RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
UNIVERSITÉ BATNA 2
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES-INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ET APPLICATIONS, EDPA
LABORATOIRE DES TECHNIQUES MATHÉMATIQUES, LTM

THÈSE

Présentée en vue d'obtenir du diplôme de doctorat
Option : Équations aux Dérivées Partielles et Applications

Par

CHENNOUF SELWA

THÈME

HOMOGENEISATION ET CORRECTEURS DE QUELQUES PROBLEMES AUX LIMITES DEGENERES

Soutenue le :

Devant le jury composé de :

Salah-Eddine Rebiai	Pr. Univ Batna 2	Président
Fadila Bentalha	Pr. Univ Batna2	Rapporteur
Abdelaziz Mennouni	Pr. Univ Batna 2	Examinateur
Mohamed Denche	Pr. Univ constantine	Examinateur
Zouhir Mokhtari	Pr. Univ Biskra	Examinateur

Table des matières

Remerciements

Je souhaite dans un premier temps, adresser mes très sincères et vifs remerciements à l'ensemble des membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de ce travail, en me faisant l'honneur d'évaluer et de juger ce manuscrit. Merci au professeur Rebiai Salah-Eddine d'avoir accepté de présider le jury et de m'aider a tout moment. Je tiens à remercier les professeurs Denche Mohamed et Moukhtari Zouhir pour avoir accepté d'être examinateurs de ces travaux de thèse malgré leurs occupations. Je remercie également, le professeur Mennouni Abdelaziz d'avoir bien voulu faire partie du jury de soutenance et de juger mes travaux.

Je remercie de tout mon coeur Mme Bentalha Fadila ma directrice de thèse qui m'a témoigné sa grande responsabilité, qui m'apporté son aide scientifique pour sa patience et sa compétence m'a transmis pas à pas. Grâce à elle, j'ai découvert le mode de recherce et acquis une méthode de travail rigoureuse.

Je remercie Docteur Ali Sili de m'avoir proposé le sujet du troisième chapitre.

Je souhaite également remercier, tout le personnel du département mathématique en particulier mes enseignants.

Un immense merci à mon mari Aissa et mes parents pour leur soutien et leurs encouragements durant toutes mes années d'étude.

Enfin, je tiens à remercier ma famille, mes amis, qui m'ont toujours encouragée et soutenue inconditionnellement dans mon parcours universitaire, comme dans la vie.

Notations

Ω : un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

$C_c(\Omega)$: espace des fonctions continus à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions de classe C^∞ à support compact inclus dans Ω .

$L^p(\Omega)$: espace des fonctions mesurables f telque $\int_\Omega |f|^p dx < +\infty \quad 1 \leqslant p < +\infty$

$L^\infty(\Omega)$: espaces des fonctions mesurables f telque $\exists C$ constante,$|f(x)| \leqslant C$ p.p sur Ω

$\Omega^T :=$ $\Omega \times]0, T[$.

$|.|_\Omega$: désigne la norme dans $L^p(\Omega)$

$\mathcal{O}(\varepsilon^a)$: désigne une fonction de $\varepsilon > 0$ telle que $\lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\mathcal{O}(\varepsilon^a)}{\varepsilon^a} = 0$

$|\Omega|$: désigne la mesure de Ω

χ_Ω : désigne la fonction caractéristique de Ω

Introduction

Notre thèse s'inscrit dans le domaine de l'étude mathématique des matériaux composites. Ces derniers deviennent incontournables notamment dans les différents domaines thermiques, élasticité, électromagnétisme, mécanique des fluides... La structure de ces matériaux peut être composées de divers constituants intimement mélangés et imbriqués. Une difficulté majeure rencontrée dans l'étude des équations de la physique de ces matériaux et que les divers paramètres physiques(coefficients de conductivité, délasticité...) sont discontinus et varient rapidement d'un constituant à l'autre.

Lorsque les constituants sont intimement mêlés, la structure microscopique du matériau devient très complexe du fait des fortes hétérogénéités, mais d'un point de vue macroscopique le matériau tend à se comporter comme un matériau idéal, homogène. Pour s'affranchir de ces difficultés dans l'étude du comportement macroscopique de ce type de matériaux, un outil mathématique appelé homogénéisation a été developpé à partir de leur composition microscopique et les lois de comportement de ces derniers. Plus exactement l'homogénéisation consiste à remplacer le milieu hétérogène par un milieu homogène équivalent.

Du point de vue mathématique, la modélisation des phénomènes intervenant dans les matériaux composites aboutit à des équations aux dérivées partielles. En général les coefficients oscillants du problème sont indexés par un petit paramètre ε représentant la taille liée à la non-homogénéité du milieu. Les méthodes asymptotiques consistent essentiellement en l'étude de l'influence des petits paramètres sur la solution des problèmes mathématiques, l'influence de ces petits paramètres peut être très grande sur les solutions. L'homogénéisation consiste à obtenir une loi de comportement équivalente (on dit aussi homogénéisée ou effective) lorsque l'on gomme ces hétérogénéités. Ce passage revient techniquement à un passage à la limite avec un ou plusieurs petits paramètres liés à la non-homogénéité du milieu.

Dans le cas particulier d'un composite périodique ie constitué de matériaux distribués périodiquement, la détermination du problème homogénéisé se traduit par un phénomène de moyennisation au niveau des lois de comportement à l'échelle microscopique.

De nombreuses méthodes ont été développée pour l'étude de tels milieux, A. Bensoussan, J.L. Lions et G. Papanicolau [6] développèrent des méthodes probabilistes et des méthodes de développement asymptotique des milieux périodiques. Luc Tatar [29] a développé la méthode de l'énergie. G. Nguetseng [23] a eu l'idée d'introduire la notion de convergence double échelle, G. Allaire a développé la méthode de la convergence double échelle, et l'a appliqué à beaucoup de cas particuliers. D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso [20] introduisent la méthode de l'éclatement périodique.

Si le milieu non-homogène n'a pas une structure périodique, alors il existe des méthodes différentes (Γ-convergence, G-convergence, $H-$convergence) qui permettent de démontrer la convergence du processus d'homogénéisation (E. De Giorgie, S.Spagnolo [27], L. Tatar [29], F. Murat [23]).

Les progrès les plus récents en théorie de l'homogénéisation concernent l'apparition de termes supplémentaires dans les équations limites dits "termes étrange" D. Cioranescu, F. Murat [17], ou bien d'équations limites d'un type autre que les équations de départ, ce qui correspond aux effets non locaux [3],[4],[5] représentatifs d'un nouveau mode d'interaction entre les échelles macroscopique et microscopique et dont il est question dans les trois premiers chapitres de cette thèse. Les termes non locaux sont bien traités dans le cas des fibres [3],[4],[14].

L'objectif de cette thèse est l'homogénéisation d'un milieu multiphasique formé d'une phase ambiante connexe et de deux à plusieurs phase constituées de résaux $\varepsilon-$périodique de fines particules ou trous.

Le premier chapitre s'intéresse à l'homogénéisation d'un processus de diffusion dans un milieu poreux dans lequel baigne un réseau ε-périodique de très petites particules sphériques, ε étant un paramètre positif destiné à tendre vers zéro. L'ensemble des particules a une masse totale de l'ordre de l'unité et un volume global tendant vers zéro lorsque ε tend vers zéro. La méthode utilisée est une méthode de l'énergie adaptée aux sous structures très fines, cette dernière est une combinaison de la méthode de Cioranescu-Murat [17] et la méthode de la zone de contrôle élaborée par F.Bentalha et al.[9]

Le problème étud0ié est le suivant :

$$(0.1)\qquad \begin{cases} \rho_\varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - div\,(\nu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f_\varepsilon & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon^T, \\ [u_\varepsilon]_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial D_\varepsilon \times]0,T[, \\ [\nu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon]_\varepsilon n = 0 & \text{sur} \quad \partial D_\varepsilon \times]0,T[, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad (\partial\Omega \cup \partial T_\varepsilon) \times]0,T[, \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^0 & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Avec $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ un ouvert bornée lipschitzien, D_ε est la suspension de petites particules sphériques de rayon δ_ε telle que $0 < \delta_\varepsilon << 1$, T_ε est l'ensemble des trous de rayon α_ε avec $0 < \alpha_\varepsilon << l$, tel que l$>$ 0 qui sont répartis $\varepsilon-$périodiquement. $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{T_\varepsilon}$ et $\Omega'_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \setminus \overline{D_\varepsilon}$ est la phase ambiente.

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \Omega'_\varepsilon, \\ a_\varepsilon & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon, \\ 0 & \text{si} \quad x \in T_\varepsilon, \end{cases}$$

$$\nu_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \Omega'_\varepsilon, \\ b_\varepsilon & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon, \\ 0 & \text{si} \quad x \in T_\varepsilon. \end{cases}$$

Sous les hypothèses de Cioranescu-Murat (1.47) sur les trous et les hypothèses (1.18)-(1.21) sur f_ε et les données initiales, plusieurs cas se distingues en fonction de la valeur du coefficient raréfié défini par (1.29), dans le cas critique où $\delta_\varepsilon^{N-2} = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ le problème limite est un système couplé de deux concentrations et un terme étrange donné par :

$$(0.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \mu u + (N-2)\gamma S_N (u - v) = f & \text{dans} \quad \Omega^T \\ a\dfrac{\partial v}{\partial t} + (N-2)\gamma S_N (v - u) = 0 & \text{dans} \quad \Omega^T \\ u(0) = u^0 & \text{dans} \quad \Omega \\ v(0) = v^0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

où u et v sont données par (1.51)-(1.54).

Dans les autres cas, le problème limite est plus simple que le cas critique. Lorsque $\delta_\varepsilon << \varepsilon^{2/(N-2)}$, la capacité limite est nulle, v ne dépend pas du temps et coincide avec les conditions initiales. Le problème limite prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \mu u = f & \text{dans} \quad \Omega^T \\ u(0) = u^0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

Dans le dernier cas, si $\varepsilon^{2/(N-2)} << \delta_\varepsilon$, la capacité explose donc v coincide avec u, ce qui donne le problème homogénéisé suivant :

$$\begin{cases} (1+a)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \mu u = f & \text{dans} \quad \Omega^T \\ u(0) = \dfrac{1}{(1+a)}u^0 + \dfrac{a}{(1+a)}v^0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

Le chapitre 2 s'intéresse à l'homogénéisation du même processus posé dans un milieu multiphasique formé d'une phase ambiante connexe et de $m, m > 1$ phases où chacune est un réseau ε-périodique de très petites particules de masse totale de l'ordre de l'unité et de volume global tendant vers zéro. Ces particules sont considérées de forme sphériques. La méthode utilisée est la méthode de la zone de contrôle. Le problème associé à ce processus est le suivant :

$$(0.3) \qquad \begin{cases} \rho_\varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - div\left(\nu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon\right) = f_\varepsilon & \text{dans} \quad \Omega^T, \\ [u_\varepsilon]_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial D_\varepsilon \times]0,T[, \\ [\nu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon]_\varepsilon n = 0 & \text{sur} \quad \partial D_\varepsilon \times]0,T[, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0,T[, \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

Avec $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné lipschitzien, $D_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^m D_\varepsilon^i$ où chaque $D_\varepsilon^i,\ 1 \leqslant i \leqslant m$, est un réseau ε-périodique de petites particules de rayon $\delta_\varepsilon^i,\ 0 < \delta_\varepsilon^i << 1$.
$[.]_\varepsilon$ est le saut à l'interface ∂D_ε, n est la normale sur ∂D_ε à l'extérieure et

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ a_\varepsilon^1 & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon^1, \\ a_\varepsilon^2 & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon^2, \\ & \vdots \\ a_\varepsilon^m & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon^m, \end{cases}$$

$$\nu_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ b_\varepsilon^1 & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon^1, \\ b_\varepsilon^2 & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon^2, \\ & \vdots \\ b_\varepsilon^m & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon^m. \end{cases}$$

L'étude a été faite par Bentalha et al. [9] pour une structure binaire par la «**méthode de la zone de contrôle** » qui est une adaptation de la méthode des échelles multiples aux sous-structures très fines (voir [8],[9],[10]). Cette étude généralise l'étude précédente en prenant une structure compliquée car nous disposons de nombreux matériaux différents. Signalons que la difficulté consiste à trouver la fonction test à utiliser dans la formulation variationnelle.

Dans le chapitre 2, sous les hypothèses (2.9) le problème homogénéisé donné dans le théorème 2.2 est sous la forme suivante :
(0.4)

$$\begin{cases} \left(1+\sum_{i\in I_3} a_i\right)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + 4\pi \sum_{i\in I_1} \gamma^i (u - v_i) = f - \sum_{i\in I_1} g_i & \text{dans} \quad \Omega^T, \\ a_i \dfrac{\partial v_i}{\partial t} + 4\pi\gamma^i (v_i - u) = g_i & \text{dans} \quad \Omega^T, \quad \text{si } i \in I_1, \\ v_i(0) = v_i^0 & \text{dans} \quad \Omega, \quad \text{si } i \in I_1, \\ u(0) = \left(\dfrac{1}{1+\sum_{i\in I_3} a_i} u^0 + \sum_{i\in I_3} \dfrac{a_i}{1+\sum_{i\in I_3} a_i} v_i^0\right) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

Où γ^i est le coefficient de raréfaction de la suspension donné par

$$\gamma^i = \lim_{\varepsilon\to 0} \gamma_\varepsilon^i, \quad \gamma_\varepsilon^i = \frac{\delta_\varepsilon^i}{\varepsilon^2}.$$

Avec

$$I_1 := \left\{ i, i \in \{\overline{1,m}\} \text{ tel que } \gamma^i > 0 \right\},$$
$$I_2 := \left\{ i, i \in \{\overline{1,m}\} \text{ tel que } \gamma^i = 0 \right\},$$
$$I_3 := \left\{ i, i \in \{\overline{1,m}\} \text{ tel que } \gamma^i = +\infty \right\}.$$

u et $v_i, i \in I_1$, sont donnés par (2.42)-(2.46).

Dans ce chapitre, l'étude révéle que si $I_1 \neq \emptyset$, le problème limite contient plus d'une concentration, précisément c'est un système de $card(I_1) + 1$ concentrations avec des termes non locaux. Dans les autres cas, il s'agit de $I_1 = \emptyset$, la forme du système est plus simple, nous avons une concentration et des effets particuliers qui justifient toujours la présence des suspensions évanescentes.

Dans les deux premiers chapitres de cette thèse, le comportement asymptotique se caractérise par l'apparition à la limite de termes supplémentaires (termes non locaux -terme étrange) représentatifs d'un nouveau mode d'interaction entre échelles microscopique et macroscopique.

Le troisième chapitre de la thèse est consacrée au cas où Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$, et A est une partie ouverte strictement contenue dans Ω.

Le sujet de ce chapitre a été proposé et suivi par le Dr Ali Sili de l'université de Toulon, France comme sujet commun à ma personne et à Bengouga Nadia. Ces résultats font l'objet du chapitre 3 de cette thèse et d'un chapitre de la thèse de Bengouga Nadia.

On a étudié le comportement asymptotique de la solution u_ε d'équation hyperbolique parabolique suivante :

$$\left\{\begin{array}{rll} \rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} + \varrho_\varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - div\,(\rho_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = 0 & \text{dans} & \Omega^T, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur} & \partial\Omega \times]0, T[\,, \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0(x) & \text{dans} & \Omega, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,0) = u_\varepsilon^1(x) & \text{dans} & \Omega, \end{array}\right. \tag{0.5}$$

avec

$$\rho_\varepsilon(x) = \varrho_\varepsilon = \chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A}. \tag{0.6}$$

Oú $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω.

Du point de vue du correcteur, le cas d'une équation hyperbolique ($\rho_\varepsilon = 0$) a été étudie par Mourad Sfaxi (voir [25]). Sfaxi a montré que u_ε se décompose en

$$u_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon + \hat{u}_\varepsilon, \tag{0.7}$$

Où $\tilde{u}_\varepsilon$ est la solution de la même équation hyperbolique à données initiales, bien préparées de sorte que la suite $\tilde{u}_\varepsilon$ vérifie les mêmes convergences que la suite u_ε, mais fortement au lieu de faiblement.

Ainsi la suite $\hat{u}_\varepsilon$ par définition converge faiblement vers zéro. Cela signifie que le terme $\hat{u}_\varepsilon$ est une perturbation, lorsque les données initiales u_ε^0 et u_ε^1 ne convergent que faiblement dans $L^2(\Omega)$, mais l'énergie associée à $\hat{u}_\varepsilon$ vérifie le principe de l'équipartition de l'énergie(voir [11]).

Dans notre cas, on montre que contrairement au cas hyperbolique la perturbation $\hat{u}_\varepsilon$ ne vérifie pas le principe d'equipartition de l'énergie.

CHAPITRE 1

Homogénéisation d'un processus de diffusion dans un milieu poreux à suspensions évanescentes

Résumé

L'objectif de ce chapitre est l'étude du comportement asymptotique du processus de diffusion dans un domaine biphasique formé d'une phase ambiante et d'une phase formée d'un réseau ε- périodique de petits trous et petites particules sphériques. Les particules et les trous ont un volume total tendent vers zéro quand $\varepsilon \to 0$, tandis que la masse totale des particules reste de l'ordre de l'unité.

1. Position du problème

Soient $T > 0$, ε un réel strictement positif qui prend ses valeurs dans une suite de réels qui tend vers zéro et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert bornée lipschitzien ($N \geq 3$).

On recouvre $\mathbb{R}^N$ par un réseau périodique de cellules εY, où

$$Y := \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)^N, \tag{1.1}$$

est la cellule de base.

On note chaque cellule du réseaux par

$$Y_\varepsilon^k := \varepsilon k + \varepsilon Y,\ k \in \mathbb{Z}^N, \tag{1.2}$$

Soit

$$Z_\varepsilon := \left\{k \in \mathbb{Z}^N,\ Y_\varepsilon^k \subset \Omega\right\}, \tag{1.3}$$

$$\Omega_{Y_\varepsilon} := \text{intérieur} \bigcup_{k \in Z_\varepsilon} \overline{Y_\varepsilon^k}. \tag{1.4}$$

Soient $y_1, y_2 \in Y$ tel que $y_1 \neq y_2$ et soit $l > 0$ tel que

$$B(y_1, l) \subset Y,\ B(y_2, l) \subset Y, \tag{1.5}$$

$$\text{et} \quad \overline{B(y_1, l)} \cap \overline{B(y_2, l)} = \phi, \tag{1.6}$$

où $B(a, r)$ est la boule de rayon r et de centre a.

On définit deux paramètres $\delta_\varepsilon, \alpha_\varepsilon$ tels que

$$\begin{cases} 0 < \alpha_\varepsilon < l, \quad 0 < \delta_\varepsilon < l, \\ \text{et} \quad \alpha_\varepsilon \to 0,\ \delta_\varepsilon \to 0 \quad \text{quand } \varepsilon \to 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

L'union des trous est définie par

$$T_\varepsilon := \bigcup_{k\in Z_\varepsilon} T_\varepsilon^k \quad \text{où} \quad T_\varepsilon^k = B\left(\varepsilon y_2, \varepsilon\alpha_\varepsilon\right) + \varepsilon k, \tag{1.8}$$

et celle des particules par

$$D_\varepsilon := \bigcup_{k\in Z_\varepsilon} D_\varepsilon^k \quad \text{où} \quad D_\varepsilon^k = B\left(\varepsilon y_1, \varepsilon\delta_\varepsilon\right) + \varepsilon k. \tag{1.9}$$

Les hypothèses (1.7) se traduit par

$$|D_\varepsilon| \longrightarrow 0,\ |T_\varepsilon| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \longrightarrow 0, \tag{1.10}$$

qui veut dire que le volume global des particules et les trous tend vers zéro.

On définit l'ouvert perforé Ω_ε par

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus T_\varepsilon. \tag{1.11}$$

La phase ambiante est donnée par

$$\Omega'_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \setminus \overline{D_\varepsilon}. \tag{1.12}$$

On utilise aussi les notations suivantes pour le domaine cylindrique spatiotemporel :

$$\Omega^T := \Omega \times]0,T[\,; \tag{1.13}$$

ainsi que les notations analogues pour les ensembles Ω_ε^T, $\Omega_{Y_\varepsilon}^T$ et D_ε^T.

On considère le problème à dimensionel qui gouverne le processus de diffusion dans le mélange décrit ci-dessus. En notant $a_\varepsilon > 0$ la densité de la masse relative, $b_\varepsilon > 0$ la diffusivité relative dans la suspension et f_ε densité de forces extérieures, on peut supposer sans restreindre la généralité du problème que $|\Omega| = 1$.

Trouver u_ε solution de

$$\left\{\begin{array}{rll} \rho_\varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - div\left(\nu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon\right) = f_\varepsilon & \text{dans} & \Omega_\varepsilon^T, \\ \left[u_\varepsilon\right]_\varepsilon = 0 & \text{sur} & \partial D_\varepsilon \times]0,T[, \\ \left[\nu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon\right]_\varepsilon n = 0 & \text{sur} & \partial D_\varepsilon \times]0,T[, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur} & \left(\partial\Omega \cup \partial T_\varepsilon\right) \times]0,T[, \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^0 & \text{dans} & \Omega_\varepsilon. \end{array}\right. \tag{1.14}$$

où $[.]_\varepsilon$ désigne le saut à l'interface $\partial D_\varepsilon, n$ est la normale extérieure à ∂D_ε et

$$\rho_\varepsilon(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad x \in \Omega'_\varepsilon, \\ a_\varepsilon & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon, \\ 0 & \text{si} \quad x \in T_\varepsilon, \end{array}\right. \tag{1.15}$$

$$\nu_\varepsilon(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad x \in \Omega'_\varepsilon, \\ b_\varepsilon & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon, \\ 0 & \text{si} \quad x \in T_\varepsilon. \end{array}\right. \tag{1.16}$$

On note $\tilde{u}_\varepsilon$ le prolongement par zéro de u_ε sur tout Ω, donné par

$$\tilde{u}_\varepsilon = \left\{\begin{array}{ll} u_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{dans} \quad T_\varepsilon. \end{array}\right. \tag{1.17}$$

La suspension se caractérise par le fait que son volume global tend vers zéro en contraste avec sa masse totale qui reste de l'ordre de l'unité. Ce qui se traduit par l'hypothèse

$$\lim_{\varepsilon \to 0} a_\varepsilon |D_\varepsilon| = a > 0. \tag{1.18}$$

On suppose aussi que la diffusivité relative vérifie

$$b_\varepsilon \geqslant b > 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{1.19}$$

En ce qui concerne les données, on suppose que

$$f_\varepsilon \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)\right), \; u_\varepsilon^0 \in L^2\left(\Omega_\varepsilon\right), \tag{1.20}$$

de plus,

$$\begin{cases} \tilde{f}_\varepsilon \rightharpoonup f \quad \text{dans } L^2\left(0, T; L^2\left(\Omega\right)\right), \\ \tilde{u}_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0 \quad \text{dans } L^2\left(\Omega\right), \\ \fint_{D_\varepsilon} |u_\varepsilon^0|^2 dx \leqslant C, \\ \dfrac{1}{|D_\varepsilon|} u_\varepsilon^0 \chi_{D_\varepsilon} \rightharpoonup v^0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'\left(\Omega\right), \text{ avec } v^0 \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{1.21}$$

où, pour tout $D \subset \Omega$, on note

$$\fint_D \cdot \quad dx = \frac{1}{|D|} \int_D \cdot \quad dx.$$

Dans la suite C désigne une constante strictement positive, indépendante de ε pouvant varier d'une ligne à une autre.

2. Les estimations a priori

2.1. Existence et unicité.

Formulation variationnelle La formulation variationnelle du problème (1.14) est :

Trouver $u_\varepsilon \in L^2\left(0, T; H_0^1\left(\Omega_\varepsilon\right)\right) \cap L^\infty\left([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon)\right)$ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \left(\rho_\varepsilon u_\varepsilon, w\right)_{\Omega_\varepsilon} + \left(\nu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon, \nabla w\right)_{\Omega_\varepsilon} = \left(f_\varepsilon, w\right)_{\Omega_\varepsilon} \quad \text{dans } \mathcal{D}'\left(0, T\right), \; \forall w \in H_0^1\left(\Omega_\varepsilon\right), \\ \\ u_\varepsilon\left(0\right) = u_\varepsilon^0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \tag{1.22}$$

Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 1.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, sous les hypothèses précédentes le problème* (1.22) *admet une unique solution. De plus, $u_\varepsilon \in L^2\left(0, T; H_0^1\left(\Omega_\varepsilon\right)\right) \cap C^0\left([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon)\right)$ avec $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^2\left(0, T; H^{-1}\left(\Omega_\varepsilon\right)\right)$, ce qui donne un sens aux conditions initiales* (1.14).

La démonstration de ce résultat est classique, on utilise la méthode de Faedo-Galerkin [**12**].

2.2. Estimation a priori.

Proposition 1.1. *Sous les hypothèses* (1.18) - (1.21)

(1.23) $$\tilde{u}_\varepsilon \quad \textit{est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right).$$

De plus, il existe $C>0$ indépendente de ε, tel que

(1.24) $$⨍_{D_\varepsilon} |u_\varepsilon|^2 dx \leqslant C \quad p.p.\ dansquad\,[0,T],$$

(1.25) $$b_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2_{L^2\left(D_\varepsilon{}^T\right)} \leqslant C.$$

Démonstration. Après substitutions de $w=u_\varepsilon$ dans la formulation variationnelle (1.22) et intégrations sur $(0,T)$ pour tout $t\in]0,T[$, on obtient :

$$\frac{1}{2}|\sqrt{\rho_\varepsilon}u_\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon}+\int_0^t|\sqrt{\nu_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon}=\int_0^t\int_{\Omega_\varepsilon}f_\varepsilon u_\varepsilon dxds+\frac{1}{2}|\sqrt{\rho_\varepsilon}u^0_\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon},$$

puis

(1.26) $$\frac{1}{2}\left(|u_\varepsilon|^2_{\Omega'_\varepsilon}+a_\varepsilon|u_\varepsilon|^2_{D_\varepsilon}\right)+b_\varepsilon\int_0^t|\nabla u_\varepsilon|^2_{D_\varepsilon}ds+\int_0^t|\nabla u_\varepsilon|^2_{\Omega'_\varepsilon}ds=$$
$$\int_0^t\int_{\Omega_\varepsilon}f_\varepsilon u_\varepsilon dxds+\frac{1}{2}\left(|u^0_\varepsilon|^2_{\Omega'_\varepsilon}+a_\varepsilon|u^0_\varepsilon|^2_{D_\varepsilon}\right).$$

On remarque que les hypothèses (1.21) entraînent

$$|u^0_\varepsilon|^2_{\Omega'_\varepsilon}+a_\varepsilon|u^0_\varepsilon|^2_{D_\varepsilon}\leqslant|\tilde{u}^0_\varepsilon|^2_\Omega+a_\varepsilon|D_\varepsilon|⨍_{D_\varepsilon}|u^0_\varepsilon|^2dx\leqslant C.$$

De plus,

$$\int_0^t\int_{\Omega_\varepsilon}f_\varepsilon u_\varepsilon dxds=\int_0^t\int_\Omega\tilde{f}_\varepsilon\tilde{u}_\varepsilon dxds\leqslant\int_0^t|\tilde{f}_\varepsilon|_\Omega|\tilde{u}_\varepsilon|_\Omega ds.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré et celle de Young, on obtient

$$\int_0^t|\tilde{f}_\varepsilon|_\Omega|\tilde{u}_\varepsilon|_\Omega ds\leqslant C(\Omega)\int_0^t|\tilde{f}_\varepsilon|_\Omega|\nabla\tilde{u}_\varepsilon|_\Omega=\int_0^t|C(\Omega)f_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}|\nabla u_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}$$

(1.27)

$$\leqslant\int_0^t|C(\Omega)f_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}|\nabla u_\varepsilon|_{\Omega'_\varepsilon}ds+\int_0^t|C(\Omega)f_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}|\nabla u_\varepsilon|_{D_\varepsilon}ds$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_0^t|C(\Omega)f_\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon}ds+\frac{1}{2}\int_0^t|\nabla u_\varepsilon|^2_{\Omega'_\varepsilon}ds+\frac{1}{2b_\varepsilon}\int_0^t|C(\Omega)f_\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon}ds+\frac{b_\varepsilon}{2}\int_0^t|\nabla u_\varepsilon|^2_{D_\varepsilon}ds.$$

D'après les inégalités (1.26)-(1.27), on a

(1.28) $$\frac{1}{2}\left(|u_\varepsilon|^2_{\Omega'_\varepsilon}+a_\varepsilon|u_\varepsilon|^2_{D_\varepsilon}\right)+\frac{1}{2}\int_0^t|\nabla u_\varepsilon|^2_{\Omega'_\varepsilon}ds+\frac{b_\varepsilon}{2}\int_0^t|\nabla u_\varepsilon|^2_{D_\varepsilon}ds\leqslant C,$$

□

Il faut noter que ces estimations sont obtenues sans aucune hypothèse sur les trous $T^k_\varepsilon, k\in Z_\varepsilon$.

3. Les outils spécifiques

Les outils introduits dans cette section sont ceux de la méthode de la zone de contrôle [**7**],[**8**],[**9**],[**10**] et ceux de la méthode de Cioranescu-Murat [**17**].

Avant de passer aux outils, on définit le facteur de raréfaction des particules

$$\gamma_\varepsilon := \frac{{\delta_\varepsilon}^{N-2}}{\varepsilon^2}. \tag{1.29}$$

3.1. Outils de la méthode de la zone de contrôle.

Les propositions et les lemmes de cette partie sont donnés sans démonstration car c'est une adaptation des résultats prouvés dans [**9**].

D'abord, on a

$$\mathcal{R} = \{(r_\varepsilon),\ \delta_\varepsilon << r_\varepsilon << 1, r_\varepsilon < l\},$$

donc $r_\varepsilon \in \mathcal{R}$ si et seulement si

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\delta_\varepsilon}{r_\varepsilon} = 0.$$

On désigne le domaine compris entre les sphères de rayon a et b par

$$C(a,b) := \left\{x \in \mathbb{R}^N,\ a < |x| < b\right\}.$$

On introduit

$$C^k_{T_\varepsilon} = \varepsilon\,(y_2 + k + C(\alpha_\varepsilon, l)),\ C_{T_\varepsilon} := \bigcup_{k\in Z_\varepsilon} C^k_{T_\varepsilon}.$$

Pour tout $(r_\varepsilon) \in \mathcal{R}$, on définit également

$$C^k_{D_\varepsilon} = \varepsilon\,(y_1 + k + C(\delta_\varepsilon, r_\varepsilon)),\ C_{D_\varepsilon} := \bigcup_{k\in Z_\varepsilon} C^k_{D_\varepsilon},$$

$$C_\varepsilon := C_{T_\varepsilon} \cup C_{D_\varepsilon}.$$

Définition 1.1. *Pour tout $(r_\varepsilon) \in \mathcal{R}$, on définit $w_{r_\varepsilon} \in H^1_0(\Omega)$ par*

$$w_{r_\varepsilon}(x) := \begin{cases} 0 & \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \setminus C_{D_\varepsilon}, \\ W_{r_\varepsilon}\left(\dfrac{x}{\varepsilon} - y_1 - k\right) & \text{dans} \quad C^k_{D_\varepsilon},\ \forall k \in Z_\varepsilon, \\ 1 & \text{dans} \quad D_\varepsilon, \end{cases} \tag{1.30}$$

tel que

$$W_{r_\varepsilon}(y) = \frac{r_\varepsilon^{-N+2} - |y|^{-N+2}}{r_\varepsilon^{-N+2} - \delta_\varepsilon^{-N+2}} \quad \text{pour} \quad y \in C(\delta_\varepsilon, r_\varepsilon). \tag{1.31}$$

Où $W_{r_\varepsilon} \in H^1(C(\delta_\varepsilon, r_\varepsilon))$ est la solution fondamentale du Laplacien c'est à dire vérifie :

$$\begin{cases} \Delta W_{r_\varepsilon} = 0 & \text{dans} \quad C(\delta_\varepsilon, r_\varepsilon), \\ W_{r_\varepsilon} = 1 & \text{pour} \quad |y| = \delta_\varepsilon, \\ W_{r_\varepsilon} = 0 & \text{pour} \quad |y| = r_\varepsilon. \end{cases}$$

Cette fonction radiale vérifie les propriétés données ci-dessous.

Proposition 1.2. *Pour tout* $(r_\varepsilon) \in \mathcal{R}$ *, on a*

$$0 \leqslant w_{r_\varepsilon} \leqslant 1, \tag{1.32}$$

$$|\nabla w_{r_\varepsilon}|_\Omega \leqslant C(\gamma_\varepsilon)^{1/2}, \tag{1.33}$$

$$w_{r_\varepsilon} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{1.34}$$

On introduit les opérateurs localisants donnés par la définition suivante.

Définition 1.2. *Considérons pour tout* $r > 0$ *la fonction*

$$G_r : L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \longrightarrow L^2\left(\Omega^T\right)$$

définie par

$$G_r(\theta)(x,t) = \sum_{k \in Z_\varepsilon} \left(\fint_{S_r^k} \theta(y,t)\, d\sigma_y \right) 1_{Y_\varepsilon^k}(x), \tag{1.35}$$

où

$$S_r^k := \partial B_r^k, B_r^k := \varepsilon k + \varepsilon B(y_1, r).$$

L'opérateur G_r a les propriétés données par les deux lemmes suivants.

Lemme 1.1. *Si* $(r_\varepsilon) \in \mathcal{R}$, *alors pour tout* $\theta \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *on a*

$$|\theta - G_{r_\varepsilon}(\theta)|_{L^2\left(\Omega^T_{Y_\varepsilon}\right)} \leqslant C\left(\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^{N-2}}\right)^{1/2} |\nabla\theta|_{L^2(\Omega^T)}, \tag{1.36}$$

$$|\theta - G_{\delta_\varepsilon}(\theta)|_{L^2\left(D_\varepsilon{}^T\right)} \leqslant C(\varepsilon\delta_\varepsilon)|\nabla\theta|_{L^2(D_\varepsilon^T)}, \tag{1.37}$$

$$|G_{r_\varepsilon}(\theta) - G_{\delta_\varepsilon}(\theta)|_{L^2(\Omega^T)} \leqslant C\left(\frac{\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^{N-2}}\right)^{1/2} |\nabla\theta|_{L^2\left(C^T_{D_\varepsilon}\right)}, \tag{1.38}$$

où $G_{\delta_\varepsilon}(\theta)$ *et* $G_{r_\varepsilon}(\theta)$ *sont définis par* (1.35). *De plus,*

$$|G_{\delta_\varepsilon}(\theta)|^2_{L^2(\Omega^T)} = \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |G_{\delta_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt, \tag{1.39}$$

$$|G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2_{L^2(\Omega^T)} = \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt. \tag{1.40}$$

Lemme 1.2. *Pour tout* $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$|G_{\delta_\varepsilon}(\theta) - \theta|_{L^\infty(\Omega^T)} \longrightarrow 0, \tag{1.41}$$

$$|G_{\delta_\varepsilon}(\theta) - \theta|_{L^\infty\left(C^T_{D_\varepsilon} \cup D_\varepsilon^T\right)} \leqslant 2\varepsilon r_\varepsilon |\nabla\theta|_{L^\infty(\Omega^T)}. \tag{1.42}$$

Pour tout $\varphi \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, *on a*

$$\fint_{D_\varepsilon} \varphi dx \longrightarrow \int_\Omega \varphi dx. \tag{1.43}$$

Définition 1.3. *Soit l'opérateur* $M_{D_\varepsilon} : L^2(0,T;C_c(\Omega)) \longrightarrow L^2(\Omega^T)$ *défini par*

$$M_{D_\varepsilon}(\varphi)(x,t) = \sum_{k \in Z_\varepsilon} \left(\fint_{Y_\varepsilon^k} \varphi(y,t) dy \right) 1_{B_r^k}(x). \tag{1.44}$$

LEMME 1.3. *Pour tout* $\varphi \in L^2(0,T;C_c(\Omega))$, *on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi)|^2 dxdt = 0. \tag{1.45}$$

PROPOSITION 1.3. *Si* $(r_\varepsilon)\in\mathcal{R}$ *et pour tout* $\theta\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, *on a*

$$\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\theta|^2 dxdt \leqslant C\max\left(1,\frac{1}{\gamma_\varepsilon}\right)|\nabla\theta|_{L^2(\Omega^T)}.$$

3.2. Hypothèses sur les trous.

DÉFINITION 1.4. *On définit* w_ε *en posant*

$$w_\varepsilon(x) := \begin{cases} 0 & dans \quad T_\varepsilon, \\ \bar{w}_\varepsilon(x/\varepsilon - y_2 - k) & dans \quad C^k_{T_\varepsilon}, k\in Z_\varepsilon \\ 1 & dans \quad \Omega_\varepsilon\setminus C_{T_\varepsilon}, \end{cases} \tag{1.46}$$

où $\bar{w}_\varepsilon\in H^1(C(\alpha_\varepsilon,l))$ *est la solution fondamentale du laplacien, c'est a dire :*

$$\begin{cases} \Delta\bar{w}_\varepsilon = 0 & dans \quad C(\alpha_\varepsilon,l), \\ \bar{w}_\varepsilon = 1 & pour \quad |y| = l, \\ \bar{w}_\varepsilon = 0 & pour \quad |y| = \alpha_\varepsilon. \end{cases}$$

On suppose que les trous $(T^k_\varepsilon)_{k\in Z_\varepsilon}$ sont tels qu'il existe au moins deux suites w_ε et μ_ε tels que pour tout $k\in Z_\varepsilon$, on a :

$$\begin{array}{l} (H.1)\ w_\varepsilon\in H^1(\Omega) \\ (H.2)\ w_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad T_\varepsilon \\ (H.3)\ w_\varepsilon \rightharpoonup 1 \qquad \text{faiblement dans } H^1(\Omega) \text{ et p.p dans } \Omega \\ (H.4)\ \mu_\varepsilon,\lambda_\varepsilon\in H^{-1}(\Omega) \text{ tel que} \\ \begin{cases} -\triangle w_\varepsilon = \mu_\varepsilon - \lambda_\varepsilon, \qquad \mu_\varepsilon\to\mu \qquad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega) \\ \langle\lambda_\varepsilon, v_\varepsilon\rangle = 0 \quad \text{pour tout } v_\varepsilon\in H_0^1(\Omega) \quad \text{tel que } v_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } T_\varepsilon. \end{cases} \end{array} \tag{1.47}$$

L'idée du cadre abstrait des hypothèses a priori est due à D. Cioranescu et F. Murat [**17**], les hypothèses (H.1) à (H.4) que l'on vient d'énoncer sont simplement celles introduites dans [**17**] pour l'opérateur Laplacien adaptées à notre géométrie.

PROPOSITION 1.4. *Si on choisit* $\alpha_\varepsilon = C_0\varepsilon^{2/(N-2)}$, *alors la fonction* w_ε *définie par* (1.46) *vérifie les hypothèses (H.1)-(H.4).*

4. Homogénéisation dans le cas $\delta_\varepsilon^{N-2} = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

Le cas du rayon critique auquel est consacré ce paragraphe se caractérise par la limite finie

$$\gamma = \lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_\varepsilon \in]0,+\infty[, \tag{1.48}$$

la taille des particules δ_ε est de l'ordre de $\varepsilon^{2/(N-2)}$.

Dans ce cas les résultas d'homogénéisation sont plus intéréssants sous l'hypothèse de diffusivité infinie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} b_\varepsilon = +\infty. \tag{1.49}$$

REMARQUE 1.1. *On remarque que dans ce cas, la proposition 1.3 devient :*

$$\forall \varphi \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right), \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\varphi|^2 dx dt \leq C |\nabla \varphi|^2_{L^2(\Omega^T)}. \tag{1.50}$$

4.1. Enoncé des résultats.

On commence par un résultat préliminaire.

PROPOSITION 1.5. *Sous les hypothèses* (1.18)-(1.21)*, il existe* $u \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$ *et* $v \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$*, tels que pour une sous suite extraite,*

$$\tilde{u}_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \textit{dans} \quad L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right), \tag{1.51}$$

$$\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \textit{dans} \quad L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right), \tag{1.52}$$

$$G_{r_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) \longrightarrow u \quad \textit{dans } L^2\left(\Omega^T\right), \tag{1.53}$$

$$G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) \rightharpoonup v \quad \textit{dans } L^2\left(\Omega^T\right). \tag{1.54}$$

De plus, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\tilde{u}_\varepsilon - G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|^2 dx dt = 0. \tag{1.55}$$

DÉMONSTRATION. De (1.23), on déduit pour une sous suite extraite les convergences (1.51) et (1.52).

Montrons (1.53). On a pour tout $(r_\varepsilon) \in \mathcal{R}$

$$|u - G_{r_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|^2_{\Omega^T_{Y_\varepsilon}} \leqslant 2|u - \tilde{u}_\varepsilon|^2_{\Omega^T} + 2|\tilde{u}_\varepsilon - G_{r_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|^2_{\Omega^T_{Y_\varepsilon}}.$$

Sachant que $\lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\delta_\varepsilon}{r_\varepsilon} = 0$, et tenant en compte le lemme 1.1 on a

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}_\varepsilon - G_{r_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|^2_{\Omega^T_{Y_\varepsilon}} &\leqslant C\left(\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^{N-2}}\right) |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|^2_{\Omega^T} \\
&\leqslant C\left(\frac{\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^{N-2}}\right)\left(\frac{\delta_\varepsilon^{N-2}}{r_\varepsilon^{N-2}}\right) \\
&\leqslant C\left(\frac{\delta_\varepsilon}{r_\varepsilon}\right)^{N-2} \to 0,
\end{aligned}$$

de (1.52) et comme $\lim_{\varepsilon \to 0} |\Omega \setminus \Omega_{Y_\varepsilon}| \to 0$, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |u - G_{r_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|_{\Omega^T} \longrightarrow 0.$$

Pour montrer (1.54), on remarque d'après (1.53) et le lemme 1.1 que

$$\begin{aligned}
|G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|_{L^2(\Omega^T)} &\leqslant |G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) - G_{r_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|_{L^2(\Omega^T)} + |G_{r_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|_{L^2(\Omega^T)} \\
&\leqslant \frac{C}{(\gamma_\varepsilon)^{1/2}} |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} + C \quad \leqslant C.
\end{aligned}$$

Alors il existe une sous suite de $\tilde{u}_\varepsilon$ et $v_i \in L^2(\Omega^T)$ vérifiant (1.54)

Par ailleurs, on rappelle que d'après (1.36) du lemme 1.1, de (1.25) et (1.49) , on a

$$\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\tilde{u}_\varepsilon - G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|^2 dxdt \leqslant C(\varepsilon\delta_\varepsilon)^2 \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|^2 dxdt$$

$$\leqslant \frac{C}{\gamma_\varepsilon b_\varepsilon} \to 0. \tag{1.56}$$

□

Proposition 1.6 ([**9**]). *Pour tout* $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, *on a*

$$\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon \varphi dxdt \longrightarrow \int_{\Omega^T} v\varphi dxdt. \tag{1.57}$$

Démonstration. Soit $\varphi \in L^2(0,T;C_c(\Omega))$ on a

$$\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon \varphi dxdt = \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} (\tilde{u}_\varepsilon - G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon))\varphi dxdt + \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)(\varphi - M_{D_\varepsilon}(\varphi))dxdt$$
$$+ \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) M_{D_\varepsilon}(\varphi) dxdt.$$

Le premier terme du membre droite tend vers zéro grâce à (1.55). Le second terme converge aussi vers zéro par le lemme1.3 et (1.54), le dernier terme se traite comme suit

$$\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) M_{D_\varepsilon}(\varphi) dxdt = \frac{1}{|D_\varepsilon|} \sum_{k \in Z_\varepsilon} \int_0^T \int_{B_\varepsilon^k} \left(\fint_{S_\varepsilon^k} \tilde{u}_\varepsilon d\sigma \right) \left(\fint_{Y_\varepsilon^k} \varphi dy \right) dx$$
$$= \mu_\varepsilon \sum_{k \in Z_\varepsilon} \int_0^T \int_{Y_\varepsilon^k} G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) \varphi dxdt,$$

avec

$$\mu_\varepsilon \simeq \frac{|B(0,\varepsilon\delta_\varepsilon)}{\varepsilon^N |D_\varepsilon|} = \frac{|B(0,\varepsilon\delta_\varepsilon)|}{\varepsilon^N card(Z_\varepsilon)|B(0,\varepsilon\delta_\varepsilon)|}$$

$$= \frac{|B(0,\varepsilon\delta_\varepsilon)|}{\varepsilon^N \frac{1}{\varepsilon^N}|B(0,\varepsilon\delta_\varepsilon)|} \to 1, \text{ car } \quad card(Z_\varepsilon) = \frac{|\Omega|}{\varepsilon^N} = \frac{1}{\varepsilon^N}.$$

D'où grâce à (1.54) et $|\Omega \setminus \Omega_{Y_\varepsilon^k}| \to 0$

$$\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) M_{D_\varepsilon}(\varphi) dxdt \to \int_{\Omega^T} v\varphi dxdt.$$

Compte tenu de (1.50) on déduit (1.57) par densité de $L^2(0,T;C_c(\Omega))$ dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

□

Fonction test

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on définit la fonction test comme suit :

$$\Phi_\varepsilon := (w_\varepsilon - w_{r_\varepsilon})\varphi + w_{r_\varepsilon} G_{\delta_\varepsilon}(\psi), \tag{1.58}$$

peut s'écrit encore

$$\Phi_\varepsilon = (1 - w_{r_\varepsilon})\varphi + (w_\varepsilon - 1)\varphi + w_{r_\varepsilon} G_{\delta_\varepsilon}(\psi).$$

D'une façon explicite,

$$\Phi_\varepsilon = \begin{cases} \varphi & \text{sur } \Omega'_\varepsilon \setminus C_\varepsilon, \\ (1 - w_{r_\varepsilon})\varphi + w_{r_\varepsilon} G_{\delta_\varepsilon}(\psi) & \text{sur } C_{D_\varepsilon}, \\ \varphi + (w_\varepsilon - 1)\varphi & \text{sur } C_{T_\varepsilon}, \\ 0 & \text{sur } T_\varepsilon, \\ G_{\delta_\varepsilon}(\psi) & \text{sur } D_\varepsilon. \end{cases} \tag{1.59}$$

Remarque 1.2. *On a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\Phi_\varepsilon - \varphi|_\Omega = 0. \tag{1.60}$$

Théorème 1.2. *Sous les hypothèses de la Proposition 1.5 et les hypothèses sur les trous* (1.47). *La limite* (u, v) *définie dans la proposition 1.5 est l'unique solution du problème homogénéisé suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \mu u + (N-2)\gamma S_N (u - v) = f & \text{dans } \Omega^T \\ a\dfrac{\partial v}{\partial t} + (N-2)\gamma S_N (v - u) = 0 & \text{dans } \Omega^T \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega^T \\ u(0) = u^0 & \text{dans } \Omega \\ v(0) = v^0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{1.61}$$

Où S_N est la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^N$.

De plus, les convergences (1.51)-(1.55) ont lieu pour toute la suite $\tilde{u}_\varepsilon$.

Pour la démonstration du théorème principal, on a besoin des résultats techniques suivants et dont la preuve est donnée dans la sous-section suivante.

Proposition 1.7. *Sous les hypothèses de la Proposition 1.5 et les hypothèses sur les trous* (1.47)*, pour tout* $\zeta \in \mathcal{D}([0, T[)$*, on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon \Phi_\varepsilon \zeta'(t) dt dx = \int_0^T \int_\Omega u\varphi\zeta'(t) dx dt + a\int_0^T \int_\Omega v\psi\zeta'(t) dx dt. \tag{1.62}$$

Proposition 1.8. *Sous les hypothèses de la proposition 1.7, pour tout* $\zeta \in \mathcal{D}([0, T[)$*, et pour la sous suite qui vérifie les convergences* (1.51)-(1.55)*, on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \int_\Omega \nu_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon \zeta dx dt = \int_0^T \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \zeta dx dt \tag{1.63}$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega \varphi u \zeta d\mu dt + (N-2)\gamma S_N \int_0^T \int_\Omega (u - v)(\varphi - \psi)\zeta dx dt$$

4.2. Preuves des résultats.

Preuve du théorème 1.2. On prend $w = \Phi_\varepsilon$ dans la formulation variationnelle (1.22) où Φ_ε est définie par (1.58). Alors, en multipliant par $\zeta \in \mathcal{D}(0, T)$ et en intégrant sur $[0,T]$, on obtient

$$\begin{aligned} -\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\rho_\varepsilon u_\varepsilon\Phi_\varepsilon\zeta^{'}(t)dxdt+\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\nu_\varepsilon\nabla u_\varepsilon\nabla\Phi_\varepsilon\zeta(t)dxdt \\ =\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}f_\varepsilon\Phi_\varepsilon\zeta(t)dxdt+\int_{\Omega_\varepsilon}\rho_\varepsilon u_\varepsilon^0\Phi_\varepsilon\zeta(0)dx. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Le prolongement par zéro en dehors de Ω_ε, nous donne

$$\begin{aligned} -\int_0^T\int_{\Omega}\rho_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon\Phi_\varepsilon\zeta^{'}(t)dxdt+\int_0^T\int_{\Omega}\nu_\varepsilon\nabla \tilde{u}_\varepsilon\nabla\Phi_\varepsilon\zeta(t)dxdt \\ =\int_0^T\int_{\Omega}\tilde{f}_\varepsilon\Phi_\varepsilon\zeta(t)dxdt+\int_{\Omega}\rho_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon^0\Phi_\varepsilon\zeta(0)dx. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Le membre de gauche de cette égalité tend vers

$$\begin{aligned} -\int_0^T\int_\Omega u\varphi\zeta^{'}(t)dxdt-a\int_0^T\int_\Omega v\psi\zeta^{'}(t)dxdt+\int_0^T\int_\Omega\nabla u\nabla\varphi\zeta(t)dxdt+ \\ +\int_0^T\int_\Omega u\varphi\zeta(t)d\mu dt+(N-2)\gamma S_N\int_0^T\int_\Omega(u-v)(\varphi-\psi)\zeta(t)dxdt \end{aligned}$$

comme une conséquence immédiate des proposition 1.7 , 1.8 et la remarque suivante

$$\int_0^T\int_{D_\varepsilon}\nabla\tilde{u}_\varepsilon\nabla\Phi_\varepsilon\zeta(t)dxdt=0$$

du fait que la fonction Φ_ε reste constante dans chaque boule $B\left(\varepsilon y_1+\varepsilon k,\varepsilon\delta_\varepsilon\right),k\in Z_\varepsilon$.

En passant à la limite dans le second membre et en tenant compte de la convergence (1.21) et celle introduite dans (1.60), on obtient

$$\int_0^T\int_\Omega\tilde{f}_\varepsilon\Phi_\varepsilon\zeta(t)dxdt\longrightarrow\int_0^T\int_\Omega f\varphi\zeta dxdt$$

Le second terme du deuxième membre se traite de la même façon, on sait que

$$\int_\Omega\rho_\varepsilon\tilde{u}_\varepsilon^0\Phi_\varepsilon\zeta(0)dx=\int_{\Omega_\varepsilon}\tilde{u}_\varepsilon^0\Phi_\varepsilon\zeta(0)dx+a_\varepsilon\int_{D_\varepsilon}\tilde{u}_\varepsilon^0G_{\delta_\varepsilon}(\psi)\zeta(0)dx.$$

Les hypothèses (1.21),(1.60) sur u_ε^0 impliquent

$$\int_\Omega\rho_\varepsilon\tilde{u}_\varepsilon^0\Phi_\varepsilon\zeta(0)dx\longrightarrow\zeta(0)\int_\Omega\left(u^0\varphi+av^0\psi\right)dx,$$

et la démonstration est ainsi terminée. □

Preuve de la proposition 1.7. D'abord, rappelons que

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_\Omega\rho_\varepsilon\tilde{u}_\varepsilon\Phi_\varepsilon\zeta^{'}(t)dxdt=\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon^{'}\setminus C_\varepsilon}\tilde{u}_\varepsilon\varphi\zeta^{'}(t)dxdt+\int_0^T\int_{C_{T_\varepsilon}}\tilde{u}_\varepsilon w_\varepsilon\varphi\zeta^{'}(t)dxdt+ \\ +a_\varepsilon\int_0^T\int_{D_\varepsilon}\tilde{u}_\varepsilon G_{\delta_\varepsilon}(\psi)\zeta^{'}(t)dxdt+\int_0^T\int_{C_{D_\varepsilon}}\tilde{u}_\varepsilon\left((1-w_{r_\varepsilon})\varphi+w_{r_\varepsilon}G_{\delta_\varepsilon}(\psi)\right)\zeta^{'}(t)dxdt. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Notons qu'on a

$$\int_0^T \int_{\Omega'_\varepsilon \backslash C_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon \varphi \zeta'(t) dxdt = \int_0^T \int_{\Omega'_\varepsilon \backslash C_{D_\varepsilon}} \tilde{u}_\varepsilon \varphi \zeta'(t) dxdt - \int_0^T \int_{C_{T_\varepsilon}} \tilde{u}_\varepsilon \varphi \zeta'(t) dxdt.$$

Remplaçons cette dernière dans (1.66), on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon \Phi_\varepsilon \zeta'(t) dxdt = \int_0^T \int_{\Omega'_\varepsilon \backslash C_{D_\varepsilon}} \tilde{u}_\varepsilon \varphi \zeta'(t) dxdt + \int_0^T \int_{C_{T_\varepsilon}} \tilde{u}_\varepsilon (w_\varepsilon - 1) \varphi \zeta'(t) dxdt$$

(1.67)

$$+ a_\varepsilon \int_0^T \int_{D_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon G_{\delta_\varepsilon}(\psi) \zeta'(t) dxdt + \int_0^T \int_{C_{D_\varepsilon}} \tilde{u}_\varepsilon \left((1 - w_{r_\varepsilon}) \varphi + w_{r_\varepsilon} G_{\delta_\varepsilon}(\psi) \right) \zeta'(t) dxdt.$$

Maintenant, passons à la limite dans chaque terme du second membre de l'égalité ci-dessus.

$$\int_0^T \int_{\Omega'_\varepsilon \backslash C_{D_\varepsilon}} \tilde{u}_\varepsilon \varphi \zeta'(t) dxdt = \int_0^T \int_\Omega \chi_{\Omega'_\varepsilon \backslash C_{D_\varepsilon}} \tilde{u}_\varepsilon \varphi \zeta'(t) dxdt.$$

Comme $\chi_{\Omega'_\varepsilon \backslash C_{D_\varepsilon}} \to 1$ dans $L^2(\Omega^T)$, et en tenant compte de (1.52) on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \int_{\Omega'_\varepsilon \backslash C_{D_\varepsilon}} \tilde{u}_\varepsilon \varphi \zeta'(t) dxdt = \int_0^T \int_\Omega u \varphi \zeta'(t) dxdt.$$

On traite le deuxième terme sur C_{T_ε}, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{C_{T_\varepsilon}} \tilde{u}_\varepsilon (w_\varepsilon - 1) \varphi \zeta' dxdt \right| &\leqslant \int_0^T \int_\Omega |\tilde{u}_\varepsilon| |(w_\varepsilon - 1)| |\zeta' \varphi| dxdt \\ &\leqslant |\zeta' \varphi|_{L^\infty(\Omega^T)} |\tilde{u}_\varepsilon|_{\Omega^T} |w_\varepsilon - 1|_{\Omega^T} \end{aligned}$$

qui va tendre vers zéro par (H.3) et (1.52).

Pour le terme sur D_ε dans (1.67) notons que,

$$\begin{aligned} a_\varepsilon \int_0^T \int_{D_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon G_{\delta_\varepsilon}(\psi) \zeta'(t) dxdt = a_\varepsilon |D_\varepsilon| \int_0^T ⨍_{D_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon \left(G_{\delta_\varepsilon}(\psi) - \psi \right) \zeta'(t) dxdt + \\ + a_\varepsilon |D_\varepsilon| \int_0^T ⨍_{D_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon \psi \zeta'(t) dxdt. \end{aligned}$$

Grâce à (1.24) et la Proposition 1.6 on a

$$\int_0^T ⨍_{D_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon \psi \zeta'(t) dxdt \to \int_0^T \int_\Omega v \psi \zeta'(t) dxdt,$$

du fait que $a_\varepsilon |D_\varepsilon| \to a$ et de la convergence uniforme de $G_{\delta_\varepsilon}(\psi)$ vers ψ, on conclue que

$$a_\varepsilon \int_0^T \int_{D_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon G_{\delta_\varepsilon}(\psi) \zeta'(t) dxdt \to a \int_0^T \int_\Omega v \psi \zeta'(t) dxdt.$$

Passons au terme qui reste sur C_{D_ε}, qui peut s'estimer par :

$$\left|\int_0^T\int_{C_{D_\varepsilon}} \tilde{u}_\varepsilon\left((1-w_{r_\varepsilon})\varphi + w_{r_\varepsilon}G_{\delta_\varepsilon}(\psi)\right)\zeta^{'}(t)dxdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^T\int_{C_{D_\varepsilon}} |\tilde{u}_\varepsilon|^2 dxdt\right)^{1/2}\left(\int_0^T\int_{C_{D_\varepsilon}} |\left((1-w_{r_\varepsilon})\varphi + w_{r_\varepsilon}G_{\delta_\varepsilon}(\psi)\right)\zeta^{'}(t)|^2 dxdt\right)^{1/2},$$

en utilisant (1.52), (1.32), (1.42) et comme $|C_{D_\varepsilon}| \to 0$(qui est évidement grâce à la définition de la géométrie), on obtient

$$\left|\int_0^T\int_{C_{D_\varepsilon}} \tilde{u}_\varepsilon\left((1-w_{r_\varepsilon})\varphi + w_{r_\varepsilon}G_{\delta_\varepsilon}(\psi)\right)\zeta^{'}(t)dxdt\right| \leqslant C|\tilde{u}_\varepsilon|_{\Omega^T}T^{1/2}|C_{D_\varepsilon}|^{1/2} \longrightarrow 0.$$

□

Preuve de la proposition 1.8. D'abord, on remarque que

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega \nu_\varepsilon\nabla\tilde{u}_\varepsilon\nabla\Phi_\varepsilon\zeta(t)dxdt &= \int_0^T\int_{\Omega'_\varepsilon\setminus C_\varepsilon}\nabla\tilde{u}_\varepsilon\nabla\varphi\zeta(t)dxdt + \int_0^T\int_{C_{T_\varepsilon}}\nabla\tilde{u}_\varepsilon\nabla\varphi\zeta(t)dxdt\\
&+ \int_0^T\int_{C_{T_\varepsilon}}\nabla\tilde{u}_\varepsilon\nabla\varphi(w_\varepsilon-1)\zeta(t)dxdt + \int_0^T\int_{C_{T_\varepsilon}}\nabla\tilde{u}_\varepsilon\nabla w_\varepsilon\varphi\zeta(t)dxdt\\
&+ \int_0^T\int_{C_{D_\varepsilon}}\nabla\tilde{u}_\varepsilon\nabla w_{r_\varepsilon}\left(G_{\delta_\varepsilon}(\psi)-G_{\delta_\varepsilon}(\varphi)\right)\zeta(t)dxdt\\
&+ \int_0^T\int_{C_{D_\varepsilon}}\nabla\tilde{u}_\varepsilon\nabla w_{r_\varepsilon}\left(G_{\delta_\varepsilon}(\varphi)-\varphi\right)\zeta(t)dxdt\\
&+ \int_0^T\int_{C_{D_\varepsilon}}\nabla\tilde{u}_\varepsilon(1-w_{r_\varepsilon})\nabla\varphi\zeta(t)dxdt\\
&:= I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7.
\end{aligned}\tag{1.68}$$

On passe successivement à la limite dans chaque terme, d'abord on voit que

$$\begin{aligned}
I_1+I_2 &= \int_0^T\int_{\Omega'_\varepsilon\setminus C_\varepsilon}\nabla\tilde{u}_\varepsilon\nabla\varphi\zeta dxdt + \int_0^T\int_{C_{T_\varepsilon}}\nabla\tilde{u}_\varepsilon\nabla\varphi\zeta dxdt\\
&= \int_0^T\int_{\Omega'_\varepsilon\setminus C_{D_\varepsilon}}\nabla\tilde{u}_\varepsilon\nabla\varphi\zeta dxdt.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de de la convergence dominée de Lebesgue $\nabla\varphi 1_{\chi_{\Omega'_\varepsilon\setminus C_{D_\varepsilon}}} \to \nabla\varphi$ in $L^2(\Omega)$ et prenant en compte le résultat (1.52), il vient que

$$I_1+I_2 \longrightarrow \int_0^T\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\zeta dxdt.$$

Passons maintenant au troisième terme de (1.68), on obtient par (1.52) et (H.3)

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leqslant \int_0^T\int_\Omega\left|\chi_{C_{T_\varepsilon}}\nabla\tilde{u}_\varepsilon(w_\varepsilon-1)\nabla\varphi\zeta\right|dxdt\\
&\leqslant \sqrt{T}|w_\varepsilon-1|_\Omega|\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega)}|\zeta|_{L^\infty(0,T)}|\nabla\tilde{u}_\varepsilon|_{\Omega^T}\\
&\leqslant C|w_\varepsilon-1|_\Omega \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Pour le quatrième terme de (1.68). Considérons la fonction $\mathbf{U}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ définie par

$$\mathbf{U}_\varepsilon := \int_0^T \tilde{u}_\varepsilon \zeta dt.$$

La convergence (1.52) implique que la suite $\mathbf{U}_\varepsilon$ vérifie

$$(1.69) \quad \begin{cases} \mathbf{U}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{U} = \int_0^T u\zeta dt & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega) \text{ et fortement dans } L^2(\Omega), \\ \mathbf{U}_\varepsilon = 0 & \text{sur } T_\varepsilon. \end{cases}$$

D'autre part, on sait que

$$\nabla \tilde{u}_\varepsilon \varphi = \nabla(\varphi \tilde{u}_\varepsilon) - \tilde{u}_\varepsilon \nabla \varphi,$$

remplaçons celle-ci dans I_4, on obtient

$$(1.70) \qquad I_4 = \int_0^T \int_\Omega \nabla(\varphi \tilde{u}_\varepsilon) \nabla w_\varepsilon \zeta dx dt - \int_0^T \int_\Omega \tilde{u}_\varepsilon \nabla \varphi \nabla w_\varepsilon \zeta dx dt.$$

En appliquant le théorème de Fubini dans (1.70), on a

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_\Omega \left(\int_0^T \nabla(\varphi \tilde{u}_\varepsilon) \zeta dt \right) \nabla w_\varepsilon dx - \int_\Omega \left(\int_0^T \tilde{u}_\varepsilon \zeta dt \right) \nabla \varphi \nabla w_\varepsilon dx \\ &= - \langle \Delta w_\varepsilon, \varphi \mathbf{U}_\varepsilon \rangle + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} \varphi \mathbf{U}_\varepsilon d\sigma - \int_\Omega \mathbf{U}_\varepsilon \nabla \varphi \nabla w_\varepsilon dx \qquad (1.71) \\ &= - \langle \lambda_\varepsilon, \mathbf{U}_\varepsilon \varphi \rangle + \langle \mu_\varepsilon, \mathbf{U}_\varepsilon \varphi \rangle - \int_\Omega \mathbf{U}_\varepsilon \nabla \varphi \nabla w_\varepsilon dx. \end{aligned}$$

Utilisant l'hypothèse (1.47)-(H.4), on conclut que

$$(1.72) \qquad - \langle \lambda_\varepsilon, \varphi \mathbf{U}_\varepsilon \rangle + \langle \mu_\varepsilon, \varphi \mathbf{U}_\varepsilon \rangle \longrightarrow \langle \mu, \varphi \mathbf{U} \rangle.$$

En utilisant encore le théorème de Fubini, on déduit

$$\langle \mu, \varphi \mathbf{U} \rangle = \int_\Omega \left(\int_0^T u\zeta dt \right) \varphi d\mu = \int_0^T \int_\Omega u \varphi \zeta d\mu dt.$$

Comme $\mathbf{U}_\varepsilon \to \mathbf{U}$ dans $L^2(\Omega)$, et $\nabla w_\varepsilon \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\Omega)$, donc

$$\int_\Omega \mathbf{U}_\varepsilon \nabla \varphi \nabla w_\varepsilon dx \longrightarrow 0.$$

Finalement, on a

$$I_4 \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega u \varphi \zeta d\mu dt.$$

Pour le cinquième terme un calcul directe donne

$$I_5 = \sum_{k \in Z_\varepsilon} \left(\fint_{S^k_{\delta_\varepsilon}} \psi d\sigma - \fint_{S^k_{\delta_\varepsilon}} \varphi d\sigma \right) \int_0^T \int_{C^k_{D_\varepsilon}} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon} \zeta dx dt.$$

Considérons le changement de variable suivant

$$\bar{u}^k_\varepsilon(\bar{y}, t) = u_\varepsilon(x, t) \quad \text{avec} \quad \bar{y} = \frac{x}{\varepsilon} - k - y_1, \quad \text{pour} \quad x \in Y^k_\varepsilon,$$

par substitutions, on obtient

$$\int_{C(\delta_\varepsilon,r_\varepsilon)} \nabla \bar{u}^k_\varepsilon(\bar{y},t)\nabla W_{r_\varepsilon}(\bar{y})d\bar{y} =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}...\int_0^{\pi} sin^{N-2}\theta_1 sin^{N-3}\theta_2...sin\theta_{N-2}d\theta_1 d\theta_2...d\theta_{N-2}d\theta_{N-1}\int_{\delta_\varepsilon}^{r_\varepsilon}\frac{\partial \bar{u}^k_\varepsilon}{\partial r}(\bar{y})\frac{dW_{r_\varepsilon}}{dr}r^{N-1}dr,$$

avec cette notation, on trouve

$$I_5 = \varepsilon^{N-2}\sum_{k\in Z_\varepsilon}\left(\fint_{S^k_{\delta_\varepsilon}}\psi - \fint_{S^k_{\delta_\varepsilon}}\varphi\right)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}..\int_0^{\pi} sin^{N-2}\theta_1 sin^{N-3}\theta_2..sin\theta_{N-2}d\theta_1 d\theta_2..d\theta_{N-2}d\theta_{N-1}$$
$$\int_{\delta_\varepsilon}^{r_\varepsilon}\left(\int_0^T\frac{\partial \bar{u}^k_\varepsilon}{\partial r}(\bar{y})\zeta(t)dt\right)\frac{dW_{r_\varepsilon}}{dr}r^{N-1}dr$$
$$= \frac{\varepsilon^{N-2}(N-2)(\delta_\varepsilon r_\varepsilon)^{N-2}}{(r_\varepsilon^{N-2}-\delta_\varepsilon^{N-2})}\sum_{k\in Z_\varepsilon}\left(\fint_{S^k_{\delta_\varepsilon}}\psi d\sigma - \fint_{S^k_{\delta_\varepsilon}}\varphi d\sigma\right)\int_{S_N}\int_0^T\left(\bar{u}^k_\varepsilon|_{|\bar{y}|=\delta_\varepsilon} - \bar{u}^k_\varepsilon|_{|\bar{y}|=r_\varepsilon}\right)\zeta dt d\sigma$$
$$= \frac{S_N(N-2)\varepsilon^{N-2}(\delta_\varepsilon r_\varepsilon)^{N-2}}{\varepsilon^N(r_\varepsilon^{N-2}-\delta_\varepsilon^{N-2})}\int_0^T\int_\Omega\left(G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) - G_{r_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)\right)\left(G_{\delta_\varepsilon}(\psi) - G_{\delta_\varepsilon}(\varphi)\right)\zeta(t)dxdt.$$

Ainsi les convergences (1.48), (1.53), (1.54), et la convergence uniforme de l'opérateur $G_{\delta_\varepsilon}(\varphi)$ vers φ, impliquent

$$I_5 \longrightarrow (N-2)\gamma S_N\int_{\Omega^T}(v-u)(\psi-\varphi)\zeta(t)dxdt.$$

On peut estimer le terme I_6 comme suit

$$|I_6| \leqslant |\nabla\tilde{u}_\varepsilon|_{\Omega^T}|\nabla w_{r_\varepsilon}\zeta|_{\Omega^T}|G_{\delta_\varepsilon}(\varphi)-\varphi|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Etant donné que $|\nabla w_{r_\varepsilon}|_{L^2(\Omega)}$ est bornée (voir(1.33)) ainsi que $|\nabla\tilde{u}_\varepsilon|_{\Omega^T}$ et en tenant compte de (1.41), il en résulte que

$$\int_0^T\int_{C_{D_\varepsilon}}\nabla\tilde{u}_\varepsilon\nabla w_{r_\varepsilon}\left(G_{\delta_\varepsilon}(\varphi)-\varphi\right)\zeta dxdt \longrightarrow 0.$$

Pour le dernier terme, on sait que $\chi_{C_{D_\varepsilon}}\nabla\varphi \to 0$ dans $L^2(\Omega^T)$, $\nabla\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u$ dans $L^2(\Omega^T)$ et comme $(1-w_{r_\varepsilon})$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, par conséquent

$$I_7 = \int_0^T\int_\Omega\nabla\tilde{u}_\varepsilon\nabla\chi_{C_{D_\varepsilon}}\varphi(1-w_{r_\varepsilon})\zeta(t)dxdt \longrightarrow 0.$$

□

5. Homogenéisation dans le cas $\delta_\varepsilon << \varepsilon^{2/(N-2)}$

Dans ce cas, la taille des particules est inférieure à la taille critique. Cette taille donne

$$\gamma_\varepsilon \to 0. \qquad (1.73)$$

On suppose que les hypothèses de Cioranescu-Murat (1.47) sur les trous sont satisfaites.

THÉORÈME 1.3. *Il existe* $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *tel que*

$$\tilde{u}_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad dans\ L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{1.74}$$

$$\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u \quad dans\ L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \tag{1.75}$$

$$\frac{1}{|D_\varepsilon|} u_\varepsilon \chi_{D_\varepsilon} \to v^0 \ dans\ \ \mathcal{D}'(\Omega) \ \ p.p \quad t \in [0,T], \tag{1.76}$$

où u est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \mu u = f & dans \quad \Omega^T \\ \qquad\qquad u(0) = u^0 & dans \quad \Omega \end{cases} \tag{1.77}$$

DÉMONSTRATION. Les convergences (1.74)-(1.75) est une conséquence immédiate de la proposition 1.1. On remarque que l'estimation (1.24) assure l'existence de $v \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ tel que à une sous suite près

$$\frac{1}{|D_\varepsilon|} u_\varepsilon \chi_{D_\varepsilon} \to v \text{ dans } \ \mathcal{D}'(\Omega) \ \text{ p.p} \quad t \in [0,T], \tag{1.78}$$

(voir le Lemme A-2 [**3**]). Il reste à montrer que $v = v^0$.

On prend comme plus haut

$$\Phi_\varepsilon = (1 - w_{r_\varepsilon})\varphi + (w_\varepsilon - 1)\varphi + w_{r_\varepsilon} G_{\delta_\varepsilon}(\psi),$$

dans ce cas, on remarque que $w_{r_\varepsilon} \to 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ d'après la proposition 1.2.

On prend $w = \Phi_\varepsilon$ dans la formulation variationnelle (1.22). Après, en multipliant par $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ et en intégrant sur $[0,T]$, on obtient

$$\begin{aligned} &- \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon u_\varepsilon \Phi_\varepsilon \zeta'(t) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon \zeta(t) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \Phi_\varepsilon \zeta(t) dx dt + \int_{\Omega_\varepsilon} \rho_\varepsilon u_\varepsilon^0 \Phi_\varepsilon \zeta(0) dx, \end{aligned} \tag{1.79}$$

On prolonge d'abord par zéro puis on applique le théorème de Fubini, par passage à la limite on trouve

$$\begin{aligned} &- \int_\Omega \left(\int_0^T u\zeta'(t) dt \right) \varphi dx - a \int_\Omega \left(\int_0^T v\zeta'(t) dt \right) \psi dx + \int_\Omega \left(\int_0^T \nabla u \zeta(t) dt \right) \nabla \varphi dx + \\ &+ \int_\Omega \left(\int_0^T u\zeta(t) dt \right) \varphi d\mu = \int_\Omega \left(\int_0^T f\zeta(t) dt \right) \varphi dx + \int_\Omega u^0 \zeta(0) \varphi dx + a \int_\Omega v^0 \zeta(0) \psi dx. \end{aligned} \tag{1.80}$$

Prenant $\varphi = 0$ et $\zeta \in \mathcal{D}(]0,T[)$ dans (1.80), on obtient

$$-a \int_\Omega \left(\int_0^T v\zeta'(t) dt \right) \psi dx = 0,$$

qui s'écrit

$$a \left\langle \frac{dv}{dt}, \zeta\psi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega^T) \times \mathcal{D}(\Omega^T)} = 0.$$

Donc,

$$\frac{dv}{dt} = 0 \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega^T),$$

cela veut dire v est indépendant de t et donc $v \in C^0\left(0, T, L^2(\Omega)\right)$. De plus, en prenant $\zeta \in \mathcal{D}([0, T[)$ on trouve que

$$-a \int_0^T \int_\Omega v\psi\zeta'(t)dxdt = a \int_\Omega v^0\psi\zeta(0)dx,$$

$$-a \left(\int_\Omega v\psi dx\right) \int_0^T \zeta' dt = a \left(\int_\Omega v^0\psi dx\right) \zeta(0),$$

d'où

$$\int_\Omega v\psi dx = \int_\Omega v^0\psi dx, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ce qui donne

$$v = v^0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

d'où

$$v = v^0 \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Par suite, on prend $\psi = 0$ dans (1.80) en appliquant le théorème de Fubini puis la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle \frac{du}{dt}, \varphi\rangle \zeta(t)dt + \int_\Omega u(0)\varphi\zeta(0)dx + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi\zeta(t)dxdt + \\ &+ \int_0^T \int_\Omega u\varphi\zeta(t)d\mu dt = \int_0^T \int_\Omega f\varphi\zeta(t)dxdt + \int_\Omega u^0\zeta(0)\varphi dx, \end{aligned} \tag{1.81}$$

si on prend $\zeta \in \mathcal{D}(]0, T[)$, on obtient directement $(1.77)^1$.

Maintenant pour montrer la condition initiale $(1.77)^2$, on multiplie $(1.77)^1$ par $\varphi\zeta$, avec $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\zeta \in \mathcal{D}([0, T[)$ après on applique la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \left(\int_0^T u\zeta'(t)dt\right) \varphi dx + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi\zeta(t)dxdt + \int_0^T \int_\Omega u\varphi\zeta(t)d\mu dt \\ = \int_0^T \int_\Omega f\varphi\zeta(t)dxdt + \int_\Omega u(0)\zeta(0)\varphi dx. \end{aligned} \tag{1.82}$$

En comparant (1.81) et (1.82), on déduit $(1.77)^2$. □

Remarque 1.3.
On remarque à travers de cette étude que la quantité v ne dépend pas du temps.

6. Homogenéisation dans le cas $\varepsilon^2 << \delta_\varepsilon^{N-2}$

Dans ce cas, la taille des particules est supérieure à la taille critique ceci donne

$$\gamma_\varepsilon \to +\infty \tag{1.83}$$

. On suppose toujours que les trous satisfont les hypothèses de Cioranescu–Murat (1.47).

Nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION 1.9. *Il existe* $u \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, *tel que à une sous-suite près*

$$\tilde{u}_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad dans\ L^{\infty}\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \qquad \tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u \quad dans\ L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \tag{1.84}$$

$$G_{r_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) \longrightarrow u \quad dans\ L^2\left(\Omega^T\right), \tag{1.85}$$

$$G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) \longrightarrow u \quad dans\ L^2\left(\Omega^T\right), \tag{1.86}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\tilde{u}_\varepsilon - G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|^2 dxdt = 0. \tag{1.87}$$

DÉMONSTRATION. Selon (1.23), il existe une sous-suite vérifiant les convergences (1.84).

La convergence de $G_{r_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)$ dans (1.85) s'obtient de la la même manière que la convergence (1.53).

La nouveauté dans ce cas est la convergence (1.86), on a pour une sous suite $(\tilde{u}_\varepsilon)$ vérifiant (1.84)

$|u - G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|_{\Omega^T_{Y_\varepsilon}} \leqslant |u - \tilde{u}_\varepsilon|_{\Omega^T} + |\tilde{u}_\varepsilon - G_{r_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|_{\Omega^T_{Y_\varepsilon}} + |G_{r_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) - G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|_{\Omega^T}$

Par application du lemme1.1, il vient

$$\begin{aligned}|u - G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|_{\Omega^T_{Y_\varepsilon}} &\leqslant |u - \tilde{u}_\varepsilon|_{\Omega^T} + C|\nabla \tilde{u}_\varepsilon|_{\Omega^T}\left(\left(\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon}\right)^{1/2} + \left(\frac{\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon}\right)^{1/2}\right)\\ &\leqslant |u - \tilde{u}_\varepsilon|_{\Omega^T} + C\left(\frac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon{}^{1/2}}\right)\left(\frac{\delta_\varepsilon}{r_\varepsilon}\right)^{1/2} + C\left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon{}^{1/2}}\right) \to 0.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on conclut la convergence (1.86) en remarquant que

$$|u - G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|^2_{\Omega} = |u - G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|^2_{\Omega_{Y_\varepsilon}} + |u - G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|^2_{\Omega \setminus \Omega_{Y_\varepsilon}}$$

et $|u - G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|_{\Omega \setminus \Omega_{Y_\varepsilon}}$ tend vers zéro d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

En se termine par la convergence (1.87), utilisons encore une fois le lemme 1.1 et (1.25), pour une sous suite $(\tilde{u}_\varepsilon)$ vérifiant (1.84), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\tilde{u}_\varepsilon - G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)|^2 dxdt &\leqslant C(\varepsilon\delta_\varepsilon)^2 \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|^2 dxdt\\ &\leqslant \frac{C}{\gamma_\varepsilon b_\varepsilon} \to 0.\end{aligned}$$

□

Compte tenu de la proposition 1.9, on a

PROPOSITION 1.10. *Pour tout* $\varphi \in L^2(0,T;C_c(\Omega))$, *on a*

$$\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon \varphi dxdt \longrightarrow \int_{\Omega^T} u\varphi dxdt. \tag{1.88}$$

On déduit le résultat suivant.

THÉORÈME 1.4. *la limite* $u \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *dans* (1.84)-(1.87) *est l'unique solution du problème suivant*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1+a)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \mu u = f & \textit{dans} \quad \Omega^T \\ u(0) = \dfrac{1}{(1+a)}u^0 + \dfrac{a}{(1+a)}v^0 & \textit{dans} \quad \Omega \end{array} \right. \tag{1.89}$$

De plus les convergences (1.84)-(1.87) *ont lieu pour toute la suite.*

DÉMONSTRATION. La fonction test Φ_ε est donnée par

$$\Phi_\varepsilon = (1 - w_{r_\varepsilon})\,\varphi + (w_\varepsilon - 1)\,\varphi + w_{r_\varepsilon} G_{\delta_\varepsilon}(\varphi).$$

On prend $w = \Phi_\varepsilon$ dans la formulation variationnelle (1.22). Alors, en multipliant par $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ et en intégrant sur $[0,T]$, on obtient après le pologement par zéro dehors Ω_ε

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon \Phi_\varepsilon \zeta'(t)dxdt + \int_0^T \int_\Omega \nu_\varepsilon \nabla \tilde{u}_\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon \zeta(t)dxdt \\ = \int_0^T \int_\Omega \tilde{f}_\varepsilon \Phi_\varepsilon \zeta(t)dxdt + \int_\Omega \rho_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon^0 \Phi_\varepsilon \zeta(0)dx. \end{aligned} \tag{1.90}$$

La preuve est similaire a celle correspondante du théorème 1.2.

Selon les propositions 1.9, 1.10 et du fait que la fonction Φ_ε reste constante dans chaque boule $B(\varepsilon y_1 + \varepsilon k, \varepsilon\delta_\varepsilon)\,, k \in Z_\varepsilon$, on obtient

$$-\int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon \tilde{u_\varepsilon} \Phi_\varepsilon \zeta'(t)dxdt \to -\int_0^T \int_\Omega u\varphi\zeta'(t)dxdt - a\int_0^T \int_\Omega u\varphi\zeta'(t)dxdt.$$

De la même manière que la proposition 1.8, on trouve la convergence du deuxième terme du membre gauche de (1.90). la seule différence dans ce cas se distingue dans la convergence du terme I_6 qui se traite comme suit, grâce à (1.33),(1.42) et (1.84)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{C_{D_\varepsilon}} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon}\left(G_{\delta_\varepsilon}(\varphi) - \varphi\right)\zeta dxdt \right| &\leqslant CT^{1/2} |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|_{\Omega^T} |\nabla w_{r_\varepsilon}|_\Omega |\zeta|_{L^\infty(0,T)} |G_{\delta_\varepsilon}(\varphi) - \varphi|_{L^\infty(C_{D_\varepsilon})} \\ &\leqslant C(\gamma_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\varepsilon r_\varepsilon = C\left(\frac{\delta_\varepsilon{}^{N-2}}{\varepsilon^2}\right)^{1/2}(\varepsilon r_\varepsilon) \\ &= C(\delta_\varepsilon^{N-2})^{1/2} r_\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$\left| \int_0^T \int_{C_{D_\varepsilon}} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon}\left(G_{\delta_\varepsilon}(\varphi) - \varphi\right)\zeta dxdt \right| \to 0.$$

Les hypothèses (1.21),(1.60) entraînent (par le même raisonnement que plus haut)

$$\int_0^T \int_\Omega \tilde{f}_\varepsilon \Phi_\varepsilon \zeta(t)dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega f\varphi\zeta(t)dxdt$$

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon^0 \Phi_\varepsilon \zeta(0)dx \longrightarrow \zeta(0)\int_\Omega \left(u^0 + av^0\right)\varphi dx.$$

Par conséquent, (1.90) tend vers

$$-\int_0^T\int_\Omega u\varphi\zeta'(t)dxdt - a\int_0^T\int_\Omega u\varphi\zeta'(t)dxdt + \int_0^T\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\zeta(t)dxdt +$$

$$+\int_0^T\int_\Omega u\varphi\zeta(t)d\mu dt = \int_0^T\int_\Omega f\varphi\zeta(t)dxdt + \zeta(0)\int_\Omega \left(u^0 + av^0\right)\varphi dx. \tag{1.91}$$

Par application de la formule de Green dans (1.91), nous obtenons

$$\int_{\Omega^T}(1+a)\frac{\partial u}{\partial t}\varphi\zeta(t)dxdt + \zeta(0)\int_\Omega(1+a)u(0)\varphi dx + \int_0^T\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\zeta(t)dxdt +$$

$$+\int_0^T\int_\Omega u\varphi\zeta(t)d\mu dt = \int_0^T\int_\Omega f\varphi\zeta(t)dxdt + \zeta(0)\int_\Omega \left(u^0 + av^0\right)\varphi dx. \tag{1.92}$$

Prenons $\zeta \in \mathcal{D}(]0,T[)$ dans (1.92), on obtient $(1.89)^1$. Si on multiplie $(1.89)^1$ par $\varphi\zeta$avec $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\zeta \in \mathcal{D}([0,T[)$ en comparent avec (1.92), on déduit directement

$$u\left(0\right) = \frac{1}{(1+a)}u^0 + \frac{a}{(1+a)}v^0$$

$\square$

CHAPITRE 2

Homogénéisation d'un processus de diffusion dans une multi-structure raréfiée

Résumé

Dans ce chapitre, nous étudions l'homogénéisation d'un processus de diffusion dans un milieu multiphasique formé de $(m+1)$ phases. Une phase connexe formant le milieu ambiant et les m phases restantes sont chacune formée d'un réseau ε-périodique($\varepsilon > 0$ destiné à tendre vers zéro) de petites particules sphériques de volume global tendant vers zéro quand $\varepsilon \to 0$, alors que leurs masse totale reste de l'ordre de l'unité.

1. Position du problème

Soit Ω un ouvert borné Lipschitzien de $\mathbb{R}^3$ occupé par ce mélange.

On considère la cellule de base

$$Y := \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)^3. \tag{2.1}$$

Soit ε un réel strictement positif qui prend ses valeurs dans une suite de réels qui tend vers zéro. Pour chaque valeur de ε, on note

$$Y_\varepsilon^k := \varepsilon k + \varepsilon Y,\ k \in \mathbb{Z}^3, \tag{2.2}$$

$$Z_\varepsilon := \left\{k \in \mathbb{Z}^3,\ Y_\varepsilon^k \subset \Omega\right\}, \tag{2.3}$$

$$\Omega_{Y_\varepsilon} := \bigcup_{k \in Z_\varepsilon} Y_\varepsilon^k. \tag{2.4}$$

Dans tout ce qui suit on note $B(a,r)$ la boule de cntre a et de rayon r.

Pour des petits paramètres $\varepsilon, \delta_\varepsilon^i$ tel que $0 < \delta_\varepsilon^i << 1,\ pour\ i = \overline{1,m}$, on définit les suspensions comme suit :

$$D_\varepsilon^i := \bigcup_{k \in Z_\varepsilon} B_\varepsilon^{k,i} = \bigcup_{k \in Z_\varepsilon} \{\varepsilon \delta_\varepsilon^i B_i + \varepsilon k\}, \tag{2.5}$$

avec B_i, sont m boules dans Y centrées en y_i telles que

$$B_i \cap B_j = \varnothing, i \neq j \quad \text{et} \quad \overline{B_i} \subset\subset Y, \tag{2.6}$$

c'est évident de voir que

$$|D_\varepsilon^i| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \longrightarrow 0,\ i = \overline{1,m}, \tag{2.7}$$

ce qui signifie que le volume de chaque suspension tend vers zéro.

$D_\varepsilon = \bigcup_{i=\overline{1,m}} D_\varepsilon^i$ est le domaine occupé par les particules. La phase ambiente est donnée par

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{D_\varepsilon}.$$

On considère le problème qui décrit le processus de diffusion dans notre mélange. Notons par $a_\varepsilon^i > 0$ et $b_\varepsilon^i > 0$ la densité de masse relative et la diffusivité relative respectivement de la suspension D_ε^i , f_ε un terme source, on suppose sans perte de généralité que $|\Omega| = 1$. Le problème est le suivant.

Trouver u_ε solution de

$$(2.8) \qquad \begin{cases} \rho_\varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - div\left(\nu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon\right) = f_\varepsilon & \text{dans} \quad \Omega^T, \\ [u_\varepsilon]_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial D_\varepsilon \times]0,T[, \\ [\nu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon]_\varepsilon n = 0 & \text{sur} \quad \partial D_\varepsilon \times]0,T[, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0,T[, \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

avec $[.]_\varepsilon$ est le saut à l'interface ∂D_ε, n est la normale sur ∂D_ε à l'extérieure, et

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ a_\varepsilon^1 & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon^1, \\ a_\varepsilon^2 & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon^2, \\ & \vdots \\ a_\varepsilon^m & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon^m, \end{cases}$$

$$\nu_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \Omega_\varepsilon, \\ b_\varepsilon^1 & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon^1, \\ b_\varepsilon^2 & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon^2, \\ & \vdots \\ b_\varepsilon^m & \text{si} \quad x \in D_\varepsilon^m. \end{cases}$$

En ce qui concerne les données, on suppose qu'il existe $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right), u_0 \in L^2(\Omega)$ tels que

$$(2.9) \qquad \begin{cases} f_\varepsilon \rightharpoonup f \quad \text{dans } L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right), \\ u_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \\ ⨍_{D_\varepsilon^i} |u_\varepsilon^0|^2 dx \leqslant C \quad \forall i \in \{\overline{1,m}\}, \\ \dfrac{1}{|D_\varepsilon^i|} u_\varepsilon^0 \chi_{D_\varepsilon^i} \rightharpoonup v_i^0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ avec } v_i^0 \in L^2(\Omega), \quad \forall i \in \{\overline{1,m}\}. \end{cases}$$

On suppose que la densité des particules sphériques est beaucoup plus élevée que celle de la phase ambiante. Ce qui se traduit par l'hypothèse suivante

$$(2.10) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} a_\varepsilon^i |D_\varepsilon^i| = a_i > 0, \; i = \overline{1,m}.$$

On suppose aussi que la diffusivité de chaque composante vérifie

$$b_\varepsilon^i \geqslant b_i > 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \; i = \overline{1,m}. \tag{2.11}$$

Dans la suite C désigne une constante strictement positif indépendante de ε pouvant varier d'une ligne à une autre.

2. Estimations a priori

2.1. Existence et unicité.

2.1.1. ***Formulation variationnelle***.

La formulation variationnelle du problème (2.8) est donnée par
(2.12)

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right) \cap L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ \dfrac{d}{dt}\left(\rho_\varepsilon u_\varepsilon, v\right)_\Omega + \left(\nu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon, \nabla w\right)_\Omega = \left\langle f_\varepsilon, w\right\rangle_\Omega \quad \text{dans } \mathcal{D}'\left(0,T\right), \; \forall w \in H_0^1\left(\Omega\right), \\ u_\varepsilon\left(0\right) = u_\varepsilon^0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Oú $\langle .,. \rangle$ est le produit de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$dans la formulation variationnelle.

2.1.2. ***Théorème d'existence et d'unicité***.

Théorème 2.1. *Pour chaque $\varepsilon > 0$, sous les hypothèses et les notations précédentes le problème* (2.12) *admet une unique solution.*

De plus

$$u_\varepsilon \in C^0\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right), \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^2\left(0,T;H^{-1}\left(\Omega\right)\right) \tag{2.14}$$

Le résultat d'existence et d'unicité se démontre par la méthode de Faedo-Galerkin voir **[21]**.

2.2. Estimation a priori.

Proposition 2.1. *Sous les hypothèses* (2.9), *on a*

$$u_\varepsilon \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right) \cap L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right). \tag{2.15}$$

De plus, il existe $C > 0$ indépendente de ε, tel que pour $i = \overline{1,m}$

$$\fint_{D_\varepsilon^i} |u_\varepsilon|^2 dx \leqslant C \quad \text{p.p. dans} \left[0,T\right], \tag{2.16}$$

$$b_\varepsilon^i |\nabla u_\varepsilon|^2_{L^2\left(D_\varepsilon^{i\,T}\right)} \leqslant C. \tag{2.17}$$

DÉMONSTRATION. On prend $w = u_\varepsilon$ dans (2.12) puis on l'intègre sur $(0,t), t \in (0,T)$, il vient

$$\frac{1}{2}\left(|u_\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} + \sum_{i=1}^m a^i_\varepsilon |u_\varepsilon|^2_{D^i_\varepsilon}\right) + \int_0^t |\nabla u_\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} + \sum_{i=1}^m b^i_\varepsilon \int_0^t |\nabla u_\varepsilon|^2_{D^i_\varepsilon}$$
$$= \int_0^T \langle f_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle dt + \frac{1}{2}\left(|u^0_\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} + \sum_{i=1}^m a^i_\varepsilon |u^0_\varepsilon|^2_{D^i_\varepsilon}\right)$$

Grâce à la deuxième hypothèse de (2.9), on obtient

$$|u^0_\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} + \sum_{i=1}^m a^i_\varepsilon |u^0_\varepsilon|^2_{D^i_\varepsilon} \leqslant |u^0_\varepsilon|^2_{\Omega} + \sum_{i=1}^m a^i_\varepsilon |D^i_\varepsilon| \fint_{D^i_\varepsilon} |u^0_\varepsilon|^2 dx \leqslant C$$

Traitons maintenant le second terme. En s'aidant de l'inégalité de Poincaré et celle de Young

$$\begin{aligned}
\int_0^t \langle f_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle ds &\leqslant \int_0^t |f_\varepsilon|_{H^{-1}(\Omega)} ds \int_0^t |\nabla u_\varepsilon|_{\Omega} ds \\
&\leqslant \int_0^t |f_\varepsilon|_{H^{-1}(\Omega)} |\nabla u_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon} ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t |f_\varepsilon|_{H^{-1}(\Omega)} |\nabla u_\varepsilon|_{D^i_\varepsilon} ds \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t |f_\varepsilon|^2_{H^{-1}(\Omega)} ds + \frac{1}{2}\int_0^t |\nabla u_\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} ds + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2b^i_\varepsilon}\int_0^t |f_\varepsilon|^2_{H^{-1}(\Omega)} ds + \sum_{i=1}^m \frac{b^i_\varepsilon}{2}\int_0^t |\nabla u_\varepsilon|^2_{D^i_\varepsilon} ds.
\end{aligned}$$

Revenons à la première équation et tenant compte de ces dernières estimations et des hypothèses (2.9), il vient

$$\frac{1}{2}\left(|u_\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} + \sum_{i=1}^m a^i_\varepsilon |u_\varepsilon|^2_{D^i_\varepsilon}\right) + \frac{1}{2}|\nabla u_\varepsilon|^2_{\Omega_\varepsilon} + \sum_{i=1}^m \frac{b^i_\varepsilon}{2} |\nabla u_\varepsilon|^2_{D^i_\varepsilon} \leqslant C$$

Ce qui nous permet de conclure le résultat.

□

3. Outils spécifiques de la méthode de la zone de contrôle

D'abord nous introduisons l'ensemble

$$\mathcal{R}^i = \left\{(r^i_\varepsilon),\ \delta^i_\varepsilon << r^i_\varepsilon << 1\right\},\ i = \overline{1,m},$$

donc $(r^i_\varepsilon) \in \mathcal{R}^i$ si et seulement si

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\delta^i_\varepsilon}{r^i_\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} r^i_\varepsilon = 0. \tag{2.18}$$

Il est clair que pour chaque $i = \overline{1,m}$ l'ensemble $\mathcal{R}^i$ est non vide.

On note le domaine confiné entre les sphères de rayon a et b par

$$C\,(a,b) := \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ a < |x| < b\right\}.$$

Pour toute $(r^i_\varepsilon) \in \mathcal{R}^i$, on définit

$$C_\varepsilon^{k,i} = \varepsilon\left(y_i + k + C\left(\delta_\varepsilon^i, r_\varepsilon^i\right)\right),$$
$$C_\varepsilon^i := \bigcup_{k\in Z_\varepsilon} C_\varepsilon^{k,i},$$

On définit la zone de contrôle par

$$C_\varepsilon = \bigcup_{i=\overline{1,m}} C_\varepsilon^i.$$

Nous notons dans tout ce qui suit

$$\gamma_\varepsilon^i = \frac{\delta_\varepsilon^i}{\varepsilon^2} \tag{2.19}$$

le coefficient de raréfaction des particules $D_\varepsilon^i, i \in \overline{1,m}$.

Définition 2.1. *Pour tout* $i = \overline{1,m}$, *et* $(r_\varepsilon^i) \in \mathcal{R}^i$, *on définit* $w_{r_\varepsilon^i} \in H_0^1(\Omega)$ *par*

$$w_{r_\varepsilon^i}(x) := \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \setminus C_\varepsilon^i, \\ W_{r_\varepsilon^i}\left(\dfrac{x}{\varepsilon} - y_i - k\right) & \text{dans } C_\varepsilon^{k,i}, \ \forall k \in Z_\varepsilon, \\ 1 & \text{dans } D_\varepsilon^i, \end{cases} \tag{2.20}$$

avec

$$W_{r_\varepsilon^i}(y) = \frac{\delta_\varepsilon^i}{(r_\varepsilon^i - \delta_\varepsilon^i)}\left(\frac{r_\varepsilon^i}{|y|} - 1\right) \quad \text{pour } y \in C\left(\delta_\varepsilon^i, r_\varepsilon^i\right). \tag{2.21}$$

$W_{r_\varepsilon^i} \in H^1\left(C\left(\delta_\varepsilon^i, r_\varepsilon^i\right)\right)$, *de plus* $W_{r_\varepsilon^i}$ *est la solution fondamentale du Laplacien suivant*

$$\begin{cases} \Delta W_{r_\varepsilon^i} = 0 & \text{dans } C\left(\delta_\varepsilon^i, r_\varepsilon^i\right), \\ W_{r_\varepsilon^i} = 1 & \text{pour } |y| = \delta_\varepsilon^i, \\ W_{r_\varepsilon^i} = 0 & \text{pour } |y| = r_\varepsilon^i. \end{cases}$$

Cette fonction radiale vérifie les propriétés données ci-dessous.

Proposition 2.2. *Pour tout* $i = \overline{1,m}$ *et pour* $(r_\varepsilon^i) \in \mathcal{R}^i$ *, on a*

$$0 \leqslant w_{r_\varepsilon^i} \leqslant 1, \tag{2.22}$$

$$|\nabla w_{r_\varepsilon^i}|_\Omega \leqslant C(\gamma_\varepsilon^i)^{1/2}, \tag{2.23}$$

$$w_{r_\varepsilon^i} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{2.24}$$

Démonstration. D'abord on montre (2.22), soit $y \in C(\delta_\varepsilon^i, r_\varepsilon^i)$

$$\delta_\varepsilon^i \leqslant |y| \leqslant r_\varepsilon^i,$$
$$0 \leqslant \frac{r_\varepsilon^i}{|y|} - 1 \leqslant \frac{r_\varepsilon^i}{\delta_\varepsilon^i} - 1$$
$$0 \leqslant \left(\frac{\delta_\varepsilon^i}{r_\varepsilon^i - \delta_\varepsilon^i}\right)\frac{r_\varepsilon^i}{|y|} - 1 \leqslant \left(\frac{\delta_\varepsilon^i}{r_\varepsilon^i - \delta_\varepsilon^i}\right)\left(\frac{r_\varepsilon^i - \delta_\varepsilon^i}{\delta_\varepsilon^i}\right).$$

Par conséquent

$$0 \leqslant W_\varepsilon^i \leqslant 1.$$

Montrons l'inégalité (2.23), en utilisant les coordonnées polaires

$$y_1 = rcos\varphi_1,\ y_2 = rsin\varphi_1 cos\varphi_2,\ y_3 = rsin\varphi_1 sin\varphi_2$$

$$|\nabla w_{r_\varepsilon^i}|_\Omega^2 = \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^{k,i}} |\nabla W_{r_\varepsilon^i}|^2 dx$$

Etant donnés que $W_{r_\varepsilon^i}$ est une fonction radiale ne dèpond que de r, alors

$$\frac{\partial W_{r_\varepsilon^i}}{\partial \varphi_1} = 0,\ \frac{\partial W_{r_\varepsilon^i}}{\partial \varphi_2} = 0,$$

donc,

$$\nabla W_{r_\varepsilon^i} = \left(\frac{\partial W_{r_\varepsilon^i}}{\partial r}, 0, 0\right),\ |\nabla W_{r_\varepsilon^i}| = |\frac{\partial W_{r_\varepsilon^i}}{\partial r}|.$$

Par ailleurs, $dy_1dy_2dy_3 = r^2 sin\varphi_1 d\varphi_1 d\varphi_2 dr$, et d'après l'expression (2.21)

$$\frac{\partial W_{r_\varepsilon^i}}{\partial r} = \frac{-\delta_\varepsilon^i r_\varepsilon^i}{r^2(r_\varepsilon^i - \delta_\varepsilon^i)}.$$

En utilisant ce changement, on aboutit à

$$\begin{aligned}
\int_{C(\varepsilon\delta_\varepsilon^i, \varepsilon r_\varepsilon^i)} |\nabla W_\varepsilon^i(y)|^2 dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\varepsilon\delta_\varepsilon^i}^{\varepsilon_\varepsilon^i} \left|-\frac{\varepsilon^2\delta_\varepsilon^i r_\varepsilon^i}{\varepsilon(r_\varepsilon^i - \delta_\varepsilon^i)}\frac{1}{r^2}\right|^2 r^2 sin\varphi_1 d\varphi_1 d\varphi_2 dr \\
&= \left(\frac{\varepsilon\delta_\varepsilon^i r_\varepsilon^i}{r_\varepsilon^i - \delta_\varepsilon^i}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{\pi} sin\varphi_1 d\varphi_1 \int_{\varepsilon\delta_\varepsilon^i}^{\varepsilon r_\varepsilon^i} \frac{1}{r^2} dr \\
&= 4\pi \left(\frac{\varepsilon\delta_\varepsilon^i r_\varepsilon^i}{r_\varepsilon^i - \delta_\varepsilon^i}\right)^2 \left(-\frac{1}{\varepsilon r_\varepsilon^i} + \frac{1}{\varepsilon\delta_\varepsilon^i}\right) \\
&= 4\pi \left(\frac{\varepsilon\delta_\varepsilon^i r_\varepsilon^i}{r_\varepsilon^i - \delta_\varepsilon^i}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon(r_\varepsilon^i - \delta_\varepsilon^i)}{\varepsilon^2\delta_\varepsilon^i r_\varepsilon^i}\right)
\end{aligned}$$

$$\int_{C(\varepsilon\delta_\varepsilon^i, \varepsilon r_\varepsilon^i)} |\nabla W_\varepsilon^i(y)|^2 dy = 4\pi \left(\frac{\varepsilon\delta_\varepsilon^i r_\varepsilon^i}{r_\varepsilon^i - \delta_\varepsilon^i}\right).$$

En tenant compte de $card(Z_\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon^3}$, on obtient directement

$$\begin{aligned}
|\nabla w_{r_\varepsilon^i}|_\Omega^2 &= \frac{1}{\varepsilon^3} 4\pi \left(\frac{\varepsilon\delta_\varepsilon^i r_\varepsilon^i}{r_\varepsilon^i - \delta_\varepsilon^i}\right) \\
&\leqslant 4\pi\gamma_\varepsilon^i \left(\frac{1}{1 - \dfrac{\delta_\varepsilon^i}{r_\varepsilon^i}}\right),
\end{aligned}$$

a l'aide de (2.18), on obtient l'inégalité (2.23).

Nous passons directement a l'inégalité (2.24), comme $0 < |w_{r_\varepsilon^i}| < 1$ on a

$$|w_{r_\varepsilon^i}|_\Omega^2 = |w_{r_\varepsilon^i}|_{C_\varepsilon^i \cup D_\varepsilon^i} \leqslant |C_\varepsilon^i \cup D_\varepsilon^i|, \tag{2.25}$$

D'autre part, on sait que

$$C_\varepsilon^i \cup D_\varepsilon^i = \cup_{k\in Z_\varepsilon} C_\varepsilon^{k,i} + \cup_{k\in Z_\varepsilon} (\varepsilon\delta_\varepsilon^i B_i + \varepsilon k),$$

et du fait que $r_\varepsilon^i \to 0$, on déduit

$$|w_{r_\varepsilon^i}|_\Omega^2 \leqslant |C_\varepsilon^i \cup D_\varepsilon^i| \leqslant C{r_\varepsilon^i}^3 \longrightarrow 0.$$

□

Les deux lemmes suivants jouent un rôle fondamental dans la méthode de la zone de contrôle, c'est une adaptation des lemmes A.3 et A.4 [9] respectivement.

Lemme 2.1. *Pour tout* $0 < r_1 < r_2$ *et* $u \in H^1(C(r_1, r_2))$

$$|\nabla u|_{C(r_1,r_2)} \geqslant \frac{4\pi r_1 r_2}{r_2 - r_1} \left| \fint_{S_{r_2}} u d\sigma - \fint_{S_{r_1}} u d\sigma \right|^2 \tag{2.26}$$

$$\textit{Où} \qquad \fint_{S_r} \cdot \, d\sigma = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \cdot \, d\sigma$$

Lemme 2.2. $\forall (\alpha, R) \in \mathbb{R} \times (0,1)$, $\exists C > 0$ *tel que* $\forall u \in H^1(B(0,R))$

$$\int_{B(0,R)} |u - \fint_{S_{\alpha R}} u d\sigma|^2 dx \leqslant C \frac{R^2}{\alpha} |\nabla u|_{B(0,R)}. \tag{2.27}$$

On définit les opérateurs localisants ci-dessous

Définition 2.2. *Pour tout* $r_i > 0, i = \overline{1,m}$, *on définit la fonction*

$$G_{r_i} : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

par

$$G_{r_i}(\theta)(x,t) = \sum_{k\in Z_\varepsilon} \left(\fint_{S_{r_i}^k} \theta(y,t)\, d\sigma_y \right) 1_{Y_\varepsilon^k}(x), \tag{2.28}$$

où

$$S_{r_i}^k = \partial B_{r_i}^k, B_{r_i}^k = \varepsilon r_i B_i + \varepsilon k.$$

G_{r_i} ainsi définit est une fonction constante par morceaux. On a alors le résultat suivant.

Lemme 2.3. *Si* $(r_\varepsilon^i) \in \mathcal{R}^i$, *pour tout* $\theta \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, *et pour* $i = \overline{1,m}$ *on a*

$$|\theta - G_{r_\varepsilon^i}(\theta)|_{L^2\left(\Omega_{Y_\varepsilon}^T\right)} \leqslant C \left(\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^i} \right)^{1/2} |\nabla\theta|_{L^2(\Omega^T)}, \tag{2.29}$$

$$|\theta - G_{\delta_\varepsilon^i}(\theta)|_{L^2\left({D_\varepsilon^i}^T\right)} \leqslant C \left(\varepsilon\delta_\varepsilon^i \right) |\nabla\theta|_{L^2\left({D_\varepsilon^i}^T\right)}, \tag{2.30}$$

$$|G_{r_\varepsilon^i}(\theta) - G_{\delta_\varepsilon^i}(\theta)|_{L^2(\Omega^T)} \leqslant C \left(\frac{\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^i} \right)^{1/2} |\nabla\theta|_{L^2\left({C_\varepsilon^i}^T\right)}, \tag{2.31}$$

où $G_{\delta_\varepsilon^i}(\theta)$ *et* $G_{r_\varepsilon^i}(\theta)$ *sont définis par* (2.28). *De plus,*

$$|G_{r_\varepsilon^i}(\theta)|_{L^2(\Omega^T)}^2 = \int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} |G_{r_\varepsilon^i}(\theta)|^2 dx dt, \tag{2.32}$$

(2.33) $$|G_{\delta_\varepsilon^i}(\theta)|^2_{L^2(\Omega^T)} = \int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} |G_{\delta_\varepsilon^i}(\theta)|^2 dxdt.$$

Démonstration. Montrons (2.29). Soit $\theta \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$|\theta - G_{r_\varepsilon^i}(\theta)|^2_{L^2(\Omega_{Y_\varepsilon})} = \sum_{k\in Z_\varepsilon} \fint_{Y_\varepsilon^k} |\theta - \fint_{S^k_{r_\varepsilon^i}} \theta d\sigma|^2 dx$$

On peut mettre $Y_\varepsilon^k \subset B\left(\varepsilon k, \varepsilon\sqrt{3}/2\right)$. Appliquons le Lemme 2.2 avec le choix $\alpha = \frac{2r_\varepsilon^i}{\sqrt{3}}, R = \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |\theta - G_{r_\varepsilon^i}|^2 dx &\leqslant \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2})} \left|\theta - \fint_{S^k_{r_\varepsilon^i}} \theta d\sigma\right|^2 \\
&\leqslant C(\frac{3\varepsilon^2}{4})(\frac{\sqrt{3}}{2r_\varepsilon^i}) \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2})} |\nabla\theta|^2 dx \\
&\leqslant C\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^i} \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2})} |\nabla\theta|^2 dx.
\end{aligned}$$

On peut déduire cette estimation

$$\sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2})} |\nabla\theta|^2 dx \leqslant 2\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx,$$

car $\left|\cup_{k\in Z_\varepsilon}\left(B(\varepsilon k, \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2}) \setminus Y_\varepsilon^k\right)\right| < 2|\Omega|$. Par conséquent

$$\int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |\theta - G_{r_\varepsilon^i}|^2 dx \leqslant C\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^i} \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx.$$

Passons maintenant au (2.30). Soit $\theta \in H_0^1(\Omega)$, on applique une deuxième fois le lemme 2.2 avec le choix $\alpha = 1, R = \varepsilon\delta_\varepsilon^i$ et on trouve

$$\begin{aligned}
|\theta - G_{\delta_\varepsilon^i}(\theta)|^2_{D_\varepsilon^i} &\lesssim (\varepsilon\delta_\varepsilon^i)^2 \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, \varepsilon\delta_\varepsilon^i)} |\nabla\theta|^2 dx \\
&\lesssim (\varepsilon\delta_\varepsilon^i)^2 \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{D_\varepsilon^i} |\nabla\theta|^2 dx.
\end{aligned}$$

Pour montrer (2.31). Notons que

$$\int_\Omega |G_{r_\varepsilon^i}(\theta) - G_{\delta_\varepsilon^i}(\theta)|^2 dx = \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{Y_\varepsilon^k} \left|\fint_{S^k_{r_\varepsilon^i}} \theta d\sigma - \fint_{S^k_{\delta_\varepsilon^i}} \theta d\sigma\right|^2 dy.$$

On applique le lemme 2.1 dans le second membre de cette dernière égalité avec $r_1 = \delta_\varepsilon^i, r_2 = r_\varepsilon^i$, et on note $\varepsilon k + C(\delta_\varepsilon^i, r_\varepsilon^i) = C'^{,k}_{\varepsilon,i}$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |G_{r^i_\varepsilon}(\theta) - G_{\delta^i_\varepsilon}(\theta)|^2 dx &\leqslant \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{Y^k_\varepsilon} \frac{r^i_\varepsilon - \delta^i_\varepsilon}{4\pi r^i_\varepsilon \delta^i_\varepsilon} dy \int_{C'^{,k}_{\varepsilon,i}} |\nabla\hat{\theta}|^2 dx' \\
&\leqslant \frac{r^i_\varepsilon - \delta^i_\varepsilon}{4\pi r^i_\varepsilon \delta^i_\varepsilon} \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{Y^k_\varepsilon} dy \int_{C^k_{\varepsilon,i}} |\nabla\theta|^2 \frac{1}{\varepsilon} dx \\
&\leqslant \left(\frac{r^i_\varepsilon - \delta^i_\varepsilon}{4\pi r^i_\varepsilon \delta^i_\varepsilon}\right)\left(\frac{\varepsilon^3}{\varepsilon}\right) \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{C^k_{\varepsilon,i}} |\nabla\theta|^2 dx \\
&\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\delta^i_\varepsilon} \int_{C^i_\varepsilon} |\nabla\theta|^2 dx
\end{aligned}$$

En tenant compte de

$$|Y^k_\varepsilon| = \varepsilon^3, \ \frac{r^i_\varepsilon - \delta^i_\varepsilon}{r^i_\varepsilon} < 1,$$
$$\hat{\theta}(x') = \theta(\frac{x}{\varepsilon} - y_i),$$

ce qui achève la démonstration. □

Nous donnons dans la définition suivante un autre opérateur.

DÉFINITION 2.3. *Soit $M_{D^i_\varepsilon} : L^2(0,T;C_c(\Omega)) \longrightarrow L^2(\Omega^T)$ définie par*

$$M_{D^i_\varepsilon}(\varphi)(x,t) = \sum_{k\in Z_\varepsilon} \left(⨍_{Y^k_\varepsilon} \varphi(y,t)dy \right) 1_{B^k_{r_i}}(x), \quad i = \overline{1,m}. \tag{2.34}$$

LEMME 2.4. *Pour tout $\varphi \in L^2(0,T;C_c(\Omega))$, et pour $i \in \{\overline{1,m}\}$, on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T ⨍_{D^i_\varepsilon} |\varphi - M_{D^i_\varepsilon}(\varphi)|^2 dxdt = 0. \tag{2.35}$$

De plus, pour tout $\psi \in L^2(0,T;\mathcal{D}(\Omega))$, on a

$$|G_{\delta^i_\varepsilon}(\psi) - \psi|_{L^2(0,T;L^\infty(C^i_\varepsilon \cup D^i_\varepsilon))} \leqslant 2\varepsilon r^i_\varepsilon |\nabla\psi|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \tag{2.36}$$

$$|G_{\delta^i_\varepsilon}(\psi) - \psi|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \longrightarrow 0 \tag{2.37}$$

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord (2.35), notons que

$$\begin{aligned}
\int_0^T ⨍_{D^i_\varepsilon} |\varphi - M_{D^i_\varepsilon}(\varphi)|^2 dxdt &= \frac{1}{|D^i_\varepsilon|} \int_0^T \int_{D^i_\varepsilon} |\varphi - M_{D^i_\varepsilon}(\varphi)|^2 dxdt \\
&= \frac{1}{|D^i_\varepsilon|} \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_0^T \int_{B^{k,i}_\varepsilon} |\varphi - ⨍_{Y^k_\varepsilon} \varphi(y,t)dy|^2 dxdt,
\end{aligned}$$

d'après le théorème de la moyenne, il existe $\xi^{i,k}_\varepsilon \in Y^k_\varepsilon$, tel que

$$⨍_{Y^k_\varepsilon} \varphi(y,t)dy = \varphi(\xi^{i,k}_\varepsilon).$$

Donc

$$\frac{1}{|D^i_\varepsilon|} \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_0^T \int_{B^{k,i}_\varepsilon} |\varphi(x) - ⨍_{Y^k_\varepsilon} \varphi(y,t)dy|^2 dxdt = \frac{1}{|D^i_\varepsilon|} \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_0^T \int_{B^{k,i}_\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(\xi^{i,k}_\varepsilon)|^2 dxdt$$

Comme φ est uniformément continue sur son support. Pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe alors $\varepsilon_0 > 0$, tel que

$$\text{pour tout } x, y \in \Omega,\ |x-y| < \varepsilon_0 \Longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon'.$$

Donc, pour ε tel que $\sqrt{3}\varepsilon < \varepsilon_0$ on a $|x - \xi_\varepsilon^{i,k}| < \sqrt{3}\varepsilon < \varepsilon_0$ pour tout $x \in Y_\varepsilon^k$, et donc $|\varphi(x) - \varphi(\xi_\varepsilon^{i,k})| < \varepsilon'$, d'où

$$\begin{aligned}\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} |\varphi - M_{D_\varepsilon^i}(\varphi)|^2 dxdt &= \frac{1}{|D_\varepsilon^i|}\int_0^T \int_{D_\varepsilon^i} |\varphi(x) - \varphi(\xi_\varepsilon^{i,k})|^2 dxdt \\ &\leqslant \varepsilon'^2 \frac{1}{|D_\varepsilon^i|}\sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_0^T \int_{B_\varepsilon^{i,k}} dx \\ &= \varepsilon'^2 \frac{|D_\varepsilon^i|}{|D_\varepsilon^i|} = \varepsilon'^2.\end{aligned}$$

On déduit alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} |\varphi - M_{D_\varepsilon^i}(\varphi)|^2 dxdt = 0.$$

Passons à (2.36), soit $\psi \in L^2(0,T;\mathcal{D}(\Omega))$

$$\begin{aligned}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi) - \psi\right)(x) &= G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi)(x) - \psi(x) \\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\left(\fint_{S^k_{r_\varepsilon^i}} \psi d\sigma\right) 1_{Y_\varepsilon^k}(x) - \psi(x)\end{aligned}$$

Pour tout $x \in B\left(\varepsilon y_i + \varepsilon k, \varepsilon r_\varepsilon^i\right), k \in Z_\varepsilon$

$$\begin{aligned}G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi)(x) &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\frac{1}{|S^k_{\delta_\varepsilon^i}|}\left(\int_{S^k_{\delta_\varepsilon^i}} \psi d\sigma\right) 1_{Y_\varepsilon^k}(x) \\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}|Y_\varepsilon^k|\left(\fint_{S^k_{\delta_\varepsilon^i}} \psi d\sigma\right)\end{aligned}$$

D'après le théorème de la moyenne, $\exists \xi_\varepsilon^{i,k} \in B\left(\varepsilon y_i + \varepsilon k, \varepsilon r_\varepsilon^i\right)$ tel que

$$\fint_{S^k_{\delta_\varepsilon^i}} \psi d\sigma = \psi(\xi_\varepsilon^{i,k})$$

donc, pour $x \in B\left(\varepsilon y_i + \varepsilon k, \varepsilon r_\varepsilon^i\right)$

$$G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi)(x) - \psi(x) = \psi(\xi_\varepsilon^{i,k}) - \psi(x)$$

D'où, on utilise le théorème des acroissements finis et on obtient

$$\begin{aligned}|G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi)(x) - \psi(x)|_{L^2(0,T;L^\infty(C_\varepsilon^i\cup D_\varepsilon^i))} &\leqslant |\xi_\varepsilon^{i,k} - x||\nabla\psi|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \\ &\leqslant 2\varepsilon r_\varepsilon^i |\nabla\psi|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}.\end{aligned}$$

Montrons (2.37), on a d'après le théorème de la moyenne, $\exists \xi_\varepsilon^{k,i} \in S^k_{\delta^i_\varepsilon}$, tel que

$$\fint_{S^k_{\delta^i_\varepsilon}} \psi d\sigma = \psi(\xi_\varepsilon^{k,i})$$

D'après le théorème des acroissements finis, pour tout $x \in Y^k_\varepsilon$ on a

$$\begin{aligned} |G_{\delta^i_\varepsilon}(\psi)(x) - \psi(x)|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} &\leqslant |\xi_\varepsilon^{k,i} - x||\nabla\psi|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \\ &\leqslant C\varepsilon|\nabla\psi|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \to 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.3. *Si* $(r^i_\varepsilon) \in \mathcal{R}^i$, *alors pour tout* $\theta \in L^2\left(0,T;H^1_0(\Omega)\right)$, *on a*

$$\int_0^T \fint_{D^i_\varepsilon} |\theta|^2 dxdt \leqslant C \max\left(1, \frac{\varepsilon^2}{\delta^i_\varepsilon}\right) |\nabla\theta|_{L^2(\Omega^T)}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{2.38}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int_0^T \fint_{D^i_\varepsilon} |\theta|^2 dxdt &\leqslant 2\int_0^T \fint_{D^i_\varepsilon} |\theta - G_{\delta^i_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt + 2\int_0^T \fint_{D^i_\varepsilon} |G_{\delta^i_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt \\ &= 2\int_0^T \fint_{D^i_\varepsilon} |\theta - G_{\delta^i_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt + 2\int_{\Omega^T} |G_{\delta^i_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt \\ &\leqslant C\left(\varepsilon\delta^i_\varepsilon\right)^2 \int_0^T \fint_{D^i_\varepsilon} |\nabla\theta|^2 dxdt + 4\int_{\Omega^T} |G_{\delta^i_\varepsilon}(\theta) - G_{r^i_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt \\ &+ 8\int_{\Omega^T} |G_{r^i_\varepsilon}(\theta) - \theta|^2 dxdt + 8\int_{\Omega^T} |\theta|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $i = \overline{1,m}$

$$|D^i_\varepsilon| = \sum_{k\in Z_\varepsilon} \left|B\left(\varepsilon(k+y_i), \varepsilon\delta^i_\varepsilon\right)\right| = \frac{4\pi}{3}(\varepsilon\delta^i_\varepsilon)^3 \frac{|\Omega|}{\varepsilon^3}$$

$$\frac{(\varepsilon\delta^i_\varepsilon)^2}{|D^i_\varepsilon|} = \frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon^2}{\delta^i_\varepsilon}. \tag{2.39}$$

D'après (2.29),(2.31),(2.39) et l'inégalité de Poincaré, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \fint_{D^i_\varepsilon} |\theta|^2 dxdt &\leqslant C\left(\varepsilon\delta^i_\varepsilon\right)^2 \int_0^T \fint_{D^i_\varepsilon} |\nabla\theta|^2 dxdt + C\left(\frac{\varepsilon^2}{\delta^i_\varepsilon}\right) \int_{C^i_\varepsilon{}^T} |\nabla\theta| dxdt \\ &+ C\left(\frac{\varepsilon^2}{r^i_\varepsilon}\right) \int_{\Omega^T} |\nabla\theta| dxdt + C\int_{\Omega^T} |\nabla\theta|^2 dxdt \leqslant \\ &\leqslant C\left(\frac{\varepsilon^2}{r^i_\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{\delta^i_\varepsilon} + 1\right)\int_{\Omega^T} |\nabla\theta|^2 dxdt \\ &\leqslant Cmax\left(1, \frac{\varepsilon^2}{\delta^i_\varepsilon}\right)\int_{\Omega^T} |\nabla\theta|^2 dxdt. \end{aligned}$$

□

4. Résultat d'homogénéisation

Dans cette section, on s'intéresse au comportement asymptotique (lorsque $\varepsilon \to 0$) de la solution u_ε du problème (2.8). Ce comportement dépend de γ_ε^i.

$$\left\{\begin{array}{l} \exists (r_\varepsilon^i) \in \mathcal{R}^i \text{ et } g_i \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \text{ pour que} \\ \left\langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\varphi \right\rangle \rightharpoonup \langle g_i, \varphi\rangle \quad \text{dans } \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \end{array}\right. \tag{2.40}$$

4.1. Enonce des résultats.

Remarque 2.1. *On remarque que pour $i \in (I_1 \cup I_3)$, la Proposition 2.3 devient :*

$$\forall \varphi \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \quad \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\varphi|^2 dxdt \leqslant C|\nabla \varphi|^2_{L^2(\Omega^T)}, \quad . \tag{2.41}$$

On commence par un résultat préliminaire

Proposition 2.4. *Sous les hypothèses* (2.9)-(2.11)*, il existe $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et $v_i \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ $i \in I_1$, tel que pour une sous suite*

$$u_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{2.42}$$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \tag{2.43}$$

$$G_{r_\varepsilon^i}(u_\varepsilon) \longrightarrow u \quad \text{dans } L^2\left(\Omega^T\right), \quad \text{pour} \quad i \in I_1 \cup I_3, \tag{2.44}$$

$$G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon) \rightharpoonup v_i \quad \text{dans } L^2\left(\Omega^T\right), \quad \text{pour} \quad i \in I_1, \tag{2.45}$$

$$G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon) \longrightarrow u \quad \text{dans } L^2\left(\Omega^T\right), \quad \text{pour} \quad i \in I_3, \tag{2.46}$$

De plus,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} |u_\varepsilon - G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)|^2 dxdt = 0, \quad \text{pour} \quad i \in I_1 \cup I_3. \tag{2.47}$$

Proposition 2.5. *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\frac{1}{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon \chi_{D_\varepsilon^i} \rightharpoonup v_i \quad \text{dans} \quad L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right) \quad \text{pour} \quad i \in I_1. \tag{2.48}$$

$$\frac{1}{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon \chi_{D_\varepsilon^i} \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right) \quad \text{pour} \quad i \in I_3. \tag{2.49}$$

On donne dans ce qui suit le théorème principale de ce chapitre.

THÉORÈME 2.2. *les limites* $(u,(v_i)_{i\in I_1})$ *dans la proposition 2.4 est l'unique solution du système*

(2.50)
$$\begin{cases} \left(1+\sum_{i\in I_3} a_i\right)\dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+4\pi\sum_{i\in I_1}\gamma^i\left(u-v_i\right)=f-\sum_{i\in I_1} g_i & \text{dans } \Omega^T, \\ a_i\dfrac{\partial v_i}{\partial t}+4\pi\gamma^i\left(v_i-u\right)=g_i & \text{dans } \Omega^T, \quad i\in I_1, \\ v_i\left(0\right)=v_i^0 & \text{dans } \Omega, \quad i\in I_1, \\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega^T \\ u\left(0\right)=\left(\dfrac{1}{1+\sum_{i\in I_3} a_i}u^0+\sum_{i\in I_3}\dfrac{a_i}{1+\sum_{i\in I_3} a_i}v_i^0\right) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

De plus

(2.51)
$$\frac{1}{D_\varepsilon^i}u_\varepsilon\chi_{D_\varepsilon^i}\rightharpoonup v_i^0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{pour } i\in I_2.$$

REMARQUE 2.2. *Les convergences de la proposition 2.4 sont vérifiées pour toute la suite, ceci est une conséquence immédiate de l'unicité de la solution du système* (2.50).

Pour la démonstration du théorème principal, on a besoin des résultats techniques suivants et dont la preuve est donnée dans la sous-section suivante.

PROPOSITION 2.6. Φ_ε *est un élement de* $H_0^1(\Omega)$, *de plus on a*

(2.52)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\Phi_\varepsilon-\varphi|_\Omega=0,$$

et pour tout $\zeta\in\mathcal{D}([0,T[)$ *et pour* (r_ε^i) *vérifiant l'hypothèse* (2.40), *on a*

(2.53)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\langle f_\varepsilon,\Phi_\varepsilon\rangle\,\zeta(t)dt=\int_0^T\left\langle f-\sum_{i\in I_1} g_i,\varphi\right\rangle\zeta dt+\sum_{i\in I_1}\int_0^T\langle g_i,\psi_i\rangle\,\zeta dt.$$

PROPOSITION 2.7. *Pour tout* $\zeta\in\mathcal{D}([0,T[)$, *et pour une sous suite vérifiant* (2.42)-(2.47), *on a*

(2.54)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega^T}\rho_\varepsilon u_\varepsilon\Phi_\varepsilon\zeta'(t)=\left(1+\sum_{i\in I_3} a_i\right)\int_{\Omega^T}u\varphi\zeta'(t)dxdt+\sum_{i\in I_1\cup I_2} a_i\int_{\Omega^T}v_i\psi_i\zeta'(t)dxdt$$

PROPOSITION 2.8. *Pour tout* $\zeta\in\mathcal{D}([0,T[)$, *et pour une sous suite vérifiant* (2.42)-(2.47), *on a*

(2.55)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega^T}\nu_\varepsilon\nabla u_\varepsilon\nabla\Phi_\varepsilon\zeta(t)=\int_{\Omega^T}\nabla u\nabla\varphi\zeta(t)dxdt+\sum_{i\in I_1}4\pi\gamma^i\int_{\Omega^T}(u-v_i)(\varphi-\psi_i)\zeta(t)dxdt$$

REMARQUE 2.3. *Les convergences de la proposition 2.4 sont vérifiées pour toute la suite, ceci est une conséquence immédiate de l'unicité de la solution du système.*

4.2. Preuves des résultas.

Preuve du théorème 2.2. On prend dans (2.12) $w = \Phi_\varepsilon$ où Φ_ε est donnée par la formule (**??**)et vérifiant l'hypothèse (2.40), puis on multiple cette dernière par $\zeta \in \mathcal{D}([0,T[)$ après une intégration sur $[0,T]$, on obtient

$$\begin{aligned} &-\int_{\Omega^T} \rho_\varepsilon u_\varepsilon \Phi_\varepsilon \zeta'(t)dxdt + \int_{\Omega^T} \nu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon \zeta(t)dxdt \\ &= \int_0^T \langle f_\varepsilon, \Phi_\varepsilon \rangle \zeta(t)dt + + \int_\Omega \rho_\varepsilon u_\varepsilon^0 \Phi_\varepsilon \zeta(0)dx. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Passons à la limite dans (2.56) et appliquons directement les propositions 2.6, 2.7 et 2.8 et les hypothèses (2.9), on obtient

$$\begin{aligned} &-\left(1+\sum_{i\in I_3} a_i\right)\int_{\Omega^T} u\varphi\zeta' dxdt - \sum_{i\in I_1\cup I_2} a_i \int_{\Omega^T} v_i\psi_i\zeta' dxdt + \int_{\Omega^T} \nabla u\nabla\varphi\zeta dxdt \\ &+\sum_{i\in I_1} 4\pi\gamma^i \int_{\Omega^T} (u-v_i)(\varphi-\psi_i)\zeta dxdt = \int_0^T \left\langle f - \sum_{i\in I_1} g_i, \varphi \right\rangle \zeta dt + \sum_{i\in I_1}\int_0^T \langle g_i, \psi_i\rangle \zeta dt \\ &+\zeta(0)\left(\int_\Omega (u_0 + \sum_{i\in I_3} a_i v_i^0)\varphi dx + \int_\Omega \sum_{i\in I_1\cup I_2} a_i v_i^0 \psi_i dx\right). \end{aligned} \tag{2.57}$$

Par ailleurs, si on prend $\psi_i = 0, i \in I_1 \cup I_2$ dans (2.57) et par application de la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} &\left(1+\sum_{i\in I_3} a_i\right)\int_0^T \langle \frac{du}{dt}, \varphi\rangle\zeta(t)dt + \left(1+\sum_{i\in I_3} a_i\right)\int_\Omega u(0)\varphi\zeta(0)dx + \int_{\Omega^T}\nabla u\nabla\varphi\zeta(t)dxdt \\ &+\sum_{i\in I_1} 4\pi\gamma^i \int_{\Omega^T}(u-v_i)\varphi\zeta(t)dxdt = \int_0^T \langle f - \sum_{i\in I_1} g_i, \varphi\rangle\zeta(t)dt + \zeta(0)\int_\Omega \left(u_0 + \sum_{i\in I_3} a_i v_i^0\right)\varphi dx. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Par suite, en prenant $\zeta \in \mathcal{D}(]0,T[)$ dans (2.58) nous obtenos $(2.50)^1$.

Pour obtenir $(2.50)^2$ il suffit de prendre dans (2.57)$\varphi = 0$ et $\psi_i = 0, i \in I_2$ et par application de la formule de Green, on trouve

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in I_1} a_i \int_0^T \langle \frac{dv_i}{dt}, \psi_i\rangle\zeta(t)dt + \sum_{i\in I_1} a_i \int_\Omega v_i(0)\psi_i\zeta(0)dx + \sum_{i\in I_1} 4\pi\gamma^i \int_{\Omega^T}(u-v_i)\psi_i\zeta(t)dxdt \\ &= \sum_{i\in I_1}\int_0^T \langle g_i, \psi_i\rangle \zeta(t)dt + \zeta(0)\sum_{i\in I_1}\int_\Omega a_i v_i^0\psi_i dx, \end{aligned} \tag{2.59}$$

puis, on prend $\zeta \in \mathcal{D}(]0,T[)$. Donc, pour chaque $i \in I_1$ on a

$$a_i \int_0^T \langle \frac{dv_i}{dt}, \psi_i\rangle\zeta(t)dt + 4\pi\gamma^i \int_{\Omega^T}(u-v_i)\psi_i\zeta(t)dxdt = \int_0^T \langle g_i, \psi_i\rangle \zeta(t)dt. \tag{2.60}$$

Pour la condition initiale $(2.50)^3$, on prend $\zeta \in \mathcal{D}([0,T[)$ dans (2.60) et on applique la formule de Green, puis en sommant sur I_1, on obtient

$$\sum_{i\in I_1}\left(a_i\int_0^T\langle\frac{dv_i}{dt},\psi_i\rangle\zeta(t)dt+4\pi\gamma^i\int_{\Omega^T}(u-v_i)\psi_i\zeta(t)dxdt\right)$$

$$=\sum_{i\in I_1}\int_0^T\langle g_i\psi_i\rangle\,\zeta dt+\sum_{i\in I_1}a_i\int_\Omega v_i(0)\psi_i\zeta(0)dx \tag{2.61}$$

En comparant (2.59) et (2.61), on obtient directement $(2.50)^3$.

Maintenant pour obtenir les conditions $(2.50)^4$, on multiplie $(2.50)^1$ par $\varphi\zeta, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \zeta \in \mathcal{D}([0,T[)$ et par application de la formule de Green encore une fois, nous obtenons

$$-\left(1+\sum_{i\in I_3}a_i\right)\int_{\Omega^T}u\varphi\zeta' dxdt+\int_{\Omega^T}\nabla u\nabla\varphi\zeta dxdt+\sum_{i\in I_1}4\pi\gamma^i\int_{\Omega^T}(u-v_i)\varphi\zeta dxdt$$

$$=\int_0^T\langle f-\sum_{i\in I_1}g_i,\varphi\rangle\zeta dt+\zeta(0)\left(1+\sum_{i\in I_3}a_i\right)\int_\Omega u(0)\varphi dx. \tag{2.62}$$

En comparant (2.58) (2.62) on obtient les conditions $(2.50)^4$.

Pour finir cette démonstration, on prend $\varphi = 0, \psi_i = 0, i \in I_1$ dans (2.57), on aura

$$-\sum_{i\in I_2}a_i\int_{\Omega^T}v_i\psi_i\zeta' dxdt=\zeta(0)\int_\Omega\sum_{i\in I_2}a_iv_i^0\psi_i dx$$

qui donne pour chaque $i \in I_2$ et pour $\zeta \in \mathcal{D}(]0,T[)$

$$\sum_{i\in I_2}a_i\left\langle\frac{dv_i}{dt},\zeta\psi_i\right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega^T)\times\mathcal{D}(\Omega^T)}=0 \tag{2.63}$$

$$\frac{dv_i}{dt}=0 \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega^T) \quad \text{pour tout } i\in I_2$$

cela veut dire que pour tout $i \in I_2, v_i$ est indépendant de t. Autrement dit $v_i \in C^0\left(0,T,L^2(\Omega)\right), et$

$$v_i(x,t)=v_i^0(x), \quad \forall i\in I_2.$$

□

Preuve de la proposition 2.4. Selon (2.15) il existe une sous-suite vérifiant les convergences (2.42) et (2.43).

Montrons (2.44). Soit $(r_\varepsilon^i) \in \mathcal{R}^i$, et pour une sous suite (u_ε) vérifiant (2.42)-(2.43), on a

$$|u-G_{r_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)|^2_{\Omega^T_{Y_\varepsilon}}\leqslant 2|u-u_\varepsilon|^2_{\Omega^T}+2|u_\varepsilon-G_{r_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)|^2_{\Omega^T_{Y_\varepsilon}}.$$

Dans ce cas il est évident que $|u - u_\varepsilon|_{\Omega^T} \to 0$, par ailleurs en sachant que $\lim_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\delta_\varepsilon^i}{r_\varepsilon^i} = 0$, d'après le lemme 2.3 et pour $i \in I_1 \cup I_3$, on a

$$\begin{aligned}
|u_\varepsilon - G_{r^i_\varepsilon}(u_\varepsilon)|^2_{\Omega^T_{Y_\varepsilon}} &\leqslant C\left(\frac{\varepsilon^2}{r^i_\varepsilon}\right)|\nabla u_\varepsilon|^2_{\Omega^T} \\
&\leqslant C\left(\frac{\varepsilon^2}{\delta^i_\varepsilon}\right)\left(\frac{\delta^i_\varepsilon}{r^i_\varepsilon}\right) \\
&\leqslant C\frac{\delta^i_\varepsilon}{r^i_\varepsilon} \to 0.
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de (2.44).

Pour établir (2.45), on utilise (2.44) et le lemme 2.3. Pour une sous suite de (u_ε) vérifiant (2.42)-(2.44) et pour $(r^i_\varepsilon) \in \mathcal{R}^i, i \in I_1$, on a

$$\begin{aligned}
|G_{\delta^i_\varepsilon}(u_\varepsilon)|_{L^2(\Omega^T)} &\leqslant |G_{\delta^i_\varepsilon}(u_\varepsilon) - G_{r^i_\varepsilon}(u_\varepsilon)|_{L^2(\Omega^T)} + |G_{r^i_\varepsilon}(u_\varepsilon)|_{L^2(\Omega^T)} \\
&\leqslant \frac{c}{(\gamma^i_\varepsilon)^{1/2}}|\nabla u_\varepsilon|_{L^2(\Omega^T)} + C \leqslant C.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Alors il existe une sous suite de (u_ε) vérifiant (2.42)-(2.44) et $v_i \in L^2\left(\Omega^T\right)$ vérifiant (2.45).

Passons maintenant à (2.46), pour $i \in I_3$ c'est a dire $\gamma^i_\varepsilon \to +\infty$, et pour une sous suite (u_ε) vérifiant (2.42)-(2.45) on a

$$|u - G_{\delta^i_\varepsilon}(u_\varepsilon)|_{\Omega^T_{Y_\varepsilon}} \leqslant |u - u_\varepsilon|_{\Omega^T} + |u_\varepsilon - G_{r^i_\varepsilon}(u_\varepsilon)|_{\Omega^T_{Y_\varepsilon}} + |G_{r^i_\varepsilon}(u_\varepsilon) - G_{\delta^i_\varepsilon}(u_\varepsilon)|_{\Omega^T}$$

Par application du lemme 2.3, il vient

$$\begin{aligned}
|u - G_{\delta^i_\varepsilon}(u_\varepsilon)|_{\Omega^T_{Y_\varepsilon}} &\leqslant |u - u_\varepsilon|_{\Omega^T} + C|\nabla u_\varepsilon|_{\Omega^T}\left(\left(\frac{\varepsilon^2}{r^i_\varepsilon}\right)^{1/2} + \left(\frac{\varepsilon^2}{\delta^i_\varepsilon}\right)^{1/2}\right) \\
&\leqslant |u - u_\varepsilon|_{\Omega^T} + C\left(\frac{\varepsilon}{{\delta^i_\varepsilon}^{1/2}}\right)\left(\frac{\delta^i_\varepsilon}{r^i_\varepsilon}\right)^{1/2} + C\left(\frac{1}{{\gamma^i_\varepsilon}^{1/2}}\right) \to 0.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on conclut (2.46) en remarquant que

$$|u - G_{\delta^i_\varepsilon}(u_\varepsilon)|^2_\Omega = |u - G_{\delta^i_\varepsilon}(u_\varepsilon)|^2_{\Omega_{Y_\varepsilon}} + |u - G_{\delta^i_\varepsilon}(u_\varepsilon)|^2_{\Omega\setminus\Omega_{Y_\varepsilon}}$$

et $|u - G_{\delta^i_\varepsilon}(u_\varepsilon)|_{\Omega\setminus\Omega_{Y_\varepsilon}}$ tend vers zéro d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Pour terminer, on montre (2.47), pour $i \in I_1 \cup I_3$, utilisons encore une fois le lemme 2.3 et (2.17), on obtient directement pour une sous suite (u_ε) vérifiant (2.42)-(2.46)

$$\begin{aligned}
\int_0^T \fint_{D^i_\varepsilon} |u_\varepsilon - G_{\delta^i_\varepsilon}(u_\varepsilon)|^2 dxdt &\leqslant C(\varepsilon\delta^i_\varepsilon)^2 \int_0^T \fint_{D^i_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dxdt \\
&\leqslant \frac{C}{\gamma^i_\varepsilon b^i_\varepsilon} \to 0.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

□

Preuve de la proposition 2.5. On donne la démonstration de (2.48) qui est similaire à celle de (2.49), la preuve sera donnée en deux étapes.

Première étape

Montrons que pour tout $\varphi \in L^2(0,T;C_c(\Omega))$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon \varphi dxdt = \int_{\Omega^T} v_i\varphi dxdt \quad \text{pour } i \in I_1. \tag{2.66}$$

Soit $\varphi \in L^2(0,T;C_c(\Omega)), \forall i \in I_1$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon\varphi dxdt &= \int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i}\left(u_\varepsilon - G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)\right)\varphi dxdt + \int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)\left(\varphi - M_{D_\varepsilon^i}(\varphi)\right)dxdt \\ &+ \int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)M_{D_\varepsilon^i}(\varphi)dxdt.\end{aligned} \tag{2.67}$$

Le premier terme du second membre de (2.67) tend vers zéro, car d'après l'inégalité de Hôlder on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i}\left(u_\varepsilon - G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)\right)\varphi dxdt\right| &\leqslant \left(\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i}\left|u_\varepsilon - G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)\right|^2 dxdt\right)^{1/2}\left(\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i}|\varphi|^2 dxdt\right)^{1/2} \\ &\leqslant |\varphi|_{L^\infty(\Omega)}\left(\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i}\left|u_\varepsilon - G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)\right|^2 dxdt\right)^{1/2},\end{aligned}$$

avec

$$\left(\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i}\left|u_\varepsilon - G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)\right|^2 dxdt\right)^{1/2} \to 0$$

de (2.47).

Passons au deuxième terme du second membre de (2.67) qui tend aussi vers zéro. En effet, on applique l'inégalité de Hôlder

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)\left(\varphi - M_{D_\varepsilon^i}(\varphi)\right)dxdt\right| &\leqslant \left(\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i}|\varphi - M_{D_\varepsilon^i}(\varphi)|^2 dxdt\right)^{1/2}\left(\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i}|G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)|^2 dxdt\right. \\ &\leqslant |G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)|_{L^2(\Omega^T)}\left(\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i}|\varphi - M_{D_\varepsilon^i}(\varphi)|^2 dxdt\right)^{1/2},\end{aligned} \tag{2.68}$$

comme, d'après (2.45), $G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)$ est bornée et $|\varphi - M_{D_\varepsilon^i}(\varphi)| \to 0$ grâce à (2.35), nous obtenons la convergence vers zéro.

Il nous reste a estimer le terme $\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)M_{D_\varepsilon^i}(\varphi)dxdt$ qui s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)M_{D_\varepsilon^i}(\varphi)dxdt &= \frac{1}{|D_\varepsilon^i|}\sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_0^T\int_{B_\varepsilon^{k,i}}\left(\fint_{S_\varepsilon^{k,i}} u_\varepsilon d\sigma\right)\left(\fint_{Y_\varepsilon^k}\varphi dy\right)dx \\ &= \mu_\varepsilon \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_0^T\int_{Y_\varepsilon^k} G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)\varphi dxdt,\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mu_\varepsilon \simeq \frac{|B(0,\varepsilon\delta_\varepsilon^i)}{\varepsilon^3|D_\varepsilon^i|} &= \frac{|B(0,\varepsilon\delta_\varepsilon^i)|}{\varepsilon^3 card(Z_\varepsilon)|B(0,\varepsilon\delta_\varepsilon^i)|} \\ &= \frac{|B(0,\varepsilon\delta_\varepsilon^i)|}{\varepsilon^3\dfrac{1}{\varepsilon^3}|B(0,\varepsilon\delta_\varepsilon^i)|} \to 1, \text{ car } \quad card(Z_\varepsilon) = \frac{|\Omega|}{\varepsilon^3} = \frac{1}{\varepsilon^3}.\end{aligned}$$

On déduit pour ε suffisamment petit qu'on a

$$\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon) M_{D_\varepsilon^i}(\varphi) dxdt \simeq \int_0^T \int_\Omega G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)\varphi dxdt,$$

donc d'après (2.45),

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon) M_{D_\varepsilon^i}(\varphi) dxdt = \int_0^T \int_\Omega v_i \varphi dxdt. \tag{2.69}$$

<u>**Deuxième étape**</u>

Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ il existe une suite (φ_n) de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que :

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \quad \text{dans } H_0^1(\Omega).$$

On a

$$\begin{aligned} \left|\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon \varphi dxdt - \int_0^T \int_\Omega v_i \varphi dxdt\right| &\leqslant \left|\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon (\varphi - \varphi_n) dxdt\right| + \\ + \left|\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon \varphi_n dxdt - \int_0^T \int_\Omega v_i \varphi_n dxdt\right| &+ \left|\int_0^T \int_\Omega v_i (\varphi_n - \varphi) dxdt\right|. \end{aligned} \tag{2.70}$$

On montre que les trois termes du membre droite de l'inégalité (2.70) tendent vers zéro. En effet, d'après linégalité de Hôlder

$$\left|\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon (\varphi - \varphi_n) dxdt\right| \leqslant \left(\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} |u_\varepsilon|^2 dxdt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} |\varphi - \varphi_n|^2 dx.dt\right)^{1/2}$$

Par ailleurs, par application de la proposition 2.3, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} |\varphi - \varphi_n|^2 dxdt &\leqslant C max(1, \frac{1}{\gamma_\varepsilon^i}) |\nabla(\varphi - \varphi_n)|_{\Omega^T} \\ &\leqslant C|\nabla\varphi - \nabla\varphi_n|_{(\Omega^T)}. \end{aligned}$$

Donc, de (2.16) on déduit pour tout $i \in I_1$

$$\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon (\varphi - \varphi_n) dxdt \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

De la même façon pour le dernier terme de (2.70),

$$\begin{aligned} \left|\int_0^T \int_\Omega v_i (\varphi_n - \varphi) dxdt\right| &\leqslant \left(\int_0^T \int_\Omega |v_i|^2 dxdt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_\Omega |\varphi_n - \varphi|^2 dxdt\right)^{1/2} \\ &\leqslant |v_i|_{\Omega^T} C(\Omega) |\nabla(\varphi - \varphi_n)|_{\Omega^T} \to 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la première étape on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon \varphi_n dxdt = \int_0^T \int_\Omega v_i \varphi_n dxdt,$$

par conséquent

$$\left|\int_0^T \fint_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon \varphi_n dxdt - \int_0^T \int_\Omega v_i \varphi_n dxdt\right| \longrightarrow 0$$

□

Avant de montrer la proposition 2.6, on a besoin du lemme technique suivant et dont la démonstration est dans l'annexe B.

LEMME 2.5. *Pour tout* $i \in \{\overline{1,m}\}$, $(r_\varepsilon^i) \in \mathcal{R}^i$, *et* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$w_{r_\varepsilon^i} G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi) \in H_0^1(\Omega). \tag{2.71}$$

De plus,

$$w_{r_\varepsilon^i}\big(G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi) - \varphi\big) \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega). \tag{2.72}$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.6. En sachant que $w_{r_\varepsilon^i} \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a alors $(1 - w_{r_\varepsilon^i})\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

D'autre part, $w_{r_\varepsilon^i}$ ne vie que dans $\cup_{k\in Z_\varepsilon} B\left(\varepsilon k + \varepsilon y_i, \varepsilon r_\varepsilon^i\right)$ et $G_{\delta_\varepsilon^i}$ constante dans chaque $Y_\varepsilon^k, k \in Z_\varepsilon$, donc $w_{r_\varepsilon^i} G_{\delta_\varepsilon^i} \in H_0^1(\Omega)$.
Par conséquent

$$\Phi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega).$$

D'autre part, on a

$$|\Phi_\varepsilon - \varphi|_\Omega^2 = \left|\left(1 - \sum_{i=1}^m w_{r_\varepsilon^i}\right)\varphi + \sum_{i\in I_1\cup I_2} w_{r_\varepsilon^i} G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i) + \sum_{i\in I_3} w_{r_\varepsilon^i} G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi) - \varphi\right|_{C_\varepsilon}^2 + \left|\sum_{i\in I_1\cup I_2} G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i) + \sum_{i\in I_3} G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi) - \varphi\right|_{D_\varepsilon}^2.$$

D'après (2.24), on a

$$(1 - w_{r_\varepsilon^i})\varphi \longrightarrow \varphi \text{ dans } L^2(\Omega).$$

D'autre part $G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i) \to \psi_i$ uniformement, de plus $|C_\varepsilon| \to 0$ et $|D_\varepsilon| \to 0$, ceci entraine directement la convergence (2.52).

Montrons maintenant (2.53),on a

$$\int_0^T \langle f_\varepsilon, \Phi_\varepsilon\rangle \zeta(t)dt = \int_0^T \langle f_\varepsilon, \varphi\rangle\zeta dt - \sum_{i\in I_1}\int_0^T \langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\varphi\rangle\zeta dt - \sum_{i\in I_2}\int_0^T \langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\varphi\rangle\zeta dt$$
$$- \sum_{i\in I_3}\int_0^T \langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\varphi\rangle\zeta dt + \sum_{i\in I_1}\int_0^T \langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i} G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)\rangle\zeta dt + \sum_{i\in I_2}\int_0^T \langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i} G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)\rangle\zeta dt$$
$$+ \sum_{i\in I_3}\int_0^T \langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i} G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)\rangle\zeta dt.$$

Rappelons que la première hypothèse de (2.9) nous affirme que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \langle f_\varepsilon, \varphi\rangle \zeta dt = \int_0^T \langle f, \varphi\rangle \zeta dt,$$

et compte tenu de l'hypothèse(2.40), on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \left\langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\varphi\right\rangle \zeta dt = \int_0^T \langle g_i, \varphi\rangle \zeta dt, \quad \forall i \in I_1.$$

D'autre part,

$$\sum_{i\in I_1}\int_0^T \left\langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i} G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)\right\rangle \zeta dt = \sum_{i\in I_1}\int_0^T \left\langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i) - \psi_i\right)\right\rangle \zeta dt + \sum_{i\in I_1}\int_0^T \left\langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\psi_i\right\rangle \zeta dt.$$

De plus

$$\left|\int_0^T \left\langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)-\psi_i\right)\right\rangle \zeta dt\right| \leqslant \int_0^T |f_\varepsilon|_{H^{-1}(\Omega)} |w_{r_\varepsilon^i}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)-\psi_i\right)|_{H_0^1(\Omega)}\zeta dt,$$

comme la première hypothèse de (2.9) assure que $|f_\varepsilon|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C$ et d'après (2.72), on a pour tout $i \in I_1$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \left\langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)-\psi_i\right)\right\rangle \zeta dt = 0,$$

et d'après (2.40)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \left\langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\psi_i\right\rangle \zeta dt = \int_0^T \langle g_i, \psi_i\rangle \zeta dt.$$

Par ailleurs, on a $\forall i \in I_2$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\varphi\rangle\zeta dt\right| &\leqslant \int_0^T |f_\varepsilon|_{H^{-1}} \left|w_{r_\varepsilon^i}\varphi\right|_{H_0^1}\zeta dt \\ &\leqslant C\int_0^T \left(|\varphi|_{L^\infty}|\nabla w_{r_\varepsilon^i}|_{L^2} + |\nabla\varphi|_{L^\infty}|w_{r_\varepsilon^i}|_{L^2(\Omega)}\right)\zeta dt \to 0,\end{aligned} \tag{2.73}$$

comme conséquence de la proposition 2.2 et du fait que $|f_\varepsilon|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C$.

De même, on a

$$\sum_{i\in I_2}\int_0^T \left\langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)\right\rangle \zeta dt = \sum_{i\in I_2}\int_0^T \left\langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)-\psi_i\right)\right\rangle \zeta dt + \sum_{i\in I_2}\int_0^T \left\langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\psi_i\right\rangle \zeta dt, \tag{2.74}$$

alors pour tout $i \in I_2$, on a

$$\left|\int_0^T \left\langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)-\psi_i\right)\right\rangle \zeta dt\right| \leqslant \int_0^T |f_\varepsilon|_{H^{-1}(\Omega)} |w_{r_\varepsilon^i}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)-\psi_i\right)|_{H_0^1(\Omega)}\zeta dt,$$

et

$$\left|\int_0^T \left\langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\psi_i\right\rangle \zeta dt\right| \leqslant \int_0^T |f_\varepsilon|_{H^{-1}} \left|w_{r_\varepsilon^i}\psi_i\right|_{H_0^1}\zeta dt,$$

toujours à l'aide du lemme 2.5, $|f_\varepsilon|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C$

$$\left\langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)\right\rangle \longrightarrow 0, \qquad \forall i \in I_2.$$

Le reste se traite d'une façon similaire que précdédement, c'est à dire

$$\sum_{i\in I_3}\int_0^T \langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)\rangle - \sum_{i\in I_3}\int_0^T \langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\varphi\rangle\zeta dt = \sum_{i\in I_3}\int_0^T \left\langle f_\varepsilon, w_{r_\varepsilon^i}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)-\varphi\right)\right\rangle \zeta dt \longrightarrow 0.$$

□

Preuve de la proposition 2.7. Pour établir (2.54), d'abord on écrit

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^T}\rho_\varepsilon u_\varepsilon \Phi_\varepsilon \zeta'(t) = \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon\Phi_\varepsilon\zeta'(t)dxdt &+ \sum_{i\in I_1\cup I_2} a_\varepsilon^i \int_0^T\int_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)\zeta'(t)dxdt \\ &+ \sum_{i\in I_3} a_\varepsilon^i \int_0^T\int_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)\zeta'(t)dxdt\end{aligned}$$

En utilisant (2.43) et (2.52), on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_\Omega \chi_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \Phi_\varepsilon(x)\zeta'(t)dxdt = \int_{\Omega^T} u\varphi\zeta'(t)dxdt.$$

On traite les autres termes comme suit, pour $i \in I_1$

$$a_\varepsilon^i \int_0^T \int_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)\zeta' dxdt = a_\varepsilon^i |D_\varepsilon^i| \int_0^T ⨍_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon \left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i) - \psi_i\right)\zeta' dxdt$$
$$+ a_\varepsilon^i |D_\varepsilon^i| \int_0^T ⨍_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon \psi_i \zeta' dxdt,$$

grâce à (2.10), (2.37) et (2.48) on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a_\varepsilon^i \int_0^T \int_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)\zeta' dxdt = a_i \int_{\Omega^T} v_i\psi_i\zeta' dxdt.$$

Passon au terme pour $i \in I_2$. De la même manière, on a

$$a_\varepsilon^i \int_0^T \int_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)\zeta' dxdt = a_\varepsilon^i |D_\varepsilon^i| \int_0^T ⨍_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon \left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i) - \psi_i\right)\zeta' dxdt$$
$$+ a_\varepsilon^i |D_\varepsilon^i| \int_0^T ⨍_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon \psi_i \zeta' dxdt,$$

le premier terme du membre droit tend vers zéro grâce à (2.10), (2.37). D'autre part, de l'estimation

$$|\frac{1}{D_\varepsilon^i}| \int_{D_\varepsilon^i} |u_\varepsilon|^2 \leqslant C.$$

Il existe une sous suite tel que (voir Lemma A-2, **[3]**)

$$\frac{1}{|D_\varepsilon^i|} u_\varepsilon \chi_{D_\varepsilon^i} \rightharpoonup v_i \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{p.p } t \in [0,T]. \tag{2.75}$$

On voit

$$\begin{aligned} a_\varepsilon^i |D_\varepsilon^i| \int_0^T ⨍_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon \psi_i \zeta' dxdt &= a_\varepsilon^i |D_\varepsilon^i| \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} u_\varepsilon \chi_{D_\varepsilon^i} \psi_i \zeta' dxdt \\ &= a_\varepsilon^i |D_\varepsilon^i| \int_0^T \left(\int_\Omega \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} u_\varepsilon \chi_{D_\varepsilon^i} \psi_i dx\right)\zeta' dt \\ &= a_\varepsilon^i |D_\varepsilon^i| \int_0^T \left\langle \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} u_\varepsilon \chi_{D_\varepsilon^i}, \psi_i \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} \zeta' dt. \end{aligned}$$

De la convergence (2.75), on a

$$\left\langle \frac{1}{|D_\varepsilon^i|} u_\varepsilon \chi_{D_\varepsilon^i}, \psi_i \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} \longrightarrow \langle v_i, \psi_i \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}$$

donc, en tenant compte de (2.10)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a_\varepsilon^i |D_\varepsilon^i| \int_0^T ⨍_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon \psi_i \zeta' dxdt = a_i \int_{\Omega^T} v_i \psi_i \zeta' dxdt. \tag{2.76}$$

On finit avec le terme pour $i \in I_3$, on a

$$a_\varepsilon^i \int_0^T \int_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)\zeta' dxdt = a_\varepsilon^i |D_\varepsilon^i| \int_0^T ⨍_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon \left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i) - \psi_i\right)\zeta' dxdt$$
$$+ a_\varepsilon^i |D_\varepsilon^i| \int_0^T ⨍_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon \psi_i \zeta' dxdt,$$

grâce à (2.10), (2.37) et (2.49) on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a_\varepsilon^i \int_0^T \int_{D_\varepsilon^i} u_\varepsilon G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)\zeta' dxdt = a_i \int_{\Omega^T} u\varphi\zeta' dxdt, i \in I_3.$$

□

Preuve de la proposition 2.8. On a

$$\int_{\Omega^T} \nu_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon \zeta(t) dxdt = \int_{\Omega_\varepsilon^T\setminus C_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla\varphi\zeta(t)dxdt + \int_{C_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon \zeta(t) dxdt,$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue,

$$\nabla\varphi 1_{\chi_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon}} \to \nabla\varphi \text{ in } L^2(\Omega),$$

et en tenant compte de (2.43), on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon\setminus C_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla\varphi\zeta dxdt = \int_0^T \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi\zeta dxdt.$$

On s'intéresse maintenant à la partie restante

$$\begin{aligned}\int_{C_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla\Phi_\varepsilon\zeta(t)dxdt =& \int_{C_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \left(1-\sum_{i=1}^m w_{r_\varepsilon^i}\right)\nabla\varphi\zeta dxdt + \sum_{i\in I_1}\int_{C_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon^i}(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)-\varphi)\zeta dxdt \\ &+ \sum_{i\in I_2}\int_{C_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon^i}(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)-\varphi)\zeta dxdt + \sum_{i\in I_3}\int_{C_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon^i}(G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)-\varphi)\zeta dxdt \\ =& k_\varepsilon^1 + k_\varepsilon^2 + k_\varepsilon^3 + k_\varepsilon^4.\end{aligned}$$

Comme $\chi_{C_\varepsilon}\nabla\varphi$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega^T)$, (∇u_ε) est bornée dans $L^2(\Omega^T)$, et $(1-\sum_{i=1}^m w_{r_\varepsilon^i})$ est aussi bornée dans $L^\infty(\Omega)$, on vérifie facilement que k_ε^1 tends vers zéro.

Pour traiter k_ε^2, on a pour tout $i \in I_1$

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{C_\varepsilon^i} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon^i}(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)-\varphi)\zeta dxdt =& \int_0^T \int_{C_\varepsilon^i} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon^i}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)-G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)\right)\zeta dxdt \\ &+ \int_0^T \int_{C_\varepsilon^i} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon^i}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)-\varphi\right)\zeta dxdt,\end{aligned}$$

le deuxième terme du membre droite tends vers zero grâce à la convergence uniforme de $G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)$ vers φ et l'estimation suivante

(2.77)
$$\left|\int_0^T \int_{C_\varepsilon^i} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon^i}(G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)-\varphi)\zeta dxdt\right| \leqslant |\zeta|_{L^\infty(0,T)} |\nabla u_\varepsilon|_{\Omega^T} \left|\nabla w_{r_\varepsilon^i}\right|_{\Omega^T} \left|G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)-\varphi\right|_{L^\infty(C_\varepsilon^i)}.$$

Pour le reste, un calcul direct donne

$$\int_0^T \int_{C_\varepsilon^i} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon^i}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i)-G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)\right)\zeta dxdt = \int_0^T \sum_{k\in Z_\varepsilon}\left(\fint_{S_{\delta_\varepsilon^i}^k}\psi_i - \fint_{S_{\delta_\varepsilon^i}^k}\varphi\right)\int_{C_\varepsilon^{k,i}} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon^i}\zeta dxdt.$$

On introduit

(2.78) $$\tilde{u}_\varepsilon^k(\bar{y}) = u_\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \bar{y} = \frac{x}{\varepsilon} - k - y_i,$$

donc,

$$\int_{C(\delta_\varepsilon^i, r_\varepsilon^i)} \nabla \tilde{u}_\varepsilon^k \nabla W r_\varepsilon^i d\bar{y} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \int_{\delta_\varepsilon^i}^{r_\varepsilon^i} \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon^k}{\partial r}(\bar{y}) \frac{dW_{r_\varepsilon^i}}{dr} r^2 dr d\theta d\psi,$$

avec cette notation, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{C_\varepsilon^i} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon^i} (G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i) - G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)) \zeta(t) dx dt = \\
&= \varepsilon \sum_{k \in Z_\varepsilon} \left(\fint_{S^k_{\delta_\varepsilon^i}} \psi_i - \fint_{S^k_{\delta_\varepsilon^i}} \varphi \right) \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{\delta_\varepsilon^i}^{r_\varepsilon^i} \left(\int_0^T \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon^k}{\partial r}(\bar{y}) \zeta(t) dt \right) \frac{dW_{r_\varepsilon^i}}{dr} r^2 dr \\
&= \frac{4\pi\varepsilon \delta_\varepsilon^i r_\varepsilon^i}{(r_\varepsilon^i - \delta_\varepsilon^i)} \sum_{k \in Z_\varepsilon} \left(\fint_{S^k_{\delta_\varepsilon^i}} \psi_i - \fint_{S^k_{\delta_\varepsilon^i}} \varphi \right) \int_{S_1} \int_0^T \left(\tilde{u}_\varepsilon^k \rfloor_{|\bar{y}| = \delta_\varepsilon^i} - \tilde{u}_\varepsilon^k \rfloor_{|\bar{y}| = r_\varepsilon^i} \right) \zeta(t) dt d\sigma_1 \\
&= \frac{4\pi\varepsilon \delta_\varepsilon^i r_\varepsilon^i}{\varepsilon^3 (r_\varepsilon^i - \delta_\varepsilon^i)} \int_{\Omega^T} \left(G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon) - G_{r_\varepsilon^i}(u_\varepsilon) \right) \left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i) - G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi) \right) \zeta(t) dx dt \\
&= 4\pi \gamma_\varepsilon^i \frac{r_\varepsilon^i}{(r_\varepsilon^i - \delta_\varepsilon^i)} \int_{\Omega^T} \left(G_{\delta_\varepsilon^i}(u_\varepsilon) - G_{r_\varepsilon^i}(u_\varepsilon) \right) \left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i) - G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi) \right) \zeta(t) dx dt \\
&\longrightarrow 4\pi \gamma^i \int_{\Omega^T} (v_i - u)(\psi_i - \varphi) \zeta(t) dx dt.
\end{aligned}$$

Passons au terme k_ε^3, on voit que

$$\begin{aligned}
K_\varepsilon^3 &= \sum_{i \in I_2} \int_{C_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon^i} \left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i) - \psi_i \right) \zeta dx dt + \sum_{i \in I_2} \int_{C_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon^i} (\psi_i - \varphi) \zeta dx dt \\
&:= \sum_{i \in I_2} \left(h_\varepsilon^{i,1} + h_\varepsilon^{i,2} \right),
\end{aligned}$$

Le premier terme dans le membre droite peut s'estimé par

$$|h_\varepsilon^{i,1}| \leqslant |\nabla u_\varepsilon \zeta|_{\Omega^T} |\nabla w_{r_\varepsilon^i}|_{\Omega^T} |G_{\delta_\varepsilon^i}(\psi_i) - \psi_i|_{L^\infty(C_\varepsilon)} \to 0, \tag{2.79}$$

De la même manière pour $h_\varepsilon^{i,2} \to 0$ puisque $|\nabla w_{r_\varepsilon^i}|_{L^2(\Omega)} \to 0$ et $|\nabla u_\varepsilon|_{\Omega^T}$ est bornée .

On termine la démonstration par l'estimation de k_ε^4, on a pour tout $i \in I_3$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_\varepsilon{}^T} \nabla u_\varepsilon (\nabla w_{r_\varepsilon^i}) \left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi) - \varphi \right) \zeta dx dt \right| &\leqslant C |\nabla u_\varepsilon|_{\Omega^T} |\nabla w_{r_\varepsilon^i}|_{\Omega^T} |\zeta|_{L^\infty(0,T)} |G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi) - \varphi|_{L^\infty(C_\varepsilon{}^T)} \\
&\leqslant C \left(\gamma_\varepsilon^i \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon r_\varepsilon^i = C \left(\frac{\delta_\varepsilon^i}{\varepsilon^2}\right)^{1/2} \left(\varepsilon r_\varepsilon^i \right) \to 0,
\end{aligned}$$

ce qui achéve le raisonnement. □

CHAPITRE 3

Équation hyperbolique-parabolique dégénérée dans un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$

Résumé

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'homogénéisation et correcteur pour une équation hyperbolique-parabolique dégénérée posée dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$. L'équation dégénère au sens que le coefficient de conductivité dans une partie ouverte A strictement contenue dans Ω est égale à 1, alors qu'à l'extérieur de A il est de l'ordre de ε^2.

Nous montrons que sous l'effet de données initiales oscillantes, il apparaît une perturbation qui ne vérifie pas le principe d'équipartition de l'énergie.

1. Position du problème et notations

Soient $T > 0$, Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N, N \geq 3$, A une partie ouverte régulière de Ω. On suppose A strictement contenue dans Ω, i.e. $\Omega \setminus \bar{A} \subset\subset \Omega$, où $\bar{A}$ désigne la fermeture de A. Considérons le problème hyperbolique-parabolique suivant :

$$
(3.1) \qquad \begin{cases} \rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} + \rho_\varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - div\,(\rho_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = 0 & \text{dans} \quad \Omega^T, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0,T[\,, \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0(x) & \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,0) = u_\varepsilon^1(x) & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}
$$

avec

$$
(3.2) \qquad \rho_\varepsilon(x) = \chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega \setminus A}.
$$

On suppose que les données initiales u_ε^0 et u_ε^1 vérifient

$$
(3.3) \qquad \begin{cases} u_\varepsilon^0 \in H^1(\Omega)\,, \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A}\right) |\nabla u_\varepsilon^0|^2 dx \leq C, \ \forall \varepsilon, \\ \exists u^0 \in H^1(\Omega)\,, \quad u_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega)\,. \end{cases}
$$

$$
(3.4) \qquad \begin{cases} u_\varepsilon^1 \in L^2(\Omega)\,, \\ \exists u^1 \in L^2(\Omega)\,, \quad u_\varepsilon^1 \rightharpoonup u^1 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega)\,. \end{cases}
$$

Le problème (3.1) a une solution faible dans le sens suivant :

THÉORÈME 3.1 ([**21**]). *Sous les hypothèses et les notations ci-dessus, il existe une unique solution u_ε vérifiant*

(3.5)
$$\begin{cases} u_\varepsilon \in L^\infty\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right), \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} \in L^2\left(0,T;H^{-1}\left(\Omega\right)\right), \\ \langle \rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}, \varphi\rangle + (\rho_\varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \varphi)_\Omega + (\rho_\varepsilon \nabla u_\varepsilon, \nabla\varphi)_\Omega = 0, \ \textit{dans } \mathcal{D}'(0,T), \ \forall \varphi \in H_0^1\left(\Omega\right), \\ u_\varepsilon(x.0) = u_\varepsilon^0(x) \quad \textit{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,0) = u_\varepsilon^1(x) \quad \textit{dans } \Omega. \end{cases}$$

Un exemple de suite vérifiant (3.3)

Supposons que Ω soit un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et A une partie ouverte régulière strictement contenue dans Ω. Il suffit de prendre u_ε^0 de la forme (voir [**25**])

$$u_\varepsilon^0(x) = \phi(x)\psi(\frac{x}{\varepsilon}), \tag{3.6}$$

avec $\phi(x)$ régulière à support compact dans $\Omega\backslash\overline{A}$, $\psi(y)$ régulière et $Y-$périodique où Y est le cube unité de $\mathbb{R}^N$.

L'hypothèse (3.3) est vérifiée par la suite définie par (3.6). En effet, d'abord $u_\varepsilon^0 \in H^1\left(\Omega\right)$ pour tout ε, car

$$\nabla u_\varepsilon^0(x) = \nabla\phi(x)\psi(\frac{x}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon}\phi(x)\nabla\psi(\frac{x}{\varepsilon}) \in L^2\left(\Omega\right).$$

L'estimation dans (3.3) est aussi vérifiée car

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\chi_A + \varepsilon^2\chi_{\Omega\backslash A}\right)|\nabla u_\varepsilon^0|^2 dx &= \int_\Omega \varepsilon^2 \chi_{\Omega\backslash A}|\nabla u_\varepsilon^0|^2 dx \\ &= \int_{\Omega\backslash A} \left|\varepsilon\nabla\phi(x)\psi(\frac{x}{\varepsilon}) + \phi(x)\nabla\psi(\frac{x}{\varepsilon})\right|^2 dx \\ &\leqslant C. \end{aligned}$$

La suite u_ε^0 converge faiblement dans $L^2\left(\Omega\right)$ vers $u_0(x) = \phi(x)\fint_Y \psi(y)dy$, élément de $H^1\left(\Omega\right)$. Donc la condition (3.3) est vérifiée.

2. Problème limite

Pour obtenir le problème limite, on utilise les estimations a priori suivantes.

LEMME 3.1. *La suite u_ε de solutions de* (3.1) *vérifie les estimations a priori suivantes :*

$$\|\sqrt{\rho_\varepsilon}u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant c, \tag{3.7}$$

$$\|\nabla u_\varepsilon \chi_A\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant c, \tag{3.8}$$

$$\|\varepsilon\nabla u_\varepsilon \chi_{\Omega\backslash A}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant c, \tag{3.9}$$

$$\|\sqrt{\rho_\varepsilon}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant c. \tag{3.10}$$

Notre résultat concernant le problème limite est le suivant :

Théorème 3.2. *Il existe $v \in L^\infty(0,T;H^1(A))$ tel que la suite u_ε de solutions de* (3.1) *vérifie :*

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}u_\varepsilon \longrightarrow v\chi_A \quad \textit{fortement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.11}$$

$$\nabla u_\varepsilon \chi_A \rightharpoonup \nabla v \chi_A \quad \textit{* faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.12}$$

$$\varepsilon \nabla u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A} \rightharpoonup 0 \quad \textit{* faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.13}$$

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial v}{\partial t}\chi_A \quad \textit{* faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.14}$$

De plus, v est l'unique solution du problème limite suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \dfrac{\partial v}{\partial t} - \triangle v = 0 & \textit{dans} \quad A \times]0,T[\,, \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 & \textit{sur} \quad \partial A \times]0,T[\,, \\ v(x,0) = u^0(x) & \textit{dans} \quad A, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = u^1(x) & \textit{dans} \quad A. \end{cases} \tag{3.15}$$

3. Correcteur

On introduit $\check{u}_\varepsilon$ comme étant la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 \check{u}_\varepsilon}{\partial t^2} + \rho_\varepsilon \dfrac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t} - div\,(\rho_\varepsilon \nabla \check{u}_\varepsilon) = 0 & \text{dans} \quad \Omega^T, \\ \check{u}_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0,T[\,, \\ \check{u}_\varepsilon(x,0) = u^0\chi_A & \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,0) = u^1\chi_A & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.16}$$

et on définit

$$\hat{u}_\varepsilon := u_\varepsilon - \check{u}_\varepsilon. \tag{3.17}$$

On montre alors les résultats suivants :

Théorème 3.3. *La suite $\check{u}_\varepsilon$ de solutions de* (3.16) *vérifie les convergences suivantes :*

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}\check{u}_\varepsilon \longrightarrow v\chi_A \quad \textit{fortement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.18}$$

$$\nabla \check{u}_\varepsilon \chi_A \longrightarrow \nabla v \chi_A \quad \textit{fortement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.19}$$

$$\varepsilon \nabla \check{u}_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A} \longrightarrow 0 \quad \textit{fortement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.20}$$

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial t}\chi_A \quad \textit{fortement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.21}$$

Théorème 3.4. *La suite $\hat{u}_\varepsilon$ définie par* (3.17) *vérifie les convergences suivantes :*

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}\hat{u}_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \textit{fortement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.22}$$

$$\nabla \hat{u}_\varepsilon \chi_A \rightharpoonup 0 \quad \textit{faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.23}$$

$$\varepsilon \nabla \hat{u}_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A} \rightharpoonup 0 \quad \textit{faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.24}$$

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0 \quad \textit{faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.25}$$

Ces convergences sont fortes si et seulement si

$$\begin{cases} \int_\Omega \left(\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A}\right) |\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0|^2 dx \longrightarrow 0, \\ \int_A |u_\varepsilon^1 - u^1|^2 dx \longrightarrow 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Si la condition (3.26) *n'est pas vérifiée, alors il existe un réel H strictement positif tel que, pour une sous-suite toujours notée ε, on a*

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx \rightharpoonup He^{-t} \quad * \textit{ faiblement dans } L^\infty(0,T), \tag{3.27}$$

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla \hat{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx \rightharpoonup He^{-t} \quad * \textit{ faiblement dans } L^\infty(0,T), \tag{3.28}$$

$$\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds \rightharpoonup H(1-e^{-t}) \quad * \textit{ faiblement dans } L^\infty(0,T). \tag{3.29}$$

Remarque 3.1. *Le terme $\hat{u}_\varepsilon$ agit comme une perturbation dûe aux oscillations des données initiales u_ε^0 et u_ε^1. Si la condition* (3.26) *n'est pas satisfaite, les convergences* (3.27)-(3.29) *signifient que cette perturbation ne vérifie pas le principe d'équipartition de l'énergie.*

Avant de passer, nous aurons besoin de rappeler le résultat suivant

Résultat de compacité Soient X et Y deux espaces de Banach réflexifs tel que $X \subset Y$ avec injection continue, compacte et dense.

Proposition 3.1 ([**18**]). *On suppose que*

$$g_\varepsilon \rightharpoonup g \quad \textit{dans } L^1(0,T;X),$$

$$\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial g}{\partial t} \quad \textit{dans } L^1(0,T;Y),$$

alors

$$g_\varepsilon \longrightarrow g \quad \textit{fortement dans } C^0([0,T];Y).$$

4. Preuves des résultats

Preuve du Lemme 3.1. On multiplie la première équation du système (3.1) par $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$ que l'on intègre sur $\Omega \times (0,t)$, $t \in (0,T)$. On obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dxds + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A}\right) |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \\ &\qquad = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon^1|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A}\right) |\nabla u_\varepsilon^0|^2 dx. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Comme les données u_ε^0 et u_ε^1 appartiennent aux classes (3.3) et (3.4), on déduit de (3.30) les estimations (3.8), (3.9) et (3.10).

Pour démontrer l'estimation (3.7), on multiplie (3.1) par u_ε puis on intègre sur $\Omega \times (0,s)$, $s \in (0,T)$. On aura après intégration par parties du terme hyperbolique,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \rho_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} u_\varepsilon(x,s) dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon(x,s)|^2 dx + \int_0^s \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dxd\sigma = \\ &\qquad = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon^0(x)|^2 dx + \int_\Omega \rho_\varepsilon u_\varepsilon^0 u_\varepsilon^1(x) dx + \int_0^s \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,\sigma)\Big|^2 dxd\sigma. \end{aligned} \tag{3.31}$$

En réintégrant (3.31) sur $(0,t)$, pour un t de l'intervalle (s,T), il vient

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon(x,t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon(x,s)|^2 dxds + \int_0^t \int_0^s \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dxd\sigma ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon^0(x)|^2 dx + t\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon^0(x)|^2 dx$$

(3.32)

$$+\, t\int_\Omega \rho_\varepsilon u_\varepsilon^0 u_\varepsilon^1(x) dx + t^2 \|\sqrt{\rho_\varepsilon}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Comme la suite de données initiales u_ε^0 est bornée dans $L^2(\Omega)$ et que la suite produit $u_\varepsilon^0 u_\varepsilon^1$ est bornée dans $L^1(\Omega)$, alors l'estimation (3.10) avec l'inégalité (3.32) impliquent

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon(x,t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon(x,s)|^2 dxds + \int_0^t \int_0^s \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dxd\sigma ds \leqslant C,$$

d'où, l'estimation (3.7). □

Preuve du Théorème 3.2. Les estimations (3.7) et (3.8) impliquent que la suite

$$u_\varepsilon \quad \text{est bornée dans } L^\infty(0,T;H^1(A)), \tag{3.33}$$

il existe alors un élément $v \in L^\infty(0,T;H^1(A))$ et une sous-suite ε tels que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup v \quad * \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T;H^1(A)), \tag{3.34}$$

d'où la convergence (3.12).

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &= \|\varepsilon\nabla u_\varepsilon \chi_A + \varepsilon\nabla u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\\
&\leqslant \|\varepsilon\nabla u_\varepsilon \chi_A\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\varepsilon\nabla u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\\
&\leqslant \|\nabla u_\varepsilon \chi_A\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\varepsilon\nabla u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))},
\end{aligned}$$

les estimations (3.8) et (3.9) nous donne

$$\|\varepsilon\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C. \tag{3.35}$$

Donc en outre, la suite $\varepsilon u_\varepsilon$ étant bornée dans $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, il existe alors un certain w de $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ tel que

$$\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup w \quad * \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.36}$$

Dans la suite on montre que w est la solution du problème suivant

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0 & \text{dans} \quad \Omega \setminus \bar{A} \times]0,T[\,,\\
w = 0 & \text{sur} \quad \partial(\Omega \setminus \bar{A}) \times]0,T[\,,\\
w(.,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \setminus \bar{A},\\
\dfrac{\partial w}{\partial t}(.,0) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \setminus \bar{A}.
\end{cases} \tag{3.37}$$

En divisant la première équation du (3.1) par ε on obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon}\rho_\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon}\rho_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - div((\frac{1}{\varepsilon}\chi_A + \varepsilon\chi_{\Omega\setminus A})\nabla u_\varepsilon) = 0. \tag{3.38}$$

En multipliant (3.38) par $\varphi\psi \in H_0^1(\Omega \setminus \bar{A}) \times \mathcal{D}(0,T)$, où φ est prolongée par zéro dans A, et en intégrant l'équation obtenue sur $\Omega \times (0,T)$, on aura

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big\langle \varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} \chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle \psi dt + \int_0^T \Big\langle \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle \psi dt + \\ + \int_0^T \int_\Omega \varepsilon \chi_{\Omega\setminus A} \nabla u_\varepsilon \nabla \varphi \psi dx dt = 0.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Dans (3.39), on passe à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, de (3.36) on déduit

$$\begin{aligned}\Big\langle \varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} \chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big\langle \varepsilon u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle \longrightarrow \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big\langle w \chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle, \text{ dans } \mathcal{D}'(0,T),\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}\Big\langle \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \Big\langle \varepsilon u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle \longrightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} \Big\langle w \chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial w}{\partial t} \chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle, \text{ dans } \mathcal{D}'(0,T),\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\int_0^T \int_\Omega \varepsilon \nabla u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A} \nabla \varphi \psi dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \nabla w \chi_{\Omega\setminus A} \nabla \varphi \psi dx dt.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big\langle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle \psi dt + \int_0^T \Big\langle \frac{\partial w}{\partial t} \chi_{\Omega\setminus A}, \varphi \Big\rangle \psi dt \\ + \int_0^T \int_\Omega \nabla w \chi_{\Omega\setminus A} \nabla \varphi \psi dx dt = 0,\end{aligned}$$

et donc w vérifie l'équation limite suivante

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0 \quad \text{dans } (\Omega \setminus \bar{A}) \times]0,T[\,. \tag{3.42}$$

Reste à identifier les données initiales de la limite w. A l'aide des estimations (3.9), (3.10) on a

- $\varepsilon u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega \setminus \bar{A}))$,
- $\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \chi_{\Omega\setminus A}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega \setminus \bar{A}))$,
- $\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} \chi_{\Omega\setminus A}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega \setminus \bar{A}))$,

et en s'aidant de la convergence (3.36), il vient

$$\begin{aligned}&\varepsilon u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A} \rightharpoonup w \chi_{\Omega\setminus A} \quad * \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega \setminus \bar{A})), \\ &\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \chi_{\Omega\setminus A} \rightharpoonup \frac{\partial w}{\partial t} \chi_{\Omega\setminus A} \quad * \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega \setminus \bar{A})), \\ &\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} \chi_{\Omega\setminus A} \rightharpoonup \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \chi_{\Omega\setminus A} \quad * \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega \setminus \bar{A})).\end{aligned} \tag{3.43}$$

Grâce aux injections compactes $H_0^1(\Omega \setminus \bar{A}) \hookrightarrow L^2(\Omega \setminus \bar{A}) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega \setminus \bar{A})$ et la Proposition 3.1, on conclut que

$$\begin{aligned} &\varepsilon u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A} \to w\chi_{\Omega\setminus A} \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]; L^2(\Omega \setminus \bar{A})), \\ &\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_{\Omega\setminus A} \to \frac{\partial w}{\partial t}\chi_{\Omega\setminus A} \quad \text{fortement dans } C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega \setminus \bar{A})). \end{aligned} \tag{3.44}$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} u_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \\ u_\varepsilon^1 \rightharpoonup u^1 & \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.45}$$

alors

$$\begin{cases} \varepsilon u_\varepsilon^0 \rightharpoonup 0 & \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \\ \varepsilon u_\varepsilon^1 \rightharpoonup 0 & \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.46}$$

grâce (3.44) et en vertu de

$$\begin{aligned} &\varepsilon u_\varepsilon(.,0)\chi_{\Omega\setminus A} \to w(.,0)\chi_{\Omega\setminus A} \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega), \\ &\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(.,0)\chi_{\Omega\setminus A} \to \frac{\partial w}{\partial t}(.,0)\chi_{\Omega\setminus A} \quad \text{fortement dans } H^{-1}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.47}$$

De (3.46) et (3.47), en déduit que

$$\begin{cases} w(.,0)\chi_{\Omega\setminus A} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(.,0)\chi_{\Omega\setminus A} = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.48}$$

Ainsi w est solution du problème (3.37).
Remarquons aussi que, d'après (3.36), on a

$$\varepsilon u_\varepsilon \chi_A \rightharpoonup w\chi_A \quad * \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \tag{3.49}$$

De la convergence (3.34), on déduit que

$$\varepsilon u_\varepsilon \chi_A \rightharpoonup 0 \quad * \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \tag{3.50}$$

Il suit alors de (3.49), (3.50), que

$$w \equiv 0 \quad \text{dans } A \times (0,T). \tag{3.51}$$

En conclusion, comme w est la solution du problème (3.37) et vérifie (3.51), on déduit que

$$w \equiv 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T). \tag{3.52}$$

La convergence (3.13) est donc une conséquence de (3.36) et (3.52).
Les estimations (3.8), (3.10), nous donnent

- $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_A$ est bornée dans $L^\infty(0,T; L^2(A))$,
- $\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\chi_A$ est bornée dans $L^\infty(0,T; H^{-1}(A))$,

et en s'aidant de la convergence (3.34), on a

$$\begin{aligned} &u_\varepsilon \chi_A \rightharpoonup v\chi_A \quad * \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T;H^1(A)),\\ &\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_A \rightharpoonup \frac{\partial v}{\partial t}\chi_A \quad * \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T;L^2(A)),\\ &\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\chi_A \rightharpoonup \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\chi_A \quad * \text{ faiblement dans } L^\infty(0,T;H^{-1}(A)). \end{aligned} \tag{3.53}$$

Grâce aux injections compactes $H^1(A) \subset L^2(A) \subset H^{-1}(A)$ et la Proposition 3.1, on conclut que

$$\begin{aligned} &u_\varepsilon \chi_A \rightarrow v\chi_A \quad \text{fortement dans } C^0([0,T];L^2(A)),\\ &\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_A \rightarrow \frac{\partial v}{\partial t}\chi_A \quad \text{fortement dans } C^0([0,T];H^{-1}(A)). \end{aligned} \tag{3.54}$$

En s'aident des convergences $(3.44)^1$, $(3.54)^1$ et en vertu de

$$\sqrt{\rho_\varepsilon} u_\varepsilon = u_\varepsilon \chi_A + \varepsilon u_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A} \longrightarrow v\chi_A \quad \text{fortement dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.55}$$

on obtient (3.11).

La convergence (3.14) est une conséquence de l'estimation (3.10) et de la convergence (3.11).

Maintenant, on identifie les données initiales de la limite v, on sait que

$$\begin{cases} u_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega),\\ u_\varepsilon^1 \rightharpoonup u^1 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.56}$$

alors

$$\begin{cases} u_\varepsilon^0 \chi_A \rightharpoonup u^0\chi_A \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega),\\ u_\varepsilon^1 \chi_A \rightharpoonup u^1\chi_A \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.57}$$

mais grâce au (3.54), en vertu

$$\begin{cases} u_\varepsilon(.,0)\chi_A \rightarrow v(.,0)\chi_A \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega),\\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(.,0)\chi_A \rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial t}(.,0)\chi_A \quad \text{fortement dans } H^{-1}(\Omega), \end{cases} \tag{3.58}$$

on conclut que

$$\begin{cases} v(.,0)\chi_A = u^0\chi_A \quad \text{dans } \Omega,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(.,0)\chi_A = u^1\chi_A \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.59}$$

Pour obtenir l'équation limite (3.15), on multiplie (3.1) par une fonction test de la forme $\varphi\psi \in H_0^1(A) \times \mathcal{D}(0,T)$, avec φ prolongée par zéro à l'extérieure de A, il vient

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Big\langle \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\chi_A, \varphi \Big\rangle \psi dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_A \varphi\psi dxdt +\\ &\qquad + \int_0^T \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \chi_A \nabla\varphi\psi dxdt = 0, \end{aligned} \tag{3.60}$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le crochet de dualité $(H^{-1}(A), H_0^1(A))$.

En passant à la limite par rapport à ε et en tenant compte des convergences (3.53), il vient

$$\int_0^T \Big\langle \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\chi_A, \varphi\Big\rangle \psi dt \quad \longrightarrow \quad \int_0^T \Big\langle \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\chi_A, \varphi\Big\rangle \psi dt,$$

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\chi_A \varphi\psi dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\chi_A \varphi\psi dxdt,$$

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \chi_A \nabla\varphi\psi dxdt \quad \longrightarrow \quad \int_0^T \int_\Omega \nabla v \chi_A \nabla\varphi\psi dxdt.$$

Et donc v vérifie l'équation limite suivante :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 \ \text{ dans } A \times (0,T). \tag{3.61}$$

Remarquons que l'équation (3.61) peut être obtenue en prenant seulement une fonction test de la forme $\varphi\psi \in H_0^1(\Omega) \times \mathcal{D}(0,T)$, telle que φ définie comme suit

$$\begin{cases} \varphi \in C^1(\bar{A}), \\ \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus A, \\ \varphi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.62}$$

On obtient

$$\int_0^T \Big\langle \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\chi_A, \varphi\Big\rangle \psi dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\chi_A \varphi\psi dxdt + \int_0^T \int_\Omega \nabla v \chi_A \nabla\varphi\psi dxdt = 0.$$

En appliquant la formule de Green, il vient

$$\int_0^T \Big\langle \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v, \varphi\Big\rangle \psi dt + \int_0^T \ll \frac{\partial v}{\partial n}, \varphi \gg \psi dt = 0,$$

où

$\langle .,. \rangle$ désigne le crochet de dualité $\Big((H^1(A))', H^1(A)\Big)$,

$\ll .,. \gg$ le crochet de dualité $\Big(\big(H^{-1/2}(\partial A)\big)', H^{1/2}(\partial A)\Big)$.

Et grâce à (3.61), on conclut que

$$\int_0^T \ll \frac{\partial v}{\partial n}, \varphi \gg \psi dt = 0,$$

par conséquent $\dfrac{\partial v}{\partial n} = 0$ sur $\partial A \times (0,T)$. □

Preuve du Théorème 3.3. Notons d'abord que les convergences (3.11)-(3.14) sont toutes vérifiées par la suite $\check{u}_\varepsilon$ de solutions de (3.16).

La convergence (3.18) n'est autre que (3.11) appliquée à la suite $\check{u}_\varepsilon$.

On montre dans la suite les convergences (3.19)-(3.21). La conservation de l'énergie associée a $\check{u}_\varepsilon$ s'écrit :

(3.63)

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx + 2\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds + \int_\Omega (\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A})|\nabla \check{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx$$
$$= \int_A |u^1(x)|^2 dx + \int_A |\nabla u^0(x)|^2 dx.$$

Retournons à l'équation limite (3.15), multiplions cette dernière par $2\dfrac{\partial v}{\partial t}$ puis intégrons sur $A \times (0,t)$, $t \in (0,T)$, on obtient

$$\int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx + 2\int_0^t \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds + \int_A |\nabla v(x,t)|^2 dx = \int_A |u^1(x)|^2 dx + \int_A |\nabla u^0(x)|^2 dx. \tag{3.64}$$

De (3.63), (3.64), en déduit

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx + 2\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds + \int_\Omega (\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A})|\nabla \check{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx = \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx + 2\int_0^t \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds + \int_A |\nabla v(x,t)|^2 dx. \tag{3.65}$$

On passe à la limite supérieure dans les membres de (3.65), on aura

$$\begin{aligned}
&\limsup_\varepsilon \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx + \limsup_\varepsilon 2\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds + \\
&\qquad \limsup_\varepsilon \int_\Omega (\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A})|\nabla \check{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx \\
&\quad = \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx + 2\int_0^t \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds \\
&\qquad + \int_A |\nabla v(x,t)|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Par ailleurs, la suite $\check{u}_\varepsilon$ vérifie les convergences faibles (3.12)-(3.14), alors la semi-continuité inférieure nous donne pour presque tout $t \in (0,T)$

$$\begin{aligned}
&\liminf_\varepsilon \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx \geqslant \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx, \\
&\liminf_\varepsilon \int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds \geqslant \int_0^t \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds, \\
&\liminf_\varepsilon \int_\Omega \chi_A |\nabla \check{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx \geqslant \int_A |\nabla v(x,t)|^2 dx, \\
&\liminf_\varepsilon \int_\Omega \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A} |\nabla \check{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

De (3.66), on a

$$\begin{aligned}
\limsup_\varepsilon \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx = &- \limsup_\varepsilon 2\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds \\
&- \limsup_\varepsilon \int_\Omega (\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A})|\nabla \check{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx \\
&+ \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx + 2\int_0^t \int_A \Big|\frac{\partial v}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds \\
&+ \int_A |\nabla v(x,t)|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Rappelons que

$$\begin{aligned}
&\liminf_{\varepsilon} \int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dxds \leqslant \limsup_{\varepsilon} \int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dxds, \\
&\liminf_{\varepsilon} \int_\Omega (\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A}) |\nabla \check{u}_\varepsilon(t)|^2 dx \leqslant \limsup_{\varepsilon} \int_\Omega (\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A}) |\nabla \check{u}_\varepsilon(t)|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

De (3.67) et (3.69), on obtient

$$\begin{aligned}
&-\limsup_{\varepsilon} \int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dxds \leqslant -\int_0^t \int_A \Big| \frac{\partial v}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dxds, \\
&-\limsup_{\varepsilon} \int_\Omega (\chi_A + \varepsilon^2 \chi_{\Omega\setminus A}) |\nabla \check{u}_\varepsilon(t)|^2 dx \leqslant -\int_A |\nabla v(x,t)|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Ainsi, (3.68) et (3.70) nous donne

$$\limsup_{\varepsilon} \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t) \Big|^2 dx \leqslant \int_A \Big| \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \Big|^2 dx. \tag{3.71}$$

En comparant $(3.67)^1$ et (3.71), on conclut que

$$\liminf_{\varepsilon} \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t) \Big|^2 dx = \limsup_{\varepsilon} \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t) \Big|^2 dx = \int_A \Big| \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \Big|^2 dx,$$

d'où on tire

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t) \Big|^2 dx = \int_A \Big| \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \Big|^2 dx. \tag{3.72}$$

De la même manière, on traite les deux autres termes dans (3.66) et on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big| \frac{\partial \check{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dxds = \int_0^t \int_A \Big| \frac{\partial v}{\partial t}(x,s) \Big|^2 dxds, \\
&\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\nabla \check{u}_\varepsilon(x,t)\chi_A|^2 dx = \int_A |\nabla v(x,t)|^2 dx, \\
&\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\varepsilon \nabla \check{u}_\varepsilon(x,t)\chi_{\Omega\setminus A}|^2 dx = 0.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Par conséquent, les convergences (3.19)-(3.21) découlent des convergences faibles (3.12)-(3.14) appliquées à la suite $\check{u}_\varepsilon$ et des convergences (3.72)-(3.73). □

Preuve du Théorème 3.4. Les convergences (3.22)-(3.25) découlent immédiatement de (3.11)-(3.14), (3.18)-(3.21) et de la Définition 3.17.

On montre dans la suite que les convergences (3.23)-(3.25) sont en fait des convergences fortes si et seulement si la condition (3.26) est satisfaite.

D'après la Définition 3.17, $\hat{u}_\varepsilon$ est la solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rll}
\rho_\varepsilon \dfrac{\partial^2 \hat{u}_\varepsilon}{\partial t^2} + \rho_\varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} - div(\rho_\varepsilon \nabla \hat{u}_\varepsilon) = 0 & \text{dans} & \Omega^T, \\
\hat{u}_\varepsilon = 0 & \text{sur} & \partial\Omega \times]0,T[\,, \\
\hat{u}_\varepsilon(x,0) = u^0_\varepsilon - u^0 \chi_A & \text{dans} & \Omega, \\
\dfrac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,0) = u^1_\varepsilon - u^1 \chi_A & \text{dans} & \Omega.
\end{array} \right. \tag{3.74}$$

L'équation de l'énergie du problème (3.74), s'écrit

$$\begin{aligned}(3.75)\qquad &\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx + 2\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds + \\ &\int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla \hat{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx \\ &= \int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon^1 - u^1\chi_A|^2 dx + \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0 \chi_A|^2 dx.\end{aligned}$$

En utilisant $(3.26)^2$ et $(3.4)^2$, il vient

$$(3.76)\qquad \sqrt{\rho_\varepsilon}(u_\varepsilon^1 - u^1\chi_A) = (u_\varepsilon^1 - u^1)\chi_A + \varepsilon u_\varepsilon^1 \chi_{\Omega\setminus A} \to 0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega).$$

De $(3.26)^1$ on obtient

$$(3.77)\qquad \begin{aligned}\sqrt{\rho_\varepsilon}(\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0\chi_A) = \sqrt{\rho_\varepsilon}(\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0) + \varepsilon \nabla u^0 \chi_{\Omega\setminus A} \to 0 \\ \text{fortement dans } L^2(\Omega).\end{aligned}$$

Par conséquent, en passant à la limite dans les deux membres de (3.75) et en tenant compte de (3.76) et de (3.77), on conclut que les convergences (3.23)-(3.25) sont fortes.

Réciproquement, si on suppose que les convergences (3.23)-(3.25) sont fortes, on voit immédiatement, via l'équation (3.75), que la suite de données initiales $(u_\varepsilon^0, u_\varepsilon^1)$ vérifie la convergence (3.26). En effet, en passant à la limite dans les deux membres de (3.75) et en tenant compte des convergences fortes (3.23)-(3.25), on obtient

$$(3.78)\qquad \begin{aligned}\lim_\varepsilon \int_\Omega \rho_\varepsilon |u_\varepsilon^1 - u^1\chi_A|^2 dx = 0, \\ \lim_\varepsilon \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0\chi_A|^2 dx = 0.\end{aligned}$$

En utilisant $(3.78)^1$ et $(3.4)^2$, il vient

$$(3.79)\qquad (u_\varepsilon^1 - u^1)\chi_A = \sqrt{\rho_\varepsilon}(u_\varepsilon^1 - u^1\chi_A) - \varepsilon u_\varepsilon^1 \chi_{\Omega\setminus A} \to 0 \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega).$$

De $(3.78)^2$, on obtient

(3.80)

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}(\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0) = \sqrt{\rho_\varepsilon}(\nabla u_\varepsilon^0 - \nabla u^0\chi_A) - \varepsilon \nabla u^0 \chi_{\Omega\setminus A} \to 0 \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega).$$

Par conséquent, la suite de données initiales $(u_\varepsilon^0, u_\varepsilon^1)$ vérifie la condition (3.26).

On montre dans la suite la deuxième partie du théorème. Pour cela, on suppose que la condition (3.26) n'est pas vérifiée.

Multiplions la première équation de (3.74) par $\varphi \hat{u}_\varepsilon$, où $\varphi \in \mathcal{D}(0,T), \hat{u}_\varepsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, après avoir intégré par parties son terme hyperbolique, il vient

$$(3.81)\qquad \begin{aligned}&\int_0^T \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dx\right)\varphi(t)dt - \int_0^T \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla \hat{u}_\varepsilon|^2 dx\right)\varphi(t)dt = \\ &-\int_0^T \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}\hat{u}_\varepsilon dx\right)\varphi^{'}(t)dt + \int_0^T \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}\hat{u}_\varepsilon dx\right)\varphi(t)dt.\end{aligned}$$

Par utilisation de (3.22), (3.25), on conclut que le second membre de (3.81) tend vers zéro avec ε, et comme φ est arbitraire, on aura

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dx - \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla \hat{u}_\varepsilon|^2 dx \rightharpoonup 0 \text{ * faiblement dans } L^\infty(0,T). \tag{3.82}$$

Par ailleurs, posons

$$H^\varepsilon = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |u^1_\varepsilon - u^1\chi_A|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla u^0_\varepsilon - \nabla u^0 \chi_A|^2 dx. \tag{3.83}$$

En vertu de (3.4)

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}(u^1_\varepsilon - u^1\chi_A) = (u^1_\varepsilon - u^1)\chi_A + \varepsilon u^1_\varepsilon \chi_{\Omega\setminus A} \quad \text{est bornée dans} \quad L^2(\Omega).$$

Ainsi, en utilisant l'estimation de (3.3), on obtient

$$\sqrt{\rho_\varepsilon}(\nabla u^0_\varepsilon - \nabla u^0\chi_A) = \sqrt{\rho_\varepsilon}\nabla u^0_\varepsilon - \nabla u^0\chi_A \quad \text{est bornée dans} \quad L^2(\Omega).$$

Et donc, $(H^\varepsilon)_\varepsilon$ est une suite bornée de nombre réels positifs, et donc il existe un réel H strictement positif tel que, pour une sous-suite de ε encore notée ε, on a

$$H^\varepsilon \longrightarrow H \quad \text{dans } \mathbb{R}. \tag{3.84}$$

En s'aidant de (3.75), (3.83) et (3.84), on obtient pour la même sous-suite ε

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,t)\Big|^2 dx + 2\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds \\ &+ \int_\Omega \rho_\varepsilon |\nabla \hat{u}_\varepsilon(x,t)|^2 dx \longrightarrow 2H \quad \text{fortement dans } C([0,T]). \end{aligned} \tag{3.85}$$

Par sommation de (3.82) et (3.85), on obtient

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds \rightharpoonup H \text{ * faiblement dans } L^\infty(0,T). \tag{3.86}$$

Posons $l(t)$ la limite dans $L^\infty(0,T)$ de la suite $\displaystyle\int_\Omega \rho_\varepsilon |\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}|^2 dx$, pour $t \in (0,T)$, on définit une fonction $\varphi \in L^1(0,T)$ comme suit

$$\varphi(s) = \chi_{(0,t)}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s \in (0,t), \\ 0 & \text{si} \quad s \in (t,T). \end{cases}$$

D'où

$$\int_0^T \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dx\right)\varphi(s)ds \longrightarrow \int_0^T l(s)\varphi(s)ds.$$

Mais, comme

$$\int_0^T \left(\int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dx\right)\varphi(s)ds = \int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds,$$

et

$$\int_0^T l(s)\varphi(s)ds = \int_0^t l(s)ds,$$

alors, en déduit que

$$\int_0^t \int_\Omega \rho_\varepsilon \Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds \longrightarrow \int_0^t l(s)ds. \tag{3.87}$$

Par ailleurs, l'estimation (3.10) appliquée à la suite $\hat{u}_\varepsilon$ nous donne

$$\sup_{0<t<T}\Big|\int_0^t\int_\Omega \rho_\varepsilon\Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds\Big| \leqslant T\|\sqrt{\rho_\varepsilon}\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant c,$$

il en découle que $\displaystyle\int_0^t\int_\Omega \rho_\varepsilon\Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds$ est bornée dans $L^\infty(0,T)$. Alors la convergence (3.87) devient

$$\int_0^t\int_\Omega \rho_\varepsilon\Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds \rightharpoonup \int_0^t l(s)ds \text{ * faiblement dans } L^\infty(0,T). \tag{3.88}$$

De (3.86), (3.88), on conclut que

$$l(t)+\int_0^t l(s)ds = H, \tag{3.89}$$

après avoir dérivé les deux termes de l'équation (3.89), on conclut que l est la solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} l^{'}(t)+l(t)=0,\\ l(0)=H. \end{cases} \tag{3.90}$$

En s'aidant de la théorie de E.D.O, nous avons pour chaque $t\in(0,T)$

$$l(t)=He^{-t}. \tag{3.91}$$

En utilisant (3.82), (3.86) et (3.91), on conclut que

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon\Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 dx \longrightarrow He^{-t} \text{ * faiblement dans } L^\infty(0,T),$$
$$\int_\Omega \rho_\varepsilon|\nabla \hat{u}_\varepsilon|^2 dx \longrightarrow He^{-t} \text{ * faiblement dans } L^\infty(0,T),$$
$$\int_0^t\int_\Omega \rho_\varepsilon\Big|\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}(x,s)\Big|^2 dxds \longrightarrow H(1-e^{-t}) \text{ * faiblement dans } L^\infty(0,T),$$

par conséquent, $\hat{u}_\varepsilon$ ne vérifie pas le principe d'équipartition de l'énergie. $\square$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié l'homogénéisation d'un problème d'évolution dans des milieux hétérogènes. Le premier chapitre est consacré à l'étude du comportement asymptotique d'un problème parabolique dans un milieu poreux dans lequel baigne un réseau ε-périodique de très petites particules sphériques.

Le deuxième chapitre concerne l'homogénéisation d'un milieu multiphasique formé d'une phase ambiante connexe entournant m phase ou chacune est un réseau $\varepsilon-$périodique de petites particules sphériques.

Notant que dans les deux chapitres le comportement limite contient l'effet des particules evanescentes representé par l'apparition dans le cas critique d'un terme non local. Par contre dans le premier chapitre, il apparaît de plus l'effet des petits trous donnant le terme etrange dans les équations limites.

Ce travaille s'ouvre sur les perspectives suivantes

- Etude du correcteur pour le processus de diffusion dans un milieu poreux à suspensions evanescentes .
- Homogénéisation et correcteur dans un milieu perfoé de trous à taille non critique et petites particules .
- Homogénéisation dans un milieu perforé avec petits trous et petites particules par la méthode de l'eclatement périodique.

Le travail du chapitre 4 montre que lorsque on considère un choix approprié des données initiales on aura une bonne approximation de la solution de l'équation hyperbolique-parabolique dégénérée dans un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$. Dans la continuité de ce travail on a les perspectives suivantes :

- Etude de l'équation hyperbolique-parabolique dégénérée dans une structure mince hétérogène.

Annex A

Dans cette annexe nous démontrons les outils spécifiques de la méthode de la zone de contrôle du chapitre 2. Nous reprenons deux démonstrations existantes dèjà dans [9].

Preuve du Lemme 2.1. On commence par montrer

$$|\nabla u|^2_{C(r_1,r_2)} \geqslant \frac{4\pi r_1 r_2}{r_2 - r_1}\Big| \fint_{S_1} \big(u(r_2,\Theta,\Phi) - u(r_1,\Theta,\Phi)\big) d\sigma\Big|^2, \tag{3.92}$$

où $d\sigma$ est la mesure sur la sphère unité

$$d\sigma := \sin\Theta d\Theta d\Phi,$$

et

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}, \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial u}{\partial \Phi}\right).$$

On déduit directement de cette derniére égalité que

$$\begin{aligned} |\nabla u|^2_{C(r_1,r_2)} &\geqslant \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 r^2 dr \sin\Theta d\Theta \\ &\geqslant \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi} I(\Theta,\Phi) \sin\Theta d\Theta, \end{aligned} \tag{3.93}$$

où on a posé

$$I(\Theta,\Phi) := \inf\left\{\int_{r_1}^{r_2} |\varphi^{'}(r)|^2 r^2 dr,\ \varphi \in H^1(r_1,r_2),\ \varphi(r_1) = u(r_1,\Theta,\Phi),\ \varphi(r_2) = u(r_2,\Theta,\Phi)\right\}.$$

Rechercher $I(\Theta,\Phi)$ revient à poser le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \chi \in K \text{ tel que} \\ a(\chi,\phi) = \displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \chi^{'}(r)(\phi - \chi)^{'}(r) r^2 dr \geqslant 0,\ \forall \phi \in K, \\ K = \left\{\phi \in H^1(r_1,r_2),\ \phi(r_1) = u(r_1,\Theta,\Phi),\ \phi(r_2) = u(r_2,\Theta,\Phi)\right\}. \end{cases} \tag{3.94}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(]r_1,r_2[)$ on a $\pm\varphi + \chi \in K$, donc d'après (3.94)

$$a(\chi, \pm\varphi + \chi) = \pm \int_{r_1}^{r_2} \chi^{'}(r)\varphi^{'}(r) r^2 dr \geqslant 0,$$

d'où

$$\int_{r_1}^{r_2} \chi^{'}(r)\varphi^{'}(r) r^2 dr = 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(]r_1,r_2[),$$

donc

$$(\chi^{'}(r) r^2)^{'} = 0.$$

Ceci entraîne

$$\chi^{'}(r) r^2 = -c_1,$$

ce qui implique

$$\chi(r) = \frac{c_1}{r} + c_2.$$

A partir des égalités $\chi(r_1) = u(r_1,\Theta,\Phi),\ \chi(r_2) = u(r_2,\Theta,\Phi)$, on a

$$\chi(r) = \frac{1}{r}\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}(u(r_1,\Theta,\Phi) - u(r_2,\Theta,\Phi)) + c_2,$$

il en découle

$$\begin{aligned}
I(\Theta,\Phi) &= \int_{r_1}^{r_2} (\chi'(r))^2 r^2 dr \\
&= \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\big(u(r_2,\Theta,\Phi) - u(r_1,\Theta,\Phi)\big)^2.
\end{aligned}$$

Du calcul précédent on déduit

$$\begin{aligned}
|\nabla u|^2_{C(r_1,r_2)} &\geqslant \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi} I(\Theta,\Phi)\sin\Theta d\Theta \\
&= \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\int_{S_1} \big(u(r_2,\Theta,\Phi) - u(r_1,\Theta,\Phi)\big)^2 d\sigma \\
&= 4\pi\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \fint_{S_1} \big(u(r_2,\Theta,\Phi) - u(r_1,\Theta,\Phi)\big)^2 d\sigma,
\end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Hölder

$$|\nabla u|^2_{C(r_1,r_2)} \geqslant 4\pi\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\left(\fint_{S_1} \big(u(r_2,\Theta,\Phi) - u(r_1,\Theta,\Phi)\big) d\sigma\right)^2.$$

On conclut en remarquant que

$$\begin{aligned}
\fint_{S_{r_2}} u d\sigma &= \frac{1}{4\pi r_2^2}\int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\pi} u(r_2,\Theta,\Phi)\sin\Theta r_2^2 d\Theta \\
&= \fint_{S_1} u(r_2,\Theta,\Phi) d\sigma.
\end{aligned}$$

$\square$.

Preuve du Lemme 2.2. Supposons pour l'instant que le résultat est vrais pour $R = 1$. Alors, par le changement de variable

$$\begin{aligned}
&x = Ry,\ x \in B(0,R), y \in B(0,1); \\
&u(x) = \breve{u}(y),
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,R)} \left|u - \fint_{S_{\alpha R}} u d\sigma\right|^2 dx &= R^3 \int_{B(0,1)} \left|\breve{u} - \fint_{S_\alpha} \breve{u} d\sigma\right|^2 dy \\
&\leqslant C\frac{R^3}{\alpha}|\nabla \breve{u}|^2_{B(0,1)} \\
&= C\frac{R^3}{\alpha}|R\nabla u|^2_{B(0,R)}\frac{1}{R^3} \\
&= C\frac{R^2}{\alpha}|\nabla u|^2_{B(0,R)}.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer le résultat pour $R = 1$. Pour $u \in H^1(B(0,1))$ et pour tout $r \in (0,1)$ on utilise la notation suivante

$$\begin{aligned}
\hat{u}(r) &= \fint_{S_r} u d\sigma, \\
[u] &= \fint_{B(0,1)} u d\sigma.
\end{aligned}$$

Un calcul direct en coordonnés sphériques donne

$$[u] = \frac{3}{4\pi}\int_{B(0,1)} u d\sigma = \frac{3}{4\pi}\int_0^1 dr \int_{S_r} u d\sigma = 3\int_0^1 r^2 \hat{u}(r) dr,$$

ce qui entraîne, en appliquant l'inégalité de Hölder

$$\big|[u] - \hat{u}(\alpha)\big|^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{3} r \big(\hat{u}(r) - \hat{u}(\alpha)\big)\sqrt{3} r dr\right)^2 \leqslant \int_0^1 3r^2 \big(\hat{u}(r) - \hat{u}(\alpha)\big)^2 dr.$$

Par application du Lemme 2.1 pour $\{\alpha, r\}$, on déduit l'estimation

$$\begin{aligned}\big|[u] - \hat{u}(\alpha)\big|^2 &\leqslant \left(\int_0^1 \frac{|r-\alpha|}{4\pi r\alpha} 3r^2 dr\right) |\nabla u|^2_{B(0,1)} \\ &= \frac{3}{4\pi\alpha}\left(\int_0^1 |r-\alpha| r dr\right) |\nabla u|^2_{B(0,1)} \\ &\leqslant \frac{C}{\alpha}|\nabla u|^2_{B(0,1)}.\end{aligned} \tag{3.95}$$

Par ailleurs, on a d'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger

$$\int_{B(0,1)} \big|u - [u]\big|^2 dx \leqslant C|\nabla u|^2_{B(0,1)}. \tag{3.96}$$

En combinant (3.95) et (3.96), on obtient

$$\begin{aligned}\big|u(x) - \hat{u}(\alpha)\big|^2_{B(0,1)} &\leqslant 2\big|u(x) - [u]\big|^2_{B(0,1)} + 2\big|[u] - \hat{u}(\alpha)\big|^2_{B(0,1)} \\ &\leqslant C|\nabla u|^2_{B(0,1)} + \frac{C}{\alpha}|\nabla u|^2_{B(0,1)} \\ &\leqslant \frac{C}{\alpha}|\nabla u|^2_{B(0,1)},\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. $\square$.

Preuve du lemme 2.5. Vérifions d'abord le résultat (2.71). Notons que

$$\begin{aligned}|w_{r^i_\varepsilon} G_{\delta^i_\varepsilon}(\varphi)|_{H^1_0(\Omega)} &= |\nabla\left((w_{r^i_\varepsilon}) G_{\delta^i_\varepsilon}(\varphi)\right)|_{L^2(\Omega)} \\ &= |G_{\delta^i_\varepsilon}(\varphi)\nabla w_{r^i_\varepsilon}|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

puis par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(w_{r^i_\varepsilon}) G_{\delta^i_\varepsilon}(\varphi)|^2 dx &\leqslant \left(\int_\Omega |\nabla w_{r^i_\varepsilon}|^2 dx\right)\left(\int_\Omega |G_{\delta^i_\varepsilon}(\varphi)|^2 dx\right) \\ &\leqslant C\gamma^i_\varepsilon,\end{aligned} \tag{3.97}$$

qui donne le premier résultat c'est a dire $w_{r^i_\varepsilon} G_{\delta^i_\varepsilon}(\varphi) \in H^1_0(\Omega)$.

Passons maintenat au deuxième résultat. D'abord pour $i \in I_1 \cup I_2$, on

$$\begin{aligned}|w_{r^i_\varepsilon}\left(G_{\delta^i_\varepsilon}(\varphi) - \varphi\right)|_{H^1_0(\Omega)} &= |\nabla w_{r^i_\varepsilon}\left(G_{\delta^i_\varepsilon}(\varphi) - \varphi\right) - w_{r^i_\varepsilon}\nabla\varphi|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant |\nabla w_{r^i_\varepsilon}\left(G_{\delta^i_\varepsilon}(\varphi) - \varphi\right)|_{L^2(\Omega)} + |w_{r^i_\varepsilon}\nabla\varphi|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant |\nabla w_{r^i_\varepsilon}|_{L^2(\Omega)}|G_{\delta^i_\varepsilon}(\varphi) - \varphi|_{L^\infty(\Omega)} + |w_{r^i_\varepsilon}|_{L^2(\Omega)}|\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega)}.\end{aligned}$$

En s'aidant des (2.23)-(2.24) et la covergence uniforme de $G_{\delta^i_\varepsilon}(\varphi)$ vers φ, on trouve

$$|\nabla w_{r^i_\varepsilon}|_{L^2(\Omega)}|G_{\delta^i_\varepsilon}(\varphi) - \varphi|_{L^\infty(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

$$|w_{r_\varepsilon^i}|_{L^2(\Omega)}|\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

d'où

$$w_{r_\varepsilon^i}G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi) \longrightarrow \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Maintenant, pour $i \in I_3$

$$\begin{aligned}
|w_{r_\varepsilon^i}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)-\varphi\right)|_{H_0^1(\Omega)} &= |\nabla w_{r_\varepsilon^i}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)-\varphi\right) - w_{r_\varepsilon^i}\nabla\varphi|_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C|\nabla w_{r_\varepsilon^i}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)-\varphi\right)|_{L^2(C_\varepsilon)} + |w_{r_\varepsilon^i}\nabla\varphi|_{L^2(C_\varepsilon\cup D_\varepsilon)} \\
&\leqslant C|\nabla w_{r_\varepsilon^i}|_{L^2(C_\varepsilon)}|G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)-\varphi|_{L^\infty(C_\varepsilon)} + |w_{r_\varepsilon^i}|_{L^2(C_\varepsilon\cup D_\varepsilon)}|\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega)}
\end{aligned}$$

De (2.22)-(2.23) et (2.36), on a

$$\begin{aligned}
|w_{r_\varepsilon^i}\left(G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi)-\varphi\right)|_{H_0^1(\Omega)} &\leqslant C(\gamma_\varepsilon^i)^{1/2}2\varepsilon r_\varepsilon^i|\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega)} + |C_\varepsilon\cup D_\varepsilon||\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leqslant C|\nabla\varphi|_{L^\infty(\Omega)}\left(\frac{(\delta_\varepsilon^i)^{1/2}}{\varepsilon}\varepsilon r_\varepsilon^i + |C_\varepsilon\cup D_\varepsilon|\right).
\end{aligned}$$

Comme $|C_\varepsilon \cup D_\varepsilon| \to 0$ et $r_\varepsilon^i \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, on déduit

$$w_{r_\varepsilon^i}G_{\delta_\varepsilon^i}(\varphi) \longrightarrow \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Annex B

Dans cette annexe nous démontrons les outils spécifiques de la méthode de la zone de contrôle du chapitre 1. Nous utilisons ici une généralisation d'un résultat présenté dans le cas $N = 3$ (Lemme 2.1, Lemme 2.2).

LEMME 3.2. *Pour tout* $0 < r_1 < r_2$ *et* $u \in H^1(C(r_1, r_2))$

$$|\nabla u|_{C(r_1,r_2)} \geqslant \frac{S_N(r_1r_2)^{N-2}}{r_2^{N-2} - r_1^{N-2}} \left| \fint_{S_{r_2}} u d\sigma - \fint_{S_{r_1}} u d\sigma \right|^2 \tag{3.98}$$

$$\text{Où} \qquad \fint_{S_r} \cdot \, d\sigma = \frac{1}{|S_r|} \int_S \cdot \, d\sigma$$

LEMME 3.3. $\forall (\alpha, R) \in \mathbb{R} \times (0,1)$, $\exists C > 0$ *tel que* $\forall u \in H^1(B(0,R))$

$$\left| u - \fint_{\partial B(0,\alpha r)} u d\sigma \right|_{B(0,r)} \leq C \frac{r}{\alpha^{(N/2)-1}} |\nabla u|_{B(0,r)}$$

Preuve du lemme 1.1 :
Montrons (1.36). Soit $\theta \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$|\theta - G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2_{L^2(\Omega_{Y_\varepsilon})} = \sum_{k \in Z_\varepsilon} \fint_{Y_\varepsilon^k} |\theta - \fint_{S^k_{r_\varepsilon}} \theta d\sigma|^2 dx$$

On peut mettre $Y_\varepsilon^k \subset B\left(\varepsilon k, \varepsilon\sqrt{3}/2\right)$. Appliquons le Lemme 3.3 avec le choix $\alpha = \frac{2r_\varepsilon}{\sqrt{3}}, R = \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2}$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |\theta - G_{r_\varepsilon}|^2 dx &\leqslant \sum_{k \in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2})} \left| \theta - \fint_{S^k_{r_\varepsilon}} \theta d\sigma \right|^2 \\ &\leqslant C \frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^{N-2}} \sum_{k \in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2})} |\nabla \theta|^2 \, dx.\end{aligned}$$

On peut déduire cette estimation

$$\sum_{k \in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2})} |\nabla \theta|^2 \, dx \leqslant 2 \int_\Omega |\nabla \theta|^2 dx,$$

car $\quad \left| \cup_{k \in Z_\varepsilon} \left(B(\varepsilon k, \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2}) \setminus Y_\varepsilon^k \right) \right| < 2\,|\Omega|$. Par conséquent

$$\int_{\Omega_{Y_\varepsilon}} |\theta - G_{r_\varepsilon}|^2 dx \leqslant C \frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^{N-2}} \int_\Omega |\nabla \theta|^2 \, dx.$$

Passons maintenant au (1.37). Soit $\theta \in H_0^1(\Omega)$, on applique une deuxième fois le lemme 3.3 avec le choix $\alpha = 1, R = \varepsilon\delta_\varepsilon$ et on trouve

$$\begin{aligned}|\theta - G_{\delta_\varepsilon}(\theta)|^2_{D_\varepsilon} &\lesssim (\varepsilon\delta_\varepsilon)^2 \sum_{k \in Z_\varepsilon} \int_{B(\varepsilon k, \varepsilon\delta_\varepsilon)} |\nabla \theta|^2 dx \\ &\lesssim (\varepsilon\delta_\varepsilon)^2 \sum_{k \in Z_\varepsilon} \int_{D_\varepsilon} |\nabla \theta|^2 dx.\end{aligned}$$

Pour montrer (1.38). Notons que

$$\int_{\Omega} |G_{r_\varepsilon}(\theta) - G_{\delta_\varepsilon}(\theta)|^2 dx = \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{Y_\varepsilon^k} \left| \fint_{S_{r_\varepsilon}^k} \theta d\sigma - \fint_{S_{\delta_\varepsilon}^k} \theta d\sigma \right|^2 dy.$$

On applique le lemme 3.2 dans le second membre de cette dernière égalité avec $r_1 = \delta_\varepsilon, r_2 = r_\varepsilon$, et on note $\varepsilon k + C(\delta_\varepsilon, r_\varepsilon) = C_\varepsilon'^{,k}$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |G_{r_\varepsilon}(\theta) - G_{\delta_\varepsilon}(\theta)|^2 dx &\leqslant \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{Y_\varepsilon^k} \frac{r_\varepsilon^{N-2} - \delta_\varepsilon^{N-2}}{S_N(r_\varepsilon \delta_\varepsilon)^{N-2}} dy \int_{C_\varepsilon'^{,k}} |\nabla \hat{\theta}|^2 dx' \\
&\leqslant \frac{r_\varepsilon^{N-2} - \delta_\varepsilon^{N-2}}{S_N(r_\varepsilon \delta_\varepsilon)^{N-2}} \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{Y_\varepsilon^k} dy \int_{C_\varepsilon^k} |\nabla \theta|^2 \frac{1}{\varepsilon^{N-2}} dx \\
&\leqslant \left(\frac{r_\varepsilon^{N-2} - \delta_\varepsilon^{N-2}}{S_N(r_\varepsilon \delta_\varepsilon)^{N-2}} \right) \left(\frac{\varepsilon^N}{\varepsilon^{N-2}} \right) \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^k} |\nabla \theta|^2 dx \\
&\lesssim \frac{\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^{N-2}} \int_{C_\varepsilon} |\nabla \theta|^2 dx
\end{aligned}$$

En tenant compte de

$$|Y_\varepsilon^k| = \varepsilon^N, \ \frac{r_\varepsilon - \delta_\varepsilon}{r_\varepsilon} < 1,$$
$$\hat{\theta}(x') = \theta(\frac{x}{\varepsilon} - y_1),$$

ce qui achève la démonstration.

Preuve de la Proposition 1.3 :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\theta|^2 dxdt &\leqslant 2 \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\theta - G_{\delta_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt + 2 \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |G_{\delta_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt \\
&= 2 \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\theta - G_{\delta_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt + 2 \int_{\Omega^T} |G_{\delta_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt \\
&\leqslant C\left(\varepsilon \delta_\varepsilon\right)^2 \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\nabla \theta|^2 dxdt + 4 \int_{\Omega^T} |G_{\delta_\varepsilon}(\theta) - G_{r_\varepsilon}(\theta)|^2 dxdt \\
&+ 8 \int_{\Omega^T} |G_{r_\varepsilon}(\theta) - \theta|^2 dxdt + 8 \int_{\Omega^T} |\theta|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$|D_\varepsilon| = \sum_{k\in Z_\varepsilon} |B\left(\varepsilon(k + y_1), \varepsilon \delta_\varepsilon\right)| = S_N(\varepsilon \delta_\varepsilon)^N \frac{|\Omega|}{\varepsilon^N}$$

$$\frac{(\varepsilon \delta_\varepsilon)^{N-2}}{|D_\varepsilon|} = \frac{1}{S_N} \frac{\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^{N-2}}. \tag{3.99}$$

D'après (1.36),(1.37),(3.99) et l'inégalité de Poincaré, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\theta|^2 dxdt \leqslant C\left(\varepsilon\delta_\varepsilon\right)^{N-2} \int_0^T \fint_{D_\varepsilon} |\nabla\theta|^2 dxdt + C\left(\frac{\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^{N-2}}\right) \int_{C_\varepsilon{}^T} |\nabla\theta| dxdt \\ + C\left(\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^{N-2}}\right) \int_{\Omega^T} |\nabla\theta| dxdt + C\int_{\Omega^T} |\nabla\theta|^2 dxdt \leqslant \\ \leqslant C\left(\frac{\varepsilon^2}{r_\varepsilon^{N-2}} + \frac{\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^{N-2}} + 1\right) \int_{\Omega^T} |\nabla\theta|^2 dxdt \\ \leqslant Cmax\left(1, \frac{\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^{N-2}}\right) \int_{\Omega^T} |\nabla\theta|^2 dxdt.\end{aligned}$$

Annex C

Dans cette annexe nous vérifions les hypothśes sur les trous.

Preuve de la Proposition 1.4 :

On a vu que dans la définition 1.4 w_ε vérifie les hyporhèses (H.1)-(H.2) par construction. Vérifions les hypothèses (H.3),(H.4).

Vérification de (H.3) :
D'abord, on calcule $|\nabla w_\varepsilon|$

$$|\nabla w_\varepsilon|^2_\Omega = \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_{C^k_{T_\varepsilon}} |\nabla w_\varepsilon|^2 dx,$$

par définition on a

$$w_\varepsilon(x) = \bar{w}_\varepsilon(x/\varepsilon - y_2 - k), \text{ pour } \; x \in Y^k_\varepsilon$$

avec

$$\bar{w}_\varepsilon(x) = \frac{|x|^{-N+2} - \alpha_\varepsilon^{-N+2}}{l^{-N+2} - \alpha_\varepsilon^{-N+2}}$$

donc

$$\int_{C^k_{T_\varepsilon}} |\nabla w_\varepsilon|^2 dx = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{C(\alpha_\varepsilon, l)} |\nabla \bar{w}_\varepsilon|^2 \varepsilon^N dz.$$

Comme w_ε est une fontion radiale, on a

$$\nabla \bar{w}_\varepsilon = \left(\frac{d\bar{w}_\varepsilon}{dr}, 0, ..., 0\right),$$

et

$$\frac{d\bar{w}_\varepsilon}{dr} = \frac{(-N+2)r^{-N+1}}{l^{-N+2} - \alpha_\varepsilon^{-N+2}}, \; |x| = r. \tag{3.100}$$

En utilisant les coordonnées sphériques

$$z_1 = r cos\theta_1, z_2 = r sin\theta_2, ..., z_N = r sin\theta_1....sin\theta_{N-2} sin\theta_{N-1},$$

où les variables θ_i varient entre 0 et π pour $i \in \overline{1,(N-2)}$, la variable θ_{N-1} varie entre 0 et 2π et la variable r varie entre α_ε et l.

Alors

$$\begin{aligned}
|\nabla w_\varepsilon|^2_\Omega &= \sum_{k\in Z_\varepsilon} \varepsilon^{N-2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} .. \int_0^{\pi}\int_{\alpha_\varepsilon}^l |\frac{d\bar{w}_\varepsilon}{dr}|^2 r^{N-1} sin^{N-2}\theta_1 sin^{N-3}\theta_2 ... sin\theta_{N-1} d\theta_1 .. d\theta_{N-1} dr \\
&= \sum_{k\in Z_\varepsilon} \varepsilon^{N-2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} .. \int_0^{\pi} sin^{N-2}\theta_1 sin^{N-3}\theta_2 ... sin\theta_{N-1} d\theta_1 .. d\theta_{N-1} \int_{\alpha_\varepsilon}^l |\frac{d\bar{w}_\varepsilon}{dr}|^2 dr \\
&= \sum_{k\in Z_\varepsilon} \varepsilon^{N-2} S_N \int_{\alpha_\varepsilon}^l |\frac{d\bar{w}_\varepsilon}{dr}|^2 dr
\end{aligned}$$

et comme $card(Z_\varepsilon) = \dfrac{|\Omega|}{\varepsilon^N}$, donc

$$
\begin{aligned}
|\nabla w_\varepsilon|^2_\Omega &= S_N \left(\frac{|\Omega|}{\varepsilon^N}\right) \varepsilon^{N-2} \left(\frac{(N-2) l^{N-2} {\alpha_\varepsilon}^{N-2}}{{\alpha_\varepsilon}^{N-2} - l^{N-2}}\right) \\
&= S_N \frac{{\alpha_\varepsilon}^{N-2}}{\varepsilon^2} \left(\frac{(N-2) l^{N-2}}{l^{N-2} - {\alpha_\varepsilon}^{N-2}}\right)
\end{aligned} \tag{3.101}
$$

On remplaçe la valeur de α_ε par $C_0 \varepsilon^{\frac{2}{N-2}}$ dans (3.101), on obtient

$$
\begin{aligned}
|\nabla w_\varepsilon|^2_\Omega &= S_N \frac{(N-2) C_0^{N-2} \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{(N-2)}{1 - \frac{C_0^{N-2}\varepsilon^2}{l^{N-2}}}\right) \\
&\leqslant C \left(\frac{C_0^{N-2}}{1 - \frac{C_0^{N-2}\varepsilon^2}{l^{N-2}}}\right) \leqslant C.
\end{aligned} \tag{3.102}
$$

Où S_N est la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^N$.

Donc, $|\nabla w_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}$ est bornée. Passons maintenant à la démonstration de la bornitude de w_ε dans $L^2(\Omega)$. On a

$$
\begin{gathered}
\frac{d\bar{w}_\varepsilon}{dr} \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad (\bar{w}_\varepsilon \text{ est croissante }) \\
\alpha_\varepsilon \leqslant r \leqslant l \Rightarrow \bar{w}_\varepsilon(\alpha_\varepsilon) \leqslant \bar{w}_\varepsilon(r) \leqslant \bar{w}_\varepsilon(l), \\
0 \leqslant \bar{w}_\varepsilon(r) \leqslant 1
\end{gathered}
$$

Tant que Ω est borné

$$
\begin{cases}
|w_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leqslant C, \\
|\nabla w_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leqslant C.
\end{cases}
$$

Donc w_ε est bornée dans $H^1(\Omega)$, il existe une sous suite encore notée w_ε qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers w.

On note $Y^*_\varepsilon = Y^k_\varepsilon \setminus (C_{T^k_\varepsilon} \cup T^k_\varepsilon)$, $\chi_{Y^*_\varepsilon}$ est la fonction caractéristique.

D'autre part, on sait que $w_\varepsilon = 1$ dans Y^*_ε alors $w_\varepsilon \chi_{Y^*_\varepsilon} = \chi_{Y^*_\varepsilon}$.

La fonction $\chi_{Y^*_\varepsilon}$ est ε-périodique (de période ε), d'après le théorème 2.6 **[10]** $\chi_{Y^*_\varepsilon}$ converge faiblement vers sa moyenne c'est à dire

$$
\chi_{Y^*_\varepsilon}(x) \rightharpoonup \mathbf{M}(\chi_{Y^*_\varepsilon}) \neq 0, \tag{3.103}
$$

de plus, on a

$$
w_\varepsilon \rightharpoonup w \quad \text{dans } H^1(\Omega) \Rightarrow w_\varepsilon \longrightarrow w \quad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{3.104}
$$

De (3.103) et (3.104), on déduit

$$
w_\varepsilon \chi_{Y^*_\varepsilon} \rightharpoonup w\chi^* \quad \text{dans } L^2(\Omega),
$$

avec

$$
w_\varepsilon \chi_{Y^*_\varepsilon} = \chi_{Y^*_\varepsilon} \rightharpoonup \chi^*,
$$

il vient que $w\chi^* = \chi^*$ cela veut dire que $w = 1$ (de l'unicité de la limite).

<u>Vérification de (H.4)</u> :

De la définition de w_ε (1.4), il est clair que $-\triangle w_\varepsilon$ est nulle sauf sur $\partial B_\varepsilon^k, \partial T_\varepsilon^k$ par intégration , on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega -\triangle w_\varepsilon dx &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{Y_\varepsilon^k} -\triangle w_\varepsilon dx\\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{C_{T_\varepsilon}^k} -\triangle w_\varepsilon dx\\ &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{\partial B_\varepsilon^k}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\eta}ds - \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{\partial T_\varepsilon^k}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\eta}ds.\end{aligned}$$

Par conséquent $\triangle w_\varepsilon = \mu_\varepsilon - \lambda_\varepsilon$ dans Ω, où μ_ε désigne les masses portées par les sphères ∂B_ε^k et λ_ε désigne les masses portées par les sphères ∂T_ε^k.

Montrons maintenant que

$$\mu_\varepsilon \to \mu \quad \text{dans} \;\; H^{-1}(\Omega).$$

Pour avoir cette convergence, on calcule explicitement μ_ε. Appelons ξ_B la masse de dirac portée par ∂B, c'est à dire

$$\langle \xi_B, \varphi\rangle = \int_{\partial B}\varphi(s)ds, \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Les masses $\mu_\varepsilon, \lambda_\varepsilon$ s'écrivent en fonction de la masse de dirac comme suit

$$\mu_\varepsilon = \sum_{k\in Z_\varepsilon}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\eta}\rfloor_{\partial B_\varepsilon^k}\xi_{B_\varepsilon^k}, \;\; \lambda_\varepsilon = \sum_{k\in Z_\varepsilon}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\eta}\rfloor_{\partial T_\varepsilon^k}\xi_{T_\varepsilon^k}. \tag{3.105}$$

On calcule μ_ε en remplaçant α_ε par $C_0\varepsilon^{2/(N-2)}$ dans la formule expliçite de w_ε. Puisque w_ε est une fonction radiale donc

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\eta}\rfloor_{\partial B_\varepsilon^k} = \frac{dw_\varepsilon}{dr}(r=\varepsilon l)$$

on evalue cette dérivée en $r=\varepsilon l$. On sait que

$$\frac{dw_\varepsilon}{dr} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\frac{d\bar{w}_\varepsilon}{dr}\right),$$

avec

$$\frac{d\bar{w}_\varepsilon}{dr} = \frac{(-N+2)r^{(-N+1)}}{l^{(-N+2)} - \alpha_\varepsilon^{(-N+2)}}.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{w}_\varepsilon}{dr}(r=l) &= \frac{(-N+2)}{l^{N-1}}\left(\frac{-l^{N-2}+\alpha_\varepsilon^{N-2}}{l^{N-2}\alpha_\varepsilon^{N-2}}\right)^{-1}\\ &= \frac{(N-2)}{l^{N-1}}\left(\frac{l^{N-2}\alpha_\varepsilon^{N-2}}{l^{N-2}-\alpha_\varepsilon^{N-2}}\right)\\ &= \frac{(N-2)}{l}\left(\frac{\alpha_\varepsilon^{N-2}}{l^{N-2}-\alpha_\varepsilon^{N-2}}\right)\\ &= \frac{(N-2)C_0^{N-2}\varepsilon^2}{\varepsilon l(l^{N-2}-C_0^{N-2}\varepsilon^2)} = \frac{(N-2)C_0^{N-2}\varepsilon^2}{l^{N-1}-C_0^{N-2}l\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

En résulte

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\eta} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{(N-2)C_0^{N-2}\varepsilon^2}{l^{N-1}-C_0^{N-2}l\varepsilon^2}\right) = \frac{(N-2)C_0^{N-2}\varepsilon}{l^{N-1}-C_0^{N-2}l\varepsilon^2}$$

Donc,

$$\mu_\varepsilon = \sum_{k\in Z_\varepsilon} \frac{(N-2)C_0^{N-2}}{l^{N-1} - C_0^{N-2} l\varepsilon^2} \varepsilon \xi_{B_\varepsilon^k}. \tag{3.106}$$

Dans le cas N=3,

$$\mu_\varepsilon = \frac{C_0}{l^2 - lC_0\varepsilon^2} \sum_{k\in Z_\varepsilon} \varepsilon \xi_{B_\varepsilon^k}.$$

Le terme $l^{N-1} - C_0^{N-2} l\varepsilon^2$ tend vers l^{N-1} lorsque $\varepsilon \to 0$. Il reste a trouver la convergence de $\sum_{k\in Z_\varepsilon} \varepsilon\xi_{B_\varepsilon^k}$.

On introduit une fonction auxilliaire q_ε solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\triangle q_\varepsilon = -N & \text{dans } B_\varepsilon^k \\ \dfrac{\partial q_\varepsilon}{\partial n} = \varepsilon l & \text{sur } \partial B_\varepsilon^k. \end{cases} \tag{3.107}$$

Ce problème (Neumann non homogène)est coercif sur l'espace $H^1(\Omega)\backslash\mathbb{R}$, vérifions la condition de compatibilite dans le cas $N=3$

$$\int_{B_\varepsilon^k} -N.1dx + \int_{\partial B_\varepsilon^k} \varepsilon l.1dx = 0$$

$$-3|B_\varepsilon^k| + \varepsilon l|\partial B_\varepsilon^k| = -3\frac{4\pi}{3}(\varepsilon l)^3 + \varepsilon l(4\pi(\varepsilon l)^2) = 0$$

Tant que la fonction q_ε est définie dans l'espace quotient donc est définit de façon unique a une constante additive. Remarquons d'abord qu'on travaille sur une boule, on peut utiliser les coordonnées polaires, le système (3.107) s'ecrit

$$\begin{cases} -\left(q_\varepsilon'' + \dfrac{N-1}{r} q_\varepsilon'\right) = -N & \text{dans } B_\varepsilon^k \\ q_\varepsilon' n = \varepsilon l & \text{sur } \partial B_\varepsilon^k. \end{cases} \tag{3.108}$$

Si $\dfrac{dq_\varepsilon}{dr} = r$ dans B_ε^k, il est facile de voir que le système (3.108) est vérifie, pour fixer la constante additive à q_ε on met $q_\varepsilon = 0$ sur ∂B_ε^k, après on prlonge par zéro sur toute la cellule $Y_\varepsilon^k \setminus B_\varepsilon^k$.

On note par

$$\tilde{q}_\varepsilon = \begin{cases} q_\varepsilon & \text{dans } B_\varepsilon^k \\ 0 & \text{sur } Y_\varepsilon^k \setminus B_\varepsilon^k \end{cases} \tag{3.109}$$

On a toujours cette égalite $\|\tilde{q}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|q_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$.

On a $\dfrac{dq_\varepsilon}{dr} = r$ dans B_ε^k et comme $r < \varepsilon l$ donc

$$|\frac{dq_\varepsilon}{dr}| \leqslant \varepsilon \quad \text{p.p.}$$

De l'inégalite de Poincaré, on a

$$\begin{aligned} |\tilde{q}_\varepsilon|_{H^1(\Omega)} &= |\tilde{q}_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\nabla\tilde{q}_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant C(\Omega)|\nabla\tilde{q}_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\nabla\tilde{q}_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant C(\Omega)|\nabla q_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\nabla q_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \quad \leqslant C\varepsilon \end{aligned}$$

Ceçi implique que $\tilde{q}_\varepsilon$ converge vers 0 fortement dans $H^1(\Omega)$.

Revenons maintenant au laplacien $-\triangle\tilde{q}_\varepsilon$, pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned}
\langle -\triangle\tilde{q}_\varepsilon, \varphi\rangle &= \langle \tilde{q}_\varepsilon, -\triangle\varphi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \tilde{q}_\varepsilon(-\triangle\varphi)dx \\
&= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{Y_\varepsilon^k} \tilde{q}_\varepsilon(-\triangle\varphi)dx \\
&= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{B_\varepsilon^k} q_\varepsilon(-\triangle\varphi)dx,
\end{aligned}$$

une intégration par partie nous donne

$$\langle -\triangle\tilde{q}_\varepsilon, \varphi\rangle = \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{B_\varepsilon^k} \nabla q_\varepsilon \nabla\varphi dx - \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{\partial B_\varepsilon^k} q_\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial n}dx$$

Intégrons une deuxième fois, avant de suivre les calculs remarquons d'abord, le second terme de la dernière égalite est nulle puisque $q_\varepsilon = 0$ sur ∂B_ε^k.

$$\begin{aligned}
\langle -\triangle\tilde{q}_\varepsilon, \varphi\rangle &= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{B_\varepsilon^k} -\triangle q_\varepsilon \varphi dx + \sum_{k\in Z_\varepsilon}\int_{\partial B_\varepsilon^k} \frac{\partial q_\varepsilon}{\partial n}\varphi dx \\
&= \sum_{k\in Z_\varepsilon}\langle \varepsilon l \xi_{B_\varepsilon^k}, \varphi\rangle + \sum_{k\in Z_\varepsilon} -N\langle \chi_{B_\varepsilon^k}, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Les boules sont disjointes, on a $\sum_{k\in Z_\varepsilon}\chi_{B_\varepsilon^k} = \chi_{\cup B_\varepsilon^k}$, d'où

$$-\triangle\tilde{q}_\varepsilon = \sum_{k\in Z_\varepsilon} \varepsilon l \xi_{B_\varepsilon^k} - N\chi_{\cup B_\varepsilon^k}. \tag{3.110}$$

La fonction $\tilde{q}_\varepsilon$ converge vers zéro dans $H^1(\Omega)$ fortement, sa dérivation est continue au sens des distributions, donc $-\triangle\tilde{q}_\varepsilon$ converge vers zéro dans $H^{-1}(\Omega)$.

D'autre part la fonction $\chi_{\cup_{k\in Z_\varepsilon} B_\varepsilon^k}$ est une fonction périodique converge vers sa moyenne $\dfrac{1}{N} l^N S_N|\Omega|$,

Remarque 3.2. *On fait un petit calcul dans le cas* $N = 3$

$$|\cup_{k\in Z_\varepsilon}(\varepsilon B(y_2, l) + \varepsilon k)| \simeq \sum_{k\in Z_\varepsilon} |\varepsilon l B(0,1)| \simeq \frac{|\Omega|}{\varepsilon^3}\frac{4\pi}{3}(\varepsilon l)^3.$$

La fonction $3\chi_{\cup B_\varepsilon^k}$ *converge vers sa moyenne* $3\left(\dfrac{1}{3}\dfrac{|\Omega|}{\varepsilon^3}\dfrac{4\pi}{3}(\varepsilon l)^3\right) = \dfrac{4\pi}{3}l^3$.

Donc, (3.110) *sera*

$$-\triangle\tilde{q}_\varepsilon = \sum_{k\in Z_\varepsilon} \varepsilon l \xi_{B_\varepsilon^k} - 3\chi_{\cup B_\varepsilon^k}$$

Passoons à la limite, et divisons sur l

$$\sum_{k\in Z_\varepsilon} \varepsilon \xi_{B_\varepsilon^k} \longrightarrow \frac{4\pi}{3}l^2,$$

on conclut

$$\mu_\varepsilon = \frac{C_0}{l^2 - C_0 l \varepsilon^2}\varepsilon\xi_{B_\varepsilon^k} \longrightarrow \frac{C_0}{l^2}S_3 l^2$$

On conclut dans le cas où $N \geqslant 3$

$$\sum_{k\in Z_\varepsilon} \varepsilon\xi_{B^k_\varepsilon} \longrightarrow \frac{S_N}{l} l^N$$

donc

$$\mu_\varepsilon = \frac{(N-2)C_0^{N-2}}{l^{N-1} - C_0^{N-2}\varepsilon^{N-1}} \varepsilon\xi_{B^k_\varepsilon} \longrightarrow \frac{(N-2)C_0^{N-2}}{l^{N-1}} S_N l^{N-1}$$

c'est à dire

$$\mu = (N-2)C_0^{N-2} S_N.$$

Ce qui termine la vérification de (H.4), puisque

$$\langle \lambda_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle = 0, \forall v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \quad \text{tel que } v_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } T_\varepsilon.$$

car λ_ε ne prend que les masses sur les bords des trous.

Preuve de la convergence I_5**.** S_N est la surface de la sphère unité dans un espace de dimension N (le rayon est $r = 1$)

$$S_N = \frac{2\pi^{(N+1)/2}}{\Gamma((N+1)/2)}$$

S_{δ_ε} est l'hypersphère dans un espace de dimension N de rayon δ_ε

$$S_{\delta_\varepsilon} = \frac{2\pi^{(N+1)/2}(\varepsilon\delta_\varepsilon)^{N-1}}{\Gamma((N+1)/2)} = (\delta_\varepsilon)^{N-1} S_N.$$

$$\int_0^T \int_{C_{D_\varepsilon}} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon} (G_{\delta_\varepsilon}(\psi) - G_{\delta_\varepsilon}(\varphi))\zeta dxdt$$

$$= \varepsilon^{N-2} \sum_{k\in Z_\varepsilon} \left(\fint_{S^k_{\delta_\varepsilon}} \psi - \fint_{S^k_{\delta_\varepsilon}} \varphi \right) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} .. \int_0^{\pi} sin^{N-2}\theta_1 sin^{N-3}\theta_2..sin\theta_{N-2} d\theta_1 d\theta_2..d\theta_{N-2} d\theta_{N-1}$$

$$\int_{\delta_\varepsilon}^{r_\varepsilon} \left(\int_0^T \frac{\partial \bar{u}^k_\varepsilon}{\partial r}(\bar{y})\zeta(t)dt \right) \frac{dW_{r_\varepsilon}}{dr} r^{N-1} dr$$

$$= \frac{\varepsilon^{N-2}(N-2)(\delta_\varepsilon r_\varepsilon)^{N-2}}{(r_\varepsilon^{N-2} - \delta_\varepsilon^{N-2})} \sum_{k\in Z_\varepsilon} \left(\fint_{S^k_{\delta_\varepsilon}} \psi - \fint_{S^k_{\delta_\varepsilon}} \varphi \right) \int_{S_N} \int_0^T \left(\bar{u}^k_\varepsilon\rfloor_{|\bar{y}|=\delta_\varepsilon} - \bar{u}^k_\varepsilon\rfloor_{|\bar{y}|=r_\varepsilon} \right) \zeta dt d\sigma_{\bar{y}}$$

On remarque qu'on a

$$\fint_{S_R} h d\sigma = \fint_{S_1} h\rfloor_{r=R} d\sigma, S_1 \text{ la sphère de rayon } 1 \text{ et de centre } 0. \tag{3.111}$$

On remplaçe

$$\int_{S_N} u^k_\varepsilon\rfloor_{r=\delta_\varepsilon} d\sigma_{S_N} = \int_{S_{\delta_\varepsilon}} u^k_\varepsilon d\sigma_{S_{\delta_\varepsilon}}.$$

Si on prend la moyenne de cette dernière,

$$\fint_{S_N} u^k_\varepsilon\rfloor_{r=\delta_\varepsilon} d\sigma = S_N \fint_{S^k_{\delta_\varepsilon}} \tilde{u}_\varepsilon d\sigma$$

On sait que

$$\frac{dW_{r_\varepsilon}}{dr} = \frac{(-N+2)r^{(-N+1)}}{r_\varepsilon^{(-N+2)} - \delta_\varepsilon^{(-N+2)}} = \left(\frac{(-N+2)(\delta_\varepsilon r_\varepsilon)^{N-2}}{\delta_\varepsilon^{N-2} - r_\varepsilon^{N-2}} \right) \left(\frac{1}{r^{N-1}} \right).$$

En remplaçant maintenant

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{C_{D_\varepsilon}} \nabla u_\varepsilon \nabla w_{r_\varepsilon} (G_{\delta_\varepsilon}(\psi) - G_{\delta_\varepsilon}(\varphi))\zeta dxdt = \\
&= \frac{\varepsilon^{N-2}(N-2)(\delta_\varepsilon r_\varepsilon)^{N-2}}{\varepsilon^N (r_\varepsilon^{N-2} - \delta_\varepsilon^{N-2})} \sum_{k\in Z_\varepsilon} \int_0^T \left(\fint_{S^k_{\delta_\varepsilon}} \psi - \fint_{S^k_{\delta_\varepsilon}} \varphi \right) \left(S_N \fint_{S^k_{\delta_\varepsilon}} \tilde{u}_\varepsilon d\sigma - S_N \fint_{S^k_{r_\varepsilon}} \tilde{u}_\varepsilon d\sigma \right) \zeta dt \\
&= \frac{S_N \varepsilon^{N-2}(N-2)(\delta_\varepsilon r_\varepsilon)^{N-2}}{\varepsilon^N (r_\varepsilon^{N-2} - \delta_\varepsilon^{N-2})} \int_0^T \int_\Omega \left(G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) - G_{r_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)\right) \left(G_{\delta_\varepsilon}(\psi) - G_{\delta_\varepsilon}(\varphi)\right) \zeta(t) dxdt \\
&= \left(\frac{\delta_\varepsilon^{N-2}}{\varepsilon^2} \right) \left(\frac{S_N (N-2) r_\varepsilon^{N-2}}{(r_\varepsilon^{N-2} - \delta_\varepsilon^{N-2})} \right) \int_0^T \int_\Omega \left(G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) - G_{r_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)\right) \left(G_{\delta_\varepsilon}(\psi) - G_{\delta_\varepsilon}(\varphi)\right) \zeta(t) dxdt \\
&= \gamma_\varepsilon \left(\frac{S_N (N-2)}{(1 - (\delta_\varepsilon / r_\varepsilon)^{N-2})} \right) \int_0^T \int_\Omega \left(G_{\delta_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon) - G_{r_\varepsilon}(\tilde{u}_\varepsilon)\right) \left(G_{\delta_\varepsilon}(\psi) - G_{\delta_\varepsilon}(\varphi)\right) \zeta(t) dxdt \\
&\qquad\qquad\qquad \longrightarrow S_N \gamma \int_{\Omega^T} (v - u) (\psi - \varphi) \zeta(t) dxdt.
\end{aligned}
$$

Bibliographie

[1] G. ALLAIRE, Homogenization of the Navier Stokes equations in open sets perforated with tiny holes. I. *Abstract framework, a volume distribution of holes. Arch. Rational. Mech. Anal.* 113 (1991) 209 − 259.

[2] G. ALLAIRE, Homogenization and two-scale convergence, SIAM J. Math. Analysis, Vol. 23, (1992), p. 1482-1518.

[3] M. BELLIEUD, G. BOUCHITTÉ, Homogenization of elliptic problems in a fiber reinforced structure. Non local effects. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pis Cl. Sci.* (4) **26 (3)** (1998) 407-436.

[4] M. BELLIEUD, I. GRUAIS, Homogenization of an elastic material reinforced by very stiff or heavy fibers. Non local effects. Memory effects. *J. Math. Pures Appl.* **84 (1)** (2005) 55-96.

[5] M. BELLIEUD, Homogenization of evolution problems for a composite medium with very small and heavy inclusions, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **11** (**2**), (2005) 266-284.

[6] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, Asymptotic Analysis for Periodic Structures, *North-Holland, Amsterdam, 1978.*

[7] F. BENTALHA, I. GRUAIS, DAN. POLISEVSKI, Homogenization of a conductive suspension in a Stokes-Bussinesq flow, Applicable Analysis. 85 (6-7) (2006), 811-830.

[8] F. BENTALHA, I. GRUAIS, DAN. POLISEVSKI, Asymptotic thermal flow around a highly conductive suspension. Analele Universitatii din Bucuresti, Seria Matematica, Anul LV (2006), pp.17-26.

[9] F. BENTALHA, I. GRUAIS, D. POLISEVSKI, Diffusion process in a rarefied binary structure. Revue Roumaine de Mathématiques Pures et appliquées, 52 (2007), 2, 129-149.

[10] F. BENTALHA, I. GRUAIS, D. POLISEVSKI, Diffusion in a highly rarified binary structure of general periodic shape. Applicable analysis. Vol 87, N° 6-June 2008, 635-655.

[11] S. BRAHIM - OTSMANE, G. A. FRANCFORT, F. MURAT, Correctors for the homogenization of the wave and heat equations, *J. Math. Pures Appl.*, (71), 1992, 197-231.

[12] H. BREZIS, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Dunod Paris (1983).

[13] M. BRIANE, Homogenization of the Stokes equations with high-contrast viscosity. J. Math. Pures Appl. 82 (2003) 843-876.

[14] M. BRIANE, N. TCHOU, Fibered microstructure for some non-local Dirichlet forms. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **30** (2001) 681-712.

[15] J. CASADO-DIAZ, Two-scale convergence for nonlinear Dirichlet problems in perforated domains. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **130 A** (2000) 249-276.

[16] S. CHENNOUF, F. BENTALHA, Diffusion process in a perforated domain around a vanishing suspension Apparaitre dans *Asymptotic Analysis.*

[17] D. CIORANESCU, F. MURAT, A strange term coming from nowhere. In *Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials.*, volume 31 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, A. Cherkaev, R. Kohn (eds.), pages 45-93. Birkhäuser, Boston 1997.

[18] D. CIORANESCU, P. DONATO, F. MURAT, E. ZUAZUA, Homogenization and corrector for the wave equation in domains with small holes. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 18 (1991), p. 251-293.

[19] D. CIORANESCU, P. DONATO, An introduction to homogenization. Oxford Lecture Series in Math. App., Vol. 17, Oxford University Press. (1999).

[20] D. CIORANESCU, A. DAMLAMIAN, G. GRISO, Periodic unfolding method in homogenization, C.R. Académie des Sciences de Paris, Série I335 (2002), p. 99-104.

[21] J. L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Gauthiers-Villars, Paris (1969).

[22] F.MURAT, H-convergence, Rapport du séminaire d'Analyse fonctionnellle et Nmérique de l'Université d'Alger, (1978).

[23] G. NGUETSENQ, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, SIAM J. Math. Anal., Vol. 20, (1989), p. 608-629.

[24] G CHOQUET, Theory of capacities, Annales de l'Institut Fourier, Tome 5, (1954) p. 113-140.

[25] M. SFAXI, Analyse asymptotique de problèmes d'évolution dégénérés dans des structures hétérogènes et anisotropes. Thèse de Doctorat, Université de Provence - U.F.R. M.I.M, 2006.

[26] M. SFAXI, A. Sili, Correctors for Parabolic Equations in a Heterogeneous Fibered Medium. Bollettino U.M.I. (8) 10-B (2007), 1025-1053.

[27] S. SPAGNOLO, Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 21, 1967, p. 657-699.

[28] L. TARTAR, Estimations of homogeneous coefficients, Topics in the Mathematical Modelling of composite Materials, ed. A. Cherkaev and R. Kohn, Birkäuser, Boston, (1997), p. 9-20.

[29] L. TARTAR, Cours Peccot au Collège de France, Unpublished, partially written in Meyers, (1977).