République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Batna 2, Mostefa Ben Boulaid
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques
Laboratoire des Techniques Mathématiques, LTM

THÈSE

Présentée pour obtenir le diplôme de doctorat en sciences en mathématiques

Discipline:
Mathématiques Appliquées

Présentée et soutenue publiquement par

Hassna CHEBBAH

Sur les méthodes de Nyström et applications aux équations intégrales et intégro-différentielles

Soutenue le : 17/ 07/ 2019.

Devant le jury composé de:

Said GUEDJIBA	Professeur	Université de Batna 2	Président
Abdelaziz MENNOUNI	Professeur	Université de Batna 2	Rapporteur
Farida LOMBARKIA	Professeure	Université de Batna 2	Examinatrice
Ali HAKEM	Professeur	Université de Sidi-Bel-Abbès	Examinateur
Nadjib BOUSSETILA	Professeur	Université de Guelma	Examinateur
Abdelouahab MANSOUR	Professeur	Université de d'Eloued	Examinateur

THÈSE

Remerciements

Je tiens à exprimer tout d'abord toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Pr. Mennouni Abdelaziz pour m'avoir proposer ce sujet, pour son aide, son soutien et ses conseils, je le remercie infiniment pour sa constante disponibilitée et son assistance dans tous les aspects de cette thèse.
Je tiens à remercier vivement Monsieur le professeur Said Guedjiba qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je suis très sensible à l'honneur que me font Madame et Messieurs les professeurs, Farida Lombarkia de l'Université de Batna 2, Ali Hakem de l'Université de Sidi-Bel-Abbès, Nadjib Boussetila de l'Université de Guelma et Abdelouahab Mansour de l'Université d'Eloued, pour avoir accepté d'examiner ce travail de thèse et de participer au jury.

Les plus sincères remerciements s'adressent à Nazih-eddine Belkacem de l'Université d'Bordj Bou Arreridj et Saliha Zaouia de l'Université de Batna 2 qui m'ont accompagné professionnellement, et amicalement durant toute cette période.

Je tiens aussi à remercier mes amis et mes collègues qui m'ont apporté leur aide et qui m'ont soutenu moralement tout au long de ces années d'études.

Je veux terminer ces remerciement par ma famille, mon mari et mon fils Abdellatif qui me soutiennent continuellement.
Enfin, je voudrais rendre un vibrant hommage à ma mère qui nous a quité. Ce travail est dédié á sa mémoire.

Table des matières

Introduction

Les équations intégrales présentent un grand intérêt scientifique, elles sont parmi les branches les plus importantes en mathématiques, il est connu qu'elles touchent divers domaines des mathématiques appliquées et de la physique. En effet, la plus part des modèles construits à partir des problèmes de physiques d'ingénierie et de biologie, sont mieux traités lorsqu'ils sont présentés sous la forme d'équations intégrales. Les méthodes d'équations intégrales sont particulièrement adaptées aux problèmes de calculs dans le cas des milieux infinis ou lorsque les frontières sont mobiles ou inconnues. Ces méthodes sont par ailleurs d'une grande précision.

Il est entendu qu'une équation intégrale est une équation qui fait intervenir simultanément comme inconnues une fonction et son intégrale, c.a.d. une équation dans laquelle l'inconnu apparaît sous le signe intégrale. La résolution des équations aux dérivées partielles est l'un des champs les plus importants d'applications pour les équations intégrales.

Un grand nombre d'études techniques et théoriques peut être formulé soit au moyen d'équations différentielles, soit au moyen d'équations intégrales notamment les valeurs propres en théorie de l'élasticité ou de dynamique des structures. Si l'on a recours aux équations intégrales, les équations tiennent compte des conditions aux limites.

Le domaine des équations intégrales se veut être plus générale que celui des équations différentielles. En effet une équation différentielle qui contient une opération intégrale serait une équation intégro-différentielle seulement, l'opération de différentiation s'efface devant la nouvelle opération, absolument de la même manière que la résolution des équations ordinaires, algébriques ou transcendantes, passe en seconde ligne devant l'opération de différentiation ; il n'y a donc aucune ambiguité à craindre.

Très souvent le choix d'une équation intégrale plutôt que celui d'une équation différentielle ordinaire ou une équation aux dérivées partielles est dicté par la simplicité qui découle de la réduction d'un problème aux valeurs initiale ou d'un problème aux limites. Par exemple, par ce procédé, un problème aux limites pour une équation aux dérivées partielles à deux variables indépendantes se trouve réduit à la résolution d'une équation intégrale à une seule fonction inconnue dépendant d'une seule variable. Ainsi un modèle mathématique d'un problème physique se trouve réduit à la résolution d'une seule équation.
Historiquement, c'est la résolution des problèmes aux limites qui a été à l'origine du développement systématique de la théorie des équations intégrales, ceci a créé une interaction féconde entre ces deux branches de mathématiques.
En 1837, J. Liouville (1809-1882) a publié une discussion sur la relation entre les équations intégrales et les équations différentielles dans lesquelles il montrait qu'une solution particulière d'une équation différentielle linéaire est obtenue en résolvante une équation intégrale. En 1887, V. Volterra (1860-1940) a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés. En outre, il a étendu la théorie d'équations intégrales aux équations intégro-différentielles et aux équations intégrales singulières. Fredholm (1866-1927) a étudie la méthode pour résoudre les équations intégrales de deuxième espèce, il a donné la première solution générale du problème de Dirichlet.
L'application des équations intégrales remontent au début des années 60 méthodes des singularités utilisées en aérodynamique puis en rayonnements acoustique et en élasticité. Elle sont en particulier bien adaptées aux systèmes occupant un domaine infini.

L'étude théorique des équations intégrales porte sur deux types principaux : équations de Fredholm et équations de Volterra. Dans le type d'équations de Fredholm il y a une classe d'équations très importante, dite équations intégrales singulières, dans laquelle beaucoup de problèmes aux limites mixtes rencontrés en élasticité se ramènent à la résolution d'une équation intégrale singulière de Cauchy.

J. Fourier (1768-1830) est le premier mathématicien qui a découvert ce genre d'équations intégrales dû au fait qu'il a obtenu la formule de la transformation de Fourier. Il est clair qu'on peut interpréter la formule d'inversion en tant que fournir l'opérateur inverse de l'opérateur d'intégrale de Fourier.

Ainsi, la théorie des équations intégrales a été un domaine de recherche actif dans les mathématiques appliquées et la physique mathématique. Vu que ce genre d'équa-

tions est très bien conditionné à l'approximation numérique, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation des différents problèmes fondamentaux scientifiques qui étaient difficiles, à savoir impossible à résoudre dans le passé. Ainsi, notons qu'il existe actuellement un grand nombre de méthodes numériques utilisées dans les différentes branches de la recherche scientifique, ce qui rend notre présentation ne se veut ni exhaustive, ni trop théorique.
L'objéctif de notre recherche et d'insister sur la pluridisciplinarité des méthodes rencontrées.
L'équation intégrale à laquelle nous nous intéressons dans ce travail est une équation de Fredholm de deuxième espèce.
Pour $f \in C(D)$, on cherche $u \in C(D)$ solution de

$$\lambda u(s) - \int_a^b K(s,t)u(t)dt = f(s), \quad a \leq s \leq b,$$

où les fonctions $K(.,.)$ et $f(.)$ sont données et $u(.)$ est la fonction inconnue.
Les deux méthodes numériques les plus utilisées pour la résolution de cette équation sont les méthodes de projection et celle de Nyström. Dans les méthode de Nyström, appelées aussi méthodes de quadrature, les formules de quadrature sont utilisés pour approcher l'intégrale exacte dans l'équation. Tandis que, dans les méthodes de projection, on utilise les formules de quadrature pour approcher des intégrales figurant dans la matrice du système linéaire à résoudre.
Dans cette thèse nous nous intéressons aux méthodes de Nyström, nous commençons par rappeler la méthode original de Nyström pour la résolution d'une équation intégrale qui suppose que la fonction noyau et au moins continue ensuite nous donnons l'application des formules de quadrature basées sur des quasi-interpolants splines à la résolution d'une classe d'équations via deux méthodes de Nyström et ce dans le but d'améliorer l'ordre de convergence obtenu par la méthode original de Nyström, des résultats explicites pour les splines octiques des quasi-interpolants sont fournis.
Les travaux présentés dans cette thèse visent d'une part à reprendre des méthodes numériques existantes dans la littérature utilisant des quasi-interpolants splines et d'autre part à développer de nouvelles méthodes.
Suivant ces axes normaux, notre travail est divisé en quatre chapitres :

Le premier est une introduction à la terminologie et à la classification des équations intégrales, qui a pour objectif, de familiariser le lecteur de cette thèse avec le concept d'équation intégrale. Ainsi, nous y exposons certains modèles typiques pour voir d'où de telles équations sont issues et d'illustrer surtout leur lien avec les équations différentielles.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons un cadre général de l'utilisation des quasi-interpolants splines dans la résolution numérique de l'équation intégrale généralisée de Fredholm du second type par deux méthodes de Nyström. Des résultats explicites pour des quasi-interpolantes splines octiques sont donnés.

Dans le troisième chapitre, nous présentons deux méthodes pour résoudre des équations intégrales faiblement singulères dans deux espaces différents. En premier lieu, nous nous intéressons à de cette classe d'équation intégrales dans l'espace des fonctions continues via une méthode d'intégration produit. En deuxième lieu, nous présentons une nouvelle technique pour résoudre les équations intégrales du second type avec noyau logarithmique. Tout d'abord, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème donné dans un espace de Hilbert. Ensuite, nous discutons une méthode de projection pour résoudre des équations intégrales de seconde espèce avec noyau logarithmique. Cette méthode est basée sur les polynômes de Legendre décalés. Nous examinons l'existence de la solution pour l'équation approchée et nous fournissons une nouvelle estimation de l'erreur pour les solutions numériques. Enfin des résultats numériques sont prévus pour illustrer les résultats théoriques. Les résultats de ce chapitre sont publiés dans [27].

Dans le quatrième chapitre, nous présentons trois méthodes pour résoudre deux classes d'équations intégrales du second type. Tout d'abord nous proposons deux méthodes de Kantorovich pour résoudre numériquement une équation intégrale issue de la modélisation mathématique en biologie, nous utilisons une suite de projections orthogonales de rangs finis. La première méthode est basée sur des projections générales sur grille et la deuxième est établie en utilisant les polynômes de Legendre. Enfin Une nouvelle analyse de convergence est effectuée, les théorèmes associés sont démontrés et une nouvelle méthode de Nyström est introduite pour résoudre une équation intégrale de Fredholm du second type. Cette partie a fait l'objet de [28].

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Classification et terminologie

1.1.1 Équations intégrales

Divers problèmes classique dans la théorie des équations différentielles mênent aux équations intégrales et peuvent êtres traités d'une façon plus satisfaisantes, aussi divers problèmes en sciences appliquées mênent aux équations intégrales de manière naturelle.
Néaumoins les équations intégrales ont un caractère fort différent des équations différentielles que l'on recontre dans la plus part des phénomènes physiques (par exemple de diffusion). La principale source d'équations de ce type est l'étude du transfert d'énergie par radiation qui, à la différence d'autres phénomènes ne peut pas être décrit à l'aide d'équations mettant en jeu un simple champs scalaire. Les lois de conservations deviennent alors plus complexes et ne peuvent s'éxprimer que sous forme d'intégrales étendues à toute la surface considérée i.e., on ne peut plus étudier le phénomène localement.

1.1.2 Opérateur à noyau

Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^m$, $C(D)$ l'espace des fonctions continues de D dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ munit de la norme :$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|, x \in D\}$. On aura parfois besoin de se placer dans l'espace complété de $C(D)$ pour la norme du produit scalaire, c.a.d. l'espace de Hilbert $H = L^2(D)$, espace des fonctions de D dans $\mathbb{R}$ de module carré intégrable.
On va considérer des équations mettant en jeu des intégrales sous la forme d'un

opérateur linéaire $T : C(D) \to C(D)$. Pour le définir on se donne une fonction, que l'on nommera fonction noyau, $k : D \times D \to \mathbb{R}$, continue qui permet de définir l'opérateur à noyau par la formule

$$T : f \in C(D) \mapsto Tf \in C(D),$$

$$Tf(x) = \int_D f(y)k(x,y)dy.$$

Cet opérateur est continu, de norme

$$\|T\|_{L(C(D),C(D))} \leq \max\{\int |k(x,y)|dy, x \in D\}$$

. Cet opérateur est appelé opérateur d'intégration et l'équation qui lui est associée est appelée **équation intégrale**.

Définition 1.1 *On appelle **équation intégrale** une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration*

La forme générale d'une équation intégrale sur $[a,b]$ d'inconnue $u(.)$ est donnée par

$$f(x) = a(x)u(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt,$$

où $f(.), a(.)$ et $k(.,.)$ sont données, la fonction $f(.)$ corréspond à une force externe.

Exemple 1.1 *1.*

$$y(s) = s - \int_0^s (s-t)y(t)dt, \quad 0 \leq s \leq 1;$$

2.

$$y(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 (1-3st)y(t)dt, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Exemple 1.2 ***Le problème de contrôle du commerçant.***
Pour utiliser de manière optimale l'espace de stockage, un magasinier souhaite que le stock de la marchandise en magasin reste constant. On peut montrer que pour gérer cela, il faut résoudre une équation intégrale.
Nous allons assumer que nous avons les définitions suivantes :

1. *a = nombre de produits en stock à l'instant $t = 0$,*

2. $k(t) =$ *reste des produits en stock (en pourcentage) à l'instant* t,
3. $u(t) =$ *la vitesse (produits / unité de temps) avec laquelle les nouveaux produits sont achetés,*
4. $u(\tau)\Delta\tau =$ *la quantité de produits achetés durant l'intervalle de temps* $\Delta\tau$.

La quantité totale de produits en stock au moment t *est alors donnée par :*

$$ak(t) + \int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

et la quantité de produits en stock est constante si, pour une certaine constante c_0, *nous avons*

$$ak(t) + \int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau = c_0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Pour savoir à quelle vitesse nous devons acheter de nouveaux produits (c.à.d. $u(.)$*) pour maintenir le stock constant, nous avons donc besoin de résoudre l'équation intégrale de Volterra ci-dessus*

Exemple 1.3 ***Equations intégrales de type de convolution***
Les équations intégrales du type :

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)u(t)dt = f(x) + (k \star u)(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

où $(k \star u(.))$ *est le produit de convolution de* k *et* u *sont dites équations intégrales de type convolution. La technique la plus importante lorsqu'on travaille avec les convolutions est la transformation de Laplace. Prenons comme exemple l'équation*

$$u(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad 0 \leq x \leq 1.$$

C'est une équation de type convolution avec $f(x) = x$ *et* $k(x) = x$. *Observons que* $L(x) = \frac{1}{s^2}$ *et la transformation de Laplace de l'équation nous donne*

$$L[u](s) = \frac{1}{s^2} - L[x \star u](s) = \frac{1}{s^2} - L[x](s)L[u](s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}L[u](s),$$

i.e.

$$L[u](s) = \frac{1}{1+s^2},$$

et donc

$$u(x) = L^{-1}\left[\frac{1}{1+s^2}\right](x) = \sin x.$$

.

1.1.3 Classification des équations intégrales

Il existe différents types d'équations intégrales qu'on peut classer par leurs caractéristiques en cinq types suivants :

1. **Le domaine d'intégration :** Généralement, les équations intégrales dans lesquelles le domaine d'intégration varie avec la variable indépendante dans l'équation sont dites de type **Volterra** et ceux dont le domaine d'intégration est fixé sont dites de type **Fredholm**.

2. **Le type (espèce) d'une équation :** Le type d'une équation se rapporte à la localisation de la fonction inconnue, pour les équations de première espèce, la fonction inconnue apparaît uniquement à l'intérieur du signe intégral, cependant pour les équations de seconde espèce, la fonction inconnue apparaît également à l'extérieur du signe intégral.
   Une équation de la forme

$$\int_a^b k(x,t)u(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

   est dite équation de Fredholm de premiere espèce, l'équation intégrale de seconde espèce est définie par

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x,t)u(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad \lambda \neq 0.$$

   Le paramètre numérique λ généralement complexe, joue un rôle crucial dans la théorie et les applications pratiques, il est habituellement composé de quantités physiques.
   Pour $f = 0$, cette équation devient un problème de valeurs propres et l'on cherche la valeur propre λ et la fonction propre associée u.
   La forme classique d'une équation intégrale de Volterra de première espèce est

$$\int_a^x k(x,t)u(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

   L'équation de Volterra de seconde espèce s'écrit sous la forme

$$\lambda u(x) - \int_a^x k(x,t)u(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

On doit noter aussi qu'une équation de Fredholm peut être réduite à une équation de Volterra si son noyau vérifie

$$k(x,t) = 0, \quad a \leq x \leq t \leq b.$$

3. **La nature de la fonction connue f :** Une classe liée à ces équations de Fredholm et de Volterra est qu'elles peuvent êtres homogènes si, $f(x) = 0$ sur $[a,b]$, et non homogène sinon. Par exemple l'équation

$$u(s) - \int_0^1 k(s,t)u(t)dt = 0, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

est une équation intégrale homogène de Fredholm de deuxième espèce.

L'équation

$$\int_{-1}^{s} k(s,t)u(t)dt = f(s), \quad a \leq s \leq b$$

est une équation intégrale non homogène de Volterra de première espèce.

4. **Linéarité par rapport à la fonction inconnue u :** Une équation intégrale peut être clasée comme étant une équation intégrale linéaire ou bien une équation intégrale non linéaire. Il y a similitude parfaite avec la classification des équations différentielles partielles ou ordinaires. L'équation

$$u(s) - \int_a^b k(s,u(t))dt = f(s), \quad a \leq s \leq b,$$

est une équation intgrale de Fredholm non linèaire de deuxième espèce.

5. **Nature du noyau et singularité :** Les équations intégrales de Fredholm et de Volterra constituent les deux equations les plus fréquemment utilisées, a ces deux principales catégories nous pouvons considérer deux autres types, à savoir les equations intégro-différentielles et les equations intégrales singulières. L'adjective singulière est employé d'une part, quand l'intégration est impropre, d'autre part si l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies ou si le noyau est non borné sur l'intervalle donné, évidement, une équation intégrale peut être singulière dans les deux sens.
Dans le type d'équations de Fredholm il y a une classe d'équations très importante, dans laquelle beaucoup de problèmes aux limites mixtes rencontrés en élasticité se ramènent à la résolution d'une équation intégrale singulière de

Cauchy de la forme

$$au(s) + \frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{t-s}dt + \int_{-1}^{1}k(s,t)u(t)dt = f(s), \quad |s| < 1,$$

où a et b sont deux constantes réelles, k et f sont deux fonctions connues. En mécanique de la rupture, les propriétés de la solution d'une telle équation sont utilisées pour avoir une idée sur la propagation de la fissure.
Un autre exemple d'équation intégrale singulière est l'équation de la forme

$$u(s) - \int_{0}^{s}\frac{u(t)}{(s-t)^{\alpha}}dt = f(s), \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

qui est une équation intégrale de Volterra faiblement singulière de deuxième espèce. On peut aussi considérer l'équation intégrale d'Abel de deuxième espèce qui a la forme suivante :

$$u(s) - \int_{a}^{b}\frac{u(t)}{\sqrt{s-t}}dt = f(s), \quad a \leq s \leq b.$$

Nous avons jusqu'ici, éssayé de couvrir les principaux éléments surgissant dans la classification des équations intégrales.

1.2 Liaison entre les EDO et les équations intégrales

Parfois il y a intérêt à réduire la résolution d'une équation différentielle à la résolution d'une équation intégrale. La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = F(x), \tag{1.1}$$

à coefficient continus $a_i(x) \quad i = 1, 2, \cdots, n$, avec les conditions intiales

$$y(a) = C_0, \quad y'(a) = C_1, \cdots, y^{n-1}(a) = C_{n-1}$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$u(x) + \int_{a}^{x}k(x,t)u(t)dt = f(x).$$

Pour arriver à cette équation intégrale, on utilise la transformation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x),$$

d'où, par intégration de a à x, on obtient

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int_a^x u(t)dt + C_{n-1}.$$

Les intégrales successives sont

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int_a^x \int_a^{x_2} u(x_1)dx_1dx_2 + C_{n-1}(x-a) + C_{n-2},$$

$$\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} = \int_a^x \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} u(x_1)dx_1dx_2dx_3 + C_{n-1}\frac{(x-a)^2}{2!} + C_{n-2}(x-a) + C_{n-3},$$

et en procédant de la même manière, et en utilisant la formule

$$\int_a^x \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} \cdots \int_a^{x_2} u(x_1)dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}u(t)dt \tag{1.2}$$

on voit qu'on peut 'écrire l'équation différentielle (1.1) comme suit

$$u(x) + \int_a^x k(x,t)u(t)dt = f(x),$$

avec

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

et

$$\begin{aligned} f(x) = F(x) - C_{n-1}a_1(x) - \left[(x-a)C_{n-1} + C_{n-2}\right] a_2(x) - \cdots \\ - \left[C_{n-1}\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + C_1(x-a) + C_0\right] a_n(x). \end{aligned}$$

Montrons la formule (1.2) pour $n = 2$.

Lemme 1.1 *Si f est continue pour $x \geq a$ alors,*

$$\int_a^x \int_a^s f(y)dyds = \int_a^x f(y)(x-y)dy.$$

Preuve.

Soit

$$F(s) := \int_a^s f(y)dy.$$

On a

$$\int_a^x \int_a^s f(y)dyds = \int_a^x F(s)ds = \int_a^x 1.F(s)ds.$$

En intégrant par partie on trouve

$$\int_a^x \int_a^s f(y)dyds = [sF(s)]_a^x - \int_a^x sF'(s)ds$$

$$= xF(x) - aF(a) - \int_a^x sf(s)ds$$

$$= x\int_a^x f(y)dy - 0 - \int_a^x yf(y)dy$$

$$= \int_a^x f(y)(x-y)dy.$$

■

Illustrons cette partie par les exemple des équations différentielles du premier et du second ordre suivants.

1.2.1 Réduction d'une équation différentielle du premier ordre en équation intégrale

On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} u'(x) = f(x,u), \\ u(x_0) = u_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

En intégrant de x_0 à x on obtient

$$\int_{x_0}^x u'(t)dt = \int_{x_0}^x f(t,u(t))dt,$$

i.e.

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(t,y(t))dt. \tag{1.4}$$

D'autre part, si on a (1.4), on trouve

$$u'(x) = f(x, u(x)) \quad \text{avec} \quad u(x_0) = u_0,$$

ce qui implique (1.3). Donc (1.3) et (1.4) sont équivalentes.
Parfois il y a intérét à réduire la résolution d'une équation différentielle à la résolution d'une équation intégrale et vice-versa.
En générale nous avons

Problème à valeur initiale $\Rightarrow$ équation de Volterra ;

Système dynamique $\Rightarrow$ équation de Volterra ;

Problème aux limites$\Rightarrow$ équation de Fredholm.

1.2.2 Méthode d'Emile Picard

Soit à résoudre le problème à valeurs initiales

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u), \\ u(x_0) = A, \end{cases}$$

ou bien de manière équivalente, résoudre l'équation intégrale

$$u(x) = A + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt.$$

Nous allons résoudre cette équation intégrale en construisant une suite d'approximations successives à $u(.)$. Commencons par choisir une approximation initiale, $u_0(.)$ (il est courant d'utiliser $u_0(x) = u(x_0)$), ensuite nous allons définir la suite $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$, par

$$\begin{aligned} u_1(x) &= A + \int_{x_0}^{x} f(t, u_0(t))dt, \\ u_2(x) &= A + \int_{x_0}^{x} f(t, u_1(t))dt, \\ &\vdots \quad \vdots \\ u_n(x) &= A + \int_{x_0}^{x} f(t, u_{n-1}(t))dt, \end{aligned}$$

on espère que

$$u(x) \approx u_n(x).$$

Par le célèbre théorème de Picard, nous savons que sous certaines conditions sur $f(x,u)$, nous avons

$$u(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(x).$$

Exemple 1.4 *Résoudre l'équation*

$$\begin{cases} u'(x) = 2x(1+u), \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Par la méthode de Picard, nous avons l'équation intégrale

$$u(x) = \int_0^x 2t(1+u(t))dt,$$

et comme approximation initiale, on prend $u_0(x) = 0$. *On obtient alors*

$$u_1(x) = \int_0^x 2t(1+u_0(t))dt = \int_0^x 2t(1+0)dt = \int_0^x 2tdt = x^2,$$

$$u_2(x) = \int_0^x 2t(1+u_1(t))dt = \int_0^x 2t(1+t^2)dt = \int_0^x 2t+2t^3dt = x^2 + \frac{1}{2}x^4,$$

$$u_3(x) = \int_0^x 2t(1+t^2+\frac{1}{2}t^4)dt = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{x^6}{6},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$u_n(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}.$$

On voit alors que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(x) = \exp(x^2) - 1,$$

qui est la solution exacte de l'équation intégrale.

1.2.3 Réduction d'une équation différentielle du second ordre à une équation intégrale

Exemple 1.5 *Soit à résoudre le problème à valeur initiale*

$$u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = g(x); \quad u(0) = \alpha; \quad u'(0) = \beta.$$

Modifions la variable x en y, puis intégrons de 0 à z :

$$\int_0^z u''(y)dy + \int_0^z a(y)u'(y)dy + \int_0^z b(y)u(y)dy = \int_0^z g(y)dy.$$

En utilisant l'intégration par partie sur le second terme à gauche on trouve

$$[u'(y)]_0^z + [a(y)u(y)]_0^z - \int_0^z a'(y)u(y)dy + \int_0^z b(y)u(y)dy = \int_0^z g(y)dy.$$

Vu les conditions initiales, on obtient

$$u'(z) - \beta + a(z)u(z) - a(0)\alpha - \int_0^z [a'(y) - b(y)]u(y)dy = \int_0^z g(y)dy.$$

Intégrant encore une fois par rapport à z entre 0 et x :

$$[u(z)]_0^x - \beta x + \int_0^x a(z)u(z)dz - a(0)\alpha x - \int_0^x \int_0^z [a'(y) - b(y)]u(y)dydz = \int_0^x \int_0^z g(y)dydz.$$

Ceci peut être simplifié en utilisant le lemme (1.1)

$$u(x) - \alpha - \beta x + \int_0^x a(y)u(y)dy - a(0)\alpha x - \int_0^x (x-y)[a'(y) - b(y)]u(y)dy = \int_0^x (x-y)g(y)dy,$$

$$u(x) + \int_0^x [a(y) - (x-y)[a'(y) - b(y)]]u(y)dy = \int_0^x (x-y)g(y)dy + [\beta + a(0)\alpha]x + \alpha.$$

Posant

$$k(x,y) = a(y) - (x-y)[a'(y) - b(y)], \quad f(x) = \int_0^x (x-y)g(y)dy + [\beta + a(0)\alpha]x + \alpha.$$

Nous ramenons l'équation à la forme suivante

$$u(x) + \int_0^x k(x,y)u(y)dy = f(x),$$

et nous obtenons une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

Exemple 1.6 *Soit l'équation différentielle*

$$u'' + xu' + u = 0$$

avec les conditions initiales

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Posons

$$u'' = \varphi(x),$$

alors

$$u' = \int_0^x \varphi(t)dt + u'(0), \quad \textit{donc} \quad u = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1.$$

Portons dans l'équation différentielle donnée, il vient

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t)dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1 = 0,$$

donc

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)\varphi(t)dt.$$

1.2.4 Problème à valeurs initiales et équation intégrale

Dans les exemples précédents nous avons vu comment un problème à valeur initiale peut être transformé en une équation intégrale. Dans ce qui suit nous allons voir qu'une équation intégrale peut être transformée en équation différentielle.
Commencons par ennoncer le lemme suivant :

Lemme 1.2 ***Formule de Leibniz***

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} u(x,t)dx\right) = \int_{a(t)}^{b(t)} u'_t(x,t)dx + u(b(t),t)b'(t) - u(a(t),t)a'(t).$$

Exemple 1.7 *L'équation intégrale linéaire de Volterra*

$$u(x) = x^3 - \frac{1}{2}\sin x + \int_0^x (x^2-t)u(t)dt$$

est équivalente, après les transformations suivantes

$$\frac{du}{dx}(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}\cos x + (x^2-x)u(x) + 2x\int_0^x u(t)dt,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = 6x + \frac{1}{2}\sin x + (4x-1)u(x) + (x^2-x)\frac{du}{dx}(x) + 2\int_0^x u(t)dt,$$

$$\frac{d^3u}{dx^3}(x) = 6+\frac{1}{2}\cos x+4u(x)+(4x-1)\frac{du}{dx}(x)+(x^2-x)\frac{d^2u}{dx^2}(x)+(2x-1)\frac{du}{dx}(x)+2u(x)$$

à l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 *au point* $c = 0$ *avec les conditions initiales*

$$\frac{d^3u}{dx^3}(x) - (x^2-x)\frac{d^2u}{dx^2}(x) - (6x-2)\frac{du}{dx}(x) - 6u(x) = 6 + \frac{1}{2}\cos(x),$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx}(0) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{d^2u}{dx^2}(0) = 0.$$

Exemple 1.8 *On considère l'équation*

$$u(x) = \lambda \int_0^1 k(x,t)u(t)dt,$$

avec

$$k(x,t) = \begin{cases} x(1-t), & x \leqslant t \leqslant 1, \\ t(1-x), & 0 \leqslant t \leqslant x. \end{cases}$$

L'équation devient

$$u(x) = \lambda \int_0^x t(1-x)u(t)dt + \lambda \int_x^1 x(1-t)u(t)dt.$$

En utilisant la formule de Leibniz on trouve

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lambda \int_0^x -tu(t)dt + \lambda x(1-x)u(x) + \lambda \int_x^1 (1-t)u(t)dt - \lambda x(1-x)u(x) \\ &= \lambda \int_0^x -tu(t)dt + \lambda \int_x^1 (1-t)u(t)dt. \end{aligned}$$

Dérivons encore une fois

$$\begin{aligned} u''(x) &= -\lambda x u(x) - \lambda(1-x)u(x) \\ &= -\lambda u(x). \end{aligned}$$

On obtient l'équation différentielle linéaire avec conditions initiales

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

1.2.5 Équations intégro-différentielles

Une équation intégro-différentielle est une équation composée de deux opérations intégrales et différentielles. Dans ce type d'équation, la fonction inconnue apparait dans l'équation par l'une de ses fonctions dérivées ordinaires et dans l'intégrand avec des conditions initiales.

Exemple 1.9 *L'équation différentielle linéaire avec conditions initiales au point* $c = 0$

$$\frac{d^3u}{dx^3}(x) - \frac{du}{dx}(x) = \frac{1}{2}x^2; \quad u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx}(0) = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2}(0) = 1$$

est équivalente après les transformations suivantes

$$\int_0^x \frac{d^3u}{dt^3}(t)dt - \int_0^x \frac{du}{dt}(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^x t^2 dt,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) - \frac{d^2u}{dx^2}(0) - u(x) + u(0) = \frac{1}{6}x^3,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) - 1 - u(x) = \frac{1}{6}x^3,$$

$$\int_0^x \frac{d^2u}{dt^2}(t)dt - \int_0^x dt - \int_0^x u(t)dt = \frac{1}{6}\int_0^x t^3 dt,$$

$$\frac{du}{dx}(x) - \frac{du}{dx}(0) - x - \int_0^x u(t)dt = \frac{1}{24}x^4$$

à l'équation integro-différentielle de type Volterra suivante

$$u_x(x) = \frac{1}{24}x^4 + x + \int_0^x u(t)dt.$$

1.3 Existence et unicité de la solution des équations intégrales

1.3.1 Contraction de l'opérateur

Soit l'équation intégrale du second ordre

$$u - Tu = f.$$

Où T un opérateur à noyau continu. L'unicité et l'existence de la solution peut être donnée par la série de **Neumann** pourvu que l'opérateur T soit une contraction c.a.d $\|T\| < 1$

Théorème 1.1 *[42] Soit T un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui même, avec $\|T\| < 1$, et soit I l'opérateur identique dans X. Alors*

1. *L'opérateur $(I - A)$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k,$$

de plus

$$\|(I-T)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|T\|}.$$

2. *Pour tout $f \in X$ l'approximation successive*

$$u_{n+1} = Tu_n + f,$$

avec u_0 un vecteur arbitraire de X converge vers une unique solution de l'équation

$$u - Tu = f.$$

1.3.2 Existence et unicité de la solution des équations intégrales de Fredholm sur C(D)

Considérons l'équation intégrale de Fredholm du second espèce :
Pour $f \in C(D)$, on cherche $u \in C(D)$ solution de

$$u(s) = f(s) + Tu(s), \quad s \in D, \tag{1.5}$$

où D est un domaine borné de $\mathbb{R}^m, m \ge 1$ et T est l'opérateur intégral à noyau continu défini par

$$(Tu)(s) = \int_D k(s,t)u(t)dt$$

Il s'agit donc d'un problème de point fixe pour la fonctionnelle $u \mapsto Tu + f$. D'après le théorème (1.1), quand la norme de T vérifie $\|T\| < 1$, l'opérateur $I - T$ est inversible et l'équation (1.5) admet une unique solution donnée par

$$u = (I-T)^{-1}f.$$

La forme d'une équation intégrale de Fredholm de première espèce est donnée par

$$\int_D k(s,t)u(t)dt = f(s), \quad s \in D. \tag{1.6}$$

Ces équations sont considérées habituellement comme mal conditionnées car leur solution u est sensible à des petites variations de la fonction f. Cependant pour des raisons pratiques ces problèmes sont subdivisés en deux catégories. D'abords, si $k(.,.)$ est une fonction régulière alors la solution u de (1.6) est extrêmement sensible à des petites variations de f, ainsi des méthodes spéciales pour la résolution numérique sont nécessaires. Maintenant si $k(.,.)$ est une fonction singulière, le problème (1.6) est tout à fait manipulable de manière similaire à celle de seconde espèce (1.5).

1.3.3 Opérateurs intégraux compacts

Nous venons de voir une condition suffisante pour qu'une équation de Fredholm du second type ait une solution à savoir que l'opérateur T vérifi $\|T\| < 1$. Cette solution sera suffisante pour étudier les problèmes de transport lumineux, cependant dans la plupart des cas il va falloir analyser la situation de facon plus fine en utilisant les opérateurs compacts, qui est la notion naturelle qui permet de prolonger de facon simple les résultats obtenus en dimension finie.
Les opérateurs compacts se comportent presque comme des opérateurs de dimension finie. Ceci signifie que lorsque l'on perturbe l'identité de l'espace X suivant un opérateur compact T, on obtient un noyau de dimension finie et une image de dimension finie. Pour montrer cela, on étudie une perturbation du type $L = I - T$, avec T compact, ce qui pemet l'étude sans perte de généralité des espaces $Ker(I - \lambda T)$ et $Im(I - \lambda T)$ puisque λT est encore compact, de plus on a $Im(L) = Ker(L^\star)\perp$.

1.3.4 Opérateurs intégraux compacts sur $C(D)$

Soit D un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Soit l'opérateur intégrale donné par

$$(Tu)(x) = \int_D k(x,t)u(t)dt, \quad s \in D, \quad u \in C(D),$$

où $C(D)$ est l'espace des fonctions continues sur D muni de la norme $\|.\|_\infty$.
À l'aide du théorème d'Arzela-Ascoli on peut montrer que, pour que $T : C(D) \longrightarrow C(D)$ soit compact il suffit que $k(s,t)$, comme fonction de t, soit intégrable au sens de Riemann pour tout $x \in D$ et que

$$\textbf{I} \qquad \lim_{h\to 0}\left[\max_{x,y\in D}\max_{|x-y|<h}\int_D |k(x,t) - k(y,t)|dt\right] = 0$$

$$\textbf{II} \qquad \max_{x\in D}\int_D |k(x,t)|dt < \infty$$

Un exemple de noyau qui vérifie **I** et **II** est donné par la fonction $k(x,t)$ continue pour tout $(x,t) \in D$. Pour $D = [a,b]$ considérons l'opérateur intégral $T : C([a,b]) \to C([a,b])$ défini par $Tu(x) = \int_a^b log|x-s|u(s)ds$, on peut vérifier que les propriétés I et II sont satisfaites et donc cet opérateur intégral est bien compact.
Il est parfois difficile de voir directement que k satisfait I et II ainsi en écrivant $k(x,t)$

sous la forme suivante

$$k(x,t) = \sum_{i=0}^{p} H_i(x,t) L_i(x,t),$$

pour un certain $p > 0$, avec chaque L_i continue pour $a \leq x, t \leq b$ et chaque H_i vérifiant I et II, on peut déduire que k satisfait (I) et (II) et que l'opérateur intégral associé est compact.

Exemple 1.10 *Soit $[a,b] = [0,\pi]$ et $k(x,t) = log|\cos(x) - \cos(t)|$. Écrivons $k(x,t)$ sous la forme*

$$k(x,t) = \left[|(x-t)|^{-\frac{1}{2}}\right]\left[|(x-t)|^{\frac{1}{2}} log|\cos(x) - \cos(t)|\right]$$

$$= [H(x,t)]\,[L(x,t)]$$

On a L est continue et H vérifie (I) et (II). On déduit ainsi que $k(s,t)$ satisfait (I) et (II) et que l'opérateur intégral associée est compact de $C[0,\pi]$ dans lui même.

1.3.5 Théorème d'alternative de Fredholm

Les équations intégrales ont été étudiées durant le XIXème siècle comme un moyen de résoudre l'équation de Laplace avec des conditions aux bords $\Delta u(P) = 0, \quad P \in D$ et $(u(P) = g(P), \quad P \in \Gamma)$, où D est un ensemble borné non vide et Γ sa frontière) et d'autres équations aux dérivées partièlles elliptiques. Au debut des année 1900, Ivar Fredholm a donné des conditions nécéssaires et suffisantes d'existence de la solution d'une classe importante d'équations intégrales de seconde espèce et avec ces résultats, il a ensuite été capable de donner plusieurs théorèmes généraux sur l'existence de la solution des problèmes aux valeurs initiales ci dessus. Nous allons énnoncer le résultat le plus important de Fredholm

Théorème 1.2 *[42] Soit $T : X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire compact sur un espace de Banach X. Alors l'équation*

$$(\lambda - T)u = f, \quad \lambda \neq 0$$

admet une solution unique u si et seulement si l'équation homogène $(\lambda - T)z = 0$ admet la solution triviale $z = 0$ comme solution unique. Dans ce cas l'opérateur $\lambda - T$ est inversible et d'inverse $(\lambda - T)^{-1}$ borné.

Corollaire 1.1 *Soit $T : X \to X$ un opérateur compact continu. Pour $f \in X$, on* *considère les problèmes :*

$$trouver \quad u \in X \quad telleque \quad u - Tu = 0, \tag{1.7}$$

$$trouver \quad u \in X \quad telleque \quad u - Tu = f. \tag{1.8}$$

On a alors l'alternative

- *Si l'équation (1.7) n'a que la solution triviale $u = 0$; alors pour tout $f \in X$, l'équation (1.8) a une unique solution u. De plus cette solution dépend continuement de f.*
- *Si l'équation (1.7) a une a solution non triviale, alors elle admet un nombre $m \in \mathbb{N}$ de solutions $u_1, u_2, \cdots, u_m$ linéairement indépendantes. Dans ce cas, l'équation (1.8) soit elle n'admet pas de solutions, soit ses solutions s'écrivent sous la forme :*

$$u = \tilde{u} + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k,$$

où $\tilde{u}$ est une solution particulière de (1.8). Le fait que (1.8)admet ou non des solutions s'exprime par le fait que $f \in Ker(L^*)^{\perp} = Im(L)$ (théorème de RIESZ), i.e. f doit satisfaire m conditions d'orthogonalité.

- **Remarque** Dans le cas d'un opérateur compact T sur un espace de Hilbert, l'adjoint $L^\star$ peut être vu comme opérateur de $X \to X$ et l'expression $Im(L) = Ker(L^\star)^{\perp}$ peut être vue en terme d'orthogonalité (on identifie l'orthogonalité au sens de la dualité et l'orthogonalité au sens du produit scalaire)
- **Remarque** La chose importante de la théorie de Riesz est qu'elle permet de réduire l'étude d'un problème du type (1.8) avec second membre à celle d'un problème sans second membre du type (1.7).

1.4 Résolution des équations intégrales de Fredholm en dimension finie

1.4.1 Méthode du noyau dégénéré

On considère l'équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt. \tag{1.9}$$

Supposons que le noyau $k(.,.)$ soit séparable, c.a.d.

$$k(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\beta_j(t). \tag{1.10}$$

Portons dans l'équation (1.9), il vient

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) \int_a^b \beta_j(t)u(t)dt.$$

Alors

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j(x). \tag{1.11}$$

Donc le problème se réduit à trouver les quantités c_j.
En multipliant (1.11) par $\beta_i(x)$ et en intégrant on obtient

$$\int_a^b u(x)\beta_i(x)dx = \int_a^b f(x)\beta_i(x)dx + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b \alpha_j(x)\beta_i(x)dx.$$

Ou de manière équivalente

$$c_i = f_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j a_{ij}, \tag{1.12}$$

avec

$$a_{ij} = \int_a^b \beta_i(x)\alpha_j(x)dx, \tag{1.13}$$

$$f_i = \int_a^b \beta_i(x)f(x)dx. \tag{1.14}$$

Nous avons donc un système linéaire à n variables inconnues $c_1, \cdots, c_n$ et n equations

$$c_i = f_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j a_{ij}, \quad 1 \le i \le n.$$

Le système peut s'écrire sous forme matricielle

$$(I - \lambda A)c = f, \tag{1.15}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad et \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Le déterminant $D(\lambda)$ de ce système est

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & -\lambda a_{nn}, \end{vmatrix}$$

qui est un polynôme en λ de degré au plus égal à n, en outre, il n'est pas identique à zéro, puisqu'il se réduit à l'unité lorsque $\lambda = 0$. Pour toutes les valeurs de λ pour lesquelles $D(\lambda) \neq 0$, le système algébrique (1.12) admet une solution unique et ainsi l'équation intégrale (1.9). D'autre part, pour toutes les valeurs de λ pour lesquelles $D(\lambda) = 0$, le système algébrique (1.12) n'admet pas de solution ou bien admet un nombre infini de solutions.

Remarque 1.1 *Nous n'avons considéré que l'équation intégrale du second type, où seule cette méthode est applicable.*

Exemple 1.11 *Pour illustrer la méthode ci-dessus, nous considérons l'équation intégrale à noyau dégénéré suivante*

$$u(x) = -\frac{2}{\pi}\cos(x) + \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-t)u(t)dt.$$

Le noyau $k(x,t) = \cos(x-t)$*, peut être écrit comme*

$$k(x,t) = \cos(x)\cos(t) + \sin(x)\sin(t),$$

qui est un noyau séparable tel que

$$k(x,t) = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i(x)\beta_i(t),$$

$$\alpha_1(x) = \cos(x), \quad \beta_1(t) = \cos(t),$$

$$\alpha_2(x) = \sin(x), \quad \beta_2(t) = \sin(t).$$

Maintenant, en utilisant les relations (1.13) et (1.14) on obtient

$$a_{11} = \int_a^b \beta_1(t)\alpha_1(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos(2t)]\, dt = \frac{\pi}{4},$$

$$a_{12} = a_{21} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(t)dt = \frac{1}{2},$$

$$a_{22} = \frac{\pi}{4},$$

$$f_1 = \frac{-2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)dt = \frac{-1}{2}, \quad f_2 = \frac{-1}{\pi}.$$

Pour trouver c_i on utilise la relation sous forme matricielle (1.15)

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{\pi}\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{\pi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}.$$

La relation (1.11) nous donne

$$u(x) = f(x) + \lambda\sum_{j=1}^{2} c_j\alpha_j(x) = -\frac{2}{\pi}\cos(x) + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\pi}{4}\sin(x)\right),$$

on trouve

$$u(x) = \sin(x)$$

qui est la solution exacte.

1.4.2 Application de l'alternative de Fredholm en dimension finie

Appliquons l'alternative de Fredholm à l'équation

$$(I - \lambda A)c = f,$$

avec A une matrice de type (n, n) pour résoudre le problème des noyaux dégénérés en général.

Cas I $(det(I\_\lambda A) \neq 0)$.

L'équation ci dessus admet une solution unique :

$$c = (I - \lambda A)^{-1} f. \tag{1.16}$$

L'équation (1.9), avec le noyau dégénéré (1.10), admet la solution (1.11) :

$$u(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i(x) + f(x) = \lambda (\alpha(x))^T c + f(x),$$

de (1.16)

$$u(x) = \lambda (\alpha(x))^T (I - \lambda A)^{-1} f + f(x)$$

qui peut être exprimé par (1.14), comme

$$u(x) = \lambda \int_a^b \left[(\alpha(x))^T (I - \lambda A)^{-1} \beta(y) \right] f(y) dy + f(x).$$

$$= \lambda \int_a^b R(\lambda, x, y) f(y) dy + f(x).$$

D'après ([40]), pour un noyau dégénéré, le noyau résolvant est donné par

$$R(\lambda, x, y) = (\alpha(x))^T (I - \lambda A)^{-1} \beta(y)$$

Cas II $det(I - \lambda A) = 0$

Supposons que $det(I - \lambda A) = 0$ et que l'équation homogène $(I - \lambda A)c = 0$ admet p solutions non-triviales linéairement indépendantes

$$c^1, c^2, \cdots, c^p.$$

Ainsi, la forme homogène de l'équation intégrale (1.9), c'est-à-dire

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x, y) u(y) dy,$$

avec le noyau dégénéré (1.10) admet p solutions, de (1.11) :

$$u^j(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i^j \alpha_i(x),$$

avec $j = 1, 2, \cdots, p$.

L'équation non homogène, (1.15), admet une solution si et seulement si le terme f

est orthogonal à chaque solution de

$$(I-\lambda A)^T h = 0 \quad i.e \quad h^T f = 0, \tag{1.17}$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} h_i f_i = 0.$$

D'où d'après (1.14)

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \int_a^b \beta_i(y) f(y) dy = 0,$$

qui est équivalent à

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \beta_i(y) \right) f(y) dy = 0.$$

Ainsi, en posant

$$h(y) = \sum_{i=1}^{n} h_i \beta_i(y),$$

alors

$$\int_a^b h(y) f(y) dy = 0$$

ce qui signifie que $f(x)$ doit être orthogonal à $h(x)$ sur $[a,b]$.
D'àprès l'équation (1.18) on a

$$h_i - \lambda \sum_{1}^{n} a_{ji} h_j = 0.$$

Sans nuire à la généralité, supposons que tous les $\beta_i(x)$ de (1.10) sont linéairement indépendants (dans le cas d'une dépendance linéaire, on écrit le vecteur dépendant en fonction des autres et on obtient un noyau séparable avec n remplacé par (n-1)). Multiplions la ième équation de (1.17) par $\beta_i(x)$ et additionnons pour tout i de 1 à n

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \beta_i(x) - \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} h_j \beta_i(x) = 0,$$

c. a. d. de (1.13)

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \beta_i(x) - \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_j \beta_j(y) \alpha_i(y) \beta_i(x) = 0,$$

Utilisant(1.17) et (1.10) on se ramène à l'équation intégrale :

$$h(x) - \lambda \int_a^b k(y,x)h(y)dy = 0. \tag{1.18}$$

Notons qu'il s'agit de la forme homogène de la transposée de l'équation intégrale de Fredholm (1.9).

En conclusion pour le cas (II), l'équation intégrale (1.9) avec un noyau séparable de la forme (1.10) admet une solution si et seulement si $f(.)$ est orthogonal à chaque solution h(.) de l'équation homogène (1.18). La solution générale est alors

$$u(x) = u^0(x) + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j u^j(x)$$

où $u^0(.)$ est une solution particulière de (1.9) et les γ_j sont des constantes arbitraires.

Exemple 1.12 *On considère l'équation intégrale*

$$u(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x-y)u(y)dy + f(x). \tag{1.19}$$

On a :

$$u(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x-y)u(y)dy + f(x),$$

$$u(x) = \lambda \int_0^\pi (\sin x \cos y - \cos x \sin y)u(y)dy + f(x)$$

et par conséquent, il est clair que

$$k(x,y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

est séparable. Ainsi

$$u(x) = \lambda \left[\sin x \int_0^\pi u(y)\cos y dy - \cos x \int_0^\pi u(y)\sin y dy\right] + f(x).$$

Posant

$$c_1 = \int_0^\pi u(y)\cos y dy, \tag{1.20}$$

$$c_2 = \int_0^\pi u(y)\sin y dy, \tag{1.21}$$

ce qui donne

$$u(x) = \lambda \left[c_1 \sin x - c_2 \cos x\right] + f(x). \tag{1.22}$$

En substituant cette valeur de $u(x)$ *dans (1.20) on trouve*

$$c_1 = \int_0^\pi \{\lambda \left[c_1 \sin y - c_2 \cos y\right] + f(y)\} \cos y dy$$

$$= \lambda c_1 \int_0^\pi \sin y \cos y dy - \lambda c_2 \int_0^\pi \cos^2 y dy + \int_0^\pi f(y) cosydy.$$

Définissant

$$f_1 = \int_0^\pi f(y) \cos y dy$$

et notant les valeurs des intégrales

$$\int_0^\pi \sin y \cos y dy = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2y dy = \left[-\frac{1}{4} \cos 2y\right]_0^\pi = 0$$

$$\int_0^\pi \cos^2 y dy = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2y) dy = \frac{1}{2} \left[y + \frac{1}{2} \sin 2y\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi,$$

donc

$$c_1 = -\frac{1}{2}\pi\lambda c_2 + f_1.$$

Répétons cette procédure en plaçant $u(x)$ *dans (1.21)*

$$c_2 = \int_0^\pi \{\lambda \left[c_1 \sin y - c_2 \cos y\right] + f(y)\} \sin y dy$$

$$= \lambda c_1 \int_0^\pi \sin^2 y dy - \lambda c_2 \int_0^\pi \cos y \sin y dy + \int_0^\pi f(y) \sin y dy.$$

En observant que

$$\int_0^\pi \sin^2 y dy = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2y) dy = \frac{1}{2} \left[y - \frac{1}{2} \sin 2y\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi$$

et en posant

$$f_2 = \int_0^\pi f(y) \sin y dy,$$

on obtient

$$c_2 = \frac{1}{2}\pi\lambda c_1 + f_2.$$

et on a donc le système

$$c_1 + \frac{1}{2}\pi\lambda c_2 = f_1,$$
$$c_2 - \frac{1}{2}\pi\lambda c_1 = f_2,$$

l'écriture matricielle du système donne

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\pi\lambda \\ -\frac{1}{2}\pi\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

– *Ces équations admettent une unique solution à condition que*

$$det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\pi\lambda \\ -\frac{1}{2}\pi\lambda & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

i.e.

$$1 + \frac{1}{4}\pi^2\lambda^2 \neq 0 \quad \lambda \neq \pm\frac{2i}{\pi}.$$

Dans ce cas

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\pi\lambda \\ -\frac{1}{2}\pi\lambda & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{1+\frac{1}{4}\pi^2\lambda^2} \begin{bmatrix} f_1 - \frac{1}{2}\pi\lambda f_2 \\ f_2 + \frac{1}{2}\pi\lambda f_1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{1+\frac{1}{4}\pi^2\lambda^2} \begin{bmatrix} \int_0^\pi f(y)\cos y dy - \frac{1}{2}\pi\lambda \int_0^\pi f(y)\sin y dy \\ \int_0^\pi f(y)\sin y dy + \frac{1}{2}\pi\lambda \int_0^\pi f(y)\cos y dy \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{1+\frac{1}{4}\pi^2\lambda^2} \int_0^\pi \begin{bmatrix} \cos y - \frac{1}{2}\pi\lambda \sin y \\ \sin y + \frac{1}{2}\pi\lambda\cos y \end{bmatrix} f(y)dy.$$

Par conséquent

$$u(x) = \lambda\left[c_1 \sin x - c_2 \cos x\right] + f(x)$$
$$= \frac{\lambda}{1+\frac{1}{4}\pi^2\lambda^2}\left[\int_0^\pi \left[\sin x(\cos y - \frac{1}{2}\pi\lambda\sin y) - \cos x(\sin y + \frac{1}{2}\pi\lambda\cos y)\right] f(y)dy\right] + f(x)$$

ou

$$u(x) = \frac{\lambda}{1+\frac{1}{4}\pi^2\lambda^2}\int_0^\pi \left[\sin(x-y) - \frac{1}{2}\pi\lambda\cos(x-y)\right] f(y)dy + f(x).$$

Ceci est la solution requise et on peut observer que le noyau résolvant est

$$R(x,y,\lambda) = \frac{\sin(x-y) - \frac{1}{2}\pi\lambda\cos(x-y)}{1+\frac{1}{4}\pi^2\lambda^2}.$$

– *Si*

$$det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\pi\lambda \\ -\frac{1}{2}\pi\lambda & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

c.a.d

$$\lambda = +\frac{2i}{\pi} \quad ou \lambda = -\frac{2i}{\pi},$$

alors il n'y a pas de solution ou bien une infinité de solutions. (1.23) devient

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

La résolution de ces équations en utilisant des opérations sur les lignes, $R_2 \to R_2 \pm iR_1$, donne

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \pm i f_1 \end{pmatrix}$$

ou

$$c_1 \pm ic_2 = f_1,$$

$$f_2 \pm i f_1 = 0.$$

La deuxième équation impose une restriction à $f(.)$, ce qui, par définition des f_i, est

$$\int_0^\pi (\sin y \pm i\cos y) f(y)dy = 0.$$

C'est la condition que $f(.)$ doit remplir pour que l'équation intégrale ait une solution, c'est-à-dire si $f(.)$ ne satisfait pas cela, l'équation (1.19) n'admet pas de solutions.
Supposons que cette condition soit vérifiée alors c_2 peut prendre une valeur constante arbitraire, $c_2 = \alpha$, Ainsi

$$c_1 = \pm i\alpha + f_1,$$

d'après(1.22), la solution de (1.19) est :

$$u(x) = \pm\frac{2i}{\pi}\left[(\pm i\alpha + f_1)\sin x - \alpha cosx\right] + f(x)$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi}(sinx \pm i\cos x) \pm \frac{2\alpha}{\pi} g_1 sinx + f(x).$$

avec $\lambda = \pm\frac{2i}{\pi}$, pour α arbitraire, et la contrainte $f_2 = \pm i f_1$. Nous sommes arri-

vés aux conclusions ci-dessus via de simples opérations sur les lignes. Le théorème de Fredholm donne les mêmes informations concernant les contraintes sur f_1 et f_2.

1.4.3 Équations intégrales avec noyaux symétriques

On considère l'équation

$$y(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt, \tag{1.24}$$

où le noyau $k(.,.)$ est réel et continu. Nous allons considérer le cas où $k(.,.)$ n'est pas séparable mais symétrique, c'est-à-dire $k(x,t) = k(t,x)$. Si λ et $y(.)$ satisfont (1.24) on dit que λ est une valeur propre et que $y(.)$ est la fonction propre correspondante.

Théorème 1.3 *1. Si λ_m et λ_n sont des valeurs propres associées aux fonctions propres $y_m(x)$ et $y_n(x)$, alors :*

$$\lambda_m \neq \lambda_n \Rightarrow \int_a^b y_m(x)y_n(x) = 0.$$

C'est à dire les fonctions propres correspondants à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.

2. *Les valeurs propres λ sont réelles.*
3. *Si le noyau $k(.,.)$ n'est pas séparable alors il existe des valeurs propres*

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$$

avec

$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty.$$

4. *A chaque valeur propre correspond au plus un nombre fini de fonction propres linéairement indépendants.*

Preuve de 1.
On a

$$y_m(x) = \lambda_m \int_a^b k(x,t)y_m(t)dt,$$

et

$$y_n(x) = \lambda_n \int_a^b k(x,t) y_n(t) dt,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_a^b y_m(x) y_n(x) dx &= \lambda_m \int_a^b y_n(x) \int_a^b k(x,t) y_m(t) dt dx \\
&= \lambda_m \int_a^b \left(\int_a^b y_n(x) k(x,t) dx \right) y_m(t) dt \\
&= \lambda_m \int_a^b \left(\int_a^b k(t,x) y_n(x) dx \right) y_m(t) dt \\
&= \lambda_m \int_a^b \left(\frac{1}{\lambda_n} y_n(t) \right) y_m(t) dt \\
&= \frac{\lambda_m}{\lambda_n} \int_a^b y_m(t) y_n(t) dt.
\end{aligned}$$

On conclut que

$$\left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_n}\right) \int_a^b y_m(x) y_n(x) dx = 0.$$

Comme $\lambda_n \neq \lambda_m$ on trouve

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) dx = 0.$$

Exemple 1.13 *Résoudre l'équation*

$$y(x) = \lambda \int_0^1 k(x,t) y(t) dt,$$

avec

$$k(x,t) = \begin{cases} x(1-t), & x \leqslant t \leqslant 1, \\ t(1-x), & 0 \leqslant t \leqslant x. \end{cases}$$

Nous avons vu dans l'exemple (1.7), que l'équation intégrale est équivalente à

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Si $\lambda > 0$, le système admet une solution de la forme

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

On a :
Pour $y(0) = 0$ on trouve $c_1 = 0$ et

pour $y(1) = 0$ *on trouve* $c_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0$ *donc soit* $c_2 = 0$ *(ce qui ne donne que la solution triviale* $y \equiv 0$*) ou* $\sqrt{\lambda} = n\pi$ *pour* n *entier, alors* $\lambda = n^2\pi^2$.
Ainsi, les valeurs propres sont

$$\lambda_n = n^2\pi^2,$$

et les fonctions propres correspondantes sont

$$y_n(x) = \sin(n\pi x).$$

Notons que si $m \neq n$ *on a*

$$\int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx = 0.$$

1.4.4 Théorie de Hilbert-Schmidt pour résoudre une équation de Fredholm

Nous allons maintenant décrire une méthode pour résoudre une équation de Fredholm du type :

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt. \tag{1.25}$$

Lemme 1.3 *Supposons qu'il existe une fonction continue* g *telle que*

$$F(x) = \int_a^b k(x,t)g(t)dt,$$

où $k(.,.)$ *est symétrique (c'est-à-dire* $k(x,t) = k(t,x)$*). Alors* F *peut être développée en série de Fourier*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x),$$

où y_n *sont les fonctions propres normalisées à l'équation*

$$y(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt.$$

Théorème 1.4 *(Théorème de Hilbert-Schmidt) Supposons que* λ *n'est pas une va-*

leur propre de (1.25) et que y est une solution de (1.25). Alors

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x),$$

où λ_n et $y_n(x)$ sont les valeurs propres et les fonctions propres associées à l'équation homogène (i.e.(1.25) avec $f = 0$), et

$$f_n = \int_a^b f(x) y_n(x) dx.$$

Preuve.

D'après (1.25), on voit que

$$y(x) - f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t) y(t) dt,$$

et d'après le lemme (1.3), nous pouvons développer $y(x) - f(x)$ en une série de Fourier :

$$y(x) - f(x) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$$

où

$$c_n = \int_a^b (y(x) - f(x))\, y_n(x) dx = \int_a^b y(x) y_n(x) dx - f_n.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int_a^b y(x) y_n(x) dx &= f_n + \int_a^b (y(x) - f(x))\, y_n(x) dx \\
&= f_n + \lambda \int_a^b \left(\int_a^b k(x,t) y(t) dt \right) y_n(x) dx \\
&= f_n + \lambda \int_a^b \left(\int_a^b k(t,x) y_n(x) dx \right) y(t) dt \\
&= f_n + \frac{\lambda}{\lambda_n} \int_a^b y_n(t) y(t) dt.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_a^b y(x) y_n(x) dx = \frac{f_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}} = \frac{\lambda_n f_n}{\lambda_n - \lambda},$$

et nous concluons que

$$c_n = \frac{\lambda_n f_n}{\lambda_n - \lambda} - f_n = \frac{\lambda f_n}{\lambda_n - \lambda},$$

c'est-à-dire que nous pouvons écrire y comme

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x).$$

■

Exemple 1.14 *Résoudre l'équation*

$$y(x) = x + \lambda \int_0^1 k(x,t) y(t) dt,$$

avec $\lambda \neq n^2\pi^2, n = 1, 2, \cdots$, *et*

$$k(x,t) = \begin{cases} x(1-t), & x \leqslant t \leqslant 1 \\ t(1-x), & 0 \leqslant t \leqslant x. \end{cases}$$

D'après l'exemple (1.13), on sait que les fonctions propres normalisées de l'équation homogène

$$y(x) = \lambda \int_0^1 k(x,t) y(t) dt$$

sont

$$y_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$$

associées aux valeurs propres $\lambda_n = n^2\pi^2, n = 1, 2, \cdots$ *En plus on voit que*

$$f_n = \int_0^1 f(x) y_n(x) dx = \int_0^1 x\sqrt{2}\sin(n\pi x) dx = \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{2}}{n\pi}.$$

Par conséquent

$$y(x) = x + \frac{\sqrt{2}\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n^2\pi^2 - \lambda)} \sin(n\pi x), \quad \lambda \neq n^2\pi^2.$$

1.5 Méthodes de Nyström

Une formule de quadrature est une méthode numérique pour approcher les solution d'une intégrale de la forme

$$Q(g) = \int_D g(x)dx$$

où D est un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^m$. Dans cette partie, nous allons considérer seulement les règles de quadratures de la forme

$$Q_n(g) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^{(n)} g(x_j^{(n)})$$

avec $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ sont des points de quadrature contenus dans D et les réels $\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \cdots, \omega_n^{(n)}$ sont les poids de quadrature.

Théorème 1.5 *Les formules de quadrature (Q_n) converge si et seulement si $Q_n(g) \to Q(g), n \to \infty$, pour tout g élément d'un ensemble U dense dans $C(D)$ et*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} |\omega_j^{(n)}| < \infty.$$

La méthode de Nyström, aussi appelée méthode de quadrature, consiste à appliquer les méthodes numériques de calcul d'intégrales pour aboutir à un système linéaire. En fait, ce n'est rien d'autre que l'approximation du noyau k par un opérateur de dimension fini, i.e une matrice. Cette méthode est totalement discrète, elle fournit donc un premier moyen efficace de résolution d'équation numérique.

Par le choix d'une suite de règles de quadrature (Q_n) convergente, on approche l'opérateur intégral

$$(T\varphi)(x) = \int_D k(x,y)\varphi(y)dy \quad x \in D$$

à noyau k continu, par une suite d'opérateurs numériques

$$(T_n\varphi)(x) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^{(n)} k(x, t_j^{(n)})\varphi(t_j^{(n)}), \quad x \in D.$$

On calcul l'intégrale du noyau via des points $(t_i^{(n)})_{1\leq i\leq n}$ ainsi que des poids $(\omega_i^{(n)})_{1\leq i\leq n}$

Remarque 1.2 *On peut voir ces règles de quadratures comme une suite d'opérateurs $Q_n : C(D) \to C(D)$. On dira que ces règles seront convergentes si elles convergent point à point, i.e si :*

$$\forall g \in C(D), \quad Q_n(g) \to \int_D g \quad \textit{pour} \quad n \to +\infty.$$

En appliquant la quadrature pour $g = k(x,.)\varphi$, on va approcher la solution φ de l'équation intégrale de second type

$$\varphi - T\varphi = f$$

par la solution de

$$\varphi_n - T_n\varphi_n = f,$$

ce qui est réduit à la résolution d'un système d'équations de dimension finie.

Théorème 1.6 ***Méthode de Nyström*** *Soit φ_n solution de*

$$\varphi_n(x) - \sum_{j=1}^{n} \omega_j^{(n)} k(x, t_j^{(n)})\varphi_n(t_j^{(n)}) = f(x). \tag{1.26}$$

Alors les valeurs $\varphi_i^{(n)} = \varphi_n(t_i^{(n)}), \quad i = 1, \cdots, n$ aux points de quadrature sont solutions du système

$$\varphi_i^{(n)} - \sum_{j=1}^{n} \omega_j^{(n)} k(t_i^{(n)}, t_j^{(n)})\varphi_j^{(n)} = f(t_i^{(n)}) \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1.27}$$

Où encore

$$\begin{pmatrix} 1-\omega_1 k_{11} & -\omega_2 k_{12} & \cdots & -\omega_n k_{1n} \\ -\omega_1 k_{21} & 1-\omega_2 k_{22} & \cdots & -\omega_n k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\omega_1 k_{n1} & -\omega_2 k_{n2} & \cdots & 1-\omega_n k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^{(n)} \\ \varphi_2^{(n)} \\ \cdots \\ \varphi_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_1^{(n)}) \\ f(t_2^{(n)}) \\ \cdots \\ f(t_n^{(n)}) \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

avec $k_{ij} = k(t_i^{(n)}, t_j^{(n)})$.

Réciproquement *: Si on se donne une solution $(\varphi_i^{(n)})_{1\leq i\leq n}$, du système (1.27).*

Alors la fonction φ_n définie par :

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \omega_j^{(n)} k(x, t_j^{(n)}) \varphi_j^{(n)}, \quad x \in D \tag{1.29}$$

vérifie l'équation approchée(1.26).

On se contentera de citer les théorèmes de convergence suivants :

Théorème 1.7 *Supposons que les règles de quadrature (Q_n) sont convergentes. Alors la suite (T_n) est collectivement compacte et ponctuellement convergente vers T, mais elle ne l'est pas en norme.*

Preuve.

Puisque les règles de quadrature Q_n sont supposées convergentes, donc d'après le théorème (1.8), il existe une constante C telle que

$$\sum_{j=1}^{n} |\omega_j^{(n)}| \leq C$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors on a

$$\|T_n\varphi\|_\infty \leq C \max_{x,t \in D} |k(x,t)| \|\varphi\|_\infty \tag{1.30}$$

et

$$|T_n\varphi(x_1) - T_n\varphi(x_2)| \leq C \max_{t \in D} |k(x_1,t) - k(x_2,t)| \|\varphi\|_\infty \tag{1.31}$$

pour tout $x_1, x_2 \in D$.
Maintenant, soit $U \subset C(D)$ borné. Alors de (1.30) et (1.31) on remarque que $\{T_n\varphi : \varphi \in U, n \in \mathbb{N}\}$ est borné et équicontinue, car k est uniformément continu sur $D \times D$. Donc, par le théorème d'Arzelà-Ascoli, la suite (T_n) est collectivement compacte.
Comme la quadrature est convergente, pour $\varphi \in C(D)$ fixé, la suite $(T_n\varphi)$ est ponctuellement convergente, c.a.d $(T_n\varphi)(x) \to (T\varphi)(x), \quad n \to \infty$, pour tout $x \in D$. Également à la suite (1.31), la suite $(T_n\varphi)$ est équicontinue. Par conséquent elle est uniformément convergente $\|T_n\varphi - T\varphi\| \to 0_{n\to\infty}$.(Puisqu'elle converge ponctuellement).

■

Corollaire 1.2 *Pour toute équation intégrale de second type tels que, le noyau $k(.,.)$ et le terme libre f sont deux fonctions continues, et admet une solution unique, la méthode de Nyström avec une suite de règles de quadrature convergentes est uniformément convergente.*

Théorème 1.8 *[42].*

1. *La norme associée à l'opérateur intégral $T : C([a,b]) \to C([a,b])$ pour un noyau continu $k(.,.)$ est donnée par*

$$\|T\|_\infty = \max_{a \le x \le b} \int_a^b K(x,t)dt$$

2. *La norme associée à l'opérateur de quadrature T_n est donnée par*

$$\|T_n\|_\infty = \max_{a \le x \le b} \sum_{k=1}^{n} |\omega_k^{(n)} K(x, t_k^{(n)})|$$

Théorème 1.9 *[42].*

1. *On peut exprimer l'erreur de la quadrature numérique correspondante par*

$$\|T\varphi - T_n\varphi\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt - \sum_{k=1}^{n} \omega_k^{(n)} K(x, t_k^{(n)})|$$

2. *Pour $\varphi \in C^2([a,b] \times [a,b])$, on a l'estimation suivante*

$$\|T\varphi - T_n\varphi\|_\infty \le \frac{1}{12} h^2 (b-a) \max_{a \le x \le b} |\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[K(x,t)\varphi(t)\right]|$$

La méthode de Nyström peut être prolongée à la résolution des équations intégrales faiblement singulières, c'est à dire, le noyau est une fonction discontinue. La méthode d'intégration produit est l'une des méthodes les plus usuelles. Historiquement, notons que l'origine de l'idée d'intégration produit pour l'approximation d'opérateur intégral est introduite par Young. Ce résultat a été amélioré par de Hoog et Weiss Plus tard, d'autres travaux ont étés effectués dans ce sens par Atkinson.

Chapitre 2

Méthodes de Nyström via les quasi-interpolants splines

2.1 Introduction

En général, le terme quasi-interpolation fait référence à une méthode constructive pour définir des approximations globales à partir d'approximations locales de données fonctionnelles. L'objectif principal est d'assurer la localité et la stabilité et d'éviter la solution de systèmes globaux d'équations, de sorte que les approximants soient immédiatement disponible. Dans le cas univarié, les approximations locales sont mélangé en utilisant une base de B-splines appropriée. Leurs supports définissent les portions locales de données fonctionnelles á utiliser pour produire ces approximations locales. De plus, l'ordre d'approximation optimal est atteint si les polynômes inclus dans l'espace spline sont reproduits. L'attention de nombreux auteurs fut attirée par la quasi-interpolation depuis son introduction par I.J. Schoenberg [73] et ce sujet a même fait partie de livres bien connus [74, 30, 33, 75]. La quasi-interpolation spline en une et plusieurs variables a été développée par P. Sablonnière et collaborateurs ([68, 69, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 36, 41]).

Concernant la construction de quasi-interpolants, dans [61], la quasi-interpolation quadratique 3D peut être utilisée pour une reconstruction et une visualisation efficace des données de volume en grille. Les coefficients de Bernstein-Bézier des splines sont immédiatement disponibles à partir des valeurs de données en appliquant une moyenne locale.
Dans [58], les quasi-interpolants splines sphériques quadratiques sur des partitions Powel-Sabin sont introduits. De nouveaux résultats et des extensions au cas multivarié ont été obtenus ces dernières années [71, 80, 72, 81, 82]. Les quasi-interpolants

splines ont été utilisés pour développer une classe de règles de quadrature avec des corrections de point finaux qui ont été appliquées dans la solution numérique des équations intégrales de Fredholm du second type [70]. Récemment de nouveaux schémas numériques ont été proposés [16].

Récemment, la solution des équations intégrales de Fredholm généralisées du second type est abordée dans [57], où les quasi-interpolants spline septique sont utilisés.

Dans [5] les fonctions de base radiales sont utilisées comme outil de résolution d'équations intégrales de Fredholm faiblement singulières en combinant les méthodes d'intégration produit et de collocation.

Dans [11], l'auteur considère des équations intégrales faiblement singulières de type Fredholm dont les noyaux satisfont certaines estimations algébriques avec leurs dérivées. En particulier, il établit des estimations d'ordre optimal de convergence pour l'intégration produit et la méthode de Galerkin appliquée sur un maillage de calibrage approprié pour la résolution de telles équations. Certains résultats de superconvergence sont également dérivés. Dans [11], l'auteur étudie des équations intégrales faiblement singulières de type Fredholm, il établit des estimations de convergence d'ordre optimal pour l'intégration produit appliquée sur un maillage de calibrage approprié pour la résolution de telles équations. De même, dans [22] l'application de l'intégration produit dans la solution d'équations intégrales singulières avec une singularité de Cauchy fixe est explorée. Ces équations se produisent dans la théorie de la diffusion. Aussi, dans [24], la construction et la convergence de méthodes d'intégration produit d'ordre élevé pour l'équation d'Abel de deuxième type sont discutées et les résultats trouvés dans [37] sont généralisés.

Une méthode de Nyström proposé dans [85] pour résoudre une classe d'équations intégrales de Fredholm du second type avec des noyaux faiblement singuliers. Cette méthode est basée d'abord sur l'amélioration du comportement des limites du noyau à l'aide d'un changement de variables, ensuite sur l'intégration produit en utilisant une quasi-interpolation par des splines lisses d'ordre m.

Le but des auteurs dans [25] est de construire et d'analyser des méthodes d'intégration produit d'ordre élevé pour une classe d'équations intégrales de Volterra à noyau logarithmique singulier. Des conditions suffisantes pour que les méthodes soient convergentes sont dérivées et il est montré que des ordres de convergence optimaux sont atteints si la solution exacte est suffisamment lisse. Ils étudient les solutions non lisses en appliquant transformations appropriées pour que les équations atteignent des solutions lisses. Le cas des solutions non lisses est traité en effectuant les transformations appropriées pour que la nouvelle équation possède des solutions lisses.

Dans [84], les auteurs recherchent les propriétés analytiques de l'équation intégrale singulière á noyau logarithmique en examinant la méthode d'Euler et la méthode trapèze du produit.

De même, le travail de [40] explore la solution approchée d'un système d'équations intégrales de Volterra à noyau faiblement singulier en adoptant des schémas d'Euler de produit explicites et implicites avec une convergence d'ordre 1 et un schéma trapèze de produit avec une convergence d'ordre 2.

Dans [67], les méthodes de type Nyström sont utilisées pour résoudre une classe d'équations intégrales de Fredholm du second type avec des noyaux pouvant avoir de faibles singularités diagonales et limites. L'approche proposée est basée sur un changement de variables régulié et des techniques d'intégration produit appropriées dans lesquels les résultats associés de [59, 76, 86] sont étendus á une classe plus large d'équations intégrales faiblement singulières.
Dans ce travail, nous présentons un cadre général dans lequel on utilise les quasi-interpolants splines pour résoudre numériquement les équations intégrales généralisées de Fredholm du seconde espèce par deux méthodes de Nyström. Des résultats explicites pour les splines octiques des quasi-interpolants sont fournis.

2.2 Préliminaires sur le quasi-interpolant

Le terme quasi-interpolation fait référence à une méthode générale de construction d'approximants basée sur les informations disponibles de la fonction approchée.

En général, on connaît les valeurs des points en les quelles les approximations sont calculées pour fournir une approximation globale. C'est le cas lorsque des quasi-interpolants splines sont définies comme combinaisons linéaires de B-splines dont les coefficients sont des combinaisons linéaires de valeurs discrètes de f en certains points des supports des B-splines correspondants. Nous rappelons la construction générale des quasi-interpolants splines discrèts de fonctions définies sur des intervalles bornés qui seront utilisés pour résoudre numériquement l'équation intégrale de Fredholm généralisée.

Soit $X_n := \{x_k, 0 \leq k \leq n\}$ une subdivision de l'intervalle $I := [a, b]$ avec $x_0 = a$

et $x_n := b$, on considère l'espace des splines

$$S_d(I, X_n) := \left\{ s \in C^{d-1}(I) : s_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_d,\ 0 \leq i \leq n-1 \right\},$$

où $\mathbb{P}_d$ représente l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal d.

Pour définir une base appropriée à $S_d(I, X_n)$, une nouvelle subdivision X_n^* est associée à X_n en introduisant des nœuds supplémentaires à gauche de a et à droite de b

$$x_{-d} = x_{-d+1} = \cdots = x_{-1} = a \quad \text{and} \quad x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{n+d} = b.$$

Une base de $S_d(I, X_n)$ est définie par les B-splines $B_{j,d}$, $1 \leq j \leq n+d$, où

$$B_{j,d}(x) := (x_j - x_{j-d-1}) [x_{j-d-1}, x_{j-d}, \ldots, x_j] (\cdot - x)_+^d,$$

où $[z_0, z_1, \ldots, z_k] g$ représente la différence divisée de g basée sur z_i, $0 \leq i \leq k$, et $z_+ := \max\{0, z\}$. La B-spline $B_{j,d}$ est une fonction à support borné $[x_{j-d-1}, x_j]$.

Le point clé pour définir des quasi-interpolants dans $S_d(I, X_n)$ est la représentation des monômes $m_r(x) := x^r$, $0 \leq r \leq d$, comme fonctions symétriques des noeuds intérieurs. Pour $0 \leq r \leq d$, on a

$$m_r = \sum_{j=1}^{n+d} \theta_j^{(r)} B_{j,d},$$

où $\theta_j^{(0)} := 1$ et

$$\theta_j^{(r)} := \binom{d}{r}^{-1} \sum_{1 \leq \ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_r \leq d} x_{j+1-\ell_1} \ldots x_{j+1-\ell_r}.$$

Puisque le quasi-interpolant $Q_{d,n} f$ d'une fonction continue f est dans $S_d(I, X_n)$, alors on a

$$Q_{d,n} f = \sum_{j=1}^{n+d} \mu_{j,d,n}(f) B_{j,d}.$$

Les coefficients $\mu_j(f) := \mu_{j,d,n}(f)$ doivent être définis de sorte que l'opérateur $\mathcal{Q}_{d,n} : C(I) \longrightarrow S_d(I, X_n)$ défini comme $\mathcal{Q}_{d,n}(f) = Q_{d,n} f$ soit exacte sur $\mathbb{P}_d$. Ceci est possible si et seulement si $\mu_j(m_r) = \theta_j^{(r)}$, $0 \leq r \leq d$, $\quad j \in J = \{1, \cdots, n+d\}$.

Chaque coefficient $\mu_{j,n}(f)$ est une combinaison linéaire de valeurs discrètes de f sur un ensemble de points qui doit être spécifié.

Puisque

$$m_1 = \sum_{j=1}^{d+n} \theta_j^{(1)} B_{j,d},$$

le quasi-interpolant défini

$$S_{d,n} f = \sum_{j=1}^{n+d} f\left(\theta_j^{(1)}\right) B_{j,d}$$

n'utilise que les abscisses de Greville

$$\theta_j^{(1)} = \frac{1}{d}\left(x_{j-d} + \cdots + x_{j-1}\right).$$

Le quasi-interpolant $\mathcal{S}_{d,n}$ défini par $\mathcal{S}_{d,n}(f) = Sf$ n'est exact que sur $\mathbb{P}_1$, mais suggère que l'utilisation des combinaisons linéaires des évaluations de f aux abscisses de Greville résulte des opérateurs exactes sur $\mathbb{P}_d$. La deuxième possibilité consiste é utiliser les points de X_n comme points d'évaluation lorsque d est impair et les points $t_k := \frac{1}{2}\left(x_{k-2} + x_{k-1}\right)$, $1 \leq k \leq n+d$, lorsque d est pair.
Notons que $t_1 = x_0$ et $t_{n+d} = x_n$.

Les quasi-interpolants que nous utiliserons pour résoudre numériquement l'équation de Fredholm seront définis à partir des coefficients suivants : pour $d+1 \leq k \leq n$,

$$\mu_k(f) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_{i,k} f\left(t_{k-d+i}\right), & \text{si } d \text{ est pair,} \\ \sum_{i=1}^{d} \alpha_{i,k} f\left(x_{k-d+i-1}\right), & \text{si } d \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour les fonctionnelles extrêmes on a, si d est pair

$$\mu_k(f) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_{i,k} f\left(t_i\right), & 1 \leq k \leq d, \\ \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_{i,k} f\left(t_{n-d+i+1}\right), & n+1 \leq k \leq n+d, \end{cases}$$

et si d est impair,

$$\mu_k(f) := \begin{cases} \sum_{i=0}^{d} \alpha_{i,k} f\left(x_i\right), & 1 \leq k \leq d-1, \\ \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_{i,k} f\left(x_{n-d+i-1}\right), & n+2 \leq k \leq n+d. \end{cases}$$

L'exactitude de $\mathcal{Q}_{d,n}$ sur $\mathbb{P}_d$ conduit à des systèmes linéaires qui ont tous des déterminants de Vandermonde, puisque les points sont distincts, alors chaque système possède une solution unique. Ce sont des opérateurs bornés pour lesquels

$$\left\|\mathcal{Q}_{d,n}\right\|_\infty \leq \max_{1 \leq j \leq n+d} \left\|\mu_j\right\|_\infty.$$

De plus, pour des fonctions suffisamment régulières on a

$$\left\| f^{(\nu)} - \mathcal{Q}_{d,n}^{(\nu)}(f) \right\|_{\infty,I} = \mathcal{O}\left(h^{d+1-\nu}\right), \; 0 \leq \nu \leq d-1,$$

où $h := \max_{1 \leq k \leq n} h_k$ et $\dot{h}_k := x_k - x_{k-1}$.
Pour un degré impair (resp. Pair) d, le quasi-interpolant $Q_{d,n}f$ peut être écrit comme

$$Q_{d,n}f = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) F_{j,d} \quad (\text{resp. } Q_{d,n}f = \sum_{j=1}^{n+2} f(t_j) F_{j,d}),$$

où chaque fonction $F_{j,d}$ est une combinaison linéaire appropriée des B-splines $B_{j,d}$. Ces représentations sont utilisées pour établir les méthodes de résolution numériques des équations intégrales discutées dans ce chapitre $J_{n,d}$ et $y_{j,d}$ indiquent les sous-ensembles des indices et des points d'évaluation indiqués dans les expressions ci-dessus, respectivement.

2.3 Méthode de Nyström basée sur des quasi-interpolants

2.3.1 Première méthode de Nyström

Considérons l'équation intégrale de Fredholm généralisée suivante du second type

$$z\,u(s) - \int_a^b L(s,t)\,H(s,t)\,u(t)\,dt = f(s), \; s \in I, \tag{2.1}$$

où z et $f \in C(I)$ sont donnés. On suppose que $L \in C(I \times I)$ et H est tel que

$$C_H := \sup_{a \leq s \leq b} \int_a^b |H(s,t)|\,dt < \infty,$$

et

$$\lim_{h \to 0^+} \omega_H(h) = 0,$$

avec

$$\omega_H(h) := \sup_{\substack{|s-\tau| \leq h \\ a \leq s,\tau \leq b}} \int_a^b |H(s,t) - H(\tau,t)|\,dt.$$

Sous ces hypothèses, l'opérateur integral $T : C(I) \longrightarrow C(I)$ donné par

$$Tu(s) := \int_a^b L(s,t)H(s,t)u(t)dt, \; s \in I,$$

est compact et l'équation intégrale (2.1) a une unique solution.

L'équation (2.1) peut aussi être écrite comme suit :

$$(zI - T)\,u = f.$$

Pour tout $s \in I$, soit L_s la fonction définie par

$$L_s\,(t) := L\,(s,t)\,,\ \ t \in I.$$

Pour résoudre numériquement l'équation (2.1), on peut approcher $L\,(s,t)\,u\,(t)$ dans (2.1) par

$$\mathcal{Q}_{n,d}\,[L_s\,(t)\,u\,(t)] = \sum_{j\in J_{n,d}} L_s\,(y_j)\,u\,(y_{j.d})\,F_{j,d}\,(t) = \sum_{j\in J_{n,d}} L\,(s,y_j)\,u\,(y_{j,d})\,F_{j,d}\,(t)\,,$$

avec

$$J_{n,d} = \{1, \cdots, n+2.\}$$

Pour obtenir l'équation

$$z\ u_{n,d}(s) - \sum_{j\in J_n} \omega_{j,d}\,(s)\,L\,(s,y_j)\,u_{n,d}\,(y_{j,d}) = f\,(s)\,,\ \ s \in I, \tag{2.2}$$

comme approximation de l'équation (2.1), avec

$$\omega_{j,d}\,(s) := \int_a^b H\,(s,t)\,F_{j,d}\,(t)\,dt.$$

Une fois les valeurs $u_{n,d}\,(y_{j,d})$ connues, l'équation (2.2) donne la formule de Nyström pour la solution approchée :

$$u_{n,d}\,(s) = \frac{1}{z}\left(f\,(s) + \sum_{j\in J_n} \omega_{j,d}\,(s)\,L\,(s,y_j)\,u_{n,d}\,(y_{j,d})\right),\ \ s \in I. \tag{2.3}$$

On réécrit l'équation (2.2) de la manière suivante

$$\left(zI - T^N_{n,d}\right) u_{n,d} = f, \tag{2.4}$$

avec $T^N_{n,d}$ défini par

$$T^N_{n,d}u := \sum_{j\in J_n} \omega_j\,(s)\,L\,(s,y_j)\,u\,(y_{j,d})\,.$$

Définissons le module de continuité de la fonction $x \in C(I)$ relativement à h comme

$$\omega(x,h) := \sup_{u,v \in I, |u-v| \leq h} |x(u) - x(v)|.$$

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.1 *L'operateur $zI - T_{n,d}^N$ dans l'équation (2.4) est inversible et son inverse est uniformément borné. De plus, pour n assez grand il existe une constante c indépendante de x et h telle que*

$$\|u - u_{n,d}\|_{\infty,I} \leq c\ C_H \max_{a \leq s \leq b} \omega(L_s u, h).$$

Preuve.

Comme dans [6, Thm. 4.2.1], il est facile de vérifier que l'opérateur $T_{n,d}^N$ est une approximation collectivement compacte de $T : C(I) \longrightarrow C(I)$. D'où l'opérateur $zI - T_{n,d}^N$ est inversible et son inverse est uniformément borné, i.e il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\left\| \left(zI - T_{n,d}^N\right)^{-1} \right\|_\infty \leq \alpha.$$

D'autre part

$$u - u_{n,d} = \left(zI - T_{n,d}^N\right)^{-1} \left(Tu - T_{n,d}^N u\right),$$

et

$$Tu - T_{n,d}^N u = \int_a^b H(s,t)\left(\mathcal{Q}_{n,d} - I\right) L_s(t)\, u(t)\, dt.$$

Puisque (cf.[33])

$$|(\mathcal{Q}_{n,d} - I)\, x| \leq \beta\omega(x,h)$$

pour tout $x \in C(I)$ et $\beta > 0$, on a

$$\left\|Tu - T_{n,d}^N u\right\|_\infty \leq \beta\ C_H \max_{a \leq s \leq b} \omega(L_s u, h).$$

Par conséquent

$$\|u - u_{n,d}\|_\infty \leq c\ C_H \max_{a \leq s \leq b} \omega(L_s u, h).$$

avec $c := \alpha\beta$. ■

2.3.2 Une nouvelle méthode de Nyström

Considérons maintenant une deuxième méthode de Nyström. Le noyau est maintenant discrétisé par rapport aux deux variables, c'est-à-dire on considère l'opérateur

$$T_{n,d}^{\tilde{N}} := \mathcal{Q}_{n,d} T_{n,d}^{N},$$

et l'équation

$$\left(zI - T_{n,d}^{\tilde{N}}\right) \tilde{u}_{n,d} = f.$$

Soit $\tilde{u}_{n,d}$ l'approximation numérique de la solution u de (4.1). L'équation approchée devient

$$z\ \tilde{u}_{n,d}(s) - \sum_{i \in J_{n,d}} \sum_{j \in J_{n,d}} F_{i,d}(s)\, \omega_{j,d}(t_i)\, L(t_i, t_j)\, \widetilde{u}_{n,d}(t_j) = f(s), \quad s \in I,$$

et donc

$$\tilde{u}_{n,d}(s) = \frac{1}{z}\left(f(s) + \sum_{i \in J_{n,d}} \sum_{j \in J_{n,d}} F_{i,d}(s)\, \omega_{j,d}(t_i)\, L(t_i, t_j)\, u_{n,d}(t_j)\right).$$

La solution numérique $u_{n.d}$ sera déterminée une fois les valeurs $u_{n,d}(t_j)$ connues. Cela peut être fait par colocalisation aux points dans $J_{n,d}$ et par résolution numérique du système d'équations linéaires résultant, comme dans la méthode classique Nyström.

Théorème 2.2 *L'opérateur* $\left(zI - T_{n,d}^{\tilde{N}}\right)^{-1}$ *est uniformément borné, de plus pour* n *assez grand, il existe une constante* $\tilde{c}$ *telle que*

$$\|u - \tilde{u}_{n,d}\|_\infty \le \tilde{c}\left(\omega(Tu, h) + U(\mathcal{Q}_{n,d})\, C_H \max_I \omega(L_s u, h)\right),$$

où $U(\mathcal{Q}_{n,d}) = \max_{1 \le j \le n+d} \|\mu_{j,d}\|_\infty$.

Preuve.

Puisque $T_{n,d}^{N}$ est collectivement compact, selon [6] $T_{n,d}^{\tilde{N}}$ est aussi collectivement compact et converge vers T sur $C(I)$. L'opérateur $\left(zI - T_{n,d}^{\tilde{N}}\right)^{-1}$ est uniformément borné, donc il existe une constante γ telle que

$$\left\| \left(zI - T_{n,d}^{\tilde{N}} \right)^{-1} \right\|_\infty \leq \gamma.$$

D'autre part

$$u - \tilde{u}_{n,d} = \left(zI - T_{n.d}^{\tilde{N}} \right)^{-1} \left(Tu - T_{n,d}^{\tilde{N}} u \right)$$

et

$$Tu - T_{n,d}^{\tilde{N}} u = \left(I - \mathcal{Q}_{n,d} \right) Tu - \mathcal{Q}_{n,d} \left(T_{n,d}^{N} u - Tu \right).$$

Par conséquent, compte tenu des estimations dans la preuve de Théorème 2.1 pour $\left| \left(\mathcal{Q}_{n,d} - I \right) x \right|$ et $\left\| Tu - T_{n,d}^{N} u \right\|_\infty$, on a

$$\left\| Tu - T_{n,d}^{\tilde{N}} u \right\|_\infty \leq \beta \left(\omega \left(Tu, h \right) + U \left(\mathcal{Q}_{n,d} \right) C_H \max_I \omega(L_s u, h) \right).$$

Finalement,

$$\left\| u - \tilde{u}_{n,d} \right\|_\infty \leq \tilde{c} \left(\omega \left(Tu, h \right) + U \left(\mathcal{Q}_{n,d} \right) C_H \max_I \omega(L_s u, h) \right),$$

avec $\tilde{c} = \beta\gamma$ et la preuve est complète. ■

2.4 Exemples

Dans cette section, nous présentons de nouveaux résultats concernant les quasi-interpolants splines discrets octiques. Dans le cas d'une subdivision uniforme, les fonctionnelles extrêmes des B-splines $B_{j,8}$, $1 \leq j \leq 8$, sont données par :

$$\begin{aligned}
\mu_1(f) &= f_1, \\
\mu_2(f) &= \frac{22277}{45045}f_1 + \frac{6435}{8192}f_2 - \frac{5005}{8192}f_3 + \frac{27027}{40960}f_4 - \frac{32175}{57344}f_5 + \frac{25025}{73728}f_6 \\
&- \frac{1228}{590112}f_7 + \frac{3465}{106496}f_8 - \frac{143}{40960}f_9, \\
\mu_3(f) &= -\frac{164249}{1576575}f_1 + \frac{577729}{401408}f_2 - \frac{337489}{516096}f_3 + \frac{868323}{1433600}f_4 - \frac{192035}{401408}f_5 + \frac{143005}{516096}f_6 \\
&- \frac{68217}{630784}f_7 + \frac{18853}{745472}f_8 - \frac{241393}{90316800}f_9, \\
\mu_4(f) &= -\frac{968183}{4729725}f_1 + \frac{804031}{1003520}f_2 + \frac{179827}{184320}f_3 - \frac{829839}{716800}f_4 + \frac{200987}{200704}f_5 - \frac{470843}{774144}f_6 \\
&+ \frac{385437}{1576960}f_7 - \frac{108653}{1863680}f_8 + \frac{31361}{5017600}f_9. \\
\mu_5(f) &= \frac{646049}{10135125}f_1 - \frac{703811}{2150400}f_2 + \frac{40614481}{19353600}f_3 - \frac{720991}{512000}f_4 + \frac{76597}{86016}f_5 - \frac{5122423}{11612160}f_6 \\
&+ \frac{1209667}{7884800}f_7 - \frac{918017}{27955200}f_8 + \frac{313123}{96768000}f_9, \\
\mu_6(f) &= \frac{4975343}{70945875}f_1 - \frac{20416187}{90316800}f_2 + \frac{13552337}{38707200}f_3 + \frac{39308753}{21504000}f_4 - \frac{6278591}{3612672}f_5 + \frac{24024829}{23224320}f_6 \\
&- \frac{19011623}{47308800}f_7 + \frac{15571273}{167731200}f_8 - \frac{13116403}{1354752000}f_9, \\
\mu_7(f) &= -\frac{66427}{779625}f_1 + \frac{3997009}{12902400}f_2 - \frac{38158213}{38707200}f_3 + \frac{47833403}{21504000}f_4 - \frac{29381}{73728}f_5 - \frac{3988961}{23224320}f_6 \\
&+ \frac{6902227}{47308800}f_7 - \frac{568529}{12902400}f_8 + \frac{1019321}{193536000}f_9, \\
\mu_8(f) &= \frac{329389}{10135125}f_1 - \frac{414599}{3225600}f_2 + \frac{4852543}{9676800}f_3 - \frac{8703173}{5376000}f_4 + \frac{62983}{18432}f_5 - \frac{9214969}{5806080}f_6 \\
&+ \frac{5418503}{11827200}f_7 - \frac{41932800}{3413453}f_8 + \frac{329389}{48384000}f_9,
\end{aligned}$$

les coéfficients $\mu_{n+j}(f)$ des B-splines $B_{n+j,8}$, $1 \leq j \leq 8$, sont des combinaisons linéaires des valeurs $f_{n-6}, \ldots, f_{n+2}$, mêmes valeurs pour $\mu_{9-j}(f)$ extrêmes à l'ordre inverse.

Pour $9 \leq j \leq n$, on trouve

$$\begin{aligned}
\mu_j(f) = &\frac{329389}{51609600}f_{j-7} - \frac{166603}{2150400}f_{j-6} + \frac{5701483}{12902400}f_{j-5} - \frac{9982663}{6451200}f_{j-4} + \frac{5768617}{1720320}f_{j-3} \\
&- \frac{9982663}{6451200}f_{j-2} + \frac{5701483}{12902400}f_{j-1} - \frac{166603}{2150400}f_j + \frac{329389}{51609600}f_{j+1}.
\end{aligned}$$

Il est simple de vérifier que

$$|\mu_2|_\infty = |\mu_{n+7}|_\infty \approx 3.6236, \qquad |\mu_3|_\infty = |\mu_{n+6}|_\infty \approx 3.6947,$$

$$|\mu_4|_\infty = |\mu_{n+5}|_\infty \approx 5.0578, \qquad |\mu_5|_\infty = |\mu_{n+4}|_\infty \approx 5.4187,$$

$$|\mu_6|_\infty = |\mu_{n+3}|_\infty \approx 5.7511, \qquad |\mu_7|_\infty = |\mu_{n+2}|_\infty \approx 4.4621,$$

et

$$|\mu_8|_\infty = |\mu_{n+1}|_\infty \approx 7.8318.$$

De plus, pour $9 \leq j \leq n$, on a

$$|\mu_j|_\infty \approx 7.4997.$$

Par conséquent,

$$\|\mathcal{Q}_{8,n}\|_\infty \leq 7.8318.$$

En outre, pour $f \in C^9(I)$, on a

$$\|f - Q_{8,n}f\|_\infty = \mathcal{O}\left(h^9\right).$$

La formule de quadrature basée sur La quasi-interpolation spline octique est obtenue en intégrant le quasi-interpolant

$$Q_{8,n}f = \sum_{j=1}^{n+8} \mu_j(f) B_{j,8},$$

avec $n \geq 18$, on obtient

$$I_{Q_8}(f) := \int_a^b Q_{8,n}f = \sum_{j=1}^{n+2} \omega_l f_l = \left(\omega_1 f(a) + \sum_{j=2}^{n+1} \omega_j f(t_j) + \omega_{n+2} f(b)\right),$$

avec

$$\omega_1 = \omega_{n+2} = 0.140\,09h,\ \omega_2 = \omega_{n+1} = 0.810\,95h,\ \omega_3 = \omega_n = 1.\,087h,$$
$$\omega_4 = \omega_{n-1} = 0.9322h,\ \omega_5 = \omega_{n-2} = 1.0478h,\ \omega_6 = \omega_{n-3} = 0.974\,3h,$$
$$\omega_7 = \omega_{n-4} = 1.0095h,\ \omega_8 = \omega_{n-5} = 0.9979h,\ \omega_9 = \omega_{n-6} = 1.0002h,$$

et

$$\omega_j = \frac{144115188075855811}{144115188075855872} \approx 1.0000h, \quad 10 \leq j \leq n-7.$$

Il est facile de prouver que le quasi-interpolant $Q_{8,n}f$ est superconvergent aux noeud x_j de la subdivision et aux points t_j, i.e.

$$Q_{8,n}f\left(x_j\right)-f\left(x_j\right)=\mathcal{O}\left(h^{10}\right) \qquad \text{and} \qquad Q_{8,n}f\left(t_j\right)-f\left(t_j\right)=\mathcal{O}\left(h^{10}\right)$$

au lieu de $\mathcal{O}\left(h^9\right)$.

2.5 Tests numériques

Dans cette section, nous considérons les équations intégrales de Fredholm

$$u\left(t\right)=f_\ell\left(t\right)+\int_0^1 k_\ell\left(t,s\right)u\left(s\right)ds \quad t\in\left[0,1\right], \quad \ell=1,2 \tag{2.5}$$

avec les noyaux

$$k_1\left(t,s\right)=\frac{\left(s-t\right)\sin\left(t-s\right)}{12\left(1+t\right)} \tag{2.6}$$

et

$$k_2\left(t,s\right)=\frac{1}{\sqrt{1-s}} \tag{2.7}$$

(voir [21] et [20], respectivement). Le terme f_1 est choisi de sorte que

$$u_1\left(t\right)=\frac{t^5}{20}-\frac{t^4}{12}$$

est la solution de l'équation intégrale correspondante. En outre,

$$f_2\left(t\right)=\sqrt{t}-\frac{\pi}{2},$$

Dans ce cas la solution unique est

$$u_2\left(t\right)=\sqrt{t}.$$

Table 3.1 présente les erreurs absolues $\left\|u-\tilde{u}_{n,8}\right\|_\infty$ pour l'équation intégral (2.5) à noyau (2.6). Par conséquent, la nouvelle méthode fournit de meilleurs résultats que la méthode dans [21].

Les résultats de la seconde équation intégrale sont présentés dans le tableau 3.2. Elles sont meilleures que les erreurs dans [20]. La méthode dans la sous-section

n	$\|u - \tilde{u}_{n,8}\|_\infty$
10	$8.462e-15$
16	$1.500e-16$
20	$2.132e-17$
32	$6.472e-18$
64	$6.441e-18$

TABLE 2.1 – *Erreurs absolues pour* (2.5) avec le noyau (2.6).

2.3.1 est légèrement meilleure que celle de 2.3.2. Les deux méthodes améliorent les résultats dans [20].

Chapitre 3

Résolution des équations intégrales faiblement singulères

3.1 Introduction

Ces dernières années, plusieurs problèmes de mathématiques, d'ingénierie, de physique et de sciences ont été formulés en termes d'équations intégrales, en particulier en termes d'équations intégrales singulières (cf. [44]). Une classe importante de ces équations est celle des équations intégrales singulières à noyau logarithmique. Les méthodes de projection jouent un rôle important dans l'analyse numérique, en particulier pour la résolution numérique des équations intégrales(cf.[6, 42]). Dans [50], Mennouni a présenté une méthode de projection permettant de résoudre des équations d'opérateurs avec des opérateurs bornés dans des espaces de Hilbert, et il a appliqué la méthode de résolution des équations intégrales de Cauchy dans deux cas : les projections de Galerkin et les projections de Kulkarni respectivement, en utilisant une suite de projections orthogonales à rangs finis.

Dans [49], l'auteur a introduit une méthode modifiée basée sur les règles trapèze et de Simpson, pour résoudre des équations intégrales de Volterra du second type. Les l'auteurs de [55] ont discuté une méthode de projection pour résoudre une classe d'équations intégro-différentielles à noyau de Cauchy en utilisant des polynômes d'aile du premier type.

Dans [77], l'auteur a discuté des solutions des équations intégrales aux limites et des systèmes d'équations intégrales logarithmiques du premier type. L'auteur de [10] a résolu une équation intégrale logarithmique singulière dans deux intervalles disjoints finis en utilisant la méthode de la théorie des fonctions, sous certaines conditions. L'auteur de [29] a considéré une méthode directe pour résoudre une équation intégrale singulière du premier type en utilisant la combinaison d'une singularité de type logarithmique et d'une singularité de type Cauchy.

Dans [23], l'auteur a étudié l'équation intégrale à noyau logarithmique du premier type comme problème mal posé.

L'auteur de [60] a présenté des solutions sous forme fermée pour une classe importante d'équations intégrales singulières du premier type avec des noyaux de différence. Il a considéré la fonction du noyau comme somme d'un polynôme et d'un deuxième polynôme multiplié par un logarithme.

Dans [45], l'auteur a introduit une méthode pour résoudre des équations intégrales singulières avec des noyaux logarithmiques ou de Cauchy

Dans [84], l'auteur a étudié les propriétés analytiques d'une équation intégrale logarithmique singulière. Il a développé deux méthodes d'intégration produit pour résoudre cette classe d'équations intégrales, la première est basée sur la méthode d'Euler, mais dans la seconde, l'auteur a utilisé une méthode trapèze de produit

L'auteur de [63] a considéré les méthodes de Galerkin pour résoudre les équations intégrales de Fredholm du second type avec noyau faiblement singulier et le problème de valeur propre correspondant sur $[-1, 1]$.

Récemment, l'auteur de [4] a décrit une méthode de collocationa utilisant le développement à fonction de base radiale pour la résolution numérique des équations intégrales aux limites du second type avec des noyaux logarithmiques singuliers. Cette classe d'equations résulte des problèmes aux limites des équations de Laplace avec des conditions aux limites de Robin linéaires. Récemment, de nombreux chercheurs ont développé des méthodes numériques permettant de résoudre des équations intégrales du premier type à noyau logarithmique via des méthodes de collocation et de Galerkin. Voir [31, 32], [38, 39], [78, 79] et des références y figurant.

Sur la base de ce qui précède, les équations intégrales à noyau logarithmique constituent une classe importante d'équations intégrales singulières, cette classe possède d'importantes applications dans plusieurs problèmes d'économie, de dynamique des fluides, d'électrodynamique, d'élasticité, de mécanique des fractures, de biologie et d'autres domaines scientifiques, ainsi que dans les technologies de pointe.
Le but de ce chapitre est de présenter deux méthodes pour résoudre des équations intégrales faiblement singulères dans deux espaces différents. D'une part, nous introduisons une méthode d'intégration produit dans l'espace des fonctions continues via le quasi-interpolants splines développés plus récemment dans [57]. D'autre part, nous présentons une méthode de projection de Legendre décalée pour résoudre des

équations intégrales généralisées du second type avec noyau logarithmique. Nous utilisons de nouvelles techniques pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème actuel dans les espaces de Hilbert et la solution du problème approché correspondant.

3.2 Méthode d'intégration produit

On considère l'équation intégrale linéaire de seconde espèce suivante

$$\lambda u(t) - \int_a^b k(x,t)u(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b \tag{3.1}$$

où la fonction noyau $k(.,.)$ n'est pas nécessairement continue mais l'opérateur

$$Tu = \int_a^b k(.,t)u(t)dt$$

reste compact dans $C([a,b])$. Dans ce cas, la fonction noyau $k(.,.)$ discontinue peut avoir une infinité de singularités qui rendent la résolution analytique, pratiquement impossible, nous devons donc utiliser une méthode numérique appropriée à la singularité du noyau k. Nous allons appliquer la méthode dite d'intégration produit, cette méthode est facile et efficace, elle nous permet d'approcher l'opérateur T par T_n, qui est un opérateur à noyau dégénéré et absorber la singularité de son noyau.
Les exemples les plus importants de ce type de noyaux sont $\log|t-x|, |t-x|^{\alpha-1}$, pour un certain $0 < \alpha < 1$.
L'équation (3.1) s'écrit sous la forme

$$\lambda u(t) - \int_a^b H(x,t)g(x,t)u(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \tag{3.2}$$

Supposons que $H(.,.)$ est continûment différentiable jusqu'à un certain ordre.

3.2.1 Description de la méthode

Soit $u \in C([a,b])$ on pose

$$[H(x,t)u(t)]_d = Q_d H(x,.)u(.) = \sum_{j\in J'} H(x,\tau_j)u(\tau_j)L_j(t), \quad x \in [a,b]. \tag{3.3}$$

Avec

$$J' = \{1, \cdots, n+2\}$$

On définit l'approximation numérique de l'opérateur intégral dans (3.2) par

$$T_n u(t) = \int_a^b [H(x,t)u(t)]_d g(x,t)dt \quad a \leq x \leq b. \tag{3.4}$$

Cela peut s'écrire aussi sous la forme

$$T_n u(t) = \sum_{j \in J'} \left(\int_a^b L_j(t) g(x,t) dt \right) H(x, \tau_j) u(\tau_j)$$

$$= \sum_{j \in J'} \omega_j(x) H(x, \tau_j) u(\tau_j) \quad x \in [a,b].$$

Où τ_j, $j \in J'$ sont les points d'évaluation du quasi-interpolant Q_d. Donc l'équation intégrale (3.2) est approchée par

$$\lambda u_n(x) - \sum_{j \in J'} \omega_j(x) H(x, \tau_j) u_n(\tau_j) = f(x) \quad x \in [a,b]. \tag{3.5}$$

Cela est équivalent à la résolution du système d'équation linéaires

$$\lambda u_n(\tau_i) - \sum_{j \in J'} \omega_j(\tau_i) H(\tau_i, \tau_j) u_n(\tau_j) = f(\tau_i) \quad i \in J'. \tag{3.6}$$

En utilisant la formule d'interpolation de Nyström, on obtient la solution approchée

$$u_n(x) = \frac{1}{\lambda} \left[f(x) + \sum_{j \in J'} \omega_j(x) H(x, \tau_j) u_n(\tau_j) \right], \quad x \in [a,b]. \tag{3.7}$$

Cette méthode est appelée **méthode d'intégration produit**

3.2.2 Evaluation des fonctions poids $\omega_j(.)$

Pour le calcul de la solution approchée $u_n(.)$, donnée par (3.7), on a besoin de calculer les fonctions poids $\omega_j(.)$ définies par

$$\omega_j(x) = \int_a^b L_j(t) g(x,t) dt, \quad j \in J',$$

comme chaque fonction de quasi-Lagrange L_j est une combinaison linéaire d'un nombre fini de B-splines, il suffit de calculer les intégrales

$$\int_a^b B_j(t)g(x,t)dt, j \in J'.$$

Exemple 3.1 *Prenons comme exemple*

$$\{B_k = B_{kd}, k \in J\},$$

où

$$J = \{1, 2, \cdots, n+d\}.$$

On considère la subdivision uniforme

$$X_n = \{x_i = a + ih, 0 \leq i \leq n\}$$

de pas $h = \dfrac{b-a}{n}$. *Pour* $n = 5, d = 4, [a,b] = [0,1]$ *on a 4+5=9 B-splines définies comme suit*

$$B_1(t) = (5t-1)^4 \boldsymbol{1}_{[0,x_1[},$$

$$B_2(t) = \left[\frac{-9375}{8}t^4 + 875t^3 - 225t^2 + 20t\right] \boldsymbol{1}_{[0,x_1[} + \left[\frac{1}{8}(5t-2)^4\right] \boldsymbol{1}_{[x_1,x_2[},$$

$$B_3(t) = \left[\frac{53125}{72}t^4 - \frac{1375}{3}t^3 + 75t^2\right] \boldsymbol{1}_{[0,x_1[} + \left[-\frac{14375}{72}t^4 + \frac{875}{3}t^3 - 150t^2 + 30t - \frac{3}{2}\right] \boldsymbol{1}_{[x_1,x_2[} +$$

$$\left[\frac{1}{18}(5t-3)^4\right] \boldsymbol{1}_{[x_2,x_3[},$$

$$B_4(t) = \left[-\frac{125}{72}t^3(125t-48)\right] \boldsymbol{1}_{[x_0,x_1[} + \left[\frac{14375}{72}t^4 - 250t^3 + 100t^2 - \frac{40}{3}t + \frac{2}{3}\right] \boldsymbol{1}_{[x_1,x_2[} +$$

$$\left[-\frac{8125}{72} + 250t^3 - 200t^2 + \frac{200}{3}t - \frac{22}{3}\right] \boldsymbol{1}_{[x_2,x_3[} + \left[(5t-4)(\frac{5}{2}t-2)(\frac{5}{4}t-1)(\frac{5}{3}t-\frac{4}{3})\right] \boldsymbol{1}_{[x_3,x_4[},$$

$$B_5(t) = \frac{625}{24}t^4 \boldsymbol{1}_{[x_0,x_1[} + \left[-\frac{625}{6}t^4 + \frac{625}{6}t^3 - \frac{125}{4}t^2 + \frac{25}{6}t - \frac{5}{24}\right] \boldsymbol{1}_{[x_1,x_2[} +$$

$$\left[\frac{625}{4}t^4-\frac{625}{2}t^3+\frac{875}{4}t^2-\frac{125}{2}t-\frac{155}{24}\right]\boldsymbol{1}_{[x_2,x_3[}+$$

$$\left[-\frac{625}{6}t^4+\frac{625}{2}t^3-\frac{1375}{4}t^2+\frac{325}{2}t-\frac{655}{24}\right]\boldsymbol{1}_{[x_3,x_4[}+\left[(5t-5)(\frac{5}{2}t-\frac{5}{2})(\frac{5}{3}t-\frac{5}{3})(\frac{5}{4}t-\frac{5}{4})\right]\boldsymbol{1}_{[x_4,x_5[},$$

$$B_6(t)=\left[(5t-1)(\frac{5}{2}t-\frac{1}{2})(\frac{5}{3}t-\frac{1}{3})(\frac{5}{4}t-\frac{1}{4})\right]\boldsymbol{1}_{[x_1,x_2[}+$$

$$\left[-\frac{8125}{72}t^4+\frac{3625}{18}t^3-\frac{1525}{12}t^2+\frac{625}{18}t-\frac{253}{72}\right]\boldsymbol{1}_{[x_2,x_3[}+$$

$$\left[\frac{14375}{72}t^4-\frac{9875}{18}t^3+\frac{6575}{12}t^2-\frac{4235}{18}t+\frac{2663}{72}\right]\boldsymbol{1}_{[x_3,x_4[}+\left[-\frac{125}{72}(125t-77)(t-1)^3\right]\boldsymbol{1}_{[x_4,x_5[},$$

$$B_7(t)=\frac{1}{18}(5t-2)^4\boldsymbol{1}_{[x_2,x_3[}+\left[-\frac{14375}{72}t^4+\frac{9125}{18}t^3-\frac{5675}{12}t^2+\frac{3485}{18}t-\frac{2123}{72}\right]\boldsymbol{1}_{[x_3,x_4[}+$$

$$\left[\frac{53125}{72}t^4-\frac{44875}{18}t^3+\frac{37525}{12}t^2-\frac{31075}{18}t+\frac{25525}{72}\right]\boldsymbol{1}_{[x_4,x_5[}$$

$$B_8(t)=\frac{1}{8}(5t-3)^4\boldsymbol{1}_{[x_3,x_4[}+\left[-\frac{9375}{8}t^4+\frac{7625}{2}t^3-\frac{18525}{4}t^2+\frac{4985}{2}t-\frac{4015}{8}\right]\boldsymbol{1}_{[x_4,x_5[}$$

$$B_9(t)=(5t-4)^4\boldsymbol{1}_{[x_4,x_5[},$$

Pour $n=6, d=5, [a,b]=[0,1]$ *on a*

$$B_1(t)=-(6t-1)^5\boldsymbol{1}_{[0,x_1[},$$

$$B_2(t)=\left[15066t^5-12150t^4+3780t^3-540t^2+30t\right]\boldsymbol{1}_{[0,x_1[}-2(3t-1)^5\boldsymbol{1}_{[x_1,x_2[},$$

$$B_3(t)=\left[-10350t^5+7650t^4-1980t^3+180t^2\right]\boldsymbol{1}_{[0,x_1[}+$$

$$\left[1314t^5-2070t^4+1260t^3-360t^2+45t-\frac{3}{2}\right]\boldsymbol{1}_{[x_1,x_2[}-\frac{9}{2}(2t-1)^5\boldsymbol{1}_{[x_2,x_3[},$$

$$B_4(t)=\left[3735t^5-2250t^4+360t^3\right]\boldsymbol{1}_{[x_0,x_1[}+\left[-1449t^5+2070t^4-1080t^3+240t^2-20t+\frac{2}{3}\right]\boldsymbol{1}_{[x_1,x_2[}+$$

$$\left[495t^5-1170t^4+1080t^3-480t^2+100t-\frac{22}{3}\right]\boldsymbol{1}_{[x_2,x_3[}+\left[-\frac{1}{3}(3t-2)^5\right]\boldsymbol{1}_{[x_3,x_4[},$$

$$B_5(t)=-\frac{27}{5}t^4(137t-50)\boldsymbol{1}_{[x_0,x_1[}+\left[\frac{4401}{5}t^5-1080t^4+450t^3-75t^2+\frac{25}{4}t-\frac{5}{24}\right]\boldsymbol{1}_{[x_1,x_2[}+$$

$$\left[-\frac{3699}{5}t^5+1620t^4-1350t^3+525t^2-\frac{375}{4}t+\frac{155}{24}\right]\boldsymbol{1}_{[x_2,x_3[}+$$

$$\left[\frac{1701}{5}t^5-1080t^4+1350t^3-825t^2+\frac{975}{4}t-\frac{655}{24}\right]\boldsymbol{1}_{[x_3,x_4[}+\left[-\frac{1}{120}(6t-5)^5\right]\boldsymbol{1}_{[x_4,x_5[},$$

$$B_6(t) = \frac{324}{5}t^5 \mathbf{1}_{[x_0,x_1]} + \left[-324t^5 + 324t^4 - 108t^3 + 18t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{20}\right] \mathbf{1}_{[x_1,x_2[} +$$
$$\left[648t^5 - 1296t^4 + 972t^3 - 342t^2 + \frac{117}{2}t - \frac{79}{20}\right] \mathbf{1}_{[x_2,x_3[} +$$
$$\left[-648t^5 + 1944t^4 - 2268t^3 + 1278t^2 - \frac{693}{2}t + \frac{731}{20}\right] \mathbf{1}_{[x_3,x_4[} +$$
$$\left[324t^5 - 1296t^4 + 2052t^3 - 1602t^2 + \frac{1227}{2}t - \frac{1829}{20}\right] \mathbf{1}_{[x_4,x_5[} + \left[-\frac{324}{5}(t-1)^5\right] \mathbf{1}_{[x_5,x_6[},$$
$$B_7(t) = \frac{1}{120}(6t-1)^5 \mathbf{1}_{[x_1,x_2[} + \left[-\frac{1701}{5}t^5 + 621t^4 - 432t^3 + 147t^2 - \frac{99}{4}t + \frac{199}{120}\right] \mathbf{1}_{[x_2,x_3[} +$$
$$\left[\frac{3699}{5}t^5 - 2079t^4 + 2268t^3 - 1203t^2 + \frac{1251}{4}t - \frac{3851}{120}\right] \mathbf{1}_{[x_3,x_4[} +$$
$$\left[-\frac{4401}{5}t^5 + 3321t^4 - 4932t^3 + 3597t^2 - \frac{5149}{4} + \frac{21749}{120}\right] \mathbf{1}_{[x_4,x_5[} +$$
$$\left[\frac{27}{5}(137t - 87)(t-1)^4 \mathbf{1}\right]_{[x_5,x_6[},$$
$$B_8(t) = \frac{1}{3}(3t-1)^5 \mathbf{1}_{[x_2,x_3[} + \left[-495t^5 + 1305t^4 - 1350t^3 + 690t^2 - 175t + \frac{53}{3}\right] \mathbf{1}_{[x_3,x_4[} +$$
$$\left[1449t^5 - 5175t^4 + 7290t^3 + \left[-5070t^2 + 1745t - \frac{715}{3}\right] \mathbf{1}_{[x_4,x_5[}\right] +$$
$$\left[-45(t-1)^3(83t^2 - 116t + 41)\right] \mathbf{1}_{[x_5,x_6[},$$
$$B_9(t) = \frac{9}{2}(2t-1)^5 \mathbf{1}_{[x_3,x_4[} + \left[-1314t^5 + 4500t^4 - 6120t^3 + 4140t^2 - 1395t + \frac{375}{2}\right] \mathbf{1}_{[x_4,x_5[} +$$
$$\left[10350t^5 - 44100t^4 + 74880t^3 - 63360t^2 + 26730t - 4500\right] \mathbf{1}_{[x_5,x_6[},$$
$$B_{10}(t) = 2(3t-2)^5 \mathbf{1}_{[x_4,x_5[} + \left[-15066t^5 + 63180t^4 - 105840t^3 + 88560t^2 - 37020t + 6186\right] \mathbf{1}_{[x_5,x_6[},$$
$$B_{11}(t) = (6t-5)^5 \mathbf{1}_{[x_5,x_6[}.$$

3.2.3 Exemples numériques

On présente quelques résultats numériques obtenus dans la résolution approchée d'une équation intégrale par la méthode d'intégration produit pour $n = 4$.

Exemple 3.2 *On considère comme premier exemple l'équation intégrale de Fredholm suivante*

$$u(x) - \int_0^1 (1-t)^{\frac{-1}{2}} u(t)dt = x^2 - \frac{16}{15},$$

de solution exacte $u(x) = x^2$.

Dans le tableau suivant on donne la norme infinie de l'erreur associée à la méthode d'intégration produit basée sur les quasi-interpolants ci-dessus en fonction de nombre de sous intervalles n

n	$\|u - u_n\|_\infty$
5	$1.112E-16$
10	$1.112E-16$

Exemple 3.3 *On choisit maintenant comme deuxième exemple l'équation intégrale de Fredholm suivante*

$$u(x) - \int_0^1 (x-y)\sqrt{\frac{1+y}{1+x}}u(y)dy = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{x-\frac{1}{2}}{(x+1)^{\frac{1}{2}}},$$

de solution exacte

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

n	$\|u - u_n\|_\infty$
5	$1.0367E-6$
10	$3.3488E-8$
15	$3.6529E-9$

Exemple 3.4 *Pour l'équation de Fredholm suivante on a considéré le cas impaire i.e.* $d = 3$

$$u(x) - \int_0^1 \log(|x-y|)u(y)dy = 3\frac{y}{2} - \frac{1}{2}y^2\log(y) + \frac{1}{2}y^2(\log(1-y)) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log(1-y),$$

de solution exacte $u(x) = x$

$$\|u - u_n\|_\infty : E-17.$$

Exemple 3.5 *Un autre éxemple d'équation intégrale de Fredholm*

$$u(x) - \int_0^1 (|x-y|)^{\frac{-1}{2}}u(y)dy = 1 - \frac{\pi}{2} - 2x^{\frac{1}{2}} - 2(1-x)^{\frac{1}{2}} - x\log(1+(1-x)^{\frac{1}{2}}) - (1-x)\log(1+x^{\frac{1}{2}}) +$$

$$\frac{1}{2}x\log(x) + \frac{1}{2}(1-x)\log(1-x).$$

de solution exacte

$$u(x) = 1 + (x^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}).$$

n	$\|u-u_n\|_\infty$
5	$3.32E-2$
10	$1.24E-2$
15	$9E-3$

3.2.4 Estimation de l'erreur de la solution approchée

On considère l'équation (3.2) avec $H(.,.)$ supposée continue. De plus, on suppose que $g(.,.)$ vérifie

$$c \equiv \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |g(x,t)|dt < \infty, \tag{3.8}$$

et

$$\lim_{h\to o^+} \omega_g(h) = 0; \tag{3.9}$$

où

$$\omega_g(h) \equiv \sup_{|x-y|<h} \int_0^1 |g(x,t)-g(y,t)|dt.$$

Ces propriétées sont satisfaites par $\log|t-x|, |t-x|^\alpha$, pour $0<\alpha<1$ et $x\in[a,b]$.

Supposons que la fonction $g(x,t)$ vérifie ((3.8))et((3.9))et que $H(x,t)$ soit continue pour $a\le x,t\le b$. Pour une fonction donnée $f\in[a,b]$, supposons que l'équation intégrale

$$\lambda u(t) - \int_a^b H(x,t)g(x,t)u(t)dt = f(x), \quad a\le x\le b.$$

admette une unique solution. Considérons l'approximation numérique (3.4), où $[H(x,t)u(t)]_d$ est défini par le quasi-interpolant Q_d comme dans (3.3), alors

Théorème 3.1 *Pour n suffisamment grand $n>N$, l'équation (3.5) admet une* *solution unique, et l'opérateur* $(I - T_n)^{-1}$ *est uniformément borné. De plus,*

$$\|u - u_n\|_\infty \leq C\|Tu - T_n u\|_\infty, \quad \forall n > N,$$

pour une certaine $C > 0$

Preuve.

Voir [6, 83]. ■

3.3 Résolution des équations intégrales faiblement singulères dans un espace de Hilbert

3.3.1 Existence et unicité des solutions

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, on désigne par $\mathbb{B}(H)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$, et par $sp\ (A)$ le spectre de l'opérateur A.
Soientt $A \in \mathbb{B}(H)$ et A^* l'opérateur adjoint de A. On rappele que A est dit auto-adjoint si $A^* = A$, et que A est antisymétrique si $A^* = -A$.

Lemme 3.1 *Soit* $A \in \mathbb{B}(H)$.

1. *Si* A *est auto-adjoint, alors* $sp\ (A) \subseteq \mathbb{R}$.
2. *Si* A *est antisymétrique, alors* $sp\ (A) \subseteq \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Preuve.

1. Voir [66].
2. Il est clair que
$$(\mathrm{i}A)^* = -\mathrm{i}A^* = \mathrm{i}A,$$
de sorte que l'opérateur $\mathrm{i}A$ est auto-adjoint, dire $sp\ (\mathrm{i}A) \subseteq \mathbb{R}$, d'où $sp\ (A) \subseteq \mathrm{i}\mathbb{R}$.

■

Dans tout ce chapitre, notons $\mathcal{H} := L^2([0,1],\mathbb{C})$. Considérons l'équation intégrale généralisée avec noyau logarithmique

$$\sum_{p=1}^{r}\int_0^1 \psi_p(s,\varsigma)\ln|\varsigma - s|\,\varphi(\varsigma)d\varsigma = \lambda\varphi(s) + f(s), \quad 0 \leq s \leq 1 \quad r \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Nous examinons la solution numérique de cette équation. Notre discussion se déroulera dans deux cas importants.

3.3.2 Cas $\overline{\psi_p(s,\varsigma)} = -\psi_p(\varsigma,s), p = 1\cdots r$

Dans le premier cas, nous supposons que λ est un réel non nul, et que $\psi_p(.,.)$ sont des fonctions continues, de plus,

$$\overline{\psi_p(s,\varsigma)} = -\psi_p(\varsigma,s), \quad p = 1\cdots r.$$

Soit

$$A_r\varphi(s) \;:=\; \sum_{p=1}^{r}\int_0^1 \psi_p(s,\varsigma)\ln|\varsigma - s|\,\varphi(\varsigma)d\varsigma. \quad u \in \mathcal{H}, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Nous rappelons que $A_r \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$, de plus $A_r^* = -A_r$. L'équation (3.10) est équivalente à

$$(A_r - \lambda I)\varphi = f.$$

Théorème 3.2 *Pour tout $f \in \mathcal{H}$, l'équation intégrale logarithmique (3.10) admet une solution unique $\varphi \in \mathcal{H}$.*

Preuve.

Puisque

$$\overline{\psi_p(s,\varsigma)} = -\psi_p(\varsigma,s), \quad p = 1\cdots r,$$

il s'ensuit que A_r est un opérateur antisymétrique, et par le lemme 3.1, nous obtenons $sp\,(A_r) \subseteq i\mathbb{R}$. Cela montre que $\lambda \notin sp\,(A_r)$, par conséquent l'opérateur $A_r - \lambda I$ est inversible. ■

Théorème 3.3 *L'estimation suivante est valable :*

$$\|(A_r - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|}.$$

Preuve.

Comme en [66], pour tous $u \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} Re \left\langle (A_r - \lambda I)\, u, u \right\rangle &= \frac{1}{2}\left[\left\langle (A_r - \lambda I)\, u, u \right\rangle + \overline{\left\langle (A_r - \lambda I)\, u, u \right\rangle} \right] \\ &= \frac{1}{2}\left[-2\lambda \left\langle u, u \right\rangle + \left\langle A_r u, u \right\rangle + \left\langle u, A_r u \right\rangle \right] \\ &= -\lambda \left\langle u, u \right\rangle, \end{aligned}$$

puisque

$$|\lambda|\, \|u\|^2 = |\mathrm{Re}\left\langle (A_r - \lambda I)u, u \right\rangle| \leq |\left\langle (A_r - \lambda I)u, u \right\rangle| \leq \|(A_r - \lambda I)u\|\, \|u\|,$$

on obtient

$$\|(A_r - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|}.$$

■

3.3.3 Cas $\overline{\psi_p(s,\varsigma)} = \psi_p(\varsigma, s), p = 1 \cdots r$

Dans ce cas, on assume que $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}^*$ et $\psi_p(.,.)$ satisfont

$$\overline{\psi_p(s,\varsigma)} = \psi_p(\varsigma, s), \quad p = 1 \cdots r.$$

Par conséquent

$$A_r^* = A_r.$$

Théorème 3.4 *Pour tout $f \in \mathcal{H}$, l'équation intégrale logarithmique (3.10) admet une solution unique $\varphi \in \mathcal{H}$.*

Preuve.

Puisque

$$\overline{\psi_p(s,\varsigma)} = -\psi_p(\varsigma, s), \quad p = 1 \cdots r.$$

On en déduit que A_r est un opérateur auto-joint. Par conséquent

$$sp\,(A_r) \subseteq \mathbb{R},$$

et donc $\lambda \notin sp\,(A_r)$, ce qui prouve que l'opérateur $A_r - \lambda I$ est inversible. ∎

Théorème 3.5 *L'estimation suivante est valable :*

$$\|(A_r - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}(\lambda)|}.$$

Preuve.

Comme dans [66], pour tout $u \in \mathcal{H}$, nous avons

$$\begin{aligned}
|\langle (A_r - \lambda I)\, u, u\rangle|^2 &= \left|\langle A_r u, u\rangle - \lambda \|u\|^2\right|^2 \\
&= \left|\langle A_r, u\rangle - \mathrm{Re}(\lambda)\, \|u\|^2\right|^2 + |\mathrm{Im}(\lambda)|^2\, \|u\|^4 \\
&\geq |\mathrm{Im}(\lambda)|^2\, \|u\|^4 ,
\end{aligned}$$

De plus

$$|\mathrm{Im}(\lambda)|\, \|u\|^2 \leq |\langle (A_r - \lambda I)\, u, u\rangle| ,$$

ce qui donne

$$\|(A_r - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}(\lambda)|}.$$

∎

3.3.4 Projections orthogonales de rang fini

Soit $(L_n)_{n\geq 0}$ la suite de polynômes orthogonaux de Legendre. Nous rappelons que les polynômes de Legendre $L_n(.)$ sont définis par

$$L_n(s) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{1-s}{2}\right)^k .$$

Leur fonction génératrice est donnée par

$$\frac{1}{\sqrt{1-2st+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(s) t^n.$$

Notons que Les premiers polynômes de Legendre sont

$$\begin{aligned}
L_0(s) &:= 1;\\
L_1(s) &:= s;\\
L_2(s) &:= \frac{1}{2}\left(3s^2-1\right);\\
L_3(s) &:= \frac{1}{2}\left(5s^3-3s\right);\\
L_4(s) &:= \frac{1}{8}\left(35s^4-30s^2+3\right).
\end{aligned}$$

Les polynômes de Legendre de degré supérieur sont souvant trouvés en utilisant une relation de récurrence à trois termes (voir [64]).
Considérons les polynômes de Legendre décalés suivants

$$\ell_n(s) := L_n(2s-1), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Rappelons que les polynômes de Legendre décalés sont orthogonaux sur $[0,1]$. Une expression explicite pour les polynômes de Legendre décalés est donnée par

$$\ell_n(s) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} (-s)^k.$$

Les premiers polynômes de Legendre décalés sont :

$$\begin{aligned}
\ell_0(s) &:= 1;\\
\ell_1(s) &:= 2s-1;\\
\ell_2(s) &:= 6s^2-6s+1;\\
\ell_3(s) &:= 20s^3-30s^2+12s-1;\\
\ell_4(s) &:= 70s^4-140s^3+90s^2-20s+1.
\end{aligned}$$

Soient

$$e_j(t) := (\sqrt{2j+1})\ell_j(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

On définit $\mathcal{H}_n$ l'espace engendré par $\{e_j, \quad j=0\ldots n\}$. Nous associons à $\mathcal{H}_n$ la suite

$(\pi_n)_{n\geq 0}$ des projections orthogonales bornés de rang fini sur $\mathcal{H}_n$ données par

$$\pi_n u := \sum_{j=0}^{n} \langle u, e_j \rangle \, e_j.$$

Rappelons que, pour tout $\psi \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{n\to\infty} \|\pi_n \psi - \psi\| = 0.$$

On considère l'opérateur d'approximation suivant $A_{r,n} := \pi_n A_r \pi_n$.

3.3.5 Cas $\overline{\psi_p(s,\varsigma)} = -\psi_p(\varsigma, s), p = 1 \cdots r$

Puisque A_r est un opérateur antisymétrique, il en résulte que $(A_{r,n})_{n\geq 1}$ est une suite d'opérateurs antisymétriques de $\mathcal{H}$ dans lui-même.

Théorème 3.6 *Supposons que $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Pour tout n, l'opérateur $A_{r,n} - \lambda I$ est inversible, et*

$$\| \left(A_{r,n} - \lambda I\right)^{-1} \| \leq \frac{1}{|\lambda|}.$$

Preuve.

La preuve est similaire à celle du théorème (3.2). On a $\lambda \notin sp\ (A_{r,n})$, (cf. Lemme 3.1) et par conséquent l'opérateur $A_{,rn} - \lambda I$ est inversible. Nous obtenons facilement

$$Re \left\langle \left(A_{r,n} - \lambda I\right) u, u \right\rangle \quad = \quad -\lambda \left\langle u, u \right\rangle,$$

de sorte que

$$|\lambda| \left\langle u, u \right\rangle \leq \left|\left\langle \left(A_{r,n} - \lambda I\right) u, u \right\rangle\right| \leq \left\|\left(A_{r,n} - \lambda I\right) u\right\| \|u\|,$$

c'est-à-dire

$$\left\|\left(A_{r,n} - \lambda I\right) u\right\| \geq |\lambda| \, \|u\|.$$

Clairement, nous avons

$$\| \left(A_{r,n} - \lambda I\right)^{-1} \| \leq \frac{1}{|\lambda|}.$$

■

3.3.6 Case $\overline{\psi_p(s,\varsigma)} = \psi_p(\varsigma, s), p = 1 \cdots r$

Comme A_r est un opérateur auto-adjoint, il en résulte que $(A_{r,n})_{n\geq 1}$ est une suite d'opérateurs auto-adjoints de $\mathcal{H}$ dans lui-même.

Théorème 3.7 *Supposons que $\lambda \in i\mathbb{R}^*$. Pour tout n, l'opérateur $A_{r,n} - \lambda I$ est inversible, de plus*

$$\| \left(A_{r,n} - \lambda I\right)^{-1} \| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}(\lambda)|}.$$

Preuve.

La preuve est similaire à celle du théorème (3.4). Comme auparavant, pour tout $u \in \mathcal{H}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \left(A_{r,n} - \lambda I\right) u, u\right\rangle\right|^2 &= \left|\left\langle A_{r,n}u, u\right\rangle - \lambda \left\|u\right\|^2\right|^2 \\
&= \left|\left\langle A_{r,n}u, u\right\rangle - \mathrm{Re}(\lambda) \left\|u\right\|^2\right|^2 + \left|\mathrm{Im}(\lambda)\right|^2 \left\|u\right\|^4 \\
&\geq \left|\mathrm{Im}(\lambda)\right|^2 \left\|u\right\|^4,
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left|\mathrm{Im}(\lambda)\right| \left\|u\right\|^2 \leq \left|\left\langle \left(A_{r,n} - \lambda I\right) u, u\right\rangle\right|.$$

Cela mène à

$$\|(A_{r,n} - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}(\lambda)|}.$$

■

3.3.7 Solutions approchées

Le problème approchées est l'équation suivante pour φ_n :

$$A_{r,n}\varphi_n - \lambda\varphi_n = \pi_n f. \tag{3.11}$$

Pour tout n, l'équation approchée (3.11) admet une solution unique φ_n, donnée par

$$\varphi_n = \sum_{j=0}^{n} c_j e_j,$$

pour certains scalaires c_j. En remplacant dans L'équation (3.11), on obtient

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \left[\pi_n A_r e_j - \lambda e_j\right] = \pi_n f,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \left[\sum_{i=0}^{n} \langle A_r e_j, e_i\rangle e_i - \lambda e_j\right] = \sum_{i=0}^{n} \langle f, e_i\rangle e_i,$$

les coefficients c_j sont obtenus en résolvant le système linéaire suivant

$$(M_{r,n} - \lambda I)C_n = b_n, \tag{3.12}$$

où

$$\begin{aligned} M_{r,n}(k,j) &:= \sum_{p=0}^{r} \int_0^1 \int_0^1 \psi_p(s,\varsigma) \ln|\varsigma - s|\, e_j(\varsigma) e_k(s) d\varsigma ds, \\ b_n(k) &:= \int_0^1 e_k(s) f(s) ds. \end{aligned}$$

Comme dans [6, 35], nous introduisons une règle de quadrature pour calculer $M_{r,n}(k,j)$. Considérons le changement de variables suivant

$$\tau := \varsigma - s, \quad \upsilon := \varsigma + s,$$

C'est

$$\varsigma = \frac{\tau + \upsilon}{2}, \quad s = \frac{-\tau + \upsilon}{2}.$$

Soit

$$V_r(\tau,\upsilon) := \sum_{p=0}^{r} \frac{1}{2}\psi_p\left(\frac{-\tau+\upsilon}{2}, \frac{\tau+\upsilon}{2}\right) \ln|\tau|\, e_j\left(\frac{\tau+\upsilon}{2}\right) e_k\left(\frac{-\tau+\upsilon}{2}\right),$$

$$\alpha(\tau) := \max(-\tau, \tau), \quad \beta(\tau) := \min(2-\tau, 2+\tau),$$

et

$$\vartheta(\tau) := \int_{\alpha(\tau)}^{\beta(\tau)} V_r(\tau,\upsilon) d\upsilon,$$

on obtient

$$M_{r,n}(k,j) := \int_{-1}^{1} \vartheta(\tau) d\tau.$$

Considérons les points de partition suivants de l'intervalle $[-1,1]$:

$$-1+s_j, \quad -s_j, \quad s_j, \quad 1-s_j, \quad j=0,1,\dots,m.$$

avec

$$s_j = \frac{1}{2}(\frac{j}{m})^q, \quad j=0,1,\dots,m.$$

Par conséquent

$$M_{r,n}(k,j) = \sum_{i=1}^{4m} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \vartheta(\tau)d\tau,$$

où $\tau_0, \tau_1, \dots \tau_{4m}$ sont des points de partition dans l'ordre croissant. Soit

$$G_r(t) := \sum_{i=1}^{4m} \frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{2} \vartheta(\frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{2} t + \frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{2}),$$

on obtient

$$M_{r,n}(k,j) = \int_{-1}^{1} G_r(t)dt.$$

Afin de calculer $b_n(k)$ avec précision et efficacité, nous utilisons la quadrature de Legendre Gauss Lobatto (cf. [26], pp. 331).

3.3.8 Analyse de convergence

Soit $\rho > 0$, soit $H^\rho(0,1)$ l'espace classique de Sobolev, et soit $\|.\|_\rho$ la norme définie sur $H^\rho(0,1)$. (Cf. [7], pp. 119.) Comme dans [7], il existe $c > 0$ tel que, pour tout $x \in H^\rho([0,1], \mathbb{C})$,

$$\|(I-\pi_n)x\| \leq cn^{-\rho}\|x\|_\rho. \tag{3.13}$$

Théorème 3.8 *Supposons que $f \in H^\rho([0,1], \mathbb{C})$, et*

$$\overline{\psi_p(s,\varsigma)} = -\psi_p(\varsigma, s), \quad \lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}^*.$$

Il existe une constante positive c, telle que pour n assez grand :

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq \frac{cn^{-\rho}}{|\lambda|}.$$

Preuve.

On a

$$\begin{aligned}
\varphi_n - \varphi &= (A_{r,n} - \lambda I)^{-1}\pi_n f - (A_r - \lambda I)^{-1} f \\
&= (A_{r,n} - \lambda I)^{-1}\pi_n f - (A_{r,n} - \lambda I)^{-1} f + (A_{r,n} - \lambda I)^{-1} f - (A_r - \lambda I)^{-1} f \\
&= (A_{r,n} - \lambda I)^{-1}(\pi_n - I) f + (A_{r,n} - \lambda I)^{-1}\left[(A_r - \lambda I) - (A_{r,n} - \lambda I)\right](A_r - \lambda I)^{-1} f \\
&= (A_{r,n} - \lambda I)^{-1}\left[(\pi_n - I) f + (A_r - A_{r,n})\varphi\right].
\end{aligned}$$

Mais

$$\left\|(A_{r,n} - \lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|},$$

et

$$(A_r - A_{r,n})\varphi = (I - \pi_n)A_r\varphi + \pi_n A_r (I - \pi_n)\varphi,$$

et puisque $\|\pi_n\| = 1$ et en utilisant (3.13), nous obtenons le résultat souhaité. ■

Théorème 3.9 *Supposons que $f \in H^\rho([0,1], \mathbb{C})$, et*

$$\overline{\psi_p(s, \varsigma)} = \psi_p(\varsigma, s).$$

Il existe une constante positive c, telle que pour n assez grand :

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq \frac{cn^{-\rho}}{|\mathrm{Im}(\lambda)|},$$

Preuve.

Procédons de la même manière que ci-dessus . En utilisant

$$\left\|(A_{r,n} - \lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}(\lambda)|},$$

nous obtenons le résultat souhaité. ■

3.3.9 Équation intégrale de Fredholm classique avec noyau logarithmique du second type

Dans cette section, nous allons considérer l'équation classique de Fredholm classique suivante avec noyau logarithmique

$$\int_0^1 \ln|\varsigma - s|\,\varphi(\varsigma)d\varsigma = \lambda\varphi(s) + f(s), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Supposons que cette équation admet une solution unique dans $\mathcal{H}$. Soit

$$Ku(s) \;:=\; \int_0^1 \ln|\varsigma - s|\,u(\varsigma)d\varsigma, \quad u \in \mathcal{H}, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$K_n := \pi_n K \pi_n.$$

Rappelons que K est compact de $\mathcal{H}$ en lui-même (voir [6] pp. 8), plus loin, $\|K\| = 1 + \ln 2$, (voir [43], pp. 228). On montre que l'opérateur inverse $(I - K_n)^{-1}$ existe et est uniformément borné pour n assez grand, (voir [6] pp. 55). Comme ci-dessus, il existe une constante positive M, telle que :

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq Mn^{-\rho}.$$

3.3.10 Calculs numériques

Dans cette section, nous présentons quelques exemples numériques illustrant les résultats théoriques obtenus dans les sections précédentes. Pour les calculs, nous utilisons la règle de quadrature de Gauss pour résoudre le système linéaire. Les erreurs de la méthode de projection sont présentées pour différents noyaux et pour plusieurs valeurs de n. Dans les exemples 4 et 5, nous comparons les résultats actuels avec les résultats d'autres méthodes analogues. Nous utilisons la méthode suggérée pour résoudre les équations intégrales particulières dans tous les exemples. Nous évaluons $M_n(k,j)$ et $b_n(k)$. Une fois l'équation matricielle ci-dessus (3.12) résolue, nous trouvons $x_n := [c_j, \quad j = 0, \cdots, n]$, d'où la solution φ_n doit être de la forme

$$\varphi_n(t) = \sum_{j=0}^{n}(c_j)(\sqrt{2j+1})\ell_j(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

L'avantage principal de la méthode actuelle c'est donner un cadre théorique pour les équations intégrales singulières logarithmiques de Fredholm en utilisant les projections, la méthode est applicable même dans les cas particuliers mentionnés ci-dessus avec une meilleure précision et une nouvelle estimation d'erreur, qui est petite comparée à d'autres méthodes. Cependant, il peut être difficile d'utiliser la méthode actuelle pour résoudre des équations intégrales non linéaires.

Example 1

Considérons d'abord l'équation intégrale généralisée avec noyau logarithmique (3.10) où f est choisi de telle sorte que la solution exacte soit

$$\varphi(s) = s(s-1),$$

et

$$\psi_1(s, \varsigma) = s^2 - \varsigma^2, \quad \lambda = 2.$$

Il est clair que

$$\psi_1(s, \varsigma) = -\psi_1(\varsigma, s).$$

Tableau 3.1 montre le taux de convergence de la méthode.

n	$\|\varphi - \varphi_n\|$
3	4.266×10^{-3}
4	8.575×10^{-4}
5	1.125×10^{-4}
6	4.751×10^{-6}

TABLE 3.1 – *Erreurs absolues pour l'éxemple 1*

Example 2

Considérons l'équation intégrale généralisée à noyau logarithmique (3.10) où f est choisi de sorte que la solution exacte soit

$$\varphi(s) = s^2 - s + 1,$$

et

$$h(s, \varsigma) = (s-1)(\varsigma - 1), \quad \lambda = \mathrm{i}.$$

It is clear that $\overline{h(s,\varsigma)} = h(\varsigma, s)$. Nous présentons dans le tableau 3.2 les erreurs

n	$\Vert\varphi - \varphi_n\Vert$
3	1.373×10^{-5}
4	3.735×10^{-6}
5	5.211×10^{-7}
5	6.283×10^{-7}
6	8.305×10^{-8}

TABLE 3.2 – *Erreurs absolues pour l'éxemple 2*

absolues qui correspondent àl'exemple 2.

Exemple 3

Ici, nous considérons l'équation intégrale suivante avec noyau logarithmique

$$u(s) - \int_0^1 \ln|s - \varsigma|\, u(\varsigma)d\varsigma = (1 - \ln(s)e^s + \mathrm{Ei}\ (s) + e^{s-1}\ln(1-s) - \mathrm{Ei}\ (x-1))e^{-s}.$$

avec la solution exacte

$$u(s) = e^{-s}.$$

Nous notons que Ei (.) Est la fonction intégrale exponentielle, définie comme suit :

$$\mathrm{Ei}\ (s) := \int_{-s}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

n	$\|\varphi - \varphi_n\|_2$
3	1.94539×10^{-4}
4	1.22031×10^{-4}
5	6.32020×10^{-5}
6	1.47377×10^{-5}
7	8.57667×10^{-6}

TABLE 3.3 – *Erreurs absolues pour l'éxemple 3*

Les erreurs absolues correspondantes pour l'exemple 3 sont présentées dans le tableau 3.3.

Example 4 : (Cf. [9] pp. 536)

Dans [9], l'auteur a utilisé la méthode de quadrature modifiée et la règle de Simpson répétée avec l'étape $h := \frac{1}{n}$ pour approcher la solution de l'équation intégrale de Fredholm avec noyau logarithmique du second type suivante

$$u(s) - \int_0^1 \ln|s - \varsigma|\, u(\varsigma) d\varsigma = \frac{3}{2}s - \frac{1}{2}\ln(s)s^2 + \frac{1}{2}\ln(-s+1)s^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln(-s+1).$$

avec la solution exacte

$$u(s) = s.$$

Comme dans [9], nous utilisons un ordinateur travaillant avec 10 chiffres décimaux.

s	$\|\varphi(s) - \varphi_n(s)\|$ dans [9]	$\|\varphi(s) - \varphi_n(s)\|$ pour la presente methode
0	3.6×10^{-3}	4.9×10^{-10}
0.25	7.5×10^{-5}	$4. \times 10^{-10}$
0.5	3.6×10^{-12}	3.1×10^{-13}
0.75	7.5×10^{-5}	0.
1	3.6×10^{-3}	1.4×10^{-10}

TABLE 3.4 – *Erreurs absolues pour l'éxemple 4*

Nous comparons ses résultats avec nos résultats pour $n = 4$ (voir Tableau (3.4).

Exemple 5 : (Cf. [6] pp. 117)

L'auteur de [6] a introduit la méthode de Nyström pour résoudre numériquement l'équation intégrale avec noyau logarithmique du second type

$$u(s) - \int_0^1 \ln|s-\varsigma|\, u(\varsigma)d\varsigma = e^s + \ln(s) - e^s \mathrm{Ei}\,(-s) - e^1 \ln(1-s) + e^s \mathrm{Ei}\,(1-s),$$

avec la solution exacte

$$u(s) = e^s.$$

Les résultats numériques de la présente méthode sont donnés dans le tableau 3.5. Dans [6], la norme uniforme de l'erreur est 1.16×10^{-3}, pour $n = 10$. Cependant, uniquement à $n = 6$, la norme d'erreur uniforme correspondante selon la méthode actuelle est 2.1×10^{-5}.

n	$\lVert\varphi - \varphi_n\rVert_2$
2	6.29377×10^{-3}
3	5.28887×10^{-3}
4	3.31887×10^{-4}
5	1.68863×10^{-5}
6	5.00531×10^{-6}

Table 3.5 – *Erreurs absolues pour l'éxemple 5*

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode de projection pour résoudre numériquement l'équation intégrale de Fredholm généralisée avec un noyau logarithmique du second type. Pour notre analyse, nous avons utilisé de nouvelles techniques via la théorie spectrale. La méthode proposée est basée sur les polynômes de Legendre décalés. Nous pensons que la méthode actuelle peut être utilisée pour résoudre d'autres classes d'équations intégrales et intégro-différentielles.

Chapitre 4

Trois méthodes pour résoudre deux classes d'équations intégrales

4.1 Introduction

Au cours des dernières décennies, de nombreux problèmes importants en mathématiques appliquées, sciences, physique, ingénierie, biologie, électrodynamique, mécanique, économie et autres domaines de l'informatique, des sciences et de l'ingénierie ont été écrits et modélisés sous forme d'équations intégrales. Cependant, il existe de nombreux obstacles pour résoudre directement ces équations, nous utilisons donc des méthodes numériques qui sont grandement facilitées par les ordinateurs. Récemment, plusieurs résultats numériques ont été développés pour résoudre les équations intégrales, la méthode de Kantorovich est considérée comme étant le schémas d'approximation le plus efficace. Via la méthode de Kulkarni (cf. [51]), Mennouni a établi récemment une analyse de convergence améliorée pour approcher la solution de l'équation intégro-différentielle dans $L^2([-1,1],\mathbb{C})$ et ce en utilisant les polynômes de Legendre

Dans[52], l'auteur a introduit une méthode efficace de Galerkin pour une classe d'équations intégrales singulières de Cauchy du second type à coefficients constants dans $L^2([0,1],\mathbb{C})$, l'auteur a utilisé une suite de projections orthogonales de rangs finis.

Le but de [50] est d'appliquer la méthode de Kulkarni et celle de Galerkin pour résoudre des équations d'opérateurs bornées non compactes du second type. De plus, l'auteur a utilisé une séquence de projections orthogonales de rangs finis pour approcher la solution des équations intégrales singulières du second type avec noyau de Cauchy.

L'idée principale de [54] est de proposer une méthode de collocation permettant de résoudre des équations intégro-différentielles singulières avec noyau logarithmique et ce en utilisant des polynômes de Tchebychev. L'objectif de [53] est de résoudre numériquement les équations intégro-différentielles de Cauchy en utilisant la méthode de projection basée sur les polynômes de Legendre.
Dans ce chapitre, nous présentons trois méthodes pour résoudre deux classes d'équations intégrales du second type, l'idée principale de ce travail est d'étendre et améliorer les résultats des travaux précédents via deux méthodes de Kantorovich pour résoudre une équation intégrale issue d'un problème de biologie mathématique, l'autre idée consiste à développer une nouvelle méthode de Nyström pour résoudre une équation intégrale de Fredholm du second type.
Dans la première méthode de Kantorovich, nous utilisons des projections de grille générales, dans la deuxième, nous exploitons les polynômes de Legendre décalés.
De nouveaux résultats sont présentés dans ce travail ainsi que l'analyse de convergence.

4.2 Deux méthodes de Kantorovich pour résoudre une équation intégrale issue de la modélisation mathématique en biologie

4.2.1 Équation intégrale issue de la modélisation mathématique en biologie

Considérons l'équation intégrale du second type

$$x(s)\int_0^1 k(s-t)dt = \int_0^1 x(\tau)k(\tau-s)d\tau + g(s), \quad 0 \le s \le 1, \tag{4.1}$$

où $k(\cdot,\cdot)$ est un noyau de Fredholm et g est la fonction donnée. Ecrivons L'équation (4.1) sous la forme :

$$x(s) - \int_0^1 \frac{x(\tau)k(\tau-s)d\tau}{\int_0^1 k(s-t)dt} = f(s), \quad 0 \le s \le 1, \tag{4.2}$$

où

$$f(s) := \frac{g(s)}{\int_0^1 k(s-t)dt}.$$

On défini l'opérateur intégral T par :

$$Tx(s) := \int_0^1 \frac{x(\tau)k(\tau - s)d\tau}{\int_0^1 k(s-t)dt}, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Posons $\mathcal{H} := L^2[0,1]$. On suppose que $k \in {}^1[0,1]$ et que $k > 0$ presque partout. Nous rappelons que pour chaque $f \in \mathcal{H}$, T est compact de $\mathcal{H}$ dans lui-même (voir [34]). Par conséquent, l'équation intégrale (4.1) admet une unique solution $x \in \mathcal{H}$. Désignons par I l'opérateur identité sur $\mathcal{H}$, nous écrivons l'éq. (4.2) sous la forme

$$(I - T)\,x = f.$$

Le but de ce travail est d'approcher x par la solution exacte x_n de l'équation de Kantorovich

$$(I - \pi_n T)\,x_n = f. \tag{4.3}$$

4.2.2 Approximations de projection via des grilles générales

Soit $(s_{n,j})_{j=0}^n$ une grille sur $[0,1]$ tel que

$$0 < s_{n,0} < s_{n,1} < \ldots < s_{n,n} < 1.$$

Posons

$$h_{n,i} := s_{n,i} - s_{n,i-1}, \quad i \in [\![1,n]\!], \quad h_n := (h_{n,1}, h_{n,2}, \ldots, h_{n,n}).$$

Soit $(\pi_n)_{n\geq 1}$, une suite de projections bornées, chacune de rang fini, telle que

$$\pi_n x := \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_{n,j}\rangle\, e_{n,j},$$

où

$$e_{n,j} := \frac{\phi_{n,j}}{\sqrt{h_{n,j}}}, \quad \phi_{n,j}(s) := \begin{cases} 1 \text{ pour } s \in]s_{n,j-1}, s_{n,j}[, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit

$$J_n := \{s_{n,j}, \quad j \in [\![0,n]\!]\}.$$

Définissons le module de continuité de la fonction $\psi \in \mathcal{H}$ par rapport à h_n comme suit :

$$\omega_2(\psi, J_n) := \sup_{0\leq\delta\leq h_n} \left(\int_0^1 |\psi(\tau+\delta) - \psi(\tau)|^2 \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Toutes les fonctions sont étendues par 0 en dehors de $[0,1]$. Nous rappelons que

$$\omega_2(\psi, J_n) \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty \text{ pour tout } \psi \in \mathcal{H},$$

et que, pour tous $\psi \in \mathcal{H}$ (cf. [3]),

$$\|(I - \pi_n)\psi\| \leq \omega_2(\psi, J_n). \tag{4.4}$$

4.2.3 Première méthode de Kantorovich via des grilles générales

On a

$$\pi_n T x := \sum_{j=1}^{n} \langle Tx, e_{n,j} \rangle \, e_{n,j}.$$

En appliquant T aux deux membre de l'équation (4.3) et en effectuant le produit scalaire avec $e_{n,i}$ aux deux membres de cette équation, nous obtenons

$$\langle Tx_n, e_{n,i} \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle Tx_n, e_{n,j} \rangle \langle Te_{n,j}, e_{n,i} \rangle = \langle Tf, e_{n,i} \rangle,$$

de manière équivalente,

$$(I_n - A_n)X_n = b_n, \tag{4.5}$$

où

$$X_n(j) := \langle Tx_n, e_{n,j} \rangle,$$

et

$$A_n(i,j) := \langle Te_{n,j}, e_{n,i} \rangle,$$

$$b_n(i) := \langle Tf, e_{n,i} \rangle.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} A_n(i,j) &:= \frac{1}{\sqrt{h_{n,j}h_{n,i}}}\int_{s_{i-1}}^{s_i}\int_{s_{j-1}}^{s_j}\frac{k(\tau-s)}{\int_0^1 k(s-t)dt}d\tau ds, \\ b_n(i) &:= \frac{1}{\sqrt{h_{n,i}}}\int_{s_{i-1}}^{s_i}\int_0^1\frac{f(\tau)k(\tau-s)}{\int_0^1 k(s-t)dt}d\tau ds. \end{aligned}$$

4.2.4 Analyse de convergence

Pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{n\to\infty}\|\pi_n Tx - Tx\| = 0,$$

T est compact, alors

$$\lim_{n\to\infty}\|\left(\pi_n T - T\right)T\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\|\left(\pi_n T - T\right)\pi_n T\| = 0.$$

Théorème 4.1 *Il existe une constante positive M, telle que*

$$\|x_n - x\| \leq M\left[\omega_2(x, J_n) + \omega_2(f, J_n)\right].$$

Preuve.

Nous avons

$$\pi_n x = \pi_n Tx + \pi_n f.$$

et puisque

$$\begin{aligned} x - \pi_n x &= x - x_n + x_n - \pi_n x \\ &= x - x_n + (\pi_n T x_n + f) - (\pi_n T x + \pi_n f) \\ &= x - x_n + \pi_n T\left(x_n - x\right) + \left(I - \pi_n\right)f \\ &= \left(I - \pi_n T\right)\left(x - x_n\right) + \left(I - \pi_n\right)f. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$x - x_n = \left(I - \pi_n T\right)^{-1}\left[\left(I - \pi_n\right)x - \left(I - \pi_n\right)f\right].$$

Puisque T est compact, alors

$$M := \sup_{n \geq N} \left\| (I - \pi_n T)^{-1} \right\|,$$

est fini. En utilisant (4.4), nous obtenons le résultat souhaité. ■

4.2.5 Deuxième méthode de Kantorovich via les polynômes de Legendre décalés

Le but de cette section est d'utiliser la méthode de Kantorovich pour résoudre (4.1) via des polynômes de Legendre décalés. Le polynôme de Legendre décalé $\ell_n(.)$ est défini par

$$\ell_n(s) := L_n(2s - 1).$$

avec $(L_n)_{n \geq 0}$ la suite de polynômes de Legendre.

Considérons

$$e_{n,j} := \sqrt{2j + 1}\ell_n(j),$$

la suite normalisée correspondante.
Soit $(\pi_n)_{n \geq 0}$ la suite de projections orthogonales bornées de rangs finis définies par

$$\pi_n x := \sum_{j=0}^{n-1} \langle x, e_{n,j} \rangle \, e_{n,j}.$$

Pour $y \in \mathcal{H}$ on a

$$\lim_{n \to \infty} \| \pi_n y - y \| = 0.$$

Rappelons (cf. [7]) qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $y \in H^r([0, 1], \mathbb{C})$,

$$\|(I - \pi_n)y\| \leq C n^{-r} \|y\|_r. \tag{4.6}$$

Il s'ensuit de (4.3) que

$$\begin{aligned} A_n(i,j) &:= \sqrt{2j+1}\sqrt{2i+1} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\ell_j(\tau) k(\tau - s) d\tau}{\int_0^1 k(s-t)dt} \ell_i(s) dt ds, \\ b_n(i) &:= \sqrt{2i+1} \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(\tau) k(\tau - s) d\tau}{\int_0^1 k(s-t)dt} \ell_i(s) dt ds. \end{aligned}$$

Une fois le système ci-dessus résolu, on trouve

$$x_n = \sum_{j=0}^{n-1} X_n(j)\sqrt{2j+1}\ell_j + f.$$

Théorème 4.2 *Supposons que $f \in H^r([0,1],\mathbb{C})$ pour un certain $r > 0$. Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\frac{\|x_n - x\|}{\|x\|_r} \leq \alpha\|T\|n^{-r}.$$

Preuve.

On a

$$\begin{aligned} x_n - x &= \left[(I - \pi_n T)^{-1} f - (I-T)^{-1} f\right] \\ &= (I - \pi_n T)^{-1}\left[(\pi_n - I)\, Tx\right], \end{aligned}$$

et donc

$$\|x_n - x\| \leq MC_0 n^{-r}\|Tx\|_r, \quad \text{pour une certaine constante positive} \quad C_0,$$

pour que

$$\frac{\|x_n - x\|}{\|x\|_r} \leq \alpha\|T\|n^{-r}, \quad \alpha := MC_0.$$

■

Théorème 4.3 *Supposons que $f \in H^r([0,1],\mathbb{C})$ pour un certain $r > 0$. Alors, il existe $\beta > 0$ tel que*

$$\|x_n - x\| \leq \beta n^{-r}\left[\|x\|_r + \|f\|_r\right]$$

Preuve.

Rappelons que

$$\pi_n x = \pi_n T x + \pi_n f.$$

Comme dans [1],

$$\begin{aligned} x-\pi_n x &= x-x_n+x_n-\pi_n x \\ &= x-x_n+(\pi_n T x_n+f)-(\pi_n T x+\pi_n f) \\ &= x-x_n+\pi_n T\left(x_n-x\right)+\left(I-\pi_n\right) f \\ &= \left(I-\pi_n T\right)\left(x_n-x\right)+\left(I-\pi_n\right) f. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$x_n-x=\left(I-\pi_n T\right)^{-1}\left[\left(I-\pi_n\right) x+\left(\pi_n-I\right) f\right],$$

en utilisant (4.6), on obtient

$\|x_n-x\| \leq M n^{-r}\left[C_1\|x\|_r+C_2\|f\|_r\right]$, pour certaines constantes positives C_1, C_2,

comme nous voulions prouver ■

4.3 Une nouvelle méthode de Nyström pour résoudre une équation intégrale de Fredholm

Considérons l'équation intégrale de Fredholm du second type

$$u(s)-\int_{-1}^{1} k(s,t) u(t) dt=f(s), \quad s \in I:=[-1,1], \tag{4.7}$$

Nous rappelons la formule de quadrature introduite dans [62]

$$\int_{-1}^{1} h(s) ds \approx \overline{\omega}_c^{(+)} h(\tau_c)+\sum_{\nu=1}^{n} \overline{\omega}_\nu h(\tau_\nu)+\overline{\omega}_c^{(-)} h(-\tau_c),$$

où

$$\tau_\nu=\cos \theta_\nu, \qquad \theta_\nu=\frac{\nu}{n+1} \pi, \qquad \nu=1,2, \ldots, n$$

$$\pm \tau_c=\pm \cos \theta_c, \qquad \theta_c=\frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Dans cette section, nous introduisons une nouvelle méthode de Nyström pour résoudre l'équation intégrale (4.7)

$$\breve{u}(s) - \left[\overline{\omega}_c^{(+)} k(s,\tau_c)\breve{u}(\tau_c) + \sum_{\nu=1}^{n} \overline{\omega}_\nu k(s,\tau_\nu)\breve{u}(\tau_\nu) + \overline{\omega}_c^{(-)} k(s,-\tau_c)\breve{u}(-\tau_c)\right] = f(s). \tag{4.8}$$

Dans (4.8), remplaçons τ par τ_i pour $i = 1,\ldots,n$, nous obtenons le système linéaire suivant

$$\breve{u}(\tau_i) - \left[\overline{\omega}_c^{(+)} k(\tau_i,\tau_c)\breve{u}(\tau_c) + \sum_{\nu=1}^{n} \overline{\omega}_\nu k(\tau_i,\tau_\nu)\breve{u}(\tau_\nu) + \overline{\omega}_c^{(-)} k(\tau_i,-\tau_c)\breve{u}(-\tau_c)\right] = f(\tau_i),$$

c.a.d

$$\breve{u}(\tau_i) - \left[\sum_{\nu=0}^{n+1} \overline{\omega}_\nu k(\tau_i,\tau_\nu)\breve{u}(\tau_\nu)\right] = f(\tau_i), \tag{4.9}$$

avec

$$\overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_c^{(+)}, \qquad \tau_0 = \tau_c,$$

et

$$\overline{\omega}_{n+1} = \overline{\omega}_c^{(-)}, \qquad \tau_{n+1} = -\tau_c,$$

qui est un système de $n+2$ équations linéaires d'inconnu

$$\breve{u}_n := \; [\breve{u}(\tau_0), \breve{u}(\tau_1), \ldots, \breve{u}(\tau_{n+1})],$$

$$\breve{f}_n := \; [f(\tau_0), f(\tau_1), \ldots, f(\tau_{n+1})],$$

et

$$\breve{A}_n := \; \breve{A}_n\,(i,\nu) = \overline{\omega}_\nu k(\tau_i,\tau_\nu).$$

D'où le système linéaire suivant

$$(I - \breve{A}_n)\breve{u}_n = \breve{f}_n.$$

4.3.1 Système linéaire explicite

Les formules explicites correspondantes aux poids de la formule sont présentées dans [62] comme suit

$$\omega_\nu = \frac{2}{n+1}\left\{1 - 2\sum_{k=1}^{[(n-1)/2)]} \frac{\cos 2k\theta_\nu}{4k^2-1} - \frac{\cos 2[(n+1)/2]\theta_\nu}{2[(n+1)/2]-1}\right\},$$

Par conséquent

$$\omega_\nu = \frac{2}{n+1}\left\{1 - 2\sum_{k=1}^{[(n+1)/2)]} \frac{\cos 2k\theta_\nu}{4k^2-1} - \frac{\cos 2[(n+1)/2]\theta_\nu}{2[(n+1)/2]+1}\right\}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

où

$$\omega_\nu = \frac{4\sin\theta_\nu}{n+1}\sum_{k=1}^{[(n+1)/2)]} \frac{\sin(2k-1)\theta_\nu}{2k-1}, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, n.$$

De plus, l'auteur de [62] a prouvé que les poids $\overline{\omega}_\nu$, $\overline{\omega}_c^{(+)}$ and $\overline{\omega}_c^{(-)}$ sont donnés par

$$\overline{\omega}_\nu = \omega_\nu + \frac{2\sin^2\theta_\nu \cos 2[(n+1)/2]\theta_\nu}{(2[n/2]+1)(2[(n+1)/2]+1)\sin(\theta_\nu+\theta_c)\sin(\theta_\nu-\theta_c)}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

$$\overline{\omega}_c^{+} = \overline{\omega}_c^{-} = \begin{cases} \dfrac{\sin\theta_c}{n+1}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{(n+1)\tan\theta_c}{n(n+2)}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

L'équation (4.9) est équivalente à

$$\begin{aligned} \breve{u}(\tau_i) &- \left[\sum_{\nu=1}^{n}\left[\omega_\nu + \frac{2\sin^2\theta_\nu \cos 2[(n+1)/2]\theta_\nu}{(2[n/2]+1)(2[(n+1)/2]+1)\sin(\theta_\nu+\theta_c)\sin(\theta_\nu-\theta_c)}\right] k(\tau_i,\tau_\nu)\breve{u}(\tau_\nu)\right] \\ &- \frac{\sin\theta_c}{n+1}\left[k(\tau_i,\tau_c)\breve{u}(\tau_c) + k(\tau_i,-\tau_c)\breve{u}(-\tau_c)\right] \\ &= f(\tau_i) \quad \text{pour} \quad n \quad \text{pair,} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \breve{u}(\tau_i) &- \left[\sum_{\nu=1}^{n}\left[\omega_\nu + \frac{2\sin^2\theta_\nu \cos 2[(n+1)/2]\theta_\nu}{(2[n/2]+1)(2[(n+1)/2]+1)\sin(\theta_\nu+\theta_c)\sin(\theta_\nu-\theta_c)}\right] k(\tau_i,\tau_\nu)\breve{u}(\tau_\nu)\right] \\ &- \frac{(n+1)\tan\theta_c}{n(n+2)}\left[k(\tau_i,\tau_c)\breve{u}(\tau_c) + k(\tau_i,-\tau_c)\breve{u}(-\tau_c)\right] \\ &= f(\tau_i) \quad \text{pour} \quad n \quad \text{impair.} \end{aligned}$$

Chapitre 5

Annexe : Équations intégro-différentielles

5.1 Équations intégro-différentielles

Dans beaucoup de questions de Physique. mathématique et de mécanique il est nécessaire, de considérer des relations analytiques qui ont en même temps le caraetère, des équations intégrales et celui des équations différentielles, appelées équations intégro-différentielles. Pour leur résolution il faut appliquer une analyse, qui n'est pas celle, des équations différentielles ni celle des équations intégrales, mais qui ressort de l'union des conceptions fondamentales qui dominent ces classes de questions.

Définition

Une équation intégro-différentielle (E.I.D.) est une équation composée de deux opérations intégrales et différentielles qui impliquent la fonction inconnue u

Exemples

1. Dans les problèmes électriques de l'engineering, la représentation du courant $je(t)$ dans un circuit fermé mêne à l'équation intégro-différentielle suivante :

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt = f(t)$$

$$I(0) = I_0$$

où L est l'inductance, R la résistance, C la capacité, et $f(t)$ la tension appliquée.

2.
$$u''(x) = f(x) + \lambda \int_0^x (x-t)u(t)dt$$
$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

3.
$$u'(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 (xt)u(t)dt$$
$$u'(0) = 1.$$

Les équations dans les exemples (1) et (2) sont des équations intégro-différentielles de type Volterra alors que l'équation dans l'exemple (3) est une équation intégro-différentielle de type Fredholm.
Ces terminologies ont été conclues à cause de la présence d'intégrales définies et indéfinies.

La forme générale d'une équations intégro-différentielle non linéaire d'ordre n est

$$\varphi^{(n)}(x) = F\left(x, \Psi(x), \lambda \int_D k(x,t,\Psi(t)dt\right). \tag{5.1}$$

Avec
$$\Psi(x) = (\varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n-1)}(x))$$
avec les conditions initiales :

$$\varphi(\alpha) = \beta_0, \quad \varphi'(\alpha) = \beta_1, \cdots, \quad \varphi^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1}$$

telle que $\beta_i, \quad i = 0 \cdots n-1$ sont des nombres donnés et φ est la fonctions inconnue.
La forme linéaire d'une (E.I.D) d'ordre n est :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\varphi^{(i)}(x) = \lambda \int_D k(x,t) \sum_{j=0}^{m} b_j(t)\varphi^{(j)}(t)dt + f(x), \tag{5.2}$$

où $a_i(x)$ et $b_j(x)$ et$f(x)$ sont des fonctions données.

5.2 Classification des équations intégro-différentielles

Une importante classification des équations intégro-différentielles existe, elles sont classées par leurs caractéristiques en cinq types suivants :

1. **Limites de l'intégration** : On distingue trois types majeurs de l'équation

intégro-différentielle.

(a) Si les limites de l'intégrations sont fixés, alors l'équation intégro-différentielle est dite de Fredholm.

(b) Si l'une des bornes d'intégration est variable alors l'E.I.D est dite de Volterra.

(c) Si les deux opérateurs de l'intégration de Fredholm et Volterra coinsident alors l'équation intégro-différentielle est dite de Fredholm-Volterra.

Exemple 5.1

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\varphi^{(i)}(x) = \lambda_1 \int_a^b k_1(x,t) \sum_{j=0}^{m} b_j(t)\varphi^{(j)}(t)dt + \lambda_2 \int_a^x k_2(x,t) \sum_{j=0}^{m} b_j(t)\varphi^{(j)}(t)dt + f(x).$$

2. **Ordre de l'E.I.D** : L'ordre d'une équation intégro-différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée qui apparaît dans l'opérateur différentiel.
3. **Linéaire ou non linéaire**
L'équation (5.2) est une équation linéaire, mais l'équation (5.1) est une équation non linéaire.
4. **Espèce** : L'équation intégro-différentielle est dite de première espèce si la partie différentielle est nulle, sinon elle est dite de deuxième espèce.
5. **Nombre de variable de la fonction inconnue** φ Une équation intégro-différentielle est dite ordinaire si la fonction inconnue dépend d'une seule variable indépendante, sinon elle est dite partielle.

5.2.1 Équation integro-différentielle singulière

Une équation integro-différentielle est dite singulière si
– L'une ou les deux limites d'intégration sont infinies ou bien
– Le noyau devient infini au voisinage d'un ou de plusieurs points de l'intervalle d'intégration

Exemple 5.2

$$a_2\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + a_1\frac{d\varphi}{dx}(x) = \pi^{-1}\int_0^{+\infty} \frac{(b_2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + b_1\frac{d\varphi}{dx})(x)}{t-x}dt, \quad 0 \le x < +\infty.$$

5.3 Conversion d'une équation integro-différentielle linéaire d'un ordre élevé à un système d'équation integro-différentielles linéaires du premier ordre.

On considère l'équation intégro-différentielle linéaire d'ordre n

$$\varphi^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\varphi^{(n-i)}(x) + \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = g(x).$$

Avec les conditions initiales

$$\varphi(a) = \alpha_1, \varphi'(a) = \alpha_2, \cdots, \varphi^{(n-1)}(a) = \alpha_n.$$

Pour convertir une (E.I-D) d'ordre n à une système d'(E.I-D) de premier ordre on pose

$$\Phi_1(x) = \varphi(x), \Phi_2(x) = \varphi'(x), \cdots, \Phi_n(x) = \varphi^{(n-1)}(x).$$

On a

$$\begin{aligned}
\Phi_1'(x) &= \Phi_2(x),\\
\Phi_2'(x) &= \Phi_3(x),\\
&\vdots\\
\Phi_{n-1}'(x) &= \Phi_n(x),\\
\Phi_n'(x) &= g(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\Phi_{n+1-i}(x) - \int_a^b k(x,t)\Phi_1(t)dt.
\end{aligned}$$

Avec les conditions initiales

$$\Phi_1(a) = \alpha_1, \Phi_2(a) = \alpha_2, \cdots, \Phi_n(a) = \alpha_n.$$

5.4 conversion d'une équation intégro-différentielle de Volterra à une équation intégrale de Volterra

Dans cette partie nous allons convertir l'équation intégro-différentielle de Volterra en équation intégrale de Volterra équivalente, à condition, que le noyau soit un noyau de différence défini par $k(x,t) = k(x-t)$. Cela peut être facilement fait en intégrant les deux côtés de l'équation et en utilisant les conditions initiales.
Pour réaliser la conversion à une équation intégrale régulière de Volterra, on doit utiliser la formule bien-connu décrite dans le chapitre préliminaire qui convertit des intégrales multiples en une seule intégrale. Nous illustrons trois formules spécifiques :

$$\int_0^x \int_0^x u(t)dt = \int_0^x (x-t)u(t)dt,$$

$$\int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t)dt = \frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt,$$

$$\int_0^x \cdots \int_0^x u(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} u(t)dt.$$

Pour donner un apercu claire de cette méthode, nous donnons l'exemple suivant

Exemple 5.3 *Résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante*

$$u'(x) = 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\int_0^x u(t)dt,$$

$$u(0) = 0.$$

On a

$$u(x) = 2x - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}\int_0^x \int_0^x u(t)dtdt,$$

$$u(x) = 2x - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}\int_0^x (x-t)u(t)dtdt.$$

5.5 Conversion d'une équation intégro-différentielle de Fredholm à une équation intégrale de Fredholm

Dans cette section nous allons réduire une E.I.D. de Fredholm à une E.I. en intégrant de a à x des deux côtés de l'équation intégro-différentielle de Fredholm autant de fois que l'ordre de la dérivée dans l'équation et en utilisant les conditions initiales à chaque fois. Ayant établi la transformation à une équation intégrale standard de Fredholm nous pouvons utiliser n'importe quelle méthode alternative examinée dans les chapitres précédant.

Remarque 5.1 *Cette méthode n'est applicable que si l'on a seulement la fonction inconnue φ sous le signe intégrale et pas ses dérivées.*
En réduisant l'éqation intégro-différentielle en une équation intégrale, on peut donc utiliser les métodes de résolution de l'équation de Fredholm déja étudiées

Soit l'équation intégro-différentielle de Fredholm de second ordre suivante :

$$y'(s) = a(s)y(s) + b(s) + \int_0^1 k(s,t)y(t)dt, \tag{5.3}$$

$$y(0) = \alpha \quad 0 \leq s \leq 1,$$

où $a(s)$,$b(s)$ et $k(s,t)$ sont des fonctions continues sur $[0,1]$.
Si on pose : $y'(s) = z(s)$ on obtient :

$$y(s) = \alpha + \int_0^s z(t)dt. \tag{5.4}$$

Substituons (5.4) dans (5.3) on trouve :

$$z(s) = a(s)\left[\alpha + \int_0^s z(t)dt\right] + b(s) + \int_0^1 k(s,t)\left[\alpha + \int_0^t z(u)du\right]dt,$$

on obtient

$$z(s) = g(s) + a(s)\int_0^s z(t)dt + \int_0^1 k(s,t)\int_0^t z(u)du,$$

on pose

$$z(s) = g(s) + h(s),$$

tel que

$$g(s) = \alpha a(s) + b(s) + \alpha \int_0^1 k(s,t)dt,$$

$$h(s) = a(s) \int_0^s z(t)dt + \int_0^1 k(s,t) \left(\int_0^t z(u)du \right) dt,$$

on a

$$\int_0^1 k(s,t) \left(\int_0^t z(u)du \right) dt = \int_0^1 \left(\int_0^t k(s,u)du \right) z(t)dt,$$

on pose

$$K'(s,t) = \int_t^1 k(s,u)du,$$

$$h(s) = a(s) \int_0^s z(t)dt + \int_0^1 K'(s,t)z(t)dt,$$

$$h(s) = \int_0^1 \left(a(s)H(s-t) + K'(s,u)\right) z(t)dt,$$

avec

$$H(s,t) = \begin{cases} 1 & si \quad s-t \geq 0 \\ 0 & si \quad s-t < 0. \end{cases}$$

On pose

$$a(s)H(s-t) + K'(s,u) = \eta(s,t),$$

on obtient l'équation intégrale de Fredholm

$$z(s) = g(s) + \int_0^1 \eta(s,t)z(t)dt.$$

Exemple 5.4 *Soit l'équation intégro-différentielle de Fredholm de second ordre suivantes :*

$$\varphi''(x) = \exp(x) - x + x \int_0^1 t\varphi(t)dt,$$

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 1,$$

on intègre les deux côtés de l'équation deux fois de 0 *à* x *avec les conditions initiales, on obtient*

$$\varphi(x) = \exp(x) - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3!} \int_0^1 t\varphi(t)dt.$$

C'est une équation de Fredholm, par la méthode de calcul directe, cette équation peut *être écrite comme suit :*

$$\varphi(x) = \exp(x) - \frac{x^3}{3!} + \alpha\frac{x^3}{3!},$$

où la constante α est déterminée par :

$$\alpha = \int_0^1 t\varphi(t)dt = \int_0^1 t\left(\exp(t) - \frac{t^3}{3!} + \alpha\frac{t^3}{3!}\right)dt,$$

pour $\alpha = 1$, la solution est $\varphi(x) = \exp(x)$.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la résolution de certaines classes d'équations intégrales et intégro-différentielles de Fredholm de second espèce via des méthodes de Nyström modifiées, nous illustrons nos résultats par des exemples numériques. L'objectif de notre travail est de construire une solution approchée des équations intégrales et intégrodifférentielles linéaires utilisant les méthodes de Nyström basées sur plusieurs polynômes orthogonaux. Ce travail peut être étendu aux équations intégrales et intégro-différentielles non linéaires et d'autres classes d'équations intégrales singulières. Par conséquent, dans la continuité directe de notre travail de thèse, les méthodes précédentes pourraient être appliquées aux équations intégrales de Volterra ainsi qu'aux équations intégro-différentielles, mais certaines modifications sont nécessaires. Plus précisément, nous espérons utiliser les méthodes actuelles pour approcher la solution des équations intégrales de la forme

$$a(s)u'(s) + b(s)u(s) + c(s)\sum_{k=1}^{m}\int_a^s H_k(s,t,\psi(t))u(t)dt = f(s) \quad m \in \mathbb{N}^\star, \quad a \leq s \leq b,$$

$$a(s)u'(s)+b(s)u(s)+c(s)\sum_{k=1}^{m}\int_a^s H_k(s,t,\psi(t))\ln|s-t|h(s,t)dt = f(s) \quad m \in \mathbb{N}^\star, \quad a \leq s \leq b,$$

$$a(s)u'(s) + b(s)u(s) + \frac{c(s)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h(s,t)k(s,t,\psi(t))}{s-t}u(t)dt = f(s) \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Bibliographie

[1] M. Ahues, F.D. d'Almeida, R.R. Fernandes, *Piecewise Constant Galerkin Approximations of Weakly Singular Integral Equations*, International Journal of Pure and Applied Mathematics 55 (2009), 569–580.

[2] C. Allouch, P. Sablonnière, D. Sbibih, Solving Fredholm integral equations by approximating kernels by spline quasi-interpolants, *Numer. Algor.*, 56 (2011), 437–453.

[3] A. Amosov, M. Ahues, A. Largillier, *Superconvergence of Some Projection Approximations for Weakly Singular Integral Equations Using General Grids*, SIAM Journal on Numerical Analysis 47 (2008), 646–674.

[4] P. Assari and M. Dehghan *A meshless discrete collocation method for the numerical solution of singular-logarithmic boundary integral equations utilizing radial basis functions*, Applied Mathematics and Computation 315 (2017), 424-444.

[5] P. Assari, H. Adibi, M. Dehghan, A multinomial spline approximation scheme using spline quasi-interpolants, *Applied Numerical Mathematics* 81 (2014), 76–93.

[6] K. Atkinson, *The numerical solution of integral equations of the second kind*, Cambridge University Press, 1997.

[7] K. E. Atkinson and Han, *Theoretical Numerical Analysis : A Functional Analysis Framework*, 3rd edition Springer-Verlag, (2009).

[8] K. E. Atkinson and I. H. Sloan, *The Numerical Solution of First-Kind Logarithmic-Kernel Integral Equations on Smooth Open Arcs*, Mathematics of Computation 56 (1991), No. 193, 119-139.

[9] C. T. H. Baker, *The Numerical Treatment of Integral Equations*, Oxford University Press, (1978).

[10] S. Banerjea and C. Sarkar, *On a singular integral equation with log kernel and its application*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 35630, (2006).

[11] P. Baratella, *A note on the convergence of product integration and Galerkin method for weakly singular integral equations*, J. Comput. Appl. Math., 85 (1997), 11–18.

[12] D. Barrera, M. J. Ibáñez, P. Sablonnière, D. Sbibih, *Near minimally normed spline quasi-interpolants on uniform partitions*, J. Comput. Appl. Math., 181 (2005), 211–233.

[13] D. Barrera, M. J. Ibáñez, P. Sablonnière and D. Sbibih, *Near-best quasi-interpolants associated with H-splines on a three-direction mesh*, J. Comput. Appl. Math., 183 (2005), 133–152.

[14] D. Barrera and M. J. Ibáñez, *Bernstein–Bézier representation and near-minimally normed discrete quasi-interpolation operators*, Appl. Numer. Math., 58 (2008), 59–68.

[15] D. Barrera, F. El Mokhtari, D. Sbibih, *Two methods based on bivariate spline quasi-interpolants for solving Fredholm integral equations*, Appl. Numer. Math., 127 (2018), 78–94.

[16] D. Barrera, F. El Mokhtari, M. J. Ibáñez, D. Sbibih, *Non-uniform quasi-interpolation for solving Hammerstein integral equations*, International Journal of Computer Mathmatics, in press.

[17] D. Barrera, M. J. Ibáńez, P., Sablonnière, D. Sbibih, *Near best univariate spline discrete quasi-interpolants on nonuniform partitions*, Constr. Approx., 28 (2008), 237–251.

[18] D. Barrera, M. J., Ibáńez, P., Sablonnière, D. Sbibih, *Near-best quasi-interpolants associated with H-splines on a three-direction mesh*, J. Comput. Appl. Math. 183 (2005) 133–152.

[19] D. Barrera, M. J. Ibáńez, P. Sablonnière, D. Sbibih, *On near-best discrete quasi-interpolants on a four-directional mesh*, J. Comput. Appl. Math., 233 (2010), 1470–1477.

[20] R. Behzadi, E. Tohidi, F. Toutounian, *Numerical solution of weakly singular Fredholm integral equations via generalization of the Euler-Maclaurin summation formula*, Journal of Taibah University for Science, 8 (2014), 199–205.

[21] A. Bellour, D. Sbibih, A. Zidna, *Two cubic spline methods for solving Fredholm integral equations*, Applied Mathematics and Computation, 276 (2016), 1–11.

[22] B. Bertram, *On the product integration method for solving singular integral equations in scattering theory*, J. Comput. Appl. Math., 25 (1989), 79–92.

[23] G. Bruckner, *On the regularization of the ill-posed logarithmic kernel integral equation of the first kind*, Inverse Problems 11 (1995), 65-71.

[24] R.F. Cameron, S. McKee, *Product integration methods for second-kind Abel integral equations*, J. Comput. Appl. Math., 11 (1984), 1–10.

[25] T. Diogo, N.B. Franco, P. Lima, *High order product integration methods for a Volterra integral equation with logarithmic singular kernel*, Communications on Pure and Applied Analysis, 3 (2004), 217–235.

[26] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang, *Spectral Methods : Fundamentals in Single Domains*, Springer, Heidelberg, (2006).

[27] H. Chebbah, A. Mennouni and N.E. Ramdani, *Numerical Solution of Generalized Logarithmic Integral Equations of the Second Kind by Projections*, Malaysian Journal of Mathematical Sciences 12(3) (2018), 349-367.

[28] H. Chebbah, A. Mennouni and Kh. Zennir, *Three methods to solve two classes of integral equations of the second kind*, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 2019.

[29] A. Chakrabarti and T. Sahoo, *Solution of singular integral equations with logarithmic and Cauchy kernels*, Proc. Indian Acad. Math. SO. 106 (1996), 261-270.

[30] C. K. Chui, *Multivariate Splines*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1988.

[31] S. Christiansen, *Numerical solutions of an integral equation with algorithmic kernel*, BIT Numerical Mathematics 11 (1971), 276-287.

[32] S. Christiansen, *On two methods for elimination of non-unique solutions of an integral equation with logarithmic kernel*, Applicable Analysis 13 (1982), 1-18.

[33] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*, Revised Edition, Springer Verlag, Berlin, 2001.

[34] S. Eveson, *An integral equation arising from a problem in mathematical biology*, Bull Lon Math Soc. 23 (1991), 293–299.

[35] W. Fang, Y. Wang and Y. Xu, *An implementation of fast wavelet Galerkin methods for integral equations of the second kind*, Journal of Scientific Computing (2004), 277-302.

[36] M.A. Fortes, M. Ibáñez, M. L. Rodríguez, *On Chebyshev-type integral quasi-interpolation operators*, Mathematics and Computers in Simulation, 79 (2009), 3478–3491.

[37] F. De Hoog and R. Weiss,*Higher order methods for a class of Volterra integral equations with weakly singular kernels*, SIAM J. Numer. Anal., 11 (1974), 1166–1180.

[38] G. Hsiao and R.C. MacCamy, *Solution of boundary value problems by integral equations of the first kind*, SIAM Rev.15 (1973), 687-705.

[39] G. Hsiao and W. Wendland, *A finite element method for some integral equations of the first kind*, J. Math. Anal. Appl. 58(1977), 449-481.

[40] B. Jumarhon, S. McKee, *Product integration methods for solving a system of nonlinear Volterra integral equations*, J. Comput. Appl. Math., 69 (1996), 285–301.

[41] M. J. Ibáñez-Pérez, *On Chebyshev-type discrete quasi-interpolants*, Mathematics and Computers in Simulation, 28 (2008), 237–251.

[42] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, Gottingen, (1998).

[43] P. K. Kythe and P. Puri, *Computational Methods for Linear Integral Equations*, Birkhäuser, (2002).

[44] E.G. Ladopoulos, *Singular Integral Equations* , Springer, (2001).

[45] R.C. MacCamy, *On Singular integral equations with logarithmic or Cauchy kernels*, Journal of Mathematics and Mechanics 7 (1958), 355-375.

[46] K. Maleknejad and S. Sohrabi, *Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by using Legendre wavelets* Applied Mathematics and Computation 186 (2007), 836-843.

[47] I. N. Meleshko and P. G. Lasy, *Approximate solution of one singular integro-differential equation*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. (2011), 35-43.

[48] B.N. Mandal and S. Bhattacharya, *Numerical solution of some classes of integral equations using Bernstein polynomials*, Applied Mathematics and Computation 190 (2007), 1707-1716.

[49] A. Mennouni, *A new numerical approximation for Volterra integral equations combining two quadrature rules*, Applied Mathematics and Computation 218 (2011), 1962-1969.

[50] A. Mennouni, *Two Projection Methods for Skew-Hermitian Operator Equations*, Mathematical and Computer Modeling 55 (2012), 1649-1654.

[51] A. Mennouni, *Improvement by projection for integro-differential equations*. Submitted to J. Computational Applied Mathematics

[52] A. Mennouni, *Piecewise constant Galerkin method for a class of Cauchy singular integral equations of the second kind in* L^2. J. Computational Applied Mathematics 326 (2017), 268–272.

[53] A. Mennouni, *A projection method for solving Cauchy singular integro-differential equations*, Applied Mathematics Letters 25 (2012), 986-989.

[54] A. Mennouni, *Airfoil polynomials for solving integro-differential equations with logarithmic kernel*, Applied Mathematics and Computation 218 (2012), 11947-11951.

[55] A. Mennouni and S. Guedjiba, *A note on solving integro-differential equation with Cauchy Kernel*, Mathematical and Computer Modeling 52 (2010), 1634-1638.

[56] A. Mennouni and S. Guedjiba, *A note on solving Cauchy integral equations of the first kind by iterations*, Applied Mathematics and Computation 217 (2011), 7442-7447.

[57] A. Mennouni, S. Zaouia, *Discrete septic spline quasi-interpolants for solving generalized Fredholm integral equation of the second kind*, Math. Sci., 11 (2017), 345–357.

[58] C. Manni, P. Sablonnière, *Quadratic spline quasi-interpolants on Powell–Sabin partitions*, Adv. Comput. Math., 26 (2007), 283–304.

[59] G. Monegato, L. Scuderi, *High order methods for weakly singular integral equations with nonsmooth input functions*, Math. Comp., 67 (1998), 1493–1515.

[60] L. W. Morland, *Singular integral equations with logarithmic kernels*, Mathematika 17 (1970), 47-56.

[61] G. Nürnberger, C. Rössl, H.-P. Seidel, F. Zeilfelder, *Quasi-interpolation by quadratic piecewise polynomials in three variables*, Computer Aided Geometric Design 22 (2005), 221–249.

[62] S. E. Notaris, *On a corrected Fejér quadrature formula of the second kind*, Numerische Mathematik 133(2)(2016), 279-302.

[63] B. L. Panigrahi, and G. Nelakanti, *Legendre Galerkin method for weakly singular Fredholm integral equations and the corresponding eigenvalue problem*, Journal of Applied Mathematics and Computing 43 (2013), 175-197.

[64] G. M. Phillips, *Interpolation and Approximation by Polynomials*, Springer, (2003).

[65] A. D. Polyanin and A. V. Manzhirov, *Handbook of integral equations*, CRC Press, Boca Raton, (1998).

[66] D. Porter and D. Stirling, *Integral Equations : A Practical Treatment, from Spectral Theory to Applications*, Cambridge University Press, (1990).

[67] K, Orav-Puurand, A. Pedas, G. Vainikko, *Nyström type methods for Fredholm integral equations with weak singularities*, J. Comput. Appl. Math., 234 (2010), 2848–2858.

[68] P. Sablonnière, *Recent progress on univariate and multivariate polynomial and spline quasi-interpolation*, in *Trends and Applications in Constructive Approximation*, M.G. de Bruin, D.H. Mache, J. Szabados (eds.), Birkäuser Verlag, Basel, 2004, pp. 229–245.

[69] P. Sablonnière, *Univariate spline quasi-interpolants and applications to numerical analysis*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino, 63 :2 (2005), 107–118.

[70] P. Sablonnière, D. Sbibih, M. Tahrichi, *High-order quadrature rules based on spline quasi-interpolants and application to integral equations*, Appl. Numer. Math., 62 (2012), 507–520.

[71] D. Sbibih, A. Serghini, A. Tijini, *Polar forms and quadratic spline quasi-interpolants on Powell–Sabin partitions*, Appl. Numer. Math., 59 (2009), 938–958.

[72] D. Sbibih, A. Serghini, A. Tijini, A. Zidna, *Superconvergent C^1 cubic quasi-interpolants on Powell–Sabin partitions*, BIT Numer. Math., 55 (2015), 797–821.

[73] I. J. Schoenberg, *Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A. On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae*, Quart. Appl. Math., 4 (1946), 45–99.

[74] I. J. Schoenberg, *Cardinal Spline Interpolation*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1973.

[75] L. L. Schumaker, *Spline Functions : Basic Theory*, Wiley-Interscience, New York,1981.

[76] C. Schneider, *Product integration for weakly singular integral equations*, Math. Comp. 36 (1981) 207–213.

[77] Y.V. Shestopalov and E.V Chernokozhin, *On solution to integral equations with a logarithmic singularity of the kernel on several intervals of integration : elements of the spectral theory*, Journal of V. N. Karazin Kharkiv National University 1058 (1977), 184-189.

[78] I.H Sloan and A. Spence, *The Galerkin method for integral equations of the first kind with logarithmic kernel : Theory*, Ima J. Numer. Anal. 8 (1988), 105-122.

[79] I.H Sloan and A. Spence, *The Galerkin method for integral equations of the first kind with logarithmic kernel : Theory*, Ima J. Numer. Anal. 8 (1988), 123-140.

[80] H. Speleers, *Construction of normalized B-splines for a family of smooth spline spaces over Powell–Sabin triangulations*, Constr. Approx., 37 (2013), 41–72.

[81] H. Speleers, *A family of smooth quasi-interpolants defined over Powell–Sabin triangulations*, Constr. Approx., 41 (2015), 297–324.

[82] H. Speleers, *A new B-spline representation for cubic splines over Powell–Sabin triangulations*, Comput. Aided Geom. Design, 37 (2015), 42–56.

[83] M. Tahrichi, *Formules de quadrature basées sur des quasi-interpolants splines et applications aux équations intégrales*, Thèse de Doctorat 2011.

[84] T. Tang and S. McKee, *Product integration methods for an integral equation with logarithmic singular kernel*, Applied Numerical Mathematics. 9 (1992), 259-266.

[85] E, Vainikko, G. Vainikko, *A spline product quasi-interpolation method for weakly singular Fredholm integral equations*, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46 :4 (2008), 1799–1820.

[86] Y. Xu, Y. Zhao, *Quadratures for improper integrals and their applications in integral equations*, Proc. Sympos. Appl. Math. 48 (1994), 409-413.