

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE HADJ LAKHDAR DE BATNA
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée à l'Université Hadj Lakhdar de Batna par

MEDDOUR Belkacem

Pour l'obtention du grade de DOCTEUR EN SCIENCES
Option : SCIENCES DES MATERIAUX

Thème

MODELISATION ET SIMULATION DU COMPORTEMENT THERMOMECHANIQUE DES ALLIAGES A MEMOIRE DE FORME

Soutenue publiquement le 03/02/2016 devant le jury composé de :

Dr. BRIOUA Mourad	Pr. Université Batna	Président du jury
Dr. ZEDIRA Hamma	Pr. Université Khenchela	Rapporteur
Dr. BENBOUTA Rachid	Pr. Université Batna	Examineur
Dr. BEZZAZI Abderrezak	Pr. Université Guelma	Examineur
Dr. HECINI Mabrouk	Pr. Université Biskra	Examineur
Dr. MANSOURI Salah	M.C.A .Université Batna	Examineur

REMERCIEMENTS

En premier j'exprime ma grande reconnaissance au dieu le tout puissant de m'avoir guidé et aidé pour achever ce travail après tant d'efforts déployés durant ces années.

J'exprime mes remerciements au professeur ZEDIRA Hamma mon encadreur pour sa coopération et sa disponibilité durant toutes ces années, au professeur DJEBAILI Hamid de l'université de Khenchela pour ses conseils précieux et sa collaboration, au professeur BRIOUA Mourad de l'université de Batna pour ses encouragements et au professeur BENBOUTA Rachid de l'université de Batna pour sa collaboration.

J'adresse également mes remerciements aux membres de jury composé des professeurs dont les noms suivent:

Pr. BRIOUA Mourad de l'université de Batna

Pr. BEZZAZI Abderrezak de l'université de Guelma

Pr. HECINI Mabrouk de l'université de Biskra

Pr. BENBOUTA Rachid de l'université de Batna

Dr. MANSOURI Salah de l'université de Batna

d'avoir accepté de juger ce travail

Un remerciement particulier à tous les responsables du département de génie mécanique ainsi que tous les responsables de la faculté de sciences & technologie de l'université de Batna.

Enfin je n'oublie pas d'adresser un remerciement chaleureux à tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé de proche ou de loin

Résumé

Les alliages à mémoire de forme sont des matériaux à comportement singulier par rapport aux matériaux conventionnels, sous une contrainte appliquée l'alliage est déformé avec un simple chauffage il peut récupérer sa forme initiale. Ce comportement thermomécanique une fois étudié et dévoilé a pu apporter des solutions technologiques à plusieurs applications. Aujourd'hui ces alliages sont classés parmi les matériaux avancés à cause de l'importance qu'ils ont acquise ces dernières décennies. Ce travail a été orienté vers la modélisation du comportement thermomécanique de ces alliages, pour cela nous l'avons divisé en quatre parties. La première partie a été consacrée à l'étude bibliographique de ce type de matériaux pour comprendre ce phénomène et déchiffrer les mécanismes y intervenants, la deuxième partie a pour but de classer les modèles développés et d'en détailler quelques uns, la troisième partie constitue l'ossature principale de ce travail en effet c'est ici où on a réalisé la modélisation de ce comportement en commençant par la modélisation unidimensionnelle des effets pseudoélastique, thermoélastique et de mémoire simple. Ces effets sont modélisés après, en 3D et pour juger cette modélisation nous avons consacré la dernière partie à la simulation numérique en utilisant des algorithmes implémentés dans des programmes écrits en FORTRAN et un code de calcul des éléments finis (Abaqus).

Mots Clés : Martensite ; Thermomécanique ; Comportement Singulier ; Pseudo-élasticité ; Displacive

Abstract

Shape memory alloys have a singular behavior compared to conventional materials, under an applied stress the alloy is deformed and with a simple heating it can recover its original shape. This thermomechanical behavior once studied and revealed could bring technological solutions to many applications. Today these alloys are classified as advanced materials because of the importance they have gained in recent decades. This work was oriented to modeling of thermomechanical behavior of these alloys, to do we have divided it into four parts. The first part was devoted to the bibliographic study of this type of material to understand this phenomenon and to decipher the mechanisms are stakeholders , the second part is designed to classify the developed models and to detail some of them , the third part is the main frame of this work, in fact it is here where was carried modeling of this behavior, beginning with the one-dimensional modeling of pseudoelastic effects , thermo and simple memory . These effects are modeled after in 3D . To judging this model we spent the last part of the numerical simulation using algorithms implemented in programs written in FORTRAN and a finite element code of calculation (Abaqus)

Key Words: Martensite ; Thermomechanical ; Singular Behavior ; Pseudoelasticity ; Displacive

ملخص

إن السبائك ذات ذاكرة الشكل تنفرد بسلوكها بالمقارنة مع المواد التقليدية فبإجهاد مطبق تتشوه السبيكة ثم مع تسخين بسيط فإنه يمكن استرداد شكلها الأصلي. هذا السلوك الحراري الميكانيكي بعد دراسته و كشفه يمكن أن نجلب الحلول التكنولوجية للعديد من التطبيقات. اليوم تصنف هذه السبائك ضمن المواد المتقدمة نظرا لأهمية التي اكتسبتها في العقود الأخيرة. وقد تم توجيه هذا العمل إلى نمذجة السلوك الحراري الميكانيكي لهذه السبائك ، لهذا قمنا بتقسيمها إلى أربعة أجزاء. وخصص الجزء الأول لدراسة بيليوغرافية لهذا النوع من المواد لفهم هذه الظاهرة و فك الآليات التي تصاحب التحول ، يهدف الجزء الثاني إلى تصنيف نماذج منجزة وذكر بعضها بالتفصيل ، و الجزء الثالث هو الإطار الرئيسي من هذا العمل، بالفعل لأنه هنا اين تتم نمذجة هذا السلوك بدءا بالنمذجة الأحادية البعد لأفعال الشبه المرن ، الحراري المرن وفعل الذاكرة البسيط. ويتم نمذجة هذه الأفعال بثلاثة أبعاد يتم بعد ذلك وللحكم على هذه النمذجة تم تخصيص الجزء الأخير للمحاكاة العددية باستخدام خوارزميات تم تنفيذها في برامج مكتوبة بـ FORTRAN و شفرة حساب بالعناصر المحدودة (ABAQUS)

كلمات البحث: مارتنزيت، حراري ميكانيكي، سلوك فريد، شبه مرونة، انتقالية

TABLE DE MATIERES

Introduction.....	1
-------------------	---

CHAPITRE I ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Historique.....	3
Types des AMFs.....	3
Propriétés des AMFs.....	7
Caractérisation thermomécanique des AMFs.....	10

CHAPITRE II MODELES EXISTANTS

Classification des modèles.....	19
Modèles micromécaniques.....	19
Modèles micro/macrosopiques.....	19
Modèles macroscopiques.....	19
Citation de quelques modèles.....	21
a) Modèle de Patoor et al.....	21
b) Modèle de Lagoudas et al.....	24
c) Modèle de Souza et al.....	25

CHAPITRE III MODELISATION DU COMPORTEMENT THERMOMECHANIQUE DES AMFs

Rappels thermodynamiques.....	28
Lois d'état dérivant d'un potentiel thermodynamique.....	28
Application à la modélisation unidimensionnelle du comportement des AMFs.....	30
a) Modélisation de l'effet pseudoélastique.....	32
b) Modélisation de l'effet thermoélastique.....	35
c) Modélisation de l'effet simple de mémoire de forme.....	38
Modélisation 3D du comportement des AMFs.....	42
a) Notations utilisées.....	42
b) Equations constitutives.....	42
c) Application à la modélisation 3D l'effet pseudoélastique	45
d) Application à la modélisation 3D de l'effet simple de mémoire de forme	46
e) Application à la modélisation 3D de l'effet thermoélastique	49

CHAPITRE IV SIMULATION NUMERIQUE

Implémentation des lois de comportement dans Abaqus.....	52
Simulation numérique unidimensionnelle de l'effet pseudoélastique.....	52
Simulation numérique unidimensionnelle de l'effet thermoélastique.....	57

Simulation numérique unidimensionnelle de l'effet simple de mémoire	62
Simulation numérique 3D de l'effet pseudoélastique sous un chargement uniaxial.....	70
Simulation numérique 3D de l'effet pseudoélastique sous un chargement biaxial.....	72
Simulation numérique 3D de l'effet pseudoélastique sous un chargement triaxial.....	74
Simulation numérique 3D de l'effet simple de mémoire.....	76
Simulation numérique 3D de l'effet thermoélastique.....	81
Applications.....	83
Conclusion générale.....	94
Références.....	95

INTRODUCTION

Les matériaux furent les piliers des anciennes civilisations et connurent une extension attirante en termes d'usage, allant de l'âge de pierre, passant par les époques de bronze et de fer et en aboutissant par notre époque que certains préfèrent l'appeler âge des matériaux intelligents.

Ces dernières décennies de nouveaux matériaux ont été développés pour répondre aux besoins qui ne cessent d'augmenter. Actuellement on parle de matériaux avancés, parmi ces derniers peuvent être cités les matériaux intelligents.

Ces matériaux appelés autrement matériaux adaptatifs englobent trois catégories essentielles : matériaux piézoélectriques, magnétostrictifs et à mémoire de forme. Ils se distinguent par des comportements singuliers vis-à-vis des autres matériaux, leur comportement relativement étrange a captivé l'attention des chercheurs et a ouvert de nouvelles voies pour leurs applications dans divers domaines acquérant ainsi une grande importance dans le monde des matériaux.

De leur côté, les alliages à mémoire de forme ou les AMFs, connus surtout par leur pouvoir de subir d'importantes déformations sous l'effet d'un chargement thermomécanique et de recouvrer la forme antérieure par un simple chauffage, suscitent encore l'attention des chercheurs et des ingénieurs, en effet la diversité de réponses sous des chargements mécaniques et/ou thermiques et les tentatives d'exploitations dans l'engineering les classent parmi les matériaux avancés. Leurs applications s'étendent sur plusieurs domaines tels le biomédical, l'aéronautique, l'industrie des voitures et les applications aérospatiales. Il faut noter qu'ils apportent des alternatives à des solutions technologiques actuelles malgré le prix de revient relativement élevé.

La connaissance des lois de comportement de ces matériaux est requise pour permettre leurs applications, malgré la complexité des mécanismes mis en jeu et parfois l'ambiguïté entourant certains mécanismes liés aux transformations martensite en austénite ou inversement, plusieurs modèles décrivant le comportement des AMFs ont été développés et jusqu'à nos jours le comportement des AMFs demeure encore une problématique aux chercheurs et aux ingénieurs. Ce travail élaboré entre dans le cadre de l'étude et la modélisation du comportement thermomécanique des AMFs, pour cela il a été divisé en quatre chapitres :

- 1) Le premier chapitre est orienté vers l'étude bibliographique des AMFs, dans cette partie on fera une navigation dans le domaine de ces matériaux pour connaître types les différents leurs propriétés thermomécaniques

- 2) Le deuxième chapitre est destiné à explorer les différents modèles déjà élaborés par plusieurs auteurs et de les classer
- 3) Le troisième chapitre qui est l'artère principale de ce travail, il est consacré à la modélisation du comportement thermomécanique des AMFs, en appliquant les principes de la thermodynamique on construit des équations régissant le comportement de ces matériaux
- 4) Ce dernier chapitre est réservé à la simulation numérique du modèle en utilisant tantôt un algorithme réalisé tantôt un code calcul (Abaqus). Les résultats expérimentaux utilisés appartiennent à des travaux d'auteurs cités dans la partie de références. Ces résultats servent d'une part à déterminer les paramètres du modèle et d'autre part à comparer les résultats numériques.

CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. Historique

En 1932 Read et Chang par le moyen des observations métallographiques et de la mesure de la résistivité d'un alliage de AuCd ont observé le phénomène de transition de phase et sa réversibilité, c'était l'effet de pseudoélasticité. [1]. En 1938 c'était les mêmes observations par Greeninger et Mooradian sur un alliage de CuZn en augmentant et en diminuant la température, mais ce n'est qu'en 1949 que l'effet de mémoire de forme a été observé par Kurdjumov and Khandros et en 1951 par Read et Chang [1], [2].

En 1960 Buehler et Wiley (U.S. Naval Ordinance Laboratory) ont découvert l'effet de mémoire de forme sur un alliage équiatomique NiTi qui serait appelé *NITINOL* [3]. C'est en 1969 que la première application du Nitinol sous forme de manchon de raccordement a vu le jour et ceci a rendu sa commercialisation une réalité. La première application de NiTi dans le domaine biomédical a été rapportée en 1970 et a obtenu plus de soutien en 1980 mais les difficultés sont aperçues durant ces années pour mettre en œuvre cette nouvelle technologie.

Les recherches pour comprendre le comportement de ces matériaux n'ont débuté qu'en 1980. Au cours des 30 dernières années, les applications des alliages à mémoire de forme s'amplifient dans divers domaines biomédical, commercial, technologique et d'engineering.

I.2. Types des AMFs

Les alliages à mémoire de forme peuvent être classés en trois groupes :

I.2.1. Groupe des NiTi :

Ces alliages (~50%Ni, ~50%Ti) présentent de bonnes performances :

- Bonnes caractéristiques mécaniques
- Effet mémoire de forme et superélasticité
- Bonne stabilité thermique
- Bonne résistance à la corrosion
- Bonne ductilité
- Bonne biocompatibilité (usage biomédical)

A ces avantages s'ajoutent les inconvénients suivants :

- Coût élevé à cause de la difficulté d'usinage.
- Dégradation des caractéristiques mécaniques pendant les chargements cycliques [4],[5]

I.2.2. Groupe des AMFs à base de cuivre

Cette famille composée de CuZnAl, CuAlNi et CuAlBe présente des caractéristiques suivantes:

- Bonnes caractéristiques mécaniques

- Pseudoélasticité comparable à celle des NiTi
- Hystérésis faible comparablement aux NiTi
- Cout moins élevé que les NiTi
- Possibilité de la fabrication des monocristaux sous forme de fils et de rubans.

Avec des inconvénients :

- Ces alliages ne sont pas biocompatibles.
- Dégradation des caractéristiques mécaniques pendant les chargements cycliques [6]

I.2.3. Groupe des AMFs à base de fer

Ces alliages sont caractérisés par :

- Coût moins élevé à cause de la facilité d'usinage
- Possibilité d'utilisation en biomédical en rendant l'alliage inoxydable

Mais présentant des inconvénients suivants :

- Hystérésis large
- Faibles caractéristiques mécaniques
- Superélasticité faible [6]

Propriétés		NiTi	CuZnAl	CuAlNi	CuAlBe
Point de fusion (°C)		1260-1310	950-1020	1000-1050	970-990
Densité (Kg/m ³)		6400-6500	7800-8000	7100-7200	970-990
Résistivité électrique ($\Omega \cdot m \times 10^{-6}$)		0,5-1,1	0,7-0,12	0,1-0,14	0,07-0,09
Conductivité thermique ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)		10-18	120	75	-
Coefficient de dilatation ($K^{-1} \times 10^{-6}$)		6,6-10	17	17	-
Chaleur spécifique ($J \cdot Kg^{-1} \cdot K^{-1}$)		490	390	440	-
Enthalpie de transformation ($J \cdot Kg^{-1}$)		28000	7000	9000	7200
Module de Young (GPa)		95	70-100	80-100	90
Résistance à la traction (MPa)		800-1000	800-900	1000	900-1000
Allongement à la rupture (%)		30-50	15	8-10	15
Limite de fatigue (État austénite) (MPa)		350	270	350	-
Taille de grain (μm)		20-100	50-300	30-300	100-500
Domaine de transformation (°C)		-100 à 100	-100 à 100	-100 à 170	-200 à 150
Hystérésis ($A_s - M_f$) (°C)		20-40	10-20	20-25	20-25
Etalement ($A_f - A_s$) (°C)		30	10-20	20-30	15-20
Déformation maximale	Mémoire simple effet (%)	8	3-5	3-6	3-5
	Mémoire double effet (%)	5	2	3	2
	Cycle (N)=10 ² (%)	5	1	1,2	-
	Cycle (N)=10 ⁵ (%)	2	0,8	0,8	-
	Cycle (N)=10 ⁷ (%)	0,5	0,5	0,5	-
Température max d'usage (1heure) (°C)		400	160	300	400
Déformation maximale (Superélasticité)	Polycristal (%)	4	2	2	3
	Monocristal (%)	10	10	10	10
Amortissement (SDC-%)		15	30	10	-
Résistance à la corrosion		Excellente	Moyenne	Bonne	Moyenne
Biocompatibilité		Bonne	Mauvaise	Mauvaise	Mauvaise

Tableau 1. Propriétés des AMFs les plus utilisés [5]

I.3. Transformation martensitique

Le comportement singulier des AMFs est l'effet de la transformation de phases, l'une mère appelée *austénite* et l'autre fille appelée *martensite* (Fig. I.1.).

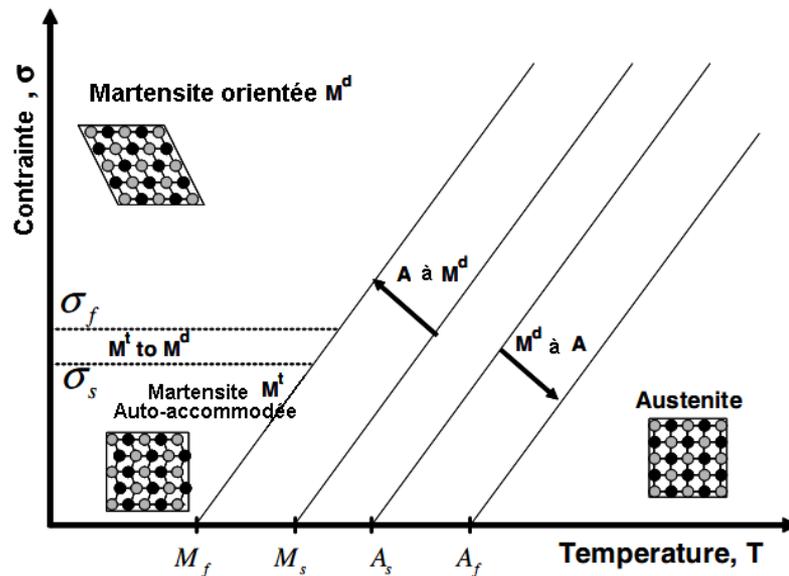


Figure I.1. Diagramme d'état d'un AMF. [16]

M_s^0 : Température de début de transformation austénite \rightarrow martensite sous contrainte nulle

M_f^0 : Température de fin de transformation austénite \rightarrow martensite sous contrainte nulle

A_s^0 : Température de début de transformation martensite \rightarrow austénite sous contrainte nulle

A_f^0 : Température de fin de transformation martensite \rightarrow austénite sous contrainte nulle

La transformation martensitique est une transformation displacive [6] (Fig. I.2.). Les transformations displacives sont des transformations qui ne font intervenir aucun phénomène de diffusion : aucune activation thermique n'est donc nécessaire aux déplacements atomiques. Le changement de phase s'effectue par un mouvement coopératif des atomes de faible amplitude (de l'ordre du dixième d'une distance interatomique) sur un certain volume. Ceci entraîne des conséquences importantes : les atomes de la nouvelle phase possèdent le même environnement que dans la phase mère, il n'y a pas destruction et reconstruction des liaisons, mais introduction d'une distorsion. Les défauts de la phase mère et son état d'ordre chimique sont donc conservés après transformation (Fig. I.2.) [7], [8], [9], [10], [11]

Du fait que le nombre de symétries présentées par un cristal d'austénite est plus grand que celui d'un cristal de martensite, les entropies des deux phases sont différentes ce qui se traduit par un saut de la première dérivée de l'énergie libre faisant de cette transformation une transformation de premier ordre.[15]

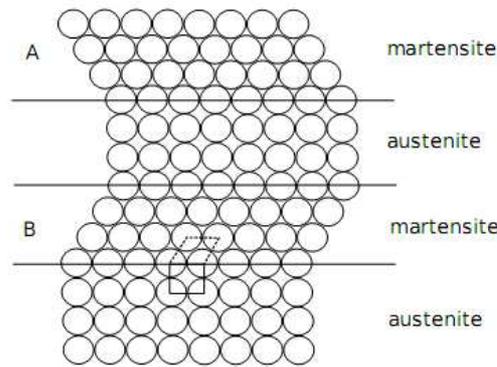


Figure I.2. Représentation schématique de la transformation martensitique [1]

La phase mère (austénite) se trouvant à haute température est stable et d'une configuration symétrique, sa transformation en une phase fille (martensite) moins symétrique favorise la formation de plusieurs variantes de la martensite (Fig. I.3.). [7], [12], [13], [14]

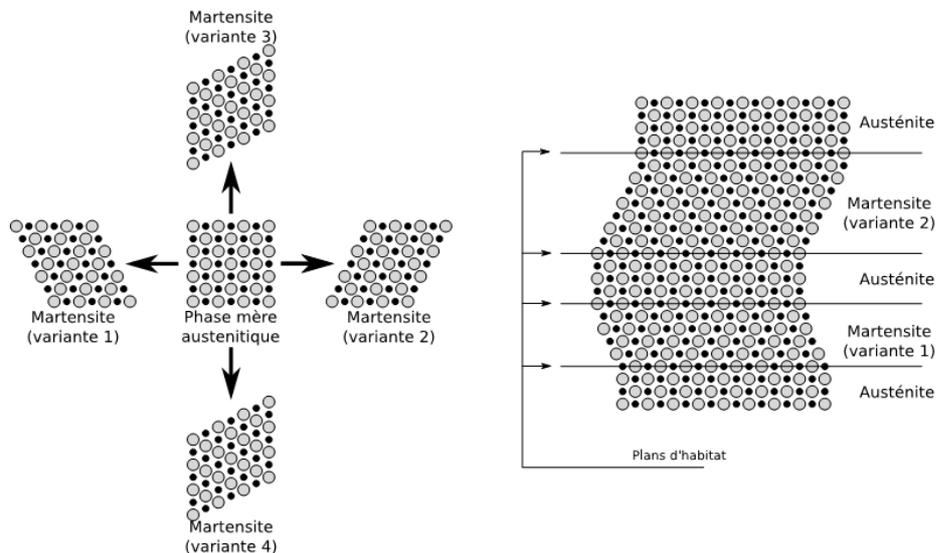


Figure I.3. Transformation de l'austénite en variantes de martensites [18]

Au cours de la transition de phase, l'apparition simultanée de plusieurs variantes de martensite peut survenir, elle est remarquable quand la transformation de phase est due à un refroidissement sous contrainte nulle (la martensite existe aux basses températures), dans ce cas les variantes produites possèdent des champs de déformation qui se compensent pour avoir une déformation macroscopique nulle, on dit que la martensite est auto-accommodée.

Dans le cas où une contrainte est appliquée, les variantes produites sont celles les mieux orientées par rapport à ce champs de contraintes engendrant ainsi une déformation macroscopique non nulle, on dit que la martensite est orientée.

Lorsque la martensite auto-accommodée est soumise à une contrainte, les variantes les moins orientées disparaissent au profit de celles les mieux orientées, on dit que la martensite est réorientée (Fig. I.4. et Fig. I.5) [15]

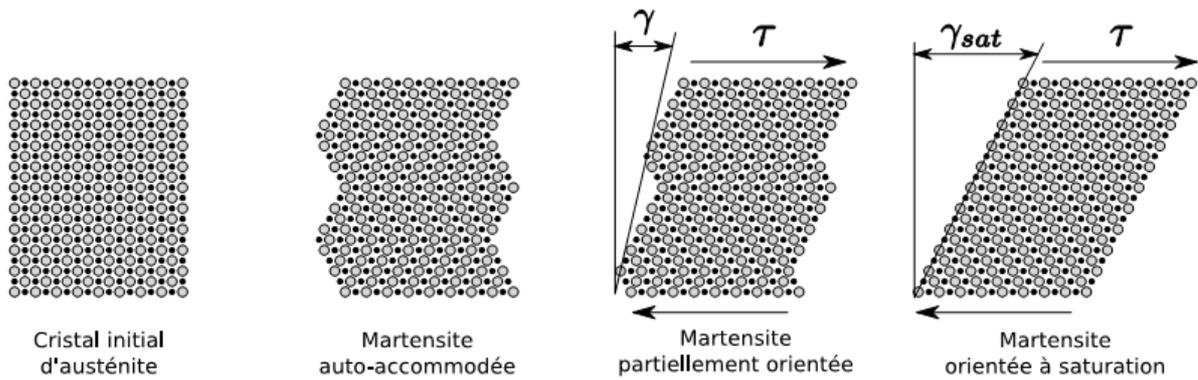


Figure I.4. Orientation des variantes de martensite par application d'une contrainte [18]

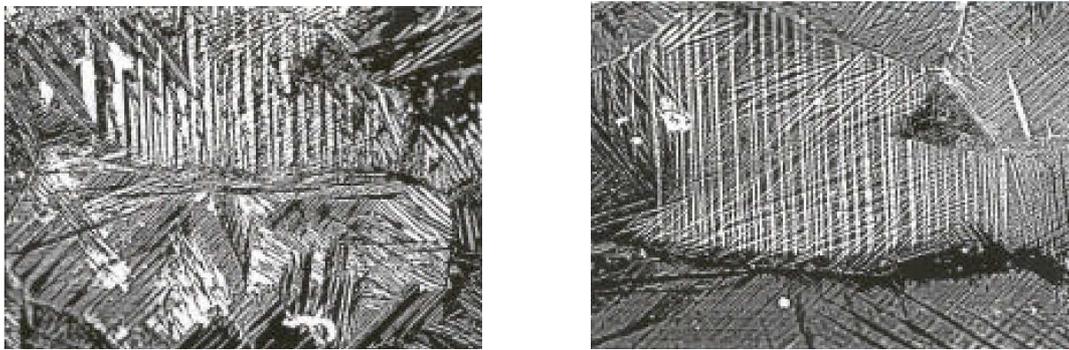


Figure I.5. a) Martensite auto-accommodée b) Martensite orientée dans un polycristal de CuAlNiMn sous un grossissement de 500 [17]

I.4. Propriétés des AMFs

En fonction du pilotage de la transformation martensitique par la contrainte et la température les AMFs peuvent présenter plusieurs formes de comportement.

I.4.1. Effet de pseudoélasticité (superélasticité)

Cet effet est observable lorsqu'on applique un chargement mécanique à un AMF initialement austénitique et maintenu à une température ($T > A_f^0$) l'alliage se déforme élastiquement, quand la contrainte appliquée atteint un seuil σ_{Ms} (contrainte de début de transformation) le matériau continue à se déformer considérablement (de l'ordre de 6 % pour un polycristal de NiTi) à cause de l'orientation des variantes de martensite formées, atteignant la valeur σ_{Mf} (contrainte de fin de transformation) la déformation continue élastiquement (martensite). Après le relâchement l'alliage recouvre sa forme initiale par un chemin différent (présence d'hystérésis) : recouvrement élastique jusqu'à $\sigma = \sigma_{As}$ (contrainte de début de transformation inverse martensite \rightarrow austénite), à $\sigma = \sigma_{Af}$ (contrainte de fin de transformation inverse) la phase présente est de l'austénite à 100%, la récupération se termine élastiquement

(austénite). A cause de la grande déformation et de sa récupération cet effet est appelé aussi effet superélastique (Fig. I.6.).

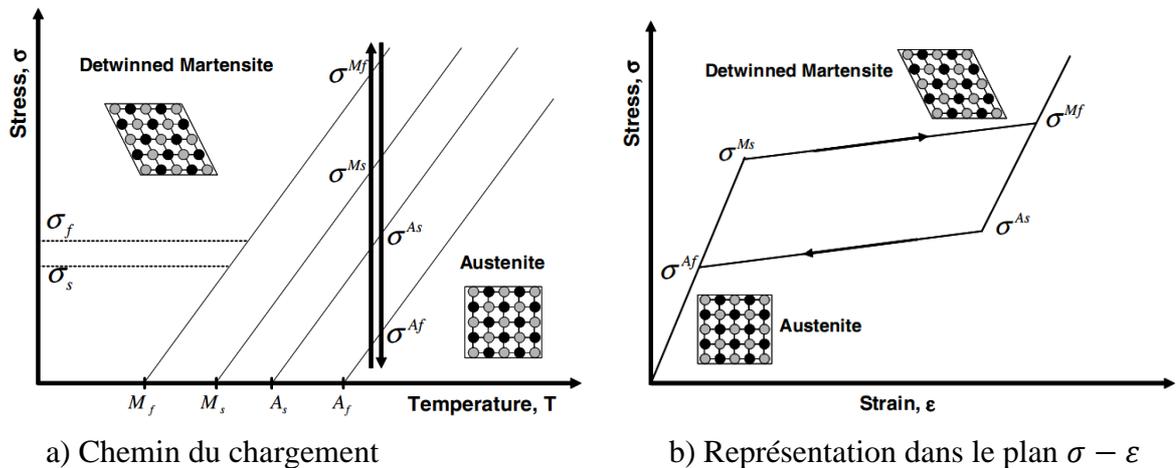


Figure I.6. L'effet de pseudoélasticité [16]

I.4.2. Effet de mémoire simple sens

On applique à un AMF, à une température $T < M_f^0$, une contrainte, lorsque celle-ci atteint σ_s la martensite commence à s'orienter, en arrivant σ_f c'est la fin de l'orientation au delà de σ_f on a une déformation élastique de la martensite. Après le relâchement on observe une déformation non recouverte (point D).

On chauffe l'alliage à une température $T > A_f^0$, à partir du point E la transformation directe (austénite \rightarrow martensite) se produit jusqu'au point F.

On laisse l'alliage se refroidir, au point B on a la martensite auto-accommodée (Fig. I.7.).

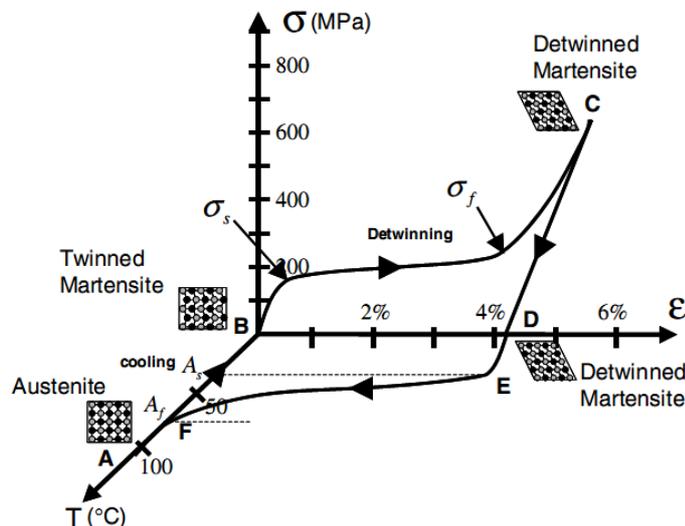
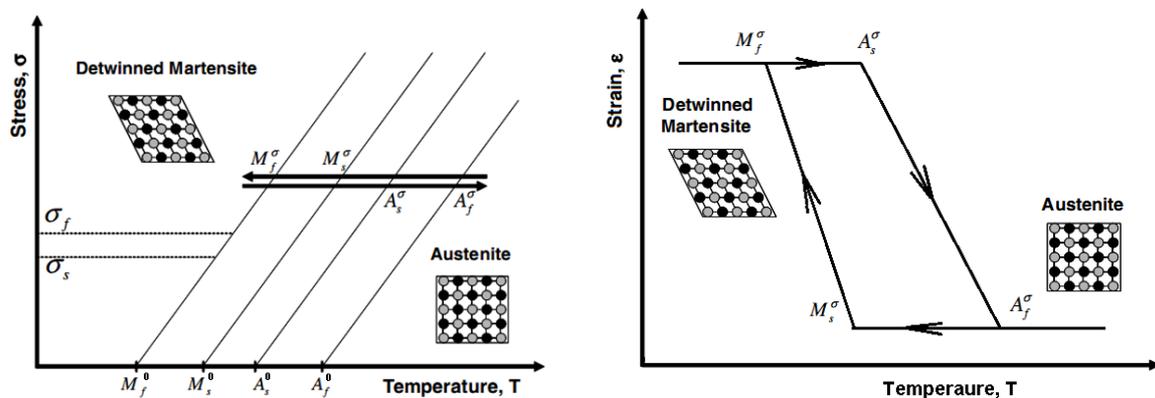


Figure I.7. L'effet simple de mémoire de forme d'un AMF [16]

I.4.3. Effet thermoélastique (superthermique)

L'effet thermoélastique est obtenu lorsqu'un AMF soumis à une contrainte constante est chauffé à une température $T > A_f^0$. Au refroidissement l'alliage subit une déformation qui cesse lorsque la température est au dessous de M_f^0 , cette déformation est due à la formation de la

martensite orientée sous l'effet de la contrainte qui débute à $T=M_s^\sigma$ et finit à $T=M_f^\sigma$ c'est la transformation directe. En réchauffant l'alliage la transformation inverse se produit à $T=A_s^\sigma$ et se termine à $T=A_f^\sigma$ (Fig. I.8.)



a) Chemin du chargement

b) Représentation dans le plan $\epsilon - T$

Figure I.8. L'effet thermoélastique [16]

I.4.4. Effet mémoire double sens

Il existe un seuil de contrainte au delà duquel la transformation martensitique s'accompagne d'un engendrement de défauts irréversibles [7]. Une éducation (chargement cyclique) appliquée au matériau peut conduire à une stabilisation de ces défauts et provoquer l'apparition d'un champ de contraintes résiduelles qui entraîne l'orientation de la martensite lors de la transformation directe, en d'autres termes ce champ de contraintes remplace la contrainte de pilotage. La figure (Fig. I.9.) montre la stabilité de l'hystérésis aux derniers cycles d'un chargement thermocyclique appliqué sur un fil de NiTi.

L'appellation mémoire double sens veut dire que l'AMF peut se souvenir des deux formes l'une à haute température et l'autre à basse température sans application de contrainte (Fig. I.10.).

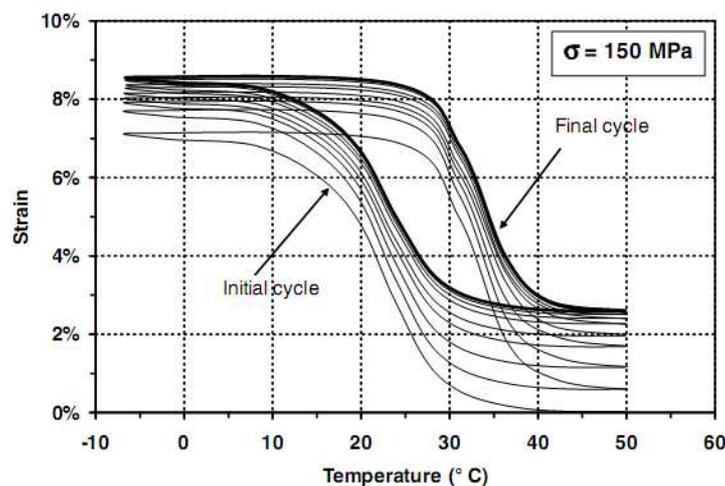


Figure I.9. Education (50 cycles) d'un AMF (NiTi) sous une contrainte de 150 MPa, [19]

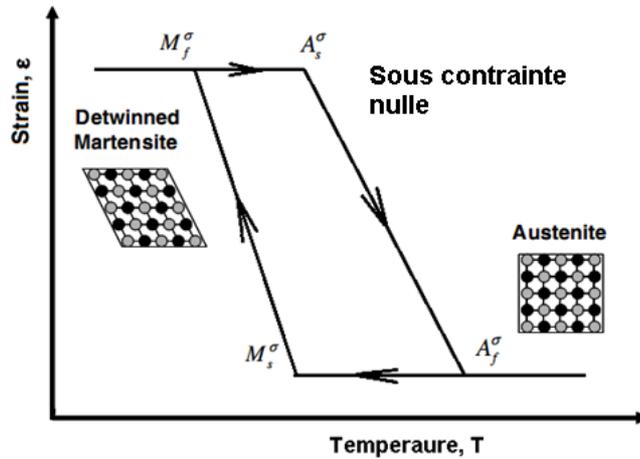


Figure I.10. Effet de mémoire double sens

I.4.5. Effet caoutchoutique

Lorsqu'un AMF est soumis à un chargement mécanique à une température $T < M_f^0$, il en résulte une déformation partiellement réversible (à cause des mouvements relatifs des interfaces entre les variantes de martensite). En relâchant la contrainte au point B il y a une décharge élastique de B à C (Fig. I.11.), la déformation mécaniquement irréversible peut être recouverte par un chauffage. Si on applique de nouveau un chargement de C à B et on relâche il y a décharge élastique de B à C, ce comportement élastique est appelée effet caoutchoutique [20].

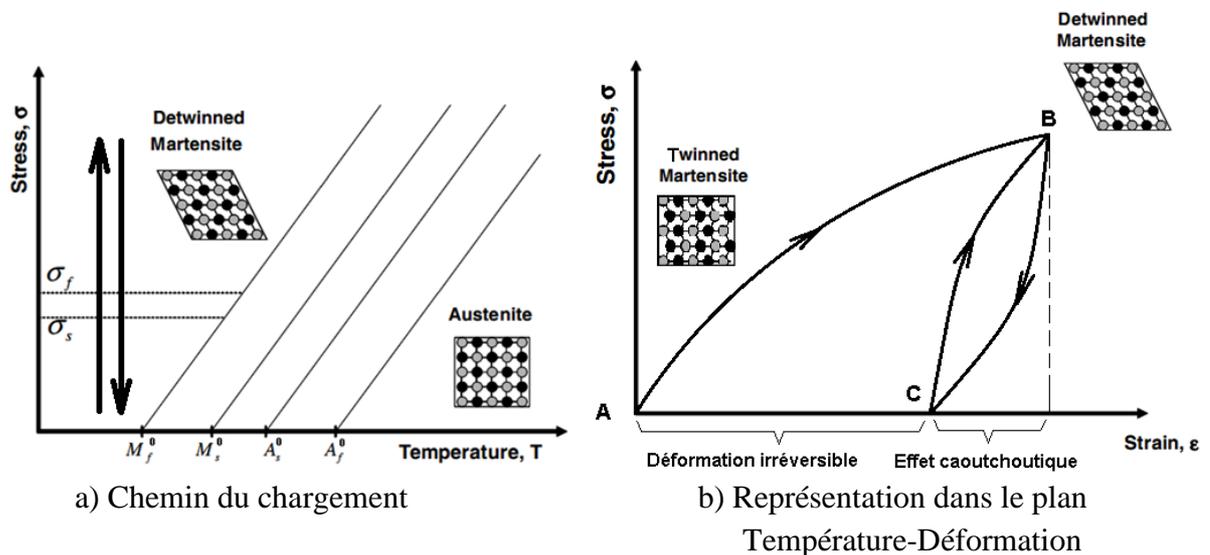


Figure I.11. Effet caoutchoutique [20]

I.5. Caractérisation thermomécanique des AMFs

Les AMFs ont déjà occupé une place dans plusieurs domaines d'application, de l'autre part la nécessité de connaître leurs caractéristiques thermomécaniques s'est imposée d'où plusieurs techniques sont utilisées.

1.5.1. Détermination des températures de début et de fin de transformation (DSC)

La méthode utilisée est l'essai de calorimétrie à balayage différentiel (DSC Differential Scanning Calorimetry) (FigI.12.). C'est un essai réalisé à contrainte nulle.

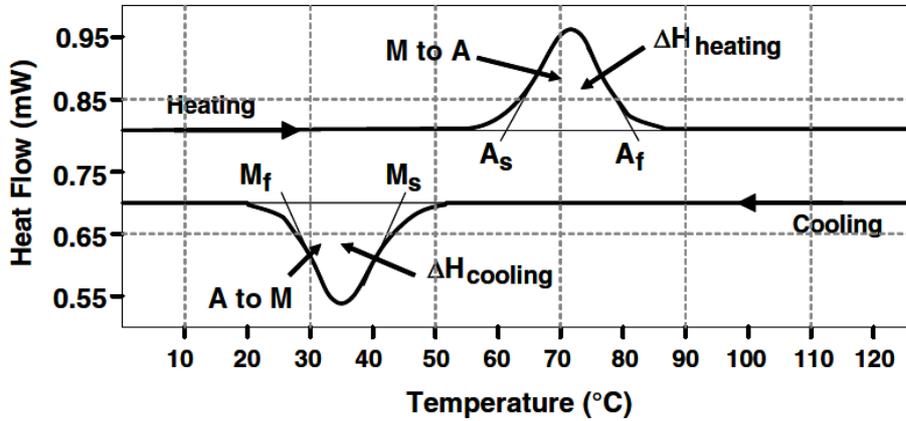


Figure I.12. Courbe de DSC montrant les températures de transformation ainsi que les chaleurs latentes [19]

Pendant le chauffage on observe un pic endothermique c'est la zone de transformation de la martensite en austénite débutant à A_s et terminant par A_f . Au refroidissement c'est un pic exothermique entre M_s et M_f c'est la zone correspondant à la transformation directe de l'austénite en martensite.

1.5.2. Essais thermomécaniques

L'essai de pseudoélasticité permet de déterminer les modules d'élasticité de l'austénite et de la martensite, les contraintes de début et de fin des transformations σ_{M_s} , σ_{M_f} , σ_{A_s} , σ_{A_f} ainsi que l'élongation maximale suivant un axe ϵ_0 . (FigI.13.)

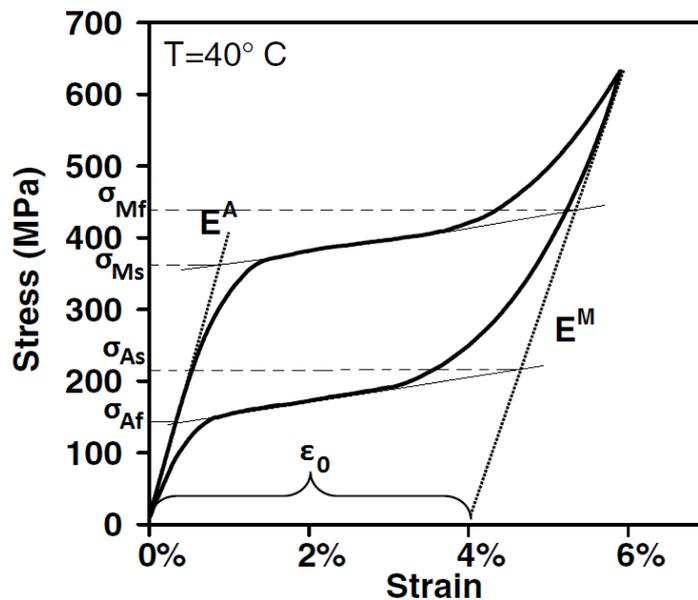


Figure I.13. L'essai de pseudoélasticité [19]

D'autres essais peuvent être utilisés pour déterminer des caractéristiques nécessaires en engineering ou en recherche comme l'essai thermoélastique depuis lequel on peut extraire les coefficients de dilatation de la martensite et l'austénite α_M et α_A (FigI.14.)

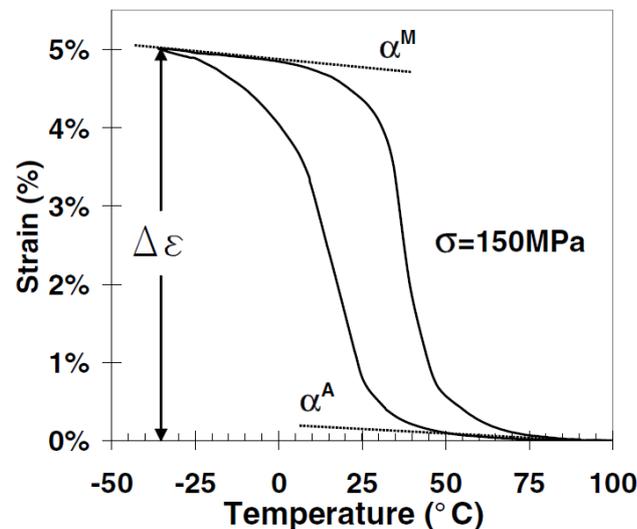


Figure I.14. Effet thermoélastique [19]

I.6. Application des AMFs

Malgré leur prix relativement élevé et la difficulté de mise en œuvre, les propriétés exhibées par les AMFs ont ouvert plusieurs voies pour leurs applications dans divers domaines.

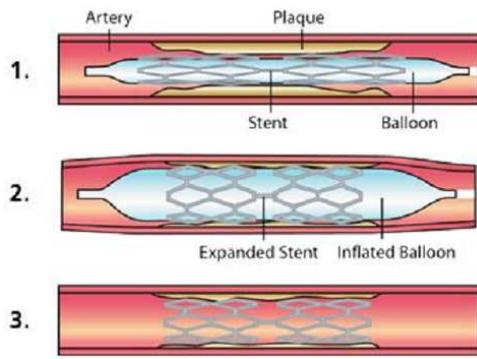
I.6.1. Applications biomédicales

Le domaine biomédical est l'un des secteurs majeurs des applications de ces alliages. Ces applications peuvent être classées en deux grandes catégories: les implants (agrafe, prothèse...) qui utilisent en général les forces développées en retour contraint et les instruments chirurgicaux qui utilisent l'effet superélastique [21], [22]

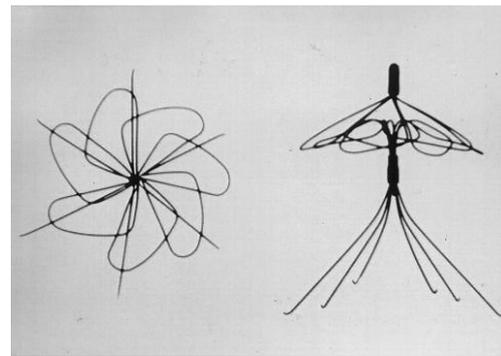
L'utilisation des alliages de Nitinol a été remarquable au cours des dernières décennies en raison du comportement thermomécanique particulier ainsi que la biocompatibilité. Il faut noter que plusieurs dispositifs médicaux développés aujourd'hui en NiTi étaient avant impossibles d'être conçus avec d'autres biomatériaux tels que l'acier inoxydable ou le titane.

a) Stents :

Ces dispositifs (NiTi) peuvent être insérés initialement déformés (phase martensitique) dans l'organisme (vaisseaux sanguins) quand ils sont exposés à la circulation du sang chaud ils récupèrent leurs formes normales en faisant élargir les vaisseaux pour empêcher leur fermeture (Fig. I.15a.).



a)



b)

Figure I.15. Stents [27], [26]

La figure (Fig. I.15b.) montre un stent conçu pour filtrer les gros caillots de sang emboisés dans la veine.

b) Agrafes :

Ces agrafes fabriqués en NiTi sont utilisés pour réduire les fractures des os et de permettre à l'os de se ressouder (Fig. I.16.).



Figure I.16. Agrafes [5], [24]

c) Utilisation en orthodontie :

La figure (Fig. I.17.) montre un ressort de redressement utilisé pour remplacer et redresser les dents en exerçant une force constante.



Figure I.17. Ressorts de redressement [22]

d) Fils de guidage :

Ce sont des fils en NiTi longs qu'on introduit dans l'organisme pour permettre un bon guidage des systèmes de diagnostic ou thérapeutiques (Fig. I.18.).

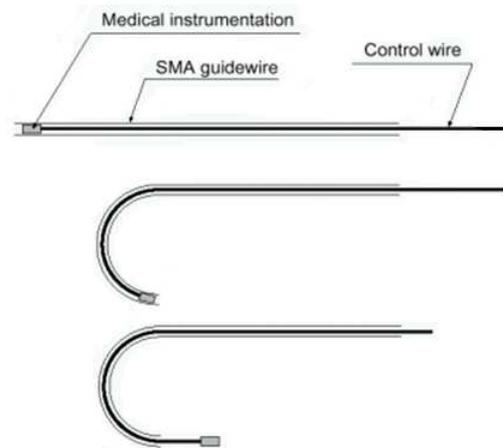


Figure I.18. Fil de guidage [5]

I.6.2. Applications aérospatiales :

Le domaine aérospatial a connu à son tour des applications des AMFs.

a) Manchon de raccordement :

Les avions F14 utilisaient des circuits hydrauliques en titane, le problème de raccordement se posait à cause de la mauvaise soudabilité du métal. Les manchons en NiTi constituaient l'alternative, à basse température le diamètre est augmenté. Après le montage à température ambiante le matériau recouvre sa forme initiale en exerçant une pression suffisante pour maintenir les deux conduites (Fig.I.19.)

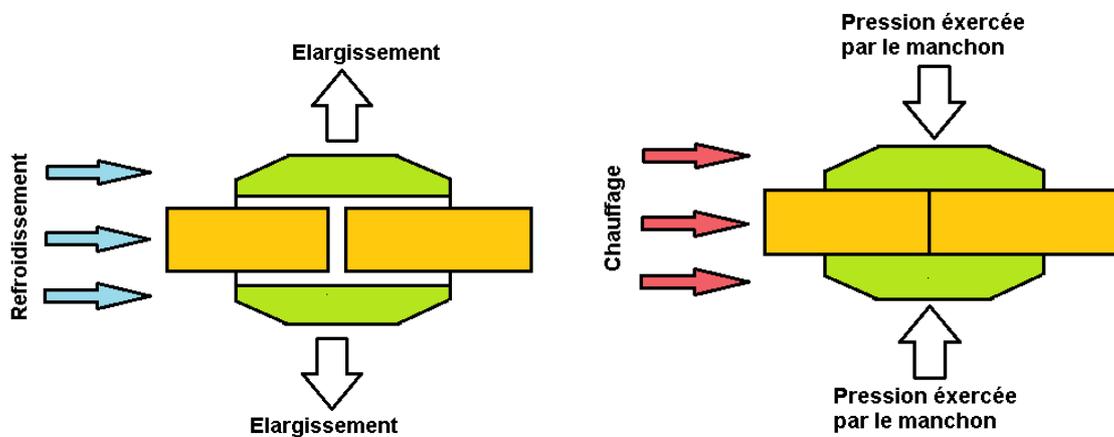


Figure I.19. Manchon d'accouplement [23]

b) Utilisation dans l'aéronautique :

L'entreprise Boeing a développé, avec la collaboration de Texas A&M University, un dispositif permettant de modifier la forme de réacteurs d'avions (Fig I.20.).La sortie du réacteur est formée de chevrons, actionnés par l'intermédiaire de trois plaquettes en Nickel-Titane. La géométrie est alors variable, ce qui permet d'adapter l'écoulement des gaz de combustion en fonction des conditions de vol.

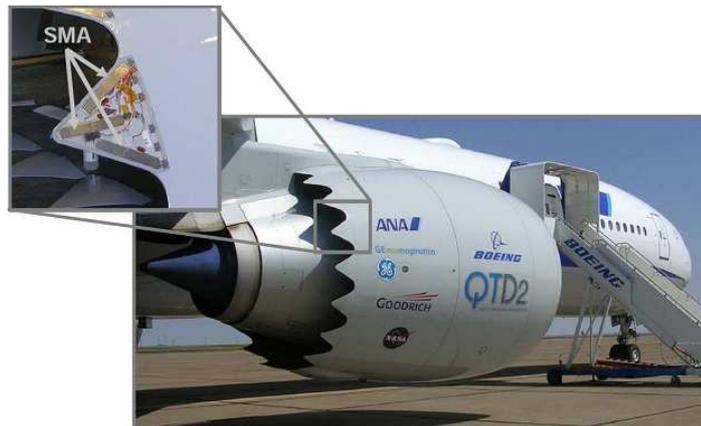


Figure I.20. Dispositif permettant de modifier la forme du réacteur de Boeing [16]

c) Utilisation en aérospatiale :

La figure (Fig. I.21.) représente un dispositif qui a été développé pour remplacer les mécanismes de désaccouplement pyrotechnique qui sont dangereux pour les structures. Dans ce dispositif une entretoise en NiTi comprimée est traversée par un courant électrique de sorte qu'elle soit chauffée pour reprendre sa forme antérieure avant la compression. Sous l'effet de la pression exercée par l'entretoise le boulon initialement rainuré rompt et ainsi les structures jointes sont détachées.

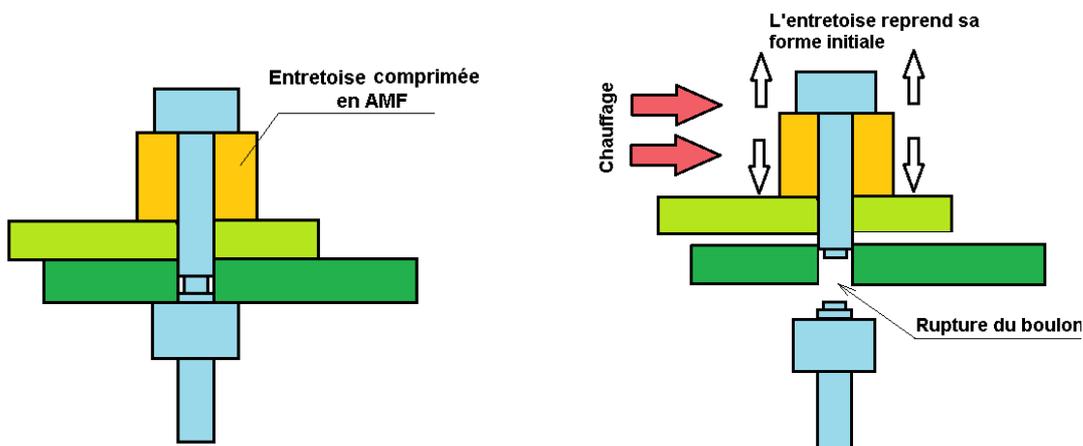


Figure I.21. Dispositif de relâchement non explosif [23]

I.6.3. Applications automobiles :

a) Utilisations comme activateurs :

Les AMFs peuvent servir d'activateurs électriques (déclenchement par un passage de courant) ou thermiques (déclenchement par variation de température) (Fig.I.22.). Les applications pouvant être envisageables sont :

- Habitable :
 - Verrouillage central
 - Inclinaison des sièges
- Partie avant :
 - Verrouillage capot moteur
 - Protection antibrouillard
 - Phares escamotables
 - Régulateur de climatisation
 - Ajustement du rétroviseur
- Partie arrière :
 - Amortisseurs variables
 - Bouchon de sécurité du réservoir
 - Verrouillage du coffre [23]

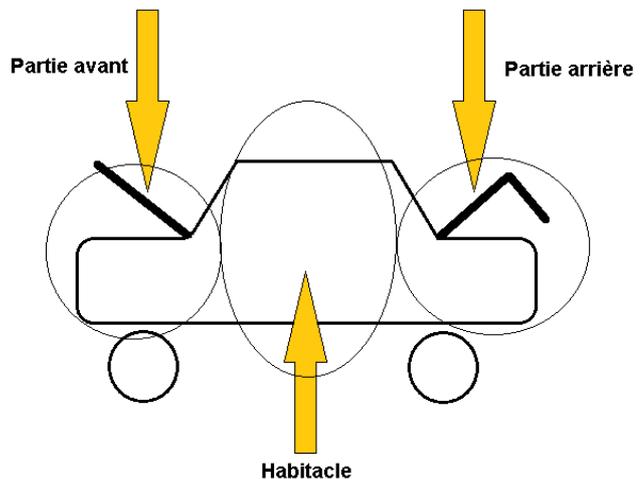


Figure I.22. Application des AMFs dans l'automobile

b) Soupapes :

Certains AMFs utilisés sous forme de ressorts, de film mince ou de fil, permettent la fabrication de soupapes pneumatiques destinées à contrôler le débit ou à réguler la pression (Fig. I.23.).

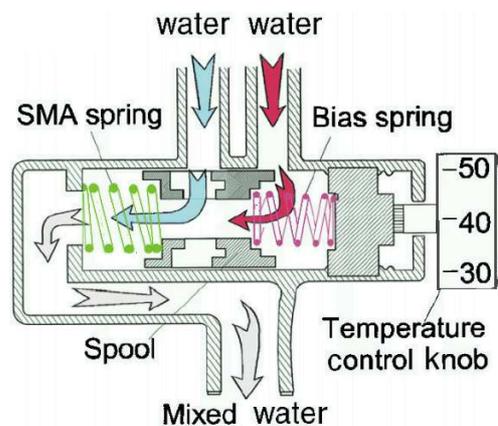


Figure I.23. Soupape de mélange thermostatique. [5]

I.6.4. Autres applications :

a) Applications textiles et cuirs :

Quelques applications utilisant les propriétés des alliages à mémoire de forme ont vu le jour, citons quelques unes (Fig. I.24.) :

- Soutien-gorge : les baleines utilisant la superélasticité des AMFs permettent d'avoir un meilleur confort pour la personne portant un tel soutien-gorge. De plus, les baleines ne se déforment pas lors du lavage en machine.
- Chapeau : l'exploitation de la propriété de superélasticité permet d'avoir un meilleur maintien du chapeau; il ne se déforme pas ou reprend plus facilement sa forme, et cela améliore le confort. [23]



Figure I.24. Quelques applications utilisant les AMFs [24]

c) Lunetterie :

L'utilisation des AMFs dans la lunetterie est également un grand succès. Exploitant la superélasticité des AMFs, les lunettes sont beaucoup plus résistantes. Les lunettes existent en NiTi ou en alliage cuivreux ; avec un avantage certain pour ce dernier du fait d'une plus grande flexibilité (Fig. I.25.). [23]



Figure I.25. Application de la superélasticité aux lunettes [24]

d) Applications de sécurité :

- Des trappes d'évacuation de fumée pour des locaux (immeuble, usine) ; un actionneur en AMF double sens déclenche l'ouverture de la trappe dès que la température critique est dépassée (incendie). Le retour à une température normale provoque la fermeture de la trappe.
- Des sprinklers d'extinction d'incendie ; un ressort en AMF se déclenche dès que la température critique est atteinte (65°C), permettant le passage de l'eau.
- Des valves de circuit de gaz ; un ressort en AMF simple sens se déclenche dès que la température augmente (incendie), ce qui coupe l'arrivée de gaz et évite toute explosion. Il faut réarmer la valve manuellement. [23]

e) Architecture :

L'application majeure dans ce domaine est l'utilisation d'AMFs pour concevoir des structures antisismiques. On l'utilise principalement dans la réfection de monuments historiques (église,...) se trouvant dans une zone à risque sismique. [23]

CHAPITRE II : MODELES EXISTANTS

II.1. Classification des modèles

Dans le but de décrire le comportement thermomécanique des AMFs, plusieurs modèles ont été développés, différant les uns des autres par l'approche adoptée ou l'échelle considérée pour d'étude. Ces modèles peuvent être classés en trois catégories essentielles : modèles macroscopiques (phénoménologiques), modèles micromécaniques et modèles micro/macroscopiques

II.2. Modèles micromécaniques

A l'échelle microscopique; la nucléation, le mouvement des interfaces entre les différentes phases existantes et la croissance des variantes de martensite constituent les phénomènes liés au comportement microscopique. Il est vrai que les modèles de cette catégorie décrivent rigoureusement ces phénomènes mais leur implémentation dans des codes de calcul des éléments finis reste difficile.

L'apparition des premiers modèles de cette catégorie remonte aux années 80, Falk [29] a pu développer un modèle analytique basé sur la théorie de transition de phases de Landau [30], Cette approche a permis de décrire l'effet de pseudoélasticité et de l'effet de mémoire de forme. Il faut noter en parallèle que le développement d'une théorie géométrique linéaire de la transition de martensite par Wechsler et al. [31] a permis à d'autres travaux basés sur cette approche de voir le jour. Ball, James et Bhattacharya ont repris les travaux de Wechsler pour développer une théorie géométrique non linéaire en se basant sur la méthode de minimisation d'énergie. Bhattacharya a développé un modèle illustrant l'influence de la texture sur effets observés sur les polycristaux des AMFs [32]. Sachant qu'à l'échelle de grain, les différentes interfaces entre l'austénite et la martensite ainsi que les autres variantes peuvent être observées, pour prédire la formation des microstructures observées et l'orientation de ces interfaces Ball et James ont utilisé des méthodes de minimisation de l'énergie [33]. De leurs coté Abeyaratne et Knowles se sont basés sur la transition de phase martensitique induite sous contrainte dans une interface simple et ont proposé la définition de barrières de nucléation mais ce modèle semble limité pour être utilisé dans la simulation des processus complexes.

En résumé la plupart des modèles de cette catégorie utilise : la fonction énergie libre multi-puits, un critère de nucléation basé sur le concept barrière d'énergie [34].

II.3. Modèles micro/macroscopiques

Comme leur appellation l'indique ces modèles sont construits en deux étapes :

La première est de définir un volume élémentaire représentatif VER en lui associant des grandeurs macroscopiques, la deuxième étape est de passer de l'échelle du VER à celle du grain.

Ces modèles utilisent l'approche thermodynamique, en se basant sur la microstructure (Plans d'habitat, variantes de martensites) utilisent l'énergie libre de Helmholtz :

$$\Psi = \Delta G^{ch} + W^{sur} + W^m \quad (2.1.1)$$

Avec :

ΔG^{ch} : Energie chimique de changement de phase

W^{sur} : Energie de surface (surface de l'interface austénite martensite)

$W^m = W^{ext} + W^{int}$: Energie mécanique totale

W^{ext} : Travail mécanique externe

W^{int} : Energie d'interaction entre les phases

Patoor et al.[35] étaient les initiateurs de ce type de modèle ils ont considéré l'énergie d'interaction entre la martensite et l'austénite d'une part et entre les variantes d'autre part. Dans les travaux après [36] Patoor et al ont utilisé une matrice d'interaction d'un monocristal au lieu de la méthode d'Eshelby-Kroner.

En conservant l'approche de Patoor et al. [35] Goo et LExcellent [37] ont proposé un modèle des AMFs monocristallin basé sur l'hypothèse que chaque plaquette de martensite est composée d'une seule variante.

Sun et Hwang [38],[39] ont proposé un modèle qui tient en compte l'influence du mécanisme physique microstructural lors de la transition sur le comportement macroscopique.

Huang et Brinson [40] ont construit un modèle 3D, utilisant la théorie d'Eshelby-Kroner pour déterminer l'énergie d'interaction entre les différentes variantes, ce modèle décrit la pseudoélasticité et l'effet mémoire.

Boyd et Lagoudas [41] ont utilisé des méthodes d'homogénéisation pour avoir des équations constitutives implicites d'un polycristal en s'appuyant sur les données d'un monocristal.

LExcellent et al. [42] ont utilisé une nouvelle théorie cristallographique développée par Ball et James [33] et une méthode d'homogénéisation proposée par Huang [43] qui permet à partir des seuls paramètres de maille de l'austénite et de la martensite de déterminer la surface de début de transformation de l'alliage Cu-Al-Be.

II.4. Modèles macroscopiques

Les premiers modèles de cette catégorie furent apparus dans les années 80 (Tanaka, 1986) [28], ce modèle a été caractérisé par l'utilisation d'une expression exponentielle pour l'énergie

d'interaction et la constance des propriétés du matériau durant la transformation. Ce modèle a été conçu pour 3D mais son implémentation était limitée pour 1D.

Boyd et Lagoudas [44] ont étendu le modèle de Tanaka pour permettre son implémentation en 3D. Bondaryev et Wayman [45] ont proposé un modèle basé sur la théorie classique de la plasticité. De leur part Liang et Rogers [46] ont développé un modèle caractérisé la cinétique en cosinus de la fraction en volume de la martensite. Pendant années 90 le nombre d'applications des AMFs en biomédical a augmenté et a entraîné des améliorations portées aux modèles 3D (orientés pour la simulation des dispositifs en AMF) mais l'implémentation de 1D demeure active pour décrire la fraction volumétrique de la martensite [47].

Brinson et al. ont proposé un modèle [52] qui sépare la fraction volumique de martensite en une partie autoaccomodante et une partie orientée.

En 1996 Lagoudas et al. ont proposé un modèle 3D unifiant les premiers modèles [48]. Des améliorations en termes de précision ont été apportées aux modèles par Raniecki et Lexcelent [49]. Également Qidwai et Lagoudas [50] ont étudié les conséquences du principe de dissipation maximale durant la transformation de phase présente sur les surfaces de transformation et les lois d'écoulement. Lexcelent et al [51] ont proposé des fonctions d'écrouissage de transformation différentes pour permettre la capture de la réponse asymétrique exhibée par les AMFs lors de chargement en compression et en traction.

Souza et al. ont proposé en 1998 un modèle capable de décrire les caractéristiques essentielles des AMFs polycristallins pour permettre l'implémentation de 3D [53]. Auricchio et Petrini ont apporté des améliorations à ce modèle pour augmenter sa robustesse d'implémentation dans un code des éléments finis [54]

La plupart de ces modèles macroscopiques utilisent l'approche thermodynamique, et la fraction volumétrique de la martensite comme variable interne.

Ce sont les modèles les plus rencontrés en littérature en raison de leur simplicité et la facilité d'implémentation dans des codes de calcul d'éléments finis en revanche ils sont moins précis que les modèles micro/macrosopiques.

II.5. Citation de quelques modèles

II.5.1. Modèle de Patoor et al. [55]

L'énergie libre a été choisie comme suit :

$$\Psi(\Sigma_{ij}, T, Y^k) = -[\Delta G_{ch} + W_{elas} + W_{int} - \Sigma_{ij} E_{ij}] \quad (2.5.1)$$

Σ_{ij}, T : Variables de contrôle respectivement contrainte appliquée et température

Y^k : Ensemble de k variables internes

ΔG_{ch} : Énergie chimique associée au changement de phase avec V_M volume de la martensite

$$\Delta G_{ch} = V_M B(T - T_0) \quad (2.5.2)$$

W_{elas} : Energie élastique

$$W_{elas} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^e(r) dV \quad (2.5.3)$$

Cette quantité d'énergie peut être dissociée en un travail externe et un travail interne :

$$W_{elas} = \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} M_{ijkl} \Sigma_{kl} - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{int}(r) \varepsilon_{ij}^T(r) dV \quad (2.5.4)$$

ε_{ij}^T : Tenseur de déformation due à la transformation

M_{ijkl} : Tenseur de complaisance du matériau.

L'énergie libre peut s'écrire :

$$\Psi(\Sigma_{ij}, T, f, \varepsilon_{ij}^T) = \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} M_{ijkl} \Sigma_{kl} + \Sigma_{ij} E_{ij}^T - B(T - T_0) \frac{V_M}{V} + \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^{int}(r) \varepsilon_{ij}^T(r) dV \quad (2.5.5)$$

En écrivant la fraction martensitique f :

$$f = \frac{V_M}{V} \quad (2.5.6)$$

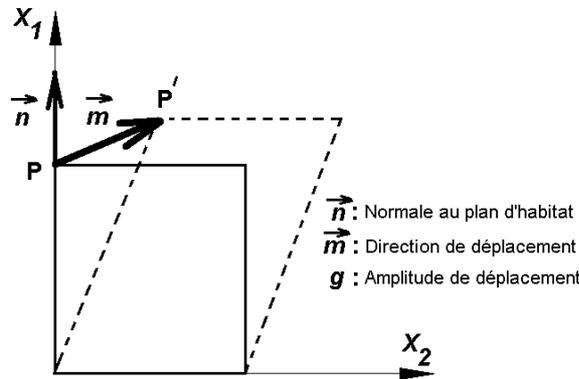
L'expression de la déformation moyenne totale s'écrit :

$$E_{ij}^T = \frac{V_M}{V} \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \varepsilon_{ij}^T(r) dV = f \overline{\varepsilon_{ij}^T} \quad (2.5.7)$$

En introduisant l'hypothèse sur l'uniformité des déformations ε_{ij}^T ; l'expression de l'énergie libre devient :

$$\Psi(\Sigma_{ij}, T, f, \varepsilon_{ij}^T) = \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} M_{ijkl} \Sigma_{kl} + \Sigma_{ij} E_{ij}^T - B(T - T_0) f + A_{ijkl} f (1 - f) \overline{\varepsilon_{kl}^T} \overline{\varepsilon_{kl}^T} \quad (2.5.8)$$

A l'échelle cristallographique les variantes sont caractérisées par un plan d'habitat et une amplitude de déformation g (FigII.1.), en considérant la déformation globale ε_{ij}^T d'un monocristal



FigureII.1. Caractéristiques cinématiques d'une transformation martensitique.

$$\varepsilon_{ij}^T = \frac{1}{V} \int_V \sum_n \varepsilon_{ij}^n \theta^n(r) dV = \sum_n \varepsilon_{ij}^n f^n \quad (2.5.9)$$

$$\text{avec } \theta^n(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in V^n \\ 0 & \text{si } r \notin V^n \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_n f^n = f \leq 1 \text{ et } f^n \geq 0$$

En supposant que le champs de déformation est uniforme, l'énergie d'interaction peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} E_{int} &= -\frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^{int}(r) \varepsilon_{ij}^{Tr}(r) dV = -\frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^{int}(r) \sum_n \varepsilon_{ij}^n \theta^n(r) dV \\ &= -\frac{1}{2V} \sum_n \varepsilon_{ij}^n \int_{V^n} \sigma_{ij}^{int}(r) dV \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Où l'intégrale $\int_{V^n} \sigma_{ij}^{int}(r) dV$ désigne la contrainte interne moyenne dans la variante V^n qui peut être déterminée par l'approche d'Eshelby-Kroner, alors nous aurons :

$$\int_{V^n} \sigma_{ij}^{int}(r) dV = C_{ijkl} (I_{klpq} - S_{klpq}^n) (\sum_m \varepsilon_{pq}^m f^m - \varepsilon_{pq}^n) \quad (2.5.11)$$

C_{ijkl} , I_{klpq} et S_{klpq} sont des tenseurs d'ordre 4 ; respectivement d'élasticité, d'identité et d'Eshelby.

En utilisant la matrice d'interaction H^{nm} l'énergie d'interaction aura l'expression suivante :

$$E_{int} = \frac{1}{2} \sum_{n,m} H^{nm} f^n f^m \quad (2.5.12)$$

En revenant à l'échelle macroscopique l'énergie libre s'écrira :

$$\Psi(\Sigma_{ij}, T, f^n) = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} M_{ijkl} \Sigma_{kl} + \Sigma_{ij} \sum_n \varepsilon_{ij}^n f^n - B(T - T_0) f - \frac{1}{2} \sum_{n,m} H^{nm} f^n f^m \quad (2.5.13)$$

En présence des contraintes cinématiques $f \leq 1$ et $(-f^n \leq 0)$, l'utilisation du lagrangien donne :

$$L(\Sigma_{ij}, T, f^n) = \Psi(\Sigma_{ij}, T, f^n) - \lambda_0 [\sum_n f^n - 1] - \sum_n \lambda_n [-f^n - 0] \quad (2.5.14)$$

Les forces thermodynamiques s'écrivent :

$$F^n = \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^n - B(T - T_0) - \sum_m H^{nm} f^m - \lambda_0 + \lambda_n \quad (2.5.15)$$

La transformation aura lieu lorsque la force thermodynamique atteint une valeur critique F_c , les conditions nécessaires pour avoir la transformations s'expriment comme suit :

$$\dot{f}^n = 0 \quad \text{si } F^n < F_c \quad \forall F_c \quad (2.5.16)$$

$$\dot{f}^n \neq 0 \quad \text{si } F^n = F_c \quad \text{et } \dot{F}_c = 0 \quad (2.5.17)$$

$$\dot{f}^n \neq 0 \quad \text{si } F^n = F_c \quad \text{et } \dot{F}_c = \dot{F}^n \quad (2.5.18)$$

D'après le second principe de la thermodynamique :

$$\dot{\Psi}_{|\Sigma, T} = \dot{W}^d = \sum_n F^n \dot{f}^n \geq 0 \quad (2.5.19)$$

quand la transformation directe ($A \rightarrow M$) ait lieu :

$$F^n \dot{f}^n = F_c \dot{f}^n \quad (2.5.20)$$

également pour la transformation inverse ($M \rightarrow A$) :

$$F^n \dot{f}^n = -F_c \dot{f}^n \quad (2.5.21)$$

Finalement on aura un système d'équations :

$$\Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^n - B(T - T_0) - \sum_m H^{nm} f^m - \lambda_0 + \lambda_n = \pm F_c \quad (2.5.22)$$

II.5.2. Modèle de Lagoudas et al. [44]

Lagoudas et al. ont proposé en 1996 un modèle capable d'unifier trois modèles différents (Tanaka [22], Liang et Rogers [46] et Lagoudas [44]). Les variables de contrôle choisies sont le tenseur de contraintes de Cauchy σ et la température T , les variables internes sont la fraction martensitique ξ et le tenseur de déformation de transformation ε^{tr} et comme potentiel thermodynamique l'énergie libre de Gibbs G donnée par l'expression :

$$G(\sigma, T, \xi, \varepsilon^{tr}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \sigma : S : \sigma - \frac{1}{\rho} \sigma : [\alpha(T - T_0) + \varepsilon^{tr}] + c[(T - T_0) - T \ln \frac{T}{T_0}] - s_0 T + u_0 + f(\xi) \quad (2.523)$$

T_0 : température de référence

ρ : Densité

c : Chaleur massique effective

u_0 : Energie interne spécifique effective

s_0 : Entropie spécifique effective

S : Tenseur effectif de complaisance d'ordre 4

α : Tenseur effectif du coefficient de dilatation d'ordre 2

$f(\xi)$: Fonction d'érouissage de transformation

Ces quantités effectives s'écrivent comme suit :

$$S(\xi) = S^A + \xi(S^M - S^A) = S^A + \xi \Delta S \quad (2.524)$$

$$\alpha(\xi) = \alpha^A + \xi(\alpha^M - \alpha^A) = \alpha^A + \xi \Delta \alpha \quad (2.525)$$

$$c(\xi) = c^A + \xi(c^M - c^A) = c^A + \xi \Delta c \quad (2.526)$$

$$s_0(\xi) = s_0^A + \xi(s_0^M - s_0^A) = s_0^A + \xi \Delta s_0 \quad (2.527)$$

$$u_0(\xi) = u_0^A + \xi(u_0^M - u_0^A) = u_0^A + \xi \Delta u_0 \quad (2.528)$$

En utilisant l'inégalité de Clausius-Planck :

$$\sigma : \dot{\varepsilon}^{tr} + \left(-\rho \frac{\partial G}{\partial \xi}\right) \dot{\xi} \geq 0 \quad (2.529)$$

Comme la déformation est proportionnelle à la quantité de martensite produite :

$$\varepsilon^{tr} = \Lambda \xi \quad (2.530)$$

Λ : Tenseur de transformation d'ordre 2

$$\dot{\varepsilon}^{tr} = \Lambda \dot{\xi} \quad (2.531)$$

L'inéquation (2.2.29) devient :

$$\left(\sigma : \Lambda - \rho \frac{\partial G}{\partial \xi}\right) \dot{\xi} = \pi \dot{\xi} \geq 0 \quad (2.532)$$

Avec :

$$\pi(\sigma, T, \xi) = \sigma : \Lambda + \frac{1}{2} \sigma : \Delta S : \sigma + \sigma : \Delta \alpha (T - T_0) - \rho \Delta c \left[(T - T_0) - T \ln \frac{T}{T_0}\right] + \rho \Delta s_0 T - \rho \Delta u_0 - \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad (2.533)$$

En introduisant une fonction de transformation

$$\Phi = \begin{cases} \pi - Y \text{ si } \dot{\xi} > 0 (A \rightarrow M) \\ -\pi - Y \text{ si } \dot{\xi} < 0 (M \rightarrow A) \end{cases} \quad (2.5.34)$$

Pour que la transformation ait lieu :

$$\Phi = 0 \quad (2.5.35)$$

La fonction d'écroutissage peut être écrite sous la forme :

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\rho b^M \xi^2 + (\mu_1 + \mu_2)\xi \text{ si } \dot{\xi} > 0 \\ \frac{1}{2}\rho b^A \xi^2 + (\mu_1 - \mu_2)\xi \text{ si } \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad (2.5.36)$$

Les coefficients b^M , b^A , μ_1 et μ_2 sont déterminés expérimentalement.

II.5.3. Modèle de Souza et al. [53]

Les auteurs ont choisi le tenseur de déformation ε et la température T comme variables de pilotage et le tenseur de déformation de transformation ε^{tr} comme variable interne. ε^{tr} est supposé sans trace en raison des études expérimentales indiquant qu'aucun changement de volume a été observé [25].

En outre la norme de ε^{tr} est supposée toujours inférieure à ε_L

$$\|\varepsilon^{tr}\| < \varepsilon_L \quad (2.5.37)$$

La déformation globale a été décomposée :

$$\varepsilon = \frac{\theta}{3}I + e \quad (2.5.38)$$

$\theta = tr(\varepsilon)$: Partie volumétrique de ε

e : Partie déviatorique de ε

I : Tenseur d'identité d'ordre 2

L'énergie libre a pour expression :

$$\Psi(\theta, e, T, \varepsilon^{tr}) = \frac{1}{2}K\theta^2 + G\|e - \varepsilon^{tr}\|^2 - 3\alpha K\theta(T - T_0) + \beta(T - T^*)\|\varepsilon^{tr}\| + \frac{1}{2}h\|\varepsilon^{tr}\|^2 + (u_0 - T\eta_0) + c \left[T - T_0 - T \log \left(\frac{T}{T_0} \right) \right] + \mathcal{J}_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr}) \quad (2.5.39)$$

Ket G : Respectivement le module global et le module de cisaillement

α : Coefficient de dilatation

β : Paramètre de modèle lié à la relation contrainte-température

T_0 : Température au dessous de laquelle la martensite est stable

h : Paramètre d'écroutissage lié à la transformation de phase

c : Capacité calorifique

u_0 et η_0 : Respectivement énergie interne et l'entropie à la température de référence

$\mathcal{J}_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr})$: Indicateur introduit pour satisfaire la condition (2.2.37)

$\langle aaaaa \rangle$: désigne la positivité de la quantité $aaaaa$

$$\mathcal{J}_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\varepsilon^{tr}\| \leq \varepsilon_L \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5.40)$$

En dérivant $\Psi(\theta, e, T, \varepsilon^{tr})$ par rapport aux arguments nous obtenons les différents composants de contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K[\theta - 3\alpha(T - T_0)] \\ s = \frac{\partial \Psi}{\partial e} = 2G(e - \varepsilon^{tr}) \\ \eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} = \eta_0 + 3\alpha K\theta - \beta \|\varepsilon^{tr}\| \frac{\langle T - T^* \rangle}{|T - T^*|} \\ X = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^{tr}} = s - \beta \langle T - T^* \rangle \frac{\varepsilon^{tr}}{\|\varepsilon^{tr}\|} - h\varepsilon^{tr} - \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{\|\varepsilon^{tr}\|} \end{array} \right. \quad (2.5.41)$$

p : Partie volumétrique du tenseur de contrainte σ

s : Partie déviatorique du tenseur de contrainte σ

η : Entropie

X : Contrainte généralisée

La dérivation de la fonction $\mathcal{J}_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr})$ entraîne la création de la variable γ définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = 0 \quad \text{si } \|\varepsilon^{tr}\| < \varepsilon_L \\ \gamma \geq 0 \quad \text{si } \|\varepsilon^{tr}\| = \varepsilon_L \\ \partial \mathcal{J}_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr}) = \gamma \frac{\varepsilon^{tr}}{\|\varepsilon^{tr}\|} \end{array} \right. \quad (2.5.42)$$

Le problème qui se pose au cas où $\varepsilon^{tr} = 0$; la contrainte généralisée X devient indéterminée, pour remédier à ce problème les auteurs ont proposé une définition différente au moment de la nucléation de la phase fille.

$$X = R \frac{s}{\|s\|} \quad (2.5.43)$$

Cette relation proposée peut être prouvée en supposant qu'un processus hypothétique débute avec $\varepsilon^{tr} = 0$ et $\dot{\varepsilon}^{tr} \neq 0$. Avec l'hypothèse $\|s - X\| = \beta \langle T - T^* \rangle + h\|\varepsilon^{tr}\|$ est valable pour ε^{tr} au voisinage de 0, il s'en suit que :

$$\|s - X\| = \beta \langle T - T^* \rangle$$

Par conséquent si une transformation de phase est prévue il y aura:

$$\|s\| = \|s - X + X\| \leq \|s - X\| + \|X\| = \beta \langle T - T^* \rangle + R$$

Cette relation obtenue en prenant en compte la transformation conduit à $\|X\| = R$, alors que la limite est gouvernée par la fonction limite :

$$F(X) = \|X\| - R \quad (2.5.44)$$

Où R est un paramètre du matériau qui peut être le rayon du domaine élastique. Finalement l'évolution de la variable interne ε^{tr} et les conditions de Kuhn-Tucker prennent la forme suivante :

$$\varepsilon^{tr} = \dot{\xi} \frac{\partial F}{\partial X} = \dot{\xi} \frac{X}{\|X\|} \quad (2.5.45)$$

$$\begin{cases} \dot{\xi} \geq 0 \\ F \leq 0 \\ \dot{\xi} F = 0 \end{cases} \quad (2.5.46)$$

CHPITRE III : MODELISATION DU COMPORTEMENT THERMOMECHANIQUE DES AMFs

Le comportement des alliages à mémoire de forme est piloté par les chargements mécanique ou thermique ; faisant ainsi intervenir les lois de la thermodynamique.

III.1. Rappels thermodynamiques

1) Le premier principe de la thermodynamique :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

Ce principe stipule que la variation de l'énergie interne est la somme des énergies échangées avec l'extérieur sous formes de travail ou de chaleur.

2) Le deuxième principe de la thermodynamique :

L'entropie créée par l'échange de chaleur est toujours supérieure ou égale à la quantité $\frac{\delta Q}{T}$

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

S représente l'entropie.

3) Potentiel thermodynamique :

Un potentiel thermodynamique est une fonction pouvant un état thermodynamique et dépendant de variables d'état. Communément on utilise quatre potentiels :

- 1- L'énergie interne U
- 2- L'enthalpie $H=U - \sigma:\varepsilon$
- 3- L'énergie libre de Helmholtz $\psi = U - ST$
- 4- L'énergie libre de Gibbs $G= H - ST$

III.2. Lois d'état dérivant à partir d'un potentiel thermodynamique

Soit un volume élémentaire représentatif (VER) V de frontière ∂V soumis à un chargement mécanique σ et un chargement thermique (le flux \vec{q} et la source de chaleur interne r)

Considérons les grandeurs u et s qui sont respectivement les densités d'énergie interne et d'entropie, le premier principe de la thermodynamique permet d'écrire :

$$\int_V dudV = \int_V (\sigma: d\varepsilon)dV - \int_{\partial V} \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot dA + \int_V r \cdot dV \quad (3.2.1)$$

\vec{q} : Flux de chaleur (source externe)

dA : Elément de surface de la frontière ∂V

L'application du théorème de divergence rendra l'équation (3.2.1) comme suit :

$$\int_V dudV = \int_V (\sigma: d\varepsilon)dV - \int_V \text{div}(\vec{q}) \cdot dV + \int_V r \cdot dV \quad (3.2.2)$$

$$\int_V dudV = \int_V (\sigma: d\varepsilon - \text{div}(\vec{q}) + r)dV \quad (3.2.3)$$

Cela permet l'écriture locale de l'énergie interne :

$$du = \sigma : d\varepsilon - \text{div}(\vec{q}) + r \quad (3.2.4)$$

Si on utilise la densité d'énergie libre de Helmholtz on aura:

$$du = d\psi + ds.T + s.dT \quad (3.2.5)$$

Le deuxième principe de la thermodynamique s'écrit :

$$ds \geq \frac{r}{T} - \frac{\text{div}(\vec{q})}{T} \quad (3.2.6)$$

En utilisant les équations (3.2.4) et (3.2.5) l'inégalité (3.2.6) prend la forme :

$$\sigma : d\varepsilon - d\psi - sdT \geq 0 \quad (3.2.7)$$

L'inégalité (3.2.7) est appelée inégalité de Clausius Duhem.

Si on néglige les contributions (dilatation, plasticité) la déformation macroscopique ε peut être considérée comme la somme de deux déformations élastique et inélastique liée à la transformation

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^t \quad (3.2.8)$$

En considérant les variables macroscopiques ε , T et la variable interne f (considérée comme la fraction volumique de la martensite) la densité d'énergie libre de Helmholtz peut s'écrire :

$$\psi = \psi(\varepsilon, T, f) \quad (3.2.9)$$

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial\psi}{\partial T} dT + \frac{\partial\psi}{\partial f} df \quad (3.2.10)$$

En remplaçant (3.2.10) dans (3.2.7) :

$$\left(\sigma - \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\right) d\varepsilon + \left(\frac{\partial\psi}{\partial T} - s\right) dT + \frac{\partial\psi}{\partial f} df \geq 0 \quad (3.2.11)$$

Mettons nous dans le cas isotherme ou la déformation est purement élastique cela équivaut à : $dT = 0$ et $df = 0$ et l'inégalité de Clausius Duhem doit être vérifiée quelque soit la valeur de ε cela entraîne :

$$\sigma - \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} = 0 \quad (3.2.12)$$

Soit le cas ou aucune déformation n'a lieu, cela donne $d\varepsilon = 0$ et $df = 0$ et la vérification de (3.2.11) implique :

$$\frac{\partial\psi}{\partial T} - s = 0 \quad (3.2.13)$$

Les équations (3.2.12) et (3.2.13) sont appelées lois d'état.

Dans notre travail on s'intéresse à la densité d'énergie libre de Gibbs $G(\sigma, T, f)$, en répétant la même démarche précédente pour $G(\sigma, T, f)$ on aura :

$$-\varepsilon : d\sigma - dG - sdT \geq 0 \quad (3.2.14)$$

Avec :

$$dG = \frac{\partial G}{\partial\sigma} d\sigma + \frac{\partial G}{\partial T} dT + \frac{\partial G}{\partial f} df \quad (3.2.15)$$

Finalemment :

$$\varepsilon + \frac{\partial G}{\partial \sigma} = 0 \quad (3.2.16)$$

$$\frac{\partial G}{\partial T} - s = 0 \quad (3.2.17)$$

III.3. Application à la modélisation unidimensionnelle du comportement des AMFs

Considérons un volume élémentaire représentatif de taille suffisante pour avoir une fraction de la martensite quand la transformation ait lieu (Fig. III.1)

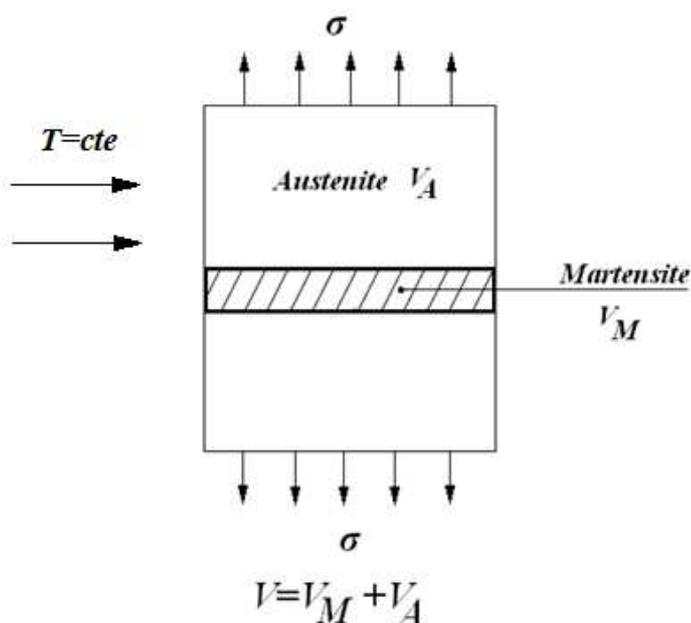


Figure III.1. Le volume élémentaire représentatif (VER)

La densité d'énergie libre peut être écrite sous la forme :

$$G(\sigma, T, f) = -\frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1-f}{E_A} + \frac{f}{E_M} \right) - \sigma \cdot f \cdot \varepsilon_0 + f \cdot B \cdot (T - T_0) + C \cdot f \cdot (f - 1) \quad (3.3.1)$$

$\frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1-f}{E_A} + \frac{f}{E_M} \right)$: représente l'énergie élastique

$\sigma \cdot f \cdot \varepsilon_0$: représente l'énergie de déformation associée à la transformation.

$f \cdot B \cdot (T - T_0)$: représente l'énergie chimique libre de transformation de phase.

$C \cdot f \cdot (f - 1)$: représente l'énergie d'interaction entre les phases existantes.

E_A et E_M sont les modules d'élasticité respectivement de l'austénite et la martensite.

B, C sont des constantes à déterminer expérimentalement.

$f = \frac{V_M}{V}$: Fraction volumique de la martensite (V_M volume de la martensite et V volume du VER)

ε_0 : Déformation maximale de transformation

En appliquant l'équation (3.2.16):

$$\varepsilon = -\frac{\partial G}{\partial \sigma} = \sigma \left(\frac{1-f}{E_A} + \frac{f}{E_M} \right) + f \cdot \varepsilon_0 \quad (3.3.2)$$

L'équation (3.3.2) donne la loi de comportement.

Du potentiel G dérivent les forces par rapport aux variables σ, T et f , seule la force dérivant par rapport à f est la responsable de la transformation martensitique au niveau de laquelle survient la dissipation au sens thermodynamique. [16], [36]

$$-\frac{\partial G}{\partial f} = F^{th} \quad (3.3.3)$$

Cette force est appelée force thermodynamique, son expression s'écrit :

$$F^{th} = -\frac{\partial G}{\partial f} = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T - T_0) - C \cdot (2f - 1) \quad (3.3.4)$$

L'inégalité de Clausius Duhem s'écrit :

$$-\frac{\partial G}{\partial f} df \geq 0 \quad (3.3.5)$$

Réécrivons l'inégalité (3.3.5) :

$$F^{th} \cdot df \geq 0 \quad \forall F^{th} \text{ et } df \quad (3.3.6)$$

(3.3.6) doit être vérifiée quelque soit F^{th} et df cela entrainera :

$$F^{th} = 0 \quad (3.3.7)$$

La présence du phénomène de dissipation ramène à dire que pour que la transformation se produise la force thermodynamique F^{th} doit vaincre une force dissipative F^{di} :

$$\begin{cases} F^{th} = F^{di}; \dot{f} > 0 & \text{transformation directe} \\ F^{th} = -F^{di}; \dot{f} < 0 & \text{transformation inverse} \end{cases} \quad (3.3.8)$$

On choisit l'expression suivante pour la force dissipative :

$$F^{di} = Kf + H \quad (3.3.9)$$

(3.3.9) peut s'écrire :

$$\begin{cases} F^{th} - F^{di} = 0; \dot{f} > 0 \\ F^{th} + F^{di} = 0; \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (3.3.10)$$

Ecrivons (3.3.10) d'une autre façon:

$$\begin{cases} F^{th} - F^{di} = \varphi^{di}; \dot{f} > 0 \\ F^{th} + F^{di} = \varphi^{in}; \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (3.3.11)$$

La condition de consistance permet d'écrire:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi^{di}(\sigma, T, f) = 0; \dot{f} > 0 \\ \frac{d}{dt} \varphi^{in}(\sigma, T, f) = 0; \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (3.3.12)$$

Dans le cas de la transformation directe:

$$\varphi^{di}(\sigma, T, f) = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma \cdot \varepsilon_{01} - B \cdot (T - T_0) - C \cdot (2f - 1) - Kf - H \quad (3.3.13)$$

Et de (3.3.13) on aura:

$$\frac{d}{dt} \varphi^{di}(\sigma, T, f) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi^{di}}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial \varphi^{di}}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial \varphi^{di}}{\partial f} \frac{df}{dt} = 0 \quad (3.3.14)$$

De l'équation (3.3.14) :

$$\left[\sigma \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \varepsilon_{01} \right] \dot{\sigma} - B \cdot \dot{T} - (2C + K) \dot{f} = 0 \quad (3.3.15)$$

Finalement on obtient:

$$\dot{f} = \frac{1}{(2C+K)} \left[\left[\sigma \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \varepsilon_{01} \right] \dot{\sigma} - B \cdot \dot{T} \right] \quad (3.3.16)$$

L'équation (3.3.16) donne l'évolution de la fraction volumique de la martensite au cours de la transformation directe.

Pour les cas suivants l'équation (3.3.16) peut se réduire à:

a) Cas isobarique ($\sigma = cte$)

$$\dot{f} = - \frac{B \cdot \dot{T}}{(2C+K)} \quad (3.3.17)$$

b) Cas isotherme ($T=cte$)

$$\dot{f} = \frac{1}{(2C+K)} \left[\sigma \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \varepsilon_{01} \right] \dot{\sigma} \quad (3.3.18)$$

En répétant la même procédure pour le cas de la transformation inverse on aura:

$$\frac{\partial \varphi^{in}}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial \varphi^{in}}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial \varphi^{in}}{\partial f} \frac{df}{dt} = 0 \quad (3.3.19)$$

$$\frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma \cdot \varepsilon_{02} - B \cdot (T - T_0) - C \cdot (2f - 1) + Kf + H = 0 \quad (3.3.20)$$

$$\dot{f} = \frac{1}{(2C-K)} \left[\left[\sigma \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \varepsilon_{01} \right] \dot{\sigma} - B \cdot \dot{T} \right] \quad (3.3.21)$$

III.3.1. Modélisation de l'effet de pseudoélasticité

L'effet pseudoélastique se résume par la soumission d'un AMF à un chargement mécanique isothermiquement à $T > A_f^0$ (Fig. III.1), le matériau se déforme élastiquement (austénitique) jusqu'à une contrainte σ_{Ms} à laquelle la transformation martensite -> austénite se produit et se poursuit jusqu'à une contrainte σ_{Mf} . Quand on relâche il y a un retour élastique martensitique suivi de début de transformation inverse martensite -> austénite à la contrainte σ_{As} et finissant à la contrainte σ_{Af} , après cela le matériau continue à recouvrer la forme élastiquement (austénitique). La récupération ait lieu avec l'existence d'une hystérésis, cela peut s'expliquer par l'existence de phénomènes dissipatifs tels que le frottement du au mouvement des interfaces.

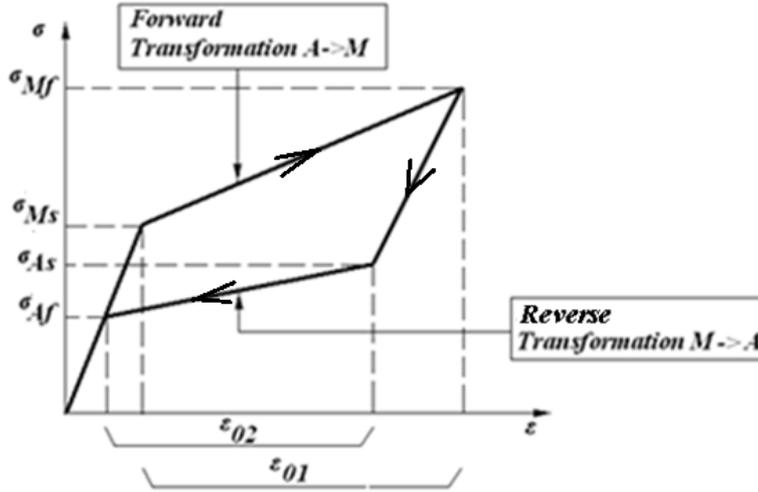


Figure III.2. Schéma illustrant l'effet de pseudoélasticité

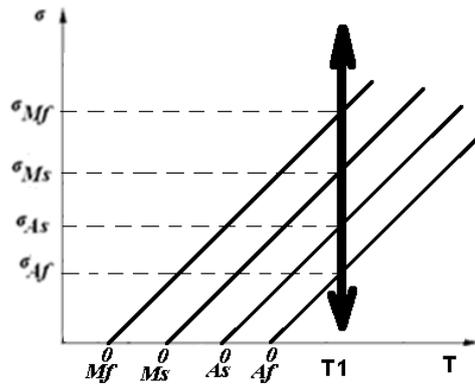


Figure III.3. Chemin de chargement

III.3.1.1. Critères de transformation

Etudions la fonction $\varphi^{di}(\sigma, T, f)$:

$$\varphi^{di}(\sigma, T, f) = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma \cdot \varepsilon_{01} - B \cdot (T - M_S^0) - C \cdot (2f - 1) - Kf - H \quad (3.3.22)$$

Dans notre cas $T=T_1$ et $\dot{\sigma} \neq 0$:

a) Déformation élastique austénitique : $f=0, \dot{f} > 0$: $0 \leq f \leq 1$

$$\varphi^{di}(\sigma, T = T_1, f = 0) = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma \cdot \varepsilon_{01} - B \cdot (T_1 - M_S^0) + C - H \quad (3.3.23)$$

$$\varphi^{di}(\sigma, T = T_1, f = 0) = \varphi^{di}(\sigma) \quad (3.3.24)$$

$$\frac{d\varphi^{di}}{d\sigma} = \sigma \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \varepsilon_{01} \quad (3.3.25)$$

On doit remarquer que:

Le module d'élasticité de l'austénite est supérieur au module d'élasticité de la martensite [56]

Cela emmène à dire que:

$$\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) > 0 ; \sigma > 0 ; \varepsilon_{01} > 0 \quad (3.3.26)$$

D'ou :

$$\frac{d\varphi^{di}}{d\sigma} > 0 \quad (3.3.27)$$

Donc $\varphi^{di}(\sigma, T = T_1, f = 0)$ est une fonction croissante et $\varphi^{di}(\sigma, T = T_1, f = 0) < 0$

b) Déformation due à la transformation: $0 \leq f \leq 1 ; \dot{f} > 0$

$$\varphi^{di}(\sigma, T = T_1, f) = 0 \quad (3.3.28)$$

c) Déformation élastique martensitique:

En faisant de même avec: $f=1; 0 \leq f \leq 1 ; \dot{f} = 0$

$$\varphi^{di}(\sigma, T = T_1, f = 0) > 0 \quad (3.3.29)$$

III.3.1.2. Détermination des constantes B, C, K et H

Au début de la transformation directe on a les conditions suivantes:

$$\sigma = \sigma_{Ms}, T = T_1, f = 0 \quad (3.3.30)$$

$$\varphi^{di}(\sigma = \sigma_{Ms}, T = T_1, f = 0) = \frac{\sigma_{Ms}^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_{Ms} \cdot \varepsilon_{01} - B \cdot (T_1 - M_s^0) + C - H = 0 \quad (3.3.31)$$

A la fin de la transformation directe:

$$\sigma = \sigma_{Mf}, T = T_1, f = 1 \quad (3.3.32)$$

$$\varphi^{di}(\sigma = \sigma_{Mf}, T = T_1, f = 1) = \frac{\sigma_{Mf}^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_{Mf} \cdot \varepsilon_{01} - B \cdot (T_1 - M_s^0) - C - K - H = 0 \quad (3.3.33)$$

Au début de la transformation inverse:

$$\sigma = \sigma_{As}, T = T_1, f = 1 \quad (3.3.34)$$

$$\varphi^{in}(\sigma = \sigma_{As}, T = T_1, f = 1) = \frac{\sigma_{As}^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_{As} \cdot \varepsilon_{02} - B \cdot (T_1 - M_s^0) - C + K + H = 0 \quad (3.3.35)$$

A la fin de la transformation inverse:

$$\sigma = \sigma_{Af}, T = T_1, f = 0 \quad (3.3.36)$$

$$\varphi^{di}(\sigma = \sigma_{Af}, T = T_1, f = 0) = \frac{\sigma_{Af}^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_{Af} \cdot \varepsilon_{02} - B \cdot (T_1 - M_s^0) + C + H = 0 \quad (3.3.37)$$

On a un système de 4 équations à 4 inconnues:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{Ms}^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_{Ms} \cdot \varepsilon_{01} - B \cdot (T_1 - M_S^0) + C - H = 0 \\ \frac{\sigma_{Mf}^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_{Mf} \cdot \varepsilon_{01} - B \cdot (T_1 - M_S^0) - C - K - H = 0 \\ \frac{\sigma_{As}^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_{As} \cdot \varepsilon_{02} - B \cdot (T_1 - M_S^0) - C + K + H = 0 \\ \frac{\sigma_{Af}^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_{Af} \cdot \varepsilon_{02} - B \cdot (T_1 - M_S^0) + C + H = 0 \end{cases} \quad (3.3.38)$$

Après résolution du système d'équations on obtient:

$$\begin{cases} E = \left(\frac{\sigma_{Ms}^2}{4} - \frac{\sigma_{Af}^2}{4} \right) \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \frac{\sigma_{Ms} \varepsilon_{01} - \sigma_{Af} \varepsilon_{02}}{2} \\ K = \left(\frac{\sigma_{Mf}^2}{4} - \frac{\sigma_{As}^2}{4} \right) \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \frac{\sigma_{Mf} \varepsilon_{01} - \sigma_{As} \varepsilon_{02}}{2} - E \\ B = \left[\left(\frac{\sigma_{Ms}^2}{2} + \frac{\sigma_{Mf}^2}{2} \right) \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + (\sigma_{Ms} + \sigma_{Mf}) \cdot \frac{\varepsilon_{01}}{2} - \frac{G}{2} - E \right] \frac{1}{(T_1 - M_S^0)} \\ C = \frac{\sigma_{Ms}^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) - \sigma_{Ms} \cdot \varepsilon_{01} - B \cdot (T_1 - M_S^0) + E = 0 \end{cases} \quad (3.3.39)$$

L'évolution de la fraction volumique de la martensite est donnée par la relation suivante:

$$\dot{f} = \frac{1}{(2C+K)} \left[\sigma \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \varepsilon_{01} \right] \dot{\sigma} \quad (3.3.40)$$

Pour linéariser cette expression dans le but de simplifier l'intégration nous considérons que le membre $\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right)$ est négligeable. L'expression précédente peut s'écrire :

$$\dot{f} = \frac{\varepsilon_{01}}{(2C+K)} \dot{\sigma} \quad (3.3.41)$$

La simulation numérique du modèle sera traitée au chapitre IV.

III.3.2. Modélisation de l'effet thermoélastique (superthermique)

L'effet thermoélastique est obtenu par le pilotage de la température sous un chargement mécanique constant (Fig. III.4), au refroidissement le matériau initialement à l'état austénitique se déforme à partir de la température M_S^σ , c'est à cette température que la transformation directe austénite \rightarrow martensite commence et se termine à M_f^σ . Un réchauffage entrainera une transformation inverse à la température A_f^σ jusqu'à la température A_s^σ

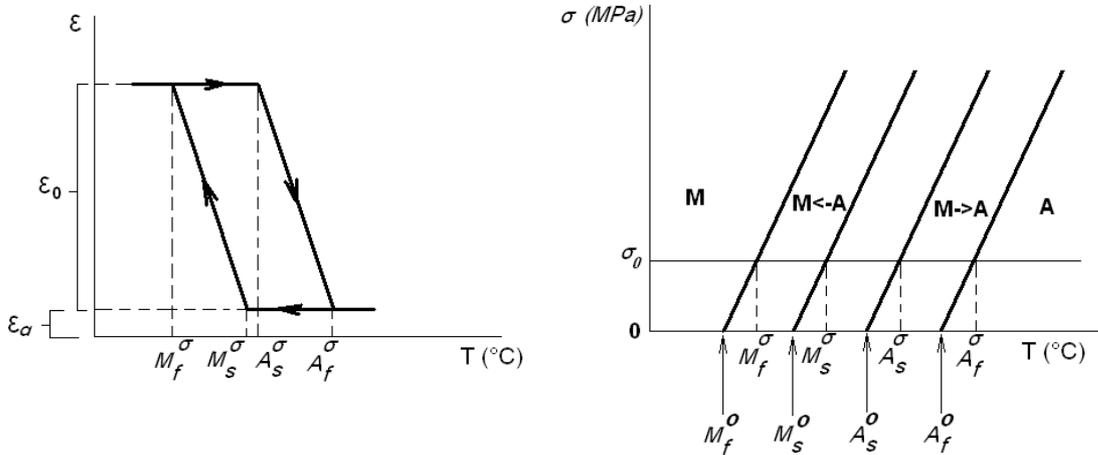


Figure III.4. Effet thermoélastique (sous une contrainte $\sigma = \sigma_0$)

ε_0 : Déformation maximale liée à la transformation

ε_a : Déformation avant transformation

M_s^σ : Température de début de transformation A \rightarrow M sous la contrainte σ_0

M_f^σ : Température de fin de transformation A \rightarrow M sous la contrainte σ_0

A_s^σ : Température de début de transformation M \rightarrow A sous la contrainte σ_0

A_f^σ : Température de fin de transformation M \rightarrow A sous la contrainte σ_0

III.3.2.1. Critères de transformation

a) Transformation directe

La fonction $\varphi^{di}(\sigma, T, f)$ s'écrit :

$$\varphi^{di}(\sigma = \sigma_0, T, f) = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T - M_s^0) + C(2f - 1) - Kf - H \quad (3.3.42)$$

La transformation aura lieu lorsque la condition $\varphi^{di}(\sigma = \sigma_0, T, f) = 0$ est vérifiée avec $f \leq 1$ et $f \geq 0$

$$\frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T - M_s^0) + C(2f - 1) - Kf - H = 0 \quad (3.3.43)$$

La condition de consistance de l'équation (3.3.39) donne la loi d'évolution de la fraction volumique martensitique:

$$\dot{f} = - \frac{B \cdot \dot{T}}{(2C + K)} \quad (3.3.44)$$

L'équation (3.3.44) montre le pilotage de la transformation par la température

b) Transformation inverse

$$\varphi^{in}(\sigma = \sigma_0, T, f) = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T - M_s^0) + C(2f - 1) - Kf - H \quad (3.3.45)$$

La transformation aura lieu lorsque la condition $\varphi^{in}(\sigma = \sigma_0, T, f) = 0$ est vérifiée avec $f \leq 1$ et $f \geq 0$

$$\frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T - M_s^0) + C(2f - 1) + Kf + H = 0 \quad (3.3.46)$$

La condition de consistance de l'équation (3.3.42) donne la loi d'évolution de la fraction volumique martensitique:

$$\dot{f} = - \frac{B \cdot \dot{T}}{(2C - K)} \quad (3.3.47)$$

III.3.2.2. Détermination des constantes B, C, K et H

En raison de la simulation de l'effet thermoélastique en utilisant les résultats de tests effectués on détermine les constantes B, C, K et H en fonction des résultats expérimentaux.

Au début de la transformation directe

$$\sigma = \sigma_0, T = M_s^\sigma, f = 0 \quad (3.3.48)$$

$$\varphi^{di}(\sigma = \sigma_0, T = M_s^\sigma, f = 0) = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (M_s^\sigma - M_s^0) + C - H = 0 \quad (3.3.49)$$

A la fin de la transformation directe:

$$\sigma = \sigma_0, T = M_f^\sigma, f = 1 \quad (3.3.50)$$

$$\varphi^{di}(\sigma = \sigma_0, T = M_f^\sigma, f = 1) = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (M_f^\sigma - M_s^0) - C - K - H = 0 \quad (3.3.51)$$

Au début de la transformation inverse:

$$\sigma = \sigma_0, T = A_s^\sigma, f = 1 \quad (3.3.52)$$

$$\varphi^{in}(\sigma = \sigma_0, T = A_s^\sigma, f = 1) = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (A_s^\sigma - M_s^0) - C + K + H = 0 \quad (3.3.53)$$

A la fin de la transformation inverse:

$$\sigma = \sigma_0, T = A_f^\sigma, f = 0 \quad (3.3.54)$$

$$\varphi^{di}(\sigma = \sigma_0, T = A_f^\sigma, f = 0) = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (A_f^\sigma - M_s^0) + C + H = 0 \quad (3.3.55)$$

On a un système de quatre équations à quatre inconnues:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (M_s^\sigma - M_s^0) + C - H = 0 \\ \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (M_f^\sigma - M_s^0) - C - K - H = 0 \\ \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (A_s^\sigma - M_s^0) - C + K + H = 0 \\ \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (A_f^\sigma - M_s^0) + C + H = 0 \end{cases} \quad (3.3.56)$$

Après résolution du système (3.3.56)

$$\begin{cases} B = [2\sigma_0^2 \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + 4\sigma_0 \cdot \varepsilon_0] / (M_s^\sigma + M_f^\sigma + A_s^\sigma + A_f^\sigma) \\ C = \sigma_0^2 \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + 2\sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - \frac{B(M_f^\sigma + A_s^\sigma - 2M_s^0)}{2} \\ K = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B(M_s^\sigma - M_s^0) + C \\ H = \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B(M_f^\sigma - M_s^0) - C - K \end{cases} \quad (3.3.57)$$

La simulation sera réalisée au chapitre IV

III.3.3. Modélisation de l'effet simple de mémoire

Comme le montre la figure Fig. III.5, l'effet simple de mémoire de forme est la succession de 3 chargements thermomécaniques :

1- Chargement mécanique à $T < M_f^0$

La phase initiale est de la martensite autoaccomodante, sous l'effet de la contrainte appliquée cette l'alliage se déforme élastiquement, quand la contrainte atteint σ_s il y a début d'orientation de la martensite autoaccomodante, cette orientation continue jusqu'à ce que la contrainte arrive à une valeur σ_f à laquelle se termine l'orientation produisant ainsi une grande déformation de l'AMF.

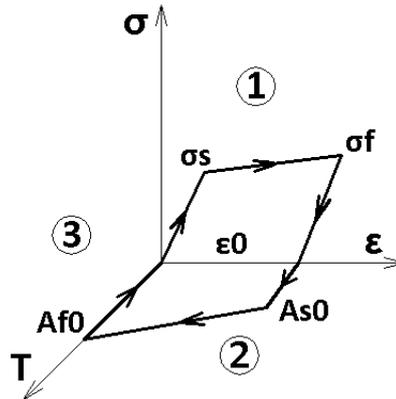


Figure III.5. Représentation de l'effet simple de mémoire de forme dans l'espace $((\epsilon, T, \sigma))$

2- Chauffage à $T > A_f^0$

Le chauffage de l'alliage à une température supérieure à A_f^0 est suffisant pour déclencher la transformation de la martensite orientée en austénite, cette transformation débute à A_s^0 et finit à A_f^0 , l'alliage retrouve sa forme précédente.

3- Refroidissement à $T < M_f^0$

Dans cette étape l'austénite se transforme en martensite autoaccomodante, il n'y a aucun rapport entre le refroidissement et la déformation à l'exception de transition de phase.

Pour modéliser l'effet simple de mémoire de forme on se propose de diviser le problème en trois parties indépendantes.

III.3.3.1. Chargement mécanique

La phase mère dans ce cas est la martensite autoaccomodante qui se transformera en martensite orientée sous l'effet de la contrainte appliquée.

Le potentiel s'écrit de la manière suivante:

$$G_1(\sigma, T, f) = -\frac{\sigma^2}{2E_M} - \sigma \cdot f \cdot \epsilon_0 + f \cdot B(T - M_s^0) + C \cdot f(1 - f) \quad (3.3.58)$$

$\frac{\sigma^2}{2E_M}$: L'énergie élastique

$\sigma \cdot f \cdot \epsilon_0$: L'énergie de déformation associée à la transformation de la martensite autoaccomodante en martensite orientée.

$f \cdot B(T - M_s^0)$: Energie chimique de transition de phase

$C \cdot f(1 - f)$: Energie d'interaction entre les deux phases

f : Fraction volumique de la martensite orientée

B et C : Constantes à déterminer expérimentalement

En appliquant la même démarche définie à la section III.3:

$$-\frac{\partial G_1}{\partial f} \frac{df}{dt} \geq 0 \quad (3.3.59)$$

En écrivant l'expression de la force thermodynamique :

$$-\frac{\partial G_1}{\partial f} = F^{th} \quad (3.3.60)$$

$$F^{th} = \sigma \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T - M_s^0) - C \cdot (2f - 1) \quad (3.3.61)$$

La force dissipative :

$$F^{di} = a_1 f + a_1 \quad (3.3.62)$$

a) Critères de transformation :

La fonction $\varphi_1(\sigma, T, f)$ s'écrira :

$$\varphi_1(\sigma, T, f) = \sigma \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T - M_s^0) - C \cdot (2f - 1) - a_1 f - a_1 \quad (3.3.63)$$

La transformation se produit si la condition suivante est satisfaite :

$$\varphi_1(\sigma, T, f) = 0 \quad (3.3.64)$$

$$\sigma \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T - M_s^0) - C \cdot (2f - 1) - a_1 f - a_1 = 0 \quad (3.3.65)$$

Après dérivation on obtient :

$$\frac{d\varphi_1(\sigma, T, f)}{dt} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial f} \frac{df}{dt} = 0 \quad (3.3.66)$$

(3.3.66) donne la loi d'évolution de la fraction volumique de la martensite orientée :

$$\dot{f} = \frac{\dot{\sigma} \cdot \varepsilon_0}{2C + a_1} \quad (\dot{f} > 0) ; (\dot{\sigma} > 0) ; (f \leq 1) \text{ et } (f \geq 0) \quad (3.3.67)$$

b) Détermination des constantes C et a_1 :

La constante B peut être déterminée par le test de pseudoélasticité précédent, par contre C et a_1 se déterminent grâce à un essai d'orientation

- Au début de l'orientation:

$$\varphi_1(\sigma, T, f) = 0 ; \sigma = \sigma_s ; T = T_1 ; f = 0 \quad (3.3.68)$$

$$\sigma_s \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T_1 - M_s^0) + C - a_1 = 0 \quad (3.3.69)$$

- A la fin de l'orientation :

$$\varphi_1(\sigma, T, f) = 0 ; \sigma = \sigma_f ; T = T_1 ; f = 0 \quad (3.3.70)$$

$$\sigma_f \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T_1 - M_s^0) - C = 0 \quad (3.3.71)$$

On obtient un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \sigma_s \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T_1 - M_s^0) + C - a_1 = 0 \\ \sigma_f \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T_1 - M_s^0) - C = 0 \end{cases} \quad (3.3.72)$$

Après résolution du système (3.3.72) :

$$\begin{cases} C = [\varepsilon_0(2\sigma_s - \sigma_f) - B \cdot (T_1 - M_s^0)]/3 \\ a_1 = [\varepsilon_0(\sigma_s - \sigma_f) - 2B \cdot (T_1 - M_s^0)]/3 \end{cases} \quad (3.3.73)$$

III.3.3.2. Chauffage

Dans ce cas la phase initiale est la martensite orientée, elle se transforme en austénite pour recouvrir la déformation résiduelle.

Le potentiel thermodynamique s'écrit :

$$G_2(\sigma, T, f) = -\frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1-f}{E_A} + \frac{f}{E_M} \right) - \sigma \cdot f \cdot \varepsilon_0 + f \cdot B \cdot (T - M_s^0) + H \cdot f \cdot (f - 1) \quad (3.3.74)$$

a) Critères de transformation :

La fonction $\varphi_2(\sigma, T, f)$ aura pour expression :

$$\varphi_2(\sigma, T, f) = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T - M_s^0) - H \cdot (2f - 1) + a_2 f + b_2 \quad (3.3.75)$$

La transformation aura lieu si :

$$\varphi_2(\sigma, T, f) = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T - M_s^0) - H \cdot (2f - 1) + a_2 f + b_2 = 0 \quad (3.3.76)$$

Avec ($f \leq 1$) et ($f \geq 0$)

L'évolution de la fraction volumique de la martensite est analogue à celle de la transformation inverse dans le cas de l'effet thermoélastique.

$$\dot{f} = -\frac{B \cdot \dot{T}}{2H - a_2} \quad (\dot{f} < 0) \quad (\dot{T} > 0) \quad (f \leq 1) \text{ et } (f \geq 0) \quad (3.3.77)$$

b) Détermination des constantes

Les constantes B et H sont déterminées par le test de pseudoélasticité précédent, a_2 et b_2 seront déterminées comme suit :

- Au début de la transformation :

$$\varphi_2(\sigma, T, f) = 0 ; \sigma = 0 ; T = A_s^0 ; f = 1 \quad (3.3.78)$$

$$-B \cdot (A_s^0 - M_s^0) - H + a_2 + b_2 = 0 \quad (3.3.79)$$

- A la fin de la transformation

$$\varphi_2(\sigma, T, f) = 0 ; \sigma = 0 ; T = A_f^0 ; f = 0 \quad (3.3.80)$$

$$-B \cdot (A_f^0 - M_s^0) + H + b_2 = 0 \quad (3.3.81)$$

On obtient un système de deux équations :

$$\begin{cases} -B \cdot (A_s^0 - M_s^0) - H + a_2 + b_2 = 0 \\ -B \cdot (A_f^0 - M_s^0) + H + b_2 = 0 \end{cases} \quad (3.3.82)$$

Après la résolution du système (3.3.82) :

$$\begin{cases} a_2 = B.(A_s^0 - A_f^0) - 2H \\ b_2 = B.(A_f^0 - M_s^0) + H \end{cases} \quad (3.3.83)$$

III.3.3.3. Refroidissement

La phase initiale est l'austénite qui se transforme en martensite autoaccomodante de fraction volumique f . Il faut noter que cette transformation se fait sans travail mécanique en d'autres termes on n'a qu'une transition de phase.

L'expression du potentiel thermodynamique sera :

$$G_3(\sigma, T, f) = f.B.(T - M_s^0) + H.f.(f - 1) \quad (3.3.84)$$

La fonction $\varphi_3(\sigma, T, f)$ s'écrit :

$$\varphi_3(\sigma, T, f) = -B.(T - M_s^0) - H.(2f - 1) - a_3f - b_3 \quad (f \leq 1) \text{ et } (f \geq 0) \quad (3.3.85)$$

a) Critères de transformation

La condition de transformation :

$$\varphi_3(\sigma, T, f) = 0 \quad (3.3.86)$$

$$-B.(T - M_s^0) - H.(2f - 1) - a_3f - b_3 = 0 \quad (3.3.87)$$

L'évolution de la fraction volumique de la martensite est exprimée par :

$$\dot{f} = -\frac{B.\dot{T}}{2H+a_3} \quad (\dot{f} > 0) \quad (\dot{T} < 0) \quad (3.3.88)$$

b) Détermination des constantes a_3 et b_3 :

Sachant que B et H sont déterminés précédemment, les constantes a_3 et b_3 seront déterminées comme suit :

- Au début de la transformation :

La transformation austénite en martensite est directe.

$$\varphi_3(\sigma, T, f) = 0 ; T = M_s^0 ; f = 0 \quad (3.3.89)$$

$$H - b_3 = 0 \quad (3.3.90)$$

- A la fin de la transformation :

$$\varphi_3(\sigma, T, f) = 0 ; T = M_f^0 ; f = 1 \quad (3.3.91)$$

$$-B.(M_f^0 - M_s^0) - H - a_3 - b_3 = 0 \quad (3.3.92)$$

On obtient un système de deux équations :

$$\begin{cases} H - b_3 = 0 \\ -B.(M_f^0 - M_s^0) - H - a_3 - b_3 = 0 \end{cases} \quad (3.3.93)$$

La simulation sera réalisée au chapitre IV

III.4. Modélisation 3D du comportement des AMFs

Dans ce sous-chapitre nous bâtissons le modèle 3D en exploitant la modélisation unidimensionnelle vue dans le sous chapitre précédent.

III.4.1. Notations utilisées

σ : Tenseur d'ordre 2 de Cauchy des contraintes

ε : Tenseur d'ordre 2 de déformations macroscopiques

C_A : Tenseur d'ordre 4 de rigidité de l'austénite

C_M : Tenseur d'ordre 4 de rigidité de la martensite

S_A : Tenseur d'ordre 4 de complaisance de l'austénite

S_M : Tenseur d'ordre 4 de complaisance de la martensite

R : Tenseur d'ordre 2 de transformation

$Tr T = \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33})$ Trace du tenseur T

$Dev T = T - Tr T \cdot I$ Déviateur du tenseur T et I est le tenseur identité

$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} Dev \sigma : Dev \sigma}$ Contrainte équivalente de Von Mises

$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} Dev \varepsilon : Dev \varepsilon}$ Contrainte équivalente de déformation

ECS : Tenseur d'ordre 4 de complaisance associée à la transformation

ECS^{-1} : Tenseur d'ordre 4 de rigidité associée à la transformation

III.4.2. Equations constitutives :

a) Expression du potentiel thermodynamique

Nous choisissons pour expression de l'énergie libre :

$$G(\sigma, T, f) = -Q \cdot \sigma : S_A : \sigma - (1 - Q) \cdot \sigma : S_M : \sigma - f \cdot \varepsilon_0 \cdot \sigma : R + f \cdot B \cdot (T - M_s^0) + C \cdot f \cdot (1 - f) \quad (3.4.1)$$

$$Q = \begin{cases} 1 & \text{si il y a déformation élastique austénitique} \\ 0 & \text{si il y a déformation élastique martensitique} \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{f} \neq 0 \text{ et } f = 0 \\ 0 & \text{si } \dot{f} \neq 0 \text{ et } f = 1 \end{cases}$$

ε_0 : Déformation maximale suivant un axe

f : Fraction de la martensite ($f \geq 0$ et $f \leq 1$)

R : Tenseur d'ordre 2 de transformation tel que :

$$R_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma : \sigma}}$$

S_A et S_M : Tenseurs d'ordre 4 respectivement de l'austénite et de la martensite

B et C : Constantes déterminées par un test de traction de pseudoélasticité ou autre

b) Critères de transformation :

La force thermodynamique s'écrit :

$$F^{th} = -\frac{\partial G}{\partial f} = \varepsilon_0 \cdot \sigma \cdot R - B \cdot (T - M_s^0) + C \cdot (2f - 1) \quad (3.4.2)$$

La force dissipative a pour expression :

$$F^{di} = Kf + H \quad (3.4.3)$$

Les transformations directe et inverse auront lieu selon les conditions suivantes :

$$\begin{cases} F^{th} = F^{di}; \dot{f} > 0 & \text{transformation directe} \\ F^{th} = -F^{di}; \dot{f} < 0 & \text{transformation inverse} \end{cases} \quad (3.4.3)$$

La fonction $\varphi(\sigma, T, f)$ s'écrira :

$$\varphi(\sigma, T, f) = \begin{cases} \varepsilon_0 \cdot \sigma \cdot R - B \cdot (T - M_s^0) + C \cdot (2f - 1) + Kf + H; \dot{f} > 0 \\ \varepsilon_0 \cdot \sigma \cdot R - B \cdot (T - M_s^0) + C \cdot (2f - 1) - Kf - H; \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (3.4.4)$$

Soient :

En cas de transformation directe :

$$\varphi^{di}(\sigma, T, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma \cdot R - B \cdot (T - M_s^0) + C \cdot (2f - 1) - Kf - H \quad (3.4.5)$$

En cas de transformation inverse :

$$\varphi^{in}(\sigma, T, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma \cdot R - B \cdot (T - M_s^0) + C \cdot (2f - 1) + Kf + H \quad (3.4.6)$$

Lorsque la transformation ait lieu la fonction :

$$\varphi^{di}(\sigma, T, f) = 0 \quad (3.4.7)$$

et la condition de consistance sur φ^{di} donne :

$$d\varphi^{di}(\sigma, T, f) = 0 \quad (3.4.8)$$

$$\frac{\partial \varphi^{di}}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial \varphi^{di}}{\partial T} dT + \frac{\partial \varphi^{di}}{\partial f} df = 0 \quad (3.4.9)$$

$$\varepsilon_0 \cdot R \cdot d\sigma - BdT + (2C - K)df = 0 \quad (3.4.10)$$

L'équation (3.4.9) permet de donner l'évolution de la fraction martensitique :

$$df = \frac{\varepsilon_0 \cdot R \cdot d\sigma - BdT}{K - 2C} \quad (3.4.11)$$

De même pour le cas de la transformation inverse :

$$df = -\frac{\varepsilon_0 \cdot R \cdot d\sigma - BdT}{K + 2C} \quad (3.4.12)$$

En dérivant le potentiel par rapport à la contrainte on obtient l'expression de la déformation :

$$\varepsilon = -\frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (3.4.13)$$

$$\varepsilon = Q \cdot S_A \cdot \sigma + (1 - Q) \cdot S_M \cdot \sigma + f \cdot \varepsilon_0 \cdot R \quad (3.4.14)$$

L'équation (3.4.13) représente la loi de comportement.

Or la déformation globale peut être écrite :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^t \quad (3.4.15)$$

ε^e : Déformation élastique

ε^t : Déformation due à la transformation

$$\varepsilon^e = Q.S_A:\sigma + (1 - Q).S_M:\sigma \quad (3.4.16)$$

$$\varepsilon^t = f.\varepsilon_0.R \quad (3.4.17)$$

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^t \quad (3.4.18)$$

Donc la variation infinitésimale de la déformation ε peut être écrite :

$$d\varepsilon^t = df.\varepsilon_0.R \quad (3.4.19)$$

En faisant intervenir l'équation (3.4.10) ; (3.4.18) prend la forme suivante :

$$d\varepsilon^t = \frac{\varepsilon_0.R:d\sigma - BdT}{K-2C}.\varepsilon_0.R \quad (3.4.20)$$

$$d\varepsilon^t = \frac{\varepsilon_0^2}{K-2C}R \times R:d\sigma - \frac{\varepsilon_0 BR}{K-2C}dT \quad (3.4.21)$$

En cas de la transformation inverse :

$$d\varepsilon^t = -\frac{\varepsilon_0^2}{K+2C}R \times R:d\sigma + \frac{\varepsilon_0 BR}{K+2C}dT \quad (3.4.22)$$

Le signe (x) représente le produit tensoriel

L'équation (3.4.22) montre le pilotage de la transformation par la contrainte et la température une fois couplées ou par l'une des deux.

Ecrivons le terme lié à la contrainte :

$$ECS = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0^2}{K-2C}R \times R; \dot{f} > 0 \\ -\frac{\varepsilon_0^2}{K+2C}R \times R; \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (3.4.23)$$

Ou

De même pour le terme lié à la température :

$$ECT = \begin{cases} -\frac{\varepsilon_0 BR}{K-2C}; \dot{f} > 0 \\ \frac{\varepsilon_0 BR}{K+2C}; \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (3.4.24)$$

L'équation (3.4.20) s'écrit alors :

$$d\varepsilon^t = ECS:d\sigma + ECT.dT \quad (3.4.25)$$

ECS : représente le tenseur d'ordre 4 de complaisance associé à la transformation

ECT : représente le tenseur d'ordre 2 reliant la déformation de transformation à la température

En éléments finis la relation (3.4.25) doit être écrite sous la forme :

$$d\sigma = ECS^{-1}:d\varepsilon^t - ECS^{-1}:ECT.dT \quad (3.4.26)$$

ECS^{-1} : représente le tenseur d'ordre 4 de rigidité associé à la transformation

$(ECS^{-1}; ECT)$: représente le module tangent thermique

III.4.3. Application à la modélisation 3D de l'effet pseudoélastique

La même démarche citée précédemment mais il reste à déterminer les constantes B, C, K et H en considérant l'essai de traction pseudoélastique unidimensionnel.

Au début de la transformation directe :

$$f=0 ; T=T1 ; \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{Ms} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.27)$$

A la fin de la transformation directe :

$$f=1 ; T=T1 ; \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{Mf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.28)$$

Au début de la transformation inverse :

$$f=1 ; T=T1 ; \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{As} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.29)$$

A la fin de la transformation inverse

$$f=0 ; T=T1 ; \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{Af} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.30)$$

Aux conditions (3.4.27) correspond à $\varphi^{di}(\sigma = \sigma_{Ms}, T = T1, f = 0) = 0$

$$\varepsilon_0 \cdot \sigma_{Ms} - B \cdot (T1 - M_s^0) - C - H = 0 \quad (3.4.31)$$

Aux conditions (3.4.28) correspond à $\varphi^{di}(\sigma = \sigma_{Mf}, T = T1, f = 1) = 0$

$$\varepsilon_0 \cdot \sigma_{Mf} - B \cdot (T1 - M_s^0) + C - K - H = 0 \quad (3.4.32)$$

Aux conditions (3.4.29) correspond à $\varphi^{in}(\sigma = \sigma_{As}, T = T1, f = 1) = 0$

$$\varepsilon_0 \cdot \sigma_{As} - B \cdot (T1 - M_s^0) + C + K + H = 0 \quad (3.4.33)$$

Aux conditions (3.4.30) correspond à $\varphi^{in}(\sigma = \sigma_{Af}, T = T1, f = 0) = 0$

$$\varepsilon_0 \cdot \sigma_{Af} - B \cdot (T1 - M_s^0) - C + H = 0 \quad (3.4.34)$$

On obtient un système d'équations :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \cdot \sigma_{Ms} - B \cdot (T1 - M_s^0) - C - H = 0 \\ \varepsilon_0 \cdot \sigma_{Mf} - B \cdot (T1 - M_s^0) + C - K - H = 0 \\ \varepsilon_0 \cdot \sigma_{As} - B \cdot (T1 - M_s^0) + C + K + H = 0 \\ \varepsilon_0 \cdot \sigma_{Af} - B \cdot (T1 - M_s^0) - C + H = 0 \end{cases} \quad (3.4.35)$$

Après la résolution du système :

$$B = \frac{\varepsilon_0 \cdot (\sigma_{Ms} + \sigma_{Mf} + \sigma_{As} + \sigma_{Af})}{4(T1 - M_s^0)} \quad (3.4.36)$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot (\sigma_{Ms} + \sigma_{Af} - \sigma_{Mf} - \sigma_{As})}{4} \quad (3.4.37)$$

$$H = \frac{\varepsilon_0 \cdot (\sigma_{Ms} + \sigma_{Af})}{2} \quad (3.4.38)$$

$$K = \varepsilon_0 \cdot \sigma_{as} - B(T1 - M_s^0) - C - H \quad (3.4.39)$$

Dans le cas ou le comportement s'agit de l'effet pseudoélastique ($dT=0$) les relations (3.4.11) et (3.4.12) deviendront :

$$df = \frac{\varepsilon_0 \cdot R : d\sigma}{K - 2C} \quad (3.4.40)$$

$$df = -\frac{\varepsilon_0 \cdot R : d\sigma}{K + 2C} \quad (3.4.41)$$

De même la relation (3.4.21) sera de la forme :

$$d\varepsilon^t = \frac{\varepsilon_0^2}{K - 2C} R \times R : d\sigma \quad (3.4.42)$$

et en cas de la transformation inverse :

$$d\varepsilon^t = -\frac{\varepsilon_0^2}{K + 2C} R \times R : d\sigma \quad (3.4.43)$$

De même dans le cas de l'effet thermoélastique :

$$df = \frac{-BdT}{K - 2C} \quad (3.4.44)$$

$$df = \frac{BdT}{K + 2C} \quad (3.4.45)$$

$$d\varepsilon^t = -\frac{\varepsilon_0 BR}{K - 2C} dT \quad (3.4.46)$$

$$d\varepsilon^t = \frac{\varepsilon_0 BR}{K + 2C} dT \quad (3.4.47)$$

III.4.4. Application à la modélisation 3D de l'effet simple de mémoire

Comme a été le cas unidimensionnel l'effet sera divisé en 3 étapes :

A) Transformation d'orientation :

Le potentiel thermodynamique s'écrit :

$$G_1(\sigma, T, f) = -\sigma : S_M : \sigma - f \cdot \varepsilon_0 \cdot \sigma : R + f \cdot B(T - M_s^0) + C \cdot f(1 - f) \quad (3.4.48)$$

La condition de transformation :

$$\varphi_1(\sigma, T, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma : R - B(T - M_s^0) - C(1 - 2f) - a_1 - a_1 \cdot f = 0 \quad (3.4.49)$$

Pour déterminer les constantes on fait recours au cas unidimensionnel :

Au début d'orientation :

$$\begin{aligned} \text{A } T = T_1 < M_s^0 ; f = 0 ; \sigma &= \begin{pmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_s \cdot \varepsilon_0 - B(T_1 - M_s^0) - C - a_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.50)$$

$$\begin{aligned} \text{A } T = T_1 < M_s^0 ; f = 1 ; \sigma &= \begin{pmatrix} \sigma_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_f \cdot \varepsilon_0 - B(T_1 - M_s^0) + C - 2a_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.51)$$

B) Chauffage :

Le potentiel thermodynamique s'écrit :

$$G_2(\sigma, T, f) = -f \cdot \varepsilon_0 \cdot \sigma : R + f \cdot B(T - M_s^0) + H \cdot f(1 - f) \quad (3.4.52)$$

La condition de transformation :

$$\varphi_2(\sigma, T, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma : R - B(T - M_s^0) - H(1 - 2f) + a_2 \cdot f + b_2 = 0 \quad (3.4.53)$$

Au début de transformation :

$$\begin{aligned} \text{A } T = A_s^0 ; f = 1 ; \sigma &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ -B(A_s^0 - M_s^0) + H + a_2 + b_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.54)$$

$$\begin{aligned} \text{A } T = A_f^0 ; f = 0 ; \sigma &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ -B(A_f^0 - M_s^0) - H + b_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.55)$$

C) Refroidissement:

Le potentiel thermodynamique s'écrit :

$$G_3(\sigma, T, f) = f \cdot B(T - M_s^0) + H \cdot f(1 - f) \quad (3.4.56)$$

La condition de transformation :

$$\varphi_3(\sigma, T, f) = -B(T - M_s^0) - H(1 - 2f) - a_3 \cdot f - b_3 = 0 \quad (3.4.57)$$

Au début de transformation :

$$\text{A } T = M_s^0 ; f = 0$$

$$-H - b_3 = 0 \quad (3.4.58)$$

$$\text{A } T = M_f^0 ; f = 1$$

$$-B(M_f^0 - M_s^0) + H - a_3 - b_3 = 0 \quad (3.4.59)$$

Les constantes B et H sont déterminées par l'essai de pseudoélasticité, ce qui donne six équations et six inconnues.

$$\begin{cases} \sigma_s \cdot \varepsilon_0 - B(T_1 - M_s^0) - C - a_1 = 0 \\ \sigma_f \cdot \varepsilon_0 - B(T_1 - M_s^0) + C - 2a_1 = 0 \\ -B(A_s^0 - M_s^0) + H + a_2 + b_2 = 0 \\ -B(A_f^0 - M_s^0) - H + b_2 = 0 \\ -H - b_3 = 0 \\ -B(M_f^0 - M_s^0) + H - a_3 - b_3 = 0 \end{cases} \quad (3.4.60)$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{(\sigma_s + \sigma_f) \cdot \varepsilon_0 - 2B(T_1 - M_s^0)}{3} \\ C = \sigma_s \cdot \varepsilon_0 - B(T_1 - M_s^0) - \frac{(\sigma_s + \sigma_f) \cdot \varepsilon_0 - 2B(T_1 - M_s^0)}{3} \\ a_2 = B(A_s^0 - M_s^0) - 2H \\ b_2 = B(A_f^0 - M_s^0) + H \\ b_3 = -H \\ b_3 = 2H - B(M_f^0 - M_s^0) \end{cases} \quad (3.4.61)$$

En utilisant conditions de transformation et de consistance sur les fonctions $\varphi_i(\sigma, T, f)$ on peut déterminer les évolutions de la fraction martensitique dans les 3 cas :

a) Orientation

$$\varphi_1(\sigma, T, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma : R - B(T_1 - M_s^0) - C(1 - 2f) - a_1 - a_1 \cdot f = 0 \quad (3.4.62)$$

$$d\varphi_1(\sigma, T, f) = 0 \quad (3.4.63)$$

Les équations (3.4.62) et (3.4.47) donnent :

$$df = \frac{\varepsilon_0 \cdot R : d\sigma}{a_1 - 2C} \quad (3.4.64)$$

Et :

$$d\varepsilon^t = \frac{\varepsilon_0^2}{a_1 - 2C} R \times R : d\sigma \quad (3.4.65)$$

b) Chauffage

$$\varphi_2(\sigma, T, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma : R - B(T - M_s^0) - H(1 - 2f) + a_2 \cdot f + b_2 = 0 \quad (3.4.66)$$

$$d\varphi_2(\sigma, T, f) = 0 \quad (3.4.67)$$

Les équations (3.4.66) et (3.4.67) donnent :

$$df = \frac{BdT}{2H + a_2} \quad (3.4.68)$$

Et :

$$d\varepsilon^t = \frac{B\varepsilon_0}{2H+a_2} dT \cdot R \quad (3.4.69)$$

c) Refroidissement :

$$\varphi_3(\sigma, T, f) = -B(T - M_s^0) - H(1 - 2f) - a_3 \cdot f - b_3 = 0 \quad (3.4.70)$$

$$d\varphi_3(\sigma, T, f) = 0 \quad (3.4.71)$$

Les équations (3.4.69) et (3.4.70) donnent :

$$df = \frac{BdT}{2H-a_3} \quad (3.4.72)$$

Et :

$$d\varepsilon^t = 0 \quad (\text{Pas de déformation}) \quad (3.4.73)$$

III.4.5. Application à la modélisation 3D de l'effet thermoélastique

Dans le cas de cet effet la contrainte appliquée est constante et la transformation martensitique (directe ou inverse) est pilotée par la température, la contrainte appliquée provoque une déformation préalable élastique et austénitique pour cela l'expression de la densité de l'énergie libre de Gibbs peut être :

$$G(\sigma = \sigma_0, T, f) = -\sigma_0 : S_A : \sigma_0 - f \cdot \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 : R + f \cdot B \cdot (T - M_s^0) + C \cdot f \cdot (1 - f) \quad (3.4.74)$$

a) Transformation directe

La fonction $\varphi^{di}(\sigma, T, f)$ s'écrit :

$$\varphi^{di}(\sigma = \sigma_0, T, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 : R - B \cdot (T - M_s^0) + C(2f - 1) - Kf - H \quad (3.4.75)$$

La transformation aura lieu lorsque la condition $\varphi^{di}(\sigma = \sigma_0, T, f) = 0$ est vérifiée avec $f \leq 1$ et $f \geq 0$

$$\varepsilon_0 \cdot \sigma_0 : R - B \cdot (T - M_s^0) + C(2f - 1) - Gf - H = 0 \quad (3.4.76)$$

La condition de consistance de l'équation (3.3.75) donne la loi d'évolution de la fraction volumique martensitique:

$$df = \frac{B \cdot dT}{(2C - G)} \quad (3.4.77)$$

Et la déformation infinitésimale :

$$d\varepsilon^T = \frac{B \cdot dT}{(2C - G)} \varepsilon_0 \cdot R \quad (3.4.78)$$

b) Transformation inverse

$$\varphi^{in}(\sigma = \sigma_0, T, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 : R - B \cdot (T - M_s^0) + C(2f - 1) + Gf + H \quad (3.4.79)$$

La transformation aura lieu lorsque la condition $\varphi^{in}(\sigma = \sigma_0, T, f) = 0$ est vérifiée avec $f \leq 1$ et $f \geq 0$

$$\varepsilon_0 \cdot \sigma_0 : R - B \cdot (T - M_s^0) + C(2f - 1) + Gf + H = 0 \quad (3.4.80)$$

Et

$$df = \frac{B \cdot dT}{(2C+G)} \quad (3.4.81)$$

Avec l'expression différentielle de la déformation de transformation:

$$d\varepsilon^T = \frac{B \cdot dT}{(2C+G)} \varepsilon_0 \cdot R \quad (3.4.82)$$

III.4.5.1. Détermination des constantes B, C, K et H

Pour déterminer les constantes B, C, G et H on fait appel au test de l'effet thermoélastique unidimensionnel.

Au début de la transformation directe

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T = M_s^\sigma, f = 0 \quad (3.4.83)$$

$$\varphi^{di}(\sigma = \sigma_0, T = M_s^\sigma, f = 0) = \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 : R - B \cdot (M_s^\sigma - M_s^0) + C - H = 0 \quad (3.4.84)$$

A la fin de la transformation directe:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T = M_f^\sigma, f = 1 \quad (3.4.85)$$

$$\varphi^{di}(\sigma = \sigma_0, T = M_f^\sigma, f = 1) = \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 : R - B \cdot (M_f^\sigma - M_s^0) - C - K - H = 0 \quad (3.4.86)$$

Au début de la transformation inverse:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T = A_s^\sigma, f = 1 \quad (3.4.87)$$

$$\varphi^{in}(\sigma = \sigma_0, T = A_s^\sigma, f = 1) = \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 : R - B \cdot (A_s^\sigma - M_s^0) - C + K + H = 0 \quad (3.4.88)$$

A la fin de la transformation inverse:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T = A_f^\sigma, f = 0 \quad (3.4.89)$$

$$\varphi^{di}(\sigma = \sigma_0, T = A_f^\sigma, f = 0) = \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 : R - B \cdot (A_f^\sigma - M_s^0) + C + H = 0 \quad (3.4.90)$$

On a un système de quatre équations à quatre inconnues:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (M_s^\sigma - M_s^0) + C - H = 0 \\ \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (M_f^\sigma - M_s^0) - C - K - H = 0 \\ \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (A_s^\sigma - M_s^0) - C + K + H = 0 \\ \frac{\sigma_0^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (A_f^\sigma - M_s^0) + C + H = 0 \end{cases} \quad (3.4.91)$$

Après résolution du système (3.4.91)

$$\begin{cases} B = 4\sigma_0 \cdot \varepsilon_0 / (M_s^\sigma + M_f^\sigma + A_s^\sigma + A_f^\sigma - 4M_s^0) \\ C = 2\sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - \frac{B(M_f^\sigma + A_f^\sigma - 2M_s^0)}{2} \\ K = \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B(M_s^\sigma - M_s^0) - C \\ H = \sigma_0 \cdot \varepsilon_0 - B(M_f^\sigma - M_s^0) + C - K \end{cases} \quad (3.4.92)$$

CHAPITRE IV SIMULATION NUMERIQUE

Introduction

Dans le chapitre III on a modélisé les comportements thermomécaniques considérés, dans ce chapitre on va valider les modélisations par simulation numérique. La simulation se fera par le moyen d'un programme en FORTRAN et un code de calcul tel Abaqus.

IV.1. Implémentation des lois de comportement dans Abaqus

Abaqus est un logiciel de calcul utilisant la méthode des éléments et des sous-routines prédéfinies pour simuler des comportements connus comme l'élasticité, la plasticité, l'hyperélasticité,... et des sous-routines personnalisées écrites par l'utilisateur pour décrire des lois de comportement complexes comme dans notre cas. Ce sont les sous-routines UMAT (User material) ou VUMAT qui une fois écrites sera appelée à chaque incrémentation par Abaqus. Le mécanisme d'implémentation de l'UMAT dans Abaqus est indiqué par la figure (Fig. IV.1) ou $(\Sigma_{ij}, E_{ij}$ et T sont respectivement les tenseurs macroscopiques de contrainte et de déformation et la température)

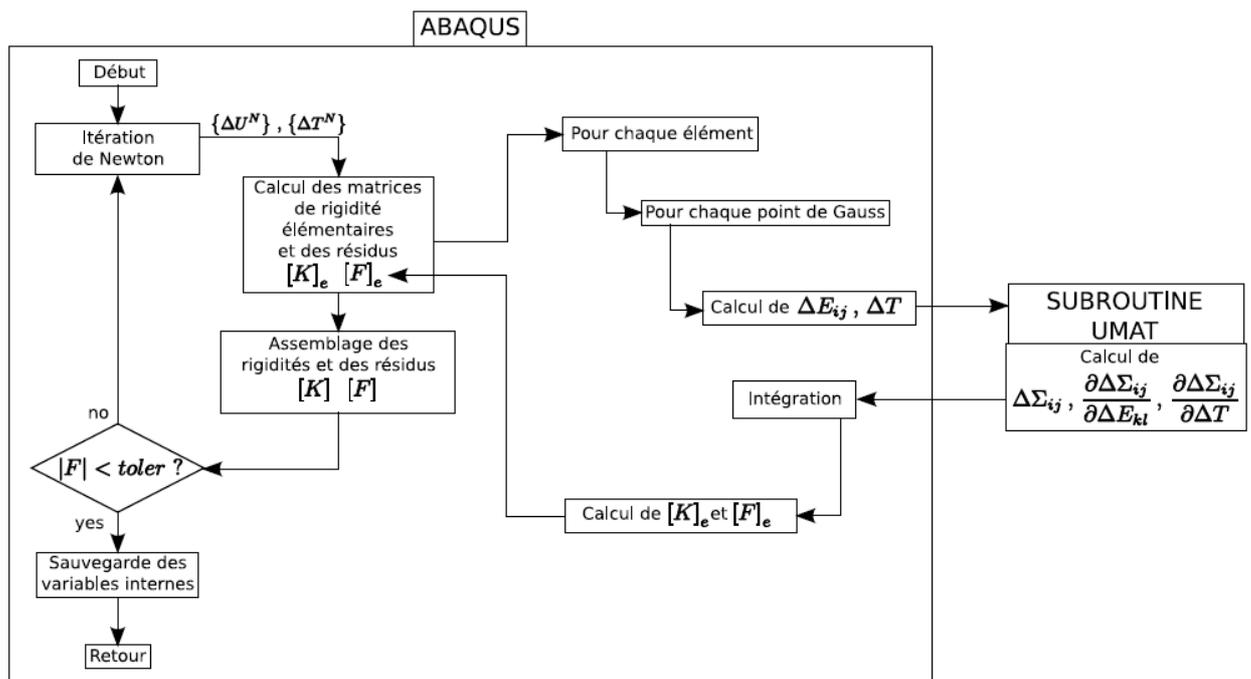


Figure IV.1. Schéma du fonctionnement de la méthode des éléments finis (Abaqus). [57]

IV.2. Simulation numérique unidimensionnelle de l'effet de pseudoélasticité

IV.2.1. Données expérimentales :

Le test de pseudoélasticité considéré appartient aux travaux de Ng K.L. et al [58] et a été réalisé sur un tube en NiTi sous une contrainte de 400 MPa à une température $T=70^\circ\text{C}$ et les données extraites sont mises dans le tableau (Tableau IV.1)

$\sigma_{Ms} (MPa)$	300	$A_s^0 (K)$	297
$\sigma_{Mf} (MPa)$	305	$A_f^0 (K)$	330
$\sigma_{As} (MPa)$	100	ε_{01}	0.06106
$\sigma_{Af} (MPa)$	50	ε_{02}	0.05903
$E_A (MPa)$	25775	$B (MPa.K^{-1})$	1.788898E-01
$E_M (MPa)$	18442	$C (MPa)$	8.141997E-01
$M_s^0 (K)$	279	$K (MPa)$	-1.323100
$M_f^0 (K)$	240	$H (MPa)$	7.683250
Densité	6.45E03Kg.m ⁻³	Conduc Thermique	22W.m ⁻¹ .K ⁻¹
Chaleur massique	329J.Kg ⁻¹ .K ⁻¹		

Tableau IV.1.Données expérimentales [58]

IV.2.2.Simulation par Fortran

a) Algorithme :

Reprenons l'écriture de l'évolution de la fraction volumique de la martensite dans le cas de la transformation directe.

$$\dot{f} = \frac{1}{(2C+K)} \left[\sigma \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \varepsilon_{01} \right] \dot{\sigma} \quad (4.2.1)$$

Qu'on réduit son écriture à :

$$\dot{f} = \frac{\varepsilon_{01}}{(2C+K)} \dot{\sigma} \quad (4.2.2)$$

En valeurs finies on aura :

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_{01}}{(2C+K)} \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} \quad (4.2.3)$$

Qui veut dire en increments de σ et f :

$$\Delta f = \frac{\varepsilon_{01}}{(2C+G)} \Delta \sigma \quad (4.2.4)$$

Dans le cas de la transformation inverse

$$\Delta f = \frac{\varepsilon_{01}}{(2C-K)} \Delta \sigma \quad (4.2.5)$$

L'équation (4.2.4) permet de calculer la fraction volumique à chaque incrémentation quand la transformation se produit.

L'algorithme est comme suit :

A- Transformation directe

1- σ^k, f^k

2- Calcul de $\varphi^{di}(\sigma, T = T_1, f) = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma \cdot \varepsilon_{01} - B \cdot (T_1 - M_s^0) - C(2f - 1) - Kf - H$

3- Si le cas est élastique austénitique : $\Delta \varepsilon = \frac{\Delta \sigma}{E_A}$ et $\Delta f = 0$

4- Si le cas est élastique martensitique : $\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E_M}$ et $\Delta f=0$

5- Si le cas s'agit d'une transformation martensitique : $\begin{cases} \Delta f = \frac{\varepsilon_{01}}{(2C+K)}\Delta\sigma \\ \Delta\varepsilon = \Delta f \cdot \varepsilon_{01} \end{cases}$

$(\Delta f > 0); (\Delta\sigma > 0)$

6- $\sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta\sigma, f^{k+1} = f^k + \Delta f, \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \Delta\varepsilon$

B- Transformation inverse

1- σ^k, f^k

2- Calcul de $\varphi^{in}(\sigma, T = T_1, f) = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma \cdot \varepsilon_{02} - B \cdot (T_1 - M_s^0) - C(2f - 1) + Kf + H$

3- Si le cas est élastique austénitique : $\Delta\varepsilon = -\frac{\Delta\sigma}{E_A}$ et $\Delta f=0$

4- Si le cas est élastique martensitique : $\Delta\varepsilon = -\frac{\Delta\sigma}{E_M}$ et $\Delta f=0$

5- Si le cas s'agit d'une transformation martensitique : $\begin{cases} \Delta f = \frac{\varepsilon_{01}}{(2C-K)}\Delta\sigma \\ \Delta\varepsilon = \Delta f \cdot \varepsilon_{02} \end{cases}$

$(\Delta f < 0); (\Delta\sigma < 0)$

6- $\sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta\sigma, f^{k+1} = f^k + \Delta f, \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \Delta\varepsilon$

b) Résultats :

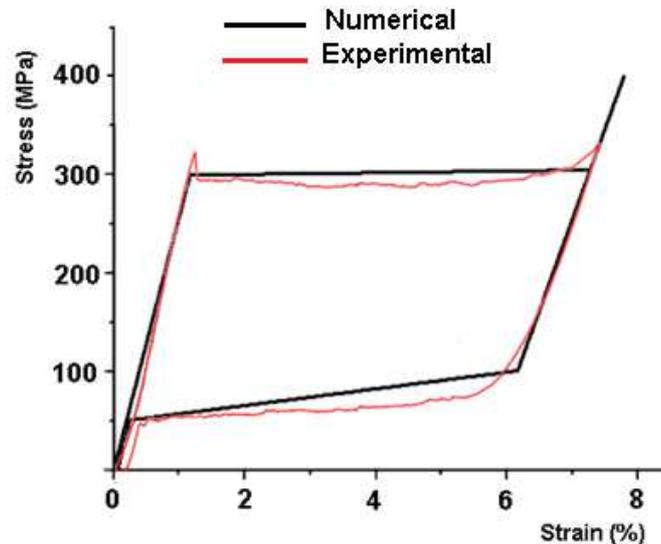


Figure IV.2. Réponse du modèle à ($\sigma=400\text{MPa}$ et $T=70^\circ\text{C}$) et comparaison avec les résultats expérimentaux.

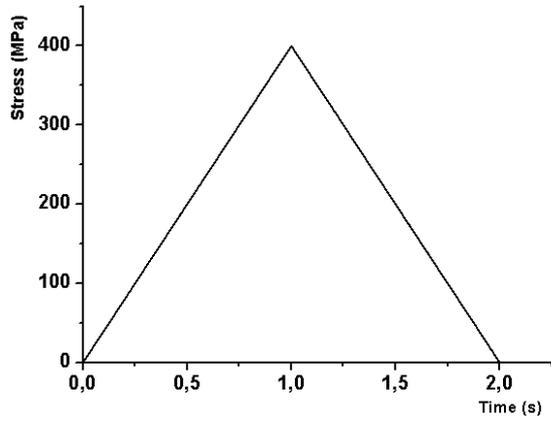


Figure IV.3. Chargement

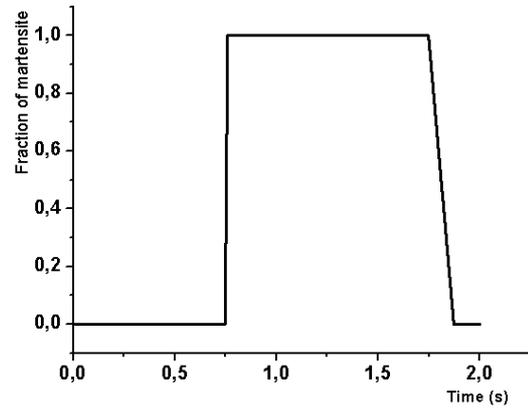


Figure IV.4. Evolution de la fraction de martensite

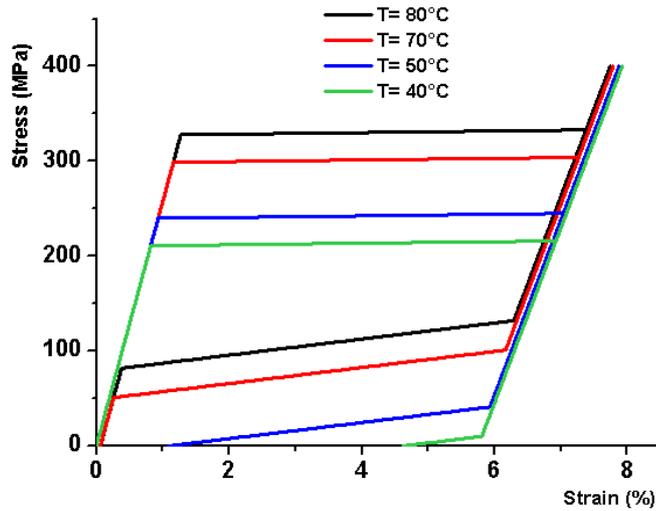


Figure IV.5. Simulation à de différentes températures

IV.2.3.Simulation par Abaqus (UMAT)

Pour avoir un état de contraintes unidimensionnel et permettre de bons résultats, nous avons choisi une éprouvette en NiTi de géométrie et de dimensions suivantes (Fig. IV.6) :

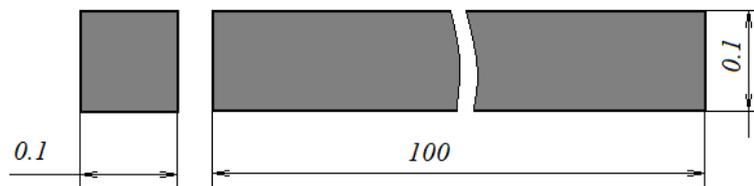


Figure IV.6. Géométrie de l'éprouvette

Les paramètres du matériau sont les mêmes pris précédemment et nous avons obtenu les résultats suivants :

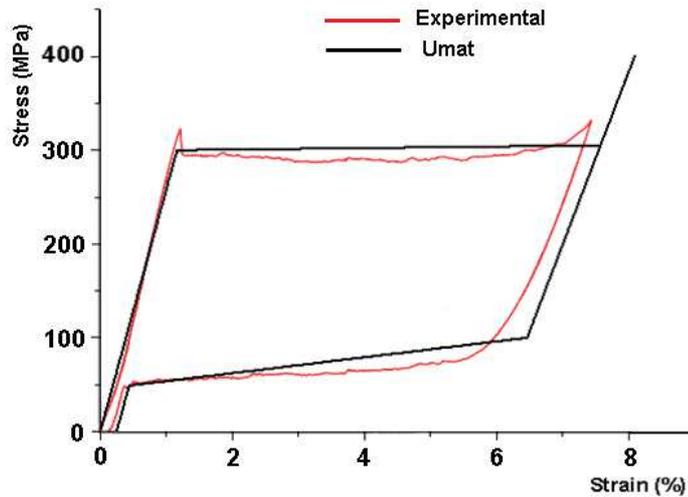


Figure IV.7. Simulation en utilisant UMAT à ($\sigma=400\text{MPa}$ et $T=70^\circ\text{C}$)

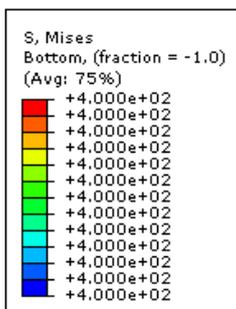


Figure IV.8. Contraintes Von Mises à la fin du pas de chargement

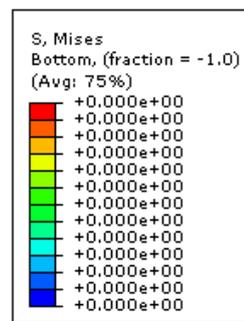


Figure IV.9. Contraintes Von Mises à la fin du pas de déchargement

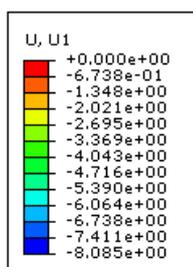


Figure IV.10. Déplacements à la fin du pas de chargement

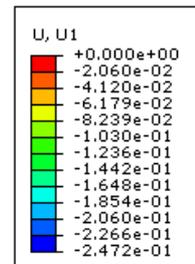


Figure IV.11. Déplacements à la fin du pas de déchargement



IV.2.4. Discussions

a) Résultats obtenus en Fortran

La figure (Fig. IV.2) montre une bonne concordance entre les résultats obtenus par le test de traction de pseudoélasticité et les résultats obtenus par simulation numérique.

La figure (Fig. IV.3) illustre les deux étapes de l'essai : étape de chargement mécanique et étape de déchargement.

La figure (Fig. IV.4) montre l'évolution de la fraction volumique durant les deux étapes du test et elle correspond aux paliers de transformations de la courbe (Fig. IV.2)

La figure (Fig. IV.5) montre la réponse du modèle sous un même chargement mécanique mais en variant la température de l'essai, ce qui est évident c'est l'accord entre ces résultats et le diagramme de phases des AMF c.à.d. la hausse des contraintes de transformation en fonction de la température.

b) Résultats obtenus en Abaqus

La figure (Fig. IV.7) montre un accord moyen entre les résultats expérimentaux et les résultats simulés en utilisant l'UMAT de Abaqus, on remarque un décalage d'environ 0.0024 ce qui correspond à 2%.

Les figures (Fig. IV.8) et (Fig. IV.9) montrent la distribution des contraintes de Von Mises aux fins des deux étapes.

Les figures (Fig. IV.10) et (Fig. IV.11) montrent la distribution des déplacements U_1 à la fin du pas de chargement mais à la fin du pas de déchargement un déplacement résiduel subsiste et cela est dû à la précision de l'implémentation.

En résumé le modèle proposé pour simuler l'effet de la pseudoélasticité a montré une bonne concordance avec l'essai de traction uniaxial et semble être efficace pour son utilisation en engineering.

IV.3. Simulation numérique unidimensionnelle de l'effet thermoélastique

IV.3.1. Données expérimentales

Pour avoir les données expérimentales on a utilisé les travaux de Bourbon G. et al [59], le test a été réalisé une éprouvette en CuZnAl sous une contrainte $\sigma = 65\text{MPa}$, les paramètres nécessaires au modèle ont été mis dans le tableau (Tableau. IV.2)

$M_s^0(K)$	313	$M_s^\sigma(K)$	324	$E_A(MPa)$	72000
$M_f^0(K)$	303	$M_f^\sigma(K)$	311	$E_M(MPa)$	70000
$A_s^0(K)$	315	$A_s^\sigma(K)$	330	ε_0	0.023937
$A_f^0(K)$	325	$A_f^\sigma(K)$	340	ε_a	0.001063
$B(MPa.K^{-1})$	1.149001E-01	$C(MPa)$	6.755679E-01	$K(MPa)$	1.762350E-01
$H(MPa)$	9.390822E-01	Densité	7900Kg.m ⁻³	Cond. Therm	120W.m ⁻¹ .K ⁻¹
Chal. Massique		420J.Kg ⁻¹ .K ⁻¹			

Tableau IV.2. Paramètres du modèle [59]

IV.3.2.Simulation par Fortran

a) Algorithme

Dans le cas de la transformation directe de l'effet thermoélastique, l'évolution de la fraction volumique de la martensite à contrainte constante a pour expression :

$$\dot{f} = -\frac{B \cdot \dot{T}}{2C+K} ; (\dot{f} > 0) \quad (\dot{T} < 0) \quad (4.3.1)$$

En termes finis on a :

$$\Delta f = -\frac{B}{2C+K} \Delta T \quad (4.3.2)$$

Dans le cas de la transformation inverse :

$$\Delta f = -\frac{B}{2C-K} \Delta T \quad (4.3.3)$$

Les équations (4.3.2) et (4.3.3) donnent les incréments de T et f .

A- Transformation directe

7- T^k, f^k

8- Calcul de $\varphi^{di}(\sigma = \sigma_1, T, f) = \frac{\sigma_1^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_1 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T - M_S^0) - C(2f - 1) - Kf - H$

9- S'il n'y a pas de transformation : $\Delta \varepsilon = 0$ et $\Delta f = 0$

10- Si le cas est la transformation martensitique : $\begin{cases} \Delta f = -\frac{B}{(2C+K)} \Delta T & (\Delta f > 0); (\Delta T < 0) \\ \Delta \varepsilon = \Delta f \cdot \varepsilon_0 \end{cases}$

11- $T^{k+1} = T^k + \Delta T, f^{k+1} = f^k + \Delta f, \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \Delta \varepsilon$

C- Transformation inverse

1- T^k, f^k

2- Calcul de $\varphi^{in}(\sigma = \sigma_1, T, f) = \frac{\sigma_1^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma_1 \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T - M_S^0) - C(2f - 1) + Kf + H$

3- S'il n'y a pas de transformation : $\Delta \varepsilon = 0$ et $\Delta f = 0$

4- S'il y a de transformation : $\begin{cases} \Delta f = -\frac{B}{(2C-K)} \Delta T & (\Delta f < 0); (\Delta T > 0) \\ \Delta \varepsilon = \Delta f \cdot \varepsilon_0 \end{cases}$

6- $T^{k+1} = T^k + \Delta T, f^{k+1} = f^k + \Delta f, \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \Delta \varepsilon$

b) Résultats

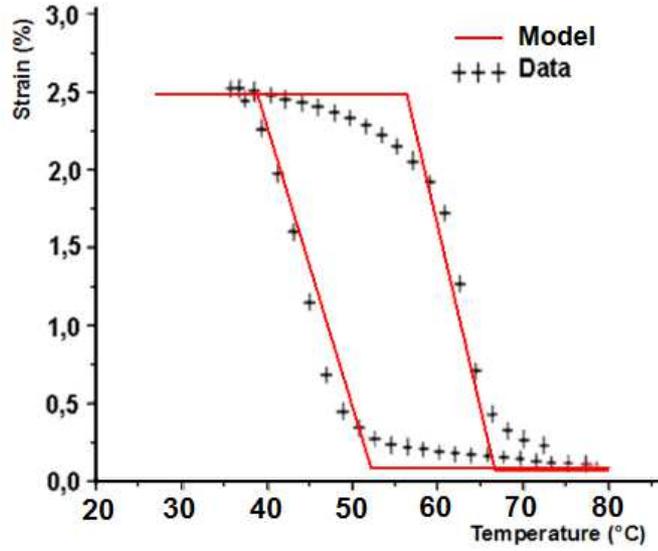


Figure IV.12. Simulation et comparaison des résultats

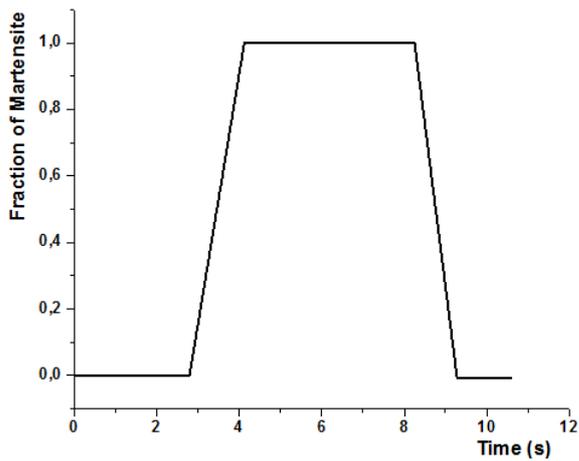


Figure IV.13. Evolution de la fraction f

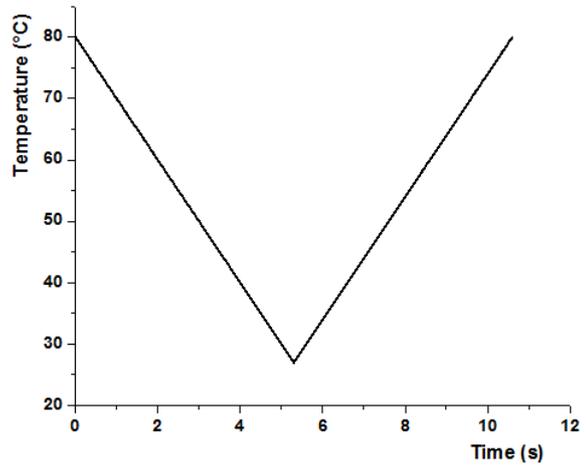


Figure IV.14. Chargement thermique

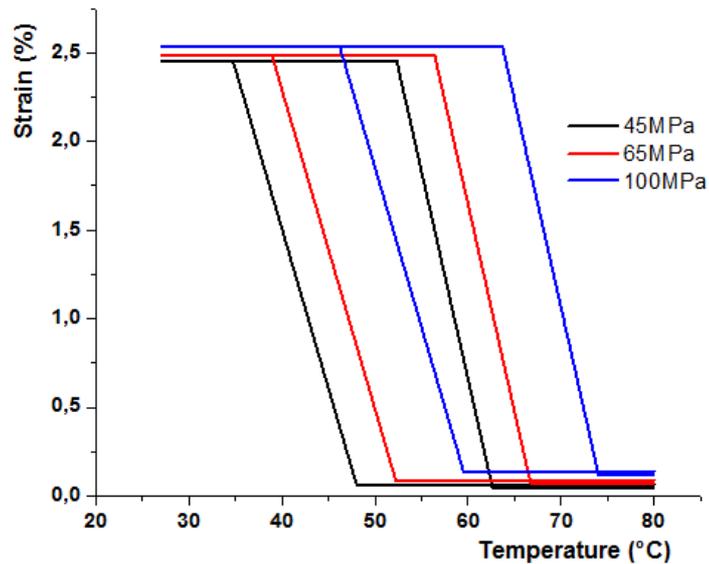


Figure IV.15. Simulation à différentes températures.

IV.3.3. Simulation par Abaqus (UMAT)

La même éprouvette que précédemment est utilisée et les propriétés du matériau sont celles illustrées par le tableau (Tableau IV.2)

Les valeurs de la fraction volumique f et de la déformation E_{11} sont après chaque incrément du pas d'analyse stockées dans les variables de solution respectivement SDV1 et SDV2.

Les distributions de la température TEMP, de la fraction volumique SDV1 et de la déformation SDV2 aux trois pas d'analyse STEP1, STEP2 et STEP3 sont représentées sur le tableau (Tableau IV.3).

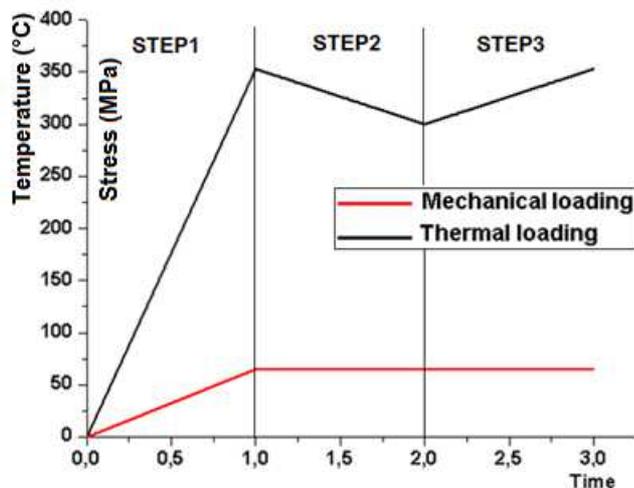


Figure IV.16. Histoire du chargement thermomécanique

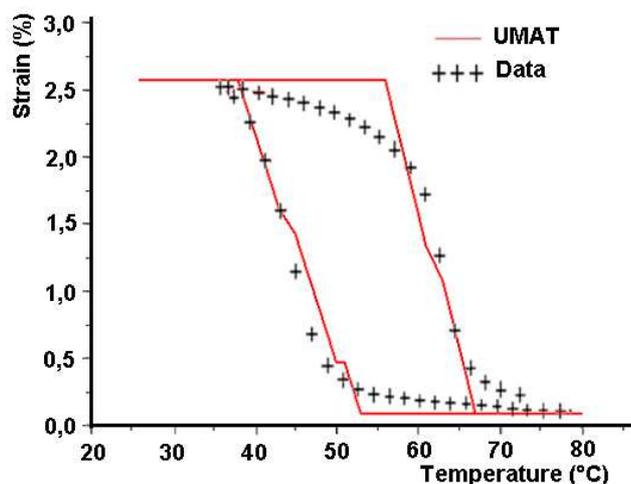


Figure IV.17. Résultats et comparaison

IV.3.4. Discussion

a) Résultats obtenus par Fortran

La figure (Fig. IV.12) montre une coïncidence acceptable entre la courbe simulée et la courbe expérimentale.

La figure (Fig. IV.13) montre l'évolution de la fraction volumique de la martensite en concordance avec la déformation liée à la transformation.

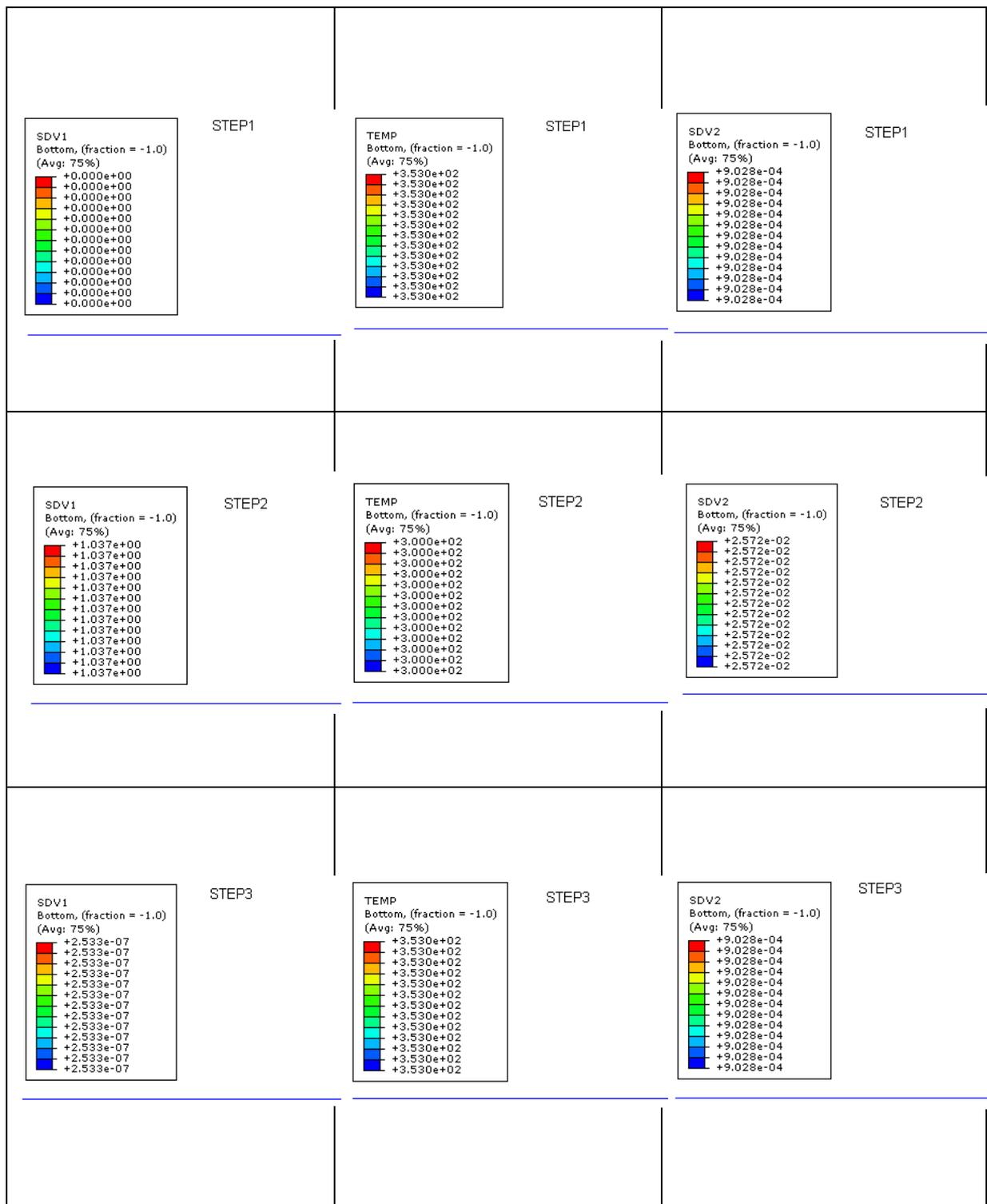


Figure IV.18. Distributions de la température (TEMP), de la fraction volumique f (SDV1) et de la déformation E_{II} (SDV2) à la fin de chaque pas d'analyse

La figure (Fig.IV.14) coorespond à l’histoire du chargement thermique.

b) Résultats obtenus par Abaqus :

La figure (Fig.IV.16) exhibe l’histoire des chargements mécanique et thermique, la figure (Fig. IV.17) montre les résultats obtenus par simulation par Abaqus comparés aux résultats expérimentaux, on observe un accord acceptable entre la simulation et le test.

L’ensmble des figures (Figure IV.18) englobe les résultats relatifs à la température, la fraction volumique de la martensite et la déformation associée à la transformation à la fin de chaque pas d’analyse.

En général la simulation par Abaqus ne diffère pas de celle réalisée par Fortran. En conclusion le modèle prposé pour décrire l’effet thermoélastique apparait pratique pour l’engineering.

IV.4. Simulation numérique unidimensionnelle de l’effet simple de mémoire

IV.4.1. Données expérimentales

Le matériau utilisé est NiTi, le test d’orientation de la martensite considéré est celui réalisé aux travaux de Ng K.L. et al [58] les données sont illustrées par le tableau (Tableau IV.3)

L’éprouvette a la même géométrie que celle utilisée précédemment, le chargement mécanique est 300MPa à T=230K

M_s^0	279K	E_A	25775MPa
M_f^0	240K	σ_s	70MPa
A_s^0	296K	σ_f	120MPa
A_f^0	330K	B	0.248MPa.K ⁻¹
E_M	18442MPa	C	4.3232MPa
$a1$	10.678MPa	$a2$	-8.130MPa
$b2$	12.5MPa	H	0.152MPa
$a3$	9.37MPa	$b3$	-0.152MPa
ε_0	0.04064	Densité	6.45E03Kg.m ⁻³
Conduc Thermique	22W.m ⁻¹ .K ⁻¹	Chaleur massique	329J.Kg ⁻¹ .K ⁻¹

Tableau IV.3. Paramètres du modèle [58],[59]

IV.4.2.Simulation par Fortran

a) Algorithme

L’étude de l’effet simple de mémoire de forme a été divisé en trois parties :

1- Chargement mécanique :

L’évolution de la fraction volumique de la martensite est donnée par :

$$\dot{f} = \frac{\dot{\sigma} \cdot \varepsilon_0}{2C + a_1} \quad (\dot{f} > 0) \quad (\dot{\sigma} > 0) \quad (4.4.1)$$

(4.4.1) permet d'avoir les incréments de f et σ :

$$\Delta f = \frac{\varepsilon_0}{2C + a_1} \Delta \sigma \quad (\dot{f} > 0) \quad (\dot{\sigma} > 0) \quad (4.4.2)$$

2- Chauffage :

L'expression de l'évolution de la fraction volumique de la martensite :

$$\dot{f} = -\frac{B \cdot \dot{T}}{2H - a_2} \quad (\dot{f} < 0) \quad (\dot{T} > 0) \quad (4.4.3)$$

(4.4.3) donne :

$$\Delta f = -\frac{B}{2H - a_2} \Delta T \quad (\dot{T} > 0) \quad (4.4.4)$$

3- Refroidissement :

L'évolution de la fraction de martensite :

$$\dot{f} = -\frac{B \cdot \dot{T}}{2H + a_3} \quad (\dot{f} > 0) \quad (\dot{T} < 0) \quad (4.4.5)$$

(4.4.5) permet d'écrire :

$$\Delta f = -\frac{B}{2H + a_3} \Delta T \quad (\dot{T} < 0) \quad (4.4.6)$$

A- Orientation

- σ^k, f^k
- Calcul de $\varphi_1(\sigma, T, f) = \sigma \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T - M_s^0) - C \cdot (2f - 1) - a_1 f - a_1$
- Si le cas est élastique austénitique : $\Delta \varepsilon = \frac{\Delta \sigma}{E_A}$ et $\Delta f = 0$
- Si le cas s'agit d'une transformation martensitique :
$$\begin{cases} \Delta f = \frac{\varepsilon_0}{2C + a_1} \Delta \sigma \\ \Delta \varepsilon = \Delta f \cdot \varepsilon_0 \end{cases}$$
- $\sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta \sigma$; $f^{k+1} = f^k + \Delta f$

B- Chauffage

- T^k, f^k
- Calcul de $\varphi_2(\sigma, T, f) = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) + \sigma \cdot \varepsilon_0 - B \cdot (T - M_s^0) - H \cdot (2f - 1) + a_2 f + b_2$
- Si le cas s'agit d'une transformation martensitique :
$$\begin{cases} \Delta f = -\frac{B}{2H - a_2} \Delta T \\ \Delta \varepsilon = \Delta f \cdot \varepsilon_0 \end{cases}$$

- S'il ne s'agit pas de transformation : $\Delta f = 0$
- $T^{k+1} = T^k + \Delta T$; $f^{k+1} = f^k + \Delta f$ ($\Delta T > 0$)

C- Refroidissement

- T^k, f^k
- Calcul de $\varphi_3(\sigma, T, f) = -B \cdot (T - M_s^0) - H \cdot (2f - 1) - a_3 f - b_3$
- Si le cas s'agit d'une transformation martensitique :
$$\begin{cases} \Delta f = -\frac{B}{2H+a_3} \Delta T \\ \Delta \varepsilon = \Delta f \cdot \varepsilon_0 \end{cases}$$
- S'il ne s'agit pas de transformation : $\Delta f = 0$
- $T^{k+1} = T^k + \Delta T$; $f^{k+1} = f^k + \Delta f$ ($\Delta T < 0$)

b) Résultats

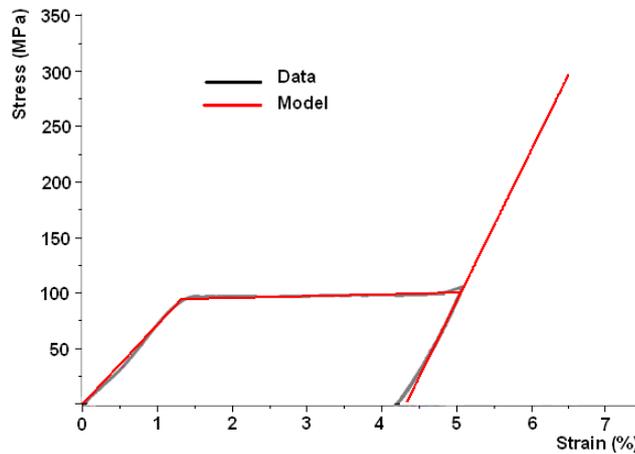


Figure IV.19. Simulation de l'orientation de la martensite (Test réalisé à $T=23^\circ\text{C}$ sur un tube en NiTi)

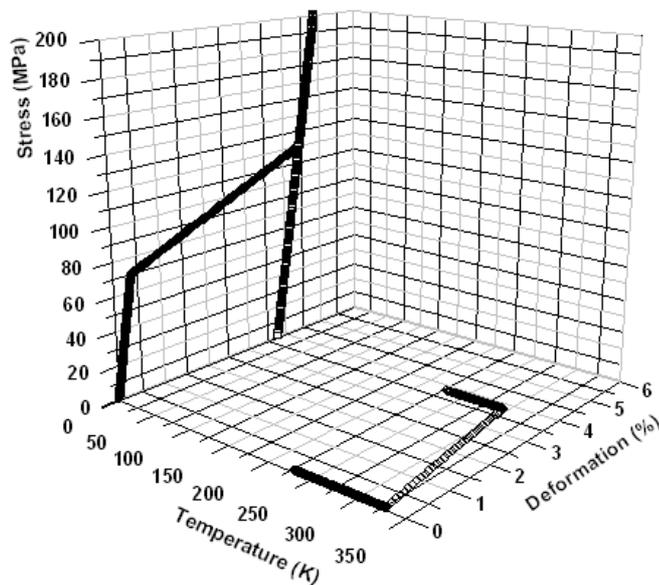


Figure IV.20. Simulation de l'effet simple de mémoire de forme (Représentation dans en 3D)

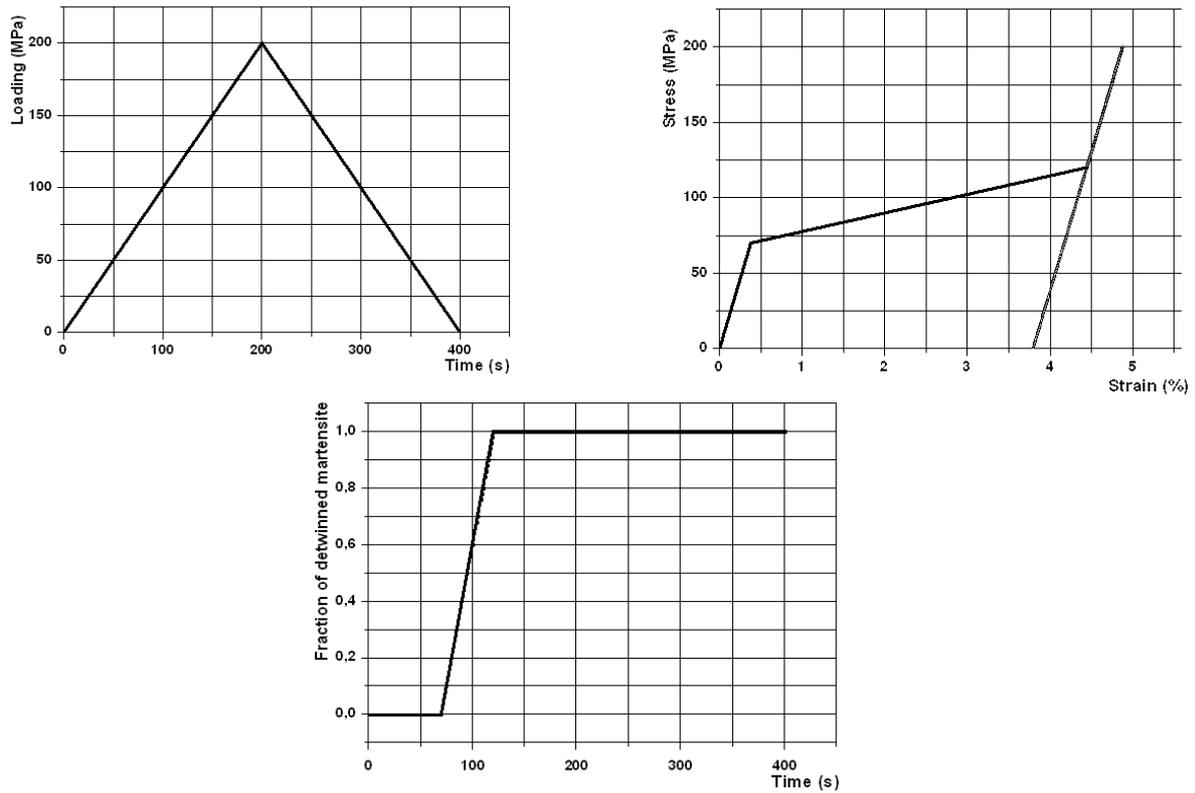


Figure IV.21. a) Histoire du chargement, b) Chargement et déchargement, c) Evolution de la fraction de la martensite orientée

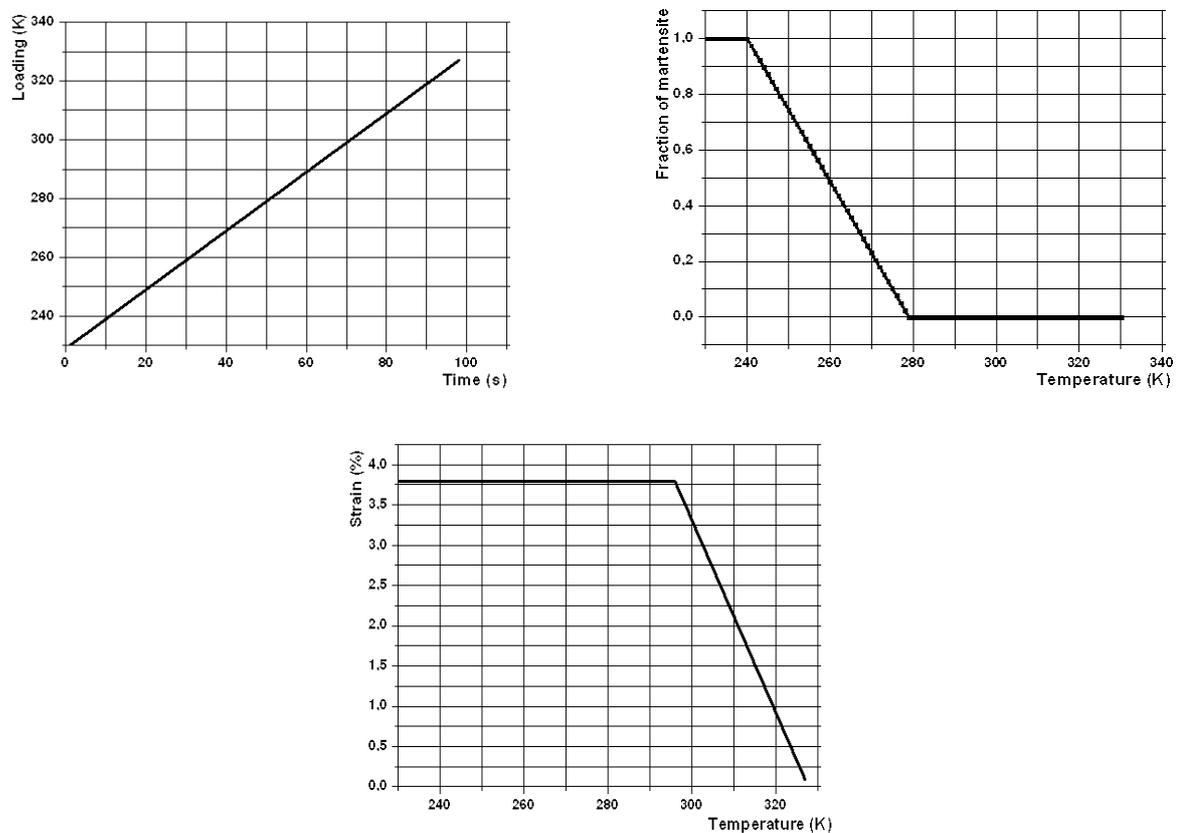


Figure IV.22. a) Histoire du chargement, b) Chauffage, c) Evolution de la fraction de la martensite

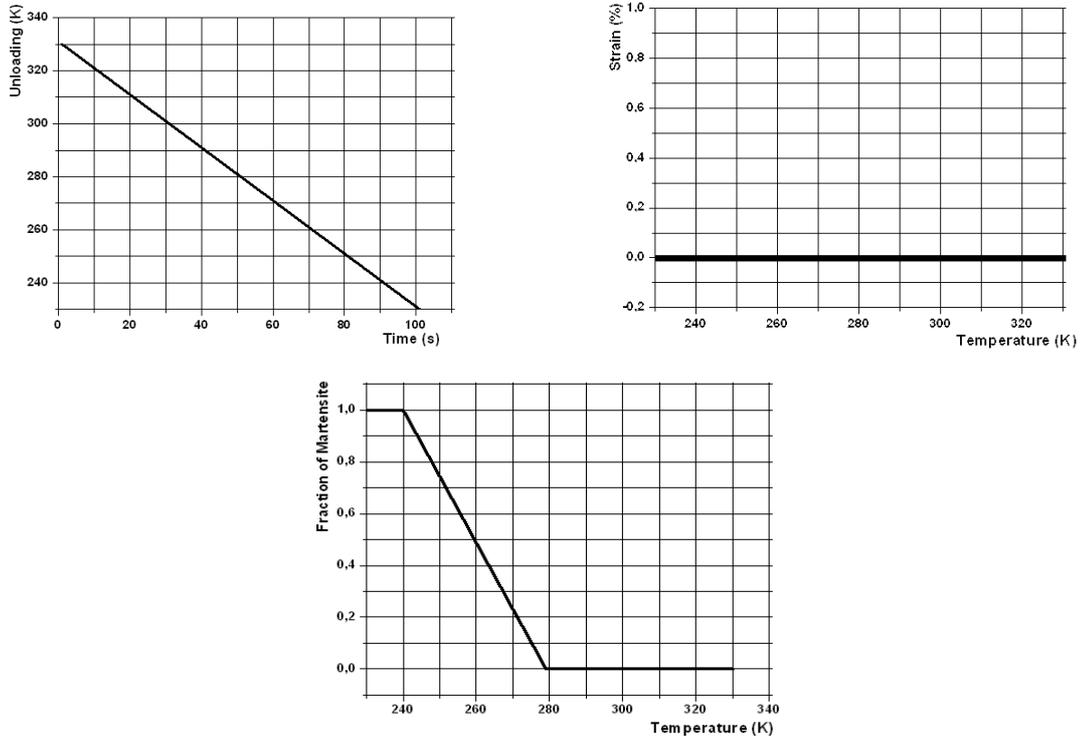


Figure IV.23. a) Histoire du chargement, b) Refroidissement, c) Evolution de la fraction de la martensite autoaccomodante

IV.4.3. Simulation par Abaqus (UMAT)

L'éprouvette est en NiTi de même géométrie que celle utilisée en pseudoélasticité, les propriétés du matériau sont celles illustrées par le tableau (Tableau IV.3). Les étapes de l'effet de mémoire simple sont distribuées sur les pas d'analyse comme suit :

Orientation : Step1 (Chargement) et Step2 (Déchargement)

Chauffage : Step3

Refroidissement : Step4

Les résultats obtenus par simulation en utilisant Abaqus (UMAT) sont les suivants :

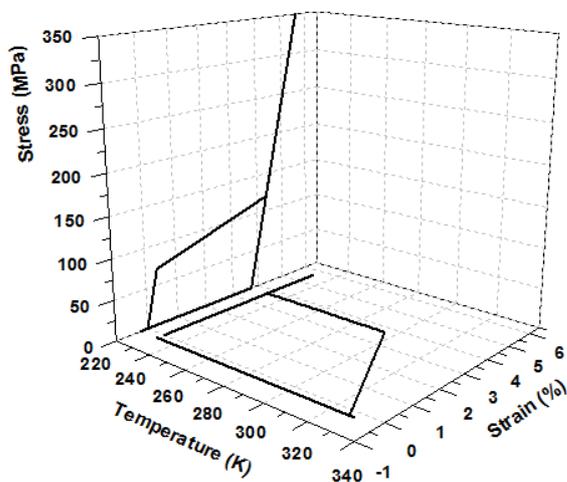


Figure IV.24. Représentation en 3D

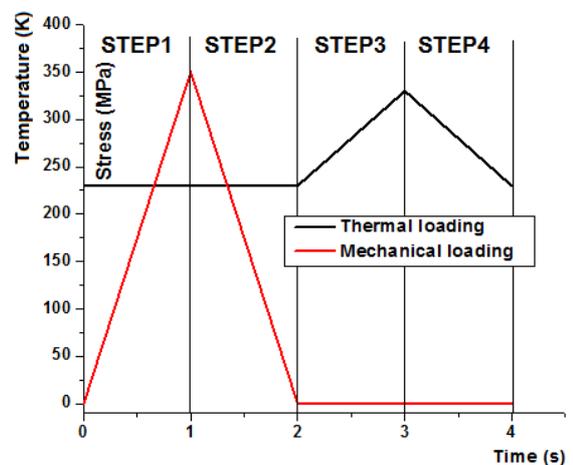


Figure IV.25. Histoire du chargement

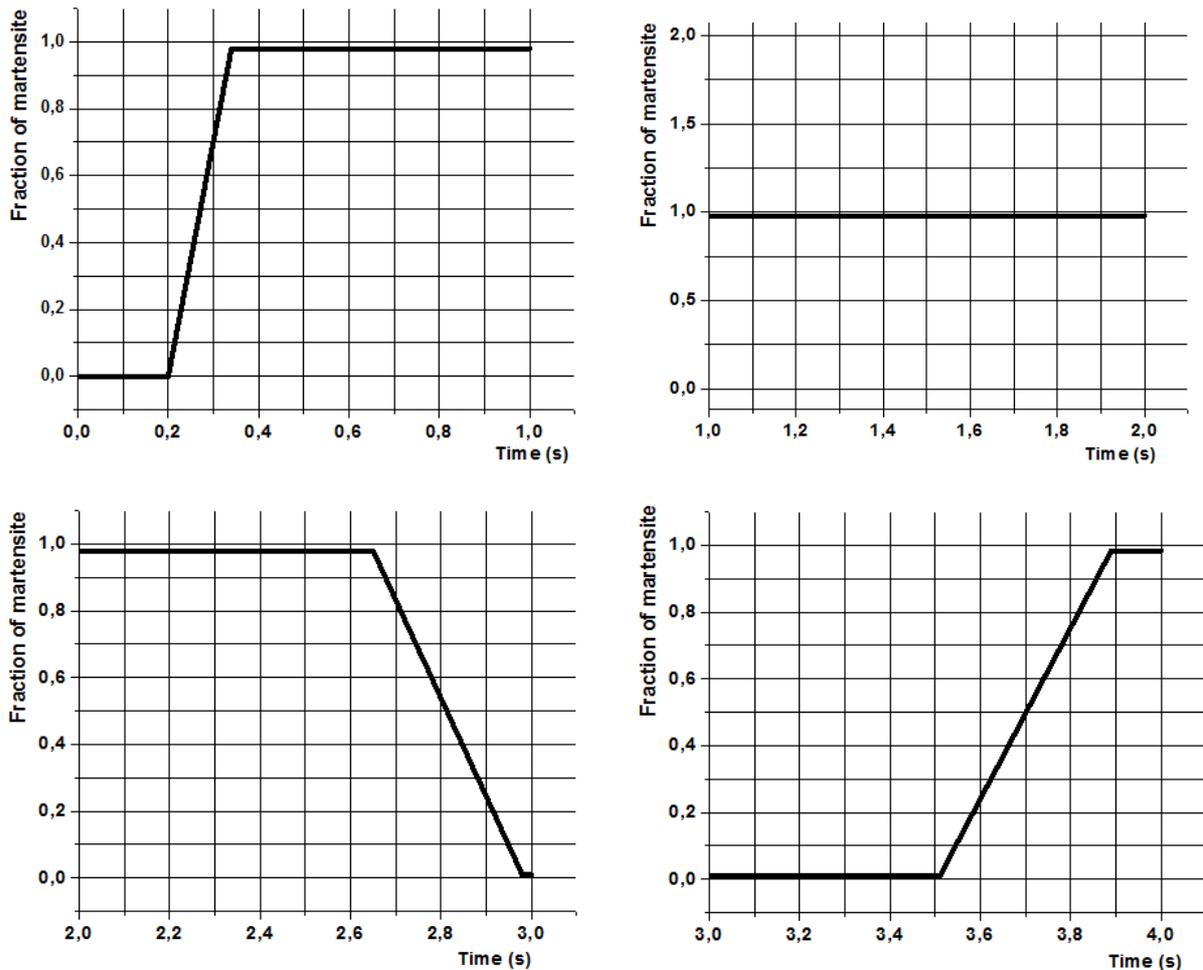


Figure IV.26. Evolution de la fraction de martensite au cours des pas d'analyse

a) Step1, b) Step2, c) Step3, d) Step4

IV.4.4. Discussions

a) Résultats obtenus par Fortran

La figure (Fig. IV.19) représente la comparaison entre l'essai d'orientation et la simulation numérique de l'étape de chargement mécanique de l'effet simple de mémoire, on remarque une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et simulés

La figure (Fig. IV.20) montre les résultats de la simulation globale de l'effet simple de mémoire de forme dans l'espace (σ, T, ε) . Ces résultats sont conformes à la définition de l'effet de mémoire c.à.d. on a déformation de la martensite autoaccomodante suivi d'un déchargement, un chauffage qui entrainera le recouvrement de la déformation précédente et finalement un refroidissement qui n'entraine qu'une transition de phase sans travail mécanique. L'ensemble des figures (Fig. IV.21) est relatif à l'étape du chargement mécanique, ces montrent l'histoire du chargement, la courbe de déformation durant cette étape et enfin l'évolution de la fraction volumique de la martensite orientée, cette évolution est en rapport avec la grande déformation de l'éprouvette.

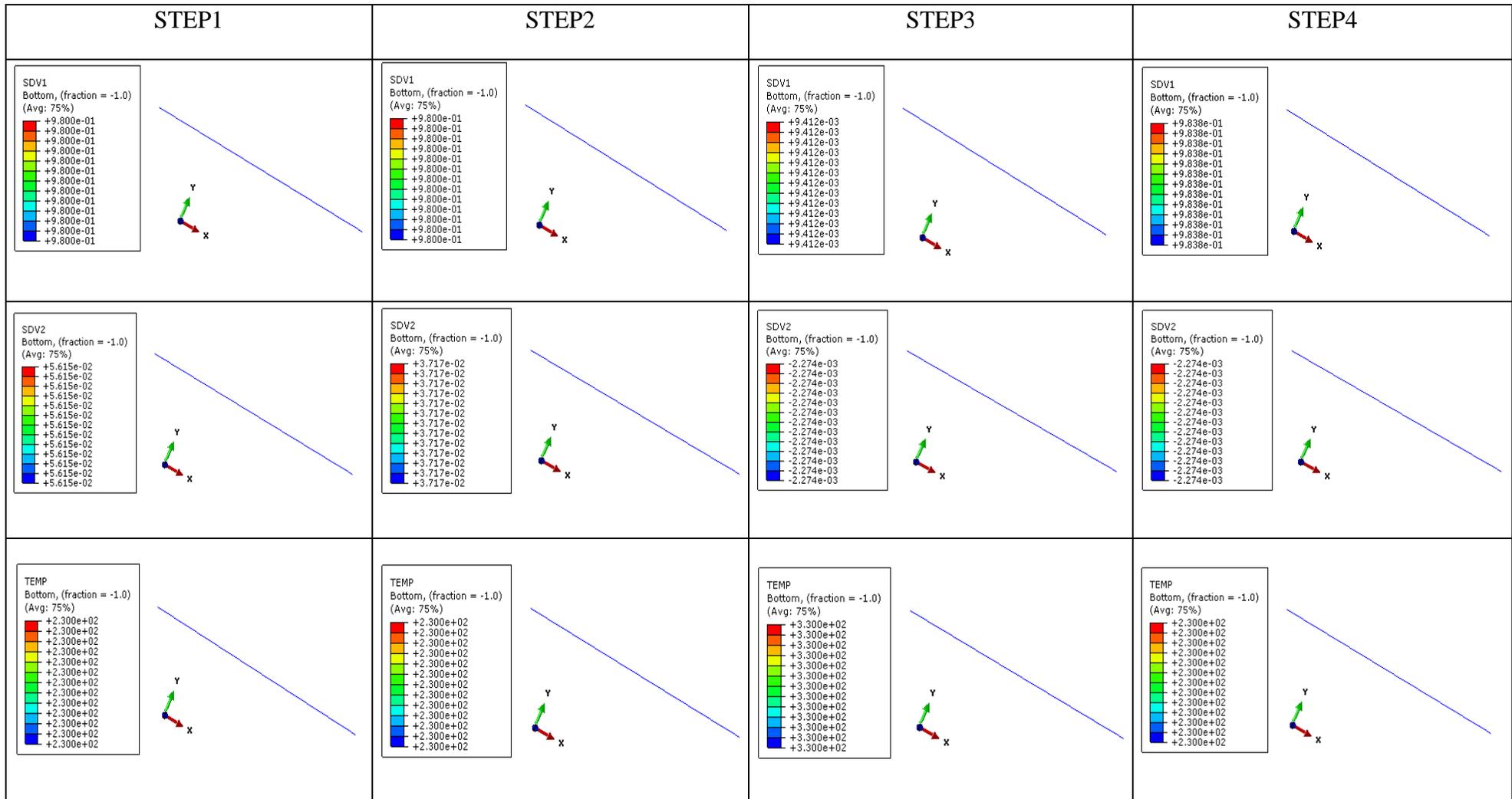


Figure IV.27. Distributions des fractions de martensite SDV1, des déformations SDV2 et des températures TEMP à la fin de chaque pas d'analyse

L'ensemble des figures (Fig. IV.22) concerne l'étape du chauffage. On a l'histoire du chargement thermique, la courbe de déformation en fonction de la température qui montre le recouvrement de cette déformation à la fin de cette étape et finalement on a l'évolution de la fraction de la martensite qui est en accord avec le recouvrement de la déformation précédente.

L'ensemble des figures (Fig. IV.23) montrent l'histoire du déchargement thermique et la transformation de l'austénite en martensite autoaccomodante

b) Résultats obtenus par Abaqus

La figure (Fig. IV.24) montre les résultats des trois étapes de l'effet simple de mémoire dans l'espace (σ, T, ε) qui sont en accord avec la définition de l'effet de mémoire finalement l'éprouvette retrouve sa forme initiale.

La figure (Fig. IV.25) montre l'histoire des différents chargements et déchargements mécanique ou thermique à travers les étapes de l'effet de mémoire.

L'ensemble des figures (Fig. IV.26) montrent l'évolution de la fraction de la martensite durant les quatre pas d'analyse et cette évolution est en accord avec l'évolution de la déformation.

L'ensemble des figures (Fig. IV.27) montrent les distributions de la fraction martensitique de la déformation et de la température à la fin de chaque pas d'analyse.

En conclusion les résultats obtenus par Fortran et Abaqus ne se diffèrent qu'au niveau des valeurs de la fraction à la fin ou au début de chaque pas d'environ ± 0.02 .

Ces résultats permettent de juger que le modèle proposé pour décrire l'effet simple de mémoire de forme peut être utilisé en engineering.

IV.5. Simulation numérique 3D de l'effet pseudoélastique sous un chargement uniaxial

Pour simuler le modèle en 1D on utilise un élément cubique (Fig. VI.28)

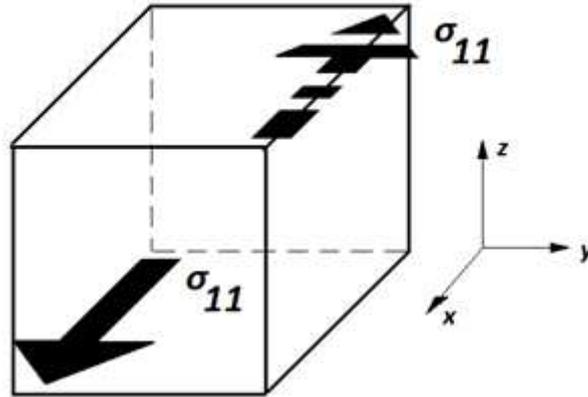


Figure IV.28. L'échantillon à simuler soumis à une traction axiale

A) Algorithme:

1) Transformation directe

1-1. σ^k, f^k

1-2. Calcul de $\varphi^{di}(\sigma, T = T_1, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma : R - B \cdot (T_1 - M_s^0) + C(2f - 1) - Kf - H$

1-3. Si le cas est élastique austénitique : $\Delta \varepsilon = S_A : \Delta \sigma$ et $\Delta f = 0$

1-4. Si le cas est élastique martensitique : $\Delta \varepsilon = S_M : \Delta \sigma$ et $\Delta f = 0$

1-5. Si le cas s'agit d'une transformation martensitique :
$$\begin{cases} \Delta f = \frac{\varepsilon_0}{(K-2C)} R : \Delta \sigma \\ \Delta \varepsilon = \frac{\varepsilon_0^2}{(K-2C)} R \times R : \Delta \sigma \end{cases}$$

1-6. $\sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta \sigma^k, f^{k+1} = f^k + \Delta f^k, \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \Delta \varepsilon^k$

2) Transformation inverse

2-1 σ^k, f^k

2-2 Calcul de $\varphi^{di}(\sigma, T = T_1, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma : R - B \cdot (T_1 - M_s^0) + C(2f - 1) + Kf + H$

2-3 Si le cas est élastique austénitique : $\Delta \varepsilon = S_A : \Delta \sigma$ et $\Delta f = 0$

2-4 Si le cas est élastique martensitique : $\Delta \varepsilon = S_M : \Delta \sigma$ et $\Delta f = 0$

2-5 Si le cas s'agit d'une transformation martensitique :
$$\begin{cases} \Delta f = -\frac{\varepsilon_0}{(K+2C)} R : \Delta \sigma \\ \Delta \varepsilon = -\frac{\varepsilon_0^2}{(K+2C)} R \times R : \Delta \sigma \end{cases}$$

2-6 $\sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta \sigma^k, f^{k+1} = f^k + \Delta f^k, \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \Delta \varepsilon^k$

B) Données expérimentales :

Le test de pseudoélasticité considéré appartient aux travaux de Ng K.L. et al [58] et a été réalisé sur un tube en NiTi sous une contrainte de 400 MPa à une température $T=70^{\circ}\text{C}$

σ_{Ms} (MPa)	300	A_s^0 (K)	297
σ_{Mf} (MPa)	305	A_f^0 (K)	330
σ_{As} (MPa)	100	ϵ_0	0.06106
σ_{Af} (MPa)	50	H (MPa)	8.007499
E_A (MPa)	25775	B (MPa.K ⁻¹)	0.18746
E_M (MPa)	18442	C (MPa)	-0.88082
M_s^0 (K)	279	K (MPa)	-1.44134
M_f^0 (K)	240	ν	0.3

Tableau IV.4. Données expérimentales [58]

C) Résultats :

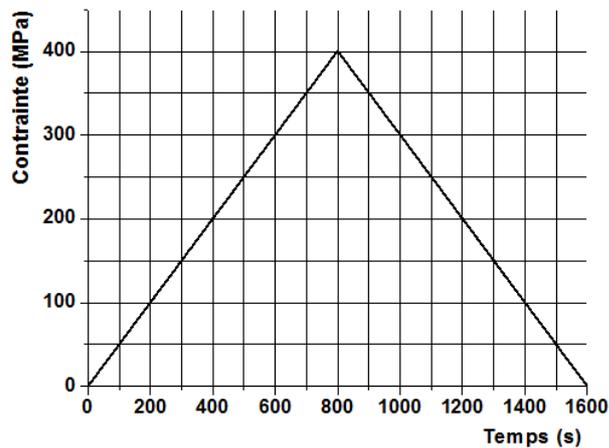


Figure IV.29. Historique du chargement

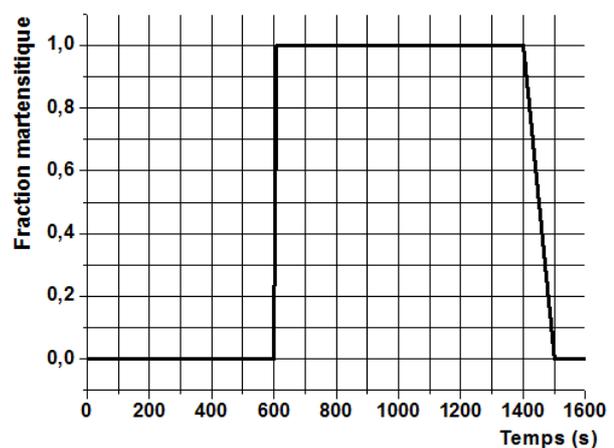


Figure IV.30. Evolution de la fraction martensitique

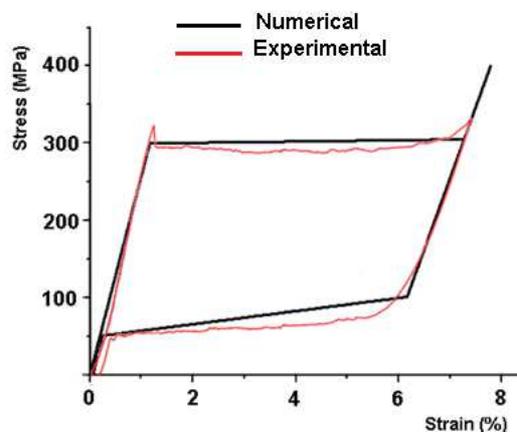


Figure IV.31. Courbe contrainte-déformation

IV.6. Simulation numérique 3D de l'effet pseudoélastique sous un chargement biaxial

L'échantillon est toujours un cube de $10 \times 10 \times 10 \text{ mm}^3$ soumis à un chargement biaxial et de mêmes caractéristiques de matériaux que le précédent (Fig. IV.32)

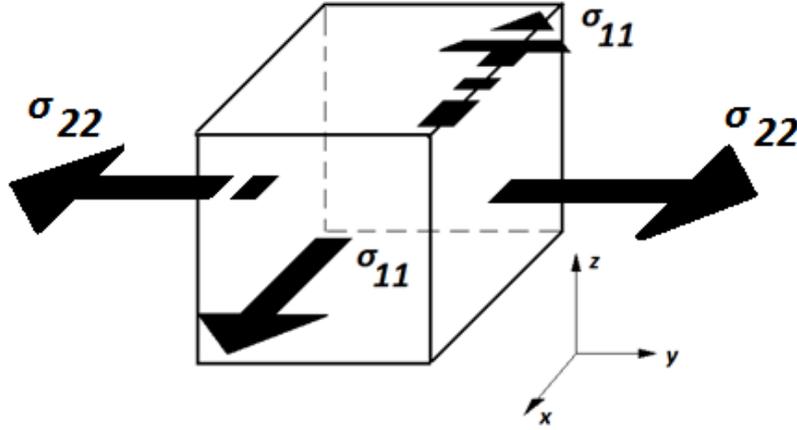


Figure IV.32. L'échantillon à simuler soumis à une traction biaxiale

A) Algorithme:

1) Transformation directe

1-1. σ^k, f^k

1-2 Calcul de $\varphi^{di}(\sigma, T = T_1, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma : R - B \cdot (T_1 - M_s^0) + C(2f - 1) - Kf - H$

1-3 Si le cas est élastique austénitique : $\Delta\varepsilon = S_A : \Delta\sigma$ et $\Delta f = 0$

1-4 Si le cas est élastique martensitique : $\Delta\varepsilon = S_M : \Delta\sigma$ et $\Delta f = 0$

1-5 Si le cas s'agit d'une transformation martensitique :
$$\begin{cases} \Delta f = \frac{\varepsilon_0}{(K-2C)} R : \Delta\sigma \\ \Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon_0^2}{(K-2C)} R \times R : \Delta\sigma \end{cases}$$

1-6 $\sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta\sigma^k, f^{k+1} = f^k + \Delta f^k, \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \Delta\varepsilon^k$

2) Transformation inverse

2-1 σ^k, f^k

2-2 Calcul de $\varphi^{di}(\sigma, T = T_1, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma : R - B \cdot (T_1 - M_s^0) + C(2f - 1) + Kf + H$

2-3 Si le cas est élastique austénitique : $\Delta\varepsilon = S_A : \Delta\sigma$ et $\Delta f = 0$

2-4 Si le cas est élastique martensitique : $\Delta\varepsilon = S_M : \Delta\sigma$ et $\Delta f = 0$

2-5 Si le cas s'agit d'une transformation martensitique :
$$\begin{cases} \Delta f = -\frac{\varepsilon_0}{(K+2C)} R : \Delta\sigma \\ \Delta\varepsilon = -\frac{\varepsilon_0^2}{(K+2C)} R \times R : \Delta\sigma \end{cases}$$

2-6 $\sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta\sigma^k, f^{k+1} = f^k + \Delta f^k, \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \Delta\varepsilon^k$

B) Résultats :

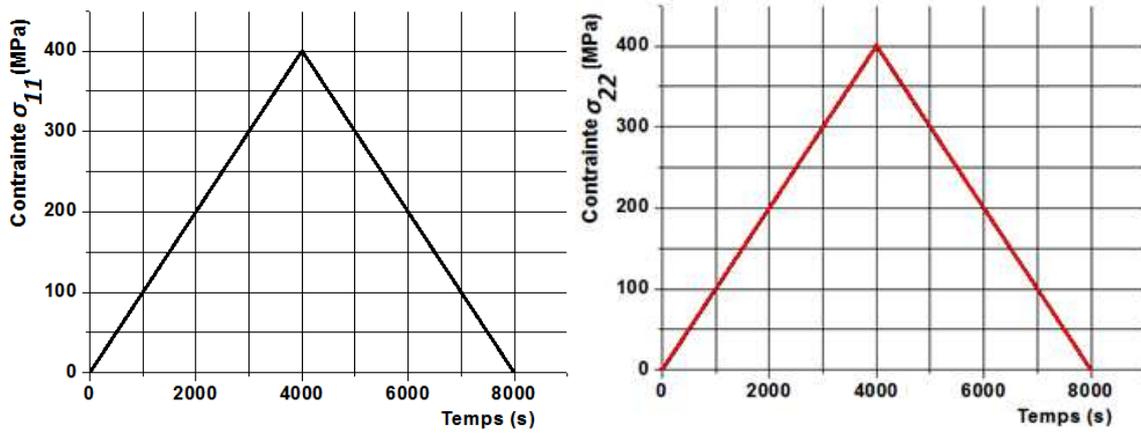


Figure IV.33. Historique du chargement

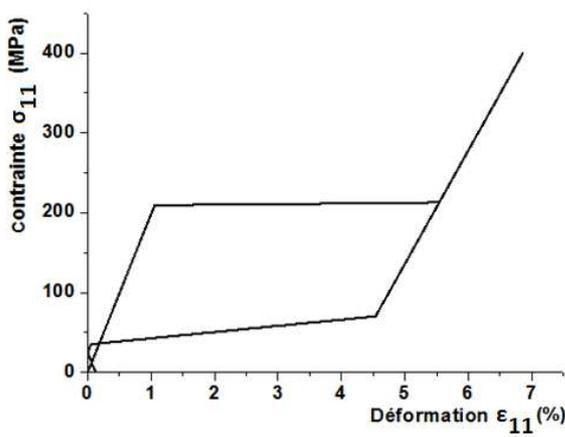


Figure IV.34. Courbe $\epsilon_{11}-\sigma_{11}$

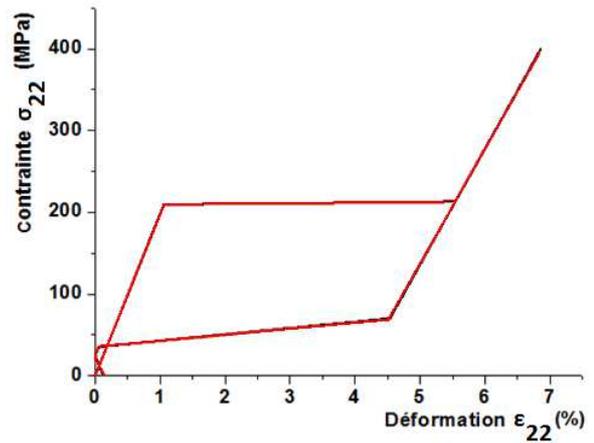


Figure IV.35. Courbe $\epsilon_{22}-\sigma_{22}$

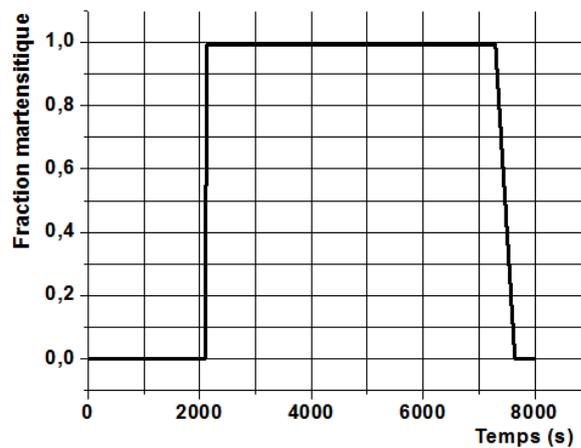


Figure IV.36. Evolution de la fraction martensitique

IV.7. Simulation numérique 3D de l'effet pseudoélastique sous un chargement triaxial

L'échantillon est toujours un cube de $10 \times 10 \times 10 \text{ mm}^3$ soumis à un chargement biaxial et de mêmes caractéristiques de matériaux que le précédent (Fig. IV.37)

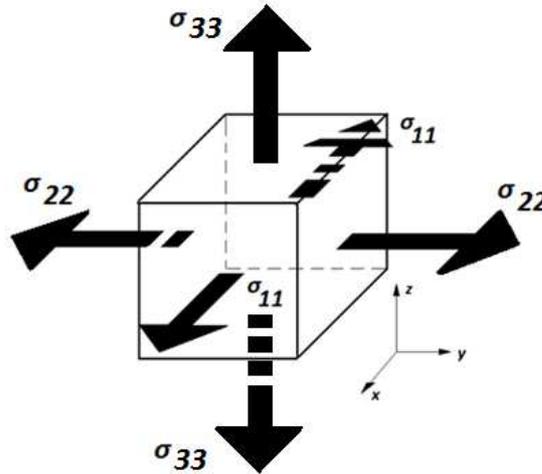


Figure IV.37. L'échantillon à simuler soumis à une traction triaxiale

A) Algorithme

1) Transformation directe

1-1 σ^k, f^k

1-2 Calcul de $\varphi^{di}(\sigma, T = T_1, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma : R - B \cdot (T_1 - M_s^0) + C(2f - 1) - Kf - H$

1-3 Si le cas est élastique austénitique : $\Delta \varepsilon = S_A : \Delta \sigma$ et $\Delta f = 0$

1-4 Si le cas est élastique martensitique : $\Delta \varepsilon = S_M : \Delta \sigma$ et $\Delta f = 0$

1-5 Si le cas s'agit d'une transformation martensitique :
$$\begin{cases} \Delta f = \frac{\varepsilon_0}{(K-2C)} R : \Delta \sigma \\ \Delta \varepsilon = \frac{\varepsilon_0^2}{(K-2C)} R \times R : \Delta \sigma \end{cases}$$

1-6 $\sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta \sigma^k, f^{k+1} = f^k + \Delta f^k, \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \Delta \varepsilon^k$

2) Transformation inverse

2-1 σ^k, f^k

2-2 Calcul de $\varphi^{di}(\sigma, T = T_1, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma : R - B \cdot (T_1 - M_s^0) + C(2f - 1) + Kf + H$

2-3 Si le cas est élastique austénitique : $\Delta \varepsilon = S_A : \Delta \sigma$ et $\Delta f = 0$

2-4 Si le cas est élastique martensitique : $\Delta \varepsilon = S_M : \Delta \sigma$ et $\Delta f = 0$

2-5 Si le cas s'agit d'une transformation martensitique :
$$\begin{cases} \Delta f = -\frac{\varepsilon_0}{(K+2C)} R : \Delta \sigma \\ \Delta \varepsilon = -\frac{\varepsilon_0^2}{(K+2C)} R \times R : \Delta \sigma \end{cases}$$

$$2-6 \quad \sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta\sigma^k, f^{k+1} = f^k + \Delta f^k, \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \Delta\varepsilon^k$$

B) Résultats :

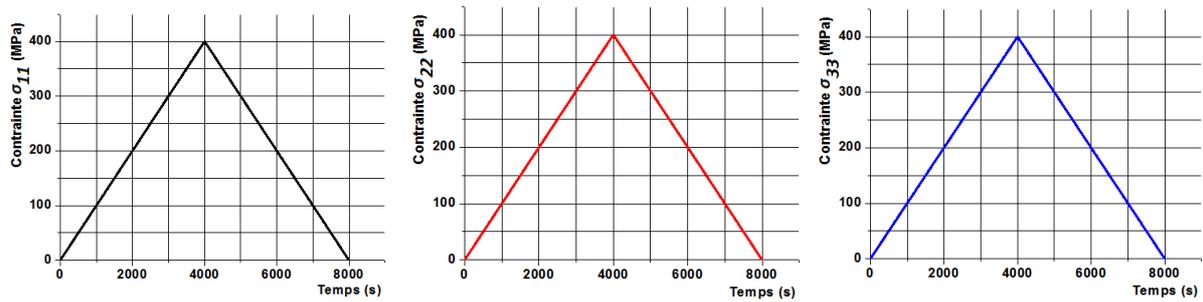


Figure IV.38. Historique du chargement

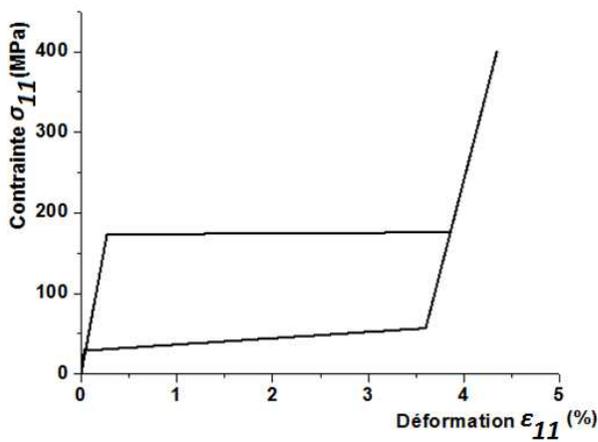


Figure IV.39. Courbe $\varepsilon_{11}-\sigma_{11}$

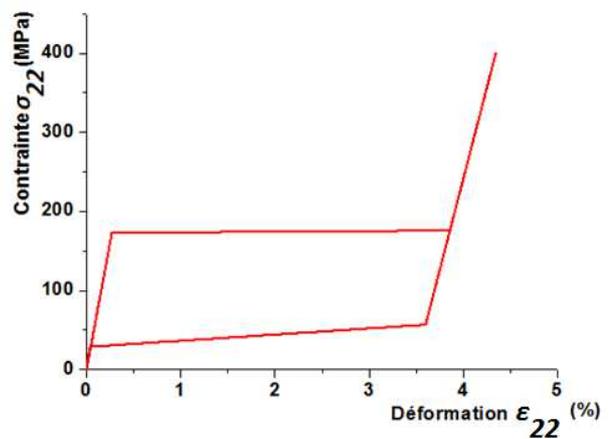


Figure IV.40. Courbe $\varepsilon_{22}-\sigma_{22}$

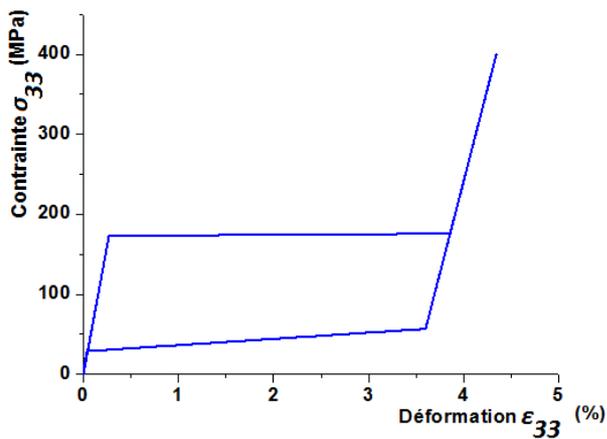


Figure IV.41. Courbe $\varepsilon_{33}-\sigma_{33}$

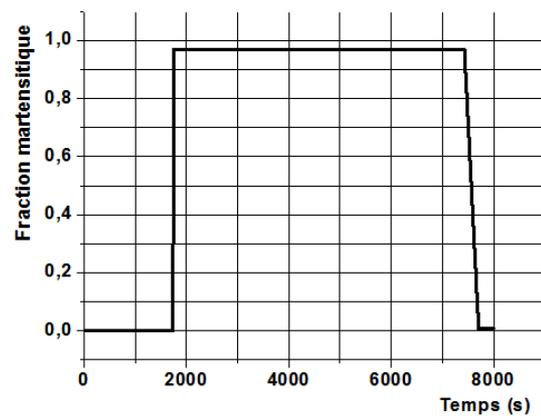


Figure IV.42. Evolution de la fraction martensitique

C) Discussions

En analysant les résultats pour les 3 cas nous pouvons constater :

a) Cas unidimensionnel :

Les résultats de la simulation du modèle coïncident bien avec la courbe d'essai pseudoélastique expérimentale (Fig. IV.31). La figure (Fig.IV.30) montre une évolution de la fraction martensitique compatible avec la déformation totale.

b) Cas de traction biaxiale

Une bonne réponse dans le cas de deux contraintes appliquées comme le montrent les figures (Fig.IV.34) et (Fig.IV.35), ce qui attire l'attention c'est la réduction de l'hystérésis de chacune des courbes. La courbe de la figure (Fig.IV.36) montre l'évolution de la fraction martensitique globale compatible avec les deux déformations ϵ_{11} et ϵ_{22}

c) Cas de traction triaxiale

Une bonne réponse aussi remarquée dans le cas de 3 contraintes appliquées (Fig.IV.39 ; Fig.IV.40 et Fig.IV.41) et l'évolution de la fraction martensitique (Fig.IV.42) reste compatible avec les 3 déformations ϵ_{11} , ϵ_{22} et ϵ_{33} .

IV.8. Simulation numérique 3D de l'effet simple de mémoire

Le même élément cubique est utilisé ici pour la simulation 3D de l'effet simple de mémoire, à la 1^{ère} étape une traction triaxiale est appliquée à l'élément sous une température constante ($T < M_f^0$), à la 2^{ème} étape l'élément cubique est soumis à un chauffage jusqu'à une température ($T > A_s^0$) et à la dernière étape un refroidissement ait lieu jusqu'à la température initiale

A) Chargement thermomécanique :

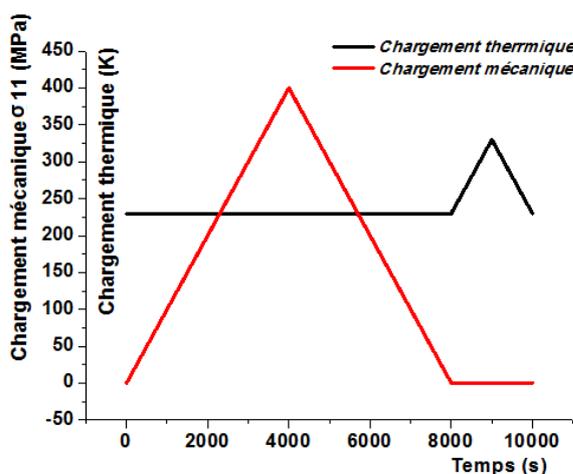


Figure IV.43. Chargement suivant x

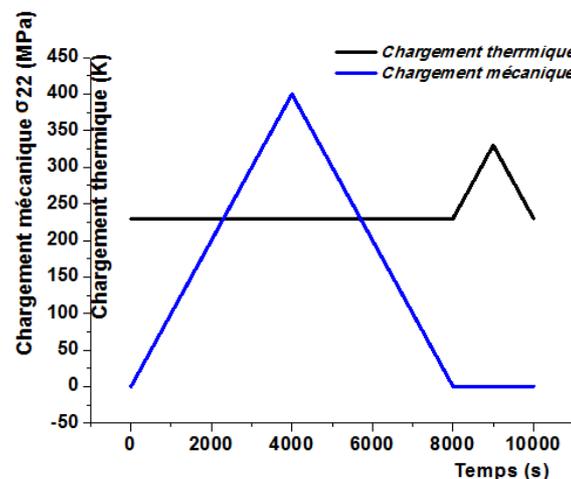


Figure IV.44. Chargement suivant y

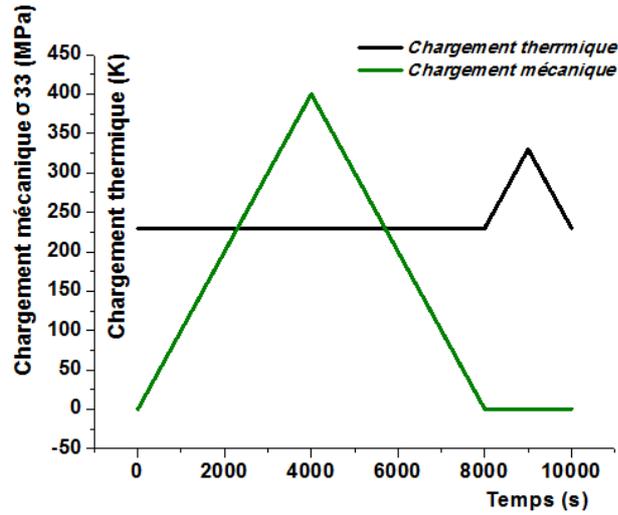


Figure IV.45. Chargement suivant z

B) Données expérimentales :

Les données expérimentales ont été obtenues par l'essai d'orientation cité dans les travaux de Ng K.L. et al [58]. Le matériau utilisé est NiTi (Tableau IV.5)

M_s^0	279K	E_A	25775MPa
M_f^0	240K	σ_s	70MPa
A_s^0	296K	σ_f	120MPa
A_f^0	330K	B	0.1874MPa.K ⁻¹
E_M	18442MPa	C	3.4577MPa
$a1$	10.118MPa	$a2$	-22.388MPa
$b2$	17.661MPa	H	8.0074MPa
$a3$	23.232MPa	$b3$	-8.0074MPa
ν	0.3	ϵ_0	0.04064

Tableau IV.6. Données expérimentales [58],[59]

C) Algorithme :

A- Orientation

- σ^k, f^k
- Calcul de $\varphi_1(\sigma, T, f) = \epsilon_0 \cdot \sigma : R - B(T - M_s^0) - C(1 - 2f) - a_1 - a_1 \cdot f = 0$
 - a. Si le cas est élastique austénitique : $\Delta \epsilon = S_A : \Delta \sigma$ et $\Delta f = 0$
 - b. Si le cas est élastique martensitique : $\Delta \epsilon = S_M : \Delta \sigma$ et $\Delta f = 0$
- Si le cas s'agit d'une transformation martensitique :
$$\begin{cases} \Delta f = \frac{\epsilon_0}{a_1 - 2C} R : \Delta \sigma \\ \Delta \epsilon = \frac{\epsilon_0^2}{a_1 - 2C} R \otimes R : \Delta \sigma \end{cases}$$

- $\sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta\sigma ; f^{k+1} = f^k + \Delta f$

B- Chauffage

- T^k, f^k

- Calcul de $\varphi_2(\sigma, T, f) = -B \cdot (T - M_s^0) - H \cdot (1 - 2f) + a_2 f + b_2$

- Si le cas s'agit d'une transformation martensitique :
$$\begin{cases} \Delta f = \frac{B}{2H+a_2} \Delta T \\ \Delta \varepsilon = \Delta f \cdot \varepsilon_0 \cdot R \end{cases}$$

- S'il ne s'agit pas de transformation : $\Delta f = 0$

- $T^{k+1} = T^k + \Delta T ; f^{k+1} = f^k + \Delta f (\Delta T > 0)$

C- Refroidissement

- T^k, f^k

- Calcul de $\varphi_3(\sigma, T, f) = -B \cdot (T - M_s^0) - H \cdot (1 - 2f) - a_3 f - b_3$

- Si le cas s'agit d'une transformation martensitique :
$$\begin{cases} \Delta f = -\frac{B}{2H-a_3} \Delta T \\ \Delta \varepsilon = 0 \end{cases}$$

- S'il ne s'agit pas de transformation : $\Delta f = 0$

- $T^{k+1} = T^k + \Delta T ; f^{k+1} = f^k + \Delta f (\Delta T < 0)$

D) Résultats :

1) Orientation :

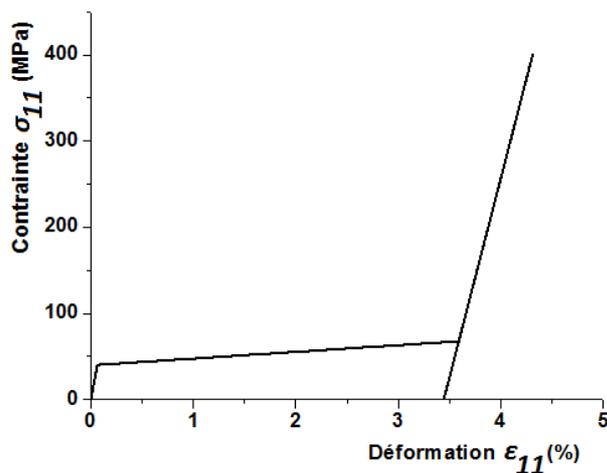


Figure IV.46. Courbe $\varepsilon_{11}-\sigma_{11}$

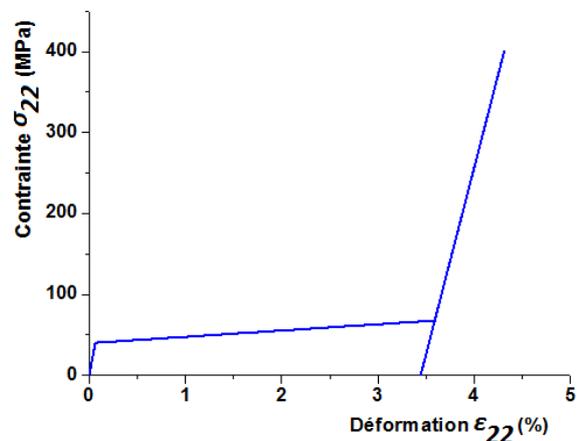


Figure IV.47. Courbe $\varepsilon_{22}-\sigma_{22}$

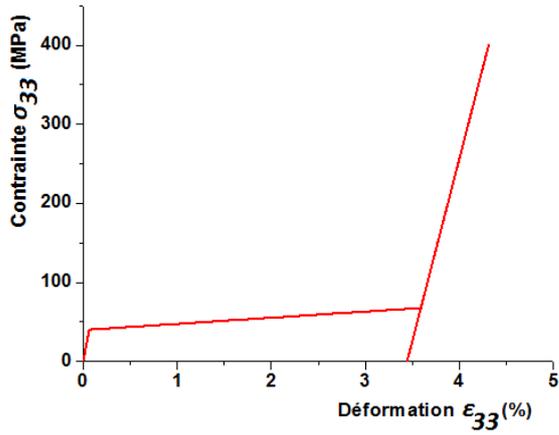


Figure IV.48. Courbe $\epsilon_{33}-\sigma_{33}$

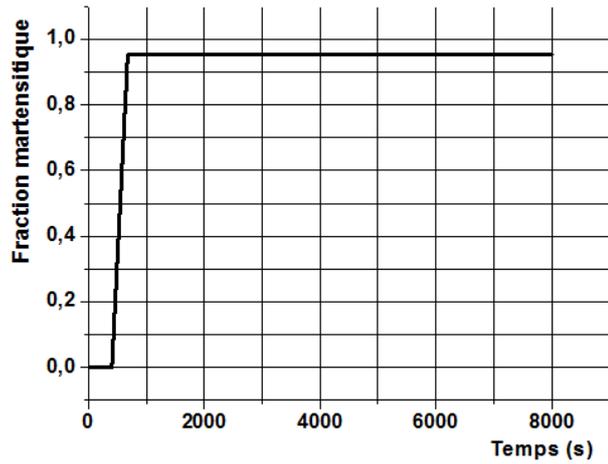


Figure IV.48. Evolution de la fraction de martensite

2) Chauffage

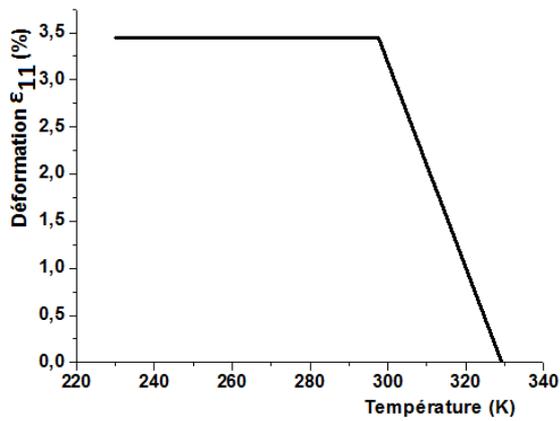


Figure IV.50. Courbe $T - \epsilon_{11}$

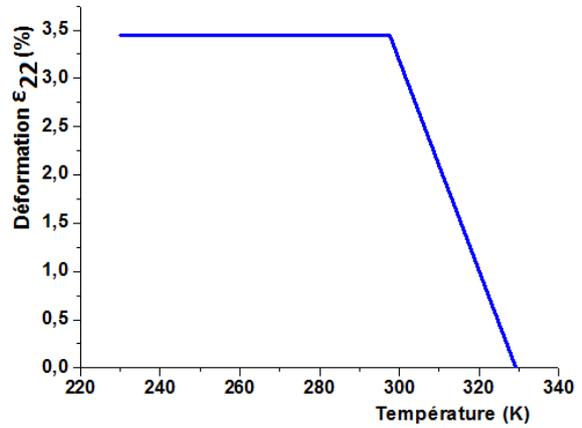


Figure IV.51. Courbe $T - \epsilon_{22}$

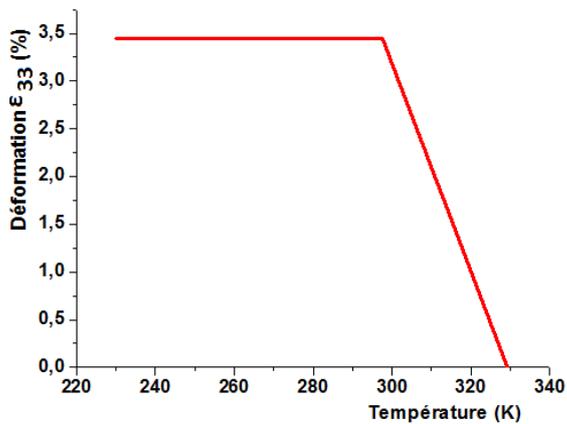


Figure IV.52. Courbe $T - \epsilon_{33}$

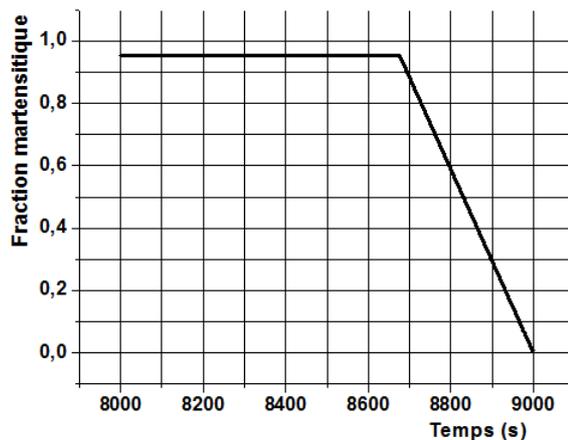


Figure IV.53. Evolution de la fraction de martensite

3) Refroidissement

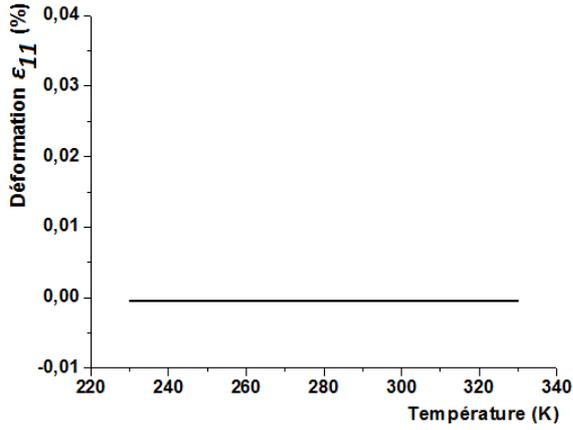


Figure IV.54. Courbe $T - \varepsilon_{11}$

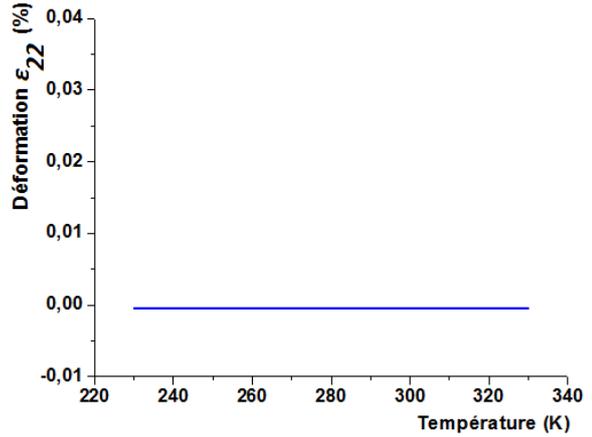


Figure IV.55. Courbe $T - \varepsilon_{22}$

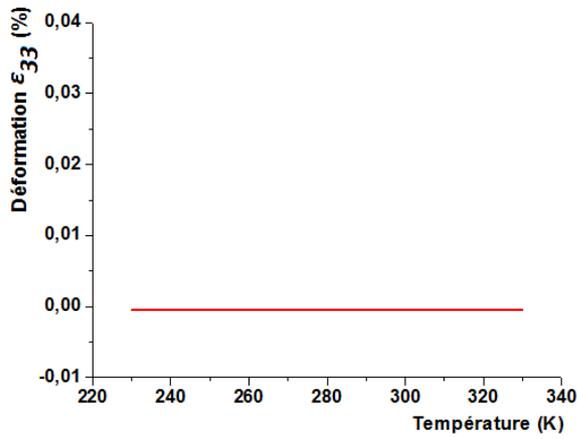


Figure IV.56. Courbe $T - \varepsilon_{33}$

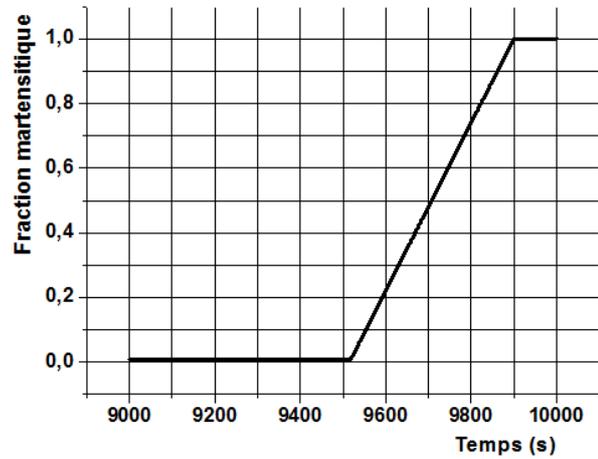


Figure IV.57. Evolution de la fraction de martensite

4) Représentation en 3D

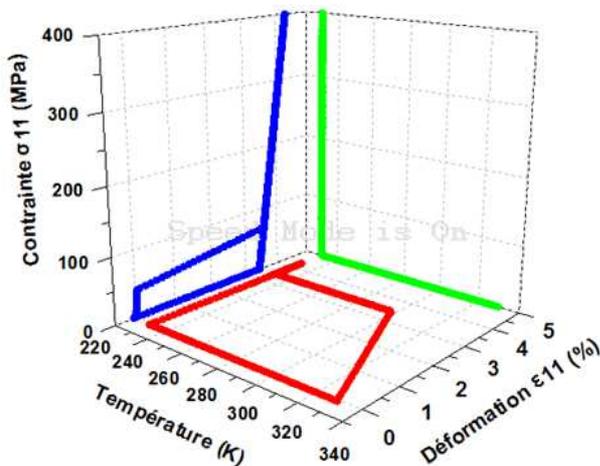


Figure IV.58. Espace $T - \varepsilon_{11} - \sigma_{11}$

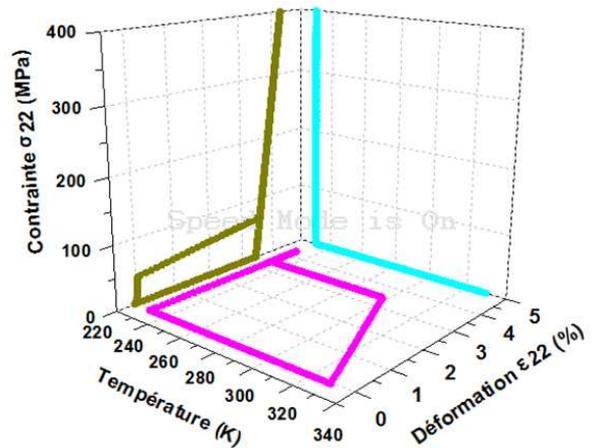


Figure IV.59. Espace $T - \varepsilon_{22} - \sigma_{22}$

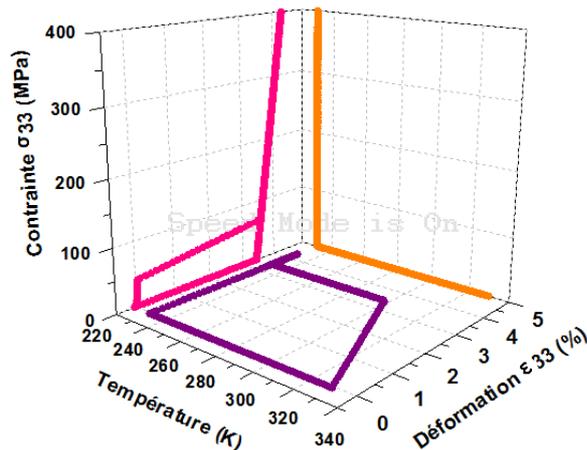


Figure IV.60. Espace $T - \varepsilon_{33} - \sigma_{33}$

E) Discussions

1) Orientation

Les figures (Fig.IV.462 ; Fig.IV.47 et Fig.IV.48) sont compatibles avec les résultats de l'essai d'orientation de la martensite nous avons une déformation élastique de la martensite non orientée suivie d'une déformation due à la transformation de la martensite non orientée en martensite orientée. La figure (Fig.IV.49) montre l'évolution de la fraction de la martensite compatible avec les 3 déformations ε_{11} ; ε_{22} ; ε_{33}

2) Chauffage

Les figures (Fig.IV.50 ; Fig.IV.51 et Fig.IV.52) montrent la dépendance des 3 déformations, résultant de la transformation martensitique, de la température car dans cette étape de l'effet de mémoire la transformation est pilotée par la température. La figure (Fig.IV.53) montre l'évolution de la fraction au cours du chauffage

3) Refroidissement

Les figures (Fig.IV.54 ; Fig.IV.55 et Fig.IV.56) montrent qu'il ne s'agit pas de transformation accompagnée de déformation mais d'une transformation de phase uniquement pilotée toujours par la température. La figure (Fig.IV.57) montre l'évolution de la fraction de martensite durant cette étape.

IV.9. Simulation numérique 3D de l'effet thermoélastique

L'élément utilisé est un cube soumis à une traction triaxiale $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_0$ (σ_0 est constante et $\sigma_0 = 50MPa$) et un chargement thermique cyclique c.à.d. un refroidissement car la phase initiale est l'austénite, suivi d'un chauffage.

A) Chargement :

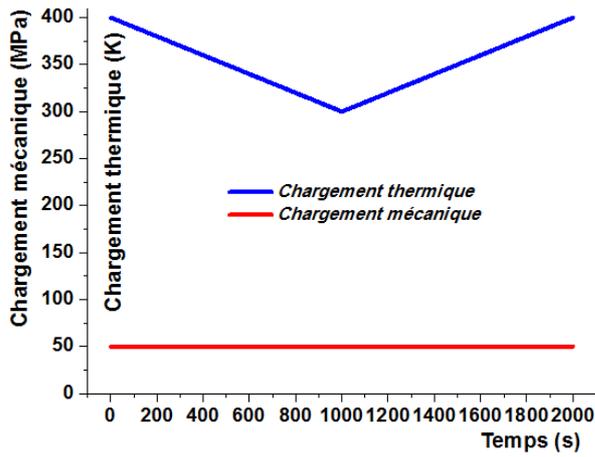


Figure IV.61. Chargement suivant x

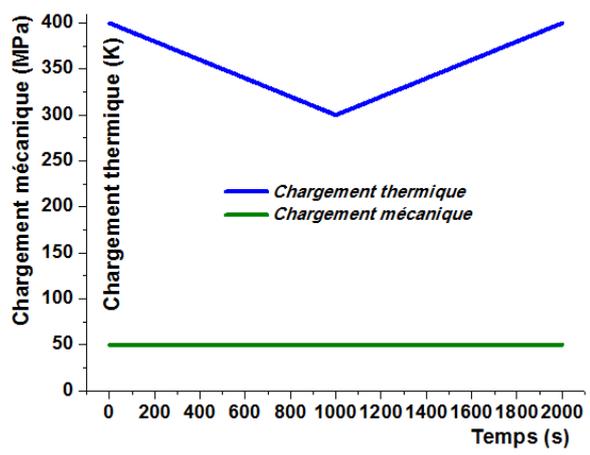


Figure IV.62. Chargement suivant y

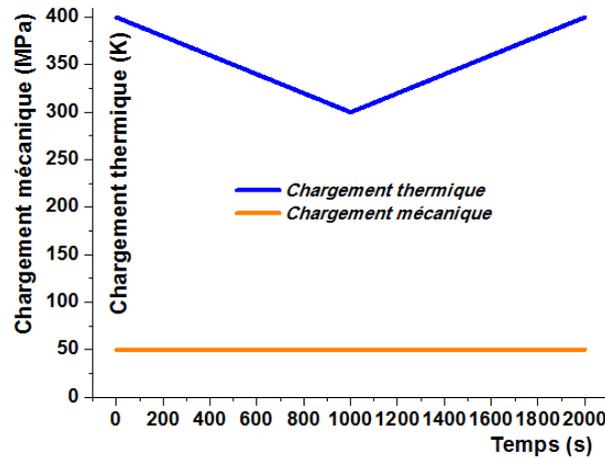


Figure IV.63. Chargement suivant z

B) Données expérimentales :

$M_s^0(K)$	313	$M_s^\sigma(K)$	324	$E_A(MPa)$	72000
$M_f^0(K)$	303	$M_f^\sigma(K)$	311	$E_M(MPa)$	70000
$A_s^0(K)$	315	$A_s^\sigma(K)$	330	ε_0	0.023937
$A_f^0(K)$	325	$A_f^\sigma(K)$	340	$H(MPa)$	0.2606751918
$B(MPa.K^{-1})$	3.258439E-02	$C(MPa)$	0.18736036121	$K(MPa)$	4.8876464E-02
ν	0.3				

Tableau IV.7. Paramètres du modèle [59]

C) Algorithme

Dans le cas de la transformation directe de l'effet thermoélastique, l'évolution de la fraction volumique de la martensite à contrainte constante a pour expression :

$$df = \frac{B.dT}{2C-k} ; (f > 0) \quad (\dot{T} < 0) \quad (4.9.1)$$

En termes finis on a :

$$\Delta f = \frac{B}{2C-K} \Delta T \quad (4.9.2)$$

Dans le cas de la transformation inverse :

$$\Delta f = \frac{B}{2C+K} \Delta T \quad (4.9.3)$$

Les équations (4.3.2) et (4.3.3) donnent les incréments de T et f .

C- Transformation directe

12- T^k, f^k

13- Calcul de $\varphi^{di}(\sigma = \sigma_1, T, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 : R - B \cdot (T - M_s^0) - C(1 - 2f) - Kf - H$

14- S'il n'y a pas de transformation : $\Delta \varepsilon = 0$ et $\Delta f = 0$

15- S'il s'agit de transformation martensitique : $\begin{cases} \Delta f = \frac{B}{(2C-K)} \Delta T & (\Delta f > 0); (\Delta T < 0) \\ \Delta \varepsilon = \Delta f \cdot \varepsilon_0 \cdot R \end{cases}$

16- $T^{k+1} = T^k + \Delta T, f^{k+1} = f^k + \Delta f, \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \Delta \varepsilon$

D- Transformation inverse

1- T^k, f^k

2- Calcul de $\varphi^{in}(\sigma = \sigma_1, T, f) = \varepsilon_0 \cdot \sigma_0 : R - B \cdot (T - M_s^0) - C(1 - 2f) + Kf + H$

3- S'il n'y a pas de transformation : $\Delta \varepsilon = 0$ et $\Delta f = 0$

4- S'il y a de transformation : $\begin{cases} \Delta f = \frac{B}{(2C+K)} \Delta T & (\Delta f < 0); (\Delta T > 0) \\ \Delta \varepsilon = \Delta f \cdot \varepsilon_0 \cdot R \end{cases}$

6- $T^{k+1} = T^k + \Delta T, f^{k+1} = f^k + \Delta f, \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \Delta \varepsilon$

D) Résultats :

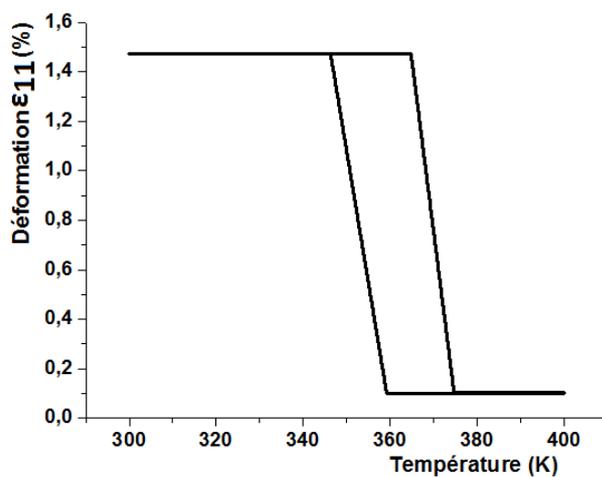


Figure IV.64. Courbe $T - \varepsilon_{11}$

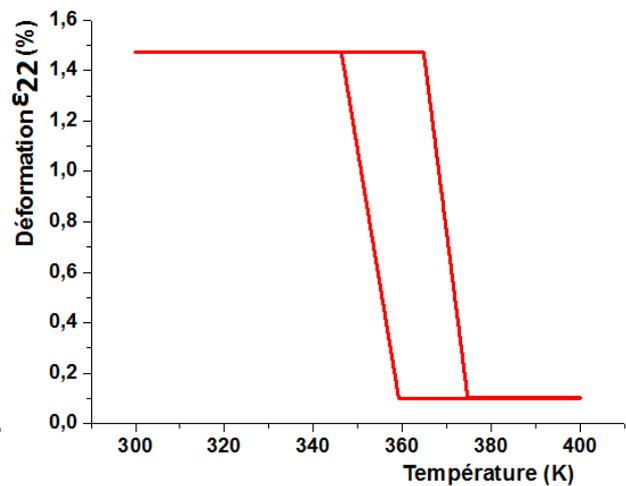


Figure IV.65. Courbe $T - \varepsilon_{22}$

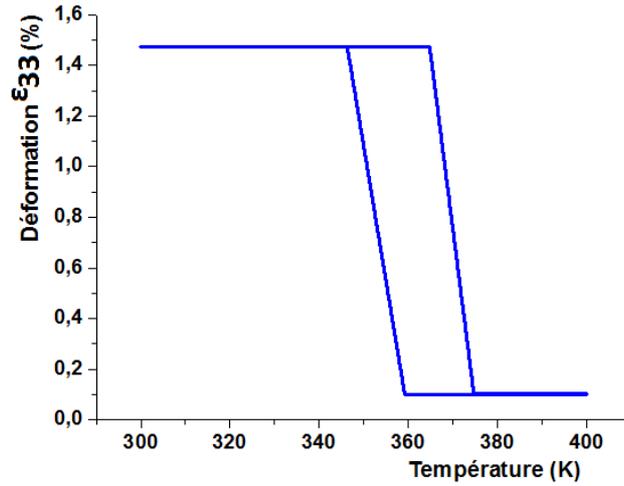


Figure IV.66. Courbe $T - \epsilon_{33}$

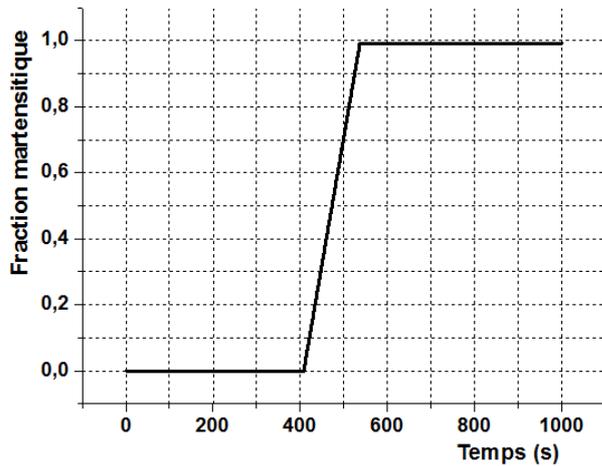


Figure IV.67. Evolution de la fraction martensitique en transformation directe

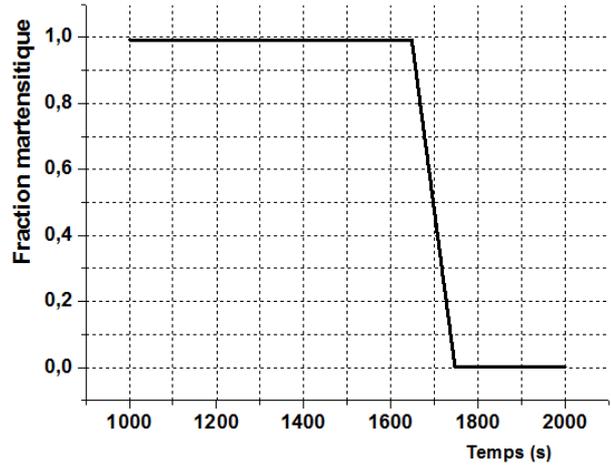


Figure IV.68. Evolution de la fraction martensitique en transformation inverse

E) Discussions

Les figures (Fig.IV.64 ;Fig.IV.65 et Fig.IV.66) montrent le cycle thermoélastique piloté par la température sous une contrainte constante, à l'exception de la déformation élastique austénitique la déformation exhibée n'est d'autre que celle de la transformation martensitique, nous jugeons que ces résultats sont compatibles avec les caractéristiques de l'effet thermoélastique.

Les figures (Fig.IV.67 et Fig.IV.68) montrent l'évolution de la fraction martensitique dans les deux cas des transformations directe et inverse, cette évolution apparaît en concordance avec la déformation macroscopique.

IV.10.Applications

Dans ce sous-chapitre nous avons utilisé Abaqus comme code de calcul par éléments finis pour simuler l'effet de pseudoélasticité dans le cas de 3D et 2D

IV.10.1.Simulation d'un tube en AMF soumis à une pression interne

A) Données

Un tube cylindrique de dimensions $\text{Ø}28 \times \text{Ø}30 \times 100$ en NiTi soumis à une pression interne $p=100\text{MPa}$.

Le tableau suivant illustre les données nécessaires à la simulation par Abaqus : [58]

σ_{Ms} (MPa)	300	A_s^0 (K)	297
σ_{Mf} (MPa)	305	A_f^0 (K)	330
σ_{As} (MPa)	100	ϵ_0	0.06106
σ_{Af} (MPa)	50	Conduc Thermique	$22\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
E_A (MPa)	25775	B (MPa.K ⁻¹)	0.18746
E_M (MPa)	18442	C (MPa)	-0.88082
M_s^0 (K)	279	K (MPa)	-1.44134
M_f^0 (K)	240	H (MPa)	8.007499
Densité	$6.45\text{E}03\text{Kg.m}^{-3}$	Chaleur massique	$329\text{J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
ν	0.3		

B) Maillage et chargement

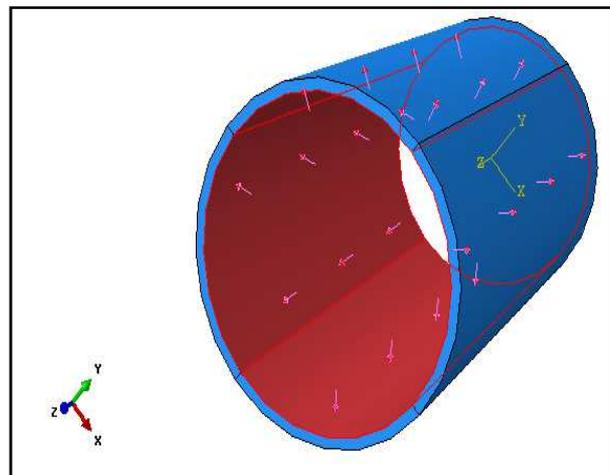
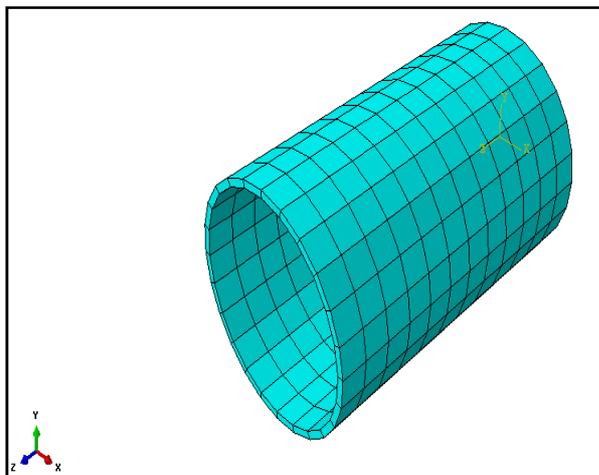


Figure.IV.69.Maillage

Figure.IV.70.Chargement mécanique

C) Résultats

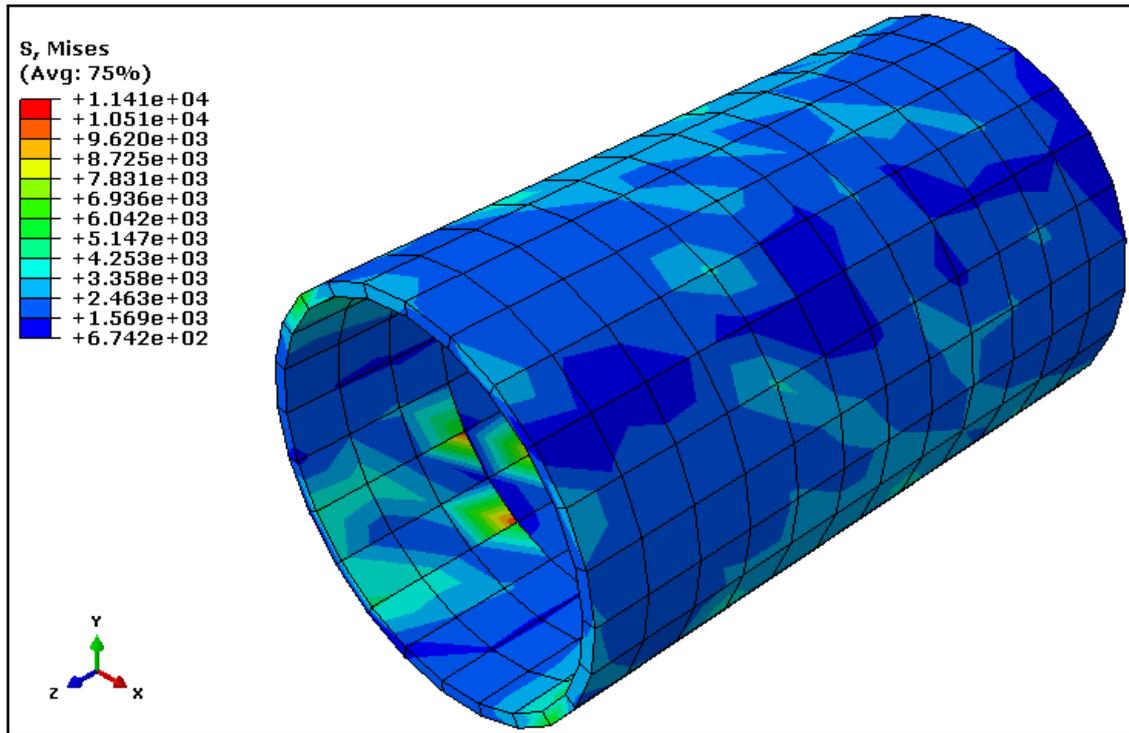


Figure.IV.71. Distributions des contraintes de Von Mises (Step1)

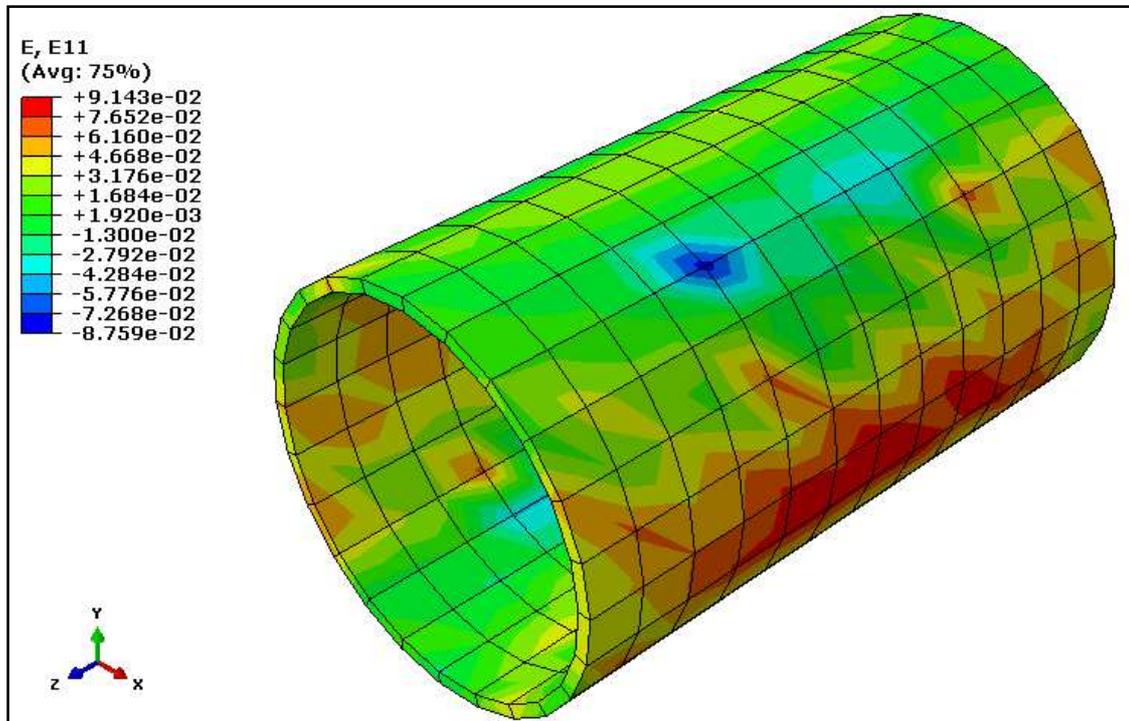


Figure.IV.72. Distribution des déformations ϵ_{11} (Step1)

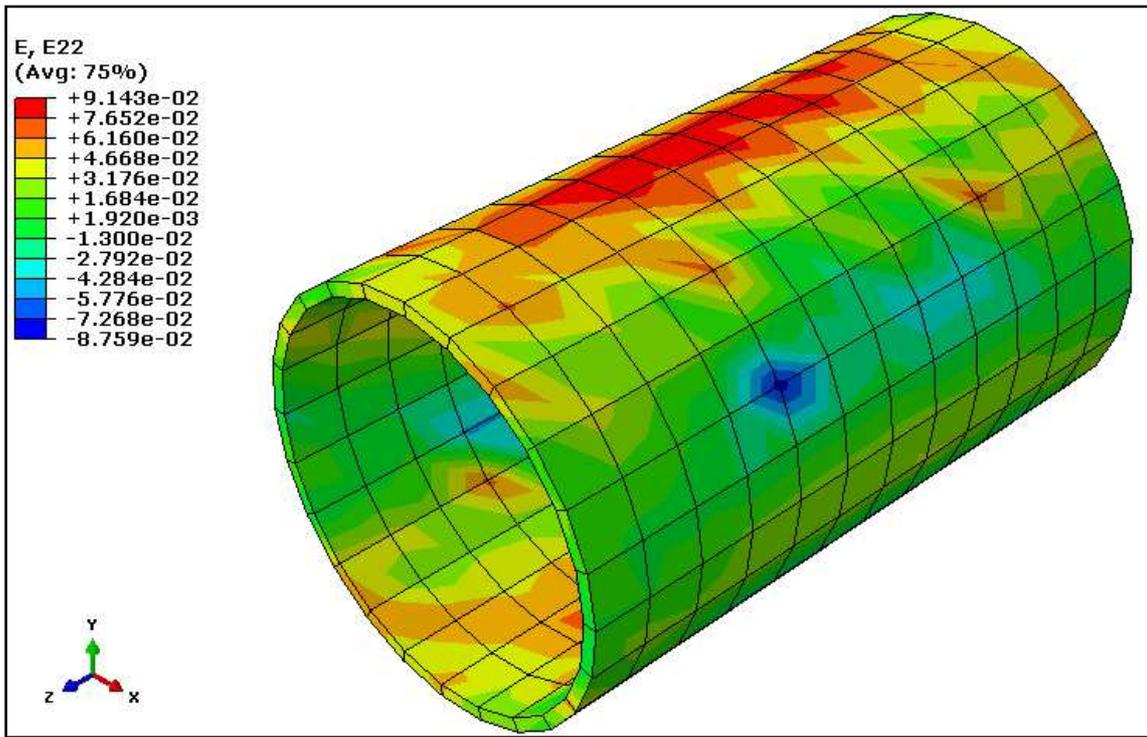


Figure.IV. 73. Distribution des déformations ε_{22} (Step1)

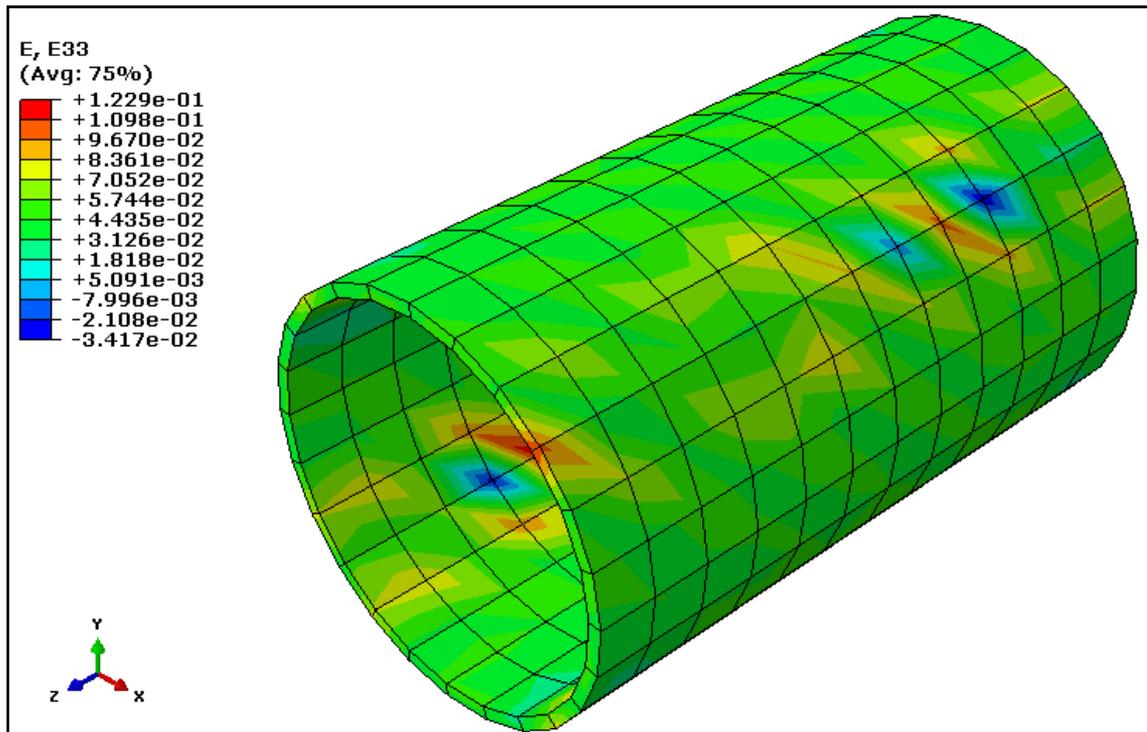


Figure.IV. 74. Distribution des déformations ε_{33} (Step1)

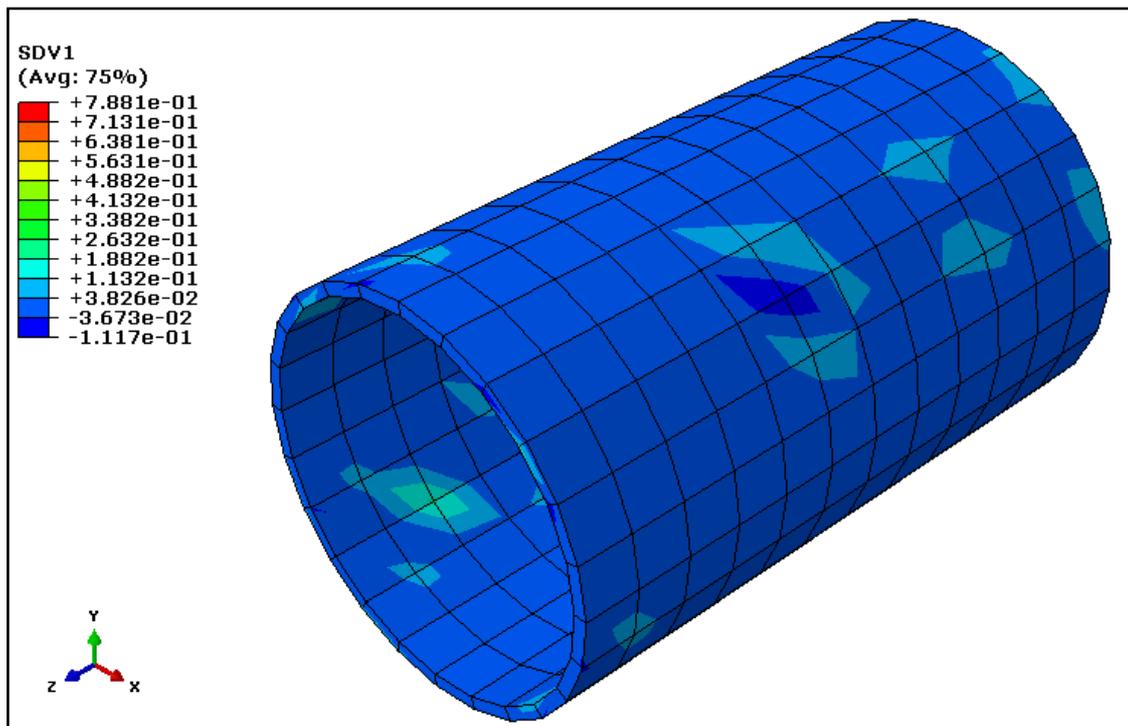


Figure.IV. 75. Distribution de la fraction volumique de la martensite (Step1)

D) Discussions

Les figures (Fig.IV.72 et Fig.IV.73) montrent les valeurs de ε_{xx} et ε_{yy} relativement élevées de l'ordre de 0.09 , mais la valeur élevée de ε_{zz} est remarquée dans la figure (Fig.IV.74) de l'ordre de 0.12 grâce aux propriétés thermomécaniques du matériau. La figure (Fig.IV.75) montre la valeur maximale de 0.788 de la fraction volumique de la martensite, cela veut dire qu'il n'y a pas de transformation complète d'austénite en martensite

IV.10.2.Comparaison entre deux poutres l'une en AMF soumis à un effet pseudoélastique ($T=T_1$) et l'autre en martensite (non transformée) ($T < M_s^0$)

A) Données

Les caractéristiques mécaniques de l'acier : $E=200000MPa$, $\nu=0.3$ (En considérant uniquement l'élasticité)

Les caractéristiques mécaniques de l'AMF sont celles considérées dans le cas de la simulation

3D de l'effet pseudoélastique, le chargement mécanique est un effort $\vec{F} = \begin{cases} F_x = -1000N \\ F_y = 1000N \\ F_z = 0 \end{cases}$

La poutre est de dimensions 10x10x100. Ces données citées précédemment seront appliquées dans les deux cas

B) Maillage, chargement mécanique avec conditions aux limites

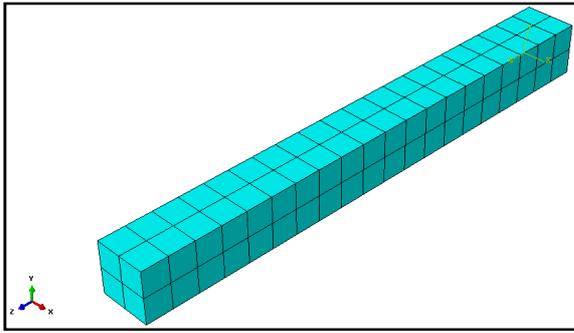


Figure.IV. 76. Maillage

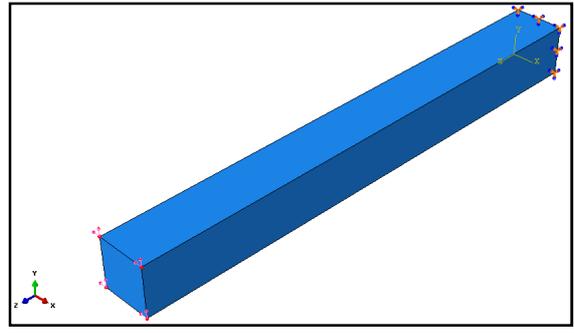


Figure.IV. 77. Chargement mécanique avec conditions aux limites

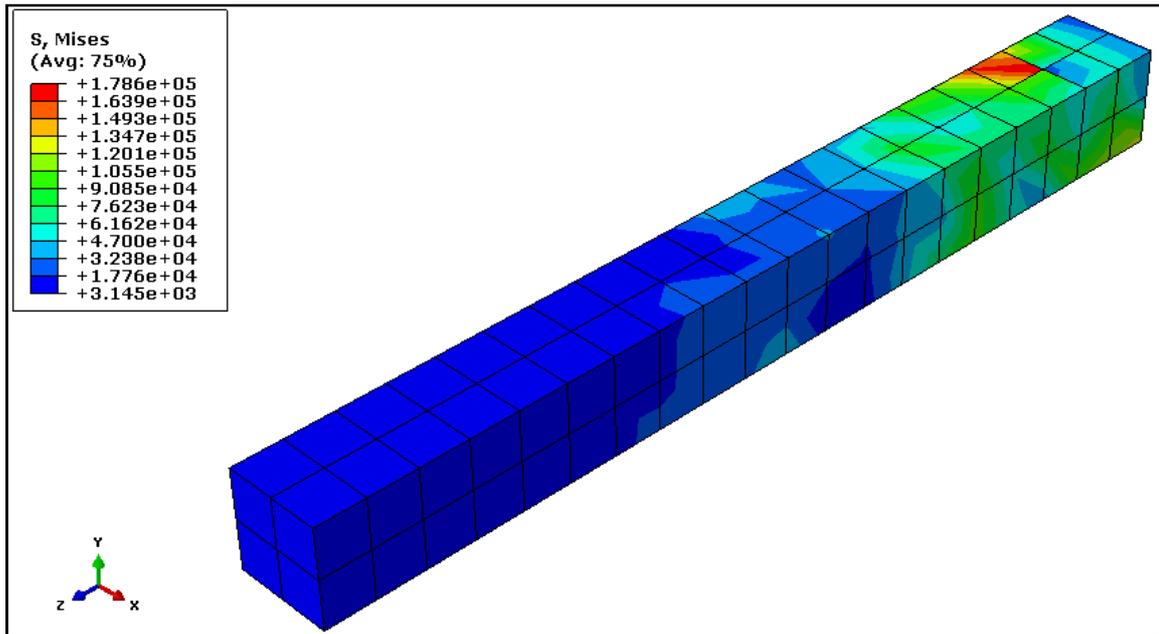


Figure.IV. 78 Distribution des contraintes de Von Misés de la poutre en AMF

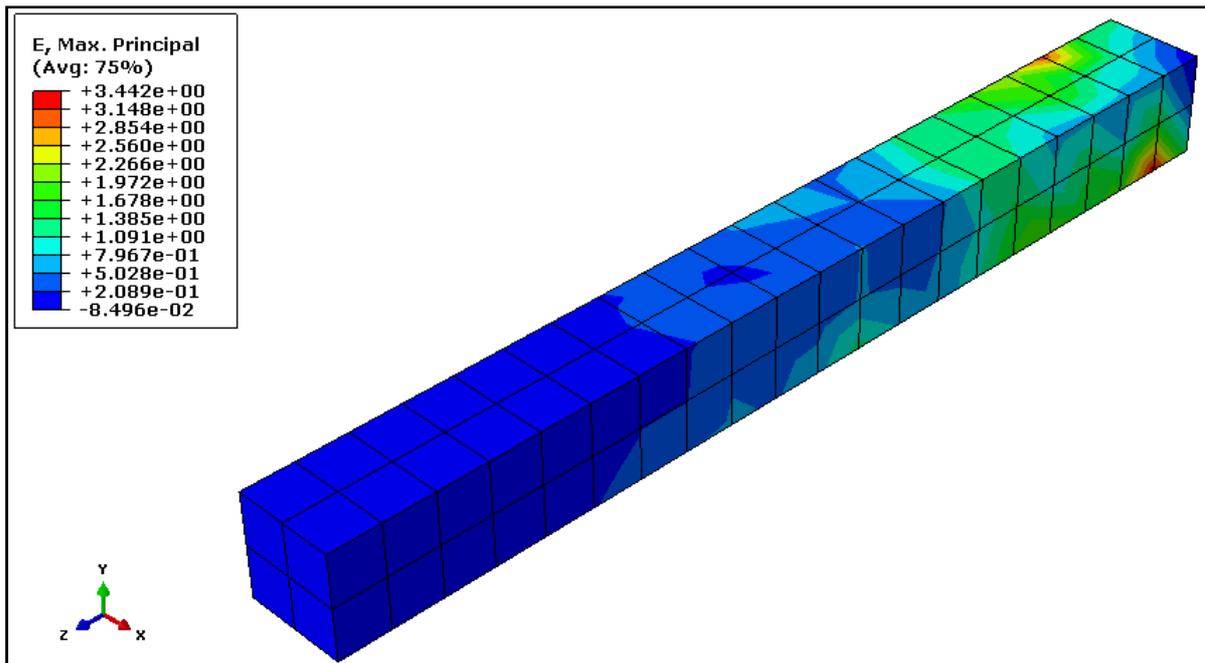


Figure.IV. 79. Distribution des déformations maximales principales de la poutre en AMF

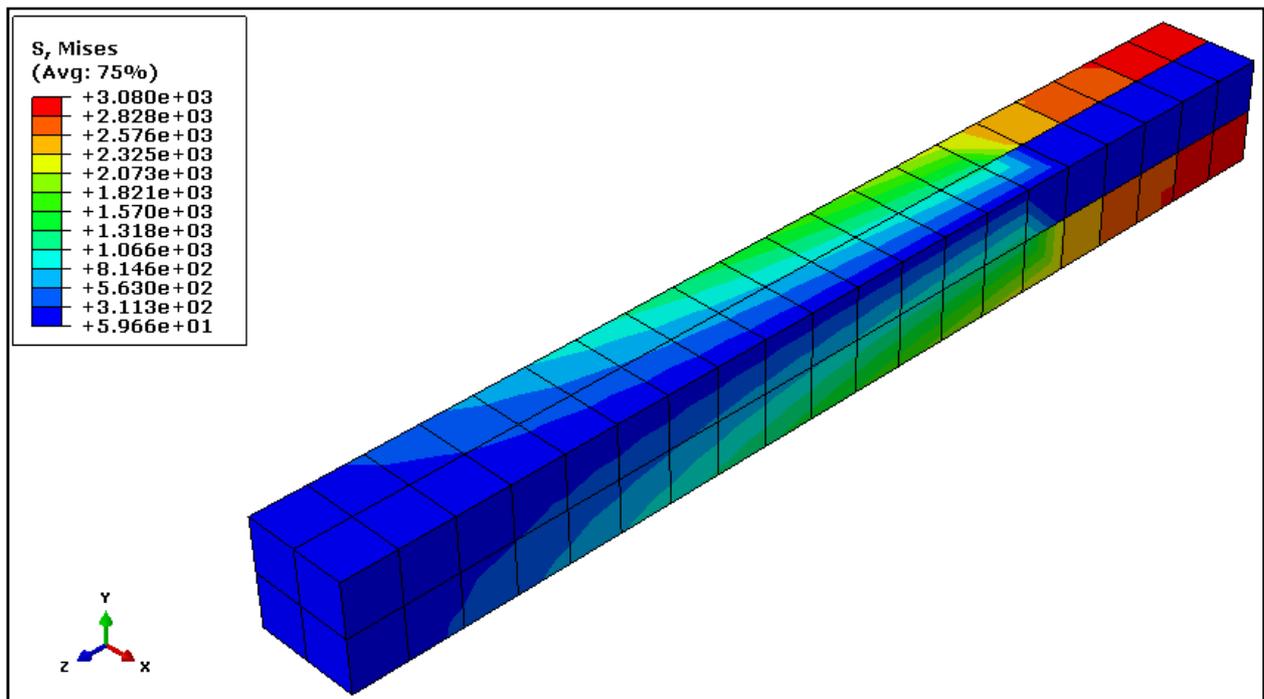


Figure.IV. 80. Distribution des contraintes de Von Misés de la poutre de la poutre en martensite

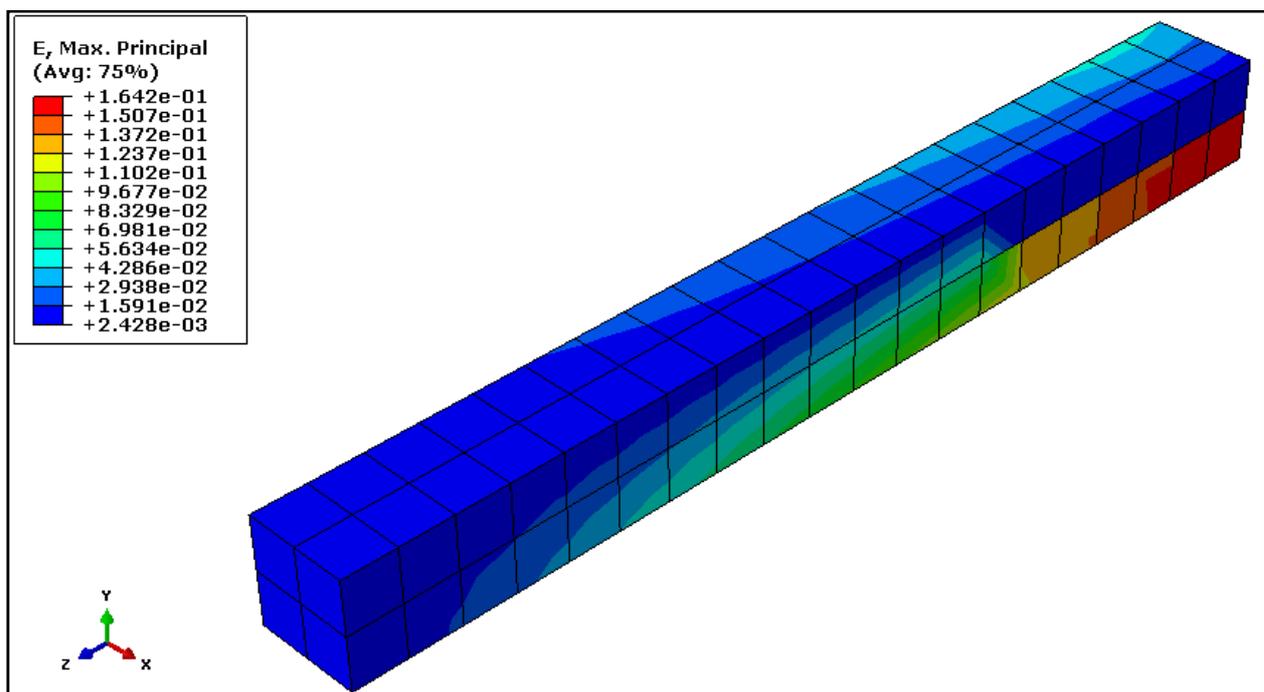


Figure.IV. 81. Distribution des déformations maximales principales de la poutre en acier

D) Discussions

Dans le cas de la poutre en martensite on observe des valeurs de l'ordre de 3000MPa pour les contraintes équivalentes et 0.016 pour les déformations maximales principales en déformation élastique tandis que dans le cas de la poutre en AMF des valeurs de contraintes équivalentes

pouvant atteindre 178600MPa et des déformations maximales atteignant 3.44 (environ 20 fois plus grande que celle de la martensite en élasticité).

L'ampleur des valeurs des contraintes équivalentes est due principalement à la transformation martensitique qui provoque une déformation non linéaire mais réversible la reliant à la contrainte par une complaisance non linéaire.

IV.10.3.Simulation d'une plaque en AMF

Il s'agit ici d'une plaque rectangulaire de 50x100x1 en NiTi soumise à une traction

$$\vec{F} = \begin{cases} F_x = -200N \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases}$$

A) Données

Les données relatives au matériau sont regroupées dans le tableau suivant : [58]

$\sigma_{M_s} (MPa)$	300	$A_s^0 (K)$	297
$\sigma_{M_f} (MPa)$	305	$A_f^0 (K)$	330
$\sigma_{A_s} (MPa)$	100	ε_0	0.06106
$\sigma_{A_f} (MPa)$	50	Conduc Thermique	$22W.m^{-1}.K^{-1}$
$E_A (MPa)$	25775	$B (MPa.K^{-1})$	0.18746
$E_M (MPa)$	18442	$C (MPa)$	-0.88082
$M_s^0 (K)$	279	$K (MPa)$	-1.44134
$M_f^0 (K)$	240	$H (MPa)$	8.007499
Densité	$6.45E03Kg.m^{-3}$	Chaleur massique	$329J.Kg^{-1}.K^{-1}$
ν	0.3		

B) Maillage et chargement avec conditions aux limites

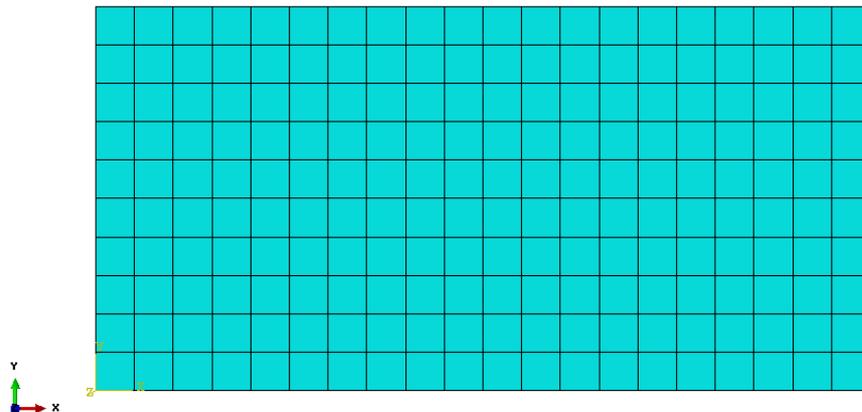


Figure.IV.82. Maillage

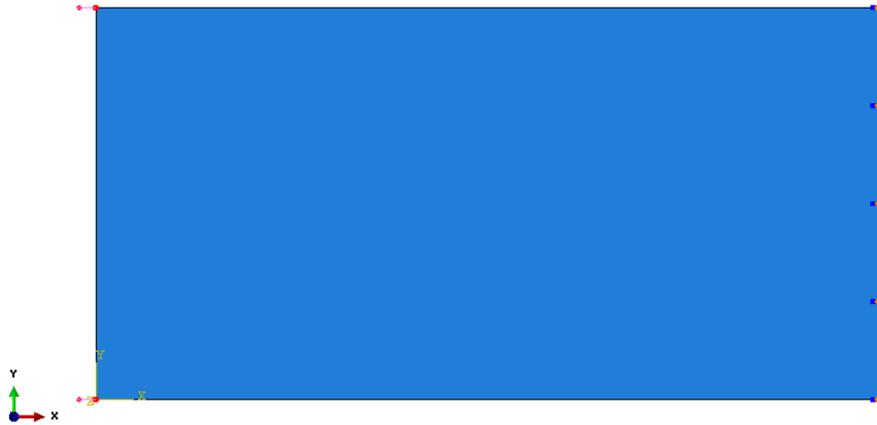


Figure.IV.83. Chargement mécanique et conditions aux limites

C) Résultats

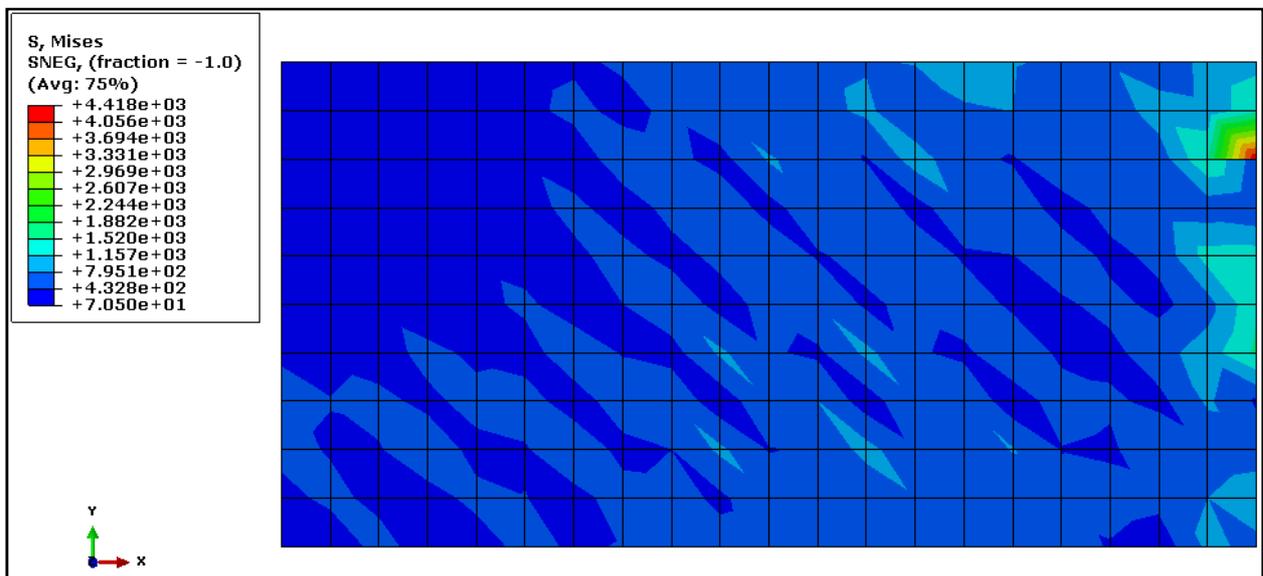


Figure.IV.84. Distribution des contraintes de Von Mises (Step1)

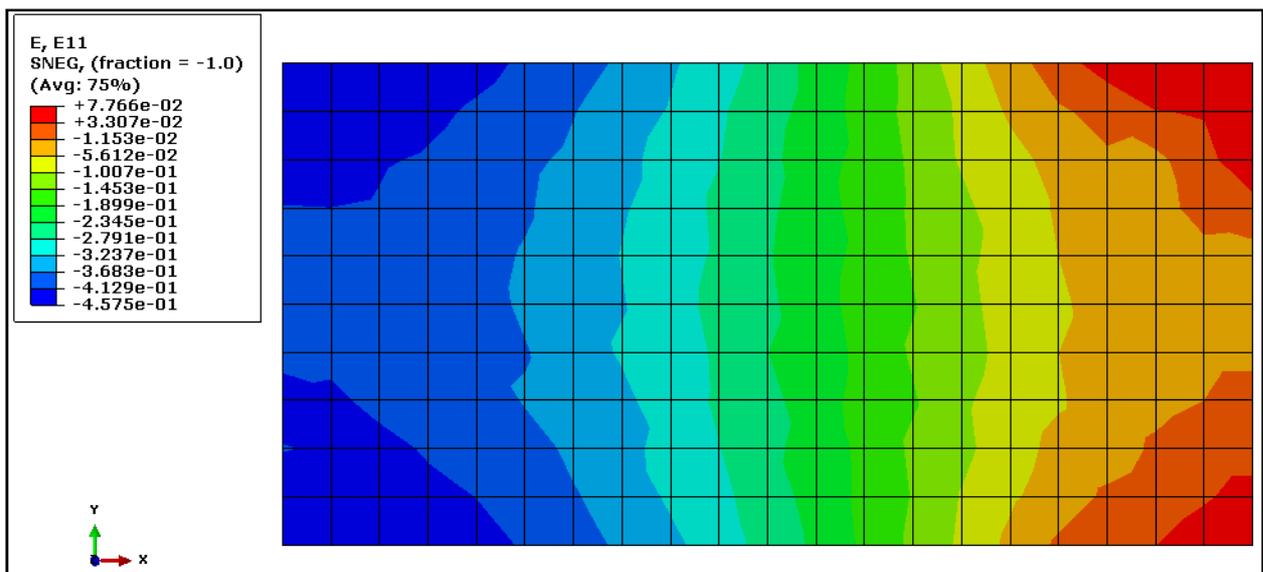


Figure.IV.85. Distribution des déformations ϵ_{11} (Step1)

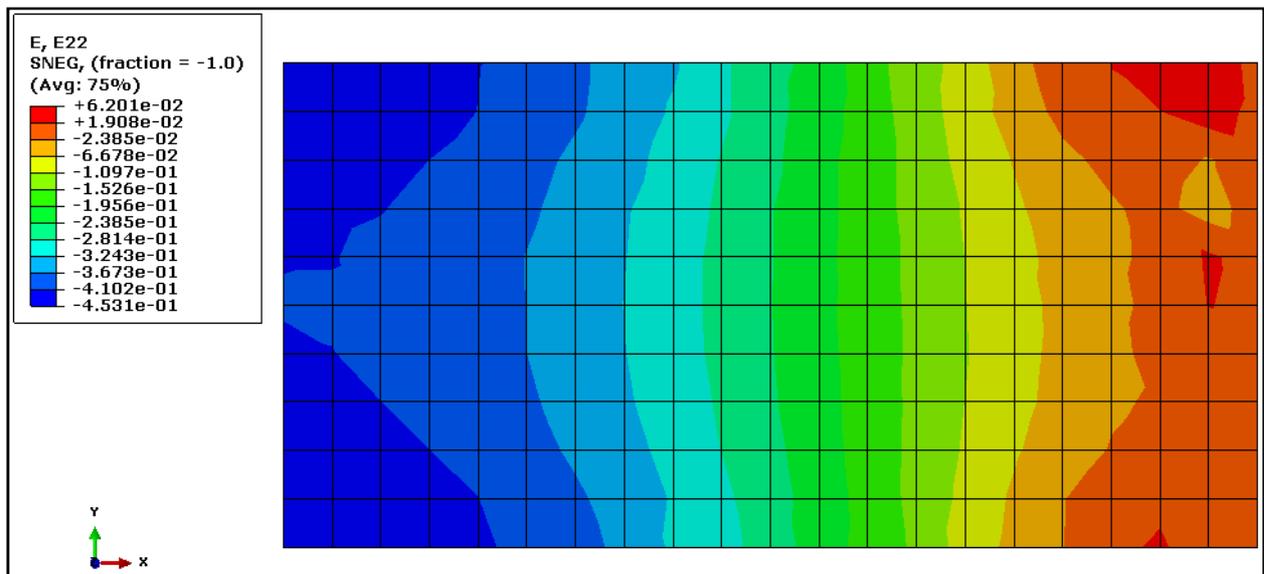


Figure.IV.86.Distribution des déformations ε_{22} (Step1)

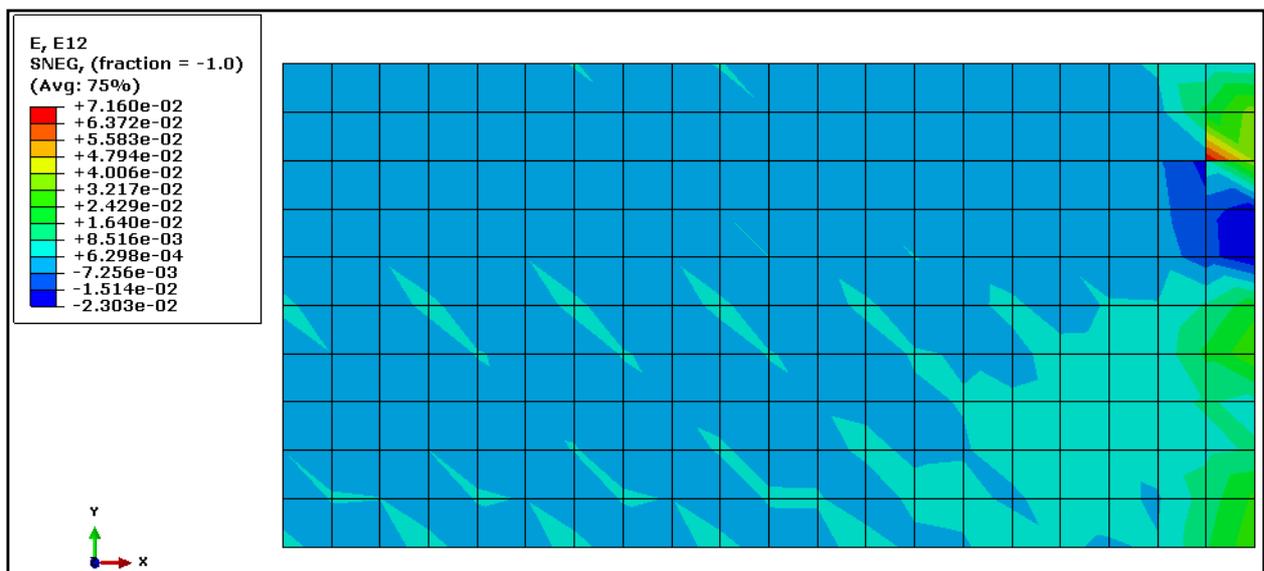


Figure.IV.87.Distribution des déformations ε_{12} (Step1)

D) Discussion

Comme il a été commenté dans le cas précédent la relation entre la déformation et la contrainte qui n'est d'autre que la complaisance est responsable de la hausse des contraintes, malgré la géométrie de la plaque les déformations atteignent les limites de 0.07 à cause de la transformation martensitique.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail nous avons décrit dans le premier chapitre les différentes facettes du comportement singulier des alliages à mémoire de forme et les mécanismes intervenants lors du changement de phase, cela nous a permis de nous situer vis-à-vis de la problématique qu'on rappelle qu'elle est la modélisation du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme. Le comportement élastique des matériaux conventionnels nous a appris que la déformation est l'effet de la contrainte mais le couplage de la contrainte et de la température et leur application aux alliages à mémoire de forme fait apparaître que la déformation obtenue est l'effet de la contrainte et de la température ou séparément.

Dans le deuxième chapitre nous avons vu les types de modèles existants qui décrivent le comportement de ces matériaux, nous avons cité quelques modèles appartenant aux différentes catégories mentionnées, cela nous a indiqué la voie principale menée par les auteurs pour construire leurs modèles, les principes de la thermodynamique jouent le rôle de pilier de tels modèles. Ces principes insérés dans un formalisme donné permettent d'écrire des équations pouvant gouverner la transformation de phase displacive (non diffusive).

Le troisième chapitre est la partie où la problématique est traitée, nous avons commencé par la modélisation unidimensionnelle des effets étudiés pour sa simplicité. La démarche adoptée a permis d'écrire des équations constitutives qui peuvent contrôler le déroulement de la transformation de la martensite en austénite ou inversement. Nous avons pu construire un algorithme que nous avons implémenté dans le langage de programmation FORTRAN, finalement les résultats obtenus par la simulation numérique coïncidaient bien avec les résultats expérimentaux. Cette concordance valide le modèle unidimensionnel construit relatif à chacun des effets étudiés. Pour avoir plus de crédibilité nous avons implémenté le modèle pour chacun des cas dans Abaqus et la simulation apparaît proche à celle réalisée par FORTRAN. Cette expérience avec le cas unidimensionnel nous a poussés à étendre l'approche adoptée aux cas tridimensionnel et bidimensionnel, nous avons modélisé les effets de pseudoélasticité, thermoélastique, et l'effet simple de mémoire. La simulation numérique avec FORTRAN a montré des résultats compatibles avec les particularités de chaque effet. Enfin nous avons essayé d'implémenter le modèle 3D dans Abaqus pour simuler l'effet pseudoélastique dans plusieurs cas. Ce qui a été mentionné précédemment nous permet de juger que la modélisation réalisée dans ce travail a pu décrire le comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme peut être exploitée dans le domaine d'engineering.

Références

- [1] : Chang L. C. and Read T. A. Trans AIME, Vol. 191, p. 47, 1951.
- [2]: Otsuka, K. and Wayman, C.M., Eds.. Shape Memory Materials. Cambridge, U.K., Cambridge University Press. 1998
- [3]: Buehler W.J., Gilfrich J.V. and Wiley R.C., J. Appl. Phys., Vol.34, p. 1475, 1963.
- [4]: Lebreton. C. Alliages à memoires de forme NiTi; Fiche matériau. Techniques de l'ingénieur, 2003
- [5] : Benoit V. De l'élaboration d'un modèle numérique à la prédiction du comportement de structures minces en alliages à mémoire de forme. Thèse de doctorat, Université Franche Comté, 2003
- [6]: Cohen M., Olson G.B., Clapp P.C., On the classification of displacive phase transformations, Proceedings of the International Conference On Martensitic Transformation, USA, 1979
- [7] : Wayman C. M., Otsuka K., Shape memory materials, Cambridge University Press, 1999
- [8] : Olson G.B., Owen W.S., Martensite, ASM International, 1992
- [9] : Van Humbeeck J., La transformation martensitique, Patoor E, Berveiller M, Technologie des alliages à mémoire de forme, Editions HERMES 1994
- [10] : Philibert J., Vignes A., Bréchet Y, Combrade P., Métallurgie, du minerai au matériau, Edition Masson, 645-673, 1998
- [11] : Guenin G., Alliages à mémoire de forme, Techniques de l'Ingénieur, dossier M530, 1986
- [12]: Shaw J. A. et Kyriakides S., Thermomechanical aspects of NiTi, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol.43, no8, p.1243–1281, 1995.
- [13]: MC Naney J., Imbeni V., Papadopoulos Jung Y., P. et Ritchie R., An experimental study of the superelastic effect in a shape-memory Nitinol alloy under biaxial loading, Mechanics of Materials, vol.35, p.969–986, 2003.
- [14] : Muller I. , Seelecke S., Thermodynamic aspects of shape memory alloys, Mathematical and Computer Modelling, vol.34, p.1307–1355, 2001.
- [15]: Peultier B., Alliages à mémoire de forme: Modélisation et calcul de structures, Thèse de doctorat, ENSAM, 2005
- [16] : Lagoudas, D. C ., Shape Memory Alloys: Modeling and Engineering Applications, Springer 2008
- [17]: Bourbon G., Contribution à l'étude isotherme et anisotherme du comportement cyclique des AMF, thèse de doctorat, université de Franche-Comté, 1994

- [18] : Duval A., Modélisation du comportement thermomécanique d'alliages à mémoire de forme. Application au dimensionnement de Microsystèmes et extension en non local, thèse de doctorat, université Henri P., 2009
- [19] : Miller D. A., Lagoudas D. C., Thermo-mechanical characterization of NiTiCu and NiTi SMA actuators: Influence of plastic strains, *Smart Materials and Structures* 9(5)(2000)640–652
- [20] : Kaouache B., Analyse de multiechelles de la transformation martensitique induite par contrainte dans les alliages à mémoire de forme corrélation contrainte-microstructure. Thèse de doctorat, ENSAM de Metz, 2006
- [21] : Ninomi M., Recent research and development in titanium alloys for biomedical applications and healthcare goods, *Science and Technology of Advanced Materials*, (2003). pp. 445-454.
- [22] Mantovani D., Shape Memory Alloys: Properties and Biomedical Applications, *Journal of the Minerals, Metals & Materials Society* (2000) pp. 36-44.
- [23] : <http://www.nimesis.com>
- [24] : Patoor E., Comportement et applications des alliages à mémoire de forme, Séminaire Matériaux, IN2P3, 2006
- [25] : Orgéas L., Favier D., Non-symmetric tension-compression behaviour of NiTi alloy. *Journal de Physique IV C8:605 610.*,1995.
- [26]: Duerig T., Pelton A., Stockel D., An overview of nitinol medical applications, *Materials Science and Engineering A273–275* (1999) 149–160
- [27]: <http://www.cts.usc.edu/zglossary-stent.html>
- [28]: Tanaka, K. A thermomechanical Sketch of Shape Memory Effect: One dimensional Tensile Behavior. *Res.Mech.*,18:251–263 (1986)..
- [29]: Falk F., Model free energy, mechanics and thermodynamics of shape memory alloys, *Acta Met.*, Vol. 28,p. 1773-1780, (1980)
- [30]: Landau L. D., Lifschitz E. M., *Statistical Physics*, 2nd edition, Pergamon, New York.
- [31]: Wechsler M., Lieberman D., Read T., On the theory of the formation of martensite, *J. of Metals*, 197, p. 1503-1515, 1953
- [32]: Bhattacharya K., Crystallographic attributes of a shape memory alloy, *J. Engineering Materials and Technology*, Vol. 121, p. 93-97, 1999
- [33]: Ball J., James R., Proposed experimental tests of a theory of fine microstructure and the two-well problem, *Phil. Transactions of the royal Society, Series A* 338, p. 389-450, 1992
- [34]: Abeyaratne R., Knowles J. K. , A continuum model of a thermoelastic solid capable of undergoing phase transitions, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, p. 541-571, 1993

- [35]: Patoor E., Eberhardt A., Berveiller M., Thermomechanical modelling of shape memory alloys, Arch. Mech., Vol. 40, p.755-794, 1988
- [36]: Patoor E., Eberhardt A., Berveiller M., Micromechanical modelling of superelasticity in shape memory alloys, Pitman Research Notes in Mathematics, 296, p.38-54, 1993
- [37]: Goo B., Lexcelent, Micromechanics-based modeling of two way memory effect of a single crystalline shape memory alloys, Acta Materialia, Vol. 45, p.729-739,1997
- [38]: Sun Q. P., Hwang K. C., Micromechanics modelli for the constitutive behaviour of polycrystalline shape memory alloys,Part I. Derivation of general relations, J. Mech. Phy. Solids, Vol, p. 1-17,1993
- [39]: Sun Q. P., Hwang K. C., Micromechanics modelling for the constitutive behaviour of polycrystalline shape memory alloys,Part II. Study of the individual phenomena, J. Mech. Phy. Solids, Vol 41, p. 19-33, 1993
- [40]: Huang M., Brinson L. C., A multivariant model single crystal shape memory alloy behaviour, J. Mechanics and Physics of Solids, Vol. 46,p. 1370-1409, 1998
- [41]: Boyd J. G., Lagoudas D. C., A thermodynamical constitutive model for shape memory materials Part I The monolithic shape memory alloy, Int J. of Plasticity, Vol. 12, n°6, p 805-842, 1996
- [42]: Lexcelent C., Vivet A., Bouvet C., Calloch S., Blanc P., From the lattice measurements of the austenite and martensite cells to the prediction of the yield phase transformation surface of some shape memory polycrystals, EMMC5, 2001, Delft, à paraître
- [43]: Huang W., Yield surface of shape memory alloys and their applications, Acta. Mater, Vol. 47, n° 9, p. 2769-2776, 1999
- [44]: Boyd J.G., Lagoudas D. C., Thermomechanical response of shape memory composites. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 5 (3), 333-346.,1994
- [45]: Boundaries E., Way man C. M., Some stress-strain-temperature relationships for shape memory alloys .Metallurgical Transaction A 19A, 2407-2413, 1988
- [46]: Liang C.,Rogers C. A., One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 1(2), 207-234,1990
- [47]: Brinson,L.C.,1993.One-dimensional constitutive behaviour of shape memory alloys: Thermomechanical derivation with non constant material functions and reddened martensite internal variable. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 4(2), 229-242, 1993
- [48]: Lagoudas D. C., Bo Z., Qidwai M.A.,A unified thermodynamic constitutive model for SMA and finite element analysis of active metal matrix composites. Mech. Composite Mater. Struct.3, 153–179. 1996

- [49]: Raniecki B., Lexcellent C., .Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys. *Eur. J. Mech. A/Solids* 17(2), 185–205. 1998
- [50]: Qidwai M.A., Lagoudas D. C.,. On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material. *Int. J. Plasticity* 16, 1309–1343. 2000b
- [51]: Lexcellent C., Vivet A., Bouvet C., Calloch S., Blanc P., Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformations under biaxial loading in some polycrystalline shape memory alloys. *J. Mech. Phys. Solids* 50(12), 2717–2735, 2002
- [52]: Brinson L. C., One dimensional constitutive behaviour of shape memory alloy thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefine martensite internal variable, *J. Int. Mat. Syst. and Struct*, Vol. 4, pp. 229-242., 1993
- [53]: Souza A. C., Mamiya E. N., Zouain N., Three dimensional model for solids undergoing stress-induced phase transformations *European Journal of Mechanics, A: Solids*, vol.17, pp.789-806,1998
- [54]: Auricchio F., Petrini L., A three dimensional model describing stress-temperature induced solid phase transformations. PartI: solution algorithm and boundary value problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.61, pp.807–836,2004
- [55]: Patoor E., Eberhardt A., Berveiller M.,Micromechanical modelling of superelasticity in shape memory alloys. *J. Phys. IV* 6, 277-292. 1996
- [56] : Robertson S. W., Pelton A. R., Ritchie R. O., Mechanical fatigue and fracture of Nitinol, *International Materials Reviews*, Volume 57, N°1, January 2012 , pp. 1-37(37)
- [57] : Arnaud Duval, Modélisation du comportement thermomécanique d’alliages à mémoire de forme. Application au dimensionnement de microsystèmes et extension en non local, Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, 2009
- [58] : Ng K.L., Sun Q.P., Stress-induced phase transformation and detwinning in NiTi polycrystalline shape memory alloy tubes, *Journal of Mechanics of Materials*, 2006, 38,41–56
- [59] : Bourbon G., Lexcellent C., Leclercq S.,. Modeling of the non-isothermal cyclic behavior of a polycrystalline Cu-Zn-Al shape memory alloy. *Journal de Physique IV* 5, C8–(221–226) (1995).