

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université El-Hadj Lakhdar Batna



Institut de Génie Civil, d'Hydraulique et d'Architecture
Département de Génie Civil

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Sciences en : Génie Civil
Option : Structures

Vibration des Plaques Composites Trouées

Par Bahi-Eddine LAHOUEL

Directeur de thèse : Pr. Mohamed GUENFOUD

Présentée et soutenue publiquement le 23 avril 2015

Devant un jury composé de :

Président	T. Outtas	Professeur, Université de Batna
Rapporteur	M. Guenfoud	Professeur, Université de Guelma
Examineur	A. Kadid	Professeur, Université de Batna
Examineur	M. Hecini	Professeur, Université de Biskra
Examineur	N. Lahbari	Maître de Conférences, Université de Batna
Examineur	H. Bouzerd	Maître de Conférences, Université de Skikda

À ma famille et mes amis.

Remerciements

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur Mohamed Guenfoud, professeur à l'université de Guelma et directeur de cette thèse pour son assistance, sa disponibilité et son encouragement pendant l'accomplissement de ce travail. Je lui en suis profondément reconnaissant.

Je souhaite également remercier chaleureusement Monsieur T. Outtas, professeur à l'université de Batna, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury. Je tiens à lui exprimer ma plus profonde gratitude.

Je suis également extrêmement reconnaissant envers Messieurs A. Kadid, M. Hecini, N. Lahbari, et H. Bouzred qui m'ont fait l'honneur de participer au jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de l'examiner.

Que tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ma formation, trouvent ici ma gratitude et mes remerciements.

Résumé

Les plaques composites sont largement utilisées dans les structures civiles, mécaniques, aéronautiques, et surtout aérospatiales. Cela est principalement dû à leur très grande résistance et rigidité spécifique et l'avantage de l'adaptation de leurs propriétés pour répondre aux exigences de la pratique. Dans cette thèse, les vibrations et le flambement des plaques composites stratifiées conventionnelles et auxétiques avec ou sans trous ont été étudiés. Pour des raisons de performance et d'intégrité structurelle, le comportement dynamique et la stabilité de forme de ces structures doivent être globalement étudiés et bien compris. Ainsi, il est essentiel de déterminer les charges critiques de flambement et les caractéristiques dynamiques telles que les fréquences naturelles et leurs modes associés. Dans la première partie de cette thèse, il a été procédé à la comparaison, entre les théories analytiques *CLT*, *FSDT* et la méthode *MEF*, à travers l'étude de la variation de la charge critique de flambement et les fréquences de pulsation propres en fonction du rapport largeur-sur-épaisseur de la plaque. Cette étude vise à faire un choix judicieux quant à l'utilisation la plus appropriée de théories ou méthodes pour l'étude des vibrations et du flambement. Dans la deuxième partie, une analyse en éléments finis utilisant le code *Ansys*, est employée pour prédire le comportement auxétique des stratifiés symétriques $[\pm\theta]_s$. Une étude numérique a également été menée sur le comportement vibratoire libre des plaques stratifiées auxétiques. L'analyse a porté sur la variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'angle d'orientation des fibres, du rapport largeur-sur-épaisseur et des conditions de support de la plaque. La dernière partie a trait à l'analyse numérique du comportement vibratoire de plaques stratifiées symétriques, avec ou sans trous carrés, lorsqu'elles sont soumises à des charges de compression. Des études paramétriques ont été réalisées, les effets du degré d'anisotropie et des séquences d'empilement sur les fréquences fondamentales et les charges de flambement sont discutés.

Mots-Clés : *vibration, flambement, composite stratifié, auxétique, trou, MEF.*

Abstract

Composite plates are widely used in civil, mechanical, aeronautical, and especially aerospace structures. This is mainly due to their high specific strength and stiffness and the advantage of adapting their properties to meet the practical requirements. In this thesis, vibration and buckling of conventional and auxetic laminated composite plates with or without holes were studied. For reasons of performance and structural integrity, the dynamic behavior and critical buckling of these structures should be broadly studied and understood. Thus, it is essential to determine the critical buckling loads and dynamic characteristics such as natural frequencies and their associated modes. In the first part of this thesis, it was conducted the comparison between analytical theories *CLT*, *FSDT* and the *FEM* method, through the study of the variation of the critical buckling load and the natural frequencies according to the width-to-thickness ratio of the plate. This study aims to make an informed choice about the most appropriate use of theories and methods for the study of vibration and buckling. In the second part, a finite element analysis using ANSYS code is employed to predict the behavior of auxetic laminates symmetric $[\pm\theta]_s$. A numerical study was also conducted on the free vibration behavior of auxetic laminated plates. The analysis focused on the variation of the fundamental frequency with the angle of orientation of the fibers, the width-to-thickness ratio and support conditions of the plate. The last part deals with the numerical analysis of the vibration behavior of symmetric angle-ply laminated plates, with and without square holes when subjected to compressive loads. Parametric studies were conducted; the effects of the degree of anisotropy and stacking sequences on the fundamental frequencies and buckling loads are discussed.

Keywords: *vibration, buckling, laminated composite, auxetic, cutout, FEM.*

ملخص

اللوحات المركبة تستخدم على نطاق واسع في الهياكل المدنية، الميكانيكية، الطيران وخصوصا الفضائية. ويرجع ذلك أساسا لمقاومتها العالية وصلابة المميّزة والاستفادة من التكيف لخصائصها لتلبية المتطلبات العملية. في هذه الأطروحة، تم دراسة الاهتزاز والانبعاج للوحات اللصائق المركبة التقليدية ومنمية الحجم مع أو بدون ثقب. لأسباب الأداء والسلامة الهيكلية فإن السلوك الديناميكي واستقرار الشكل لهذه الهياكل ينبغي دراستها على نطاق واسع وفهمها. وبالتالي، فمن الضروري تحديد الأحمال الحرجة للانبعاج والخصائص الديناميكية مثل الترددات الطبيعية والأوضاع المرتبطة بها.

في الجزء الأول من هذه الأطروحة، قد أجريت مقارنة بين النظريات CLT، FSĐT وطريقة FEA من خلال دراسة تباين الحمولة الحرجة للانبعاج و الترددات الطبيعية تبعا لنسبة العرض إلى سمك لوحة. تهدف هذه الدراسة إلى اتخاذ قرار مستنير بشأن استخدام أنسب من نظريات وأساليب لدراسة الاهتزاز والانبعاج. في الجزء الثاني، أنجز تحليل بالعناصر المحدودة للتنبؤ بسلوك اللصائق من نمي الحجم المتناظرة. وقد أجريت دراسة عددية أيضا على السلوك الاهتزازي الحر للوحات اللصائق من نمي الحجم. ركز التحليل على تغير الترددات الأساسية بتغير زاوية التوجه للألياف، ونسبة العرض إلى سمك اللوحة وظروف سناد اللوحة. الجزء الأخير يتناول التحليل العددي لسلوك الاهتزازات من لوحات اللصائق المتناظرة، مع أو بدون ثقب مربعة عندما تتعرض لأحمال الضغط. أجريت دراسات معلمية، وتناقش آثار درجة الخواص المتباينة للمادة و تسلسل التراص على الترددات الأساسية و أحمال الانبعاج.

الكلمات الرئيسية : الاهتزاز، الانبعاج، اللصائق المركبة، نمي الحجم، ثقب، FEA

Sommaire

Résumé	iii
Sommaire	vi
Liste des figures	x
Liste des tableaux	xiii
Notations	xiv

Chapitre 1

Introduction Générale

1.1 Matériaux composites	1
1.2 Matériaux auxétiques	6
1.3 Analyse vibratoire des plaques composites	8
1.4 Flambement des plaques composites	11
1.5 Vibration des structures chargées dans leurs plans	13
1.6 Objectifs de la thèse	15
1.7 Plan de la these	16

Chapitre 2

Comportement Mécanique des Matériaux Composites Stratifiés

2.1 Introduction	18
2.2 Equations constitutive de la monocouche	18
2.2.1 Caractéristiques mécaniques et modules d'élasticité	18
2.2.1.1 Module d'Young longitudinal, E_1	19
2.2.1.2 Module d'Young transversal, E_2	19

2.2.1.3	Coefficient de Poisson longitudinal, ν_{12}	20
2.2.1.4	Module de cisaillement longitudinal, G_{12}	21
2.2.2	Loi de Hooke Généralisée	21
2.2.3	Comportement du composite en-dehors de ses axes principaux	24
2.2.4	Equations d'élasticité pour l'état de contraintes planes	26
2.3	Théories et modèles de structures multicouches	27
2.3.1	Théorie Classique des Stratifiés (CLT)	28
2.3.2	Théorie de la Déformation de Cisaillement de Premier Ordre (FSDT)	30
2.3.3	Théorie de la Déformation de Cisaillement d'Ordre Supérieur (HSDT)	31
2.4	Théorie des plaques selon le modèle CLT	33
2.4.1	Variation des contraintes et des déformations dans un stratifié	33
2.4.2	Résultantes des forces et moments dans un stratifié	35
2.4.2.1	Résultantes en membranes	36
2.4.2.2	Résultantes en cisaillement	37
2.4.2.3	Moments de flexion et de torsion	37
2.4.3	Rigidité d'un stratifié	38
2.4.4	Equation du comportement mécanique d'un stratifié	39
2.5	Théorie des plaques selon le modèle FSDT	40

Chapitre 3

Vibration et Flambement des Plaques Composites Stratifiés

3.1	Relations fondamentales	43
3.2	Flambement des plaques orthotropes avec la théorie CLT	45
3.3	Flambement des plaques orthotropes avec la théorie HSDT	47
3.4	Vibration des plaques orthotropes avec la théorie CLT	49
3.5	Vibration des plaques orthotropes avec la théorie HSDT	51

3.6	Analyse et modélisation des composites par éléments finis	53
3.6.1	Equation dynamique en éléments finis d'une structure stratifiée	53
3.6.2	Le problème des vibrations libres	54
3.6.3	Le problème de flambement	55
3.7	Etude comparative entre les théories CLT, HSDT et la méthode MEF	57
3.7.1	Flambement des plaques orthotropes simplement appuyées	59
3.7.2	Vibration libre des plaques orthotropes simplement appuyées	62
3.8	Conclusion	

Chapitre 4

Vibration des Plaques Stratifiées avec un Coefficient de Poisson Négatif

4.1	Introduction	68
4.2	Coefficient de Poisson ν_{xz} d'un stratifié	69
4.2.1	Formulation analytique	69
4.2.2	Simulation numérique	73
4.3	Vibration libre de plaques stratifiées symétriques $[\pm\theta]_{ns}$	75
4.3.1	Equations gouvernantes	75
4.3.2	Résultats numériques	77
4.3.2.1	Vibration d'une plaque stratifiée symétrique encastree	77
4.3.2.2	Vibration d'une plaque stratifiée symétrique simplement appuyée	77
4.3.3	Vibration de plaques stratifiées auxétiques	79
4.4	Conclusion	81

Chapitre 5

Vibration et Flambement des Plaques Composites Trouées

5.1	Introduction	83
5.2	Méthode de résolution	85
5.3	Effet des dimensions de l'ouverture sur la charge de flambement	86
5.3.1	Etude de la convergence	87
5.3.2	Etude de l'effet de la taille du trou	88
5.4	Vibration des plaques stratifiées trouées sous compression uniaxiale	88
5.4.1	L'analyse du flambement	91
5.4.2	L'analyse des vibrations	94
5.5	Vibration des plaques stratifiées trouées sous compression biaxiale	99
5.6	Conclusion	104
	Conclusions et perspectives	105
	Références bibliographiques	108

Liste des figures

Figure 1.1 :	Un petit échantillon d'un stratifié Carbone/Epoxyde (domaine de l'aérospatiale)	3
Figure 1.2 :	Résistance spécifique et rigidité spécifique des matériaux composites avancés	4
Figure 1.3 :	Couplage générale dans le cas d'un stratifié quelconque	5
Figure 1.4 :	Comportement en traction des matériaux auxétiques	6
Figure 1.5 :	Echelles pour les matériaux auxétiques	7
Figure 1.6 :	Approximations de la contrainte du cisaillement transverse : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur)	9
Figure 1.7 :	Modes de flambement d'une plaque composite rectangulaire	12
Figure 1.8 :	Exemples de structures soumises à la vibration et à des charges axiales ...	14
Figure 2.1 :	Stratifié avec différentes orientations de fibres	19
Figure 2.2 :	Essai de traction longitudinale	20
Figure 2.3 :	Essai de traction transversale	20
Figure 2.4 :	Essai de cisaillement longitudinal	21
Figure 2.5 :	Axes principaux et Axes de références d'une couche de stratifié	25
Figure 2.6 :	Cinématique de Kirchhoff-Love	29
Figure 2.7 :	Cinématique de Mindlin-Reissner	30
Figure 2.8 :	Géométrie d'un stratifié à n plis	33
Figure 2.9 :	Schématisation des résultantes en membrane	36
Figure 2.10 :	Schématisation des résultantes en cisaillement	37
Figure 2.11 :	Schématisation des moments de flexion et de torsion	38
Figure 3.1 :	Plaque soumise à une compression uniaxiale	46

Figure 3.2 :	Paramètres utilisés pour une plaque en vibration libre	50
Figure 3.3 :	Conditions aux limites, plaque simplement appuyée (flambement)	57
Figure 3.4 :	Conditions aux limites, plaque simplement appuyée (vibration)	57
Figure 3.5 :	Premier mode de flambement, plaque mince, stratifié B	60
Figure 3.6 :	Deuxième mode de flambement, plaque mince, stratifié B	61
Figure 3.7 :	Troisième mode de flambement, plaque mince, stratifié B	61
Figure 3.8 :	Quatrième mode de flambement, plaque mince, stratifié B	62
Figure 3.9 :	Premier mode de vibration, plaque mince, stratifié B	63
Figure 3.10 :	Deuxième mode de vibration, plaque mince, stratifié B	64
Figure 3.11 :	Troisième mode de vibration, plaque mince, stratifié B	65
Figure 3.12 :	Quatrième mode de vibration, plaque mince, stratifié B	66
Figure 4.1 :	Variation du coefficient de Poisson ν_{xz} en fonction de l'angle d'orientation des fibres MAT I ($E1/E2 = 3$)	72
Figure 4.2 :	Variation du coefficient de Poisson ν_{xz} en fonction de l'angle d'orientation des fibres MAT II ($E1/E2 \approx 10$)	72
Figure 4.3 :	Variation du coefficient de Poisson ν_{xz} en fonction de l'angle d'orientation des fibres MAT III GY70/934 ($E1/E2 = 46$)	73
Figure 4.4 :	L'élément volumique à huit nœuds Solid46 du code <i>Ansys</i>	74
Figure 4.5 :	L'élément à huit nœuds Shell99 du code <i>Ansys</i>	78
Figure 4.6 :	Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres des stratifiés $[\theta/-\theta]_S$ (plaques SSSS)	80
Figure 4.7 :	Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres des stratifiés $[\theta/-\theta]_S$ (plaques EEEE)	81
Figure 5.1 :	Maillage de la plaque avec trou circulaire central (400 éléments)	86
Figure 5.2 :	Géométrie et chargement uniaxial du model	89
Figure 5.3 :	Géométrie de l'élément fini SHELL91	90

Figure 5.4 :	Maillage avec des éléments à géométrie graduelle autour de l'ouverture..	91
Figure 5.5 :	Variation de la charge de flambement avec l'orientation des fibres (compression uniaxiale)	92
Figure 5.6 :	Premiers modes de flambement d'une plaque en compression uniaxiale ($E1/E2 = 40$)	93
Figure 5.7 :	Variation de la fréquence fondamentale avec l'orientation des fibres ($E1/E2 = 3$) (compression uniaxiale)	94
Figure 5.8 :	Variation de la fréquence fondamentale avec l'orientation des fibres ($E1/E2 = 10$) (compression uniaxiale)	95
Figure 5.9 :	Variation de la fréquence fondamentale avec l'orientation des fibres ($E1/E2 = 40$) (compression uniaxiale)	96
Figure 5.10 :	Premiers modes de flambement d'une plaque trouée en compression uniaxiale ($E1/E2 = 40$)	97
Figure 5.11 :	Modes fondamentales de vibration d'une plaque trouée en compression uniaxiale égale à 50% de la charge de flambement ($E1/E2 = 40$)	98
Figure 5.12 :	Géométrie et chargement biaxial du model	99
Figure 5.13 :	Variation de la charge de flambement avec l'orientation des fibres (compression biaxiale)	100
Figure 5.14 :	Variation de la fréquence fondamentale avec l'orientation des fibres ($E1/E2 = 3$) (compression biaxiale)	101
Figure 5.15 :	Variation de la fréquence fondamentale avec l'orientation des fibres ($E1/E2 = 10$) (compression biaxiale)	102
Figure 5.16 :	Variation de la fréquence fondamentale avec l'orientation des fibres ($E1/E2 = 40$) (compression biaxiale)	103

Liste des tableaux

Tableau 1.1 :	Variation de la fréquence fondamentale en fonction de la charge axiale ..	15
Tableau 3.1 :	Propriétés du matériau NTC-301 Graphite/Epoxy	58
Tableau 3.2 :	Charges critiques de flambement, plaque simplement appuyée, stratifié A	59
Tableau 3.3 :	Charges critiques de flambement, plaque simplement appuyée, stratifié B	59
Tableau 3.4 :	Charges critiques de flambement, plaque simplement appuyée, stratifié C	60
Tableau 3.5 :	Les quatre premières fréquences propres du stratifié A	63
Tableau 3.6 :	Les quatre premières fréquences propres du stratifié B	64
Tableau 3.7 :	Les quatre premières fréquences propres du stratifié C	65
Tableau 4.1 :	Propriétés des matériaux Mat I, Mat II et Mat III	71
Tableau 4.2 :	Valeurs du coefficient de Poisson, test de tension	75
Tableau 4.3 :	Valeurs des déformations ε_z et ε_x , test de compression	75
Tableau 4.4 :	Fréquences propres d'un stratifié symétrique $[\theta/-\theta]_S$ encasté EEEE ($a/h = 100$) $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$	78
Tableau 4.4 :	Fréquences propres d'un stratifié symétrique $[\theta/-\theta]_S$ simplement appuyé SSSS $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$	79
Tableau 5.1 :	Propriétés mécaniques du matériau du pli	87
Tableau 5.2 :	Etude de la convergence de charge de flambement pour une plaque stratifiée croisée symétrique	87
Tableau 5.3 :	Etude de l'effet du rapport d/a du trou sur la charge de flambement pour une plaque stratifiée croisée symétrique	88

Notations

Liste des principales notations ayant trait à la mécanique des structures composites.

ABD	La matrice de rigidité du stratifié
A, B, D	Chacun des blocs symétriques constitutifs de la matrice ABD
A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}	Les termes de ces blocs (i et j valent 1, 2 ou 6)
a	Longueur d'une plaque stratifiée rectangulaire
b	Largeur d'une plaque stratifiée rectangulaire
C_{ij}	Les constantes de rigidité
c	Côté du trou carré
d	Diamètre du trou
E_i	Module d'Young suivant la direction $i = 1, 2, 3$
G_{ij}	Module de cisaillement dans le plan (i, j) ($i, j = 1, 2, 3$)
h	Épaisseur de la plaque stratifiée
[K]	Matrice de rigidité globale
[K _g]	Matrice de rigidité géométrique
[M]	Matrice de masse globale
m	Nombre de demi-longueurs d'onde dans la direction x
n	Nombre de demi-longueurs d'onde dans la direction y
N_{cr}	Charge critique de flambement
N_x, N_y, N_{xy}	Flux d'efforts membranaires
\bar{Q}	La matrice de rigidité réduite hors axes principaux
S_{ij}	Les constantes de souplesse
u_0, v_0, w_0	Déplacements du feuillet moyen dans le repère global
(x, y, z)	Repère global
$(1, 2, 3)$	Repère local
ν_{ij}	Coefficient de Poisson dans le plan (i, j) ($i, j = 1, 2, 3$)
ρ	Masse volumique
θ_i	Orientation du pli i dans le plan (x, y)
σ_{ij} et ϵ_{ij}	Composantes de la contrainte et de la déformation
$\phi_{x,y}$	Rotations
ω_{mn}	Fréquence naturelle de vibration
Ω	Fréquence naturelle de vibration adimensionnelle

Chapitre 1

Introduction Générale

1.1 Matériaux composites

Les composites sont définies comme étant la combinaison de deux ou plusieurs matériaux tels que les éléments de renfort, les charges et les matrices liantes. Ces matériaux diffèrent dans la forme ou dans la composition sur une échelle macroscopique, mais ils se complètent et permettent d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Le matériau de renfort et celui de la matrice sont en général les deux matériaux qui entrent dans la formation de composites. Le rôle du matériau de renfort est d'être le renforcement ou l'agent qui véhicule les charges. Les matériaux de renfort, qui sont généralement solides et rigides, existent pour la plupart des cas sous la forme de fibres ou de filaments. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes, etc. Les métaux ordinaires tels que l'aluminium, le cuivre, le nickel, l'acier et le titane, et des matériaux organiques tels que le verre, le carbone, le bore, et les matériaux en graphite sont utilisés en tant que matières fibreuses. La matrice a diverses fonctions : lier les fibres entre elles, transférer les charges mécaniques aux fibres, protéger les fibres de l'environnement extérieur, etc. La matrice peut être organique, céramique ou métallique. Il existe trois types communément acceptés de matériaux composites :

- Les composites fibreux qui se composent de fibres dans une matrice.
- Composites stratifiés constitués de couches de différents matériaux.
- Des composites à particules qui sont composés de particules dans une matrice.

Beaucoup de structures composites utilisées dans l'aéronautique et l'astronautique, civile, maritime, nucléaire, transport, pétrole et la pétrochimie engineering sont faites de matériaux composites stratifiés à renforts fibreux. Les matériaux composites stratifiés à renforts fibreux sont constitués de couches de fibres noyées dans une matrice. Chaque couche

est appelée une strate ou pli. Le pli est le bloc de construction fondamental des matériaux composites stratifiés à renforts fibreux. Les couches du matériau à renfort fibreux sont empilées avec des directions des fibres de chaque couche généralement orientées de manière différentes afin de donner des résistances et des rigidités dans différentes directions. Ainsi, les résistances et les rigidités du composite stratifié à renforts fibreux peuvent être adaptés aux exigences spécifiques de conception et de construction des éléments d'une structure [1], [2]. Les matériaux composites stratifiés à renforts fibreux sont également appelés matériaux composites avancés (figure 1.1).

Les matériaux composites ont de meilleures propriétés d'ingénierie que les matériaux classiques, par exemple, les métaux. Les avantages et les inconvénients des matériaux composites par rapport aux métaux sont répertoriés comme suit [3].

Les avantages des matériaux composites par rapport aux métaux :

- légèreté ;
- résistance à la corrosion ;
- haute résistance à l'endommagement par fatigue ;
- réduction de l'usinage ;
- sections fuselées et les contours combinés facilement accomplies ;
- possibilité d'orienter les fibres dans le sens nécessaire de la résistance/rigidité ;
- nombre de fixations et d'assemblages réduit ;
- absorber les micro-ondes radar (furtivité) ;
- la dilatation thermique proche de zéro réduit les problèmes thermiques dans les applications spatiales.

Les inconvénients des matériaux composites par rapport aux métaux :

- matériau couteux ;
- dégradation des propriétés structurales sous des températures extrêmes et des conditions humides ;
- pauvreté dans l'absorption d'énergie et les dommages d'impacts ;
- méthodes de contrôle coûteuses et compliquées ;
- difficile localisation des défauts ;
- Exigence d'une main-d'œuvre qualifiée dans le secteur manufacturier ;



Figure 1.1 *Un petit échantillon d'un stratifié Carbone/Epoxyde (domaine de l'aérospatiale)*

En outre, une représentation des rapports de la résistance/densité et de la rigidité/densité de nombreux matériaux tels que les matériaux composites avancés et les métaux est montrée sur la figure (1.2). On voit sur cette figure que les fibres seules sont plus rigides et plus résistantes que lorsqu'elles sont incorporées dans une matrice. On peut voir aussi que, les configurations unidirectionnelles sont plus rigides et plus résistantes que les configurations isotropes biaxiales. Comme le montre la figure (1.2), la plus grande rigidité et résistance par unité de poids peuvent être obtenus avec des fibres de bore. Une configuration isotrope biaxiale du bore/époxyde est encore plus rigide que l'acier ou le titane, bien que les deux ont la même résistance relative.

Les composites à base de fibres de graphite à haute résistance se comportent de manière similaire que le bore/époxy. Le verre/époxyde S dans un empilement unidirectionnel a environ 2.5 fois la résistance relative de l'acier ou le titane, mais il a une faible rigidité par rapport à ces derniers. La rigidité relative de béryllium est six fois supérieure à la rigidité relative de l'acier, du titane ou de l'aluminium, mais il n'est pas plus résistant. Les fils du béryllium sont beaucoup plus résistants, mais pas plus rigide, que le béryllium brut. La dualité du graphique de la figure (1.2) est très importante, c'est que, la rigidité est souvent aussi importante que la résistance.

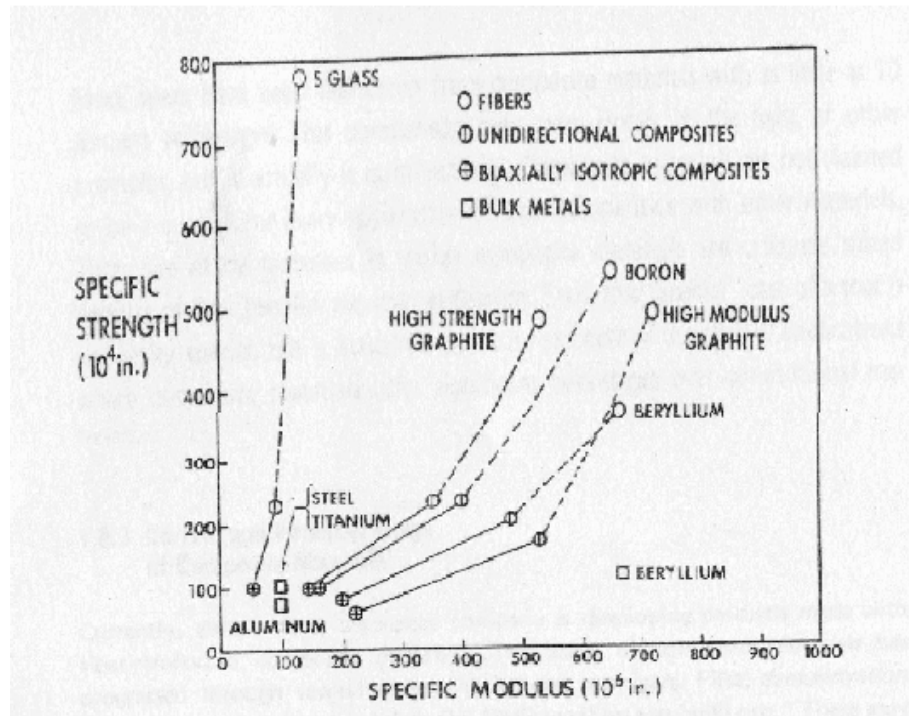


Figure 1.2 Résistance spécifique et rigidité spécifique des matériaux composites avancés [1]

Les matériaux composites avancés ou les matériaux à renforts fibreux sont idéales pour des applications structurales où de grands rapports résistance/poids et rigidité/poids sont nécessaires. Comme les avions et les engins spatiaux sont des structures typiquement sensibles au poids, les matériaux composites avancés sont essentiellement appropriés et efficaces pour ces structures. En fait, la nécessité de réduire le poids et d'avoir de grandes et performantes propriétés dans les applications de l'industrie aéronautique et aérospatiale a conduit au développement et l'utilisation de matériaux composites avancés.

Les fibres les plus couramment utilisés dans les matériaux composites avancés sont le carbone, le graphite, le Kevlar et le bore. Parmi ces fibres, la fibre de carbone est la plus polyvalente des renforts de pointe et la plus largement utilisée dans les applications structurelles de l'industrie aéronautique et spatiale. D'autre part, les matériaux constituant les matrices utilisées dans les matériaux composites avancés pour interconnecter les renforts fibreux sont aussi variés que les renforts. Des résines ou matières plastiques, des métaux, et même des matériaux céramiques sont utilisés comme matrices.

Aujourd'hui, la résine époxyde est la matrice thermodurcissable la plus employée pour les applications de l'industrie aérospatiale, aéronautique, missiles, etc. Les résines thermodurcissables ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. En effet, après polymérisation par rapport à la chaleur en présence d'un catalyseur, ces résines conduisent à une structure géométrique qui ne peut être détruite que par un apport important d'énergie thermique. Ainsi, ces résines possèdent des propriétés mécaniques et surtout thermomécanique plus élevées. En plus des résines thermodurcissables, les résines thermoplastiques dont la fabrication est nettement moins onéreuse, possèdent la propriété de pouvoir être mises en forme plusieurs fois par chauffages et refroidissements successifs. Ces résines peuvent être récupérées et facilement recyclées. Parmi les avantages des résines thermoplastiques, on peut citer le cycle court de fabrication, l'augmentation de la ténacité, et la faible sensibilité à l'humidité.

L'analyse des composites stratifiés à renforts fibreux est beaucoup plus complexe par rapport aux matériaux conventionnels parce que les composites sont hétérogènes sur toute l'épaisseur et généralement anisotropes. Les matériaux anisotropes présentent des caractéristiques directionnelles et peuvent ainsi apporter des couplages de traction-cisaillement, de membrane-flexion, membrane-torsion et de flexion-torsion dans l'analyse (figure 1.3). Lorsque les stratifiés sont empilés de façon non symétrique, le couplage membrane-flexion-torsion doit être pris en compte dans l'analyse.

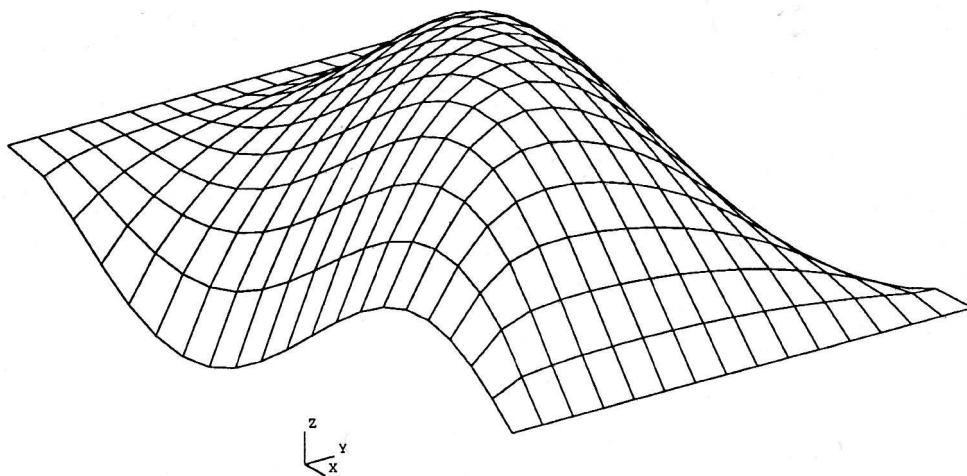


Figure 1.3 Couplage générale dans le cas d'un stratifié quelconque

1.2 Matériaux auxétiques

Les matériaux possédant un coefficient de Poisson ν négatif sont appelés les matériaux auxétiques. Le comportement auxétique se trouve dans les matériaux à partir des niveaux moléculaires et microscopiques, jusqu'à l'échelle macroscopique. Le terme auxétique vient du mot grec « auxetos » qui signifie « qui peut subir une augmentation ». Au lieu d'obtenir une forme plus mince comme une bande élastique allongée, le matériau auxétique gagne du volume avec une expansion latérale lorsqu'il est étiré (figure 1.4). Toutes les grandes classes de matériaux (polymères, composites, métaux et céramiques) peuvent exister sous forme auxétique (figure 1.5). Typiquement, les propriétés mécaniques (par exemple, la résistance à l'indentation et le module de cisaillement) étant inversement proportionnelle à $(1 - \nu^2)$ ou $(1 + \nu)$. La limite négative de ν pour les matériaux isotropes est -1, et les quantités $(1 - \nu^2)$ ou $(1 + \nu)$ tendent vers zéro, conduisant à des améliorations dans les propriétés mécaniques pour les matériaux auxétiques en comparaison avec les matériaux conventionnels [4], [5], [6]. Le coefficient de Poisson de la plupart des métaux se situe entre 0,25 et 0,35. Le caoutchouc a un coefficient de Poisson proche de 0,5, il est donc presque incompressible. Par exemple, les composites renforcés par des fibres de carbone et les polymères microporeux peuvent avoir de similaires améliorations dans la résistance et les propriétés d'amortissement. L'idée est de transformer un matériau non-auxétique dans une forme auxétique tels que les mousses ou matériaux cellulaires, ou utiliser de nouvelles techniques dans l'architecture de nouveaux matériaux composites (structures en nid d'abeilles et composites à renforts fibreux).

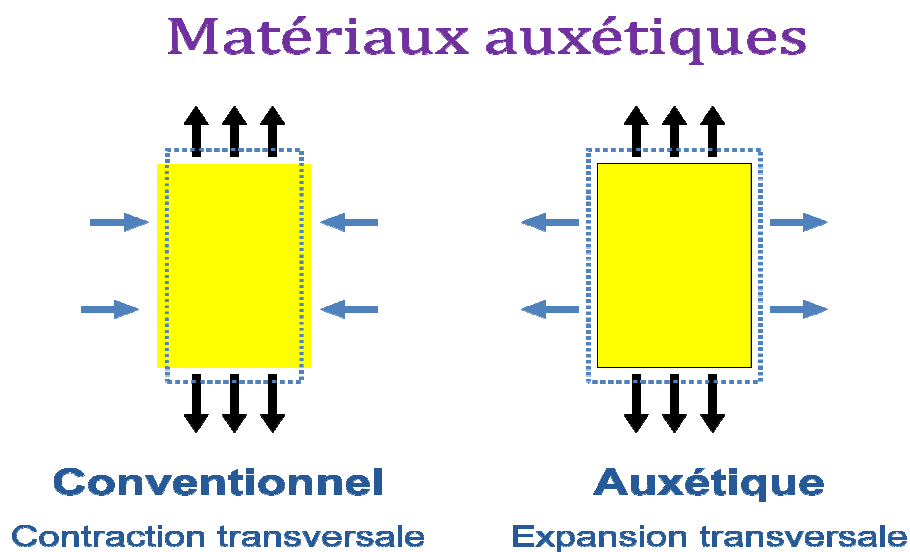


Figure 1.4 Comportement en traction des matériaux auxétiques

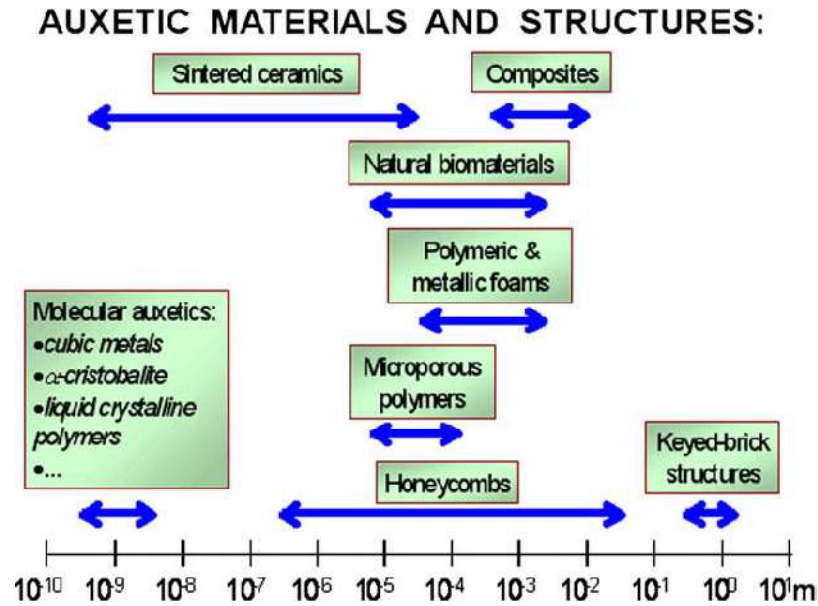


Figure 1.5 Echelles pour les matériaux auxétiques [7]

Des applications pour les matériaux avec des coefficients de Poisson négatif peuvent être envisagées :

- sur la base du coefficient de Poisson ;
- sur la base de l'amélioration de la dureté, la résilience, la résistance à la déchirure qui ont été observé dans ces matériaux ;
- sur la base des propriétés acoustiques associées à la vibration de nervures dans le matériau.

Le coefficient de Poisson influence la cinématique de déformation par des moyens qui peuvent être utiles, et il influe sur la répartition des contraintes. Par exemple, les facteurs de concentration de contrainte sont réduits dans certaines situations, augmentés dans d'autres situations, lorsque le coefficient de Poisson est négatif. Les matériaux avec des coefficients de Poisson négatif peuvent quantitativement améliorer la performance des applications telles que les tapis de lutte et les noyaux pour panneaux sandwich. D'autres applications potentielles où les matériaux avec un coefficient de Poisson négatif seraient intéressants. Par exemple, les mousses faites d'un tel matériau se plieraient plus facilement de sorte qu'elles se prêteraient beaucoup mieux à la fabrication de coques sandwiches en forme de dôme ou de coiffe convexe.

1.3 Analyse vibratoire des plaques composites

Beaucoup de méthodes analytiques et d'analyse ont été utilisées pour étudier les vibrations de plaques et coques. Dans ce type d'analyse, les difficultés analytiques dans la résolution des équations ont jusqu'à maintenant été surmontées que dans certains cas particuliers, tandis que le cas général n'a pas encore reçu un traitement satisfaisant. L'approche par éléments finis s'est avérée être une méthode puissante et largement applicable pour l'analyse des problèmes complexes de vibration pour lesquels des solutions analytiques sont presque impossibles à trouver. Une variété de nouveaux éléments finis ont été proposés sur la base de différentes théories de structure, fonctions d'interpolation et procédures de formulation afin d'obtenir une prédiction plus précise de la vibration libre de plaques et coques.

Un certain nombre de théories existent dans la littérature pour l'analyse des structures composites stratifiées. La théorie classique des stratifiés selon Kirchhoff est basée sur l'hypothèse que les normales au plan médian non déformée restent droites et normale au plan médian déformée du stratifié, et donc la négligence des effets de cisaillement transverse correspondant a été le point de départ à l'élaboration de théories générales de plaques et coques. Les hypothèses de la théorie classique conduisent à une augmentation de la rigidité de la structure et donc une sous-estimation des déplacements et une estimation exagérée de leurs fréquences naturelles.

Différentes études ont été menées pour déterminer les propriétés dynamiques des composites stratifiés [8-18]. Whitney [8] considère une théorie d'ordre supérieur, qui prend en compte l'effet de cisaillement transverse (figure 1.6) et les déformations d'inertie de rotation. Son approche est une extension de théories développées par Reissner [9] et Mindlin [10] pour les plaques isotropes homogènes. Des solutions exactes ont été obtenues dans le cas des appuis simples, seulement.

Wu et Vinson [11] ont étudié l'effet des déformations de cisaillement sur la fréquence naturelle fondamentale de plaques composites avec différentes conditions aux limites : des bords encastés, simplement appuyés, et combinées encastés et simplement appuyés. Cette solution a été fondée sur la méthode de Galerkin et les fonctions considérées sont analogues à

ceux de Warburton [12]. L'auteur a constaté que pour une plaque constituée par des couches composites hautement anisotropes avec des bords encastres ou simplement appuyés, l'effet des déformations du cisaillement transverse est important pour les vibrations de petites et larges amplitudes. En utilisant une autre approche, Hearmon [13] a appliqué la méthode Rayleigh-Ritz pour des plaques spécialement orthotropes, soumises sur leurs quatre cotés à des encastremets ou à des appuis simples, en négligeant le cisaillement transverse, et les déformations d'inertie de rotation.

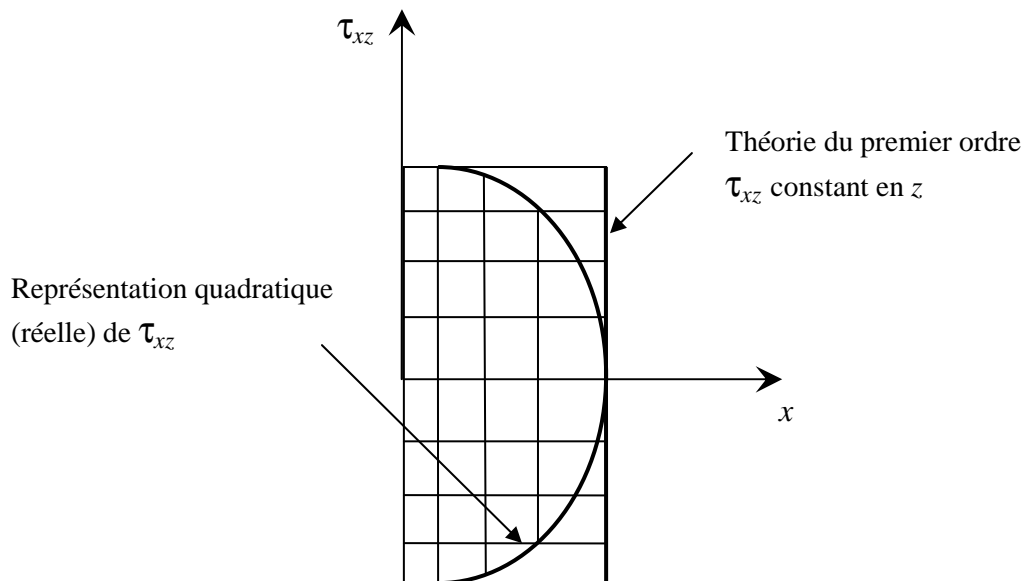


Figure 1.6 *Approximations de la contrainte du cisaillement transverse : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur)*

Bert [14] a présenté l'effet de la déformation de cisaillement sur les vibrations des plaques rectangulaires stratifiées antisymétriques. La formulation en déplacement de la théorie prenant en compte la déformation de cisaillement pour des plaques hétérogènes proposée par Yang, Norris, et Stevsky [15] a été utilisée. Les résultats numériques sont présentés montrant l'effet paramétrique du rapport longueur sur largeur, du rapport longueur sur épaisseur, du nombre de couches et de l'angle d'orientation des plis. Il a été conclu que : (a) l'effet de la déformation du cisaillement transverse relative sur la fréquence fondamentale est supérieure pour les plaques équilibrées antisymétriques que pour les plaques isotropes

homogènes de mêmes dimensions, et (b) l'effet du rapport longueur sur largeur de la plaque (a/b) sur la fréquence fondamentale est plus prononcé pour les plaques épaisses (faible rapport a/h) que pour les plaques minces (ayant un grand rapport a/h).

Bhimaraddi et Stevens [16] ont présenté une théorie d'ordre supérieur pour les vibrations libres de plaques rectangulaires orthotropes, homogènes et stratifiées. La théorie tient compte de l'inertie dans le plan, inertie de rotation et les effets de déformation de cisaillement. La méthode proposée utilise le principe de Hamilton et considère des variations paraboliques pour les déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque. Les principales conclusions étaient les suivantes : (a) l'épaisseur de la plaque a un effet plus prononcé sur le comportement des plaques composites que celui du comportement des plaques isotropes ; (b) l'effet des déformations du cisaillement transverse sont plus prononcées dans les plaques composites stratifiées minces ; et (c) les fréquences calculées par la présente analyse sont plus proches des valeurs exactes que celles calculées par la théorie de la déformation de cisaillement.

Reddy [17] a présenté une théorie en couche équivalentes discrètes (Layerwise Theory) pour l'analyse des vibrations libres de plaques stratifiées. Cette théorie est parmi les plus élaborée dans laquelle les divers effets en trois dimensions sont pris en compte. La théorie classique de plaques stratifiées, la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre et la théorie de la déformation de cisaillement de troisième ordre ont été considérées. Les équations de l'élasticité ont été résolues en utilisant les variables d'état de l'espace et la matrice de transfert. Des résultats ont également été obtenus pour des stratifiés symétriques et antisymétriques.

Whitney [18] a présenté des solutions pour les fréquences de vibrations des stratifiés symétriques et non symétriques en adoptant la théorie de flexion pour les plaques stratifiées anisotropes développée par Yang, Norris, et Stevsky [15]. Cette dernière théorie a considérée la déformation de cisaillement et l'inertie de rotation de la même manière que dans la théorie de Mindlin pour les plaques homogènes isotropes. Les résultats ont indiqué que la déformation de cisaillement peut être assez importante pour les composites avec un rapport côte sur épaisseur aussi élevée que 20, et négligeable pour des plaques isotropes homogènes avec le même rapport.

1.4 Flambement des plaques composites

Le flambement de plaques rectangulaires a fait l'objet d'études depuis plus d'un siècle. Des solutions exactes et approximatives pour des plaques rectangulaires ont été trouvées. Il existe de nombreuses solutions exactes de plaques minces isotropes élastiques linéaires ; qui ont été traitées par Timoshenko [19]. Les propriétés mécaniques des matériaux composites sont souvent estimés comme orthotropes. Le flambement des plaques orthotropes a fait l'objet de nombreuses recherches dans le passé. Selon Vakiener, Zureick, et Will [20], le premier traitement de la stabilité d'une plaque orthotrope avec un bord libre a été fait par Trayer en 1931. Une solution basée sur une méthode énergétique a été présentée pour la stabilité d'une bride articulée élastiquement avec des propriétés orthotropes.

Ashton et Waddoups [21] ont déterminé les charges critiques de flambement pour le cas général de plaques anisotropes. En utilisant la méthode approchée de Rayleigh-Ritz, ils ont présenté des techniques de résolution pour la détermination de la charge critique de flambement de plaques rectangulaires stratifiées anisotropes. Ashton et Whitney [22] ont formulés des équations approximatives de la charge de flambement pour plaques stratifiées. Ils ont traité le cas de stratifié spécialement orthotrope comme étant équivalent à celui d'une plaque orthotrope homogène.

Les solutions exactes des plaques orthotropes simplement appuyées sur tous les bords ont été obtenues et compilées par Whitney. Bao, Jiang et Roberts [23] ont utilisé la méthode des éléments finis pour la détermination de la charge critique de flambement de plaques orthotropes rectangulaires. Ils ont constaté, pour les plaques simplement appuyées sur tous les cotés, que les résultats obtenues sont presque confondus avec les solutions exactes. Veres et Kollar [24] ont présentés sous forme de formules approximatives pour le calcul des plaques orthotropes rectangulaires avec des bords encastrés et/ou simplement appuyés. Ils ont utilisé ces formules et la méthode des éléments finis afin de les comparer aux solutions exactes obtenues par Whitney, ils ont trouvés que les formules surestiment la charge de flambement avec des valeurs qui peuvent aller jusqu'à 8%.

Khdeir [25] a étudié la stabilité de plaques stratifiées équilibrées antisymétriques. Khdeir a utilisé une solution généralisée de type Levy pour la détermination des charges

critiques de flambement de plaques de forme rectangulaire. Il a montré l'influence du nombre de couches, l'orientation des plis du stratifié et le type de conditions aux limites sur le comportement au flambement des plaques composites. Chaque couche a été considérée être former par le même matériau orthotrope. Les plaques qu'il a analysé avaient deux bords chargés simplement appuyés et différentes conditions aux limites pour les autres bords. Khdeir a constaté que, pour la condition au limite libre-libre, libre-simplement appuyée et libre-encastree des bords non chargés, la charge de flambement uniaxiale adimensionnelle diminue à mesure que l'orientation de l'angle augmente et cela quel que soit le nombre de couches.

Pandey et Sherbourne [26] ont utilisé des méthodes énergétiques afin de présenter une formulation générale pour le flambement de plaques composites stratifiées rectangulaires équilibrées symétriques soumises à des forces uniaxiales de compression variant linéairement. Les plaques ont été soumises à quatre combinaisons différentes de conditions aux limites simples et fixes. Les stratifiés contenaient 3, 9 ou un nombre infini de couches. Le nombre infini de couches représente le cas du stratifié spécialement orthotrope. La séquence d'empilement stratifié était $(-\theta/+ \theta/-\theta\dots)$ où l'angle, θ varié de 0 à 90 degrés par pas de 15 degrés. Les résultats ont montré que $\theta = 45$ degrés est l'angle optimum des fibres pour les stratifiés avec bords chargés et simplement appuyés sous une large gamme de gradients de contraintes.

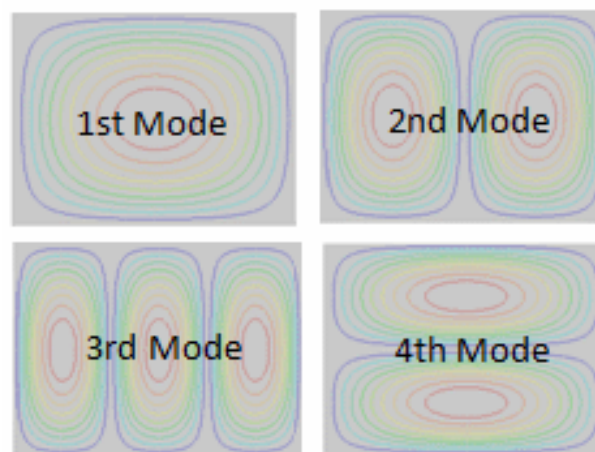


Figure 1.7 Modes de flambement d'une plaque composite rectangulaire

Chen [27] a utilisé des méthodes énergétiques pour déterminer le changement de mode de flambement de stratifiés équilibrés antisymétriques. Chen a évalué numériquement les effets de l'angle d'orientation des plis, du rapport longueur sur épaisseur, du rapport longueur sur largeur, du rapport des modules et des conditions aux limites sur les changements de modes de flambage (figure 1.7). Chen présente le phénomène de cuspidés en raison du changement dans le mode de flambage (de $m = 1$ à $m = 2$, où m est le nombre de demi-ondes dans la direction x), négligé par Khdeir. Chen a noté que ce changement de mode de flambement se produit toujours pour plaques stratifiées soumises à des combinaisons d'appuis simplement appuyés ou d'appuis encastrés sur tous les cotés. Le mode de flambement, cependant, ne change pas pour les conditions aux limites avec l'un des bords libre.

1.5 Vibration des structures chargées dans leurs plans

Dans un contexte d'ingénierie, nous avons généralement des connaissances considérables sur les équations de la physique qui gouvernent le comportement des systèmes de structures. Nous sommes en mesure de tester un système à la fois analytiquement et dans les laboratoires, et on a donc une bien meilleure chance d'évaluer la robustesse d'un système, en particulier sa tendance à la ruine. Cependant, des circonstances imprévues surviennent coïncidant avec des négligences dans la prédiction du comportement des structures comme cela était le cas pour la catastrophe du pont suspendu Tacoma. Mais beaucoup d'autres ponts et bâtiments se sont effondrés, les ailes d'avion ont tendance à flotter, les navires chavirent parfois, les rails d'un chemin de fer flambe de temps en temps, des circuits électriques présentent sporadiquement des informations non désirées et des pièces de machines sont sujettes à la fatigue. Ce que la plupart de ces systèmes ont en commun, c'est qu'ils étaient soumis à des influences externes imprévues avec lesquels ils ne pouvaient pas faire face.

Comprendre le flambement et les vibrations des structures sous compression axiale est d'une très grande importance pour les ingénieurs de structures et de l'aérospatiale. Quelques exemples pratiques de structures dans lesquelles les charges axiales et la dynamique peuvent être envisagées sont présentés dans la figure (1.8).



Figure 1.8 Exemples de structures soumises à la vibration et à des charges axiales

Souvent, les plaques et les panneaux sont soumis à des charges dans leur plan. Leurs caractéristiques dynamiques sont influencées de manière différente de celles des poutres chargées axialement. Ainsi, beaucoup de chercheurs se sont intéressés à l'interaction des forces dans le plan et la réponse dynamique [28-33]. Une première analyse par éléments finis de plaques chargées axialement a été rapportée par Anderson *et al.* [34]. Ils ont montré la réduction des fréquences naturelles en fonction de la charge axiale, et le tableau (1.1) montre un sous-ensemble de leurs résultats pour une plaque carrée simplement appuyée sous chargement uniaxial.

Tableau 1.1 *Variation de la fréquence fondamentale en fonction de la charge axiale*

Charge (% de la charge critique)	La fréquence fondamentale
- 200	34.150
- 100	27.811
- 50	24.048
0	19.596
40	15.139
80	8.661
90	6.046
95	3.705
99	1.410

Cette analyse a utilisé 128 éléments triangulaires non conformes. Le coefficient de la fréquence naturelle fondamentale à zéro charge axiale est 19.596, et la charge critique (à la fréquence zéro) est 3.97. Ces deux valeurs sont très proches des valeurs analytiques qui sont 19.739 et 4 respectivement.

1.6 Objectifs de la thèse

Les ouvertures et les trous sont une partie intégrante de presque tous les éléments de structure y compris les plaques composites stratifiés. Pour diverses raisons pratiques, nous avons toujours besoin d'avoir des ouvertures dans ces structures. Les trous servent comme orifices d'accès pour les systèmes mécaniques et électriques tels que le passage de fils électriques, conduites hydrauliques, etc. Parfois, de nombreux concepteurs utilisent juste des ouvertures de formes et de taille variées pour le contrôle de la qualité, la réduction du poids des structures et également pour modifier les fréquences naturelles de structures afin d'assurer leur sécurité en cas de vibrations dangereuses. Les trous dans les éléments de structure tels que les plaques ont tendance à changer leurs caractéristiques dynamiques dans une certaine mesure. Ce changement est évident lorsque la structure est exposée à des vibrations importantes. Car ces ouvertures peuvent conduire à la ruine sous contraintes basses et aussi

parfois en raison de résonance indésirable. Il est donc plus que nécessaire de prédire les fréquences de résonance de ces structures avec trous. L'étendue des applications pratiques des trous dans les plaques nécessite une meilleure compréhension de leur comportement vis-à-vis de la vibration et la stabilité.

D'après cette revue de littérature, il est évident que les études sur les caractéristiques statiques et dynamiques des plaques composites ont été un champ actif pour divers chercheurs du monde entier. Des travaux portant sur la résistance, les caractéristiques vibratoires et le phénomène de flambage ont été réalisés par de nombreux chercheurs et sont toujours en cours. On peut noter à partir de ces études que la plupart des travaux effectués sur des composites stratifiés sont principalement analytiques. Des modèles d'éléments finis ont également été utilisés dans ce cas à l'aide de divers éléments pour la conception du composite et la détermination de ses valeurs caractéristiques.

Compte tenu de ce qui précède, les objectifs de ce travail sont les suivants :

- Faire une étude comparative entre les théories analytiques (*CLT – FSDT*) et la méthode des éléments finis (logiciel *Ansys*). L'étude concerne le flambement et la vibration des plaques stratifiées orthotropes simplement appuyées.
- La prédiction, de manière analytique et numérique, du comportement auxétiqye des stratifiés symétriques $[\pm\theta]_{ns}$.
- Etude du comportement vibratoire des plaques stratifiées avec un coefficient de Poisson négatif à travers l'épaisseur.
- Etude de l'effet de la présence de trous rectangulaires sur la réponse vibratoire de plaques composites stratifiées symétriques lorsqu'elles sont soumises à des charges de compression dans leur plan.

1.7 Plan de la thèse

Notre travail est divisé en cinq chapitres, dans le **premier**, on y trouve plusieurs parties d'intéressement général, il est question de présenter les fondements et les caractéristiques des matériaux composites, leurs différentes formes, en particulier celle des stratifiés à fibres unidirectionnelles, les comportements des plaques stratifiées vis-à-vis des vibrations libres et

du flambement, la vibration des structures chargées dans leur plan et la problématique du comportement des plaques stratifiées avec ouvertures. Le **second** chapitre est purement théorique, il contient un rappel du comportement mécanique des matériaux composites stratifiés, de la théorie classique des stratifiés *CLT* et la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre *FSDT* ainsi que la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur *HSDT*. Le **troisième** chapitre est consacré à la vibration et au flambement des Plaques Composites Stratifiées orthotropes selon les théories *CLT* et *FSDT*, à l'analyse et modélisation des composites par éléments finis et à une étude comparative entre ces théories analytiques et la méthode des éléments finis. Le **quatrième** chapitre est réservé à la prédiction du comportement auxétiq ue des stratifiés symétriques $[\pm\theta]_{ns}$ et à la vibration des plaques stratifiées avec un coefficient de Poisson négatif à travers l'épaisseur. Le **cinquième** chapitre traite l'étude de l'effet de la présence de trous rectangulaires sur la réponse vibratoire de plaques composites stratifiées symétriques lorsqu'elles sont soumises à des charges de compression dans leur plan. Le travail s'achève par des conclusions et recommandations.

Chapitre 2

Comportement Mécanique des Matériaux Composites Stratifiés

2.1 Introduction

Un stratifié est un ensemble de feuillets ou plis empilés de manière à obtenir une rigidité et une épaisseur requises pour la structure. Le stratifié composé de fibres unidirectionnelles peut être empilé de sorte que les fibres de chaque pli sont orientées dans des directions identiques ou différentes. Le choix des séquences d'empilement des couches dépendra essentiellement de l'utilisation du matériau composite (figure 2.1), en l'adaptant au mieux au champ des contraintes imposé, par exemple :

- Les couches unidirectionnelles ont une bonne résistance à la traction ;
- Les stratifiés avec fibres orientés à 30° ou 45° peuvent résister aux efforts tranchants ;
- Les stratifications croisés seront sensibles au délaminage interlaminaire ;
- Une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire pour avoir une pseudo-isotropie dans le plan du stratifié ;
- Une stratification symétrique garantira généralement une bonne planéité du stratifié après démoulage.

2.2 Equations constitutive de la monocouche

2.2.1 Caractéristiques mécaniques et modules d'élasticité

La détermination des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel consiste à rechercher les expressions de ces modules en fonction des modules d'élasticité de la matrice et des fibres (E_m , E_f), fraction volumique de la matrice et de fibres (V_m , V_f), les coefficients de Poisson (ν_m , ν_f), longueur des fibres, etc. La résolution de ce problème n'est pas simple et la solution n'est pas unique. Néanmoins, il existe une approche simplifiée du comportement

mécanique de la cellule élémentaire du matériau qui fournit des expressions pratiques des modules.

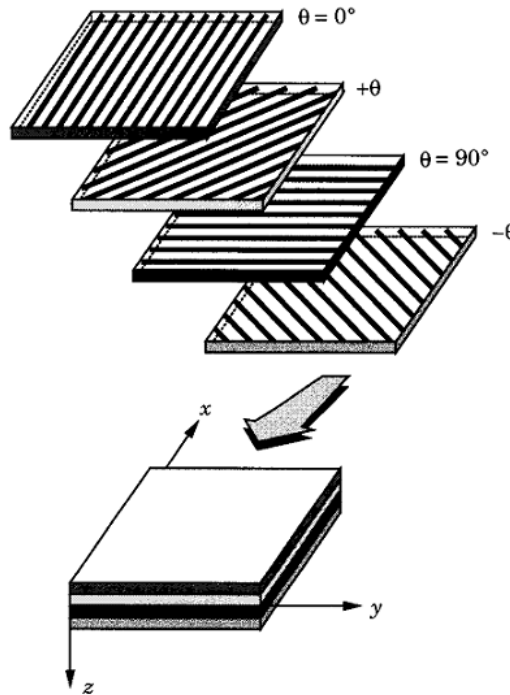


Figure 2.1 Stratifié avec différentes orientations de fibres [35]

2.2.1.1 Module d'Young longitudinal, E_1

Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinal (figure 2.2). L'hypothèse simplificatrice est de supposer une déformation uniforme dans la fibre et dans la matrice. Cette hypothèse conduit à la formule suivante :

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad (2.1)$$

2.2.1.2 Module d'Young transversal, E_2

Le module d'Young transversal est déterminé dans un essai de traction transversale (figure 2.3). Dans cet essai, on suppose que la contrainte transversale est la même dans la fibre et dans la matrice. Cette hypothèse conduit à la formule suivante :

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f} \quad (2.2)$$

Comparé aux données expérimentales, le module obtenu par l'équation (2.2) n'est pas trop précis et il est généralement considéré comme une limite inférieure.

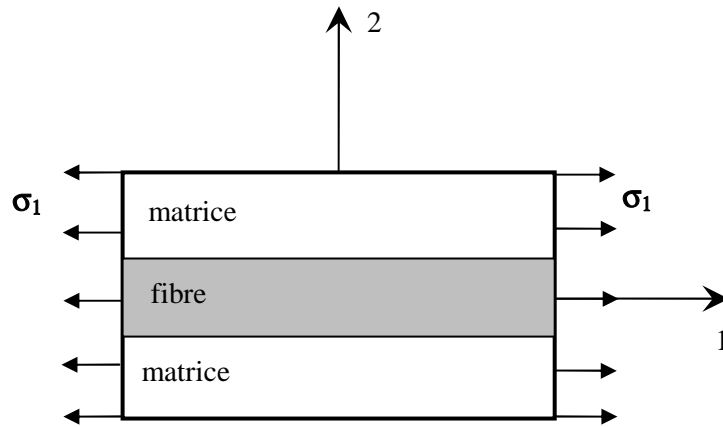


Figure 2.2 *Essai de traction longitudinale*

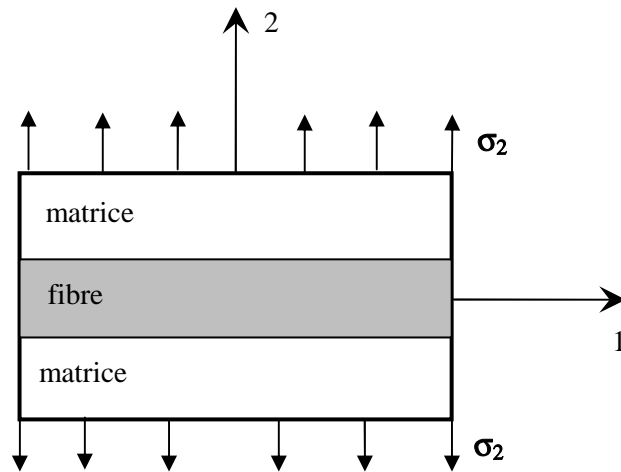


Figure 2.3 *Essai de traction transversale*

2.2.1.3 Coefficient de Poisson longitudinal, ν_{12}

Le coefficient de Poisson longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinal. En utilisant l'approche du comportement mécanique du matériau, le coefficient de Poisson dans le plan est donné par la formule suivante :

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (2.3)$$

2.2.1.4 Module de cisaillement longitudinal, G_{12}

Le module de cisaillement longitudinal est déterminé dans un essai de cisaillement longitudinal (figure 2.4). Pour déterminer ce module, l'approche de la mécanique des matériaux considère que les contraintes en cisaillement dans la fibre et dans la matrice sont égales. Cette hypothèse conduit à la formule suivante :

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{G_f V_m + G_m V_f} \quad (2.4)$$

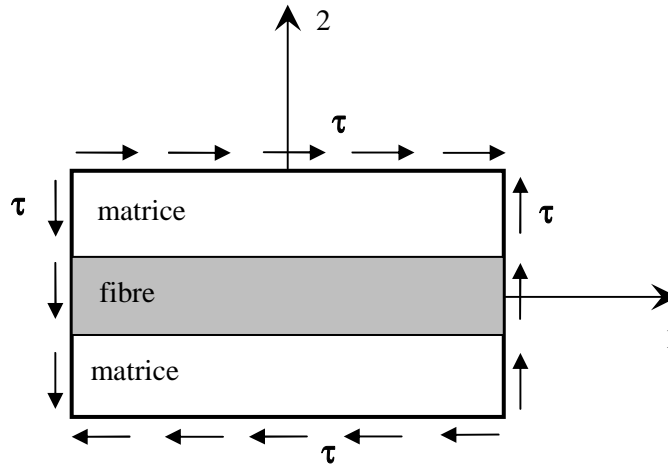


Figure 2.4 Essai de cisaillement longitudinal

2.2.2 Loi de Hooke Généralisée

La loi de Hooke généralisée pour un matériau anisotrope sous des conditions isothermiques est donnée suivant l'une des deux formes :

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (2.6)$$

où σ_{ij} et ε_{ij} sont composantes de la contrainte et de la déformation dans le système des coordonnées du matériau (1, 2, 3). C_{ij} et S_{ij} sont les coefficients de rigidité et de souplesse respectivement. Sous forme matricielle et explicite on aura :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

La forme inverse de la loi de Hooke généralisée sera :

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Les matrices C et S sont appelées respectivement, matrice de rigidité et matrice de souplesse du matériau.

La relation entre la matrice de rigidité et la matrice de souplesse est donnée par :

$$C = S^{-1} \quad (2.9)$$

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique. Lorsqu'un matériau possède un ou plusieurs plans de symétrie matérielle, le nombre de constantes d'élasticité indépendantes peut être réduit. Pour les matériaux qui possèdent un seul plan de symétrie, appelés matériaux monocliniques, il n'y a que 13 paramètres indépendants, et pour les matériaux avec trois plans de symétrie perpendiculaires deux à deux, appelés matériaux orthotropes, le nombre des paramètres du matériau est ramené à 9 dans les cas tridimensionnels.

Pour un matériau orthotrope les matrices de rigidité et de souplesse s'écrivent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope peut être décrit par les 9 modules indépendants :

- 3 modules d'Young : E_1, E_2, E_3 (E_L, E_T, E_T')
- 3 coefficients de Poisson : $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ ($\nu_{LT}, \nu_{LT'}, \nu_{TT'}$)
- 3 modules de cisaillements : G_{12}, G_{13}, G_{23} ($G_{LT}, G_{LT'}, G_{TT'}$)

Les constantes de rigidité et de souplesse sont liées aux modules d'élasticité par les relations suivantes :

Constantes de souplesse

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \\
 S_{22} &= \frac{1}{E_2} & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} & S_{33} &= \frac{1}{E_3} \\
 S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}} & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Constantes de rigidité

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & C_{12} &= \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{13} &= \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} \\
 C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{23} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\
 C_{44} &= G_{23} & C_{55} &= G_{13} & C_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Avec

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

2.2.3 Comportement du composite en-dehors de ses axes principaux

On a défini le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel exprimé dans les directions principales : un axe suivant la direction des fibres, les autres étant orthogonaux. Cependant, on sait que les stratifiées sont élaborés par couches successives dont la direction des fibres est différente d'une couche à l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est nécessaire de prendre un système d'axes de référence pour l'ensemble du stratifié, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence. On considère donc (figure 2.5) une couche de matériau unidirectionnel de directions principales $(1,2,3) = (x_1, y_2, z_3)$, le plan $(1,2)$ étant confondu avec le plan de la couche, et la direction 1 confondue avec la direction des fibres. Le but est d'établir les propriétés élastiques de la couche, en les exprimant dans le système d'axes de référence $(1',2',3) = (x, y, z)$ du stratifié, la direction des fibres fait un angle θ avec la direction 1'.

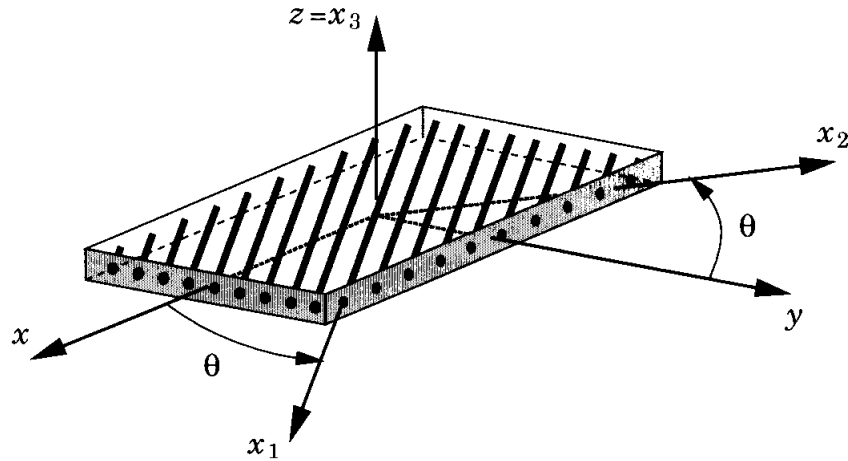


Figure 2.5 Axes principaux et Axes de références d'une couche de stratifié [35]

Les matrices de rigidité C' et de souplesse S' , exprimées dans le système de référence, sont obtenues en appliquant aux matrices de rigidité et de souplesse C et S les relations de changement de base suivantes :

$$C' = T_{\sigma}^{-1} C T_{\varepsilon} \quad (2.14)$$

et

$$S' = T_{\varepsilon}^{-1} S T_{\sigma} \quad (2.15)$$

T_{σ} et T_{ε} sont les matrices de changement de base des contraintes et des déformations respectivement, données par :

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Après le triple produit matriciel, les matrices C' et S' s'écrivent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & R_{16} \\ R_{12} & R_{22} & R_{23} & 0 & 0 & R_{26} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} & 0 & 0 & R_{36} \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & R_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{45} & R_{55} & 0 \\ R_{16} & R_{26} & R_{36} & 0 & 0 & R_{66} \end{bmatrix}$$

avec

$$R_{ij} = C'_{ij} \quad \text{ou} \quad S'_{ij}$$

2.2.4 Equations d'élasticité pour l'état de contraintes planes

En général, les composites stratifiés sont typiquement minces et impliquent un état de contraintes planes. Ce dernier est un état particulier de contraintes à deux dimensions, pour lequel les composantes du tenseur des contraintes sont indépendantes de la coordonnée z . En conséquence, les relations établies dans le cas général se simplifient. La matrice de rigidité réduite, exprimée dans les axes principaux, est donnée par :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

avec

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \\
 Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \nu_{LT}Q_{22} \\
 Q_{66} &= G_{LT}
 \end{aligned}$$

La matrice de rigidité réduite hors axes principaux est donnée par :

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Les composantes de la matrice s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
 \bar{Q}_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)
 \end{aligned}$$

Les relations entre contraintes et déformations, exprimées dans le repère global, sont données sous la forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

2.3 Théories et modèles de structures multicouches

Les théories utilisées pour l'étude des structures composites multicouches sont essentiellement divisées en deux catégories :

- théorie en couche équivalente unique (Equivalent Single Layer Theory) ;
- théorie en couche équivalentes discrètes (Layerwise Theory).

La première catégorie inclue la *Théorie Classique des Stratifiés* (CLT), la *Théorie de la Déformation de Cisaillement de Premier-Ordre* (FSDT), la *Théorie de la Déformation de Cisaillement d'Ordre Supérieur* (HSDT) et d'autres théories. La deuxième catégorie comporte la *Théorie en Couches Indépendantes* (TCI) et la *Théorie de Couches Dépendantes* (TCD). On peut citer les publications de Berthelot (1992) et Reddy (1997) qui présentent ces différentes théories.

Selon Reddy, si le but de l'étude est la détermination de la réponse globale de la structure composite, telles que les déflexions, charges critiques de flambage, fréquences et modes propres, l'étude peut être réalisée de manière assez précise en utilisant les théories en couche équivalente unique (CLT, FSDT, HSDT...). Par contre, lorsque le but de l'étude est associé aux réponses locales, tels que l'identification des zones les plus critiques selon l'épaisseur du stratifié, ou la localisation des zones d'incidence probable d'endommagement, on recommande l'emploi de théories en couches équivalentes discrètes (TCI, TCD...).

2.3.1 Théorie Classique des Stratifiés (CLT)

La *Théorie Classique des Stratifiés* est basée sur les hypothèses cinématiques de *Kirchhoff-Love*, employées pour l'étude de structures du type plaque et coque courbe. D'après cette théorie, une ligne droite et perpendiculaire à la surface moyenne indéformée de la structure, reste droite et perpendiculaire à cette surface, ne changeant pas sa forme dans la direction de l'épaisseur, c'est-à-dire, elle reste inextensible dans cette direction (figure 2.6).

Dans la théorie CLT les effets de déformations des cisaillements transversaux (γ_{xz} et γ_{yz}) et la déformation normale transversale (ε_{zz}), ne sont pas considérés. Les hypothèses supplémentaires sont :

1. les plis sont parfaitement liés les uns aux autres ;
2. les déplacements selon les plis sont continus ;
3. le matériau de chaque pli présente un comportement élastique ;
4. le stratifié est considéré comme mince ;
5. les déformations, les déplacements et les rotations sont petits.

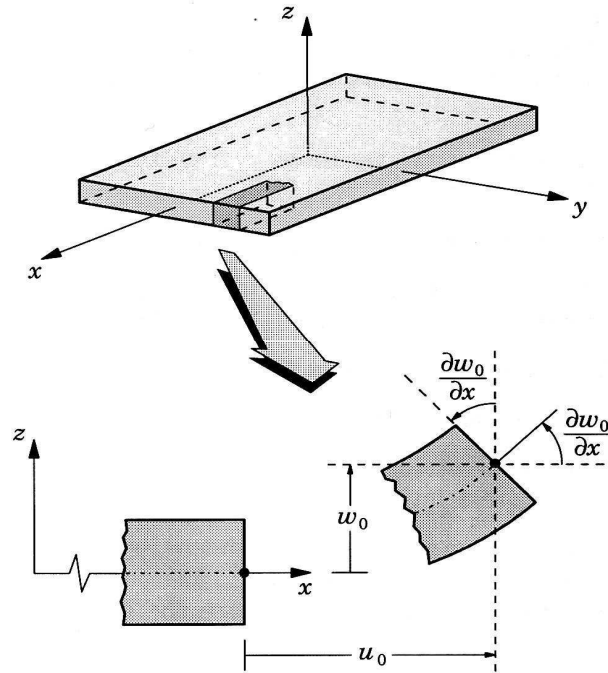


Figure 2.6 Cinématique de Kirchhoff-Love [35]

Le champ de déplacements de la théorie *CLT* est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - zw_{0,x}(x, y, t) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - zw_{0,y}(x, y, t) \\
 w(x, y, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

où (x, y, z) sont les déplacements cartésiens, $(x, y, 0)$ est le plan moyen indéformé, t est le temps, $u(x, y, z, t)$ et $v(x, y, z, t)$ sont, respectivement, les déplacements selon les directions des axes x et y , $w(x, y, t)$ est déplacement transversal selon la direction de l'épaisseur z du stratifié, u_0 , v_0 et w_0 sont, respectivement, les déplacements d'un matériel dans la surface de référence, et $w_{0,x} = \partial w_0 / \partial x$ et $w_{0,y} = \partial w_0 / \partial y$ sont, respectivement, les rotations autour de x et y .

Cette théorie exige la continuité du champ des déplacements, qui doivent être représentés par des fonctions C^1 , c'est-à-dire des fonctions avec dérivées continues. Sur le plan des solutions analytiques, ce fait n'est pas restrictif ; toutefois, dans le cadre des formulations numériques par éléments finis, la formulation des fonctions d'interpolation dans l'espace C^1 est beaucoup plus contraignante par rapport à celles appartenant à l'espace C^0 .

En raison de l'hypothèse de déplacements linéaires et tenant compte du fait que les déformations de cisaillement transverse (CT) ne sont pas prises en compte, la précision de la théorie *CLT* n'est adéquate que dans l'étude des structures minces.

2.3.2 Théorie de la Déformation de Cisaillement de Premier Ordre (FSDT)

Les modèles élaborés selon la théorie *FSDT*, sont basés sur les hypothèses adoptées dans la théorie des plaques de *Mindlin-Reissner*, selon lesquelles une ligne droite et perpendiculaire au plan moyen d'une couche quelconque, reste droite mais pas nécessairement normale à ce plan de référence après la déformation de la structure (Figure 2.7). Le champ de déformations de la théorie *FSDT* est défini selon :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

où ϕ_x et ϕ_y indiquent respectivement les rotations autour des axes y et x .

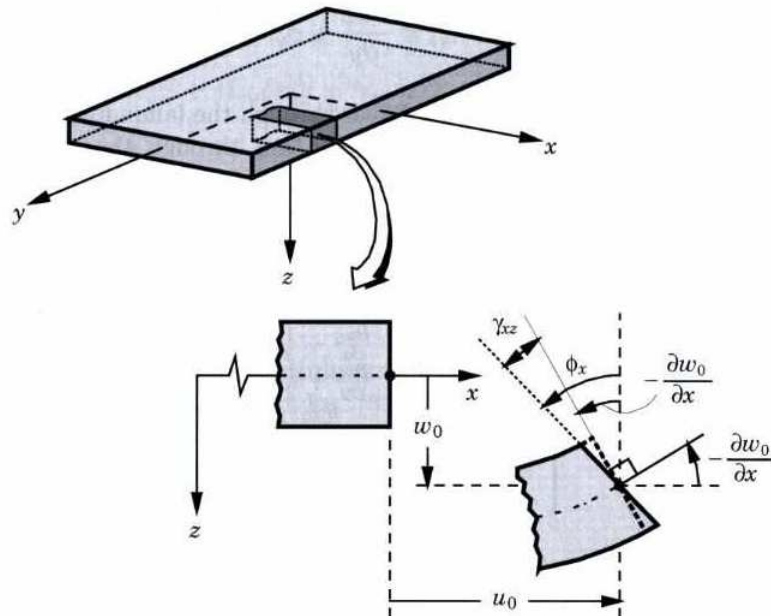


Figure 2.7 Cinématique de Mindlin-Reissner [35]

La théorie *FSDT* suppose que les contraintes de cisaillement transversal (σ_{xz} , σ_{yz}) varient de façon linéaire selon l'épaisseur du stratifié. Pour qu'il ait l'accord de leurs valeurs maximales avec les situations réelles (caractérisées par des distributions paraboliques selon l'épaisseur du stratifié), il est nécessaire d'introduire des facteurs de correction de cisaillement. Cette théorie a besoin de fonctions appartenant à l'espace C^0 et peut être utilisée pour la modélisation des structures minces et modérément épaisses. D'ailleurs, la théorie *FSDT* est considérée comme celle qui fournit la meilleure relation entre capacité de prévision et coût de calcul numérique pour une large gamme d'applications industrielles.

La théorie *FSDT* est également assez précise numériquement pour l'estimation de diverses réponses obtenues dans le domaine de la macromécanique, telles que les déflexions, les fréquences et modes propres et charges critiques de flambage. Toutefois, celle-ci n'est pas assez précise dans la prédiction numérique des fréquences et modes propres d'ordre élevé, et dans la distribution de contraintes selon l'épaisseur du stratifié.

2.3.3 Théorie de la Déformation de Cisaillement d'Ordre Supérieur (HSDT)

Plusieurs auteurs ont proposé des théories plus élaborées pour franchir les limites des théories *CLT* et *FSDT*, parmi lesquelles on a la théorie des déformations de cisaillement d'ordre supérieur *HSDT*. Celle-ci adopte une variation cubique pour le champ des déplacements au long de l'épaisseur du stratifié. Dans cette théorie, il n'est pas nécessaire d'introduire les facteurs de correction de cisaillement, car la distribution des déformations de *CT* ont la forme parabolique le long de l'épaisseur et qui est similaire à la condition réelle prévue par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle.

Le champ des déplacements de la théorie *HSDT*, avec une expansion dans les termes de troisième ordre pour les déplacements (u , v) et de deuxième ordre pour (w), s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^2\psi_x(x, y, t) + z^3\varphi_x(x, y, t) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^2\psi_y(x, y, t) + z^3\varphi_y(x, y, t) \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z\phi_z(x, y, t) + z^2\psi_z(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

où les fonctions ψ_x , ψ_y , ψ_z , ϕ_x et ϕ_y sont dépendantes des coordonnées et considérées comme rotations d'ordre supérieur qui décrivent la déformation d'une ligne normale au plan moyen de référence. Selon cette théorie, après la déformation de la structure, la ligne ne reste pas droite et peut présenter un gauchissement.

L'introduction de ces variables supplémentaires dans la théorie *HSDT* augmente clairement le coût de calcul numérique par rapport aux autres théories présentées préalablement. Ainsi, d'autres formulations ont été développées, tel que la théorie *HSDT* de Reddy. Selon celle-ci, les fonctions ϕ_z et ψ_z intervenant dans l'équation (2.23) sont adoptées nulles. Par contre les fonctions ψ_x , ψ_y , ϕ_x et ϕ_y ne sont pas arbitraires, et doivent assurer que les contraintes de cisaillement transversal s'annulent, sur les faces inférieure et supérieure de la structure composite modélisée. Alors l'expression (2.23) devient :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^3\left(-\frac{4}{3h^2}\right)\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\
 w(x, y, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

De toutes les théories en couche équivalente unique *ESL*, la théorie *FSDT* semble apporter le meilleur compromis entre précision de la solution, économie et simplicité. Cependant, les modèles *ESL* ont des restrictions qui les empêchent d'être utilisés pour la résolution de la gamme entière des problèmes des composites stratifiés. En effet, la précision de la réponse globale fournie par les modèles *ESL* se détériore au fur et à mesure que le stratifié devient plus épais.

D'autre part, les modèles *ESL* sont souvent incapables de décrire avec précision l'état de contrainte et de déformation au niveau du pli proche des zones de discontinuité géométriques et matérielles ou proche de régions avec des chargements très intenses. Dans de tels cas, les théories tridimensionnelles ou l'approche *Layerwise Theory* sont nécessaires pour la résolution de ces problèmes.

2.4 Théorie des plaques selon le modèle *CLT*

Une plaque est un solide tridimensionnel dont une des dimensions, appelée « épaisseur », est petite par rapport aux autres dimensions caractéristiques. Ce solide particulier comporte généralement un plan de symétrie en $z = 0$ (plan Oxy) (Figure 2.8) appelé « surface de référence » ou « surface moyenne » de la plaque. La théorie classique des plaques stratifiées *CLPT* adopte les hypothèses de Kirchhoff. La condition de la section droite qui reste plane et inextensible après déformation est équivalente à ignorer les déformations de cisaillement transverse CT ainsi que la déformation normale transversale. La *CLPT* considère, en plus, que les contraintes normales à la surface de référence (σ_z) sont négligeables dans le volume de la plaque par rapport aux autres composantes.

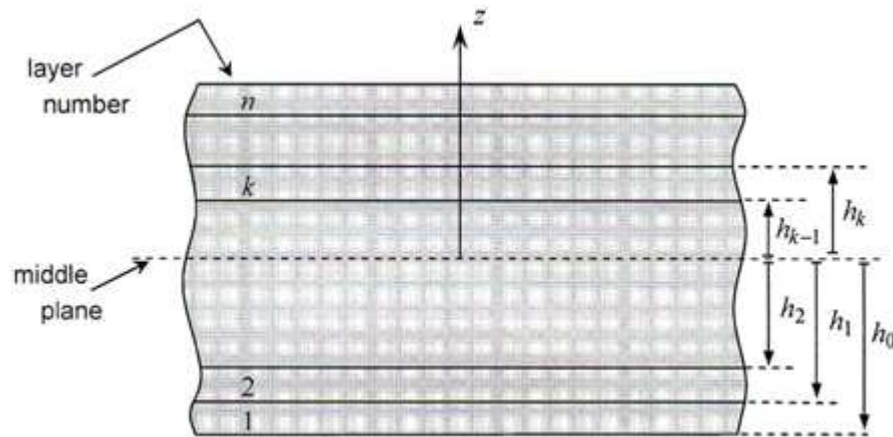


Figure 2.8 Géométrie d'un stratifié à n plis [36]

2.4.1 Variation des contraintes et des déformations dans un stratifié

Selon les hypothèses de Kirchhoff, le champ des déplacements s'écrit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y) \\
 w(x, y) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

Les rotations de la section suivant les axes x et y s'écrivent :

$$\begin{aligned}\phi_x(x, y) &= -z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y(x, y) &= -z \frac{\partial w_0}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.26}$$

Le champ des déformations est donné par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{yz} = 0\end{aligned}\tag{2.27}$$

La combinaison des équations (2.25) et (2.27) conduit à :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{2.28}$$

L'équation (2.28) peut être écrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}\tag{2.29}$$

où les déformations du plan moyen sont :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

et les courbures du plan moyen sont :

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

En substituant l'équation (2.20), qui traduit la variation des déformations à travers l'épaisseur du stratifié, dans l'équation (2.29), les contraintes dans la couche k peuvent être exprimées en fonction des déformations de la couche de référence, des courbures du stratifié et de la coordonnée z par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \right\} \quad (2.32)$$

La matrice de rigidité réduite \bar{Q}_k varie d'une couche à l'autre, il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives du stratifié.

2.4.2 Résultantes des forces et moments dans un stratifié

Les résultantes des forces et moments qui agissent sur un stratifié sont obtenues par intégration des composantes de contrainte à travers l'épaisseur.

2.4.2.1 Résultantes en membranes

Les résultantes en membrane sont définies par :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (2.33)$$

N_x , N_y et N_{xy} sont les résultantes, par unité de longueur, des contraintes normales et de cisaillement dans le plan (x, y) . Elles sont schématisées sur la figure (2.9).

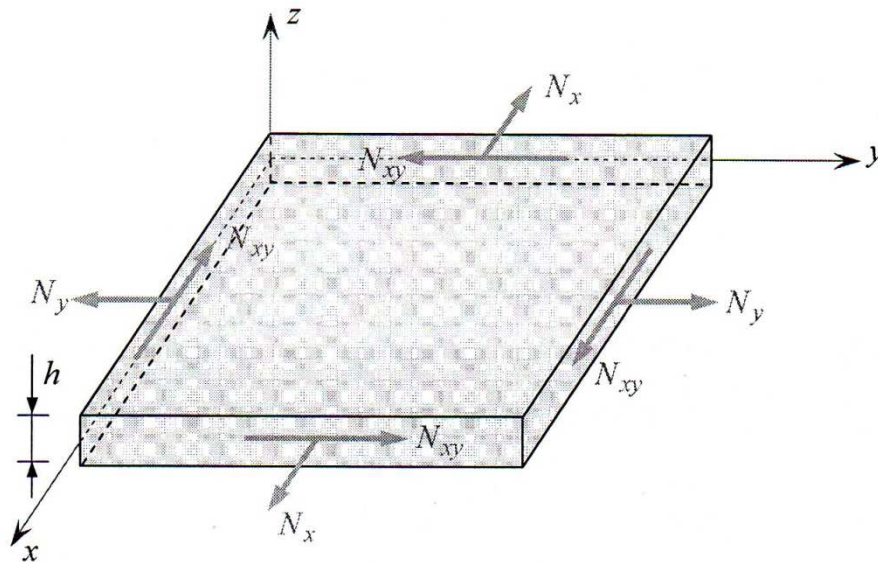


Figure 2.9 Schématisation des résultantes en membrane [36]

La discontinuité des contraintes d'une couche à l'autre conduit à réécrire la relation (2.33) sous la forme :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (2.34)$$

2.4.2.2 Résultantes en cisaillement

Similairement les résultantes en cisaillement sont définies par :

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k dz \quad (2.35)$$

Les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié, elles sont schématisées sur la figure (2.10).

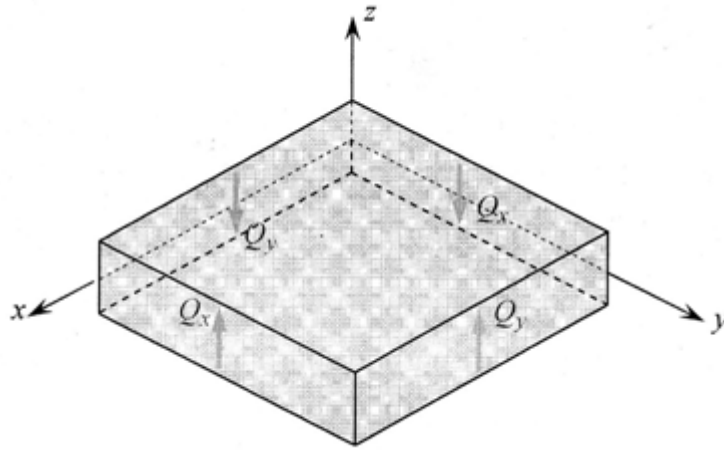


Figure 2.10 Schématisation des résultantes en cisaillement [36]

2.4.2.3 Moments de flexion et de torsion

Les moments de flexion et de torsion agissants sur un élément du stratifié sont définis par :

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (2.36)$$

M_x et M_y sont les moments de flexion et M_{xy} le moment de torsion.

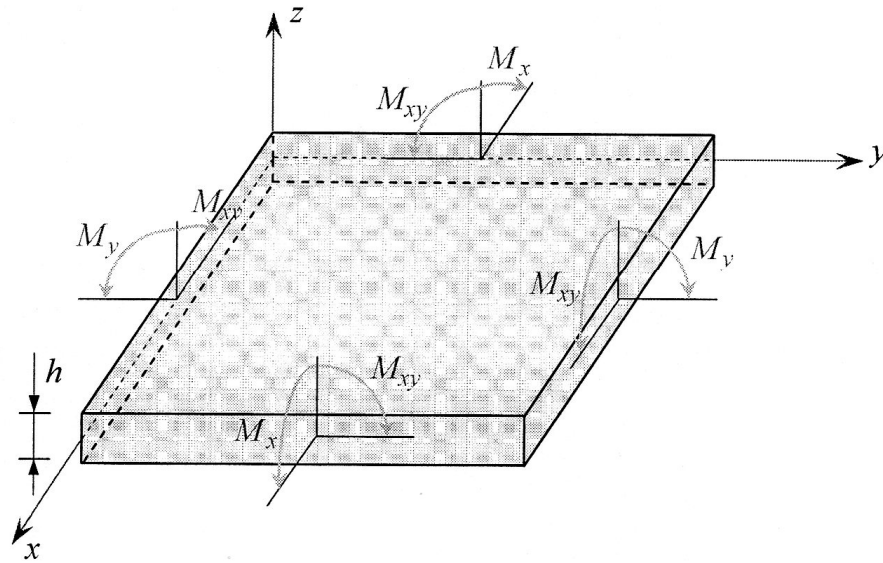


Figure 2.11 Schématisation des moments de flexion et de torsion [36]

2.4.3 Rigidité d'un stratifié

En remplaçant l'équation (2.32) dans l'équation (2.34), les résultantes en membrane sont exprimées en fonction des déformations du plan moyen et des courbures par :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left(\int_{k-1}^k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} dz + \int_{k-1}^k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z dz \right) \quad (2.37)$$

Similairement, en remplaçant l'équation (2.32) dans l'équation (2.36), les moments sont exprimées en fonction des déformations du plan moyen et des courbures par :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left(\int_{k-1}^k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} z dz + \int_{k-1}^k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right) \quad (2.38)$$

Les déformations du plan moyen et les courbures ne sont pas fonction de z , on peut les faire sortir sous le signe de l'intégrale et les équations (2.37) et (2.38) peuvent être écrites comme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

où

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

La matrice A est la matrice de rigidité en membrane, D est la matrice de rigidité en flexion et B la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

2.4.4 Equation du comportement mécanique d'un stratifié

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. La forme matricielle est donnée par :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

ou sous forme contractée

$$\begin{bmatrix} N \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Dans le cas où le stratifié est symétrique, le couplage membrane-flexion-torsion est nul ($B = 0$). La symétrie concerne les propriétés des couches, leurs cotes et leurs orientations.

Divers couplages peuvent être mis en évidence, Le couplage traction-cisaillement provient des termes A_{16} et A_{26} . Le couplage membrane-flexion résulte des termes B_{11} , B_{12} et B_{22} , alors que le couplage membrane-torsion résulte des termes B_{16} et B_{26} . Enfin, le couplage flexion-torsion résulte des coefficients D_{16} et D_{26} .

2.5 Théorie des plaques selon le modèle *FSDT*

Dans cette théorie, on tient compte du cisaillement transverse. Les contraintes dans la couche k s'expriment suivant la relation générale :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Les paramètres \bar{C}_{ij} de la couche k sont donnés par :

$$\begin{aligned}\bar{C}_{44} &= C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta \\ \bar{C}_{45} &= (C_{55} - C_{44}) \sin \theta \cos \theta \\ \bar{C}_{55} &= C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta\end{aligned}\tag{2.44}$$

Compte tenu des expressions (2.35) et (2.43), l'équation des résultantes en cisaillement s'écrit :

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}\tag{2.45}$$

avec

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{C}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \quad i, j = 4, 5$$

Similairement, l'équation constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix}\tag{2.46}$$

avec les courbures et les déformations en cisaillement moyennes qui deviennent :

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

L'équation constitutive peut être écrite sous forme contractée suivante :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_f \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \\ \gamma_c \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Pour tenir compte de la variation quadratique des contraintes de cisaillement transverse à travers l'épaisseur, une amélioration de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse consiste à remplacer les coefficients F_{ij} par de nouveaux coefficients H_{ij} du stratifié :

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

avec

$$H_{ij} = k_{ij} F_{ij}$$

Les paramètres k_{ij} sont des facteurs de correction en cisaillement. En fonction de ces paramètres, on peut avoir diverses théories des stratifiés qui prennent en compte le cisaillement transverse. Dans le cas de plaques orthotropes, on peut prendre la valeur :

$$k_{ij} = \frac{5}{6} \quad i, j = 4, 5$$

D'une manière plus générale, les paramètres k_{ij} peuvent être évalués en considérant des flexions cylindriques respectivement autour des deux directions du plan de la plaque.

Chapitre 3

Vibration et Flambement des Plaques Composites Stratifiées

3.1 Relations fondamentales

Les relations fondamentales des plaques stratifiées sont tirées de la relation fondamentale de la dynamique :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho a_i \quad (3.1)$$

où f_i , a_i et ρ sont respectivement les forces volumiques, les composantes du vecteur accélération et la masse volumique.

L'intégration des équations (3.1) suivant l'épaisseur du stratifié, conduit aux relations fondamentales d'un élément de plaque, relatives aux résultantes de membrane, de cisaillement et aux moments :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p^* &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec

$$p^* = N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q$$

ρ_s est la masse surfacique du stratifié et q la pression surfacique selon l'axe z .

Les équations de l'équilibre statique s'obtiennent des équations précédentes ($a_i = 0$) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p^* &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

En éliminant les résultantes de cisaillement, ces relations peuvent être écrites pour le problème dynamique et le problème statique (second membre nul) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Les relations fondamentales de la théorie classique des stratifiés (CLT) sont obtenues en introduisant l'équation constitutive (2.46) dans les relations (3.4) pour le cas de problèmes de dynamique ou de problèmes de statique. Ces équations, associées aux conditions aux limites, permettent de trouver la solution. La résolution est toutefois complexe et ne peut être menée

de manière analytique que dans quelques cas particuliers. Pour le cas de la vibration et du flambement des plaques ces équations sont découplées : les équations permettant de déterminer la déformée latérale du stratifié sont indépendantes des équations des déplacements en membrane. Une simplification supplémentaire est apportée dans le cas des stratifiés symétriques orthotropes ($B_{ij} = 0$ et $D_{16} = D_{26} = 0$), ces équations s'écrivent alors :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + (2D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = p^* - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

De la même manière on obtient les relations fondamentales pour la théorie FSDT des plaques stratifiées ($F_{45} = F_{54} = 0$):

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - F_{55} k \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) &= 0 \\ D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - F_{44} k \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) &= 0 \\ F_{55} k \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_{44} k \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les équations (3.6) sont trois équations différentielles du second ordre couplées avec les trois inconnus w_0 , ϕ_x et ϕ_y .

3.2 Flambement des plaques orthotropes avec la théorie CLT

Considérant une plaque stratifiée simplement appuyée avec la géométrie et le chargement montrés dans la figure (3.1). Cette plaque est soumise à une compression uniaxiale suivant x et aucune autre charge n'étant exercée. L'équation de flambement se déduit de l'équation (3.5), soit :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + (2D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (3.7)$$

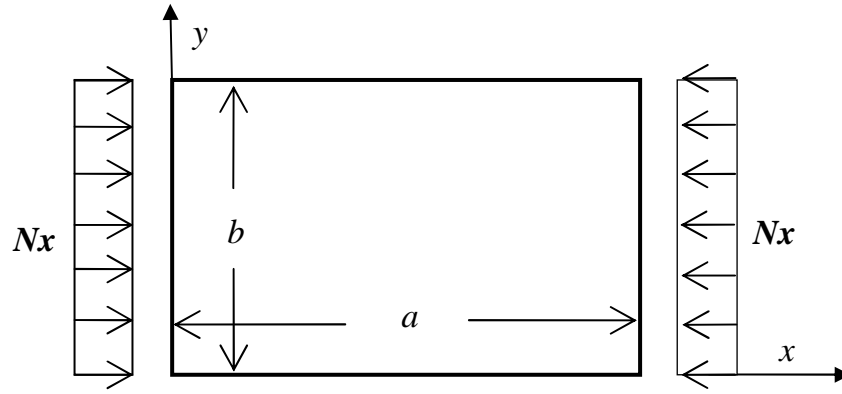


Figure 3.1 *Plaque soumise à une compression uniaxiale*

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 x=0 : \quad & w_0(0, y) = 0 & M_x(0, y) = 0 \\
 x=a : \quad & w_0(a, y) = 0 & M_x(a, y) = 0 \\
 y=0 : \quad & w_0(x, 0) = 0 & M_y(x, 0) = 0 \\
 y=b : \quad & w_0(x, b) = 0 & M_y(x, b) = 0
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Les conditions sont satisfaites avec une solution sous forme de séries doubles de Fourier :

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{3.9}$$

Pour des plaques simplement appuyées, on peut se contenter du premier terme de la série :

$$w_0(x, y) = W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{3.10}$$

où W_{mn} sont les coefficients de déplacements, m et n sont des entiers positifs. En reportant cette expression dans l'équation (3.7), on obtient en posant $N_x = -N$:

$$N = D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + (2D_{12} + 4D_{66}) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{a\pi}{m} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^4 \quad (3.11)$$

La charge critique de flambement N_{cr} correspond aux valeurs de m et n , conduisant aux valeurs les plus faibles de N .

3.3 Flambement des plaques orthotropes avec la théorie FSDT

Considérant une plaque stratifiée simplement appuyée avec la géométrie et le chargement montrés dans la figure (3.1). Cette plaque est soumise à une compression uniaxiale suivant x et aucune autre charge n'étant exercée. L'équation de flambement selon la théorie *HSDT* se déduit de l'équation (3.6), on obtient en posant $N_x = -N$:

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - F_{55} k \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) &= 0 \\ D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - F_{44} k \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) &= 0 \\ F_{55} k \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_{44} k \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - N \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Les conditions aux limites de la plaque sont les mêmes que celles adoptées pour *CLT* :

$$\begin{aligned} x=0 : \quad w_0(0, y) &= 0 & M_x(0, y) &= 0 \\ x=a : \quad w_0(a, y) &= 0 & M_x(a, y) &= 0 \\ y=0 : \quad w_0(x, 0) &= 0 & M_y(x, 0) &= 0 \\ y=b : \quad w_0(x, b) &= 0 & M_y(x, b) &= 0 \end{aligned}$$

Les séries doubles de Fourier suivantes sont considérées pour représenter w_0 , ϕ_x et ϕ_y

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.13)$$

$$\phi_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{xmn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.14)$$

$$\phi_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{ymn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.15)$$

où W_{mn} , ϕ_{xmn} et ϕ_{ymn} sont les coefficients de déplacements des séries de Fourier, m et n sont des entiers positifs. Pour les plaques en appuis simples, il est suffisant de considérer un seul terme des séries avec m et n variant dans chaque équation. La substitution des équations (3.12) à (3.14) dans l'équation (3.11) donne le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} -D_{11}\alpha^2 - D_{66}\beta^2 - F_{55}k & -D_{12}\alpha\beta - D_{66}\alpha\beta & -F_{55}k\alpha \\ -D_{12}\alpha\beta - D_{66}\alpha\beta & -D_{22}\beta^2 - D_{66}\alpha^2 - F_{44}k & -F_{44}k\beta \\ -F_{55}k\alpha & -F_{44}k\beta & N\alpha^2 - F_{55}k\alpha^2 - F_{44}k\beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ \phi_{xmn} \\ \phi_{ymn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

où $\alpha = m\pi/a$ et $\beta = n\pi/b$.

En définissant

$$\begin{aligned} C_1 &= -D_{11}\alpha^2 - D_{66}\beta^2 - F_{55}k \\ C_2 &= -D_{12}\alpha\beta - D_{66}\alpha\beta \\ C_3 &= -F_{55}k\alpha \\ C_4 &= -D_{22}\beta^2 - D_{66}\alpha^2 - F_{44}k \\ C_5 &= -F_{44}k\beta \end{aligned}$$

le système d'équations précédent se simplifie :

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_2 & C_4 & C_5 \\ C_3 & C_5 & N\alpha^2 + \alpha C_3 + \beta C_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ \phi_{xmn} \\ \phi_{ymn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

La recherche de solutions non-triviales conduit à :

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_2 & C_4 & C_5 \\ C_3 & C_5 & N\alpha^2 + \alpha C_3 + \beta C_5 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.17)$$

La résolution de (3.17) pour N donne :

$$N = \frac{C_1 C_5^2 + \alpha C_3 C_2^2 + \beta C_5 C_2^2 + C_4 C_3^2 - \alpha C_1 C_3 C_4 - \beta C_1 C_4 C_5 - 2C_2 C_3 C_5}{\alpha^2 (C_1 C_4 - C_2^2)} \quad (3.18)$$

La charge critique de flambement correspond aux valeurs de m et n , conduisant aux valeurs les plus faibles de N .

3.4 Vibration des plaques orthotropes avec la théorie CLT

L'analyse de la vibration des plaques composites consiste à rechercher les fréquences propres et les modes de vibration. Considérant une plaque stratifiée simplement appuyée avec la configuration montrée dans la figure (3.2). Pour le cas de stratifiés orthotropes (stratifié symétrique pour lequel $D_{16} = D_{26} = 0$), et en l'absence de charges latérales, l'équation de vibration libre se déduit de la relation fondamentale de mouvement (3.5), soit :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + (2D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (3.19)$$

Dans le cas d'appuis simples, les conditions aux frontières sont données par les relations (3.8). Ces conditions et l'équation de mouvement sont satisfaites avec une solution sous la forme suivante :

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(\omega_{mn} t) \quad (3.20)$$

où ω_{mn} est la fréquence naturelle de vibration. Pour les plaques en appuis simples, il est suffisant de considérer un seul terme de la série.

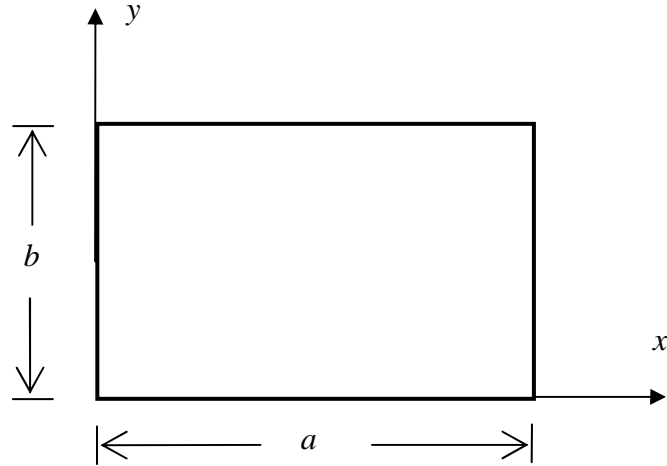


Figure 3.2 Paramètres utilisés pour une plaque en vibration libre

$$w_0(x, y, t) = W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(\omega_{mn} t) \quad (3.21)$$

En reportant cette expression dans l'équation (3.19), il vient :

$$\left[D_{11} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + (2D_{12} + 4D_{66}) \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + D_{22} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \rho_s \omega_{mn}^2 \right] W_{mn} = 0 \quad (3.22)$$

Une valeur non nulle de W_{mn} est obtenue si le coefficient de W_{mn} est nul, d'où l'expression des fréquences propres :

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{a^4 \rho_s} \left[D_{11} m^4 + (2D_{12} + 4D_{66}) m^2 n^2 (a/b)^2 + D_{22} n^4 (a/b)^4 \right] \quad (3.23)$$

La fréquence fondamentale correspond à $m = n = 1$ et s'exprime suivant :

$$\omega_{11}^2 = \frac{\pi^4}{a^4 \rho_s} \left[D_{11} + (2D_{12} + 4D_{66}) (a/b)^2 + D_{22} (a/b)^4 \right] \quad (3.24)$$

L'étude comparative des fréquences et modes de vibration entre un matériau isotrope et un autre orthotrope montre qu'il n'y a pas de direction privilégiée dans le cas de la plaque

isotrope (mêmes fréquences propres pour $m = 1, n = 2$ et $m = 2, n = 1$, etc.). Par contre, dans le cas de la plaque orthotrope, par exemple, le 2^e mode correspond à $m = 1$ et $n = 2$, alors que $m = 2$ et $n = 1$ correspond au 3^e ou 4^e mode, etc.

3.5 Vibration des plaques orthotropes avec la théorie FSDT

Dans le cas où le cisaillement transverse est pris en compte, les déplacements d'un point à l'instant t sont définis par les trois fonctions w_0 , ϕ_x et ϕ_y . Considérant une plaque stratifiée simplement appuyée avec la géométrie montrée dans la figure (3.2). L'équation des vibrations libres selon la théorie *FSDT* se déduit de la relation fondamentale de mouvement (3.6), soit :

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - F_{55} k \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) &= 0 \\ D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - F_{44} k \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) &= 0 \\ F_{55} k \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_{44} k \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dans le cas d'appuis simples, les conditions aux frontières sont données par les relations (3.8). Ces conditions et l'équation de mouvement sont satisfaites avec une solution sous la forme de séries doubles de Fourier :

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(\omega_{mn} t) \quad (3.26)$$

$$\phi_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{xmn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(\omega_{mn} t) \quad (3.27)$$

$$\phi_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{ymn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(\omega_{mn} t) \quad (3.28)$$

où W_{mn} , ϕ_{xmn} et ϕ_{ymn} sont les coefficients de déplacements des séries de Fourier, m et n sont des entiers positifs. Pour les plaques en appuis simples, il est suffisant de considérer un seul

terme des séries avec m et n variant dans chaque équation. La substitution des équations (3.26) à (3.28) dans l'équation (3.25) donne le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} -F_{55}k\alpha & -D_{11}\alpha^2 - D_{66}\beta^2 - F_{55}k & -D_{12}\alpha\beta - D_{66}\alpha\beta \\ -F_{44}k\beta & -D_{12}\alpha\beta - D_{66}\alpha\beta & -D_{22}\beta^2 - D_{66}\alpha^2 - F_{44}k \\ \rho_s\omega^2 - F_{55}k\alpha^2 - F_{44}k\beta^2 & -F_{55}k\alpha & -F_{44}k\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ \phi_{xmn} \\ \phi_{ymn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

où $\alpha = m\pi/a$ et $\beta = n\pi/b$.

En définissant

$$\begin{aligned} C_1 &= -F_{55}k\alpha \\ C_2 &= -D_{11}\alpha^2 - D_{66}\beta^2 - F_{55}k \\ C_3 &= -D_{12}\alpha\beta - D_{66}\alpha\beta \\ C_4 &= -F_{44}k\beta \\ C_5 &= -D_{22}\beta^2 - D_{66}\alpha^2 - F_{44}k \end{aligned}$$

le système d'équations précédent se simplifie :

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_4 & C_3 & C_5 \\ \rho_s\omega^2 + \alpha C_1 + \beta C_4 & C_1 & C_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ \phi_{xmn} \\ \phi_{ymn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

La recherche de solutions non-triviales conduit à :

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_4 & C_3 & C_5 \\ \rho_s\omega^2 + \alpha C_1 + \beta C_4 & C_1 & C_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.30)$$

La résolution de (3.30) pour ω_{mn} donne :

$$\omega_{mn}^2 = \frac{C_5 C_1^2 + \alpha C_1 C_3^2 + \beta C_4 C_3^2 + C_2 C_4^2 - \alpha C_1 C_2 C_5 - \beta C_2 C_4 C_5 - 2 C_1 C_3 C_4}{\rho_s (C_2 C_5 - C_3^2)} \quad (3.31)$$

La fréquence fondamentale correspond à $m = n = 1$.

3.6 Analyse et modélisation des composites par éléments finis

La modélisation physique de systèmes mécaniques résulte généralement des équations différentielles partielles qui ne peuvent pas être résolues analytiquement ou qui n'ont pas une solution exacte, pour raisons de complexité du domaine discrétisé du problème ou des conditions aux limites. Ainsi, une méthode numérique doit être employée pour la solution approximée du problème physique. La Méthode des Éléments Finis *MEF* est souvent considérée comme la méthode la plus appropriée pour des études de cette nature.

La *MEF* est devenue un important outil d'analyse dans les projets modernes d'ingénierie, surtout après le développement des microordinateurs modernes. Aujourd'hui, cette méthode est utilisée avec succès sur nombreuses applications, telles que dans les problèmes de mécanique des structures et solides, d'endommagement, de fracture, de transfert de chaleur, d'électromagnétisme, d'acoustique et mécanique des fluides. Plusieurs softwares d'éléments finis, tels que : *Ansys*[®], *Nastran*[®], *Abaqus*[®] et *Comsol Multiphysics*[®] sont largement employés pour la modélisation numérique des structures.

3.6.1 Equation dynamique en éléments finis d'une structure stratifiée

En considérant l'équilibre dynamique d'une structure stratifiée où l'énergie potentiel total doit être stationnaire, on déduit l'équation dynamique d'une structure stratifiée comme :

$$M\ddot{U} + KU = R \quad (3.32)$$

où M et K sont les matrices de masse et de rigidité ; R est le vecteur des charges extérieures ; et U , \ddot{U} sont les vecteurs déplacements et accélérations de l'assemblage des éléments finis. Dans l'analyse vibratoire, l'amortissement de la structure est généralement pris en compte par l'introduction de l'amortissement visqueux dans lequel les forces dépendent de la vitesse. dans ce cas l'énergie dissipée par la structure prend une forme quadratique :

$$U_a = \frac{1}{2} \dot{U}^T C \dot{U} \quad (3.33)$$

où C est la matrice de l'amortissement de la structure, l'équation dynamique de la structure stratifiée devient ainsi :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R \quad (3.34)$$

Dans la pratique, il n'est pas possible de déterminer les paramètres de l'amortissement pour l'assemblage général des éléments finis. Pour cette raison, la matrice d'amortissement est généralement construite en utilisant les matrices masse et rigidité de la structure et en considérant les résultats expérimentaux obtenus de l'amortissement de la structure ou la modélisation mathématique de l'amortissement.

3.6.2 Le problème des vibrations libres

L'équation de vibrations libres avec amortissement négligé est donnée sous forme matricielle par la relation suivante :

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad (3.35)$$

Quand la structure vibre, les déplacements sont harmoniques et peuvent être exprimés sous la forme suivante :

$$U = \phi (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (3.36)$$

où ϕ est un vecteur d'ordre n , ω est la fréquence des vibrations harmoniques, et A et B sont dépendants des conditions initiales au temps $t = 0$. En substituant l'équation (3.36) dans (3.35) on obtient :

$$[K]\{\phi_i\} - \omega_i^2 [M]\{\phi_i\} = 0 \quad (3.37)$$

C'est l'équation généralisée du problème aux valeurs propres. La résolution de cette équation conduit aux n solutions propres :

$$(\omega_1^2, \phi_1), (\omega_2^2, \phi_2), \dots, (\omega_n^2, \phi_n)$$

où ω_i sont les valeurs propres correspondant aux fréquences naturelles de vibration et ϕ_i les vecteurs propres correspondant aux modes de vibration.

3.6.3 Le problème de flambement

L'analyse aux valeurs propres du flambement est une forme linéaire de la formulation de la non-linéarité géométrique. Elle très pratique pour l'estimation des limites de la stabilité élastique. La configuration non déformée du solide est notée Ω et son contour par Γ . Les déformations infinitésimales sont définies en termes des déplacements par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.38)$$

qui sont une simplification des déformations de Green-Lagrange définies par :

$$E_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}(u_{\alpha,i} \times u_{\alpha,j}) \quad (3.39)$$

La relation contraintes-déformations est :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.40)$$

où σ_0 est l'état de contrainte préexistante, C est le tenseur des modules élastiques du matériau composite. L'équilibre entre σ_0 et les forces de tractions correspondantes $T_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0 n_j$ conduit à :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^0 (v_{i,j} + v_{j,i}) dV = \int_{\Gamma} T_{ij}^0 v_i dA \quad \text{pour tous } v_i \in E(\Omega) \quad (3.41)$$

où $E(\Omega)$ est l'espace des perturbations cinématiquement admissible, quand la configuration de référence est libre des contraintes initiales, alors l'énergie potentiel est définie par :

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV - \int_{\Gamma} T_i u_i dA \quad (3.42)$$

où T sont les tractions extérieures sur le contour, Ici on prend T comme T_{cr} , i.e., les tractions extérieures critiques qui vont conduire au flambement. La solution est obtenue par la minimisation de l'énergie potentielle. Quand la configuration de référence n'est pas libre d'un état de contrainte, donc le travail effectué par σ_0 dû aux termes des déformations non linéaires ne peut pas être négligé. L'expression de l'énergie potentielle devient alors :

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda \sigma_{ij}^0 u_{\alpha,i} u_{\alpha,j} dV \quad (3.43)$$

Le premier intégral dans l'équation précédente représente l'énergie de déformation interne et le deuxième terme représente le travail effectué par les contraintes initiales dû aux termes de déformations non linéaires. Le travail effectué par σ_0 dû aux termes de déformations linéaires est annulé par le travail effectué par T^0 selon l'équation (3.42). La solution exacte de ce problème est obtenue par la minimisation de l'énergie potentielle totale Π . Ca se traduit par :

$$\partial \Pi = 0 \quad (3.44)$$

ceci conduit à la formulation généralisée en éléments finis qui peut être écrite sous la forme :

$$[K] \{\phi_i\} - \lambda_i [K_g] \{\phi_i\} = 0 \quad (3.45)$$

où K est la matrice de rigidité élastique, K_g est la matrice de rigidité géométrique et λ_i et ϕ_i sont les valeurs propres et les vecteurs propres du problème de flambement.

3.7 Etude comparative entre les théories CLT, FSDT et la méthode MEF

Une étude comparative entre les théories *CLT*, *FSDT* et la formulation en éléments finis *MEF* a été menée sur des plaques avec des dimensions variées. Trois cas de stratifiés symétriques avec différentes séquences d'empilement ont été considérés. L'étude concerne aussi bien le problème de vibrations libres que celui de l'instabilité géométrique. Les simulations numériques de la méthode *MEF* ont été effectuées avec le logiciel *Ansys*[®]. L'élément coque *SHELL99* pour les multicouches a été employé, cet élément a huit nœuds et six degrés de liberté par nœud, il utilise la théorie classique des stratifiés avec prise en compte du cisaillement transverse. Les conditions aux limites utilisées pour les plaques simplement appuyées sont montrées dans les figures (3.3), pour le problème de flambement, et (3.4), pour le problème des vibrations libres.

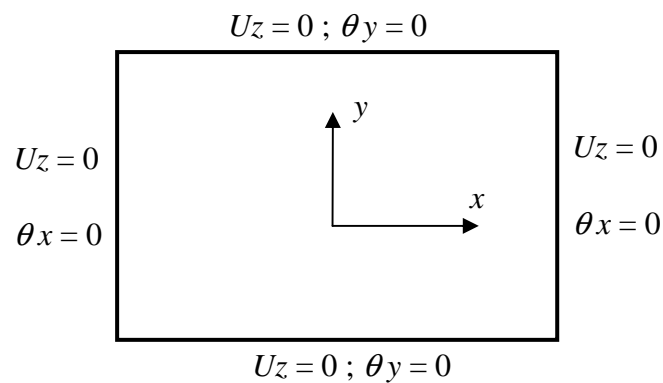


Figure 3.3 Conditions aux limites, plaque simplement appuyée (flambement)

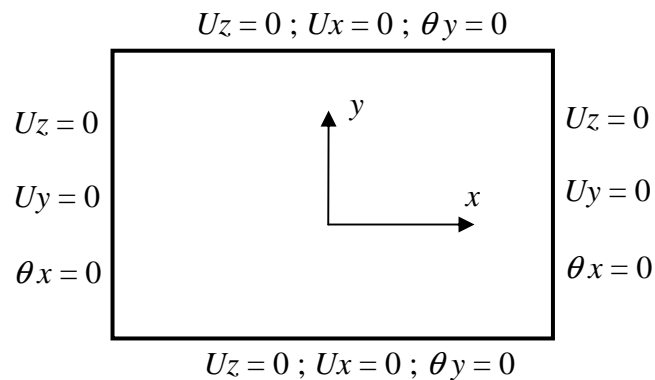


Figure 3.4 Conditions aux limites, plaque simplement appuyée (vibration)

Les stratifiés utilisés dans cette étude sont :

- Stratifié **A** ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) : c'est un stratifié croisé symétrique avec trois couches, il a un comportement orthotrope et un nombre de couches impaire ;
- Stratifié **B** $[(0^\circ/90^\circ)_3]_S$: c'est un stratifié croisé symétrique avec douze couches, il a un comportement orthotrope et un nombre de couches paire ;
- Stratifié **C** $[(0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ)_2]_S$: c'est un stratifié quasi-isotrope avec seize couches, il a un comportement qui se rapproche du stratifié orthotrope (les coefficients D_{16} et D_{26} sont très petits).

Les couches des trois stratifiés **A**, **B** et **C** sont constituées du matériau à fibres Prepeg unidirectionnelles Graphite/Epoxy **NTC-301** dont les propriétés sont rapportées dans le tableau (3.1).

Tableau 3.1 Propriétés du matériau NTC-301 Graphite/Epoxy

Propriété et symbole	Valeur	Unités
E_1 ; Module d'Young dans la direction de la fibre	113.9	GPa
E_2 ; Module d'Young dans la direction transversale	7.9	GPa
E_3 ; Module d'Young hors plan	7.9	GPa
ν_{12} ; Coefficient de Poisson dans le plan	0.28	
ν_{23} ; Coefficient de Poisson à travers l'épaisseur	0.40	
ν_{21} ; Coefficient de Poisson dans le plan	0.02	
G_{12} ; Module de cisaillement dans le plan	3.1	GPa
G_{23} ; Module de cisaillement hors plan	2.8	GPa
G_{13} ; Module de cisaillement hors plan	3.1	GPa
h_0 ; Epaisseur d'un pli unitaire	0.139	mm
ρ ; Densité	1480	Kg/m ³

3.7.1 Flambement des plaques orthotropes simplement appuyées

Une comparaison entre les théories *CLT*, *FSDT* et la méthode *MEF* a été réalisée pour le problème de flambement. Pour cela, on a procédé à la recherche des charges critiques de flambement d'une plaque stratifiée carrée simplement appuyée en fonction du rapport largeur-sur-épaisseur de la plaque ($a / h = 100, 50, 20, 10$) qui représente les trois catégories de plaques, à savoir : minces, modérément épaisses et épaisses. La plaque stratifiée est soumise à une compression uniaxiale selon la direction x . Il a été retenu un maillage de 10×10 pour les plaques minces et 20×20 pour les deux autres catégories.

Tableau 3.2 Charges critiques de flambement, plaque simplement appuyée, stratifié A

a / h	N_{cr} (KN)		
	CLT	FSDT	ANSYS
100	4.7	4.7	4.7
50	19.0	18.8	18.8
20	119.3	109.7	109.6
10	477.3	354.7	356.1

Tableau 3.3 Charges critiques de flambement, plaque simplement appuyée, stratifié B

a / h	N_{cr} (KN)		
	CLT	FSDT	ANSYS
100	18.8	18.8	18.9
50	75.5	74.8	75.5
20	471.9	445.7	447.5
10	1887.8	1525.6	1531.3

Les résultats de cette étude de flambement sont présentés dans les tableaux 3.2, 3.3 et 3.4 pour les trois stratifiés A, B et C respectivement. En outre, les figures 3.5, 3.6, 3.7 et 3.8 montrent les quatre premiers modes de flambement de la plaque mince dans le cas du stratifié B.

Tableau 3.4 Charges critiques de flambement, plaque simplement appuyée, stratifié C

a / h	N_{cr} (KN)		
	CLT	FSDT	ANSYS
100	31.5	31.5	31.4
50	126.1	124.8	115.9
20	788.4	735.8	683.0
10	3153.5	2447.2	2268.5

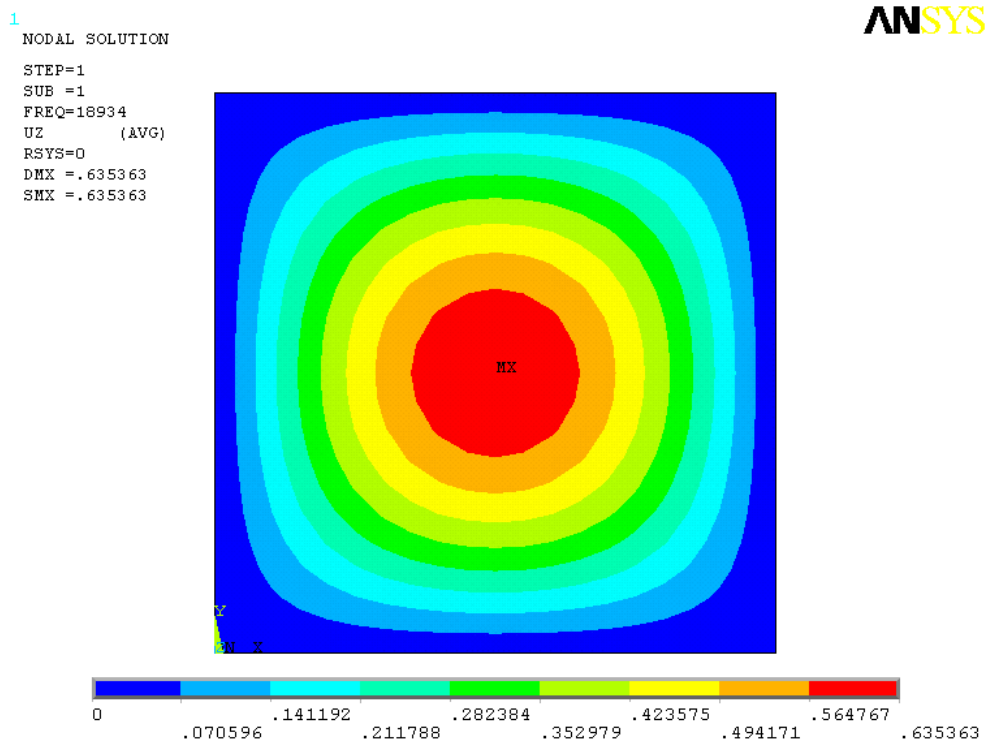


Figure 3.5 Premier mode de flambement, plaque mince, stratifié B

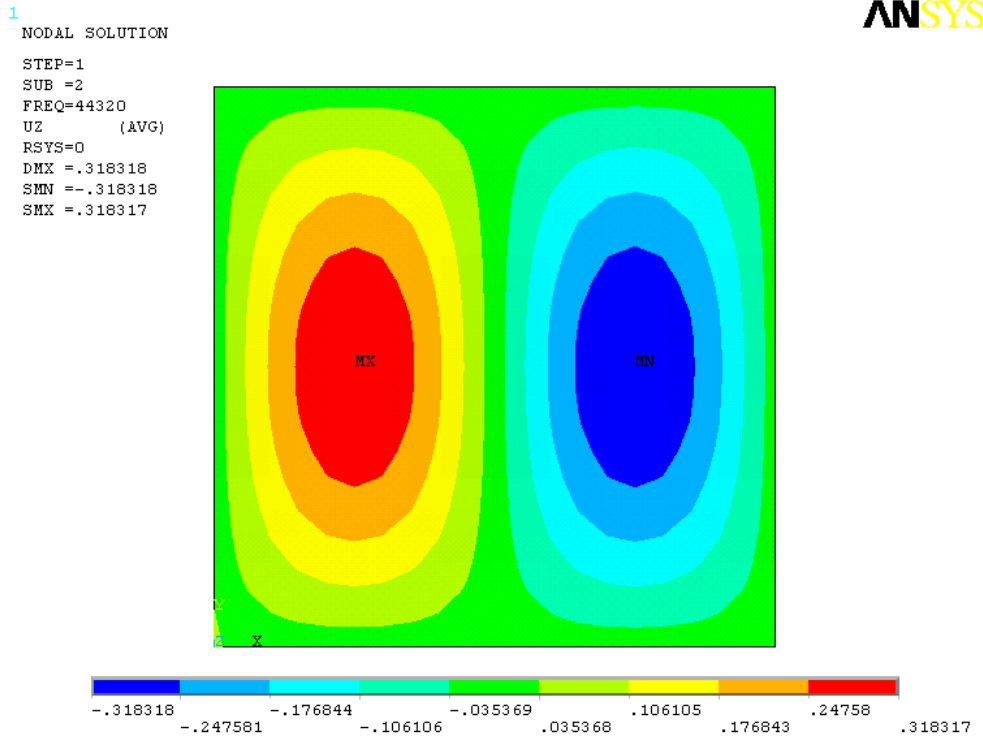


Figure 3.6 Deuxième mode de flambement, plaque mince, stratifié B

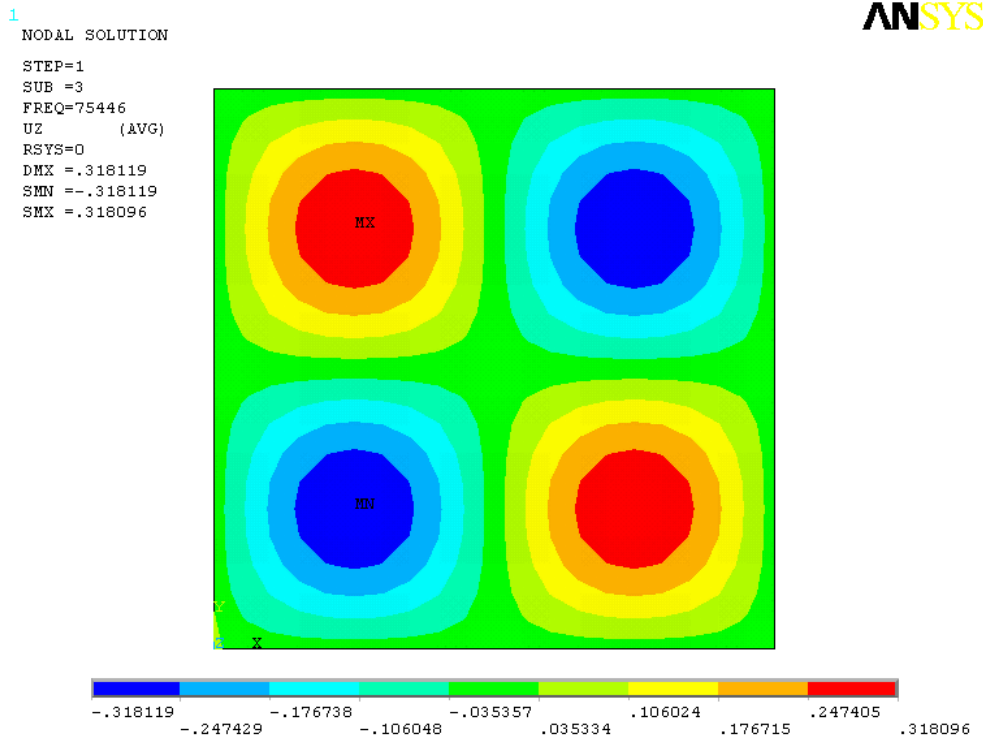


Figure 3.7 Troisième mode de flambement, plaque mince, stratifié B

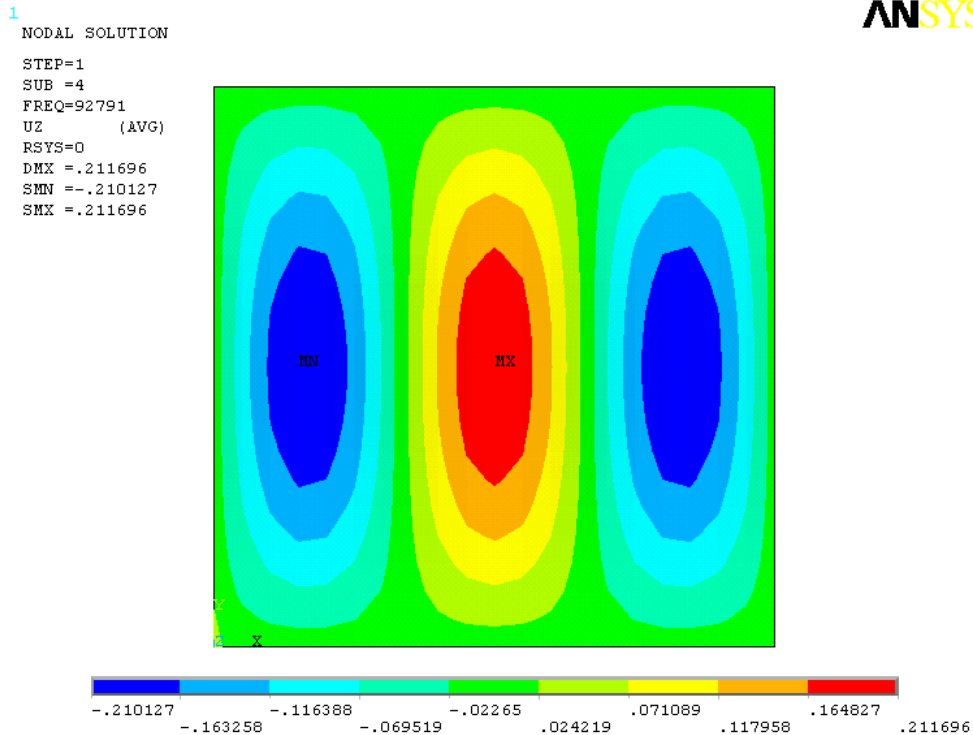


Figure 3.8 Quatrième mode de flambement, plaque mince, stratifié B

3.7.2 Vibration libre des plaques orthotropes simplement appuyées

Le comportement vibratoire de plaques carrées en stratifiés croisés symétriques et en stratifiés quasi-isotrope est étudié dans cette section. L'étude concerne la variation des fréquences de pulsation propres en fonction du rapport largeur-sur-épaisseur de la plaque ($a/h = 100, 50, 20, 10$) pour les cas des théories *CLT*, *FSDT* et la méthode *MEF*. La variation du rapport largeur-sur-épaisseur couvre les catégories des plaques minces ($a/h = 100, 50$), des plaques modérément épaisses ($a/h = 20$) et des plaques épaisses ($a/h = 10$). L'analyse porte sur le cas de plaques composites stratifiées simplement appuyées. La solution a été recherchée, pour la méthode numérique (logiciel Ansys®), en utilisant un maillage de 10×10 pour les plaques minces et 20×20 pour les plaques modérément épaisses et épaisses.

Les quatre premières fréquences propres de cette étude sont présentées dans les tableaux 3.5, 3.6 et 3.7 pour les trois stratifiés A, B et C respectivement. En outre, les figures 3.9, 3.10, 3.11 et 3.12 montrent les quatre premiers modes de flambement de la plaque mince dans le cas du stratifié B.

Tableau 3.5 Les quatre premières fréquences propres du stratifié A

a/h	ω_{mn}	$\omega \times 10^3$ (rad/sec)		
		CLT	FSDT	ANSYS
100	ω_{11}	2.09	2.09	2.09
	ω_{12}	3.41	3.41	3.41
	ω_{13}	6.21	6.21	6.20
	ω_{21}	7.63	7.62	7.58
50	ω_{11}	8.38	8.37	8.32
	ω_{12}	13.63	13.61	13.55
	ω_{13}	24.86	24.81	24.66
	ω_{21}	30.54	30.32	29.69
20	ω_{11}	52.40	51.84	50.29
	ω_{12}	85.20	84.40	82.20
	ω_{13}	155.42	153.41	147.78
	ω_{21}	190.89	182.66	163.62
10	ω_{11}	209.62	201.06	181.34
	ω_{12}	340.97	328.71	300.00
	ω_{13}	621.68	591.33	489.84
	ω_{21}	763.57	653.02	521.15

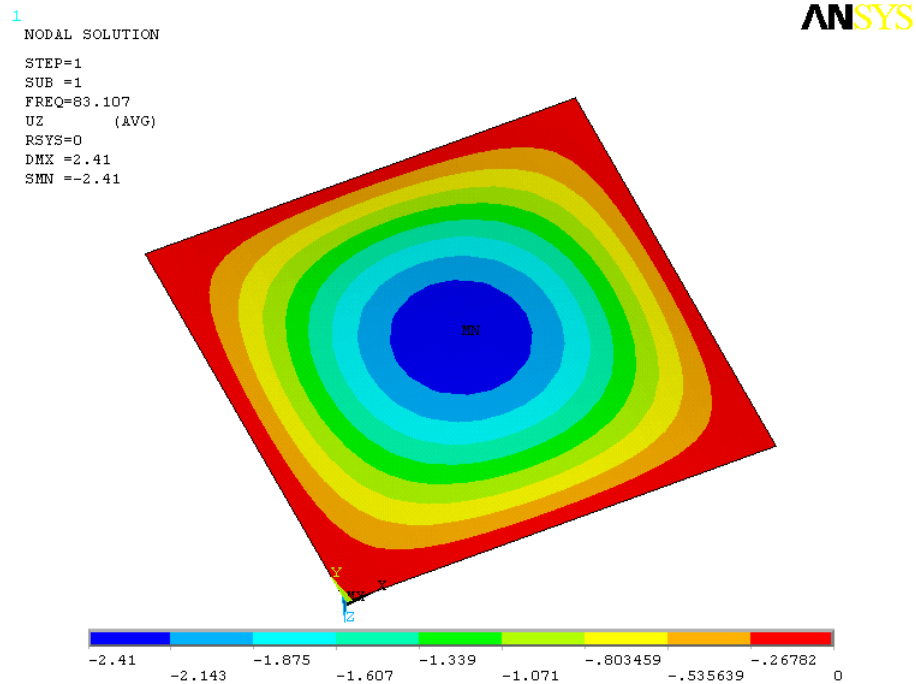


Figure 3.9 Premier mode de vibration, plaque mince, stratifié B

Tableau 3.6 Les quatre premières fréquences propres du stratifié B

a / h	ω_{mn}	$\omega \times 10^3$ (rad/sec)		
		CLT	FSDT	ANSYS
100	ω_{11}	0.52	0.52	0.52
	ω_{12}	1.31	1.31	1.33
	ω_{21}	1.60	1.59	1.59
	ω_{22}	2.08	2.07	2.08
50	ω_{11}	2.08	2.07	2.08
	ω_{12}	5.27	5.21	5.27
	ω_{21}	6.41	6.29	6.28
	ω_{22}	8.32	8.16	8.20
20	ω_{11}	13.00	12.63	12.69
	ω_{12}	32.94	30.67	31.02
	ω_{21}	40.09	35.94	35.92
	ω_{22}	52.02	46.74	43.05
10	ω_{11}	52.02	46.74	46.95
	ω_{12}	131.75	103.88	104.72
	ω_{21}	160.38	114.47	114.51
	ω_{22}	208.07	149.22	149.78

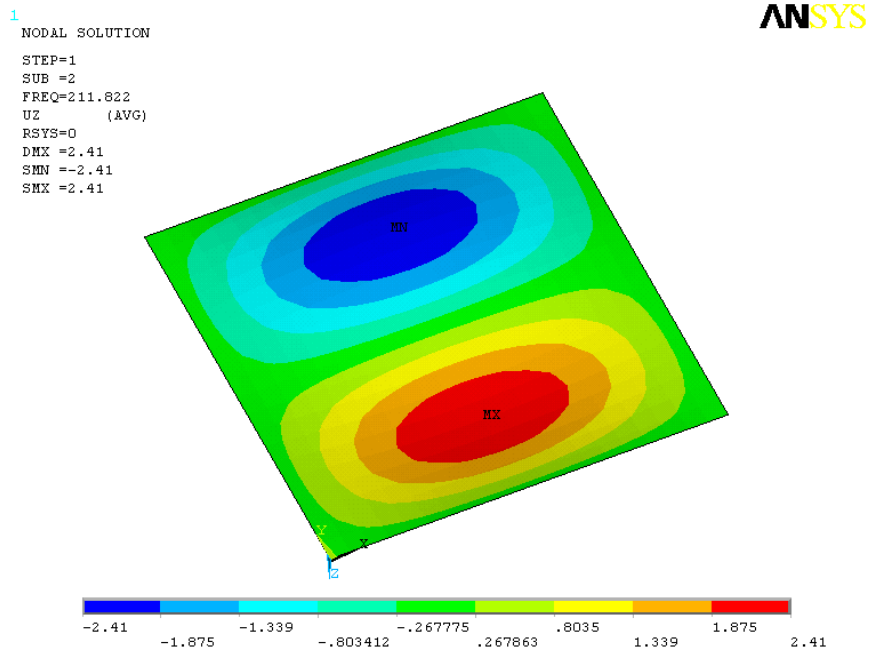


Figure 3.10 Deuxième mode de vibration, plaque mince, stratifié B

Tableau 3.7 Les quatre premières fréquences propres du stratifié C

a/h	ω_{mn}	$\omega \times 10^3$ (rad/sec)		
		CLT	FSDT	ANSYS
100	ω_{11}	0.43	0.43	0.43
	ω_{12}	1.09	1.08	1.08
	ω_{21}	1.17	1.17	1.17
	ω_{22}	1.74	1.73	1.73
50	ω_{11}	1.74	1.73	1.73
	ω_{12}	4.36	4.28	4.28
	ω_{21}	4.72	4.61	4.65
	ω_{22}	6.99	6.78	6.82
20	ω_{11}	10.92	10.43	10.54
	ω_{12}	27.29	24.50	25.04
	ω_{21}	29.49	26.01	26.82
	ω_{22}	43.69	37.12	38.41
10	ω_{11}	43.69	37.12	38.45
	ω_{12}	109.16	77.96	83.00
	ω_{21}	117.95	80.71	86.78
	ω_{22}	174.76	109.65	118.90

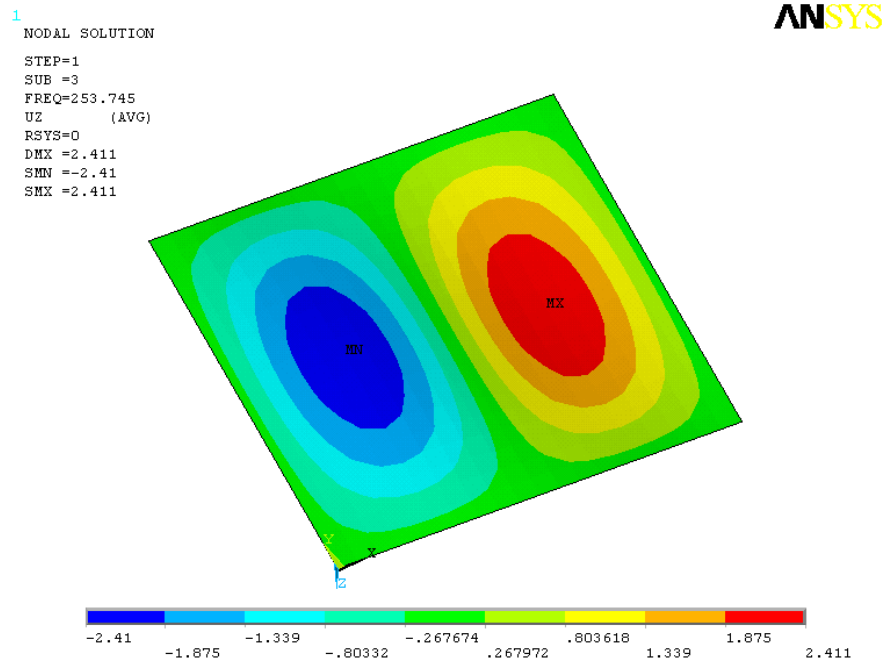


Figure 3.11 Troisième mode de vibration, plaque mince, stratifié B

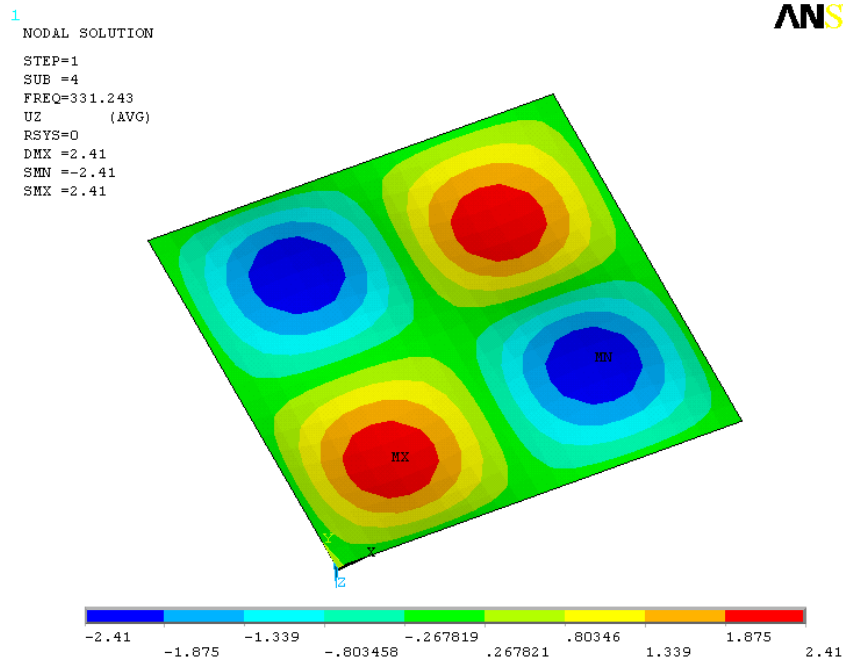


Figure 3.12 Quatrième mode de vibration, plaque mince, stratifié B

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les deux théories *CLT*, *FSDT* et la méthode *MEF* pour le calcul de la charge de flambement et les fréquences propres des plaques stratifiées orthotropes simplement appuyées. Une étude comparative entre ces différentes méthodes a été réalisée sur deux stratifiés croisés symétriques orthotropes et un stratifié symétrique quasi-isotrope (les coefficients de rigidités D_{16} et D_{26} sont très petits par rapport aux autres coefficients). L'étude concerne la variation de la charge critique de flambement et les fréquences de pulsation propres en fonction du rapport largeur-sur-épaisseur de la plaque. Les principales conclusions de cette étude sont les suivantes :

- La théorie *CLT* devient de moins en moins précise, par rapport à la théorie *FSDT* et la méthode *MEF*, quand le rapport largeur-sur-épaisseur de la plaque diminue. Ce résultat est prévisible du fait que dans la théorie *CLT* les déformations de cisaillement transverse (CT) ne sont pas prises en compte et la précision dans cette théorie n'est adéquate que dans l'étude des plaques minces ($a/h = 100, 50$).
- Pour le problème de vibration, on constate que la précision de la solution entre *FSDT* et *MEF* se détériore pour le cas des plaques épaisses du stratifié A. Cela est dû à

l'influence des coefficients de rigidités qui sont infiniment petits (trois couches seulement pour le stratifié A).

- La solution devient moins précise dans le cas des fréquences propres d'ordre supérieures. Pour améliorer la précision, il faut utiliser des théories plus précises telle que la théorie *HSDT* et raffiner d'avantage le maillage pour la méthode *MEF*.
- La solution *FSDT* diverge sensiblement par rapport à la solution *MEF* pour le cas des plaques épaisses du stratifié C. Cette divergence est constatée aussi bien pour le problème du flambement que pour le problème de vibration. Cela prouve que même si les coefficients D_{16} et D_{26} sont très petits par rapport aux autres coefficients, ils influent d'une manière significative sur la solution dans le cas des plaques épaisses.

Chapitre 4

Vibration des Plaques Stratifiées avec un Coefficient de Poisson Négatif

4.1 Introduction

Dans un test de traction simple, le coefficient de Poisson est défini comme étant le quotient de la déformation latérale et de la déformation axiale. Dans la plupart des cas le coefficient de Poisson dénoté ν est positif, les matériaux subissent une contraction dans la direction perpendiculaire au sens de l'effort appliqué. Dans le cas contraire, un matériau avec un coefficient de Poisson négatif gonfle latéralement quand il est étiré conduisant à une augmentation de son volume. Evans [37] a été le premier à définir de tels matériaux par auxétiques. Ce terme vient du mot grec « auxetos » qui signifie « qui peut subir une augmentation ». Les matériaux auxétiques se regroupent pour l'instant en trois catégories : les cristaux (par exemple les zéolithes) qui manifestent des propriétés auxétiques à l'échelle microscopique, certaines mousses de polymère (par exemple le Téflon PTFE) et les composites stratifiés à fibres haute résistance HR présentant un fort degré d'anisotropie dans les couches continues (par exemple les composites en stratifiés carbone/époxyde). Plusieurs cas de valeurs de coefficient de Poisson négatif ont été trouvés dans l'analyse des composites à fibres unidirectionnelles anisotropes. Dans certains stratifiés, il est possible de trouver, par la théorie classique des stratifiés, un coefficient de Poisson négatif de -0.21 pour le matériau carbone/époxyde T300/5208 dans la direction perpendiculaire aux couches en contrôlant les séquences d'empilement [38]. Dans d'autres, on peut trouver un coefficient de Poisson négatif suivant certaines directions dans le plan du stratifié et cela aussi par le contrôle des séquences d'empilement [39,40]. Dans ces composites, la valeur négative du coefficient de Poisson dépend du degré d'anisotropie et des orientations des fibres des plis utilisés pour le stratifié.

Le comportement auxétique de ces matériaux présente des avantages par rapport au comportement conventionnel des matériaux avec un coefficient de Poisson positif, par exemple, l'augmentation de la rigidité au cisaillement, la dureté et la résistance à l'indentation

[41,42]. Il existe des signes qui montrent que les matériaux auxétiques peuvent avoir des avantages dans le domaine de l'amortissement et l'absorption des chocs [43]. D'autres applications potentielles où les matériaux avec un coefficient de Poisson négatif seraient intéressants. Par exemple, les mousses faites d'un tel matériau se plieraient plus facilement de sorte qu'elles se prêteraient beaucoup mieux à la fabrication de coques sandwiches en forme de dôme ou de coiffe convexe. L'utilisation de ces matériaux serait également favorable dans certains cas pour réduire les facteurs de concentration de contraintes dans le voisinage des trous ou des fissures. Scarpa et Tomlinson [44] ont étudié l'effet des caractéristiques théoriques de la vibration des panneaux sandwiches en nids d'abeilles avec des valeurs du coefficient de Poisson négatifs dans le plan.

Dans ce chapitre, des simulations numériques avec le logiciel d'éléments finis ANSYS sont utilisées pour prédire le comportement auxétique (coefficient de Poisson négatif à travers l'épaisseur) des stratifiés symétriques $[\pm\theta]_s$ à fibres unidirectionnelles Prepreg du matériau carbone/époxyde GY70/934 du fabricant Cytec Engineered Materials [45], les résultats numériques seront comparés à ceux donnés analytiquement par la théorie classique des stratifiés. Ensuite, on présentera une analyse numérique du comportement vibratoire libre de plaques stratifiés symétriques, une comparaison sera faite entre les fréquences propres du stratifié (GY70/934) qui peut avoir, selon l'orientation des angles des fibres, un comportement auxétique et un autre conventionnel. La comparaison mettra en évidence le cas spécial où pour deux valeurs différentes de l'angle d'orientation des fibres correspondra la même valeur du coefficient de Poisson mais avec des signes opposés.

4.2 Coefficient de Poisson ν_{xz} d'un stratifié

4.2.1 Formulation analytique

Le coefficient de Poisson à travers l'épaisseur ν_{xz} peut être évalué en utilisant une combinaison de la théorie des stratifiés et les équations constitutives en 3D. On considère un stratifié symétrique soumis à un effort axial N_x . Les déformations membranaires sont dans ce cas :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

où

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k t^k$$

\bar{Q}_{ij}^k sont les composantes de rigidité réduites, t^k épaisseur de la couche k et N le nombre de plis. Le coefficient de Poisson est défini par :

$$\nu_{xz} = -\varepsilon_z / \varepsilon_x$$

où la déformation ε_z est égale au déplacement total w divisé par l'épaisseur $2h$ du stratifié. Le déplacement total w peut être écrit :

$$w = \int_{-h}^h \varepsilon_z dz = \sum_{k=1}^N \varepsilon_z^k t^k \quad (4.2)$$

où ε_z^k est la déformation constante dans la couche k . Cette déformation peut être déterminée en utilisant les équations constitutives tridimensionnelles pour une couche monoclinique en dehors de ses axes principaux :

$$\varepsilon_z^k = \bar{S}_{31}^k \sigma_x^k + \bar{S}_{32}^k \sigma_y^k + \bar{S}_{36}^k \sigma_{xy}^k \quad (4.3)$$

où \bar{S}_{ij}^k sont les constantes de souplesse de la couche k . Les contraintes dans chaque couche peuvent être déterminées à partir des équations constitutives en deux dimensions et l'inverse de A_{ij} par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} A_{11}^{-1} \\ A_{12}^{-1} \\ A_{16}^{-1} \end{Bmatrix} N_x \quad (4.4)$$

Le remplacement de l'Equation (4.4) dans l'Equation (4.3) donne ε_z^k dans chaque couche en fonction des propriétés du stratifié et l'effort axial appliqué :

$$\begin{aligned} \varepsilon_z^k = N_x \left[A_{11}^{-1} \left(\bar{S}_{31}^k \bar{Q}_{11}^k + \bar{S}_{32}^k \bar{Q}_{12}^k + \bar{S}_{36}^k \bar{Q}_{16}^k \right) + A_{12}^{-1} \left(\bar{S}_{31}^k \bar{Q}_{12}^k + \bar{S}_{32}^k \bar{Q}_{22}^k + \bar{S}_{36}^k \bar{Q}_{26}^k \right) \right. \\ \left. + A_{16}^{-1} \left(\bar{S}_{31}^k \bar{Q}_{16}^k + \bar{S}_{32}^k \bar{Q}_{26}^k + \bar{S}_{36}^k \bar{Q}_{66}^k \right) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

A partir des Equations (4.2) et (4.5), on peut tirer le déplacement total w et sa division par la déformation axiale ε_x et la hauteur du stratifié $2h$ donne l'expression du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur :

$$v_{xz} = -\frac{1}{2hA_{11}^{-1}} \left[A_{11}^{-1}F_1 + A_{12}^{-1}F_2 + A_{16}^{-1}F_6 \right] \quad (4.6)$$

avec :

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{k=1}^N \left(\bar{S}_{31}^k \bar{Q}_{11}^k + \bar{S}_{32}^k \bar{Q}_{12}^k + \bar{S}_{36}^k \bar{Q}_{16}^k \right) t^k \\ F_2 &= \sum_{k=1}^N \left(\bar{S}_{31}^k \bar{Q}_{12}^k + \bar{S}_{32}^k \bar{Q}_{22}^k + \bar{S}_{36}^k \bar{Q}_{26}^k \right) t^k \\ F_6 &= \sum_{k=1}^N \left(\bar{S}_{31}^k \bar{Q}_{16}^k + \bar{S}_{32}^k \bar{Q}_{26}^k + \bar{S}_{36}^k \bar{Q}_{66}^k \right) t^k \end{aligned} \quad (4.7)$$

Les résultats d'une étude faite pour un stratifié symétrique $[\pm\theta]_{2S}$ constitué par les matériaux composites Verre/Epoxyde, Bore/Epoxyde et Carbone/Epoxyde (GY70/934) sont montrés dans les Figures (4.1), (4.2) et (4.3) respectivement. L'étude présente la variation du coefficient de Poisson v_{xz} en fonction des angles d'orientation des fibres. Les caractéristiques des matériaux sont données dans le tableau (4.1).

Tableau 4.1 Propriétés des matériaux Mat I, Mat II et Mat III

	Mat I Verre/Epoxyde	Mat II Bore/Epoxyde	Mat III (GY70/934) Carbone/Epoxyde
E_1 (GPa)	54	207	294
E_2 (GPa)	18	21	6,4
v_{12}	0,25	0,30	0,23
v_{23}	0,25	0,30	0,40
G_{12} (GPa)	9	7	4,9

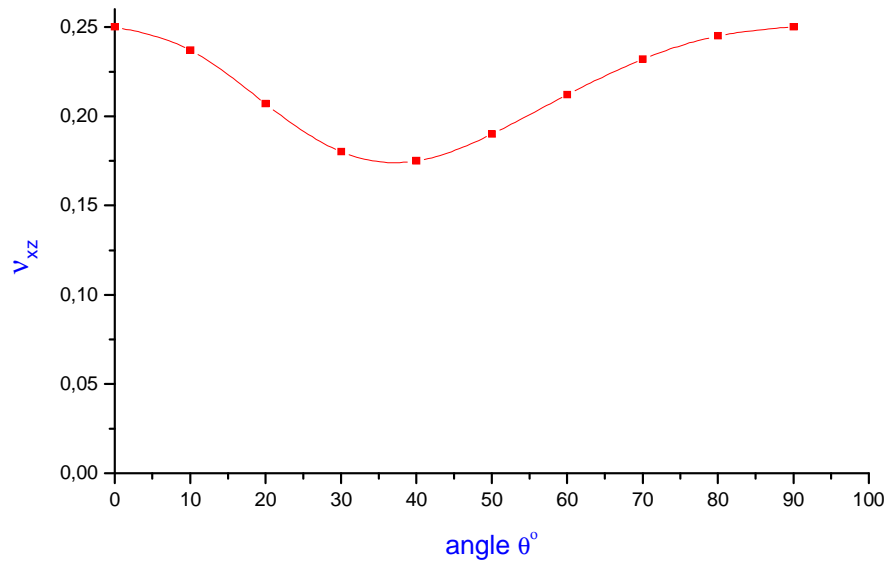


Figure 4.1 Variation du coefficient de Poisson ν_{xz} en fonction de l'angle d'orientation des fibres MAT I ($E_1/E_2 = 3$)

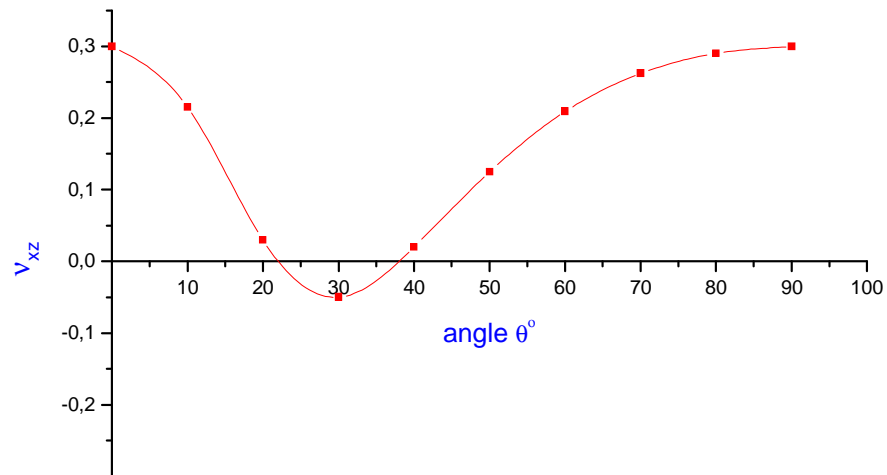


Figure 4.2 Variation du coefficient de Poisson ν_{xz} en fonction de l'angle d'orientation des fibres MAT II ($E_1/E_2 \approx 10$)

Les résultats trouvés confirment que la valeur négative du coefficient de Poisson dépend du degré d'anisotropie et des orientations des fibres des plis utilisés pour le stratifié. Par exemple pour le Mat I Verre/Epoxyde, qui possède un degré d'anisotropie faible ($E_1/E_2 = 3$), le coefficient ν_{xz} demeure positif. D'autre part, pour le Mat II Bore/Epoxyde, qui possède un degré d'anisotropie moyen ($E_1/E_2 = 10$), le coefficient ν_{xz} commence à devenir négatif pour $\theta = 30^\circ$. Et enfin, pour le Mat III Carbone/Epoxyde, qui possède un degré d'anisotropie très élevé ($E_1/E_2 = 46$), le coefficient ν_{xz} est négatif pour les séquences d'empilement variant de 7° à 42° . On note que la valeur maximale négative (-0.712) est atteinte pour $\theta = 20^\circ$.

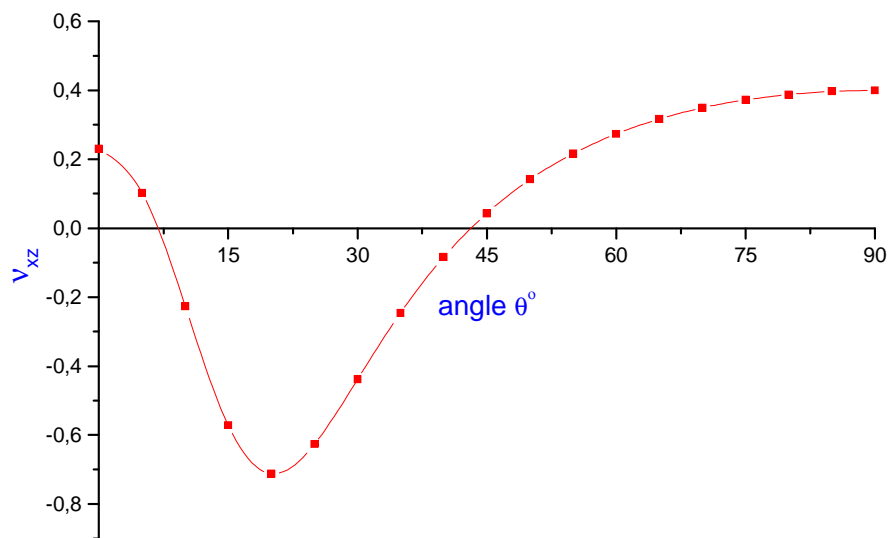


Figure 4.3 Variation du coefficient de Poisson ν_{xz} en fonction de l'angle d'orientation des fibres MAT III GY70/934 ($E_1/E_2 = 46$)

4.2.2 Simulation numérique

Une étude numérique, utilisant le code *Ansys*[®], a été conduite pour confirmer les résultats analytiques trouvés dans le cas du Mat III GY70/934. Pour cela, on a réalisé un test de traction unitaire sur un stratifié $[\pm\theta]_{4S}$ présentant les mêmes caractéristiques utilisés pour la formulation analytique. Le quart de la plaque ($50 \times 25 \times 8$) mm a été modélisé avec (6×6) 36 éléments SOLID46 (figure 4.4) destinés aux composites multicouches. Ce sont des éléments de volume de huit nœuds par élément et avec trois degrés de liberté u_x , u_y et u_z pour chaque

noeud. La simulation a été faite pour $\theta = 35^\circ$ et $\theta = 58^\circ$ qui conduisent pour l'étude analytique à $\nu_{xz} = -0.246$ et $\nu_{xz} = +0.253$ respectivement, c'est-à-dire deux valeurs de ν_{xz} presque identiques mais de signes opposés.

Les résultats numériques de cette étude montrés dans le tableau (4.2) confirment exactement les valeurs du coefficient de Poisson ν_{xz} et mettent en évidence un comportement auxétique du stratifié pour $\theta = 35^\circ$ (augmentation de l'épaisseur du stratifié) et un comportement conventionnel pour $\theta = 58^\circ$ (diminution de l'épaisseur du stratifié), on remarque pour le stratifié $[\pm 43.15^\circ]_{4s}$, qui possède un coefficient de Poisson nul, que l'épaisseur de la plaque reste constante après déformation.

La même simulation numérique a été faite pour le cas de la compression, les résultats présentés dans le tableau (4.3) montrent, aussi, le caractère auxétique pour $\theta = 35^\circ$ (c'est-à-dire diminution de l'épaisseur) et un caractère conventionnel pour $\theta = 58^\circ$ (augmentation de l'épaisseur du stratifié).

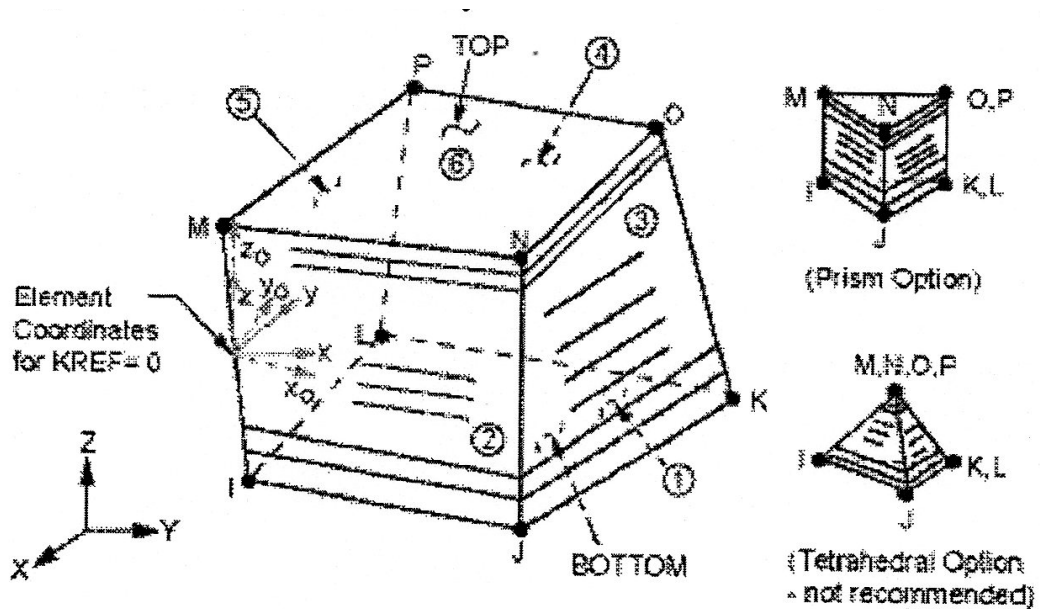


Figure 4.4 L'élément volumique à huit nœuds Solid46 du code ANSYS

Tableau 4.2 Valeurs du coefficient de Poisson, test de tension

Stratifié	$[\pm 35^\circ]_{4s}$	$[\pm 43.15^\circ]_{4s}$	$[\pm 58^\circ]_{4s}$
ε_z	+0.6370 E-5	-0.1990 E-7	- 0.2540 E-4
ε_x	+0.2588 E-4	+0.4820 E-4	+0.1005 E-3
ν_{xz}	- 0.246	≈ 0.000	+0.253

Tableau 4.3 Valeurs des déformations ε_z et ε_x , test de compression

Stratifié	$[\pm 35^\circ]_{4s}$	$[\pm 58^\circ]_{4s}$
ε_z	- 0.6370 E-5	+0.2540 E-4
ε_x	- 0.2588 E-4	- 0.1005 E-3

4.3 Vibration libre de plaques stratifiées symétriques $[\pm\theta]_{ns}$

4.3.1 Equations gouvernantes

Les stratifiés symétriques $[\pm\theta]_{ns}$ sont caractérisés par un couplage flexion-torsion où les coefficients de rigidité de flexion D_{16} et D_{26} ne sont pas nuls. Pour ces stratifiés, il n'existe pas de solutions exactes des problèmes de la structure composite, telles que les déflexions, charges critiques de flambage et fréquences et modes propres de vibration. Des méthodes d'approximation doivent être utilisées pour trouver des résultats. Parmi ces méthodes celle de Ritz est la plus utilisée. La considération du maximum de l'énergie potentielle et celui de l'énergie cinétique nous permet d'obtenir les expressions suivantes [36] pour une plaque rectangulaire de cotés a et b :

$$\begin{aligned}
 U_{\max} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b & \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\
 & \left. + 4 \left(D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b w_0^2(x, y) dx dy \quad (4.9)$$

La solution approchée est recherchée sous la forme d'une double série, Whitney et Leissa [46] :

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (4.10)$$

Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ doivent vérifier les conditions aux frontières. Les coefficients A_{mn} sont déterminés par les conditions de stationnarité :

$$\frac{\partial}{\partial A_{mn}} [U_{\max} - T_{\max}] = 0 \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4.11)$$

Les conditions de stationnarité nous conduisent à un système d'équations ($M \times N$) homogènes. Une solution non nulle est obtenue lorsque le déterminant du système est nul et fournissant ainsi les fréquences propres ω_{mn} de vibration de la plaque.

Leissa et Narita [47] ont étudié des plaques stratifiées symétriques simplement appuyées en utilisant des fonctions trigonométriques dans la méthode de Ritz :

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.12)$$

Jensen et al [48] ont utilisé des fonctions poutres développées pour une plaque encastree :

$$X_m(x) = \cos \frac{\lambda_m x}{a} - \cosh \frac{\lambda_m x}{a} - \gamma_m \left(\sin \frac{\lambda_m x}{a} - \sinh \frac{\lambda_m x}{a} \right)$$

$$Y_n(y) = \cos \frac{\lambda_n y}{b} - \cosh \frac{\lambda_n y}{b} - \gamma_n \left(\sin \frac{\lambda_n y}{b} - \sinh \frac{\lambda_n y}{b} \right)$$
(4.13)

4.3.2 Résultats numériques

Deux études de comparaison ont été faites afin de vérifier la précision du logiciel ANSYS pour les problèmes vibratoires. L'élément coque SHELL99 pour les multicouches a été employé, cet élément a 8 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud, il utilise la théorie classique des stratifiés avec prise en compte du cisaillement transverse.

4.3.2.1 Vibration d'une plaque stratifiée symétrique encastree

La vibration libre d'une plaque carrée en stratifié symétrique $[\theta/-\theta]_s$ est étudiée pour différents angles d'orientation des fibres $\theta = 15^\circ$, $\theta = 30^\circ$ et $\theta = 45^\circ$. Les propriétés du matériau des quatre couches sont :

$$E_1/E_2 = 25 \quad G_{12}/E_2 = 0.5 \quad G_{23}/E_2 = 0.2 \quad \nu_{12} = 0.25$$

Le tableau (4.4) montre les valeurs adimensionnelles des quatre premières fréquences propres de vibration. Ces résultats sont comparés à ceux donnés par Shi et al [49] qui a utilisé la méthode de Galerkin.

4.3.2.2 Vibration d'une plaque stratifiée symétrique simplement appuyée

La vibration libre d'une plaque carrée en stratifié symétrique de quatre couches $[\theta/-\theta]_s$ avec des angles d'orientation des fibres variant de 0° à 45° a été analysée. Les propriétés du matériau de ces couches sont :

$$E_1/E_2 = 25 \quad G_{12}/E_2 = 0.5 \quad G_{23}/E_2 = 0.2 \quad \nu_{12} = 0.25$$

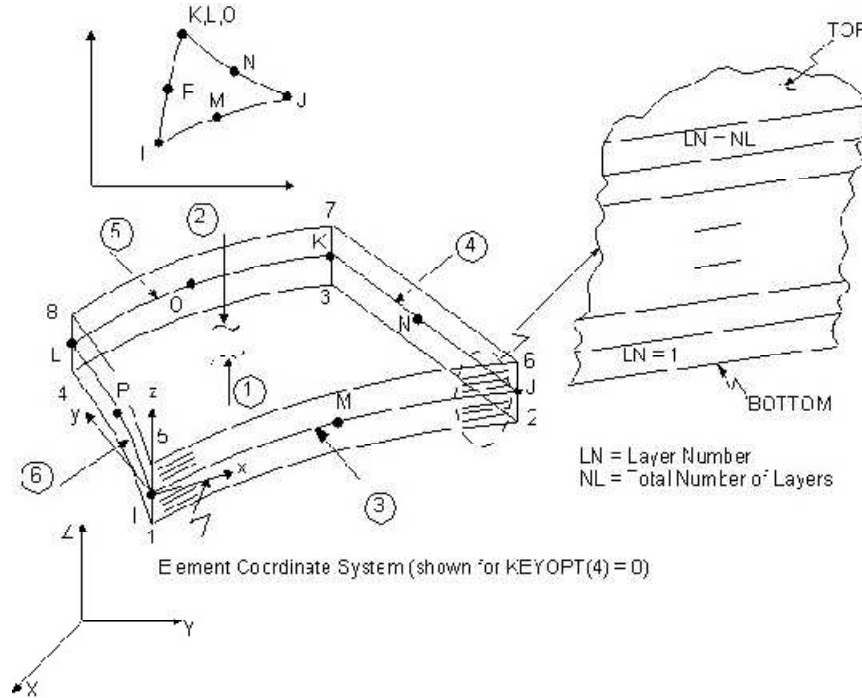


Figure 4.5 L'élément à huit nœuds Shell 99 du code ANSYS

Tableau 4.4 Fréquences propres d'un stratifié symétrique $[\theta/-\theta]_s$ encastré EEEE

$$(a/h = 100) \Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$$

	θ°	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
Réf. [49]	15°	32.49	40.65	55.94	78.29
ANSYS	15°	31.88	39.55	54.10	75.13
Réf. [49]	30°	30.78	46.85	70.45	73.99
ANSYS	30°	30.09	45.48	68.21	72.06
Réf. [49]	45°	30.01	53.07	66.03	80.99
ANSYS	45°	29.28	51.64	64.11	78.61

Les fréquences propres fondamentales adimensionnelles ont été obtenues pour les cas $a/h = 100$ et $a/h = 10$ et comparées à celles données par Latheswary [50] qui a utilisé une analyse en éléments finis basée sur la théorie *HSST* du troisième ordre, on peut remarquer que les fréquences obtenues sont presque identiques. Les résultats sont montrés dans le tableau (4.5).

Tableau 4.5 Fréquences propres d'un stratifié symétrique $[\theta/-\theta]_S$ simplement appuyé SSSS

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$$

	θ°	0°	15°	30°	45°
$a/h = 100$	Réf. [50]	15.15	15.80	17.40	18.10
	ANSYS	15.15	15.82	17.35	18.15
$a/h = 10$	Réf. [50]	12.50	12.85	13.60	13.95
	ANSYS	12.50	12.94	13.84	14.26

4.3.3 Vibration de plaques stratifiées auxétiques

Le comportement vibratoire de plaques carrées en stratifiés symétrique $[\theta/-\theta]_S$ présentant un comportement auxétique est étudié par le code ANSYS. Le matériau composant les plis du stratifié est un carbone/époxyde GY70/934 étudié précédemment et qui a montré un comportement auxétique, ν_{xz} négatif, pour des angles d'orientation des fibres variant de 7° à 42° . L'étude concerne la variation des fréquences fondamentales propres en fonction des angles d'orientation des fibres et spécialement les angles $\theta = 35^\circ$ et $\theta = 58^\circ$ qui correspondent à un comportement auxétique, $\nu_{xz} = -0.246$, et un comportement conventionnel, $\nu_{xz} = +0.253$, du stratifié respectivement.

L'analyse porte sur le cas de plaques simplement appuyées SSSS et de plaques encastées EEEE avec des rapports largeur-sur-épaisseur de 10 et de 100 qui correspondent à des plaques composites épaisses et à des plaques composites minces respectivement. Les

résultats de cette étude sont montrés sur les figures (4.6) et (4.7), et sont exprimés sous forme adimensionnelle :

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$$

Pour les plaques simplement appuyées, la variation de l'angle d'orientation des fibres de 0° à 45° implique une augmentation de la fréquence fondamentale dans les deux cas, plaques minces ($a/h = 100$) et plaques épaisses ($a/h = 10$). Cependant, pour les plaques encastées, on remarque une diminution de la fréquence fondamentale pour le cas de plaques minces et des valeurs pratiquement constantes pour le cas des plaques épaisses. On peut voir aussi que pour les angles d'orientation des fibres qui correspondent aux comportements auxétiq et conventionnel, la variation de la fréquence fondamentale n'est pas influencée par le caractère auxétiq et elle est conforme aux conditions de symétrie du stratifié.

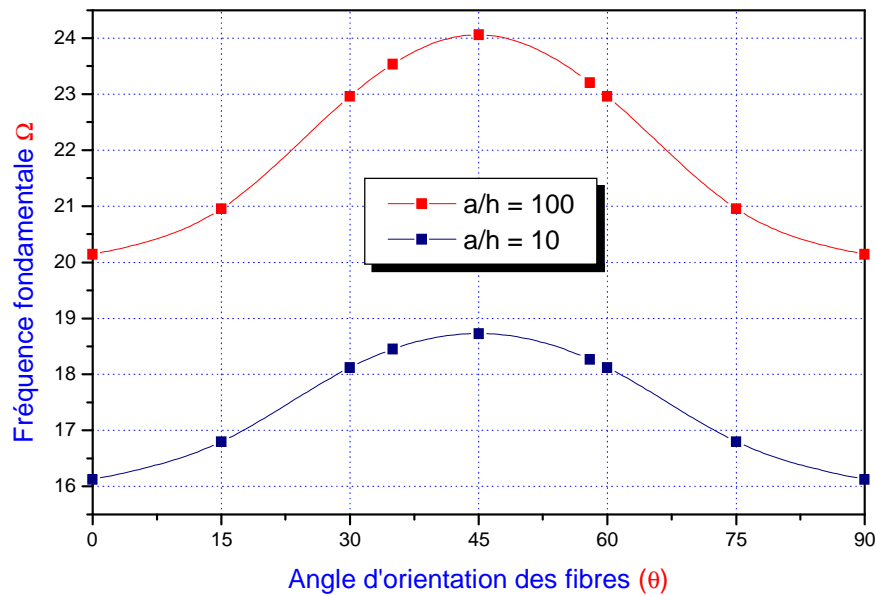


Figure 4.6 Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres des stratifiés $[\theta/-\theta]_S$ (plaques SSSS)

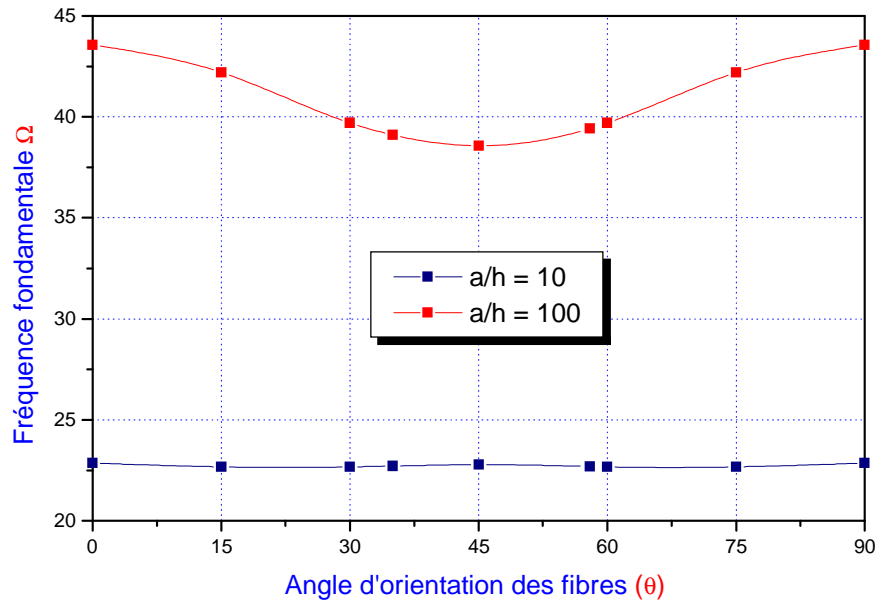


Figure 4.7 Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation des fibres des stratifiés $[\theta/-\theta]_s$ (plaques EEEE)

4.4 Conclusion

Une simulation numérique du comportement auxétique, coefficient de Poisson négatif à travers l'épaisseur, pour le composite stratifié symétrique à fibres unidirectionnelles prepreg du matériau carbone/époxyde GY70/934 a été présentée. Les résultats trouvés mettent en évidence le caractère auxétique du matériau pour les séquences d'empilement variant de 7° à 42° et sont en accord avec ceux donnés analytiquement par la théorie classique des stratifiés.

Une approche en éléments finis a été utilisée, aussi, pour étudier la vibration libre du même stratifié symétrique, il a été trouvé, pour les plaques simplement appuyées, que la fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation du rapport largeur-sur-épaisseur, le degré d'anisotropie et l'angle d'orientation des fibres pour l'intervalle 0° - 45° . On constate, pour les plaques encastées, une légère diminution de la fréquence propre des stratifiés minces et des valeurs presque constantes des stratifiés épais. Cependant pour les angles 35° et 58° qui correspondent à la même valeur du coefficient de Poisson mais avec des signes opposés, la

variation de la fréquence fondamentale n'est pas influencée par le caractère auxétique du matériau et reste conforme à l'évolution dictée par les conditions de symétrie du stratifié.

Chapitre 5

Vibration et Flambement des Plaques Composites Trouées

5.1 Introduction

Les structures composites stratifiées sont de plus en plus utilisées dans l'aérospatiale, l'aéronautique, la défense, l'industrie automobile, les constructions navales et civiles. Cela est principalement dû à leur très grande résistance et rigidité spécifique et l'avantage de l'adaptation de leurs propriétés (conception optimale du matériau) pour répondre aux exigences de la pratique. La fréquence de vibration et la charge critique de flambement sont l'une des plus importantes considérations de conception pour les plaques composites stratifiées [51], [52], [53]. La dépendance paramétrique des fréquences propres et des charges critiques de flambement sur la configuration de l'empilement et l'orientation des fibres, etc. peut être trouvée dans certains manuels, livres et articles tel que Reddy [54], Herakovitch *et al.* [55] et Leissa [56]. La présence d'irrégularité géométrique telle que les trous et les ouvertures modifie les caractéristiques dynamiques de la plaque. Par conséquent, il devient nécessaire d'étudier l'effet des trous sur la réponse vibratoire et la stabilité des plaques pour éviter une rupture mécanique due à la résonance et la fatigue de la structure due aux vibrations subies.

Dans la littérature, il existe un large éventail d'études publiées sur la vibration et le flambage des plaques composites présentant des irrégularités géométriques. Paramasivam [57] a proposé une méthode pour déterminer l'effet des ouvertures carrées sur la fréquence fondamentale de plaques isotropes carrées pour différentes conditions aux limites en utilisant la méthode des différences finies. Des résultats ont été obtenus pour le cas de plaques simplement appuyées et le cas de plaques parfaitement encastées. Aksu et Ali [58] ont développé une théorie pour étudier les caractéristiques dynamiques de plaques rectangulaires isotropes et orthotropes avec une ou deux ouvertures rectangulaires. Ils ont utilisé une

méthode basée sur l'utilisation de principes variationnels en conjonction avec la technique des différences finies. Rajamani et Prabhakaran [59], [60] ont étudié l'effet d'une ouverture centrale carrée sur les fréquences naturelles de plaques stratifiées symétriques carrées simplement appuyées et encastées pour les cas de vibrations libres et forcées.

Lee et Lim [61] ont analysé la réponse des vibrations libres de plaques carrées isotropes et orthotropes, simplement appuyées avec un trou carré, soumises à une force membranaire en utilisant la méthode de Rayleigh. Ils ont conclu que la force de traction membranaire augmente la fréquence naturelle, tout comme l'augmentation de la force de compression diminue la fréquence naturelle jusqu'à ce que l'état d'instabilité de flambement soit atteint. Sabir et Davies [62] ont utilisé la méthode des éléments finis pour déterminer les fréquences naturelles de vibration de plaques carrées contenant un trou carré excentré. Les plaques ont été soumises à une compression uniaxiale ou biaxiale ou à un cisaillement uniformément répartie le long des quatre bords extérieurs, qui étaient soit simplement appuyés ou encastés.

Pour prédire la charge critique de flambement d'une structure en utilisant un programme d'éléments finis, l'analyse de flambement linéaire (ou valeurs propres) est une technique existante pour l'estimation de cette force. Ghannadpour *et al.* [63] ont étudié les influences d'un trou sur la performance de flambement de plaques rectangulaires faites de matériaux composites à matrice polymère (PMC). Kong et al. [64] ont analysé les comportements de flambement et post-flambement à la fois numériquement et expérimentalement pour les plaques composites avec un trou central. Dans l'analyse par éléments finis, la formulation de Lagrange actualisée et l'élément fini de coque dégénéré à huit nœuds ont été utilisés. L'influence de la taille des trous et des séquences d'empilement a été examinée sur le comportement à la compression de la plaque. Les essais expérimentaux ont montré une très bonne concordance avec les résultats de la méthode des éléments finis concernant la charge critique de flambement et la force de post-flambement.

L'objectif de ce chapitre est l'étude et la compréhension de l'effet de la présence de trous rectangulaires sur la réponse vibratoire de plaques composites stratifiées symétriques lorsqu'elles sont soumises à des charges de compression dans leur plan. L'étude comprend également l'influence du degré d'anisotropie du matériau et les séquences d'empilement sur les fréquences naturelles du stratifié.

5.2 Méthode de résolution

Dans cette étude, les effets de la présence de trous et ouvertures sur la réponse vibratoire et la charge de flambement de plaques composites stratifiées ont été étudiés numériquement. Le cadre de l'analyse du flambement linéaire consiste à chercher la valeur critique des efforts pour laquelle apparaissent ces phénomènes de grands déplacements. Le caractère linéaire s'appuie sur l'hypothèse forte que la structure est considérée comme vérifiant les hypothèses de petites perturbations juste avant d'atteindre la charge critique. Cette hypothèse permet ainsi de simplifier les écritures et d'obtenir une évaluation assez bonne de la charge critique. Dans le problème du flambement linéaire les valeurs propres et les vecteurs propres sont recherchés en utilisant l'équation des valeurs propres qui a la forme suivante :

$$[K]\{\phi_i\} - \lambda_i [K_g]\{\phi_i\} = 0 \quad (5.1)$$

où K est la matrice de rigidité élastique, K_g est la matrice de rigidité géométrique et λ_i et ϕ_i sont les valeurs propres et les vecteurs propres du problème de flambement.

Le calcul de flambement se décompose en deux étapes :

- un premier calcul linéaire traditionnel permet d'évaluer, pour une valeur d'effort de référence, le champ de contraintes engendré.
- un second calcul, dont les termes sont évalués à partir des contraintes calculées à l'étape précédente, permet d'obtenir les valeurs propres qui amènent à la singularité du système.

La charge critique au flambement est alors obtenue directement par la formule (5.1).

L'analyse en fréquence-modale est formulée comme un problème de valeurs propres. L'équation du problème a la forme suivante :

$$[K]\{\phi_i\} - \omega_i^2 [M]\{\phi_i\} = 0 \quad (5.2)$$

où M et ω_i sont la matrice de masse de la structure et les fréquences de pulsations naturelles, respectivement.

Pour les analyses modales précontraintes (dans notre cas présence de force de compression), la matrice de rigidité géométrique K_g est incorporée dans la matrice de rigidité globale K . Les équations (5.1) et (5.2) sont un ensemble d'équations linéaires homogènes. Pour la recherche d'une solution non triviale, le déterminant est égal à zéro et les valeurs propres correspondent aux fréquences propres et aux charges critiques de flambement de la plaque stratifiée.

5.3 Effet des dimensions de l'ouverture sur la charge de flambement

Pour le besoin de cette étude, on considère une plaque stratifiée croisée symétrique $[0/90]_{2S}$ de forme carrée comportant un trou circulaire central. L'épaisseur de chaque couche de ce stratifié de huit couches est de 0.15 mm. Les propriétés du matériau du pli sont données dans le tableau 5.1. Les dimensions de la plaque sont 120×120 mm. La plaque est simplement appuyée sur ses quatre cotés. La force de compression est appliquée uniformément le long de deux cotés opposés. Le maillage adopté pour ces plaques est réalisé avec l'élément fini SHELL91 [65] du logiciel *Ansys* comme le montre la figure (5.1).

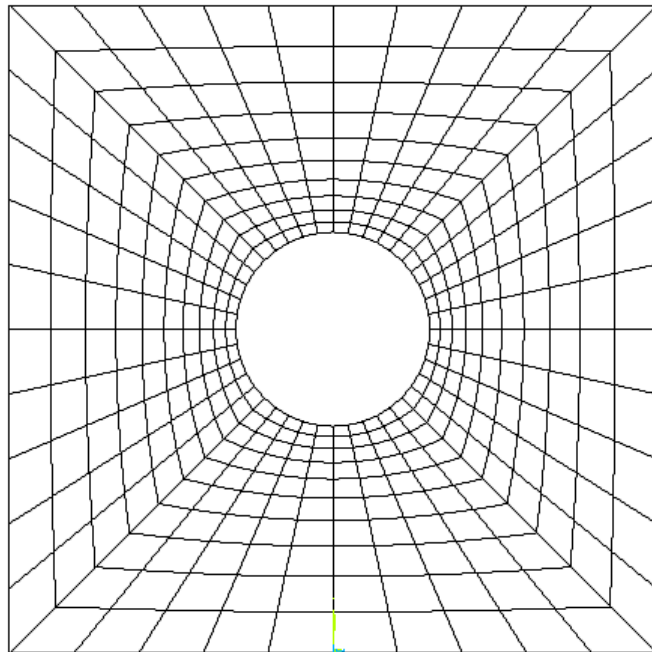


Figure 5.1 Maillage de la plaque avec trou circulaire central (400 éléments)

Tableau 5.1 *Propriétés mécaniques du matériau du pli*

Propriétés mécaniques	Valeurs
E_1	130.0 GPa
E_2	10.0 GPa
E_3	10.0 GPa
$G_{12} = G_{13}$	5.0 GPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.35
$\nu_{23} = \nu_{32}$	0.49

5.3.1 Etude de la convergence

Pour évaluer la précision de la solution de flambement, une étude de la convergence a été faite pour un rapport du diamètre du trou sur le côté de la plaque (d/a) pris égale à 0.3. Six différents maillages avec raffinement autour du trou ont été considérés. Le tableau (5.2) donne la charge critique de flambement sous forme adimensionnelle. Les résultats obtenus montrent que le maillage avec un nombre d'éléments égal à 400 est suffisant pour obtenir une solution dont la précision est acceptable.

Tableau 5.2 *Etude de la convergence de charge de flambement pour une plaque stratifiée croisée symétrique*

Nombre d'éléments	Charge de flambement (Na^2/E_2h^3)
144	11.307
256	11.445
400	11.530
576	11.579
784	11.614
1024	11.640

5.3.2 Etude de l'effet de la taille du trou

Le tableau 5.3 donne les charges critiques de flambement pour des plaques stratifiées croisées symétriques avec le rapport diamètre du trou sur le coté de plaque (d/a) variant de 0.0 à 0.8. Le maillage retenu pour cette étude est le maillage concentrique de 400 éléments. Les résultats obtenus montrent que la charge critique de flambement diminue quand le diamètre du trou augmente. On constate que la diminution de la charge de flambement est de l'ordre de 62% pour une variation du rapport (d/a) allant de 0.0 à 0.8. En outre, la variation de la charge de flambement est presque négligeable comparée à une plaque parfaite pour l'intervalle $d/a = 0.0$ à $d/a = 0.05$.

Tableau 5.3 *Etude de l'effet du rapport d/a du trou sur la charge de flambement pour une plaque stratifiée croisée symétrique*

d/a	Charge de flambement (Na^2/E_2h^3)
0.0	13.77
0.05	13.30
0.1	13.21
0.2	12.59
0.3	11.53
0.4	10.32
0.5	9.11
0.6	7.88
0.7	6.57
0.8	5.17

5.4 Vibration des plaques stratifiées trouées sous compression uniaxiale

Pour la réalisation de cette étude, on considère une plaque en stratifiée équilibré symétrique $[\pm\theta]_{2S}$ et simplement appuyée sur les quatre bords. Le stratifié possède un rapport largeur-sur-épaisseur a/h égale à 100 et les propriétés de chaque pli sont :

$$E_1/E_2 = 3, 10, \text{ et } 40 \quad E_2 = E_3 \quad G_{12} = G_{13} = 0.6 E_2$$

$$G_{23} = 0.5 E_2 \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

La densité du matériau ρ est prise égale à unité. Les calculs ont été effectués pour différents degrés d'anisotropie du matériau des plis qui correspondent à :

- Un degré d'anisotropie faible $E_1/E_2 = 3$, par exemple Verre/Epoxyde ;
- Un degré d'anisotropie moyen $E_1/E_2 = 10$, par exemple Bore/Epoxyde ;
- Un degré d'anisotropie très élevé $E_1/E_2 = 40$, par exemple Carbone/Epoxyde.

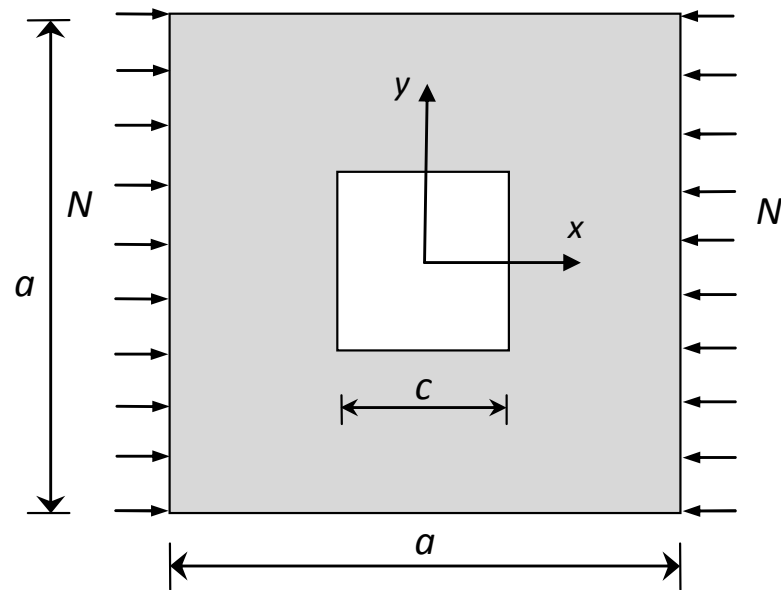


Figure 5.2 Géométrie et chargement uniaxial du model

La géométrie et les chargements du model sont montrés sur la figure (5.2), la plaque composite est considérée comme carrée avec des dimensions de $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$, l'ouverture est prise comme étant un trou carré centré sur la plaque. Dans ce travail, le rapport entre les dimensions du trou et la plaque c/a est pris égale à $0,333$. En parallèle, les plaques stratifiées ont également été analysés sans trou lorsque $c/a = 0$ pour faire une comparaison entre les influences que pourraient avoir les plaques avec trou et les plaques sans trou sur les fréquences propres et des charges critiques de flambement.

L'analyse numérique en éléments finis a été conduite en utilisant le logiciel *Ansys*. L'élément fini SHELL91 [65], montré dans la figure (5.3), a été utilisé pour la génération du

maillage de la structure. C'est un élément non-linéaire destiné pour les structures multicouches en coque ou la modélisation des structures sandwich épaisses, il permet l'utilisation de plus de 100 différentes couches. En outre, l'élément possède huit nœuds avec six degrés de liberté à chaque nœud: translations suivant les directions x , y , et z et rotations autour des axes x , y et z .

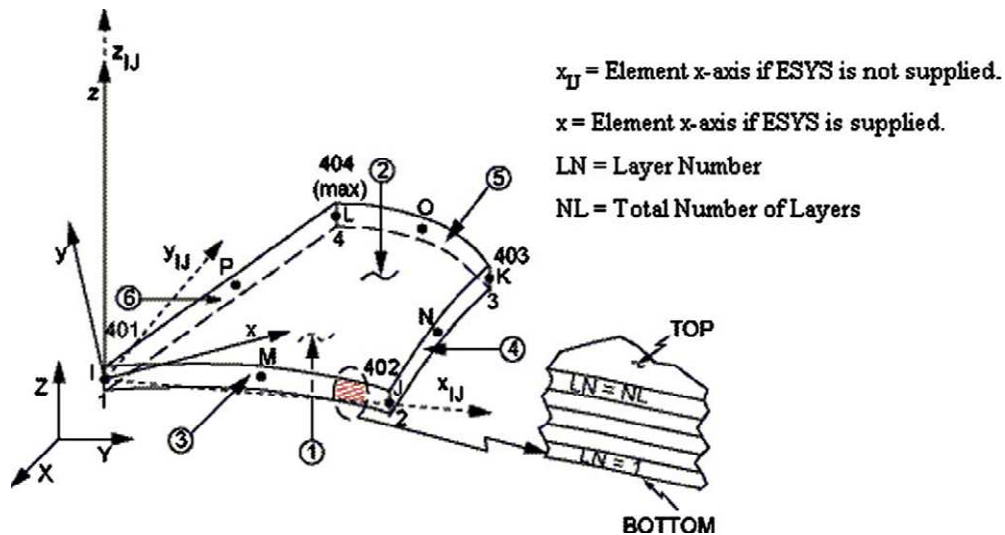


Figure 5.3 Géométrie de l'élément fini SHELL91 [65]

Deux types de maillage différents, le maillage graduel autour du trou et le maillage uniforme (10×10), sont utilisés pour étudier les plaques avec et sans trous, respectivement. Le maillage graduel autour du trou est représenté sur la Figure (5.4). Comme on le voit sur cette figure, le modèle a été divisé avec des éléments quadrilatères pour une bonne génération de maillage. En outre, un processus de raffinement du maillage a été réalisée autour du trou, du moment que les régions proches de ce dernier sont très critiques vis-à-vis des solutions fournies par la méthode *MEF*. Le maillage raffiné fourni en générale une solution très sensible. Par conséquent, les résultats obtenus par ce type de maillage sont beaucoup plus précis que ceux du maillage régulier.

Des calculs préliminaires ont été menés pour déterminer la maille requise de l'élément fini pour assurer la convergence des résultats. Des résultats acceptables ont été obtenus pour

les deux cas, l'analyse vibratoire et le flambement, avec le maillage graduel et le maillage régulier. Les résultats de cette étude sont présentés sous forme adimensionnelles suivantes :

$$\text{Fréquences naturelles : } \Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$$

$$\text{Charge de flambement : } N_{cr} = N a^2 / E_2 h^3$$

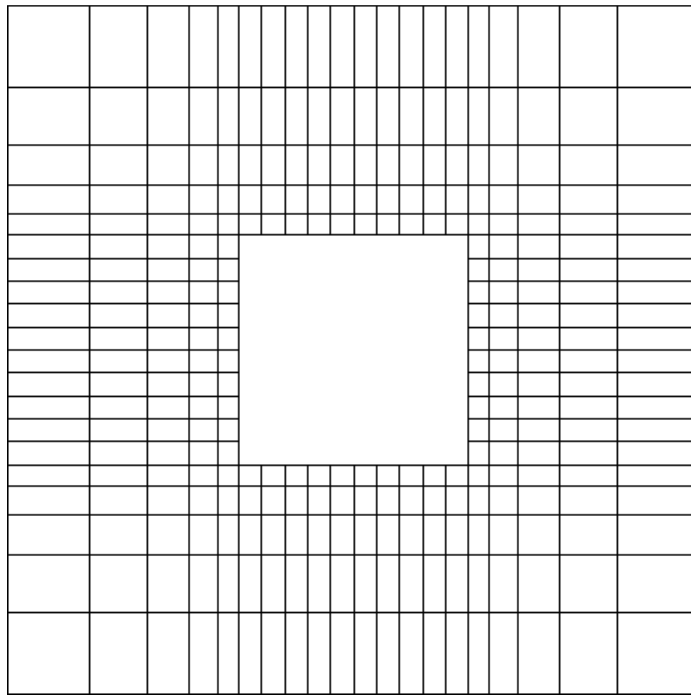


Figure 5.4 *Maillage avec des éléments à géométrie graduelle autour de l'ouverture*

5.4.1 L'analyse du flambement

Dans cette section, les effets des séquences d'empilement et le degré d'anisotropie du matériau sur les charges critiques de flambement sont présentés dans la figure (5.5) pour des plaques stratifiés équilibrés symétriques avec et sans ouverture carrée centrale. Comme on le voit sur cette figure, premièrement, dans tous les cas, les charges critiques de flambement augmentent avec l'augmentation du degré d'anisotropie du matériau et l'angle d'orientation des fibres qui correspond à la valeur maximale de la charge critique de flambement est 45° .

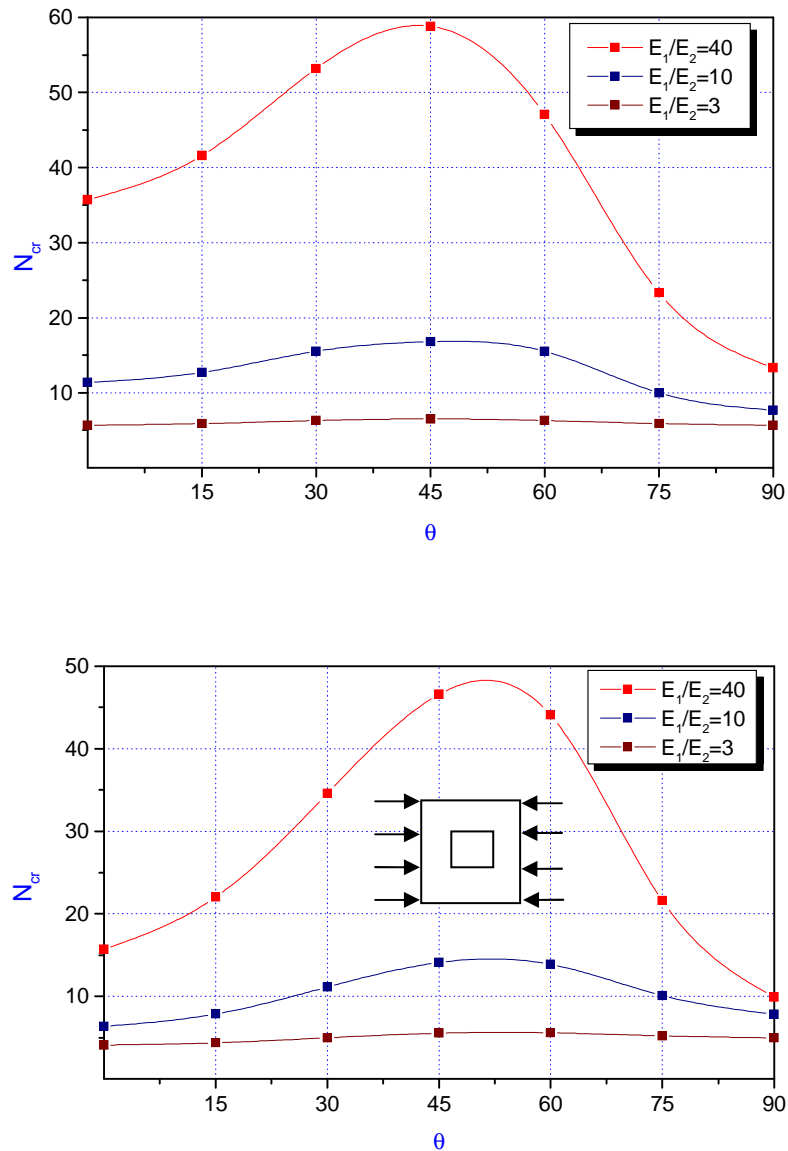


Figure 5.5 Variation de la charge de flambement avec l'orientation des fibres
(compression uniaxiale)

Deuxième point important dans la figure (5.5), la charge critique de flambement se réduit dans de très faibles pourcentages pour les plaques trouées lorsque le degré d'anisotropie du matériau prend les valeurs 3 ou 10. Toutefois, dans le cas de matériaux à haut degré d'anisotropie, la diminution de la charge critique est plus grande pour les stratifiés qui possèdent des angles d'orientation des fibres variant de 0° à 45° . En outre, nous avons pu observer que la charge critique de flambement de la plaque trouée se rapproche de celle d'une plaque sans trou pour une orientation des angles de 60° à 90° .

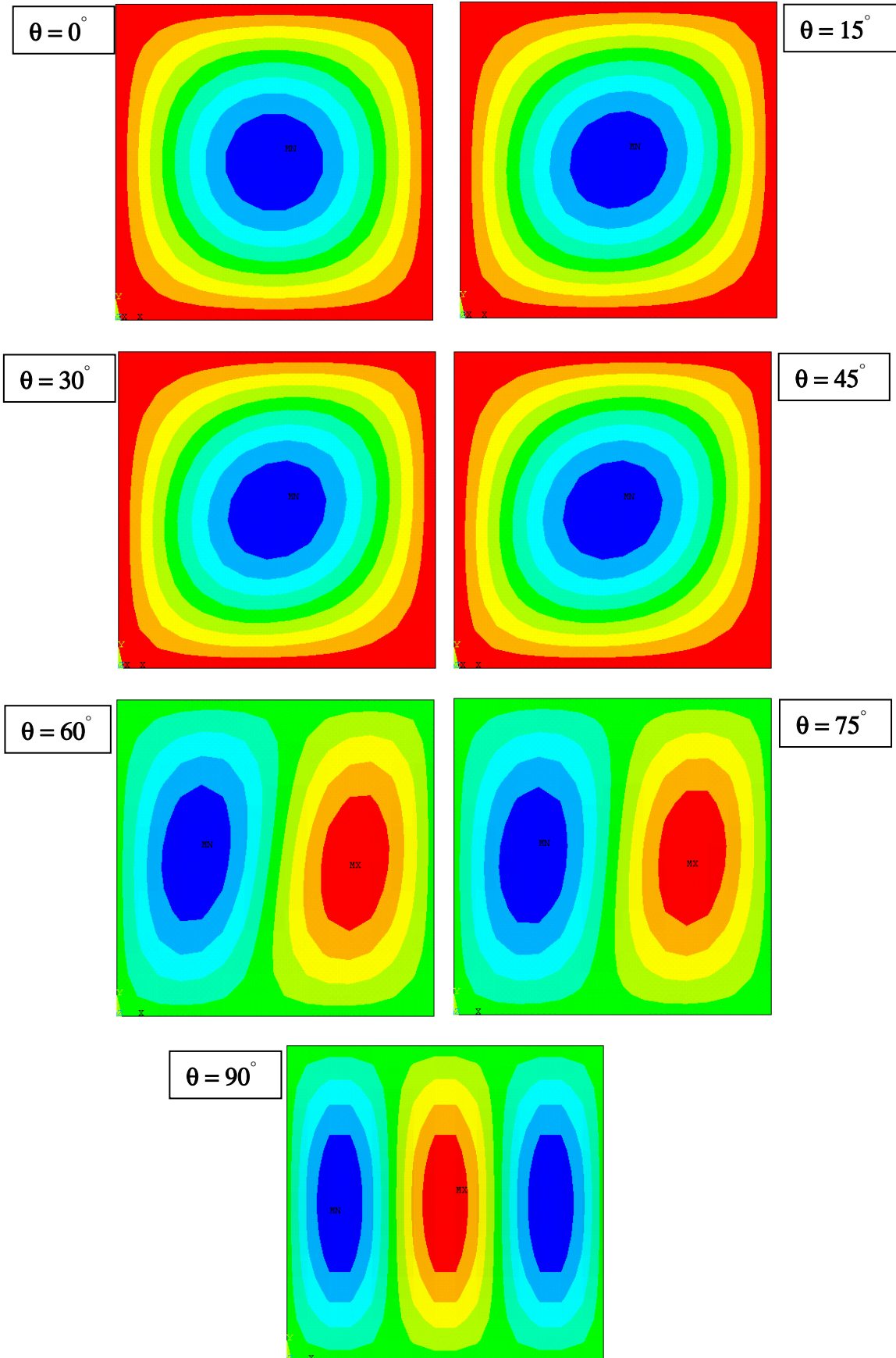


Figure 5.6 Premiers modes de flambement d'une plaque en comp. uniaxiale ($E_1/E_2 = 40$)

5.4.2 L'analyse des vibrations

Les effets des séquences d'empilement et du degré d'anisotropie du matériau sur les fréquences propre de vibrations d'une plaque composite stratifié avec ou sans ouverture lorsqu'elle est soumise à une compression uniaxiale uniforme dans le plan sont présentés sur les figures (5.7), (5.8) et (5.9). Les résultats sont donnés pour des charges de compression uniaxiale dans le plan égales à 50 % des charges critiques de flambement correspondantes. Dans tous les cas, nous pouvons observer que la fréquence naturelle de plaques stratifiées trouées reste proche de celles sans trous.

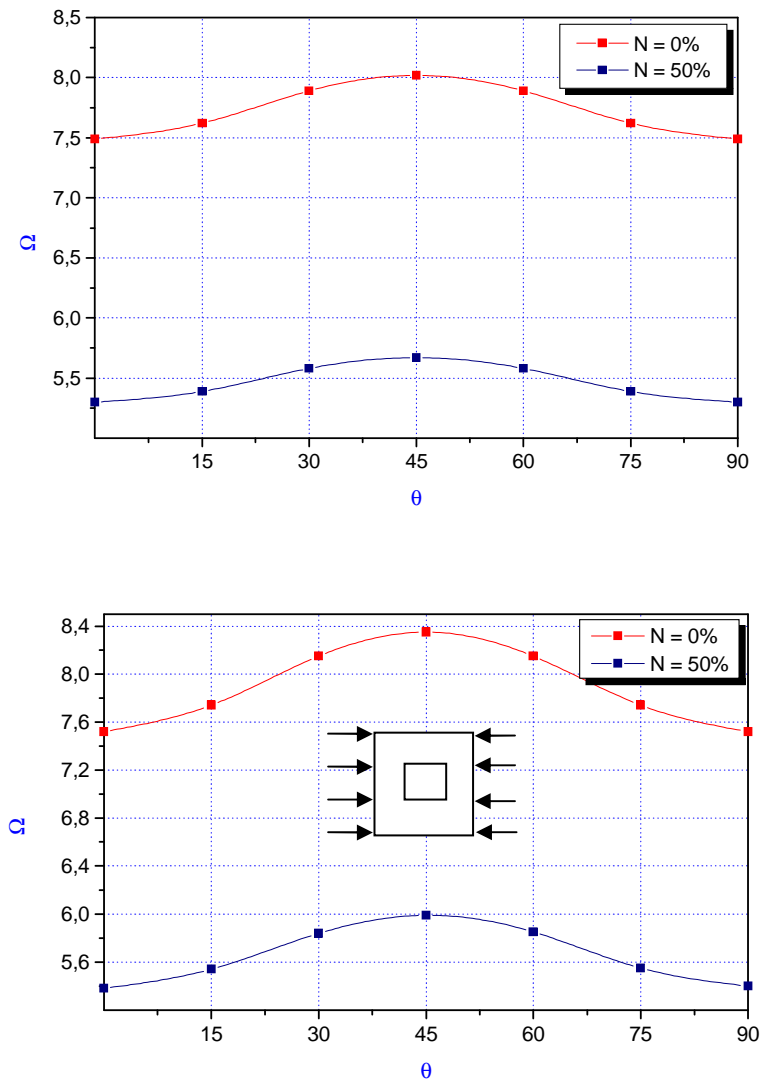


Figure 5.7 Variation de la fréquence fondamentale avec l'orientation des fibres ($E_1/E_2 = 3$)
(compression uniaxiale)

Il est clair que la fréquence naturelle augmentera progressivement pour les plaques avec des trous plus grands ($c/a > 0,333$). Il est également observé lorsque les plaques sont déchargées ($N = 0$), que les fréquences naturelles de vibration ont une distribution symétrique par rapport à la valeur maximale correspondant à $\theta = 45^\circ$. Lorsque les plaques sont soumises à la compression uniaxiale, la variation de la fréquence propre de vibration est montrée sur la figure (5.7) pour les matériaux possédant un degré d'anisotropie $E_1/E_2 = 3$. La fréquence propre est réduite de manière uniforme, en raison de l'application de la compression uniaxiale, de près de 28% et 29% pour les stratifiés avec et sans trou, respectivement.

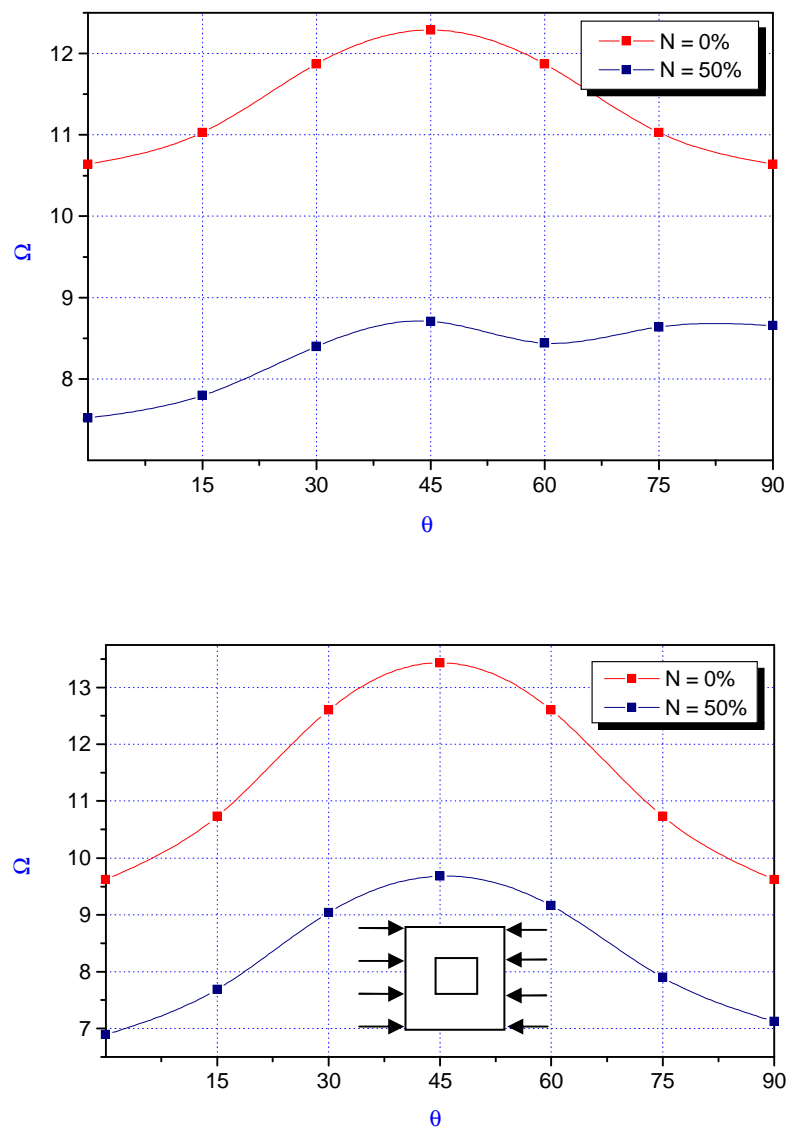


Figure 5.8 Variation de la fréquence fondamentale avec l'orientation des fibres ($E_1/E_2 = 10$) (compression uniaxiale)

Selon la figure (5.8), dans le cas de matériaux ayant un degré d'anisotropie $E_1/E_2 = 10$, les différences entre les fréquences naturelles sont non-uniforme pour l'intervalle des angles d'orientation 60-90 °. La réduction se poursuit de 28% à 26% et de 29% à 18% pour les plaques stratifiés avec et sans trou, respectivement. En outre, la réduction de la fréquence naturelle devient plus prononcée pour les matériaux possédant un degré d'anisotropie plus élevé ($E_1/E_2 = 40$), La figure (5.9) montre que la réduction est de 28% à 15% et de 29% à 11% pour les plaques stratifiés avec et sans trou, respectivement.

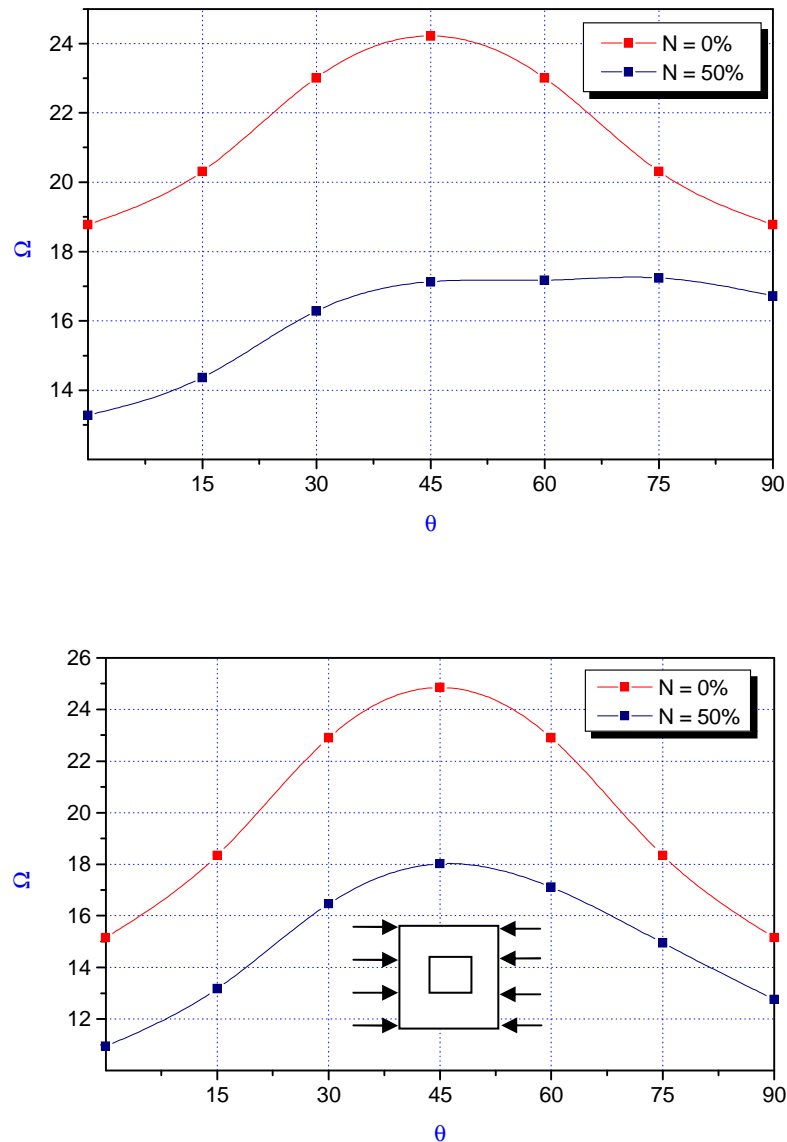


Figure 5.9 Variation de la fréquence fondamentale avec l'orientation des fibres ($E_1/E_2 = 40$) (compression uniaxiale)

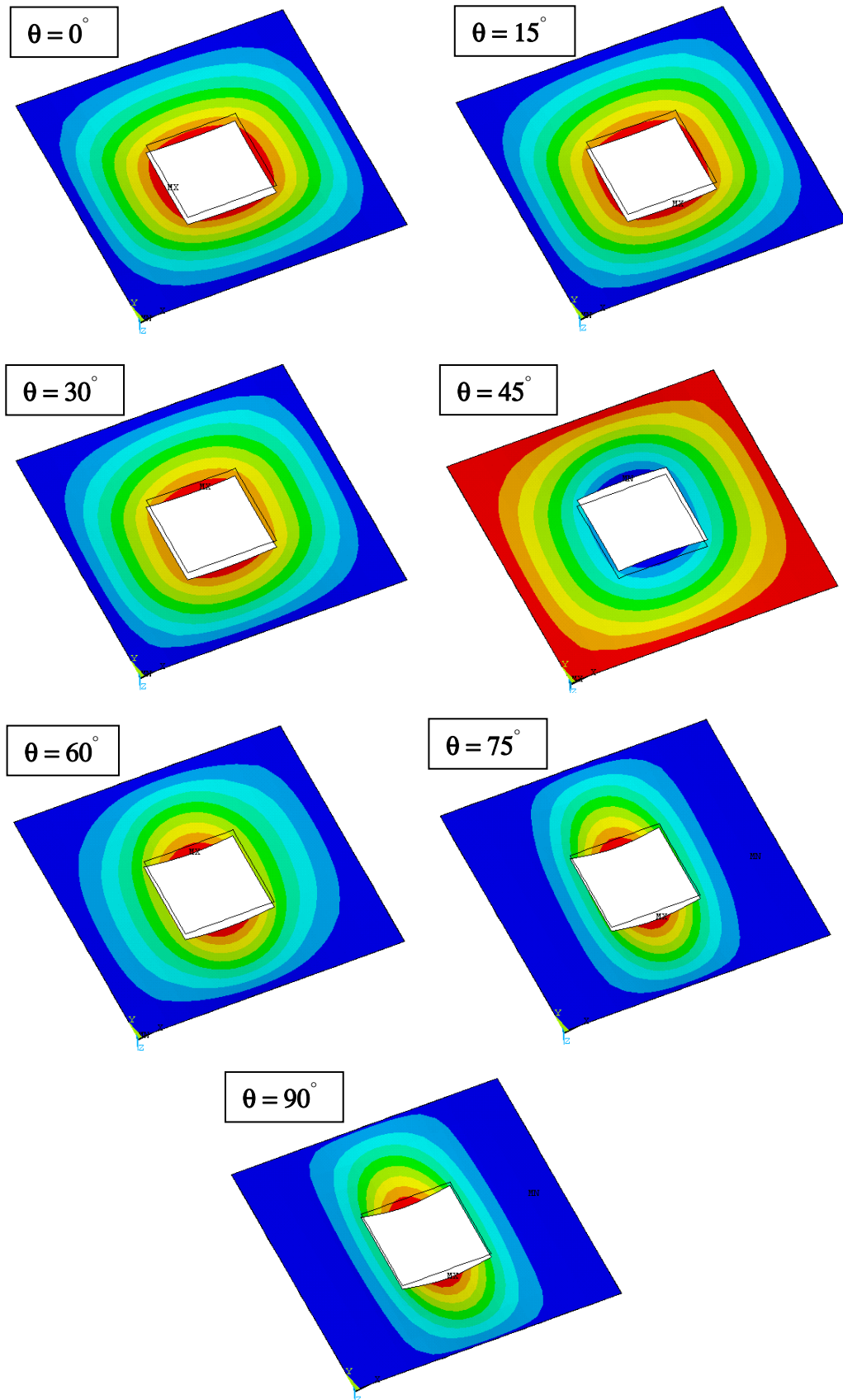


Figure 5.10 Premiers modes de flambement d'une plaque trouée en compression uniaxiale
 ($E_1/E_2 = 40$)

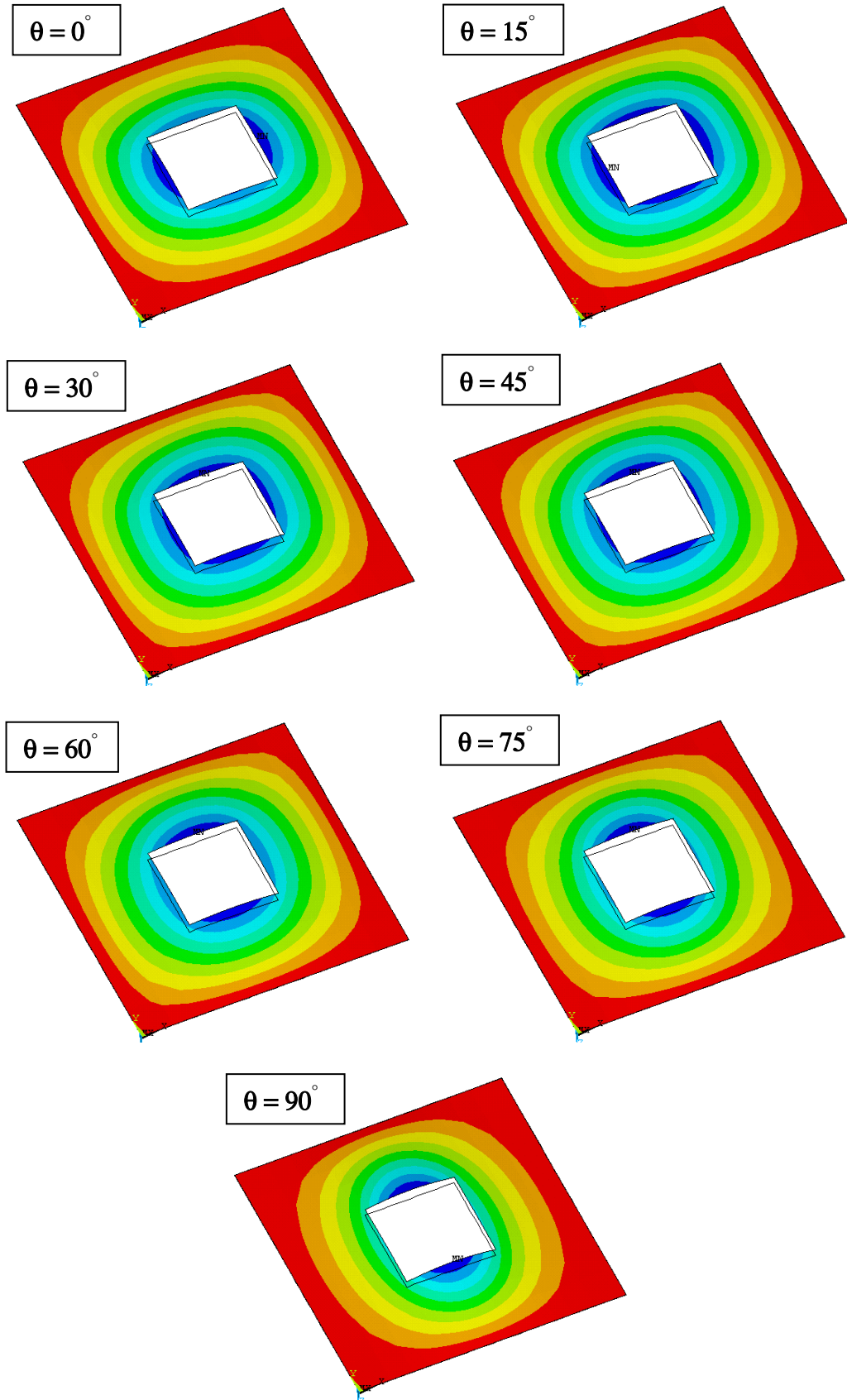


Figure 5.11 Modes fondamentales de vibration d'une plaque trouée en compression uniaxiale égale à 50% de la charge de flambement ($E_1/E_2 = 40$)

5.5 Vibration des plaques stratifiées trouées sous compression biaxiale

Une étude similaire à la précédente a été réalisée pour le cas de la compression biaxiale, les effets des séquences d'empilement et du degré d'anisotropie du matériau sur la charge de flambement et les fréquences propre de vibrations d'une plaque composite stratifié avec ou sans ouverture lorsqu'elle est soumise à une compression biaxiale uniforme dans le plan sont présentés sur les figures (5.13), (5.14), (5.15) et (5.16). Le chargement de compression biaxiale est montré sur la figure (5.12) avec le rapport N_x/N_y pris égale à unité.

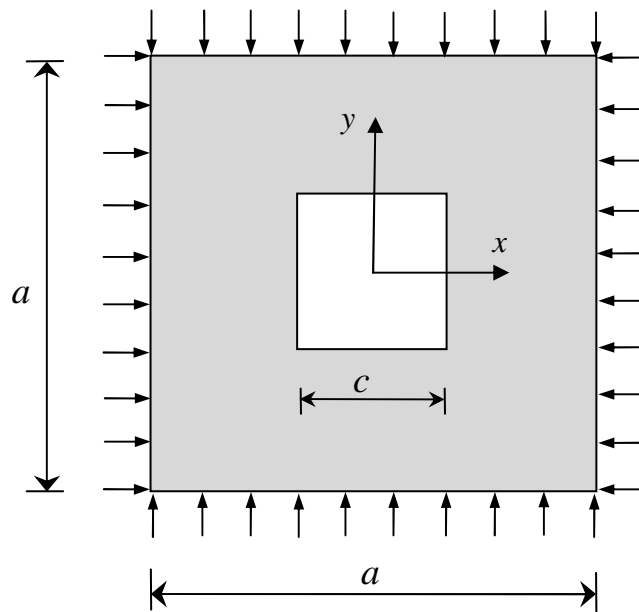


Figure 5.12 Géométrie et chargement biaxial du model

Les résultats trouvés indiquent que les charges critiques de flambement augmentent avec l'augmentation du degré d'anisotropie du matériau et ont une distribution symétrique par rapport à la valeur maximale correspondant à $\theta = 45^\circ$. Cela est dû à la symétrie du chargement contrairement au cas de la compression uniaxiale. La charge critique de flambement se réduit dans de très faibles pourcentages lorsque le degré d'anisotropie du matériau prend les valeurs 3 ou 10. Pour l'étude des vibrations sous compression biaxiale, on remarque que les fréquences propres sont réduites de manière uniforme, en raison de l'application de la force, de près de 28% et 29% pour les stratifiés avec et sans trou, respectivement. Toutefois, la réduction de la fréquence naturelle n'est plus uniforme pour les matériaux possédant un degré d'anisotropie élevé ($E_1/E_2 = 40$). La figure (5.16) montre que la réduction descend jusqu'à

16% pour les plaques sans trou correspondant aux angles 0° et 90° et 26% pour les plaques trouées. On notera, pour tous les cas, que les fréquences sont distribuées symétriquement autour de la valeur maximale ($\theta = 45^\circ$) contrairement à l'étude précédente.

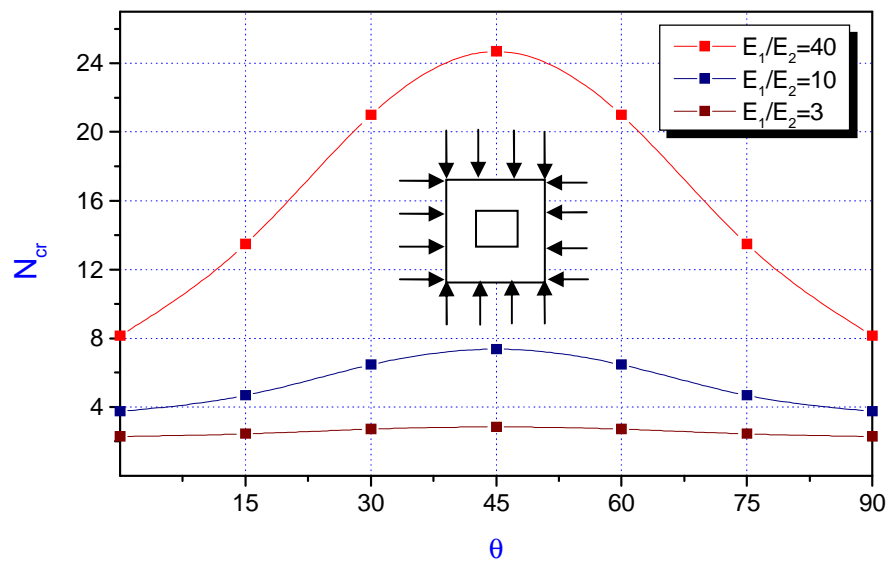
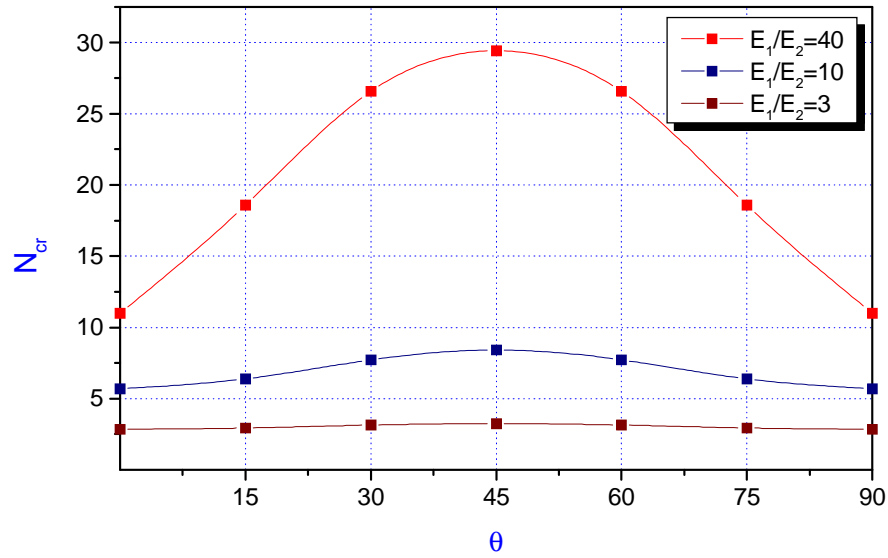


Figure 5.13 Variation de la charge de flambement avec l'orientation des fibres (compression biaxiale)

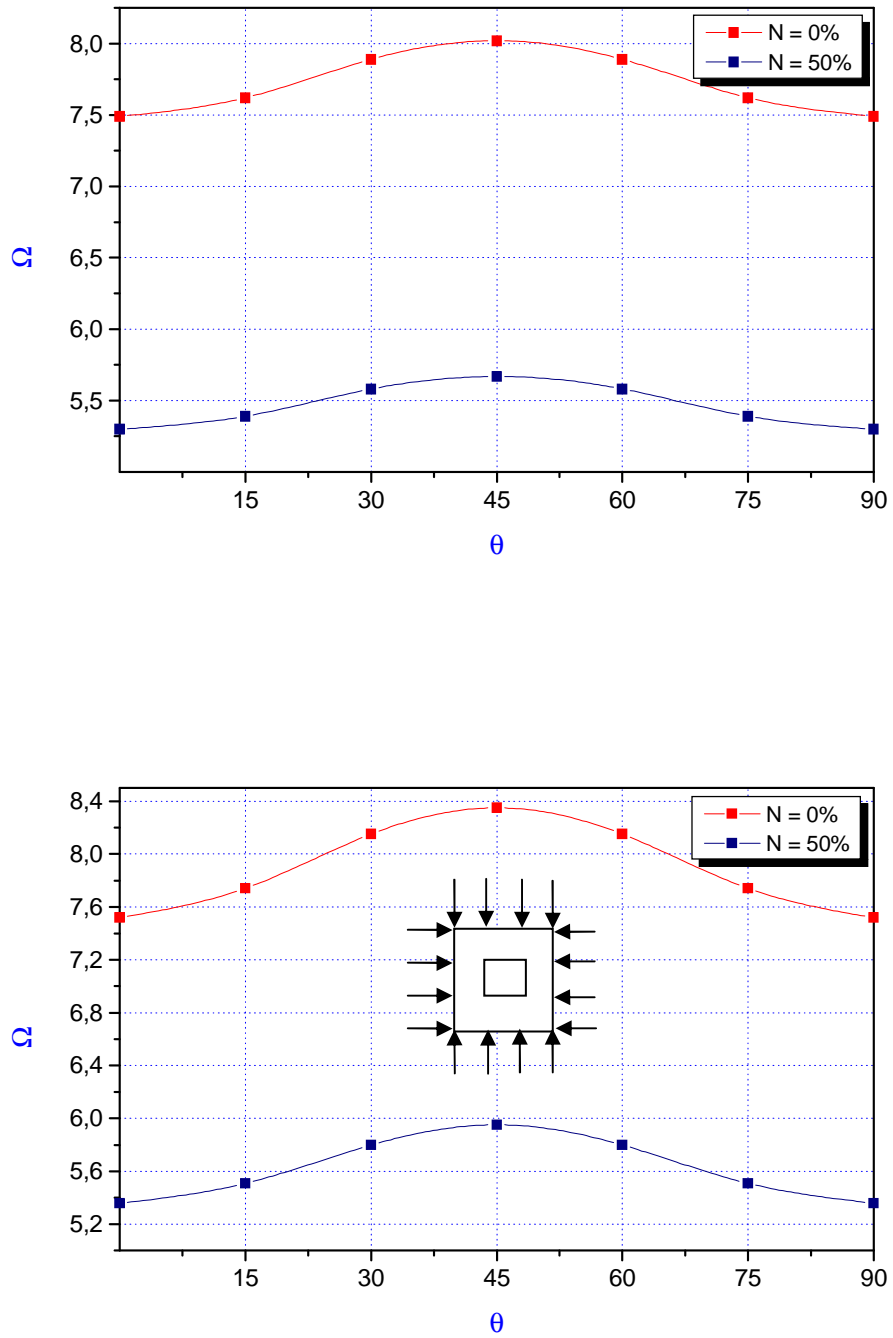


Figure 5.14 Variation de la fréquence fondamentale avec l'orientation des fibres ($E_1/E_2 = 3$) (compression biaxiale)

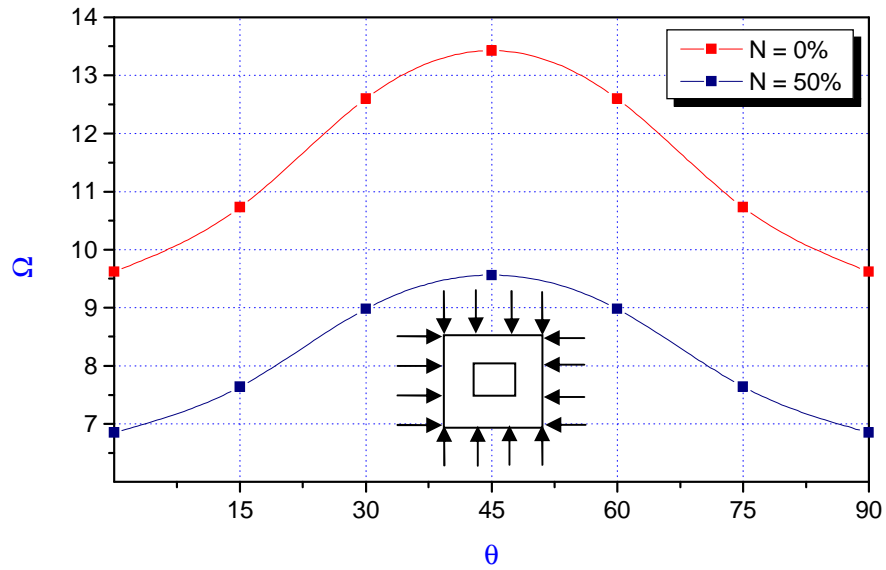
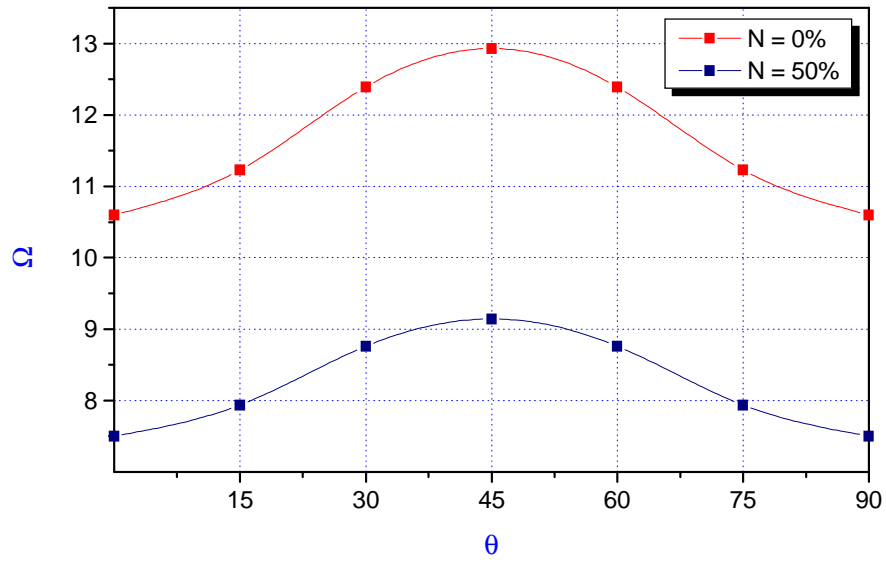


Figure 5.15 Variation de la fréquence fondamentale avec l'orientation des fibres ($E_1/E_2 = 10$) (compression biaxiale)

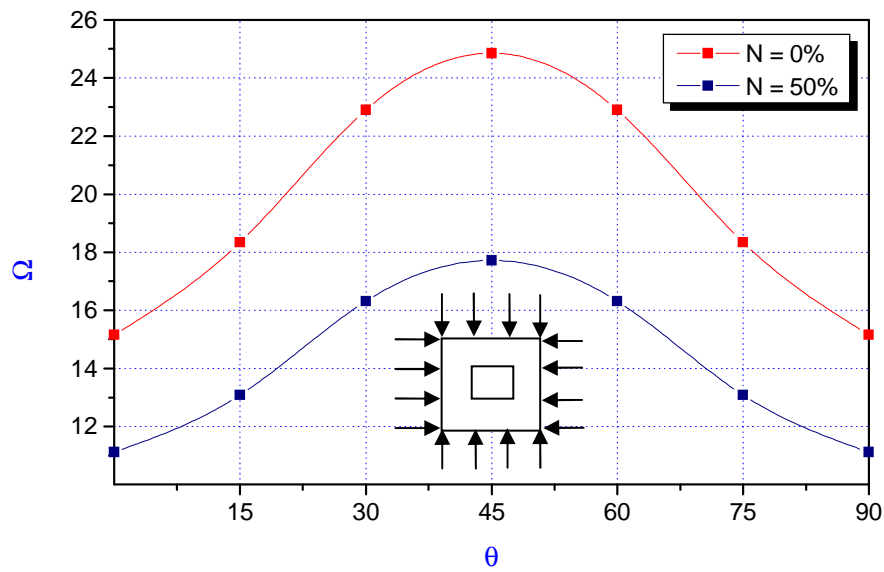
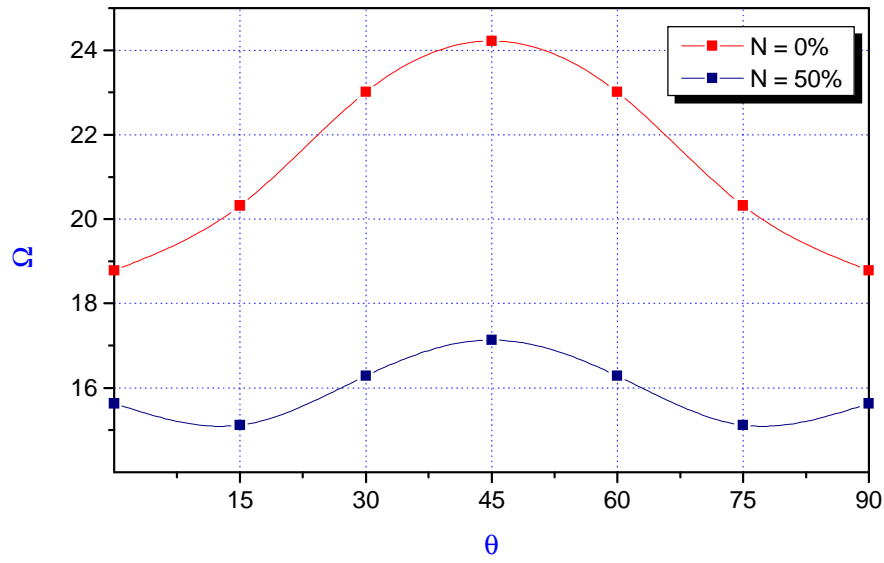


Figure 5.16 Variation de la fréquence fondamentale avec l'orientation des fibres ($E_1/E_2 = 40$) (compression biaxiale)

5.6 Conclusion

Dans cette étude, la réponse vibratoire des plaques composites stratifiées équilibrées symétriques avec et sans trou carré lorsqu'elles sont soumises à des charges de compression est étudiée. La compression uniaxiale et biaxiale sont prises égale à 50% des charges critiques de flambement correspondantes. De plus, les effets des séquences d'empilement et du degré d'anisotropie du matériau sur les fréquences naturelles et les charges critiques de flambement sont calculés. Le processus de modélisation et les solutions ont été effectuées avec la méthode des éléments finis *MEF* en utilisant le logiciel *Ansys*.

De l'étude de la compression uniaxiale, les principales conclusions suivantes peuvent être faites. $\theta = 45^\circ$ donne la valeur la plus élevée de la fréquence naturelle de vibration et la charge critique de flambement dans tous les cas étudiés. Le degré d'anisotropie du matériau a une forte incidence sur les charges critiques de flambement. Dans le cas de matériaux à haut degré d'anisotropie, la charge critique de flambement de la plaque trouée se rapproche de celle d'une plaque sans trou pour les angles d'orientation des fibres variant de 60° à 90° . Lorsque les plaques sont soumises à une charge de compression uniaxiale, les fréquences propres sont réduites de façon uniforme pour des matériaux qui présentent un faible degré d'anisotropie. Toutefois, cette réduction devient non uniforme pour les matériaux avec un degré plus élevé d'anisotropie et se produit pour des angles d'orientation allant de 60° à 90° .

En ce qui concerne l'étude de la compression biaxiale, on notera, pour tous les cas, que les fréquences naturelles et les charges critiques de flambement sont distribuées symétriquement autour de la valeur maximale correspondant à $\theta = 45^\circ$. Cela est dû à la symétrie du chargement contrairement au cas de la compression uniaxiale. En outre, la réduction de la fréquence naturelle, lorsque les plaques sont soumises à la compression, n'est plus uniforme pour les matériaux possédant un degré d'anisotropie élevé mais reste symétrique.

Conclusions et Perspectives

Dans cette thèse, les vibrations et le flambement des plaques composites stratifiées conventionnelles et auxétiques avec ou sans trous ont été étudiés. Les plaques constituées par les matériaux composites avancés tels que le Carbone/Epoxyde et/ou le Bore/Epoxyde sont utilisées comme des composantes primaires ou secondaires dans des structures en relation avec l'aérospatiale, l'aéronautique, la défense, l'industrie automobile, les constructions navales et civiles. Les matériaux composites avancés sont souvent préférés par rapport aux matériaux métalliques en raison de leurs très grandes résistances et rigidités spécifiques et l'avantage de l'adaptation de leurs propriétés. Pour des raisons de performance et d'intégrité structurelle, le comportement dynamique et la stabilité de forme de ces éléments de structures doivent être globalement étudiés et bien compris. Ainsi, il est essentiel de déterminer les charges critiques de flambement et les caractéristiques dynamiques telles que les fréquences naturelles et leurs modes associés. A cet effet, nous avons mené une étude comparative entre les théories *CLT*, *HSDT* et la méthode des éléments finis, puis on a réalisé une étude sur la prédiction et le comportement vibratoire des plaques stratifiées auxétiques et enfin une étude de l'effet de la présence de trous rectangulaires sur la réponse vibratoire de plaques composites stratifiées symétriques lorsqu'elles sont soumises à des charges de compression dans leur plan.

Dans la première étude, on a présenté les deux théories analytiques *CLT*, *FSDT* et la méthode *MEF* basée sur une formulation tenant compte du cisaillement transverse (code *Ansys*) pour le calcul de la charge de flambement et les fréquences propres des plaques stratifiées orthotropes simplement appuyées. Puis, on a procédé à leur comparaison à travers l'étude de la variation de la charge critique de flambement et les fréquences de pulsation propres en fonction du rapport largeur-sur-épaisseur de la plaque. Les configurations des plaques testées sont deux stratifiés croisés symétriques orthotropes **A** et **B** et un stratifié symétrique quasi-isotrope **C** (les coefficients de rigidités D_{16} et D_{26} sont très petits par rapport aux autres coefficients). Les principales conclusions de cette étude sont les suivantes :

- La théorie *CLT* devra être réservée exclusivement pour l'étude des plaques minces alors que la théorie *FSDT* et la *MEF* sont convenables aux études de structures composites minces et peu épaisses.
- Le nombre de couche très restreint du stratifié **A** influe sur la précision de la solution entre *FSDT* et *MEF* pour le cas des plaques épaisses en vibration libre.
- L'utilisation d'une théorie d'ordre supérieure telle que *HSDT* et le raffinement du maillage pour la méthode *MEF* sont nécessaires pour l'obtention d'une solution plus précise dans le cas des fréquences naturelles d'ordre élevé.
- Les coefficients D_{16} et D_{26} , même petits par rapport aux autres coefficients, influent d'une manière significative sur la solution analytique du flambement et la vibration dans le cas des plaques épaisses (stratifié **C**). Dans ce cas, il faudrait opter pour des méthodes approchées telle que celle de Ritz ou la *MEF*.

La deuxième étude a trait à une simulation numérique pour la prédiction du comportement auxétique, coefficient de Poisson négatif à travers l'épaisseur, de stratifiées balancés symétriques $[\pm\theta]_{ns}$. Les résultats trouvés sont en accord avec ceux donnés analytiquement par la théorie classique des stratifiés et confirment le caractère auxétique des matériaux composites à fibres haute résistance HR présentant un fort degré d'anisotropie dans les couches continues (par exemple les composites en stratifiés carbone/époxyde). D'autre part, nous avons effectué une analyse des vibrations libres des plaques stratifiées auxétiques en utilisant le code *Ansys*. Il a été trouvé, pour les plaques simplement appuyées, que la fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation du rapport largeur-sur-épaisseur, le degré d'anisotropie et l'angle d'orientation des fibres pour l'intervalle 0° - 45° . On notera, pour les plaques encastées, une légère diminution de la fréquence propre des stratifiés minces et des valeurs presque constantes des stratifiés épais. Cependant pour les angles 35° et 58° qui correspondent à la même valeur du coefficient de Poisson mais avec des signes opposés, la variation de la fréquence fondamentale n'est pas influencée par le caractère auxétique du matériau et reste conforme à l'évolution dictée par les conditions de symétrie du stratifié.

En ce qui concerne la troisième étude, on a voulu comprendre l'effet de la présence ou non de trous rectangulaires sur la réponse vibratoire de plaques composites stratifiées symétriques lorsqu'elles sont soumises à des charges de compression dans leur plan. Cette étude numérique a été réalisée pour la compression uniaxiale et biaxiale qui sont prises égale

à 50% des charges critiques de flambement correspondantes. De plus, les effets des séquences d'empilement et du degré d'anisotropie du matériau sur les fréquences naturelles et les charges critiques de flambement sont évalués. Les principales conclusions suivantes peuvent être faites :

- L'étude de la compression uniaxiale révèle que $\theta = 45^\circ$ donne la valeur la plus élevée de la fréquence naturelle de vibration et la charge critique de flambement dans tous les cas étudiés. Le degré d'anisotropie du matériau a une forte incidence sur les charges critiques de flambement. Lorsque les plaques sont soumises à une charge de compression uniaxiale, les fréquences propres sont réduites de façon uniforme pour des matériaux qui présentent un faible degré d'anisotropie. Toutefois, cette réduction devient non uniforme pour les matériaux avec un degré plus élevé d'anisotropie et se produit pour des angles d'orientation allant de 60° à 90° .
- Pour la compression biaxiale on a constaté que les fréquences naturelles et les charges critiques de flambement sont distribuées symétriquement autour de la valeur maximale correspondant à $\theta = 45^\circ$. Cela est dû à la symétrie du chargement contrairement au cas de la compression uniaxiale. On notera aussi que la réduction de la fréquence naturelle, lorsque les plaques sont soumises à la compression, n'est pas uniforme pour les matériaux possédant un degré d'anisotropie élevé mais reste symétrique.

En guise de **perspectives** à ce travail de recherche, nous envisageons de développer les aspects suivants :

- Développer une analyse des plaques stratifiées avec ou sans trous dans le domaine non-linéaire, pour le calcul des configurations pré et post-flambement.
- Améliorer la précision de calcul des fréquences propres et des charges de flambement pour les plaques épaisses en adoptant des théories plus développées telles que *HSDT* ou *Layerwise theory*.
- Ce travail peut être étendu à l'étude des panneaux sandwich en nids d'abeilles ou les coques stratifiées de révolution avec des conditions aux limites générales.

Références Bibliographiques

- [1] Jones, Robert M., “*Mechanics of Composite Materials*,” Washington, Scripta Book Co., 1975.
- [2] ASM International Handbook Committee, “*Engineered Material Handbook, Volume 1: Composites*,” ASM International, Metals Park, Ohio, 1988.
- [3] Niu, Michael Chun-Yung, “*Composite Airframe Structures*,” Hong Kong Conmilit Press Ltd., Hong Kong, 1992.
- [4] Lakes, R.S., 1986. Experimental microelasticity of two porous solids. *Int. J. Solids Struct.* 22, 55–63.
- [5] Lakes, R.S., 1987. *Foam structures with a negative Poisson’s ratio*. *Science* 235, 1038–1040.
- [6] Lakes, R.S., 1991. Experimental micro mechanics methods for conventional and negative Poisson’s ratio cellular solids as Cosserat continua. *J. Eng. Mater. Technol.* 113, 148–155.
- [7] <<http://www.bolton.ac.uk/auxnet/background/index.html>>
- [8] Whitney JM. *Structural analysis of laminated anisotropic plates*, 1st ed. Western Hemisphere. Technical Publishing Company; 1987, p. 263–95.
- [9] Reisner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* 1945; 12:69–77.
- [10] Mindlin RD. Influence of rotary inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* 1951; 18:336–43.
- [11] Wu CI, Vinson JR. Nonlinear oscillations of laminated specially orthotropic plates with clamped and simply supported edges. *Journal of Acoustical Society of America* 1971; 49(5):1561–8.
- [12] Warburton G. The vibration of rectangular plates. *Proceeding of the Institute of Mechanical Engineering* 1954; 168:371–82.

- [13] Hearmon R. The frequency of flexural vibrations of rectangular orthotropic plates with clamped or simply supported edges. *Journal of Applied Mechanics* 1959; 26:537–42.
- [14] Bert CW, Chen TC. Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle-ply laminated rectangular plate. *Institute Journal of Solid Structures* 1977; 14:265–473.
- [15] Yang PC, Norris GH, Stavsky Y. Elastic wave propagation in heterogeneous plates. *International Journal of Solid and Structures* 1996; 2:1665–84.
- [16] Bhimaraddi A, Stevens LK. A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous, and laminated rectangular plates. *Journal of Applied Mechanics* 1984; 51:95–8.
- [17] Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics* 1984; 51(84):745–52.
- [18] Whitney JM, Pagano NJ. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plate. *Journal of Applied Mechanics* 1970; 37:1031–6.
- [19] Timoshenko, S.P., (1961), *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York.
- [20] Vakiener, A.R., Zureick, A., and Will, K.M., (1991), “Prediction of Local FlangeBuckling in Pultruded Shapes by Finite Element Analysis”, *Advanced Composite Materials in Civil Engineering Structures*, S. L. Iyer Ed., ASCE, N. Y., pp. 303-312.
- [21] Ashton, J.E. and Waddoups, M.E., (1969), “Analysis of Anisotropic Plates”, *Journal of Composite Materials*, Vol. 3, pp. 148-165.
- [22] Ashton, J.E. and Whitney, J.M., (1970), *Theory of Laminated Plates*, Technomic, Stamford, Conn.
- [23] Bao, G., Jiang, W., and Roberts, J.C., (1997), Analytic and Finite Element Solutions for Bending and Buckling of Orthotropic Rectangular Plates”, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 34, No. 14, pp. 1797-1822.
- [24] Veres, I.A. and Kollar, L.P., (2001), “Buckling of Rectangular Orthotropic Plates Subjected to Biaxial Normal Forces”, *Journal of Composite Materials*, Vol. 35, No. 7, pp. 625-635.

- [25] Khdeir, A.A., (1989), “Stability of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 115, No. 5, pp.952-963.
- [26] Pandey, M.D. and Sherbourne, A.N. (1991), “Buckling of Anisotropic Composite Plates Under Stress Gradient”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 117, No. 2, pp.260-275.
- [27] Chen, W., (1994), “Buckling Mode Change of Antisymmetric Angle-Ply Laminates”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, No. 3, pp.661-669.
- [28] H.-N. Chu and G. Herrmann. Influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 23:532–40, 1956.
- [29] S.F. Bassily and S.M. Dickinson. Buckling and lateral vibration of rectangular plates subject to in-plane loads—a Ritz approach. *Journal of Sound and Vibration*, 24:219–39, 1972.
- [30] S.M. Dickinson. The buckling and frequency of flexural vibration of rectangular isotropic and orthotropic plates using Rayleigh’s method. *Journal of Sound and Vibration*, 61:1–8, 1978.
- [31] C.F. Ng and R.G. White. Dynamic behavior of postbuckled isotropic plates under in-plane compression. *Journal of Sound and Vibration*, 120:1–18, 1988.
- [32] G.H. Bryan. On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane with applications to the buckling of the sides of a ship. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 22:54–67, 1891.
- [33] S. Ilanko. Vibration and post-buckling of in-plane loaded rectangular plates using a multiterm Galerkin’s method. *Journal of Applied Mechanics*, 69:589–92, 2002.
- [34] R.G. Anderson, B.M. Irons, and O.C. Zienkiewicz. Vibration and stability of plates using finite elements. *International Journal of Solids and Structures*, 4:1031–55, 1968.
- [35] Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells; theory and analysis* (second edition). CRC Press; 2004.
- [36] Berthelot JM. *Matériaux composites; comportement mécanique et analyse des structures* (troisième édition). Paris: Technique & Documentation; 1999.

- [37] Evans KE. 1995. Microstructural modelling of auxetic microporous polymers. *Journal of Material Science* 30, 3319–3332.
- [38] Herakovich CT. composite laminates with negative through-the-thickness Poisson's ratio. *J. Composite Materials* 1985, 18, 447–455.
- [39] Tsai SW and Hahn HT. *Introduction to composite materials*. Technomic, Lancaster PA 1980.
- [40] Miki M and Morotsu Y. The peculiar behavior of the Poisson's ratio of laminated fibrous composites. *JSME International Journal*, 1989, 32, 67–72.
- [41] Lakes RS and Elms K. Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams. *Journal of Composite Materials*, 1993, 27, 1193–1202.
- [42] Alderson A and Evans KE. Microstructural modeling of auxetic microporous polymers. *Journal of Material Science*, 1995, 30, 3319–3332.
- [43] Scarpa F, Pastorino P, Garelli A, Patsias S and Ruzzene M. Auxetic compliant flexible PU foams: static and dynamic properties. *Physica Status Solidi (b)*, 2005, 242(3), 681–694.
- [44] Scarpa F and Tomlinson G. Theoretical characteristics of the vibration of sandwich plates with in-plane negative Poisson's ratio values. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 230(1), 45–67.
- [45] Cytec Engineered Materials. <<http://composite.about.com>>
- [46] Whitney JM and Leissa AW. (1969) Analysis of heterogeneous anisotropic plates. *J. Applied Mech.* 36, 261–266.
- [47] Leissa AW and Narita Y. (1984) Vibration studies for simply supported rectangular plates. *Compos. Struct.* 12, 113–132.
- [48] Jensen DW and Crawley EF. (1984) Frequency determination techniques for cantilevered plates with bending-torsion coupling. *AIAA J.* 22, 415–420.
- [49] Shi JM, Nakatani A, Kitagawa H. Vibration analysis of fully clamped arbitrarily laminated plate. *Compos. Struct.* 2004; 63:115–22.

- [50] Latheswary S, Valsarajan KV, Rao YVKS. Free vibration analysis of laminated plates using higher-order shear deformation theory. *Institution of Engineers Journal-AS*. vol. 85, 050403, 2004.
- [51] Jones RM. *Mechanics of composite material*. Taylor and Francis; 1999.
- [52] Gibson RF. *Principals of composite material mechanics*. Mc Graw-Hill; 1994.
- [53] Berthelot JM. *Composite materials mechanical behavior and structural analysis*. New York: Springer; 1999.
- [54] Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates; theory and analysis*. CRC Press; 1997.
- [55] Herakovich CT, Tarnopolskii YM. *Handbook of composites. Structures and design*, vol. 2. Amsterdam: North-Holland; 1989.
- [56] Leissa AW. Buckling of laminated composite plates and shells panels. *Air Force Wright-Patterson Aeronautical Laboratories*, Final report, No. AFWAL-TR-85-3069; 1985.
- [57] Paramasivam P. Free vibration of square plates with square openings. *Journal Sound Vibration* 1973;30:173–8.
- [58] Aksu G, Ali R. Determination of dynamic characteristics of rectangular plates with cutouts using a finite difference formulation. *Journal Sound Vibr* 1976;44:147–58.
- [59] Rajamani A, Prabhakaran R. Dynamic response of composite plates with cutouts. Part I: Simply-supported plates. *Journal Sound Vibration* 1977;54:549–64.
- [60] Rajamani A, Prabhakaran R. Dynamic response of composite plates with cutouts. Part II: Clamped–clamped plates. *Journal Sound Vibration* 1977;54:565–76.
- [61] Lee HP, Lim SP. Free vibration of isotropic and orthotropic square plates with square cutouts subjected to in-plane forces. *Computers and Structures* 1992;43: 431–7.
- [62] Sabir AB, Davies GT. Natural frequencies of plates with square holes when subjected to in-plane uniaxial, biaxial or shear loading. *Thin-Walled Struct* 1997;29:312–35.

- [63] Ghannadpour SAM, Najafi A, Mohammadi B. On the buckling behavior of cross-ply laminated composite plates due to circular/elliptical cutouts. *Compos Struct* 2006;75:3–6.
- [64] Kong CW, Hong CS, Kim CG. Postbuckling strength of composite plate with a hole. *J Reinf Plast Compos* 2001;20:466–81.
- [65] ANSYS Procedures. Engineering analysis system verification manual, vol. 1. Houston, PA, USA: Swanson Analysis System Inc.; 1993.