République Algerienne Démocratique et Populaire
ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique

Université Mustapha Ben Boulaid Batna –2–
Faculté des Mathématiques et d'Informatique

Département de Mathématiques
Laboratoire de techniques mathématiques, ltm

THÈSE

Présentée en vue d'obtenir le diplôme de doctorat
Option : Équations aux Dérivées Partielles et Applications.

Par
Sihame Brahimi

THÈME

ÉTUDE D'UN PROBLÈME MIXTE HYPERBOLIQUE CARACTÉRISTIQUE

Soutenue le : 8.06.2022
Devant le jury composé de :

Amar Youkana	Professeur	Université de Batna 2	**P**résident
Ahmed Zerrouk Mokrane	MCA	Université de Batna 2	**R**apporteur
Khaled Melkemi	Professeur	Université de Batna 2	**E**xaminateur
Mohamed Zerguine	Professeur	Université de Batna 2	**E**xaminateur
Salim Mesbahi	Professeur	Université de Setif	**E**xaminateur
Haoues Amrane	MCA	Université de Biskra	**E**xaminateur

Année Universitaire 2021-2022

Remerciements

Je tiens à exprimer tout d'abord toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse le Docteur Ahmed Zerrouk Mokrane pour m'avoir proposé ce sujet, pour son aide, son soutien et ses conseils, je le remercie infiniment pour sa constante disponibilité et son assistance dans tous les aspects de cette thèse.

Je tiens à remercier vivement Monsieur le professeur Amar Youkana qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.
Je suis très sensible à l'honneur que me font Messieurs, Pr.Khaled Melkmi de l'Université de Batna 2, Dr. Mohamed Zerguine de l'Université de Batna 2 , Dr.Salim Mosbahi de l'Université de Setif et Dr.Haoues Amrane de l'Université de Biskra, pour avoir accepté d'examiner ce travail de thèse et de participer au jury.

Je tiens aussi à remercier mes amis et mes collègues qui m'ont apporté leur aide et qui m'ont soutenu moralement tout au long de ces années d'études.

Je veux terminer ces remerciements pour ma famille, mon mari qui me soutiennent continuellement.
Enfin je voudrais rendre un vibrant hommage à mon père qui nous a quitté il y a quelque années et malheureusement à ma mère qui nous a quitté il y a deux mois. Cette thèse est dédiée à leur mémoire

Notations

$\partial_t, \frac{\partial}{\partial t}$:	dérivée partielle par rapport au variable de temps.
$\partial_j, \frac{\partial}{\partial x_j}$:	dérivée partielle par rapport au variable d'espace.
$\cdot$:	le produit scalaire .
$\mathscr{F}(u), \widehat{u}$:	la transformé de Fourier de u.
$\mathscr{S}$:	l'espace de Schwartz.
$\mathscr{S}'$:	l'espace des distributions tempérées .
H^s :	l'espace de Sobolev .
$W^{1,\infty}$:	l'espace des fonctions de régularité Lipschitz.
$\mathcal{M}_{p\times N}(\mathbb{R})$:	l'espace des matrices avec p lignes et N colonnes.
$\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$:	l'espace des matrices carrées d'ordre N.
B^* :	l'adjoint de la matrice B.
$\ker B$:	le noyau de la matrice B.

Table des matières

Introduction

La problématique du travail de la thèse consiste à faire une étude en direction des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre de type hyperbolique, en multi-dimension d'espace, dans un ouvert à bord que l'on couple avec des conditions homogènes et non homogènes sur le bord de l'ouvert ainsi que des conditions initiales sur l'hypersurface $\{t = 0\}$. Le cas traité est celui où l'opérateur des équations de l'intérieur est symétrisable au sens de Friedrichs et est caractéristique par rapport au bord de l'ouvert.

On considère L l'opérateur différentiel linéaire du premier ordre à coefficients variables dans le cas des systèmes de la forme suivante :

$$L(t, x, \partial_t, \partial_x)u := \partial_t u + \sum_{j=1}^{d} A_j(t, x)\partial_j u = F,$$

où la variable d'espace x vit dans un ouvert régulier Ω de $\mathbb{R}^d$ situé localement d'un seul coté de sa frontière $\partial\Omega$.

Pour simplifier l'exposé, par transport par cartes locales, on se place dans le cas où l'ouvert Ω est le demi-espace

$$\Omega : = \{x = (y, x_d), y = (x_1, \ldots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}, x_d > 0\},$$

$$\partial\Omega : = \{x \in \mathbb{R}^d \quad : x_d = 0\}.$$

Les coefficients $A_j = A_j(t, x)$ pour $j = 1 \ldots, d$, sont des fonctions définies dans $\mathbb{R} \times \Omega$ à valeurs dans l'espace des matrices réelles $N \times N$. L'inconnue $u(t, x)$ et le terme source $F(t, x)$ sont à valeurs dans $\mathbb{C}^N$.

Selon l'inversibilité de la matrice $A_d(t, x)$ sur le bord $\partial\Omega$ il y a deux cas :

- Le cas non caractéristique si la matrice est inversible pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$.

- Le cas caractéristique si la matrice est singulière qui est le cas traité dans cette thèse.

On s'intéresse ici à des conditions de bords générales de la forme

$$Bu_{|x_d=0} = G \qquad \text{sur} \quad \mathbb{R} \times \partial\Omega,$$

et des conditions initiales de la forme

$$u_{|t=0} = u_0 \qquad \text{dans} \quad \Omega,$$

où $B = B(t, y)$ est une matrice $p \times N$ à coefficients réels (l'entier p sera précisé plus loin) et $G = G(t, x)$, $u_0 = u_0(x)$ sont à valeurs vectorielles dans $\mathbb{C}^p$ et $\mathbb{C}^N$ respectivement.
Dans ce manuscrit on s'intéressera à des problèmes mixtes de la forme

$$\begin{cases} Lu = F & \text{dans} \quad [0, T] \times \Omega, \\ Bu = G & \text{sur} \quad [0, T] \times \partial\Omega, \\ u_{|t=0} = u_0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

Cette thèse se divise en deux majeures parties, qui sont autant de travaux menés à terme .

1. La problématique de la première partie est d'étudier les questions d'existence locale, d'unicité pour des problèmes mixtes Friedrichs symétrisable, caractéristique de multiplicité constante lorsque les coefficients de l'opérateur des équations de l'intérieur sont à régularité Lipschitz et la matrice de bord B satisfait une condition de structure minimale pour les problèmes mixtes, dite condition de Lopatinski uniforme (UKL) [13] qui joue un rôle crucial dans l'étude des problèmes mixtes hyperboliques. En effet, Kreiss [13] a démontré, dans le cas où l'opérateur est strictement hyperbolique avec des coefficients de classe $\mathcal{C}^\infty$, et des conditions aux limites non caractéristique, que la condition de Lopatinski uniforme (UKL) est nécessaire et suffisante pour que le problème (2.1) soit fortement bien posé dans L^2 (voir la Définition 1.3.2).
   Par fortement bien posé, on entend que le problème admet une unique solution qui vérifie une estimation d'énergie L^2 sans perte de dérivées avec les termes sources F, G , et u_0 en utilisant une outil algébrique appelé depuis ″symétriseur de Kreiss ‶[13].
   Ces questions ont également obtenu des éléments de réponse dans le cas non caractéristique avec des coefficients peu réguliers avec les travaux de Benzoni-Gavage et Serre [1], Coulombel JF [4] et Mokrane AZ [21] ou plus récemment G.Métivier [20] . Les obstacles inhérents à ce type de problème proviennent de la difficulté à établir que le problème soit bien posé dans L^2, car il faudra,

d'une part, justifier les produits des coefficients avec les dérivées des solutions dans les espaces de distributions appropriés, et d'autre part, établir des estimations à priori sans perte de dérivées. Pour affronter ces contraintes, nous devons faire appel à des techniques fines d'analyse fonctionnelle comme la théorie des opérateurs paradifférentiels de J.M. Bony [2] qu'il faudra adapter au contexte particulier envisagé.
Dans le cadre de la problématique de la première partie de la thèse, les résultats obtenus ont fait l'objet d'un article publié intitulé A Well-Posedness Result of a Characteristic Hyperbolic Mixed Problem (cf.[22]).

2. La seconde partie est consacrée à l'étude des questions d'existence locale, d'unicité pour un problème mixte caractéristique à coefficients constants pour lesquels la condition Kreiss-Lopatinskii uniforme n'est plus vérifiée . Plus particulièrement on s'intéressera à des problèmes mixtes qui satisfont à une version faible de cette condition. En effet, il a été montré notamment par Sablé-Tougeron [29] et Coulombel [5, 7] que, malgré le fait que la condition Kreiss-Lopatinskii uniforme ne soit pas vérifiée de façon uniforme, le problème aux limites peut être faiblement bien posé dans L^2. Par faiblement bien posé, on entend que la solution u du problème aux limites admet une estimation d'énergie avec perte de dérivées (la solution est moins régulière que les termes sources).
   Les problème aux limites de la classe WR (cf.la référence [6] pour la définition) sont des problème faiblement bien posés (dans la classe WR la différence de régularité est d'une dérivée sur le bord et d'une dérivée à l'intérieur).
   Le premier but fixé dans cette partie a été de généraliser le résultat obtenu par M.Eller [8] qui a considéré le cas des problème aux limites non caractéristique où l'opérateur L est hyperbolique à multiplicité constante. Notre résultat s'étend au cas caractéristique dans le cas où l'opérateur est symetrisable au sens de Friedrichs.
   La nouveauté réside dans le fait que en utilisant les idées de [16, 5, 10], nous n'invoquons pas de techniques supplémentaires comme le symetriseur de Kreiss.
   Le second but dans cette partie a été de prolonger l'analyse à un problème mixte avec une donnée initiale non nulle où la variable du temps vit dans $[0, T]$. Ce résultat a fait l'objet d'un article publié intitulé Weakened Well-Posedness of a Hyperbolic Characteristic Boundary Value Problem (cf.[23]) et beaucoup d'aspects de ce thème restent des questions encore ouvertes .

Notre travail de thèse se présente en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans les différents chapitres ; nous rappelons le calcul paradifferentiel de J.M. Bony [2], et enfin nous présentons quelques notions et des résultats préliminaires ; essentiellement des rappels de techniques utilisées dans les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre comporte deux principaux résultats. Dans le premier résultat, nous donnons une démonstration complète du caractère fortement bien posé pour des problèmes mixtes à coefficient Lipschitz qui satisfont la condition Kreiss-Lopatinskii uniforme. Cette démonstration se décompose en quelque étapes. On établit d'abord des estimations a priori pour des solutions régulières du problème (0.1) sans conditions initiales. Ensuite on construit une solution faible du problème aux limites et on conclut que la solution faible est en fait une solution forte au sens que l'on précisera par la suite et enfin la résolution du problème mixte (0.1) homogène ($u_0 = 0$) et non homogène ($u_0 \neq 0$).

Dans le second résultat, nous montrons en outre que les problèmes mixtes à coefficient Lipschitz qui satisfont la condition Kreiss-Lopatinskii uniforme est fortement bien posé même pour $F \in L^1([0,T], L^2(\Omega))$.

Dans le troisième chapitre, nous abordons la deuxième partie de notre travail. Elle concerne l'étude du caractère faiblement bien posé pour des problèmes mixtes à coefficients constants qui satisfont une version affaiblie de la condition de Kreiss-Lopatinski uniforme, notée s-WKL (voir Définition 3.1.1).

1 Préliminaires

1.1 Espaces fonctionnels utilisés

Dans toute la suite, on considérera l'ouvert

$$\Omega: \ = \{x = (y, x_d), y = (x_1, \ldots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}, x_d > 0\},$$

de bord

$$\partial\Omega: \ = \{x \in \mathbb{R}^d \quad : x_d = 0\}.$$

On notera $Q = \mathbb{R} \times \Omega$ et $\Sigma = \mathbb{R} \times \partial\Omega$. Pour $T > 0$ fixé, on définit aussi $Q_T = [0, T] \times \Omega$ et $\Sigma_T = [0, T] \times \partial\Omega$.

Definition 1.1.1. *(Espace de Sobolev) Pour $s \in \mathbb{R}$ et $\gamma \geqslant 1$ on définit l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées u muni de la norme*

$$\|u\|^2_{s,\gamma} := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{2s,\gamma}(\xi) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi, \quad \lambda^{s,\gamma}(\xi) := (\gamma^2 + |\xi|^2)^{s/2},$$

où $\hat{u}$ désigne la transformé de Fourier de u .

X étant Q où Σ, on définit l'espace de Sobolev $H^s_\gamma(X) = e^{\gamma t} H^s(X)$ muni de la norme $\|u\|_{H^s_\gamma(\Sigma)} := \|e^{-\gamma t} u\|_{s,\gamma}$.
On définit aussi l'espace $L^2\big(\mathbb{R}_+, H^s(\Sigma)\big)$ muni de la norme

$$|||u|||^2_{s,\gamma} := \int_{\mathbb{R}_+} \|u(., x_d)\|^2_{s,\gamma} dx_d. \tag{1.1}$$

Dans le cas $s = 0$, on note par $L^2_\gamma(\Sigma)$ l'espace $H^0_\gamma(\Sigma) :=$ et par $L^2_\gamma(Q)$ l'espace $L^2\big(\mathbb{R}_+, H^0_\gamma(\Sigma)\big)$.

On considère l'opérateur différentiel L défini par

$$L(t,x,\partial_t,\partial_x) := \frac{\partial .}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} A_j(t,x)\frac{\partial .}{\partial x_j} \tag{1.2}$$

Pour tout $\gamma \geqslant 0$, on définit L_γ l'opérateur différentiel $e^{\gamma t}Le^{-\gamma t} := L + \gamma I_N$.
Tout au long de cette thèse, nous utiliserons l'espace

$$\mathscr{H}_\gamma(Q) = \{v \in L^2_\gamma(Q) \colon L_\gamma v \in L^2(Q)\}.$$

Nous rappelons un résultat qui sera essentiel pour la suite.

Lemme 1.1.2. *L'espace $\mathcal{C}_0^\infty(\overline{Q})$ est dense dans $\mathscr{H}_\gamma(Q)$ et l'opérateur de trace $u \to A_d u_{|\Sigma}$ est bien défini et continu de $\mathscr{H}_\gamma(Q)$ à valeurs dans $H_\gamma^{-1/2}(\Sigma)$.*

On renvoie à [3, 28] pour une démonstration dans le cas $\gamma = 0$.

1.2 Calcul paradifferentiel à paramètre

Comme la régularité des coefficients est limitée, nous allons utiliser le calcul paradifférentiel de J.M. Bony [2]. Nous rappelons dans ce qui suit l'essentiel des résultats à utiliser de la théorie inspirés de la version du calcul symbolique à paramètre que l'on pourra trouver dans les références [21, 17].

1.2.1 Calcul paradifferentiel à paramètre dans $\mathbb{R}^d$

Definition 1.2.1 (Classe des symboles paradiffèrentiels $\Gamma_k^m(\mathbb{R}^d)$, $k = 0,1$)**.** *Soit $m \in \mathbb{R}$, on désigne par $\Gamma_0^m(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\Gamma_1^m(\mathbb{R}^d)$) l'espace des fonctions $a : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [0,+\infty[\to \mathbb{C}$, $(x,\xi,\gamma) \to a(x,\xi,\gamma)$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$ en $\xi \in \mathbb{R}^d$ et vérifient : pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, il existe $C_\alpha > 0$ pour lequel :*

$$\forall (\xi,\gamma) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^* \quad \left\| \partial_\xi^\alpha a(.,\xi,\gamma) \right\|_{L^\infty} \leqslant C_\alpha \lambda^{m-|\alpha|,\gamma}(\xi), \tag{1.3}$$

resp : $\quad \left\| \partial_\xi^\alpha a(.,\xi,\gamma) \right\|_{W^{1,\infty}} \leqslant C_\alpha \lambda^{m-|\alpha|,\gamma}(\xi).$

Definition 1.2.2 (Classe des symboles paradifférentiels $\Sigma_k^m(\mathbb{R}^d)$, $k=0,1$). *On désigne par $\Sigma_0^m(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\Sigma_1^m(\mathbb{R}^d)$) l'espace des fonctions $a \in \Gamma_0^m(\mathbb{R}^d)$ (resp. $a \in \Gamma_1^m(\mathbb{R}^d)$) telles que pour $\varepsilon \in]0,1[$ satisfont à la propriété*

$$\forall(\xi,\gamma), \quad Supp\mathcal{F}_x a(.,\xi,\gamma) \subset \left\{\zeta \in \mathbb{R}^d / |\zeta| \leqslant \varepsilon(\gamma^2+|\xi|^2)^{1/2}\right\}.$$

où $\mathcal{F}_x$ désigne l'opérateur de Fourier relativement à la première variable.

Remarque 1.2.3. *Les symboles $a \in \Sigma_k^m(\mathbb{R}^d)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ en (x,ξ) et par conséquent a appartient à la classe de symboles de Hörmander $S_{1,1}^m$ [11] et on peut définir l'opérateur pseudo-différentiel $Op^\gamma(a)$ associé à a par la formule :*

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad Op^\gamma(a)u := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi,\gamma)\widehat{u}(\xi)d\xi.$$

Definition 1.2.4. *Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\gamma \geqslant 1$. On dira que la famille d'opérateurs $\{P^\gamma\}$ est d'ordre $\leqslant m$ si :*
Pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante C_s telle que

$$\forall \gamma \geqslant 1, \quad \forall u \in H^{s+m}(\mathbb{R}^d), \|P^\gamma u\|_{s,\gamma} \leqslant C_s\|u\|_{s+m,\gamma}.$$

Théorème 1.2.5. *Pour $a \in \Sigma_k^m(\mathbb{R}^d)$, $m \in \mathbb{R}$, la famille des opérateurs $\{Op^\gamma(a)\}$ est d'ordre $\leqslant m$.*

Étant donné un symbole dans la classe $\Gamma_k^m(\mathbb{R}^d)$, il est possible de réaliser un symbole dans la classe $\Sigma_k^m(\mathbb{R}^d)$ à travers la construction suivante :

Definition 1.2.6. *Soit $\psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$:*

$$\forall(\zeta,\xi,\gamma) \quad \left|\partial_\zeta^\alpha \partial_\xi^\beta \psi(\zeta,\xi,\gamma)\right|_{L^\infty} \leqslant C_{\alpha,\beta}\lambda^{-|\alpha|-|\beta|,\gamma}(\xi).$$

On dit que ψ est admissible si il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tel que $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<1$ vérifiant

$$\psi(\zeta,\xi,\gamma)=1 \quad si \quad |\zeta| \leqslant \lambda^{1,\gamma}(\xi) \quad ,$$
$$\psi(\zeta,\xi,\gamma)=0 \quad si \quad |\zeta| \geqslant \lambda^{1,\gamma}(\xi).$$

Proposition 1.2.7. *Soit $a \in \Gamma_k^m(\mathbb{R}^d)$ et ψ une fonction admissible. Posons*

$$\sigma_a^\chi(x,\xi,\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} K^\psi(x-y,\gamma)a(y,\xi,\gamma)dy$$

où K^ψ est la transformée de Fourier inverse de $\psi(.,\xi,\gamma)$. Alors

1. *$\sigma_a^\chi \in \Sigma_k^m(\mathbb{R}^d)$.*
2. *Si $\Gamma_1^m(\mathbb{R}^d)$, alors $a - \sigma_a^\chi \in \Gamma_0^{m-1}(\mathbb{R}^d)$ et si ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions admissibles alors $\sigma_a^{\chi_1} - \sigma_a^{\chi_2} \in \Sigma_0^{m-1}(\mathbb{R}^d)$*

Definition 1.2.8. *Soit $a \in \Gamma_1^m(\mathbb{R}^d)$ et ψ une fonction admissible. On définit l'opérateur paradifférentiel $T_a^{\gamma,\chi}$ par la formule*

$$T_a^{\gamma,\chi} = Op^\gamma(\sigma_a^\chi).$$

L'opérateur $T_a^{\gamma,\chi}$ est d'ordre $\leqslant m$.

Proposition 1.2.9. *Pour $a \in \Gamma_1^m(\mathbb{R}^d)$ et χ_1, χ_2 deux fonctions admissible, on a $T_a^{\gamma,\chi_1} - T_a^{\gamma,\chi_2}$ d'ordre $\leqslant m-1$.*

Compte tenu la proposition ci-dessus, nous fixons sans perte de généralité, la même fonction admissible pour tous les opérateurs paradifférentiels considérés et par la suite, on omettra donc l'exposant *chi* dans $T_a^{\gamma,\chi}$.
L'intérêt de l'utilisation du calcul paradifférentiel de J.M. bony, dans ce cadre vient du fait que l'on dispose d'un calcul symbolique résumé dans la proposition suivante

Proposition 1.2.10.
1. *Soient $a \in \Gamma_1^m$ et $b \in \Gamma_1^{m'}(\mathbb{R}^d)$, alors $ab \in \Gamma_1^{m+m'}(\mathbb{R}^d)$ et $T_a^\gamma \circ T_b^\gamma - T_{ab}^\gamma$ d' ordre $\leqslant m+m'-1$.*
2. *Soit $a \in \Gamma_1^m(\mathbb{R}^d)$, alors $(T_a^\gamma)^* - T_{a*}^\gamma$ d'ordre $\leqslant m-1$.*

Remarque 1.2.11. *Chaque fonction a dans $W^{1,\infty}$ peut être considérée comme un élément du classe Γ_1^0, et la multiplication avec a définit un opérateur linéaire borné dans L^2.*

De plus, si l'on compare l'opérateur de multiplication avec a et T_a^γ et nous avons le résultat très important suivant :

Théorème 1.2.12. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $a \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\gamma \geqslant 1$, on ait :*

$$\|au - T_a^\gamma u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C}{\gamma}\|a\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)}\|u\|_{L^2(Q)},$$
$$\|a\partial_{x_k}u - T_a^\gamma \partial_{x_k}u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|a\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad k = 0,1,\cdots,d-1, \quad \partial_{x_0} := \partial_t.$$

1.2.2 Calcul paradifférentiel à paramètre dans le demi espace $\mathbb{R}\times\Omega$

Le calcul paradifférentiel présenté ci-dessus est attaché aux symboles définis par rapport aux variables tangentielles $(t,y) \in \Sigma = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}$. On l'étend au demi-espace $Q = \mathbb{R}\times\Omega$, en introduisant la variable x_d jouant le rôle de paramètre [21, 17, 4]).

Definition 1.2.13. *Soit $m \in \mathbb{R}$, on désigne par $\Gamma_k^m(Q)$, pour $j = 0,1$ l'espace des fonctions $a(t,y,x_d,\eta,\gamma)$ qui définit sur $Q\times\mathbb{R}^d\times[1,+\infty[$ tel que l'application $x_d \mapsto a(.,x_d,.)$ est bornée dans $\Gamma_k^m(\mathbb{R}^d)$.*

On définit l'opérateur paradifférentiel T_a^γ par la formule

$$\forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{Q}), \forall x_d \geqslant 0, (T_a^\gamma u)(.,x_d) := T_{a(.,x_d)}^\gamma u(.,x_d).$$

En utilisant le Théorème 1.2.12 et en intégrant par rapport à $x_d \geqslant 0$, il vient

Théorème 1.2.14. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $a \in W^{1,\infty}(Q)$, $u \in L^2(Q)$, $\gamma \geqslant 1$, on ait :*

$$\|au - T_a^\gamma u\|_{L^2(Q)} \leqslant \frac{C}{\gamma}\|a\|_{W^{1,\infty}(Q)}\|u\|_{L^2(Q)},$$
$$\|a\partial_{x_k}u - T_a^\gamma \partial_{x_k}u\|_{L^2(Q)} \leqslant C\|a\|_{W^{1,\infty}(Q)}\|u\|_{L^2(Q)}, \quad k = 0,1,\cdots,d-1, \quad \partial_{x_0} := \partial_t.$$

Remarque 1.2.15. *Les opérateurs paradifferentiels utilisés s'étendent de façon naturelle aux fonctions à valeurs vectorielles ou matricielles. On adoptera sans perte de généralité les mêmes notations pour ce type d'opérateurs.*

1.2.3 L'inégalité de *Gärding*

Enfin, on aura besoin de l'inégalité de *Gärding*. On présente ici dans la version à paramètre dans le cas matriciel.

Proposition 1.2.16. *Considérons la fonction matricielle* $(x,\xi,\gamma) \to a(x,\xi,\gamma)$ *à valeurs dans l'espace des matrices* $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ *de régularité* $\Gamma_1^m(\mathbb{R}^d)$. *Supposons que il existe* $C_0 > 0$ *tel que :*

$$\begin{aligned}&\forall (x,\xi,\gamma) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [1,+\infty[\\ &\Re e a(x,\xi,\gamma) := \frac{1}{2}(a(x,\xi,\gamma) + a^*(x,\xi,\gamma)) \geqslant C_0 \lambda^{m,\gamma}(\xi) I_{\mathbb{C}^N}.\end{aligned}$$

Alors pour $0 < C < C_0$ *il existe* $\gamma_0 \geqslant 1$ *tel que*

$$\forall \gamma \geqslant \gamma_0, \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \qquad \Re e \langle T_a^\gamma u, u\rangle_{L^2} \geqslant C\,\|u\|^2_{m/2,\gamma}.$$

1.3 Les problèmes mixtes fortement bien posés et faiblement bien posés dans L^2

En premier lieu on introduit la notion de fortement bien posé pour des problèmes mixtes non caractéristiques (cas où la matrice A_d est inversible).

Definition 1.3.1. *On dit que le problème* (0.1) *est fortement bien posé dans* L^2 *dans le cas non caractéristique si l'estimation suivante est satisfaite pour toute solution* u *assez régulière et pour un paramètre* γ *assez grand*

$$\begin{aligned}\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q_T)} \quad &+ \quad \|u_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_T)} + e^{-2\gamma T}\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant \quad C\left(\frac{1}{\gamma}(\|Lu\|^2_{L^2_\gamma(Q_T)} + \|Bu_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_T)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Par contre, dans le cas caractéristique (cas où la matrice A_d est singulière) avec $ker A_d \subset ker B$, la trace de la solution sur le bord n'est pas assurée dans L^2. Le meilleur contrôle que nous pourrions avoir est celui de la trace de $A_d u$ (le contrôle de la composante de u relativement au noyau de A_d). Par conséquent, nous devons adapter la définition comme suit :

Definition 1.3.2. *On dit que le problème (0.1) est fortement bien posé dans L^2 dans le cas caractéristique si l'estimation suivante est satisfaite pour tout u assez régulière et pour un paramètre γ assez grand*

$$\begin{aligned}\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q_T)} &+ \|A_d u_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_T)} + e^{-2\gamma T}\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}(\|Lu\|^2_{L^2_\gamma(Q_T)} + \|Bu_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_T)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

La notion de problèmes faiblement bien posés dans L^2 dans le cas caractéristique signifie que le problème (0.1) admet une unique solution u dans L^2, moins régulière que les données du problème F, G et u_0 où seulement la trace $A_d u_{|x_d=0}$) reste dans L^2 et satisfait une estimation avec perte des dérivées par rapport aux termes sources.

1.4 Les problèmes mixtes caractéristiques à coefficients Lipschitz de bord strictement dissipatif

Le problème que l'on va considérer dans le paragraphe suivant s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} Lu = \partial_t u + \sum_{j=1}^{d} A_j(t,x)\partial_j u = F & \text{dans} \quad [0,T]\times\Omega, \\ B(t,y)u = G & \text{sur} \quad [0,T]\times\partial\Omega, \\ u_{|t=0} = u_0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

où B est une matrice de type $p \times N$.

Il existe un cadre particulier pour lequel l'étude du problème (1.4) est grandement facilité. Ce cadre est celui de systèmes symétrisables et qui admettent des conditions de bords strictement dissipatives, voir par exemple [14, 18, 1]. On fait les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1.4.1. *On dit que l'opérateur L est symétrisable au sens de Friedrichs (ou simplement Friedrichs symétrisable) si pour tout $(t,x) \in \overline{Q}$, il existe une matrice $S_0(t,x)$, définie positive et symétrique telle que les matrices $S_0(t,x)A_j(t,x)$, pour $j = 1,\ldots,d$, soient aussi symétriques*

Hypothèse 1.4.2. *Pour tout* $(t, y) \in \Sigma$ *la matrice* $B(t, y)$ *est de rang maximal* $p \times N$ *où* p *est le nombre des valeurs propres positives de la matrice* A_d*, et satisfait* $\ker A_d \subset \ker B$.

Hypothèse 1.4.3. *Le problème* (1.4) *est caractéristique , c'est à dire que la matrice* $A_d(t, x)$ *est singulière sur* Σ.

On précise dans la définition suivante ce que l'on entend par strictement dissipatif pour une condition de bord.

Definition 1.4.1. *La matrice de bord* B *est qualifiée de strictement dissipative pour* Σ *du problème* (1.4) *si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. $\forall w \in \ker B, w \neq 0, \langle A_d w, w \rangle < 0.$
2. $\ker B$ *est maximal (au sens de l'inclusion) pour la propriété 1.*
3. *La matrice* B *est surjective de* $\mathbb{C}^N$ *dans* $\mathbb{C}^p$ *où* p *est le nombre de valeurs propres positives de* A_d.

Dans la suite de cette thèse, on utilisera aussi la formulation équivalente suivante de la stricte dissipativité :

Proposition 1.4.2. *La matrice de bord est strictement dissipative, si et seulement si, il existe* $\alpha \geqslant 0$ *et* $\beta \geqslant 0$ *tel que pour tout* $(t, y) \in \mathbb{R}^d$ *et* $w \in \mathbb{C}^N$:

$$\alpha |w|^2 + \langle S_0 A_d w, w \rangle \leqslant \beta |Bw|,$$

voir le Lemme 3.3 de [1] pour une démonstration dans le cas non caractéristique .

Hypothèse 1.4.4. *Pour tout* $(t, y) \in \Sigma$ *la matrice de bord* $B(t, y)$ *est strictement dissipative .*

Maintenant nous rappelons le théorème suivant :

Théorème 1.4.3. *Supposons que les matrices* $A_j, S_0 \in W^{1,\infty}(Q)$, *et* $B \in W^{1,\infty}(Q)$. *Supposons que les hypothèses 1.4.1-1.4.4 soient aussi satisfaites. Alors pour tout* $T > 0$, *il existe des constantes* $\gamma_0 \geqslant 1$ *et* $C > 0$ *tels que pour tout* $F \in L^2_\gamma(Q_T)$, $G \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$ *et* $u_0 \in L^2(\Omega)$, *le problème (1.4) admet une unique solution* $u \in L^2_\gamma(Q_T)$ *telle que* $u_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$. *En outre,* $u \in C^0([0,T], L^2_\gamma(\Omega))$ *et pour tout* $0 < t \leqslant T$ *on a :*

$$e^{-2\gamma t}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|A_d u_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|G\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{1.5}$$

On pourra trouver une démonstration de ce théorème dans [18] dans le cas à coefficients constants, et dans [1] dans le cas à coefficients variables peu réguliers.

1.5 Les problèmes mixtes non caractéristiques à coefficients Lipshiz de bord satisfait la condition Kreiss-Lopatinskii uniforme

Benzoni-Gavage-Serre [1] a montré que les problèmes mixtes symétrisables au sens de Friedrichs à coefficients Lipshiz, de bord strictement dissipatif ne sont pas les seuls à vérifier une estimation de la forme (1.5). En d'autre termes on étudie des problèmes mixtes où la matrice de bord B satisfait une condition de structure minimale, dite la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme (UKL) dont nous allons donner une définition dans le sous paragraphe 1.5.1.
Dans cette section on considère le problème (1.4) satisfaisant aux hypothèses suivantes :

Hypothèse 1.5.1. *La matrice* A_d *est inversible sur* Σ.

On suppose aussi que le problème (1.4) est Friedrichs symétrisable (l'hypothèse 1.4.1).

Hypothèse 1.5.2. *La matrice de bord $B(t,y)$ satisfait la condition Kreiss-Lopatinskii uniforme.*

1.5.1 La condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme

Soit $\xi = (\eta, \xi_d)$ la variable de fréquence d'espace et σ la variable de fréquence du temps. On introduit les espace de fréquences :

$$\Xi = \left\{ z = (t,x,\tau,\eta) : (t,x) \in Q, (\tau,\eta) \in \mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}^{d-1} \backslash (0,0) \right\},$$

$$\Xi_0 = \left\{ z = (t,y,\tau,\eta) : (t,y) \in \Sigma, (\tau,\eta) \in \mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}^{d-1} \backslash (0,0) \right\}.$$

$$\mathbb{C}^+ := \{\tau = \gamma + i\sigma \in \mathbb{C} : \Re e(\tau) = \gamma \geqslant 0\}, \tag{1.6}$$

On introduit aussi Ξ_1,

$$\Xi_1 = \Xi \cap \{\gamma = 0\},$$

On aura besoin de considérer le problèmes aux limites globaux en temps :

$$\begin{cases} Lu = \partial_t u + \sum_{j=1}^{d} A_j(t,x)\partial_j u = F \qquad \text{dans} \quad Q, \\ B(t,y)u = G \qquad \text{sur} \quad \varSigma. \end{cases} \tag{1.7}$$

En opérant une transformation de Fourier relativement aux variables d'espace tangentielle (t,y) et une transformation de Laplace relativement à la variable temporelle t, le système (1.7) s'écrit sous la forme d'une équation différentielle ordinaire relativement à la variable normale x_d

$$\begin{cases} \partial_d v = \mathscr{A}(z)\, v + A_d^{-1} F \qquad \text{dans} \quad Q, \\ B(t,y)v = G \qquad \text{sur} \quad \varSigma, \end{cases} \tag{1.8}$$

avec pour tout $z \in \Xi$ la matrice résolvante est définie par

$$\mathscr{A}(z) = -A_d^{-1}\left(\tau I_N + iA(t,x,\eta)\right). \tag{1.9}$$

où $A(t,x,\eta) = \sum_{j=1}^{d-1} A_j(t,x)\xi_j$

Pour $z \in \Xi$, on notera $\mathbb{E}_-(z)$ (resp. $\mathbb{E}_+(z)$) le sous-espace stable (resp. instable) du système différentiel (1.8) pour $F = 0$.

Definition 1.5.1. *La matrice de bord B satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme (UKL) pour le système (1.7) si*

$$\exists\, C > 0, \forall z \in \Xi_0 \quad \big(v \in \mathbb{E}_-(z)\big) \quad \Rightarrow \quad |v| \leqslant C|B(t,y)v|\big).$$

Lemme 1.5.2. *[12] Pour tout $z \in \Xi \backslash \Xi_1$, la matrice résolvante $\mathscr{A}(z)$ n'admet pas de valeur propre imaginaire pure. De plus, le sous-espace stable $\mathbb{E}_-(z)$ est de dimension p. Le sous espace instable est lui de dimension $N-p$ et on a la décomposition suivante :*

$$\forall z \in \Xi \backslash \Xi_1 \quad \mathbb{E}_-(z) + \mathbb{E}_+(z) = \mathbb{C}^N.$$

Cependant dans le cas, $z \in \Xi_1$ le lemme précédent n'est plus suffisant pour décrire la forme de matrice $\mathscr{A}(z)$. On a besoin d'un autre résultat. Ce dernier est initialement dû à Kreiss puis a été généralisé par Métivier aux systèmes hyperboliques à multiplicité constante [19] (Pour notre problème L est Friedrichs symétrisable).

Théorème 1.5.3 (*Condition de structure par blocs,*[19]). *Si le problème aux limites vérifie les hypothèses 1.4.1 et 1.5.1, alors pour tout $z \in \Xi$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de z dans Ξ, un entier positif p, des entiers $\nu_1, \cdots, \nu_p$ positifs vérifiant $N = \nu_1 + \cdots + \nu_p$ et enfin une matrice $T(z)$ inversible et régulière sur $\mathcal{V}$ tels que*

$$\forall z \in \Xi \quad T^{-1}(z)\mathscr{A}(z)T(z) = diag\left(Q_1(z), \cdots, Q_p(z)\right),$$

où les Q_j sont des matrices de taille ν_j satisfaisant l'une des alternatives suivantes :
i) Tous les éléments dans le spectre de $Q_j(z)$ ont une partie réelle strictement négative.
ii) Tous les éléments dans le spectre de $Q_j(z)$ ont une partie réelle strictement positive.
iii) $\nu_j = 1$, $Q_j \in i\mathbb{R}$ et

$$\partial_\gamma Q_j(z) \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

iv) $\nu_j > 1$, il existe $\zeta_j \in i\mathbb{R}$ tel que la matrice $Q_j(z)$ s'écrit sous la forme :

$$Q_j(z) = \begin{bmatrix} \zeta_j & i & 0 \\ & \ddots & i \\ 0 & & \zeta_j \end{bmatrix},$$

où le coefficient en bas à gauche de $\partial_\gamma Q_j(z)$ est un réel non nul.

Nous rappelons le théorème suivant :

Théorème 1.5.4. *[1] Supposons que les matrices $A_j, S_0 \in W^{1,\infty}(Q)$, et $B \in W^{1,\infty}(Q)$. Supposons que les hypothèses 1.4.1-1.5.1-1.4.3 et 1.5.2 soient aussi satisfaites. Alors pour tout $T>0$, il existe des constantes $\gamma_0 \geqslant 1$ et $C>0$ tels que pour tout $F \in L^2_\gamma(Q_T)$, $G \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, le problème (1.4) admet une unique solution $u \in L^2_\gamma(Q_T)$ telle que $u_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$. Par ailleurs, $u \in C^0([0,T], L^2_\gamma(\Omega))$ et pour tout $0<t\leqslant T$ on a :*

$$e^{-2\gamma t}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|u_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|G\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right), \tag{1.10}$$

Maintenant, on précise les grandes lignes dans la démonstration pour faciliter la compréhension du chapitre 2 qui traite le cas plus difficile (le cas caractéristique) .
• L'établissement d'une estimation d'énergie a priori sans perte de régularité pour des solutions régulières u du problème c'est à dire pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty_0(\overline{Q})$ on a :

$$\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q)} + \|u_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|Lu\|^2_{L^2_\gamma(Q)} + \|Bu_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma)}\right). \tag{1.11}$$

Cette estimation a été établie par plusieurs auteurs. On peut citer H.O.Kreiss [13] (voir aussi Chazarain- Piriou [3]) pour des opérateurs L strictement hyperboliques à coefficients de classe $\mathcal{C}^\infty$ où la condition Kreiss-Lopatinskii uniforme est satisfaite. En un certain sens, Kreiss se ramène au cas symétrique à conditions de bord strictement dissipatives c'est-à-dire qu'il construit un outil appelé ″symétriseur de Kreiss‶, S qui permet de compenser le manque de dissipativité des conditions de bord et la symétrie des matrices A_j .
AZ. Mokrane [21] a amélioré ce résultat en supposant que les coefficients variables peu réguliers ($A_j \in W^{1,\infty}(Q), B \in W^{1,\infty}(\Sigma)$) et en utilisant paradifférentiel de J.M.Bony [2] qui à l'avantage de mieux contrôler le manque de régularité.
G.Métivier [17] a étendu le résultat de Kreiss [13] à des opérateurs L à coefficients de classe $\mathcal{C}^\infty$ où la matrice résolvante (1.9) satisfait la condition de structure par blocs (Théorème 1.5.3).
Benzoni-Gavage et Serre [1] a amélioré le résultat de [17] en supposant que les coefficients variables peu réguliers.
Sans entrer dans les détails de la preuve de l'estimation qui est assez technique (voir Théorème 9.6 de [1]).
• La construction d'une solution faible et on conclut que la solution faible est une solution forte (voir Théorème 9.17 de [1]).

• La résolution du problème mixte (1.4) homogène et non homogène (voir Théorème 9.19 de [1]).

1.5.2 Symétriseur de Kreiss

Maintenant, on précise les hypothèses qui permettent de construire ce symétriseur dans sa version globale dans les cas des coefficients à régularité Lipschitz. On renvoie aux références [21, 1] pour une démonstration détaillée.

Théorème 1.5.5 ([21, 1]). *Soit $z \in \Xi$. Sous les hypothèses suivantes :*

1. *La matrice symbole $\mathscr{A}(z)$ satisfait la condition structure par blocs (théorème 1.5.3).*
2. *La matrice B est de rang maximal p où p nombre de valeurs propres positives de la matrice A_d.*
3. *La condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme est satisfaite.*

Alors il existe un symbole matriciel symétrique $S(z)$ de degré 0 et régularité 1 , appelé symétriseur de Kreiss ayant les propriétés suivantes
Il existe une ensemble fini des matrices $(V_i(z))_i$, telles que

$$\Re e(S(z)\mathcal{A}(z)) = \sum_i V_i^*(z) \begin{pmatrix} \gamma H_i(z) & 0 \\ 0 & E_i(z) \end{pmatrix} V_i(z), \tag{1.12}$$

où $V_i(z)$ et $H_i(z)$ sont des symboles homogènes de degré 0 en (τ,η) et de régularité Γ_1^0), $E_i(z)$ sont des symboles homogènes de degré 1 en (τ,η) et de régularité Γ_1^1. En outre, on a les inégalités

$$\sum_i V_i^*(z)V_i(z) \geqslant CI, \quad H_i(z) \geqslant CI_p, \quad E_i(z) \geqslant C(\gamma^2+|\eta|^2)^{1/2} I_{N-p}. \tag{1.13}$$

De plus, il existe des constantes $C>0, C'>0$ telles que, pour tout $z \in \Xi_0$ on ait

$$S(z) \geqslant CI_N - C'B^*(t,y)B(t,y). \tag{1.14}$$

2 Problèmes mixtes caractéristiques avec la condition Kreiss-Lopatinskii uniforme

Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans la revue *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications (JPDO)*, [22]

2.1 Description du problème.

Nous allons étudier le problème mixte de la forme :

$$\begin{cases} Lu = \partial_t u + \sum_{j=1}^{d} A_j(t,x)\partial_j u = F \qquad \text{dans} \quad Q_T, \\ Bu = G \qquad \text{sur} \quad \Sigma_T, \\ u_{|t=0} = u_0 \qquad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où les données $F(t,x), u_0(x)$ ainsi que l'inconnue $u(t,x)$ sont à valeurs vectorielles dans $\mathbb{C}^N$. B est une matrice de type $p \times N$ et $G(t,x)$ est à valeurs vectorielles dans $\mathbb{C}^p$.

2.1.1 Hypothèses

On fait les hypothèses suivantes :

Hypothèse 2.1.1. *L'opérateur L est Friedrichs symétrisable, c'est à dire que pour* *tout* $(t,x) \in \overline{Q}$, *il existe une matrice* $S_0(t,x)$, *définie positive, symétrique et telle que les matrices* $S_0(t,x)A_j(t,x)$, *pour* $j = 1,\dots,d$, *soient aussi symétriques.*

Hypothèse 2.1.2. *Le problème* (2.1) *est caractéristique de multiplicité constante , c'est à dire que pour tout* $(t,x) \in \overline{Q}$ *la matrice* $A_d(t,x)$ *est singulière et de rang constant* $N-m$. *Moyennant une transformation linéaire, on supposera que* $A_d(t,x)$ *est de la forme*

$$A_d(t,x) = \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ 0 & a_d(t,x) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

où $a_d(t,x)$ *est une matrice inversible sur* $\overline{Q}$.

Correspondant à cette représentation, l'inconnue u s'écrit sous la forme (u^I, u^{II}), où u^{II} est à valeurs dans $\mathbb{C}^{N-m}$, qu'on appellera la partie non caractéristique de u et u^I est à valeurs dans $\mathbb{C}^m$, qu'on appellera la partie caractéristique de u.

Hypothèse 2.1.3. *Pour tout* $(t,x) \in Q$ *et* $\xi \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$, *avec* $\xi \neq 0$, *la matrice symbole*

$$A(t,x,\xi) := \sum_{j=1}^{d} A_j(t,x)\xi_j := A(t,x,\eta) + A_d(t,x)\xi_d,$$

admet une valeur propre $\lambda \equiv 0$ *de multiplicité* m.

L'hypothèse 2.1.3 implique que la matrice $A(t,x,\eta) = \sum_{j=1}^{d-1} A_j(t,x)\xi_j$ admet une décomposition par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} 0_m & a_{1,2}(t,x,\eta) \\ a_{2,1}(t,x,\eta) & a_2(t,x,\eta) \end{pmatrix}, \quad (t,x) \in Q, \eta \in \mathbb{R}^{d-1}. \tag{2.3}$$

(voir Benzoni Gavage et Serre [1] pour davantage de détails.)

Hypothèse 2.1.4. *Pour tous* $(t,x) \in \Sigma$ *la matrice* $B = B(t,y)$ *est de rang maximal* p *où* p *est le nombre des valeurs propres positives de la matrice* A_d, *et satisfait* $\ker A_d \subset \ker B$. *Pour cela après une transformation linéaire on suppose que la matrice* B *sous la forme* $B = (0_{p\times m}, B_1)$ *avec* B_1 *est une matrice de type* $p \times N-m$.

Comme mentionné dans l'introduction, on supposera que le problème (2.1) satisfait la condition de structure minimale, dite la condition Kreiss-Lopatinskii uniforme. Avant de donner la définition de cette condition dans le cas caractéristique (voir la Définition 1.5.1 dans le cas non-caractéristique) on introduit quelques notations : Pour $z \in \Xi$ on introduit $\mathbb{E}_-(z)$, le sous-espace stable associé au système singulier

$$(\tau I_N + iA(t,x,\eta))v + A_d(t,x)\partial_d v = 0, \tag{2.4}$$

obtenu par transformation de Fourier-Laplace par rapport à la variable d'espace tangentielle (t,y) dans les équations de l'intérieur du problème (2.1) avec $F=0$. Le sous-espace stable $\mathbb{E}_-(z)$ est obtenu après découplage du système singulier (2.4) en deux systèmes relativement á la composante non carctéristique u^{II}, (voir [1]).

Definition 2.1.1. *La matrice de bord B satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, si*

$$\exists\, C>0,\ \forall z \in \Xi_0 \quad \big(v \in \mathbb{E}_-(z)) \quad \Rightarrow \quad |A_d(t,y,0)v| \leqslant C|B(t,y)v|\big).$$

Hypothèse 2.1.5. *Le problème (2.1) satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme.*

2.1.2 Les principaux résultats

Le premier résultat de ce chapitre se formule comme suit :

Théorème 2.1.2. *Supposons que les fonctions matricielles $A_j, S_0 \in W^{1,\infty}(Q)$, et $B \in W^{1,\infty}(\Sigma)$. Supposons que les hypothèses 2.1.1-2.1.5 aussi soient satisfaites. Alors pour tout $T>0$, il existe des constantes $\gamma_0 \geqslant 1$ et $C>0$ tels que pour tout $F \in L^2_\gamma(Q_T)$, $G \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$ et $f \in L^2(\Omega)$, le problème (2.1) admet une unique solution $u \in L^2_\gamma(Q_T)$ telle que $u^{II}_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$. Par ailleurs, $u \in C^0([0,T], L^2_\gamma(\Omega))$ et pour tout $0<t\leqslant T$ on a :*

$$\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)} + e^{-2\gamma t}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}(\|F\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|G\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.5}$$

Le deuxième résultat de ce travail est une amélioration du résultat précédent, en supposant la donnée des équations de l'intérieur seulement à régularité $L^1([0,T],L^2(\Omega))$.

Théorème 2.1.3. *Sous toutes les hypothèses du Théorème 2.1.2 et pour tout $T>0$, il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $F\in L^1([0,T],L^2(\Omega))$, $G\in L^2(\Sigma_T)$ et $u_0\in L^2(\Omega)$, le problème (2.1) admet une unique solution $u\in L^2(Q_T)$ telle que $u^{II}_{|x_d=0}\in L^2(\Sigma_T)$. En outre, la solution $u\in C^0([0,T],L^2(\Omega))$ et vérifie pour tout $0<t\leqslant T$ on a :*

$$\|u^{II}_{|x_d=0}\|_{L^2(\Sigma_t)}+\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\left(\int_0^t\|F(s)\|_{L^2(\Omega)}ds+\|G\|_{L^2(\Sigma_t)}+\|u_0\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.6}$$

La démonstration du Théorème 2.1.2 se fait en plusieurs étapes : d'abord, on commence par l'étape la plus importante qui est l'établissement d'une estimation d'énergie a priori vérifiée par toute solution assez régulière du problème (2.1) sans condition initiale de bord caractéristique satisfaisant la condition de Kreiss-Lopatinski uniforme 2.1.5, cette estimation est de la forme :

$$\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q)}+\|u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma)}\leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|Lu\|^2_{L^2_\gamma(Q)}+\|Bu_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma)}\right). \tag{2.7}$$

Cette estimation a été obtenue par plusieurs auteurs mais avec des hypothèses différentes, on peut citer :

◇ Majda et Osher [16] dans le cas caractéristique ont démontré que si la matrice de bord B satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme, et la matrice symbole $A(t,x,\eta)$ satisfait la condition de structure par blocs avec coefficient variable de régularité $\mathcal{C}^\infty$, alors le problème aux limites admet une symétriseur de Kreiss et par suit l'estimation (2.7) (H.O.Kreiss [13] et Chazarain- Piriou [3] ont supposé que L est strictement hyperbolique).

◇ A.Morando et D.Serre dans [24, 25] ont montré l'estimation ci dessous pour des système d'élasticité à dimension 2 et 3 seulement (voir l'exemple dans le paragraphe 4.1).

◇ Le travail plus récent est celui de Bezoni-Gavage et Serre [1] qui ont construit un symétriseur de Kreiss pour des problème hyperboliques symétriques à coefficient constant de bord caractéristique satisfaisant à la condition condition de Kreiss-Lopatinski uniforme UKL, avec une hypothèse particulière que la matrice $A(\eta)$ se présente sous la forme (2.3) avec $a_2(\eta)\equiv 0$.

Pour pour notre problème, il y a quelques difficultés pour prouver l'estimation

(2.7), le problème étant caractéristique, l'opérateur L est Friedrichs symétrisable à coefficients variables de régularité Lipshiz et la matrice $A(t,x,\eta)$ (2.3) avec $a_2 \not\equiv 0$.
En utilisant la théorie des opérateurs paradifférentiel de J.M.Bony [2], A.Mokrane [21] et le résultat de Metivier qui montre que la structure par blocs reste valable pour des problèmes caractéristique et Friedrichs symétrisables, il est possible de construire une symétriseur pour un problème paralinéaire qui joue un rôle crucial dans la démonstration de l'estimation (2.7).
Pour la seconde étape, en introduisant un problème dit dual qui satisfait les mêmes hypothèses que le problème (2.1) ce qui donne la même estimation. En utilisant des résultats d'analyse fonctionnelle, on obtient une solution faible du problème aux limites.
Puis on conclut que la solution faible est une solution forte, en utilisant des opérateurs de régularisation tangentielle J_ε , on établit le caractère fortement bien posé du problème (la solution u et la trace $u^{II}_{|x_d=0}$ sont de même régularité que les données).
Pour la résolution du problème mixte (2.1) homogène (avec une condition initiale nulle) en utilisant le principe de causalité et que le problème aux limites soit bien posé dans L^2.
La dernière étape, pour la résolution du problème (2.1) non homogène on utilise le fait que L est symétrisable au sens de Friedrichs et suivant des idées puisées dans les références [16, 10], on introduit un problème mixte auxiliaire avec condition aux limites strictement dissipative. On scinde le problème mixte original en deux problèmes mixtes :
- Un problème mixte avec une condition initiale non nulle et une condition aux limites de type strictement dissipative.
- Un problème mixte avec une condition initiale nulle, avec une condition aux limites de type Kreiss-Lopatinskii uniforme.
Pour le deuxième résultat de ce chapitre, nous montrons que le théorème 1.8 de [20] dans le cas non caractéristique, reste vrai pour des problème mixtes caractéristiques c'est à dire que l'on va démontrer que le problème (2.1) reste bien posé dans L^2 même pour $F \in L^1([0,T], L^2(\Omega))$ avec la solution satisfait une estimation de type ″le semi-groupe ‶en utilisant le principe de Duhamel. La démonstration de ce résultat occupera la fin de ce chapitre.

2.2 Estimations a priori L^2

On commence par démontrer l'estimation d'énergie a priori.
On considère le probléme aux limites

$$\begin{cases} Lu = F & \text{dans} \quad Q, \\ Bu = G & \text{sur} \quad \Sigma. \end{cases} \tag{2.8}$$

Posant $\tilde{u} = e^{-\gamma t}u$ et $F_\gamma := e^{-\gamma t}F$, $G_\gamma := e^{-\gamma t}G$, le problème (2.8) est équivalent au problème

$$\begin{cases} L_\gamma \tilde{u} : = L\tilde{u} + \gamma \tilde{u} = F_\gamma & \text{dans} \quad Q, \\ B\tilde{u} = G_\gamma & \text{sur} \quad \Sigma. \end{cases} \tag{2.9}$$

Sous les hypothèses du Théorème 2.1.2, nous allons démontrer l'estimation suivante :

Théorème 2.2.1. *Il existe C et $\gamma_0 \geqslant 1$ tels que pour tout $\gamma \geqslant \gamma_0$ et $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{Q})$ on ait :*

$$\gamma \|\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)} + \|\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|L_\gamma \tilde{u}\|^2_{L^2(Q)} + \|B\tilde{u}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)}\right). \tag{2.10}$$

La démonstration du Théorème 2.2.1 se fait en deux étapes. D'abord, en utilisant l'hypothèse 2.1.1 de Friedrichs symétrisable satisfaite par l'opérateur L, et après intégration par parties, on a la proposition suivante :

Proposition 2.2.2. *Il existe C et $\gamma_0 \geqslant 1$ tels que pour tout $\gamma \geqslant \gamma_0$ et $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{Q})$ on ait :*

$$\gamma \|\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)} \leqslant \frac{C}{\gamma}\|L_\gamma \tilde{u}\|^2_{L^2(Q)} + C\|\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)}. \tag{2.11}$$

Démonstration. On a

$$L_\gamma \tilde{u} = \gamma \tilde{u} + \partial_t \tilde{u} + \sum_{j=1}^{j=d} A_j \partial_j \tilde{u}. \tag{2.12}$$

Comme L est *Friedrichs symétrisable*, on multiplie (2.12) par S_0 et en prenant le produit scalaire avec $\tilde{u}$, il vient

$$\begin{aligned}(\gamma S_0\tilde{u}(t,x),\tilde{u}(t,x))_{\mathbb{C}^N}+(S_0\partial_t\tilde{u}(t,x),\tilde{u}(t,x))_{\mathbb{C}^N} &+ \sum_{j=1}^{j=d-1}(S_0A_j\partial_j\tilde{u}(t,x),\tilde{u}(t,x))_{\mathbb{C}^N}\\ &+ (S_0A_d\partial_d\tilde{u}(t,x),\tilde{u}(t,x))_{\mathbb{C}^N}=(S_0L_\gamma\tilde{u},\tilde{u}(t,x))_{\mathbb{C}^N},\end{aligned}$$

En intégrant l'équation ci-dessus par rapport à (t,x'), on trouve

$$\begin{aligned}2\Re e\langle\gamma S_0\tilde{u}(x_d),\tilde{u}(x_d)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} &+ 2\Re e\langle S_0\partial_t\tilde{u}(x_d),\tilde{u}(x_d)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\sum_{j=1}^{j=d-1}2\Re e\langle S_0A_j\partial_j\tilde{u}(x_d),\tilde{u}(x_d)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\ &+ 2\Re e\langle S_0A_d\partial_d\tilde{u}(x_d),\tilde{u}(x_d)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}=2\Re e\langle S_0L_\gamma\tilde{u},\tilde{u}(x_d)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Comme les matrice S_0, S_0A_j sont symétriques on a

$$\begin{aligned}2\Re e\langle\gamma S_0\tilde{u}(x_d),\tilde{u}(x_d)\rangle_{L^2(\Sigma)} &- \langle(\partial_tS_0)\tilde{u}(x_d),\tilde{u}(x_d)\rangle_{L^2(\Sigma)}-\sum_{j=1}^{j=d-1}\langle(\partial_jS_0A_j)\tilde{u}(x_d),\tilde{u}(x_d)\rangle_{L^2(\Sigma)}\\ &+ 2\Re e\langle S_0A_d\partial_d\tilde{u}(x_d),\tilde{u}(x_d)\rangle_{L^2(\Sigma)}=2\Re e\langle S_0L_\gamma\tilde{u},\tilde{u}(x_d)\rangle_{L^2(\Sigma)}.\end{aligned}$$

Maintenant en intégrant l'équation ci dessus en x_d on trouve

$$\begin{aligned}2\Re e\langle\gamma S_0\tilde{u},\tilde{u}\rangle_{L^2(Q)} &- \langle(\partial_tS_0)\tilde{u},\tilde{u}\rangle_{L^2(Q)}-\sum_{j=1}^{j=d-1}\langle(\partial_jS_0A_j)\tilde{u},\tilde{u}\rangle_{L^2(Q)}\\ &+ 2\Re e\langle S_0A_d\partial_d\tilde{u},\tilde{u}\rangle_{L^2(Q)}=2\Re e\langle S_0L_\gamma\tilde{u},\tilde{u}\rangle_{L^2(Q)}.\end{aligned}$$

La matrice S_0A_d est aussi symétrique, on a

$$\begin{aligned}2\Re e\langle S_0A_d\partial_d\tilde{u},\tilde{u}\rangle_{L^2(Q)} &= \int_0^{+\infty}2\Re e\langle S_0A_d\partial_d\tilde{u}(x_d),\tilde{u}(x_d)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}dx_d\\ &= \int_0^{+\infty}\partial_d\langle S_0A_d\tilde{u}(x_d),\tilde{u}(x_d)\rangle dx_d-\int_0^{+\infty}\langle\partial_d(S_0A_d)\tilde{u}(x_d),\tilde{u}(x_d)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}dx_d\\ &= -\langle S_0A_d\tilde{u}(0),\tilde{u}(0)\rangle_{L^2(\Sigma)}-\langle\partial_d(S_0A_d)\tilde{u},\tilde{u}\rangle_{L^2(Q)},\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}2\Re e\langle\gamma S_0\tilde{u},\tilde{u}\rangle_{L^2(Q)} &= \langle(\partial_tS_0)\tilde{u},\tilde{u}\rangle_{L^2(Q)}+\sum_{j=1}^{j=d-1}\langle(\partial_jSA_j)\tilde{u},\tilde{u}\rangle_{L^2(Q)}+\langle S_0A_d\tilde{u}_{|x_d=0},\tilde{u}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)}\\ &+ \langle\partial_d(S_0A_d)\tilde{u},\tilde{u}\rangle_{L^2(Q)}+2\Re e\langle S_0L_\gamma\tilde{u},\tilde{u}\rangle_{L^2(Q)}.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young et la continuité L^2 des opérateurs, on obtient

$$\langle (\partial_t S_0)\tilde{u}, \tilde{u}\rangle_{L^2(Q)} \leqslant C\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q)}. \tag{2.13}$$

$$\sum_{j=1}^{j=d-1} \langle (\partial_j S_0 A_j)\tilde{u}, \tilde{u}\rangle_{L^2(Q)} \leqslant C\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q)} \tag{2.14}$$

$$\langle \partial_d (S_0 A_d)\tilde{u}, \tilde{u}\rangle_{L^2(Q)} \leqslant C\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q)}. \tag{2.15}$$

$$\langle S_0 A_d \tilde{u}_{|x_d=0}, \tilde{u}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)} \leqslant C'\|u_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma)} \tag{2.16}$$

$$2\Re e\langle S_0 L_\gamma \tilde{u}, \tilde{u}\rangle_{L^2(Q)} \leqslant \frac{C_1}{\gamma}\|Lu\|^2_{L^2_\gamma(Q)} + \varepsilon\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q)}. \tag{2.17}$$

Maintenant en utilisant le fait que la matrice $S_0 \in \Gamma^0_1$ est définie positive, d'après la proposition de Garding 1.2.16 on a

$$2\Re e\langle \gamma S_0 \tilde{u}, \tilde{u}\rangle\rangle_{L^2(Q)} \geqslant C_2\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q)}. \tag{2.18}$$

Finalement, en utilisant (2.13), (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) et (2.18) on obtient

$$C_2\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q)} \leqslant C\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q)} + C'\|u_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma)} + \frac{C_1}{\gamma}\|Lu\|^2_{L^2_\gamma(Q)} + \varepsilon\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q)},$$

$$(C_2\gamma - C - \varepsilon\gamma)\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q)} \leqslant C'\|u_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma)} + \frac{C_1}{\gamma}\|Lu\|^2_{L^2_\gamma(Q)}$$

et pour choisir ε, on conclut que

$$\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q)} \leqslant \frac{C}{\gamma}\|Lu\|^2_{L^2_\gamma(Q)} + C'\|u_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma)} \tag{2.19}$$

pour γ assez grand. Ce qui démontre la Proposition 2.2.2. □

La deuxième étape dans la démonstration du Théorème 2.2.1 est de fournir une estimation pour la partie non caractéristique u^{II} du problème (2.8). Plus précisément on a

Proposition 2.2.3. *Il existe C et $\gamma_0 \geqslant 1$ tels que pour tout $\gamma \geqslant \gamma_0$ et $u \in \mathcal{C}^\infty_0(\overline{Q})$ on ait :*

$$\|\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|L_\gamma \tilde{u}\|^2_{L^2_\gamma(Q)} + \|B\tilde{u}\|^2_{L^2(\Sigma)}\right) + \frac{C}{\gamma}\|\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)}. \tag{2.20}$$

La démonstration de la Proposition 2.2.3 va occuper le prochain paragraphe.
Une fois l'estimation (2.20) obtenue, il est maintenant évident que l'estimation (2.10) suit pour γ assez grand comme conséquence des estimations (2.20) et (2.11) de la Proposition 2.2.2. Ainsi s'achève la démonstration du Théorème 2.2.1.

2.2.1 Démonstration de la proposition 2.2.3

Transformation préliminaire

Pour obtenir l'inégalité a priori (2.20), il faut transformer le problème (2.9) en un problème avec la matrice relative à la variable normale de bord soit constante et diagonale. Pour ce la on introduit la matrice $A_0(t,x)$ inversible qui joue un rôle principal dans la démonstration

$$A_0 = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & a_d^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

On multiplie la première équation dans le problème (2.9) par A_0 et comme la matrice A_d sous la forme d'une structure par bloc (2.2), on obtient

$$L'\tilde{u} := A_0 L_\gamma \tilde{u} = A_0(\gamma + \partial_t)\tilde{u} + \sum_{j=1}^{d-1} A_0 A_j(t,x)\partial_{x_j}\tilde{u} + \mathbf{I}_{N-m}\partial_{x_d}\tilde{u},$$

avec $A_0 \in W^{1,\infty}(Q), A_j \in W^{1,\infty}(Q)$ et $\mathbf{I}_{N-m} := \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ 0 & I_{N-m} \end{pmatrix}$.

Paralinearisation

Compte tenu de la faible régularité des coefficients de type Lipschitz, il est nécessaire d'utiliser le calcul paradifférentiel qui rappelé dans le paragraphe 1.2 .
On fixe $x_d \geqslant 0$ comme un paramètre et on observe que les matrices symboles $\tau A_0(x_d)$ avec $\tau = \gamma + i\delta \in \mathbb{C}^+$ et $\eta_j A_0(x_d)A_j(x_d)$ (pour $j = 1, 2, \cdots, d-1$) sont de classe $\Gamma_1^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1})$).
Comme les matrices $A_0 \in W^{1,\infty}(Q), A_j \in W^{1,\infty}(Q)$, en utilisant la Proposition 1.2.10 et le Théorème 1.2.14 , le calcul symbolique paradifférentiel implique que nous dis-

posons des estimations suivantes :

$$\|\gamma A_0\tilde{u} - T^{\gamma}_{\gamma A_0}\tilde{u}\|_{L^2(Q)} \leqslant C\|\tilde{u}\|_{L^2(Q)},$$

$$\|A_0\partial_t\tilde{u} - T^{\gamma}_{i\eta_0 A_0}\tilde{u}\|_{L^2(Q)} \leqslant C\|\tilde{u}\|_{L^2(Q)},$$

$$\|A_0A_j\partial_j\tilde{u} - T^{\gamma}_{iA_0A_j\eta_j}\tilde{u}\|_{L^2(Q)} \leqslant C\|\tilde{u}\|_{L^2(Q)}.$$

En considérant problème paralinéaire le suivant :

$$\begin{cases} T^{\gamma}_{\tau A_0 + i\sum_{j=1}^{d-1}\eta_j A_0 A_j}\tilde{u} + \mathbf{I}_{N-m}\partial_{x_d}\tilde{u} := \mathbb{F} & \text{dans} \quad Q, \\ T^{\gamma}_B\tilde{u} := \mathbb{G} & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{2.22}$$

Revenant aux estimations ci-dessus, on obtient une estimation de comparaison essentielle

$$\|L'\tilde{u} - (T^{\gamma}_{\tau A_0 + i\sum_{j=1}^{j=d-1} A_0 A_j\eta_j}\tilde{u} + \mathbf{I}_{N-m}\partial_d\tilde{u})\|_{L^2(Q)} \leqslant C\|\tilde{u}\|_{L^2(Q)}. \tag{2.23}$$

En utilisant l'hypothèse 2.1.4, on a $B\tilde{u} = B_1\tilde{u}^{II}$ et en appliquant le Théorème 1.2.12, on a l'opérateur $\gamma(B - T^{\gamma}_B)$ uniformément borné dans $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1})$ c'est à dire

$$\|T^{\gamma}_B\tilde{u}_{|x_d=0} - B\tilde{u}_{|x_d=0}\|_{L^2(\Sigma)} \leqslant \frac{C}{\gamma}\|\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|_{L^2(\Sigma)}, \tag{2.24}$$

où C une constante dépendant uniquement on les normes $W^{1,\infty}$ des coefficients de L.

Compte tenu de ces estimations, pour prouver l'estimation (2.20) il faut d'abord démontrer la même estimation pour le problème paralineaire (2.22).

Plus précisément, on a

Proposition 2.2.4. *Il existe des constantes $C > 0$ et $\gamma_0 \geqslant 1$ tels que pour tout $\gamma \geqslant \gamma_0$ et $u \in \mathcal{C}^{\infty}_0(\overline{Q})$ on ait :*

$$\|\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|\mathbb{F}\|^2_{L^2(Q)} + \|\mathbb{G}\|^2_{L^2(\Sigma)}\right) + \frac{C}{\gamma}\|\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)}. \tag{2.25}$$

Admettons pour le moment ce résultat. On peut alors prouver la Proposition 2.2.3 en utilisant les estimations paralineaires .

En utilisant (2.24) et (2.23), on a

$$\|\mathbb{F}\|_{L^2(Q)} \leqslant \|L'\tilde{u}\|_{L^2(Q)} + C\|\tilde{u}\|_{L^2(Q)},$$
$$\|\mathbb{G}\|_{L^2(\Sigma)} \leqslant \|B_1\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|_{L^2(\Sigma)} + \frac{C}{\gamma}\|\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|_{L^2(\Sigma)}.$$

et l'estimation (2.25) fournit donc, pour γ assez grand

$$\|\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|L'\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)} + \|B_1\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)}\right) + \frac{C}{\gamma}\|\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)}.$$

Enfin, l'estimation (2.20) obtenue grâce à la définition $L'\tilde{u} = A_0 L_\gamma \tilde{u}$ et $B_1\tilde{u}^{II} = B\tilde{u}$. $\square$.

2.2.2 Démonstration de la Proposition 2.2.4

Avant de prouver l'estimation (2.25), nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 2.2.5. *Pour tout $z \in \Xi$, le système (2.22) se met sous la forme d'un système d'ordre 1*

$$\begin{cases} \partial_{x_d}\tilde{u}^{II} = T^\gamma_{\mathcal{A}_2(z)}\tilde{u}^{II} + R^\gamma_0\tilde{u} + R^\gamma_{-1}\mathbb{F}^I + R^\gamma_0\mathbb{F} & \text{dans} \quad Q, \\ T^\gamma_{B_1}\tilde{u}^{II} = \mathbb{G} & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{2.26}$$

avec

$$\mathcal{A}_2(z) = -a_d^{-1}(\tau I_{n-m} + ia_2 + \frac{1}{\tau}a_{2,1}a_{1,2}).$$

Démonstration. De l'hypothèse 2.1.3, on sait que la matrice $A(t,x,\eta)$ admet une décomposition de la forme

$$\begin{pmatrix} 0_m & a_{1,2}(t,x,\eta) \\ a_{2,1}(t,x,\eta) & a_2(t,x,\eta) \end{pmatrix}, \quad (t,x) \in Q, \eta \in \mathbb{R}^{d-1},$$

et d'après (2.21), on obtient

$$\tau A_0 + i\sum_{j=1}^{j=d-1} A_0 A_j \eta_j = \begin{pmatrix} \tau I_m & ia_{1,2} \\ ia_d^{-1}a_{2,1} & ia_d^{-1}a_2 + \tau a_d^{-1} \end{pmatrix}.$$

De hypothèse 2.1.4, on sait que la matrice $Bu = B_1 u^{II}$, alors le problème (2.22) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} T^{\gamma}_{\tau I_m}\tilde{u}^I + T^{\gamma}_{ia_{1,2}}\tilde{u}^{II} = \mathbb{F}^I, \\ T^{\gamma}_{ia_d^{-1}a_{2,1}}\tilde{u}^I + T^{\gamma}_{ia_d^{-1}a_2+\tau a_d^{-1}}\tilde{u}^{II} + \partial_{x_d}\tilde{u}^{II} = \mathbb{F}^{II}, \\ T^{\gamma}_{B_1}\tilde{u}^{II} = \mathbb{G}. \end{cases} \tag{2.27}$$

Dans toute la suite $R^{\gamma}_j\,; j = 0, -1$ désignent des opérateurs de reste issus du calcul symbolique d'ordre $\leqslant j$.
Appliquant l'opérateur $T^{\gamma}_{\frac{1}{\tau}I_m}$ à la première équation dans le système (2.27), on trouve

$$T^{\gamma}_{\frac{1}{\tau}I_m}T^{\gamma}_{\tau I_m}\tilde{u}^I + T^{\gamma}_{\frac{1}{\tau}I_m}T^{\gamma}_{ia_{1,2}}\tilde{u}^{II} = T^{\gamma}_{\frac{1}{\tau}I_m}\mathbb{F}^I,$$

et par l'application de la Proposition 1.2.10, on obtient :

$$\tilde{u}^I = T^{\gamma}_{\frac{1}{\tau}I_m}\mathbb{F}^I - T^{\gamma}_{\frac{i}{\tau}a_{1,2}}\tilde{u}^{II} + R^{\gamma}_{-1}\tilde{u}. \tag{2.28}$$

On remplace l'expression (2.28) dans la deuxiéme l'équation de (2.27), on trouve

$$T^{\gamma}_{ia_d^{-1}a_{2,1}}T^{\gamma}_{\frac{1}{\tau}I_m}\mathbb{F}^I - T^{\gamma}_{ia_d^{-1}a_{2,1}}T^{\gamma}_{\frac{i}{\tau}a_{1,2}}\tilde{u}^{II} + T^{\gamma}_{ia_d^{-1}a_{2,1}}R^{\gamma}_{-1}\tilde{u} + T^{\gamma}_{ia_d^{-1}a_2+\tau a_d^{-1}}\tilde{u}^{II} + \partial_{x_d}\tilde{u}^{II} = \mathbb{F}^{II}. \tag{2.29}$$

Le calcul symbolique montre qu'il existe deux opérateurs R^{γ}_0 et R^{γ}_{-1} tels que

$$T^{\gamma}_{ia_d^{-1}a_{2,1}}T^{\gamma}_{\frac{1}{\tau}I_m}\mathbb{F}^I = T^{\gamma}_{\frac{i}{\tau}a_d^{-1}a_{2,1}}\mathbb{F}^I + R^{\gamma}_{-1}\mathbb{F}^I \quad ,$$
$$-T^{\gamma}_{ia_d^{-1}a_{2,1}}T^{\gamma}_{\frac{i}{\tau}a_{1,2}}\tilde{u}^{II} = T^{\gamma}_{\frac{1}{\tau}a_d^{-1}a_{2,1}a_{1,2}}\tilde{u}^{II} + R^{\gamma}_0\tilde{u}^{II}.$$

En utilisant les équations ci-dessous et (2.29), on conclut que

$$T^{\gamma}_{\frac{1}{\tau}a_d^{-1}a_{2,1}a_{1,2}}\tilde{u}^{II} + T^{\gamma}_{ia_d^{-1}a_2+\tau a_d^{-1}}\tilde{u}^{II} + \partial_{x_d}\tilde{u}^{II} + T^{\gamma}_{\frac{i}{\tau}a_d^{-1}a_{2,1}}\mathbb{F}^I + R^{\gamma}_{-1}\mathbb{F}^I + R^{\gamma}_0\tilde{u} + T^{\gamma}_{ia_d^{-1}a_{2,1}}R^{\gamma}_{-1}\tilde{u} = \mathbb{F}^{II}.$$

Sachant que $ia_d^{-1}a_{2,1} \in \Gamma^1_1$ et $\frac{i}{\tau}a_d^{-1}a_{2,1} \in \Gamma^0_1$, on a

$$\partial_{x_d}\tilde{u}^{II} = T^{\gamma}_{-a_d^{-1}(\tau I_{n-m}+ia_2+\frac{1}{\tau}a_{2,1}a_{1,2})}\tilde{u}^{II} + R^{\gamma}_0\tilde{u} + R^{\gamma}_{-1}\mathbb{F}^I + R^{\gamma}_0\mathbb{F}.$$

Si on pose

$$\mathcal{A}_2(z) = -a_d^{-1}(\tau I_{n-m} + ia_2 + \frac{1}{\tau}a_{2,1}a_{1,2}),$$

pour $z \in \Xi$, le lemme est démontré. □

Le Lemme 2.2.5 a montré que le système (2.22) s'écrit sous la forme d'une équation

différentielle ordinaire par rapport à la variable normale x_d comme le système (1.8) pour des problèmes non caractéristique (paragraphe 1.5) .
Alors si le système (2.26) vérifie toutes les hypothèses du Théorème 1.5.5 on peut construire un symétriseur de Kreiss $S(z)$ et par suite l'estimation (2.25) est satisfaite.
Pour $z \in \Xi_1$ on introduit $e_-(z)$, le sous espace stable associé au système (2.26) qui est la projection de $\mathbb{E}_-(z)$ correspondant la composante u^{II} ([1]).
D'autre part le système (2.26) satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme au sens la Définition 1.5.1 dans le chapitre précédent. En vertu de l'analyse faite par Benzoni-Gavage et serre ([1], chapitre 6) la matrice $\mathcal{A}_2(z)$ est hyperbolique par le lemme de Hersh 1.5.2
(1) La matrice $\mathcal{A}_2(z)$ n'admet pas de valeur propre imaginaire pure.
(2) Le sous-espace stable $e_-(z)$ est de dimension p.
Nous rappelons aussi le crucial résultat de Métivier [19] pour la condition de structure par bloc (Théorème 1.5.3) pour des problème caractéristique (section 3, p.697), où la matrice $\mathcal{A}_2(z)$ est identique à la matrice Q (3.3) évoquée dans [19] .

Théorème 2.2.6 (Métivier [19]). *Supposant que L soit symetrizable aux sens de Friedrichs. Alors, pour tout $z \in \Xi$, la matrice $\mathcal{A}_2(z)$ satisfait la condition de structure par bloc au voisinage de z .*

Alors par le Théorème 1.5.5, il existe un symétriseur de Kreiss du système (2.26) avec une différence dans les dimension des matrices :

Théorème 2.2.7. *Pour tout $z \in \Xi$, il existe une symbole matrice symétrique $S(z)$ de dégrée 0 et régularité 1 , et il existe une ensemble fini des matrices $(V_i(z))_i$, $\mathbf{c}^\infty$ en z telles que*

$$\Re e(S(z)\mathcal{A}_2(z)) = \sum_i V_i^*(z) \begin{pmatrix} \gamma H_i(z) & 0 \\ 0 & E_i(z) \end{pmatrix} V_i(z), \tag{2.30}$$

où V_i et H_i sont homogène de degré 0 en (τ,η) (et Γ_1^0), $E_i(z)$ sont homogène de degré 1 en (τ,η) (Γ_1^1), et on a les inégalité :

$$\sum_i V_i^*(z)V_i(z) \geqslant CI, \quad H_i(z) \geqslant CI_p, \quad E_i(z) \geqslant C(\gamma^2 + |\eta|^2)^{1/2} I_{N-m-p}. \tag{2.31}$$

En outre, il existe des constantes $C>0, C'>0$ telle que, pour tout $z\in\Xi_0$ on a

$$S(z)\geqslant CI_{N-m}-C'B_1^*(t,y)B_1(t,y). \tag{2.32}$$

On considère la famille d'opérateurs paradifférentiel $\{\mathbf{S}^\gamma(x_d)\}_\gamma$ définie par :

$$\mathbf{S}^\gamma(x_d)=\frac{1}{2}((T^\gamma_{S(x_d)})^*+T^\gamma_{S(x_d)}), \tag{2.33}$$

comme $S(x_d)\in\Gamma^0_1$, $\{\mathbf{S}^\gamma(x_d)\}_\gamma$ est famille d'opérateurs Lipschitzien autoadjoint , bornés de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ (sa norme est uniformément bornée par rapport à x_d et γ). Ceci reste vrai également pour les opérateur $\frac{d\mathbf{S}^\gamma}{dx_d}$.
Dans la suite, $\langle .,.\rangle_{L^2(\Sigma)}$ et $\langle .,.\rangle_{L^2(Q)}$ désignent le produit scalaire sur $L^2(\Sigma)$ et $L^2(Q)$ respectivement.
Soit $u\in\mathcal{C}_0^\infty(\overline{Q})$. En effectuant la dérivation en x_d de la fonction
$x_d\mapsto\langle\mathbf{S}^\gamma(x_d)\tilde{u}^{II}(x_d),\tilde{u}^{II}(x_d)\rangle_{L^2(\Sigma)}$ on trouve

$$\frac{d}{dx_d}\langle\mathbf{S}^\gamma(x_d)\tilde{u}^{II}(x_d),\tilde{u}^{II}(x_d)\rangle=\langle\frac{d\mathbf{S}^\gamma}{dx_d}\tilde{u}^{II}(x_d),\tilde{u}^{II}(x_d)\rangle+2Re\langle\mathbf{S}^\gamma(\partial_d\tilde{u}^{II}(x_d)),\tilde{u}^{II}(x_d)\rangle,$$

De la première équation du système (2.26), on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_d}\langle\mathbf{S}^\gamma\tilde{u}^{II}(x_d),\tilde{u}^{II}(x_d)\rangle_{L^2(\Sigma)}&=\langle\frac{d\mathbf{S}^\gamma}{dx_d}\tilde{u}^{II}(x_d),\tilde{u}^{II}(x_d)\rangle_{L^2(\Sigma)}+2\Re e\langle\mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathcal{A}_2(z)}\tilde{u}^{II}(x_d),\tilde{u}^{II}(x_d)\rangle_{L^2(\Sigma)}\\&+2\Re e\langle\mathbf{S}^\gamma R_0^\gamma\tilde{u},\tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(\Sigma)}+2\Re e\langle\mathbf{S}^\gamma R_{-1}^\gamma\mathbb{F}^I,\tilde{u}^{II}(x_d)\rangle_{L^2(\Sigma)}+2\Re e\langle\mathbf{S}^\gamma R_0^\gamma\mathbb{F},\tilde{u}^{II}(x_d)\rangle_{L^2(\Sigma)},\end{aligned}$$

où $\frac{d\mathbf{S}^\gamma}{dx_d},\mathbf{S}^\gamma$ dépendant la variable x_d, puis en intégrant en x_d, on obtient

$$\begin{aligned}&\langle\mathbf{S}^\gamma(0)\tilde{u}^{II}_{|x_d=0},\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)}+2\Re e\langle\mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathcal{A}_2(z)}\tilde{u}^{II},\tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)}=\langle\frac{-d\mathbf{S}^\gamma}{dx_d}\tilde{u}^{II},\tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)}\\&+2\Re e\langle-\mathbf{S}^\gamma R_0^\gamma\tilde{u},\tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)}+2\Re e\langle-\mathbf{S}^\gamma R_{-1}^\gamma\mathbb{F}^I,\tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)}+2\Re e\langle-\mathbf{S}^\gamma R_0^\gamma\mathbb{F},\tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)}.\end{aligned} \tag{2.34}$$

En utilisant l'inégalité de Young et la continuité L^2 des opérateurs, on obtient

$$\begin{aligned}2\Re e\langle-\mathbf{S}^\gamma R_0^\gamma\mathbb{F},\tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)}&\leqslant\frac{C}{\gamma}\|-\mathbf{S}^\gamma R_0^\gamma\mathbb{F}\|^2_{L^2(Q)}+\varepsilon\gamma\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)}\\&\leqslant\frac{C}{\gamma}\|\mathbb{F}\|^2_{L^2(Q)}+\varepsilon\gamma\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Re e\langle -\mathbf{S}^\gamma R_0^\gamma \tilde{u}, \tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)} &\leqslant \frac{C}{\gamma}\|-\mathbf{S}^\gamma R_0^\gamma \tilde{u}\|^2_{L^2(Q)} + \varepsilon\gamma\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)} \\
&\leqslant \frac{C}{\gamma}\|\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)} + \varepsilon\gamma\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Re e\langle \frac{-d\mathbf{S}^\gamma}{dx_d}\tilde{u}^{II}, \tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)} = \langle \frac{-d\mathbf{S}^\gamma}{dx_d}\tilde{u}^{II}, \tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)} &\leqslant C\|\frac{-d\mathbf{S}^\gamma}{dx_d}\tilde{u}^{II}\|_{L^2(Q)}\|\tilde{u}^{II}\|_{L^2(Q)} \\
&\leqslant C\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Re e\langle -\mathbf{S}^\gamma R_{-1}^\gamma \mathbb{F}^I, \tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)} &\leqslant \frac{C}{\gamma}\|-\mathbf{S}^\gamma R_{-1}^\gamma \tilde{F^I}\|^2_{L^2(Q)} + \varepsilon\gamma\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)} \\
&\leqslant \frac{C}{\gamma}\|R_{-1}^\gamma \mathbb{F}\|^2_{L^2(Q)} + \varepsilon\gamma\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

Comme R_{-1}^γ d'ordre inférieur ou égale à -1, alors

$$\|R_{-1}^\gamma \mathbb{F}^I\|_{L^2(Q)} \leqslant \frac{C}{\gamma}\|\mathbb{F}^I\|_{L^2(Q)},$$

et le paramètre $\gamma \geqslant 1$, on déduit que

$$\begin{aligned}
2\Re e\langle -\mathbf{S}^\gamma R_{-1}^\gamma \mathbb{F}^I, \tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)} &\leqslant \frac{C}{\gamma^3}\|\mathbb{F}^I\|^2_{L^2(Q)} + \varepsilon\gamma\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)} \\
&\leqslant \frac{C}{\gamma}\|\mathbb{F}^I\|^2_{L^2(Q)} + \varepsilon\gamma\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)} \\
&\leqslant \frac{C}{\gamma}\|\mathbb{F}\|^2_{L^2(Q)} + \varepsilon\gamma\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

Revenant à les inégalités ci-dessus ainsi que (2.34) on obtient

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{S}^\gamma(0)\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}, \tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)} + 2\Re e\langle \mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathcal{A}_2(z)}\tilde{u}^{II}, \tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)} \leqslant (C+3\varepsilon\gamma)\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)} + \frac{C}{\gamma}\|\mathbb{F}\|^2_{L^2(Q)} \\
&+\frac{C}{\gamma}\|\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Il reste maintenant à estimer le terme de bord $\langle \mathbf{S}^\gamma(0)\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}, \tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)}$ en utilisant l'inégalité de Gärding (Proposition 1.2.16). C'est l'objet du lemme suivant

Lemme 2.2.8. *Il existe $C, C' > 0$ et $\gamma_0 \geqslant 1$ tels que pour tout $\gamma \geqslant \gamma_0$ et $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{Q})$*

on ait :

$$\langle \mathbf{S}^{\gamma}(0)\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}, \tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)} \geqslant C\|\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)} - C'\|T^{\gamma}_{B_1}\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)}. \tag{2.36}$$

Démonstration. En utilisant (2.32) et par l'application de la Proposition 1.2.16, on conclut que

$$\Re e\langle T^{\gamma}_{S(0)}\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}, \tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)} + C' Re\langle T^{\gamma}_{B_1^T B_1}\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}, \tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)} \geqslant C\|\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)}. \tag{2.37}$$

En utilisant (2.33) et par l'application de la proposition du calcul symbolique 1.2.10, on écrit

$$\mathbf{S}^{\gamma}(0) = T^{\gamma}_{S(0)} + R^{\gamma}_{-1},$$

ce qui implique que

$$\langle \mathbf{S}^{\gamma}(0)\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}, \tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)} \geqslant \langle T^{\gamma}_{S(0)}\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}, \tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)} - \frac{C}{\gamma}\|\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)}.$$

Donc (2.37) entraine

$$\langle \mathbf{S}^{\gamma}(0)\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}, \tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)} + C' Re\langle T^{\gamma}_{B_1^T B_1}\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}, \tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)} \geqslant C\|\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)}, \tag{2.38}$$

pour γ assez grand. Réappliquant la Proposition 1.2.10, on écrit

$$T^{\gamma}_{B_1^T B_1} = (T^{\gamma}_{B_1})^T T^{\gamma}_{B_1} + R^{\gamma}_{-1},$$

et par suit

$$\Re e\langle T^{\gamma}_{B_1^T B_1}\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}, \tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)} \leqslant \|T^{\gamma}_{B_1}\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)} + \frac{C}{\gamma}\|\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)}.$$

Enfin en utilisant l'inégalité ci-dessus et (2.38), pour γ assez grand on obtient (2.36). □

Pour compléter la démonstration de la Proposition 2.2.4, il reste à prouver le lemme suivant en utilisant les même arguments que pour le Lemme 2.2.8 .

Lemme 2.2.9. *Il existe $C, C' > 0$ et $\gamma_0 \geqslant 1$ tels que pour tout $\gamma \geqslant \gamma_0$ et $u \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\overline{Q})$ on ait :*

$$\Re e\langle \mathbf{S}^{\gamma} T^{\gamma}_{\mathcal{A}_2(z)}\tilde{u}^{II}, \tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)} \geqslant C\gamma\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)}. \tag{2.39}$$

Démonstration. L'identité (2.33) et la Proposition 1.2.10 montrent qu'il existe un opérateur R_0^γ tel que

$$\mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathcal{A}_2(z)} = T^\gamma_{\Re e(S(z)\mathcal{A}_2(z))} + R_0^\gamma,$$

ce qui implique

$$\Re e\langle \mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathcal{A}_2(z)} \tilde{u}^{II}, \tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)} \geqslant \Re e\langle T^\gamma_{\Re e(S(z)\mathcal{A}_2(z))} \tilde{u}^{II}, \tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)} - C\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)}. \quad (2.40)$$

D'autre part, en revenant à la représentation (2.30) de $Re(S(z)\mathcal{A}_2(z))$ et en appliquant la même proposition, on trouve

$$T^\gamma_{\Re e(S(z)\mathcal{A}_2(z))} = \sum_i (T^\gamma_{V_i(z)})^* \begin{pmatrix} \gamma T^\gamma_{H_i(z)} & 0 \\ 0 & T^\gamma_{E_i(z)} \end{pmatrix} T^\gamma_{V_i(z)} + R_0^\gamma. \quad (2.41)$$

Pour $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{Q})$ posons $w_i = T^\gamma_{V_i(z)} u^{II} = (w_i^1, w_i^2)$, où w_i^1 désigne la projection du vecteur w_i sur $\mathbb{C}^p$, correspondant à la dimension du bloc $\gamma T^\gamma_{H_i(z)}$ et w_i^2 à celle correspondant au bloc $T^\gamma_{E_i(z)}$. De (2.41), on écrit

$$\begin{aligned}\Re e\langle T^\gamma_{\Re e(S(z)\mathcal{A}_2(z))} \tilde{u}^{II}, \tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)} &= \sum_i \Re e\langle \gamma T^\gamma_{H_i(z)} w_i^1, w_i^1\rangle_{L^2(Q)} + \sum_i \Re e\langle T^\gamma_{E_i(z)} w_i^2, w_i^2\rangle_{L^2(Q)} \\ &\quad + \mathcal{O}(\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)}),\end{aligned}$$

et donc (2.40) entraine

$$\Re e\langle \mathbf{S}^\gamma T^\gamma_{\mathcal{A}_2(z)} \tilde{u}^{II}, \tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)} \geqslant \sum_i \Re e\langle\langle \gamma T^\gamma_{H_i(z)} w_i^1, w_i^1\rangle\rangle + \sum_i \Re e\langle T^\gamma_{E_i(z)} w_i^2, w_i^2\rangle_{L^2(Q)} - C\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)}. \quad (2.42)$$

On utilise maintenant le fait que $H_i(z) \in \Gamma_1^0$, définie positive et $E_i(z) \in \Gamma_1^1$, définie positive. L'application de l'inégalité de Gärding (la proposition 1.2.16) fournit donc

$$\begin{aligned}\Re e\langle \gamma T^\gamma_{H_i(z)} w_i^1, w_i^1\rangle_{L^2(Q)} &\geqslant C\gamma\|w_i^1\|^2_{L^2(Q)}, \\ \Re e\langle T^\gamma_{E_i(z)} w_i^2, w_i^2\rangle_{L^2(Q)} &\geqslant C\|w_i^2\|^2_{H^{1/2}(Q)},\end{aligned} \quad (2.43)$$

grace aux propriétés des normes de $H^s_\gamma(\mathbb{R}^d)$, on peut vérifie facilement que

$$\|w_i^2\|^2_{H^{1/2}(Q)} \geqslant \gamma\|w_i^2\|^2_{L^2(Q)},$$

il s'en suit que

$$\gamma\|w_i^1\|^2_{L^2(Q)} + \|w_i^2\|^2_{H^{1/2}(Q)} \geqslant \gamma(\|w_i^1\|^2_{L^2(Q)} + \|w_i^2\|^2_{L^2(Q)}) = \gamma\|T^\gamma_{V_i}\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)}.$$

et en revenant à (2.42) et (2.43), on obtient

$$\Re e\langle \mathbf{S}^{\gamma} T^{\gamma}_{\mathcal{A}_2(z)} \tilde{u}^{II}, \tilde{u}^{II}\rangle_{L^2(Q)} \geqslant C\gamma \sum_i \|T^{\gamma}_{V_i} \tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)} - C\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)}. \tag{2.44}$$

Par ailleurs, sachant que $\sum_i V_i^* V_i \in \Gamma^0_1$, est définie positive, l'inégalité de Gärding donne

$$\sum_i \Re e\langle T^{\gamma}_{V_i^* V_i} \tilde{u}^{II}, \tilde{u}^{II}\rangle \geqslant C\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)}.$$

et la Proposition 1.2.10 du calcul symbolique montre qu'il existe un opérateur R^{γ}_{-1} tel que

$$T^{\gamma}_{V_i^* V_i} = (T^{\gamma}_{V_i})^* T^{\gamma}_{V_i} + R^{\gamma}_{-1},$$

il s'en suit que

$$\sum_i \|T^{\gamma}_{V_i} \tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)} + \frac{C}{\gamma}\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)} \geqslant C\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)}.$$

En combinant l'inégalité précédente avec (2.44) et en prenant γ assez grand, on obtient (2.39).

□

Finalement, en utilisant (2.35), (2.36) et (2.39) et pour un choix convenable de ε , on conclut que

$$\gamma\|\tilde{u}^{II}\|^2_{L^2(Q)} + \|\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|\mathbb{F}\|^2_{L^2(Q)} + \|\mathbb{G}\|^2_{L^2(\Sigma)}\right) + \frac{C}{\gamma}\|\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)},$$

pour γ assez grand. Ce qui démontre la Proposition 2.2.4. □.

2.3 Résolution du problème aux limites (2.8)

Sous toutes les hypothèses du Thèoréme 2.1.2, on va établir le résultat suivant :

Théorème 2.3.1. *Soit $F \in L^2_{\gamma}(Q), G \in L^2_{\gamma}(\Sigma)$ alors, pour γ assez grand, le problème* (2.8) *admet une unique solution $u \in L^2_{\gamma}(Q)$ telle que $u^{II}_{|x_d=0} \in L^2_{\gamma}(\Sigma)$. De plus on a l'estimation*

$$\gamma\|u\|^2_{L^2_{\gamma}(Q)} + \|u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_{\gamma}(\Sigma)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|^2_{L^2_{\gamma}(Q)} + \|G\|^2_{L^2_{\gamma}(\Sigma)}\right). \tag{2.45}$$

2.3.1 Le problème dual

La démonstration du Théorème 2.3.1 est basée sur des argument de dualité. Pour cela, nous avons besoin de construire un problème aux limites adjoint

$$\begin{cases} L^* v = f & \text{dans} \quad Q, \\ Cv_{|x_d=0} = g & \text{sur} \quad \Sigma. \end{cases} \tag{2.46}$$

L'opérateur adjoint L^*(adjoint formel de l'opérateur L) est défini par

$$L^*. = -\partial_t. - \sum_{j=1}^{d} A_j^* \partial_{x_j}. - \sum_{j=1}^{d} (\partial_{x_j} A_j)^*,$$

au sens des distributions.
Dans un premier temps, nous rappelons le lemme 9-4 de Benzoni-Gavage et Serre [1] dans le cas où la matrice A_d est inversible. Nous allons démontrer le même lemme sous l'hypothèse 2.1.2.

Lemme 2.3.2. *Supposons que* $A_d \in \mathcal{C}^\infty\big(\Sigma; \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{R})\big)$ *et* $B \in \mathcal{C}^\infty\big(\Sigma; \mathcal{M}_{p\times N}(\mathbb{R})\big)$. *Si* B *de maximal rang* p *et* $\ker B \subset \ker A_d$*, il existe une fonction matricielle* $N \in \mathcal{C}^\infty\big(\Sigma; \mathcal{M}_{N-p\times N}(\mathbb{R})\big)$ *telle que*

$$\mathbb{R}^N = \ker B \oplus \ker N.$$

De plus, il existe $C \in \mathcal{C}^\infty\big(\Sigma; \mathcal{M}_{p\times N}(\mathbb{R})\big)$ *et* $M \in \mathcal{C}^\infty\big(\Sigma; \mathcal{M}_{p\times N}(\mathbb{R})\big)$ *telle que*

$$\ker C = \ker\big(A_d \ker B\big)^\perp \quad et \quad A_d = M^* B + C^* N.$$

Dans notre cas (cas caractéristique)

Lemme 2.3.3. *Sous les hypothèses 2.1.2 et 2.1.4, il existe une fonction matricielle* $N \in W^{1,\infty}\big(\Sigma; \mathcal{M}_{N-p\times N}(\mathbb{R})\big)$ *telle que*

$$\mathbb{R}^N = \ker B \oplus \ker N.$$

De plus, il existe $C \in W^{1,\infty}\big(\Sigma; \mathcal{M}_{p\times N}(\mathbb{R})\big)$ *et* $M \in W^{1,\infty}\big(\Sigma; \mathcal{M}_{N-p\times N}(\mathbb{R})\big)$ *telle que*

$$\ker C = \ker\big(A_d \ker B\big)^\perp \quad and \quad A_d = M^* B + C^* N.$$

Démonstration. De l'hypothèse 2.1.2 la matrice A_d sous la forme

$$A_d = \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ 0 & a_d(t,x) \end{pmatrix},$$

où la matrice $a_d(t,x)$ est uniformément inversible et par l'hypothèse 2.1.4 la matrice de bord $B = (0_{p\times m}, B_1)$ telle que $\ker A_d \subset \ker B$, ce qui donne $\ker a_d \subset \ker B_1$.
Alors par l'application du Lemme 2.3.2, il existe $C_1, N_1 \in W^{1,\infty}\big(\Sigma, \mathcal{M}_{(N-m-p)\times(N-m)}(\mathbb{R})\big)$ et $M_1 \in W^{1,\infty}\big(\Sigma, \mathcal{M}_{p\times(N-m)}(\mathbb{R})\big)$ tels que

$$\mathbb{R}^{N-m} = \ker B_1 \oplus \ker N_1, \quad \mathbb{R}^{N-m} = \ker C_1 \oplus \ker M_1,$$

et

$$\ker C_1 = \ker\big(a_d \ker B_1\big)^{\perp} \quad \text{et} \quad a_d = M_1^* B_1 + C_1^* N_1.$$

Si on pose

$$C := \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} \in W^{1,\infty}\big(\Sigma, \mathcal{M}_{N-p\times N}(\mathbb{R})\big) \quad M := \begin{pmatrix} 0_{p\times m} & M_1 \end{pmatrix} \in W^{1,\infty}\big(\Sigma, \mathcal{M}_{p\times N}(\mathbb{R})\big)$$
$$N := \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix} \in W^{1,\infty}\big(\Sigma, \mathcal{M}_{N-p\times N}(\mathbb{R})\big), \tag{2.47}$$

les matrices satisfont à la décomposition

$$A_d = M^* B + C^* N \quad \text{et} \quad \ker C = \ker\big(A_d \ker B\big)^{\perp}.$$

La formule de Green montre que pour $(u,v) \in \mathcal{C}_0^\infty(\bar{Q})$:

$$\langle Lu, v\rangle_{L^2(Q)} = \langle u, L^* v\rangle_{L^2(Q)} - \langle A_d u_{|x_d=0}, v_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)},$$

et par suit, on a

$$\langle Lu, v\rangle_{L^2(Q)} = \langle u, L^* v\rangle_{L^2(Q)} - \langle Bu_{|x_d=0}, Mv_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)} - \langle Nu_{|x_d=0}, Cv_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)}. \tag{2.48}$$

$\square$

Propriétés du problème dual (2.46).

Sous les hypothèses de la Théorème 2.1.2, il faut prouver la même estimation (2.7) pour le problème dual (2.46) :

Théorème 2.3.4. *Il existe C et $\gamma_0 \geqslant 1$ tels que pour tout $\gamma \geqslant \gamma_0$ et $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{Q})$ on ait :*

$$\gamma \|v\|^2_{L^2_{-\gamma}(Q)} + \|v^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_{-\gamma}(\Sigma)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|L^* v\|^2_{L^2_{-\gamma}(Q)} + \|Cv_{|x_d=0}\|^2_{L^2_{-\gamma}(\Sigma)}\right). \tag{2.49}$$

Démonstration. Il est nécessaire de vérifier que le problème dual satisfait les même hypothèses que le problème (2.8).

• Comme L satisfait à l'hypothèse 2.1.1, Métivier [18] a montré que pour tout $(t,x) \in Q$ la matrice $S_0^{-1}(t,x)$ est définie positive et les matrices $S_0^{-1}(t,x)A_j^*(t,x)$ sont symétriques pour $j = 1, \cdots, d$, ce qui montre que l'opérateur L^* aussi satisfait à l'hypothèse 2.1.1.

• Le fait que les hypothèses 2.1.2 - 2.1.4 soient satisfaites par le problème dual (2.46) est une conséquence directe de la définition de L^* et la forme de la matrice C .

• Le théorème 4-2 de [1] montre que le problème (2.46) satisfait la condition de Kreiss-Lopatinski uniforme .

Alors si on reprend tous les arguments de la démonstration du Théorème 2.2.1, on obtient que l'estimation d'énergie a priori (2.49) est satisfaite par le couple (L^*, C). □

2.3.2 Existence d'une solution faible pour le problème aux limites (2.8)

Les résultats des Théorèmes 2.2.1 et 2.3.4 permettent d'obtenir le résultat d'existence faible suivant

Proposition 2.3.5. *Il existe $\gamma_0 \geqslant 1$ tel que pour $\gamma \geqslant \gamma_0$, $F \in L^2_\gamma(Q)$ et $G \in L^2_\gamma(\Sigma)$, il existe $u \in L^2_\gamma(Q)$ telle que $e^{-\gamma t} u^{II}_{|x_d=0} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ où u est la solution du problème (2.8) (au sens des distributions).*

On utilise ici de manière standard les estimations a priori pour le problème dual et le théorème de Hahn Banach pour obtenir l'existence d'une solution faible du problème (2.8).

Démonstration. Sachant que l'espace $L^2_{-\gamma}$ est le dual de L^2_{γ}. La preuve se fait en utilisant des arguments de dualité, des résultats d'analyse fonctionnelle et les idées de [3, 21, 17, 1, 5].
On définie les sous espaces :

$$\mathscr{X} = \left\{v \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{Q}) : Cv_{|x_d=0} = 0\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{Y} = L^* \mathscr{X}.$$

Grâce à l'estimation a priori (2.49), on déduit que l'application $L^* \colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est bijective et soit $\mathscr{P}$ application inverse de L^* . Par conséquent, on peut définir une application linéaire l sur $\mathscr{Y}$ par

$$l(w) := \langle F, \mathscr{P}(w)\rangle_{L^2(Q)} + \langle G, M\mathscr{P}(w)_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)}, \quad w \in \mathscr{Y}. \tag{2.50}$$

De la structure par bloc de M (2.47), on remarque que $M(w) = M_1\mathscr{P}(w)^{II}$. Alors

$$|l(w)| \leqslant \|F\|_{L^2_\gamma(Q)}\|\mathscr{P}(w)\|_{L^2_{-\gamma}(Q)} + \|G\|_{L^2_\gamma(\Sigma)}\|M_1\|_{W^{1,\infty}(\Sigma)}\|\mathscr{P}(w)^{II}_{|x_d=0}\|_{L^2_{-\gamma}(\Sigma)}.$$

D'autre part en utilisant la définition de $\mathscr{P}$ et l'équation (2.50), pour tout $w \in \mathscr{Y}$ on a

$$|l(w)| \leqslant C(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}})\|w\|_{L^2_{-\gamma}(Q)},$$

ce qui signifie que la forme linéaire l est continue sur $\mathscr{Y}$ (pour la topologie de $L^2_{-\gamma}(Q)$).
Par le théorème de Hahn-Banach, l se prolonge donc en une forme linéaire continue $\tilde{l}$ sur $L^2_{-\gamma}(Q)$, et d'aprés le théorème de Riesz il existe $u \in L^2_\gamma(Q)$ tel que, pour tout $v \in \mathscr{X}$:

$$l(L^*v) = \langle u, L^*v\rangle_{L^2(Q)}.$$

En injectant la définition de l dans l'équation (2.50), on voit que u satisfait

$$\langle u, L^*v\rangle_{L^2(Q)} = \langle F, v\rangle_{L^2(Q)} + \langle G, Mv_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)}. \tag{2.51}$$

En particulier pour v dans $\mathcal{C}_0^\infty(Q) \subset \mathscr{X}$ on a

$$\langle u, L^*v\rangle_{L^2(Q)} = \langle F, v\rangle_{L^2(Q)},$$

et en utilisant la formule de Green (2.48), on obtient $Lu = F$ au sens des distribu-

tions.
Pour conclure la démonstration et montrer que u est en fait une solution faible du problème (2.8) il suffit donc de montrer que $u^{II}_{|x_d=0}$ vérifie les conditions de bords.
D'après le théorème 7 de [28], et l'hypothèse 2.1.2 la trace $A_d u_{|x_d=0} \in H^{-1/2}(\Sigma)$. Par la densité on a la formule de Green (2.48) se prolonge pour $v \in \mathscr{X}$

$$\langle u, L^* v\rangle_{L^2(Q)} = \langle F, v\rangle_{L^2(Q)} + \langle Bu_{|x_d=0}, Mv_{|x_d=0}\rangle_{H_\gamma^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)\times H_\gamma^{\frac{1}{2}}(\Sigma)},$$

et d'ou l'égalité (2.51), on déduit que $\langle Bu_{|x_d=0} - G, Mv_{|x_d=0}\rangle_{H_\gamma^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)\times H_\gamma^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} = 0$.
Puisque $\mathbb{R}^N = \ker C \oplus \ker M$ la matrice $M\colon \ker C \mapsto \mathbb{C}^p$ est bijective . Alors, pour tout $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$ il existe $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\overline{Q})$ tel que $M\varphi_{|x_d=0} = \psi$. Ce qui implique que $Bu_{|x_d=0} = G$ au sens des distributions.
Ainsi u est une solution faible du problème (2.8) et la Proposition 2.3.5 est démontrée. □

Maintenant que l'existence d'une solution faible est démontrée, il reste à établir l'unicité de cette solution faible,à établir que la trace de la partie non caractéristique de u c'est à dire u^{II} est dans $L^2_\gamma(\Sigma)$ sur le bord $\{x_d = 0\}$ et enfin que cette solution vérifie l'estimation d'énergie a priori (2.45). La fin de la démonstration du Théorème 2.3.1 consiste à établir le théorème suivant qui démontre que la solution du problème (2.8) est une solution forte.

2.3.3 Le théorème "faible=fort"

Nous montrons que la solution faible qui est donnée par la Proposition 2.3.5 est limite d'une suite régulières des solutions du problème (2.8) en utilisant des opérateurs de régularisation.

Théorème 2.3.6. *Soit $F \in L^2_\gamma(Q), G \in L^2_\gamma(\Sigma)$ et $u \in L^2_\gamma(Q)$. Alors, pour γ assez grand , u est une solution forte du problème (2.8) s'il existe une suite $(u^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1} \subset L^2(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^d))$ telle que*

$$\begin{aligned}
&u^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} u \qquad \textit{dans} \quad L^2_\gamma(Q),\\
&Lu^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} F \qquad \textit{dans} \quad L^2_\gamma(Q),\\
&Bu^\varepsilon_{|x_d=0} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} G \qquad \textit{dans} \quad L^2_\gamma(\Sigma).
\end{aligned}$$

En particulier $u^{II}_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\Sigma)$ *et l'estimation suivante est satisfaite*

$$\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q)} + \|u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|^2_{L^2_\gamma(Q)} + \|G\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma)}\right). \tag{2.52}$$

Avant de prouver le Théorème 2.3.6 nous aurons besoin d'introduire une famille d'opérateurs de régularisation tangentielle $(j_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ (voir [21, 17]).

Opérateurs de régularisation tangentielle

On considère une fonction $j \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}, \mathbb{R}_+)$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} j(t,y)dtdy = 1$, à support inclus dans $\{(t,y) \in \mathbb{R}^d\colon\ |t|+|y| \leqslant 1\}$. Pour tout $\varepsilon \in\,]0,1[$, on définit j_ε par $j_\varepsilon(t,y) = \varepsilon^{-d} j(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon})$ ainsi que l'opérateur de convolution J_ε de noyau j_ε.
Les résultats suivants sont bien connus. On renvoie à la référence [14] par exemple pour les détails .

Lemme 2.3.7. *La famille des opérateurs* $(J_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ *est uniformément bornée dans* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *et pour tout* $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$*, la suite* $\big(J_\varepsilon v\big)_{0<\varepsilon<1}$ *converge fortement vers* v *dans* $L^2(\mathbb{R}^d)$*.*

Remarque 2.3.8. *Notons que les résultats du lemme restent valables quand l'opérateur de convolution* J_ε *agit dans* $L^2_\gamma(Q)$*.*

On notera $[P_1, P_2] := P_1P_2 - P_2P_1$ le commutateur de deux opérateurs linéaire P_i. Nous rappelons le Lemme de Friedrichs (voir par exemple [3, 21]) qui établit une propriété de commutation entre l'opérateur J_ε et l'opérateur de multiplication d'un élément de $W^{1,\infty}(Q)$ avec l'opérateur de dérivation tangentielle.

Lemme 2.3.9 (Lemme de Friedrichs)**.** *Soit* $a \in W^{1,\infty}(Q)$*. Il existe une constant* $C > 0$ *tel que, pour tout* $\gamma \geqslant 1$, $\varepsilon \in\,]0,1[$, $k \in \{0,\ldots,d-1\}$ *et* $v \in L^2(Q)$ *on a :*

$$\|\,[a\partial_{x_k}, J_\varepsilon]\,v\|_{L^2(Q)} \leqslant C\|a\|_{W^{1,\infty}(Q)}\|v\|_{L^2(Q)} \quad \textit{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\|\,[a\partial_{x_k}, J_\varepsilon]\,v\|_{L^2(Q)} = 0. \tag{2.53}$$

Démonstration du Théorème 2.3.6

Considérons $\tilde{u} \in L^2(Q)$ la solution faible du problème (2.9) donnée par la Proposition 2.3.5. On définit

$$\tilde{u}^\varepsilon = J_\varepsilon \tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{+\infty}(\mathbb{R}^d)).$$

En utilisant les propriétés de J_ε, la suite $(\tilde{u}^\varepsilon)_\varepsilon \subset L^2(\mathbb{R}_+, H^{+\infty}(\mathbb{R}^d))$ converge fortement vers $\tilde{u}$ dans $L^2(Q)$.
Appliquons la matrice A_0 définie en (2.21) au vecteur $F_\gamma := L_\gamma \tilde{u} = (L + \gamma I_N)\tilde{u}$ et composons à gauche par l'opérateur J_ε, on obtient

$$J_\varepsilon(A_0 F_\gamma) = A_0 L_\gamma \tilde{u}^\varepsilon + R_\varepsilon \tilde{u},$$

où $R_\varepsilon \tilde{u} = \gamma\,[A_0, J_\varepsilon]\,\tilde{u} + [A_0 \partial_t, J_\varepsilon]\,\tilde{u} + \sum\limits_{j=1}^{d-1} \left[A_0 A_j \partial_{x_j}, J_\varepsilon\right]\tilde{u} + [\mathbf{I}_{n-m}\partial_{x_d}, J_\varepsilon]\,\tilde{u}$.
On sait déjà que $A_0 \in W^{1,\infty}(Q)$, $A_0 A_j \in W^{1,\infty}(Q)$, et $F_\gamma \in L^2(Q)$, on peut donc appliquer le Lemme 2.3.9 aux différents commutateurs, ce qui permet de déduire qu'il existe une famille des opérateurs $(R_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathscr{L}(L^2(Q))$ uniformément bornés tels que

$$A_0 L_\gamma \tilde{u}^\varepsilon - A_0 F_\gamma = \big(J_\varepsilon(A_0 F_\gamma) - A_0 F_\gamma\big) + R_\varepsilon \tilde{u}, \quad \text{où} \quad \|R_\varepsilon \tilde{u}\|_{L^2(Q)} \to 0. \tag{2.54}$$

En passant à la limite dans (2.54) on constate que la suite $(A_0 L_\gamma \tilde{u}^\varepsilon)_\varepsilon \subset L^2(Q))$ converge fortement vers $A_0 F_\gamma$ dans $L^2(Q)$ et en tenant compte l'inversibilité de la matrice A_0 , on a

$$L_\gamma \tilde{u}^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} F_\gamma \qquad \text{dans} \quad L^2(Q). \tag{2.55}$$

Maintenant on utilise les même arguments pour les conditions au bord en Σ. On sait que $\tilde{u}^{II}_{|x_d=0} \in H^{-1/2}(\Sigma)$ satisfait $B\tilde{u}_{|x_d=0} = G_\gamma \in L^2(\Sigma)$. Appliquant l'opérateur J_ε on obtient

$$J_\varepsilon(G_\gamma) = [B, J_\varepsilon]\tilde{u}_{|x_d=0} + B\tilde{u}^\varepsilon,$$

et par suite on a

$$B\tilde{u}^\varepsilon_{|x_d=0} - G_\gamma = \big(J_\varepsilon G_\gamma - G_\gamma\big) + [B, J_\varepsilon]\tilde{u}_{|x_d=0}, \quad \text{où} \quad \|[B, J_\varepsilon]\tilde{u}_{|x_d=0}\|_{L^2(\Sigma)} \to 0. \tag{2.56}$$

En passant à la limite dans l'égalité (2.56) on trouve

$$(B\tilde{u}^\varepsilon_{|x_d=0})_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} G_\gamma \qquad \text{dans} \quad L^2(\Sigma). \tag{2.57}$$

De plus, utilisant la continuité de l'opérateur de la trace $w \mapsto A_d w_{|x_d=0}$ de $\mathscr{H}_\gamma(Q)$ dans $H^{-1/2}(\Sigma)$ (Lemme 1.1.2), la suite $(A_d\tilde{u}^\varepsilon_{|x_d=0})_\varepsilon$ converge fortement $A_d\tilde{u}_{|x_d=0}$ dans $H^{-1/2}(\Sigma)$ et en utilisant le fait que la matrice A_d sous la forme (2.2), on déduit que

$$(\tilde{u}^\varepsilon)^{II}_{|x_d=0})_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \tilde{u}^{II}_{|x_d=0} \qquad \text{dans} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma). \tag{2.58}$$

Maintenant on montre que $\tilde{u}^{II}_{|x_d=0} \in L^2(\Sigma)$ et que l'estimation (2.52) est satisfaite. En utilisant aussi des argument de densité et continuité, l'estimation (2.10) donnée par le Théorème 2.2.1 reste vraie dans $\mathscr{H}_\gamma(Q)$.
Appliquant l'estimation (2.10) pour $\tilde{u}^\varepsilon \in \mathscr{H}_\gamma(Q)$ on déduit que il existe une constante $C > 0$ tel que γ assez grand et pour $\varepsilon \in]0,1[$

$$\gamma\|\tilde{u}^\varepsilon\|^2_{L^2(Q)} + \|(\tilde{u}^\varepsilon)^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|L_\gamma\tilde{u}^\varepsilon\|^2_{L^2(Q)} + \|B\tilde{u}^\varepsilon_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)}\right). \tag{2.59}$$

En appliquant l'estimation (2.59) à la différence $\tilde{u}^\varepsilon - \tilde{u}^{\varepsilon'}$ on obtient

$$\gamma\|\tilde{u}^\varepsilon - \tilde{u}^{\varepsilon'}\|^2_{L^2(Q)} + \|(\tilde{u}^\varepsilon)^{II}_{|x_d=0} - (\tilde{u}^{\varepsilon'})^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)} \leqslant$$
$$C\left(\frac{1}{\gamma}\|L_\gamma\tilde{u}^\varepsilon - L_\gamma\tilde{u}^{\varepsilon'}\|^2_{L^2(Q)} + \|B\tilde{u}^\varepsilon_{|x_d=0} - B\tilde{u}^{\varepsilon'}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)}\right).$$

En tenant compte des convergences (2.55) et (2.57), on déduit que la suite $((\tilde{u}^\varepsilon)^{II}_{|x_d=0})_\epsilon$ est de Cauchy qui converge fortement dans $L^2(\Sigma)$. En vertu de la convergence (2.58), cela implique que $\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}$ dans $L^2(\Sigma)$. De même, on obtient (2.52) par la passage à la limite dans (2.59). $\square$.

2.4 Résolution du problème mixte (2.1) avec condition initiale nulle

Dans ce paragraphe, on se place dans $Q_T = [0,T] \times \Omega$ de bord $\Sigma_T = [0,T] \times \partial\Omega$. Nous montrons que le problème mixte (2.1) avec la donnée initiale u_0 nulle est fortement bien posé dans L^2 aux sens de la Définition 1.3.2. On considère le problème homogène

$$\begin{cases} Lu = F & \text{dans} \quad Q_T, \\ Bu_{|x_d=0} = G & \text{sur} \quad \Sigma_T, \\ u_{|t=0} = 0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.60}$$

On établit résultat suivant

Théorème 2.4.1. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1.2 et pour tout $F \in L^2_\gamma(Q_T)$ et $G \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$, le problème (2.60) admet une unique solution $u \in L^2_\gamma(Q_T)$ telle que $u^{II}_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$. Par ailleurs $u \in C^0([0,T], L^2_\gamma(\Omega))$ et pour γ assez grand et pour tout $0 < t \leqslant T$ on a :*

$$\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)} + \|u(t)\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|G\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)}\right). \quad (2.61)$$

Avant de prouver le Théorème 2.4.1, nous aurons besoin de rappeler le théorème de support suivant bien connu sous le nom de principe de causalité .

Théorème 2.4.2 (Chazarain Piriou [3])**.** *Si $F \in L^2_\gamma(Q)$ et $G \in L^2_\gamma(\Sigma)$ s'annulent pour $t < t_0$, alors la solution du problème aux limites (2.8) aussi s'annule pour $t < t_0$.*

On renvoie à Chazarain Piriou [3], théorème 6.11, p 402 pour la démonstration de ce résultat dans le cas où les coefficients de classe $\mathcal{C}^\infty$. La régularité de coefficients ne jouant aucune rôle dans la démonstration, le théorème 2.4.2 reste vrai pour des coefficients Lipschitz.

2.4.1 Démonstration du Théorème 2.4.1

Considérons les données $F \in L^2_\gamma(Q_T)$ et $G \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$. Dans un premier temps pour démontrer l'existence de la solution u, on prolonge F, G par 0 pour $t < 0$ et pour $t > T$. Notant $\breve{F}$ et $\breve{G}$ les résultats de ces prolongements, alors par construction $\breve{F} \in L^2_\gamma(Q)$ et $\breve{G} \in L^2_\gamma(\Sigma)$. Par conséquent, pour γ assez grand et par le Théorème 2.3.6, il existe unique $\breve{u} \in L^2_\gamma(Q)$ tel que

$$\begin{cases} L\breve{u} = \breve{F} & \text{dans} \quad Q, \\ B\breve{u}_{|x_d=0} = \breve{G} & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases}$$

et d'après le Théorème 2.4.2 la solution $\breve{u} \in L^2_\gamma(Q)$ s'annule pour $t < 0$.
D'autre part, on sait que $\breve{u} \in \mathscr{H}_\gamma(Q)$ et le bord $\{t = 0\}$ est non caractéristique pour l'opérateur L (due à l'hyperbolicité de L en direction du temps t), alors la trace $\breve{u}_{|t=0} \in H^{-1/2}(\Omega)$. En utilisant la formule des sauts

$$L\breve{u}^\circ = (L\breve{u})^\circ + \breve{u}_{|t=0} \otimes \delta_{t=0}, \quad (2.62)$$

où $\breve{u}^\circ$ désigne le prolongement de $\breve{u}$ par 0 pour $t<0$ et comme $\breve{F}$ s'annule pour $t<0$, on déduit que $L\breve{u}^\circ = (L\breve{u})^\circ$ et par suite $\breve{u}_{|t=0} = 0$. Alors la restriction u de $\breve{u}$ sur Q_T est une solution dans $L^2_\gamma(Q_T)$ du problème (2.60) qui satisfait

$$\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q_T)} + \|u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_T)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|^2_{L^2_\gamma(Q_T)} + \|G\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_T)}\right). \tag{2.63}$$

Pour l'unicité de la solution u, il faut démontrer que la solution nulle est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{dans} \quad Q_T, \\ Bu_{|x_d=0} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_T, \\ u_{|t=0} = 0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.64}$$

Supposons que u soit une solution. En utilisant la même notation qui utilisée au début de la démonstration et la formule des sauts, $\breve{u}$ la solution du problème

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{dans} \quad]-\infty, T] \times \Omega, \\ Bu_{|x_d=0} = 0 & \text{sur} \quad]-\infty, T] \times \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.65}$$

Maintenant on introduit une fonction régulière θ tel que $\theta \equiv 1$ sur $]-\infty, \tau]$, $\tau < T$ et $\theta \equiv 0$ sur $[T, +\infty[$.
Alors $\theta\breve{u}$ et $L(\theta\breve{u})$ dans $L^2(\overline{Q})$,$B\theta\breve{u}$ dans $L^2(\Sigma)$. De plus $L(\theta\breve{u}) \equiv 0$ et $B\theta\breve{u} \equiv 0$ pour $t<\tau$. D'aprés le Théorème 2.4.2 on a $\theta\breve{u} = 0$ pour $t<\tau$.
Il reste juste à démontrer que la solution du problème (2.60) est continue en temps et satisfait (2.61) pour conclure le Théorème 2.4.1. Pour cela utilisant le fait que L est un opérateur symmetrisable au sens de Friedrichs, il faut d'abors démontrer proposition suivante :

Proposition 2.4.3. *[21, 18] Il existe C et $\gamma_0 \geqslant 1$ tels que pour tout $\gamma \geqslant \gamma_0$ et $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_0(\overline{Q})$ tel que $\varphi_{|t<0} = 0$ on ait :*

$$e^{-2\gamma t}\|\varphi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|e^{-\gamma t}L\varphi\|^2_{L^2(Q_t)} + \gamma\|e^{-\gamma t}\varphi\|^2_{L^2(Q_t)} + \|e^{-\gamma t}\varphi^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma_t)}\right), \tag{2.66}$$

pour tout $0 < t \leqslant T$,

Admettons pour l'instant cette proposition .
Par densité, l'estimation (2.66) se prolonge pour $\varphi \in \mathscr{H}_0(Q)$ telle que $\varphi_{|t<0} = 0$) .
Par le Théorème 2.3.6, on considère la suite regularisante (v^ε) dans

$L^2(\mathbb{R}_+, H^{+\infty}(\mathbb{R}^d))$ tel que $v^\varepsilon_{|t<0} = 0$ et satisfait

$$\begin{aligned}
v^\varepsilon &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} e^{-\gamma t}\breve{u} &\quad \text{dans} \quad & L^2(Q),\\
(v^\varepsilon_{|x_d=0})^{II} &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} e^{-\gamma t}(\breve{u}_{|x_d=0})^{II} &\quad \text{dans} \quad & L^2(\Sigma),\\
Lv^\varepsilon &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} e^{-\gamma t}\breve{F} &\quad \text{dans} \quad & L^2(Q),\\
Bu^\varepsilon_{|x_d=0} &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} e^{-\gamma t}\breve{G} &\quad \text{dans} \quad & L^2(\Sigma).
\end{aligned}$$

En appliquant l'estimation (2.66) à la différence $e^{\gamma t}(v^\varepsilon - v^{\varepsilon'})$ on obtient

$$\begin{aligned}
\|v^\varepsilon(t) \quad &- \quad v^{\varepsilon'}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant \quad C\left(\frac{1}{\gamma}\|Lv^\varepsilon - Lv^{\varepsilon'}\|^2_{L^2(Q_t)} + \gamma\|v^\varepsilon - v^{\varepsilon'}\|^2_{L^2(Q_t)} + \|(v^\varepsilon_{|x_d=0})^{II} - (v^{\varepsilon'}_{|x_d=0})^{II}\|^2_{L^2(\Sigma_t)}\right),
\end{aligned}$$

ce qui implique que la suite $(v^\varepsilon) \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d_+))$ est de Cauchy.
Par le passage à la limite et en utilisant le fait que la solution est unique, on obtient $\breve{u} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, L^2_\gamma(\mathbb{R}^d_+))$. Alors si on pose $u = \breve{u}_{|Q_T}$ on trouve que la solution u du problème (2.60) dans $\mathscr{C}^0([0,T], L^2_\gamma(\mathbb{R}^d_+))$.
Maintenant on applique l'estimation (2.66) à v^ε, on obtient

$$\|v^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|Lv^\varepsilon\|^2_{L^2(Q_t)} + \gamma\|v^\varepsilon\|^2_{L^2(Q_t)} + \|(v^\varepsilon_{|x_d=0})^{II}\|^2_{L^2(\Sigma_t)}\right).$$

Par le passage à limite, on a

$$\|e^{-\gamma t}\breve{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|e^{-\gamma t}\breve{F}\|^2_{L^2(Q_t)} + \gamma\|e^{-\gamma t}\breve{u}\|^2_{L^2(Q_t)} + \|e^{-\gamma t}(\breve{u}_{|x_d=0})^{II}\|^2_{L^2(\Sigma_t)}\right),$$

et en utilisant le fait que $u = \breve{u}_{|Q_T}$, on obtient

$$e^{-2\gamma t}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)}\right). \tag{2.67}$$

En utilisant l'estimation ci dessus et (2.63), on obtient la solution u satisfait (2.61) . Ce qui démontre le Théorème 2.4.1. $\square$.

2.4.2 Démonstration de la Proposition 2.4.3

Soit $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\overline{Q})$ tel que $\varphi_{|t<0} = 0$. Si on pose $\tilde{\varphi} = e^{-\gamma t}\varphi$, alors

$$L_\gamma \tilde{\varphi} = \gamma\tilde{\varphi} + \partial_t \tilde{\varphi} + \sum_{j=1}^{j=d-1} A_j \partial_j \tilde{\varphi} + A_d \partial_d \tilde{\varphi}. \tag{2.68}$$

Comme L est *Friedrichs symétrisable*, en effectuant la dérivation en t de la fonction $t \mapsto \langle S\tilde{\varphi}(t), \tilde{\varphi}(t)\rangle_{L^2(\Omega)}$, il vient

$$\partial_t \langle S_0\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \partial_t S_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)} + 2\Re e\langle S_0 \partial_t \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)},$$

où φ dépendant la variable t. De l'égalité (2.68), on a

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle S_0\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle \partial_t S_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)} + 2\Re e\langle S_0 L_\gamma \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)} + 2\Re e\langle \gamma S_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&+ 2\Re e\langle S_0 A_d \partial_d \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{j=d-1} 2\Re e\langle S_0 A_j \partial_j \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Il est clair que

$$2\Re e\langle S_0 A_d \partial_d \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_0^{+\infty} 2\Re e\langle S_0 A_d \partial_d \tilde{\varphi}(t, x_d)), \tilde{\varphi}(t, x_d)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} dx_d.$$

Comme la matrice $S_0 A_d$ est symétrique, on a

$$2\Re e\langle S_0 A_d \partial_d \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} = -\langle S_0 A_d \tilde{\varphi}(t)_{|x_d=0}, \tilde{\varphi}(t)_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} - \langle \partial_d(S_0 A_d)\tilde{\varphi}(t)), \tilde{\varphi}(t)\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Les matrice $S_0 A_j$ étant aussi symétriques, on a

$$2\Re e\langle S_0 A_j \partial_j \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle \partial_j(S_0 A_j)\tilde{\varphi}(t)), \tilde{\varphi}(t)\rangle_{L^2(\Omega)},$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle S_0\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle \partial_t S_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)} + 2\Re e\langle S_0 L_\gamma \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)} + 2\Re e\langle \gamma S_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&+ \Re e\langle -S_0 A_d \tilde{\varphi}_{|x_d=0}, \tilde{\varphi}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} - \Re e\langle \partial_d(S_0 A_d)\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&+ \sum_{j=1}^{j=d-1} \langle -\partial_j(S_0 A_j)\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\tilde{\varphi}_{|t=0} = 0$, puis en intégrant l'équation ci-dessus en t, on obtient

$$\begin{aligned}\langle S_0\tilde{\varphi}(t), \tilde{\varphi}(t)\rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle \partial_t S_0\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(Q_t)} + 2\Re e\langle S_0 L_\gamma\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(Q_t)} + 2\Re e\langle \gamma S\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(Q_t)} \\ &- \langle S_0 A_d\tilde{\varphi}_{|x_d=0}, \tilde{\varphi}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma)} - \langle \partial_d(S_0A_d)\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(Q_t)} \\ &+ \sum_{j=1}^{j=d-1} \langle -\partial_j(SA_j)\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(Q_t)},\end{aligned}$$

pour tout $0 < t \leqslant T$. En utilisant l'inégalité de Young et la continuité L^2 des opérateurs, on obtient

$$\langle(\partial_t S_0)\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle\rangle_{L^2(Q_t)} \leqslant C\|\tilde{\varphi}\|^2_{L^2(Q_t)}. \tag{2.69}$$

$$2\Re e\langle \gamma S_0\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(Q_t)} \leqslant C\gamma\|\tilde{\varphi}\|^2_{L^2(Q_t)}. \tag{2.70}$$

$$\sum_{j=1}^{j=d-1} \langle(-\partial_j S_0 A_j)\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(Q_t)} \leqslant C\|\tilde{\varphi}\|^2_{L^2(Q_t)} \tag{2.71}$$

$$\langle -\partial_d(S_0A_d)\tilde{u}, \tilde{u}\rangle_{L^2(Q_t)} \leqslant C\|\tilde{\varphi}\|^2_{L^2(Q_t)}. \tag{2.72}$$

$$\langle -S_0A_d\tilde{\varphi}_{|x_d=0}, \tilde{\varphi}_{|x_d=0}\rangle_{L^2(\Sigma_t)} \leqslant C'\|\tilde{\varphi}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma_t)} \tag{2.73}$$

$$2\Re e\langle S_0 L_\gamma\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\rangle_{L^2(Q_t)} \leqslant \frac{C_1}{\gamma}\|L_\gamma\tilde{\varphi}\|^2_{L^2(Q_t)} + \varepsilon\gamma\|\tilde{\varphi}\|^2_{L^2(Q_t)}. \tag{2.74}$$

Maintenant en utilisant le fait que la matrice $S_0 \in \Gamma_1^0$ est définie positive, d'après Proposition 1.2.16 de Garding on a

$$2\Re e\langle S_0\tilde{\varphi}(t), \tilde{\varphi}(t)\rangle_{L^2(\Omega)} \geqslant C_2\|\tilde{\varphi}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.75}$$

Finalement, en utilisant (2.69), (2.70), (2.71), (2.72), (2.73), (2.74) et (2.75) on a

$$C_2\|\tilde{\varphi}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\tilde{\varphi}\|^2_{L^2(Q_t)} + C'\|\tilde{\varphi}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma_t)} + \frac{C_1}{\gamma}\|L_\gamma\tilde{\varphi}\|^2_{L^2(Q_t)} + (\varepsilon + C)\gamma\|\tilde{\varphi}\|^2_{L^2(Q_t)},$$

et pour choisir ε, on conclut que

$$\|\tilde{\varphi}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|L_\gamma\tilde{\varphi}\|^2_{L^2(Q_t)} + \gamma\|\tilde{\varphi}\|^2_{L^2(Q_t)} + \|\tilde{\varphi}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma_t)}\right), \tag{2.76}$$

pour γ assez grand. Ce qui démontre l'estimation (2.66). □

2.5 Résolution du problème mixte (2.1) avec condition initiale non nulle

Dans ce paragraphe, nous donnons la dernière étape dans la démonstration du théorème principale 2.1.2.
Pour la résolution du problème (2.1) non homogène avec $u_0 \in L^2(\Omega)$, on utilise le fait que L est symétrisable au sens de Friedrichs et des idées prises des travaux de [10, 16]. Il s'agit décomposer le problème en deux problèmes, le premier serait un problème mixte avec une condition initiale non nulle, mais avec une condition aux limites strictement dissipative. Quant au second problème, il serait un problème mixte avec une condition initiale nulle, du même type que le problème mixte considéré dans le paragraphe précédent.
Par l'hypothèses 2.1.1 et 2.1.2, il existe une matrice définie positive $S_0(t,x)$ tel que $S_0 A_d(t,x)$ est une matrice symétrique où $A_d(t,x)$ sous la forme (2.2). Ce qui implique que il existe une matrice $(N-m)\times(N-m)$ définie positive $S_d(t,x)$ tel que

$$S_0 A_d(t,x) = \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ 0 & S_d a_d(t,x) \end{pmatrix}, \tag{2.77}$$

où la matrice $S_d a_d(t,x)$ est aussi symétrique.
Comme la sous matrice $a_d(t,x)$ est uniformément inversible, en utilisant la remarque 1.3 de [10] et L est Friedrichs symétrisable, il existe une matrice $M_d(t,x)$ de type $p\times(N-m)$ telle que la matrice $S_d a_d(t,x)$ soit définie négative sur $\ker M_d(t,x)$. Si on pose

$$M(t,x) = \begin{pmatrix} 0_{p\times m} & M_d(t,x) \end{pmatrix}, \tag{2.78}$$

alors la matrice $S_0 A_d(t,x)$ est définie négative sur $\ker M(t,x)$.
Avec les mêmes notations, on considère le problème mixte suivant :

$$\begin{cases} L_\gamma \tilde{w} :\ = F_\gamma & \text{dans} \quad Q_T, \\ M\tilde{w} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_T, \\ \tilde{w}_{|t=0} = u_0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.79}$$

On remarque que le problème (2.79) vérifie toutes les hypothèses du Théorème 1.4.3 et comme la matrice A_d est sous la forme (2.2), alors ce problème admet une unique solution $w \in L^2_\gamma(Q_T)$ tel que la trace $w^{II}_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\Sigma)$. En outre $w \in C^0([0,T], L^2_\gamma(\Omega))$

et satisfait pour tout γ assez grand l'estimation

$$e^{-2\gamma t}\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\gamma\|w\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)}+\|w^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)}\leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)}+\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right),\tag{2.80}$$

pour tout $t\in[0,T]$. Considérons maintenant $\tilde{w}$ la solution du problème (2.79) et on considère le problème homogène

$$\begin{cases}L_\gamma\tilde{v}=0 \quad \text{dans} \quad Q_T,\\ B\tilde{v}_{|x_d=0}=G_\gamma-B\tilde{w}_{|x_d=0} \quad \text{sur} \quad \Sigma_T,\\ \tilde{v}_{|t=0}=0 \quad \text{dans} \quad \Omega.\end{cases}\tag{2.81}$$

On peut remarquer que le problème (2.81) vérifie tous les hypothèses du théorème 2.4.1, alors il admet une unique solution $v\in L^2_\gamma(Q_T)$ tel que $v^{II}_{|x_d=0}\in L^2_\gamma(\Sigma_T)$. De plus $v\in C^0([0,T],L^2_\gamma(\Omega))$ et satisfait l'estimation a priori de la forme

$$\gamma\|v\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)}+\|v^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)}+\|v(t)\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)}\leqslant C\|G_\gamma-B_2\tilde{w}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)},$$

et par suite, on a

$$\gamma\|v\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)}+\|v^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)}+\|v(t)\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)}\leqslant C\left(\|G\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)}+\|w^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)}\right).\tag{2.82}$$

Il est clair que $u:=v+w$ est la solution du problème mixte (2.1) dans $L^2_\gamma(Q_T)$ tel que $u^{II}_{|x_d=0}\in L^2_\gamma(\Sigma_T)$. De plus $u\in C^0([0,T],L^2_\gamma(\Omega))$.
Il reste à montrer que la solution u du problème (2.1) satisfait l'estimation (2.5). On sait que $u\in\mathscr{H}_0(Q_T)$ et la trace $u^{II}_{|x_d=0}$ est bien définie dans $L^2_\gamma(\Sigma_T)$, alors si on répète les même arguments de la Proposition 2.4.3 pour un problème mixte avec $u_{|t=0}\neq 0$ on obtient

$$e^{-2\gamma t}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C\left(\|u_{|t=0}\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{\gamma}\|Lu\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)}+\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)}+\|u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)}\right),\tag{2.83}$$

pour tout $t\in[0,T]$.
Finalement, en combinant les estimations (2.80),(2.82) avec (2.83), on obtient l'estimation (2.5) pour γ assez grand. Ce qui démontre le théorème principal 2.1.2. $\square$

2.6 Démonstration du Théorème 2.1.3

Dans ce paragraphe, nous présentons la démonstration du Théorème 2.1.3, le second théorème dans ce chapitre en utilisant les même arguments déjà utilisés par Métivier [20] dans le cas non caractéristique..

Théorème 2.6.1. *Sous tous les hypothèses du Théorème 2.1.2, il existe constante* $C > 0$ *tel que pour tout* F, G *et* u_0 *régulières qui s'annule au voisinage de* $\{t = x_d = 0\}$*, le problème* (2.1) *admet une unique solution* $u \in L^2(Q_T)$ *tel que* $u^{II}_{|x_d=0} \in L^2(\Sigma_T)$*. De plus* $u \in C^0([0,T], L^2(\Omega))$ *et satisfait pour tout* $0 < t \leqslant T$

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u^{II}_{|x_d=0}\|_{L^2(\Sigma_t)} \leqslant C\left(\int_0^t \|F(s)\|_{L^2(\Omega)} ds + \|G\|_{L^2(\Sigma_t)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.84}$$

Il est clair que par des arguments de densité-continuité, le théorème 2.1.3 est la conséquence direct du théorème ci dessus. Donnons dans ce qui suit la démonstration du Théorème 2.6.1.

Démonstration. Supposons que $F \in L^2(Q_T)$, $G \in L^2(\Sigma_T)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$. Par le Théorème 2.1.2 le problème (2.1) admet une unique solution $u \in L^2(Q_T)$ telle que $u^{II}_{|x_d=0} \in L^2(\Sigma_T)$ qui satisfait l'estimation

$$\begin{aligned}
&\gamma\|e^{-\gamma t}u\|^2_{L^2(Q_T)} + \|e^{-\gamma t}u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma_T)} + e^{-2\gamma T}\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}(\|e^{-\gamma t}F\|^2_{L^2(Q_T)} + \|e^{-\gamma t}G\|^2_{L^2(\Sigma_T)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Considérant le paramètre $\gamma := \frac{1}{T}$, on trouve

$$\|u^{II}_{|x_d=0}\|_{L^2(\Sigma_T)} + \|u(T)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(\sqrt{T}\|F\|_{L^2(Q_T)} + \|G\|_{L^2(\Sigma_T)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}\right), \tag{2.85}$$

La démonstration consistera à remplacer la norme L^2 de F par la norme $L^1([0;T]; L^2)$ dans l'estimation ci dessus pour trouver (2.84).
On considère les deux problèmes

$$\begin{cases}
Lu = 0 & \text{dans} \quad Q_T, \\
Bu = G & \text{sur} \quad \Sigma_T, \\
u_{|t=0} = u_0 & \text{dans} \quad \Omega,
\end{cases}$$

et

$$\begin{cases} Lu = F & \text{dans} \quad Q_T, \\ Bu = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_T, \\ u_{|t=0} = 0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.86}$$

On peut remarquer que ces deux problèmes sont la décomposition du problème (2.1), alors par linéarité il faut vérifier que la solution de chaque problème satisfait l'estimation (2.84). Pour le premier problème, la solution u satisfait (2.85) pour tout $T > 0$ et par suit l'estimation (2.84).

Il reste donc à montrer que la solution du problème (2.86) satisfait l'estimation (2.84) pour terminer la démonstration du théorème.

En premier lieu, nous rappelons la Proposition 5.14 et le lemme 5.15 de [20].

Proposition 2.6.2. *[20] Il existe une famille des opérateurs bornée $\mathcal{E}(t,s)$ de $L^2(\Omega)$ vers $L^2(\Omega)$ pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, tel que pour tout $s \in [0;1[$, $u(t) = \mathcal{E}(t,s)u_0$ est la solution unique du problème*

$$\begin{cases} Lu = 0 & \textit{dans} \quad Q_T, \\ Bu = 0 & \textit{sur} \quad \Sigma_T, \\ u_{|t=0} = u_0 & \textit{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

Lemme 2.6.3. *[20] Soit F régulière s'annule au voisinage du coin $\{t = x_d = 0\}$, la solution du problème (2.86) est donnée par le principe de Duhamel*

$$u(t) = \int_0^t \mathcal{E}(t,s)F(s)ds, \tag{2.87}$$

où $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

On considère le problème

$$\begin{cases} Lv = 0 & \text{dans} \quad [0,T] \times \Omega, \\ Bv = 0 & \text{sur} \quad [0,T] \times \partial\Omega, \\ v_{|t=0} = F(s) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.88}$$

D'après la Proposition 2.6.2, $v(t) = \mathcal{E}(t,s)F(s)$ est la solution unique du problème ci dessus, par conséquent v satisfait l'estimation (2.85)

$$\|v^{II}_{|x_d=0}\|_{L^2(\Sigma_t)} + \|v(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|F(s)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.89}$$

où $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. En intégrant par rapport à s on trouve

$$\int_0^t \|v^{II}_{|x_d=0}\|_{L^2(\Sigma_t)} ds + \int_0^t \|v(t)\|_{L^2(\Omega)} ds \leqslant C \left(\int_0^t \|F(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \right). \tag{2.90}$$

D'autre part, d'après le Lemme 2.6.3, la solution du problème (2.86) est s'écrit sous la forme

$$u(t) = \int_0^t v(t) ds, \tag{2.91}$$

et par suit, on a

$$\|u^{II}_{|x_d=0}\|_{L^2(\Sigma_t)} + \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \int_0^t \|v^{II}_{|x_d=0}\|_{L^2(\Sigma_t)} ds + \int_0^t \|v(t)\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

Finalement, en utilisant l'estimation ci dessus et (2.89), la solution du problème (2.86) satisfait

$$\|u^{II}_{|x_d=0}\|_{L^2(\Sigma_t)} + \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \left(\int_0^t \|F(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \right),$$

c'est à dire l'estimation (2.84) est satisfaite. Ce qui démontre le Théorème 2.6.1. $\square$

3 Problèmes mixtes caractéristiques avec la condition Kreiss-Lopatinskii affaiblie

Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans la revue *Annales Polonici Mathematici*, [23].

Dans la deuxième partie de cette thèse, on considère un problème aux limites pour un système du premier ordre d'équations aux dérivées partielles hyperboliques à coefficients constants où l'opérateur différentiel L est supposé Friedrichs symétrisable (hypothèse 3.1.1) à frontière caractéristique (hypothèse 3.1.2) et satisfait une version affaiblie de la condition dite Kreiss-Lopatinskii uniforme (voir la Définition 3.1.1).

Ce chapitre contient deux importants résultats. Dans le premier, on montrera que le problème est faiblement bien posé dans L^2 au sens où il admet une solution unique satisfaisant une estimation d'énergie avec une perte de régularité par rapport à les données. Le cas où les coefficients constants permet d'utiliser l'analyse de Fourier-Laplace.

Pour le second résultat, on prolonge l'analyse à un problème mixte avec la donnée initiale non nulle où la variable du temps est localisée dans $[0, T]$. On démontre que le problème est fortement bien posé dans L^2 sous toutes les hypothèse du Théorème 2.1.2 sans utiliser l'outil algébrique *symétriseur de Kreiss.*

3.1 Description du problème

On considère le problème aux limite à coefficients constants suivant :

$$\begin{cases} Lu = \dfrac{\partial}{\partial t}u + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j} = F, \qquad \text{dans} \quad Q, \\ Bu = G \qquad \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $A_1, A_2, \cdots, A_d$ sont des matrices de type $N \times N$ à coefficients réels. L'inconnue $u(t,x)$ ainsi $F(t,x)$ sont à valeurs vectorielles dans $\mathbb{C}^N$. La matrice B est de type $p \times N$ et $G(t,x)$ est à valeurs vectorielles dans $\mathbb{C}^p$.

3.1.1 Hypothèses

On fait les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.1.1. *L'opérateur L est Friedrichs symétrisable, c'est à dire qu'il existe une matrice symétrique, définie positive S_0 telle que les matrices $S_0 A_j$, pour $j = 1, \ldots, d$, soient aussi symétriques.*

Hypothèse 3.1.2. *Le problème (3.1) est caractéristique de constant multiplicité, c'est à dire que la matrice A_d est singulière et de rang constant $N - m$. De plus, nous supposons que A_d sous la forme*

$$\begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ 0 & a_d \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

avec a_d est une matrice inversible.

Correspondant à cette représentation, l'inconnue u s'écrit comme $(u^I, u^{II})^T$, où u^{II} s'appelle la partie non caractéristique de u et u^I la partie caractéristique.

Hypothèse 3.1.3. *Pour tout $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}, \xi_d) := (\eta, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$, avec $\xi \neq 0$, le symbole matrice $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} \xi_j A_j := A(\eta) + \xi_d A_d$ admet une valeur propre $\lambda \equiv 0$ de* *multiplicité m, alors la matrice $A(\eta) = \sum_{j=1}^{d-1} \xi_j A_j$ admet une décomposition par blocs de la forme*

$$A(\eta) := \begin{pmatrix} 0_m & a_{1,2}(\eta) \\ a_{2,1}(\eta) & a_2(\eta) \end{pmatrix}, \quad \eta \in \mathbb{R}^{d-1}. \tag{3.3}$$

Hypothèse 3.1.4. *La matrice B est de rang maximal p où p est le nombre des valeurs propres positives de la matrice A_d et satisfait $\ker A_d \subset \ker B$. Pour cela après une transformation linéaire on suppose que la matrice B prend la forme*

$$B = \begin{pmatrix} 0_{p\times m} & , B_1 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

avec B_1 est une matrice de type $p \times (N-m)$.

Comme mentionné dans l'introduction, on supposera que le problème (3.1) satisfait une version affaiblie de la condition Kreiss-Lopatinskii uniforme, voir par exemple [8, 18, 1]. Avant de donner la définition de cette condition dans ce cas, on introduit les variables de fréquence

$$\zeta = (\tau, \eta) \quad \tau = \gamma + i\sigma \in \mathbb{C}_+ : \quad \Re e(\tau) = \gamma > 0\,, \Im m(\tau) = \sigma \in \mathbb{R}, \quad \eta \in \mathbb{R}^{d-1},$$

et l'espace de fréquences

$$\Xi_+ = \left\{ (\tau, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1} \backslash (0,0) : |\tau|^2 + |\eta|^2 = 1, \gamma > 0 \right\}.$$

On introduit aussi $\mathbb{E}_-(\tau, \eta)$, le sous-espace stable associé au système singulier

$$(\tau I_N + iA(\eta))\phi + A_d \frac{\partial \phi}{\partial x_d} = 0, \tag{3.5}$$

obtenu après transformation de Fourier-Laplace en la variable d'espace tangentielle (t, y) dans l'équation de l'intérieur du problème (3.1) avec $F = 0$.

Definition 3.1.1. *Soit s nombre réel positif. On dit que le système (L, B) vérifie la condition s-Kreiss-Lopatinskii faible si*

$$\exists\, C > 0,\ \forall\, (\tau, \eta) \in \Xi_+ \qquad \left(v \in \mathbb{E}_-(\tau, \eta) \right) \quad \Rightarrow \quad |A_d v| \leqslant C\gamma^{-s} |Bv| \Big). \tag{3.6}$$

Hypothèse 3.1.5. *Le problème aux limites (3.1) satisfait la condition s-WKL et pour tout $s \geqslant 0$.*

Remarque 3.1.2. *Grâce à la Définition 3.1.1, on peut remarquer que la condition (3.6) est la formulation standard de la Condition Kreiss-Lopatinskii Uniforme(UKL) dans le cas $s = 0$.*

3.1.2 Les principaux résultats

Le premier résultat de ce chapitre se formule comme suit :

Théorème 3.1.3. *Supposons que les hypothèses 3.1.1-3.1.5 soient satisfaites pour un indice $s \geqslant 0$. Il existe constant $C > 0$ tel que pour tout $\gamma > 0$, pour tout $F \in L^2\big(\mathbb{R}_+, H^s_\gamma(\Sigma)\big)$, $G \in H^s_\gamma(\Sigma)$, le problème (3.1) admet une unique solution $u \in L^2_\gamma(Q)$ telle que $u^{II}_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\Sigma)$. Par ailleurs, u satisfait une estimation d'énergie de la forme*

$$\gamma \|e^{-\gamma t} u\|^2_{L^2(Q)} + \|e^{-\gamma t} u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)} \leqslant C \left(\frac{1}{\gamma^{2s+1}} |||e^{-\gamma t} F|||^2_{s,\gamma} + \frac{1}{\gamma^{2s}} \|e^{-\gamma t} G\|^2_{s,\gamma} \right). \tag{3.7}$$

Benzoni-Gavage et Serre [1] ont construit un symétriseur de Kreiss sous la condition Kreiss-Lopatinskii uniforme pour des système hyperbolique symétrique avec des coefficients constants et de frontière caractéristique, avec l'hypothèse particulière que la matrice symbole $A(\eta)$ (3.3) sous la forme par bloc

$$A(\eta) = \begin{pmatrix} 0_m & a^T_{2,1}(\eta) \\ a_{2,1}(\eta) & a_2(\eta) \end{pmatrix}, \quad \eta \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

avec $a_2(\eta) \equiv 0$. Ainsi, dans le chapitre 2 de notre travail, nous montrons que le problème (3.1) est bien posé dans L^2. En effet dans ces résultats, on peut fournir une estimation d'énergie a priori sans perte de régularité de la solution par rapport aux données.

Cependant, dans de nombreux exemples physique comme l'élasticité linéaire où les équations d'Euler de la dynamique des fluides, la condition Kreiss-Lopatinskii uniforme dégénère sur certains points de Ξ_+ on peut citer [24, 25, 5, 8].

Récemment, certaines formes affaiblies de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme ont été traitées. J.F. Coulombel et P. Secchi [5] ont étudié la stabilité linéaire d'une *compressible vortex sheet*. Ils ont pu fournir une estimation d'énergie a priori similaire à (3.7) dans le cas où $s = 1$.
M.Eller [8] a prouvé sous l'hypothèse 3.1.5 le Théorème 2.1.2 dans le cas non caractéristique où l'opérateur est constamment hyperbolique .
Dans notre travail, en utilisant une approche différente et des idées de [16, 5, 10], on donne une autre preuve du théorème 2.1.2, et malgré les conditions aux limites non nulle sans invoquer le symétriseur de Kreiss [1, 3, 13].
En effet, la stratégie de la preuve consiste à scinder le problème original en deux problèmes aux limites. Dans le premier problème, grâce à l'hypothèse Friedrichs symétrisable, l'équation de l'intérieur du problème est couplée à une condition aux limites strictement dissipative. Pour ce problème, nous avons des résultats bien connus, voir par exemple [14, 18, 1].
Dans le second problème, l'équation de l'intérieur a un terme source nul, et la condition aux limites satisfait la condition de Kreiss-Lopatinskii affaiblie.

Motivés par les conclusions du théorème 3.1.3, il serait utile de prolonger l'analyse à un problème mixte sur un intervalle de temps fini $[0,T]$ avec une donnée initiale non nulle où l'hypothèse 3.1.5 est vérifiée pour $s = 0$, c'est-à-dire dans le cas où la condition Kreiss-Lopatinskii uniforme est satisfaite pour le système (L,B).
Considère le problème mixte

$$\begin{cases} Lu = \dfrac{\partial}{\partial t}u + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j} = F, \qquad \text{dans} \quad Q_T, \\ Bu = G \qquad \text{sur} \quad \Sigma_T, \\ u_{|t=0} = u_0 \qquad \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

avec les données $F \in L^2(Q_T)$, $G \in L^2(\Sigma_T)$ et $u_0 \in L^2\left(\mathbb{R}^d_+\right)$.
Le deuxième résultat de ce chapitre se formule comme suit :

Théorème 3.1.4. *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème 3.1.3 soient satisfaites dans le cas $s = 0$. Pour tout $F \in L^2_\gamma(Q_T)$, $G \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, le problème (3.8) admet une unique solution $u \in L^2_\gamma(Q_T)$ telle que $u^{II}_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$. Par* *ailleurs,* $u \in C^0\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$ *et satisfait à l'estimation*

$$\begin{aligned} &\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)} + e^{-2\gamma t}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|G\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right), \end{aligned} \tag{3.9}$$

pour tout $t \in [0,T]$.

3.2 La démonstration du Théorème 3.1.3

3.2.1 Le problème aux limites auxiliaire strictement dissipative

Pour $\gamma > 0$, posant $\tilde{u} = e^{-\gamma t}u$ et $\tilde{F} := e^{-\gamma t}F$, $\tilde{G} := e^{-\gamma t}G$, le problème (3.1) est devient équivalent au problème

$$\begin{cases} L_\gamma \tilde{u} : = L\tilde{u} + \gamma\tilde{u} = \tilde{F} & \text{dans} \quad Q, \\ B\tilde{u} = \tilde{G} & \text{sur} \quad \Sigma. \end{cases} \tag{3.10}$$

Par les hypothèses 3.1.1 et 3.1.2 il existe une matrice définie positive S_0 telle que S_0A_d est une matrice symétrique, A_d de la forme (3.2). Ce qui implique que il existe une matrice $(N-m)\times(N-m)$ définie positive S_d telle que

$$S_0A_d = \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ 0 & S_d a_d \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

où la matrice $S_d a_d$ est aussi symétrique.
Comme la sous matrice a_d est inversible et en utilisant la remarque 1.3 de [10] et l'hypothèse que L est Friedrichs symérisable, il existe une matrice M_d de type $p\times(N-m)$ telle que la matrice $S_d a_d$ est définie négative sur $\ker M_d$. Posant

$$M = \begin{pmatrix} 0_{p\times m} & M_d \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Par conséquent la matrice S_0A_d est définie négative sur $\ker M$. Ce qui implique que la matrice M est strictement dissipative, c'est à dire il existe des constantes positive c et C tel que pour tout $w \in \mathbb{C}^N$, on a

$$-\langle S_0A_d w, w\rangle_{\mathbb{C}^N} \geqslant c|w^{II}|^2 - C|Mw|^2, \tag{3.13}$$

voir la Proposition 1.4.2
On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} L_\gamma \tilde{w} = (\frac{\partial}{\partial t} + \gamma)\tilde{w} + \sum_{j=1}^{d-1} A_j \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_j} + A_d \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_d} = \tilde{F} \qquad \text{dans} \quad Q, \\ M\tilde{w} = 0 \qquad \text{sur} \quad \Sigma. \end{cases} \tag{3.14}$$

Ce problème entre dans le cadre des problèmes aux limites hyperboliques strictement dissipatifs qui ont été traités par plusieurs auteurs (voir par exemple [14, 18, 1]) pour lesquels un résultat de fortement bien posé a été établi. Par conséquent, en adaptant par exemple la preuve de Métivier [18] dans le cas de frontière caractéristique pour un opérateur Friedrichs symétrisable (voir [18], proposition 2.2.13), on a

Théorème 3.2.1. *Sous tous les hypothèses du Théorème 3.1.3 et pour $s \geqslant 0$, il existe constant $C > 0$, tel que pour tout $\gamma > 0$, et pour $F \in L^2\big(\mathbb{R}_+, H^s(\Sigma)\big)$, le problème (3.14) admet une unique solution $\tilde{w} \in L^2(\mathbb{R}_+, H^s\big(\Sigma)\big)$ tel que la trace $\tilde{w}^{II}_{|x_d=0} \in H^s(\Sigma)$ et satisfait à l'estimation suivante*

$$\gamma \|\!|\tilde{w}|\!\|^2_{s,\gamma} + \|\tilde{w}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{s,\gamma} \leqslant \frac{C}{\gamma} \|\!|\tilde{F}|\!\|^2_{s,\gamma}. \tag{3.15}$$

3.2.2 Analyse de Fourier Laplace pour le problème aux limites

On notera $\tilde{u}$ la solution espérée du problème aux limites (3.10) et $\tilde{w}$ la solution du problème (3.14). On introduit aussi

$$\tilde{v} = \tilde{u} - \tilde{w}.$$

On peut remarquer que $\tilde{v}$ est la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} L_\gamma \tilde{v} = A_d \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d} + (\frac{\partial}{\partial t} + \gamma)\tilde{v} + \sum_{j=1}^{d-1} A_j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{dans} \quad Q, \\ B_1 \tilde{v}^{II} = \tilde{G} - B_1 \tilde{w}^{II}_{|x_d=0} \qquad \text{sur} \quad \Sigma. \end{cases} \tag{3.16}$$

Après transformation de Fourier-Laplace dans les variable tangentielle (t, y), le système (3.16) s'écrit sous la forme d'une équation différentielle ordinaire singulière par rapport à la variable normale x_d de la forme :

$$\begin{cases} A_d \dfrac{\partial \phi}{\partial x_d}(\zeta, x_d) - \mathcal{A}(\zeta)\phi(\zeta, x_d) = 0 & \zeta \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{R}^{d-1},\ x_d > 0 \\ B_1 \phi^{II}(\zeta, 0) = H(\zeta) & \zeta \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{R}^{d-1},\ x_d = 0, \end{cases}, \tag{3.17}$$

$$\zeta = (\tau, \eta) = (\gamma + i\sigma, \eta),$$

où l'inconnue ϕ est la transformée de Fourier relativement aux variables tangentielles (t, y) de $\tilde{v}$ la solution L^2 du problème (3.16)

$$\mathcal{A}(\zeta) = -(\tau I_N + iA(\eta)) \quad , \quad A(\eta) = \sum_{j=1}^{d-1} \xi_j A_j, \tag{3.18}$$

et

$$H(\zeta) := \mathcal{F}(\tilde{G})(\sigma, \eta) - B_1 \mathcal{F}(\tilde{w}^{II})(\sigma, \eta, 0). \tag{3.19}$$

La stratégie de l'analyse de Fourier-Laplace est de construire une solution dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ du système (3.17) qui satisfait à des estimations d'énergie. Ceci est nécessaire pour obtenir que le problème original (3.16) soit bien posé à travers l'utilisation de la transformée de Laplace inverse et le théorème de Paley-Wiener.
La non inversibilité de la matrice frontière A_d induit un système singulier d'ODE (3.17). Grâce à la structure par blocs de la matrice de symbole $A(\xi)$, on réduit le système singulier à un système non caractéristique d'ODE par rapport à la composante non caractéristique en utilisant la même méthode dans la preuve du lemme 2.2.5.

Lemme 3.2.2. *Pour tout $\zeta \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$, le système (3.17) se met sous la forme d'un système d'ordre* 1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi^{II}}{\partial x_d}(\zeta, x_d) - \mathcal{A}_2(\zeta)\phi^{II}(\zeta, x_d) = 0, \\ B_1 \phi^{II}(\zeta, 0) = H(\zeta), \end{cases}$$

où

$$\mathcal{A}_2(\zeta) = -a_d^{-1}\big(\tau I_{N-m} + i a_2(\eta) + \frac{1}{\tau} a_{2,1}(\eta) a_{1,2}(\eta)\big). \tag{3.20}$$

Démonstration. Grâce à l'hypothèse 3.1.2, la décomposition (3.2) de matrice A_d

permet de considérer la matrice inversible

$$A_d^- := \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & a_d^{-1} \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

On multiplie la première équation dans le problème (3.17) par A_d^-. La structure par blocs de la matrice A_d implique que

$$\mathbf{I}_{N-m} \frac{\partial \phi}{\partial x_d}(\zeta, x_d) = A_d^- \mathcal{A}(\zeta)\phi(\tau, \eta, x_d), \tag{3.22}$$

où $\mathbf{I}_{N-m} := \mathrm{diag}(0_m, I_{N-m})$.
De l'hypothèse 3.1.3, on sait que la matrice symbole $A(\eta)$ admet une décomposition de la forme (3.3), on déduit alors que

$$A_d^- \mathcal{A}(\zeta) = -\begin{pmatrix} \tau I_m & i a_{1,2}(\eta) \\ i a_d^{-1} a_{2,1}(\eta) & i a_d^{-1} a_2(\eta) + \tau a_d^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

En appliquant la décomposition $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^m \bigoplus \mathbb{C}^{N-m}$, le système (3.17) avec l'inconnue $\phi = (\phi^I, \phi^{II})^T$ se réécrit sous la forme suivant

$$\begin{cases} \tau \phi^I(\zeta, x_d) + i a_{1,2}(\eta) \phi^{II}(\zeta, x_d) = 0, \\ \dfrac{\partial \phi^{II}}{\partial x_d}(\zeta, x_d) = -i a_d^{-1} \big(a_{2,1}(\eta) \phi^I(\zeta, x_d) + (a_2(\eta) + i\tau I_{N-m}) \phi^{II}(\zeta, x_d) \big). \end{cases} \tag{3.24}$$

En utilisant la première équation de (3.24), on obtient ϕ^I en fonction de ϕ^{II}

$$\phi^I(\zeta, x_d) = -\frac{i}{\tau} a_{1,2}(\eta) \phi^{II}(\zeta, x_d), \tag{3.25}$$

puis en remplaçant dans la deuxième équation de (3.24), on obtient un problème aux limites pour une équation différentielle ordinaire paramétrée par $\zeta \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^{N-m}$, en fonction la partie non caractéristique ϕ^{II} de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi^{II}}{\partial x_d}(\zeta, x_d) - \mathcal{A}_2(\zeta) \phi^{II}(\zeta, x_d) = 0, \\ B_1 \phi^{II}(\zeta, 0) = H(\zeta), \end{cases} \tag{3.26}$$

où pour tout $\zeta \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$, la matrice $\mathcal{A}_2(\zeta)$ est donnée par (3.20) . $\square$

Dans tout ce qui suivra, on notera avec un abus de langage, $\phi^{II}(\zeta, 0)$ la trace de la solution $\phi^{II}(\zeta, .)$ sur Σ. De même, on notera $\tilde{w}^{II}(., 0)$ la trace de $\tilde{w}^{II}$ qui est bien

définie dans $L^2(\Sigma)$.
Le problème (3.26) apparaît comme le système (2.26) et en vertu de l'analyse faite dans le chapitre 2, la matrice $\mathcal{A}_2(\zeta)$ est hyperbolique. De plus, on a la décomposition

$$\mathbb{C}^{N-m} = \mathcal{E}_-(\zeta) \oplus \mathcal{E}_+(\zeta),$$

où le sous-espace stable $\mathcal{E}_-(\zeta)$ de $\mathcal{A}_2(\zeta)$ de dimension p lorsque $\gamma > 0$.
Soit $P_-(\zeta)$ le projecteur sur $\mathcal{E}_-(\zeta)$ tel que

$$P_-(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} \big(zI_{N-m} - \mathcal{A}_2(\zeta)\big)^{-1} dz \tag{3.27}$$

avec Γ^- est une courbe simple fermée incluse dans le demi-plan complexe de partie réelle négative entourant les valeurs propres de $\mathcal{A}_2(\zeta)$. On introduit aussi l'opérateur

$$\mathbb{J}(\zeta) := B_1 P_-(\zeta).$$

En vertu la définition de sous-espace stable $\mathcal{E}_-(\zeta)$ et la représentation (3.4) de matrice B, la condition Kreiss-Lopatinskii affaiblie de l'hypothèse 3.1.5 est alors réécrite par :

$$\exists\, C > 0,\ \forall \zeta \in \Xi \quad \big(v \in \mathcal{E}_-(\zeta) \quad \Rightarrow \quad |v| \leqslant C\gamma^{-s}|B_1 v|\big). \tag{3.28}$$

Par conséquent, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$ l'opérateur $\mathbb{J}(\zeta)$ est un isomorphisme entre $\mathcal{E}_-(\zeta)$ et $\mathbb{C}^p$, ce qui implique que $\mathbb{J}^{-1}H(\zeta) \in \mathcal{E}_-(\zeta)$.
Comme indiqué au début de ce sous-paragraphe, on peut d'abord énoncer le résultat crucial suivant

Proposition 3.2.3. *Sous tous les hypothèses de Théorème 3.1.3 pour $s \geqslant 0$, il existe constant $C > 0$, tel que pour tout $\gamma > 0$, et pour $\tilde{F} \in L^2\big(\mathbb{R}_+, H^s(\Sigma)\big)$, $\tilde{G} \in H^s(\Sigma)$, et $\zeta \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$, le problème (3.26) admet une solution unique $\phi^{II}(\zeta,.) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ qui satisfait l'estimation suivante*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\phi^{II}(\gamma + i\sigma, \eta, 0)|^2 d\sigma d\eta \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma^{2s}}\|\tilde{G}\|_{s,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^{1+2s}}\|\!|\tilde{F}|\!\|_{s,\gamma}^2\right). \tag{3.29}$$

Démonstration. Par le principe de Duhamel, le problème (3.26) admet une unique $L^2(\mathbb{R}_+)$ solution de la forme

$$\phi^{II}(\zeta, x_d) = \exp\big(x_d \mathcal{A}_2(\zeta)\big)\,\mathbb{J}^{-1}(H(\zeta)), \tag{3.30}$$

et la trace $\phi^{II}(\zeta, 0) = \mathbb{J}^{-1}H(\zeta)$ appartient à $\mathcal{E}_-(\zeta)$.
Par conséquent, en appliquant la condition de Kreiss-Lopatinskii affaiblie (3.28),

pour tout $\zeta \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$, on a

$$|\phi^{II}(\zeta,0)|^2 \leqslant C\frac{|\zeta|^{2s}}{\gamma^{2s}}|B_1\phi^{II}(\zeta,0)|^2 = C\frac{|\zeta|^{2s}}{\gamma^{2s}}|H(\zeta)|^2.$$

Puis, par l'identité (3.19), il vient

$$|\phi^{II}(\zeta,0)|^2 \leqslant C\frac{|\zeta|^{2s}}{\gamma^{2s}}\big(|\mathcal{F}(\tilde{G})(\sigma,\eta)|^2 + |\mathcal{F}\tilde{w}^{II}(\sigma,\eta,0)|^2\big). \tag{3.31}$$

En intégrant l'estimation ci dessus sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|\phi^{II}(\gamma+i\sigma,\eta,0)|^2 d\sigma d\eta \leqslant C\Big(\frac{1}{\gamma^{2s}}\int_{\mathbb{R}^d}\big(\gamma^2+\sigma^2+|\eta|^2\big)^s|\mathcal{F}(\tilde{G})(\sigma,\eta)|^2 d\sigma d\eta + \\ \frac{1}{\gamma^{2s}}\int_{\mathbb{R}^d}(\gamma^2+\sigma^2+|\eta|^2)^s|\mathcal{F}(\tilde{w}^{II}_{|x_d=0})(\sigma,\eta)|^2 d\eta d\sigma\Big),\end{aligned} \tag{3.32}$$

et par suite

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|\phi^{II}(\gamma+i\sigma,\eta,0)|^2 d\sigma d\eta \leqslant \frac{C}{\gamma^{2s}}\int_{\mathbb{R}^d}(\gamma^2+\sigma^2+|\eta|^2)^s|\mathcal{F}\big(e^{-\gamma\cdot}G\big)(\sigma,\eta)|^2 d\eta d\sigma \\ + \int_{\mathbb{R}^d}(\gamma^2+\sigma^2+|\eta|^2)^s|\mathcal{F}\big(e^{-\gamma\cdot}w^{II}_{|x_d=0}\big)(\sigma,\eta)|^2 d\eta d\sigma.\end{aligned}$$

En autres termes, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\phi^{II}(\gamma+i\sigma,\eta,0)|^2 d\sigma d\eta \leqslant \frac{C}{\gamma^{2s}}\left(\|\tilde{G}\|^2_{s,\gamma} + \|\tilde{w}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{s,\gamma}\right). \tag{3.33}$$

D'autre part, d'après le Théorème 3.2.1 la solution $\tilde{w}$ du problème auxiliaire (3.14) satisfait l'estimation (3.15) ,

$$\|\tilde{w}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{s,\gamma} \leqslant \frac{C}{\gamma}\|\tilde{F}\|^2_{s,\gamma}, \tag{3.34}$$

Finalement, par (3.33) et (3.34), on a

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\phi^{II}(\gamma+i\sigma,\eta,0)|^2 d\sigma d\eta \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma^{2s}}\|\tilde{G}\|^2_{s,\gamma} + \frac{1}{\gamma^{1+2s}}|||\tilde{F}|||^2_{s,\gamma}\right),$$

ce qui signifie que la proposition est démontrée. □

3.2.3 Fin de la démonstration du Théorème 3.1.3

L'identité (3.25) montre que la composante caractéristique ϕ^I est aussi dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. On déduit alors que pour tout $\zeta \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$, la fonction $\phi(\zeta,.) = (\phi^I(\zeta,.), \phi^{II}(\zeta,.))^T$ est une solution unique du problème (3.17) qui appartient à $L^2(\mathbb{R}_+)$.
Maintenant on peut considérer $\phi(\zeta,.)$ comme une solution de l'ODE singulière définie dans (3.17), mais couplée à la matrice de bord strictement dissipative M_d définie dans (3.12),

$$\begin{cases} A_d \dfrac{\partial \phi}{\partial x_d}(\zeta, x_d) - \mathcal{A}(\zeta)\phi(\zeta, x_d) = 0 & \zeta \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{R}^{d-1},\ x_d > 0, \\ \qquad M_d \phi^{II}(\zeta, 0) := K(\zeta). \end{cases} \tag{3.35}$$

La proposition suivante qui, bien que de démonstration plus que classique, constitue la clé de voûte dans la démonstration du Théorème 3.1.3.

Proposition 3.2.4. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\gamma > 0$ et $\zeta \in \mathbb{C}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$, on a*

$$\gamma \|\phi(\zeta,.)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + |\phi^{II}(\zeta,0)|^2 \leqslant C|K(\zeta)|^2 = C|M_d\phi^{II}(\zeta,0)|^2. \tag{3.36}$$

Démonstration. Par l'hypothèse 3.1.1 de Friedrichs symétrisable , on a pour tout $j = 1, \cdots, d$, les matrices $S_0 A_j$ sont symétriques, ce qui signifie que, pour tout $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$ la matrice $S_0 A(\eta)$ est aussi symétrique, où $A(\eta)$ sous la forme d'une structure par blocs (3.3)

$$A(\eta) = \begin{pmatrix} 0_m & a_{1,2}(\eta) \\ a_{2,1}(\eta) & a_2(\eta) \end{pmatrix}.$$

En revenant à l'équation singulière du (3.17) et en multipliant à gauche par la matrice S_0, on obtient

$$S_0 A_d \frac{\partial \phi}{\partial x_d}(\zeta, x_d) - S_0 \mathcal{A}(\zeta)\phi(\zeta, x_d) = 0.$$

De plus, en vertu l'expression (3.18) de la matrice $\mathcal{A}(\zeta)$, on a

$$S_0 A_d \frac{\partial \phi}{\partial x_d}(\zeta,.) + \tau S_0 \phi(\zeta,.) + i S_0 A(\eta)\phi(\zeta,.) = 0. \tag{3.37}$$

En considérant le produit scalaire dans $\mathbb{C}^N$ de l'équation ci dessus avec $\phi(\zeta,.)$, il vient

$$\Re e\langle S_0 A_d \frac{\partial \phi}{\partial x_d}(\zeta,.),\phi(\zeta,.)\rangle_{\mathbb{C}^N} + \Re e\langle \tau S_0 \phi(\zeta,.),\phi(\zeta,.)\rangle_{\mathbb{C}^N} + \Re e\langle i S_0 A(\eta)\phi(\zeta,.),\phi(\zeta,.)\rangle_{\mathbb{C}^N} = 0,$$

puis en utilisant la symétrie de matrice $S_0A(\eta)$, on obtient :

$$\Re e\langle S_0 A_d \frac{\partial \phi}{\partial x_d}(\zeta,.),\phi(\zeta,.)\rangle_{\mathbb{C}^N} = -\gamma\langle S_0\phi(\zeta,.),\phi(\zeta,.)\rangle_{\mathbb{C}^N}.$$

On intègre par parties sur $\mathbb{R}_+$ relativement à la variable x_d et en utilisant la symétrie de matrice S_0A_d , on obtient :

$$\gamma(S_0\phi(\zeta,.),\phi(\zeta,.))_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \frac{1}{2}\langle S_0A_d\phi(\zeta,0),\phi(\zeta,0)\rangle_{\mathbb{C}^N}. \tag{3.38}$$

Par l'hypothèse 3.1.1, la matrice S_0 est définie positive, donc il vient

$$C\gamma\|\phi(\zeta,.)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leqslant \frac{1}{2}\langle S_0A_d\phi(\zeta,0),\phi(\zeta,0)\rangle_{\mathbb{C}^N},$$

et en utilisant ensuite le fait que l'inégalité (3.13) est vraie puisque la matrice S_da_d sur $\ker M_d$ est définie négative, on déduit qu'il existe une constante $C>0$ telle que

$$\gamma\|\phi(\zeta,.)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leqslant C|M_d\phi^{II}(\zeta,0)|^2 - |\phi^{II}(\zeta,0)|^2.$$

Finalement on conclut l'estimation (3.36). $\square$

Maintenant, on intègre ensuite l'estimation (3.36) par rapport à la variable de Fourier η et par rapport à la partie imaginaire de la variable de Laplace τ, on trouve

$$\begin{aligned}\gamma\int_{\mathbb{R}^{d+1}_+}|\phi(\gamma+i\sigma,\eta,x_d)|^2 d\sigma d\eta dx_d + \int_{\mathbb{R}^d}|\phi^{II}(\gamma+i\sigma,\eta,0)|^2 d\sigma d\eta \\ \leqslant C|M_d|^2\int_{\mathbb{R}^d}|\phi^{II}(\gamma+i\sigma,\eta,0)|^2 d\sigma d\eta,\end{aligned}$$

grâce à l'estimation (3.29), on obtient

$$\begin{aligned}\gamma\int_{\mathbb{R}^{d+1}_+}|\phi(\gamma+i\sigma,\eta,x_d)|^2 d\sigma d\eta dx_d + \int_{\mathbb{R}^d}|\phi^{II}(\gamma+i\sigma,\eta,0)|^2 d\sigma d\eta \\ \leqslant C|M_d|^2\Big(\frac{1}{\gamma^{2s}}\|\tilde{G}\|^2_{s,\gamma} + \frac{1}{\gamma^{1+2s}}|||\tilde{F}|||^2_{s,\gamma}\Big).\end{aligned} \tag{3.39}$$

D'autre part, la fonction $\tau\mapsto\phi(\tau,.,.)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}_+$ à valeurs dans

$L^2(\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}_+)$ et l'estimation (3.39) montre que

$$\sup_{\gamma\geqslant\gamma_0}\int_{\mathbb{R}}\|\phi(\gamma+i\sigma,.,.)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}_+)}d\sigma<+\infty. \tag{3.40}$$

Grâce au théorème de Paley-Wiener, les propriétés ci dessus montre qu'ils existe une fonction $v\colon (t,y,x_d)\mapsto\tilde{v}(t,y,x_d)$ telle que $e^{-\gamma t}v:=\tilde{v}\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}_+)$ pour $\gamma>0$, où la fonction ϕ est transformée de Fourier par rapport aux variables (t,y) de $\tilde{v}$. Par transformation de Fourier inverse appliquée au problème (3.17), on peut déduire que $\tilde{v}$ l'unique solution de $L_\gamma\tilde{v}=0$.
De plus, la trace $\tilde{v}^{II}_{|x_d=0}$ est bien définie dans $L^2(\Sigma)$ et satisfait la condition de bord $B\tilde{v}^{II}_{|x_d=0}=\tilde{G}-B\tilde{w}^{II}_{|x_d=0}$ sur Σ, ce qui signifie que $\tilde{v}$ l'unique solution du problème (3.16) qui appartient à $L^2(Q)$.
Comme ϕ satisfait l'estimation (3.39) et d'après la formule de Plancherel, la solution v satisfait

$$\gamma\|e^{-\gamma t}v\|^2_{L^2(Q)}+\|e^{-\gamma t}v^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)}\leqslant C\left(\frac{1}{\gamma^{2s+1}}(|\!|\!|e^{-\gamma t}F|\!|\!|^2_{s,\gamma}+\frac{1}{\gamma^{2s}}\|e^{-\gamma t}G\|^2_{s,\gamma}\right). \tag{3.41}$$

On sait déjà que la solution unique $\tilde{w}$ du problème auxiliaire (3.14) appartient à $L^2(Q)$, avec la trace $\tilde{w}^{II}_{|x_d=0}\in L^2(\Sigma)$ et satisfait l'estimation (3.15), ce qui implique que $\tilde{u}=\tilde{v}+\tilde{w}\in L^2(Q)$ la solution du problème (3.10) telle que $\tilde{u}^{II}_{|x_d=0}\in L^2(\Sigma)$.
Enfin, on déduit que $u:=e^{\gamma t}\tilde{u}$ est la solution unique du problème (3.1) et satisfait l'estimation d'énergie

$$\gamma\|e^{-\gamma t}u\|^2_{L^2(Q)}+\|e^{-\gamma t}u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)}\leqslant C\left(\frac{1}{\gamma^{2s+1}}|\!|\!|e^{-\gamma t}F|\!|\!|^2_{s,\gamma}+\frac{1}{\gamma^{2s}}\|e^{-\gamma t}G\|^2_{s,\gamma}\right),$$

ce qui permet d'obtenir la preuve du Théorème 3.1.3.

3.3 La démonstration du Théorème 3.1.4

Dans ce paragraphe on donne la démonstration du second Théorème 3.1.4 dans ce chapitre .

3.3.1 Les solutions du problème aux limites localisé en le temps

Pour $T > 0$, on introduit les ensembles

$$\Omega_T :=]-\infty, T] \times \Omega \quad \text{et le bord} \quad \omega_T :=]-\infty, T] \times \partial\Omega.$$

On considère le problème aux limites (3.1) avec le temps dans l'intervalle $]-\infty, T]$,

$$\begin{cases} Lu = F & \text{dans} \quad \Omega_T, \\ Bu_{|x_d=0} = G & \text{sur} \quad \omega_T. \end{cases} \tag{3.42}$$

Le résultat crucial du problème (3.42) est le suivant

Théorème 3.3.1. *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème 3.1.3 soient satisfaites pour $s = 0$. Soit $F \in L^2_\gamma(\Omega_T)$ et $G \in L^2_\gamma(\omega_T)$ tel que $F \equiv 0$ et $G \equiv 0$ pour $t < 0$. Alors, il existe une unique solution $u \in L^2_\gamma(\Omega_T)$ du problème (3.42) tel que $u^{II}_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\omega_T)$ qui satisfait $u \equiv 0$ pour $t < 0$. De plus $u \in C^0([0,T], L^2_\gamma(\Omega))$ et pour tout $\gamma > 0$, on a*

$$\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t)} + \|u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\omega_t)} + e^{-2\gamma t}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t)} + \|G\|^2_{L^2_\gamma(\omega_t)}\right), \tag{3.43}$$

pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration. Soit $F \in L^2_\gamma(\Omega_T))$ et $G \in L^2_\gamma(\omega_T)$ tel que $F \equiv 0$ et $G \equiv 0$ pour $t < 0$. On prolonge F, G par 0 pour $t > T$. Notant $\pi(F)$ et $\pi(G)$ les résultats de ces prolongements, alors par construction $\pi(F) \in L^2_\gamma(Q)$ et $\pi(G) \in L^2_\gamma(\Sigma)$. Par conséquent, pour γ assez grand et par le Théorème 3.1.3, il existe unique $\breve{u} \in L^2_\gamma(Q)$ tel que $\breve{u}^{II} \in L^2_\gamma(\Sigma)$ qui est la solution du BVP

$$L\breve{u} = \pi(F) \quad \text{dans} \quad Q, \qquad B\breve{u}_{|x_d=0} = \pi(G) \quad \text{sur} \quad \Sigma. \tag{3.44}$$

De plus, $\breve{u}$ satisfait l'estimation (3.7) dans le cas $s = 0$

$$\gamma\|e^{-\gamma t}\breve{u}\|^2_{L^2(Q)} + \|e^{-\gamma t}\breve{u}^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|e^{-\gamma t}\pi(F)\|^2_{L^2(Q)} + \|e^{-\gamma t}\pi(G)\|^2_{L^2(\Sigma)}\right).$$

Par la Proposition 2.4.2, le principe de causalité reste vrai aussi dans le cadre des hypothèses du Théorème 3.3.1, la solution $\breve{u} \in L^2_\gamma(Q)$ s'annule pour $t < 0$.
Posant $u := \breve{u}_{|\Omega_T}$, la restriction de $\breve{u}$ sur Ω_T, on remarque que $u \in L^2_\gamma(\Omega_T)$ s'annule

pour $\{t<0\}$ et $u^{II}_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\omega_T)$.
Il est clair aussi que u est une solution du problème (3.42)

$$\gamma\|e^{-\gamma t}u\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \|e^{-\gamma t}u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\omega_t)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|e^{-\gamma t}F\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \|e^{-\gamma t}G\|^2_{L^2(\Sigma_t)}\right),$$

alors

$$\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t)} + \|u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\omega_t)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t)} + \|G\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)}\right), \tag{3.45}$$

pour tout $t \in [0,T]$.
Pour l'unicité de la solution u, on utilise le principe de causalité 2.4.2 et la même méthode définie dans le paragraphe 2.4.1 en utilisant la fonction de troncature θ.
Il reste juste à démontrer que la solution u du problème (3.42) est continue en temps et satisfait (3.43) pour conclure le Théorème 3.3.1
Soit $\breve{u} \in L^2_\gamma(Q)$, la solution du problème (3.44). En utilisant des opérateurs de régularisation tangentielle j_ε à support inclus dans $\{t>0\}$ (déjà utilisé dans le paragraphe 2.3.3) et l'opérateur de convolution J_ε, on peut définir une suite régularisante (w^ε) par

$$w^\varepsilon := e^{\gamma t}J_\varepsilon e^{-\gamma t}\breve{u} \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{+\infty}_\gamma(\Sigma)).$$

Cette suite satisfait $(w^\varepsilon)^{II}_{|x_d=0} \in H^{+\infty}_\gamma(\Sigma)$. Comme $\breve{u}$ s'annule pour $t<0$ et que j_ε est à support inclus dans $\{t>0\}$, w^ε est s'annule aussi pour $t<0$.
De plus, comme l'opérateur L à coefficients constant, w^ε est la solution du problème aux limites

$$Lw^\varepsilon = f^\varepsilon \quad \text{dans} \quad Q \qquad Bw^\varepsilon_{|x_d=0} = g^\varepsilon \quad \text{sur} \quad \Sigma, \tag{3.46}$$

où $f^\varepsilon := e^{\gamma t}J_\varepsilon(e^{-\gamma t}\pi(F)) \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{+\infty}_\gamma(\Sigma))$ et $g^\varepsilon := e^{\gamma t}J_\varepsilon(e^{-\gamma t}\pi(G)) \in H^{+\infty}_\gamma(\Sigma))$.
D'après le Lemme 2.3.7, on a les convergences suivantes

$$\begin{array}{llllll} w^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \breve{u} & \text{dans} & L^2_\gamma(Q), & (w^\varepsilon_{|x_d=0})^{II} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (\breve{u}_{|x_d=0})^{II} & \text{dans} & L^2_\gamma(\Sigma), \\ Lw^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \pi(F) & \text{dans} & L^2_\gamma(Q), & Bw^\varepsilon_{|x_d=0} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \pi(G) & \text{dans} & L^2_\gamma(\Sigma). \end{array} \tag{3.47}$$

D'autre part, on remarque que f^ε , g^ε et w^ε s'annule pour $\{t<0\}$, en utilisant le fait que l'opérateur L est Friedrichs symétrisable, la Proposition 2.4.3 fournit l'estimation pour tout $\varepsilon>0$

$$e^{-2\gamma t}\|w^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|e^{-\gamma t}Lw^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \gamma\|e^{-\gamma t}w^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \|e^{-\gamma t}(w^\varepsilon)^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\omega_t)}\right),$$

alors

$$e^{-2\gamma t}\|w^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|f^\varepsilon\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t)} + \gamma\|w^\varepsilon\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t)} + \|(w^\varepsilon)^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\omega_t)}\right), \quad (3.48)$$

En appliquant l'estimation (3.48) à la différence $w^\varepsilon - w^{\varepsilon'}$ on obtient

$$\begin{aligned} e^{-2\gamma t}\|w^\varepsilon(t) &- w^{\varepsilon'}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|f^\varepsilon - f^{\varepsilon'}\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t)} + \gamma\|w^\varepsilon - w^{\varepsilon'}\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t)} + \|(w^\varepsilon_{|x_d=0})^{II} - (w^{\varepsilon'}_{|x_d=0})^{II}\|^2_{L^2_\gamma(\omega_t)}\right). \end{aligned}$$

On déduit alors que la suite $(w^\varepsilon_{|Q_T})$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{C}([0,T],L^2(\Omega))$ qui converge dans $\mathcal{C}([0,T],L^2(\Omega))$ et en utilisant le fait que la solution est unique, cette limite est u la solution du problème (3.42)
Maintenant en utilisant le fait que $u = \breve{u}_{|\Omega_T}$, le passage à limite dans l'estimation (3.48) donne

$$e^{-2\gamma t}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t)} + \gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(\Omega_t)} + \|u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\omega_t)}\right).$$

En combinant l'estimation ci dessus et (3.45), on obtient la solution u satisfait (3.43). Ce qui démontre le Théorème 3.3.1. □

Remarque 3.3.2. *En utilisant la formule des sauts (2.62), on déduit que $u_{|t=0} = 0$. En effet, on peut considère la solution u du problème (3.42), solution du IBVP à condition initial nulle définie dans $Q_T = [0,T]\times\Omega$.*

En d'autres termes, en considérant le problème mixte suivant

$$\begin{cases} Lu = F & \text{dans} \quad Q_T, \\ Bu_{|x_d=0} = G & \text{sur} \quad \Sigma_T, \\ u_{|t=0} = 0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \quad (3.49)$$

on a le résultat

Théorème 3.3.3. *Supposons que tous les hypothèses du Théorème 3.1.3 soient satisfaites pour $s=0$. Soit $F \in L^2_\gamma(Q_T)$ et $G \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$. Alors, il existe une unique solution $u \in L^2_\gamma(Q_T)$ du problème (3.49) tel que $u^{II}_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$. De plus $u \in \mathcal{C}([0,T],L^2_\gamma(\Omega))$*

et pour tout $\gamma > 0$, *on a*

$$\begin{aligned}&\gamma\|u\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|u^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2\gamma(\Sigma_t)} + e^{-2\gamma t}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|G\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)}\right),\end{aligned} \tag{3.50}$$

pour tout $t \in [0,T]$.

3.3.2 Fin de la démonstration du Théorème 3.1.4

Dans ce paragraphe, nous donnons la dernière étape dans la démonstration du Théorème 3.1.4.
Pour la résolution du problème mixte (3.1) non homogène avec $u_0 \in L^2(\Omega)$, on utilise le fait que L est symétrisable au sens de Friedrichs et les idées qui déjà utilisés dans le paragraphe 2.5.
On considère alors le problème mixte auxiliaire

$$\begin{cases} Lw = F & \text{dans} \quad Q_T, \\ Mw = 0 & \text{sur} \quad \Sigma_T, \\ w_{|t=0} = u_0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.51}$$

où la matrice M est définie par (3.12).

Théorème 3.3.4. *Il existe constante* $C > 0$ *tel que pour tout* $F \in L^2_\gamma(Q_T)$ *et* $u_0 \in L^2(\Omega)$, *il existe une unique solution* $w \in L^2(Q_T)$ *du problème* (3.51), *for telle que la trace* $w^{II}_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$. *Par ailleurs* $w \in \mathcal{C}([0,T], L^2(\Omega))$ *et pour tout* $t \in [0,T]$ *et* $\gamma > 0$ *on a :*

$$\gamma\|e^{-\gamma t}w\|^2_{L^2(Q_t)} + \|e^{-\gamma t}w^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2(\Sigma_t)} + e^{-2\gamma t}\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|e^{-\gamma t}F\|^2_{L^2(Q_t)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.52}$$

On remarque que (3.51) est un problème mixte de bord strictement dissipative qui vérifie toutes les hypothèses du Théorème 1.4.3 et comme la matrice A_d sous la forme (3.2), alors il admet une unique solution $w \in L^2_\gamma(Q_T)$ telle que la trace $w^{II}_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\Sigma)$ qui satisfait l'estimation (3.52) pour tout γ assez grand.
Maintenant on considère w, la solution du problème (3.51) telle que $w^{II}_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$

et le problème mixte homogène suivant

$$\begin{cases} Lv = 0 \quad \text{dans} \quad Q_T, \\ Bv_{|x_d=0} = G - Bw_{|x_d=0} \quad \text{sur} \quad \Sigma_T, \\ v_{|t=0} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.53}$$

La matrice B sous la forme (3.4), alors il est clair que la condition de bord $\left(G - Bw_{|x_d=0}\right) = \left(G - B_1 w^{II}_{|x_d=0}\right)$ dans $L^2_\gamma(\Sigma_T)$. On peut remarquer aussi que le problème (3.53) vérifie tous les hypothèses du théorème 3.3.3, alors il admet une unique solution $v \in L^2_\gamma(Q_T)$ tel que $v^{II}_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$. De plus $v \in \mathcal{C}([0,T], L^2_\gamma(\Omega))$ et satisfait pour tout $t \in [0,T]$ l'estimation

$$\gamma \|v\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|v^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)} + \|v(t)\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)} \leqslant C\|G_\gamma - B_1 w^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)},$$

et par suite, on a

$$\gamma \|v\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|v^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)} + \|v(t)\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)} \leqslant C\left(\|G\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)} + \|w^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)}\right). \tag{3.54}$$

Il est clair que $u := v + w$ est la solution du problème (3.8) dans $L^2_\gamma(Q_T)$ tel que $u^{II}_{|x_d=0} \in L^2_\gamma(\Sigma_T)$. De plus $u \in C^0([0,T], L^2_\gamma(\Omega))$. Il reste à montrer que la solution u de (3.8) satisfait l'estimation (3.9).
D'après l'estimation (3.52), on a

$$\|w^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

Revenant à l'estimation ci-dessus ainsi que (3.54) on obtient v satisfait

$$\gamma \|v\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|v^{II}_{|x_d=0}\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)} + \|v(t)\|^2_{L^2_\gamma(\Omega)} \leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}\|F\|^2_{L^2_\gamma(Q_t)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + G\|^2_{L^2_\gamma(\Sigma_t)}\right), \tag{3.55}$$

pour tout $t \in [0,T]$. Finalement, en combinant les estimations (3.55) et (3.52) , on obtient l'estimation (3.9) pour γ assez grand. Ce qui démontre le Théorème 3.1.4. $\square$

4 Annexe

Dans ces deux exemples, nous donnons une illustration de la condition UKL (pour le premier exemple) et de la condition s-WKL (dans le cas $s = 1$) pour le second exemple.

4.1 Le problème d'élasticité linéaire

Morando ,A et Serre .D [25] ont montrés que ce problème est fortement bien posé dans L^2 sous la condition UKL.
On considère le système de l'élasticité linéaire où la variable d'espace x dans $\mathbb{R}^3$ (3D) de la forme

$$\begin{aligned} &\partial_t F + \bigtriangledown z = 0 \\ &\partial_t z + divT = 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $z = z(x;t) \in \mathbb{R}^3\, (x = (x_1, x_2, x_3), t > 0)$ et $F = F(x;t) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.
L'inconnue z est la vitesse de la déformation, F tenseur de déplacement et où le tenseur des contraintes T est donné par :

$$T := \lambda(F + F^T) + \mu\,(TrF)\,I_3,$$

avec λ, μ des constantes positives (les coefficients de lamé).
Morando A et Serre D [25] ont montrés que le système d'élasticité (4.1) peut être écrit sous forme d'un système symétrique d'ordre 9×9 en utilisant de nouvelles variables u

$$Lu := \partial_t u + A_1 \partial_1 u + A_2 \partial_2 u + A_3 \partial_3 u, \tag{4.2}$$

la matrice A_3 étant sous la forme

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0_3 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix},$$

avec a^2 est une matrice inversible de type 6×6.
[25] a montré aussi pour $\xi = (\eta, \xi_3)^T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ le symbole matrice $A(\xi) = A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3$ admet décomposition par blocs de la forme

$$A(\xi) := \begin{pmatrix} 0_3 & a_{1,2}(\eta) \\ a_{1,2}(\eta) & a_2(\eta) + \xi_3 a^2 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

avec la forme des matrices et les détails de cette étape peut être trouvée dans [25].
On considère le problème mixte défini dans le demi espace

$$\mathbb{R}^3_+ = \{x = (y, x_3), y = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_3 > 0\},$$

$$\begin{cases} Lu = F & x_3 > 0, t > 0, \\ Bu = G & x_3 = 0, t > 0, \\ u_{|t=0} = f & x_3 > 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

où l'opérateur L définie dans (4.2) et la matrice de bord B de type 3×9 avec $rang B = 3$.
[25] ont supposés que $\ker A_d \subset \ker B$ et $B = (0_{p\times m}, B_1)$ avec $B_1 \in \mathcal{M}_{3\times 6}(\mathbb{R})$ de rang maximal.
Ils ont supposés aussi que la matrice de bord B satisfait la condition UKL 2.1.1, c'est à dire pour tout $(\tau, \eta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^+$ il existe une constante positive C tel que

$$|A_3(t, y, 0)v| \leqslant C|B(t, y)v|, \quad v \in \mathbb{E}_-(\tau, \eta)$$

où $\mathbb{E}_-(\tau, \eta)$, le sous-espace stable associé au système

$$(\tau I_9 + iA(\eta, 0))v + A_3\partial_3 v = 0,$$

obtenu après transformation de Fourier-Laplace de (4.2) en la variable d'espace tangentielle (t, y).
Par conséquent pour tout $F \in L^2_\gamma(\mathbb{R}^3_+ \times [0, T])$, $G \in L^2_\gamma(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^3_+)$, le problème (4.4) admet une unique solution $u \in L^2_\gamma(\mathbb{R}^3_+ \times [0, T])$ telle que la trace $A_3 u_{|x_3=0} \in L^2_\gamma(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$. De plus, $u \in C^0([0, T], L^2_\gamma(\Omega))$ et pour tout $0 < t \leqslant T$ on a l'estimation (2.5).

4.2 Les équations de Maxwell.

Eller [8] est montré que ce problème entre dans le cadre d'étude du Théorème 3.1.3. Désignons par E le champ électrique et H le champ magnétique dans l'espace temps et soit ε , μ des constantes positives qui désignent la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du milieu sous jacent, respectivement.
Le champ électromagnétique satisfait par les équations de Maxwell peut se réduire au système 6×6 hyperbolique de premier ordre, dans le demi espace

$$\mathbb{R}^4_+ = \{(t,x) \in \mathbb{R}^4 : x_3 > 0\},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\partial_t E - \bigtriangledown \times H &= f_1 \\ \mu\partial_t E + \bigtriangledown \times H &= f_2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Le terme $f = (f_1, f_2)$ représente les densités de courant, en général $f_2 \equiv 0$.
les conditions de bords de la forme

$$\nu \times E = g \qquad \text{sur} \qquad \{x_3 = 0\}, \tag{4.6}$$

Posant $\nu = (0,0,-1)^T$ le vecteur unitaire normal extérieur et

$$A_3 \begin{bmatrix} e \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu \times h \\ e \times h \end{bmatrix}$$

Notant que le bord est caractéristique c'est à dire $det A_3 = 0$ et on a $\ker A_3 \subset \ker B$. Eller [8] a démontré que la condition (3.6) est satisfaite pour $s = 1$. En effet, il a prouvé que le système

$$\begin{cases} \tau\varepsilon e - \zeta \times h = 0, \\ \tau\mu h + \zeta \times e = 0, \qquad \zeta = (\eta_1, \eta_1, -i\xi)^T, \end{cases}$$

admet une valeur propre double à partie réelle négative $\xi = -\sqrt{|\eta|^2 - \varepsilon\mu\tau^2}$ et une base orthogonale du sous espace est donnée par

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \mu\tau\zeta^T \\ -\zeta \times \zeta^T \end{bmatrix}, \qquad \omega_2 = \begin{bmatrix} \zeta \times \zeta^T \\ \varepsilon\tau\zeta^T \end{bmatrix}$$

De plus, il existe deux constants c_1 et c_2 tels que pour tout $(\tau, \eta) \in \Xi$

$$|B(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)| \gtrsim \gamma |A_3(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)|, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

Eller [8] a démontré aussi que pour $f \in L^2\big(\mathbb{R}_+, H^1_\gamma(\mathbb{R}^3)\big)$, $G \in H^1_\gamma(\mathbb{R}^3)$, le problème aux limites (4.5) − (4.6), admet une unique solution $(E; H) \in L^2_\gamma(\mathbb{R}^4_+)$ telle que $\nu \times H_{|x_3=0} \in L^2_\gamma(\mathbb{R}^3)$.

Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés d'abord à la résolution des problèmes mixtes caractéristiques pour des systèmes d'EDP de premier ordre à coefficients Lipschitz satisfaisant la condition Uniforme Kreiss-Lopatinskii pour des opérateurs symétrisables au sens de Friedrichs. L'hypothèse minimale de structure adoptée en premier lieu est celle où la condition de Kreiss-Lopatinski uniforme est satisfaite. Le processus de problème bien-posé au sens de Hadamard dans le cadre L^2 a été complètement réalisé par l'utilisation d'outils d'analyse performants comme le calcul paradifferentiel et un résultat d'existence et d'unicité et de stabilité par l'établissement d'estimations a priori a été atteint.

Dans une seconde étape de cette étude, la condition de Kreiss-Lopatinski uniforme n'est plus satisfaite et est remplacée par une hypothèse de structure affaiblie, la condition $sWKL$. Le choix de cette démarche est motivé par le fait que de nombreux modèles issus de la physique entrent dans ce cadre là. L'étude réalisée concerne un problème aux limites caractéristique pour un système d'équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre de type symétrisable au sens de Friedrichs à coefficients constants. Le processus de problème bien-posé au sens de Hadamard dans le cadre L^2 a été réalisé et un résultat d'existence et d'unicité et de stabilité par l'établissement d'estimations a priori a été atteint où la perte de régularité observée de la solution par rapport aux données est quantifiée de façon précise par rapport à la condition de structure en opérant une analyse de Fourier-Laplace judicieuse. L'intêret de ce travail vient du fait que contrairement au cas des coefficients variables, nous n'avons pas eu besoin d'utiliser des outils puissants comme les symétriseurs de Kreiss pour arriver au résultat.
Ces résultats intéressants ont été sanctionnés positivement par deux publications internationales [22, 23].
A l'avenir, on pense qu'il serait assez intéressant de travailler sur les points suivants :
Le théorème 2.1.2 montre que le problème mixte (2.1) est bien posé dans L^2, on pense qu'il il serait intéressant de se pencher sur la question de la régularité de la solution

du problème mixte. Plus précisément, on aimerait savoir si une régularité H^s des données du problème conduit à une régularité H^s de la solution.
Un autre sujet d'étude, on voudra étendre le théorème 3.1.3 au cadre des coefficients variables qui satisfait sWKL en utilisant les même arguments du chapitre 3 pour obtenir des estimations à priori avec perte de dérivées.
Enfin, un dernier point que l'on pense intéressant à étudier les problèmes à coins caractéristique lorsque la condition de Kreiss Lopatinskii uniforme est satisfaite.

Bibliographie

[1] S. Benzoni-Gavage et D. Serre, *Multidimensional Hyperbolic Partial Differential Equations, First Order Systems and Applications.* Oxford Mathematical Monographs ; Oxford University Press, 2007.

[2] JM.Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires.* Annales Scientifiques de l' École Normale Supérieure. 14 (1981), 209-246.

[3] J. Chazarain et A. Piriou, *Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.

[4] JF.Coulombel, *Well-posedness of hyperbolic initial boundary value problems.* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 84 (2005), 786-818.

[5] JF. Coulombel et P. Secchi, *The stability of compressible vortex sheets in two space dimensions*, Indiana Univ. Math. J. 53 (2004), 941–1012.

[6] JF. Coulombel et O. Guès, *Geometric optics expansions with amplification for hyperbolic boundary value problems : linear problems.* Ann. Inst. Fourier(Grenoble). 60 (2010) , 2183–2233.

[7] JF. Coulombel, *Stabilité multidimensionnelle d'interfaces dynamiques. Application aux transitions de phase liquide-vapeur.* PhD thesis, ENS Lyon, 2002.

[8] M.Eller, *Loss of Derivatives for Hyperbolic Boundary Problems with constants Coefficients*, Discrete and Continuous Dynamic. Syst, Series B. 23 (2018), 1347-1361.

[9] M. Eller, *On boundary regularity of solutions to Maxwell's equations with a homogeneous conservative boundary condition*, Discrete Contin. Dynam. Systems Series S. 2 (2009), 473-481.

[10] O. Guès, G. Métivier, M. Williams et K.Zumbrun, *Uniform Stabilty estimate for constant-coefficient symmetric hyperbolic boundary value problems.* Communications in Partial Differential Equations ; 32 (2007), 579-590.

[11] L.Hörmander, *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations.* Springer-Verlag, Berlin 1997 ; ISBN 3-540-62921.

[12] R. Hersh, *Mixed problems in several variables.* J. Math. Mech. 12 (1963), 317–334.

[13] HO.Kreiss, *Initial boundary value problems for hyperbolic systems.* Communications on Pure and Applied Mathematics, 23 (1970), 277-298.

[14] PD. Lax , RS.Phillips, *Local Boundary Conditions for Dissipative Symmetric Linear Differential Operators.* Communications on Pure and Applied Mathematics ; 13 (1960), 427-455.

[15] A.Majda, *The stability of multidimensional shock fronts.* Memoirs of the American Mathematical Society ; 41(275).

[16] A.Majda , S.Osher *Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary*, Communications on Pure and Applied Mathematics ; 28 (1975), 607-675.

[17] G.Métivier, *Stability of Multidimensional Shocks. In : Advances in the Theory of Shock Waves (Freistühler H and Szepessy Editors)*, Part of Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications Book Series ; 47(2001) ,25-103.

[18] G.Métivier, *Small Viscosity and Boundary Layer Methods : theory, stability analysis and applications.* Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology, Birkhäuser, Boston, 2003.

[19] G.Métivier, *The block Structure Condition for Symmetric Hyperbolic Systems.* Bulletin of the London Mathematical Society ; 32 (2000), 689-702.

[20] G.Métivier, *On the L^2 well posedness of Hyperbolic Initial Boundary Value Problems*, Annales de l'Institut Fourier. 67 (2017), 1809-1863.

[21] AZ.Mokrane, *Problèmes mixtes hyperboliques non linéaires.* PhD, Université de Rennes I, France, 1987(in French).

[22] AZ.Mokrane et S.Brahimi ; *A Well-Posedness Result of a Characteristic Hyperbolic Mixed Problem.* J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 12 (2021).

[23] AZ.Mokrane et S.Brahimi ; *Weakened Well-Posedness of a Hyperbolic Characteristic Boundary Value Problem.* Annales Polonici Mathematici. 126 (2021), 197-214.

[24] A.Morando, D.Serre, *A result of L^2 well-posedness concerning the system of linear elasticity in 2-D.* Communications in Mathematical Sciences. 3 (2005), 317-334.

[25] A.Morando, D.Serre, *On the L^2 well-posedness of an initial boundary value problem for the 3-D linear elasticity*, Communications in Mathematical Sciences. 3 (2005) , 575-586.

[26] A.Morando , P.Secchi , P.Trebeschi, *Regularity of Solutions to Characteristic Initial Boundary Value Problems for Symmetrizable Systems*, Journal of Hyperbolic Differential Equations . 6 (2009), 753-808.

[27] T.Ohkubo, *Regularity of solutions to hyperbolic mixed problem with uniformly characteristic boundary*, Hokkaido Mathematical Journal. 10 (1981), 93-123.

[28] J.Rauch, *Symmetric Positive Systems with Boundary Characteristic of Constant Multiplicity*, Transactions of the American Mathematical Society. 291 (1985), 167-187.

[29] M. Sablé-Tougeron, *Existence pour un problème de l'élastodynamique Neumann non linéaire en dimension 2*, Arch. Rational Mech. Anal. 101 (1988), 261–292.