



Université Batna 2 – Mostefa Ben Boulaïd
Faculté de Technologie
Département d'Electronique



Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de :
Doctorat en Sciences en Electronique
Option : Contrôle

Sous le Thème :

Construction d'une Ondelette Fractionnaire Adaptative
Appliquée au Traitement de Signal et au Traitement
d'Image

Présentée par :

LANANI Abderrahim

Devant le jury composé de :

M. BOULEMDEN Mouhamed	Prof.	Université de Batna 2	Président
M. MEGHRICHE Salama	MCA	Université de Constantine 3	Rapporteur
M. BENATIA Djamel	Prof.	Université de Batna 2	Examineur
M. BENABDELKADER Souad	MCA	Université de Batna 2	Examineur
M. BOUOUDEN Sofiane	Prof.	Université de Khenchela	Examineur
M. DRAA Amer	MCA	Université de Constantine 2	Examineur

Mars 2020

*À tous ceux qui m'ont nourri
de leur amour et de leur tendresse.*

Remerciements

Au moment où je présente cette thèse de doctorat, je voudrais remercier avec une très grande sincérité tous les institutions et les personnes qui m'ont apporté leur aide et le soutien nécessaire à sa réalisation. A commencer par rendre hommage à l'université de Khenchela pour leur soutien financier.

Cette thèse a été effectuée au sein de la faculté de technologie - Université de Batna 2 - où je leurs adresse mes sincères remerciements.

Je tiens à témoigner ma profonde gratitude à ma directrice de thèse, Madame MEGHRICHE Salama, Maitre de conférences à l'université de Constantine 3 pour l'encadrement attentionné et le soutien constant qu'elle m'a apporté durant ces années de thèse. Je la remercie fortement pour ses qualités humaines, sa grande disponibilité, sa patience, sa gentillesse, ses précieux conseils, et de m'avoir bénéficié de sa haute compétence professionnelle.

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur BOULEMDEN Mouhamed Professeur à l'université de Batna 2, pour l'honneur qu'il m'a fait de présider mon jury. Je remercie sincèrement Monsieur BENATIA Djamel Professeur à l'université de Batna 2, Monsieur BOUOUDEN Sofiane Professeur à l'université de Khenchela, Madame BENABDELKADER Souad Maitre de conférences à l'université de Batna 2 et Monsieur DRAA Amer Maitre de conférences à l'université de Constantine 2. Qui m'ont fait le grand plaisir d'être les examinateurs de ma thèse.

J'adresse mes remerciements les plus distingués au personnel du Laboratoire CReSTIC – IUT de Troyes, université de Reims – France –, qui m'ont accueilli plusieurs fois durant ces années de thèse et notamment à Monsieur Frédéric MORAIN-NICOLIER Professeur à l'IUT de Troyes et responsable de l'équipe DOMOTIC, et à mon cher amie Docteur Jérôme LANDRÉ Maître de conférences à l'IUT de Troyes, pour leur aide, les discussions que nous avons eues et leurs précieux conseils.

J'adresse un grand merci à Monsieur DJOUAMBI Abdelbaki Professeur à l'université d'Oum El Bouaghi pour son aide, il m'a fait découvrir le monde fantastique du calcul fractionnaire et m'a aidé à réaliser ce travail de doctorat avec ses compétences scientifiques, son

enthousiasme et sa générosité. Je le remercie également pour son précieux soutien sur le développement de ma carrière professionnelle.

Je garde le meilleur pour la fin, ma famille qui a supporté toutes les difficultés morales et matérielles pour me soutenir tout au long de mes études supérieures. A mes très chers parents, que Dieu les garde et les bénisse. Tous les mots ne suffisent pas pour exprimer le respect et l'amour que j'avoue pour eux. A mon frère et mes sœurs, je leur souhaite tout le bonheur du monde.

Mes derniers remerciements les plus distingués et sincères à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

A.rahim

Table des matières

Table des figures	viii
Liste des tableaux	xi
Glossaire	xii
<i>Introduction Générale</i>	1
<i>1. Théorie et conception des ondelettes</i>	5
<i>1.1 Introduction</i>	5
<i>1.2 Du royaume de Fourier vers le paradis des ondelettes</i>	6
1.2.1 Transformée de Fourier	6
1.2.2 Insuffisance de l'analyse de Fourier	7
1.2.3 Transformée de Fourier à fenêtre (La transformée de Gabor)	7
1.2.4 Naissance des ondelettes	8
<i>1.3 Transformée en ondelettes, analyse multi-résolution et bancs de filtres</i>	9
1.3.1 La transformée en ondelettes continue (TOC)	9
1.3.2 La transformée en ondelettes discrète (TOD)	9
1.3.3 L'analyse multi-résolution	10
1.3.3.1 Fonction d'échelle et espaces d'approximation	11
1.3.3.2 Fonction ondelette et espaces de détail	11
1.3.4 Ondelettes et bancs de filtre	12
<i>1.4 Bases d'ondelettes orthogonales et bi-orthogonales</i>	13
1.4.1 Bases d'ondelettes orthogonales	14
1.4.2 Bases d'ondelettes bi-orthogonales	14
<i>1.5 Construction et propriétés des ondelettes</i>	15
1.5.1 Propriétés des ondelettes	15
1.5.1.1 Orthogonalité	15
1.5.1.2 Support compact	16
1.5.1.3 Symétrie	16

1.5.1.4	Nombre de moments nuls	16
1.5.1.5	Régularité	17
1.5.2	Construction des ondelettes	17
1.6	Exemples de bases d'ondelettes	17
1.6.1	Ondelettes de Haar	18
1.6.2	Ondelettes de Daubechie	19
1.6.3	Symlettes	21
1.6.4	Coiflettes	22
1.6.5	Ondelettes de Meyer	23
1.6.6	Ondelettes splines polynomiales	24
1.7	Introduction aux ondelettes fractionnaires	25
1.8	Conclusion	26
2.	Retard numérique d'ordre fractionnaire	27
2.1	Introduction	27
2.2	Définition du retard fractionnaire	28
2.2.1	Retard fractionnaire en temps continue	28
2.2.2	Retard fractionnaire en temps discret	29
2.2.3	Retard par référence au temps continu	30
2.3	Caractéristiques du retard fractionnaire	30
2.4	Approximation du retard fractionnaire	32
2.4.1	Approximation du retard fractionnaire par des filtres RIF	32
2.4.1.1	Méthode des moindres carrés	33
2.4.1.2	Méthode des moindres carrés avec bande passante réduite	34
2.4.1.3	Interpolateur de Lagrange: Critère de platitude maximale	34
2.4.1.4	Autre méthode d'approximation du retard fractionnaire par des filtres RIF	42
2.4.2	Approximation du retard fractionnaire par des filtres RII	42
2.4.2.1	Filtres RII Passe-Tout	42
2.4.2.2	Conception des filtres RII par la méthode de Zhang	43
2.4.2.3	Autres Filtres RII	44
2.5	Conclusion	44

3. Construction des ondelettes fractionnaires	45
3.1 Introduction.....	45
3.2 Principe de construction des ondelettes fractionnaires via un retard numérique d'ordre fractionnaire.....	46
3.3 Construction des Ondelettes fractionnaires	47
3.3.1 Construction des ondelettes de haar fractionnaires	48
3.3.1.1 Conception des filtres de haar fractionnaires.....	48
3.3.1.2 Construction de la fonction d'échelle et la fonction d'ondelette de Haar fractionnaires.....	52
3.3.2 Construction des ondelettes fractionnaires à support compact.....	55
3.3.2.1 Conception des filtres fractionnaires à support compact	55
3.3.2.2 Construction de la Fonction d'échelle et la fonction d'ondelette fractionnaires à support compact	59
3.4 Propriétés des bases d'ondelettes fractionnaires construites	62
3.5 Conclusion	62
4. Ondelettes fractionnaires pour le débruitage des signaux et des images ..	64
4.1 Introduction.....	64
4.2 Formulation générale du problème.....	65
4.3 Principe général du débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes	67
4.3.1 Estimation du niveau de bruit	68
4.3.2 Seuillage des ondelettes	68
4.3.3 Choix du seuil.....	69
4.4 Application des ondelettes fractionnaires proposées	70
4.4.1 Débruitage des signaux	70
4.4.1.1 Ondelettes de Haar fractionnaires pour le débruitage des signaux	72
4.4.1.2 Ondelettes fractionnaires à support compact pour le débruitage des signaux.....	75
4.4.1.3 Comparaison globale des résultats de débruitages des signaux	80

4.4.2	<i>Débruitage des images</i>	83
4.4.2.1	<i>Ondelettes de Haar fractionnaires pour le débruitage de images</i>	84
4.4.2.2	<i>Ondelettes fractionnaires à support compact pour le débruitage des images</i>	89
4.4.2.3	<i>Comparaison globale des résultats de débruitages des images</i>	94
4.5	<i>Conclusion</i>	100
	<i>Conclusion et perspectives</i>	101
	<i>Annexes</i>	104
A.	<i>Calcul des coefficients des filtres de Haar fractionnaires</i>	105
B.	<i>Calcul de l'erreur ε (Filtres de Haar fractionnaires)</i>	108
C.	<i>Calcul des coefficients des filtres fractionnaires à support compact</i>	111
D.	<i>Calcul de l'erreur ε (filtres fractionnaires à support compact)</i>	113
	<i>Bibliographie</i>	114

Table des figures

1.1	Ondelette dilatée et translatée.....	8
1.2	Fonction d'échelle de Haar.....	11
1.3	Espaces emboîtés.....	11
1.4	Ondelette de Haar.....	12
1.5	Décomposition du signal $x[n]$ en approximations et détails.....	13
1.6	processus de reconstruction du signal $x[n]$	13
1.7	Orthogonalité et produit scalaire.....	17
1.8	Fonction d'échelle de Haar.....	19
1.9	Fonction d'échelle de Haar dans Fourier.....	19
1.10	Ondelette de Haar.....	19
1.11	Ondelette de Haar dans Fourier.....	19
1.12	Fonction d'échelle et ondelette de Daubechies : dbN	21
1.13	fonction d'échelle et ondelette des symlettes d'ordre 2 et 3.....	22
1.14	fonction d'échelle et ondelette des coiflettes d'ordre 1 et 2.....	23
1.15	fonction d'échelle et ondelette de Meyer.....	23
1.16	Fonctions splines pour diverses valeurs de n	24
1.17	Ondelette spline linéaire (à droite) et sa fonction d'échelle (à gauche).....	24
1.18	Ondelette spline cubique (à droite) et sa fonction d'échelle (à gauche).....	25
1.19	les ondelettes B-splines fractionnaires pour différents degrés.....	25
1.20	La fonction de distribution de Cole-Cole.....	25
2.1	Schéma-bloc de l'élément de retard fractionnaire idéal.....	29
2.2	La fonction sinus cardinal décalée : (a) $D=3$ échantillons (b) $D=3.3$ échantillons.....	32
2.3	Réponse fréquentielle du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal $Z^{-0.25}$ et du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre 1: (a) Amplitude (b) Phase.....	36

2.4	Réponse fréquentielle du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal $Z^{(-0.9)}$ et du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre 1: (a) Amplitude (b) Phase.....	37
2.5	Réponse fréquentielle du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal $Z^{(-0.5)}$ et du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre 2: (a) Amplitude (b) Phase.....	38
2.6	Réponse fréquentielle du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal $Z^{(-0.7)}$ et du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre 2: (a) Amplitude (b) Phase.....	39
2.7	Réponse fréquentielle du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal $Z^{(-1.2)}$ et du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre 3: (a) Amplitude (b) Phase.....	40
2.8	Réponse fréquentielle du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal $Z^{(-1.5)}$ et du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre 3: (a) Amplitude (b) Phase.....	41
3.1	décomposition et reconstruction du signal par la transformée en ondelette discrète fractionnaire unidimensionnel.	47
3.2	Développement de l'erreur ε par rapport à D	50
3.3	Réponses fréquentielles des filtres de Haar fractionnaires d'analyses et de synthèses pour $N=2$ et $D = 0...1.5$: (a) filtre d'analyse passe bas, (b) filtre d'analyse passe haut, (c) filtre de synthèse passe bas, (d) filtre de synthèse passe haut.	52
3.4	Fonctions d'échelle et d'ondelette pour différentes valeurs de D (Base d'ondelette de Haar fractionnaire)	54
3.5	Développement de l'erreur ε par rapport à $m1, m2$ et $m3. \in]0, 2]$,	57
3.6	Développement de l'erreur ε par rapport à $m1 \in [0.1, 0.7], m2 \in [0.3, 1], m3 \in [0.2, 1.7]$	58
3.7	Réponses fréquentielles des filtres fractionnaires à support compact d'analyses et de synthèses pour différentes valeurs de $m1, m2$ et $m3, (N=2)$: (a) filtre d'analyse passe bas, (b) filtre d'analyse passe haut, (c) filtre de synthèse passe bas, (d) filtre de synthèse passe haut.....	59
3.8	Fonctions d'échelle et d'ondelette pour différentes valeurs de $m1, m2$ et $m3$ (Base d'ondelettes fractionnaires à support compact)	61
4.1	Application de la transformée d'ondelettes séparable 2D sur une image IRM.....	67
4.2	Signaux tests: (a) Signal 'blocks'; (b) Signal 'bumps'; (c) Signal 'Heavy sines'	70
4.3	Signaux tests bruités avec un bruit blanc gaussien d'écart type 10, 20 et 30.	71
4.4	Résultats visuelles des signaux débruités (ondelette de Haar fractionnaire).....	73
4.5	Variation du SNR en fonction de la longueur du retard fractionnaire (D).	74
4.6	Résultats visuelles des Signaux débruités (ondelettes fractionnaires à support compact)..	78

4.7	<i>Variation du SNR en fonction de m_1, m_2 et m_3.....</i>	79
4.8	<i>Comparaison globale des résultats de débruitages des signaux : (a) Blocks, (b) Bumps, (c) heavy-sin.....</i>	82
4.9	<i>Images tests (Lena, boat, cameraman et building).....</i>	83
4.10	<i>Images tests (Lena, boat, cameraman et building) corrompues par un bruit blanc gaussien d'écart type 10, 20 et 30</i>	84
4.11	<i>Comparaison visuelle des images débruitées pour $D=1$ (Haar) et $D=1.5$ (cas fractionnaire).....</i>	87
4.12	<i>Zoom sur une région de l'image de lena débruitée (ondelette de Haar fractionnaire)</i>	87
4.13	<i>Variation du PSNR en fonction de la longueur du retard fractionnaire (D.....</i>	89
4.14	<i>Résultats visuelles des images débruitées (db2 et ondelettes frac. à support compact)</i>	92
4.15	<i>Zoom sur une région de l'image de Lena débruitée (ondelettes frac. à support compact)..</i>	93
4.16	<i>Variation du PSNR en fonction de m_1, m_2 et m_3</i>	94
4.17	<i>Comparaison globale des résultats de débruitages des images :(a) Lena, (b) Boat, (c) Cameraman, (d) Building...</i>	97
4.18	<i>Comparaison visuelle des résultats de débruitages de l'image de Lena obtenus par l'application de plusieurs familles d'ondelettes...</i>	99
A.1	<i>Développement de l'erreur ε par rapport à D ($N=1$).....</i>	108
A.2	<i>Développement de l'erreur ε par rapport à D ($N=2$).....</i>	109
A.3	<i>Développement de l'erreur ε par rapport à D ($N=3$).....</i>	110

Liste des tableaux

<i>1.1 Familles d'ondelettes.</i>	18
<i>1.2 Coefficients des filtres de Daubechies pour N moment nuls</i>	20
<i>2.1 Coefficient du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre N=1,2 et 3.</i>	35
<i>3.1 Coefficients du filtre fractionnaire pour différentes valeurs de N</i>	51
<i>4.1 Résultats de débruitage des signaux : 'Blocks', 'Bumps' et 'Heavy sine' pour différentes valeurs de D.(ondelette de Haar fractionnaire)</i>	72
<i>4.2 Récapitulatif des meilleurs Résultats de débruitage des signaux : Blocks, Bumps et heavy-sine (ondelette fractionnaire à support compact)</i>	75
<i>4.3 Comparaison globale des résultats de débruitages des signaux : Blocks, Bumps et heavy-sine en utilisant plusieurs familles d'ondelettes</i>	80
<i>4.4 Résultats de débruitage des images : 'Lena, building, cameraman et boat' pour différentes valeurs de D (ondelette de Haar fractionnaire).</i>	85
<i>4.5 Résultats de débruitage des images : 'Lena, building, cameraman et boat' (ondelette fractionnaire à support compact)</i>	90
<i>4.6 Comparaison globale des résultats de débruitages des images : Lena, Boat, Cameraman, Building en utilisant plusieurs familles d'ondelettes.</i>	95

Glossaire

Abréviations

AMR	Analyse Multi-résolution
Bior	Biorthogonal
CA	Coefficients d'Approximations
CD	Coefficients de Détails
Coif	Coiflets
db	Daubechies
DFT	Discrete Fourier Transform
Dmey	Meyer Discrète
DWT	Discret Wavelet Transform
EQM	Erreur Quadratique Moyenne
ECG	Electrocardiogramme
EDP	Equation à Dérivé Partiel
EEG	Electroencéphalographie
EMG	Electromyogramme
FD	Fractional delay
FIL	Filtre Interpolateur De Lagrange
FFT	Fast Fourier transform
FRWPT	Fractional Wavelet Packet Transform
FRWT	Fractional Wavelet Transform
FRDWT	Fractional Discret Wavelet Transform
FRFT	Fractional Fourier Transform
IDWT	Inverse Discrete Wavelet Transform
MAD	Valeur Médiane Absolue
NNG	Non Négative Garrote
PSNR	Peak Signal to Noise Ratio
RF	Retard Fractionnaire
RI	Réponse Impulsionnelle
RIF	Réponse Impulsionnelle Finie
RII	Réponse Impulsionnelle Infinie
SNR	Signal to Noise Ratio (Rapport signal sur bruit)
SURE	Stein's Unbiased Risk Estimator
sym	Symlets
TG	Transformée de Gabor
TOC	Transformée en Ondelette Continue
TOD	Transformée en Ondelette Discrète
WPT	Wavelet Packet Transform
WT	Wavelet transform

Symboles

σ_ε	Ecart-type de bruit
\mathfrak{R}	Ensemble des réels
$\Psi(t)$	Ondelette mère
\mathbb{Z}	Ensemble des entiers signés
$\phi(x)$	La fonction d'échelle
V_j	L'espace d'approximation
W_j	L'espace de détail
\oplus	Somme de deux espaces
\perp	Complément orthogonal
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels
C^∞	Classe infinie
C^n	Classe n
$\beta_+^0(t)$	Fonction porte ou box
$[.]$	Symbolise la fonction partie entière.
Φ	Représente un dictionnaire multi-échelle
δ_λ	Opérateur non linéaire de seuillage avec un seuil λ
δ^H	Seuillage dur
δ^S	Seuillage doux
λ	Seuil
Z^{-D}	Retard fractionnaire
σ^2	Variance

Notations

$\tilde{h}, \tilde{g}, \bar{h}, \bar{g}$	Représentent respectivement les filtres d'analyse et de synthèse, passe-bas et passe-haut, qui constituent la DWT.
$\tilde{h}_f, \tilde{g}_f, \bar{h}_f, \bar{g}_f$	Représentent respectivement les filtres fractionnaires d'analyse et de synthèse, passe-bas et passe-haut, qui constituent la FRDWT proposée.
$y_{mn}, g_{mn}, \varepsilon_{mn}$	Représentent respectivement les valeurs réelles échantillonnées du signal bruitée y , le signal à estimer g et le bruit blanc gaussien ε .
a_{mn}, c_{mn}	Représentent respectivement les coefficients d'approximation de la transformée d'ondelettes
d_{mn}^{oj}, s_{mn}^{oj}	Représentent respectivement les coefficients de détails de la transformée d'ondelettes
HH_j, HL_j, LH_j	Les sous-bandes correspondent respectivement aux coefficients de détail d'orientation diagonale, horizontale et verticale.
LL_j	La sous-bande LL_j représente les coefficients d'approximation à l'échelle la plus grossière.
E_{LS}	Fonction d'erreur des moindres carrés
θ_D	La réponse en phase
a_k	Coefficients du filtre RII passe tout, qui approxime le retard fractionnaire
a_n, b_r	Coefficients du filtre RII, qui approxime le retard fractionnaire par la méthode de Zhang.
D, D_1, D_2, D_3	les longueurs des retards numériques fractionnaires.
A, B	Représentent respectivement les coefficients du filtre passe-bas qui constitue les ondelettes de Haar fractionnaires.
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Représentent respectivement les coefficients du filtre passe-bas qui constitue les ondelettes fractionnaires à support compact.

Introduction générale

AVANT-PROPOS

Contexte et problématique

Le traitement du signal et des images est une phase préliminaire, son objectif principal est la description des signaux et des images liés au monde réel dans un but de traitement, d'identification, de compression, de compréhension ou de transmission. Dans ce contexte, les ondelettes ont toujours joué un rôle très important, elles ont acquis une reconnaissance grandissante dans la communauté scientifique internationale, on ne compte plus aujourd'hui les applications qui utilisent cette technique. Il s'agit d'un outil mathématique permettant d'analyser et de repérer les discontinuités d'un signal à une ou à deux dimensions, et à des échelles différentes. Cette caractéristique est utilisée pour résoudre de nombreux problèmes, tels que la compression et la restauration des signaux et des images [1].

Depuis leur apparition, les ondelettes ont éveillé l'attention de nombreux chercheurs et bientôt des bases mathématiques solides ont été mises en place faisant apparaître la notion de base orthogonale [2], d'analyse multi-résolution [3], [4], [5] et d'ondelettes à support compact [6], ce qui en résulte la naissance de plusieurs familles d'ondelettes réelles, complexes et fractionnaires.

Cependant, le choix d'une ondelette analysante adéquate reste un problème important. Il n'y a pas d'ondelette adaptée à tous les cas. Pour certaines applications, il est possible que l'on ne trouve pas, parmi les ondelettes connues, celle qui convient. Donc, il est nécessaire d'essayer de construire une nouvelle ondelette qui peut s'adapter et couvrir un large panorama de problèmes.

Dans ce contexte, de nombreux travaux ont été introduits dans le but de construire des ondelettes avec des propriétés mathématiques plus élégantes et plus efficace. Parmi les ondelettes qui présentent actuellement un intérêt considérable, celles basées sur le calcul fractionnaire. Le principal avantage d'avoir un ordre fractionnaire est la flexibilité et la précision, cela permet un ajustement continu des paramètres clés tels que la régularité et la localisation des fonctions de base. Ces avantages peuvent être exploités pour améliorer plusieurs approches comme le débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes [1].

L'idée des ondelettes fractionnaires a été proposée pour la première fois par Mendlovic [7] dans le contexte du traitement des signaux optiques, où elles ont été définies comme une cascade de la transformée en ondelettes classique et la transformée de Fourier fractionnaire (FRFT) [8]. Peu de temps après, Huang et Suter [9] ont proposé une version fractionnaire de la transformée en paquet d'ondelettes (FRWPT), basée sur la combinaison de la FRFT avec la transformée en paquet d'ondelettes (WPT). Malheureusement, à cause du manque d'une interprétation physique et de la complexité du calcul, la FRWPT n'a pas reçu beaucoup d'attention. Quelques années plus tard, l'idée a été reformulée, où la construction devient plus simple, plus précise et ne présente pas une grande difficulté, surtout pour le cas continue, où l'utilisation des fonctions mathématiques avec l'intégration des notions de la dérivé fractionnaire, lors de la construction, a facilité l'opération, on peut citer à titre d'exemple les ondelettes issues de la fonction gaussienne et ses dérivés fractionnaires, la fonction spline avec des degrés fractionnaires [10] et la fonction de distribution de Cole-Cole [11]. Les ondelettes en quinconce ont aussi été généralisées à des ordres non entiers avec une construction basée sur des filtres en quinconce fractionnaires, générés par la transformation de McClellan [12]. Récemment, plusieurs modèles d'ondelettes fractionnaires ont été proposés et développés, ce qui en résulte un large panorama d'applications [13-17].

Dans le cadre de cette thèse, nous introduirons de nouvelles familles d'ondelettes fondées sur le calcul fractionnaire. La construction commence en générale par le choix d'un filtre numérique passe-bas, ayant la propriété d'orthogonalité; ensuite on le généralise par le biais des opérateurs fractionnaires tout en assurant des propriétés d'orthogonalité, compacité et de régularité correctes. Le filtre passe-haut peut être construit à partir du filtre passe-bas par une simple modulation et en déduire par l'algorithme cascade [6] la fonction d'échelles et la fonction d'ondelette associées. Pour illustrer le potentiel et l'efficacité des ondelettes proposées au sein de cette thèse, nous les appliquons dans un algorithme de débruitage des signaux et des images.

Organisation de la thèse

Le présent manuscrit est constitué de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présenterons un aperçu détaillé sur la théorie des ondelettes, où nous verrons la nécessité d'un tel outil pour pallier aux limitations de l'analyse de Fourier. Ensuite, nous exposerons quelques définitions de la transformée en ondelettes avec ses deux

versions, continue et discrète, ainsi que l'analyse multi-résolution. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous introduirons un rappel sur les principales propriétés des ondelettes orthogonales et bi-orthogonales, où nous décrirons les règles de construction des bases d'ondelettes, de fonctions d'échelle et des filtres associés à une analyse multi-résolution. En fin, après l'exposition de quelques exemples de bases d'ondelettes connues, nous concluons ce chapitre par la présentation d'une introduction sur les ondelettes fractionnaires.

Dans le deuxième chapitre, nous introduirons des notions de base sur le retard numérique d'ordre fractionnaire, commencerons par sa définition, ensuite nous donnons également ces caractéristiques ainsi les raisons pour lesquelles l'approximation du retard d'ordre fractionnaire est nécessaire. La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la description des différentes méthodes utilisées pour approximer le retard numérique d'ordre fractionnaire idéal. Deux familles différentes d'approximations seront présentées. La première est basée sur les filtres RIF et la seconde sur les filtres RII.

Le troisième chapitre est le noyau de cette thèse, où nous introduirons une nouvelle méthode de conception des ondelettes basées sur le retard numérique d'ordre fractionnaire. Commencerons par le principe de base de la construction, ensuite nous exposerons les différentes étapes de construction de deux nouvelles familles d'ondelettes fractionnaire : *les ondelettes de Haar fractionnaires* et *les ondelettes fractionnaires à support compact*. En fin nous présenterons un récapitulatif sur les différentes propriétés des ondelettes fractionnaire proposées, tout en signalant leurs avantages et leurs inconvénients.

Le chapitre quatre vient d'illustrer l'efficacité et le potentiel des ondelettes fractionnaires proposées, par l'application de ces derniers dans un algorithme de débruitage des signaux et des images. Nous commencerons par le formalisme générale du problème de débruitage, ensuite nous verrons le principe du débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes, où nous décrirons les différentes étapes nécessaires lors du processus de débruitage, par la suite, nous montrons les résultats d'application de nos modèles fractionnaires pour débruiter des signaux et des images, où ces résultats seront comparés avec celle obtenus par l'application des ondelettes classique connues tel que : les ondelettes de Haar, Daubechies, Coiflettes, Symlettes, Meyer et les ondelettes bi-orthogonales.

Enfin, une conclusion générale effectuée la synthèse des résultats et permet de dégager quelques perspectives.



Jean Morlet

(13 janvier 1931 — 27 avril 2007)

“After all, I'm using location and modulation, let's do differently. Let's take one of these functions that have some oscillations and let's put that in different places and squish it so that I have a different thing” really wavelet.

By Jean morlet

Chapitre 1

Théorie et conception des ondelettes

1.1 Introduction

Au cours de ces dernières décades, la théorie des ondelettes a fait l'objet de nombreuses recherches. Elle a vu couler beaucoup d'encre dans la littérature scientifiques et techniques, et fait encore l'objet d'une recherche très soutenue. On ne compte plus aujourd'hui les applications qui utilisent cet outil. Il s'agit d'un algorithme permettant d'analyser et de repérer les discontinuités d'un signal à une ou à deux dimensions, et à des échelles différentes.

En revanche le développement de la théorie des ondelettes se trouve au carrefour des sciences où les chercheurs de tous les domaines scientifiques interviennent : mathématiques, informatique, physique, géologie, microélectronique, et d'une manière générale, toutes les sciences qui doivent faire appel à l'analyse des signaux. Cependant la grande partie de la littérature demeure hautement mathématique et nécessite un investissement de temps important pour comprendre la théorie des ondelettes et leurs conceptions.

Dans ce chapitre nous présenterons un aperçu détaillé sur les ondelettes, commencerons par leurs historiques, où nous verrons la nécessité d'un tel outil pour pallier aux limitations de l'analyse de Fourier. Ensuite, nous présenterons la transformée en ondelettes avec ses versions, continue et discrète, ainsi que l'analyse multi-résolution, où nous décrirons les notions d'espaces d'approximation et de détail. Nous verrons aussi dans cette partie comment l'analyse multi-résolution connecte avec une façon élégante les ondelettes et les bancs de filtres à reconstruction parfaites.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous introduisons un rappel sur les principales propriétés des ondelettes orthogonales et bi-orthogonales, où nous décrirons les règles de construction des bases d'ondelettes, de fonctions d'échelle et des filtres associés à une analyse multi-résolution. Enfin, après l'exposition de quelques exemples de bases d'ondelettes connues, nous concluons ce chapitre par la présentation d'une introduction sur les ondelettes fractionnaires.

1.2 Du royaume de Fourier vers le paradis des ondelettes

L'analyse de Fourier a été pendant longtemps l'un des outils les plus utilisés et les plus puissants en mathématiques et en physique. Cette représentation, basée sur la notion physique de fréquence, est bien adaptée pour traiter des signaux stationnaires c'est à dire des signaux qui possèdent certaines propriétés invariantes dans le temps. Cependant la plupart des signaux du monde réel ne sont pas stationnaires, et c'est justement dans l'évolution de leurs caractéristiques (statistiques, fréquentielles, temporelles, spatiales) que réside l'essentiel de l'information qu'ils contiennent, les signaux vocaux et les images sont à titre d'exemple. Lors de l'analyse de Fourier, toute notion de localisation temporelle (ou spatiale pour des images) disparaît; il faut donc trouver un compromis ou une transformation qui renseigne sur le contenu fréquentiel tout en préservant la localisation temporelle afin d'obtenir une représentation temps/fréquence ou espace/échelle du signal.

1.2.1 Transformée de Fourier

Le principe de la transformée de Fourier repose sur le fait que toute fonction périodique¹ peut être représentée comme la somme d'une série de sinus et de cosinus dont on fait varier d'une part les amplitudes en les multipliant par des coefficients, et d'autre part les phases en les décalant de manière à ce qu'elles s'additionnent ou se compensent. La transformée de Fourier est définie formellement par l'expression suivante :

¹ Ou pseudo périodique

$$T^{Fourier} f(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.1)$$

Malgré, le succès qu'a vu la transformée de Fourier ainsi que ses dérivées (DFT, FFT), l'analyse de Fourier montre assez vite des limitations, où son calcul nécessite la connaissance de tout l'historique temporel du signal.

1.2.2 Insuffisance de l'analyse de Fourier

Comme il est énoncé précédemment, l'analyse de Fourier présente des inconvénients et des limitations, on peut citer à titre d'exemple :

1. Les fréquences mesurées ne peuvent pas être situées dans le temps, (La correspondance temps-fréquence est inexistante);
2. Son efficacité n'est remarquable que pour les signaux stationnaires².

Pour pallier à ces limitations, la première solution qui vient naturellement à l'esprit est de limiter le domaine d'intégration temporel (voir équation 1.1) à l'aide d'une fonction «fenêtre» que l'on pourra faire glisser pour explorer le signal ; on obtient ce que l'on appelle « transformée de Fourier à fenêtre glissante ».

1.2.3 Transformée de Fourier à fenêtre (La transformée de Gabor)

Afin de remédier au problème de la location temporelle de la transformée de Fourier, Gabor a proposé en 1946 d'utiliser une transformée de Fourier à fenêtre. Cette transformation peut être adaptée au signal non-stationnaire et très proche de l'analyse spectrale. Elle consiste à calculer la transformée de Fourier sur une partie du signal sélectionnée à l'aide d'une fenêtre bien localisée en temps. Des translations successives de cette fenêtre permettent d'analyser localement le comportement temps-fréquence du signal. La transformée de Gabor (TG) revient à projeter un signal sur des fonctions analysantes de la forme [18] :

$$g_{a,b}(t) = e^{iat} g(t - b) \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Où « a » représente le facteur d'échelle, et « b » le facteur de translation.

² Signaux dont le contenu en fréquence ne change pas au cours du temps (ne dépend pas du temps).

On constate que le membre « $g(t - b)$ » de l'équation (1.2) est indépendant de « a », ce qui signifie que l'enveloppe de la fenêtre glissante sera constante : on aura donc une résolution fixe sur toute la durée du signal.

L'étude d'un signal avec la transformée de Gabor permet d'obtenir à la fois une information sur le temps et sur la fréquence, mais la résolution d'analyse est fixée par le choix de la taille de l'enveloppe [18] : si la fenêtre est trop petite, les basses fréquences n'y seront pas contenues, et si la fenêtre est trop grande, l'information sur les hautes fréquences est noyée dans l'information concernant la totalité de l'intervalle contenu dans la fenêtre.

1.2.4 Naissance des ondelettes

L'analyse par ondelettes est apparue, au début des années 80, dans un remarquable article d'*Alex Grossmann* et *Jean Morlet*. Cette approche est apparue initialement en géophysique pour l'analyse des signaux sismiques. Les résultats obtenus par *Morlet* et formalisés par le physicien *Alex Grossmann* ont rapidement éveillé l'attention de nombreux chercheurs et bientôt des bases mathématiques solides ont été mises en place faisant apparaître la notion de base orthogonale [2], d'analyse multi-résolution [3-5] et d'ondelettes à support compact [6]. Les ondelettes modernes étaient nées.

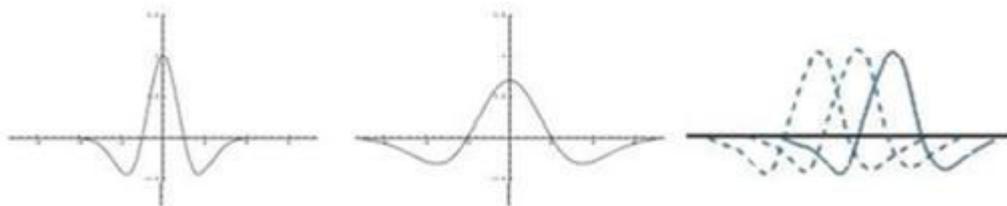


Figure 1.1 Une ondelette est une forme d'onde de durée limitée et de valeur moyenne nulle. C'est une onde localisée dans un temps court. Son utilisation consiste à représenter un signal (ou une fonction) comme une somme pondérée de ces petites ondes translatées ou dilatées.

Le but des ondelettes est de construire un outil qui permet de s'affranchir au problème du choix de la fenêtre dans la TG, en utilisant des fonctions analysantes pour lesquelles la taille de la fenêtre varie avec la fréquence.

1.3 Transformée en ondelettes, analyse multi-résolution et bancs de filtres

1.3.1 La transformée en ondelettes continue (TOC)

Une ondelette Ψ est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ intégrable de moyenne nulle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (1.3)$$

Qui est dilatée/contractée par un facteur d'échelle $e \in \mathcal{R}$ et translatée par un paramètre de localisation $u \in \mathcal{R}$:

$$\psi_{u,e}(t) = \frac{1}{\sqrt{e}} \psi\left(\frac{t-u}{e}\right) \quad (1.4)$$

La transformée en ondelettes continue du signal f (avec une ondelette dilatée/contractée de e et translatée de u) est donnée par :

$$W_f(u, e) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{e}} \psi\left(\frac{t-u}{e}\right) dt \quad (1.5)$$

Cette transformation est en théorie infiniment redondante puisque l'ondelette est translatée de manière continue ; cependant il existe des méthodes pour diminuer cette redondance : l'une de ces méthodes repose sur l'emploi de la transformée en ondelettes discrète.

1.3.2 La transformée en ondelettes discrète

La transformée en ondelettes discrète (TOD) translate et dilate l'ondelette selon des valeurs discrètes [18], [19], où elle découpe les données, les fonctions ou les opérateurs en composantes fréquentielles suivant une résolution adaptée à l'échelle.

La TOD permet de diminuer fortement la redondance de sa version continue sans l'annuler entièrement : les signaux sont décrits par un nombre fini d'échantillons. Lorsqu'on voudra obtenir un signal transformé aussi concis que possible (en pratique, un signal transformé qui contienne autant d'échantillons que le signal d'origine) on utilisera alors un cas particulier de la transformée en ondelettes discrète : la transformée en ondelettes orthogonale et bi-orthogonale.

1.3.3 L'analyse multi-résolution

Une analyse multi-résolution consiste à obtenir une approximation d'un signal f par projection de celui-ci sur l'espace d'approximation V_j , grâce à un opérateur A_j [5], [19], [18], et sur l'espace de détail W_j par le biais d'un opérateur D_j , cependant la reconstruction du signal f nécessite l'association des deux opérateurs tel que

$$A_{j+1}f = A_jf + D_jf \quad (1.6)$$

L'analyse multi-résolution permet de rapprocher l'analyse en variable d'espace avec l'analyse en variable de fréquence. Elle formalise l'idée intuitive selon laquelle tout signal peut être construit par raffinements successifs, c'est-à-dire par l'ajout de détails lorsque l'on passe d'une résolution à la suivante. D'une manière plus précise, une analyse multi-résolution de $L^2(\mathfrak{R})$ est définie comme une suite de sous-espaces fermés V_j de $L^2(\mathfrak{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, ayant les propriétés suivantes [5] :

1. $V_{j+1} \subset V_j$: l'approximation à la résolution a_j contient toutes les informations nécessaires pour calculer le même signal à la résolution inférieure a_{j+1} .
2. $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) \in V_{j+1}$: si $f(x)$ appartient à V_j , la même fonction dilatée d'un facteur 2 appartient à V_{j+1} .
3. $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x - 2^j k) \in V_j$: si $f(x)$ appartient à V_j , la même fonction translatée d'un facteur quelconque appartient aussi à V_j .
4. $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$: L'intersection des V_j est réduite à 0 dans L^2 si la résolution est trop faible, c'est-à-dire que 2^j tend vers 0, on perd tous les détails.
5. Il existe une fonction d'échelle $\varphi \in V_0$, ayant une intégrale non nulle, telle que l'ensemble $\{\varphi(x - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Riesz² de V_0 : il existe une fonction φ telle que $\{\varphi(x - k)\}$ soit une base orthonormée de V_0 . La fonction φ et toutes ses translatées d'un facteur entier forment une base orthonormée.

1.3.3.1 Fonction d'échelle et espaces d'approximation

La dernière propriété de l'analyse multi-résolution introduit une nouvelle fonction dite fonction d'échelle qui par dilatation et translation engendre une base orthonormée, Cette fonction sera notée $\varphi \in V_1 \subset V_0$, elle est définie par l'expression suivante :

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x - k) \quad (1.7)$$

La séquence h_k est la séquence génératrice de la fonction d'échelle: elle définit la multi résolution et permet d'engendrer la famille des fonctions aux différentes échelles. Cette séquence joue un rôle fondamental dans l'AMR. En revanche, Les fonctions d'échelle $\varphi_{j,k}$ pour $k \in [-\infty, +\infty]$ engendrent l'espace des approximations V_j .

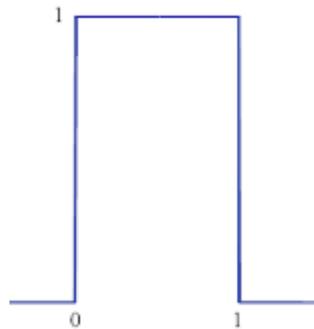


Figure 1.2 Fonction d'échelle de Haar

1.3.3.2 Fonction ondelette et espaces de détail

L'espace W_j complémentaire de V_j dans V_{j-1} est l'espace des détails à l'échelle j , figure (1.3). Ceci revient à dire chaque élément de V_{j-1} peut être écrit de manière unique comme la somme d'un élément de W_j et d'un élément de V_j :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (1.8)$$

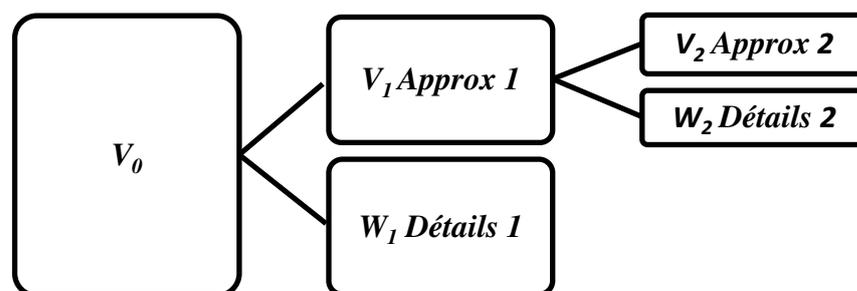


Figure 1.3 Espaces emboîtés.

L'espace W_j contient l'information de détail nécessaire pour passer d'une résolution j à une résolution $j - 1$. En revanche, à partir de la fonction d'échelle, il est possible de construire une fonction appelée ondelette qui par dilatations et translations engendre une base orthonormée des W_j . Cette fonction est notée :

$$\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (1.9)$$

L'ondelette $\psi(x)$ est dans le sous-espace W_1 qui est contenu dans V_0 . Les fonctions d'échelle translatées $\varphi(2x - k)$ constituent une base de V_0 . Il s'ensuit que l'ondelette $\psi(x)$ est une combinaison linéaire des fonctions d'échelle translatées:

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k g_k \varphi(2x - k) \quad (1.10)$$

Comme les fonctions d'échelle, les ondelettes sont engendrées par une séquence génératrice, g_k , qui définit l'AMR.

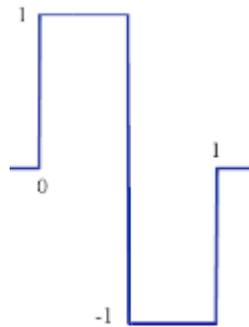
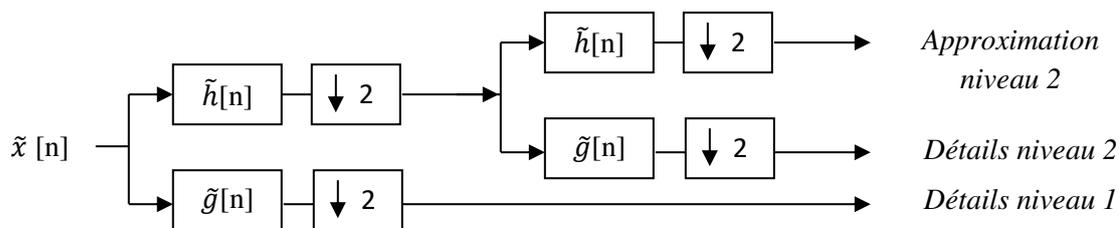


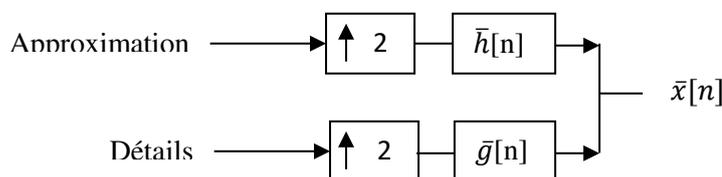
Figure 1.4 Ondelette de Haar

1.3.4 Ondelettes et bancs de filtre

L'analyse multi-résolution développée par Mallat connecte la transformée en ondelette et les bancs de filtre avec une façon élégante, où les coefficients d'ondelettes définis par la relation $W(e, u) = \langle f, \psi_{e,u} \rangle$ peuvent être calculés à partir d'une transformée pyramidale mise en œuvre à l'aide de filtres numériques, récursifs ou non [5]. Le principe de la transformée pyramidale consiste à décomposer le signal en approximation et en détails. Le signal d'origine, traverse deux filtres complémentaires, passe-bas (\tilde{h}) et passe-haut (\tilde{g}), suivis d'une opération de sous-échantillonnage par un facteur égale à 2, et émerge en tant que deux signaux: respectivement le signal d'approximations A et le signal de détails D [5], ce principe est illustré dans la Figure 1.5.


 Figure 1.5 Décomposition du signal $\tilde{x}[n]$ en approximations et détails

En revanche, la reconstruction est effectuée par des filtres de synthèse passe-bas et passe-haut $\bar{h}[n]$ et $\bar{g}[n]$ précédés d'une opération de sur-échantillonnage par un facteur égale à 2. Comme le montre la figure 1.6.


 Figure 1.6 processus de reconstruction du signal $\bar{x}[n]$

Les bancs de filtres assurent une reconstruction parfaite si est seulement si [20] :

$$\begin{cases} \tilde{H}(w + \pi)\bar{H}(w) + \tilde{G}(w + \pi)\bar{G}(w) = 0 \\ \tilde{H}(w)\bar{H}(w) + \tilde{G}(w)\bar{G}(w) = 2 \end{cases} \quad (1.11)$$

Où \tilde{H} , \tilde{G} , \bar{H} et \bar{G} sont, respectivement, les fonctions de transfert des filtres d'analyse et de synthèse, passe-bas et passe-haut. Dans le cas d'une base orthogonale, le filtre passe-haut est une version modulée du filtre passe-bas; cependant, les filtres d'analyse et de synthèse sont symétriques.

1.4 Bases d'ondelettes orthogonales et bi-orthogonales

Comme nous l'avons vu précédemment, pour surmonter le problème de redondance de la TOC, ainsi que pour assurer la reconstruction parfaite du signal. Un cas particulier de la transformée en ondelettes discrète (TOD) fournit suffisamment d'information, tant pour l'analyse que pour la reconstruction du signal original. Ceci en un temps de calcul notablement réduit. Il s'agit de la transformée en ondelettes orthogonale et bi-orthogonale.

1.4.1 Bases d'Ondelettes orthogonales

La conception des ondelettes orthogonales est liée à la notion d'analyse multi-résolution orthogonale dans laquelle les espaces d'ondelettes W_j sont définis comme le complément orthogonal de V_j dans V_{j-1} [21]. En conséquence, les espaces W_j avec $j \in \mathbb{Z}$ sont tous mutuellement orthogonaux. Pour qu'une analyse multi-résolution soit orthogonale, une condition suffisante est :

$$W_0 \perp V_0 \quad (1.12)$$

Une fonction d'échelle orthogonale est une fonction φ telle que l'ensemble $\{\varphi_{j,l} | l \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée.

Avec une telle fonction φ , la collection de fonctions $\{\varphi(x-l) | l \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_0 et la collection de fonctions $\{\varphi_{j,l} | l \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_j .

1.4.2 Bases d'Ondelettes bi-orthogonales

La transformée en ondelettes orthogonale, quoique requise pour certaines applications, impose de fortes contraintes, il n'existe pas de filtres RIF orthonormaux, à phase linéaire (symétriques), qui assurent la reconstruction exacte, à l'exception de ceux correspondant à la base de Haar. Par conséquent, ces contraintes ont conduit les chercheurs à proposer une variante de l'analyse multi-résolution conciliant la linéarité en phase et la compacité des supports des filtres associés. La solution proposée fait appel aux bases bi-orthogonales. Ces familles de fonctions permettent une analyse multi-résolution du signal et assurent la possibilité de le reconstruire parfaitement. L'analyse reste non redondante, possède les propriétés de symétrie et de simplicité requises. Cependant la complexité conceptuelle de l'analyse sur les bases bi-orthogonales est un peu plus grande car l'analyse et la reconstruction n'utilisent pas les mêmes familles de fonctions, deux jeux de bases duales sont nécessaires, l'une sera utilisée pour l'analyse (transformée directe) et l'autre pour la reconstruction ou synthèse (transformée inverse).

En revanche, l'analyse multi-résolution utilisant ces bases bi-orthogonales définit les espaces détail W_m et \tilde{W}_m , et d'approximation V_m et \tilde{V}_m répondant à la propriété suivante [18], [22]:

$$W_m \perp \tilde{V}_m \quad \text{et} \quad \tilde{W}_m \perp V_m \quad (1.13)$$

Ainsi, l'ondelette utilisée pour l'analyse est orthogonale à la fonction d'échelle utilisée pour la synthèse, et la fonction d'échelle utilisée pour l'analyse est orthogonale à l'ondelette utilisée

pour la synthèse, d'où le nom de bi-orthogonalité. Par contre, et contrairement au cas orthogonal, les ondelettes et les fonctions d'échelle associée ne sont pas orthogonales.

1.5 Construction et propriétés des ondelettes

La construction des fonctions d'échelles et ondelettes (ou d'une manière équivalente les bancs de filtres d'analyses et de synthèses) est soumise à des propriétés spécifiques, liées directement aux bancs de filtres afin d'assurer une analyse/synthèse parfaites. Dans ce contexte et avant d'aborder les différentes démarches nécessaires pour construire une base d'ondelette, nous décrirons les différentes propriétés souhaitées dans une ondelette.

1.5.1 Propriétés des ondelettes

1.5.1.1 Orthogonalité

Sur la figure 1.7, le produit scalaire de \vec{s} avec \vec{w}_1 nous donne un coefficient c_1 , et le produit scalaire de \vec{s} avec \vec{w}_2 donne un coefficient c_2 . Hors, la base n'étant pas orthogonale, $c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2$ est bien égal à $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ mais n'est pas égal à \vec{s} , la reconstruction n'est pas parfaite.

Si les espaces utilisés sont orthogonaux, l'information contenue dans le premier sous-espace sera parfaitement dé-corrélée de celle contenue dans le second : la projection d'un des vecteurs de la base sur un des autres donne zéro ; il n'y a donc aucune redondance entre les deux sous-signaux obtenus, chaque vecteur encode une information qui lui est propre. De plus, la reconstruction sera alors parfaite, puisqu'on aura bien ici $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{s}$ [23].

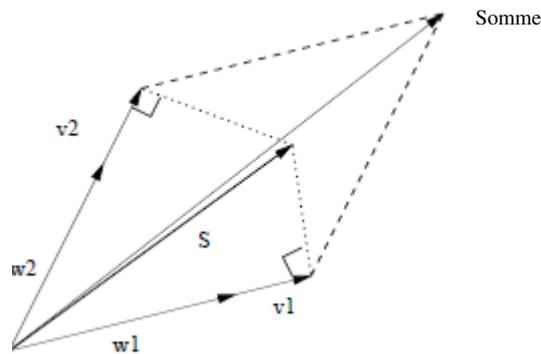


Figure 1.7 Orthogonalité et produit scalaire

Cependant, les contraintes correspondantes à l'orthonormalité des fonctions d'échelle et ondelette sur les réponses fréquentielles des filtres numériques, passe bas h et passe-haut g , qui les constituent sont données respectivement par les relations suivantes [2-5] :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \begin{cases} |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2, & \hat{h}(0) = \sqrt{2} \\ |\hat{g}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega + \pi)|^2 = 2, & \hat{g}(0) = \sqrt{2} \end{cases} \quad (1.14)$$

1.5.1.2 Support compact

Les bases d'ondelettes à support compact ont été proposées pour la première fois par *Ingrid Daubechies* en 1988 [6], dont l'avantage de la compacité des fonctions de base et surtout des filtres associés est l'économie du coût de calcul qu'elle procure.

En revanche, La fonction d'échelle est à support compact si et seulement si le filtre h est à support fini, et leurs supports sont identiques. Si le support de la fonction d'échelle est $[N_1, N_2]$, le support de l'ondelette est $[(N_1 - N_2 + 1)/2, (N_2 - N_1 + 1)/2]$.

1.5.1.3 Symétrie

Les ondelettes symétriques donnent naissance à des filtres à phase linéaire, l'absence de cette propriété entraîne une distorsion de phase lors de la reconstruction. *Daubchies* a montré que la symétrie des bases d'ondelette est soumise à la linéarité de la phase des filtres associés, cependant le seul filtre miroir conjugué symétrique à support fini est le filtre de Haar [6], [24].

1.5.1.4 Nombre de moments nuls

Une base d'ondelette a ' m ' moments nuls si et seulement si sa fonction d'échelle restitue les polynômes de degré inférieur ou égal à ' m '. Cette propriété sert à décrire les capacités des analyses multi-résolutions à approximer des signaux réguliers.

Le nombre de moments nuls est entièrement déterminé par les coefficients $h[n]$ du filtre h intervenant dans l'équation d'échelle. Si la transformée de Fourier de l'ondelette est p fois différentiable, les trois conditions suivantes sont équivalentes [25]:

- L'ondelette ψ a p moments nuls.
- La fonction d'échelle φ reconstitue les polynômes de degré inférieur ou égal à p .
- La fonction de transfert du filtre h et ses $p - 1$ premières dérivées sont nulles en $\omega = p$.

1.5.1.5 Régularité

Une ondelette est dite régulière si elle est très lisse et on peut l'approximer localement par un polynôme. L'ordre de régularité d'une ondelette est égal au nombre de ses moments nuls [25]. En revanche l'introduction des contraintes de régularité dans la construction des ondelettes permet d'améliorer la qualité de la reconstruction.

Afin d'assurer la régularité des fonctions d'échelle et ondelette (au moins jusqu'à l'ordre N) il fallait que le zéro de $h(n)$ (filtre intervenant dans l'équation d'échelle) à $w = \pi$ soit d'ordre $N \geq 1$ [26].

1.5.2 Construction des ondelettes

La construction d'une base d'ondelette se fera suivant l'une des deux démarches suivantes :

- a. On commence par choisir une famille de bases orthonormées de fonctions d'échelle. On détermine ensuite le filtre h associé par projection de la fonction d'échelle sur la base de résolution immédiatement plus fine. On vérifie, par l'algorithme cascade [6], que la convergence de l'analyse est correcte. Puis il reste à définir le filtre g à partir du filtre h et à construire à l'aide de l'algorithme cascade la fonction d'ondelette associée.
- b. On choisit un filtre numérique h , passe-bas, ayant la propriété d'orthogonalité, puis on s'assure, à l'aide de l'algorithme cascade [6], que l'analyse converge bien et que la fonction d'échelle a des propriétés de compacité et de régularité correctes. On peut, ensuite, construire le filtre g à partir du filtre h et en déduire par l'algorithme cascade la fonction d'ondelette associée.

1.6 Exemples de bases d'ondelettes

Il existe de nombreuses bases d'ondelettes ont été décrites dans la littérature, dont les propriétés diffèrent selon le type de la fonction de base employée ou la méthode d'implantation. Le tableau 1.1 regroupe les familles d'ondelettes suivant diverses propriétés essentielles : existence de filtres associés, orthogonalité ou bi-orthogonalité, support compact ou non, ondelettes réelles ou complexes.

Analyse discrète			Analyse continue	
Ondelettes à filtres			Ondelettes sans filtres	
Support compact		Support non compact	Réelles	Complexes
Orthogonales	Bi-orthogonales	Orthogonales	<i>gaus, mexh, morl</i>	<i>cgau, shan, fbsp, cmor</i>
<i>db, haar, sym, coif</i>	<i>bior</i>	<i>meyer, btlm</i>		

Tableau 1.1 Familles d'ondelettes

Nous allons dans cette section présenter quelques exemples d'ondelettes. Nous commencerons par la base la plus simple et la plus ancienne, il s'agit de l'analyse de Haar; ensuite nous décrirons les bases proposées par I. Daubechies, dont leurs constructions conduit à des filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) mais qui ne sont pas linéaires en phase. D'autres types d'ondelettes seront présentés par la suite, telles que les ondelettes de Symlettes, Coiflettes, Meyer et les ondelettes splines polynomiales.

1.6.1 Ondelettes de Haar

La base de Haar est obtenue à partir d'une AMR constituée de fonctions constantes par morceaux. Le filtre h , associé à la fonction d'échelle, a deux coefficients non nuls, sa fonction de transfert est définie par la relation suivante [24]:

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z^{-1}) \quad (1.15)$$

Cependant la fonction d'échelle est représentée par l'équation suivante :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.16)$$

On détermine le filtre g associé à la fonction d'ondelette en utilisant la propriété des filtres miroirs en quadrature, il est défini par l'expression suivante :

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - z^{-1}) \quad (1.17)$$

En revanche, la fonction d'ondelette est construite, à partir de la relation suivante :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.18)$$

L'ondelette de Haar a le plus petit support parmi toutes les ondelettes orthogonales. Toutefois, il s'agit d'une fonction discontinue qui n'est pas bien adaptée pour approximer les fonctions régulières car elle n'a qu'un seul moment nul. Les courbes ci-après regroupent les fonctions d'échelle et d'ondelette dans les domaines temporels et fréquentiels.

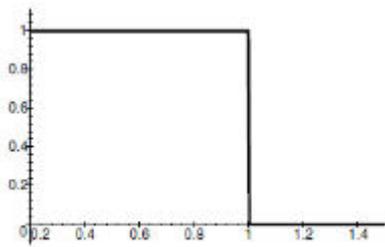


Figure 1.8 Fonction d'échelle de Haar

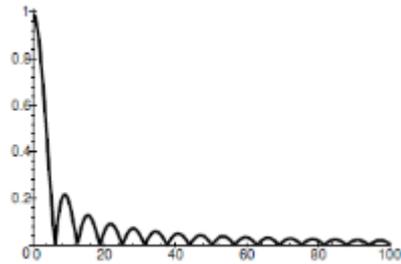


Figure 1.9 Fonction d'échelle de Haar dans Fourier

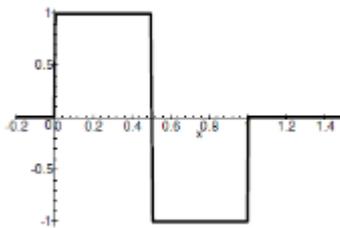


Figure 1.10 Ondelette de Haar

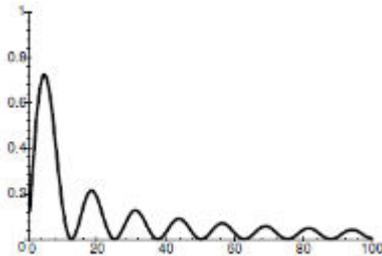


Figure 1.11 Ondelette de Haar dans Fourier

1.6.2 Ondelettes de Daubechie

En 1988, *Ingrid Daubechies* a proposé une famille d'ondelette orthogonale qui a un support de taille minimale égal à $[-N + 1, N]$ pour un nombre N de moments nuls donné. En revanche, Le support de la fonction d'échelle correspondante est $[0, 2N - 1]$. D'autre part, Les ondelettes proposées par *I. Daubechies* se calculent à partir des filtres miroirs conjugués de réponse impulsionnelle finie. Le filtre numérique $h[n]$ associé aux fonctions d'échelle est définie par :

$$h(w) = \sum_n h(n)e^{-iwn} \quad (1.19)$$

Sa réponse fréquentielle sera une fonction complexe périodique ayant comme propriétés :

$$|\hat{h}(w)|^2 + |\hat{h}(w + \pi)|^2 = 2, \quad (1.20)$$

$$\hat{h}(0) = 2 \tag{1.21}$$

Pour que les fonctions de base φ et ψ soient régulières (au moins jusqu'à l'ordre N) il fallait que le zéro de $h(w)$ à $w = \pi$ soit d'ordre $N \geq 1$. Le tableau (1.2) résume les coefficients des filtres de Daubechies $h(n)$ pour $2 \leq N \leq 10$.

Coefficients	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
h_0	0,482962913144534	0,332670552950082	0,23037781330889
h_1	0,836516303737807	0,806891509311092	0,71484657055291
h_2	0,224143868042013	0,459877502118491	0,63088076792985
h_3	-0,129409522551260	-0,135011020010254	-0,02798376941685
h_4		-0,085441273882026	-0,18703481171909
h_5		0,035226291885709	0,03084138183556
h_6			0,03288301166688
h_7			-0,01059740178506

Coefficients	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$
h_0	0,16010239797419	0,1115407433501	0,077852054085
h_1	0,60382926979718	0,4946238903984	0,396539319481
h_2	0,72430852843777	0,7511339080210	0,729132090846
h_3	0,13842814590132	0,3152503517091	0,469782287405
h_4	-0,24229488706638	-0,2262646939654	-0,143906003928
h_5	-0,03224486958463	-0,1297668675672	-0,224036184993
h_6	0,07757149384004	0,0975016055873	0,071309219266
h_7	-0,00624149021279	0,0275228655303	0,080612609151
h_8	-0,01258075199908	-0,0315820393174	-0,038029936935
h_9	0,00333572528547	0,0005538422011	-0,016574541630
h_{10}		0,0047772575109	0,012550998556
h_{11}		-0,0010773010853	0,000429577972
h_{12}			-0,001801640704
h_{13}			0,000353713799

Coefficients	$N = 8$	$N = 9$	$N = 10$
h_0	0,054415842243	0,03807794736	0,0266700579
h_1	0,312871590914	0,24383467461	0,1881768000
h_2	0,675630736297	0,60482312369	0,5272011889
h_3	0,585354683654	0,65728807805	0,6884590394
h_4	-0,015829105256	0,13319738582	0,2811723436
h_5	-0,284015542961	-0,29327378327	-0,2498464243
h_6	0,000472484573	-0,09684078322	-0,1959462743
h_7	0,128747426620	0,14854074933	0,1273693403
h_8	-0,017369301001	-0,03072568147	0,0930573646
h_9	-0,044088253930	-0,06763282906	-0,0713941471
h_{10}	0,013981027917	0,00025094711	-0,0294575368
h_{11}	0,008746094047	0,02236166212	0,0332126740
h_{12}	-0,004870352993	-0,00472320475	0,0036065535
h_{13}	-0,000391740373	-0,00428150368	-0,0107331754
h_{14}	0,000675449406	0,00184764688	0,0013953517
h_{15}	-0,000117476784	0,00023038576	0,0019924052
h_{16}		-0,00025196318	-0,0006858566
h_{17}		0,00003934732	-0,0001164668
h_{18}			0,0000935886
h_{19}			-0,0000132642

Tableau 1.2 Coefficients des filtres de Daubechies pour N moment nuls [6].

Les fonctions d'échelles et ondelettes de cette famille pour les ordres 2, 3 et 4 sont présentées dans la figure (1.12), où on peut constater clairement que la régularité de ces ondelettes augmente avec N .

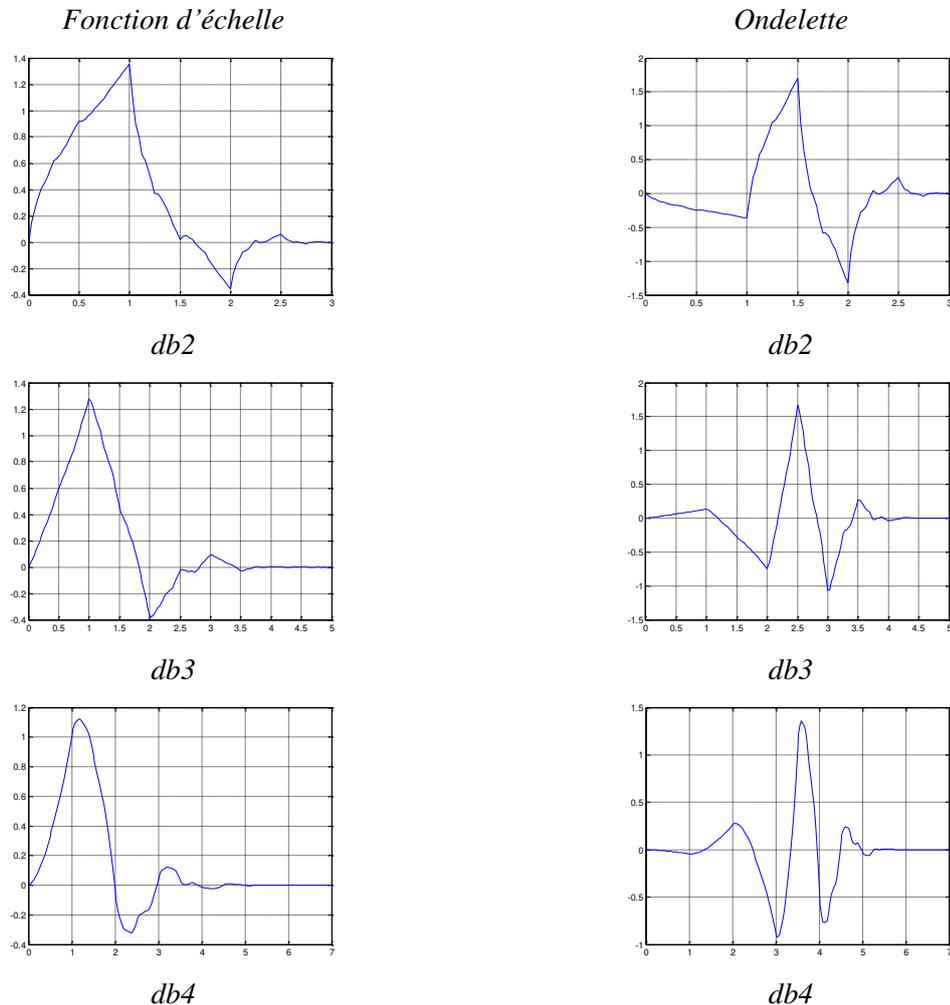


Figure 1.12 Fonction d'échelle et ondelette de Daubechies : dbN

1.6.3 Symlettes

À part les ondelettes de *Daubechies1* ($db1$), tous les ondelettes de *Daubechies* sont très asymétriques, afin de remédier ce problème (l'abandon de la symétrie), les ondelettes Symlettes sont construites de sorte à avoir des fonctions analysantes les moins asymétriques possibles. Il s'agit à nouveau d'ondelettes qui ont un support minimal égal à $[-N + 1, N]$ avec N moments nuls. Les symlettes d'ordre 2 et 3 sont représentées dans la figure (1.13).

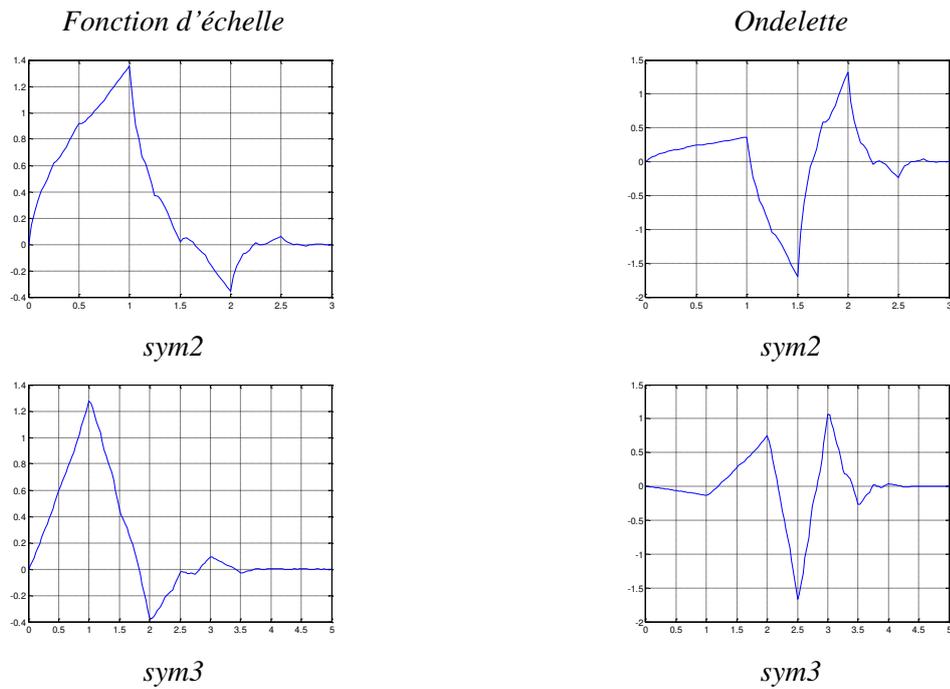


Figure 1.13 fonction d'échelle et ondelette des symlettes d'ordre 2 et 3

1.6.4 Coiflettes

Construites par *I. Daubechies* sur la demande de *R. Coifman*, les coiflets constituent une famille d'ondelettes possédant une propriété inhabituelle : la fonction d'échelle φ associée vérifie [27] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \varphi(t) dt = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq k < N \quad (1.22)$$

Cette condition implique une augmentation de la taille du support de ψ : l'ondelette correspondante appelée « coiflette », en anglais « coiflet », a un support de taille $3N - 1$ au lieu de $2N - 1$ pour une ondelette de Daubechies. Les coiflettes d'ordre 1 et 2 sont représentées dans la figure (1.14).

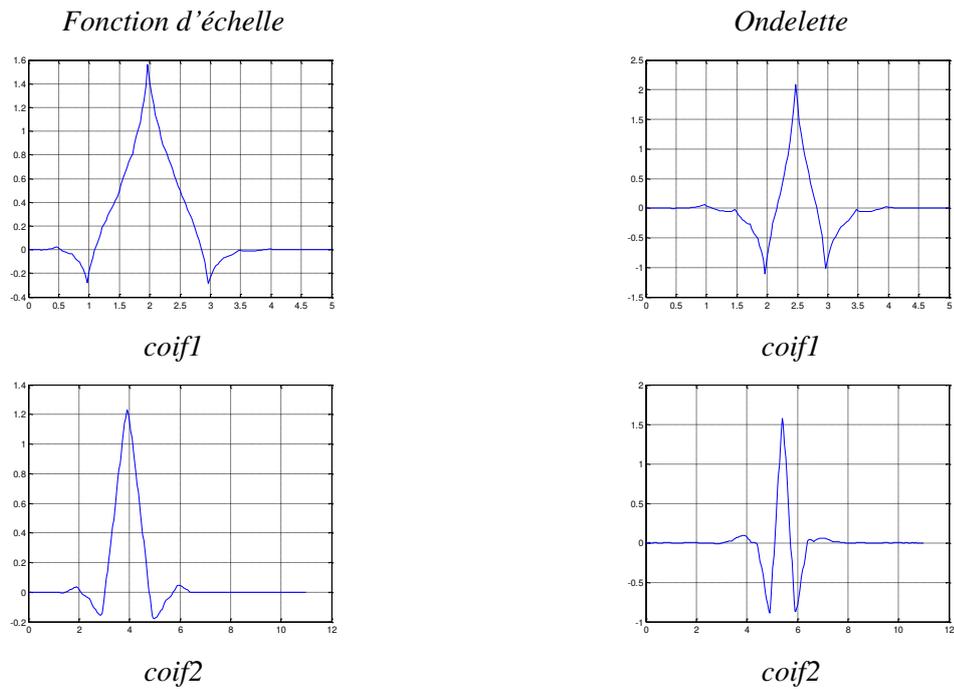


Figure 1.14 fonction d'échelle et ondelette des coiflettes d'ordre 1 et 2

1.6.5 Ondelettes de Meyer

Ce sont des ondelettes régulières, indéfiniment dérivables et à décroissance rapide. En effet, φ et ψ sont de classe C^∞ car leur transformée de Fourier est à support compact, $\hat{\psi}(w) = 0$ au voisinage de $w = 0$, toutes ses dérivées sont nulles en $w = 0$, ce qui montre que ψ a une infinité de moments nuls. L'ondelette de Meyer est orthogonale et symétrique, elle se construit dans le domaine fréquentiel avec des filtres miroirs conjugués $\hat{h}(w)$ qui sont de classe C^n et qui vérifient [27] :

$$\begin{cases} 2^{+1/2} & \text{si } w \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \\ 0 & \text{si } w \in [-\pi, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, \pi] \end{cases} \quad (1.23)$$

La figure 1.15 présente la fonction d'échelle et l'ondelette de Meyer.

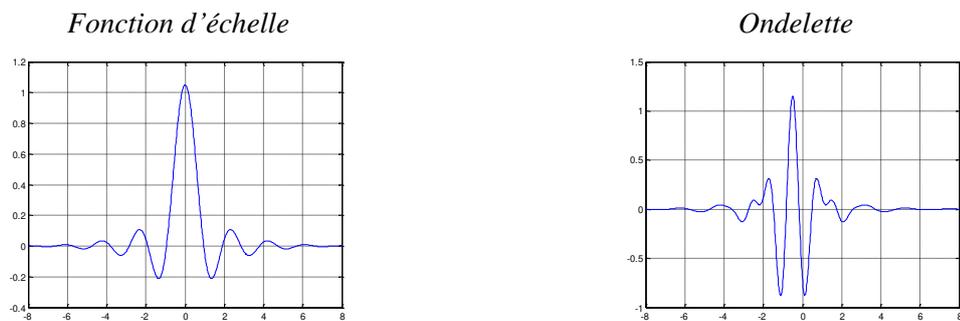


Figure 1.15 fonction d'échelle et ondelette de Meyer

1.6.6 Ondelettes splines polynomiales

Les B-splines (ou *box-splines*) sont des fonctions obtenus par « auto-convolution » de la fonction porte ou box notée $\beta_+^0(t)$:

$$\beta_+^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.24)$$

Ainsi une B-spline de degré n sera définie par l'expression :

$$\beta_+^n(t) = \underbrace{\beta_+^0(t) * \beta_+^0(t) * \dots * \beta_+^0(t)}_{n+1 \text{ fois}} \quad (1.25)$$

Ou par la représentation

$$\beta_+^n(t) = \text{[box]} * \text{[box]} * \dots * \text{[box]}$$

Où * désigne le produit de convolution.

La figure 1.16 représente des fonctions splines pour diverses valeurs de n , (pour plus de détail voir [27]). Cependant les figures 1.17 et 1.18 montrent respectivement le graphe de l'ondelette spline linéaire ($n = 1$) et l'ondelette spline cubique ($n = 3$) ainsi que leur fonction d'échelle.

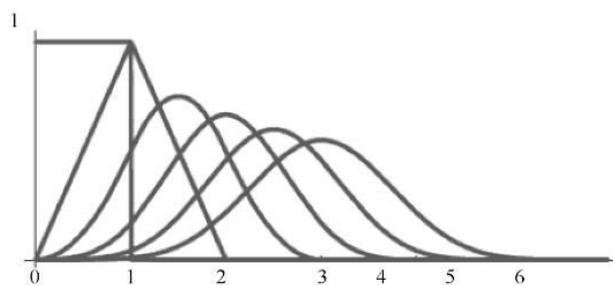


Figure 1.16 Fonctions splines pour diverses valeurs de n

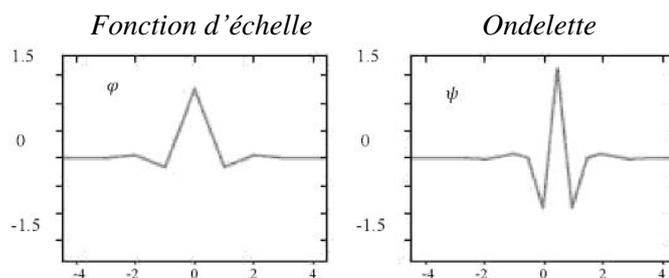


Figure 1.17 Ondelette spline linéaire (à droite) et sa fonction d'échelle (à gauche)

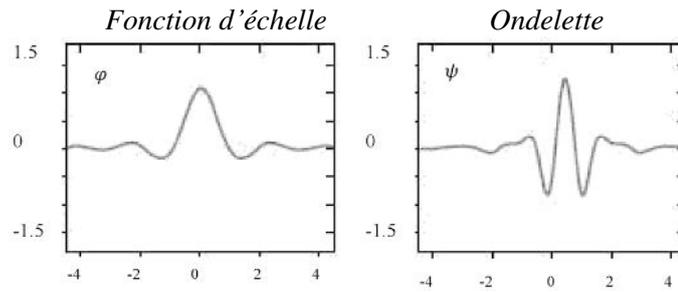


Figure 1.18 Ondelette spline cubique (à droite) et sa fonction d'échelle (à gauche)

1.7 Introduction aux ondelettes fractionnaires

La transformée en ondelettes fractionnaire (FRWT) est une généralisation de la transformée en ondelettes classique (WT). Cette transformée est proposée afin de rectifier les limitations de la transformée de Fourier fractionnaire (FRFT). Elle a la capacité de représenter les signaux dans le domaine temporelle/fréquentiel, avec plus de flexibilité et de précision. Au cours de ces dernières décades, les ondelettes fractionnaires ont été proposées avec ses deux versions continues et discrètes, dont l'idée est basée en premier temps sur la combinaison de la transformée en ondelettes classique avec la transformée de Fourier fractionnaire [8]. Rapidement l'idée est reformulée, où la construction devient plus simple, plus précise et ne présente pas une grande difficulté, surtout pour le cas continue dont l'utilisation des fonctions mathématiques avec l'intégration des notions de la dérivé fractionnaire, lors de la construction, a facilité l'opération. On peut citer à titre d'exemple les ondelettes issues de la fonction gaussienne et ses dérivés fractionnaires, la fonction spline avec des degrés fractionnaires [10], comme il paraît dans la figure (1.19), et la fonction de distribution de Cole-Cole qui est illustrée dans la figure (1.20) [11] :

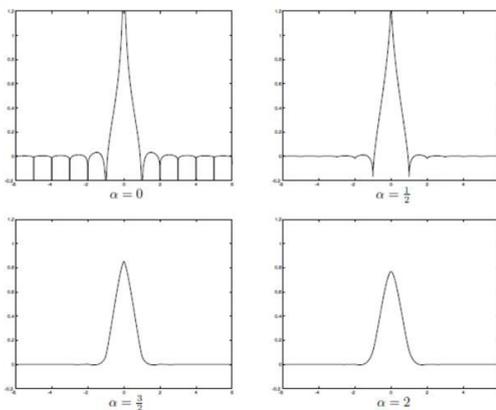


Figure 1.19 les ondelettes B-splines fractionnaires pour différents degrés [10].

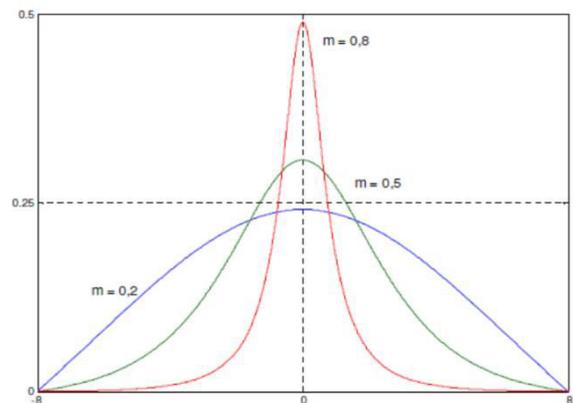


Figure 1.20 La fonction de distribution de Cole-Cole [11].

En revanche, dans le cas discret, la définition de la transformée en ondelettes fractionnaire discrète n'est pas encore rapportée dans la littérature. Par conséquent, une définition est consolidée en discrétisant sa version continue. D'autre part, la construction des bases d'ondelettes fractionnaires discrètes peut se réaliser avec la généralisation des filtres qui les constituent, via l'utilisation du retard numérique d'ordre fractionnaire [28].

Récemment, plusieurs modèles d'ondelettes fractionnaires ont été proposés et développés, dont la conception diffère selon la méthode de construction et d'implémentation, ce qui en résulte un large panorama d'applications [14-17].

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les bases théoriques de la transformée en ondelettes. Après avoir rappelé la transformée de Fourier et ses limitations vis-à-vis des signaux non stationnaires, une solution a été introduite pour pallier aux limitations de la TF, il s'agit de la transformée de Fourier à fenêtre glissante (transformée de Gabor). Mais, celle-ci n'est pas pleinement adéquate à cause du choix de la fenêtre d'analyse qui pourra compromettre la notion de résolution et de stationnarité du signal analysé. Cela nous a conduit à introduire la transformée en ondelette comme outil très performant dans l'analyse des signaux non stationnaires. Après avoir détaillé les caractéristiques et les propriétés de cette transformée (avec ses deux versions continues et discrète) ainsi sa relation avec l'AMR et les bancs de filtres à reconstruction parfaite, nous avons exposé une vue générale de quelques ondelettes célèbres qui existent dans la littérature. La dernière partie est consacrée à une introduction sur les ondelettes fractionnaires où nous avons présenté brièvement quelques modèles, dont parmi eux se situe notre modèle qui est basé sur le retard numérique d'ordre fractionnaire, cet outil est l'objectif de notre prochain chapitre.



Joseph Louis Lagrange
(25 janvier 1736 — 10. avril 1813)

I cannot say whether I will still be doing geometry ten years from now. It also seems to me that the mine has maybe already become too deep and unless one finds new veins it might have to be abandoned. Physics and chemistry now offer a much more glowing richness and much easier exploitation. Also, the general taste has turned entirely in this direction, and it is not impossible that the place of Geometry in the Academies will someday become what the role of the Chairs of Arabic at the universities is now.

By Joseph Louis Lagrange

Chapitre 2

Retard numérique d'ordre fractionnaire

2.1 Introduction

Les opérateurs d'ordre fractionnaire ont été considérablement appliqués dans différents domaines de la science et de l'ingénierie depuis ces traces initiales au 19^{ème} siècle [44], [51-56]. Ils se partagent en deux classes : la classe des opérateurs analogiques (l'intégrateur et le dérivateur d'ordre fractionnaire) et la classe des opérateurs numériques (le retard et l'avance d'ordre fractionnaire).

Dans le cas des opérateurs d'ordre fractionnaire numériques, le retard fractionnaire a fait l'objet de nombreuse recherche, où son implémentation peut donner des résultats particulièrement surprenants. Il est conçu pour retarder le signal d'entrée discret par une quantité fractionnaire. On peut trouver ses applications dans très nombreux domaines du traitement du signal numérique. Il permet par exemple d'estimer, de mesurer et de contrôler précisément le retard entre deux ou plusieurs canaux d'émission ou de réception. Il intervient également dans la correction automatique de systèmes numériques de mesure, la conception du filtre en peigne, la conversion analogique-numérique, l'annulation d'écho, la synthèse et le

codage de la parole et la modélisation d'instruments de musique, etc. [29-30]. Ces applications sont données à titre d'exemples et la liste des applications est loin d'être exhaustive.

Cependant l'implémentation pratique du retard fractionnaire reste une tâche irréalisable car il est représenté par une fonction irrationnelle dont sa réponse impulsionnelle est infiniment longue, ceci est similaire à un filtre non-causal, qui ne peut pas être rendu causal par aucun décalage fini dans le temps. Donc il est nécessaire d'utiliser des méthodes de conception basées sur des techniques d'approximation [29].

Les méthodes de conception du retard fractionnaire sont également très diverses. La majorité des techniques de conception qui ont été proposées dans la littérature, se concentrent exclusivement sur l'approximation du retard fractionnaire par des filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) et les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) [31-37].

Dans ce chapitre nous introduirons des notions de base sur le retard numérique fractionnaire, commencerons par sa définition, ces caractéristiques ainsi que les raisons pour lesquelles l'approximation du retard d'ordre fractionnaire est nécessaire.

La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la description des différentes méthodes utilisées pour approximer le retard numérique d'ordre fractionnaire idéal. Deux familles différentes d'approximations seront présentées. La première est basée sur les filtres RIF et la seconde sur les filtres RII.

2.2 Définition du retard fractionnaire

Dans cette section, nous définissons le retard fractionnaire idéal en temps continue, discret et par référence au temps continu.

2.2.1 Retard fractionnaire en temps continue

En temps continu, le retard fractionnaire sur un signal $x_c(t)$ s'exprime :

$$y_c = x_c(t - \tau) \quad (2.1)$$

Où τ constitue le retard fractionnaire désiré.

En utilisant la transformée de Fourier, nous pouvons écrire la fonction de transfert du retard comme suit :

$$\begin{aligned}
 H_{C, idéal}(j\omega_c) &= \frac{Y_C(\omega_c)}{X_C(\omega_c)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y_c(t) e^{-j\omega_c t} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\omega_c t} dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x_c(t - \tau) e^{-j\omega_c t} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\omega_c t} dt} \\
 &= \frac{e^{-j\omega_c \tau} X_C(\omega_c)}{X_C(\omega_c)} = e^{-j\omega_c \tau}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Où $\omega_c = 2\pi f$ est la pulsation (rad/s).

2.2.2 Retard fractionnaire en temps discret

Dans le cas discret, le retard sur un signal à bande limitée, s'exprimera comme suit :

$$y(n) = x(n - D) \tag{2.3}$$

Où D est un nombre réel, représente le retard souhaité. La transformée de Fourier en temps discret (TFTD) du signal $y(n)$ est définie comme suit :

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - D) e^{-j\omega n} = e^{-j\omega D} X(\omega) \tag{2.4}$$

La fonction de transfert d'un élément de retard discret idéal peut être définie comme suit:

$$H_{idéal}(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{e^{-j\omega D} X(\omega)}{X(\omega)} = e^{-j\omega D} \tag{2.5}$$

Avec $|\omega| \leq \pi$, ($H_{idéal}$) représente la fonction de transfert d'un retard idéal en temps discret. Autrement dit, cette fonction est appelée aussi **filtre idéal de retard fractionnaire**. Afin d'être cohérent avec la notation de la transformée en Z utilisée généralement dans le traitement numérique du signal, la fonction de transfert $H_{idéal}$ s'exprimera comme suit :

$$H_{idéal}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-D} X(z)}{X(z)} = z^{-D} \tag{2.6}$$

La figure 2.1 représente le schéma bloc d'un élément de retard idéal.

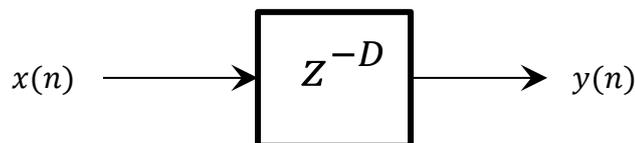


Figure 2.1 Schéma-bloc de l'élément de retard fractionnaire idéal.

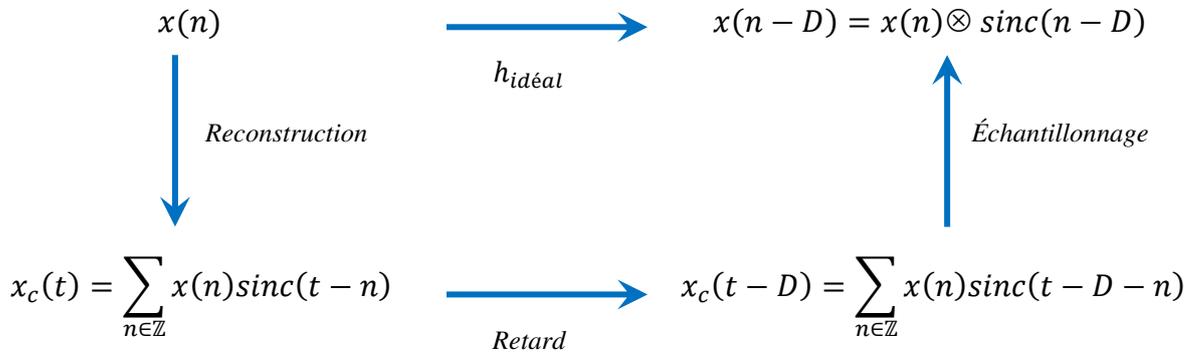
Produire un retard fractionnaire en temps discret, consiste à calculer l'amplitude du signal continu sous-jacent au signal discret (reconstruction) entre deux échantillons. Cela nécessite d'aborder le retard fractionnaire avec une autre manière basé sur une approche plus traditionnelle, il s'agit du retard par référence au temps continu [38].

2.2.3 Retard par référence au temps continu

La définition du retard fractionnaire par référence au temps continu est basée sur la réinterprétation du théorème de Shannon-Whittaker. Celui-ci établit une formule de reconstruction d'un signal continu à bande limitée $x_c(t)$ à partir d'une séquence discrète $x(n)$ en utilisant la fonction de Whittaker [38]. Le signal continu $x_c(t)$ sera décalé par un retard D et ré-échantillonné. En fin, nous obtenons le retard fractionnaire désiré D sur la séquence discrète $x(n)$, où la sortie $y(n)$ de l'élément de retard fractionnaire idéal en temps discret est calculée comme suit :

$$y(n) = x(n - D) = x(n) \otimes \text{sinc}(n - D) \quad (2.7)$$

Il est noté que cette définition est limitée aux signaux discrets à bande limitée. Le schéma commutatif suivant rend compte de la définition des retards par référence au temps continu [43]:



Où $h_{idéal}$ représente le filtre de retard fractionnaire par référence au temps continu.

2.3 Caractéristiques du retard fractionnaire

Le retard fractionnaire défini par la fonction de transfert $H_{idéal} = e^{-j\omega D}$ avec $|\omega| \leq \pi$ et D réel, possède les caractéristiques d'amplitude et de phase suivantes :

- Réponse en amplitude : $|H_{idéal}(e^{j\omega})| = 1$
- Réponse en phase : $arg\{H_{idéal}(e^{j\omega})\} = -D\omega$

Le retard fractionnaire peut être considéré comme un système passe-tout, où son retard de phase et son retard de groupe sont, respectivement, donnés comme suit :

- Retard de phase : $\tau_{p, idéal} = -\frac{\arg\{H_{idéal}(e^{j\omega})\}}{\omega} = D$
- Retard de groupe : $\tau_{g, idéal} = -\frac{\partial \arg\{H_{idéal}(e^{j\omega})\}}{\partial \omega} = D$

Il paraît donc que le retard idéal décale toutes les composantes fréquentielles du même retard D . D'autre part la transformée de Fourier inverse de l'équation (2.5) donne la réponse impulsionnelle (R.I.) du retard, elle est définie comme suit :

$$\begin{aligned} h_{idéal}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{idéal}(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega D} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-D)} d\omega \\ &= \frac{e^{j\omega\pi(n-D)} - e^{-j\omega\pi(n-D)}}{j2\pi(n-D)} = \frac{\sin[\pi(n-D)]}{\pi(n-D)} = \text{sinc}(n-D) \end{aligned} \quad (2.8)$$

La fonction représentée par l'équation (2.8) est une version décalée et échantillonnée du sinus cardinal. Elle s'annule pour toutes les valeurs entières de D exceptée celles où $D = n$, où elle vaut exactement 1.

Si D est entier, la réponse impulsionnelle correspond exactement à la fonction de Dirac décalée. La R.I. d'un retard entier se réduit donc à un simple retard au sens traditionnel numérique comme le montre la figure 2.2.a.

Par contre, si D est réel et non entier, la R.I. ne s'annule pour aucune valeur de n . La R.I. est dans ce cas infiniment longue (voir figure 2.2.b.). $h_{idéal}(n)$ correspond alors à un filtre non-causal, qui ne peut pas être rendu causal par aucun décalage fini dans le temps. Ce qui rend l'implémentation du retard fractionnaire une tâche irréalisable, donc il faut utiliser des approches d'approximations, c'est ce que est abordé dans la section suivante.

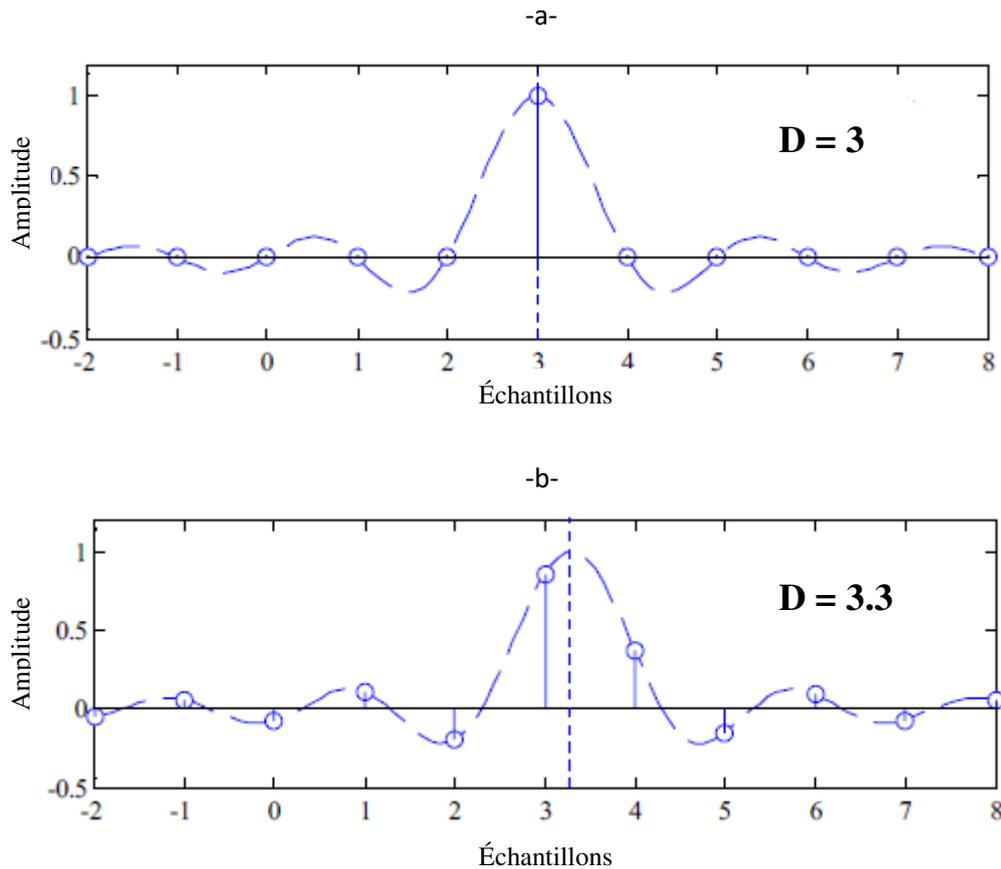


Figure 2.2 La fonction sinus cardinal décalée : (a) $D=3$ échantillons
(b) $D=3.3$ échantillons [38]

2.4 Approximation du retard fractionnaire

La plupart des techniques de conception proposées dans la littérature pour approximer le retard fractionnaire se concentrent exclusivement sur les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) et les filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR), plus de détails sur ce sujet dans [29].

2.4.1 Approximation du retard fractionnaire par des filtres RIF

Afin d'approximer le retard fractionnaire par des filtres RIF, un large éventail de stratégies a été proposé telles que les méthodes de fenêtrages, l'approximation qui est basée sur le critère de platitude maximale à basse fréquence équivalente à l'interpolation de Lagrange, la méthode Minimax ou de Tchebychev et les méthodes stochastiques [29]. Cependant la fonction de transfert du filtre RIF d'ordre N approxinant le retard idéal décrit par l'équation (2.8) est donnée par :

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h(n)z^{-n} \quad (2.9)$$

Où N est l'ordre du filtre, $h(n)$ avec $(n = 0, 1, \dots, N)$ sont les coefficients réels qui forment la réponse impulsionnelle du filtre RIF.

La différence entre la fonction de transfert idéale du retard fractionnaire et son approximation est définie par la fonction d'erreur suivante :

$$E(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) - H_{idéal}(e^{j\omega}) \quad (2.10)$$

Où le principe de la conception consiste à minimiser la fonction d'erreur ci-dessus (2.10).

2.4.1.1 Méthode des moindres carrés

Cette méthode [29], [38] consiste à minimiser la fonction d'erreur des moindres carrés :

$$E_{LS} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |E(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_{idéal}(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (2.11)$$

Dans le cas des filtres RIF d'ordre N , la solution optimale consiste à tronquer les $N + 1$ coefficients de $h_{idéal}(n)$ autour de sa valeur maximale, où l'erreur d'approximation diminue avec l'ordre N . La réponse impulsionnelle du filtre RIF approximant le retard fractionnaire obtenue est donnée comme suit :

$$h(n) = \begin{cases} \text{sinc}(n - D) & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.12)$$

Dans le but de minimiser l'erreur, l'ordre N doit être choisi suivant les relations suivantes [38] :

$$\frac{N-1}{2} \leq D \leq \frac{N+1}{2}, \quad \text{pour } N \text{ impair}$$

La localisation du retard fractionnaire D doit être entre les deux pics centraux du sinus cardinal.

$$\frac{N}{2} - 1 \leq D \leq \frac{N}{2} + 1, \quad \text{pour } N \text{ pair}$$

Dans ce cas, Le retard D doit être localisé à moins d'un demi-échantillon du pic central de sinus cardinal.

Cette méthode de construction de filtre RIF pour approximer le retard fractionnaire Z^{-D} présente un inconvénient majeur, il réside dans l'existence des oscillations dans la réponse en

fréquence tant en amplitude qu'en phase et c'est indépendamment de l'ordre du filtre (phénomène de Gibbs).

2.4.1.2 Méthode des moindres carrés avec bande passante réduite

Cette méthode est basée sur l'utilisation d'un interpolateur passe-bas comme filtre prototype à la place d'un filtre interpolateur toute bande [29], La solution idéale qui minimise l'erreur de l'équation (2.11) dans l'intervalle de fréquence $\left[0, \frac{\alpha}{2}\pi\right]$, où $0 < \alpha < 1$ est donnée par :

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\sin[\alpha\pi(n-D)]}{\pi(n-D)} & N \leq n \leq M + N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.13)$$

Où M est l'indice du premier échantillon différent de zéro, il est défini par :

$$M = \begin{cases} \text{round}(D) - \frac{N}{2} & \text{pour } N \text{ pair} \\ \lfloor D \rfloor - \frac{N-1}{2} & \text{pour } N \text{ impair} \end{cases} \quad (2.14)$$

Où $\text{round}(\cdot)$ dénote l'opération d'arrondi à l'entier le plus proche et $\lfloor \cdot \rfloor$ symbolise la fonction partie entière. Il faut noter que cette méthode réduit le phénomène de Gibbs mais la bande passante aussi sera réduite (d'un facteur α).

2.4.1.3 Interpolateur de Lagrange: Critère de platitude maximale

Au lieu de minimiser la fonction d'erreur (2.10), cette méthode consiste à maximiser la platitude de la fonction d'erreur $E(e^{j\omega})$ autour de la fréquence $\omega = 0$ [29]. Ceci signifie que la fonction d'erreur $E(e^{j\omega})$ ainsi que ses N premières dérivées à la fréquence $\omega = 0$, sont égal à zéro. Les coefficients du filtre RIF d'ordre N obtenus de cette manière sont les même que ceux utilisés dans l'interpolation classique de Lagrange d'ordre N passant par $N + 1$ points équidistants. Le critère de platitude maximale à la fréquence nulle, pour $k = 0, 1, \dots, N$, s'écrit :

$$\left. \frac{d^k E(e^{j\omega})}{d\omega^k} \right|_{\omega=0} = \left. \frac{d^k}{d\omega^k} \left[\sum_{n=0}^N h(n)e^{-j\omega n} - e^{-j\omega D} \right] \right|_{\omega=0} = 0 \quad (2.15)$$

Pour $k = 0$, on aura :

$$\sum_{n=0}^N h(n) - 1 = 0 \rightarrow \sum_{n=0}^N h(n) = 1 \quad (2.16)$$

Une des exigences du critère de platitude maximale est que la somme des coefficients du filtre doit donc être égale à 1, ou bien l'amplitude de la réponse fréquentielle du filtre RIF d'ordre N doit être égale à 1 à la fréquence nulle ($\omega = 0$).

Pour $k \neq 0$ nous obtenons N équations linéaires, comme suit :

$$\sum_{n=0}^N n^k h(n) = (D)^k, \quad k = 1, \dots, N \quad (2.17)$$

Nous avons donc un système de $N + 1$ équations à $N + 1$ inconnues qui se résout simplement sous forme matricielle. La solution de ce système donne les $N + 1$ coefficients du filtre RIF d'ordre N comme suit [38] :

$$h(n) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^N \frac{D - k}{n - k} \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N \quad (2.18)$$

avec :

$$\frac{N - 1}{2} \leq D \leq \frac{N + 1}{2} \quad \text{pour } N \text{ impair}$$

$$\frac{N}{2} - 1 \leq D \leq \frac{N}{2} + 1 \quad \text{pour } N \text{ pair}$$

Autrement dit, le filtre interpolateur de Lagrange (F.I.L.) d'ordre N et de retard D correspond au filtre R.I.F. d'ordre N dont la fonction de transfert vérifie le critère de platitude maximale [39]. En outre, les coefficients du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre $N = 1, 2$ et 3 , approximant le retard fractionnaire sont donnés dans le tableau suivant :

	$h[0]$	$h[1]$	$h[2]$	$h[3]$
$N=1$	$1-D$	D		
$N=2$	$(D-1)(D-2)/2$	$-D(D-2)$	$D(D-1)/2$	
$N=3$	$-(D-1)(D-2)(D-3)/6$	$D(D-2)(D-3)/2$	$-D(D-1)(D-3)/2$	$D(D-1)(D-2)/6$

Tableau 2.1 Coefficient du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre $N=1, 2$ et 3

Des exemples de réponses en amplitudes et en phases du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre 1, 2 et 3 approximant le retard fractionnaire idéal Z^{-D} ($D = 0.25, 0.5, 0.7, \dots$) sont montrés dans les figures 2.3, 4, 5, 6, 7 et 8.

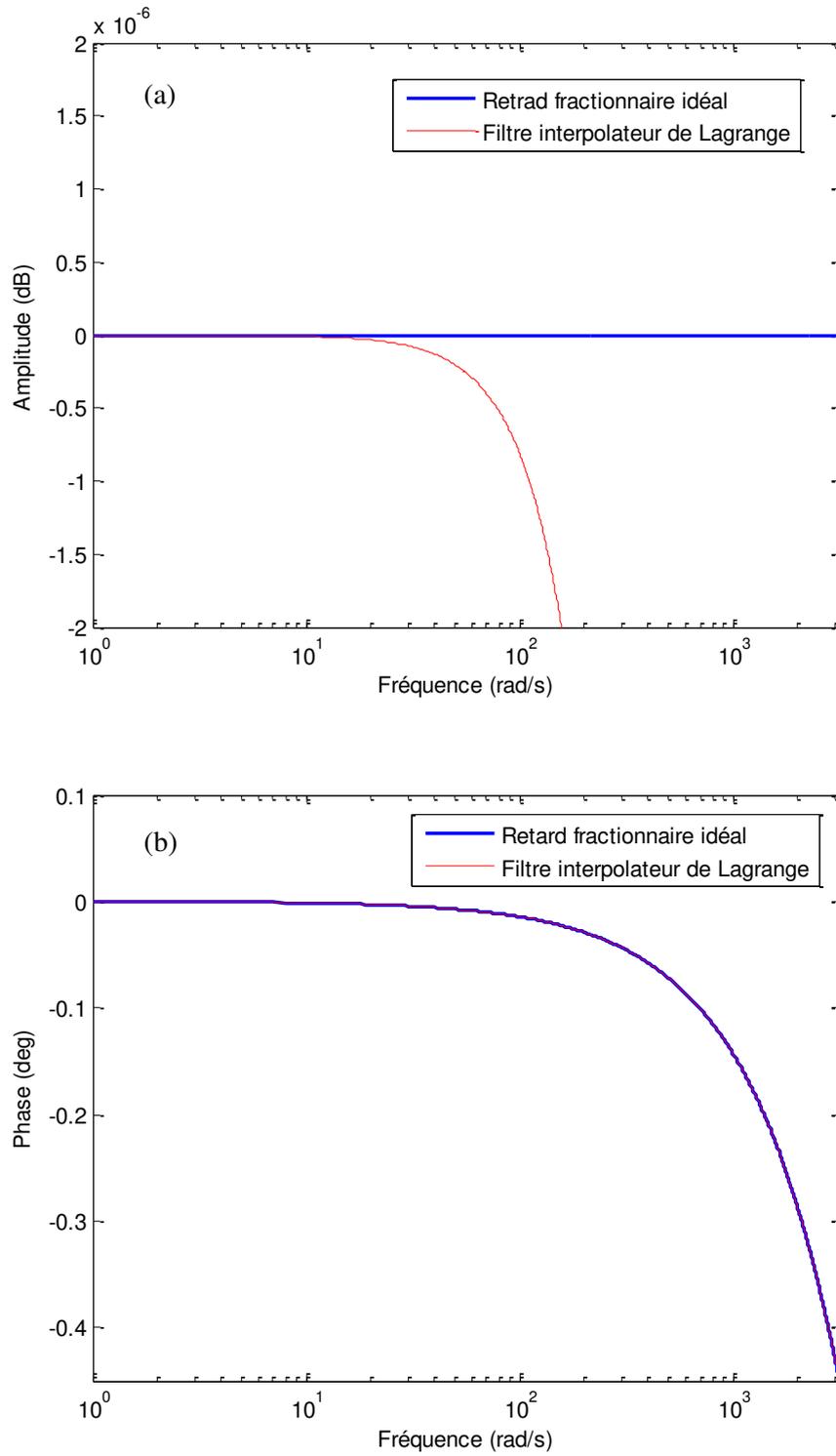


Figure 2.3 Réponse fréquentielle du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal $Z^{-0.25}$ et du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre 1: (a) Amplitude (b) Phase.

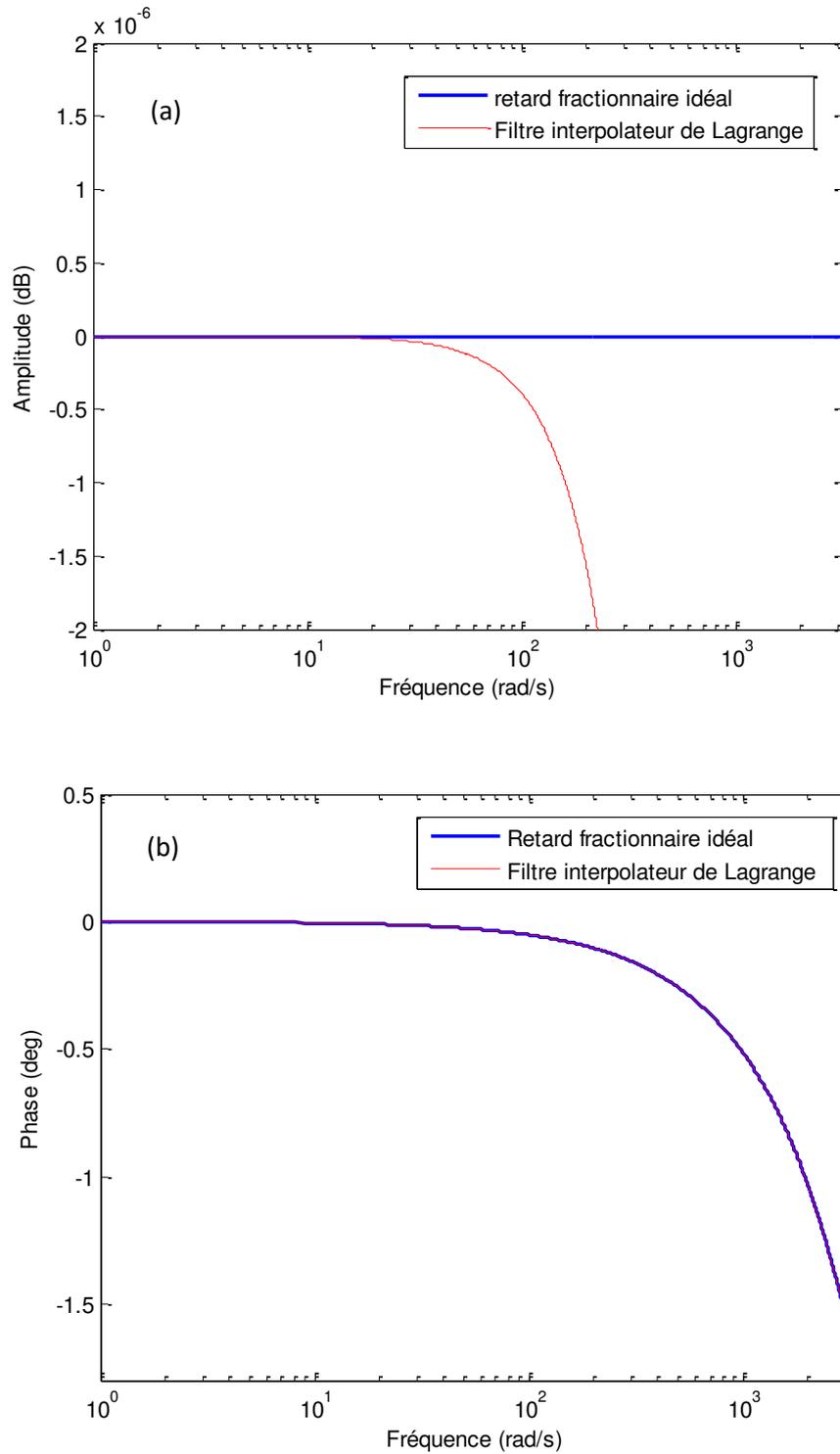


Figure 2.4 Réponse fréquentielle du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal $Z^{-0.9}$ et du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre 1: (a) Amplitude (b) Phase.

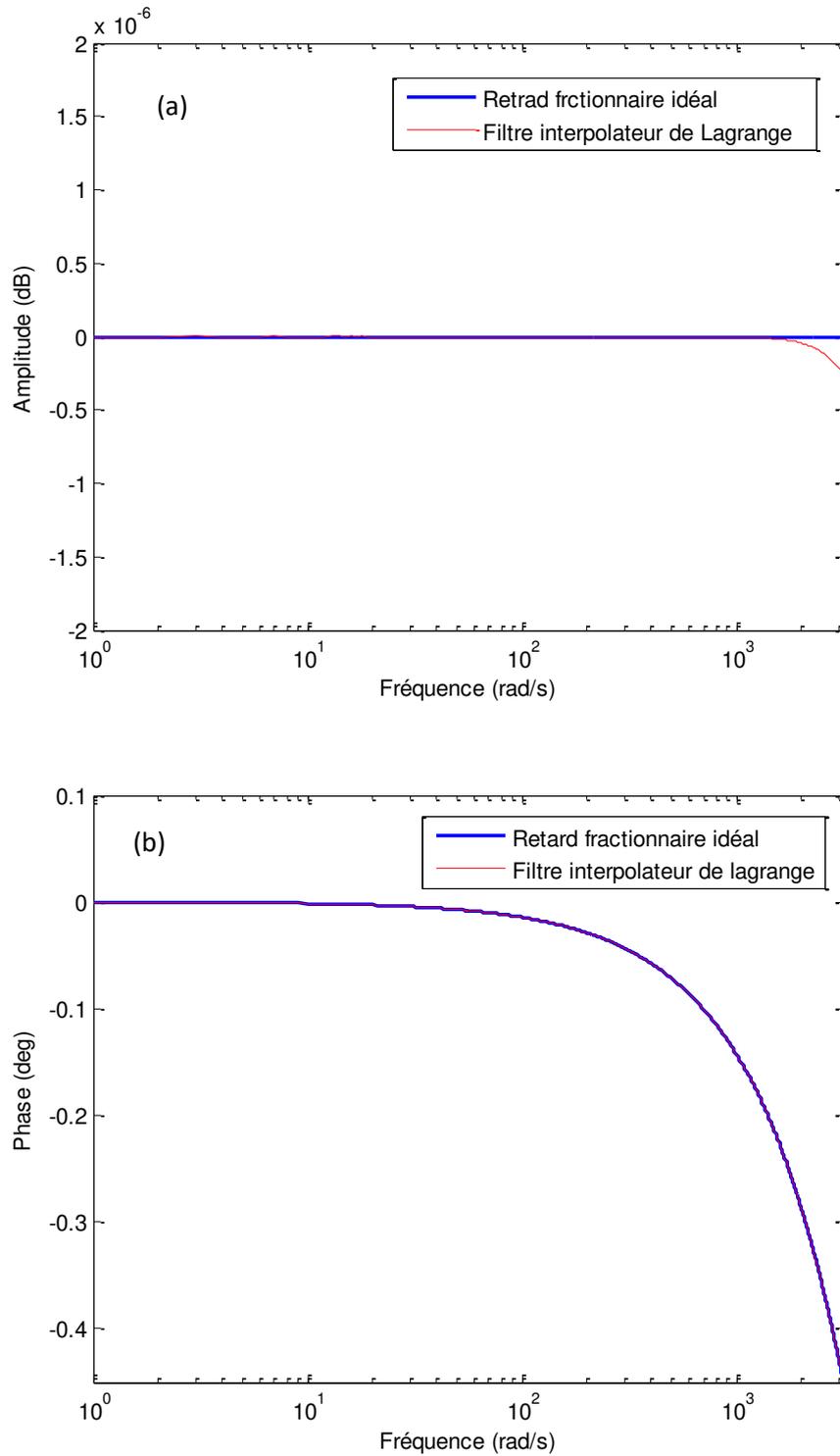


Figure 2.5 Réponse fréquentielle du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal $Z^{-0.5}$ et du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre 2: (a) Amplitude (b) Phase.

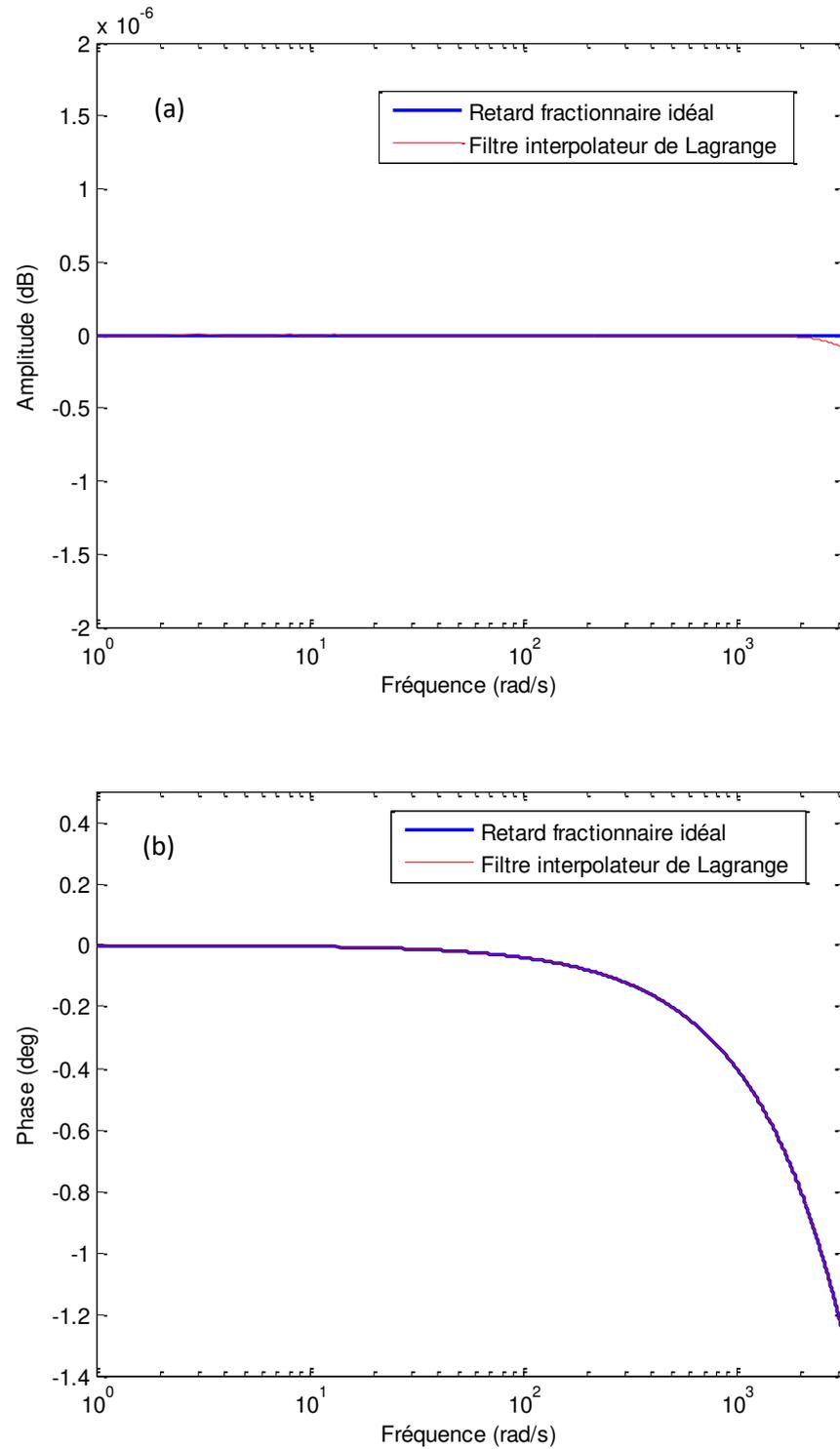


Figure 2.6 Réponse fréquentielle du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal $Z^{-0.7}$ et du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre 2: (a) Amplitude (b) Phase.

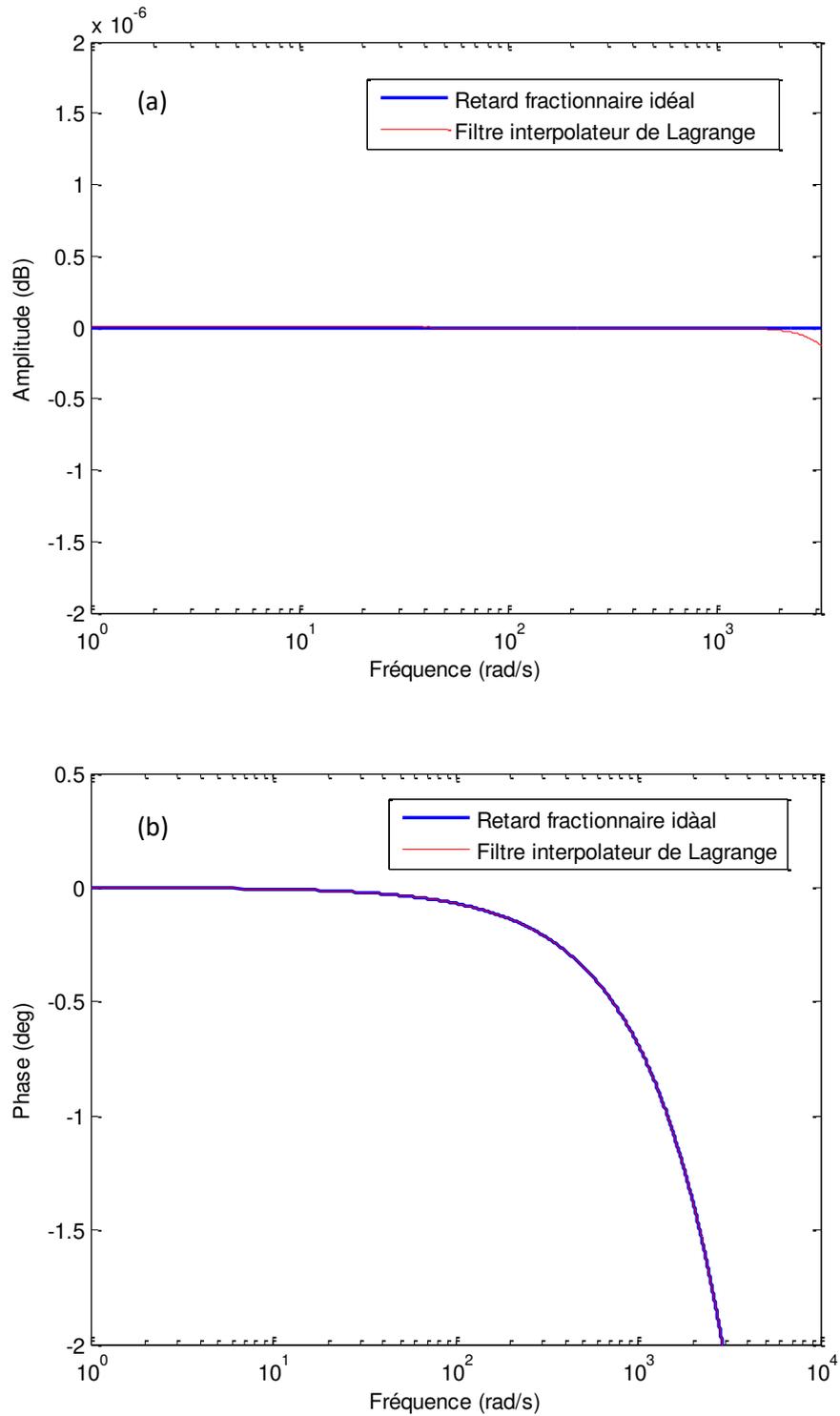


Figure 2.7 Réponse fréquentielle du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal $Z^{-1.2}$ et du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre 3: (a) Amplitude (b) Phase.

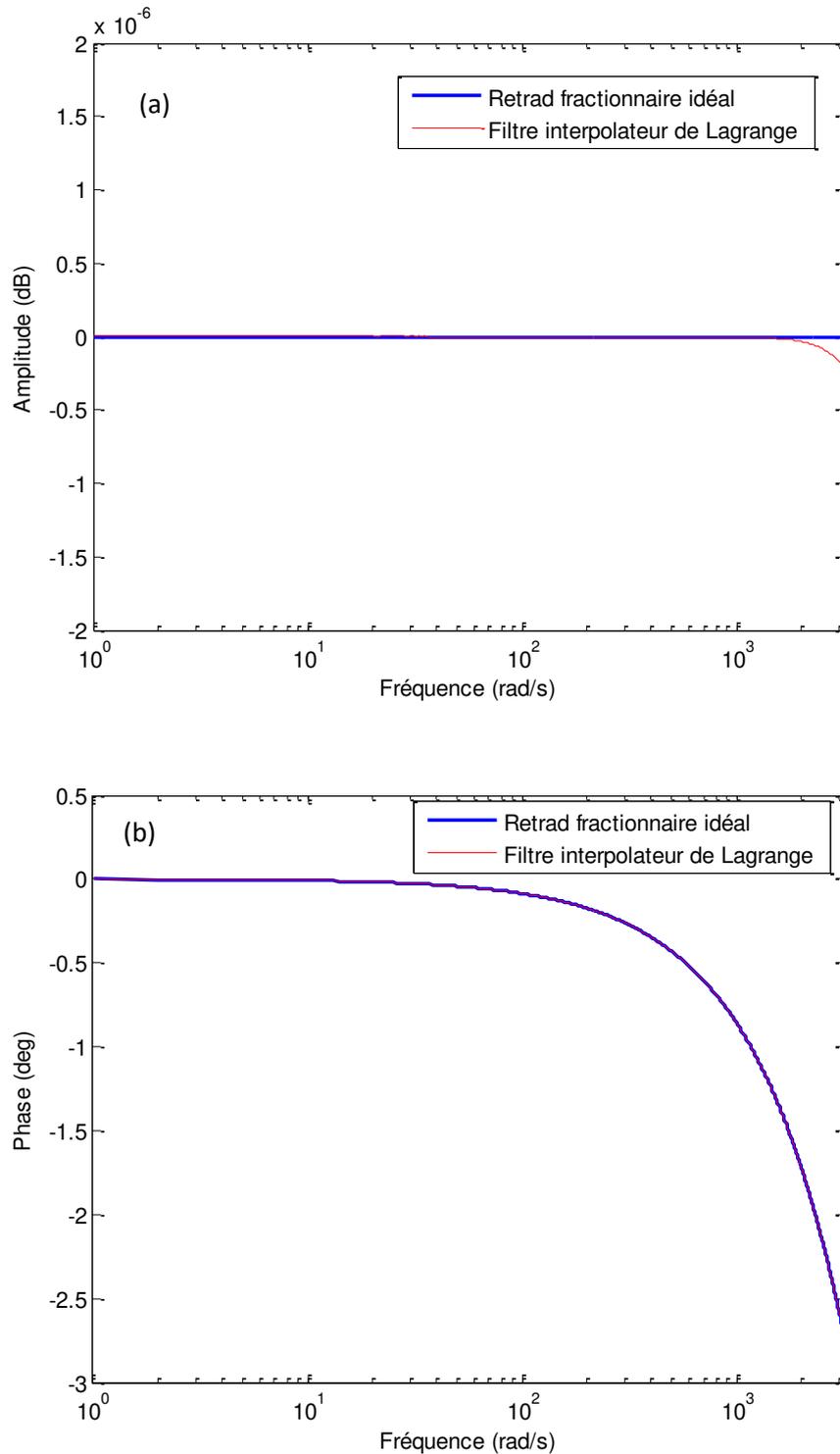


Figure 2.8 Réponse fréquentielle du retard numérique d'ordre fractionnaire idéal $Z^{-1.5}$ et du filtre interpolateur de Lagrange d'ordre 3: (a) Amplitude (b) Phase.

Il est remarquable de noter que les coefficients des filtres interpolateur de Lagrange sont symétriques ce qui implique un intérêt décisif surtout dans le cas du retard fractionnaire variable. En revanche, l'erreur d'approximation des filtres interpolateur de Lagrange dépend de la partie fractionnaire du retard D et de la parité de l'ordre du filtre [40], [29].

2.4.1.4 Autre méthode d'approximation du retard fractionnaire par des filtres RIF

En principe, il existe d'autres techniques d'approximation basées sur les filtres RIF. On peut mentionner à titre d'exemple : l'approche de fenêtrage de la réponse impulsionnelle, la méthode générale des moindres carrés pour réponse fréquentielle complexe, la méthode Minimax ou de Chebyshev et les méthodes stochastiques. Toutes ces méthodes sont exposées en détailles dans [29].

2.4.2 Approximation du retard fractionnaire par des filtres RII

Dans cette section nous présentons brièvement l'utilisation des filtres RII pour la réalisation du retard fractionnaire idéal. En fait, plusieurs méthodes ont été proposées et développées, tout d'abords très intuitives, mais progressivement de plus en plus complexes. Commencent par les filtres RII passe tout ou à phase non minimale qui ont une réponse en amplitude constante unitaire quel que soit l'ordre du filtre. Leur réponse en phase est de plus en plus paramétrable [29]. Les filtres passe tout réalisés selon ces critères sont généralement très précis aux basses fréquences, mais contrairement aux filtres R.I.F., ils souffrent de problèmes de transitoires de réponse lorsque le retard varie [38]. Pour pallier à ces problèmes, de nouvelles techniques, plus performantes, ont été proposées ; citons notamment la méthode de Zhang [41], la méthode de Pei et Wang [42] et les méthodes basées sur la discrétisation des systèmes d'ordre fractionnaire [43].

2.4.2.1 Filtrés RII Passe-Tout

La fonction de transfert du filtre R.I.I. passe-tout d'ordre N s'exprime [38] :

$$H(z) = \frac{z^{-N}A(z^{-1})}{A(z)} = \frac{a_N + a_{N-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{-(N-1)} + z^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{N-1}z^{-(N-1)} + a_Nz^{-N}} \quad (2.19)$$

Les pôles et les zéros d'un filtre R.I.I. passe-tout étant inverse l'un de l'autre, la réponse en amplitude est constante et égale à un : $|H(e^{j\omega})| = 1$. Rappelons que la stabilité des filtres numériques est assurée à condition que tous les pôles de la fonction de transfert doivent se trouver à l'intérieur du cercle unité. La réponse en phase s'exprime :

$$\arg\{H(e^{j\omega})\} = -N\omega + 2\theta_D(\omega) \quad (2.20)$$

Où $\theta_D(\omega)$ est la réponse en phase de son dénominateur :

$$\theta_D(\omega) = \arctan \left\{ \frac{\sum_{k=0}^N a_k \sin(k\omega)}{\sum_{k=0}^N a_k \cos(k\omega)} \right\} \quad (2.21)$$

Avec $a_0 = 1$.

La réalisation de retards fractionnaires sous forme de filtres RII passe-tout peut se faire en appliquant le critère de platitude maximale sur le retard de phase [44]. Thiran [45] propose une solution analytique pour retrouver les coefficients d'un filtre passe-tout d'ordre N approximant un retard fractionnaire D :

$$a_k = (-1)^k \binom{N}{k} \prod_{n=0}^{N-k} \frac{D - N + n}{D - N + k + n} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, N \quad (2.22)$$

Où $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$ est le produit binomial.

Le filtre passe tout est stable lorsque $N - 1 < D$, cependant l'intervalle qui présente une bonne approximation du retard fractionnaire correspond à $N - 1 < D < N$ [46]. En revanche, les filtres RII passe tout comme il est indiqué au-dessus ils souffrent de problèmes de transitoires de réponse lorsque le retard varie [38].

Récemment, Pei et Hsu [42] ont proposé une technique similaire à celles développées par Thiran; où, les coefficients des filtres RII. passe-tout d'ordre N approximant le retard fractionnaire z^{-D} sont obtenus par la troncature de l'expansion de série de puissance de la fonction $(1 - z^{-1})^{-D}$. Donc, les coefficients a_k de l'équation (2.19) peuvent être donnés comme suit :

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k! 2^k} \sum_{n=0}^{N-k} \frac{(D)_{n+k}}{n! 2^n} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, N \quad (2.23)$$

2.4.2.2 Conception des filtres RII par la méthode de Zhang

Zhang a proposé une nouvelle technique basée sur l'application du critère de platitude maximale pour approximer le retard fractionnaire par des filtres RII. La fonction de transfert du filtre RII approximant le retard fractionnaire est représentée comme suit [41] :

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}{1 + \sum_{r=1}^M b_r z^{-r}} \quad (2.24)$$

Avec les coefficients a_n et b_r sont donnés sous forme compacte, ils sont déterminés par :

$$\begin{cases} a_n = (-1)^{n+1} \frac{M!}{n!(N-n)!} \frac{\prod_{i=0}^N (i - D_{entier} - m)}{\prod_{i=0}^M (i - n + D_{entier} + m)} \\ b_r = (-1)^r \frac{M!}{r!(M-r)!} \prod_{i=0}^N \frac{i - D_{entier} - m}{i - r - D_{entier} - m} \end{cases} \quad (2.25)$$

Où m est un nombre réel tel que $-0.5 < m < 0.5$, et D_{entier} dénote le retard d'ordre entier

2.4.2.3 Autres Filtres RII

Nous avons vu précédemment que la plus part des méthodes d'approximation du retard fractionnaire basées sur les filtres RII sont à phase non minimale, cependant il existe d'autres méthodes de conception qui conduisent à des filtres RII stables causales et à phase minimale, en se basant sur les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire [44]. En fait, ces techniques sont basées sur la discrétisation d'un système d'ordre fractionnaire en utilisant des fonctions génératrices tel que : la transformation Avant, la transformation d'Euler et la transformation bilinéaire ou de Tustin [47- 49]. Pour chacune de ces transformations, la fonction de transfert du retard numérique d'ordre fractionnaire est calculée à partir de la fonction de transfert d'un système d'ordre fractionnaire analogique représenté par un pôle à puissance fractionnaire comme [50] :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m} \quad (2.26)$$

Où m est un nombre réel tel que $0 < m < 1$, ω_c la fréquence de coupure à -3m dB.

Il faut noter que la fonction de transfert du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale obtenue dans les trois modèles précédents est une fonction irrationnelle [51]. Donc la méthode de conception du retard numérique d'ordre fractionnaire idéale par des filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie est simplement basée sur la discrétisation de l'approximation de la fonction de transfert analogique du pôle à puissance fractionnaire par une fonction rationnelle. (Plus de détails dans [43]).

2.5 Conclusion

Ce chapitre introduit des notions de bases sur les retards numériques d'ordre fractionnaires. Après avoir rappelé quelques définitions et propriétés, nous avons également vu que la réalisation du retard fractionnaire nécessite des approximations puisque le filtre réalisant la réponse impulsionnelle idéale n'est pas réalisable. Nous avons présenté plusieurs techniques d'approximations sous forme de filtres RIF: par fenêtrage de la réponse impulsionnelle idéale, par application du critère de platitude maximale équivalent à l'interpolation de Lagrange et sous forme de filtres RII à phase minimale et non minimale.



Ingrid Daubechies
(17 August 1954)

What we know is a drop; what we don't know is an ocean.

By Isaac Newton

Chapitre 3

Construction des ondelettes fractionnaires

3.1 Introduction

Depuis leur apparition, les ondelettes ont apporté un nouveau souffle dans tous les domaines techniques et scientifiques. Elles permettent, en effet, de couvrir tous les inconvénients et les insuffisances de l'analyse de Fourier, cela les conduit pour être la solution idéale pour tous les problèmes. Cet optimisme excessif a naturellement conduit à quelques déconvenues. En fait, la transformée en ondelettes nécessite un bon choix d'ondelette mère analysante, malheureusement il n'y a pas d'ondelette adaptée à tous les cas. Pour certaines applications, il arrive que l'on ne trouve pas, parmi les ondelettes connues, celle qui convient. Donc il est naturel d'essayer de construire une nouvelle ondelette qui peut s'adapter et couvrir un large panorama de problèmes.

Par ailleurs, les travaux de Mallat sur les bancs de filtres et l'algorithme en pyramide ont conduit à l'apparition de nombreuses architectures de la transformée en ondelettes [57]. Dans une très grande proportion, les architectures qui se basent sur le calcul fractionnaire connaissent actuellement un intérêt considérable. Le principal avantage d'avoir un ordre fractionnaire est la flexibilité et la précision, cela permet un ajustement continu des paramètres clés tels que la régularité et la localisation des fonctions de base. [12]. Ces avantages peuvent être exploités pour améliorer plusieurs approches et résoudre beaucoup de problèmes en traitement de signal.

En revanche, la majorité des méthodes de conception des ondelettes fractionnaires sont basées sur la transformée de Fourier fractionnaire (FRFT) [8], cependant, la construction qui se base sur les opérateurs fractionnaires numérique reste un sujet qui n'a pas été bien discuté dans la littérature. Pour cette raison nous avons introduit, dans ce chapitre, une nouvelle méthode de conception des ondelettes basée sur le retard numérique d'ordre fractionnaire, où nous présenterons, tout d'abord, le principe de base de la construction des ondelettes fractionnaires par le biais du retard numérique d'ordre fractionnaire, où nous verrons comment construire des bancs de filtres d'ordre fractionnaire qui conduisent à des ondelettes fractionnaires, ensuite nous exposerons les différentes étapes de construction de plusieurs types d'ondelettes fractionnaire en se basant sur des familles d'ondelettes classique tel que l'ondelette de Haar et les ondelettes à support compact. En fin nous présenterons un récapitulatif sur les différentes propriétés des ondelettes fractionnaire proposées tout en signalant leurs avantages et leurs inconvénients.

3.2 Principe de construction des ondelettes fractionnaires via un retard numérique d'ordre fractionnaire

Du point de vue structurel la TOD est identique à un banc de filtres itéré ce qui lui donne son caractère multi-résolution. Donc, on peut utiliser des filtres d'ordre fractionnaires pour implémenter des ondelettes fractionnaires, comme le montre la figure 3.1, où \tilde{h}_f , \tilde{g}_f , \bar{h}_f et \bar{g}_f sont, respectivement, les fonctions de transfert d'ordre fractionnaire des filtres d'analyse et de synthèse, passe-bas et passe-haut.

En fait, en se basant sur les opérateurs fractionnaires on peut construire des filtres fractionnaires qui mènent à des ondelettes ont des propriétés intéressantes (précision, flexibilité, régularité, etc.).

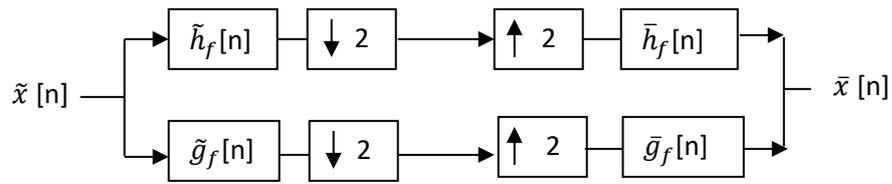


Figure 3.1 décomposition et reconstruction du signal par la transformée en ondelette discrète fractionnaire unidimensionnel.

La construction commence en générale par le choix d'un filtre numérique passe-bas connu, ayant la propriété d'orthogonalité, ensuite on le généralise par le biais du retard numérique d'ordre fractionnaire, où le retard entier Z^{-n} , $n \in \mathbb{Z}$, sera remplacé par un retarde fractionnaire Z^{-D} , $D \in \mathbb{R}$, tout en assurant des propriétés d'orthogonalité, compacité de support et régularité correctes. Par ailleurs et à cause de sa représentation par une fonction irrationnelle, le retard numérique d'ordre fractionnaire sera simulé par un filtre que l'on appellera "filtre de retard fractionnaire". On peut, ensuite, construire par une simple modulation, le filtre fractionnaire passe haut à partir du filtre fractionnaire passe bas et en déduire par l'algorithme cascade [6] la fonction d'échelles et la fonction d'ondelette associées. La reconstruction parfaite est assurée par des filtres de synthèses fractionnaires, construits conformément aux conditions de l'équation (1.10).

3.3 Construction des Ondelettes fractionnaires

Dans la section précédente, on a éclairci le principe de la construction des ondelettes fractionnaires via un retard numérique d'ordre fractionnaire, où la construction commence, en général, par le choix et la généralisation du filtre numérique associé, ensuite le reste peut être déduit. Dans cette partie, nous verrons la construction de deux bases d'ondelettes fractionnaires, dont elles seront basées sur des familles d'ondelettes classiques telles que l'ondelette de Haar et les ondelettes à support compact.

3.3.1 Construction des ondelettes de Haar fractionnaires

3.3.1.1 Conception des filtres de Haar fractionnaires

Nous prendrons comme point de départ de la construction, le filtre passe bas de Haar. Il s'agit d'un filtre orthogonal de type RIF qui a une phase linéaire, un seul moment nul et un support finie, sa fonction de transfert est donnée par [24] :

$$\tilde{H}(Z) = \frac{(1+Z^{-1})}{\sqrt{2}} \quad (3.1)$$

Nous proposons une généralisation de cette fonction à un ordre fractionnaire en exploitant l'opérateur fractionnaire Z^{-D} avec $D \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{H}_f(Z) = \frac{(1+Z^{-D})}{\sqrt{2}} \quad (3.2)$$

Cette fonction peut être écrite d'une manière plus générale comme suit:

$$\tilde{H}_f(Z) = A + B \cdot Z^{-D} \quad (3.3)$$

Où D est l'ordre du filtre, A et B sont ses coefficients. L'orthogonalité et la régularité des fonctions d'échelle et de l'ondelette sont assurées par le bon choix des coefficients A et B , dans le cas classique $D = 1$, $A = 1/\sqrt{2}$ et $B = 1/\sqrt{2}$

En revanche, il est convient de noter que le retard numérique d'ordre fractionnel Z^{-D} est représenté par une fonction irrationnelle dans laquelle la réponse impulsionnelle est infiniment longue. Ceci est similaire à un filtre non causal pour tout décalage temporel fini, ce qui rend son implémentation une tâche irréalisable et implique une implémentation très limitée de la fonction de transfert du filtre fractionnaire \tilde{H}_f . Par conséquent, il est nécessaire d'utiliser des techniques d'approximations pour obtenir une implémentation réalisable du retard numérique d'ordre fractionnel Z^{-D} et, bien évidemment, une représentation rationnelle de la fonction de transfert du filtre fractionnaire \tilde{H}_f .

Dans notre travail, nous avons choisi la méthode basée sur l'interpolation de Lagrange pour concevoir des filtres approximant le retard numérique d'ordre fractionnaire. Le choix de cette méthode a été fait en raison de la facilité du calcul des coefficients de filtre à partir d'une équation de forme fermée et également du fait que le filtre obtenu par cette méthode présente une réponse en fréquence de magnitude complètement plate aux basses fréquences. La

fonction de transfert du filtre RIF approximant le RF est définie précédemment (chapitre II) par l'équation (2.9), on a donc :

$$Z^{-D} \approx \sum_{n=0}^N h[n]Z^{-n} \quad (3.4)$$

Où N est l'ordre du filtre, cependant $h[n]$ sont ces coefficient, qui sont calculés par l'équation (2.18). Ils sont définis dans le tableau II.1 (pour $N=1, 2$ et 3), (voir chapitre II).

Suivant la fonction (3.4), la fonction de transfert du filtre fractionnaire \tilde{H}_f (3.3) peut s'écrire comme suit :

$$\tilde{H}_f(Z) \approx A + B \cdot \left(\sum_{n=0}^N h[n]Z^{-n} \right) \quad (3.5)$$

Avec

$$\frac{N-1}{2} \leq D \leq \frac{N+1}{2} \quad \text{pour } N \text{ impair}$$

$$\frac{N}{2} - 1 \leq D \leq \frac{N}{2} + 1 \quad \text{pour } N \text{ pair}$$

Où $h[n]$ et N sont respectivement les coefficients et l'ordre du filtre RIF approximant le retard fractionnaire Z^{-D} , A et B sont les coefficients du filtre fractionnaire. Afin d'assurer l'orthogonalité et la régularité des fonctions d'échelle et d'ondelette, les coefficients A et B sont choisis selon les conditions suivantes [2-5], [25-26] :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, |\tilde{H}_f(\omega)|^2 + |\tilde{H}_f(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (3.6)$$

$$\tilde{H}_f(0) = \sqrt{2} \quad (3.7)$$

$$|\tilde{H}_f(\pi) = 0| \quad (3.8)$$

La condition (3.6) est une contrainte qui correspond à l'orthonormalité de la fonction d'échelle, cela signifie également que le filtre H_f est un filtre miroir conjugué [25]. La condition (3.7) est une simple normalisation, cependant la condition (3.8) assure la régularité des fonctions d'échelle et d'ondelette.

Il existe peu de solutions (coefficients A et B) qui assurent les trois conditions précédentes. Dans notre travail, nous avons calculé les coefficients A et B tout en assurant les deux

conditions (3.7) et (3.8), cependant la condition (3.6) est assurée approximativement c'est-à-dire :

$$|\tilde{H}_f(\omega)|^2 + |\tilde{H}_f(\omega + \pi)|^2 \approx 2 \quad (3.9)$$

$$|\tilde{H}_f(\omega)|^2 + |\tilde{H}_f(\omega + \pi)|^2 - 2 = \varepsilon \quad (3.10)$$

L'erreur ε est très petite et n'a aucun effet dramatique sur notre construction surtout pour $D \in [0.4, 1.7]$. La figure 3.2 montre le développement de l'erreur ε par rapport à D pour $N = 2$ (l'ordre du filtre FIR approximant le retard fractionnaire Z^{-D}), où il paraît clairement que les valeurs optimales du retard D qui présente les plus petites valeurs de ε sont concentrées dans l'intervalle $[0.4, 1.7]$, ce qui implique une limitation de l'ordre fractionnaire du filtre \tilde{H}_f . Donc, le filtre fractionnaire \tilde{H}_f génère des bases orthogonales régulières pour $0.4 < D < 1.7$, au-delà de cette intervalle la précision du calcul démunie et l'orthogonalité des bases obtenues sera perdue.

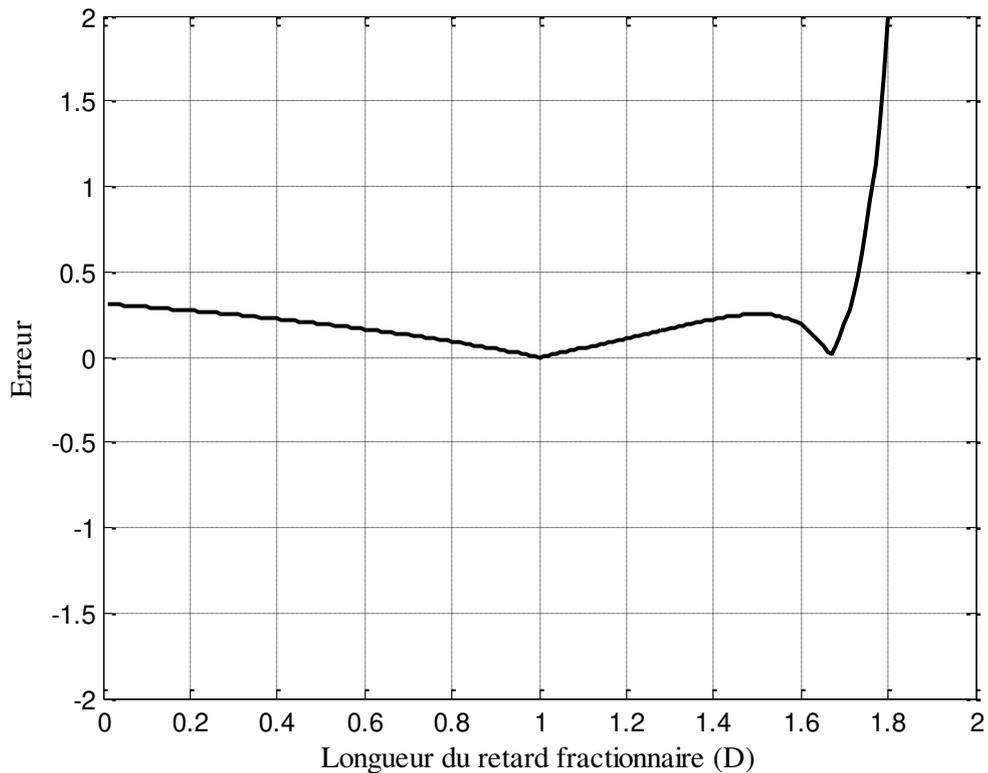


Figure 3.2 Développement de l'erreur ε par rapport à D

Les coefficients A et B du filtre fractionnaire sont donnés dans le tableau 3.1, pour $N = 1, 2$ et 3 . Les annexes A et B (page 105 et 108) illustrent respectivement le calcul détaillé des coefficients A , B et l'erreur ε .

	A	B
$N=1$	$\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{1 - (h[0] - h[1])}$	$\frac{\sqrt{2}}{1 - (h[0] - h[1])}$
$N=2$	$\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{1 - (h[0] - h[1] + h[2])}$	$\frac{\sqrt{2}}{1 - (h[0] - h[1] + h[2])}$
$N=3$	$\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{1 - (h[0] - h[1] + h[2] - h[3])}$	$\frac{\sqrt{2}}{1 - (h[0] - h[1] + h[2] - h[3])}$

 Tableau 3.1 Coefficients du filtre fractionnaire pour différentes valeurs de N

Selon le tableau ci-dessus, le filtre fractionnaire \tilde{H}_f est représenté par un nombre fini de coefficients non nuls, c'est-à-dire, il s'agit d'un filtre à support compact, où le nombre de coefficients est directement lié à l'ordre du filtre qui approxime le retard fractionnaire Z^{-D} , (longueur du filtre \tilde{H}_f = ordre du filtre approximant le retard fractionnaire + 1). La régularité de la fonction d'échelle et de l'ondelette est assurée tant que le zéro de $\tilde{H}_f(\omega)$ à $\omega = \pi$ soit d'ordre supérieur ou égale à 1 [26].

En revanche, le filtre fractionnaire passe-haut est une version modulée du filtre passe-bas, où la fonction de transfert est définie par la propriété des filtres à miroir en quadrature [58], ses coefficients sont donnés par l'expression suivante:

$$\tilde{g}_f[n] = (-1)^{N-n} \tilde{h}_f[N-n] \quad (3.11)$$

Cependant, les filtres fractionnaires de reconstruction (synthèses), passe-bas et passe-haut, (\bar{H}_f et \bar{G}_f), sont construits selon le système d'équation suivant [20] :

$$\begin{cases} \tilde{H}_f(\omega + \pi) \bar{H}_f(\omega) + \tilde{G}_f(\omega + \pi) \bar{G}_f(\omega) = 0, \\ \tilde{H}_f(\omega) \bar{H}_f(\omega) + \tilde{G}_f(\omega) \bar{G}_f(\omega) = 2, \end{cases} \quad (3.12)$$

Où leurs coefficients sont définis comme suit:

$$\bar{h}_f[n] = \tilde{h}_f[N-n], \quad (3.13)$$

$$\bar{g}_f[n] = \tilde{g}_f[N-n]. \quad (3.14)$$

Les réponses fréquentielles des filtres d'analyse et de synthèse ($\tilde{H}_f, \tilde{G}_f, \bar{H}_f$ et \bar{G}_f) sont ajustées par la variation du paramètre D , comme le montre la figure 3.3. Il paraît que la généralisation des filtres ordinaires via le retard fractionnaire Z^{-D} conduit à des filtres plus flexibles avec une meilleure précision, où les paramètres clés des filtres sont ajustés d'une manière continue.

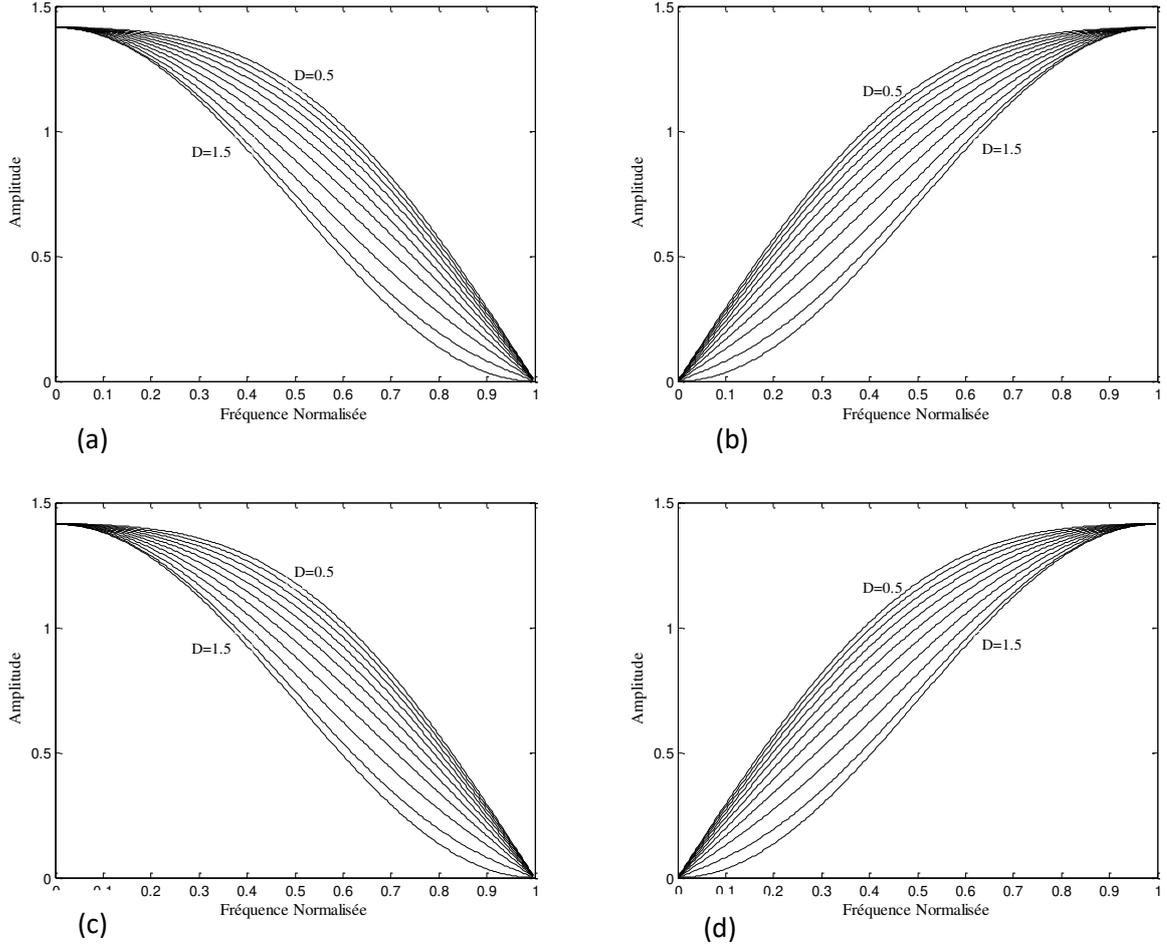


Figure 3.3 Réponses fréquentielles des filtres de Haar fractionnaires d'analyses et de synthèses pour $N=2$ et $D = 0.5 \dots 1.5$: (a) filtre d'analyse passe bas, (b) filtre d'analyse passe haut, (c) filtre de synthèse passe bas, (d) filtre de synthèse passe haut.

3.3.1.2 Construction de la fonction d'échelle et la fonction d'ondelette de Haar fractionnaires

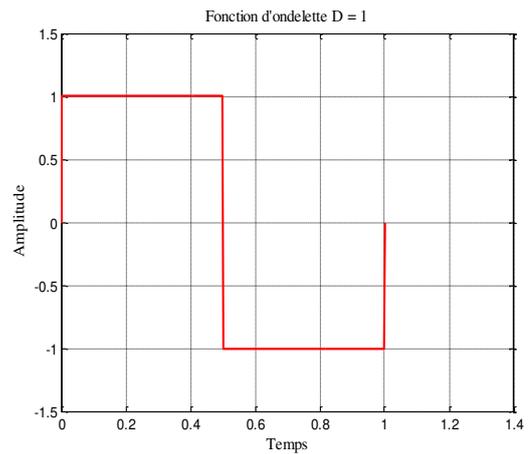
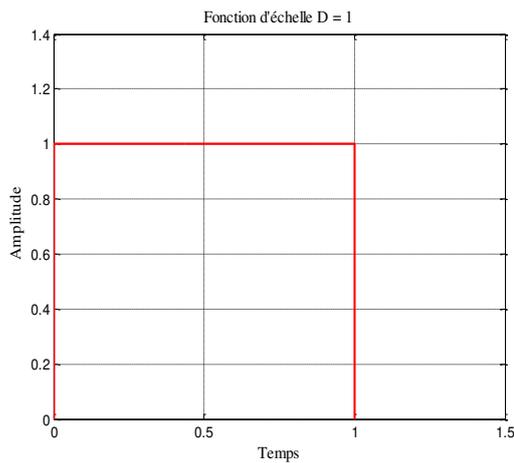
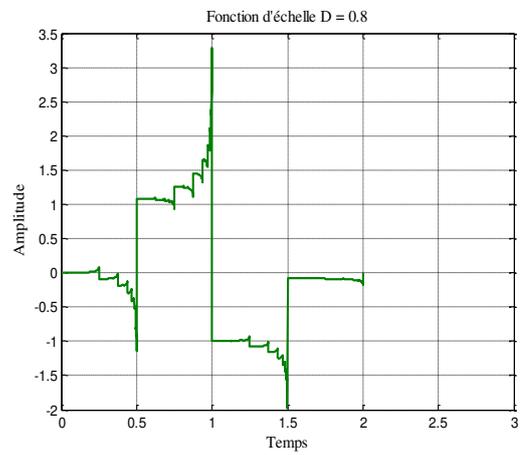
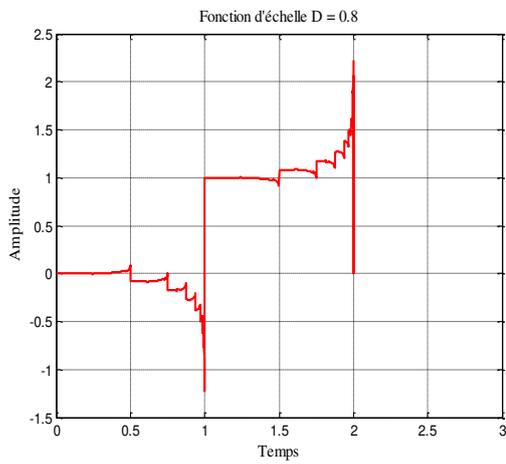
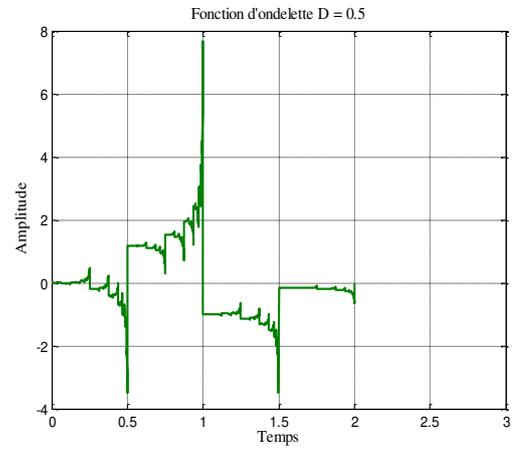
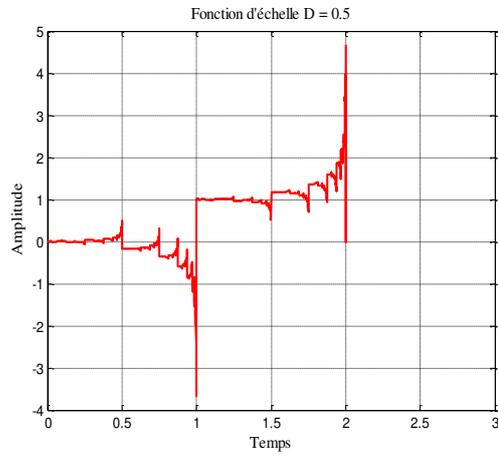
La construction des fonctions d'échelle et d'ondelette sont assurées par l'algorithme en cascade développé par *Ingrid Daubechies* [6]. Elles sont respectivement représentées, en fonction du filtre passe-bas $h_f[n]$ et du filtre passe-haut $g_f[n]$, par les expressions suivantes :

$$\varphi_f(x) = \sum_n \tilde{h}_f[n] \sqrt{2} \varphi_f(2x - n) \quad (3.15)$$

$$\psi_f(x) = \sum_n \tilde{g}_f[n] \sqrt{2} \varphi_f(2x - n) \quad (3.16)$$

La figure 3.4 présente les fonctions d'échelle et d'ondelette pour différentes valeurs de D : 0.5, 0.8, 1, 1.1, 1.3, 1.5 et 1.7. Il paraît que ces fonctions gagnent plus de régularité avec

l'augmentation du paramètre D , jusqu'à la valeur $D = 1.7$, où l'orthogonalité de la base obtenue est complètement perdue



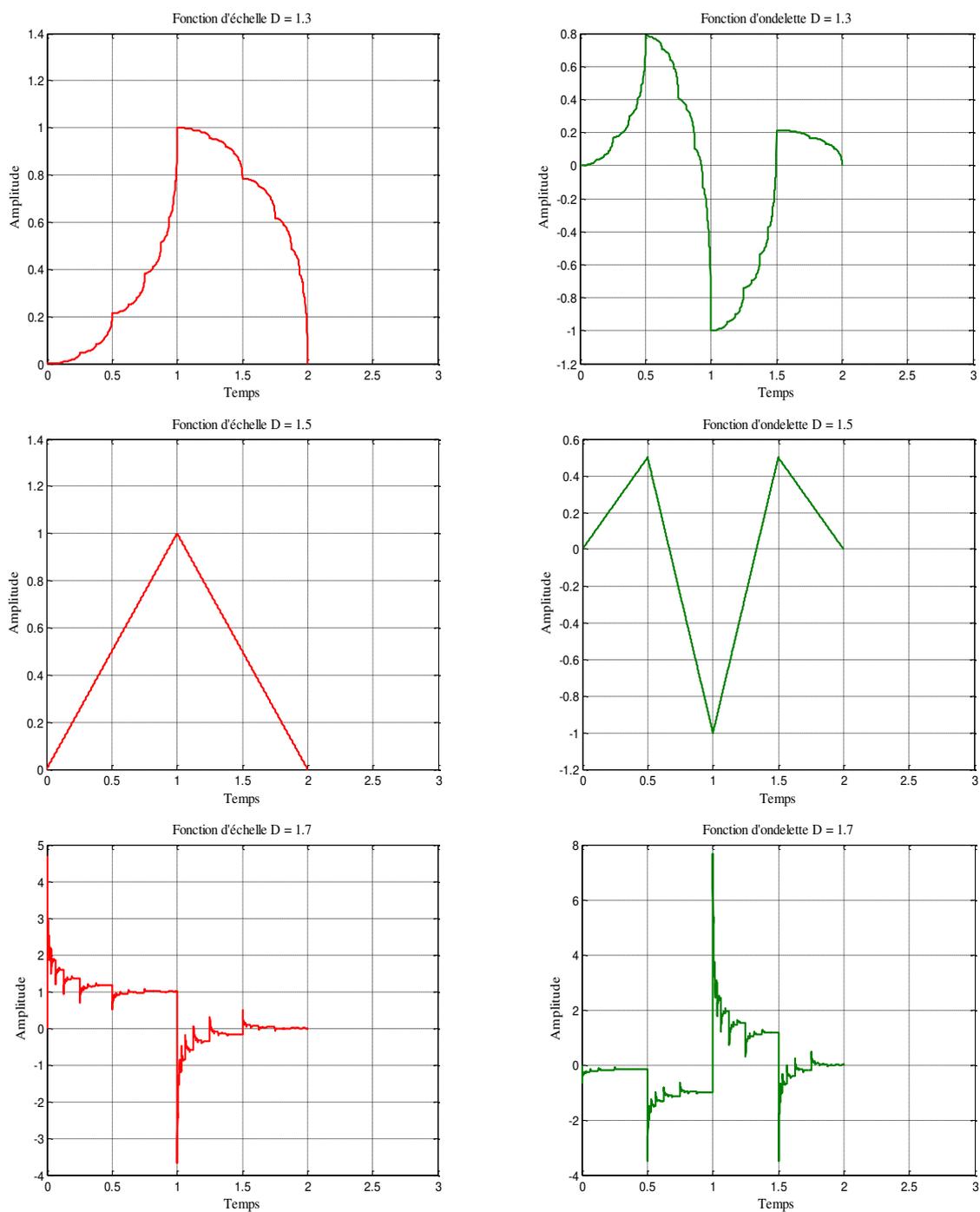


Figure 3.4 Fonctions d'échelle et d'ondelette pour différentes valeurs de D
(Base d'ondelette de Haar fractionnaire)

3.3.2 Construction des ondelettes fractionnaires à support compact

3.3.2.1 Filtrés fractionnaires à support compact

Dans ce cas, la construction est basée sur les filtres associés aux bases d'ondelette à support compact. Nous prendrons comme point de départ le cas des ondelettes de *Daubechies*: dbN , où $N = 2$ c'est-à-dire $db2$. La fonction de transfert du filtre passe-bas associé à la base d'ondelette $db2$ est donnée par [6]:

$$H = 0,483 + 0,836 \cdot Z^{-1} + 0,224 \cdot Z^{-2} - 0,129 \cdot Z^{-3} \quad (3.17)$$

Comme nous l'avons fait précédemment, la généralisation de ce filtre à un ordre fractionnaire est assurée via les retards fractionnaires Z^{-D1} , Z^{-D2} et Z^{-D3} , où $D1$, $D2$ et $D3$ appartient aux nombres réels :

$$H_f = 0,483 + 0,836 \cdot Z^{-D1} + 0,224 \cdot Z^{-D2} - 0,129 \cdot Z^{-D3} \quad (3.18)$$

Cette fonction peut être écrite d'une manière plus générale comme suit:

$$H_f = \alpha + \beta \cdot Z^{-D1} + \gamma \cdot Z^{-D2} + \delta \cdot Z^{-D3} \quad (3.19)$$

Dans ce cas le degré de liberté du filtre est plus élevé par rapport au cas précédent (filtres de Haar fractionnaires), c'est à dire nous sommes devant un cas dans lequel il y a plusieurs retards fractionnaires, où $D1, D2$ et $D3$ représentent les longueurs des retards fractionnaires, cependant α, β, γ et δ sont les coefficients du filtre. Le choix judicieux de ces coefficients assure l'orthogonalité et la régularité des fonctions d'échelle et d'ondelette.

Afin de simplifier les calculs, on peut représenter les longueurs des retards fractionnaires comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = 1 + m_1 \\ D_2 = 2 + m_2 \\ D_3 = 3 + m_3 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Où m_1, m_2 et m_3 représentent des nombres réels compris entre 0 et 2. ($m_1, m_2, m_3 \in [0,2[$).

La fonction de transfert du filtre H_f décrite par l'équation (3.19) sera représentée comme suit :

$$H_f = \alpha + \beta \cdot Z^{-1} \cdot Z^{-m_1} + \gamma \cdot Z^{-2} \cdot Z^{-m_2} + \delta \cdot Z^{-3} \cdot Z^{-m_3} \quad (3.21)$$

En revanche, il faut noter que le filtre décrit par la fonction de transfert (3.21) représente non seulement la généralisation du filtre passe-bas associé à la base $db2$ mais il représente une

généralisation de tous les filtres passe-bas associés aux bases d'ondelettes à support compact qui ont 2 moments nuls tel que *db2*, *coiflet2*, *symlet2*, etc.

Par ailleurs, comme nous l'avons énoncé précédemment, le retard fractionnaire Z^{-D} ne peut pas être exactement implémenté ce qui implique une limitation dans l'implémentation du filtre H_f . Pour pallier à ce problème nous poursuivons les mêmes démarches de construction décrites dans la section précédente.

Afin de concevoir des filtres approximant le retard numérique d'ordre fractionnaire, nous nous basons sur la méthode d'interpolation de Lagrange, où la fonction de transfert du filtre fractionnaire H_f peut s'exprimer en fonction du filtre RIF décrit par la fonction de transfert (3.4), ce qui nous donne la fonction suivante :

$$H_f = \alpha + \beta \cdot Z^{-1} \cdot \left(\sum_{n=0}^N h[n]Z^{-n} \right) + \gamma \cdot Z^{-2} \cdot \left(\sum_{n=0}^N b[n]Z^{-n} \right) + \delta \cdot Z^{-3} \cdot \left(\sum_{n=0}^N l[n]Z^{-n} \right) \quad (3.22)$$

Avec $h[n]$, $b[n]$ et $l[n]$ représentent respectivement les coefficients des filtres RIF approximant les retards fractionnaires Z^{-m_1} , Z^{-m_2} et Z^{-m_3} , cependant N représente leurs ordre.

Afin d'assurer la régularité et l'orthogonalité des fonctions d'échelle et d'ondelette, le calcul des coefficients α , β , γ et δ se fait suivant les conditions (3.6), (3.7) et (3.8). Ces coefficients seront calculés avec la même stratégie précédente, où nous assurons les deux conditions (3.7) et (3.8) cependant la condition (3.6) sera assurée approximativement :

$$|H_f(\omega)|^2 + |H_f(\omega + \pi)|^2 \approx 2 \quad (3.23)$$

$$|H_f(\omega)|^2 + |H_f(\omega + \pi)|^2 - 2 = \varepsilon \quad (3.24)$$

L'erreur ε joue un rôle très important dans le choix des retards m_1 , m_2 et m_3 . La figure 3.5 présente le développement de l'erreur ε par rapport aux paramètres m_1 , m_2 et m_3 , il parait que les valeurs optimales des retards m_1 , m_2 et m_3 qui présentent les plus petites valeurs de ε sont concentrées dans les intervalles suivants : $m_1 \in [0.1, 0.7]$, $m_2 \in [0.1, 1]$, $m_3 \in [0.2, 1.7]$, ce qui est montré dans la figure 3.6.

D'autre part, expérimentalement lors du calcul de l'erreur ε deux conditions doivent être respectées :

$$m_2 < m_3 \quad (3.25)$$

$$m_1 \neq m_3 \quad (3.26)$$

La condition (3.25) assure l'orthogonalité des bases conçues. Afin, d'éviter les cas indéfinies dans le calcul, soit pour l'erreur ε ou les coefficients α, β, γ et δ , il faut assurer la non égalité de m_1 et m_3 ($m_1 \neq m_3$).

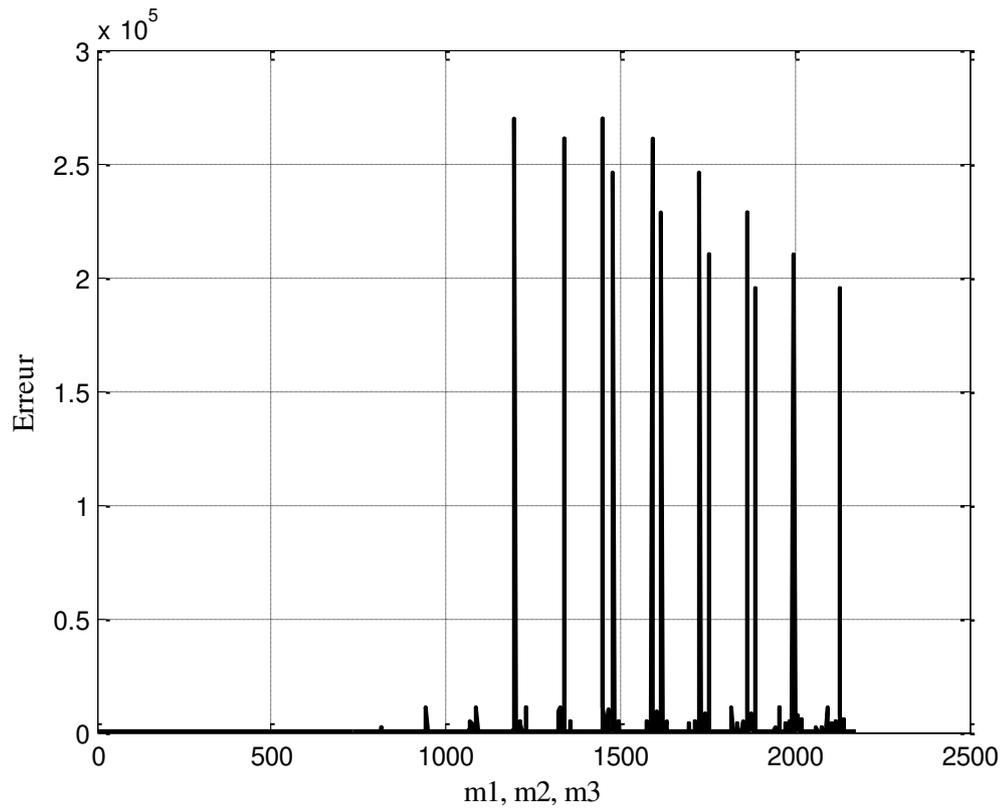


Figure 3.5 Développement de l'erreur ε par rapport à m_1, m_2 et $m_3 \in]0, 2]$

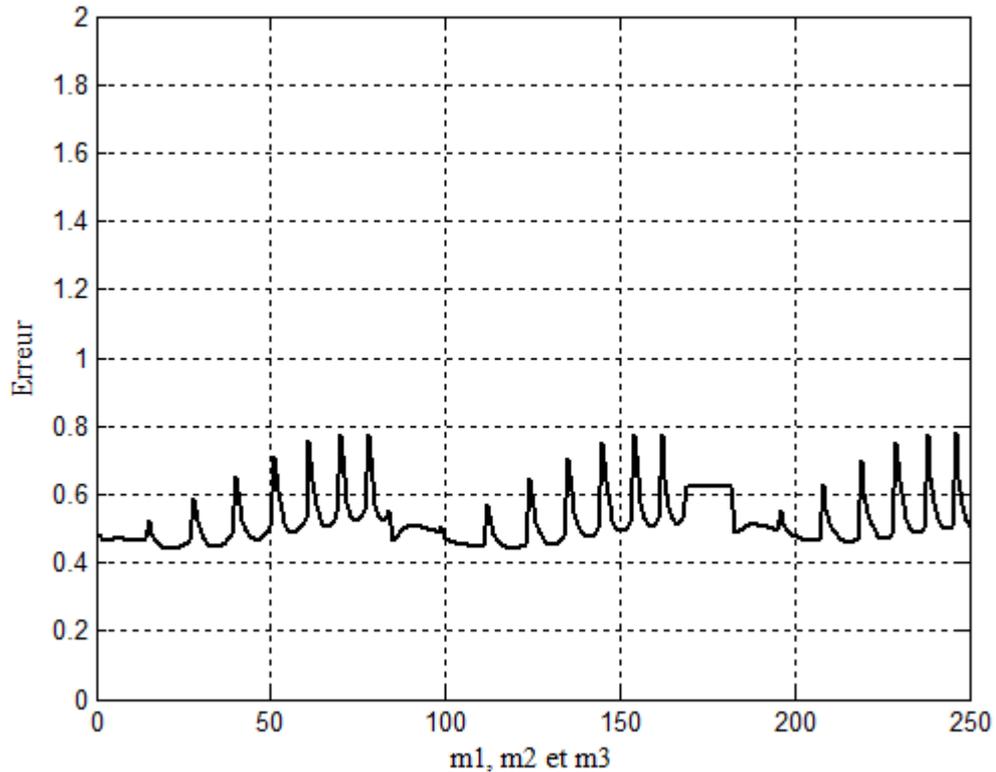


Figure 3.6 Développement de l'erreur ε par rapport à $m_1 \in [0.1, 0.7]$, $m_2 \in [0.1, 1]$, $m_3 \in [0.2, 1.7]$

Les coefficients α, β, γ et δ sont calculés par un algorithme développé sous MATLAB basé sur les deux conditions (3.7) et (3.8), ils sont liés directement aux paramètres m_1, m_2 et m_3 . Pour chaque jeu de valeurs m_1, m_2 et m_3 , nous créons un système composé de quatre équations, la résolution de tous les systèmes créés, nous donne les coefficients cherchés. L'annexe C page 111, illustre le calcul détaillé.

En revanche, le filtre fractionnaire passe-haut s'est déduit à partir du filtre passe-bas où ses coefficients sont calculés par l'expression suivante :

$$g_f[n] = (-1)^{N-n} h_f[N-n] \quad (3.27)$$

Cependant, les filtres fractionnaires de reconstruction (synthèses) sont construits selon l'équation (3.12), où leurs coefficients sont définis par les relations (3.13) et (3.14).

Les paramètres clés des filtres d'analyse et de synthèse sont ajustés avec une manière continue, ce qui leur gagne plus de flexibilité, plus de précision donc une meilleure sélectivité. Tout cela est illustré dans la figure 3.7 dont elle montre la grande flexibilité des réponses fréquentielles des filtres.

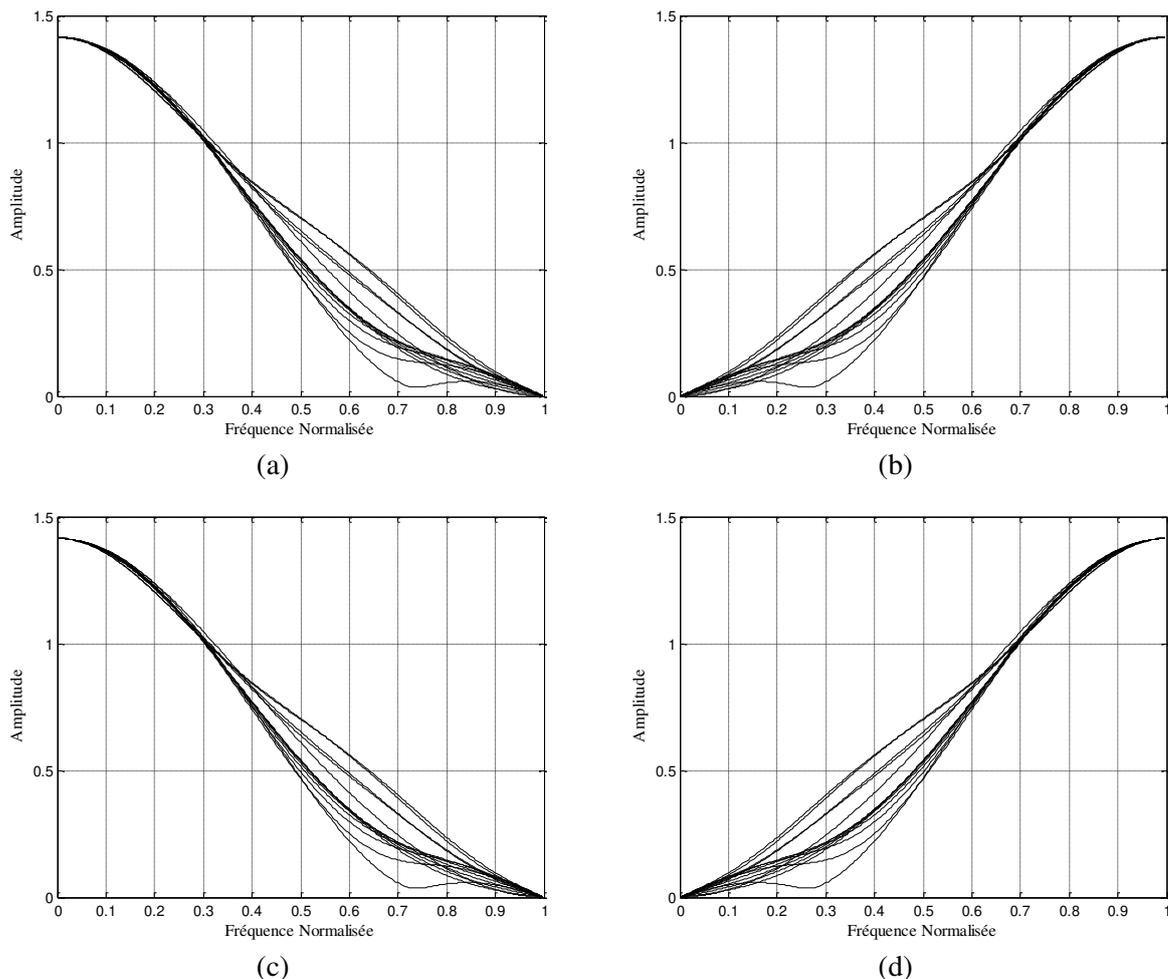


Figure 3.7 Réponses fréquentielles des filtres fractionnaires à support compact d'analyses et de synthèses pour différentes valeurs de m_1 , m_2 et m_3 , ($N=2$): (a) filtre d'analyse passe bas, (b) filtre d'analyse passe haut, (c) filtre de synthèse passe bas, (d) filtre de synthèse passe haut.

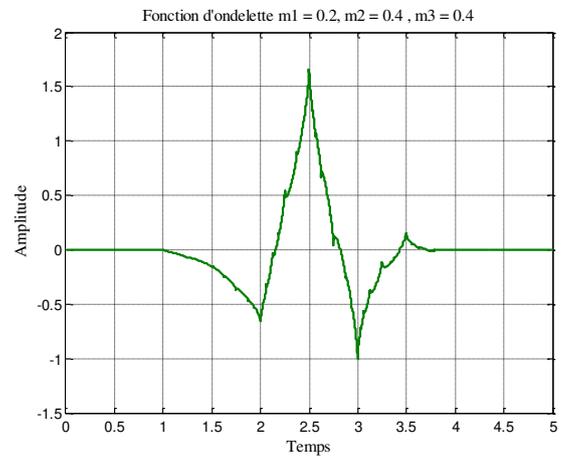
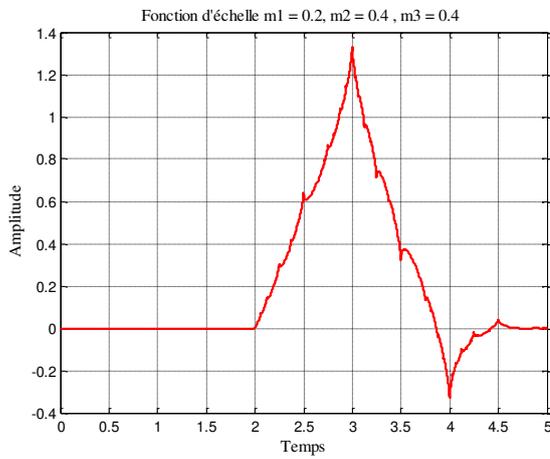
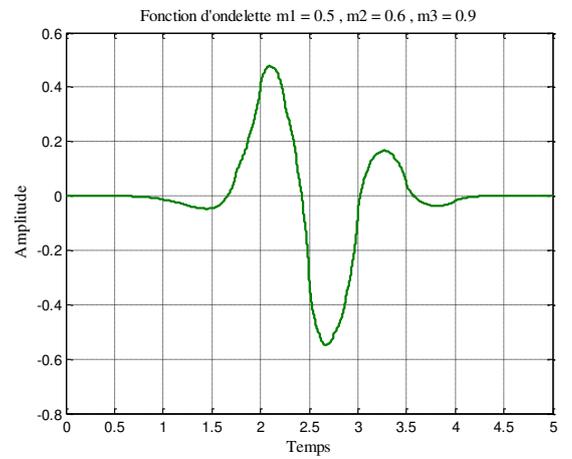
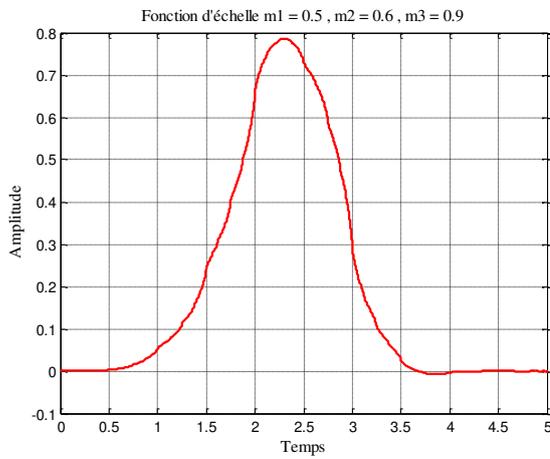
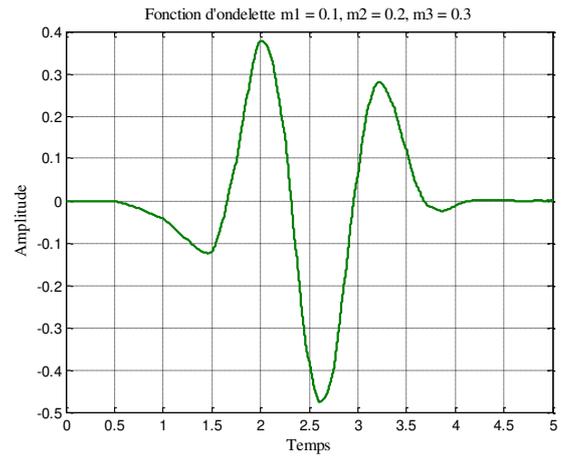
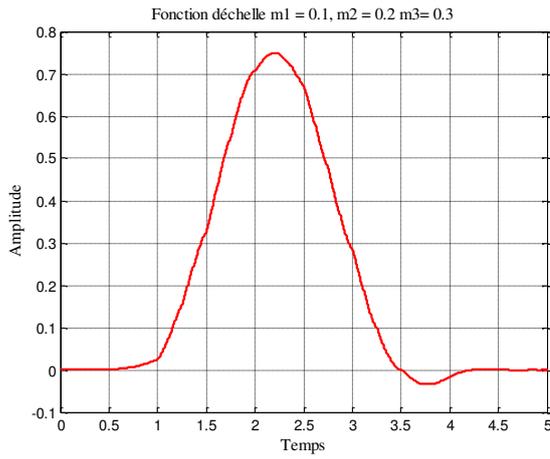
3.3.2.2 Construction de la Fonction d'échelle et la fonction d'ondelette fractionnaires à support compact

Les fonctions d'échelle et d'ondelette sont construites par l'algorithme cascade, Elles sont respectivement représentées, en fonction du filtre passe-bas $h_f[n]$ et du filtre passe-haut $g_f[n]$, par les expressions suivantes :

$$\varphi_f(x) = \sum_n h_f[n] \sqrt{2} \varphi_f(2x - n) \quad (3.28)$$

$$\psi_f(x) = \sum_n g_f[n] \sqrt{2} \varphi_f(2x - n) \quad (3.29)$$

Nous montrons, dans la figure 3.8, quelques exemples de ces fonctions, où il paraît que ces dernières sont plus régulières par rapport au cas précédent, ce s'explique par l'allongement des filtres associés.



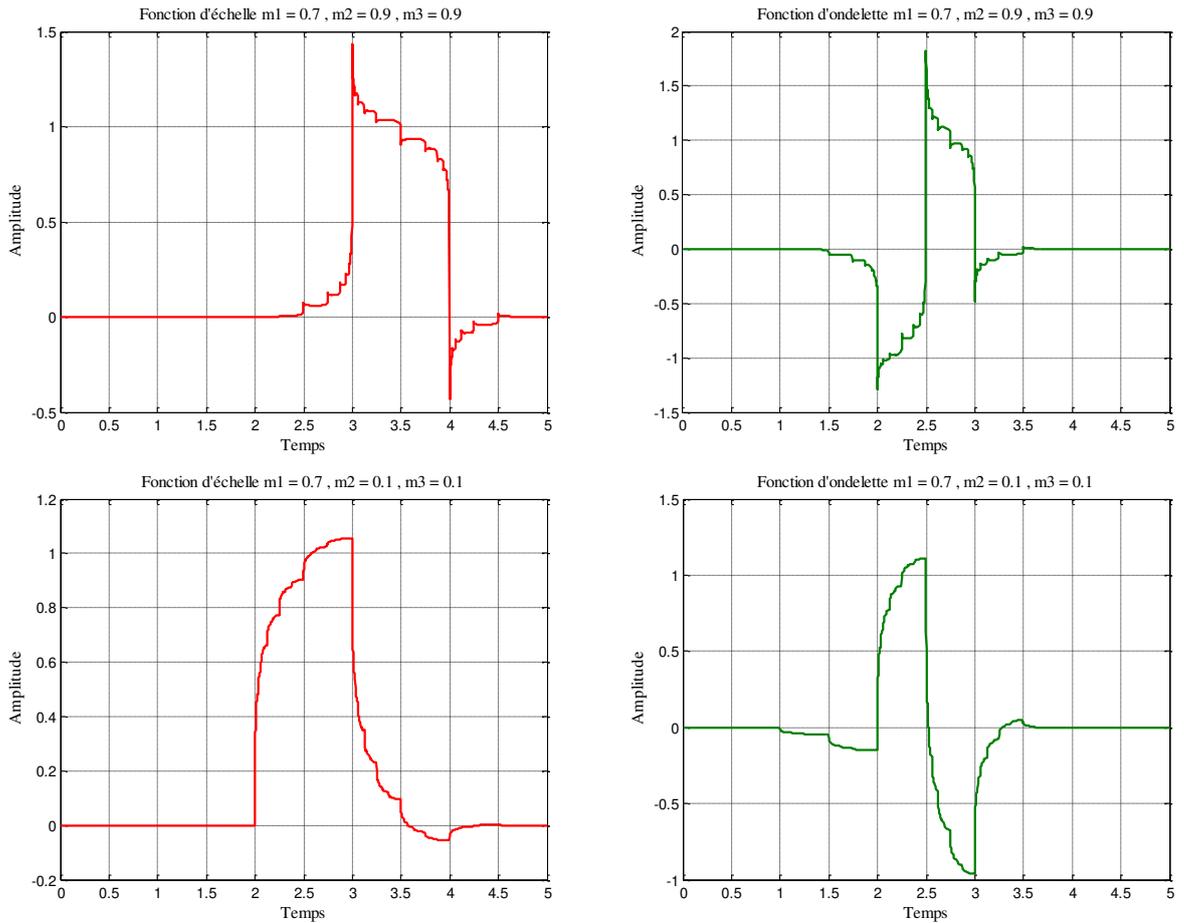


Figure 3.8 Fonctions d'échelle et d'ondelette pour différentes valeurs de m_1 , m_2 et m_3 (Base d'ondelettes fractionnaires à support compact)

Il faut noter que le principe de la construction des ondelettes fractionnaire à support compact peut se généraliser sur des ondelettes qui ont p moments nuls, où la fonction de transfert du filtre fractionnaire passe bas associé est définie comme suit :

$$H_f = C_0 + C_1 \cdot Z^{-1} \cdot (Z^{-m_1}) + \dots + C_{r-1} \cdot Z^{-(r-1)} \cdot (Z^{-m_{r-1}}) \quad (3.30)$$

Où $C_0 \dots C_{r-1}$ représentent les coefficients du filtre, $m_1 \dots m_{r-1}$ décrit les longueurs des retards fractionnaires, cependant, $r = p \cdot 2$ est le nombre de coefficients du filtre, p est le nombre de moments nuls.

Pour calculer les coefficients $C_0 \dots C_{r-1}$, nous suivons les mêmes démarches précédentes (voir annexe C), en revanche les coefficients du filtre passe haut s'est déduit à partir de l'équation (3.27).

3.4 Propriétés des bases d'ondelettes fractionnaires construites

Les bases d'ondelettes fractionnaires que nous avons proposé dans notre travail ont conservé les mêmes propriétés des bases d'ondelettes ordinaires [25], à partir de l'orthogonalité, la compacité du support et bien sur la régularité, en plus elles sont plus précises grâce à la grande flexibilité de leurs filtres associés.

D'autre part, la longueur du retard fractionnaire présente un paramètre clé dans la construction des filtres, où son changement influe directement sur la forme des filtres conçus. Ce qui leurs donne la propriété de s'adapter aux données à traiter. Cet avantage, nous permet de considérer ces bases fractionnaires comme des ondelettes adaptatives.

La nullité des moments reste une propriété très intéressante, que ce soit pour les ondelettes ordinaires ou bien fractionnaires, où les bases d'ondelettes fractionnaires conçues dans notre travail ont un nombre de moments nuls lié directement à l'ordre du filtre approximant le retard fractionnaire. D'autre part, le remplacement du retard fractionnaire Z^{-D} par un filtre RIF, nous a conduits à un allongement des filtres ce qui implique une augmentation dans le nombre de moments nuls.

Par ailleurs, les ondelettes fractionnaires proposées travaillent en sous bandes avec la possibilité de séparer les composantes hautes fréquences des composantes basses fréquences avec une manière très sélective, ce qui leurs permet de se focaliser et de bien s'adapter à tous les singularités ou irrégularité occasionnelles qu'on peut rencontrer dans tous les traitements des données.

En revanche, malgré toutes ces propriétés avantageuses, la complexité du calcul a imposé des limites dans la construction des bases d'ondelettes fractionnaires, surtout lorsqu'il s'agit de la construction des ondelettes avec un nombre important de moment nuls.

3.5 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre, la naissance d'une nouvelle série d'ondelette basée sur le retard numérique d'ordre fractionnaire. Après la description du principe de la construction de ces nouvelles bases, nous avons présenté les différentes démarches de conception de deux bases: *les ondelettes de Haar fractionnaires* et *les ondelettes fractionnaires à support compact*, où la construction est basée, en générale, sur la généralisation d'un filtre passe-bas connu dont ses paramètres clés sont ajustés via la longueur du retard numérique fractionnaire.

On a vu également que ces ondelettes présentent des caractéristiques et des propriétés intéressantes, où la flexibilité des filtres associés et sa grande sélectivité offrent à ces nouvelles bases une grande aptitude à prendre en charge plusieurs traitements numériques du signal/image (fenêtrage, débruitage, compression, détection, filtrage et reconstitution) d'une façon très efficace, ceci fera l'objectif du chapitre suivant, où nous allons présenter l'application de nos ondelettes fractionnaire pour débruité des signaux et des images.



Carl Friedrich Gauss
(30 avril 1777 — 23 février 1855)

Mathematics is the queen of sciences and arithmetic is the queen of mathematics.

By Carl Friedrich Gauss

Chapitre 4

Ondelettes fractionnaires pour le débruitage des signaux et des images

4.1 Introduction

Au cours de ces dernières décades, le débruitage des signaux et des images a fait l'objet de nombreuses recherches. Il a vu couler beaucoup d'encre dans la littérature technique et scientifique, et fait encore l'objet d'une recherche très soutenue. Le but consiste à estimer une fonction inconnue g à partir de ses mesures bruitées.

Plusieurs méthodes de débruitage ont été proposées et développées, tout d'abords très intuitives, mais progressivement de plus en plus complexes. Commencent par des méthodes de filtrage spatial [59]. Celles-ci consistent à réduire le bruit dans les zones qui ne présentent pas d'objets intéressants et à accentuer la perception des structures d'intérêt. Ces techniques de filtrage utilisent un filtre passe-bas pour supprimer les hautes fréquences, ce qui a pour inconvénient d'atténuer tous les détails du signal/image. Pour pallier à ces problèmes, de

nouvelles techniques, plus performantes, ont vu le jour aux cours des années 90; citons notamment les approches variationnelles basées sur les EDPs [60], [61] les approches utilisant les champs de Markov [62-64] et les approches basées sur les transformées multi-échelles, notamment la transformée en ondelettes.

Récemment, Les ondelettes ont montré leur puissance dans le cadre de l'estimation statistique [65]. Par le biais de ces transformées parcimonieuses l'énergie du signal utile est concentrée sur un faible nombre de coefficients, ce qui offre un cadre naturel non linéaire pour estimer ce signal. En effet, il suffit de seuiller les coefficients du signal ou de l'image observée et d'inverser la transformée pour obtenir une estimée du signal utile.

Ce chapitre vient d'illustrer l'efficacité et le potentiel des ondelettes fractionnaires proposées dans le chapitre précédent par rapport aux différentes ondelettes existantes dans la littérature, où nous présenterons un algorithme de débruitage des signaux et des images basé sur les ondelettes. Commenceront par le formalisme générale du problème de débruitage, ensuite nous verrons le principe du débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes, dont nous décrirons les différentes étapes nécessaires lors du processus de débruitage, par la suite, nous montrons les résultats d'application de nos modèles fractionnaires pour débruiter des signaux et des images, ces résultats seront comparés avec ceux obtenus par l'application des ondelettes classique connues telles que les ondelettes de Haar, Daubechies, Coiflettes, Symlettes, Meyer et les ondelettes bi-orthogonales.

4.2 Formulation générale du problème

Le problème du débruitage (connu sous le nom de "régression non-paramétrique" en statistiques mathématiques [65]) peut se mettre sous la forme générale suivante :

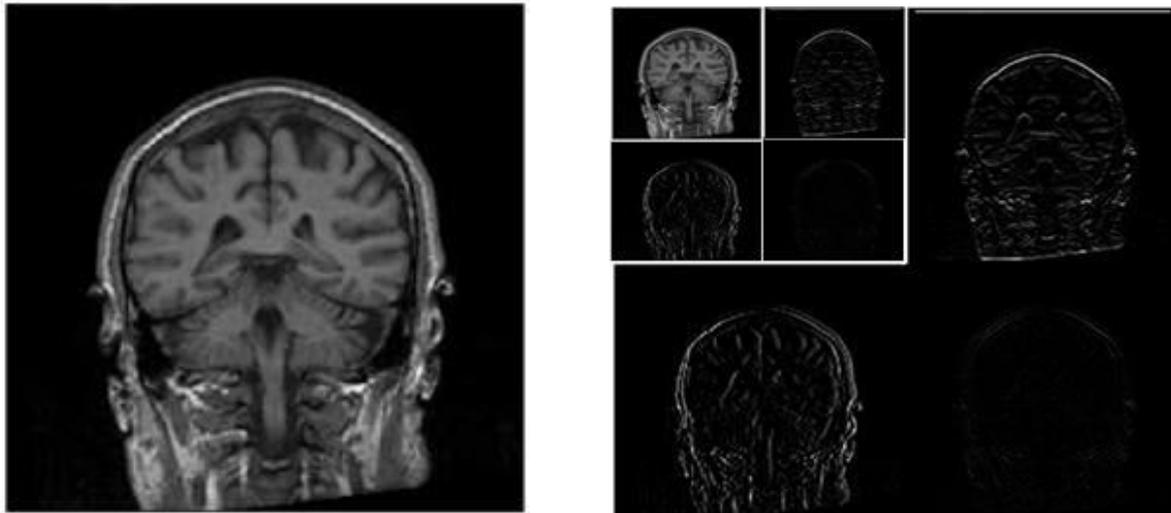
$$y_{mn} = g_{mn} + \varepsilon_{mn} \quad (4.1)$$

Où nos observations dégradées $y_{m,n}$, $m, n = 0, \dots, N-1$ représentant les valeurs réelles échantillonnées d'un signal bruité, sont modélisées comme la somme d'un signal g_{mn} à estimer et d'un bruit blanc gaussien ε_{mn} de moyenne nulle et de variance σ^2 . L'objectif est de recouvrer l'information g contenue dans le signal bruité y sans pour autant faire d'hypothèse sur une structure paramétrique de g . Etant donné le vecteur y qui représente les valeurs échantillonnées de y , la transformée multi-échelle de y est donnée par $d = \Phi^T y$ où Φ est une matrice (dite dictionnaire) de taille $N^2 \times L$ (avec $L \geq N^2$) [65].

Dans le cas de la transformée d'ondelettes discrète orthogonale (classique ou fractionnaire), la matrice $\Phi = W$ où W est une matrice orthogonale associée à la base orthonormée choisie, et d'un vecteur comprenant d'une part les coefficients d'approximation et d'autre part les coefficients de détail de la transformée en ondelettes discrète (DWT). Du fait de l'orthogonalité de la matrice W , la transformée en ondelettes discrète inverse (IDWT) est donnée par $y = W^T d$. Dans le cas où la taille N peut se mettre sous la forme $N = 2^j$ avec $J \in \mathbb{N}$, la DWT ainsi que sa transformée inverse peuvent être implémentées à l'aide de l'algorithme pyramidal proposé par Mallat [5] employant un banc de filtres miroirs en quadrature. Dans le cas bidimensionnel, les sous-bandes HH_j , HL_j et LH_j , $j = J_c, \dots, J-1$ correspondent respectivement aux coefficients de détail d'orientations diagonale, horizontale et verticale. La sous-bande LL_j représente les coefficients d'approximations à l'échelle la plus grossière. En appliquant la DWT [5] sur le signal bruité y nous obtenons alors à partir de l'Equation (4.1) :

$$\begin{cases} c_{mn} = a_{mn} + \varepsilon_{mn} & m, n = 0, \dots, 2^{j_c} - 1 \\ d_{mn}^{oj} = s_{mn}^{oj} + \varepsilon_{mn} & j = J_c, \dots, J-1; m, n = 0, \dots, 2^j - 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

Où nous notons a_{mn} (resp. c_{mn}) Le coefficient d'approximation de la DWT du signal g (resp. y) à la position (m, n) et s_{mn}^{oj} (resp. d_{mn}^{oj}) Le coefficient de détail de la DWT du signal g (resp. y) à la position (m, n) , l'échelle j et l'orientation o . Un exemple d'application de la DWT sur une image test est illustré par la figure (4.1). Du fait du caractère orthogonal de la transformée en ondelettes, les coefficients ε_{mn} sont des variables aléatoires indépendantes $N(0, \sigma^2)$ qui définissent aussi un bruit blanc gaussien.



(a) Image test

(b) Décomposition à 2 échelles

Figure 4.1 Application de la transformée d'ondelettes séparable 2D sur une image IRM.

4.3 Principe général du débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes

En général, il est possible de réaliser une décomposition en ondelettes d'un signal puis de reconstruire ce signal à partir de ses coefficients d'ondelettes. Pourtant, cette technique n'aurait pas grand intérêt si on ne modifiait pas ces coefficients car on obtiendrait un signal final identique au signal initial [66 - 67].

Les coefficients d'ondelettes marquent les discontinuités qui interviennent dans le signal. Ils correspondent donc aux détails. Si, maintenant, on seuille ces coefficients, cela revient à éliminer les détails les plus fins du signal. Il en découle donc deux grandes applications de cette technique de seuillage des coefficients d'ondelettes : la compression et le débruitage [1].

En fait, toutes les approches de débruitage classique sont des approches basées sur une sélection judicieuse des coefficients du signal, coefficient par coefficient. Du fait du caractère creux des transformées multi-échelles (ondelettes) [25], nous pouvons supposer de façon intuitive que seuls quelques coefficients de détail s_{mn}^{oj} ayant une valeur suffisamment élevée contribuent au signal à recouvrir g , alors que les coefficients de faibles valeurs sont dus essentiellement au bruit qui contamine de façon uniforme tous les coefficients. Il est également recommandé de conserver les coefficients d'approximation c_{mn} . Ces derniers, relatifs aux composantes de basses fréquences, sont essentiellement caractéristiques du signal original.

Le diagramme suivant représente le processus complet de débruitage dans le domaine des transformées multi-échelles.

$$y \xrightarrow{\Phi^T} \{c_{mn}, d_{mn}^{oj}\} \xrightarrow{\text{estimateur non linéaire } \delta_\lambda} \{c_{mn}, \delta_\lambda(d_{mn}^{oj})\} \xrightarrow{R} \hat{g}$$

Où Φ^T représente une transformée multi-échelle et R est l'opérateur de reconstruction. δ_λ est un opérateur non linéaire de type seuillage de coefficients, reposant sur la conservation en intégralité des coefficients c_{mn} et sur une sélection judicieuse des coefficients d_{mn}^{oj} . Les coefficients ayant été traités, le signal restauré est reconstruit par la transformée inverse.

4.3.1 Estimation du niveau de bruit

Dans la littérature, la majorité des méthodes de débruitage n'aborde que le cas de bruit blanc gaussien, plus simple à traiter, bien que, en situation de données réelles, il ne soit pas spécialement facile d'estimer le niveau de bruit σ_ε . Notons que le bruit poissonnien à forte intensité ou le bruit de mélange poissonnien-gaussien peut être stabilisé pour le ramener au cas gaussien. Avec une transformée discrète orthogonale en ondelettes, le bruit blanc se décompose en série de coefficients aléatoires normaux centrés et décorrélés ε_{mn} (Eq 4.2).

En utilisant des arguments de la statistique robuste, Donoho & Johnstone ont proposé une estimation de σ_ε , dans le domaine des ondelettes [68] en ne considérant que les coefficients de l'échelle de décomposition la plus fine. Le choix de l'échelle la plus fine repose sur l'hypothèse que les coefficients en ondelettes correspondants sont en grande majorité dus au bruit blanc. Une estimée de $\hat{\sigma}_\varepsilon$ est alors obtenue par un résultat classique en statistique robuste :

$$\hat{\sigma}_\varepsilon = \frac{MAD(\{d_{mn}^{j-1}\})}{0.6745} \quad (4.3)$$

Où le MAD est la valeur médiane absolue des coefficients de détail de l'échelle la plus fine. Le facteur 0.6745 est choisi après une calibration avec une distribution gaussienne. Cet estimateur très robuste est également très populaire pour le débruitage multi-échelle.

4.3.2 Seuillage des ondelettes

Durant les années 90, Donoho & Johnstone ont proposé un estimateur non-linéaire de g reposant sur la conservation en intégralité des coefficients c_{mn} et sur une sélection judicieuse

des coefficients d_{mn}^{oj} [68-70]. Ces auteurs suggèrent l'extraction des coefficients de détail significatifs par comparaison de ces derniers avec un paramètre de seuillage $\lambda > 0$ dont le choix est décrit ultérieurement. Les fonctions de seuillage résultantes, se déclinent sous deux formes, seuillage dur (noté H) et seuillage doux (noté S).

Le seuillage dur est celui qui est le plus "intuitif". On se fixe un seuil $\lambda > 0$. On ne conserve que les coefficients d'ondelettes supérieurs à λ et on met à zéro les autres. [71], [73]. Pour un seuil λ choisi, La règle du seuillage est définie par :

$$\delta_{\lambda}^H(d_{mn}^{oj}) = \begin{cases} 0 & \text{si } |d_{mn}^{oj}| \leq \lambda \\ d_{mn}^{oj} & \text{si } |d_{mn}^{oj}| > \lambda \end{cases} \quad (4.4)$$

Le seuillage doux conduit à mettre à zéro les valeurs de coefficients qui sont plus petites que le seuil λ et à ne conserver que ce qui dépasse le seuil pour les autres coefficients. [71-73]. Il est défini par la règle suivante :

$$\delta_{\lambda}^S(d_{mn}^{oj}) = \begin{cases} 0 & \text{si } |d_{mn}^{oj}| \leq \lambda \\ d_{mn}^{oj} - \text{sign}(d_{mn}^{oj})\lambda & \text{si } |d_{mn}^{oj}| > \lambda \end{cases} \quad (4.5)$$

Ces dernières années, Plusieurs méthodes ont été proposées afin de trouver un compromis entre le seuillage dur et le seuillage doux [74 - 77], tel que : le seuillage FIRM, NNG, SCAD et le seuillage TNN, où chacune de ces fonctions d'estimation est dépendante du choix du seuil λ .

4.3.3 Choix du seuil

Il existe de nombreuses méthodes permettant de déterminer la valeur du seuil, les plus utilisées sont proposées par Donoho & Johnstone dans [68 - 69] sous le nom du seuil minimax, seuil universel et le fameux SureShrink.

Notons qu'il existe d'autre type de seuil tel que :

1. Test d'hypothèses simples et multiples [78] ;
2. Test d'hypothèses récursives [79] ;
3. Validation croisée [80-81] ;
4. Seuillage invariant par translation [82] ;

4.4 Application des ondelettes fractionnaires proposées

Afin d'illustrer le potentiel et l'efficacité des ondelettes fractionnaires proposées par rapport aux différentes ondelettes existantes dans la littérature, nous appliquons nos modèles fractionnaires dans un algorithme de débruitage dans le but de débruité un ensemble de signaux et images.

4.4.1 Débruitage des signaux

Dans le cadre d'une analyse dyadique, un seuil de type SureShrink (Stein's unbiased risk estimator) et un seuillage dure [70], nous avons appliqué un algorithme de débruitage, à base des ondelettes que nous avons proposées, sur un ensemble de signaux correspond à ceux construits et analysés dans [68] : Blocks, Bumps, Heavy-sine (voir la Figure 4.2). Ce sont des signaux non stationnaires tels que les signaux médicaux (ECG, EEG, EMG, etc.) les signaux sismiques et les signaux vibratoires de machines tournantes, etc.

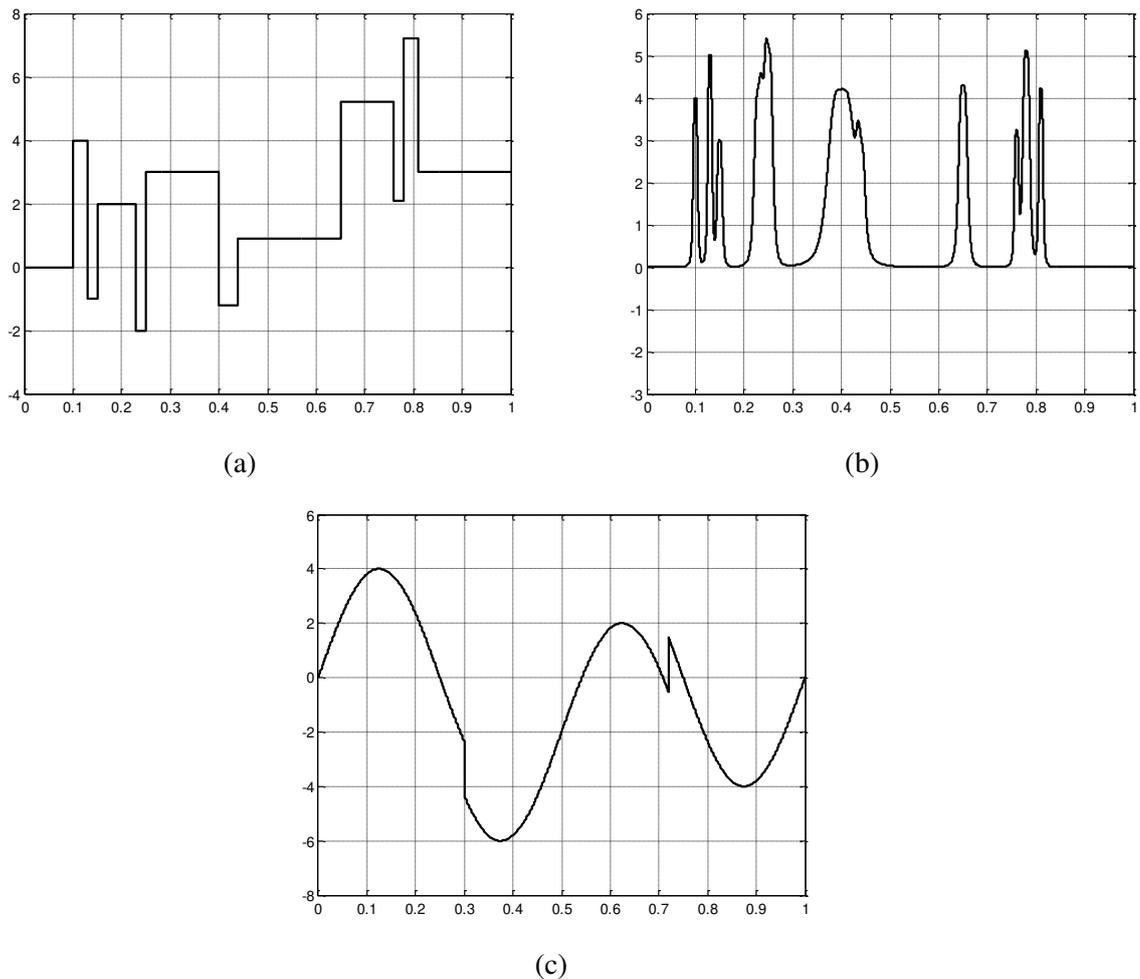


Figure 4.2 Signaux tests: (a) Signal 'blocks'; (b) Signal 'bumps'; (c) Signal 'Heavy sines'

Les signaux sont corrompus par un bruit blanc gaussien d'écart type 10, 20 et 30 (Figure 4.3). Les bases d'ondelettes proposées précédemment sont exploitées pour différentes valeurs du paramètre D (paramètre d'ajustement des filtres qui les constituent).

Nous quantifions la qualité du débruitage par le calcul du rapport signal sur bruit SNR (signal-to-noise-ratio) qui est défini comme suit :

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_{signal/image}}{P_{Bruit}} \quad (4.6)$$

Où $P_{signal/image}$, P_{Bruit} représentent respectivement la puissance du signal/image et la puissance du bruit.

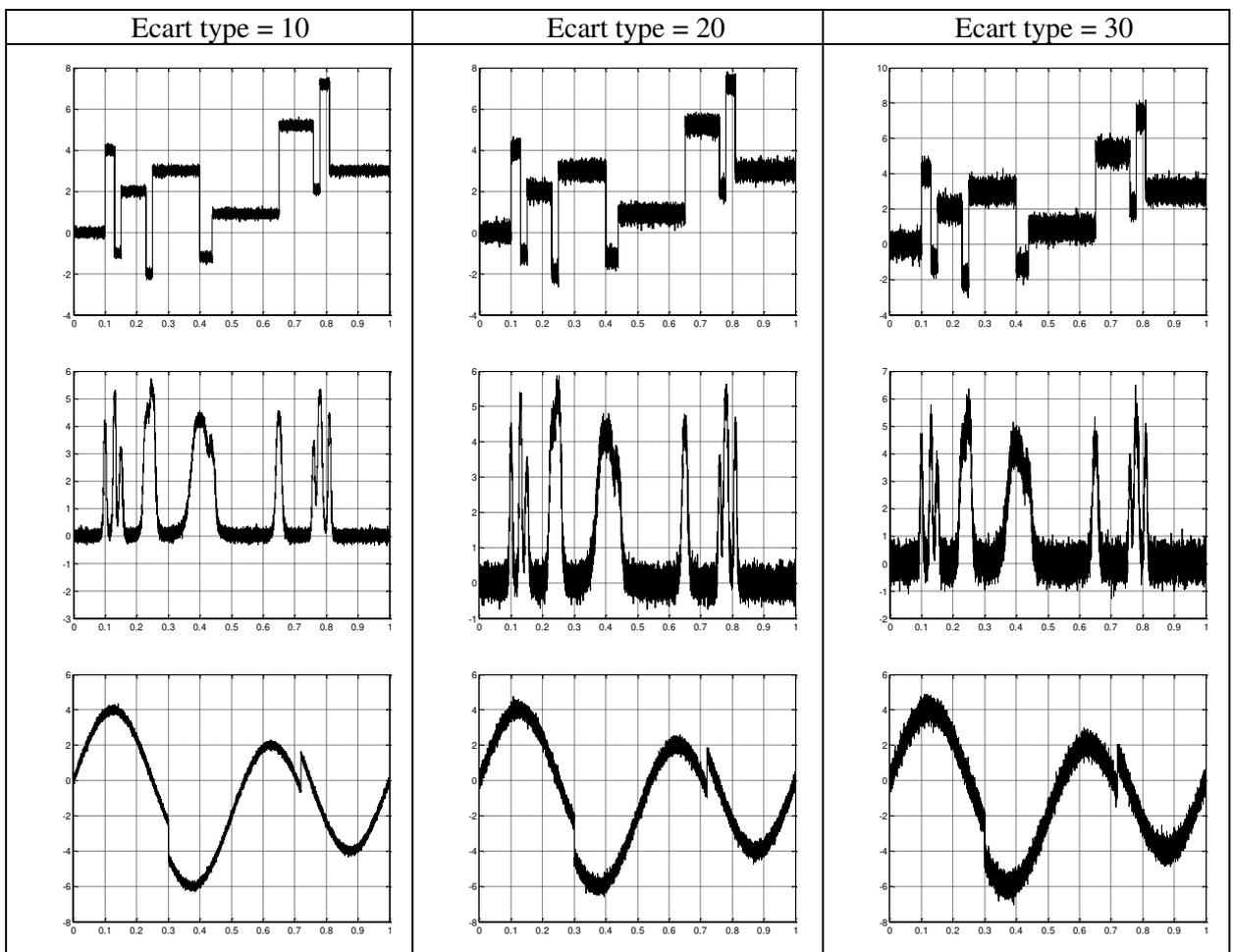


Figure 4.3 Signaux tests bruités avec un bruit blanc gaussien d'écart type 10, 20 et 30.

4.4.1.1 Ondelettes de Haar fractionnaires pour le débruitage des signaux

Nous appliquons l'algorithme de débruitage à base de l'ondelette de Haar fractionnaire pour différentes valeurs du paramètre D sur l'ensemble des signaux bruités, Blocks, Bumps et Heavy-sine, avec des écarts types 10, 20 et 30. La figure 4.4 montre les résultats de débruitage pour $D = 0.5, \dots, 1.5$, cependant le tableau 4.1 résume tous les résultats obtenus y compris le cas ordinaire (Haar classique où $D=1$). Les résultats varient selon le type du signal et la quantité du bruit (la valeur de l'écart type). Dans le cas du signal Blocks on voit bien qu'il y a une amélioration du SNR mais reste comparable aux résultats obtenus par l'utilisation de l'ondelette de Haar classique surtout pour le cas où $\sigma = 10$, par-contre, dans le cas où $\sigma = 30$, nous pouvons voir qu'il y a une préférence remarquable des ondelettes fractionnaires ($D = 1 \dots 1.5$) par rapport au cas classique ($D = 1$). En revanche, dans le cas des signaux test Bumps et Heavy-sine, on voit que les résultats obtenus par les ondelettes fractionnaires sont supérieur à celle obtenus par les ondelettes de Haar classique ($D = 1$).

Signaux d'entrés	$\sigma/PSNR$ Signaux bruités	SNR signal débruité(dB)									
		D=0.6	D=0.7	D=0.8	D=0.9	Haar	D=1.1	D=1.2	D=1.3	D=1.4	D=1.5
Blocks	$\sigma = 10$ (29.45)	30.27	31.64	33.03	34.66	35.87	36.59	36.53	36.25	36.62	34.71
	$\sigma = 20$ (23.46)	25.44	26.34	27.46	28.52	29.82	30.86	31.25	31.55	31.00	31.26
	$\sigma = 30$ (19.92)	21.64	22.22	23.00	23.44	24.90	26.73	27.41	27.82	27.75	28.11
Bumps	$\sigma = 10$ (25.11)	29.36	29.45	30.16	30.32	30.40	31.16	31.39	31.87	31.21	31.91
	$\sigma = 20$ (19.09)	23.65	24.29	24.76	24.97	25.20	25.69	25.83	25.86	26.37	25.80
	$\sigma = 30$ (15.55)	20.82	20.92	21.04	21.84	20.81	22.01	22.70	23.01	21.45	22.70
Heavy sine	$\sigma = 10$ (29.87)	32.43	32.72	33.49	33.89	34.89	35.83	36.41	36.65	36.70	36.91
	$\sigma = 20$ (23.76)	26.27	26.77	26.92	27.49	28.06	29.19	29.66	29.67	29.89	30.27
	$\sigma = 30$ (20.26)	22.12	22.59	23.24	23.61	23.99	24.46	25.28	25.33	25.69	25.82

Table 4.1 Résultats de débruitage des signaux : 'Blocks', 'Bumps' et 'Heavy sine' pour différentes valeurs de D (ondelette de Haar fractionnaire)

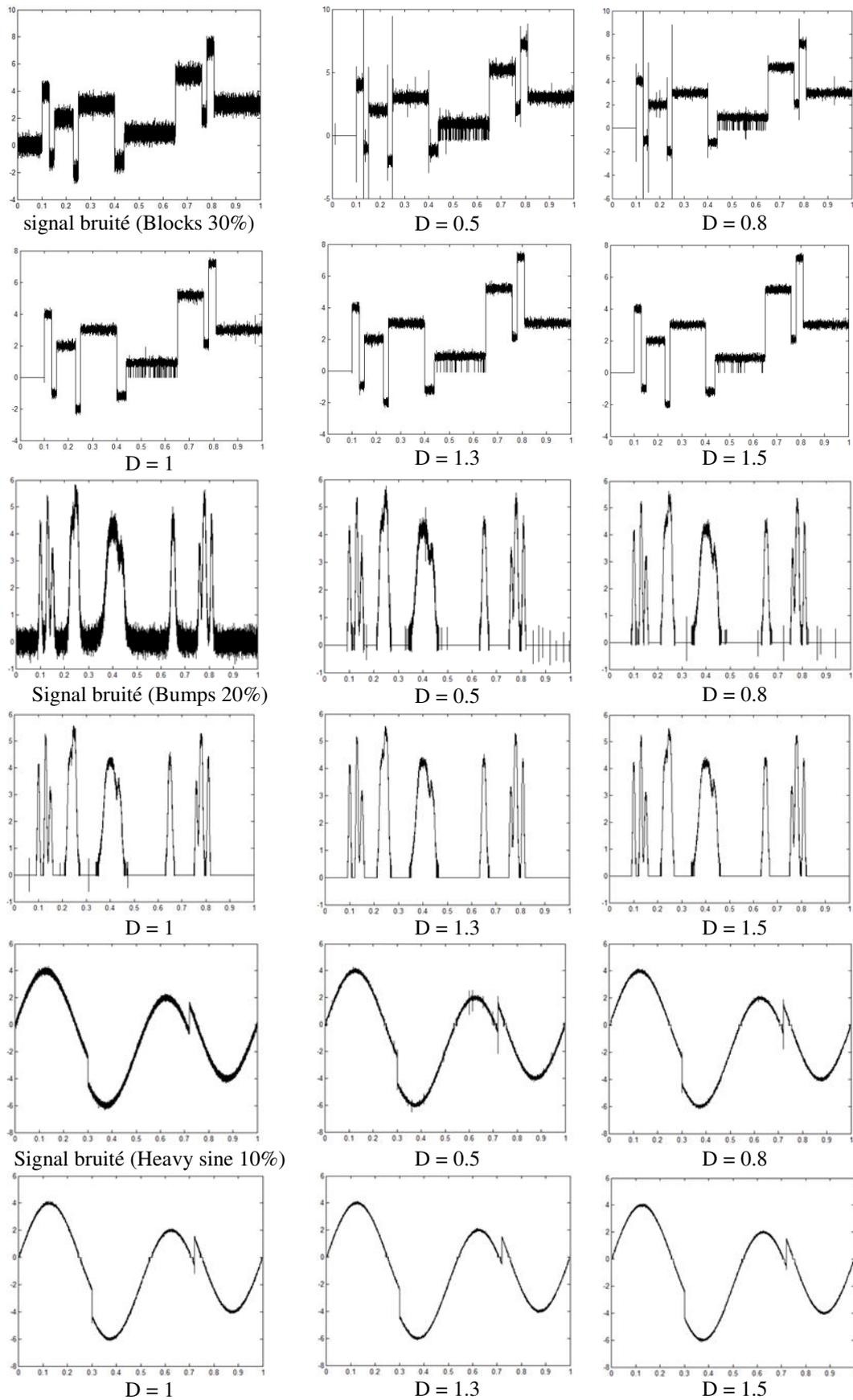


Figure 4.4 Résultats visuelles des signaux débruités (ondelette de Haar fractionnaire)

La figure 4.5 présente la variation du SNR (calculé sur 20 simulations) en fonction du paramètre D , pour différents écarts types ($\sigma=10, 20$ et 30). Il paraît clairement que la meilleure valeur du rapport signal sur bruit pour tous les signaux correspond à une valeur fractionnaire du paramètre D , ce qui indique que l'analyse fractionnaire conduit à une amélioration du résultat du débruitage, du fait de la flexibilité des filtres fractionnaires qui constituent les bases d'ondelettes proposées.

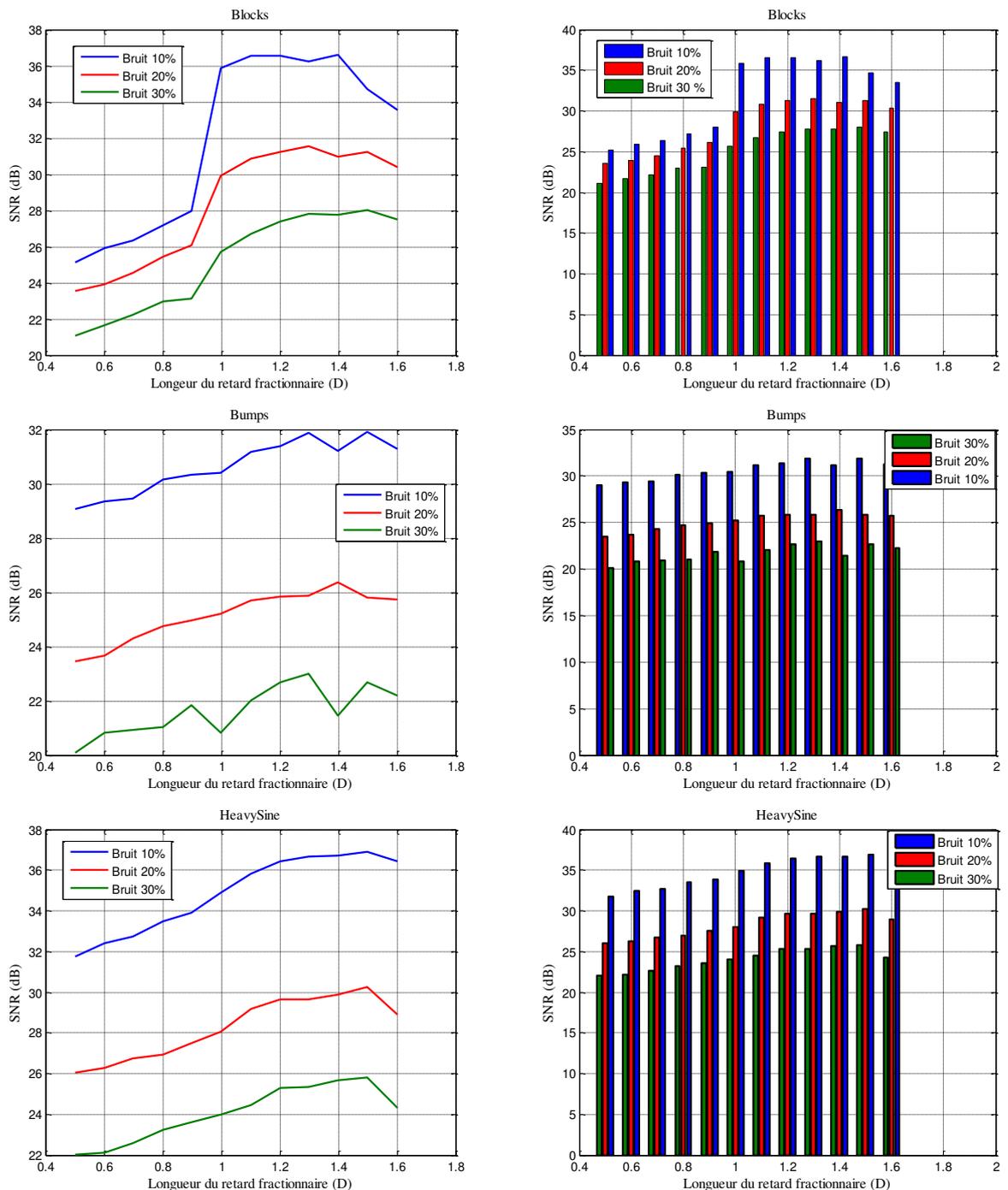


Figure 4.5 Variation du SNR en fonction de la longueur du retard fractionnaire (D).

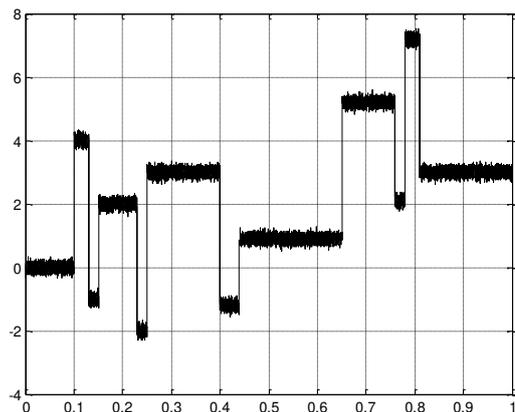
4.4.1.2 Ondelettes fractionnaires à support compact pour le débruitage des signaux

Dans cette section, nous appliquons l’algorithme de débruitage à base des ondelettes fractionnaires à support compact conçues précédemment sur l’ensemble des signaux bruités : Blocks, Bumps et Heavy-sine, en tenant compte les mêmes caractéristiques que nous avons utilisées dans la section précédente (seuillage, type de seuil et niveau de décomposition). Il faut noter que les longueurs des retards fractionnaires (m_1, m_2 et m_3) qui constituent nos ondelettes fractionnaires à support compact sont limitées dans les intervalles suivants : $m_1 \in [0.1, 0.7]$, $m_2 \in [0.1, 1]$, $m_3 \in [0.2, 1.7]$.

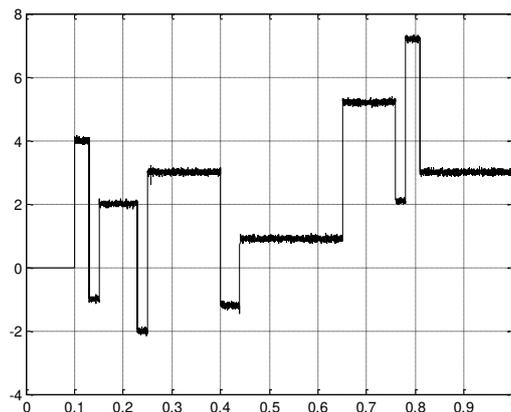
La figure 4.6 montre les résultats de débruitage pour différentes valeurs de m_1, m_2 et m_3 . En revanche, nous avons regroupé les meilleurs résultats obtenus dans le tableau 4.2, où il paraît clairement la bonne amélioration du rapport signal sur bruit.

Signal d'entrée	σ /SNR signal bruité	SNR du signal débruité						
Blocks	$\sigma = 10/29.45$	db2	$m_1=0.1$ $m_2=0.1$ $m_3=0.6$	$m_1=0.1$ $m_2=0.1$ $m_3=1.1$	$m_1=0.2$ $m_2=0.2$ $m_3=0.4$	$m_1=0.2$ $m_2=0.2$ $m_3=0.5$	$m_1=0.2$ $m_2=0.2$ $m_3=1.5$	$m_1=0.4$ $m_2=0.4$ $m_3=0.6$
		35.80	36.61	36.57	36.56	36.57	36.61	36.74
	$\sigma = 20/23.46$	db2	$m_1=0.1$ $m_2=0.7$ $m_3=1.7$	$m_1=0.1$ $m_2=0.8$ $m_3=1.7$	$m_1=0.1$ $m_2=0.9$ $m_3=1.7$	$m_1=0.4$ $m_2=1.0$ $m_3=1.1$	$m_1=0.7$ $m_2=0.8$ $m_3=1.4$	$m_1=0.7$ $m_2=0.8$ $m_3=1.7$
		29.8	32.02	32.17	32.05	31.96	32.04	32.13
	$\sigma = 30/19.90$	db2	$m_1=0.1$ $m_2=0.7$ $m_3=1.7$	$m_1=0.1$ $m_2=0.8$ $m_3=1.7$	$m_1=0.1$ $m_2=1.0$ $m_3=1.7$	$m_1=0.2$ $m_2=0.8$ $m_3=1.7$	$m_1=0.2$ $m_2=1.0$ $m_3=1.7$	$m_1=0.3$ $m_2=1.0$ $m_3=1.7$
		25.84	30.26	30.20	30.33	30.09	30.33	29.92
Bumps	$\sigma = 10/25.10$	db2	$m_1=0.1$ $m_2=0.7$ $m_3=1.4$	$m_1=0.1$ $m_2=0.9$ $m_3=1.2$	$m_1=0.1$ $m_2=1.0$ $m_3=1.2$	$m_1=0.5$ $m_2=0.9$ $m_3=1.7$	$m_1=0.5$ $m_2=1.0$ $m_3=1.5$	$m_1=0.6$ $m_2=0.8$ $m_3=1.0$
		29.82	32.79	32.68	32.76	32.70	32.83	32.71
	$\sigma = 20/19.09$	db2	$m_1=0.1$ $m_2=0.8$ $m_3=1.2$	$m_1=0.1$ $m_2=0.8$ $m_3=1.7$	$m_1=0.2$ $m_2=0.6$ $m_3=0.9$	$m_1=0.2$ $m_2=0.7$ $m_3=0.9$	$m_1=0.2$ $m_2=0.8$ $m_3=1.6$	$m_1=0.3$ $m_2=0.7$ $m_3=1.6$
		25.00	27.26	27.35	27.26	27.34	27.38	27.35
	$\sigma = 30/15.57$	db2	$m_1=0.1$ $m_2=0.7$ $m_3=0.9$	$m_1=0.2$ $m_2=0.6$ $m_3=1.5$	$m_1=0.2$ $m_2=0.7$ $m_3=1.5$	$m_1=0.2$ $m_2=0.8$ $m_3=1.7$	$m_1=0.3$ $m_2=0.8$ $m_3=1.7$	$m_1=0.5$ $m_2=0.9$ $m_3=1.7$
		22.01	24.07	24.07	24.10	24.07	24.08	24.05
heavy-sine	$\sigma = 10/29.79$	db2	$m_1=0.1$ $m_2=0.7$ $m_3=1.1$	$m_1=0.1$ $m_2=1.0$ $m_3=1.6$	$m_1=0.1$ $m_2=1.0$ $m_3=1.7$	$m_1=0.2$ $m_2=0.8$ $m_3=1.5$	$m_1=0.3$ $m_2=1.0$ $m_3=1.5$	$m_1=0.3$ $m_2=1.0$ $m_3=1.7$
		34.97	38.90	38.90	39.00	38.94	39.19	39.23
	$\sigma = 20/23.76$	db2	$m_1=0.2$ $m_2=0.9$ $m_3=1.4$	$m_1=0.3$ $m_2=0.8$ $m_3=1.3$	$m_1=0.3$ $m_2=0.9$ $m_3=1.2$	$m_1=0.3$ $m_2=0.9$ $m_3=1.7$	$m_1=0.4$ $m_2=0.8$ $m_3=1.0$	$m_1=0.4$ $m_2=1.0$ $m_3=1.5$
		27.89	32.09	32.08	31.98	31.81	31.82	32.00
	$\sigma = 30/20.23$	db2	$m_1=0.1$ $m_2=0.7$ $m_3=1.1$	$m_1=0.2$ $m_2=0.7$ $m_3=1.4$	$m_1=0.2$ $m_2=0.8$ $m_3=1.4$	$m_1=0.2$ $m_2=0.8$ $m_3=1.7$	$m_1=0.2$ $m_2=1.0$ $m_3=1.5$	$m_1=0.4$ $m_2=0.8$ $m_3=1.5$
		23.93	27.23	27.75	27.44	27.24	27.87	27.28

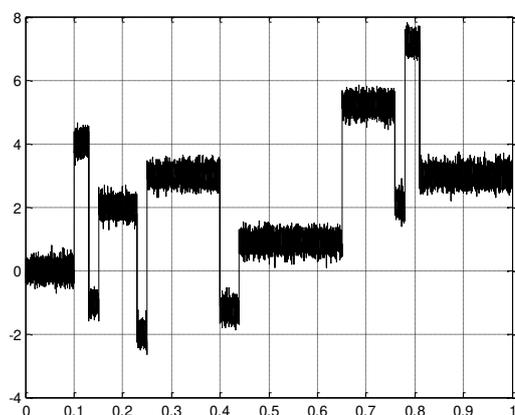
Table 4.2 Récapitulatif des meilleurs Résultats de débruitage des signaux : Blocks, Bumps et heavy-sine (ondelette fractionnaire à support compact)



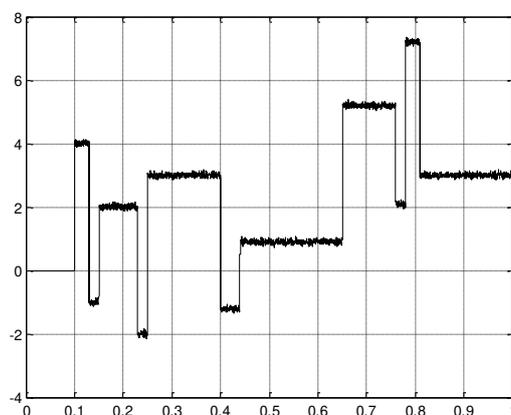
Signal bruité (Blocks 10%)



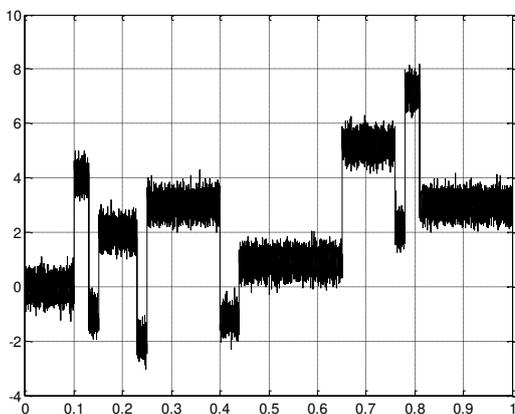
Signal débruité ($m1=0.1 - m2=0.1 - m3=0.6$)



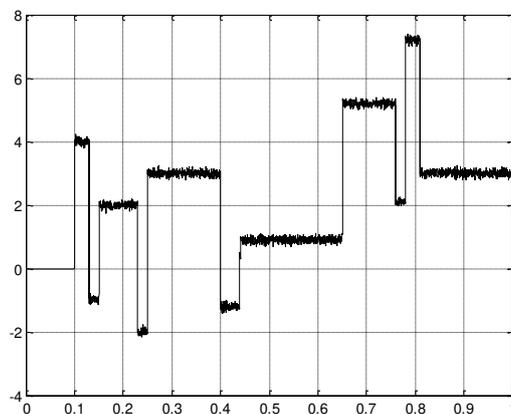
Signal bruité (Blocks 20%)



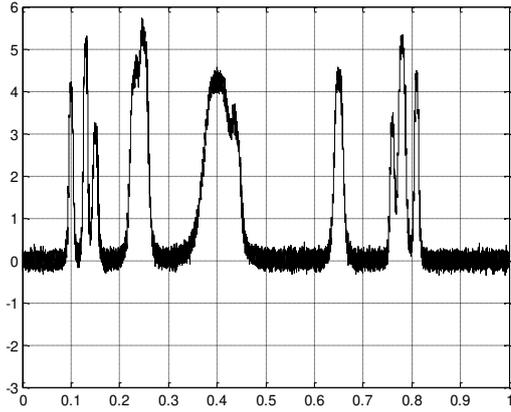
Signal débruité ($m1=0.1 - m2=0.8 - m3=1.7$)



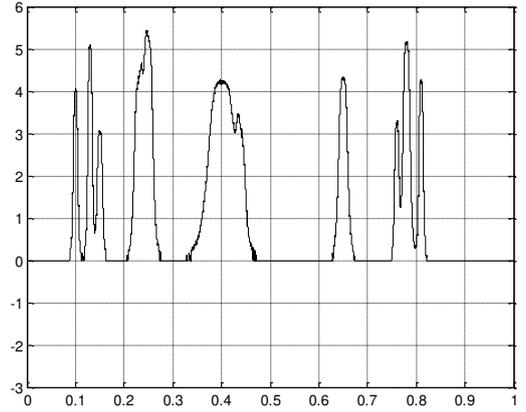
Signal bruité (Blocks 30%)



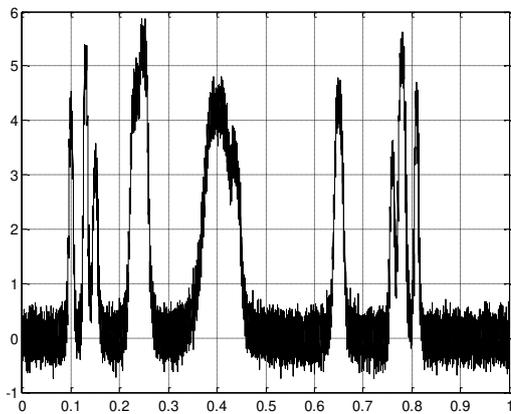
Signal débruité ($m1=0.1 - m2=1.0 - m3=1.7$)



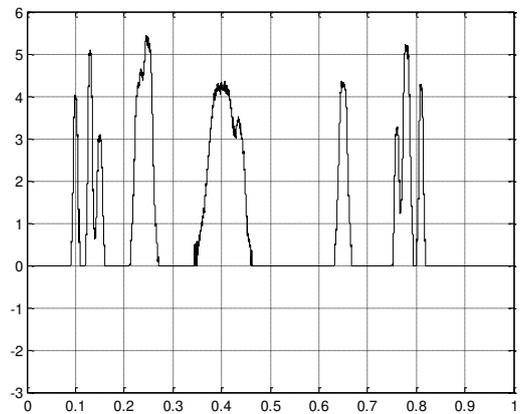
Signal bruité (Bumps 10%)



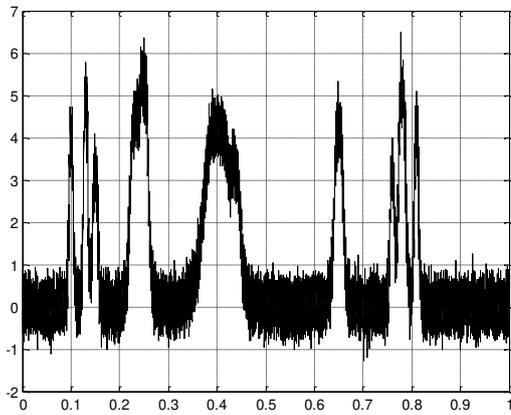
Signal débruité ($m1 = 0.5 - m2 = 1.0 - m3 = 1.5$)



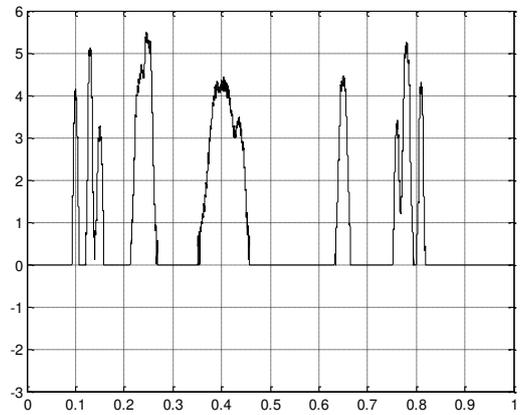
Signal bruité (Bumps 20%)



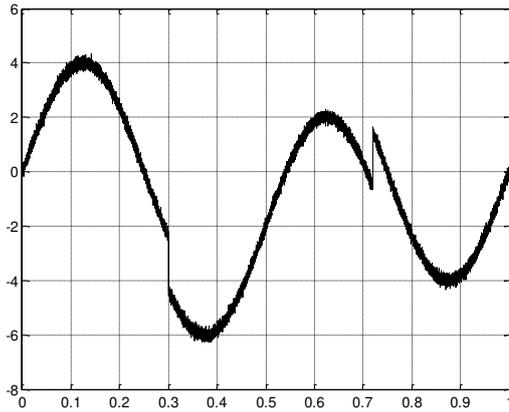
Signal débruité ($m1 = 0.2 - m2 = 0.8 - m3 = 1.6$)



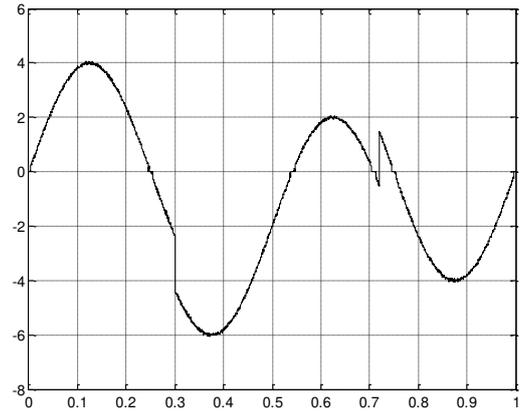
Signal bruité (Bumps 30%)



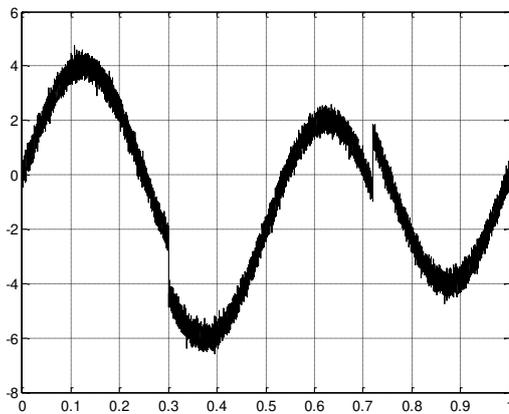
Signal débruité ($m1 = 0.2 - m2 = 0.7 - m3 = 1.5$)



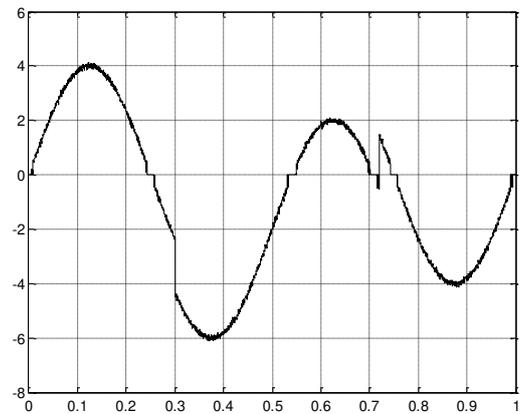
Signal bruité (heavy-sine 10%)



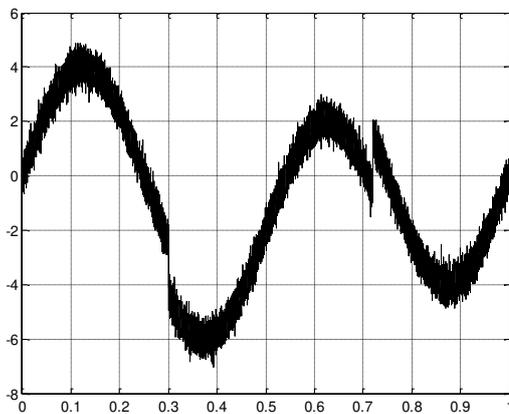
Signal débruité ($m1=0.3 - m2=1.0 - m3=1.7$)



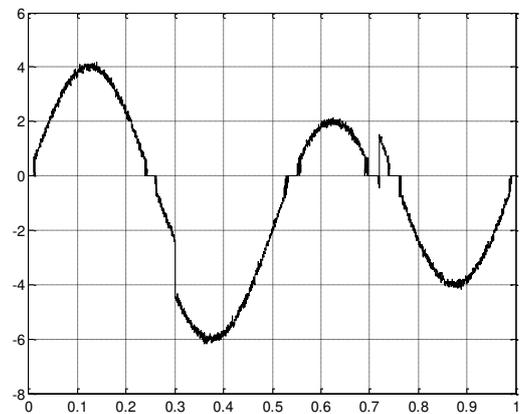
Signal bruité (heavy-sine 20%)



Signal débruité ($m1=0.2 - m2=0.9 - m3=1.4$)



Signal bruité (heavy-sine 30%)



Signal débruité ($m1=0.2 - m2=1.0 - m3=1.5$)

Figure 4.6 Résultats visuelles des Signaux débruités (ondelettes fractionnaires à support compact)

La figure 4.7 présente la variation du SNR (calculé sur 20 simulations) en fonction des paramètres m_1, m_2 et m_3 , pour différents écarts types ($\sigma=10, 20$ et 30). On remarque que la meilleure valeur du rapport signal sur bruit pour tous les signaux correspond toujours à une valeur fractionnaire.

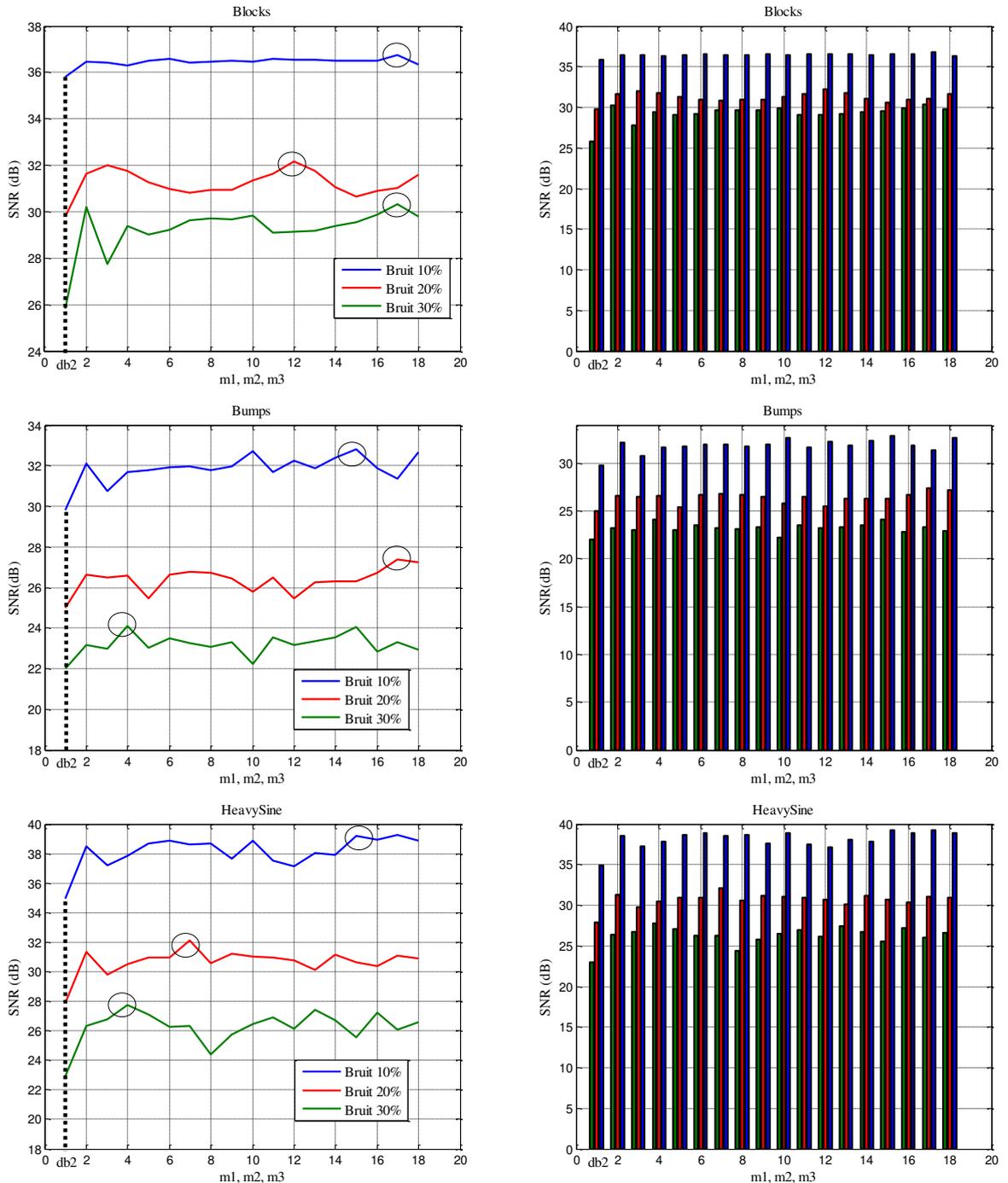


Figure 4.7 Variation du SNR en fonction de m_1, m_2 et m_3

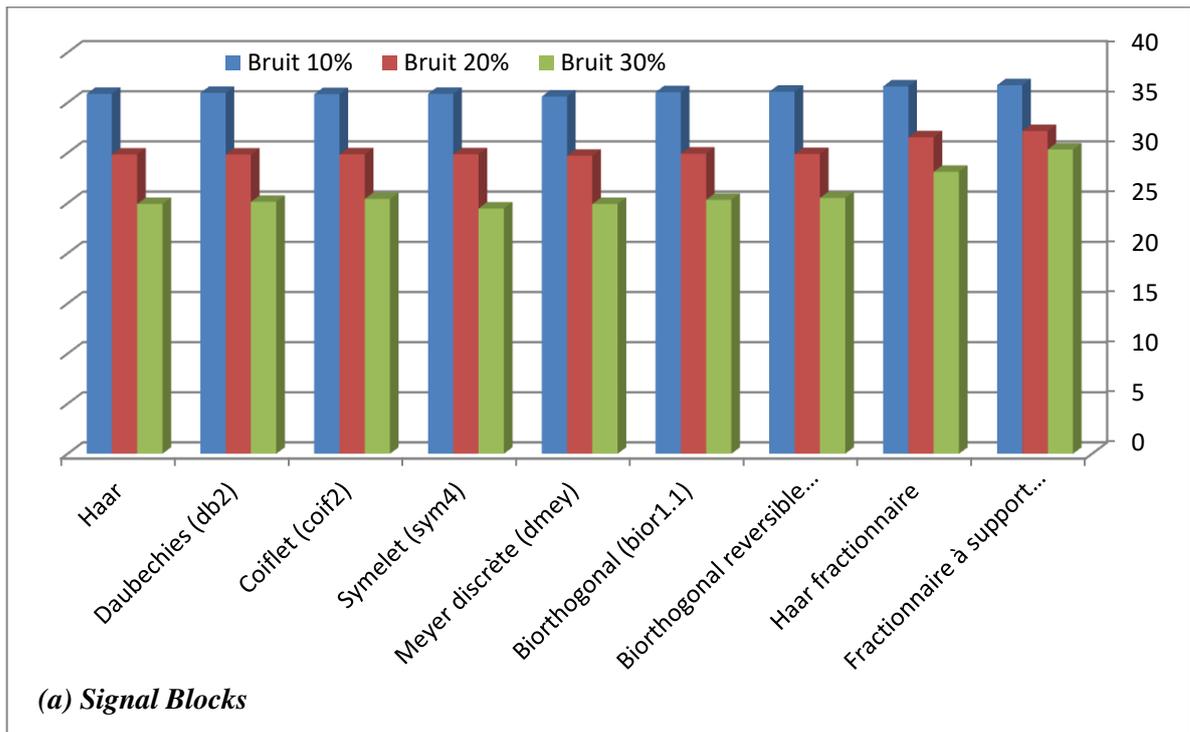
4.4.1.3 Comparaison globale des résultats de débruitages des signaux

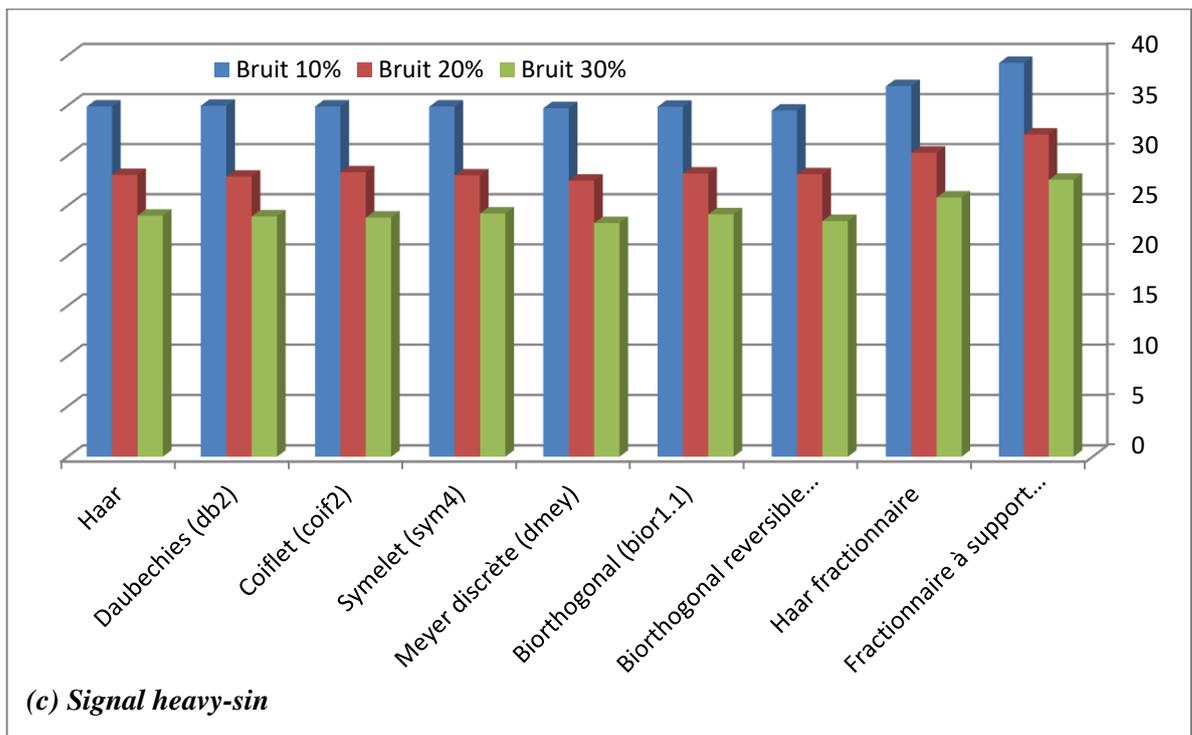
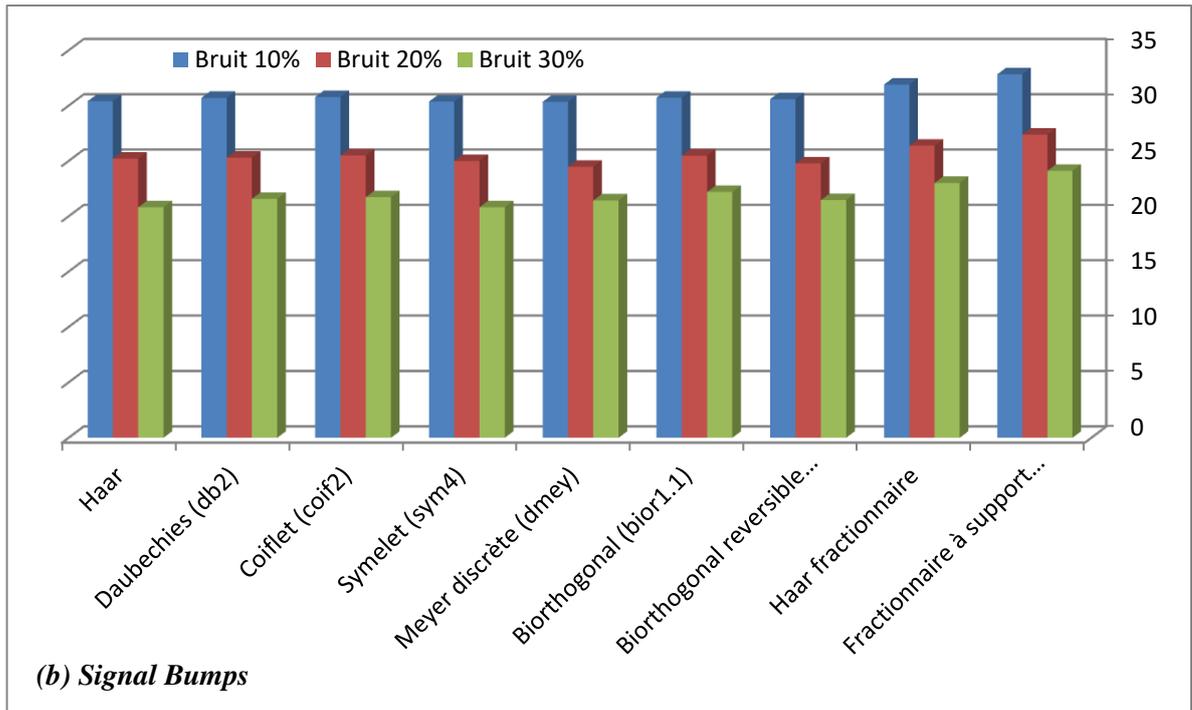
Nous comparons les résultats de débruitage obtenus précédemment avec les résultats obtenus par l'application des ondelettes les plus connus tel que : Haar, Daubechies, Coiflettes, Symlettes, Meyer et les ondelettes bi-orthogonales. En tenant compte les mêmes caractéristiques, en terme de seuillage, type de seuil et niveau de décomposition, pour tous les ondelettes que ce soit fractionnaire ou classique. Le tableau 4.3 résume les meilleurs résultats obtenus pour chaque type d'ondelette. Nous pouvons remarquer clairement que nos modèles fractionnaires aboutissent aux résultats les plus performants, par rapport aux autres types d'ondelettes.

Signal d'entrée	σ /SNR signal bruité	SNR du signal débruité								
		Haar	db2	coif2	sym4	dmey	bior1.1	rbio1.1	Haar fract.	Fract. à support compact
Blocks	$\sigma = 10$ (29.45)	35.87	35.97	35.84	35.88	35.61	36.04	36.09	36.62	36.74
	$\sigma = 20$ (23.46)	29.82	29.83	29.85	29.85	29.70	29.91	29.88	31.55	32.17
	$\sigma = 30$ (19.90)	24.90	25.12	25.41	24.46	24.90	25.32	25.5	28.11	30.33
	σ /SNR signal bruité	Haar	db4	coif3	sym4	dmey	bior2.2	rbio1.1	Haar fract.	Fract. à support compact
Bumps	$\sigma = 10$ (25.10)	30.40	30.70	30.78	30.36	30.35	30.72	30.59	31.91	32.83
	$\sigma = 20$ (19.09)	25.20	25.29	25.50	25.00	24.47	25.48	24.78	26.37	27.38
	$\sigma = 30$ (15.57)	20.81	21.58	21.72	20.82	21.43	22.19	21.46	23.01	24.10
	σ /SNR signal bruité	Haar	db2	coif2	sym3	dmey	bior2.2	rbio1.1	Haar fract.	Fract. à support compact
heavy-sine	$\sigma = 10$ (29.79)	34.89	34.97	34.90	34.88	34.73	34.86	34.49	36.91	39.23
	$\sigma = 20$ (23.75)	28.06	27.89	28.32	28.00	27.48	28.20	28.12	30.27	32.09
	$\sigma = 30$ (20.23)	23.99	23.93	23.81	24.21	23.25	24.14	23.46	25.82	27.57
	σ /SNR signal bruité	Haar	db2	coif2	sym3	dmey	bior2.2	rbio1.1	Haar fract.	Fract. à support compact

Tableau 4.3 Comparaison globale des résultats de débruitages des signaux : Blocks, Bumps et heavy-sine, en utilisant plusieurs familles d'ondelettes

La figure 4.8 présente une comparaison globale des résultats obtenus sous forme des histogrammes, nous remarquons que les résultats des ondelettes fractionnaires sont beaucoup mieux par rapport aux autres types d'ondelettes surtout lorsqu'il s'agit d'un bruit intense. Ça revient à la grande flexibilité des filtres qui les constituent. Cette propriété importante accorde aux ondelettes fractionnaires une bonne sélectivité qui implique une précision considérable surtout lors de la décomposition des signaux en approximations et en détails.





4.8 Comparaison globale des résultats de débruitages des signaux : (a) Blocks, (b) Bumps, (c) heavy-sin

4.4.2 Débruitage des images

Dans cette partie, nous évaluons les performances de nos ondelettes fractionnaires, en les appliquant dans un algorithme de débruitage des images, tout en gardant les mêmes caractéristiques précédentes : seuillage dur, un seuil de type SureShrink (Stein's unbiased risk estimator) et une analyse dyadique.

L'algorithme de débruitage sera appliqué sur un ensemble d'images : Lena, boat, cameraman et building (voir figure 4.9), corrompues par un bruit blanc gaussien d'écart type 10, 20 et 30. Le bruit est important mais visuellement, les informations principales des images originales sont conservées (comme le montre la figure 4.10).



Figure 4.9 Images tests (Lena, boat, cameraman et building)

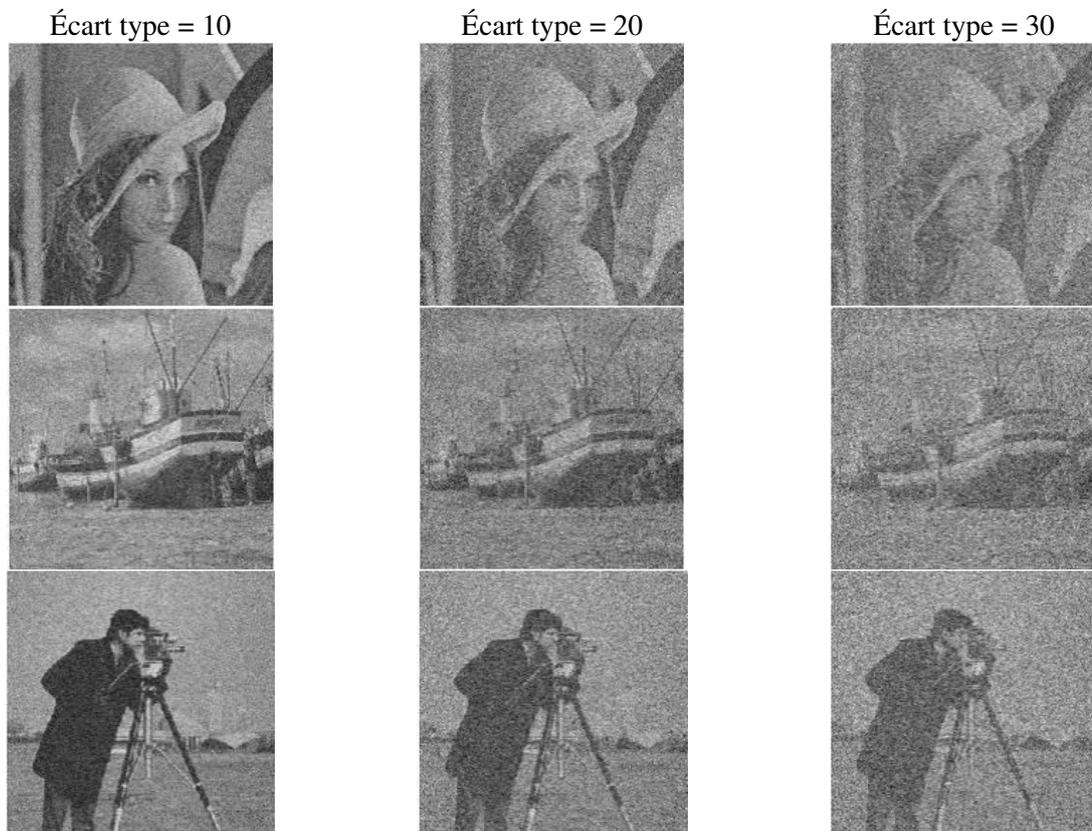




Figure 4.10 Images tests (Lena, boat, cameraman et building) corrompues par un bruit blanc gaussien d'écart type 10, 20 et 30

Afin d'évaluer et de quantifier la qualité de débruitage, nous calculons le PSNR (Peak Signal to Noise Ratio), qui est défini comme suit :

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{D^2}{EQM} \quad (4.7)$$

$$EQM = \frac{1}{M \times N} \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f_0(i, j) - f(i, j))^2 \quad (4.8)$$

Où D est l'écart entre la plus grande et la plus petite valeur d'intensité de l'image. Dans le cas standard $D = 255$. EQM est l'erreur quadratique moyenne. Une image parfaitement reconstruite a un PSNR infini et une erreur quadratique moyenne nulle.

4.4.2.1 Ondelettes de Haar fractionnaires pour le débruitage des images

Les ondelettes de Haar fractionnaires sont exploitées dans un algorithme de débruitage, qui est appliqué sur un ensemble d'images bruitées : Lena, boat, cameraman et building. La figure 4.11 montre le résultat de débruitage pour $D = 1$ (Haar ordinaire) et $D = 1.5$ (cas fractionnaire), cependant le tableau 4.4 résume tous les résultats obtenus y compris le cas ordinaire (Haar classique où $D=1$). Pour tous les images tests, on voit qu'il y a une préférence remarquable des ondelettes fractionnaires (surtout pour le cas où $D = 1.5$) par rapport au cas classique ($D = 1$), que ce soit en terme PSNR ou qualité visuelle, où le zoom sur une région du chapeau de Lena montre que l'algorithme de débruitage à base des ondelettes fractionnaires que nous avons proposé réalisent un bon compromis entre le rejet du bruit et la conservation des détails fins de l'image (voir figure 4.12).

Images d'entrées	σ /PSNR image bruitée	PSNR image débruité(dB)									
		D=0.6	D=0.7	D=0.8	D=0.9	Haar	D=1.1	D=1.2	D=1.3	D=1.4	D=1.5
Lena 512x512	$\sigma=10$ (20.00)	22.16	22.86	23.44	24.15	24.95	26.23	27.36	27.81	28.13	28.43
	$\sigma=20$ (13.98)	17.00	17.60	18.25	18.93	19.70	21.10	22.29	22.88	23.43	23.86
	$\sigma=30$ (10.46)	13.74	14.45	15.22	15.98	16.37	17.77	19.00	19.51	20.18	20.67
Building 512x512	$\sigma=10$ (20.00)	18.84	19.33	20.08	21.28	22.60	23.36	23.69	23.83	23.71	23.81
	$\sigma=20$ (13.98)	16.22	16.73	17.29	17.99	18.72	19.82	20.72	21.04	21.35	21.59
	$\sigma=30$ (10.46)	13.62	14.22	14.87	15.51	15.85	17.14	18.20	18.61	19.11	19.43
Cameraman 256x256	$\sigma=10$ (20.00)	18.81	19.65	20.20	20.92	23.18	24.15	24.59	24.61	24.36	24.46
	$\sigma=20$ (13.97)	16.28	16.91	17.40	18.07	18.91	20.12	21.05	21.32	21.66	21.94
	$\sigma=30$ (10.45)	13.54	14.11	14.89	15.52	15.96	17.28	18.44	18.71	19.31	19.63
Boat 512x512	$\sigma=10$ (20.00)	21.64	21.79	22.55	23.06	24.22	25.29	26.10	26.39	26.51	26.71
	$\sigma=20$ (13.98)	16.79	17.44	17.94	18.64	19.44	20.77	21.88	22.31	22.82	23.18
	$\sigma=30$ (10.46)	13.55	14.24	15.04	15.81	16.21	17.60	18.83	19.30	19.92	20.36

Table 4.4 Résultats de débruitage des images : 'lena, building, cameraman et boat' pour différentes valeurs de D (ondelette de Haar fractionnaire)



Image bruité (10%)



D=1 (Haar)



D=1.5



Image bruité (20%)



D=1 (Haar)



D=1.5



Image bruité (30%)



D=1 (Haar)



D=1.5



Image bruité (10%)



D=1 (Haar)



D=1.5

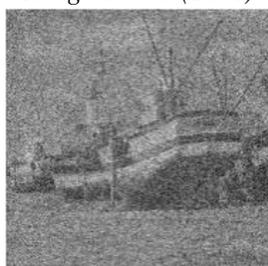
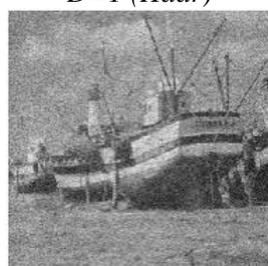


Image bruité (20%)



D=1 (Haar)



D=1.5

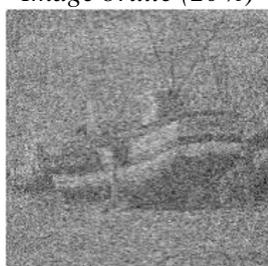
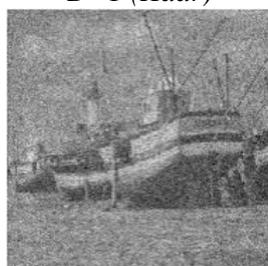


Image bruité (30%)



D=1 (Haar)



D=1.5



Image bruité (10%)



D=1 (Haar)



D=1.3



Image bruité (20%)



D=1 (Haar)



D=1.5

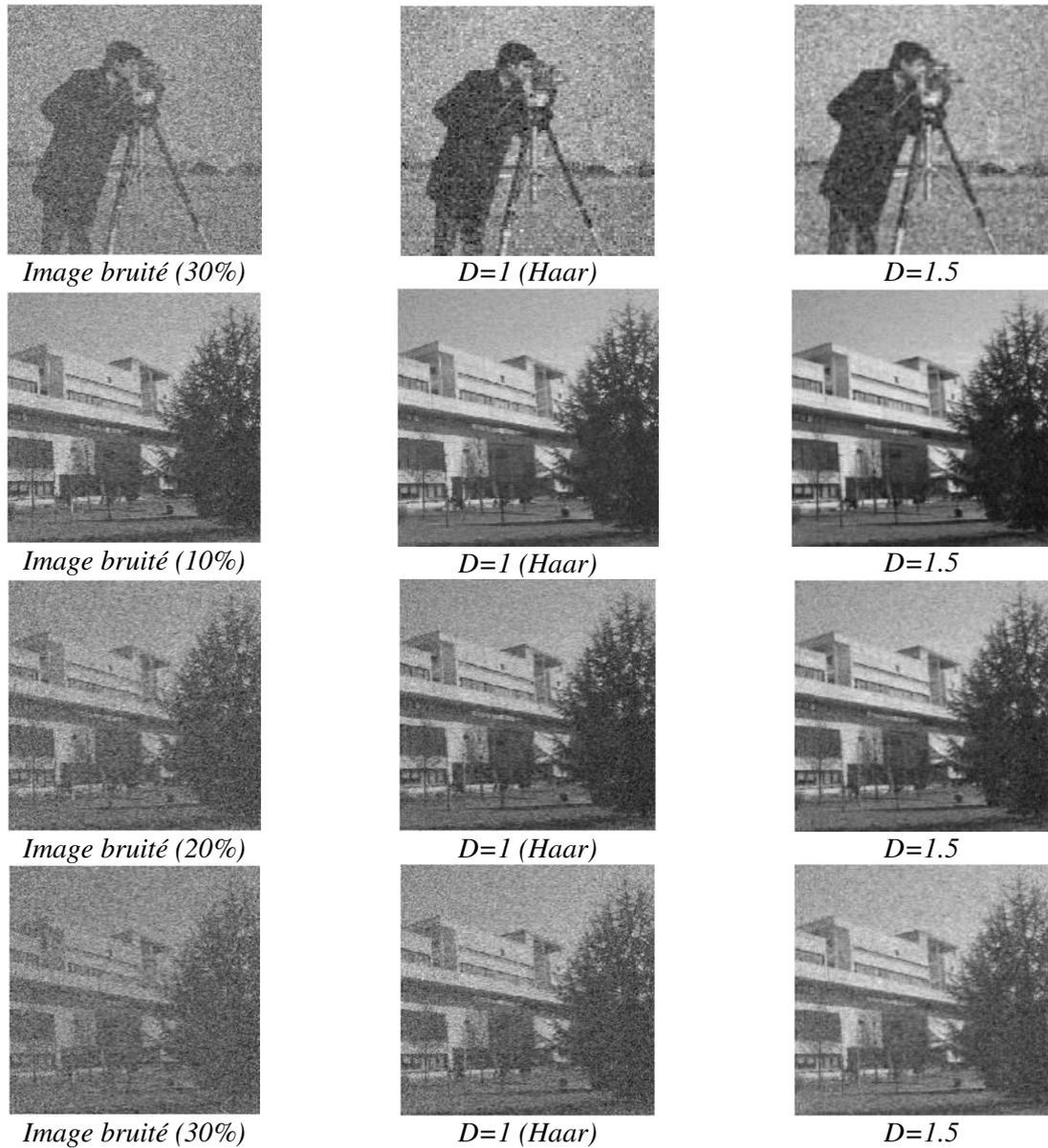


Figure 4.11 Comparaison visuelle des images débruitées pour $D=1$ (Haar) et $D=1.5$ (cas fractionnaire)

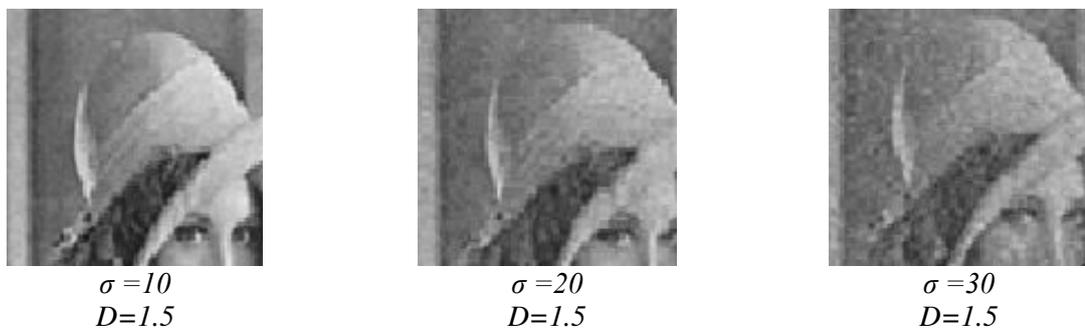
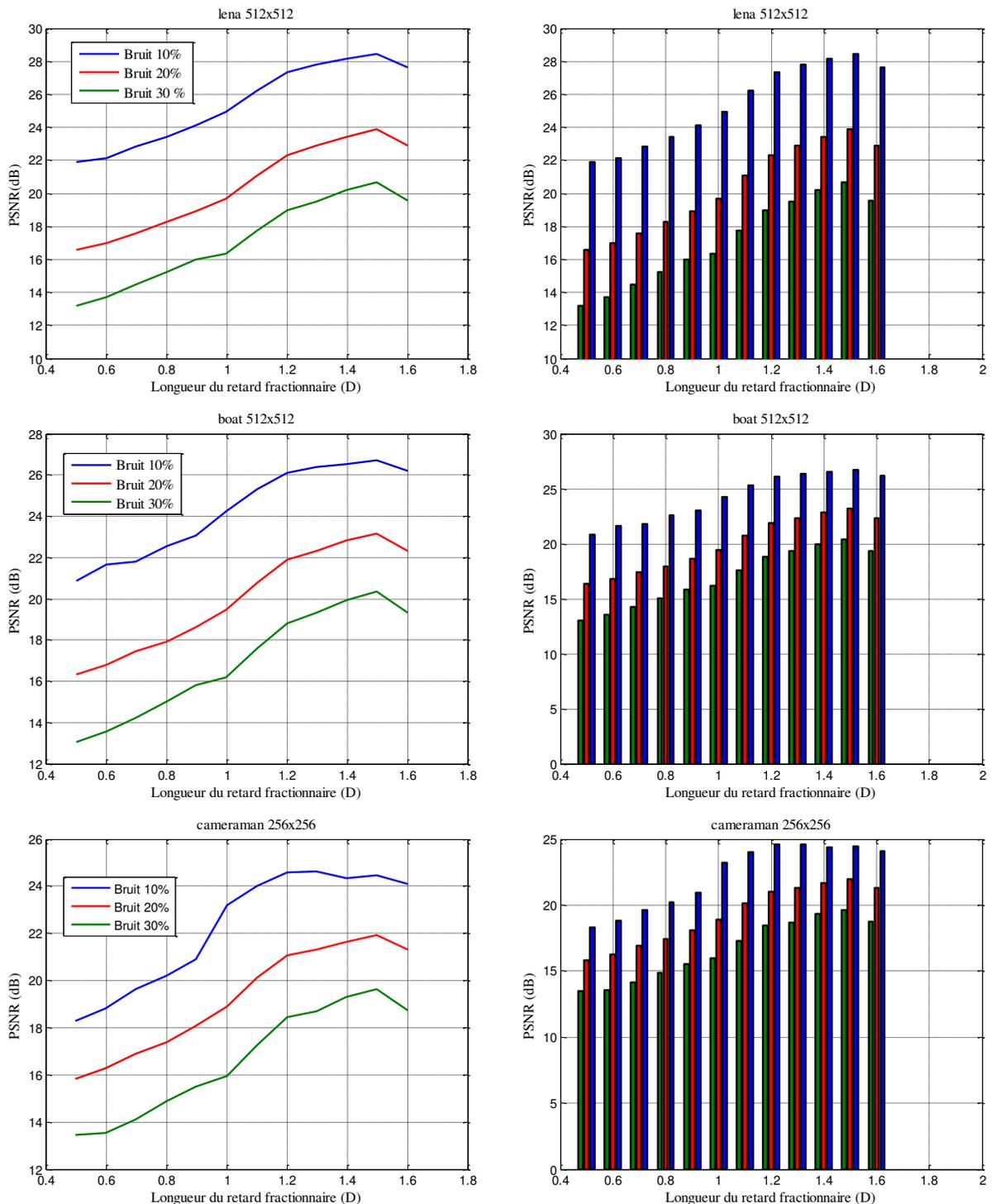


Figure 4.12 Zoom sur une région de l'image de Lena débruitée (ondelette de Haar fractionnaire)

La variation du PSNR (calculé sur 20 simulations) en fonction du paramètre D , pour différents écarts types ($\sigma=10, 20$ et 30) est présentée dans la figure 4.13, Comme on peut le voir, la meilleure valeur du PSNR pour toutes les images avec différents écart type, correspond toujours à une valeur fractionnaire du paramètre D , Ceci montre encore une fois que les ondelettes de Haar fractionnaire s'avèrent performant grâce à la flexibilité des filtres fractionnaires qui les constituent.



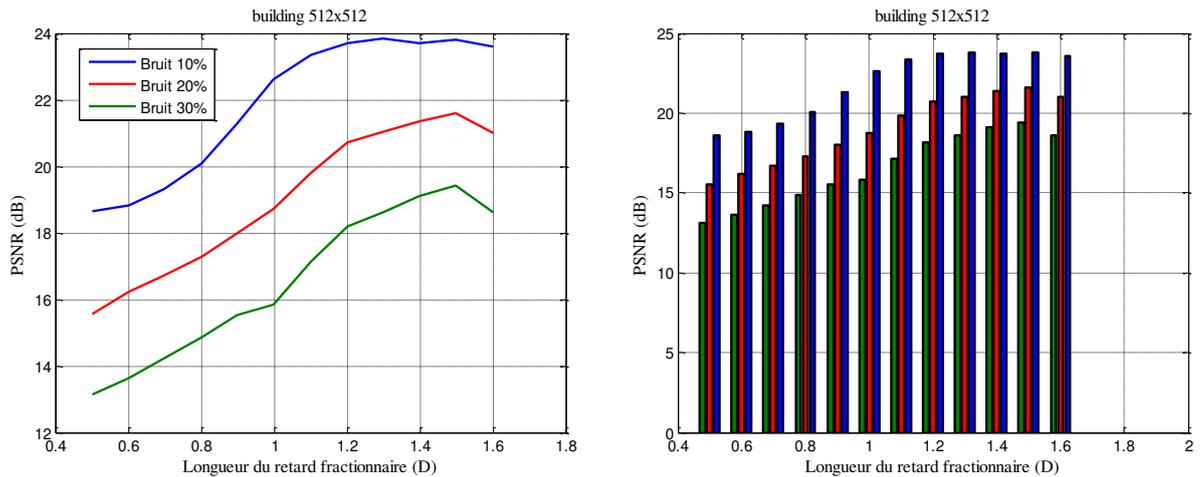


Figure 4.13 Variation du PSNR en fonction de la longueur du retard fractionnaire (D).

4.4.2.2 Ondelettes fractionnaires à support compact pour le débruitage des images

L'utilisation des ondelettes fractionnaires à support compact pour le débruitage des images bruitées : Lena, boat, cameraman et building, nous a donné les résultats présentés dans la figure 4.14 .Il faut noter qu'on a gardé toujours les mêmes caractéristiques (type de seuil, seuillage, niveau de décomposition et l'intervalle de variation de la longueur des retards fractionnaires). Le tableau 4.5 récapitule les meilleurs résultats obtenus. Cependant, la figure 4.16 montre la variation du PSNR par rapport aux paramètres $m1$, $m2$ et $m3$. Il paraît clairement qu'il y a une très bonne amélioration dans les résultats que ce soit en terme PSNR ou qualité visuelle, surtout lorsqu'il s'agit d'un bruit intense. Ceci grâce à la grande flexibilité et sélectivité des filtres qui constituent ces ondelettes fractionnaires. Ces caractéristiques importantes impliquent une très bonne séparation entre les détails des images et le bruit, comme le montre la figure 4.15 qui représente un zoom sur une région de l'image de Lena, où il paraît que l'image débruitée conserve bien les détails fins.

image d'entrée	σ /PSNR image bruitée	PSNR des images débruitées				
		db2	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.5	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.6	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.7	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.8
Lena 512x512	$\sigma = 10/20.00$	db2	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.5	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.6	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.7	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.8
		25.33	29.03	29.06	29.00	29.05
	$\sigma = 20/13.98$	db2	m1=0.1 m2=0.4 m3=0.8	m1=0.1 m2=0.4 m3=0.9	m1=0.1 m2=0.4 m3=1.0	m1=0.1 m2=0.4 m3=1.1
		19.77	26.39	26.30	26.36	26.30
	$\sigma = 30/10.46$	db2	m1=0.1 m2=0.6 m3=1.0	m1=0.1 m2=0.6 m3=1.1	m1=0.1 m2=0.6 m3=1.2	m1=0.2 m2=0.6 m3=1.3
		16.40	24.44	24.58	24.50	24.41
Boat 512x512	$\sigma = 10/20.00$	db2	m1=0.5 m2=0.6 m3=0.7	m1=0.5 m2=0.6 m3=0.8	m1=0.5 m2=0.6 m3=0.9	m1=0.5 m2=0.6 m3=1.0
		24.65	26.81	26.72	26.65	26.60
	$\sigma = 20/13.98$	db2	m1=0.1 m2=0.3 m3=0.9	m1=0.1 m2=0.3 m3=1.0	m1=0.1 m2=0.3 m3=1.1	m1=0.1 m2=0.3 m3=1.2
		19.55	24.61	24.59	24.61	24.60
	$\sigma = 30/10.45$	db2	m1=0.1 m2=0.4 m3=0.8	m1=0.1 m2=0.4 m3=0.9	m1=0.1 m2=0.4 m3=1.0	m1=0.1 m2=0.4 m3=1.1
		16.30	23.07	23.03	23.10	23.09
Cameraman 256x256	$\sigma = 10/20.00$	db2	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.5	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.6	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.7	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.8
		23.54	24.16	24.71	24.17	24.16
	$\sigma = 20/13.97$	db2	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.5	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.6	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.7	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.8
		19.01	22.54	22.60	22.56	22.52
	$\sigma = 30/10.45$	db2	m1=0.1 m2=0.4 m3=0.8	m1=0.1 m2=0.4 m3=0.9	m1=0.1 m2=0.4 m3=1.0	m1=0.1 m2=0.4 m3=1.1
		16.02	21.38	21.27	21.39	21.32
Building 512x512	$\sigma = 10/20.00$	db2	m1=0.5 m2=0.6 m3=0.7	m1=0.5 m2=0.6 m3=0.8	m1=0.5 m2=0.6 m3=0.9	m1=0.5 m2=0.6 m3=1.0
		22.94	23.55	23.50	23.46	23.42
	$\sigma = 20/13.98$	db2	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.5	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.6	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.7	m1=0.3 m2=0.4 m3=0.8
		18.90	22.07	22.11	22.10	22.06
	$\sigma = 30/10.45$	db2	m1=0.1 m2=0.5 m3=0.7	m1=0.1 m2=0.5 m3=0.8	m1=0.1 m2=0.5 m3=0.9	m1=0.1 m2=0.5 m3=1.0
		15.97	20.82	20.98	20.95	20.91

Table.4.5 Résultats de débruitage des images : 'Lena, building, cameraman et boat'



Image bruité (10%)



db2



$m1=0.3, m2=0.4, m3=0.6$



Image bruité (20%)



db2



$m1=0.1, m2=0.4, m3=0.8$



Image bruité (30%)



db2



$m1=0.1, m2=0.6, m3=1.1$



Image bruité (10%)



db2



$m1=0.5, m2=0.6, m3=0.7$



Image bruité (20%)



db2



$m1=0.1, m2=0.3, m3=0.9$



Image bruité (30%)



db2



$m1=0.1, m2=0.4, m3=1.0$

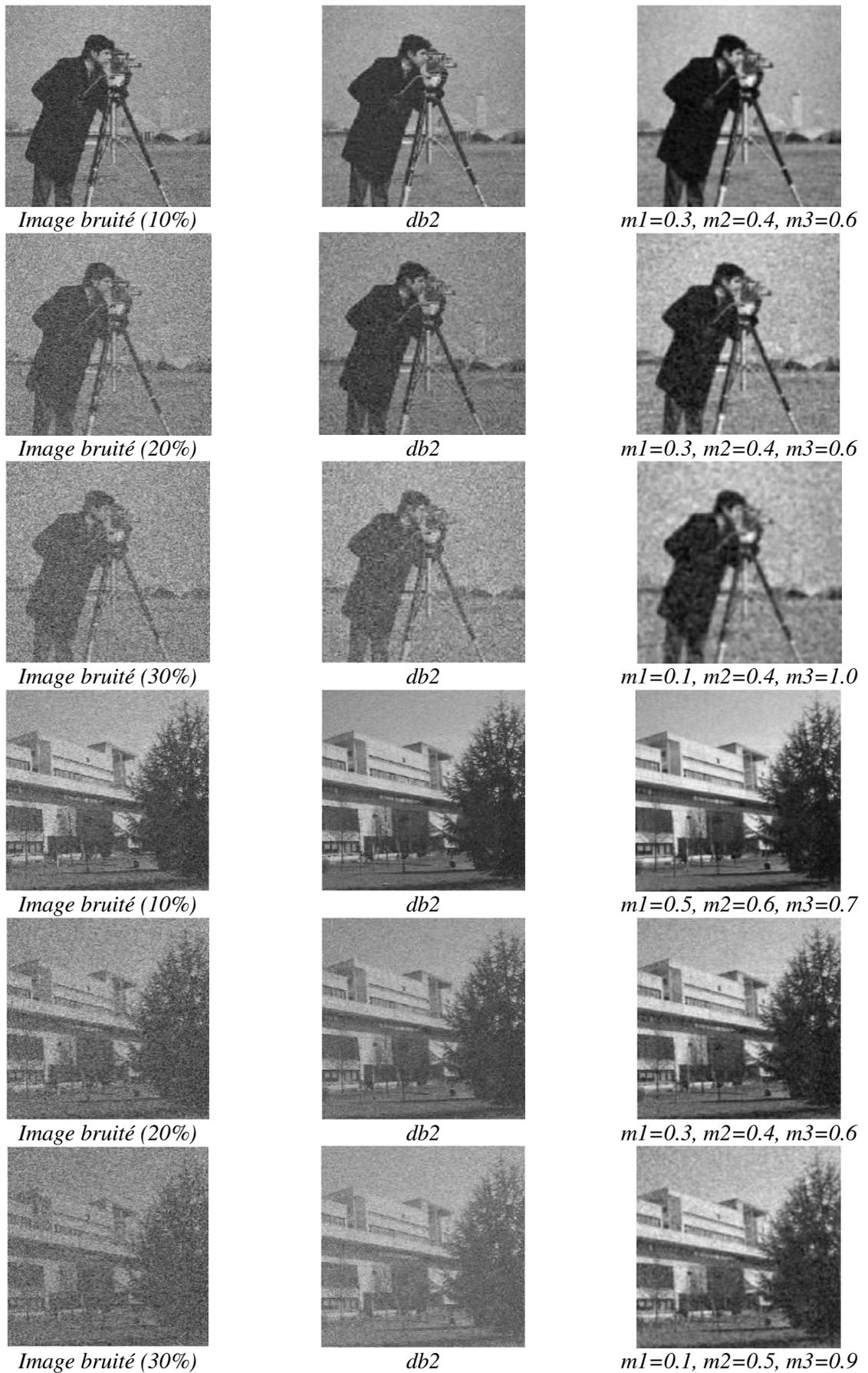


Figure 4.14 Résultats visuelles des images débruitées (db2 et ondelettes frac. à support compact)

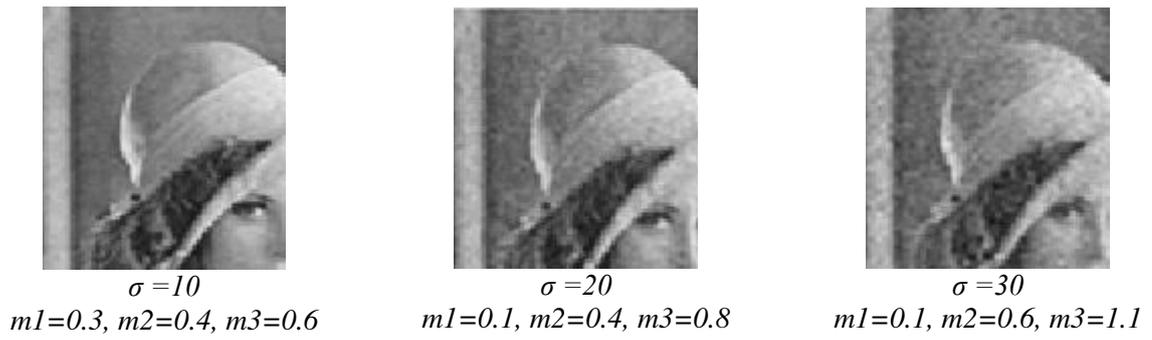
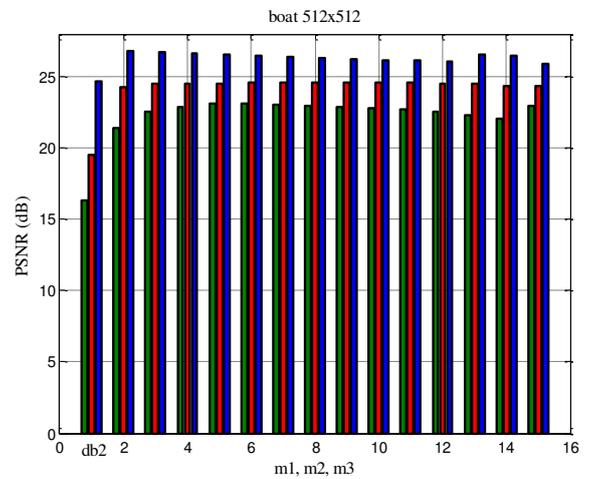
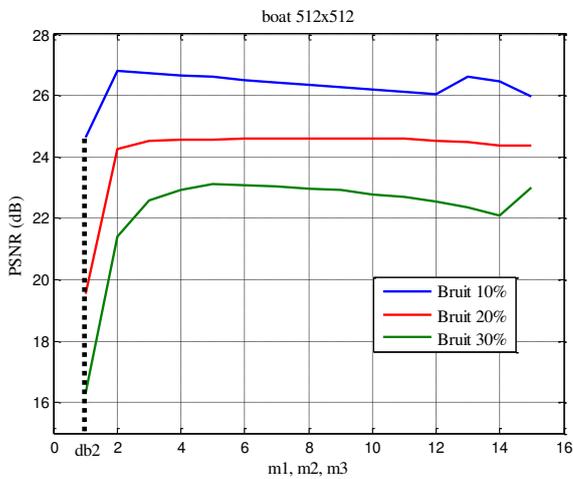
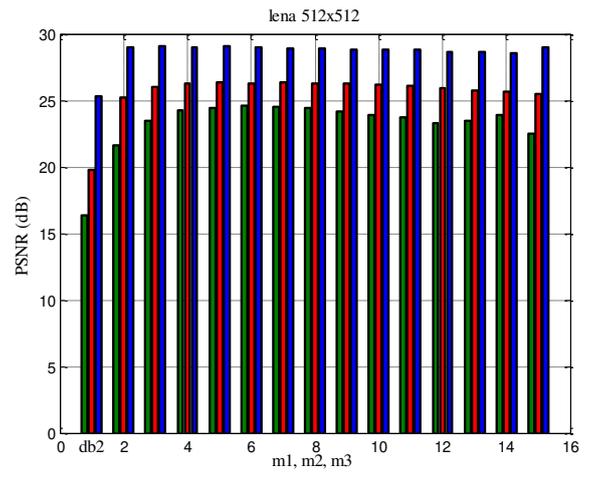
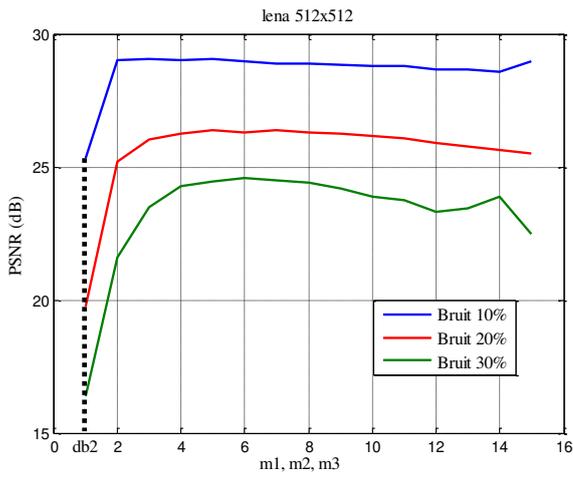


Figure 4.15 Zoom sur une région de l'image de Lena débruitée (ondelettes frac. à support compact).



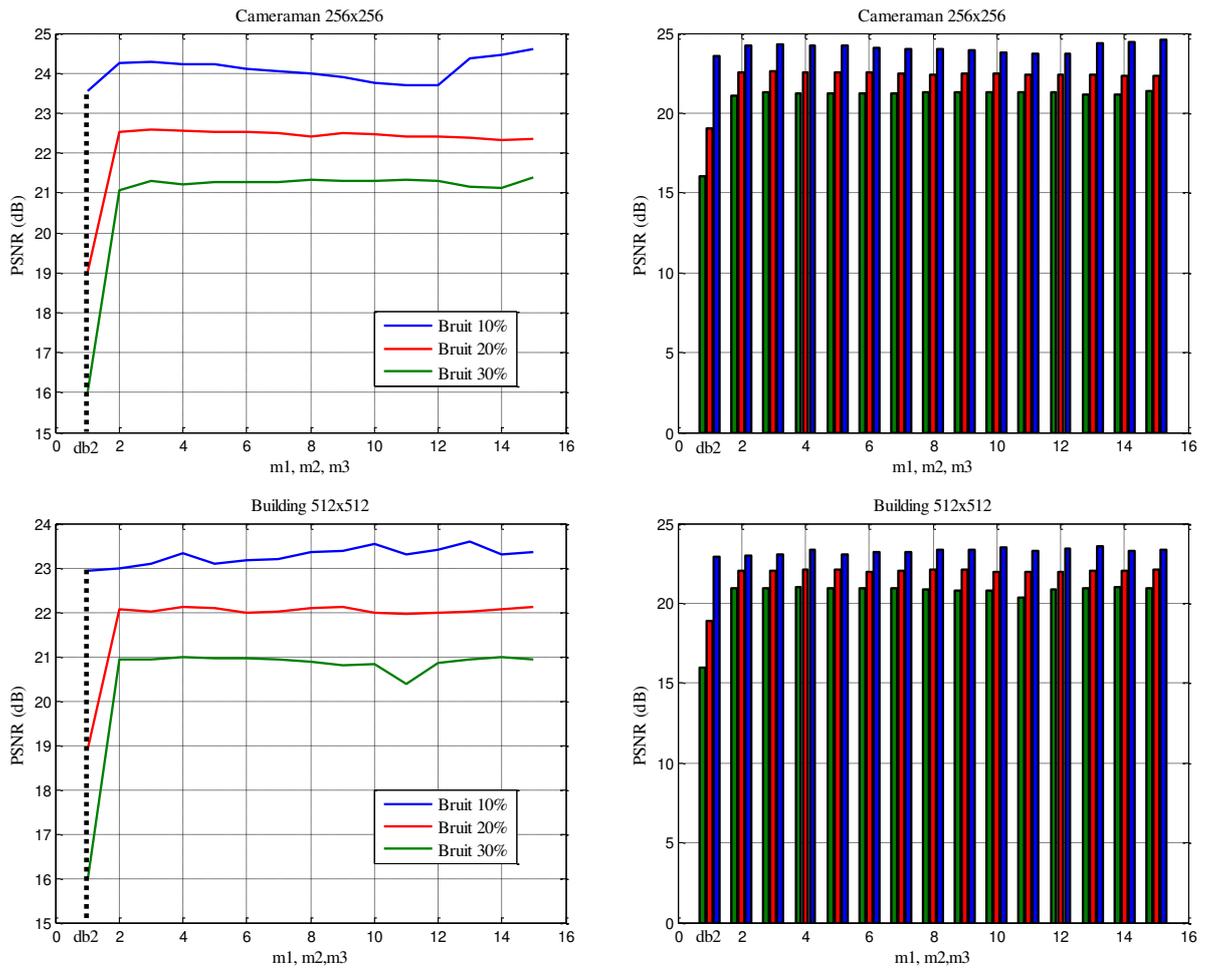


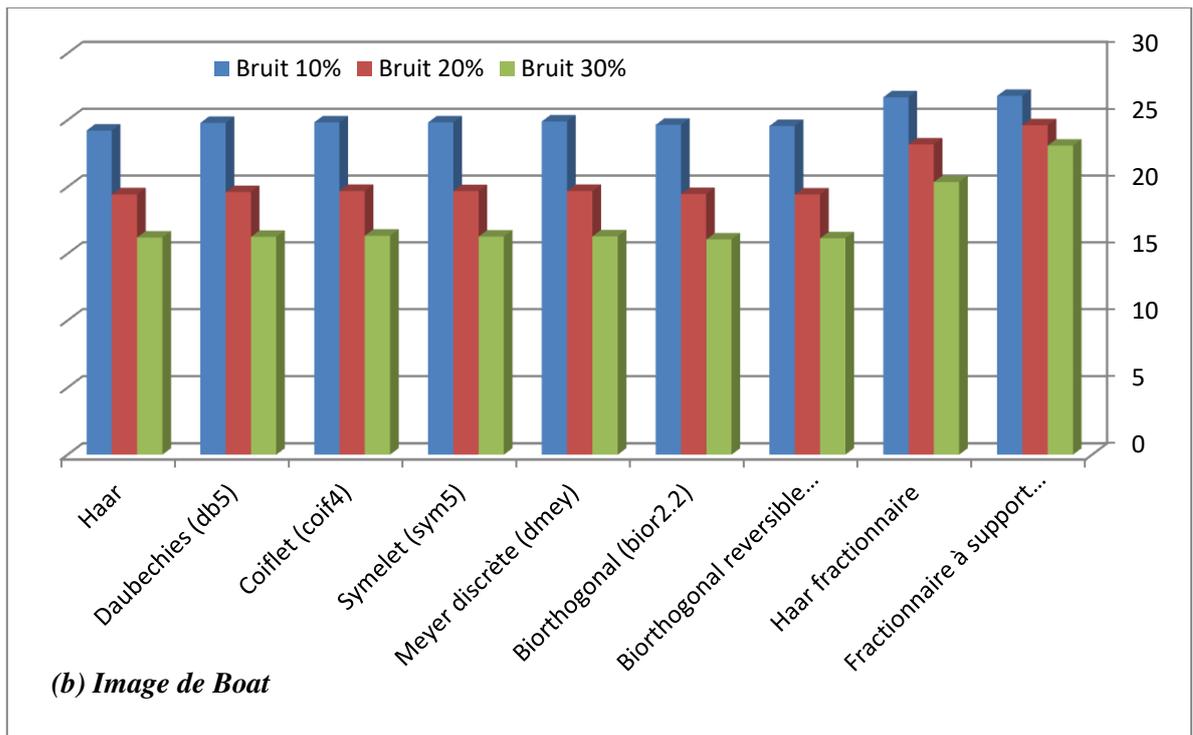
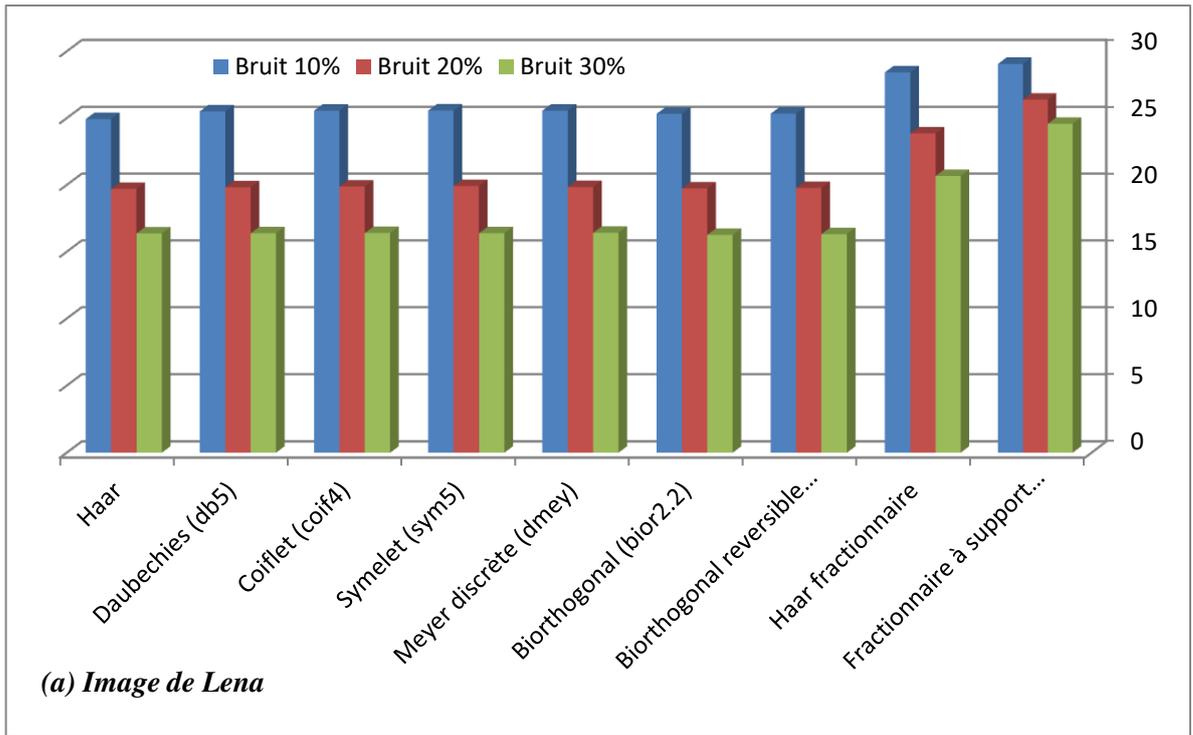
Figure 4.16 Variation du PSNR en fonction de m_1, m_2 et m_3

4.4.2.3 Comparaison globale des résultats de débruitages des images

Dans cette partie, nous faisons une comparaison globale entre les résultats de débruitages des images obtenus par l'application de plusieurs ondelettes y compris nos ondelettes fractionnaires et les ondelettes classique les plus connues tel que : Haar, Daubechies, Coiflettes, Symlettes, Meyer et les ondelettes bi-orthogonales. Le tableau 4.6 regroupe les meilleurs PSNR obtenus pour chaque famille d'ondelette, cependant la figure 4.17 traduit tous ces résultats sous forme des histogrammes, où il parait clairement la supériorité des ondelettes fractionnaires par rapport aux autres familles. En revanche, comme le montre la figure 4.18 la qualité visuelle des images débruitées via les ondelettes fractionnaire est meilleure que celle obtenue par les autres ondelettes, cette préférence est due à la flexibilité, sélectivité et à la grande précision des filtres qui les constituent.

image d'entrée	σ /SNR image bruité	PSNR des images débruitées								
		Haar	db5	coif4	sym5	dmey	bior2.2	rbio4.4	Haar fract.	Fract. à support compact
Lena	$\sigma = 10$ 20.00	24.93	25.51	25.56	25.57	25.56	25.32	25.34	28.43	29.06
	$\sigma = 20$ 13.98	19.70	19.83	19.88	19.91	19.84	19.73	19.77	23.86	26.39
	$\sigma = 30$ 10.46	16.37	16.38	16.40	16.38	16.42	16.26	16.32	20.67	24.58
	σ /SNR signal bruité	Haar	db4	coif3	sym6	dmey	bior5.5	rbio5.5	Haar fract.	Fract. à support compact
Boat	$\sigma = 10$ 20.00	24.22	24.79	24.83	24.82	24.90	24.64	24.56	26.71	26.81
	$\sigma = 20$ 13.98	19.44	19.61	19.69	19.68	19.69	19.47	19.43	23.18	24.61
	$\sigma = 30$ 10.45	16.21	16.26	16.34	16.28	16.30	16.06	16.15	20.36	23.09
	σ /SNR signal bruité	Haar	db3	coif5	sym7	dmey	bior5.5	rbio4.4	Haar fract.	Fract. à support compact
Cameraman	$\sigma = 10$ 20.01	23.18	23.77	23.90	23.97	23.90	23.68	23.60	24.61	24.71
	$\sigma = 20$ 13.97	18.91	19.13	19.31	19.19	19.25	18.96	18.97	21.94	22.60
	$\sigma = 30$ 10.46	15.96	16.03	16.07	16.07	16.12	15.89	15.98	19.63	21.39
	σ /SNR signal bruité	Haar	db5	coif4	sym6	dmey	bior4.4	rbio4.4	Haar fract.	Fract. à support compact
Building	$\sigma = 10$ 20.00	22.60	23.11	23.20	23.18	23.26	23.14	23.02	23.83	23.55
	$\sigma = 20$ 13.98	18.72	18.98	19.00	19.01	19.06	18.94	18.89	21.59	22.11
	$\sigma = 30$ 10.45	15.85	15.97	16.03	16.00	16.00	15.92	15.91	19.43	20.98
	σ /SNR signal bruité	Haar	db5	coif4	sym6	dmey	bior4.4	rbio4.4	Haar fract.	Fract. à support compact

Tableau 4.6 Comparaison globale des résultats de débruitages des images : Lena, Boat, Cameraman, Building en utilisant plusieurs familles d'ondelettes..



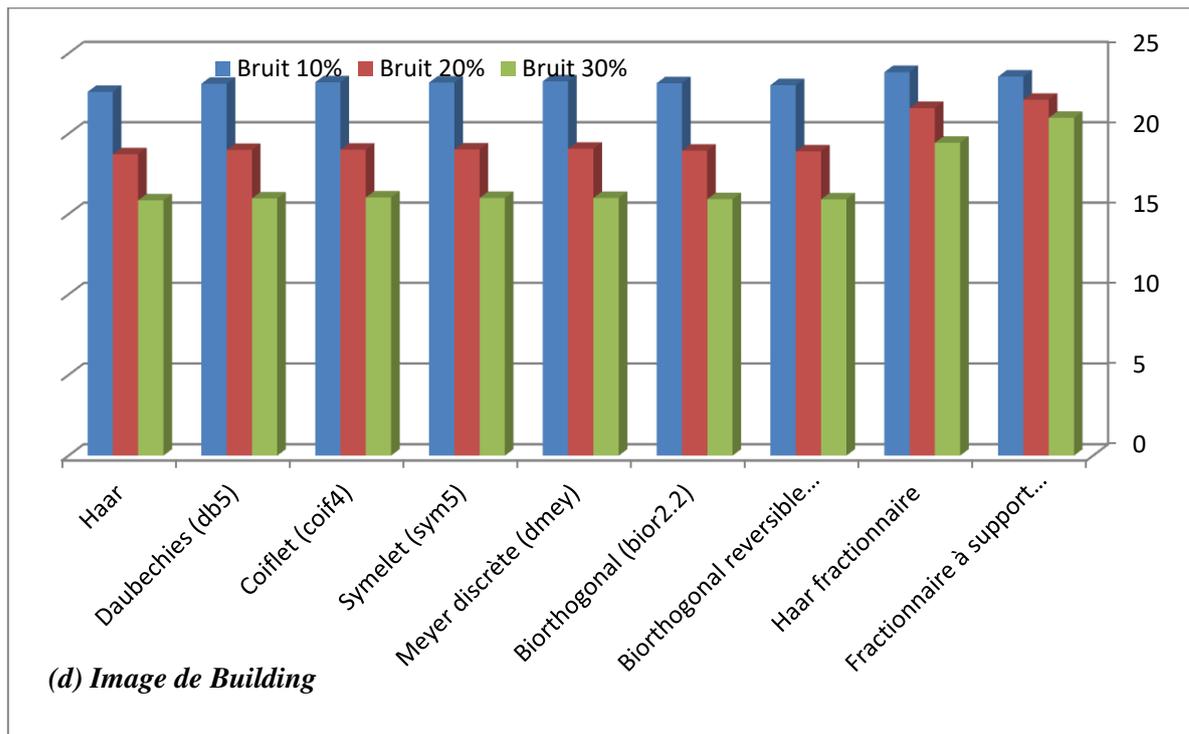
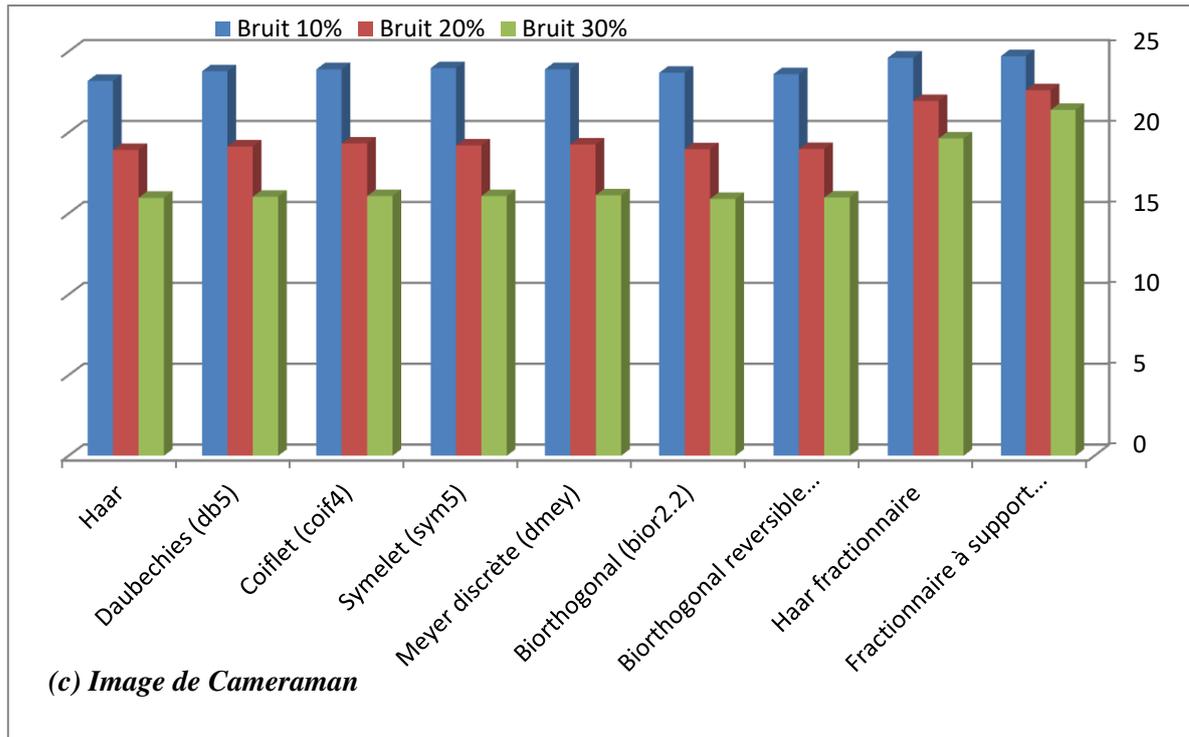


Figure 4.17 Comparaison globale des résultats de débruitages des images : (a) *Lena*, (b) *Boat*, (c) *Cameraman*, (d) *Building*.

(a). *Lena* 10%



haar



db5



coif4



sym5



dmey



bior2.2



rbio4.4



D=1.5



m1=0.3, m2=0.4, m3=0.6

(b). *Lena* 20%



haar



db5



coif4



sym5



dmey



bior2.2



rbio4.4



D=1.5



m1=0.1, m2=0.4, m3=0.8

(c). *Lena 30%*



haar



db5



coif4



sym5



dmey



bior2.2



rbio4.4



D=1.5



m1=0.1, m2=0.6, m3=1.1

Figure 4.18 Comparaison visuelle des résultats de débruitages de l'image de Lena obtenus par l'application de plusieurs familles d'ondelettes

4.5 Conclusion

Afin d'illustrer le potentiel et l'efficacité des ondelettes fractionnaires conçus au sein de cette thèse, nous avons présenté dans ce chapitre, une des applications de la transformée en ondelette dans le traitement du signal et le traitement d'image, c'est le débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes.

Nous avons rappelé brièvement, en premier temps, le formalisme général du problème de débruitage ainsi que le principe du débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes. Ensuite, nous avons implémenté nos ondelettes fractionnaires dans un algorithme de débruitage, dans un cadre d'une analyse dyadique, un seuillage dur et un seuil de type SureShrink, pour débruiter un ensemble de signaux et d'images. Les mesures utilisées pour évaluer la qualité des signaux et des images débruitées sont le PSNR (Peak Signal to Noise Ratio), SNR (signal-to-noise-ratio) et bien sûr la qualité visuelle. Le choix de la longueur des retards fractionnaires est basé sur la maximisation du PSNR, SNR et la qualité visuelle.

Les résultats expérimentaux ont montré que les performances de nos ondelettes fractionnaires, s'avèrent supérieur à celle des ondelettes classique y comprise les ondelettes de Haar, Daubechies, Coiflettes, Symlettes, Meyer et les ondelettes bi-orthogonales. Cette performance a été constatée surtout pour les ondelettes fractionnaires à support compact, où nous avons marqué de très bons résultats que ce soit pour les images ou les signaux.

Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

Dans ce document, nous avons introduit une nouvelle catégorie d'ondelette basée sur le calcul fractionnaire. Nous nous sommes focalisés, dans notre construction, sur l'exploitation du retard numérique d'ordre fractionnaire Z^D qui est approximée par un filtre RIF.

Nous avons tout d'abord présenté les bases théoriques de la transformée en ondelettes et ses propriétés ainsi que sa relation avec l'analyse multi-résolution et les bancs de filtres à reconstruction parfaite. Ensuite nous avons exposé une vue générale de quelques ondelettes en s'appuyant sur les modèles les plus connues dans la littérature. Enfin, nous avons conclu cette première partie par une introduction sur les ondelettes fractionnaires.

Dans le second chapitre, nous avons introduit des notions de bases sur le retard numérique d'ordre fractionnaire, où nous avons commencé par sa définition et ses propriétés. Ensuite nous avons vu que l'implémentation du retard fractionnaire nécessite des approximations, deux familles différentes d'approximations ont été présentées : La première est basée sur les filtres RIF et la seconde sur les filtres RII.

Après cette étude théorique, nous avons touché, dans La troisième partie de ce document, le noyau de notre travail, où nous avons présenté le principe général de la construction des ondelettes fractionnaires à base du retard numérique d'ordre fractionnaire. Ensuite nous avons exposé les différentes démarches de conception de deux bases: *les ondelettes de Haar fractionnaires et les ondelettes fractionnaires à support compact*, où la construction est basée sur la généralisation d'un filtre passe-bas connu, par un retard numérique d'ordre fractionnaire, dont ses paramètres clés sont ajustés via la longueur du retard numérique fractionnaire. On a vu également que ces nouvelles ondelettes présentent des caractéristiques et des propriétés intéressantes, où la flexibilité des filtres associés et sa grande sélectivité offrent à ces nouvelles bases une grande aptitude à prendre en charge plusieurs traitements numériques du signal/image d'une façon très efficace.

Afin d'illustrer le potentiel et l'efficacité des ondelettes fractionnaires conçus au sein de cette thèse, nous les avons appliqués dans un algorithme de débruitage des images et des signaux. Les résultats expérimentaux obtenus ont montré que les performances de nos ondelettes fractionnaires s'avèrent supérieures à celle des ondelettes classiques y compris les ondelettes de

Haar, Daubechies, Coiflettes, Symlettes, Meyer et les ondelettes bi-orthogonales. Cette performance a été constatée surtout pour les ondelettes fractionnaires à support compact, où nous avons marqué des résultats très satisfaisants et prometteurs, que ce soit pour les images ou les signaux.

Perspectives

Plusieurs voies peuvent être envisagées dans le sillage de ce travail. Tout d'abord, nous souhaitons définir un algorithme d'identification pour calculer la longueur du retard numérique fractionnaire D , qui présente un résultat optimal, avec une façon systématique.

Par ailleurs, dans notre travail de recherche, nous avons construit deux familles d'ondelettes fractionnaires : les ondelettes de Haar fractionnaire (basées sur la généralisation des filtres de Haar) et les ondelettes à support compact fractionnaires (basées sur la généralisation des filtres associés aux bases d'ondelettes à support compact qui ont 2 moments nuls), Nous désirons concevoir d'autres familles d'ondelettes fractionnaires basée sur d'autre filtres tels que les filtres associés aux bases d'ondelettes à support compact qui ont des moments nuls supérieur à 2, des filtres bi-orthogonale, etc.

Nous envisageons aussi élargir l'idée de construction des ondelettes fractionnaire via le retard numérique d'ordre fractionnaire sur d'autres familles de transformées multi-échelles telles que les ondelettes non séparables (ondelettes en quinconces), les ridgelettes, les curvelettes, les contourlettes et les bandelettes.

Concernant l'efficacité de nos ondelettes fractionnaires, nous avons vu leur potentiel dans un algorithme de débruitage des signaux et des images, cependant nous souhaitons tester leurs performances par les implémenter dans d'autres algorithmes tels que la compression des images et des signaux, l'analyse des signaux médicaux (ECG, EEG, EMG, etc.), la classification des signaux et des images, et la liste des applications est loin d'être exhaustive.

Annexes

Annexe A

Calcul des coefficients des filtres de Haar fractionnaires

La fonction de transfert du filtre passe bas associé à la base d'ondelette de Haar fractionnaire est définie comme suit :

$$\tilde{H}_f(Z) \approx A + B \cdot \left(\sum_{n=0}^N h[n] Z^{-n} \right)$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{N-1}{2} \leq D \leq \frac{N+1}{2} & \text{pour } N \text{ impair} \\ \frac{N}{2} - 1 \leq D \leq \frac{N}{2} + 1 & \text{pour } N \text{ pair} \end{array} \right.$$

On pose $Z^{-n} = e^{-nj\omega} = \cos(n\omega) - j \sin(n\omega)$

- **Pour N=1 : $0 < D < 1$**

$$\tilde{H}_f(Z) \approx A + B \cdot h[0] + B \cdot h[1] \cdot Z^{-1}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} h[0] = 1 - D \\ h[1] = D \end{cases}$$

$$\tilde{H}_f(\omega) \approx A + B \cdot h[0] + B \cdot h[1] \cdot [\cos(\omega) - j \sin(\omega)]$$

$$\tilde{H}_f(0) = A + B \cdot (h[0] + h[1]) \quad \text{Avec } h[0] + h[1] = 1$$

$$\tilde{H}_f(0) = A + B = \sqrt{2}$$

Donc

$$\boxed{A + B = \sqrt{2}} \quad \dots\dots\dots(\text{A.1})$$

$$\tilde{H}_f(\pi) = A + B \cdot h[0] + B \cdot h[1] \cdot [\cos(\pi) - j \sin(\pi)]$$

$$\tilde{H}_f(\pi) = A + B \cdot h[0] - B \cdot h[1]$$

$$|\tilde{H}_f(\pi)| = \sqrt{(A + B \cdot (h[0] - h[1]))^2}$$

$$|\tilde{H}_f(\pi)| = A + B \cdot (h[0] - h[1]) = 0$$

Donc

$$\boxed{A + B \cdot (h[0] - h[1]) = 0} \dots\dots\dots (A.2)$$

D'après A.1 et A.2 on peut construire le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} A + B = \sqrt{2} \\ A + B \cdot (h[0] - h[1]) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne les résultats suivants:

$$A = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{1 - (h[0] - h[1])} \quad B = \frac{\sqrt{2}}{1 - (h[0] - h[1])}$$

• **Pour N=2 : 0 < D < 2**

$$\tilde{H}_f(Z) \approx A + B \cdot h[0] + B \cdot h[1] \cdot Z^{-1} + B \cdot h[2] \cdot Z^{-2}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} h[0] = (D - 1)(D - 2)/2 \\ h[1] = -D(D - 2) \\ h[2] = D(D - 1)/2 \end{cases}$$

$$\tilde{H}_f(\omega) \approx A + B \cdot h[0] + B \cdot h[1] \cdot [\cos(\omega) - j \sin(\omega)] + B \cdot h[2] \cdot [\cos(2\omega) - j \sin(2\omega)]$$

$$\tilde{H}_f(0) = A + B \cdot (h[0] + h[1] + h[2]) \quad \text{Avec } h[0] + h[1] + h[2] = 1$$

$$\tilde{H}_f(0) = A + B = \sqrt{2}$$

Donc

$$\boxed{A + B = \sqrt{2}} \dots\dots\dots (A.3)$$

$$\tilde{H}_f(\pi) = A + B \cdot h[0] + B \cdot h[1] \cdot [\cos(\pi) - j \sin(\pi)] + B \cdot h[2] \cdot [\cos(2\pi) - j \sin(2\pi)]$$

$$\tilde{H}_f(\pi) = A + B \cdot h[0] - B \cdot h[1] + B \cdot h[2]$$

$$|\tilde{H}_f(\pi)| = \sqrt{(A + B \cdot (h[0] - h[1] + h[2]))^2}$$

$$|\tilde{H}_f(\pi)| = A + B \cdot (h[0] - h[1] + h[2]) = 0$$

Donc

$$\boxed{A + B \cdot (h[0] - h[1] + h[2]) = 0} \dots\dots\dots (A.4)$$

D'après A.3 et A.4 on peut construire le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} A + B = \sqrt{2} \\ A + B \cdot (h[0] - h[1] + h[2]) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne les résultats suivants :

$$A = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{1 - (h[0] - h[1] + h[2])} \quad B = \frac{\sqrt{2}}{1 - (h[0] - h[1] + h[2])}$$

• Pour N=3 : 1 < D < 2

$$\tilde{H}_f(Z) \approx A + B \cdot h[0] + B \cdot h[1] \cdot Z^{-1} + B \cdot h[2] \cdot Z^{-2} + B \cdot h[3] \cdot Z^{-3}$$

$$\tilde{H}_f(0) = A + B \cdot (h[0] + h[1] + h[2] + h[2]) \quad \text{Avec } h[0] + h[1] + h[2] + h[3] = 1$$

$$\tilde{H}_f(0) = A + B = \sqrt{2}$$

Donc

$$\boxed{A + B = \sqrt{2}} \quad \dots\dots\dots(\text{A.5})$$

$$|\tilde{H}_f(\pi)| = \sqrt{(A + B \cdot (h[0] - h[1] + h[2] - h[3]))^2}$$

$$|\tilde{H}_f(\pi)| = A + B \cdot (h[0] - h[1] + h[2] - h[3]) = 0$$

Donc

$$\boxed{A + B \cdot (h[0] - h[1] + h[2] - h[3]) = 0} \quad \dots\dots\dots(\text{A.6})$$

D'après A.5 et A.6 on peut construire le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} A + B = \sqrt{2} \\ A + B \cdot (h[0] - h[1] + h[2] - h[3]) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne les résultats suivants :

$$A = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{1 - (h[0] - h[1] + h[2] - h[3])} \quad B = \frac{\sqrt{2}}{1 - (h[0] - h[1] + h[2] - h[3])}$$

Annexe B

Calcul de l'erreur ε (Filtres de Haar fractionnaires)

L'erreur ε correspond à la condition d'orthogonalité sera calculée par la formule suivante :

$$\varepsilon = |\tilde{H}_f(\omega)|^2 + |\tilde{H}_f(\omega + \pi)|^2 - 2$$

Afin de simplifier les calculs, on utilise les lois trigonométriques suivantes :

$$\cos(\omega + \pi) = -\cos(\omega)$$

$$\sin(\omega + \pi) = -\sin(\omega)$$

$$\cos^2(\omega) + \sin^2(\omega) = 1$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$$

- Pour $N=1$: $0 < D < 1$

$$\begin{aligned} & |\tilde{H}_f(\omega)|^2 + |\tilde{H}_f(\omega + \pi)|^2 \\ &= [A + B \cdot (h[0] - h[1] \cdot \cos(\omega))]^2 + [B \cdot h[1] \cdot \sin(\omega)]^2 \\ &+ [A + B \cdot (h[0] - h[1] \cdot \cos(\omega + \pi))]^2 + [B \cdot h[1] \cdot \sin(\omega + \pi)]^2 \end{aligned}$$

$$\varepsilon = (A + B \cdot h[0])^2 + (B \cdot h[1])^2 - 1$$

La figure A.1 montre le développement de l'erreur ε par rapport à D (longueur du retard fractionnaire).

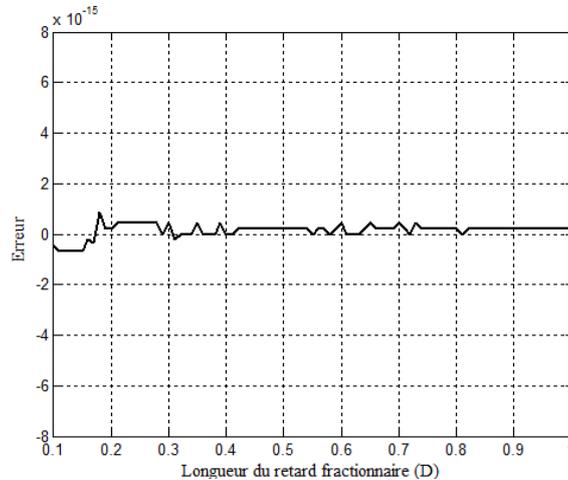


Figure A.1 Développement de l'erreur ε par rapport à D ($N=1$)

- Pour $N=2$: $0 < D < 2$

$$\begin{aligned}
& |\tilde{H}_f(\omega)|^2 + |\tilde{H}_f(\omega + \pi)|^2 \\
&= [A + B \cdot (h[0] - h[1] \cdot \cos(\omega) + h[2] \cdot \cos(2\omega))]^2 \\
&+ [B \cdot (h[1] \cdot \sin(\omega) + h[2] \cdot \sin(2\omega))]^2 \\
&+ [A + B \cdot (h[0] - h[1] \cdot \cos(\omega + \pi) + h[2] \cdot \cos(2\omega + \pi))]^2 \\
&+ [B \cdot (h[1] \cdot \sin(\omega + \pi) + h[2] \cdot \sin(2\omega + \pi))]^2
\end{aligned}$$

$$\varepsilon = (A + B \cdot h[0])^2 + B^2 \cdot (h^2[1] + h^2[2]) - 1$$

La figure A.2 montre le développement de l'erreur ε par rapport à D (longueur du retard fractionnaire).

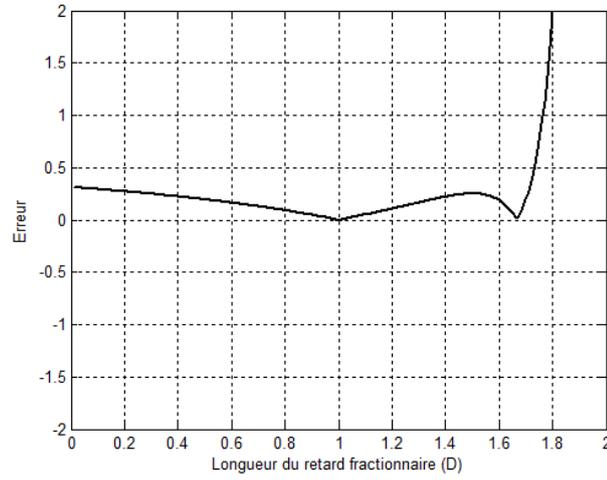


Figure A.2 Développement de l'erreur ε par rapport à D ($N=2$)

- Pour $N=3$: $1 < D < 2$

$$\begin{aligned}
& |\tilde{H}_f(\omega)|^2 + |\tilde{H}_f(\omega + \pi)|^2 \\
&= [A + B \cdot (h[0] - h[1] \cdot \cos(\omega) + h[2] \cdot \cos(2\omega) + h[3] \cdot \cos(3\omega))]^2 \\
&+ [B \cdot (h[1] \cdot \sin(\omega) + h[2] \cdot \sin(2\omega) + h[3] \cdot \sin(3\omega))]^2 \\
&+ [A + B \\
&\cdot (h[0] - h[1] \cdot \cos(\omega + \pi) + h[2] \cdot \cos(2\omega + \pi) + h[3] \cdot \cos(3\omega + \pi))]^2 \\
&+ [B \cdot (h[1] \cdot \sin(\omega + \pi) + h[2] \cdot \sin(2\omega + \pi) + h[3] \cdot \sin(3\omega + \pi))]^2
\end{aligned}$$

$$\varepsilon = (A + B \cdot h[0])^2 + B^2 \cdot (h^2[1] + h^2[2] + h^2[3]) - 1$$

La figure A.3 montre le développement de l'erreur ε par rapport à D (longueur du retard fractionnaire).

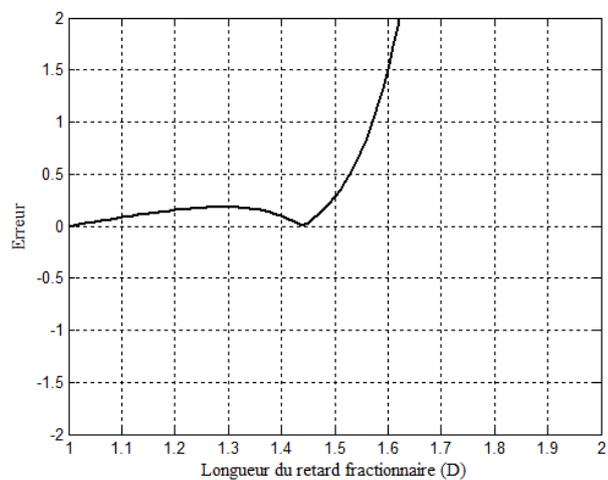


Figure A.3 Développement de l'erreur ε par rapport à D ($N=3$)

Annexe C

Calcul des coefficients des filtres fractionnaires à support compact

Coefficients du filtre passe-bas fractionnaire à support compact (2 moments nuls)

La fonction de transfert du filtre passe bas associé à la base d'ondelette fractionnaire à support compact qui a 2 moments nuls est définie comme suit :

$$H_f = \alpha + \beta \cdot Z^{-1} \cdot \left(\sum_{n=0}^N h[n]Z^{-n} \right) + \gamma \cdot Z^{-2} \cdot \left(\sum_{n=0}^N b[n]Z^{-n} \right) + \delta \cdot Z^{-3} \cdot \left(\sum_{n=0}^N l[n]Z^{-n} \right)$$

Afin d'assurer une précision d'approximation considérable, nous choisissons l'ordre des filtres interpolateurs de Lagrange approximant le retard fractionnaire égale à deux ($N = 2$).

$$H_f = \alpha + \beta \cdot Z^{-1} \cdot (h[0] + h[1] \cdot Z^{-1} + h[2] \cdot Z^{-2}) + \gamma \cdot Z^{-2} \cdot (b[0] + b[1] \cdot Z^{-1} + b[2] \cdot Z^{-2}) + \delta \cdot Z^{-3} \cdot (l[0] + l[1] \cdot Z^{-1} + l[2] \cdot Z^{-2})$$

$$H_f(0) = \alpha + \beta + \gamma + \delta = \sqrt{2}$$

Donc

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma + \delta = \sqrt{2}} \quad \dots\dots\dots(C.1)$$

$$|H_f(\pi)| = 0$$

$$|H_f(\pi)| = \alpha + \beta \cdot (-h[0] + h[1] - h[2]) + \gamma \cdot (b[0] - b[1] + b[2]) + \delta \cdot (-l[0] + l[1] - l[2])$$

$$\boxed{\alpha + \beta \cdot (-h[0] + h[1] - h[2]) + \gamma \cdot (b[0] - b[1] + b[2]) + \delta \cdot (-l[0] + l[1] - l[2]) = 0} \quad \dots\dots\dots(C.2)$$

Algorithme 1 : Calcul des coefficients α, β, γ et δ

Entrées : Valeurs des longueurs de retards fractionnaires ($m1, m2$ et $m3 \in [0, 2[$)

1. Calculer les coefficients des filtres interpolateurs de Lagrange
 2. Construire un système de quatre équations, en se basant sur les équations C.1 et C.2
 3. Résoudre le système d'équation
 4. Répéter le processus
 5. Pour chaque jeu de $m1, m2, m3$ nous obtenons un jeu de coefficients α, β, γ et δ
-

Coefficients du filtre passe-bas fractionnaire à support compact (p moments nuls)

La fonction de transfert du filtre passe bas associé à la base d'ondelette fractionnaire à support compact qui a p moments nuls est définie comme suit :

$$H_f = C_0 + C_1 \cdot Z^{-1} \cdot (Z^{-m_1}) + \dots + C_{r-1} \cdot Z^{-(r-1)} \cdot (Z^{-m_{(r-1)}})$$

Pour $N = 2$ (ordre du filtre interpolateur de LaGrange) :

$$H_f = C_0 + C_1 \cdot Z^{-1} \cdot (h[0] + h[1] \cdot Z^{-1} + h[2] \cdot Z^{-2}) + C_2 \cdot Z^{-2} \cdot (b[0] + b[1] \cdot Z^{-1} + b[2] \cdot Z^{-2}) + \dots + C_{r-1} \cdot Z^{-(r-1)} \cdot (k[0] + k[1] \cdot Z^{-1} + k[2] \cdot Z^{-2})$$

$$H_f(0) = C_0 + C_1 + \dots + C_{r-1} = \sqrt{2}$$

Donc

$C_0 + C_1 + \dots + C_{r-1} = \sqrt{2}$(C.3)
--	------------

$$|H_f(\pi)| = 0$$

$$|H_f(\pi)| = C_0 + C_1 \cdot (-h[0] + h[1] - h[2]) + C_2 \cdot (b[0] - b[1] + b[2]) + \dots + C_{r-1} \cdot (-k[0] + k[1] - k[2])$$

$C_0 + C_1 \cdot (-h[0] + h[1] - h[2]) + C_2 \cdot (b[0] - b[1] + b[2]) + \dots + C_{r-1} \cdot (-k[0] + k[1] - k[2]) = 0$(C.4)
--	------------

Algorithme 2 : Calcul des coefficients $C_0 \dots C_{r-1}$

Entrées : Valeurs des longueurs de retards fractionnaires ($m_1, \dots, m_{r-1} \in [0, 2[$)

1. Calculer les coefficients des filtres interpolateurs de LaGrange
 2. Construire un système de r équations, en se basant sur les équations C.3 et C.4
 3. Résoudre le système d'équation
 4. Répéter le processus
 5. Pour chaque jeu de m_1, \dots, m_{r-1} nous obtenons un jeu de coefficients $C_0 \dots C_{r-1}$
-

Annexe D

Calcul de l'erreur ε (filtres fractionnaires à support compact)

L'erreur ε correspondant à la condition d'orthogonalité est décrite par l'expression suivante :

$$\varepsilon = |\tilde{H}_f(\omega)|^2 + |\tilde{H}_f(\omega + \pi)|^2 - 2$$

- Cas 2 moments nuls

$$\varepsilon = \alpha^2 + \beta^2 \cdot (h^2[0] + h^2[1] + h^2[2]) + \gamma^2 \cdot (b^2[0] + b^2[1] + b^2[2]) + \delta^2 \cdot (l^2[0] + l^2[1] + l^2[2]) - 1$$

- Cas p moments nuls

$$\varepsilon = C_0^2 + C_1^2 \cdot (h^2[0] + h^2[1] + h^3[2]) + C_2^2 \cdot (b^2[0] + b^2[1] + b^2[2]) + \dots + C_{r-1}^2 \cdot (k^2[0] + k^2[1] - k^2[2]) - 1$$

Bibliographie

- [1] Michel Misiti, Yves Misiti, Georges Oppenheim and Jean-Michel Poggi. *Wavelets and their applications*. ISTE, 2007.
- [2] Y. Meyer. *Wavelets and operators. Advanced mathematics*. Cambridge University Press, 1992.
- [3] S. Mallat. *Multi-resolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$* . Trans. Am. Math. Soc., vol. 315, N°1, pp. 69-87, 1989.
- [4] S. Mallat. *Multi-frequency channel decomposition of images and wavelet models*. IEEE Trans. on Accoustic Speech and Signal Proc., vol.37,N°12, pp. 2091-2110, 1989.
- [5] S. Mallat. *A theory for multi-resolution signal decomposition: the wavelet representation*. IEEE, PAMI, vol. 11, N°7, pp. 674-693, 1989.
- [6] I. Daubechies. *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*. Com. on Pure Appl. Math., vol. 41, pp. 909-996, 1988.
- [7] D. Mendlovic, Z. Zalevsky, D. Mas, J. Garcia, and C. Ferreira. *Fractional wavelets transform*. Appl. Opt., vol. 36, pp. 4801-4806, 1997.
- [8] Tao R, Deng B, Wang Y. *Research progress of the fractional Fourier transform in signal processing*. Sci. China Inf. Sci. Ser. F, vol. 49, pp. 1-25, 2006.
- [9] Huang Y, Suter B. *The fractional wave packets transform*. Multidim Sys Signal Process, vol 9, pp 399-402, 1998.
- [10] M. Unser, T. Blu. *Fractional splines and wavelets*. SIAM Review, vol. 42, pp. 43–67, 2000.
- [11] F. Abdelliche. *Contribution au diagnostic des signaux électrocardiographiques en utilisant les concepts des fractales*. Thèse Doctorat, Université Mantouri de Constantine, 2011.
- [12] M. Feilner, Mathews Jacob, Michael Unser. *Orthogonal quincunx wavelets with fractional orders*. Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Image Processing, 2001
- [13] Linfei Chen, Daomu Zhao. *Optical image encryption based on fractional wavelet transform*. Optics Communications, vol. 254, pp. 361-367, 2005.

- [14] Jun Shi, NaiTong Zhang, XiaoPing Liu. *A novel fractional wavelet transform and its applications*. Sci China Ser F-Inf Sci, vol. 55, pp. 1270-1279, 2012.
- [15] J. Shi , X. Liu, N. Zhang, *Multiresolution analysis and orthogonal wavelets associated with fractional wavelet transform*. Signal Image Video Process, vol. 9, pp. 211-220, 2013.
- [16] Gaurav Bhatnagar, Q.M. Jonathan Wu, Balasubramanian Raman. *Discrete fractional wavelet transform and its application to multiple encryptions*. Information Sciences, vol. 223, pp. 297-316, 2013.
- [17] Dai Hongzhe, Zheng Zhibao, Wang Wei. *A new fractional wavelet transforms*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 44, pp. 19-36, 2016.
- [18] Jaideva C. Goswami et Andrew K. Chan. *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*. Wiley Series in Microwave and Optical Engineering. Wiley Interscience, 1999.
- [19] A. Cohen. *Ondelettes et Traitement Numérique du Signal*. Masson, 1992.
- [20] M. Vetterli, J. Kovacevic. *Wavelets and Subband Coding*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [21] Gilbert Strang et Truong Nguyen. *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [22] Marc Antonini. *Transformée en Ondelettes et Compression Numérique des Images*. Thèse de doctorat, Université de Nice - Sophia Antipolis, 1991.
- [23] B. B. Hubbard. *Ondes et Ondelettes*. Collection Sciences d’Avenir. Pour la Science, diff. Belin, Paris, 1995.
- [24] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia, PA.: Society for industrial and applied mathematics, 1992.
- [25] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Second edition, Academic Press, 1998.
- [26] P. Tchamitchian. *Biorthogonalité et théorie des opérateurs*. Revista Matemática Iberoamericana, vol. 3, pp. 163-189, 1987.
- [27] A. Ouahabi. *Analyse multirésolution pour le signal et l’image*. Lavoisier, 2012.
- [28] **A. Lanani, S. Meghriche, A. Djouambi. *Novel design of a fractional wavelet and its application to image denoising*. BEEI, vol. 9, 2020.**

- [29] T. I. Laakso, V. Valimaki, M. Karjalainen, U.K. Laine. *Splitting the unit delay: tool for fractional delay filter design*. IEEE Signal Processing Magazine, vol. 13, pp. 30-60, 1996.
- [30] S. C. Pei, H. J. Hsu. *Fractional Bilinear transform for Analog-to-Digital Conversion*. IEEE Trans. on Signal processing, Vol. 56, N°5, 2008, pp. 2122-2127.
- [31] P. Murphy, A. Krukowski and A. Tarczynski. *An efficient fractional sampler delayer for digital beam steering*. Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP'97, Munich, 21-24 April 1997, pp. 2245-2248.
- [32] A.J.R.M. Coenen. *Novel generalized optimal fractional delay filter design for navigational purposes*. Proceedings of the 9th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, Boston, pp. 481-485, 1998.
- [33] S.C. Pei, P.H. Wang and H.S. Lin. *Closed-form design of maximally flat FIR fractional delay filter*. IEEE Signal Processing Letters, Vol.13, pp 405-408, 2006.
- [34] V. Valimaki and A. Haghparast. *Fractional delay filters design based on truncated Lagrange interpolation*. IEEE Signal Processing Letters, Vol. 14, pp 816-819, 2007.
- [35] C. C. Tseng. *Designs of fractional delay filter, Nyquist filter, lowpass filter and diamond-shaped filter*. Signal Processing, Vol. 87, pp 584-601, 2007.
- [36] J.T. Olkkonen and H. Olkkonen. *Fractional delay filter based on the B-spline transform*. IEEE Signal Processing Letters, Vol. 14, N° 2, pp 97-100, 2007.
- [37] M. Mahdian Jayani Yekta. *Fast design of relatively wide band fractional delay all pass filters*. Signal Processing, Vol. 88, N° 3, pp 612-623, 2008.
- [38] V. Valimaki. *Discrete-Time Modeling of Acoustic Tubes Using Fractional Delay Filters*. Thesis for the degree of Doctor of Technology. Helsinki University of Technology, 1995
- [39] Hermanowicz, E. *Explicit formulas for weighting coefficients of maximally flat tunable F.I.R. delayers*. Electronic Letters, vol. 28, 1992.
- [40] Cain, G. D., and Yardim, A. *The tunable fractionnal delay filter: passport to fine grain delay estimation*. Electrotechnical Review, 1994.
- [41] X. Zhang. *Max-flat Fractional Delay IIR Filter Design*. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 55, N°8, pp. 2950-2956, 2009.
- [42] S. C. Pei and P. H. Wang. *Closed-form Design of All-Pass Fractional Delay Filters*. IEEE Signal Processing Letters, Vol. 11, N°10, pp. 788-791, 2004.

- [43] T. Bensouci. *Implémentation numérique du retard d'ordre fractionnaire*. Thèse Doctorat, Université Mantouri de Constantine, 2012.
- [44] A. Oustaloup. *La commande CRONE*. Edition Hermès, Paris, 1991.
- [45] J.P. Thiran. *Recursive digital filters with maximally flat group delay*. IEEE Trans.Circuit Theory, Vol. 8, N° 6, pp. 659-664, 1971.
- [46] Y. Q. Chen, B. M. Vinagre and I. Podlubny. *Continued fraction expansion approaches to discretizing fractional order derivatives-an expository review*. Nonlinear Dynamics, Vol. 38, N°(1-2), pp. 155–170, 2004.
- [47] K. Ogata. *Discrete-time control systems*. Prentice Hall, Englewood, Cliffs, 1987.
- [48] M.A. Al-Alaoui. *Novel digital integrator and differentiator*. Electronics Letters, Vol.29, No.4, pp. 376-378, 1993.
- [49] A. Charef, T. Bensouci. *Digital Fractional Delay Implementation Based On Fractional Order System*. IET Proceedings on Signal Processing, Vol. 5, N° 6, pp 547-556, 2011.
- [50] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao, and B. Onaral. *Fractal system as represented by singularity function*. IEEE Trans. On Automatic Control, vol.37, N° 9, pp.1465-1470, 1992.
- [51] A. Charef. *Modeling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation*. Nonlinear Dynamics, Vol. 46, pp. 195-210, 2006.
- [52] C. A. Monje, Y. Q. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu. *Fractional-Order Systems and Controls Fundamentals and Applications*. Springer-Verlag, 2010.
- [53] M. Ichise, Y. Nagayanagi and T. Kojima. *An Analog Simulation of Non-Integer Order Transfer Functions for Analysis of Electrode Processes*. J. Electro anal. Chem., Vol.33, pp. 253-256, 1971.
- [54] M. Benmalek and A. Charef. *Digital fractional ordre operators for R-wave detection in ECG signal*. IET proceedings on Signal Processing, Vol. 3, N° 5, pp. 381- 391, 2009.
- [55] I. Podlubny. *Fractional Order Systems and PI λ D μ Controllers*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, N°1, pp. 208-214, 1999.
- [56] C.A. Monje, B.M. Vinagre, V. Feliu, Y.Q. Chen. *Tuning and Autotuning of Fractional Order Controllers for Industry Applications*. Control Engineering Practice Vol.16, pp. 798-812, 2008.

- [57] Camille Diou. *Contribution à l'intégration sur silicium de la transformée en ondelettes Application au traitement d'images*. Thèse Doctorat. Université Montpellier II. 2000.
- [58] A. Croisier, D. Esteban, and C. Galand. *Perfect channel splitting by use of interpolation/decimation/tree decomposition techniques*. In Int. Conf. on Inform. Sciences and Systems, pages 443–446, Patras, Greece, August 1976.
- [59] M. Lindenbaum, M. Fischer, and A. M. Bruckstin. *On gabor contribution to image enhancement*. Pattern Recognition, 27, 1994.
- [60] L. Moisan, F. Guichard, and J. M. Morel. *A review of p. d. e. models in image processing and image analysis*. Journal de Physique, 12:137–154, 2002.
- [61] T. F. Chan, J. Shen, and L. Vese. *Variational pde models in image processing*. Notices of AMS, 50(1):14–26, 2003.
- [62] Li, S. Z. *Markov Random Field Modeling in Computer Vision*. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [63] G. Winkler. *Image analysis, random fields and dynamic Monte Carlo methods: A mathematical introduction*. Springer-Verlag, 1995.
- [64] Zhu, S.C., Liu, X.W. and Wu Y.N. *Exploring texture ensembles by efficient markov chain Monte Carlo-toward a 'trichromacy' theory of texture*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 22(6): 554–569, 2000.
- [65] L. Boubchir. *Approches bayésiennes pour le débruitage des images dans le domaine des transformées multi-échelles parcimonieuse orientées et non orientées*. Thèse doctorat. Université de Caen- Basse Normandie, 2007.
- [66] A. Cohen. *Ondelettes et traitement numérique du signal*. Edition Masson, Paris, 1992.
- [67] F. Truchetet. *Ondelettes pour le signal numérique*. Edition Hermès, Paris, 1998.
- [68] D. Donoho, I. Johnstone, G. Kerkyacharian, D. picard. *Wavelet shrinkage: Asymptopia?* J. R. Statist. Soc. B., 57(2): 301–337, 1995.
- [69] D. L. Donoho & I. M. Johnstone. *Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage*. Biometrika, 81(3):425–455, 1994.
- [70] D. Donoho & I. Johnston. *Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage*. Journal of the American Statistical Association, 90(432) 1200–1224, 1995.
- [71] D. Donoho & I. Johnstone. *Ideal Denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases*. Department of Statistics. Stanford University, 1994.

- [72] D. Donoho. *De-Noising By Soft-Thresholding*. IEEE Transactions on Information Theory, 1995.
- [73] S. Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Editions de l'Ecole Polytechnique, France, 2000.
- [74] H. Y. Gao & A. G. Bruce. *Waveshrink with firm shrinkage*. Statist. Sinica, Vol. 7, pp 855–874, 1997.
- [75] H. Y. Gao. *Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrote*. Journal of Computational and Graphical Statistics, Vol. 7(4), pp 469–488, 1998.
- [76] B. Vidakovic. *Statistical Modeling by Wavelets*. New York: John Wiley & Sons. 1999.
- [77] A. Antoniadis, J. Bigot & T. Sapatinas. *Wavelet estimators in nonparametric regression: A comparative simulation study*. Journal of Statistical Software, vol. 6(6), pp 1–83, 2001.
- [78] F. Abramovich & Y. Benjamini. *Thresholding of wavelet coefficients as multiple hypotheses testing procedure*. Wavelets and Statistics, Vol. 103, pp. 5–14, 1995.
- [79] R. T. Ogden & E. Parzen. *Change-point approach to data analytic wavelet thresholding*. Statist. Comput. Vol. 6, pp 93–99, 1996.
- [80] M. Jansen, M. Malfait & A. Bultheel. *Generalized cross validation for wavelet thresholding*. Signal Processing, Vol. 56, pp 33–44, 1997.
- [81] G. P. Nason. *Wavelet shrinkage by cross-validation*. Journal of the Royal Statistical Society B, Vol. 58, pp 463–479, 1996.
- [82] R. Coifman & D. Donoho. *Translation-invariant denoising*. In Lecture Notes in Statistics: Wavelets and Statistics, vol. New York: Springer-Verlag, (pp. 125–150), 1995.

Résumé

Le traitement du signal et des images est une phase préliminaire dans le but de préparer des images et des signaux, liés au monde réel, à une analyse ultérieure de plus haut niveau comme l'interprétation, la visualisation, le stockage ou la communication. Dans ce contexte, les ondelettes ont toujours joué un rôle très important, on ne compte plus aujourd'hui les applications qui utilisent cette technique. Il s'agit d'un outil mathématique permettant d'analyser et de repérer les discontinuités d'un signal à une ou à deux dimensions, et à des échelles différentes. Cependant, le choix d'une ondelette analysante adéquate reste un problème important. Il n'y a pas d'ondelette adaptée à tous les cas. Pour certaines applications, il est possible que l'on ne trouve pas, parmi les ondelettes connues, celle qui convient. Donc, il est nécessaire d'essayer de construire une nouvelle ondelette qui peut s'adapter et couvrir un large panorama de problèmes. Dans ce contexte et à travers cette thèse, nous avons introduit une nouvelle catégorie d'ondelette basée sur le calcul fractionnaire. La construction commence en générale par le choix d'un filtre numérique passe-bas ayant la propriété d'orthogonalité; ensuite on le généralise par le biais du retard numérique d'ordre fractionnaire Z^D , qui est approximée par un filtre RIF, tout en assurant des propriétés d'orthogonalité, compacité et de régularité correctes. On peut ensuite construire le filtre passe haut à partir du filtre passe-bas par une simple modulation et en déduire par l'algorithme cascade la fonction d'échelles et la fonction d'ondelette associées. Pour illustrer le potentiel et l'efficacité des ondelettes proposées au sein de cette thèse, nous les avons appliqués dans un algorithme de débruitage des signaux et des images. Les résultats obtenus étaient très satisfaisants et prometteurs.

Mots-clés

Ondelettes – retard numérique d'ordre fractionnaire – filtre de retard fractionnaire – ondelettes fractionnaires – ondelettes de Haar fractionnaires – ondelettes fractionnaire à support compact – débruitage des signaux et des images.

Abstract

Signal and image processing is a preliminary phase in order to prepare real-world images and signals for further, higher-level analysis such as interpretation, visualization, storage or communication. In this context, wavelets have always played a very important role, and we no longer count the applications that use them. It is a tool allows analyzing and locating the discontinuities of a signal along one or two dimensions and at different scales. However, the choice of an adequate analyzing wavelet remains an important problem. There is no wavelet suitable for all cases. For some applications, it is possible that no suitable wavelet exists among the known wavelets. So, it is necessary to try to build a new wavelet that can adapt and cover a wide range of problems. In this context and through this thesis, we have introduced a new class of wavelet based on fractional calculus. The construction generally begins with the choice of a low-pass digital filter with the orthogonality property checked in Fourier or direct space; then it is generalized through the fractional delay (FD) Z^{-D} , which is approximated by a RIF filter, while ensuring correct properties of orthogonality, compact support and regularity. We can then build the high pass filter from the low pass filter by a simple modulation. In contrast, the scaling and wavelet functions are constructed using the cascade Daubechies algorithm. To illustrate the potential and efficiency of wavelets proposed in this thesis, we have applied them in an algorithm for denoising signals and images. The results obtained were very satisfactory and promising.

Keywords

Wavelets - fractional digital delay - fractional delay filter – fractional wavelets – fractional Haar wavelets - fractional wavelets with compact support - denoising of signals and images.

تعد معالجة الإشارات والصور مرحلة أولية من أجل إعداد صور وإشارات لمزيد من التحليل بمستوى أعلى مثل التفسير، التصور، التخزين أو الاتصال. في هذا السياق، لعبت الموجات دورًا مهمًا للغاية، فاليوم هناك عدد كبير من التطبيقات التي تستخدم هذه التقنية. حيث أنها تعتبر أداة رياضية لتحليل وتحديد حالات انقطاع الإشارة ذات بعد واحد أو بعدين وبمقاييس مختلفة. من جهة أخرى، يمثل اختيار الموجات التحليلية الملائمة مشكلة مهمة. حيث لا يوجد موجات مناسبة لجميع الحالات. بالنسبة لبعض التطبيقات من الممكن ألا يجد المرء ما هو مناسب من بين الموجات المعروفة. لذلك من الضروري محاولة إنشاء موجة جديدة يمكنها التكيف وتغطية مجموعة واسعة من المشاكل. في هذا السياق، ومن خلال هذه الأطروحة، قدمنا فئة جديدة من الموجات تعتمد على حساب التفاضل والتكامل الكسري. يبدأ البناء عادة باختيار مرشح رقمي منخفض المرور، له خاصية التعامد، ثم يتم تعميمه عن طريق التأخير الرقمي للكسور Z^{-D} ، والذي يتم تقريبه بواسطة مرشح RIF، مع ضمان الخصائص الصحيحة للتعامد، انضغاط الدعم والانتظام. يمكن بعد ذلك إنشاء مرشح تمرير عالي من مرشح التمرير المنخفض عن طريق تعديل بسيط. ثم يتم استنتاج دالة المقياس و دالة الموجات اعتمادًا على خوارزمية التتالي. لتوضيح إمكانات وكفاءة الموجات المقترحة في هذه الرسالة، قمنا بتطبيقها في خوارزمية لتقليل تشويش الإشارات والصور. وكانت النتائج التي تم الحصول عليها مرضية للغاية و واعدة.

كلمات المفاتيح

موجات - تأخير رقمي كسري - مرشح تأخير كسري - موجات كسرية - موجات هار كسرية - موجات كسرية مع دعم مضغوط - تقليل الضوضاء من الإشارات والصور.