1)*1.414) /A
    Y1=Y2*(cosd (45-(teta)))
```

```

AS=P*A/100.0
Fr=Fck*(A-As)+Fy*As
c Fr :est la force resistente ou la capacité de la section BA
RL=4.0*B-8.0*DC
TS=AS/RL
YG=0.5*((B1*(B-B1))+(B*B))/(B1+B)
yg2=B-Yg
yg3=(yg*(1+tand (teta)))*cosd (teta)
c XU=yg3
c Yg represente l'ordonnée du point de CDG de la section transversale
c par rapport au B,yg3 c est la position de cdg selon teta
lb=((B-B1)**3)*B1/12+(B-B1)*B1*(Yg-0.5*(B-B1))**2
+((B-B1)*B*B*B)/12+(B-B1)*B*(0.5*B-YG)**2
c lb :le moment d'inertie du béton L
IS1=((B-2*Dc)*TS)*((TS*TS)/12+((YG-DC)**2))
IS2=((B-2*Dc)**3/12)*TS+((B-2*DC)*TS)*(YG-0.5*B)**2
IS3=((B-B1-2*DC)*TS)*((TS*TS/12)+((B-DC-YG)**2))
IS4=(TS*(B-B1-2*DC)**3/12)+(B-B1-2*DC)*TS*(0.5*(B-B1)-yg)**2
IS5=TS*B1*((B1**2/12)+((B-0.5*B1-DC-YG)**2))
IS6=(B1*TS**3)/12+(B1*TS*(B-B1-DC-YG)**2)
IS=IS1+IS2+IS3+IS4+IS5+IS6
c IS : l'inertie des armatures qui sont supposés comme fil continue avec enrobage DC
C*****
C DETERMINATION DES FORCES DANS LE BETON
C*****
B6=B*(cosd(teta)+sind (teta))-B1*sind (teta)
IF(XU-B6)10,10,20
10 X1=XU/2.0
X2=XU-X1
GOTO 30
20 X1=B6/2.0
X2=B6-X1
GOTO 30
30 TPC=0.0
TAMC=0.0
X=0.0
35 X=X+0.5
IF(X-X1)40,40,50
50 F=(FCK*2*(XU-X)/(XU-X1))-(FCK*((XU-X)/(XU-X1))**2)
GOTO 60
40 F=FCK-(FCK*ZU*0.003*(X1-X)/XU)
60 B3=(B-B1)*(cosd(teta)+sind (teta))
B5=B*sind (teta)
B4=B*cosd(teta)
B2=B3+B1*(sind(teta))
IF(X-B3)70,70,100
70 IF(X-B5)80,80,90
80 W=X*(TAND (teta)+(1/TAND (teta)))
GOTO 130
90 IF(X-B4)91,91,92

```

```

91   W=B/(cosd(teta))
      GOTO 130
92   W=(B*(cosd(teta)+sind (teta))-X)*(TAND (teta)+(1/TAND (teta)))
      GOTO 130
100  IF(X-B5)110,110,120
110  W=B3*(TAND (teta)+(1/TAND (teta)))
      GOTO 130
120  IF(X-B2)121,121,122
121  IF(X-B4)123,123,124
123  W=(B/(cosd(teta)))-(x-B3)*(TAND (teta)+(1/TAND (teta)))
      GOTO 130
124  W=(B*(cosd(teta)+sind (teta))-2*X+B3) *(TAND (teta)+(1/TAND (teta)))
      GOTO 130
122  IF(X-B4)125,125,126
125  W=(B-B1)/cosd(teta)
      GOTO 130
126  W=(B6-x)*(TAND (teta)+(1/TAND (teta)))
130  PC=W*F
      AMC=PC*(Y1-X)
      TPC=TPC+PC
      TAMC=TAMC+AMC
      B7=X1+X2
C*****
C   DETERMINATION DES FORCES DANS L'ARMATURE COMPRIMEE
C*****
      TPSC=0.0
      TAMSC=0.0
      B16=B6-(DC*(cosd(teta)+sind (teta)))
      IF(XU-B16)140,150,150
140  D=0.0
      GOTO 160
150  D=XU-B16-1.0
160  D=D+1.0
      EC=0.002*D/(XU-X1)
      IF(FY.EQ.400.0) GOTO 168
      IF(EC.GE.0.0020) GOTO 168
      IF(EC.LE.0.010) GOTO 168
      FC=FY/1.15-20000.0*(0.0020-EC)*(0.0020-EC)
      GOTO 169
168  FC=EC*ES
      FI=FY/1.15
      IF(FC.GE.F1) FC=F1
169  B17=B*cosd (teta)
      B18=(B-B1-DC)*(cosd(teta)+sind (teta))
      B12=B3+B1*(sind(teta))-(DC*(cosd(teta)+sind (teta)))
      B9=XU-B17
      B10=XU-B18
      B13=XU-B12
      B11=XU-DC*(cosd(teta)+sind (teta))
      IF(D-B10)180,180,190

```



```

180 IF(D-B13)181,181,182
181 WS=2.0*TS*(cosd(teta)+sind (teta))
    GOTO 210
182 WS=4.0*TS*(cosd(teta)+sind (teta))
    GOTO 210
190 WS=2.0*TS*(cosd(teta)+sind (teta))
    GOTO 210
210 PSC=WS*(FC-FK)
    AMSC=PSC*(Y1-(XU-D))
    TPSC=TPSC+PSC
    TAMSC=TAMSC+AMSC
C*****
C DETERMINATION DES FORCES DANS L'ARMATURE TENDUE
C*****
    FT=0.0
    TPST=0.0
    TAMST=0.0
    IF(XU.GE.B16) GOTO 265
    Z=0.0
215 Z=Z+1.0
    ET=0.002*Z/(XU-X1)
    IF(FY.EQ.400.0) GOTO 216
    IF(ET.GE.0.0020) GOTO 216
    IF(ET.LE.0.010) GOTO 216
    FT=FY/1.15-20000.0*(0.0020-ET)*(0.0020-ET)
    GOTO 217
216 FT=ET*ES
    F1=FY/1.15
    IF(FT.GE.F1) FT=F1
217 B22=-B9
    B23=-B10
    B33=-B13
    B24=B16-XU
    IF(Z-B23)230,230,240
230 WS=2.0*TS*(cosd(teta)+sind (teta))
    GOTO 260
240 IF(Z-B33)241,241,242
241 WS=4.0*TS*(cosd(teta)+sind (teta))
    GOTO 260
242 WS=2.0*TS*(cosd(teta)+sind (teta))
    GOTO 260
260 PST=-WS*FT
    AMST=PST*(Y1-(XU+Z))
    TPST=TPST+PST
    TAMST=TAMST+AMST
    RS=0.0035*(XU-X)/XU
265 TF=(TPC+TPSC)+TPST
    TM=TAMC+TAMSC+TAMST
    E=TM/TF
    P1=P/FCK

```

```

C=0.003/XU
c   C=1/R :la courbure
c   RS=0.004*(XU-X)/XU
c   RS :est la déformation correspondante a X
    RG=(TM/C)
c   RG est la rigidité effective de la section ou on appelle rigidité tangentielle
    Eb=(22000)*(((fck+8)/10)**0.3)
    Pcr=(9.85*RG)/(3000**2)
    rapp=TF/Fr
    TM2=TM*(1-(TF/Pcr))
c   TM2 est le moment tenu compte des effets de deuxième ordre selon ACI
    RG2=TM2/C
    alpha=(RG2-(ES*Is))/(Eb*Ib)
    Xumax=1.2*B
    alfa=-0.074+(0.0003*fck)+(0.488*rapp)-(0.002*10)
    alfamirza=0.47+0.003*(10.0)-(3.5*(E/B))/(1+(8*(E/B)))
    alfasarraf=0.38-0.011*10.0-1.3*(E/B)+(0.45*(1-(rapp**2)))
    ic=(Ib/A)**0.5
    lamda=3000.0/ic
    eta=E/(4*ic)
    if(eta.LT.0.2)THEN
    alfabonet=(1.95-(0.035*lamda))*(eta-0.2)+((fck/225.0)+0.11)
    ELSE
    alfabonet=(((fck/110.0)+0.45)*(0.2-eta))+((fck/225.0)+0.11)
    END IF
    rapp1=TF/(fck*A)
    eta1=0.3-1.91*(P/100)
    if(rapp1.GT.eta1)THEN
    alfavsar=0.062+(0.0022*FCK)+(0.854*RAPP1)+(10.802*P/100.0)
    ELSE
    alfavsar=0.257-(0.0033*FCK)+(0.602*RAPP1)+(13.874*P/100.0)
    END IF
    iF(X.LT.B7 )GOTO 35
    IF(D.LT.B11) GOTO 160
    IF(Z.LT.B24) GOTO 215
    WRITE(7,*)alfa,alfabonet,alfamirza,alfavsar
    IF(XU.LT.XUMAX) GOTO 8
    IF(P.LT.4.0) GOTO 7
    return
end

```

ANNEXE 2

LES VALEURS DE ' α ' ET LES PARAMETRES DE LA MATRICE D'ESSAI

Déformation ultime du béton $\varepsilon_{cu} = 3\%$

	α	$\rho(\%)$	f_{ck}	f_y	B1/B	θ	P/P0	L/B
1	0,30048	0,005	25	400	0,333333	45	0,62864	10
2	0,29204	0,01	25	400	0,333333	45	0,57676	10
3	0,2836	0,015	25	400	0,333333	45	0,53217	10
4	0,27515	0,02	25	400	0,333333	45	0,49345	10
5	0,26671	0,025	25	400	0,333333	45	0,45949	10
6	0,25826	0,03	25	400	0,333333	45	0,42949	10
7	0,24982	0,035	25	400	0,333333	45	0,40277	10
8	0,24137	0,04	25	400	0,333333	45	0,37883	10
9	0,17361	0,02	15	400	0,333333	45	0,41404	10
10	0,22693	0,02	20	400	0,333333	45	0,46095	10
11	0,27515	0,02	25	400	0,333333	45	0,49345	10
12	0,3194	0,02	30	400	0,333333	45	0,517	10
13	0,36041	0,02	35	400	0,333333	45	0,53461	10
14	0,39868	0,02	40	400	0,333333	45	0,54808	10
15	0,43458	0,02	45	400	0,333333	45	0,55855	10
16	0,46839	0,02	50	400	0,333333	45	0,56678	10
17	0,50033	0,02	55	400	0,333333	45	0,57328	10
18	0,53059	0,02	60	400	0,333333	45	0,57844	10
19	0,2316	0,02	25	200	0,333333	45	0,57129	10
20	0,25912	0,02	25	300	0,333333	45	0,52677	10
21	0,27515	0,02	25	400	0,333333	45	0,49345	10
22	0,28035	0,02	25	500	0,333333	45	0,46576	10
23	0,28093	0,02	25	600	0,333333	45	0,43782	10
24	0,13927	0,02	25	400	0	0	0,63435	10
25	0,35239	0,02	25	400	0	45	0,53299	10
26	0,34696	0,02	25	400	0,1	45	0,52581	10
27	0,32749	0,02	25	400	0,2	45	0,51044	10
28	0,28998	0,02	25	400	0,3	45	0,49777	10
29	0,24266	0,02	25	400	0,4	45	0,48657	10
30	0,18917	0,02	25	400	0,5	45	0,48606	10
31	0,13976	0,02	25	400	0,6	45	0,49691	10
32	0,21893	0,02	25	400	0,333333	15	0,59417	10
33	0,24903	0,02	25	400	0,333333	25	0,54718	10
34	0,26792	0,02	25	400	0,333333	35	0,50847	10
35	0,27515	0,02	25	400	0,333333	45	0,49345	10
36	0,24523	0,02	25	400	0,333333	65	0,59231	10

37	0,16076	0,02	25	400	0,333333	85	0,64567	10
38	0,31986	0,02	25	400	0,333333	45	0,49345	5
39	0,27515	0,02	25	400	0,333333	45	0,49345	10
40	0,20064	0,02	25	400	0,333333	45	0,49345	15
41	0,09633	0,02	25	400	0,333333	45	0,49345	20
42	0,03778	0,02	25	400	0,333333	45	0,49345	25
43	0,2017	0,02	25	400	0,333333	45	0,49345	30
44	-0,11184	0,02	25	400	0,333333	45	-0,21448	10
45	-0,10495	0,02	25	400	0,333333	45	-0,19256	10
46	-0,09462	0,02	25	400	0,333333	45	-0,16627	10
47	-0,08073	0,02	25	400	0,333333	45	-0,13629	10
48	-0,06326	0,02	25	400	0,333333	45	-0,10299	10
49	-0,0423	0,02	25	400	0,333333	45	-0,06658	10
50	-0,01804	0,02	25	400	0,333333	45	-0,02718	10
51	0,00918	0,02	25	400	0,333333	45	0,01499	10
52	0,03896	0,02	25	400	0,333333	45	0,05985	10
53	0,07087	0,02	25	400	0,333333	45	0,1074	10
54	0,10438	0,02	25	400	0,333333	45	0,15765	10
55	0,13892	0,02	25	400	0,333333	45	0,21058	10
56	0,17352	0,02	25	400	0,333333	45	0,26677	10
57	0,20673	0,02	25	400	0,333333	45	0,32735	10
58	0,23753	0,02	25	400	0,333333	45	0,39206	10
59	0,2648	0,02	25	400	0,333333	45	0,46068	10
60	0,28747	0,02	25	400	0,333333	45	0,53293	10