



Université de Batna 2 – Mostefa Ben Boulaïd
Faculté de Technologie
Département d'Electronique



Thèse

Préparée au sein du Laboratoire d'électronique avancée

Présentée pour l'obtention du titre de :

Docteur en 3^{ème} Cycle LMD en Electronique
Option : Micro-ondes et télécommunications

Sous le Thème :

**Etude d'une antenne supraconductrice couverte par une
couche diélectrique**

Présentée par :

BEDRA Randa

Devant le jury composé de :

M. BENATIA Djamel	Prof.	Université de Batna -2-	Président
M. FORTAKI Tarek	Prof.	Université de Batna -2-	Rapporteur
M. MAHAMDI Ramdane	Prof.	Université de Batna -2-	Examineur
M. MESSAI Abderraouf	Prof.	Université Frères Mentouri- -Constantine -1-	Examineur
M. BELATTAR Mounir	MCA	Université de Skikda	Examineur

Avril 2018

Remerciements

- ❖ Avant tout, mes remerciements à mon **DIEU**, le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années d'études afin que je puisse arriver à ce stade.
- ❖ Je voudrais exprimer, par ce modeste travail, ma gratitude et ma considération à Monsieur **Tarek FORTAKI**, Professeur à l'université de Batna 2, pour avoir suivi mon travail avec une attention soutenue, pour leurs qualités scientifiques et humaines qui m'ont beaucoup aidé et guidé tout au long de mes années de recherches.
- ❖ Je remercie très sincèrement Monsieur le Professeur **Djamel BENATIA**, de l'université de Batna 2, pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail et d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.
- ❖ Toute ma gratitude va à Monsieur le Professeur **Ramdane MAHAMDI**, de l'université de Batna 2, pour avoir accepté d'évaluer ce travail.
- ❖ Monsieur **Abderraouf MESSAI**, Professeur à l'université des frères Mentouri Constantine 1, et Monsieur **Mounir BELATTAR**, Maître de conférences classe A à l'université de Skikda, ont aimablement accepté de participer au jury, je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.
- ❖ Je tiens à remercier particulièrement tous les enseignants du département d'électronique de l'université de Batna 2, qui ont veillé à notre formation.
- ❖ Mes remerciements vont également à tout le personnel du département d'électronique de l'université de Batna 2 pour leur gentillesse et leur disponibilité.
- ❖ Enfin, j'exprime mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Table des matières

Table des matières

Introduction Générale	1
------------------------------------	---

Chapitre I

Généralités sur les antennes microrubans

I.1. Introduction	10
I.2. Structure d'une antenne microruban	10
I.3. Principe de fonctionnement.....	11
I.4. Caractéristiques et propriétés des antennes imprimées	13
I.5. Techniques d'alimentation des antennes microbandes	15
<i>I.5.1. Excitation par ligne microruban</i>	15
<i>I.5.2. Alimentation par une sonde coaxiale</i>	15
<i>I.5.3. Alimentation par couplage par proximité</i>	16
<i>I.5.4. Alimentation couplée par fente (ouverture)</i>	17
I.6. Méthodes d'analyse des antennes imprimées.....	19
<i>I.6.1. Les Méthodes Analytiques</i>	19

<i>I.6.2. Les Méthodes Rigoureuses</i>	20
I.7. Méthodes d'optimisation.....	22
<i>I.7.1. Algorithmes génétiques</i>	23
<i>I.7.2. Réseaux de neurones artificiels</i>	23
<i>I.7.3. Méthodes hybrides</i>	24
I.8. Applications	25
I.9. Conclusion.....	26
I.10. Références bibliographiques	26

Chapitre II

Analyse des antennes microbandes de formes régulières par la méthode de la cavité

II.1. Introduction.....	30
II.2. Modélisation des antennes microbandes par la méthode de la cavité.....	31
II.3. Modèle de cavité modifié pour une antenne de forme rectangulaire.....	34
II.4. Modèle de la cavité modifiée pour une antenne microbande circulaire	36
II.4. Modèle de la cavité modifiée d'une antenne microbande elliptique	39
II.5. Fréquence de résonance d'un patch supraconducteur.....	46
II.6. Résultats numériques et discussions	47
II.6.1. Cas d'une antenne microbande rectangulaire.....	47
II.6.2. Cas d'une antenne microbande circulaire.....	49
II.6.3. Cas d'une antenne microbande elliptique.....	53

II.7. Conclusion	58
II.8. Références bibliographiques.....	59

Chapitre III

Etude d'une antenne microbande supraconductrice avec radôme

III.1. Introduction	63
III.2. Formulation mathématique et structure du problème.....	64
III.3. Résultats numériques et discussion	71
III. 4. Conclusion.....	79
III .5. Références bibliographiques.....	80

Chapitre IV

Modes résonants d'une antenne circulaire imprimée sur des substrats isotropes /anisotropes

IV. 1. Introduction	84
IV. 2. Théorie.....	85
<i>IV. 2.1. Dyade de Green dans le domaine des transformées vectorielles de Hankel</i>	<i>85</i>
<i>IV. 2.2. Solution par la méthode des moments.....</i>	<i>88</i>

IV. 2.3. <i>Choix des fonctions de base</i>	90
IV. 3. Comparaison des résultats numériques	90
IV. 4. Discussion	92
IV. 5. Conclusion.....	100
IV. 6. Références bibliographiques	100

Conclusion Générale	104
----------------------------------	-----

Annexes

Annexe A

Fonctions de Bessel	111
---------------------------	-----

Annexe B

Coordonnées elliptiques et fonctions de Mathieu modifiées.....	118
--	-----

Annexe C

Publications internationales dans le cadre de cette thèse	130
---	-----

Résumé, Abstract, ملخص	131
-------------------------------------	-----

Introduction Générale

Introduction générale

Actuellement, les antennes à faibles profils sont très demandées dans les nouveaux systèmes de télécommunication, où la taille, le coût, la conformabilité, ...etc., sont des contraintes exigées [1]. Les antennes imprimées, de part de leur nature, répondent bien à ces exigences. Elles possèdent également l'avantage de pouvoir se confondre avec pratiquement n'importe quelles surfaces et elles sont relativement faciles à fabriquer. Leur faible profil constitue un avantage du point de vue aérodynamique [2]. Comme elles sont compatibles avec les circuits intégrés monolithiques Microondes (Monolithic Microwave Integrated Circuit) MMIC [3]. Toutefois, les antennes microrubans possèdent de façon intrinsèque une bande passante étroite, un gain relativement faible et des pertes de rayonnement par ondes de surfaces [1]-[4]. Pour y remédier à ces inconvénients plusieurs travaux de recherches ont été menés et ont abouti à des progrès considérables améliorant les performances de ces antennes [4], [5]. La méthode la plus simple pour élargir la bande passante d'une antenne consiste à augmenter l'épaisseur du substrat diélectrique entre l'élément rayonnant et le plan de masse. Cette méthode ne peut pas, cependant, être appliquée sans causer des anomalies ; à savoir l'excitation des ondes de surface et la perte de l'aspect faible poids, volume et épaisseur fortement souhaitable dans les applications des résonateurs microbandes [6]. Il a été montré que le paramètre le plus sensible lors de l'estimation des performances d'une antenne microbande est la constante diélectrique du substrat [7]. Cependant, beaucoup de substrats pratiques utilisés dans les structures microbandes exhibent un taux significatif d'anisotropie, spécialement l'anisotropie uniaxiale [8]-[10]. Parmi ces substrats pratiques nous citons le Saphir, l'Epsilam-10 et la Nitrure de Bore. Cette anisotropie affecte les performances des antennes imprimées, et donc une caractérisation et conception précises de ces dernières doivent tenir compte de cet effet [4]. Comme exemple, nous citons l'utilisation des substrats diélectriques anisotropes pour élargir la bande passante [7]. En effet, Pozar a démontré que l'anisotropie diélectrique devrait être prise en compte lors de la conception des résonateurs microrubans, puisque dans le cas contraire ces résonateurs risquent de fonctionner en dehors de leur bande passante [4].

La découverte des supraconducteurs à haute température critique en 1986 a relancé l'intérêt pour les applications des supraconducteurs. En électronique, les efforts se sont d'abord essentiellement concentrés sur les composants passifs micro-ondes, qui trouvent progressivement des applications dans le domaine des télécommunications [11]. Les composants micro-ondes passifs supraconducteurs ont montré une supériorité significative relativement aux composants correspondants fabriqués avec des conducteurs normaux tels que l'or, l'argent et le cuivre en raison des avantages des supraconducteurs [12]. Les avantages de l'utilisation des matériaux supraconducteurs en hyperfréquences incluent : 1) très faible pertes ; ce qui veut dire réduction de l'atténuation et du niveau de bruit, 2) dispersion très petite, 3) miniaturisation des dispositifs microondes ; ce qui permet une large échelle d'intégration et 4) réduction dans le temps de propagation des signaux dans les circuits [13]. Récemment, un grand intérêt a été observé dans le développement et l'utilisation de matériaux supraconducteurs à haute température critique. De nombreux travaux de recherche ont montré que la puissance dissipée dans la bande millimétrique est très grande, surtout dans le cas où le matériau du patch est un conducteur normal [5]. Pour diminuer la puissance dissipée et améliorer le gain, les patches à base de matériaux supraconducteurs ont été utilisés [5]-[6], [13].

Une variété de méthodes existent dans la littérature pour l'analyse des antennes microbandes, ces Méthodes peuvent être classées en deux catégories principales [4] : La première catégorie regroupe les méthodes intuitives simples. Dans ces méthodes la simplicité de la formulation se faisait au détriment de la prise en compte des phénomènes physiques intimes ainsi que des suppositions physiques posées au préalable. Parmi ces méthodes nous citons le modèle de la ligne de transmission et celui de la cavité. Ces modèles aboutissent généralement à des formules analytiques simples, menant à une meilleure compréhension du phénomène physique, et bien compatible avec la CAO (conception assistée par ordinateur) [4]. Le deuxième groupe regroupe les méthodes d'analyses rigoureuses [14]. Elles sont basées sur les problèmes aux frontières des grandeurs électromagnétiques et elles sont fondées sur des formalismes mathématiques complexes. Ces méthodes ne peuvent conduire à des résultats exploitables que par le biais d'une résolution numériques. Les méthodes les plus reconnues sont la méthode aux différences finies, la méthode des éléments finies et la méthode de l'équation intégrale conjointement avec la méthode des moments [15]-[17]. Ces méthodes, qui sont d'actualité,

ne sont pas limitées par les conditions classiques imposées sur le substrat, et permettent d'analyser des antennes de formes très variées [7].

Dans la littérature ouverte, les études concernant les caractéristiques de résonance des antennes microrubans avec et sans couches protectrices utilisant des plaques parfaitement conductrices sont nombreuses [18]-[24]. Cependant, peu de travaux ont été effectués pour le cas des plaques microbandes supraconductrices dans des configurations substrat-superstrat [22]-[24]. Au meilleur de notre connaissance, l'effet du superstrat diélectrique sur les caractéristiques de résonance de l'antenne circulaire supraconductrice n'a pas été traité auparavant dans la littérature ouverte ; les résultats publiés concernent uniquement la fréquence d'opération de l'antenne [25].

L'objectif de cette thèse est de développer des méthodes d'analyse rigoureuse permettant d'estimer avec précision les performances des antennes microrubans fabriquées à base de patches parfaitement conducteurs et supraconducteurs avec et sans couche protectrice. Pour ce faire, nous utilisons deux méthodes bien distinctes. La première utilise le modèle de cavité avec les connaissances électromagnétiques, alors que la deuxième sera fondée sur l'approche spectrale conjointement avec les conditions aux limites de la résistivité complexe.

Le manuscrit présenté s'articule autour de trois thèmes distincts. Chaque thème sera traité d'une façon assez indépendante et presque autonome dans un chapitre propre à lui.

Le premier chapitre présente des généralités sur les antennes microbandes, leur mécanisme de fonctionnement ainsi que les techniques d'excitation. Les différentes méthodes d'analyse les plus couramment utilisées seront présentées aussi. Nous terminerons ce chapitre par la présentation des différentes applications de ce type d'antennes.

Dans le second chapitre, nous présentons en détail le modèle de cavité à murs latéraux magnétiques pour trois différentes formes de l'élément rayonnant, à savoir, la forme rectangulaire, circulaire et elliptique. En effet, cette dernière offre l'avantage de pouvoir résonner à deux fréquences, une paire et l'autre impaire. Afin d'inclure l'anisotropie du substrat et la supraconductivité de l'élément rayonnant dans le modèle de cavité, nous faisons appel aux connaissances électromagnétiques. En plus de la simplicité de sa

formulation mathématique, L'avantage du modèle de cavité est qu'il permet une compréhension qualitative des phénomènes électromagnétiques.

Par la suite, dans le chapitre trois nous allons décrire les étapes nécessaires pour la modélisation d'une antenne microbande circulaire supraconducteur couverte par une couche protectrice. L'approche spectrale conjointement avec les conditions aux limites de la résistivité complexe seront utilisées comme outils d'analyse. A travers une comparaison de nos résultats avec les valeurs théoriques et expérimentales disponibles dans la littérature, nous montrons que notre modèle apporte une amélioration significative sur la précision des résultats, relativement aux modèles antérieurs, notamment pour des substrats épais.

Finalement dans le dernier chapitre, nous étendons la méthode de Galerkin implémentée dans le domaine des transformées vectorielles de Hankel pour l'analyse d'une plaque circulaire imprimée sur un substrat diélectrique anisotrope et opérant en mode fondamental [26], de telle manière que la méthode peut traiter le cas des modes d'ordre supérieur.

Malgré la dominance théorique de notre étude, nous avons essayé de ne pas négliger l'aspect physique en essayant de donner des explications physiques des phénomènes électromagnétiques rencontrés pendant la modélisation numérique. Dans un souci de clarté de l'exposé et vu l'autonomie propre de chaque chapitre et son nombre important de formules mathématiques, nous avons opté pour une numérotation séparée des équations, paragraphes, tableaux et figures, qui reste propre à chaque chapitre.

Pour terminer ce manuscrit, une conclusion dressera un bilan sur les différents travaux réalisés au cours de cette thèse, et quelques propositions susceptibles d'ouvrir de nouvelles voix de recherche seront présentées.

Références bibliographiques

- [1] M. Abri, N. Boukli-Hacene, and F. T. Bendimerad, "Application du recuit simulé à la synthèse d'antennes en réseau constituées d'éléments annulaires imprimés," *Annales des Télécommunications*, pp. 1422-1438, 2005.
- [2] J. F. Blain, "Conception et fabrication d'antennes micro-rubans couplées par fentes permettant une polarisation circulaire variable," *Thèse de Doctorat, Ecole polytechnique de Montréal*, 1999.

- [3] C. Aissaoui, "Contribution à l'analyse des antennes microbandes avec excitation par la méthode du domaine spectral-Application à un réseau d'antennes microbandes." *Thèse de Doctorat, Université des frères Mentouri Constantine 1*, 2017.
- [4] S. Bedra, "Evaluation analytique et numérique des caractéristiques électromagnétiques des structures microbandes ouvertes, " *Thèse de Doctorat, Université de Batna*, 2015.
- [5] Y. Tighilt, "Identification des antennes micorubans multicouches par la methode spectrale et les reseaux de neurones," *Thèse de Doctorat, Université de Constantine*, 2014.
- [6] F. Chebara, "Etude des caractéristiques de résonance et de rayonnement des antennes microbandes réalisées avec des matériaux ayant une anisotropie de type électrique et magnétique," *Thèse de Doctorat, Université de Batna*, 2011.
- [7] T. Fortaki, "Contribution à l'étude des problèmes de caractérisation des antennes microbandes multicouches sans et avec ouvertures dans les plans de masse," *Thèse de Doctorat, Université de Constantine*, Juin 2004.
- [8] T. Fortaki, "Caractérisation d'une antenne microbande rectangulaire. Effets de l'anisotropie uniaxiale du substrat," *Thèse de Magister, Université de Constantine*, 1999.
- [9] F. Bouttout, F. Benabdelaziz, A. Benghalia, D. Khedrouche, and T. Fortaki, "Uniaxially anisotropic substrate effects on the resonance of rectangular microstrip patch antenna," *Electron. Lett.*, vol. 35, no. 4, pp. 255-256, 1999.
- [10] T. Fortaki et A. Benghalia, "Modélisation d'une antenne microbande par une nouvelle approche de la fonction tensorielle de Green dans le domaine spectral," dans *Proc. 1^{ère} Conférence Maghrébine en Génie Electrique*, vol. 1, pp. 162-165, Université de Constantine, Algérie, 4-6, 1999.
- [11] S. Fissette, "Fabrication d'un bolomètre supraconducteur à haute température critique opérant dans les micro-ondes," *Thèse de Magister, Université de Sherbrooke.*, 2009.
- [12] O. Barkat, "Etude et synthèse des caractéristiques de réseaux d'antennes imprimées supraconductrices dans la bande millimétrique," *Thèse doctorat e-sciences, 2009, université de Constantine, Algérie*.
- [13] S. Benkouda, "Contribution à l'étude des problèmes de caractérisation des antennes microrubans à plaques rayonnantes parfaitement conductrices et supraconductrices, " *Thèse doctorat e-sciences, université de Batna, Algérie*, 2012.
- [14] M. Amir, "Amélioration des performances des antennes imprimées basée sur des méthodes de modélisation et d'optimisation sophistiquées," *Thèse doctorat e-sciences, université de Batna, Algérie*, 2014.

- [15] D. Chatterjee and R. G. Plumb, "Some convergence considerations in space- domain moment method analysis of class of wide-band microstrip antennas, " *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 48, pp.147-160, 2000.
- [16] F. Bilotti and C. Vegni, "Rigorous and efficient full-wave analysis of trapezoidal patch antennas, " *IEE Trans. Antennas propagate.*,vol. 49, pp. 1773-1776, 2001.
- [17] F. Bilotti and C. Vegni, "MoM entire domain basis functions for convex polygonal patch, " *J. Electromag. Waves Applicat.*,vol. 17, no. 11, pp. 1519-1664, 2003.
- [18] H. Attia, L. Yousefi, and O. M. Ramahi, "Analytical model for calculating the radiation field of microstrip antennas with artificial magnetic superstrates: Theory and experiment," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 59, pp. 1438-1445, 2011.
- [19] S. K. Patel and Y. P. Kosta, "Metamaterial superstrate-loaded meandered microstrip-based radiating structure for bandwidth enhancement," *Journal of Modern Optics*, vol. 61, pp. 923-930, 2014.
- [20] R. Kumar and P. Malathi, "Experimental investigation of resonant frequency of multilayered rectangular and circular microstrip antennas," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 53, pp. 352-356, 2011.
- [21] C. Zebiri, M. Lashab, and F. Benabdelaziz, "Rectangular microstrip antenna with uniaxial bi-anisotropic chiral substrate–superstrate," *IET microwaves, antennas & propagation*, vol. 5, pp. 17-29, 2011.
- [22] O. Barkat, "Improving the performances of triangular microstrip antenna with multilayered configuration," *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, vol. 33, pp. 337-354, 2014.
- [23] D. Khedrouche and A. Benghalia, "Modeling the superconducting effects on resonance and radiation characteristics of a cylindrical-rectangular microstrip antenna covered with a dielectric layer," *Journal of Computational Electronics*, vol. 12, pp. 297-305, 2013.
- [24] O. Barkat and A. Benghalia, "Radiation and resonant frequency of superconducting annular ring microstrip antenna on uniaxial anisotropic media," *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*, vol. 30, pp. 1053-1066, 2009.
- [25] S. Bedra, R. Bedra, S. Benkouda, and T. Fortaki, "Superstrate loading effects on the resonant characteristics of high T_c superconducting circular patch printed on anisotropic materials," *Physica C: Superconductivity and its Applications*, vol. 543, pp. 1-7, 2017.

- [26] S. Benkouda, T. Fortaki, M. Amir, and A. Benghalia, "Resonance of High Tc Superconducting Microstrip Patch in a Substrate-Superstrate Configuration," *Advanced Electromagnetics*, vol. 2, pp. 19-21, 2014.

Chapitre I

Généralités sur les antennes microbandes

I.1. Introduction

Les antennes imprimées sont largement employées de nos jours puisqu'elles permettent de répondre à de nombreuses contraintes imposées par les systèmes de transmission [1]. Leur forme et dimensions favorisent leur intégration sur de nombreux mobiles (avion, voiture, missile, téléphone portable, etc...).

Les antennes microbandes (imprimées, à élément rayonnant, plaquée, ou même patch ou microstrip en anglais) sont apparues dans les années cinquante et ont été développées au cours des années soixante-dix [1]-[4]. Ce type d'antennes s'adapte facilement aux surfaces planes et non planes et présentent une grande robustesse et flexibilité lorsqu'elles sont montées sur des surface rigides [3], [5]-[7]. Ces antennes présentent toutefois des inconvénients majeurs, notamment, une bande passante étroite (1 à 3%) et un gain limité [1], [8]. De plus, le substrat diélectrique utilisé sous le patch métallique est une source de pertes [8].

Ce chapitre présente quelques généralités sur les antennes microbandes ainsi que leur mécanisme de fonctionnement, leurs avantages et leurs inconvénients. Nous présentons dans un premiers temps les principaux paramètres de ces antennes. Ensuite nous définissons les caractéristiques de ces antennes et nous discutons les différents types d'alimentation. Nous exposons également les méthodes usuelles les plus utilisées pour l'étude de ce type d'antennes.

I.2. Structure d'une antenne microruban

Une antenne microruban est une ligne microbande de forme particulière. Elle se compose d'un plan de masse et d'un ou de plusieurs substrats diélectriques dont la surface porte un élément métallique [3]. La figure I.1 illustre la géométrie d'une antenne microbande de forme quelconque. L'élément rayonnant est positionné sur un diélectrique métallisé sur sa face inférieure servant de plan de masse.

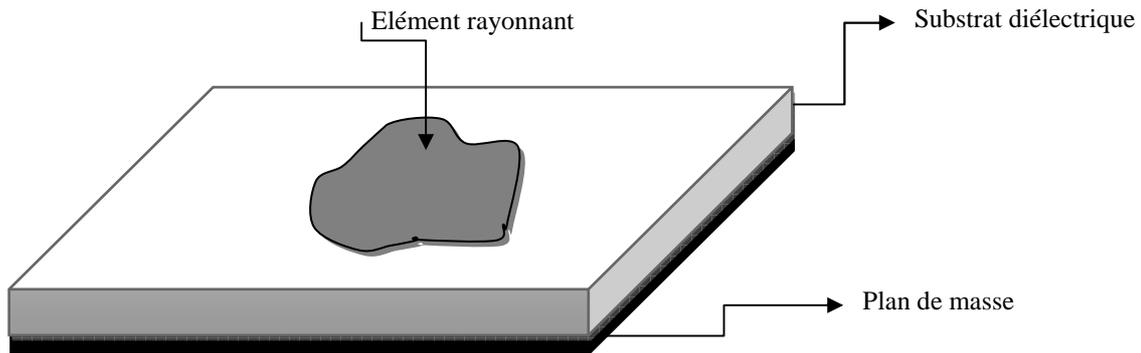


Figure I.1. Structure d'une antenne imprimée.

De façon générale, les éléments rayonnants utilisés sont de formes assez simples. Cependant, les formes les plus complexes permettent de répondre à des contraintes particulières telles que la polarisation circulaire. Dans notre travail, nous avons considéré trois formes, qui sont respectivement : rectangulaire, circulaire et elliptique (Figure II.2).

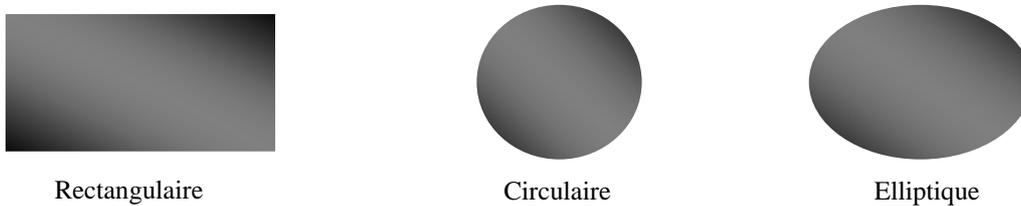


Figure I.2. Diverses formes de l'élément rayonnant.

I.3. Principe de fonctionnement

Pour comprendre comment fonctionne une antenne microbande, considérons la coupe donnée dans la Figure I.3. Au point a du conducteur supérieur, on a déposé une source ponctuelle (densité de courant de surface), qui rayonne dans toutes les directions [9], [10]. Une partie du signal émis est réfléchi par le plan de masse, puis par le conducteur supérieur et ainsi de suite. Certains des rayons aboutissent sur l'arête du conducteur (point b), qui les diffracte. Cette figure peut être divisée en trois régions distinctes [10] :

Région A (Ondes guidées) : dans le substrat, entre les deux plans conducteurs, les rayons sont le plus concentrés. Le champ électromagnétique s'accumule dans cette région de l'espace. Cette propriété est très utile pour la propagation du signal le long d'une ligne microruban.

Région B (Ondes rayonnées) : Dans l'air, au-dessus du substrat, le signal se disperse librement dans l'espace et contribue au rayonnement de l'antenne. Comme les courants de surface circulent surtout sur la face inférieure du conducteur supérieur (côté diélectrique), le rayonnement paraît surtout être émis par le voisinage immédiat des arêtes. Certains modèles simplifiés mettent à profit cette constatation : ils considèrent le rayonnement d'un ensemble de fentes fictives, situées sur le pourtour de l'antenne.

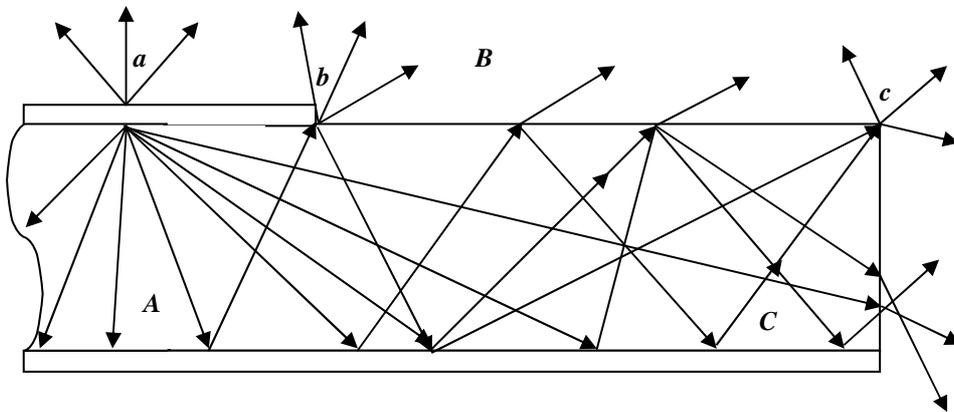


Figure I.3. Trajectoires des rayons dans une antenne microruban.

Région C (Ondes de surface) : Certains rayons atteignent les surfaces de séparation avec une incidence rasante, et restent piégés à l'intérieur du diélectrique. Il s'agit du mécanisme de la réflexion totale, dont font usage les fibres optiques. Une onde de surface est alors guidée par le bord du diélectrique, ne contribuant pas directement au rayonnement de l'antenne. Toutefois, quand cette onde atteint le bord du substrat (point c), elle est diffractée et génère un rayonnement parasite. Dans le cas d'une antenne en réseau, l'onde de surface crée un couplage entre les éléments du réseau. Le diagramme de rayonnement de l'antenne peut être perturbé par la présence d'ondes de surface, notamment au niveau des lobes secondaires. On pourrait en principe faire usage des ondes de surface pour alimenter les éléments d'un réseau [9], [10]. On peut associer des plages de fréquence aux trois régions précédentes :

Plage de fréquence A : En basse fréquence, les champs restent surtout concentrés dans la région A. Il y a alors propagation sans rayonnement. La structure qui en résulte est une ligne de transmission ou un des éléments dérivés.

Plage de fréquence B : A plus haute fréquence, le rayonnement dans l'air devient significatif et la structure se comporte comme une antenne. Il reste néanmoins une importante concentration des champs entre les deux conducteurs (énergie réactive emmagasinée dans la zone du champ proche). Comme les diélectriques présentent toujours certaines pertes, il en résulte une absorption du signal. Le rendement d'une antenne microruban reste de ce fait assez modeste.

Plage de fréquence C : Bien qu'une onde de surface puisse en principe se propager quelle que soit la fréquence du signal, c'est surtout au-dessus d'une certaine fréquence limite que ces ondes jouent un rôle significatif. La structure devient alors un lanceur d'ondes de surface. Elle ne peut plus guère être utilisée comme antenne, à moins que l'on ne dispose d'une transition adéquate, qui effectue le passage d'une onde de surface à une onde rayonnée [9]. Lors de la conception d'une antenne microruban, les dimensions et les propriétés du substrat doivent être choisies avec soins, afin d'assurer que le fonctionnement à la fréquence du signal se situera bien dans la deuxième plage de fréquence (**B**, rayonnement) [10]. Il faut encore noter que ces trois plages ne sont pas séparées par des cloisons nettes, mais plutôt qu'il y a des transitions graduelles entre-elle. Le choix des dimensions résulte par conséquent d'un compromis, qui tient compte de la quantité d'effets parasites pouvant être tolérée. Un paramètre jouant un rôle crucial est l'épaisseur du substrat. Un substrat très mince a tendance à concentrer les champs dans le diélectrique, ce qui réduit le rendement [9]. On peut l'améliorer en prenant un substrat plus épais. Malheureusement, cela augmente aussi la probabilité d'exciter des ondes de surface [10].

I.4. Caractéristiques et propriétés des antennes imprimées

Actuellement, les antennes patches deviennent de plus en plus importantes en raison de la grande variété des formes géométriques qu'elles peuvent prendre et qui les rendent applicables aux différentes situations d'intégration. Parmi les avantages de cette

technologie d'antennes, on peut citer : leur volume réduit, la conformabilité facilitant l'implantation sur tout type de support [11].

Ajoutons que la simplicité de leurs structures fait que ce type d'antenne est adapté au faible coût de fabrication [12], [13]. Ceci est une propriété clé qui explique l'introduction des antennes patchs dans de nouvelles applications civiles et militaires telles que : les communications et les radars (portables, missiles, satellites, bateaux...) [10].

1.4.1. Avantages et inconvénients des antennes imprimées

D'une façon générale, les avantages des antennes imprimées sont:

- ✓ Faible poids;
- ✓ Limitation du risque de panne;
- ✓ Faible coût de fabrication, production en masse;
- ✓ Facile à intégrer avec les circuits MMICs sur un même substrat;
- ✓ Polarisation linéaire et circulaire;
- ✓ Simples, robustes;
- ✓ Non encombrantes.

Cependant, elles présentent les inconvénients suivants :

- ✓ Faible bande passante (1 à 3 %);
- ✓ Généralement faible gain pour un élément simple;
- ✓ Supportent uniquement des faibles puissances;
- ✓ L'alimentation et les ondes de surface créent un rayonnement parasite;
- ✓ La plupart des antennes rayonnent uniquement dans le demi-plan;
- ✓ Faible pureté de polarisation.

Donc, la conception des antennes doit répondre à des compromis en termes de performances et de complexité de réalisation.

I.5. Techniques d'alimentation des antennes microbandes

Il existe plusieurs techniques pour l'alimentation des antennes microrubans, ces techniques peuvent être soit par contact direct soit par couplage, les plus communément utilisées sont l'alimentation par ligne microruban, par sonde coaxiale, par couplage de proximité ou par ouverture [10]. L'excitation de l'antenne doit être soigneusement maîtrisée pour ne pas influencer les caractéristiques de rayonnement. Par exemple, une antenne alimentée par une ligne microruban présente des discontinuités entre les lignes, les plaques rayonnantes et éventuellement des éléments d'adaptation. Toutes ces discontinuités rayonnent et peuvent modifier considérablement le diagramme de rayonnement de l'antenne [11].

I.5.1. Excitation par ligne microruban

L'alimentation peut se faire par :

- Connexion directe à une ligne microruban, généralement de 50Ω [12], dont le point de jonction est sur l'axe de symétrie de l'élément rayonnant (figure I.4.a) ;
- Décalage par rapport à cet axe de symétrie (figure I.4.b) ;
- Alimentation axiale avec une encoche qui permet d'avoir une meilleure adaptation d'impédance (figure I.4.c).

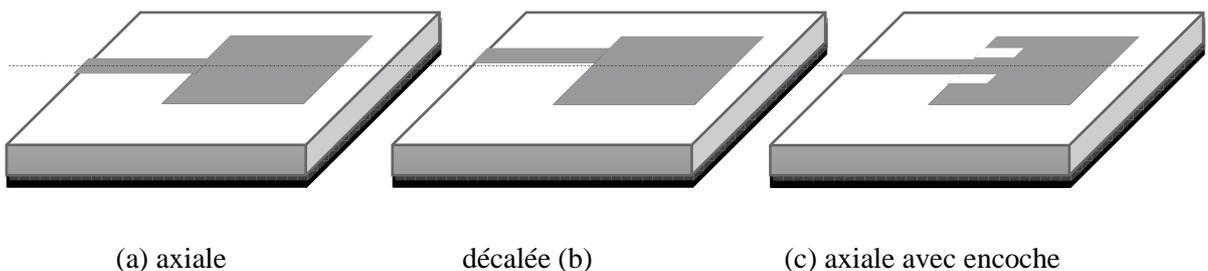


Figure I.4. Différents types d'alimentation par ligne microruban.

I.5.2. Alimentation par une sonde coaxiale

L'alimentation par sonde coaxiale est une technique très connue également et utilisée pour alimenter les résonateurs microrubans (figure I.5). Le conducteur central est connecté en

un point situé sur l'axe de l'élément rayonnant et le conducteur externe relié au plan de masse.

Cette méthode d'alimentation a été largement analysée dans la littérature. Elle a l'avantage de positionner l'alimentation sous l'élément rayonnant et d'utiliser une ligne non rayonnante, ce qui diminue fortement le rayonnement parasite.

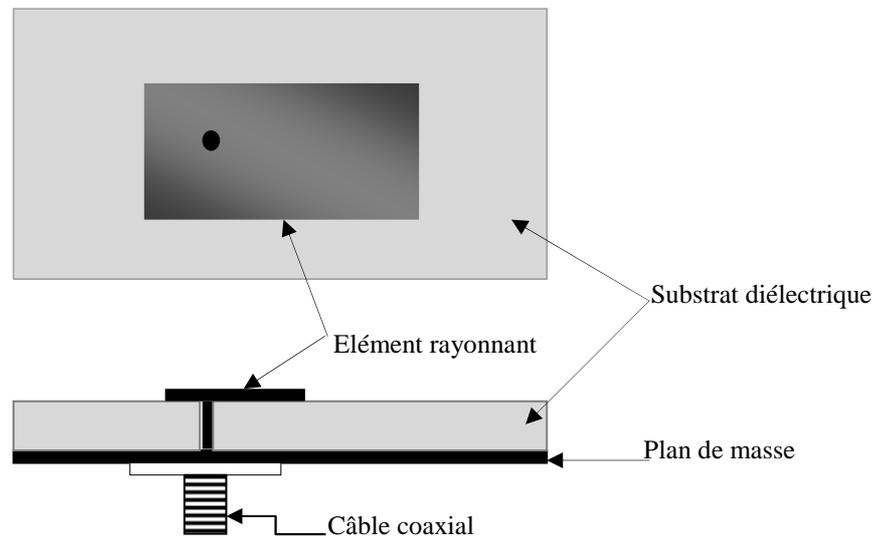


Figure I.5. Alimentation par sonde coaxiale.

1.5.3. Alimentation par couplage par proximité

L'alimentation couplée par proximité se fait selon un couplage électromagnétique d'une ligne microruban avec l'élément rayonnant. Deux substrats diélectriques sont employés tels que la ligne d'alimentation est située entre les deux substrats et le patch est imprimé sur le substrat supérieur (figure I.6). Les avantages principaux de cette alimentation sont l'élimination du rayonnement parasite et l'élargissement de bande passante (plus de 13%), en raison de l'augmentation globale de l'épaisseur de l'antenne microbande et son inconvénient réside dans la difficulté de la mise en œuvre [14].

Cette technique fournit également des choix entre deux milieux diélectriques différents, un pour le patch et un pour la ligne d'alimentation pour optimiser les performances de l'antenne [11].

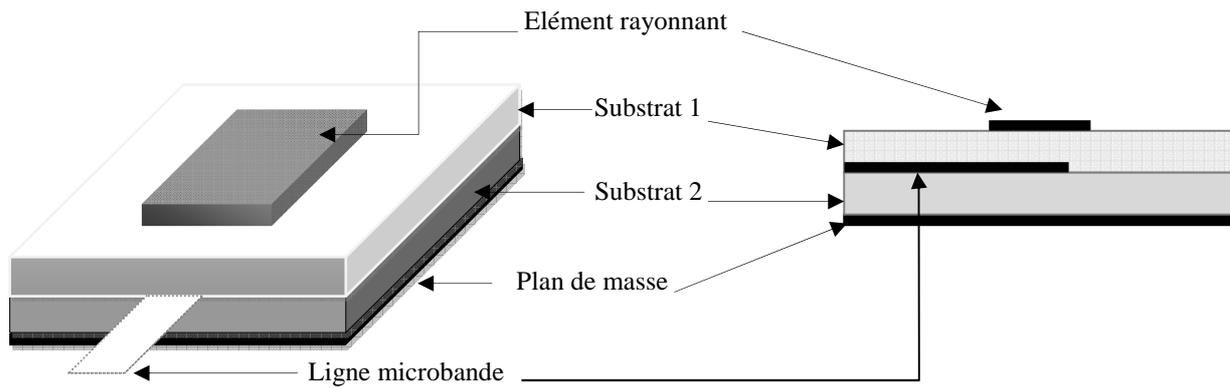


Figure I.6. Excitation par couplage électromagnétique.

1.5.4. Alimentation couplée par fente (ouverture)

Dans ce type d'alimentation, l'élément rayonnant et la ligne microruban d'alimentation sont séparés par le plan de masse (figure I.7). Le couplage entre les deux est assuré par une fente ou une ouverture dans le plan de masse. La quantité de couplage à partir de la ligne d'alimentation au patch est déterminée par la forme, la taille et l'emplacement de l'ouverture puisque le plan de masse sépare le patch et la ligne d'alimentation. L'avantage de ce type d'alimentation est la réduction du rayonnement parasite. Cependant, l'inconvénient majeur de cette technique est qu'elle présente des difficultés au niveau de la fabrication. [12].

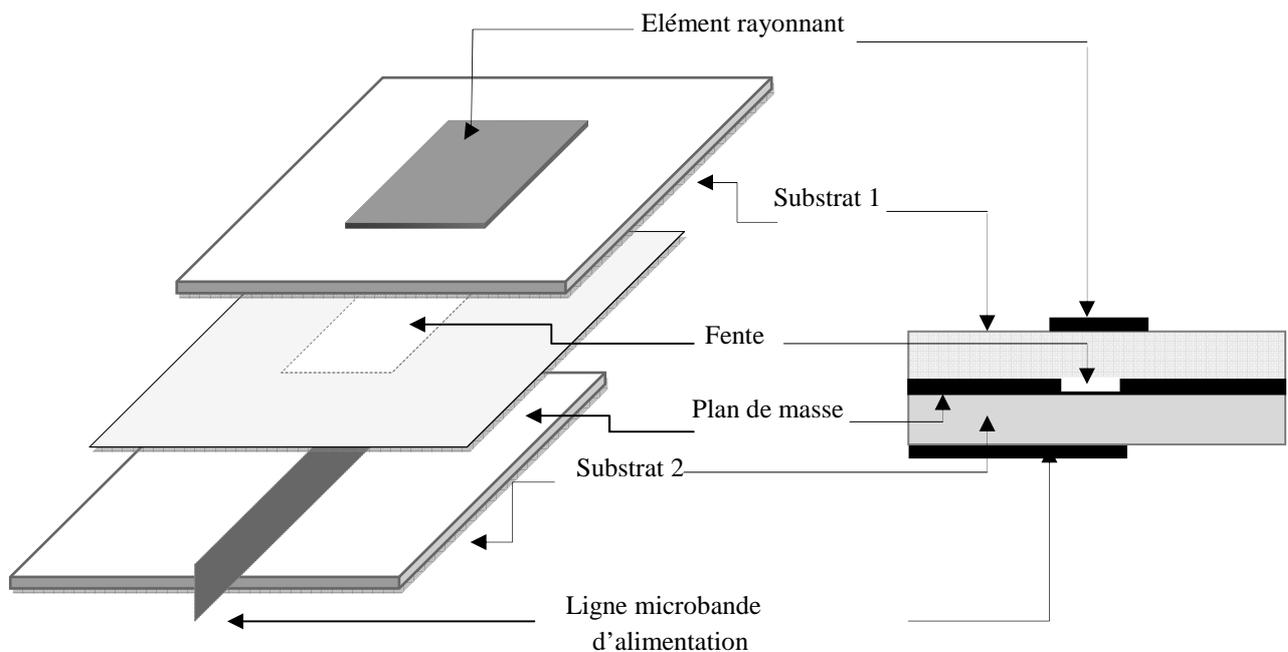


Figure I.7. Excitation à travers une ouverture dans le plan de masse.

Le tableau suivant résume les avantages et les inconvénients pour chaque type d'excitation [11].

Tableau I.1. Avantages et inconvénients des différents types d'excitation.

Méthodes d'excitations	Avantages		Inconvénients
<i>Alimentation par ligne micro ruban</i>	<ul style="list-style-type: none"> - permet une meilleure adaptation d'impédance. - Elle est très utilisée dans les réseaux d'antennes imprimées de différentes formes car elle donne de bons résultats. 		<ul style="list-style-type: none"> - Une bande passante étroite. - Rayonnement parasite possible du circuit d'alimentation.
<i>Alimentation par une sonde coaxiale</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Pas de pertes par rayonnement de ligne. - Sélection possible d'un mode privilégié. - ajustement de l'impédance d'entrée par positionnement de la sonde. - Prédiction aisée de l'impédance d'entrée pour des substrats de faible hauteur. - Technique de perçage simple jusqu'à 10 GHz. 		<ul style="list-style-type: none"> - Partie selfique importante pour le cas des substrats épais. - Technique de perçage et de soudure plus délicate. - Difficulté pour exciter chaque élément d'un réseau.
<i>Alimentation par couplage électromagnétique</i>	<i>Alimentation couplée par ouverture</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Réalisation du circuit d'alimentation de façon indépendante. - Séparation électromagnétique des deux couches. - Possibilité d'élargir la bande passante en associant la résonance de l'élément rayonnant à celle de la fente. 	<ul style="list-style-type: none"> - Technologie plus coûteuse et complexe (positionnement des deux couches diélectriques, trois faces de métallisation). - Intégration sur un support mécanique nécessitant des précautions. - Rayonnement arrière parasite de la fente lorsque celle-ci résonne au voisinage de l'élément rayonnant.
	<i>Alimentation couplée par ligne enterrée</i>	<ul style="list-style-type: none"> - La fabrication de l'antenne nécessite un bon alignement entre les substrats - La réalisation du patch rayonnant sur un substrat relativement épais 	<ul style="list-style-type: none"> - Rayonnement parasite du circuit d'alimentation. - Difficile de faire un choix adéquat en ce qui concerne la positionnement relatif de la ligne par rapport à l'élément rayonnant.

I.6. Méthodes d'analyse des antennes imprimées

Depuis l'avènement des antennes planaires microbandes, plusieurs méthodes d'analyse ont été utilisées, allant des modèles intuitifs simples jusqu'aux méthodes numériques. On peut classer ces méthodes en deux catégories principales: les méthodes analytiques et les méthodes numériques [11].

I.6.1. Méthodes analytiques

Ces méthodes reposent sur la prise en compte de la nature des phénomènes physiques qui se produisent au sein de l'antenne. Vu la complexité d'une telle analyse, un ensemble d'approximations sont mises en place afin de simplifier le modèle développé [10]. Ces méthodes sont basées sur la distribution du courant magnétique autour du patch, parmi ces méthodes, on peut citer quelques-unes :

a. Modèle de la ligne de transmission

Ce modèle, est le plus simple est le moins précis pour l'analyse et la synthèse des antennes microrubans. L'élément rayonnant est considéré comme un prolongement de la ligne de transmission qui transporte le signal dont les deux extrémités de l'antenne sont des ouvertures rayonnantes. L'antenne est l'équivalente de deux ouvertures rayonnantes verticales, placées sous les bords du patch. Afin de tenir compte des effets de bords, une constante diélectrique effective ϵ_{eff} est introduite. La valeur de cette dernière est proche de ϵ_r . Le courant magnétique dans chacun des ouvertures est considéré constant.

L'avantage principal de ce modèle est qu'il permet une interprétation aisée des phénomènes physiques rencontrés. Alors que l'inconvénient majeur de cette méthode est son incompatibilité avec les applications dans lesquelles l'antenne est alimentée par couplage ou réalisée avec des substrats électriquement épais.

b. Modèle de la cavité simple

Dans ce modèle, l'antenne est considérée comme étant une cavité et sa fréquence de résonance est celle de la cavité. Ce modèle convient aux différentes géométries de plaques telles que les anneaux, les rectangles, les triangles et les ellipses. Pour ce type de modélisation, l'antenne est traitée comme une cavité résonante ; limitée par deux murs

électriques (le plan de masse au-dessous et l'élément rayonnant au-dessus) et quatre murs magnétiques sur les bords de l'élément rayonnant [11]. Cependant, ce modèle est fondé sur des approximations qui peuvent donner lieu à des résultats inexacts, notamment pour des applications qui requièrent un substrat épais ou une constante diélectrique élevée [15].

1.6.2. Méthodes rigoureuses

Ces méthodes sont très précises, très souples et traite les éléments isolés aussi bien que les réseaux finis et infinis, les réseaux empilés, les formes arbitraires et le couplage. Cependant, elles sont basées sur des formalismes mathématiques complexes. Les méthodes rigoureuses sont des méthodes purement numériques et sont les plus utilisées récemment [10]. Parmi ces dernières, on a :

- La méthode aux différences finies,
- La méthode des éléments finis,
- Le système d'équations intégrales couplées, discrétisées par la méthode des moments,
- La méthode spectrale, qui correspond à la transformée de fourrier de la méthode de l'équation d'intégrale.

a. Méthode des différences finies

La méthode des différences finies dans le domaine temporel FDTD (Finite Difference Time Domain) est une approche numérique permettant la résolution des équations différentielles dans le domaine temporel dans une structure uniformément maillée. La méthode consiste à approcher les dérivées ponctuelles spatiales et temporelles qui apparaissent dans les équations de Maxwell par des différences finies centrées. L'approximation réside dans le remplacement de chaque dérivée de l'équation de Maxwell par une expression aux différences finies (à partir du théorème de Taylor) exprimant la valeur de l'inconnue en un point en fonction de sa valeur aux points voisins [11].

La résolution d'un problème par la méthode des différences finies implique trois étapes :

- Division de la région sous la forme d'une grille (maillage),

- Approximation de l'équation de Maxwell par différences finies en reliant les variables aux points voisins,
- Résolution des équations aux différences finies par rapport aux conditions aux frontières.

Cette technique à l'avantage de permettre une caractérisation dans une large bande de fréquence d'une structure en une seule simulation, les paramètres de propagation et l'impédance caractéristique peuvent être déterminés en appliquant la transformée de Fourier [4].

b. Méthode des éléments finis

La Méthode des éléments finis 'FEM' (Finite Element Method) est employée dans plusieurs domaines de la physique afin de résoudre des équations aux dérivées partielles. Le maillage de cette approche est souvent en tétraèdres. Dans chaque cellule, il y a une variation linéaire des champs qui sont déterminés en résolvant un système d'équations aux valeurs propres. Ce raisonnement est utilisé par le logiciel ANSYS HFSS [15].

La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis implique 4 étapes :

- Discrétisation en éléments finis de la région de résolution,
- Discrétisation des équations pour chaque élément,
- Assemblage de tous les éléments dans la région de résolution,
- Résolution du système d'équations.

c. Méthode des moments

Ce mode de calcul permet de déterminer les solutions des fonctions de Green [11]. Il s'agit de calculer le champ diffracté par un conducteur parfait en présence d'une onde incidente. Une fois la distribution des courants de surface est connue, la description du champ électromagnétique à l'aide des fonctions de Green est ainsi retrouvée. En raison de son maillage surfacique en forme triangulaire, cette méthode est plutôt utilisée pour le calcul des structures planaires. On trouve ce concept de calcul dans le logiciel ADS Momentum.

La méthode des moments (**Method of Moments**) est une technique numérique qui permet de résoudre efficacement le système d'équations intégrales en le transformant en un système matriciel linéaire.

d. Méthode d'analyse spectrale

Les méthodes intégrales, elles permettent d'obtenir les solutions d'un problème de propagation ou de discontinuités à partir de la détermination des distributions de courants ou de champs sur une surface particulière. Ces méthodes sont bien adaptées à la programmation sur ordinateur puisqu'elles utilisent peu de place mémoire et nécessitent de faibles temps de calcul. Cependant, le problème ne peut être résolu que si le cas étudié n'est pas trop complexe, de géométries simples, milieux pas très hétérogènes, etc... [16].

La méthode d'analyse spectrale est d'actualité, on permet donc de réduire le problème vectoriel tridimensionnel en un problème bidimensionnel. Elle n'est pas limitée par les conditions classiques telles que la faible épaisseur du substrat et une constante diélectrique faible. Cette méthode est considérée comme étant la plus rigoureuse, malgré qu'elle soit un peu coûteuse, du point de vue temps de calcul et précision exigée sur la détermination des éléments de la matrice associée. On a la possibilité d'inclure dans l'analyse l'effet des différents paramètres tels que les pertes par conducteur et par diélectrique et les dimensions finies du plan masse. La solution obtenue est d'autant plus proche et plus exacte lorsque la fonction de base modélise bien la variation réelle des courants surfaciques [11].

I.7. Méthodes d'optimisation

L'optimisation est le processus qui consiste à minimiser ou à maximiser une fonction objective ou de coût. Dans le cas d'une antenne microruban, l'optimisation consiste à approximer d'une manière précise un de ces paramètres tels que la fréquence de résonance, l'impédance d'entrée ou les paramètres S_{ij} . Généralement le processus d'optimisation se fait en trois étapes: analyse, synthèse et évaluation. Les principales méthodes de cette catégorie sont les algorithmes génétiques pour l'optimisation globale et les réseaux de neurones pour l'optimisation locale [4].

1.7.1. Algorithmes génétiques

Un algorithme génétique est une méthode méta-heuristique qui simule des évolutions biologiques, en parcourant l'espace des paramètres. Le changement des paramètres de conception suit un processus d'évolution basé les règles de la génétique qui modifient les chromosomes [17], [18].

Dans un problème d'optimisation, les variables définissent chacune un gène du chromosome. Ces chromosomes évoluent grâce à différentes opérations calquées sur les lois de la génétique vers un chromosome optimal [19].

Le déroulement des algorithmes génétiques standards, peut être résumé comme suit [11] :

- génération de la population initiale,
- sélection,
- reproduction (croisement et mutation),
- remplacement par la nouvelle population.

Toutefois elle nécessite un temps de calcul considérable. L'optimisation par les algorithmes génétiques a été largement utilisée dans la modélisation des antennes [11]. Elle a été aussi utilisée pour l'initiation des poids d'un réseau de neurones, cette conjugaison entre les deux méthodes d'optimisation permet de résoudre le problème des minimas locaux dont souffrent les réseaux de neurones artificiels.

1.7.2. Réseaux de neurones artificiels

Les réseaux de neurones sont une simulation informatique des comportements du cerveau humain. Ils appartiennent à la branche de l'intelligence artificielle. L'élément de base du réseau de neurones est le neurone artificiel. Le premier modèle a été proposé par McCulloch et Pitts en 1943 [20] où ils se sont inspirés du neurone biologique pour créer un automate doté d'une fonction de transfert qui transforme ses entrées en sortie selon des règles précises [20]. Ce même modèle a été utilisé par Rosenblatt en 1959 [20] pour créer un réseau constitué d'une couche d'entrée et d'une couche de sortie. Il appela ce modèle le perceptron.

L'application des réseaux de neurones artificiels dans la modélisation des circuits microondes a été introduite aux années quatre-vingt-dix. Plusieurs ouvrages et publications ont alors été publiés dans le domaine des microondes [11], décrivant les réseaux de neurones jusqu'ici inconnus dans ce domaine, les structures neuronales, les algorithmes d'apprentissages, les algorithmes d'accélération de l'apprentissage, ...etc. Les réseaux de neurones artificiels ont été également utilisés conjointement avec la méthode spectrale pour réduire le temps de calcul des éléments de la matrice impédance et éviter les pôles annulant les déterminants de la fonction de Green. Cette technique, appelée l'approche neuro-spectrale, a été utilisée pour le calcul de l'impédance d'entrée et de la fréquence de résonance d'un patch rectangulaire [11].

L'emploi des réseaux de neurones à la place des techniques classiques pour l'approximation des fonctions peut se justifier par les arguments suivants:

- Simplicité de mise en œuvre (peu d'analyse mathématique préliminaire),
- Capacité d'approximation universelle prouvée,
- Robustesse par rapport à des défaillances internes du réseau (caractère distribué de la représentation),
- Capacité d'adaptation aux conditions imposées par un environnement quelconque,
- Facilité de recharger ses paramètres (poids, nombre de neurones cachés, nombre de couches cachées...) lors d'une modification possible dans cet environnement,
- Réalisation matérielle parallèle inhérente ("neural chips").

1.7.3. Méthodes hybrides

L'hybridation des algorithmes a pour objectif de mélanger de manière harmonieuse deux ou plusieurs méthodes distinctes (souvent une méthode globale et une méthode locale) afin de ne retenir que les caractéristiques les plus intéressantes de chacune de ces méthodes [18]. Le mode d'hybridation qui semble le plus fécond concerne la combinaison entre un algorithme évolutionnaire à population (algorithme génétique, essaim de particules) et un autre algorithme. Il consiste à lancer une recherche au niveau global avec un algorithme évolutionnaire, puis à poursuivre par une recherche locale avec un autre algorithme afin d'affiner le résultat. Cela nécessite donc d'effectuer une répartition des tâches. Une autre

manière d'hybrider consiste à exécuter en parallèle plusieurs fois le même algorithme stochastique, mais avec des paramètres différents. Ces processus parallèles communiquent entre eux régulièrement pour échanger de l'information sur leurs résultats partiels. Cette technique est d'autant plus utilisée que la recherche sur les architectures parallèles s'approfondie [18]. Finalement, une hybridation peut aussi être réalisée entre un algorithme évolutionnaire et une méthode d'approximation. Avec cette version, la méthode d'approximation est utilisée pour accélérer la convergence de l'algorithme évolutionnaire. Quelle que soit la nature de l'hybridation [18] (locale-globale, locale-locale ou globale-globale), l'objectif général est d'obtenir le meilleur résultat à moindre coût, en diminuant par exemple le temps de calcul qui peut être important en résolvant un problème dans le domaine de l'électromagnétisme.

I.8. Applications

Vu les exigences de plus en plus croissantes des systèmes de communications modernes, les antennes classiques ne peuvent pas répondre à ces exigences [11]. Pour cette raison, les antennes imprimées remplacent les antennes classiques dans un bon nombre d'applications, parmi lesquelles on peut citer :

- Les résonateurs spatiaux et les résonateurs pour radar embarqué,
- La liaison avec des mobiles (avions, fusées, missiles, navires, véhicules routiers...),
- Les systèmes portables de radiolocalisation par satellite (GPS),
- Les résonateurs pour la téléphonie mobile (stations de base),
- Les badges et étiquettes électroniques,
- Les applicateurs biomédicaux (hyperthermie) et capteurs pour contrôle non destructif.

I.9. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques notions sur les antennes imprimées ainsi que les avantages et les inconvénients de ce type d'antennes. Nous avons montré aussi les

différentes méthodes d'alimentation rencontrées dans la littérature. Nous avons mis en évidence les avantages et les principales contraintes imposées lors de la réalisation de ces structures d'alimentation. Nous avons également présenté les différentes techniques utilisées pour traiter ce genre d'antenne en se basant sur un ensemble de modèles électromagnétiques. Enfin, nous avons clôturé ce chapitre par la présentation des domaines d'application des antennes imprimées.

I.10. Références bibliographiques

- [1] H. Chaker, "Conception et optimisation de réseaux d'antennes imprimées a faisceaux multiples application des réseaux de neurones" Thèse de doctorat en Télécommunications, 2012, Université de Tlemcen, Algérie.
- [2] L. Djouablia, "Contribution à l'étude des structures microbandes rayonnantes par la méthode des moments application a la forme triangulaire," Thèse doctorat e-sciences, 2012, Département d'électronique, université de Constantine 1, Algérie.
- [3] F. Benmeddour, " Étude et réalisation d'un résonateur microruban de forme circulaire", Thèse doctorat E-sciences, 2012, Département d'électronique, université de Constantine 1, Algérie.
- [4] Y. Tighlit, "Identification des antennes microrubans multicouches par la méthode spectral et les réseaux de neurones", Thèse doctorat e-sciences, 2012, Département d'électronique, université de Setif, Algérie.
- [5] R. Bedra, S. Bedra, and T. Fortaki, "Analysis of elliptical-disk microstrip patch printed on isotropic or anisotropic substrate materials," *International Journal of Microwave and Wireless Technologies*, vol. 8, pp. 251-255, 2016.
- [6] S. Bedra, R. Bedra, S. Benkouda, and T. Fortaki, "Full-wave analysis of anisotropic circular microstrip antenna with air gap layer," *Progress In Electromagnetics Research M*, vol. 34, pp. 143-151, 2014.
- [7] R. Bedra, S. Bedra, S. Benkouda, and T. Fortaki, "Efficient full-wave analysis of resonant modes of circular microstrip antenna printed on isotropic or uniaxially anisotropic substrate," *Wireless personal communications*, vol. 81, pp. 239-251, 2015.
- [8] M. Diblanc, "Développement du concept de l'antenne à résonateur bie pour la génération de la polarisation circulaire", Thèse de doctorat, Université de LIMOGES, 2006.

- [9] S. Benkouda, "Contribution à l'étude des problèmes de caractérisation des antennes microrubans à plaques rayonnantes parfaitement conductrices et supraconductrices," Thèse doctorat e-sciences, 2012, Département d'électronique, université de Batna, Algérie.
- [10] S. Bedra, "Evaluation analytique et numérique des caractéristiques électromagnétiques des structures microbandes ouvertes," Thèse doctorat e-sciences, 2015, Département d'électronique, université de Batna 2, Algérie.
- [11] J. R. Mosig and F. Gardiol, "Techniques analytiques et numériques dans l'analyse des antennes microruban," *Annales des Télécommunications*, Vol. 40, pp. 411-437, 1985.
- [12] C. Aissaoui "Contribution à l'analyse des antennes microbandes avec excitation par la méthode du domaine spectral-Application à un réseau d'antennes microbandes." Thèse doctorat e-sciences, 2017, Département d'électronique, université de Constantine 1, Algérie
- [13] S. Bedra, R. Bedra, S. Benkouda, and T. Fortaki, "Efficient CAD Model to Analysis of High Tc Superconducting Circular Microstrip Antenna on Anisotropic Substrates," *Advanced Electromagnetics*, vol. 6, pp. 40-45, 2017.
- [14] O. Barkat, "Etude et synthèse des caractéristiques de réseaux d'antennes imprimées supraconductrices dans la bande millimétrique," Thèse doctorat e-sciences, 2009, Département d'électronique, université de Constantine 1, Algérie.
- [15] A. Harrabi, "Conception et réalisation d'une antenne plate pour la réception satellite," Thèse de Doctorat, 2015, université de Nantes/Tunis-El Manar, Tunis.
- [16] Z. Mekkioui, "Contribution à l'analyse d'antennes diélectriques microruban à ondes de fuite unidimensionnelle et bidimensionnelle à motif métallique quelconque," Thèse de Doctorat, 2004, Département de physique, université de Tlemcen, Algérie
- [17] Le Sage, "Mesure des paramètres d'une antenne sous une température contrôlée." *17th International Congress of Metrology*. EDP Sciences, 2015.
- [18] A. Assadi-Haghi, "Contribution au développement de méthodes d'optimisation structurelle pour la conception assistée par ordinateur de composants et de circuits hyperfréquences", Ph.D. Communications Optiques et Microondes, 2007, Université de Limoges Ecole Doctorale Sciences et Techniques Faculté des sciences et Techniques XLIM- Département Minacom, France.

- [19] I. Bouchachi, "Contribution à la modélisation de structures et dispositifs passifs microondes basée sur l'utilisation de différentes techniques d'optimisation," Thèse de Doctorat, 2017, Département d'électronique, université de Constantine 1, Algérie.
- [20] A. Benomar. Etude des Antennes à Résonateurs Diélectriques. : Application aux Réseaux de Télécommunications. Electronique, 2015. Université de Limoges, France.

Chapitre II

**Analyse des antennes microbandes
de formes régulières par la méthode
de la cavité**

II.1. Introduction

Les antennes microrubans ont des particularités qui les rendent idéales pour plusieurs applications commerciales. Le fait qu'elles soient basées sur la technologie des circuits imprimés, les rend très peu coûteuses à produire. Elles présentent également une facilité de production en grande quantité et leur profil plat permet une intégration facile [1]. Les antennes microbandes peuvent prendre des formes géométriques arbitraires, cependant, les formes régulières sont les plus utilisées afin de faciliter leur étude. On distingue parmi d'autres géométries, la forme rectangulaire [2]-[4] et la forme circulaire [5]-[7].

La supraconductivité est la propriété que possèdent certains matériaux de conduire le courant électrique sans résistance à condition que leur température soit inférieure à une certaine valeur appelée température critique (T_c). Ces matériaux supraconducteurs s'opposent également à tout champ magnétique externe [8]. Durant ces dernières années, un intérêt croissant a été accordé au développement et à l'utilisation de nouveaux matériaux dans la technologie micro-ondes. Un intérêt particulier a été observé dans l'utilisation des matériaux supraconducteurs dans les composants micro-ondes passifs supraconducteurs tels que antennes, filtres, lignes de transmission et déphaseurs [9]-[11], ce qui est dû à leurs principales caractéristiques, telles que : faibles pertes (avec la réduction de l'atténuation et du niveau de bruit), dispersion très petite et réduction du temps de propagation des signaux dans les circuits [12]. Une antenne microruban supraconductrice à haute température peut offrir un gain assez élevé, mais elles souffrent de la bande passante extrêmement étroite, ce qui limite considérablement leur application [13]-[14]. Il existe une diversité de méthodes pour la modélisation des antennes microbandes supraconductrices. Chacune d'elles étant plus adaptée à un certain type de problèmes. Les méthodes analytiques permettront d'analyser des structures possédant certaines symétries et dont la géométrie et le modèle du matériau restent simples. Pour des modélisations plus réalistes de géométries et de matériaux complexes, on choisira l'approche numérique. Les méthodes numériques ont l'avantage de progresser parallèlement aux ressources informatiques [15]. Tous ces modèles produisent des résultats de haute précision, mais ils ne conviennent pas pour la synthèse directe de l'antenne microbande en raison de leur complexité et de leur temps de calcul élevé [16]. Les

méthodes intuitives simples notamment le modèle de la ligne de transmission et celui de la cavité sont largement utilisés dans l'analyse des antennes microbandes. Ces modèles aboutissent généralement à des formules analytiques simples, menant à une meilleure compréhension du phénomène physique, et bien compatible avec la CAO (conception assistée par ordinateur) [17].

Dans ce chapitre, nous modifions la méthode de la cavité développée pour l'analyse des antennes microbandes parfaitement conductrices de telle manière que la méthode peut traiter le cas d'un patch supraconducteur à haute température critique imprimé sur un substrat anisotrope. Nous présentons des résultats numériques pour des patches de formes rectangulaire, circulaire et elliptique.

II.2. Modélisation des antennes microbandes par la méthode de la cavité

Dans le modèle de la cavité, la région entre la plaque et le plan de masse est traitée comme une cavité entourée par des murs magnétiques en périphérie et des murs électriques sur le dessus de la plaque et le dessous du plan de masse. Le champ électrique tangentiel aux frontières des parois latérales est déterminé par le courant magnétique équivalent à la frontière. Le rayonnement produit par ce courant est alors déterminé en supposant que la cavité est entourée par l'espace libre. Le modèle de la cavité convient aux différentes géométries de plaques telles que des anneaux, des rectangles, des triangles et des ellipses [1]. Une brève vue d'ensemble de ce modèle est donnée ci-dessous.

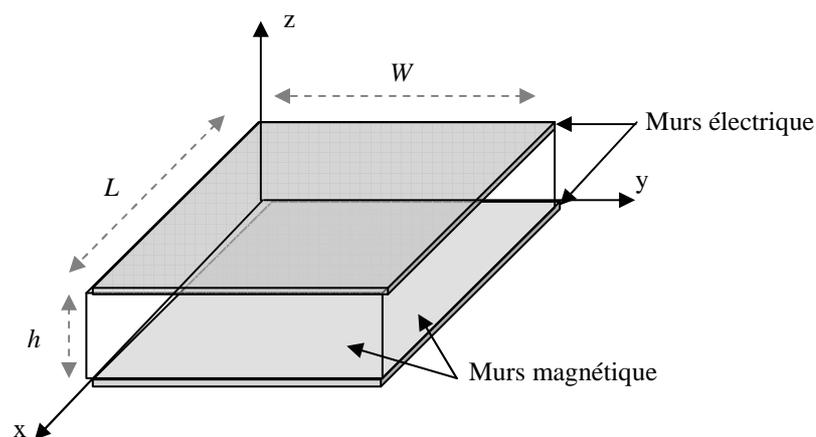


Figure II.1. Modèle de la cavité.

La théorie du modèle de la cavité est basée sur l'observation suivante [1]:

- Le courant électrique dans la direction normale à la plaque au bord du métal de celle-ci est nul, ce qui implique que la composante tangentielle du champ \bar{H} le long de la périphérie de la plaque est négligeable et donc un mur magnétique latéral entoure la plaque.

La distribution du champ peut être divisée en deux régions: champs intérieurs et champs extérieurs. Les champs extérieurs sont les champs hors de la région de cavité qui déterminent les caractéristiques de rayonnement de l'antenne plaque. Les champs intérieurs sont utiles pour déterminer l'impédance d'entrée de l'antenne et les courants responsables du rayonnement.

Dans la figure II.1, l'antenne microruban est assimilée à une cavité résonante. La configuration des champs dans cette cavité est décrite à partir de l'approche utilisant le potentiel vecteur [18]. A partir des équations de Maxwell, on peut montrer que le potentiel vecteur A_z satisfait l'équation d'onde homogène :

$$\nabla^2 \bar{A}_z + \beta^2 \bar{A}_z = 0 \quad (1)$$

Dont la solution générale s'obtient par la technique de séparation des variables :

$$\bar{A}_z = (\bar{C}_1 \cos(\beta_x x) + \bar{S}_1 \sin(\beta_x x)) \cdot (\bar{C}_2 \cos(\beta_y y) + \bar{S}_2 \sin(\beta_y y)) \cdot (\bar{C}_3 \cos(\beta_z z) + \bar{S}_3 \sin(\beta_z z)) \quad (2)$$

Les constantes de propagation $\beta_{x,y,z}$, ainsi que les constantes \bar{C}_k et \bar{S}_k ($k=1,..3$) sont déterminées en appliquant les conditions aux limites. Les diverses composantes des champs sont ainsi reliées à \bar{A}_z :

$$\bar{E}_x = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \frac{\partial^2 \bar{A}_z}{\partial x \partial z} \quad (3)$$

$$\bar{E}_y = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \frac{\partial^2 \bar{A}_z}{\partial y \partial z} \quad (4)$$

$$\bar{E}_z = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2 \right) \bar{A}_z \quad (5)$$

$$\bar{H}_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{A}_z}{\partial y} \quad (6)$$

$$\bar{H}_y = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{A}_z}{\partial x} \quad (7)$$

$$\bar{H}_z = 0 \quad (8)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\bar{E}_x(z' = 0, h) = 0 \quad (9)$$

$$\bar{H}_x(y' = 0, W) = 0 \quad (10)$$

$$\bar{H}_y(x' = 0, L) = 0 \quad (11)$$

Les coordonnées x', y', z' sont utilisées pour représenter les champs dans la cavité.

L'application de chacune des conditions aux limites donne respectivement :

- $\bar{S}_3 = 0$
 $\beta_z = \frac{p\pi}{h}$ pour $p = 0, 1, 2, \dots$
- $\bar{S}_2 = 0$
 $\beta_y = \frac{n\pi}{W}$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$
- $\bar{S}_1 = 0$
 $\beta_x = \frac{m\pi}{L}$ pour $m = 0, 1, 2, \dots$

La forme finale de l'expression du potentiel vecteur \bar{A}_z dans la cavité, devient :

$$\bar{A}_z = \bar{C}_{mnp} \cos(\beta_x x') \cdot \cos(\beta_y y') \cdot \cos(\beta_z z') \quad (12)$$

où \bar{C}_{mnp} , le coefficient d'amplitude du mode mnp , dépend du niveau de puissance associée au mode en question.

Puisque les projections de la constante de propagation dans chacun des axes vérifient la contrainte :

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2 = \beta_r^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (13)$$

alors la fréquence de résonance de la cavité pour le mode mnp vaut :

$$(f_r)_{mnp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2} \quad (14)$$

II.3. Modèle de cavité modifié pour une antenne de forme rectangulaire

La géométrie considérée est illustrée sur la Figure II.2. Un patch supraconducteur rectangulaire ayant une épaisseur t avec des dimensions (L, W) le long des deux axes (x, y) , respectivement, est imprimé sur un substrat anisotrope d'épaisseur h .

Tous les matériaux diélectriques sont supposés être non magnétiques avec une perméabilité μ_0 . Pour simplifier l'analyse, l'alimentation de l'antenne ne sera pas considérée.

Les conditions aux limites sur les parois de la structure conduisent à des modes transverses magnétiques de type TM_{mnp} (selon la direction z) avec $p = 0$, pour un substrat diélectrique d'épaisseur faible devant la longueur d'onde de fonctionnement. La fréquence de résonance d'un patch rectangulaire pour le mode TM_{mn} est donnée par [19]

$$f_{r\ mn} = \frac{v_0}{2\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{W}\right)^2} \quad (15)$$

où v_0 est la vitesse de la lumière, ϵ_r est la permittivité diélectrique relative du milieu diélectrique et m et n sont des nombres modaux des modes résonnants.

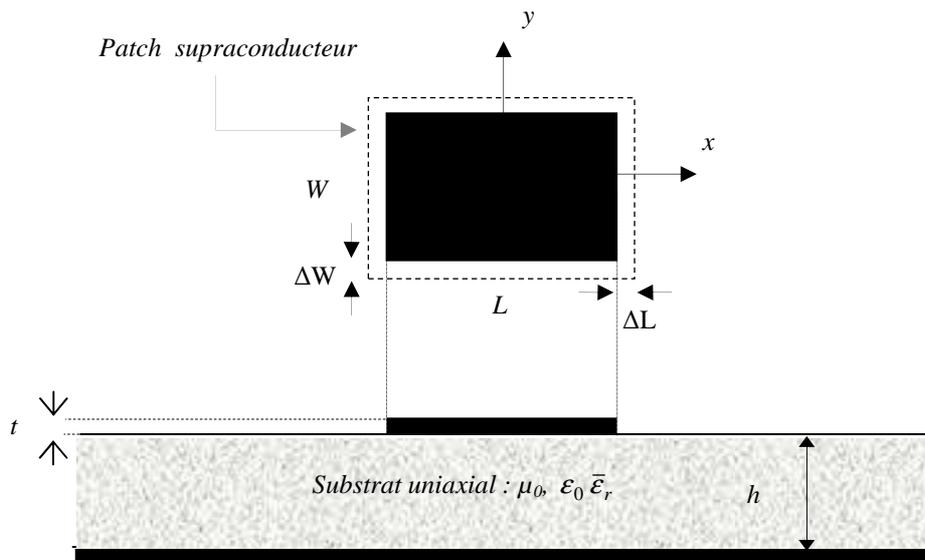


Figure II.2. Géométrie de l'antenne rectangulaire supraconductrice.

Dans le but de rendre les résultats théoriques obtenus comparables aux mesures, il est nécessaire de tenir compte des effets de bord. Ainsi, le patch rayonnant a des dimensions qui sont électriquement plus grandes que ses dimensions physiques. Plusieurs expressions ont été proposées pour le calcul de la longueur et de la largeur effective de l'élément rayonnant. Dans ce travail, on utilise les relations suivantes [19]:

$$L_{eff} = L + 2\Delta L \quad (16)$$

$$W_{eff} = W + 2\Delta W \quad (17)$$

La longueur et la largeur du patch ont été donc agrandies à chaque extrémité par une distance ΔL et ΔW , respectivement (Figure II.2). La valeur de ΔL est donnée par l'équation suivante [19]:

$$\Delta L = 0.412 h \frac{\epsilon_r + 0.3}{\epsilon_r - 0.258} \left(\frac{W/h + 0.264}{W/h + 0.813} \right) \quad (18)$$

Par conséquent, la fréquence de résonance de l'antenne microruban rectangulaire peut être calculée en utilisant l'équation (15) conjointement avec les équations (16)-(18).

II.4. Modèle de la cavité modifiée pour une antenne microbande circulaire

Pour déterminer les expressions analytiques d'une antenne microbande circulaire de rayon a (figure II.3), nous pouvons reprendre la même séquence d'étapes effectuée pour le cas d'une antenne rectangulaire, mais en considérant les coordonnées cylindriques au lieu des coordonnées cartésiennes, ceci a pour but de faciliter l'application des conditions aux limites.

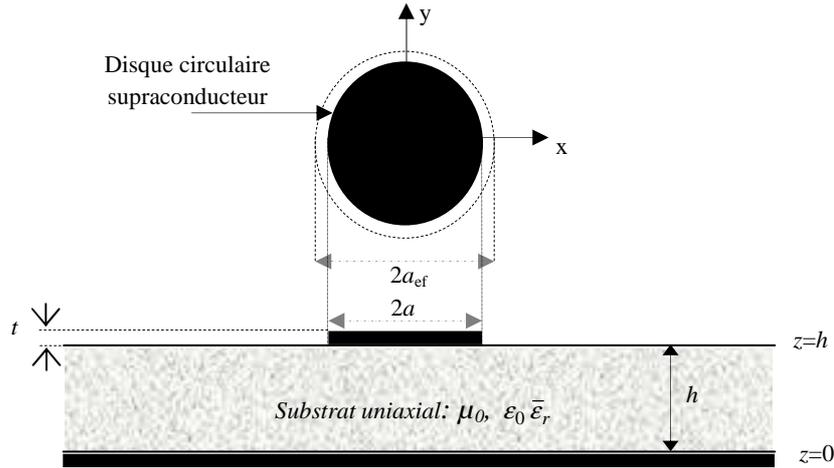


Figure II.3. Géométrie d'une antenne microruban à disque circulaire supraconducteur.

Pour trouver les champs dans la cavité, nous utilisons l'approche du potentiel vectoriel. Pour le mode TM nous devons d'abord trouver le potentiel vecteur magnétique A_z , qui doit satisfaire, en coordonnées cylindriques, l'équation d'onde homogène suivante:

$$\nabla^2 A_z(\rho, \phi, z) + k^2 A_z(\rho, \phi, z) = 0 \quad (19)$$

On peut montrer que pour les modes TM, dont les champs électriques et magnétiques sont liés au potentiel vectoriel A_z par [Balanis]

$$\begin{aligned} E_\rho &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial\rho\partial z} \\ E_\phi &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_z}{\partial\phi\partial z} \\ E_z &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
H_\rho &= \frac{1}{\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \\
H_\phi &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\
H_z &= 0
\end{aligned} \tag{21}$$

sont soumis aux conditions aux limites :

$$\begin{aligned}
E_\rho(0 \leq \rho' \leq a, 0 \leq \phi' \leq 2\pi, z' = 0) &= 0 \\
E_\rho(0 \leq \rho' \leq a, 0 \leq \phi' \leq 2\pi, z' = h) &= 0 \\
H_\phi(\rho' = a, 0 \leq \phi' \leq 2\pi, 0 \leq z' \leq h) &= 0
\end{aligned} \tag{22}$$

Le potentiel vecteur magnétique A_z se réduit à [Balanis]

$$A_z = B_{mnp} J_m(k_\rho \rho') [A_2 \cos(m\phi') + B_2 \sin(m\phi')] \cos(k_z z') \tag{23}$$

avec l'équation de contrainte :

$$(k_\rho)^2 + (k_z)^2 = k_r^2 = \omega_r^2 \mu \epsilon \tag{24}$$

Les coordonnées cylindriques ρ' , ϕ' , z' sont utilisées pour représenter les champs dans la cavité, alors que $J_m(x)$ est la fonction de Bessel de la première espèce et d'ordre m , et

$$k_\rho = \chi'_{mn} / a \tag{25.a}$$

$$k_z = p\pi / h \tag{25.b}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots \tag{25.c}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \tag{25.d}$$

$$p = 0, 1, 2, \dots \tag{25.e}$$

Dans (25.a), χ'_{mn} représente les zéros de la dérivée de la fonction de Bessel $J_m(x)$, et ils déterminent l'ordre des fréquences de résonance [Balanis]. Les quatre premières valeurs de χ'_{mn} , dans un ordre croissant, sont:

$$\begin{aligned}\chi'_{11} &= 1.8412 \\ \chi'_{21} &= 3.0542 \\ \chi'_{01} &= 3.8318 \\ \chi'_{31} &= 4.2012\end{aligned}\tag{26}$$

Les fréquences de résonance de la cavité, et donc de l'antenne microruban, sont trouvées en utilisant (24)-(25.e). Puisque pour la majorité des antennes microrubans, la hauteur h du substrat est très petite, les champs le long de z sont pratiquement constants et ils sont présentés dans (25.e) par $p=0$ et dans (25.b) par $k_z=0$. Ainsi, les fréquences de résonance pour les modes TM_{mn0} peuvent être écrites utilisant (24) comme suit

$$(f_r)_{mn0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \left(\frac{\chi'_{mn}}{a} \right)\tag{27.a}$$

Sur la base des valeurs de (26), les quatre premiers modes, dans un ordre croissant, sont TM_{110} , TM_{210} , TM_{010} , et TM_{310} . Le mode dominant est le TM_{110} dont la fréquence de résonance est :

$$(f_r)_{110} = \frac{1.8412}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1.8412 \cdot v_0}{2\pi a\sqrt{\varepsilon_r}}\tag{27.b}$$

où v_0 est la vitesse de la lumière dans l'espace libre. Cette expression surestime la fréquence de résonance relativement à celle obtenue expérimentalement puisque le modèle ne tient pas compte des champs de bord. Ces derniers sont pris en compte en considérant un rayon effectif à la place du rayon physique du disque circulaire. Dans notre cas, nous avons utilisé l'expression suivante pour le calcul du rayon effectif [19]-[21],

$$a_{ef} = \left\{ a^2 + \frac{ha}{0.3525\pi\varepsilon_{ref}} \left[\ln\left(\frac{a}{2h}\right) + (1.41\varepsilon_{ref} + 1.77) + \frac{h}{a}(0.268\varepsilon_{ref} + 1.65) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}\tag{28}$$

Notons que, la permittivité diélectrique effective ϵ_{ef} dépend de la permittivité diélectrique relative ϵ_r , l'épaisseur du substrat, et le rayon a de l'antenne microbande circulaire :

$$\epsilon_{ef} = \left(\frac{\epsilon_r + 1}{2} \right) + \left(\frac{\epsilon_r - 1}{2} \right) \left(1 + 12 \frac{h}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

II.4. Modèle de la cavité modifiée d'une antenne microbande elliptique

Considérons une antenne ayant un patch elliptique dont l'axe coïncide avec l'axe z (Figure II.4), et supposons pour le moment que le patch soit parfait (conductivité $\sigma_c = \infty$). Supposons aussi que le substrat diélectrique est isotrope, linéaire et homogène, de perméabilité μ_0 , de permittivité $\epsilon_0 \epsilon_r$.

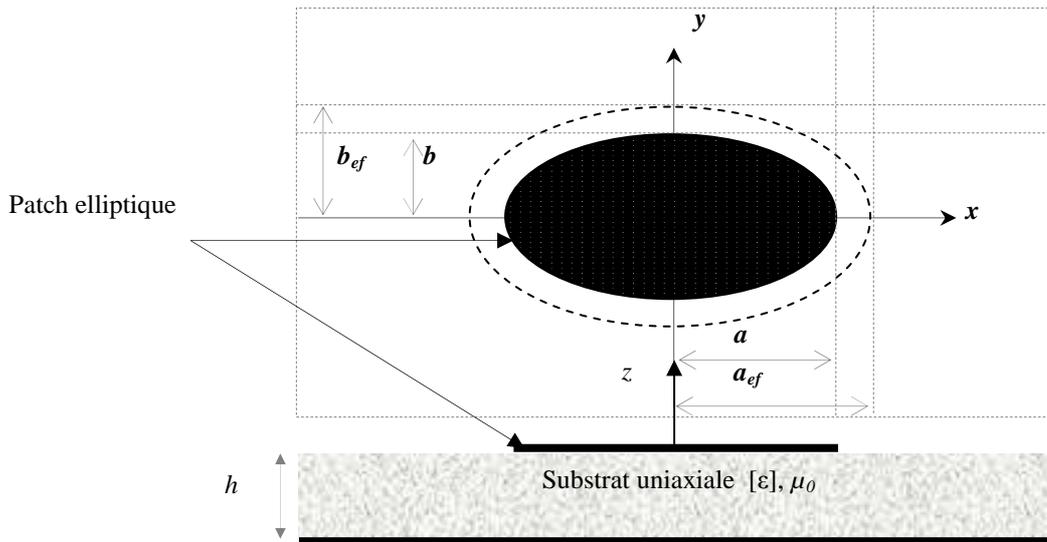


Figure II.4. Géométrie d'une antenne microbande à disque elliptique supraconducteur.

Les champs électrique E et magnétique H sont alors écrits sous leur forme complexe, en coordonnées elliptiques (ζ, η, z) , comme [22] suit:

$$E(\zeta, \eta, z, t) = E(\zeta, \eta, z) e^{j\omega t} \quad (30)$$

$$H(\zeta, \eta, z, t) = H(\zeta, \eta, z) e^{j\omega t} \quad (31)$$

Les relations entre les coordonnées elliptiques (ζ, η, z) et les coordonnées cartésiennes sont [22]:

$$x = \rho \cosh \zeta \cos \eta \quad (32.a)$$

$$y = \rho \sinh \zeta \sin \eta \quad (32.b)$$

$$z = z \quad (32.c)$$

où 2ρ est la distance entre les foyers de l'ellipse (voir l'annexe B). Les champs E et H doivent satisfaire l'équation d'onde:

$$\left(\nabla^2 + \varepsilon \mu \omega^2 \right) \begin{Bmatrix} E \\ H \end{Bmatrix} = 0 \quad (33)$$

où $\nabla^2 = \nabla_t^2 + \partial^2 / \partial z^2$. Le laplacien transversal ∇_t^2 en coordonnées elliptiques est calculé dans l'annexe B :

$$\nabla_t^2 = \frac{2}{\rho^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \quad (34)$$

Les axes majeur et mineur sont, respectivement:

$$2a = 2\rho \cosh \zeta_0 \quad (35.a)$$

$$2b = 2\rho \sinh \zeta_0 \quad (35.b)$$

Le cylindre elliptique confocal $\zeta = \zeta_0$ correspond à la paroi de la cavité. L'excentricité de sa section elliptique est donnée par:

$$e = \frac{1}{\cosh \zeta_0} \quad (36)$$

La dépendance en z des champs E et H se sépare des deux autres coordonnées ζ et η et ces champs s'écrivent alors:

$$E(\xi, \eta, z, t) = E^0(\xi, \eta) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (37.a)$$

$$H(\xi, \eta, z, t) = H^0(\xi, \eta) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (37.b)$$

où β est la constante de phase qui sera déterminé par les conditions aux frontières imposées à la paroi de la cavité. Notons que les vecteurs E^0 et H^0 ne dépendent que des coordonnées transversales ξ et η , mais ils peuvent avoir des composantes suivant ξ , η et z [23]:

$$E^0(\xi, \eta) = u_\xi E_\xi^0(\xi, \eta) + u_\eta E_\eta^0(\xi, \eta) + u_z E_z^0(\xi, \eta) \quad (38.a)$$

$$H^0(\xi, \eta) = u_\xi H_\xi^0(\xi, \eta) + u_\eta H_\eta^0(\xi, \eta) + u_z H_z^0(\xi, \eta) \quad (38.b)$$

où u_ξ , u_η et u_z sont les vecteurs unitaires en coordonnées elliptiques (Figure B1. Annexe B).

Comme

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\beta^2 E \quad (39.a)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = -\beta^2 H \quad (39.b)$$

L'équation d'onde (38) devient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \rho^2 \frac{\varepsilon \mu \omega^2 - \beta^2}{2} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \right) \begin{Bmatrix} E^0 \\ H^0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (40)$$

Ces deux équations différentielles vectorielles peuvent être décomposées en un système de six équations différentielles scalaires correspondant à chacune des composantes des champs E et H . Or, E et H ne sont pas indépendants l'un de l'autre. Ils sont reliés par les équations de Maxwell:

$$\nabla \times E = -j \omega \mu H \quad (41.a)$$

$$\nabla \times H = -j \omega \varepsilon E \quad (41.b)$$

Nous devons donc chercher la solution de l'équation d'onde pour une seule composante (E_z ou H_z) sujette à certaines conditions aux frontières imposées à la paroi de la cavité ($\xi = \xi_0$). Introduisons le paramètre q défini comme suit:

$$4q \equiv \rho^2 k^2 \quad (42.a)$$

avec

$$k^2 \equiv \omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2 \quad (42.b)$$

et

$$\rho = a e \quad (42.c)$$

Cette dernière équation découle de (35.a) et (36). L'équation d'onde (40) devient donc:

$$\frac{\partial^2 \Psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + 2q (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \Psi(\xi, \eta) = 0 \quad (43)$$

où $\Psi(\xi, \eta)$ représente la composante E_z^0 (H_z^0) pour le mode TM (TE).

L'équation différentielle aux dérivées partielles (43) est résolue par la méthode de séparation des variables ξ et η . On pose:

$$\Psi(\xi, \eta) = \psi(\xi, q) \phi(\eta, q) \quad (44)$$

où $\psi(\xi, q)$ et $\phi(\eta, q)$ sont deux fonctions des coordonnées indépendantes radiale ξ et angulaire η ainsi que du paramètre q . En remplaçant $\Psi(\xi, \eta)$ dans l'équation (43), on obtient:

$$\phi(\eta, q) \frac{d^2 \psi(\xi, q)}{d\xi^2} + \psi(\xi, q) \frac{d^2 \phi(\eta, q)}{d\eta^2} + 2q (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \psi(\xi, q) \phi(\eta, q) = 0 \quad (45)$$

La division par le produit $\psi(\xi, q) \phi(\eta, q)$ donne:

$$\left\{ \frac{1}{\psi(\xi, q)} \frac{d^2 \psi(\xi, q)}{d\xi^2} + 2q \cosh 2\xi \right\} + \left\{ \frac{1}{\phi(\eta, q)} \frac{d^2 \phi(\eta, q)}{d\eta^2} + 2q \cos 2\eta \right\} = 0 \quad (46)$$

On est donc en présence de deux fonctions des coordonnées indépendantes ξ et η dont la somme est égale à zéro, quels que soient ξ et η . Chacune de ces fonctions doit nécessairement être égale à une constante. Posons:

$$\frac{1}{\phi(\eta, q)} \frac{d^2 \phi(\eta, q)}{d\eta^2} + 2q \cos 2\eta = -p \quad (47.a)$$

$$\frac{1}{\psi(\xi, q)} \frac{d^2 \psi(\xi, q)}{d\xi^2} + 2q \cosh 2\xi = p \quad (47.b)$$

que nous écrivons:

$$\frac{d^2 \phi(\eta, q)}{d\eta^2} + (p - 2q \cos 2\eta) \phi(\eta, q) = 0 \quad (48)$$

$$\frac{d^2 \psi(\xi, q)}{d\xi^2} - (p - 2q \cosh 2\xi) \psi(\xi, q) = 0 \quad (49)$$

où p est une constante à déterminer. Notons qu'on peut passer de l'équation (48) à l'équation (49) à l'aide du changement de variable $\eta = j\xi$. L'équation différentielle du second ordre (48) satisfaite par la fonction angulaire $\phi(\eta, q)$ est appelée équation canonique de Mathieu dont les deux solutions indépendantes sont des combinaisons linéaires de fonctions sinusoïdales [23]:

$$ce_m(\eta, q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j^m \cos(j\eta) \quad (50.a)$$

et

$$se_m(\eta, q) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j^m \sin(j\eta) \quad (50.b)$$

appelées fonctions de Mathieu angulaires paire $ce_m(\eta, q)$ et impaire $se_m(\eta, q)$ d'ordre m .

L'équation différentielle du second ordre (49) satisfaite par la fonction radiale $\psi(\xi, q)$ est appelée équation de Mathieu modifiée dont les deux solutions indépendantes sont des combinaisons linéaires de fonctions hyperboliques [24]-[25]:

$$Ce_m(\xi, q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j^m \cosh(j\xi) \quad (51.a)$$

et

$$Se_m(\xi, q) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j^m \sinh(j\xi) \quad (51.b)$$

appelées fonctions de Mathieu radiales (ou modifiées) paire $Ce_m(\xi, q)$ et impaire $Se_m(\xi, q)$ d'ordre m . La valeur que prend la constante p pour un ordre m donné est appelée valeur caractéristique de l'équation différentielle de Mathieu (48) ou (49), et est dénotée par p_m ou b_m , selon qu'il s'agisse des fonctions paires (ce_m et Ce_m) ou impaires (se_m et Se_m).

La fréquence de résonance $f_{mn}^{e,o}$ de l'antenne elliptique présentée dans la figure IV.4 est donnée par :

$$f_{mn}^{e,o} = \frac{1}{\pi a e \sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{q_{mn}} \quad (52)$$

où a est le demi-axe majeur et e représente l'excentricité du patch. q_{mn} représente le $n^{\text{ième}}$ zéro de la fonction de Mathieu modifiée d'ordre m . Généralement, les résultats mesurés du $f_{11}^{e,o}$ (even & odd) sont inférieurs aux valeurs calculées en raison de l'axe semi-majeur effectif a_{ef} ($a_{ef} > a$). Le paramètre a_{ef} est utilisé pour tenir compte de l'énergie stockée dans les champs de bord du patch elliptique. Par conséquent, $f_{11}^{e,o}$ est déterminée avec précision en remplaçant l'axe semi-majeur physique a par l'axe semi-majeur efficace a_{ef} :

$$f_{11}^{e,o} = \frac{15}{\pi e a_{ef}} \sqrt{\frac{q_{11}^{e,o}}{\epsilon_{ef}}} \quad (53)$$

La détermination des valeurs exactes de la fonction de Mathieu $q_{mn}^{e,o}$ pour les différents modes est relativement compliquée. Afin d'éviter cette complexité, une valeur approximative de la fonction de Mathieu peut être utilisée. L'approximation $q_{mn}^{e,o}$ pour le cas du mode dominant peut être obtenue à partir de [26]

$$\begin{aligned} q_{11}^e &= -0.0049e + 3.7888e^2 - 0.7278e^3 + 2.2314e^4 \\ q_{11}^0 &= -0.0063e + 3.8316e^2 - 1.1351e^3 + 5.2229e^4 \end{aligned} \quad (54)$$

Nous obtenons donc une fréquence double $f_{11}^{e,o}$ avec une excentricité $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ [26]. En ce qui concerne l'axe semi-majeur effectif, nous utilisons l'expression rapportée dans [26]. Cette expression utilisée initialement pour le cas d'un disque circulaire [27], a donné de bons résultats pour le cas d'un disque elliptique

$$a_{ef} = \left\{ a^2 + \frac{ha}{0.3525 \pi \varepsilon_{ref}} \left[\ln\left(\frac{a}{2h}\right) + (1.41\varepsilon_{ref} + 1.77) + \frac{h}{a}(0.268\varepsilon_{ref} + 1.65) \right] \right\}^{1/2} \quad (55)$$

Dans l'équation (55), ε_{ref} est la permittivité relative effective. Elle est donnée par l'expression suivante [26]

$$\varepsilon_{ef} = \varepsilon_r - \frac{0.7 \varepsilon_r}{2} \left(\frac{h}{a} + \frac{h}{b} + \frac{h^2}{ab} \right) \quad (56)$$

Il convient de souligner que les corrections apportées à l'expression de la fréquence de résonance (voir équation 53) impliquent à la fois la permittivité effective et l'axe semi-majeur effectif, ce qui permet d'obtenir un bon accord entre la théorie et l'expérience dans le cas d'une antenne à élément rayonnant elliptique.

Puisque l'anisotropie affecte considérablement les performances de l'antenne, il est important de tenir compte de cet effet. Le tenseur de permittivité relative du diélectrique anisotrope uniaxial est donné par

$$\bar{\varepsilon}_r = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (57)$$

En utilisant les connaissances électromagnétiques, l'épaisseur h et les permittivités relatives ϵ_x et ϵ_z du substrat anisotrope uniaxial sont remplacées par des paramètres effectifs en utilisant les équations suivantes [16]:

$$\epsilon_{re} = \epsilon_z \quad (58)$$

$$h_e = h \sqrt{\frac{\epsilon_x}{\epsilon_z}} \quad (59)$$

II.5. Fréquence de résonance d'un patch supraconducteur

A présent, on va inclure l'effet de la supraconductivité dans le calcul de la fréquence de résonance. La variation abrupte de la fréquence de résonance de l'antenne supraconductrice à des températures proches de T_c , peut être attribuée à une modification de la profondeur de pénétration λ_0 (la profondeur de pénétration λ à la température $T = 0$ K), de l'YBCO (YBa₂Cu₃O₇). Pour modéliser la fréquence de résonance de l'antenne supraconductrice, il est nécessaire de considérer une constante diélectrique effective ϵ_{reff} donné par [19]

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = \epsilon_{re} \left[1 + \frac{\lambda_f}{h} \coth\left(\frac{t}{\lambda_f}\right) \right] \quad (60)$$

Dans l'équation (60), t est l'épaisseur du patch supraconducteur et λ_f est la longueur d'onde magnétique donnée par le modèle des deux fluides de Gorter-Casimir [19]

$$\lambda_f = \lambda_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right]^{-1/2} \quad (61)$$

où T est la température et T_c est la température critique du matériau supraconducteur.

II.6. Résultats numériques et discussions

II.6.1. Cas d'une antenne microbande rectangulaire

Dans cette sous-section, nous présentons des comparaisons entre nos fréquences de résonance calculées et celles de la mesure pour un patch microruban rectangulaire supraconducteur imprimé sur un substrat anisotrope. Ceci est dans le but de valider le modèle proposé pour un patch rectangulaire supraconducteur. La figure II.5 montre l'effet de la température de fonctionnement sur la fréquence de résonance du patch rectangulaire HTS. Des données expérimentales disponibles dans [28] sont aussi montrées sur cette figure. Le patch rectangulaire est fabriqué à base d'une couche mince supraconductrice en YBCO ($\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$) d'épaisseur ($t = 330\text{nm}$) et ayant comme dimensions ($L = 935\mu\text{m}$, $W = 1630\mu\text{m}$). La profondeur de pénétration à une température nulle est ($\lambda_0 = 140\text{nm}$). Le substrat LaAlO_3 ($\epsilon_r = 23.81$) a une épaisseur ($h = 254\mu\text{m}$). L'analyse est portée sur la plage de température 20 K à $0.95 T_c$, où T_c est la température critique ($T_c = 89\text{ K}$).

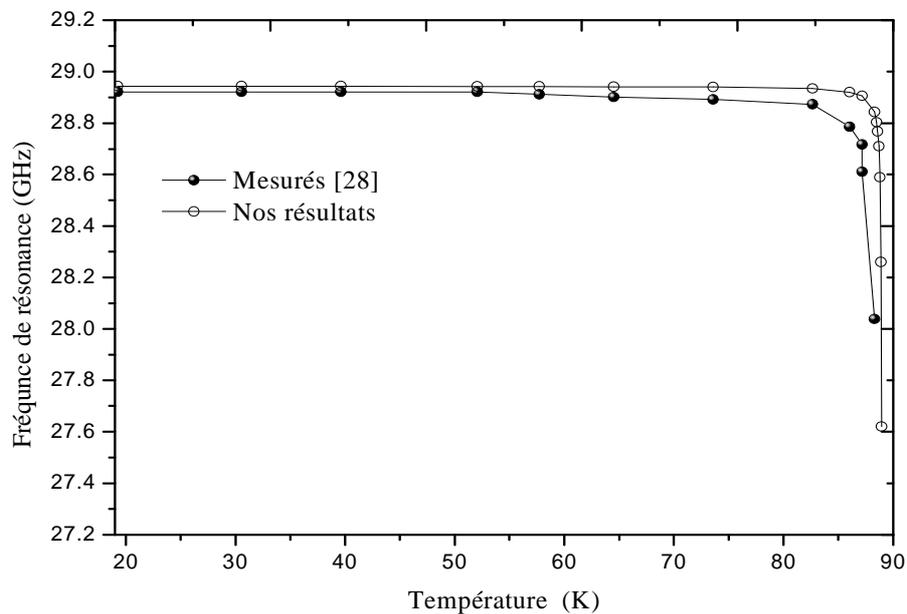


Figure II.5. Fréquence de résonance pour une antenne rectangulaire supraconductrice en fonction de la température de fonctionnement; $\epsilon_r = 23.81$, $h = 254\mu\text{m}$, $L = 935\mu\text{m}$, $W = 1630\mu\text{m}$, $t = 350\text{nm}$.

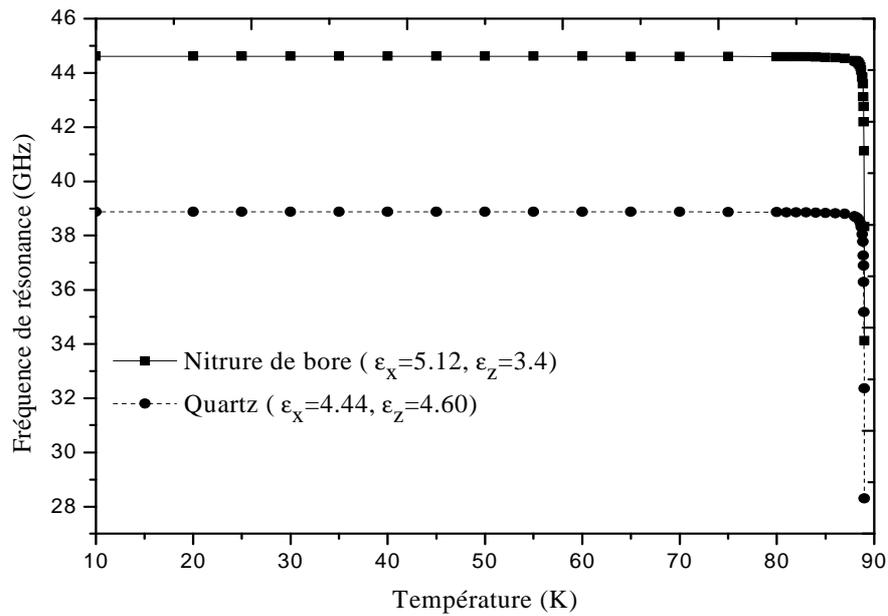


Figure II.6. Variation de la fréquence de résonance d'une antenne rectangulaire supraconductrice en fonction de la température de fonctionnement; $h = 0.2\text{ mm}$, $L = 1700\mu\text{m}$, $W = 2550\mu\text{m}$, $t = 250\text{nm}$, $\lambda_0 = 140\text{nm}$, $T_c = 89\text{ K}$.

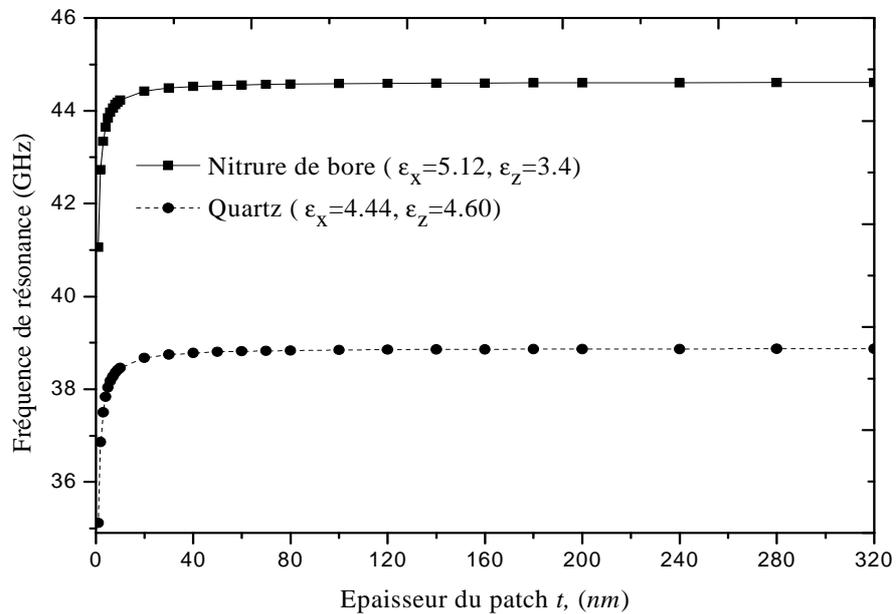


Figure. II.7. Variation de la fréquence de résonance d'une antenne rectangulaire supraconductrice en fonction de l'épaisseur du patch; $h = 0.2\text{ mm}$, $L = 1700\mu\text{m}$, $W = 2550\mu\text{m}$, $T = 77\text{ K}$, $\lambda_0 = 140\text{nm}$, $T_c = 89\text{ K}$.

Notons que la variation de la permittivité du substrat d'aluminate de lanthane avec la variation de la température, comme l'indique l'expérience de Richard *et al.* [28], est pris en compte dans le présent graphe. On observe un excellent accord entre nos résultats et ceux mesurés par Richard et al. [28].

Maintenant, on étudie l'influence de la température de fonctionnement sur la fréquence de résonance de l'antenne rectangulaire supraconductrice imprimée sur des substrats anisotropes. La variation de la fréquence de résonance de l'antenne rectangulaire en fonction de la température d'opération pour deux différents matériaux anisotropes est illustrée dans la figure II. 6. Le premier matériau anisotrope (nitrure de bore) possède la paire de permittivité relative ($\epsilon_x = 5.12$, $\epsilon_z = 3.4$). Le deuxième matériau anisotrope (Quartz) se caractérise par une anisotropie électrique de type positif ($\epsilon_x = 4.44$, $\epsilon_z = 4.6$). Chaque substrat diélectrique a une épaisseur $h = 0.2\text{mm}$. Le patch de longueur $L = 1700\mu\text{m}$ et de la largeur $W = 2550\mu\text{m}$ est constituée d'une couche mince en YBCO d'épaisseur $t = 250\text{nm}$, d'une profondeur de pénétration à la température nulle $\lambda_0 = 140\text{nm}$ et d'une température critique $T_c = 89\text{K}$.

L'influence de l'épaisseur de la couche supraconductrice sur la fréquence de résonance du patch rectangulaire imprimé sur un substrat anisotrope est présentée dans la figure. II. 7. On constate que lorsque l'épaisseur du patch supraconducteur augmente, la fréquence de résonance augmente rapidement jusqu'à ce que l'épaisseur t atteigne λ_0 .

II.6.2. Cas d'une antenne microbande circulaire

Cette sous-section donne des résultats numériques issus du modèle de cavité pour une antenne microbande circulaire supraconductrice imprimée sur des substrats anisotropes. Tout d'abord, On va vérifier l'exactitude de la méthode présentée dans la section précédente. Le tableau II.1 montre les fréquences de résonance pour différentes valeurs du rayon (a). Le patch est imprimée sur un substrat isotrope. Nos résultats sont comparés avec les données théoriques et expérimentales, récemment rapportées dans [29]-[30]. Notons que l'accord entre nos résultats calculés et les résultats expérimentaux est excellent.

Nous étudions maintenant l'effet de l'anisotropie dans le substrat sur la fréquence de résonance de l'antenne microbande circulaire parfaitement conductrice. La figure II.8

présente la variation de la fréquence de résonance en fonction du rayon du patch circulaire (a). La fréquence de résonance calculée dans la référence [31] pour différents substrats anisotropes s'accorde très bien avec les valeurs obtenues à l'aide du modèle de la cavité pour une large gamme du rayon de patch.

Pour valider notre modèle pour le cas d'une plaque rayonnante supraconductrice, nous supposons un résonateur de forme circulaire à base de YBCO fabriqué sur LaAlO_3 ($\epsilon_r = 23.81, h = 254\mu\text{m}$). Le disque circulaire de rayon $a = 610\mu\text{m}$ a une profondeur de pénétration $\lambda_0 = 1400\text{nm}$. L'analyse est portée sur la plage de température de 20K à $0.95T_c$, où T_c est la température critique (84.5K) du matériau supraconducteur. Notons que la variation de la permittivité du substrat d'aluminate de lanthane avec le changement de la température, comme l'indique l'expérience de Richard et al. [28], est pris en compte dans la figure II.9.

Tableau II.1. Données théorique et expérimentale de la fréquence de résonance pour le mode fondamentale d'une antenne microbande circulaire sur un substrat isotrope, $h = 0.787\text{mm}$, $\epsilon_r = 2.2$.

a/h	Fréquences de résonance (GHz)		
	Mesurées [29]	calculées [30]	Nos résultats
36.213	2.023	2.042	2.017
26.683	2.723	2.75	2.713
50.825	1.446	1.462	1.448

A partir de la figure II. 9, il est clair que les résultats obtenus par le modèle de cavité modifiée montrent un bon accord avec les données expérimentales. En effet, la différence entre les deux ensembles de résultats étant inférieure à 3%. Cette différence est probablement due aux tolérances de mesure.

Les fréquences de résonance de l'antenne circulaire supraconductrice en fonction de la température d'opération pour plusieurs substrats anisotropes sont représentées sur la figure II.10. On remarque que l'effet de la température est significatif spécialement pour les valeurs de température proches de la température critique (T_c).

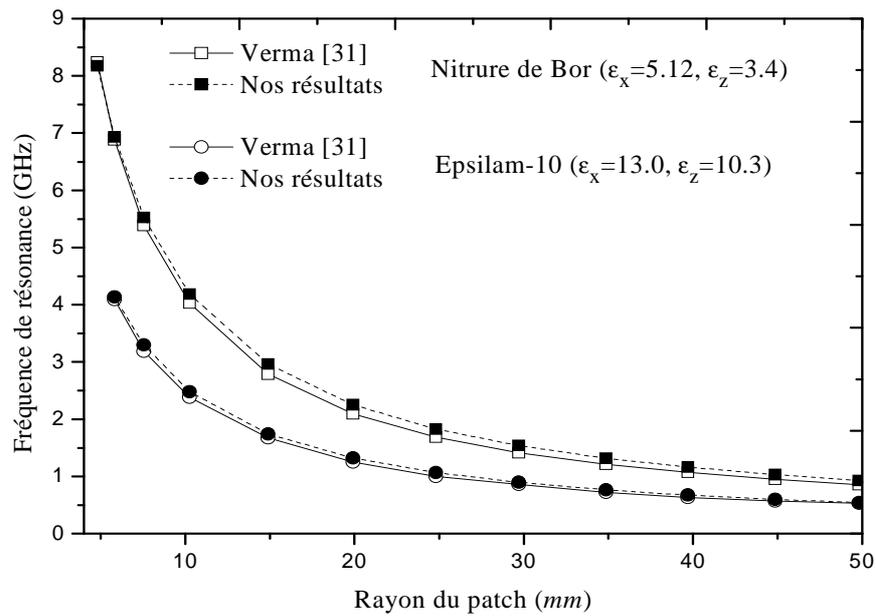


Figure II. 8. Fréquence de résonance du mode dominant (TM^{11}) en fonction du rayon du patch (a), pour deux différents matériaux anisotropes, $h = 1.27mm$.

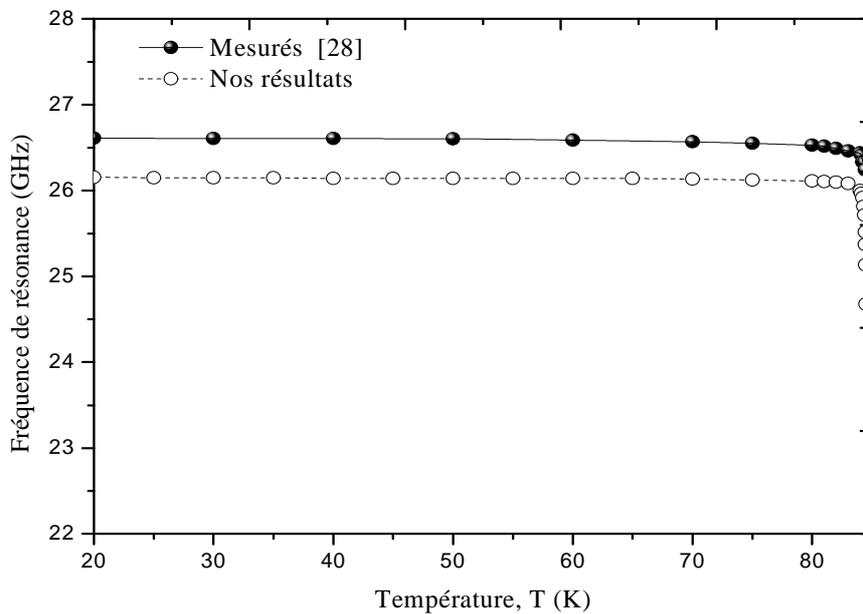


Figure II. 9. Variation de la fréquence de résonance d'une antenne circulaire supraconductrice en fonction de la température d'opération; $\epsilon_r = 23.81$, $h = 254 \mu m$, $a = 610 \mu m$, $t = 330 nm$, $\lambda_0 = 140 nm$, $T_c = 84.5 K$.

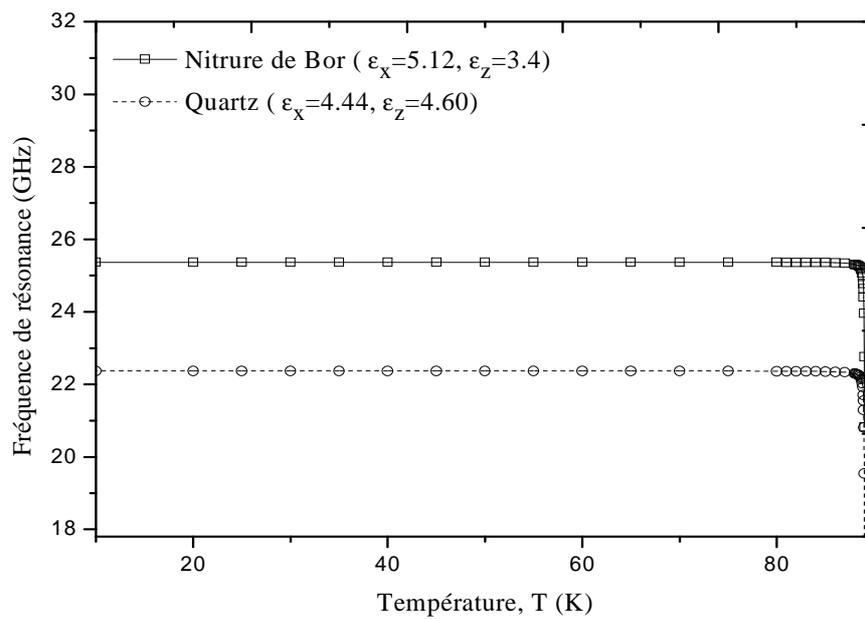


Figure II.10. Fréquence de résonance du disque circulaire supraconducteur en fonction de la température de fonctionnement pour deux substrats anisotropes, $\lambda_0 = 120nm$, $T_c = 84.5K$, $h = 200\mu m$.

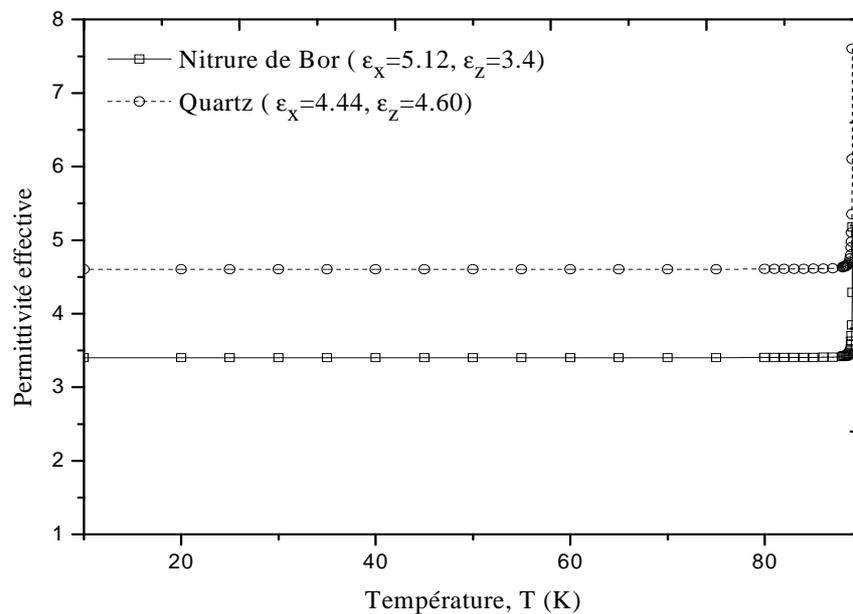


Figure II.11. Permittivité effective en fonction de la température de fonctionnement pour deux substrats anisotropes (paramètres de la figure II. 10).

Ce comportement est en accord avec celui découvert théoriquement pour un patch supraconducteur de forme rectangulaire. Notons que la variation abrupte de la fréquence de résonance à des températures proches de T_c peut être attribuée à une modification de la profondeur de pénétration de l'YBCO [32].

D'après les résultats de la figure II.10, on peut observer que les fréquences de résonance obtenues lorsque le patch supraconducteur est imprimé sur le premier matériau anisotrope (nitrure de bore) sont supérieures à celles obtenues lorsque le patch supraconducteur est imprimé sur le second matériau anisotrope (Quartz), car la permittivité relative effective du premier matériau anisotrope est inférieure à celle du second matériau comme indiqué dans la figure II.11.

II.6.3. Cas d'une antenne microbande elliptique

Afin d'examiner la précision de calcul de l'approche décrite dans la section II.4, nous comparons dans le tableau 2 les fréquences de résonance calculées pour une antenne microbande à disque elliptique sur substrat isotrope avec des résultats précédemment publiés [26], [33].

Tableau II.2. Comparaison des fréquences de résonance calculées et mesurées pour une antenne microbande à disque elliptique, $h = 0.1575$ cm, $\epsilon_r = 2.48$, $a = 4$ cm.

e	Mesurées [26] (GHz)		Calculées (GHz)				Erreur absolue (%)	
			Résultats de [33]		Nos résultats			
	f_{11}^e	f_{11}^o	f_{11}^e	f_{11}^o	f_{11}^e	f_{11}^o	f_{11}^e	f_{11}^o
0.273	1.410	1.385	1.417	1.389	1.415	1.388	0.354	0.216
0.2178	1.400	1.378	1.401	1.385	1.399	1.383	0.071	0.362
0.1836	1.380	1.370	1.394	1.383	1.392	1.381	0.869	0.802
0.0894	1.370	1.370	1.382	1.379	1.380	1.378	0.729	0.583

D'après le tableau II.2, on observe que les résultats de la fréquence de résonance d'une antenne microbande à disque elliptique calculés par la présente méthode sont plus proches aux valeurs expérimentales [33] relativement à ceux calculés dans [26].

Maintenant, nous examinons l'effet de la variation de ϵ_x et ϵ_z sur la fréquence d'opération du résonateur microbande elliptique.

La fréquence de résonance d'une antenne microbande elliptique de dimension $a = 4 \text{ cm}$, $b = 3.84 \text{ cm}$ et d'épaisseur $d = 0.3175 \text{ cm}$, pour différentes paires de la permittivité relative (ϵ_x, ϵ_z) est indiquée dans le tableau II.3.

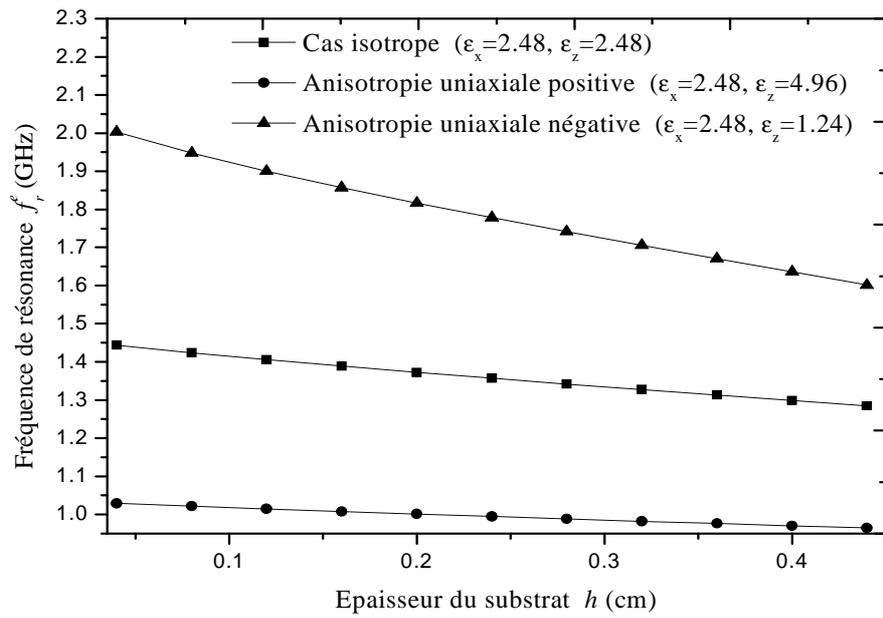
Le changement dans la fréquence de résonance comparativement au cas isotrope ($\epsilon_x = \epsilon_z = 2.48$) est calculé en utilisant l'expression suivante :

$$\frac{\Delta f_r}{f_r} = \left| 1 - \frac{f_{ra}}{f_{ri}} \right| \quad (62)$$

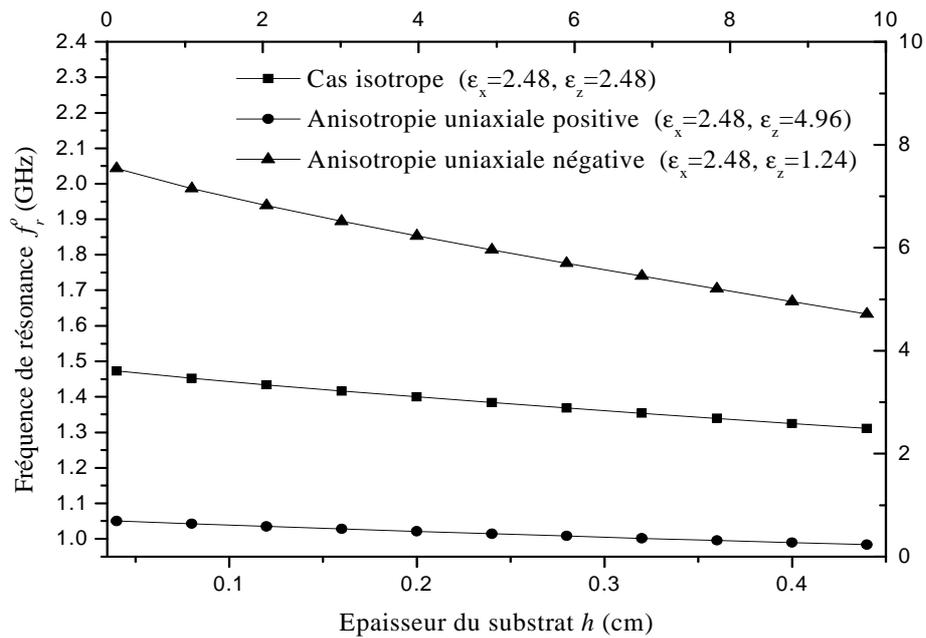
où f_{ri} et f_{ra} sont respectivement les fréquences de résonance de l'antenne pour les cas isotropes et anisotropes.

Tableau II.3. Dépendance de la fréquence de résonance de l'antenne microbande elliptique en fonction des permittivités relatives (ϵ_x, ϵ_z),
 $h = 0.3175 \text{ cm}, \epsilon_r = 2.48, a = 4 \text{ cm}, b = 3.84 \text{ cm}$

Type de L'anisotropie uniaxial	Permittivité Relative		Rapport d'anisotrope (AR)	Fréquence de résonance (GHz)		$\frac{\Delta f_r}{f_r}$ (%)	
	ϵ_x	ϵ_z	$AR = \epsilon_x / \epsilon_z$	f_r^e	f_r^o	Pair	Impair
Isotrope	2.48	2.48	1	1.328	1.354	0	0
Négative	4.96	2.48	2	1.281	1.307	3.54	3.47
Négative	2.48	1.24	2	1.708	1.742	28.61	28.66
Positive	1.24	2.48	0.5	1.362	1.390	2.56	2.66
Positive	2.48	4.96	0.5	0.982	1.002	26.05	26.00



(a)



(b)

Figure II.12. Fréquence de résonance (a) paire et (b) impaire en fonction de l'épaisseur du substrat pour le cas isotrope, anisotropie uniaxiale négative et anisotropie uniaxiale positive lorsque ϵ_z change.

On observe que, pour l'anisotropie uniaxiale négative avec $AR = 2$, la fréquence de résonance peut se décaler vers une fréquence plus petite de valeur 1.281 GHz ou une fréquence plus grande de valeur 1.708 GHz pour la résonance paire (f_r^e), et de 1.307 GHz vers 1.742 GHz pour la résonance impaire (f_r^o).

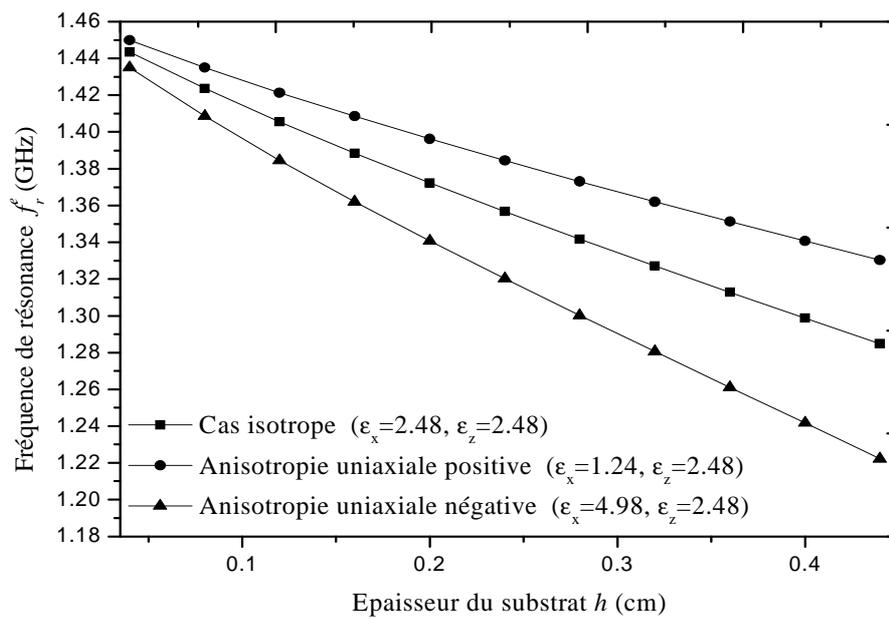
La même remarque est observée pour le cas de l'anisotropie uniaxiale positive avec $AR = 0.5$, les valeurs correspondantes de la petite et la grande fréquence sont, respectivement, 0.982 GHz et 1.362 GHz (1.002 GHz et 1.390 GHz) pour la résonance paire (impaire). Par conséquent, le paramètre AR seul n'est pas suffisant pour décider sur l'augmentation ou la diminution de la fréquence de résonance.

On note aussi que pour le cas de la résonance paire, lorsque ε_z diminue (augmente) de 2.48 à 1.24 (4.96), les fréquences de résonance augmentent (diminuent) de 1.328 GHz à 1.708 GHz (0.982 GHz), pour un changement fractionnel large de valeur 28.61% (26.05%).

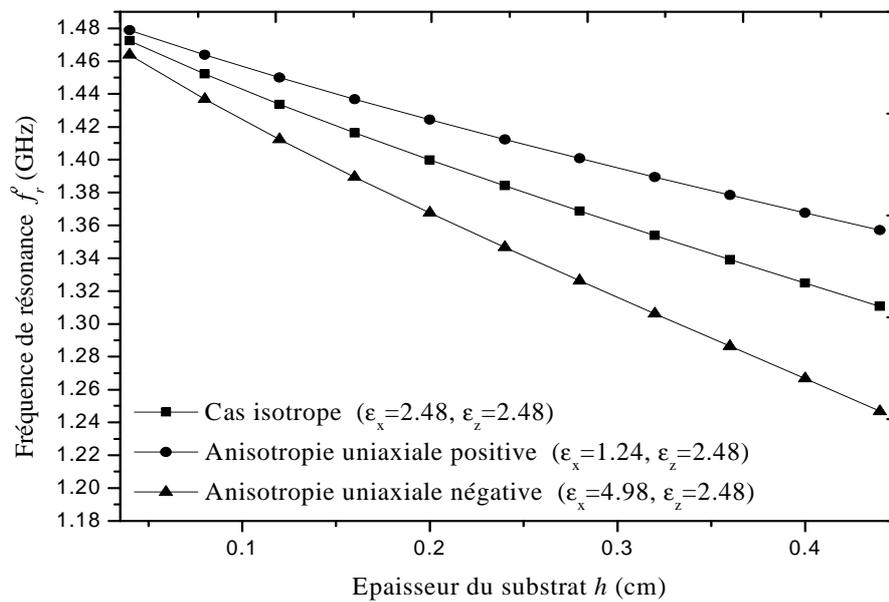
Pour le cas de la résonance impaire, une variation importante de la fréquence de résonance est également constatée lorsque ε_z diminue (augmente) de 2.48 à 1.24 (4.96). En effet, les changements fractionnels obtenus ont le même ordre de grandeur que celui enregistré pour le cas de la résonance paire.

Cependant, lorsque ε_x change, des valeurs faibles sont obtenues pour le changement fractionnel, le maximum de changement étant inférieur à 4%. On conclut que pour une antenne microbande elliptique imprimée sur un substrat uniaxial, la fréquence d'opération dépend fortement de la permittivité relative le long de l'axe optique (ε_z).

Les fréquences de résonance du résonateur microbande elliptique en fonction de l'épaisseur du substrat diélectrique sont montrées dans les figures II. 12(a) et (b), où le cas isotrope, le cas de l'anisotropie négative et le cas de l'anisotropie positive sont considérés. La longueur et la largeur du patch microbande elliptique sont $a = 4 \text{ cm}$ et $b = 3.84 \text{ cm}$, respectivement. Dans la Figure 12, l'anisotropie est obtenue en changeant ε_z alors que ε_x demeure constante.



(a)



(b)

Figure II.13. Fréquence de résonance (a) paire et (b) impaire en fonction de l'épaisseur du substrat pour le cas isotrope, anisotropie uniaxiale négative et anisotropie uniaxiale positive lorsque ϵ_x change.

Il est observé à partir de la figure II.13 que lorsque ε_x est changée alors que ε_z demeure constante, l'influence de l'anisotropie sur la fréquence de résonance diminue avec la réduction dans l'épaisseur du substrat pour la résonance paire aussi bien que pour la résonance impaire. Cette influence tend à être négligeable pour des substrats électriquement très minces.

II.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploité le modèle de cavité pour une modélisation analytique d'une antenne microbande de forme régulière. L'antenne a été assimilée à une cavité résonante ayant deux murs électrique parfaits, correspondant aux surfaces parfaitement conductrices, et quatre murs latéraux magnétiques. Nous avons considéré trois différentes formes du patch, à savoir, la forme rectangulaire, circulaire et elliptique. Cette dernière forme offre deux résonances : une paire et l'autre impaire. L'inclusion des champs de bord dans la formulation mathématique permet d'obtenir un modèle fiable pour des substrats minces aussi bien que pour des substrats épais. Les connaissances électromagnétiques ont été utilisées pour tenir compte de l'effet de l'anisotropie uniaxiale dans le substrat. Le modèle des deux fluides de Gorter-Casimir nous a permis de considérer le phénomène de la supraconductivité dans le calcul de la fréquence de résonance de l'antenne.

Les résultats obtenus ont montré que pour prédire les variations de la fréquence de résonance pour le cas d'un substrat anisotrope, il est nécessaire de considérer à la fois la variation de ε_x et ε_z , et pas seulement le rapport d'anisotropie $\varepsilon_x/\varepsilon_z$. D'autres résultats ont indiqué que la permittivité ε_z le long de l'axe optique est le facteur le plus pondérant dans la détermination de la fréquence de résonance. L'effet de la permittivité ε_x sur la fréquence de résonance augmente avec l'augmentation de l'épaisseur du substrat.

En ce qui concerne l'antenne supraconductrice de forme rectangulaire ou circulaire, les résultats numériques ont montré que l'effet de l'épaisseur du patch supraconducteur est plus prononcé pour des épaisseurs inférieures à la profondeur de pénétration à une température nulle (λ_0). Un soin extrême devrait être pris lors de la réalisation d'une antenne avec un film supraconducteur mince ; puisque une petite incertitude lorsque le

disque est fabriqué peut avoir comme conséquence un décalage important de la fréquence de l'antenne. L'étude de l'influence de la température sur la fréquence de résonance de l'antenne supraconductrice a indiqué que l'augmentation de la température cause une diminution dans la fréquence de résonance. Cette diminution est significative pour des valeurs de température voisines de la température critique.

II.8. Références bibliographiques

- [1] N. Fortino, "Conception et caractérisation d'antennes imprimées pour systèmes Ultra-Large-Bande impulsions," Thèse de Doctorat, Université Nice Sophia Antipolis, 2006.
- [2] E. M. Elkaramany, F. G. Abo El-Hadeed, and A. S. Ahmed, "Resonant frequencies of arbitrarily shaped microstrip patch antennas using two-dimensional circuit model," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, pp. 1-11, 2014.
- [3] T. Fortaki, D. Khedrouche, F. Bouttout, and A. Benghalia, "A numerically efficient full-wave analysis of a tunable rectangular microstrip patch," *International Journal of Electronics*, vol. 91, pp. 57-70, 2004.
- [4] R. Garg, *Microstrip antenna design handbook*: Artech House, 2001.
- [5] D. Guha and Y. M. Antar, *Microstrip and printed antennas: new trends, techniques and applications*: John Wiley & Sons, 2011.
- [6] C. Gurel and E. Yazgan, "Characteristics of a circular patch microstrip antenna on uniaxially anisotropic substrate," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 52, pp. 2532-2537, 2004.
- [7] T. Fortaki, D. Khedrouche, F. Bouttout, and A. Benghalia, "Vector Hankel transform analysis of a tunable circular microstrip patch," *Communications in numerical methods in engineering*, vol. 21, pp. 219-231, 2005.
- [8] A. Gadda, "Evaluation des caractéristiques d'un résonateur microruban à film mince supraconducteur par la méthode des deux fluides et les réseaux de neurones artificiels". Mémoire de Magister, Université de Batna 2, 2015.
- [9] B. B. Klopman, G. J. Gerritsma, and H. Rogalla, "The propagation characteristics of wave-guiding structures with very thin superconductors; application to coplanar waveguide YBa₂Cu₃O₇ resonators," *IEEE transactions on microwave Theory and Techniques*, vol. 41, pp. 781-791, 1993.
- [10] S. Silva, A. d'Assuncao, and J. Oliveira, "Analysis of high T_c superconducting microstrip antenna and arrays," *MTT Symposium. SBMO/IEEE*, pp. 243-246, 1999.
- [11] S. Savard, "Fabrication et étude de composants micro-ondes planaires supraconducteurs," Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke. Québec, 2004.
- [12] F. Benmeddour, "Etude et réalisation d'un résonateur micro ruban de forme circulaire," Université Mentouri, Thèse de Doctorat, Constantine, 2012.

- [13] D. C. Chung, "Perfect impedance matching point of high-T_c superconducting microstrip antennas," *Physica C: Superconductivity*, vol. 354, pp. 95-99, 2001.
- [14] N. Sekiya, A. Kubota, A. Kondo, S. Hirano, A. Saito, and S. Ohshima, "Broadband superconducting microstrip patch antenna using additional gap-coupled resonators," *Physica C: Superconductivity and its applications*, vol. 445, pp. 994-997, 2006.
- [15] D. Sayad, F. Benabdelaziz, C. Zebiri, S. Daoudi, and R. A. Abd-Alhameed, "Spectral domain analysis of gyrotropic anisotropy chiral effect on the input impedance of a printed dipole antenna," *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 51, pp. 1-8, 2016.
- [16] R. Bedra, S. Bedra, and T. Fortaki, "Analysis of elliptical-disk microstrip patch printed on isotropic or anisotropic substrate materials," *International Journal of Microwave and Wireless Technologies*, vol. 8, pp. 251-255, 2016.
- [17] S. Bedra, "Evaluation analytique et numérique des caractéristiques électromagnétiques des structures microbandes ouvertes," Thèse de Doctorat, Université de Batna, 2015.
- [18] D. Grenier, *Antennes et Propagation Radio*. Québec: Université Laval, 2017.
- [19] A. Mahamdi, S. Bedra, R. Bedra, and S. Benkouda, "CAD cavity model analysis of high T_c superconducting rectangular patch printed on anisotropic substrates," *5th International Conference on Electrical Engineering- Boumerdes (ICEE-B)*, pp. 1-4, 2017.
- [20] D. Grenier, "Electromagnétisme et transmission des ondes," Québec: Université Laval, 2004.
- [21] W. C. Chew and J. A. Kong, "Effects of fringing fields on the capacitance of circular microstrip disk," *IEEE Transactions on microwave theory and techniques*, vol. 28, pp. 98-104, 1980.
- [22] N. W. Mclachlan, "Theory and Applications of Mathieu Functions," (ch. 13) New York: Dover, 1964.
- [23] F. Jamal, "Les guides d'ondes et cavités résonnantes elliptiques," Université du Québec à Trois-Rivières, 1995.
- [24] D. A. Goldberg, L. J. Laslett, and R. A. Rimmer, "Modes of elliptical waveguides: A correction," *IEEE transactions on microwave Theory and Techniques*, vol. 38, pp. 1603-1608, 1990.
- [25] M. Sharma, S. Yadav, A. Kumar, Y. Ranga, and D. Bhatnagar, "Compact elliptical microstrip patch antenna with slotted ground for Ku-band applications," *Applied Electromagnetics Conference (AEMC)*, pp. 1-3, 2011.
- [26] N. Kumprasert, "Theoretical study of dual-resonant frequency and circular polarization of elliptical microstrip antennas," *International Symposium Antennas and Propagation Society*, pp. 1015-1020, 2000.
- [27] N. Kumprasert and W. Kiranon, "Simple and accurate formula for the resonant frequency of the circular microstrip disk antenna," *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 43, pp. 1331-1333, 1995.

- [28] M. A. Richard, K. B. Bhasin, and P. C. Clasp, "Superconducting microstrip antennas: an experimental comparison of two feeding methods," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 41, pp. 967-974, 1993.
- [29] R. Kumar and P. Malathi, "Experimental investigation of resonant frequency of multilayered rectangular and circular microstrip antennas," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 53, pp. 352-356, 2011.
- [30] R. Kumar, P. Malathi, and Y. B. Thakare, "On the design of four layered circular microstrip patch antenna," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 50, pp. 3206-3212, 2008.
- [31] A. Verma, "Analysis of circular microstrip patch antenna as an equivalent rectangular microstrip patch antenna on iso/anisotropic thick substrate," *IEE Proceedings-Microwaves, Antennas and Propagation*, vol. 150, pp. 223-229, 2003.
- [32] S. Bedra, R. Bedra, S. Benkouda, and T. Fortaki, "Efficient CAD Model to Analysis of High Tc Superconducting Circular Microstrip Antenna on Anisotropic Substrates," *Advanced Electromagnetics*, vol. 6, pp. 40-45, 2017.
- [33] S. Long, L. Shen, D. Schaubert, and F. Farrar, "An experimental study of the circular-polarized elliptical printed-circuit antenna," *IEEE transactions on antennas and propagation*, vol. 29, pp. 95-99, 1981.

Chapitre III

Etude d'une antenne microbande supraconductrice avec radôme

III.1. Introduction

La supraconductivité est un phénomène qui se manifeste par la perte de toute résistance électrique pour certains métaux. Il apparaît à des températures inférieures à une valeur limite très basse appelée température critique T_c dépendante du matériau concerné. Une fois cette température limite est dépassée, la résistivité du métal revient à son état normal [1]. Il est caractérisé par l'absence de résistance électrique et l'annulation du champ magnétique à l'intérieur du matériau (effet Meissner) [2], ce qui permet de réduire le temps de propagation des signaux dans les circuits. Les Progrès récents sur les matériaux supraconducteurs à haute température critique (HTC) permettent d'envisager des applications en hyperfréquences utilisant des technologies de type microruban [2]. Les antennes microbandes sont devenues très populaires à cause de leurs nombreux avantages tels que faible poids [6], simplicité de fabrication et la conformabilité facilitant l'implantation sur tout type de support [3]-[5]. Par conséquent, elles ont de larges applications dans divers systèmes hyperfréquences, nous citons à titre d'exemple, les équipements sans fil, les missiles, les satellites et les capteurs [6], [7]. Plusieurs recherches ont été consacrées à la caractérisation de différentes géométries de ces structures. En particulier, un résonateur microruban circulaire peut être utilisé à la fois comme antenne séparée ou comme composant d'un oscillateur ou d'un filtre dans des circuits intégrés micro-ondes ou millimétriques [8]. Cependant, ces antennes souffrent de quelques inconvénients, notamment la bande passante étroite et le faible gain, qui doivent être améliorées grâce à l'application d'une technique et/ou d'une conception innovante [9]. L'ajout d'une couche diélectrique au-dessus d'une plaque microruban a été proposé dans la littérature pour permettre l'amélioration du gain de l'antenne et de l'efficacité de rayonnement [10]-[13]. En outre, les superstrats sont souvent utilisés pour protéger le patch microruban des risques de l'environnement, en particulier lorsqu'il est placé sur des avions ou des missiles [14]. Les effets fondamentaux du superstrat-substrat sur les antennes microbandes ont été étudiés pour améliorer la bande passante [14]. Il a été montré également que l'utilisation des superstrats est bénéfique pour les antennes microbandes supraconductrices à haute température critique [15]. Plusieurs modèles utilisant différents niveaux d'approximation sont disponibles dans la littérature pour déterminer les caractéristiques de résonance de l'antenne microruban circulaire, cependant, la précision de

ces modèles est limitée et ne convient que pour l'analyse des antennes de forme régulière ayant des substrats minces [16]. Une alternative consiste à utiliser une technique plus sophistiquée, telle que la méthode des moments (MOM), qui est souple et précise et très compatible avec la CAO [15].

Dans la littérature ouverte, les études concernant les caractéristiques de résonance des antennes microrubans couvertes par des couches diélectriques utilisant des plaques parfaitement conductrices sont nombreuses [7], [10], [12], [15]-[16]. Cependant, peu de travaux ont été effectués pour le cas des plaques microrubans supraconductrices dans des configurations substrat-superstrat [15]-[18]. Au meilleur de notre connaissance, l'effet du superstrat diélectrique sur les caractéristiques de résonance de l'antenne circulaire supraconductrice n'a pas été traité auparavant dans la littérature ouverte; les résultats publiés concernent uniquement la fréquence d'opération de l'antenne [19], [20].

Dans ce travail, les caractéristiques de résonance d'un patch microbande circulaire supraconducteur à haute température critique avec une couche protectrice sont étudiées en utilisant l'approche spectrale conjointement avec les conditions aux limites de la résistivité complexe. La comparaison de nos résultats avec les valeurs théoriques et expérimentales disponibles dans la littérature montre qu'une amélioration supplémentaire est obtenue sur la précision des résultats, relativement aux modèles précédents, notamment pour des substrats épais.

III.2. Formulation mathématique et structure du problème

Le patch microbande supraconducteur à haute température critique avec une couche protectrice est représenté sur la figure III. 1. Le patch supraconducteur circulaire, de rayon a et d'épaisseur t , est imprimé sur un substrat de permittivité relative ϵ_{r1} et d'épaisseur h_1 . Le substrat est couvert par une couche supérieure protectrice de permittivité relative ϵ_{r2} et d'épaisseur h_2 . Le milieu ambiant est l'air avec les paramètres constitutifs μ_0 et ϵ_0 . Tous les champs et les courants sont en régime harmonique avec la dépendance temporelle $e^{i\omega t}$ supprimée. Les champs transverses à l'intérieur du substrat composite peuvent être obtenus par l'intermédiaire des transformées vectorielles inverses de Hankel [21] :

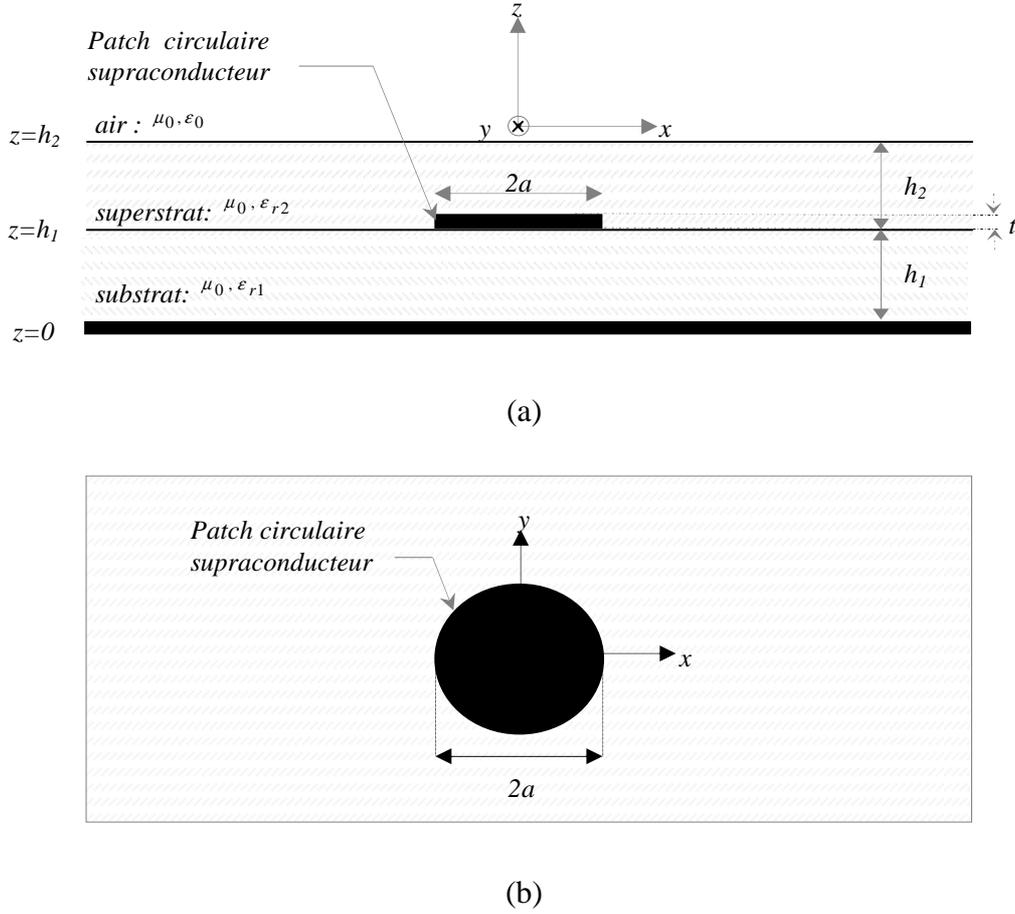


Figure III.1. Vues latérales (a) et supérieures (b) d'un patch microbande circulaire supraconducteur à haut température critique couvert par une couche diélectrique.

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = \begin{bmatrix} E_\rho(\rho, \phi, z) \\ E_\phi(\rho, \phi, z) \end{bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{in\phi} \int_0^\infty dk_\rho k_\rho \bar{\mathbf{H}}_n(\rho k_\rho) \cdot \mathbf{e}_n(k_\rho, z) \quad (1)$$

$$\mathbf{H}(\rho, \phi, z) = \begin{bmatrix} H_\phi(\rho, \phi, z) \\ -H_\rho(\rho, \phi, z) \end{bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{in\phi} \int_0^\infty dk_\rho k_\rho \bar{\mathbf{H}}_n(\rho k_\rho) \cdot \mathbf{h}_n(k_\rho, z) \quad (2)$$

où $\bar{\mathbf{H}}_n(\rho k_\rho)$ est le noyau des transformées vectorielles de Hankel, il est donné par [21] :

$$\bar{\mathbf{H}}_n(\rho k_\rho) = \begin{bmatrix} J'_n(k_\rho \rho) & -\frac{in}{k_\rho \rho} J_n(k_\rho \rho) \\ \frac{in}{k_\rho \rho} J_n(k_\rho \rho) & J'_n(k_\rho \rho) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Dans (3), $J_n(\cdot)$ est la fonction de Bessel de la première espèce et d'ordre n , et la prime désigne une différentiation en fonction de l'argument. Dans le domaine des transformées vectorielles de Hankel, la relation reliant le courant sur la plaque conductrice avec le champ électrique dans l'interface correspondant est donnée par:

$$\mathbf{e}_n(k_\rho, h_1) = \overline{\mathbf{G}}(k_\rho) \cdot \mathbf{k}_n(k_\rho) \quad (4)$$

où $\overline{\mathbf{G}}(k_\rho)$ est la fonction dyadique de Green dans le domaine des transformées vectorielles de Hankel, elle est donnée par

$$\overline{\mathbf{G}}(k_\rho) = \begin{bmatrix} G^e & 0 \\ 0 & G^h \end{bmatrix} = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \begin{bmatrix} k_{z1} \frac{D^e}{T^e} & 0 \\ 0 & k_0^2 \frac{D^h}{T^h} \end{bmatrix} \sin(k_{z1}h_1), \quad (5)$$

L'équation (5) indique que la dyade de Green est diagonale dans le domaine des transformées vectorielles de Hankel. Dans laquelle :

$$D^e = k_{z0} \cos(k_{z2}h_2) + i \frac{k_{z2}}{\epsilon_{r2}} \sin(k_{z2}h_2) \quad (5.a)$$

$$T^e = \cos(k_{z2}h_2) [\epsilon_{r1} k_{z0} \cos(k_{z1}h_1) + i k_{z1} \sin(k_{z1}h_1)] + i \sin(k_{z2}h_2) \left[\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} k_{z2} \cos(k_{z1}h_1) + i \epsilon_{r2} k_{z0} \frac{k_{z1}}{k_{z2}} \sin(k_{z1}h_1) \right] \quad (5.b)$$

$$D^h = \cos(k_{z2}h_2) + i \frac{k_{z0}}{k_{z2}} \sin(k_{z2}h_2) \quad (5.c)$$

$$T^h = \cos(k_{z2}h_2) [k_{z1} \cos(k_{z1}h_1) + i k_{z0} \sin(k_{z1}h_1)] + i \sin(k_{z2}h_2) \left[k_{z0} \frac{k_{z1}}{k_{z2}} \cos(k_{z1}h_1) + i k_{z2} \sin(k_{z1}h_1) \right] \quad (5.d)$$

Dans les équations (5.a)-(5.d), k_{z1} et k_{z2} sont, respectivement, les constantes de propagation des ondes TM et TE dans la première et la deuxième couche, et k_{z0} est la constante de propagation dans l'espace libre.

$$k_{z1} = (\epsilon_{r1} k_0^2 - k_\rho^2)^{\frac{1}{2}}, k_{z2} = (\epsilon_{r2} k_0^2 - k_\rho^2)^{\frac{1}{2}}, k_{z0}^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \quad (5.e)$$

Dans le domaine des transformées vectorielles de Hankel, le champ électrique transversal sur le plan du patch supraconducteur peut être écrit comme une superposition d'un champ électrique dans le patch et un autre en dehors de celui-ci, ceci donne

$$\mathbf{e}_n(k_\rho, h_1) = \mathbf{e}_n^i(k_\rho, h_1) + \mathbf{e}_n^o(k_\rho, h_1) \quad (6)$$

Le champ électrique sur le disque supraconducteur à haute T_c est donné par

$$\mathbf{e}_n^i(k_\rho, h_1) = \bar{\mathbf{Z}}_s \cdot \mathbf{k}_n(k_\rho) \quad (7)$$

avec $\bar{\mathbf{Z}}_s = \begin{bmatrix} Z_s & 0 \\ 0 & Z_s \end{bmatrix}$, et Z_s est l'impédance de surface complexe du disque

supraconducteur. Lorsque l'épaisseur du disque supraconducteur est inférieure à 3 fois la profondeur de pénétration λ_0 (la profondeur de pénétration λ à la température $T = 0$ K), l'impédance de surface complexe peut être approximée comme suit [22] :

$$Z_s = \begin{cases} \sqrt{\omega \cdot \mu_0 / (2 \cdot \sigma)} & t \geq 3 \cdot \lambda_0 \\ 1/t \cdot \sigma & t < 3 \cdot \lambda_0 \end{cases} \quad (8)$$

Dans l'équation (8), nous avons également donnée une approximation de l'impédance de surface complexe lorsque l'épaisseur du disque supraconducteur est supérieure à 3 fois la profondeur de pénétration λ_0 . σ est la conductivité complexe du film supraconducteur. Elle est déterminée par le modèle des deux fluides de Gorter-Casimir conjointement avec les équations des frères London [22]

$$\sigma = \sigma_1 - i \sigma_2 \quad (9)$$

La partie réelle de la conductivité complexe (σ_1) provient des électrons de conduction normaux. Sa dépendance en température est de la forme [21]

$$\sigma_1 = \sigma_n \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \quad (10)$$

où T est la température, T_c est la température de transition, σ_n est la conductivité normal à $T = T_c$. La partie réactive de la conductivité ($-i\sigma_2$) provient des porteurs supraconducteurs, elle peut être déterminée à partir de l'équation de la force de Lorentz [22]

$$\sigma_2 = \frac{1}{\omega \mu_0 [\lambda(T)]^2} \quad (11)$$

Dans l'équation (11), ω est la fréquence angulaire et $\lambda(T)$ est la profondeur de pénétration de London à la température T , elle est donnée par l'expression suivante :

$$\lambda(T) = \lambda_0 \cdot \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

En substituant l'équation (6) dans l'équation (4), nous obtenons

$$\mathbf{e}_n^o(k_\rho, h_1) = \overline{\mathbf{G}}(k_\rho) \cdot \mathbf{k}_n(k_\rho) - \mathbf{e}_n^i(k_\rho, h_1) \quad (13)$$

Lorsque l'équation (7) est substituée dans l'équation (13), le résultat suivant est obtenu :

$$\mathbf{e}_n^o(k_\rho, h_1) = \left(\overline{\mathbf{G}}(k_\rho) - \overline{\mathbf{Z}}_s \right) \cdot \mathbf{k}_n(k_\rho) \quad (14)$$

Le champ électrique transversal hors du disque peut être exprimé via la transformée inverse de Hankel comme suit :

$$\mathbf{E}_n^o(\rho, h_1) = \int_0^{+\infty} dk_\rho k_\rho \overline{\mathbf{H}}_n(k_\rho \rho) \cdot \left(\overline{\mathbf{G}}(k_\rho) - \overline{\mathbf{Z}}_s \right) \cdot \mathbf{k}_n(k_\rho) \quad (15)$$

Les conditions aux frontières impliquent que le champ électrique transversal donné par l'équation (15) s'annule sur la région du disque supraconducteur et le courant s'annule au-delà du disque, ce qui donne l'ensemble suivant des équations intégrales vectorielles duales :

$$\mathbf{E}_n^o(\rho, h_1) = \int_0^{+\infty} dk_\rho k_\rho \overline{\mathbf{H}}_n(k_\rho \rho) \cdot \left(\overline{\mathbf{G}}(k_\rho) - \overline{\mathbf{Z}}_s \right) \cdot \mathbf{k}_n(k_\rho) = \mathbf{0}, \quad \rho < a \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_n(\rho) = \int_0^{+\infty} dk_\rho k_\rho \bar{\mathbf{H}}_n(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{k}_n(k_\rho) = \mathbf{0}, \quad \rho > a \quad (17)$$

Maintenant, la méthode de Galerkin peut être aisément employée aux équations intégrales couplées (16) et (17). Ainsi, le courant sur le disque circulaire est développé en une série finie de fonctions de base connues

$$\mathbf{K}_n(\rho) = \sum_{p=1}^P a_{np} \Psi_{np}(\rho) + \sum_{q=1}^Q b_{nq} \Phi_{nq}(\rho) \quad (18)$$

P et Q correspondent au nombre de fonctions de base $\Psi_{np}(\rho)$ et $\Phi_{nq}(\rho)$, respectivement, et a_{np} et b_{nq} sont les coefficients du développement modal recherchés. La transformée vectorielle de Hankel correspondante du courant est donnée par

$$\mathbf{k}_n(k_\rho) = \sum_{p=1}^P a_{np} \psi_{np}(k_\rho) + \sum_{q=1}^Q b_{nq} \phi_{nq}(k_\rho) \quad (19)$$

En substituant le développement du courant de l'équation (19) dans l'équation (15). Puis, en multipliant l'équation résultante par $\rho \Psi_{nk}^+(\rho)$ ($k = 1, 2, \dots, P$) et $\rho \Phi_{nl}^+(\rho)$ ($l = 1, 2, \dots, Q$) et en intégrant de 0 à a , et en utilisant le théorème de Parseval pour les transformées vectorielles de Hankel [23], nous obtenons un système de $P + Q$ équations algébriques linéaires pour chaque mode n qui peut être écrit sous la forme matricielle

$$\bar{\mathbf{Z}}_n \cdot \mathbf{C}_n = \mathbf{0} \quad (20)$$

où

$$\bar{\mathbf{Z}}_n = \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{Z}}_n^{\Psi\Psi})_{P \times P} & (\bar{\mathbf{Z}}_n^{\Psi\Phi})_{P \times Q} \\ (\bar{\mathbf{Z}}_n^{\Phi\Psi})_{Q \times P} & (\bar{\mathbf{Z}}_n^{\Phi\Phi})_{Q \times Q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_n)_{P \times 1} \\ (\mathbf{b}_n)_{Q \times 1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Chaque élément des sous-matrices de $\bar{\mathbf{Z}}_n$ est donné par

$$\bar{\mathbf{Z}}_n^{\text{vw}}(i, j) = \int_0^{+\infty} dk_\rho \rho \mathbf{V}_{ni}^+(k_\rho) \cdot (\bar{\mathbf{G}}(k_\rho) - \bar{\mathbf{Z}}_s) \cdot \mathbf{W}_{nj}(k_\rho) \quad (22)$$

où \mathbf{v} et \mathbf{w} représentent Ψ ou Φ , pour chaque valeur de l'entier n , le système d'équations linéaires (20) possède des solutions non triviales lorsque

$$\det [\bar{\mathbf{Z}}_n(\omega)] = 0 \quad (23)$$

L'équation (23) est une équation propre pour ω , à partir de laquelle les caractéristiques de la structure multicouche illustrée dans la Figure III.1 peuvent être obtenues. En fait, si nous désignons par $\omega_{nm} = 2\pi(f_r^{nm} + i f_i^{nm})$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; m = 1, 2, 3, \dots$) l'ensemble des racines complexes de l'équation (23). Dans ce cas, les quantités f_r^{nm} désignent les fréquences de résonance des modes résonants de la plaque microbande circulaire, les quantités $BW^{nm} = 2f_i^{nm} / f_r^{nm}$ désignent les bandes passantes et les quantités $Q^{nm} = f_r^{nm} / 2f_i^{nm}$ désignent les facteurs de qualité [21]. Puisque $f_r^{nm} = f_r^{-nm}$ et $f_i^{nm} = f_i^{-nm}$, sans perte de généralité, dans ce qui suit, on supposera toujours que $n \geq 0$.

Le premier type de fonctions de base considéré est formé par l'ensemble orthogonal complet des modes TM et TE d'une cavité cylindrique de rayon a avec murs latéraux magnétiques et de murs électriques au sommet et à la base. Ces modes de courants qui sont non nuls uniquement sur la plaque circulaire sont donnés par

$$\Psi_{np}(\rho) = \begin{bmatrix} J_n'(\beta_{np}\rho/a) \\ \frac{ina}{\beta_{np}\rho} J_n(\beta_{np}\rho/a) \end{bmatrix}, \Phi_{nq}(\rho) = \begin{bmatrix} \frac{-ina}{\alpha_{nq}\rho} J_n(\alpha_{nq}\rho/a) \\ J_n'(\alpha_{nq}\rho/a) \end{bmatrix} \quad (24)$$

pour $n = 0, +1, +2, \dots$. $\Psi_{np}(\rho)$ ($p = 1, 2, \dots, P$) correspondent aux modes résonants de cavité TM et $\Phi_{nq}(\rho)$ ($q = 1, 2, \dots, Q$) correspondent aux modes résonants de cavité TE. Les constantes β_{np} et α_{nq} correspondent aux $p^{\text{ème}}$ et $q^{\text{ème}}$ zéros de $J_n'(\beta_{np}) = 0$ et $J_n(\alpha_{nq}) = 0$, respectivement.

Le second type de fonctions de base considéré est celui proposé par Losada *et al.* [22], il a des expressions différentes pour les modes à symétrie axiale ($n = 0$) et pour les modes à symétrie non-axiale ($n \neq 0$). Dans le cas des modes à symétrie axiale, les fonctions de base qui sont non nulles uniquement sur la plaque sont données par

$$\Psi_{0p}(\rho) = \begin{bmatrix} U_{2p-1}(\rho/a)\sqrt{1-(\rho/a)^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

où $U_{2p-1}(\cdot)$ ($p=1,2,\dots,P$) désignent les polynômes de Chebyshev du deuxième espèce [23]. Dans l'équation (24), l'absence de la composante azimutale de la densité de courant est justifiée par les raisons mentionnées dans [21]. Pour les modes à symétrie non-axiale, les fonctions de base qui sont non nulles uniquement sur la plaque sont données par

$$\Psi_{np}(\rho) = \begin{bmatrix} (\rho/a)^{n-2} U_{2p-1}(\rho/a)\sqrt{1-(\rho/a)^2} \\ 0 \end{bmatrix}, \Phi_{nq}(\rho) = \begin{bmatrix} 0 \\ i(\rho/a)^{n-1} \frac{T_{2q-2}(\rho/a)}{\sqrt{1-(\rho/a)^2}} \end{bmatrix} \quad (26)$$

où $T_{2q-2}(\cdot)$ ($q=1,2,\dots,Q$) désignent les polynômes de Chebyshev du premier espèce [21]. Le terme $\sqrt{1-(\rho/a)^2}$ fournit le comportement singulier approprié de bord pour la composante azimutale du courant et la condition zéro de bord pour la composante normale du courant.

III.3. Résultats numériques et discussion

Comme dans le cas des disques circulaires parfaitement conducteurs, nous avons trouvé que les fonctions de base présentées dans la section précédente sont très appropriées pour l'analyse dans le domaine des transformées vectorielles de Hankel des disques microbandes circulaires supraconducteurs [22]. Puisque le mode $n=1$ (mode TM^{11}) de la plaque microbande circulaire est largement utilisé dans les applications des antennes microbandes, dans ce qui suit uniquement des résultats pour ce mode fondamental sont donnés.

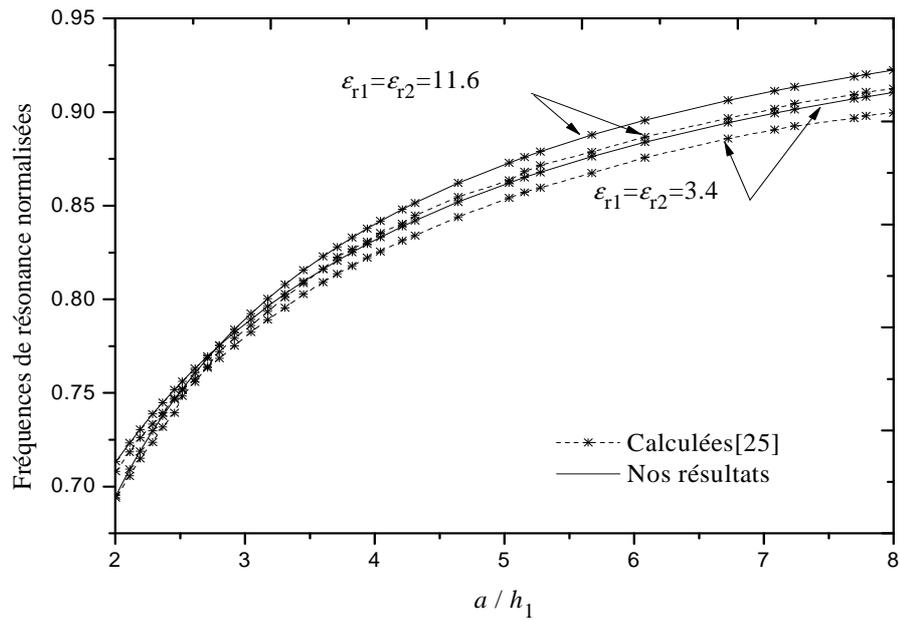
A présent, dans le but de valider la théorie présentée dans ce chapitre, nous comparons nos résultats numériques obtenus à partir de la solution numérique de l'équation caractéristique (23) avec des résultats théoriques et expérimentaux disponibles dans la littérature. Le tableau III.1 présente une comparaison de nos résultats concernant la fréquence de résonance avec les données expérimentales de la référence [24] pour un disque circulaire

parfaitement conductrice chargé par un superstrat utilisant les deux types des fonctions de bases (système issu du modèle de la cavité, et celui des polynômes de Chebyshev). L'accord entre les résultats calculés et mesurés est très bon. Notons que nos calculs de la fréquence de résonance obtenus en utilisant le système formé par les modes de cavité diffèrent de ceux obtenus en utilisant le système constitué des polynômes de Chebyshev avec les conditions de bord par au plus 0.57%.

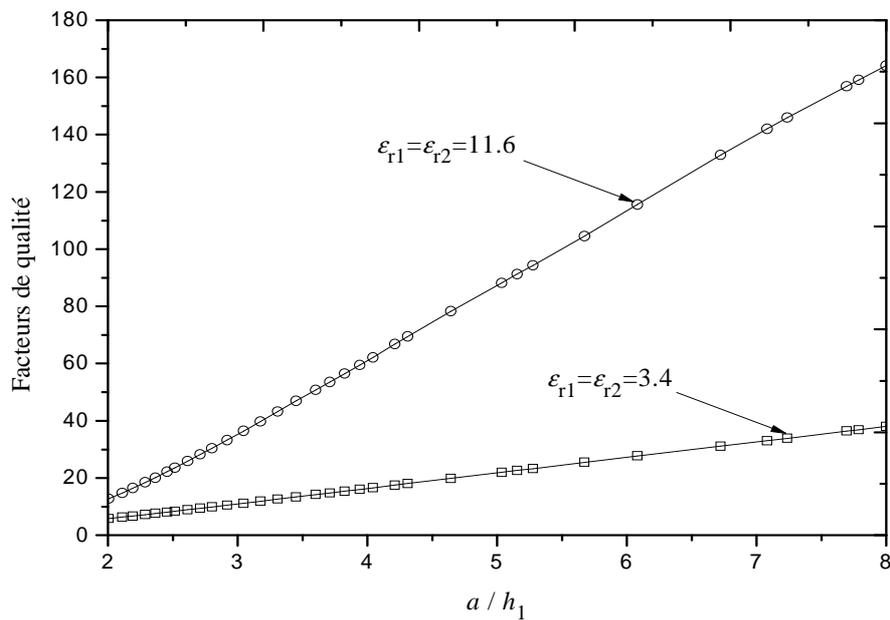
Tableau III. 1. Comparaison des fréquences de résonance calculées utilisant deux types de fonctions de base avec celles mesurées pour des résonateurs microrubans circulaires avec radômes, $h_1 = 0.787$ mm, $\epsilon_{r1} = 2.2$.

a (mm)	h_2 (mm)	$\epsilon_{r2} = 2.2$	Fréquences de résonance (GHz)		
			Mesurées [24]	Nos résultats	
				Modes de cavité	Polynômes de Chebyshev
40.0	0.787	2.2	1.443	1.455	1.457
40.0	1.530	4.3	1.433	1.436	1.439
21.0	0.787	2.2	2.702	2.727	2.735
21.0	1.530	4.3	2.668	2.657	2.667
28.5	0.787	2.2	2.014	2.027	2.032
28.5	1.530	4.3	1.995	1.989	1.995

La variation de la fréquence de résonance normalisée du mode fondamental avec le rayon du patch en utilisant les fonctions de base formées par les modes de cavité est visualisée sur la figure III.2. (a). La normalisation est effectuée par rapport à la fréquence de résonance du modèle de cavité $f_{cm}^{11} = 1.841 / 2\pi a \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0}$. Dans cette figure, nous comparons nos résultats avec les données théoriques de Losada *et al.* [25, Figure 2]. Il est observé à partir de cette figure que l'approche rapportée dans [25] donne des résultats comparables à ceux de notre modèle. Le très bon accord entre les deux résultats indique clairement la validité de la méthode proposée dans ce travail.



(a)



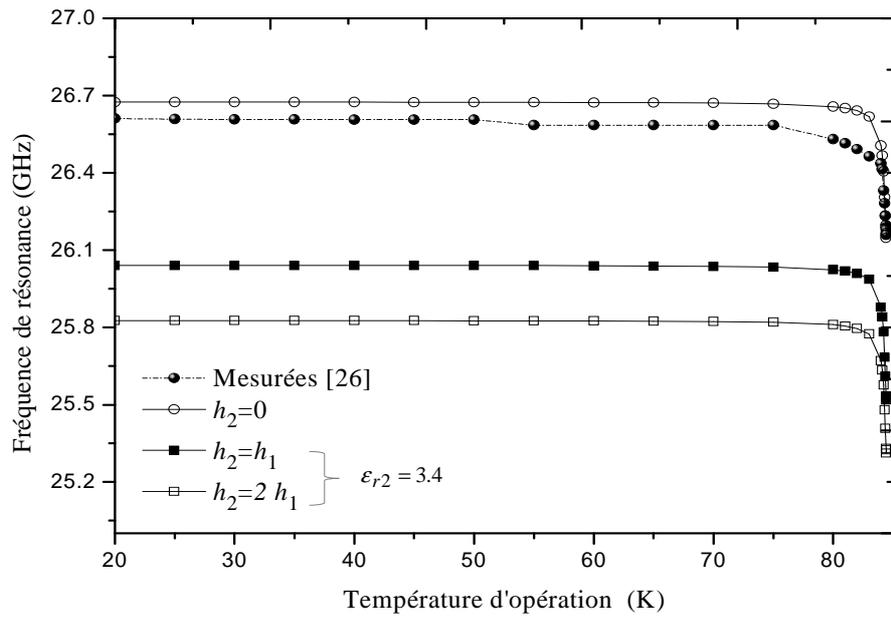
(b)

Figure III.2. Fréquences de résonance normalisées (a) et facteurs de qualité (b) d'une plaque circulaire parfaitement conductrice piégée entre un substrat et un superstrat, $h_1 = h_2 = 0.635$ mm .

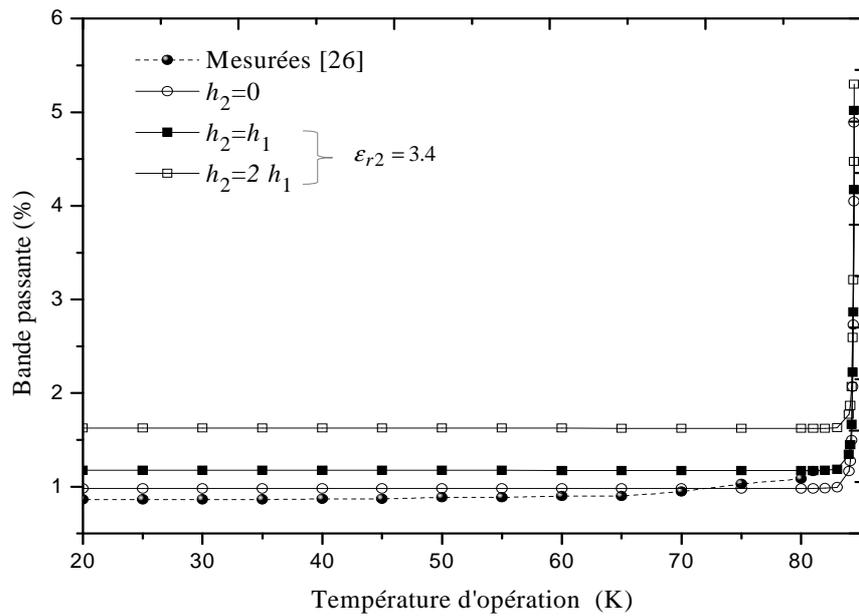
En outre, la figure III.2. (b) montre le facteur de qualité en fonction du rayon du disque circulaire dans le cas où ce dernier est chargé par deux différents superstrats. A partir de cette figure, on constate que le facteur de qualité augmente de façon monotone avec l'augmentation de la taille du disque circulaire.

Afin de confirmer l'exactitude des calculs pour le cas d'une antenne circulaire supraconductrice, nos résultats numériques sont comparés avec les données expérimentales de Richard et *al.* [26]. Le disque circulaire est fabriqué avec un film mince supraconducteur en YBa₂Cu₃O₇ (YBCO) avec comme paramètres $t = 330$ nm, $\sigma_n = 10^6$ S/M, $\lambda_0 = 140$ nm et $T_c = 84.5$ K. Le disque est imprimé sur un substrat d'aluminate de lanthane (LaAlO₃) avec $\varepsilon_{r1} = 23.81$ et $h_1 = 254$ μ m. La permittivité élevée du substrat LaAlO₃ permet la croissance de films YBCO à haute qualité (surface de résistance faible). Notons que la variation de la permittivité du substrat LaAlO₃ avec la variation de la température, comme indiquée par l'expérience de Richard et *al.* [26], n'est pas tenue en compte dans nos calculs (l'expérience de Richard et *al.* [26] a indiqué que la permittivité du diélectrique LaAlO₃ augmente avec l'augmentation de la température dans la gamme des températures [50K, 300K]). La figure III.3 montre la comparaison entre nos calculs et les données expérimentales de Richard et *al.* [26]. Il est clair à partir de cette figure que nos résultats sont en bon accord avec les valeurs expérimentales rapportées dans [26]. A partir de la figure III.3. (a), On remarque que les fréquences de résonance des plaques supraconductrices sans superstrat sont plus grandes que celles obtenues avec un superstrat. Ce résultat est en accord avec celui découvert théoriquement pour des plaques parfaitement conductrices [16]. L'effet de la température de fonctionnement sur la bande passante de l'antenne microbande avec et sans couche protectrice est également étudié dans la figure III.3. (b). On observe que, lorsque l'épaisseur du superstrat augmente, la bande passante augmente car la couche protectrice (superstrat) provoque le changement des champs entre l'antenne et le plan de masse affectant ainsi la permittivité équivalente du substrat.

Dans les figures III.3. (a) et (b), le changement escarpé dans la fréquence de résonance et la bande passante de l'antenne microbande supraconductrice à des températures voisines de la température critique peut être attribué à un changement dans la profondeur de pénétration magnétique de l'YBCO.



(a)



(b)

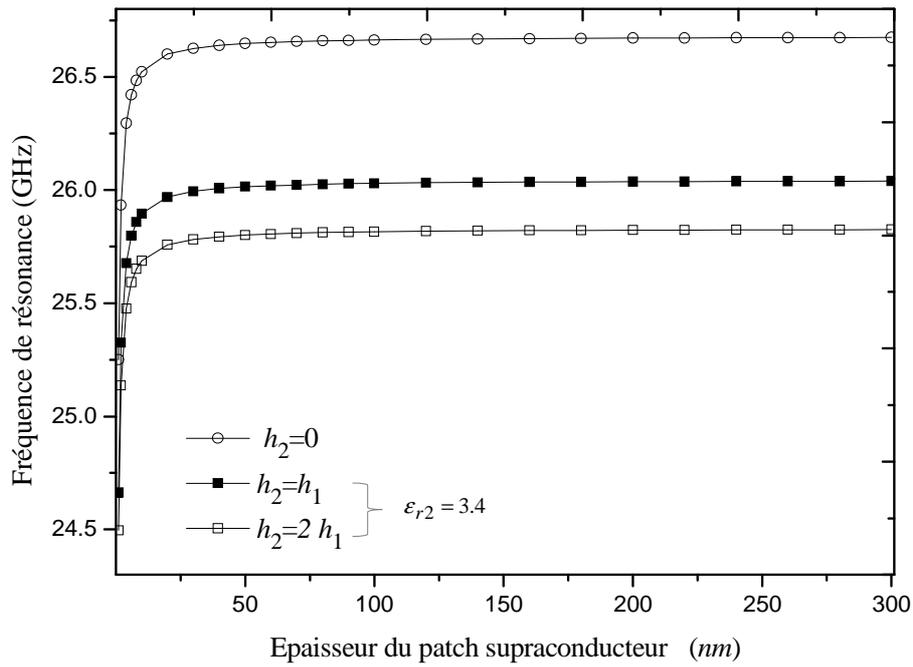
Figure III.3. Comparaison des fréquences de résonance (a) et les bandes passantes (b) calculées avec les valeurs expérimentales de Richard et *al.* [26], $a = 610 \mu\text{m}$, $\epsilon_{r1} = 23.81$, $h_1 = 254 \mu\text{m}$, $t = 330 \text{ nm}$, $\sigma_n = 10^6 \text{ S/M}$, $\lambda_0 = 140 \text{ nm}$ et $T_c = 84.5 \text{ K}$.

Les comparaisons effectuées dans la présente section montrent un bon accord entre nos résultats numériques et les données théoriques et expérimentales de la littérature ouverte. Ceci valide la théorie présentée dans ce chapitre.

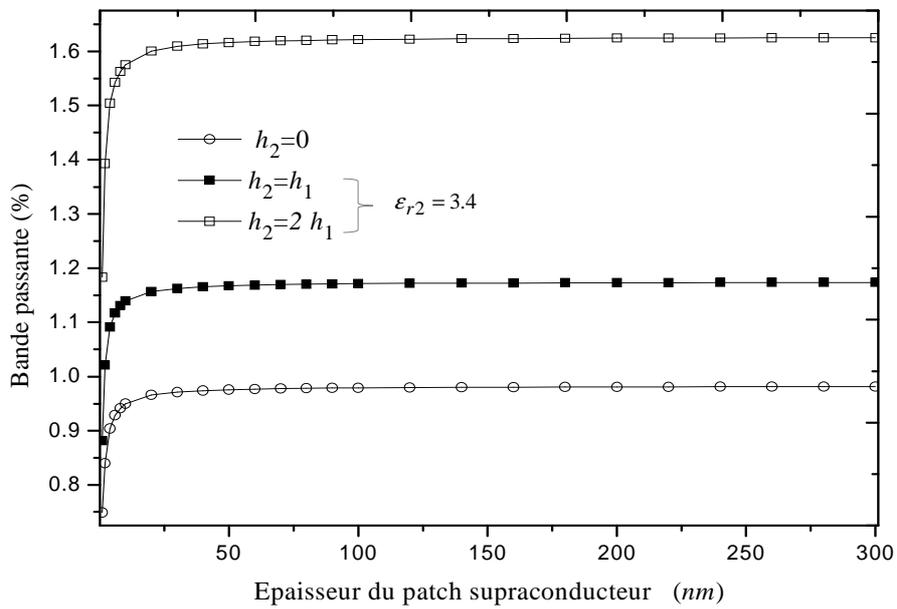
L'influence de l'épaisseur du film supraconducteur à haute température critique sur la fréquence de résonance et la bande passante de l'antenne microbande circulaire avec et sans couche protectrice est étudiée dans la figure III.4. Les paramètres de l'antenne sont identiques à ceux utilisés dans la figure III.3 ($T = 50 K$). Il est observé que lorsque l'épaisseur du film supraconducteur croît, la fréquence de résonance et la bande passante augmentent pour l'antenne sans superstrat aussi bien que pour l'antenne avec superstrat. Notons que l'effet de l'épaisseur du film supraconducteur est plus prononcé pour les petites valeurs de t ($t < \lambda_0/3$). Lorsque t excède $\lambda_0/3$, l'augmentation de l'épaisseur du film supraconducteur augmentera lentement la fréquence de résonance et la bande passante. Un soin extrême devrait être pris lors de la conception d'une antenne microbande avec un film supraconducteur mince ; puisqu'une petite incertitude lors du patch est fabriqué peut avoir comme conséquence un décalage important de la fréquence et de la bande passante de l'antenne.

Des résultats numériques, obtenus en utilisant le système formé par les modes de cavité, sont présentés pour la fréquence de résonance et la bande passante d'une plaque microbande circulaire supraconducteur dans une configuration substrat-superstrat (Figure III.5). Le disque circulaire supraconducteur de rayon $a = 4.27 \text{ mm}$ et d'épaisseur $t = 350 \text{ nm}$ est fabriqué avec un film mince supraconducteur en YBCO ayant comme paramètres : $\sigma_n = 10^6 \text{ S/m}$, $\lambda_0 = 140 \text{ nm}$ et $T_c = 84.5 \text{ K}$. Le substrat diélectrique d'épaisseur $h_1 = 508 \text{ }\mu\text{m}$ a une permittivité relative $\epsilon_{r1} = 3.4$ et la température d'opération est $T = 50 \text{ K}$.

L'effet du superstrat sur la fréquence de résonance est montré sur la figure III.5 (a). Dans cette figure, nous avons étudié la variation de la fréquence de résonance en fonction de différentes valeurs de l'épaisseur du superstrat h_2 . On observe que la fréquence de résonance diminue avec l'augmentation de la permittivité du superstrat ϵ_{r2} , cette diminution est très remarquable pour les valeurs élevées de ϵ_{r2} .

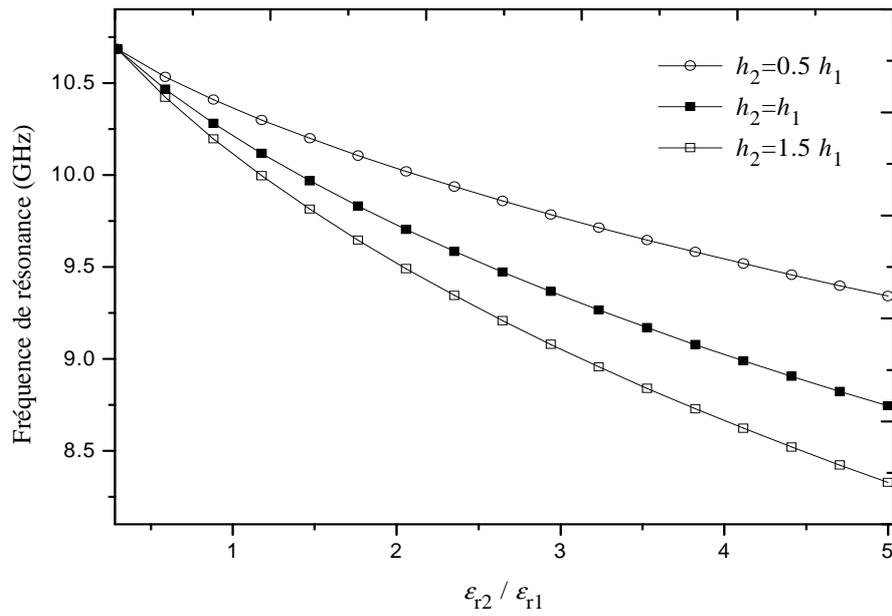


(a)

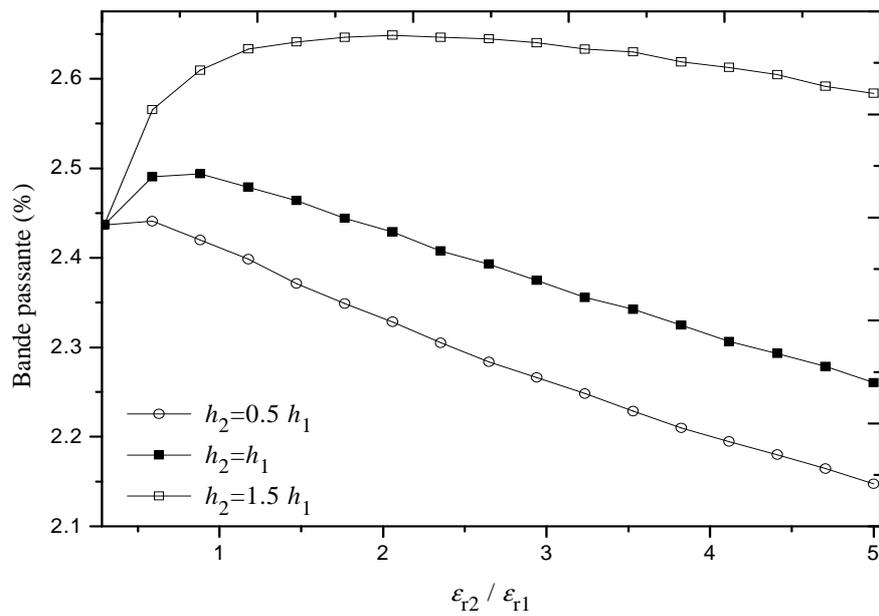


(b)

Figure III.4. Fréquence de résonance (a) et bande passante (b) du disque circulaire supraconducteur à haute température critique en fonction de l'épaisseur du film supraconducteur, $a = 610 \mu\text{m}$, $\epsilon_{r1} = 23.81$, $h_1 = 254 \mu\text{m}$, $T = 50 \text{ K}$, $\sigma_n = 10^6 \text{ S/M}$, $\lambda_0 = 140 \text{ nm}$ et $T_c = 84.5 \text{ K}$.



(a)



(b)

Figure III.5. Fréquence de résonance (a) et bande passante (b) du patch circulaire supraconducteur en fonction de la permittivité normalisée du superstrat pour différentes valeurs de l'épaisseur du superstrat, $\epsilon_{r1} = 3.4$, $h_1 = 508 \mu\text{m}$, $a = 4.27 \text{ mm}$, $T = 50 \text{ K}$, $\lambda_0 = 140 \text{ nm}$, $T_c = 84.5 \text{ K}$, $\sigma_n = 10^6 \text{ S/m}$.

L'influence des paramètres du superstrat sur la bande passante de l'antenne microbande circulaire supraconductrice est étudiée dans la figure III.5 (b). Les paramètres de l'antenne sont identiques à ceux utilisés dans la figure III.5 (a).

La figure III.5. (b) montre que l'effet du superstrat sur la bande passante du patch circulaire supraconducteur est plus prononcé pour des valeurs élevées de la permittivité du superstrat. On observe aussi que, pour des constantes diélectriques $\epsilon_{r2} > \epsilon_{r1}$ et des faibles épaisseurs du superstrat ($h_2 \leq h_1$), la bande passante diminue au fur et à mesure que la permittivité relative du superstrat s'éloigne de celle du substrat. Dans le cas où $h_2 = 1.5 h_1$, la bande passante augmente avec l'augmentation du rapport $\epsilon_{r2} / \epsilon_{r1}$ jusqu'à ce que la permittivité du superstrat soit égale au double de la permittivité du substrat.

III. 4. Conclusion

Une analyse efficace, basée sur la méthode de Galerkin dans le domaine des transformées vectorielles de Hankel conjointement avec le théorème des deux fluides de Gorter-Casimir et les équations des frères London, a été utilisée pour obtenir les caractéristiques de résonance d'une antenne microbande circulaire supraconducteur couverte par une couche protectrice. L'impédance de surface complexe a été calculée en supposant que l'épaisseur du film supraconducteur est inférieure à trois fois la profondeur de pénétration à une température nulle. Les résultats numériques obtenus pour les fréquences de résonance et les bandes passantes de l'antenne circulaire supraconductrice avec radôme diélectrique ont été comparés avec des données théoriques et expérimentales disponibles dans la littérature ouverte. Un bon accord a été enregistré dans tous les cas. Des résultats originaux ont été présentés pour les fréquences de résonance et les bandes passantes des patches fabriqués à base de l'YBCO et recouverts par une couche protectrice. Nous avons montré que les effets du superstrat sur les performances de l'antenne sont importants et ne peuvent être négligés. Les résultats théoriques obtenus montrent que la fréquence de résonance diminue de façon monotone avec l'augmentation de l'épaisseur du superstrat, la diminution étant très significative pour une permittivité élevée de la couche protectrice. Nous avons également présenté d'autres résultats numériques en ce qui concerne l'influence conjuguée du superstrat et de la supraconductivité de l'élément rayonnant sur les caractéristiques de résonance de l'antenne. Bien que la formulation présentée dans ce chapitre concerne le cas

d'un disque circulaire supraconducteur dans une configuration substrat-superstrat, il tout-à-fait simple et directe d'entendre la présente méthode aux structures impliquant des patches étagés noyés dans des milieux multicouches anisotropes.

III .5. Références bibliographiques

- [1] H. Jenhani, "Coupleurs de puissance HF pour cavités supraconductrices en mode pulsé," Thèse de Doctorat, Université de Paris XI, Orsay, LAL, 2006.
- [2] S. Protat, O. Picon, C. Delabie, and M. Villegas, "Contribution à la modélisation de lignes hyperfréquences supraconductrices à haute température critique par la méthode FDTD," *Annales des Télécommunications*, vol. 36, pp. 139-144, 1998.
- [3] S. Sagioglu and A. Kalinli, "Determining resonant frequencies of various microstrip antennas within a single neural model trained using parallel tabu search algorithm," *Electromagnetics*, vol. 25, pp. 551-565, 2005.
- [4] B. Gan, L. Zhou, Y. P. Zhang, and J. F. Mao, "A dual-band microstrip antenna using a circular ring and a concentric disk," *International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering*, vol. 26, pp. 268-276, 2016.
- [5] R. Kumar and P. Malathi, "Experimental investigation of resonant frequency of multilayered rectangular and circular microstrip antennas," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 53, pp. 352-356, 2011.
- [6] S. K. Patel, C. Argyropoulos, and Y. P. Kosta, "Broadband compact microstrip patch antenna design loaded by multiple split ring resonator superstrate and substrate," *Waves in Random and Complex Media*, vol. 27, pp. 92-102, 2017.
- [7] M. Biswas and A. Mandal, "Experimental and theoretical investigation to predict the effect of superstrate on the impedance, bandwidth, and gain characteristics for a rectangular patch antenna," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 29, pp. 2093-2109, 2015.
- [8] S. Bedra, T. Fortaki, A. Messai, and R. Bedra, "Spectral domain analysis of resonant characteristics of high Tc superconducting rectangular microstrip patch printed on isotropic or uniaxial anisotropic substrates," *Wireless personal communications*, vol. 86, pp. 495-511, 2016.
- [9] M. R. Ahsan, M. T. Islam, and M. H. Ullah, "A simple design of planar microstrip antenna on composite material substrate for Ku/K band satellite applications," *International Journal of Communication Systems*, vol. 30, 2017.

- [10] C. Gürel and E. Yazgan, "Resonant frequency of air gap tuned circular microstrip antenna with anisotropic substrate and superstrate layers," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 24, pp. 1731-1740, 2010.
- [11] T. Fortaki, D. Khedrouche, F. Bouttout, and A. Benghalia, "Vector Hankel transform analysis of a tunable circular microstrip patch," *Communications in numerical methods in engineering*, Vol. 21, pp. 219-231, 2005.
- [12] D. Khedrouche and A. Benghalia, "Modeling the superconducting effects on resonance and radiation characteristics of a cylindrical-rectangular microstrip antenna covered with a dielectric layer," *Journal of Computational Electronics*, Vol. 12, pp. 297-305, 2013.
- [13] D. Guha and Y. M. Antar,; *Microstrip and printed antennas: new trends, techniques and applications*: John Wiley & Sons, 2011.
- [14] S. Bedra, "Evaluation analytique et numérique des caractéristiques électromagnétiques des structures microbandes ouvertes," Thèse de Doctorat, Université de Batna, Batna, 2015.
- [15] S. Bedra and T. Fortaki, "High-Tc superconducting rectangular microstrip patch covered with a dielectric layer," *Physica C: Superconductivity and its Applications*, vol. 524, pp. 31-36, 2016.
- [16] S. Bedra and T. Fortaki, "Hankel transform domain analysis of covered circular microstrip patch printed on an anisotropic dielectric layer," *Journal of Computational Electronics*, vol. 14, pp. 747-753, 2015.
- [17] S. Benkouda, T. Fortaki, M. Amir, and A. Benghalia, "Resonance of High Tc Superconducting Microstrip Patch in a Substrate-Superstrate Configuration," *Advanced Electromagnetics*, vol. 2, pp. 19-21, 2014.
- [18] O. Barkat, "Improving the performances of triangular microstrip antenna with multilayered configuration," *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, vol. 33, pp. 337-354, 2014.
- [19] O. Barkat and A. Benghalia, "Radiation and resonant frequency of superconducting annular ring microstrip antenna on uniaxial anisotropic media," *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*, vol. 30, pp. 1053-1066, 2009.
- [20] M. Lamine Tounsi and M. C. E. Yagoub, "Efficient characterization of EMC shielding in anisotropic high-Tc superconducting devices for industrial applications," *International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering*, vol. 22, pp. 116-123, 2012.

- [21] S. Bedra, R. Bedra, S. Benkouda, and T. Fortaki, "Superstrate loading effects on the resonant characteristics of high T_c superconducting circular patch printed on anisotropic materials," *Physica C: Superconductivity and its Applications*, vol. 543, pp. 1-7, 2017.
- [22] S. Benkouda, "Contribution à l'étude des problèmes de caractérisation des antennes microrubans à plaques rayonnantes parfaitement conductrices et supraconductrices," *Thèse de Doctorat*, Université de Batna, Batna, 2012.
- [23] Y. Tighilt, "Identification des antennes microrubans multicouches par la méthode spectral et les réseaux de neurones," *Thèse de Doctorat*, Université de Setif, 2011.
- [24] R. Kumar and P. Malathi, "Experimental investigation of resonant frequency of multilayered rectangular and circular microstrip antennas," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 53, pp. 352-356, 2011.
- [25] V. Losada, R. R. Boix, and M. Horno, "Resonant modes of circular microstrip patches over ground planes with circular apertures in multilayered substrates containing anisotropic and ferrite materials," *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 48, pp. 1756-1762, 2000.
- [26] M. A. Richard, K. B. Bhasin, and P. C. Claspy, "Superconducting microstrip antennas: an experimental comparison of two feeding methods," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 41, pp. 967-974, 1993.

Chapitre IV

Modes résonants d'une antenne circulaire imprimée sur des substrats isotropes /anisotropes

IV. 1. Introduction

La géométrie circulaire offre certains avantages par rapport à d'autres géométries bien connues en raison de sa facilité d'opérer à un mode de polarisation circulaire sur une large bande avec des tailles de patch réduites. Ainsi, elle a été préférée dans les applications de communication mobile et par satellite [1]-[3]. L'antenne microbande circulaire a fait l'objet d'un grand nombre de travaux de recherche, cependant, les études concernant les antennes microrubans circulaires avec substrat anisotrope sont en nombre limitées [3]. L'utilisation des matériaux innovants dans la réalisation des antennes microbandes, nous oblige à développer des outils de CAO performant capable de prédire avec exactitude les caractéristiques de ces antennes [4]. La méthode des moments (MoM) s'est révélée être l'un des outils de CAO les plus puissants pour résoudre cette catégorie de problèmes [1]-[15]. Il a été montré que la constante diélectrique du substrat joue un rôle prépondérant dans la détermination des performances d'une antenne microbande. Cependant, beaucoup de substrats pratiques utilisés dans les structures microbandes exhibent un taux significatif d'anisotropie, spécialement l'anisotropie uniaxiale [16]. Parmi ces substrats pratiques nous citons le Saphir, l'Epsilam-10, le Fluorure de Magnésium et la Nitrure de Bore. Cette anisotropie affecte les performances des antennes imprimées, et donc une caractérisation et conception précise de ces dernières doivent tenir compte de cet effet. Dans des études récentes [2], [17]-[18], les fréquences de résonance des résonateurs microrubans circulaires imprimés sur des substrats anisotropes et d'autres types de substrats ont été déterminées en se basant sur l'approche full-wave. Cependant, dans ces études uniquement des résultats relatifs au mode fondamental ont été présentés. Dans ce chapitre, nous étendons la méthode de Galerkin implémentée dans le domaine des transformées vectorielles de Hankel pour l'analyse d'une plaque circulaire imprimée sur un substrat diélectrique anisotrope et opérant en mode fondamental [19], de telle manière que la méthode peut traiter le cas des modes d'ordre supérieur.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 2, nous présentons la formulation théorique du problème. Le choix des fonctions de base est reporté également dans cette section. Dans la section 3, les résultats numériques obtenus sont comparés avec des données théoriques et expérimentales tirées de la littérature. Des résultats numériques

concernant les caractéristiques électromagnétiques d'une plaque microbande circulaire imprimée sur un substrat anisotrope sont présentés dans la section 4. Finalement, les conclusions sont résumées dans la section 5.

IV. 2. Théorie

IV. 2.1. Dyade de Green dans le domaine des transformées vectorielles de Hankel

La méthode des moments est l'une des méthodes les plus rigoureuses dans l'analyse des résonateurs microbandes [16]. Pour cette raison, nous adoptons cette méthode dans la présente étude. Nous donnons dans cette sous-section les détails relatifs au calcul de la fonction dyadique de Green en se basant sur l'outil des transformées vectorielles de Hankel. La géométrie considérée est montrée dans la figure IV .1. Le patch circulaire de rayon a est gravé sur un substrat ayant une épaisseur uniforme d . Tous les matériaux diélectriques sont supposés être non magnétiques avec une perméabilité μ_0 . Pour simplifier l'analyse, l'alimentation de l'antenne ne sera pas considérée.

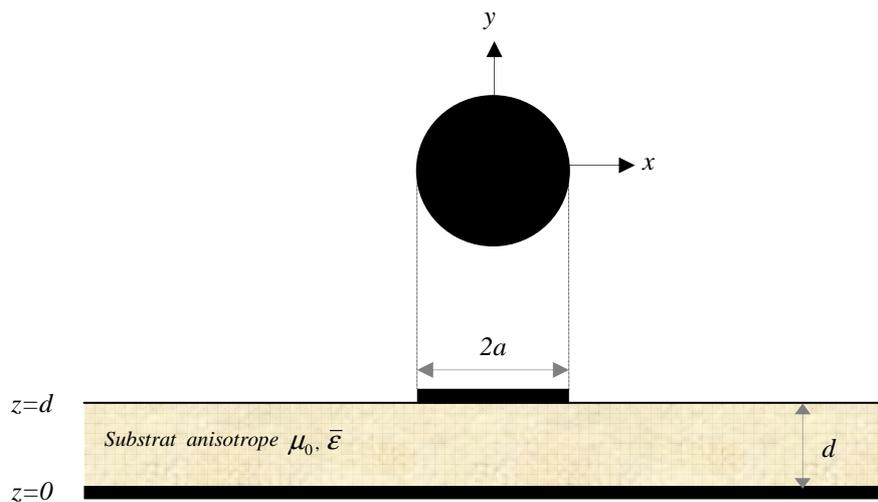


Figure IV. 1. Géométrie d'un disque circulaire gravé sur un milieu anisotrope.

L'anisotropie se dit d'un matériau dont les propriétés électromagnétiques varient suivant la direction. Mathématiquement, la permittivité d'un substrat à anisotropie uniaxiale peut être représentée par un tenseur ou une dyadique de la forme [20]:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

ε_0 est la permittivité du vide. L'équation (1) peut être spécialisée au cas isotrope en admettant $\varepsilon_x = \varepsilon_z = \varepsilon_r$. ε_z est la permittivité relative le long de l'axe optique z et ε_x est la permittivité relative le long des deux axes perpendiculaires à l'axe optique. Le milieu ambiant est l'air avec les paramètres constitutifs μ_0 et ε_0 . Tous les champs et les courants sont en régime harmonique avec la dépendance temporelle $e^{i\omega t}$ supprimée.

Les champs transverses dans la couche diélectrique peuvent être obtenus via les transformées vectorielles inverses de Hankel [17], [20]-[21]

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = \begin{bmatrix} E_\rho(\rho, \phi, z) \\ E_\phi(\rho, \phi, z) \end{bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{in\phi} \int_0^\infty dk_\rho k_\rho \bar{\mathbf{H}}_n(\rho k_\rho) \cdot \mathbf{e}_n(k_\rho, z) \quad (2)$$

$$\mathbf{H}(\rho, \phi, z) = \begin{bmatrix} H_\phi(\rho, \phi, z) \\ -H_\rho(\rho, \phi, z) \end{bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{in\phi} \int_0^\infty dk_\rho k_\rho \bar{\mathbf{H}}_n(\rho k_\rho) \cdot \mathbf{h}_n(k_\rho, z) \quad (3)$$

où

$$\bar{\mathbf{H}}_n(k_\rho \rho) = \begin{bmatrix} J'_n(k_\rho \rho) & -\frac{in}{k_\rho \rho} J_n(k_\rho \rho) \\ \frac{in}{k_\rho \rho} J_n(k_\rho \rho) & J'_n(k_\rho \rho) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{H}}_n^+(k_\rho \rho) \quad (4)$$

$$\mathbf{e}_n(k_\rho, z) = \mathbf{e}^{-i\bar{\mathbf{k}}_z \cdot z} \cdot \mathbf{A}_n(k_\rho) + \mathbf{e}^{i\bar{\mathbf{k}}_z \cdot z} \cdot \mathbf{B}_n(k_\rho) \quad (5)$$

$$\mathbf{h}_n(k_\rho, z) = \bar{\mathbf{g}}(k_\rho) \cdot \left[\mathbf{e}^{-i\bar{\mathbf{k}}_z \cdot z} \cdot \mathbf{A}_n(k_\rho) - \mathbf{e}^{i\bar{\mathbf{k}}_z \cdot z} \cdot \mathbf{B}_n(k_\rho) \right] \quad (6)$$

Dans (4), $\bar{\mathbf{H}}_n(k_\rho \rho)$ est le noyau des transformées vectorielles de Hankel [3], $J_n(\cdot)$ est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre n , et la prime désigne la différentiation en fonction de l'argument. L'exposant $+$ implique le conjugué transposé du noyau $\bar{\mathbf{H}}_n(k_\rho \rho)$. Dans (5) et (6), \mathbf{A}_n et \mathbf{B}_n sont deux vecteurs inconnus et :

$$\bar{\mathbf{g}}(k_\rho) = \text{diag} \left[\frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_x}{k_z^e}, \frac{k_z^h}{\omega \mu_0} \right], \quad \bar{\mathbf{k}}_z = \text{diag} [k_z^e, k_z^h], \quad k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \quad (7)$$

Dans les équations (7), k_z^e et k_z^h sont, respectivement, les constantes de propagation des ondes TM et TE dans le substrat uniaxial [20], et k_0 est la constante de propagation dans l'espace libre. En écrivant les équations (5) et (6) dans les plans $z=0$ et $z=d$, et par élimination des inconnus \mathbf{A}_n et \mathbf{B}_n , nous obtenons la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_n(k_\rho, d^-) \\ \mathbf{h}_n(k_\rho, d^-) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n(k_\rho, 0^+) \\ \mathbf{h}_n(k_\rho, 0^+) \end{bmatrix} \quad (8)$$

avec

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{T}}^{11} & \bar{\mathbf{T}}^{12} \\ \bar{\mathbf{T}}^{21} & \bar{\mathbf{T}}^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \bar{\boldsymbol{\theta}} & -i \bar{\mathbf{g}}^{-1} \cdot \sin \bar{\boldsymbol{\theta}} \\ -i \bar{\mathbf{g}} \cdot \sin \bar{\boldsymbol{\theta}} & \cos \bar{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\theta}} = \bar{\mathbf{k}}_z d \quad (9)$$

qui combine \mathbf{e}_n et \mathbf{h}_n des deux côtés de la région anisotrope uniaxiale en tant que quantités d'entrée et de sortie. Les équations de continuité pour les composantes tangentielles du champ sont :

$$\mathbf{e}_n(k_\rho, d^-) = \mathbf{e}_n(k_\rho, d^+) = \mathbf{e}_n(k_\rho, d) \quad (10)$$

$$\mathbf{h}_n(k_\rho, d^-) - \mathbf{h}_n(k_\rho, d^+) = \delta_M \mathbf{k}_n(k_\rho) \quad (11)$$

$\mathbf{k}_n(k_\rho)$ est la transformée vectorielle de Hankel du courant $\mathbf{K}_n(\rho)$ sur la plaque circulaire. δ_M est le symbole de Kronecker [19]. Le champ électrique transverse doit nécessairement être nul sur un conducteur parfait, donc pour le plan de masse parfaitement conducteur nous avons

$$\mathbf{e}_n(k_\rho, 0^-) = \mathbf{e}_n(k_\rho, 0^+) = \mathbf{e}_n(k_\rho, 0) = \mathbf{0} \quad (12)$$

Dans la région illimitée de l'air au-dessus du sommet de la couche diélectrique ($d \ll z \ll \infty$ et $\epsilon_r = 1$), le champ électromagnétique donné par (5) et (6) devrait s'atténuer

quand $z \rightarrow +\infty$ en accord avec la condition de rayonnement de Sommerfeld, ceci donne

$$\mathbf{h}_n(k_\rho, d^+) = \bar{\mathbf{g}}_0(k_\rho) \cdot \mathbf{e}_n(k_\rho, d^+) \quad (13)$$

où la matrice $\bar{\mathbf{g}}_0(k_\rho)$ peut être aisément obtenue à partir de l'expression de $\bar{\mathbf{g}}(k_\rho)$ en admettant $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 1$. A partir des équations (8), (10), (12) et (13), nous obtenons la relation suivante qui relie le courant sur la plaque parfaitement conductrice avec le champ électrique dans l'interface correspondant :

$$\mathbf{e}_n(k_\rho, d) = \bar{\mathbf{G}}(k_\rho) \cdot \mathbf{k}_n(k_\rho) \quad (14)$$

où $\bar{\mathbf{G}}(k_\rho)$ est la fonction dyadique de Green dans le domaine des transformées vectorielles de Hankel [18], [15]. Notons que cette dyade est diagonale dans le domaine des transformées vectorielles de Hankel [3].

IV. 2.2. Solution par la méthode des moments

Maintenant que nous avons obtenu la fonction dyadique de Green nécessaire, il est relativement simple de formuler la solution par la méthode des moments afin de déterminer les caractéristiques de l'antenne. Les conditions aux frontières impliquent que les composantes transverses du champ électrique s'annulent sur le disque parfaitement conducteur et le courant s'annule au-delà du disque, pour donner l'ensemble suivant des équations intégrales vectorielles duales [19]

$$\mathbf{E}_n(\rho, z) = \int_0^{+\infty} dk_\rho k_\rho \bar{\mathbf{H}}_n(k_\rho \rho) \cdot \bar{\mathbf{G}}(k_\rho) \cdot \mathbf{k}_n(k_\rho) = \mathbf{0}, \quad \rho < a \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_n(\rho) = \int_0^{+\infty} dk_\rho k_\rho \bar{\mathbf{H}}_n(k_\rho \rho) \cdot \mathbf{k}_n(k_\rho) = \mathbf{0}, \quad \rho > a \quad (16)$$

La méthode de Galerkin est employée pour résoudre les équations intégrales couplées (15) et (16). Le courant sur le disque circulaire est développé en une série finie de fonctions de base connues

$$\mathbf{K}_n(\rho) = \sum_{p=1}^P a_{np} \Psi_{np}(\rho) + \sum_{q=1}^Q b_{nq} \Phi_{nq}(\rho) \quad (17)$$

P et Q correspondent au nombre de fonctions de base $\Psi_{np}(\rho)$ et $\Phi_{nq}(\rho)$, respectivement, et a_{np} et b_{nq} sont les coefficients du développement modal recherchés. La transformée vectorielle de Hankel correspondante du courant est donnée par

$$\mathbf{k}_n(k\rho) = \sum_{p=1}^P a_{np} \psi_{np}(k\rho) + \sum_{q=1}^Q b_{nq} \varphi_{nq}(k\rho) \quad (18)$$

En substituant le développement du courant de l'équation (18) dans l'équation (15). Puis, en multipliant l'équation résultante par $\rho\Psi_{nk}^+(\rho)$ ($k=1, 2, \dots, P$) et $\rho\Phi_{nl}^+(\rho)$ ($l=1, 2, \dots, Q$) et en intégrant de 0 à a , et en utilisant le théorème de Parseval pour les transformées vectorielles de Hankel [11], [19], nous obtenons un système de $P+Q$ équations algébriques linéaires pour chaque mode n qui peut être écrit sous la forme matricielle

$$\bar{\mathbf{Z}}_n \cdot \mathbf{c}_n = \mathbf{0} \quad (19)$$

où

$$\bar{\mathbf{Z}}_n = \begin{bmatrix} \left(\bar{\mathbf{Z}}_n^{\Psi\Psi} \right)_{P \times P} & \left(\bar{\mathbf{Z}}_n^{\Psi\Phi} \right)_{P \times Q} \\ \left(\bar{\mathbf{Z}}_n^{\Phi\Psi} \right)_{Q \times P} & \left(\bar{\mathbf{Z}}_n^{\Phi\Phi} \right)_{Q \times Q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_n)_{P \times 1} \\ (\mathbf{b}_n)_{Q \times 1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Chaque élément des sous-matrices de $\bar{\mathbf{Z}}_n$ est donné par

$$\bar{\mathbf{Z}}_n^{\mathbf{V}\mathbf{W}}(i, j) = \int_0^{+\infty} k\rho dk\rho \mathbf{V}_{ni}^+(k\rho) \cdot \bar{\mathbf{G}}(k\rho) \cdot \mathbf{W}_{nj}(k\rho) \quad (21)$$

où \mathbf{V} et \mathbf{W} représentent ψ ou φ , pour chaque valeur de l'entier n , le système d'équations linéaires (19) possède des solutions non triviales lorsque

$$\mathbf{det}[\bar{\mathbf{Z}}_n(\omega)] = 0 \quad (22)$$

L'équation (22) est une équation propre pour ω , à partir du quelle les caractéristiques de la structure illustrée dans la Figure IV.1 peuvent être obtenues. En fait, si nous désignons par $\omega_{nm} = 2\pi(f_r^{nm} + i f_i^{nm})$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; m = 1, 2, 3, \dots$) l'ensemble des racines complexes de l'équation (22). Dans ce cas, les quantités f_r^{nm} désignent les fréquences de résonance des modes résonants de la plaque microbande circulaire, les quantités $BW_{nm} = 2f_i^{nm} / f_r^{nm}$ désignent les bandes passantes et les quantités $Q_{nm} = f_r^{nm} / 2f_i^{nm}$ désignent les facteurs de qualité [19].

IV. 2.3. Choix des fonctions de base

Les fonctions de base considérées dans le présent travail sont formées par l'ensemble orthogonal complet des modes TM et TE d'une cavité cylindrique de rayon a avec murs latéraux magnétiques et de murs électriques au sommet et à la base. Ces modes de courants qui sont non nuls uniquement sur la plaque circulaire sont donnés par

$$\Psi_{np}(\rho) = \begin{bmatrix} J'_n(\beta_{np}\rho/a) \\ \frac{in a}{\beta_{np}\rho} J_n(\beta_{np}\rho/a) \end{bmatrix}, \quad \Phi_{nq}(\rho) = \begin{bmatrix} \frac{-i n a}{\alpha_{nq}\rho} J_n(\alpha_{nq}\rho/a) \\ J'_n(\alpha_{nq}\rho/a) \end{bmatrix} \quad (23)$$

pour $n = 0, +1, +2, \dots$. $\Psi_{np}(\rho)$ ($p = 1, 2, \dots, P$) correspondent aux modes résonants de cavité TM et $\Phi_{nq}(\rho)$ ($q = 1, 2, \dots, Q$) correspondent aux modes résonants de cavité TE. Les constantes β_{np} et α_{nq} correspondent aux $p^{\text{ème}}$ et $q^{\text{ème}}$ zéros de $J'_n(\beta_{np}) = 0$ et $J_n(\alpha_{nq}) = 0$, respectivement.

IV. 3. Comparaison des résultats numériques

A présent, dans le but de valider la théorie présentée dans ce chapitre, nous comparons nos résultats numériques obtenus à partir de la solution numérique de l'équation caractéristique (22) avec des résultats théoriques et expérimentaux disponibles dans la littérature. Le tableau IV.1 montre nos calculs de la fréquence de résonance et de la bande passante pour différents modes résonants de l'antenne microruban circulaire réalisée avec un substrat isotrope $\epsilon_x = \epsilon_z$. Par souci de comparaison avec les travaux antérieurs, nous avons

également inscrit dans ce tableau les résultats obtenus par Losada *et al.* [21]. L'accord entre les deux résultats est très bon.

Tableau. IV.1. Comparaison des fréquences de résonance et des bandes passantes calculées pour les quatre premiers modes avec celles de Losada *et al.* [21] pour une antenne microruban isotrope, $a = 7.9375$ mm, $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 2.65$, $d = 1.5875$ mm.

Modes TM^{mn}	Résultats de la référence [21]		Nos résultats	
	Fréquence de résonance f_r (GHz)	Bande passante BP(%)	Fréquence de résonance f_r (GHz)	Bande passante BP(%)
TM^{11}	6.1703	5.23	6.22	5.27
TM^{12}	17.056	9.69	17.27	9.74
TM^{21}	10.401	5.13	10.48	5.16
TM^{01}	12.268	11.06	12.37	11.13

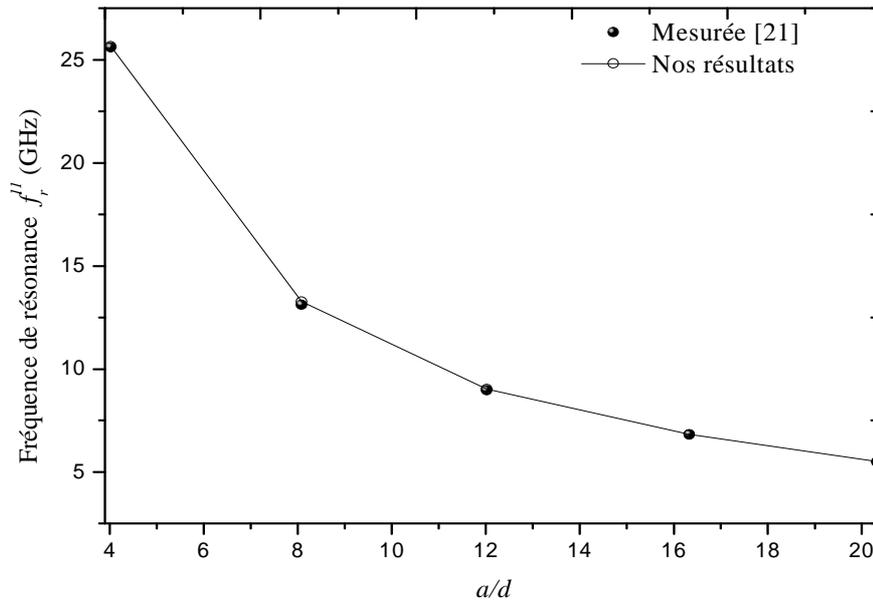


Figure IV.2. Variation de la fréquence de résonance du mode dominant en fonction du rayon du disque (a/d), $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 2.43$, $d = 0.49$ mm.

La Figure IV.2 présente une comparaison entre nos calculs de la fréquence de résonance avec ceux de la référence [21], pour une antenne circulaire imprimée sur un substrat isotrope. L'antenne opère en mode fondamental. L'accord entre nos résultats numériques et ceux de la référence [21] est très bon.

IV. 4. Discussion

Maintenant nous étudions l'effet de l'anisotropie uniaxiale sur la fréquence de résonance, la bande passante et le diagramme de rayonnement. Le rapport d'anisotropie est défini comme

$$AR = \varepsilon_x / \varepsilon_z \quad (24)$$

Dans cette étude, l'anisotropie uniaxiale est de type positif lorsque $AR < 1$ et elle est de type négatif lorsque $AR > 1$. Il est clair que le rapport d'anisotropie prend la valeur '1' pour le cas isotrope [1].

La variation de la fréquence de résonance d'une antenne microbande circulaire de rayon $a = 5.889$ mm et d'épaisseur $d = 0.49$ mm, pour différents pairs $(\varepsilon_x, \varepsilon_z)$ de la constante diélectrique est montrée dans le Tableau IV.2. Le changement fractionnel dans la fréquence de résonance comparativement au cas isotrope ($\varepsilon_x = \varepsilon_z = 2.43$) est défini comme suit :

$$\frac{\Delta f_r}{f_r} = \left| 1 - \frac{f_{ra}}{f_{ri}} \right| \quad (25)$$

où f_{ri} et f_{ra} sont, respectivement, les fréquences de résonance de l'antenne pour les cas isotropes et anisotropes. On observe, que pour l'anisotropie uniaxiale négative avec $AR = 2$, la fréquence de résonance peut se décaler vers une fréquence plus petite de valeur 8.284 GHz ou une fréquence plus grande de valeur 11.212 GHz. La même remarque est observée pour le cas de l'anisotropie uniaxiale positive avec $AR = 0.5$; les valeurs correspondantes de la petite et la grande fréquence sont respectivement 6.437GHz et 8.899 GHz. Par conséquent, le paramètre AR seul n'est pas suffisant pour décider sur l'augmentation ou la diminution de la fréquence de résonance.

Tableau. IV.2. Dépendance de la fréquence de résonance fondamentale de l'antenne microbande circulaire en fonction des permittivités relatives (ϵ_x, ϵ_z), $a = 7.9375$ mm, $d = 1.5875$ mm.

Type de l'anisotropie Uniaxiale	Permittivité relative		Rapport d'anisotropie $AR = \epsilon_x / \epsilon_z$	Fréquences de Résonance f_r^{11} (GHz)	Changement Fractionnel $\frac{\Delta f_r}{f_r}$ (%)
	ϵ_x	ϵ_z			
Isotrope	2.43	2.43	1	8.636	0
Négative	6.8	3.4	2	8.284	4.08
Négative	3.4	1.7	2	11.212	29.83
Positive	1.7	3.4	0.5	8.899	3.05
Positive	3.4	6.8	0.5	6.437	25.46

Dans le tableau IV.3, on étudie l'effet de l'anisotropie uniaxiale dans le substrat sur les fréquences de résonance du patch microruban circulaire. Dans ce tableau, le diélectrique considéré est l'Epsilam-10 ($\epsilon_x = 13, \epsilon_z = 10.3$), qui présente une anisotropie uniaxiale négative. Contrairement à la sous-section précédente, En outre du mode fondamental, les modes d'ordre supérieur sont également considérés.

Tableau. IV.3. Dépendance de la fréquence de résonance en fonction des permittivités relatives (ϵ_x, ϵ_z) pour différents modes résonants, $a = 7.9375$ mm, $d = 1.27$ mm.

Modes TM^{mn}	Fréquences de Résonance (GHz)		
	Anisotropie négligée ($\epsilon_x = \epsilon_z = 10.3$)	Anisotropie considérée ($\epsilon_x = 13, \epsilon_z = 10.3$)	Changement Fractionnel
TM^{11}	4.398	4.359	0.89
TM^{21}	7.423	7.355	0.92
TM^{31}	10.285	10.181	1.01
TM^{12}	12.123	11.93	1.59

Pour les modes TM^{11} , TM^{21} et TM^{31} , les différences entre les résultats obtenus en considérant l'anisotropie et ceux obtenus en négligeant l'anisotropie sont plus faibles par rapport aux différences enregistrées pour le cas du mode TM^{12} . En effet, une différence maximale de 1.59% est obtenue pour le cas du mode TM^{12} . Cependant, pour les autres modes considérés, ces différences sont beaucoup plus faibles avec une variation maximale de 1,01% pour le mode TM^{31} . Par conséquent, l'effet de l'anisotropie diélectrique est particulièrement significatif pour le mode TM^{12} .

La figure IV.3 représente la variation des fréquences de résonance du disque microruban circulaire opérant en modes TM^{11} et TM^{12} pour deux substrats anisotropes (nitrure de bore et saphir). On remarque que pour le mode $(m = 1, n = 2)$, les fréquences de résonance des patches sont plus grandes que celles obtenues pour le mode $(m = 1, n = 1)$.

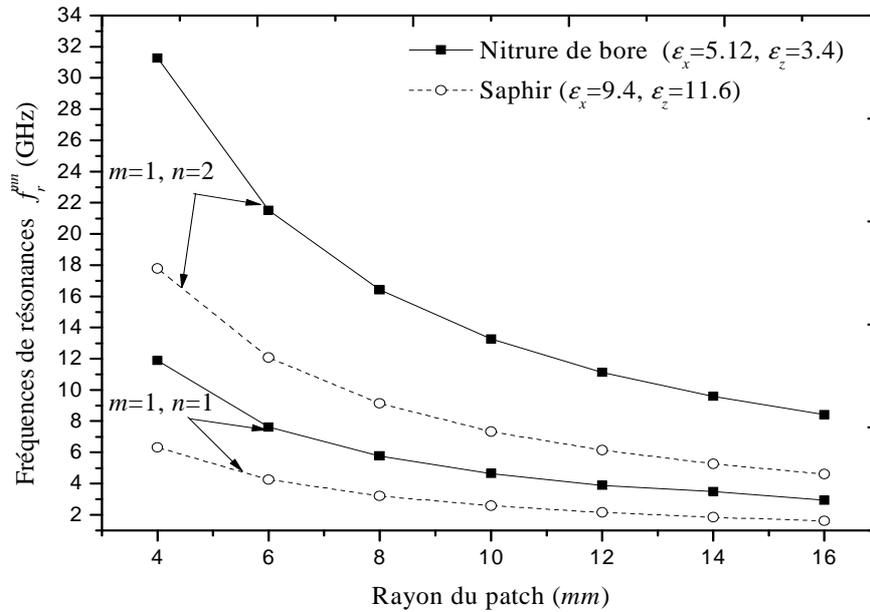
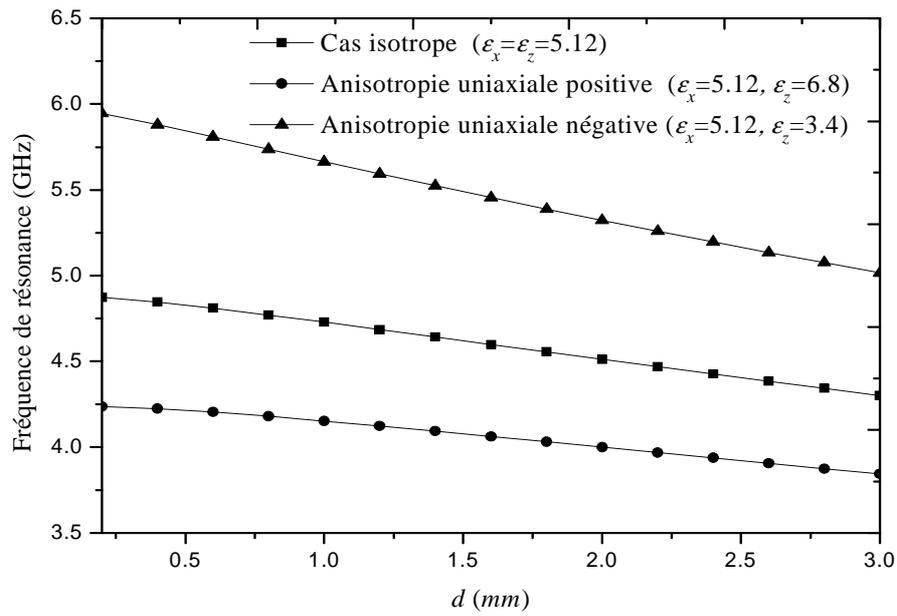
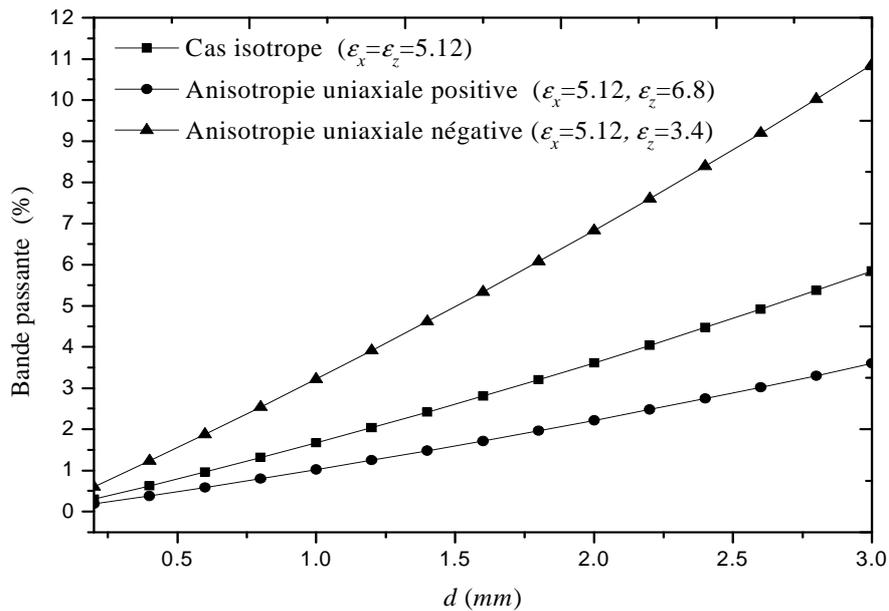


Figure IV.3. Fréquences de résonance du disque microruban circulaire opérant en modes TM^{11} et TM^{12} pour deux substrats anisotropes, $d = 0.49$ mm.

Les variations de la fréquence de résonance et la bande passante du patch microbande circulaire en fonction de l'épaisseur du substrat diélectrique sont montrées dans les figures IV.4(a) et 4(b), où le cas isotrope ($\epsilon_x = \epsilon_z = 5.12$), le cas de l'anisotropie négative ($\epsilon_x = 5.12, \epsilon_z = 3.4$) et le cas de l'anisotropie positive ($\epsilon_x = 5.12, \epsilon_z = 6.8$) sont considérés. Dans la Figure IV.4, l'anisotropie est obtenue en changeant ϵ_z alors que ϵ_x demeure constante. Pour le cas de l'anisotropie négative, on voit que la fréquence de résonance augmente considérablement par rapport au cas isotrope. Le cas contraire est observé pour le cas de l'anisotropie positive. Un comportement similaire est observé pour la bande passante comme le montre la figure IV.4 (b). Il est à noter également que l'effet de la permittivité le long de l'axe optique persiste pour les faibles aussi bien que pour les valeurs élevées de l'épaisseur du substrat.

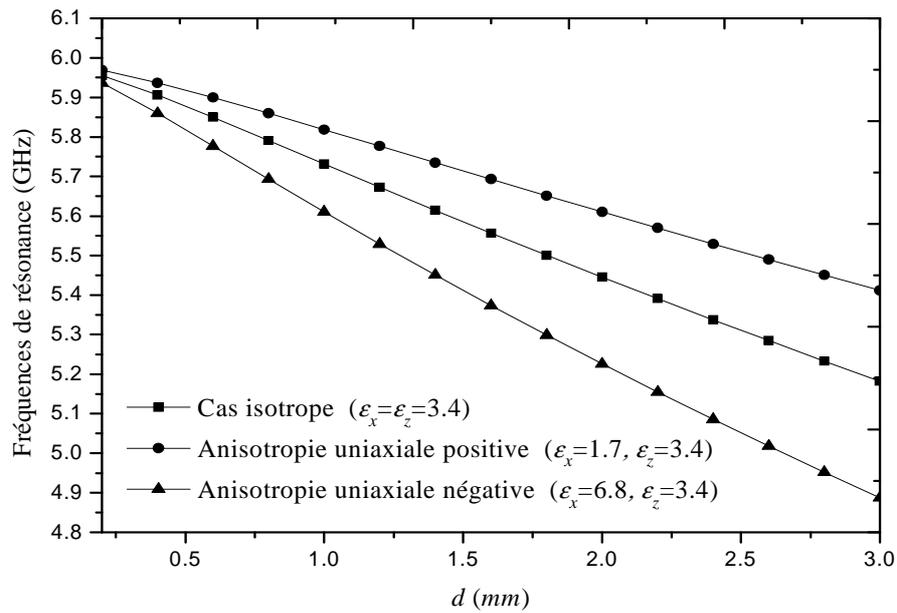


(a)

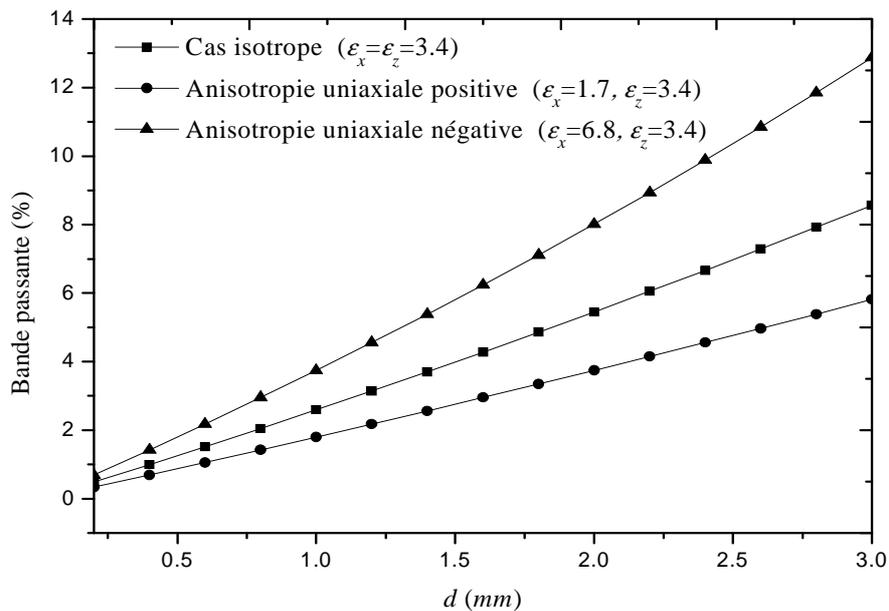


(b)

Figure IV.4. Fréquence de résonance (a) et Bande passante (b) en fonction de l'épaisseur du substrat pour le cas isotrope, l'anisotropie uniaxiale négative et l'anisotropie uniaxiale positive lorsque ϵ_z change, $a = 7.9375$ mm.



(a)



(b)

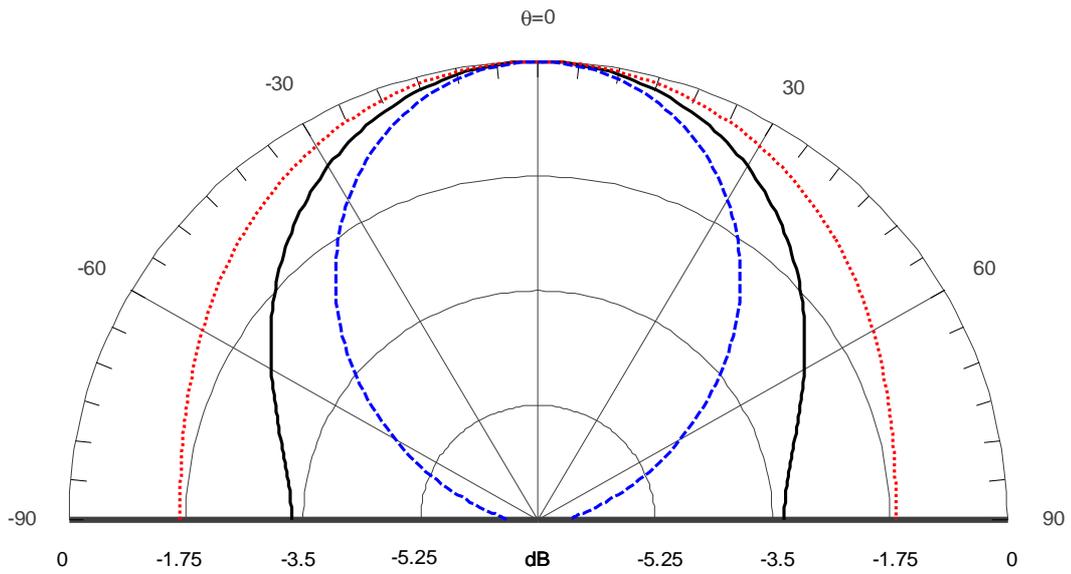
Figure IV.5. Fréquence de résonance (a) et Bande passante (b) en fonction de l'épaisseur du substrat pour le cas isotrope, anisotropie uniaxiale négative et anisotropie uniaxiale positive lorsque ϵ_x change, $a = 7.9375\text{mm}$.

Lorsque ε_x est changée alors que ε_z demeure constante, l'influence de l'anisotropie sur la fréquence de résonance diminue avec la réduction dans l'épaisseur du substrat comme indiqué dans la Figure IV.5 (a). Cette influence tend à être négligeable pour des substrats électriquement minces. La Figure IV.5 (b) montre les résultats pour la bande passante de l'antenne patch. L'anisotropie uniaxiale positive augmente la bande passante, tandis que l'anisotropie uniaxiale négative diminue cette dernière. Il se dégage également de la figure que l'influence de l'anisotropie uniaxiale sur la bande passante est significative d'autant plus que le substrat devient épais. Ces comportements sont en très bon accord avec ceux découverts théoriquement dans [17], [18]. Ainsi, nous pouvons conclure que la permittivité le long de l'axe optique est le facteur le plus important dans la détermination des caractéristiques de résonance des antennes microrubans.

Les effets de la variation de la permittivité sur le diagramme de rayonnement de l'antenne microbande circulaire anisotrope sont recherchés. Dans la figure IV.6, nous présentons l'influence de l'anisotropie uniaxiale dans le substrat sur le diagramme de rayonnement (plan E) pour le mode fondamentale (TM^{11}). Le cas isotrope ($\varepsilon_x = \varepsilon_z = 5.12$), le cas de l'anisotropie négative ($\varepsilon_x = 5.12, \varepsilon_z = 3.4$) et le cas de l'anisotropie positive ($\varepsilon_x = 5.12, \varepsilon_z = 6.8$) sont considérés.

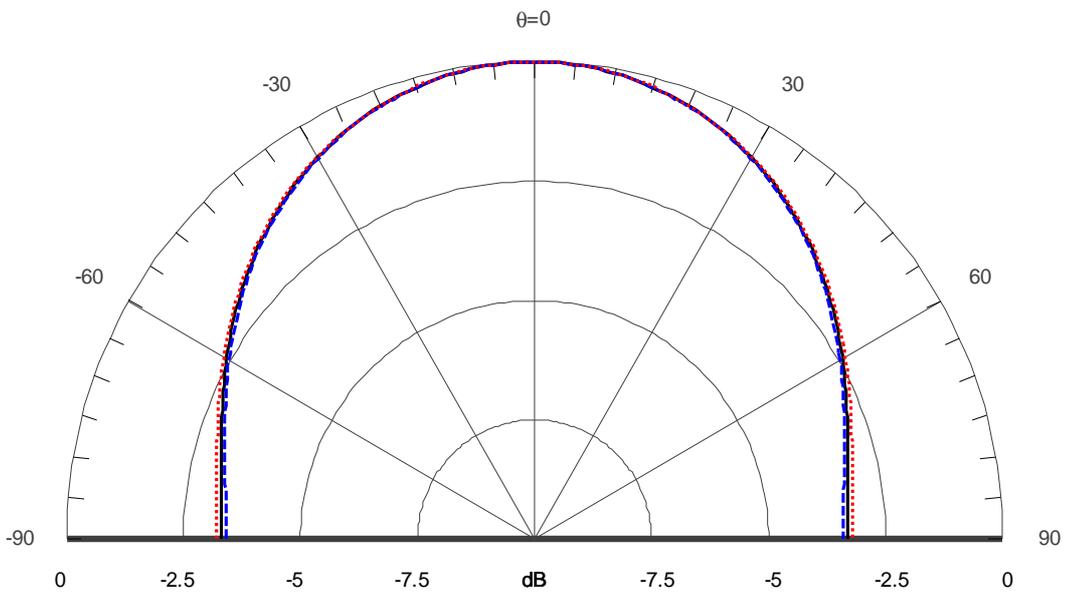
On observe que la directivité de l'antenne est fortement affectée lorsque la permittivité le long de l'axe optique (ε_z) change alors que ε_x demeure constante (figure IV.6 (a)). D'autre part, l'anisotropie uniaxiale a un effet pratiquement insignifiant sur le diagramme de rayonnement de l'antenne circulaire lorsque la permittivité perpendiculaire à l'axe optique (ε_x) change de valeur alors que ε_z garde sa valeur (figure IV.6 (b)).

La Figure IV.7 montre les diagrammes de rayonnement dans les deux plans principaux (plan-E) et (plan-H) pour le mode fondamental TM^{11} d'une antenne microbande circulaire anisotrope. Le patch de rayon $a = 10$ mm est gravé sur un substrat uniaxial d'épaisseur $d = 1.27$ mm.



(a)

— cas isotrope ($\epsilon_x = \epsilon_z = 3.4$), uniaxiale positive ($\epsilon_x = 3.4, \epsilon_z = 6.8$), - - - uniaxiale negative ($\epsilon_x = 3.4, \epsilon_z = 1.7$)
 $f_r = 4.45\text{GHz}$ $f_r = 3.40\text{GHz}$ $f_r = 5.35\text{GHz}$

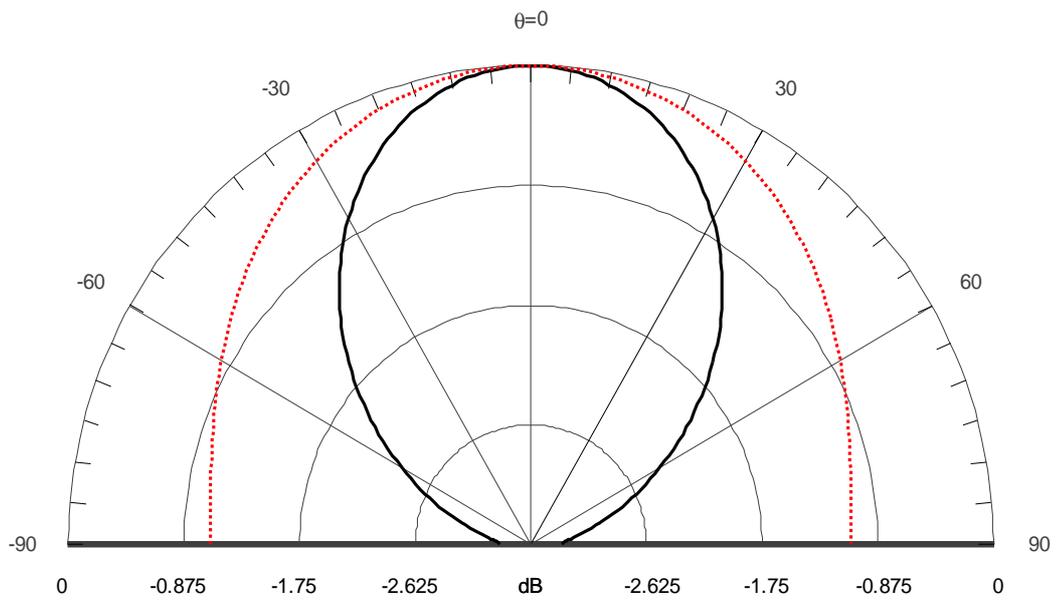


(b)

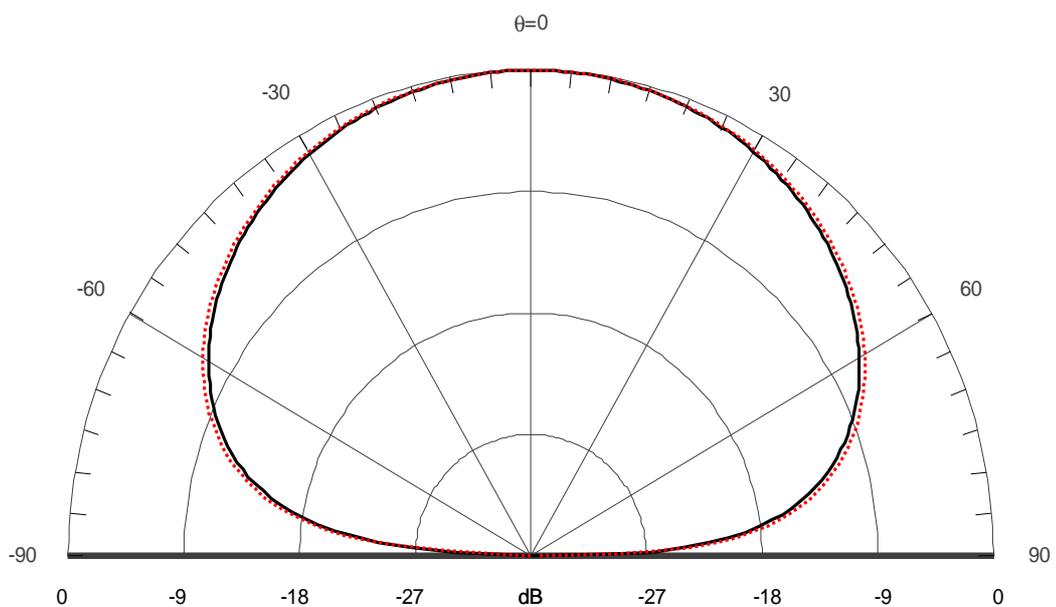
— cas isotrope ($\epsilon_x = \epsilon_z = 3.4$), uniaxiale positive ($\epsilon_x = 1.7, \epsilon_z = 3.4$), - - - uniaxiale negative ($\epsilon_x = 6.8, \epsilon_z = 3.4$)
 $f_r = 4.45\text{GHz}$ $f_r = 4.62\text{GHz}$ $f_r = 4.24\text{GHz}$

Figure IV.6. Diagrammes de rayonnement dans le plan-E pour une antenne microbande circulaire opérant en mode fondamentale TM^{11} , (a) lorsque ϵ_z varie, (b) lorsque ϵ_x

varie, $a = 10 \text{ mm}$, $d = 1.27 \text{ mm}$.



(a)



(b)

— Nitruire de Bore ($\epsilon_x = 5.12, \epsilon_z = 3.4$), $f_r = 4.33\text{GHz}$, Epsilam-10 ($\epsilon_x = 13.0, \epsilon_z = 10.3$), $f_r = 2.72\text{GHz}$

Figure IV.7. Diagrammes de rayonnement dans les plans E (a) et H (b) pour une antenne microbande circulaire imprimée sur différents substrats anisotropes. Le mode de fonctionnement est le mode TM^{11} , $a = 10\text{ mm}$, $d = 1.27\text{ mm}$.

Dans cette figure, nous avons considéré deux matériaux anisotropes. Le Nitrure de Bore ($\epsilon_x = 5.12, \epsilon_z = 3.4$) et l'Epsilon-10 ($\epsilon_x = 13.0, \epsilon_z = 10.3$) sont pris comme cas typiques de diélectriques à constante diélectrique faible et à constante diélectrique élevée, respectivement. Pour le cas du plan E, on constate que l'allure du champ rayonné est affectée par le type de matériau utilisée. Par contre, le champ dans le plan H garde pratiquement la même forme pour les deux matériaux.

IV. 5. Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode de Galerkin dans le domaine des transformées vectorielles de Hankel a été utilisée pour le calcul de la fréquence de résonance, la bande passante et le facteur de qualité d'une antenne microbande circulaire imprimée sur un substrat contenant des diélectriques isotropes et/ou anisotropes. Contrairement aux travaux antérieurs, nous avons présenté des résultats numériques pour le mode fondamental aussi bien que pour les modes d'ordre supérieur. Les effets de l'anisotropie dans le substrat sur la fréquence de résonance, la bande passante et le diagramme de rayonnement ont été examinés en détail pour les modes d'ordre supérieur. La présente théorie a été validée par comparaison de nos résultats numériques avec des mesures expérimentales. Les résultats obtenus ont montré que le rapport d'anisotropie seul n'est pas suffisant pour prédire les variations de la fréquence de résonance et la bande passante de l'antenne microbande. L'étude de l'influence de l'anisotropie du substrat sur le diagramme de rayonnement de l'antenne a montré que le diagramme de rayonnement de l'antenne ne varie pas de façon significative avec la variation de la permittivité perpendiculaire à l'axe optique, par contre, ce dernier est très sensible à la variation de la permittivité le long de l'axe optique. L'analyse présentée dans ce chapitre peut être élargie pour étudier d'autres paramètres caractérisant les antennes à plaques circulaires avec diverses configurations et structures.

IV. 6. Références bibliographiques

- [1] C. S. Gurel, and E. Yazgan, "Characteristics of a circular patch microstrip antenna on a uniaxially anisotropic substrate," *IEEE Trans. Antennas Propagat*, Vol. 52, pp. 2532-2537, 2004.

-
- [2] C. S. Gürel & E. Yazgan, "Resonant Frequency of Air Gap Tuned Circular Microstrip Antenna with Anisotropic Substrate and Superstrate Layers," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 24, pp. 1731-1740. 2010.
- [3] R. Bedra, S. Bedra, S. Benkouda, and T. Fortaki, "Efficient full-wave analysis of resonant modes of circular microstrip antenna printed on isotropic or uniaxially anisotropic substrate," *Wireless personal communications*, vol. 81, pp. 239-251, 2015.
- [4] F. Bouttout, F. Benabdelaziz, A. Benghalia, D. Khedrouche, and T. Fortaki, "Uniaxially anisotropic substrate effects on resonance of rectangular microstrip patch antenna," *Electron. Lett.*, vol. 35, pp. 255-256, 1999.
- [5] J. Yuan and C. Gu, "A volume-surface integral equation solver for scattering from microstrip antenna on anisotropic substrate," 3rd *IEEE International Symposium on Microwave, Antenna, Propagation and EMC Technologies for Wireless Communications*, Beijing 2009, pp. 1083-1085, 2009.
- [6] D. Khedrouche and A. Benghalia, "Modeling the superconducting effects on resonance and radiation characteristics of a cylindrical-rectangular microstrip antenna covered with a dielectric layer," *Journal of Computational Electronics*, vol. 12, pp. 297-305, 2013.
- [7] D. D. Donno, A. Esposito, G. Monti, L. Catarinucci, and L. Tarricone, "CPU-based acceleration of computational electromagnetics codes," *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 26, pp. 309-323, 2013.
- [8] R. Zhou, A. Nie, Q. Zhang, and Y. Cao, "Simulation optimization to microwave components using neural network," *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, vol. 27, pp. 1-9, 2014.
- [9] H. Liu, L. Zhu, D. Ahn, A. Abbosh, and S. Luo, "Perforated Ground Plane Structures for RF and Wireless Components," *International Journal of Antennas and Propagation*, vol. 2013, 2013.
- [10] Y. Tighilt, F. Bouttout, and A. Khellaf, "Modeling and design of printed antennas using neural networks," *International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering*, vol. 21, pp. 228-233, 2011.
- [11] S. Bedra, S. Benkouda, and T. Fortaki, "Analysis of a circular microstrip antenna on isotropic or uniaxially anisotropic substrate using neurospectral approach," *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, vol. 33, pp. 567-580, 2014.

-
- [12] C. Zebiri, M. Lashab, and F. Benabdelaziz, "Asymmetrical effects of bi-anisotropic substrate-superstrate sandwich structure on patch resonator," *Progress In Electromagnetics Research B*, vol. 49, pp. 319-337, 2013.
- [13] X. Liu, X. Shi, J. Ke, and H. Wang, "Radiation properties of microstrip patch antenna covered with an anisotropic dielectric layer and a plasma sheath," *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, vol. 125, pp. 1770-1774, 2014.
- [14] D. M. Pozar, "Radiation and scattering from a microstrip patch on a uniaxial substrate," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 35, pp. 613-621, 1987.
- [15] D. M. Pozar, " Microwave Engineering," John Wiley & Sons, Inc. 4th ed. USA 2012.
- [16] F. Chebara, "Etude des caractéristiques de résonance et de rayonnement des antennes microbandes réalisées avec des matériaux ayant une anisotropie de type électrique et magnétique," *Thèse de Doctorat*, Université de Batna, 2011.
- [17] F. Benmeddour, C. Dumond, F. Benabdelaziz, and F. Bouttout, "Improving the performances of a high Tc superconducting circular microstrip antenna with multilayered configuration and anisotropic," *Progress In Electromagnetics Research C*, vol. 18, pp. 169-183, 2011.
- [18] A. Motevasselian, "Spectral domain analysis of resonant characteristics and radiation patterns of a circular disc and an annular ring microstrip antenna on uniaxial substrate," *Progress In Electromagnetics Research M*, vol. 21, pp. 237-251, 2011.
- [19] T. Fortaki, "Contribution à l'étude des problèmes de caractérisation des antennes microbandes multicouches sans et avec ouvertures dans les plans de masse," *Thèse de Doctorat*, Université de Constantine, Juin 2004.
- [20] S. Bedra, R. Bedra, S. Benkouda, and T. Fortaki, "Full-Wave Analysis of Anisotropic Circular Microstrip Antenna with Air Gap Layer," *Progress In Electromagnetics Research M*, vol. 34, pp. 143-151, 2014.
- [21] V. Losada, R. R. Boix, and M. Horn, "Resonant modes of circular microstrip patches in multilayered substrate," *IEEE Trans. Antennas propagat.*, vol. 47, pp. 488-498, 1999.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit sont axés sur le développement et l'amélioration des performances des antennes microbandes parfaitement conductrices ou supraconductrices. L'intérêt porté à l'étude des antennes supraconductrices est motivé par le fait que ces antennes surmontent les limites inhérentes aux antennes microbandes conventionnelles, à savoir, un gain faible et une bande passante étroite. Pour le cas d'un résonateur de forme elliptique, nous avons montré que ce dernier permet d'obtenir un comportement bifréquence. En outre des résultats originaux concernant les caractéristiques de résonance des antennes microbandes supraconductrices à haute température critique avec et sans couche protectrice ont été également présentés. Nous avons montré que les méthodes développées donnent des résultats très proches de ceux de la mesure.

Dans un premier temps, nous avons rappelé quelques généralités sur les antennes microbandes. Par la suite nous avons détaillé le principe de fonctionnement, les avantages et les limitations des différentes techniques utilisées pour alimenter ces antennes. Mise à part les méthodes d'analyse [1]-[5] rapportées dans le chapitre 1, nous avons présenté trois autres thèmes, chacun d'eux dans un chapitre bien séparé.

Dans le deuxième chapitre, nous avons démontré la possibilité d'adopter une modélisation analytique pour des antennes microbandes supraconductrices réalisées avec des substrats anisotropes. Pour cela, nous nous sommes basées sur le modèle de cavité à murs latéraux magnétiques conjointement avec les connaissances électromagnétiques. Cette approche mixte prend en compte les propriétés physiques du matériau ainsi que les paramètres géométriques de l'antenne microbande supraconductrice. Le point fort de la modélisation adoptée dans ce chapitre est qu'elle allie à la fois précision et vitesse de calcul. Nous avons considéré trois différentes formes du patch, à savoir, la forme rectangulaire, circulaire et elliptique. Cette dernière forme offre deux résonances : une paire et l'autre impaire. L'inclusion des champs de bord dans la formulation mathématique nous a permis d'obtenir un modèle fiable pour des substrats minces aussi bien que pour des substrats épais. Le modèle des deux fluides de Gorter-Casimir nous a permis de considérer le phénomène de la supraconductivité dans le calcul de la fréquence de résonance de l'antenne.

Les résultats obtenus ont montré que pour prédire les variations de la fréquence de résonance pour le cas d'un substrat anisotrope, il est nécessaire de considérer à la fois la variation de ε_x et ε_z , et pas seulement le rapport d'anisotropie $\varepsilon_x/\varepsilon_z$. D'autres résultats ont indiqué que la permittivité ε_z le long de l'axe optique est le facteur le plus pondérant dans la détermination de la fréquence de résonance. L'effet de la permittivité ε_x sur la fréquence de résonance augmente avec l'augmentation de l'épaisseur du substrat.

En ce qui concerne l'antenne supraconductrice de forme rectangulaire ou circulaire, les résultats numériques ont montré que l'effet de l'épaisseur du patch supraconducteur est plus prononcé pour des épaisseurs inférieures à la profondeur de pénétration à une température nulle (λ_0). Un soin extrême devrait être pris lors de la réalisation d'une antenne avec un film supraconducteur mince ; puisque une petite incertitude lors de la fabrication du disque peut avoir comme conséquence un décalage important de la fréquence de l'antenne. L'étude de l'influence de la température sur la fréquence de résonance de l'antenne supraconductrice a indiqué que l'augmentation de la température cause une diminution dans la fréquence de résonance. Cette diminution est significative pour des valeurs de température voisines de la température critique.

Dans quelques applications des antennes microbandes, la géométrie circulaire de l'élément rayonnant est préférable à la rectangulaire [5]-[10]. En effet, la plaque circulaire peut donner des performances meilleures que la rectangulaire [3]. Dans le but de protéger l'antenne microruban des effets de la corrosion et des interférences météorologiques, des couches diélectriques ont été ajoutées à sa structure de base, empilées directement sur la surface rayonnante [5], [7], [11]-[13]. Dans certaines applications il est nécessaire d'utiliser un radôme ayant une constante diélectrique élevée afin d'obtenir les caractéristiques recherchées. Dans un tel cas, il est nécessaire d'effectuer la modélisation avec le radôme dès le départ [14]. Dans la littérature ouverte, les études concernant les caractéristiques de résonance des antennes microrubans couvertes par des couches diélectriques utilisant des plaques parfaitement conductrices sont nombreuses [7], [11]-[13]. Cependant, peu de travaux ont été effectués pour le cas des plaques microrubans supraconductrices dans des configurations substrat-superstrat [9]-[12]. Au meilleur de notre connaissance, l'effet du superstrat diélectrique sur les caractéristiques de résonance de l'antenne circulaire supraconductrice n'a pas été traité auparavant dans la littérature

ouverte; les résultats publiés concernent uniquement la fréquence d'opération de l'antenne [15]-[18]. Ceci nous a motivé à choisir ce sujet comme un deuxième thème de notre thèse.

La méthode de Galerkin dans le domaine des transformées vectorielles de Hankel conjointement avec le théorème des deux fluides de Gorter-Casimir et les équations des frères London ont été utilisés pour obtenir les caractéristiques de résonance d'un disque microbande circulaire supraconducteur couvert par une couche protectrice. L'impédance complexe de surface a été calculée en supposant que l'épaisseur du film supraconducteur est inférieure à trois fois la profondeur de pénétration à une température nulle. Les résultats numériques obtenus pour les fréquences de résonance, les bandes passantes et les facteurs de qualité de l'antenne circulaire supraconductrice avec un superstrat diélectrique ont été comparés avec des mesures et des résultats numériques disponibles dans la littérature ouverte. Un bon accord a été trouvé dans tous les cas. Des résultats originaux ont été présentés pour les fréquences de résonance et les bandes passantes des patchs fabriqués à base de l'YBCO ($\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$) et recouverts par un superstrat diélectrique. Ces résultats ont montré que les effets de l'épaisseur et de la permittivité du superstrat sont importants et doivent être pris en compte dans la conception de ces antennes.

Le dernier chapitre présente une étude basée sur la méthode de Galerkin dans le domaine des transformées vectorielles de Hankel pour le calcul de la fréquence de résonance, la bande passante, et le facteur de qualité d'une antenne microbande circulaire imprimée sur un substrat contenant des diélectriques isotropes et/ou anisotropes. Contrairement aux travaux antérieurs, nous avons présenté des résultats numériques pour le mode fondamental aussi bien que pour les modes d'ordre supérieur. La technique de la phase stationnaire a été utilisée pour l'évaluation du champ électrique rayonné en zone lointaine. La présente étude a été validée par comparaison de nos résultats numériques avec des mesures expérimentales.

Les résultats obtenus ont montré que le rapport d'anisotropie seul n'est pas suffisant pour prédire les variations de la fréquence de résonance et la bande passante de l'antenne microbande. L'étude de l'influence de l'anisotropie du substrat sur le diagramme de rayonnement de l'antenne a montré que le diagramme de rayonnement de l'antenne ne varie pas de façon significative avec la variation de la permittivité perpendiculaire à l'axe optique, par contre, ce dernier est très sensible à la variation de la permittivité le long de

l'axe optique.

Nous avons vu dans cette étude que le diagramme de rayonnement de l'antenne microbande présente une directivité assez faible. Afin d'améliorer cette directivité, on peut faire recourt à un réseau d'antennes microbandes. Le champ électromagnétique produit par un réseau d'antennes est la somme vectorielle des champs produits par chacun des éléments. En choisissant convenablement l'espacement entre les éléments et la phase du courant qui circule dans chacun, on peut modifier la directivité du réseau grâce à l'interférence constructive dans certaines directions et à l'interférence destructive dans d'autres directions. L'étude d'un réseau d'antennes formé de patches supraconducteurs à haute température critique fera l'objet de nos futurs travaux.

Références bibliographiques

- [1] S. Bedra, "Evaluation analytique et numérique des caractéristiques électromagnétiques des structures microbandes ouvertes," Thèse de Doctorat, Université de Batna, Batna, 2015.
- [2] Y. Tighilt, "Identification des antennes microrubans multicouches par la méthode spectral et les réseaux de neurones," *Thèse de Doctorat*, Université de Setif, 2011.
- [3] S. Benkouda, "Contribution à l'étude des problèmes de caractérisation des antennes microrubans à plaques rayonnantes parfaitement conductrices et supraconductrices," Thèse doctorat e-sciences, 2012, Département d'électronique, université de Batna, Algérie.
- [4] C. Aiss7aoui "Contribution à l'analyse des antennes microbandes avec excitation par la méthode du domaine spectral-Application à un réseau d'antennes microbandes." Thèse doctorat e-sciences, 2017, Département d'électronique, université de Constantine 1, Algérie.
- [5] T. Fortaki, "Contribution à l'étude des problèmes de caractérisation des antennes microbandes multicouches sans et avec ouvertures dans les plans de masse," *Thèse de Doctorat*, Université de Constantine, Juin 2004.
- [6] A. Mahamdi, S. Bedra, R. Bedra, and S. Benkouda, "CAD cavity model analysis of high Tc superconducting rectangular patch printed on anisotropic substrates," in *5th International Conference on Electrical Engineering - Boumerdes (ICEE-B)*, pp. 1-4, 2017.

- [7] S. Bedra, R. Bedra, S. Benkouda, and T. Fortaki, "Superstrate loading effects on the resonant characteristics of high T_c superconducting circular patch printed on anisotropic materials," *Physica C: Superconductivity and its Applications*, vol. 543, pp. 1-7, 2017.
- [8] S. Bedra, S. Benkouda, and T. Fortaki, "An efficient study of circular microstrip antenna on suspended and composite substrates," *Journal of Computational Electronics*, vol. 16, pp. 922-929, 2017.
- [9] S. Bedra, R. Bedra, S. Benkouda, and T. Fortaki, "Efficient CAD Model to Analysis of High T_c Superconducting Circular Microstrip Antenna on Anisotropic Substrates," *Advanced Electromagnetics*, vol. 6, pp. 40-45, 2017.
- [10] A. Bouraiou, S. Benkouda, and T. Fortaki, "A rigorous full-wave analysis of high T_C superconducting circular disc microstrip antenna," in *2016 8th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC)*, Algiers, pp. 719-724, 2016.
- [11] S. Bedra and T. Fortaki, "Hankel transform domain analysis of covered circular microstrip patch printed on an anisotropic dielectric layer," *Journal of Computational Electronics*, vol. 14, pp. 747-753, 2015.
- [12] D. Khedrouche and A. Benghalia, "Modeling the superconducting effects on resonance and radiation characteristics of a cylindrical-rectangular microstrip antenna covered with a dielectric layer," *Journal of Computational Electronics*, vol. 12, pp. 297-305, 2013.
- [13] R. Kumar and P. Malathi, "Experimental investigation of resonant frequency of multilayered rectangular and circular microstrip antennas," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 53, pp. 352-356, 2011.
- [14] M. Corriveau, "Modélisation et conception d'un antenne micro-onde de type microruban avec radôme," Thèse de doctorat, Université du Québec à Trois-Rivières, 2006.
- [15] F. Benmeddour, W. Assas, and D. Christophe, "Rigorous analysis of a high T_c circular superconducting microstrip patch in a substrate-superstrate geometry," in *2015 Third World Conference on Complex Systems (WCCS)*, Marrakech, Morocco, pp. 1-5, 2015.
- [16] H. Liu, P. Wen, S. Zhu, B. Ren, and Y. He, "High-temperature superconducting composite right/left-handed resonator," *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 26, pp. 1-4, 2016.

- [17] S. Bedra, T. Fortaki, A. Messai, and R. Bedra, "Spectral domain analysis of resonant characteristics of high Tc superconducting rectangular microstrip patch printed on isotropic or uniaxial anisotropic substrates," *Wireless personal communications*, vol. 86, pp. 495-511, 2016.
- [18] S. Bedra and T. Fortaki, "High-Tc superconducting rectangular microstrip patch covered with a dielectric layer," *Physica C: Superconductivity and its Applications*, vol. 524, pp. 31-36, 2016.

Annexes

Annexe A

Fonctions de Bessel

Annexe B

Coordonnées elliptiques et fonctions de Mathieu modifiées

Annexe C

Publications internationales dans le cadre de cette thèse.

Annexe A

Fonctions de Bessel

Dans cette annexe, nous donnerons la définition des fonctions de Bessel, quelques-unes de leurs propriétés ainsi que leur relation avec les fonctions associées de Legendre de deuxième espèce et l'intégrale elliptique complète de première espèce.

A.1. Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel ont été découvertes par le mathématicien Daniel Bernoulli, mais portent le nom du mathématicien Friedrich Bessel qui en développa l'analyse. Elles sont solutions de l'équation différentielle de Bessel, qui a la forme suivante :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \eta^2)y = 0 \quad (\text{A.1})$$

où η est un nombre réel, le plus souvent entier. Dans ce cas-là η est appelé l'ordre la fonction de Bessel. Ces fonctions sont aussi connues sous le nom d'harmoniques cylindriques car elles sont solutions de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques.

A.2. Définition en série entière

– Pour $\eta = n$ entier, nous avons :

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} \quad (\text{A.2})$$

– Pour η non entier, cela donne :

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!T(p+a+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\eta} \quad (\text{A.3})$$

où $T(z)$ est la fonction gamma.

Une représentation des premiers ordres ($\eta = 0; 1; 2$) des fonctions de Bessel est donnée sur la figure 1.

A.3. Propriétés des $J_n(x)$

– Relation de récurrence :

$$J_{n+1}(x) = \frac{nJ_n(x)}{x} - J_n''(x) \quad (\text{A.4})$$

– Orthogonalité :

$$\int_0^1 x J_n(kx) J_n(k'x) dx = \delta_{kk'} \quad (\text{A.5})$$

où k, k' sont des racines distinctes de J_n .

A. Fonctions de Bessel de 1^{re} espèce

Cette première solution que nous noterons $J_n(s)$ est obtenue quand nous cherchons une solution de l'équation de Bessel (A.1) sous la forme d'un développement en série entière. Les coefficients de ce développement sont alors dérivés selon un procédé qui est parfois appelé *méthode de Frobenius*, et qui consiste à résoudre une équation de récurrence à plusieurs niveaux. En posant $J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} J_{n,p} x^p$, on obtient en injectant ce développement dans (A.1),

$$(p^2 - n^2)J_{n,p} + J_{n,p-2} = 0, \quad p \in \mathbb{N} \quad (\text{A.6})$$

Notons au passage que nous avons utilisé le fait que $x \frac{d}{dx} x^p = p x^p$. On s'aperçoit par un raisonnement simple que nécessairement $J_{n,0} = J_{n,1} = \dots = J_{n,n-1} = 0$. Par contre, si on veut que $J_n(x) \neq 0$ alors $J_{n,n}$ doit être le premier terme non nul de la récurrence. Nous n'avons pas d'équation qui le fixe *a priori*, la fonction de Bessel de première espèce correspond au cas où on pose $J_{n,n} = 1/(2^n n!)$. On peut alors se servir de l'équation (A.6) pour définir les $J_{n,p}$ avec $p > n$ puisqu'alors $p^2 - n^2 \neq 0$. On obtient au final le développement suivant

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.7})$$

On peut montrer à l'aide des théorèmes classiques sur les séries entières que le rayon de convergence de cette série est infini. Par construction, la fonction $J_p(s)$ est alors une solution de l'équation (A.1) associée à n ou à $-n$. Notons que

$$J_n(x) \cong J_{n,n} x^n = \frac{1}{n! 2^n} \quad \text{quand} \quad x \rightarrow 0 \quad (\text{A.8})$$

autrement dit le développement de J_p commence à l'ordre p . En outre cette fonction est e^∞ . Par ailleurs la convention pour le premier terme $J_{p,p}$ permet d'assurer les équations de récurrence suivantes

$$\frac{d}{dx} (x^{n+1} J_{n+1}(x)) = x^{n+1} J_n(x), \text{ et } \frac{d}{dx} (x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad n=0,1,2..$$

B. Fonctions de Bessel de 2nd espèce d'ordre non nul

Pour construire une deuxième solution de (A.1), nous distinguerons le cas $n > 0$ et le cas $n = 0$. Dans cette sous-section nous commençons par $n > 0$. Nous noterons cette deuxième solution $Y_n(x)$, et pour la construire nous allons chercher à réappliquer le raisonnement ci-dessus mais en supposant une forme un peu plus générale. Cherchons cette solution sous la forme d'une série de Laurent, c'est-à-dire $Y_n(x) = Y_{n,-p} x + Y_{n,-p+1} x^{-p+1} + Y_{n,-p+2} x^{-p+2} + \dots$. Alors les premiers termes de cette série doivent nécessairement satisfaire la relation $(p^2 - n^2) Y_{n,p} + Y_{n,p-2} = 0$. De là on tire que $Y_{n,p} = 0$ tant que $p < -n$ et comme on veut que $Y_n(x)$ ne soit pas proportionnel à $J_n(x)$ on est obligé de supposer que $Y_{n,-n} \neq 0$. Il y a alors indétermination sur la valeur de ce coefficient et la fonction de Bessel de 2^{me} espèce et d'ordre n correspond au choix $Y_{n,-n} = -(n-1)! 2^n / \pi$. Par ailleurs on peut utiliser la relation de récurrence

$$(p^2 - n^2) Y_{n,p} + Y_{n,p-2} = 0, \quad p < n \quad (\text{A.9})$$

Pour construire des termes d'ordre supérieur. Nous pouvons utiliser cette relation pour définir les termes $p = -n+1, p = -n+2, \dots, p = n-1$, c'est-à-dire tant que $p^2 - n^2$ est inversible. On obtient ainsi le début de développement

$$Y_n(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-p-1)!}{p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2p} + \dots$$

Pour $n = p$ on rencontre un problème avec (A.9). Puisque $Y_{n,n-2} \neq 0$, il est donc impossible que le terme d'ordre supérieur dans le développement soit de la forme $Y_{n,n} s^n$. Une solution consiste, au lieu de chercher $Y_{n,n}$ dans \mathbb{C} , à le chercher sous la forme $Y_{n,n} = Y_{n,n}^{(0)} + Y_{n,n}^{(1)} \ln(x)$, avec $Y_{n,n}^{(0)}, Y_{n,n}^{(1)} \in \mathbb{C}$. En injectant cette forme dans l'équation de Bessel (1.3.2) on aboutit alors à

$$\left[x \left(\frac{d}{dx} \right)^2 - n^2 \right] x^p (Y_{n,n}^{(0)} + Y_{n,n}^{(1)} \ln(x)) + x^n Y_{n,n-2} = 0 \Rightarrow 2n Y_{n,n}^{(1)} + Y_{n,n-2} = 0$$

Ceci nous impose la valeur de $Y_{n,n}^{(1)}$, mais ici encore il y a une indétermination sur la valeur de $Y_{n,n}^{(0)}$. Dans le cas de la fonction de Bessel de 2^{me} espèce et d'ordre n on choisit

$$Y_{n,n}^{(0)} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^n n!} \left(2 \ln \frac{1}{2} + 2\gamma_e - 1 - \frac{1}{2} \dots - \frac{1}{n} \right), \text{ avec } \gamma_e = \text{constante d'Euler} = 0.57721566$$

Attention nous notons ici la constante γ_e en gras pour ne pas la confondre avec un éventuel indice γ plus loin. Puisque dans le terme d'ordre n il y a un logarithme, nous allons chercher tous les autres termes sous la même forme $Y_{n,p} = Y_{n,p}^{(0)} + Y_{n,p}^{(1)} \ln(x)$, $p \geq n$. En injectant cette forme de développement dans l'équation de Bessel, on aboutit à la relation de récurrence

$$\left[x \left(\frac{d}{dx} \right)^2 - n^2 \right] x^p (Y_{n,p}^{(0)} + Y_{n,p}^{(1)} \ln(x)) + x^n (Y_{n,p-2}^{(0)} + Y_{n,p-2}^{(1)} \ln(x)) = 0$$

Pour obtenir cette relation, il est important de remarquer que l'opérateur $x \frac{d}{dx}$ laisse stable l'espace vectoriel $\{ x_n(a+b \ln(x)) \mid a, b \in \mathbb{C} \}$. On peut mettre la relation de récurrence précédente sous forme matricielle, et on aboutit alors à

$$\begin{bmatrix} p^2 - n^2 & 2p \\ 0 & p^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{n,p}^{(0)} \\ Y_{n,p}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{n,p-2}^{(0)} \\ Y_{n,p-2}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Y_{n,p} = Y_{n,p}^{(0)} + Y_{n,p}^{(1)} \ln(x), p \geq n$$

(A.10)

On peut maintenant raisonner par récurrence comme pour la fonction de Bessel de 1^{re} espèce. Il est clair que pour $n \geq p$ la matrice dans le premier terme de la relation ci-dessus est inversible. Ceci nous permet donc de définir $Y_{n,p}$ pour tout $p \geq n$. Avec cette construction on aboutit finalement à

$$Y_n(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2p} - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+n)!} \left[\frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)} + \frac{\Gamma'(n+p+1)}{\Gamma(n+p+1)} \right] \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} + \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

(A.11)

Dans cette expression Γ désigne la fonction Gamma d'Euler, nous la notons en gras pour la distinguer de $\Gamma = \partial \Omega$ (en outre cette fonction interviendra rarement dans notre analyse), on a

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = -\gamma_e + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(p-1)}, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma_e$$

La série en deuxième terme de la définition (A.11) admet un rayon de convergence infini comme on le voit grâce aux résultats standard sur les séries, ainsi la fonction $Y_n(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0, \infty[$. Par ailleurs on vérifie que $Y_p(s)$ est bien solution de (A.1) par construction. Également notons que

$$Y_n(x) \sim Y_{n,-n} x^{-n} = -\frac{(n-1)! 2^n}{\pi} x^{-n} \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0 \quad (\text{A.12})$$

c'est-à-dire que le développement de $Y_n(x)$ commence à l'ordre $-n$. La fonction $Y_n(x)$ est \mathcal{C}^∞ sur $]0, \infty[$ et est clairement indépendante de $J_n(x)$. Enfin précisons qu'une raison qui a mené au choix pour les valeurs de $Y_{n,-n}$ et $Y_{n,n}$ est d'assurer les relations de récurrence

$$\frac{d}{dx} (x^{n+1} Y_{n+1}(x)) = x^{n+1} Y_n(x), \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} (x^{-n} Y_n(x)) = -x^{-n} Y_{n+1}(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

C. Fonctions de Bessel de 2nd espèce d'ordre 0

Terminons avec la construction de $Y_0(x)$. Comme précédemment, si on suppose que $Y_0(x)$ admet un début de développement en série de Laurent $Y_0(x) = Y_{0,-p}x^{-p} + Y_{0,-p+1}x^{-p+1} + Y_{0,-n+2}x^{-n+2} + \dots$, alors on voit que la relation

$$p^2 Y_{0,p} + Y_{n,p-2} = 0$$

doit être satisfaite pour tout $p < 0$ ce qui implique $Y_{0,p} = 0$ pour tout $p < 0$. On est donc amené à penser qu'il suffit d'imposer $Y_{0,0} \neq 0$, $Y_{0,0} \in \mathbb{C}$, et de construire les termes d'ordre supérieur $Y_{0,p}$, $p > 0$ par récurrence. Si nous appliquons ce procédé nous allons évidemment construire une solution proportionnelle à $J_0(x)$! Nous cherchons donc directement le terme $Y_{0,0}$ sous la forme $Y_{0,0} = Y_{0,0}^{(0)} + Y_{0,0}^{(1)} \ln(x)$. Nous allons également chercher les termes d'ordre supérieur sous la même forme, de manière à satisfaire la relation de récurrence

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^2 x^p (Y_{n,p}^{(0)} + Y_{n,p}^{(1)} \ln(x)) + x^p (Y_{0,p-2}^{(0)} + Y_{0,p-2}^{(1)} \ln(x)) = 0, \quad p \geq 0$$

Notons qu'on a $\left(x \frac{d}{dx}\right)^2 (Y_{0,0}^{(0)} + Y_{0,0}^{(1)} \ln(x)) = 0$, de sorte que les deux termes $Y_{0,0}^{(0)}$ et $Y_{0,0}^{(1)}$ sont indéterminés. La fonction de Bessel de 2nd espèce correspond alors au choix,

$$Y_{0,0}^{(0)} = \frac{2}{\pi} (\gamma_e + \ln(1/2)) \quad \text{et} \quad Y_{0,0}^{(1)} = \frac{2}{\pi}$$

Pour le reste de la construction (récurrence etc. . .) et la définition des $Y_{0,p}$ avec $p > 0$, il suffit de reprendre le raisonnement que nous avons suivi pour les $Y_{n,p}$ mais en posant $n = 0$. Ainsi nous recherchons $Y_{0,p}$ sous la forme $Y_{0,p} = Y_{0,p}^{(0)} + Y_{0,p}^{(1)} \ln(x)$ de manière à satisfaire la relation

$$\begin{bmatrix} p^2 & 2p \\ 0 & p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{0,p}^{(0)} \\ Y_{0,p}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{0,p-2}^{(0)} \\ Y_{0,p-2}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y_{0,p} = Y_{0,p}^{(0)} + Y_{0,p}^{(1)} \ln(x), \quad p \geq 0 \quad (\text{A.13})$$

Cette démarche par récurrence à une définition à l'aide d'une série de rayon de convergence infini

$$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \Gamma'(p+1)}{(p!)^2 \Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} + \frac{2}{\pi} J_0(x) \ln\left(\frac{x}{2}\right) \quad (\text{A.14})$$

qui désigne par construction une solution à l'équation (A.13) clairement indépendante de $J_0(x)$. Ici notons que le comportement de cette solution lorsque $x \rightarrow 0$ n'est pas algébrique, en effet on a

$$Y_0(x) \sim Y_{0,0}^{(1)} \ln(x) = \frac{2}{\pi} \ln(x) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0 \quad (\text{A.15})$$

La fonction $Y_0(x)$ est également C^∞ . Enfin on a bien les relations de récurrence

$$\frac{d}{dx}(xY_1(x)) = xY_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{dY_0}{dx}(x) = -Y_1(x).$$

Les valeurs de $X'_{n,m}$ sont tabulées pour quelques modes dans le tableau B-1 et Les indices n et m servent ici à identifier le mode supérieur de transmission (TE_{nm} ou TM_{nm}) dans le guide d'ondes circulaire.

Tableau B.1. Valeurs de X'_{nm} pour quelques modes TM_{nm} .

n m →	$X_{n,1}$	$X_{n,2}$	$X_{n,3}$
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

Annexe B

Coordonnées elliptiques et fonctions de Mathieu modifiées

Nous introduisons le système des coordonnées elliptiques. Après quelques définitions, nous nous intéressons à l'expression des opérateurs différentiels classiques (gradient, Laplacien...) dans ce système de coordonnées. Les coordonnées elliptiques sont présentées dans divers ouvrages. On retiendra celui de Mclachlan [1] sur les fonctions de Mathieu. L'expression des opérateurs différentiels est calculée selon la méthode présentée par Angot [2].

B.1. Le système des coordonnées elliptiques

On travaille ici en deux dimensions, et on introduit les coordonnées elliptiques (ζ, η) . Pour élargir aux trois dimensions, il faut ajouter la troisième coordonnée z ($z = x_3$), et le vecteur de base $\vec{a}_z = \vec{k}$ le long de l'axe du cylindre. On parle alors de coordonnées du cylindre elliptique.

B.1.1. Définition

Écrivons $x_1 + ix_2 = h ch(\zeta + i\eta)$. Cette écriture complexe sert pour écrire facilement certaines équations classiques - équation de propagation par exemple - en coordonnées elliptiques. En égalant parties réelle et imaginaire, on obtient la relation entre les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) et les coordonnées elliptiques (ζ, η) :

$$\begin{cases} x_1 = h ch \zeta \cos \eta \\ x_2 = h sh \zeta \sin \eta \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Alors:

$$\frac{x_1^2}{h^2 ch^2 \zeta} + \frac{x_2^2}{h^2 sh^2 \zeta} = 1 \quad (\text{B.2})$$

et

$$\frac{x_1^2}{h^2 ch^2 \zeta} - \frac{x_2^2}{h^2 sh^2 \zeta} = 1 \quad (\text{B.3})$$

(B.2) : représente une famille d'ellipses homofocales de grands axes $2a = 2hch\zeta$ et de petits axes $2b = 2hsh\zeta$, les foyers communs étant les points $x_1 = \pm h, x_2 = 0$.

(B.3) : représente une famille d'hyperboles homofocales.

Les deux familles de coniques se coupent de façon orthogonale (Figure B.1), et chaque intersection correspond à un point défini par les coordonnées (B.1). À tout couple (x_1, x_2) correspond un et un seul couple (ζ, η) .

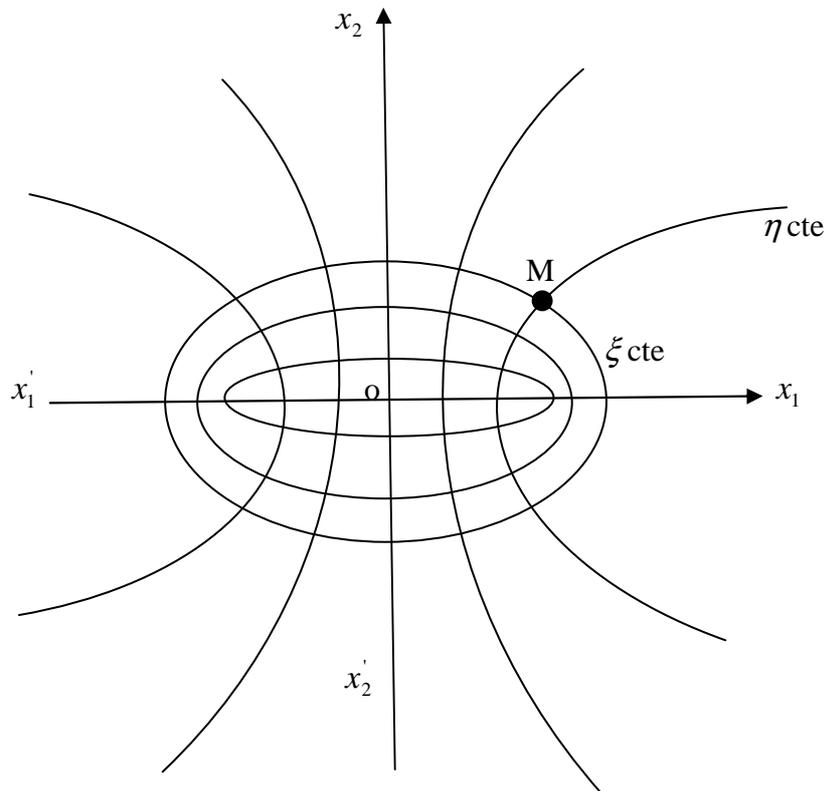


Figure. A.1. Système des coordonnées elliptiques.

B.1.2. L'angle η : Il varie de 0 à 2π pour faire le tour de l'ellipse. Sa représentation graphique est donnée sur la figure B.2 : soit $M(\zeta, \eta)$ un point et soit C le cercle circonscrit à l'ellipse sur laquelle M se trouve. Soit M' le point de C de même abscisse que M . Alors η est l'angle

(Ox_1, OM') : c'est la seconde coordonnée polaire de M' .

Cas particuliers :

- ✓ $\eta = 0$: d'après (B.1), lorsque ξ varie, on décrit la demi-droite $[Ox_1)$.
- ✓ $\eta = \frac{\pi}{2}$: de même, on montre qu'on décrit la demi-droite $[Ox_2)$.
- ✓ $\eta = \pi$: on décrit $[Ox_1')$.
- ✓ $\eta = \frac{3\pi}{2}$: on décrit $[Ox_2')$.

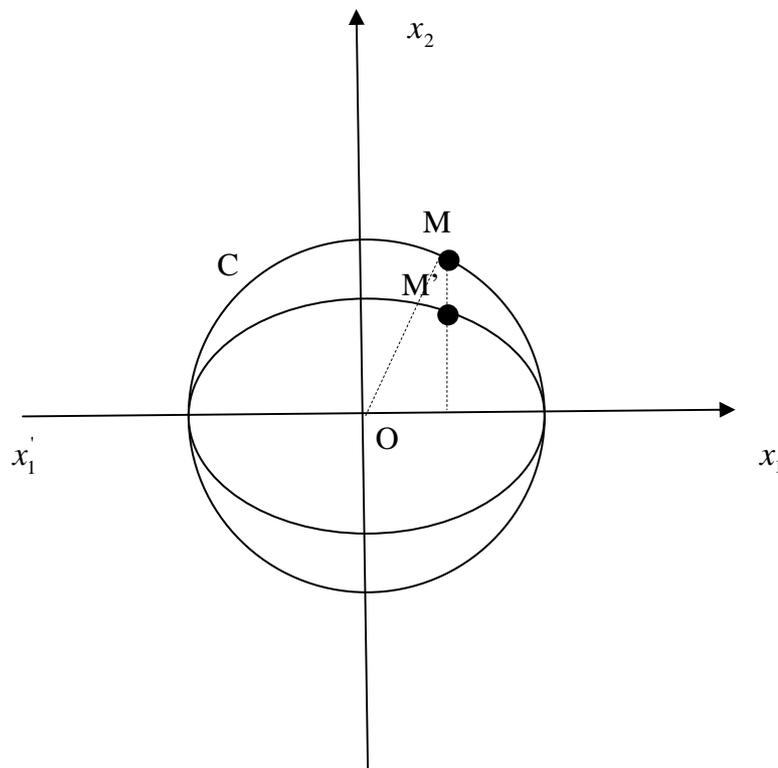


Figure. B.2. Représentation graphique de l'angle η .

La coordonnée ζ

ζ varie avec l'excentricité de l'ellipse : soit e cette excentricité, alors :

$$h = ae \quad \text{et} \quad e = \frac{1}{ch\zeta} \quad (\text{B.4})$$

Cas limites :

- ✓ Si $e \rightarrow 1$ ($\zeta \rightarrow 0$), alors $a \rightarrow h$ ainsi, l'ellipse dégénère en un segment de largeur $2h$
 - ✓ Avec a constant, si $e \rightarrow 0$ ($\zeta \rightarrow \infty$), l'ellipse devient un cercle de rayon a . Comme $h = ae, h \rightarrow 0$, les foyers fusionnent à l'origine du repère.
- De plus, $hch\zeta \rightarrow hsh\zeta \rightarrow a$. Finalement, si $e \rightarrow 0$ et $\eta \rightarrow \varphi_1$, on retrouve les coordonnées polaires.

B.1.3. Vecteurs de base

En un point M, les deux vecteurs de base \vec{a}_η et \vec{a}_ζ sont portés respectivement par les tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole qui lui est orthogonale (Figure . B.3). On utilise ici des résultats classiques d'analyse tensorielle [50]. Soit $\vec{r} = \vec{OM}$, alors :

$$\vec{a}_\zeta = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} \right\|^{-1} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$\vec{a}_\eta = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right\|^{-1} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.6})$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$\vec{a}_\zeta = \frac{\cos \eta sh \zeta \vec{i} + \sin \eta ch \zeta \vec{j}}{\sqrt{ch^2 \zeta - \cos^2 \eta}} \quad (\text{B.7})$$

$$\vec{a}_\eta = \frac{-ch \zeta \sin \eta \vec{i} + sh \zeta \cos \eta \vec{j}}{\sqrt{ch^2 \zeta - \cos^2 \eta}} \quad (\text{B.8})$$

B.1.4. Coordonnées elliptiques d'un vecteur

Soit A un vecteur. On désire **connaître** ses **coordonnées elliptiques** de ses coordonnées cartésiennes A_1 et A_2 . On écrit :

$$\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} = A_\zeta \vec{a}_\zeta + A_\eta \vec{a}_\eta \quad (\text{B.9})$$

D'après les expressions (B.7) de \vec{a}_ζ et (B.8) de \vec{a}_η , (B.9) permet d'écrire :

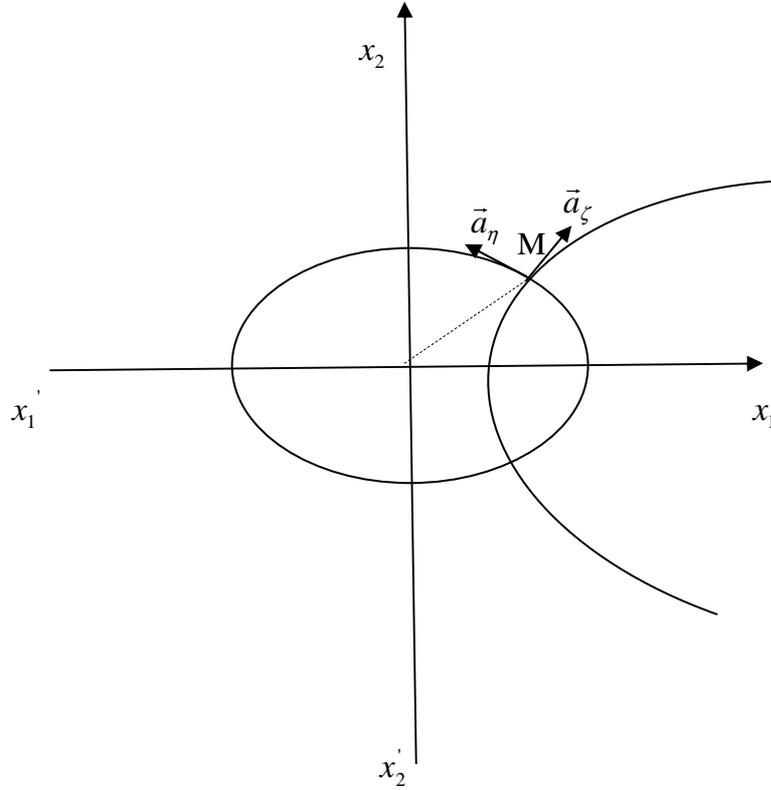


Figure.B.3. Vecteurs de base en coordonnées elliptiques.

$$A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} = \left(\frac{\cos \eta \operatorname{sh} \zeta}{\sqrt{ch^2 \zeta - \cos^2 \eta}} A_\zeta - \frac{\sin \eta \operatorname{ch} \zeta}{\sqrt{ch^2 \zeta - \cos^2 \eta}} A_\eta \right) \vec{i} + \left(\frac{\sin \eta \operatorname{ch} \zeta}{\sqrt{ch^2 \zeta - \cos^2 \eta}} A_\zeta - \frac{\cos \eta \operatorname{sh} \zeta}{\sqrt{ch^2 \zeta - \cos^2 \eta}} A_\eta \right) \vec{j} \quad (\text{B.10})$$

Par identification :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\cos \eta \operatorname{sh} \zeta}{\sqrt{ch^2 \zeta - \cos^2 \eta}} A_\zeta - \frac{\sin \eta \operatorname{ch} \zeta}{\sqrt{ch^2 \zeta - \cos^2 \eta}} A_\eta \\ A_2 = \frac{\sin \eta \operatorname{ch} \zeta}{\sqrt{ch^2 \zeta - \cos^2 \eta}} A_\zeta - \frac{\cos \eta \operatorname{sh} \zeta}{\sqrt{ch^2 \zeta - \cos^2 \eta}} A_\eta \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

En inversant ce système, on obtient, tous calculs faits :

$$\begin{cases} A_\zeta = \frac{\cos\eta \operatorname{sh}\zeta A_1 + \sin\eta \operatorname{ch}\zeta A_2}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\zeta - \cos^2\eta}} \\ A_2 = \frac{-\sin\eta \operatorname{ch}\zeta A_1 + \cos\eta \operatorname{sh}\zeta A_2}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\zeta - \cos^2\eta}} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

B.2. Expression des opérateurs différentiels classiques

On a vu précédemment que le système de coordonnées elliptiques était un système de coordonnées curvilignes orthogonales. Pour ce type de système [1], par exemple, calcule les opérateurs différentiels classiques. Nous appliquons les résultats qu'il obtient pour calculer l'expression des gradients, rotationnel, divergence et Laplacien en coordonnées elliptiques.

B.2.1. En coordonnées curvilignes orthogonales

Soit (x_1, x_2, x_3) le système de coordonnées cartésiennes, et $(u, v; w)$ celui des coordonnées curvilignes orthogonales. Alors l'élément de longueur qui s'écrivait en coordonnées cartésiennes :

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (\text{B.13})$$

s'écrit :

$$ds^2 = l_1^2 du^2 + l_2^2 dv^2 + l_3^2 dw^2 \quad (\text{B.14})$$

avec :

$$\begin{aligned} l_1^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2 \\ l_2^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)^2 \\ l_3^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial w}\right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

l_1, l_2 et l_3 sont appelées *unités de longueur locales* (ou encore *facteurs d'échelle*).

Soit V un scalaire et $\vec{A}(A_u, A_v, A_w)$ un vecteur. On peut ensuite démontrer l'écriture des opérateurs différentiels suivants (voir [1]) :

$$\text{grad} \vec{V} = \begin{cases} \frac{1}{l_1} \frac{\partial V}{\partial u} \\ \frac{1}{l_2} \frac{\partial V}{\partial v} \\ \frac{1}{l_3} \frac{\partial V}{\partial w} \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

$$\text{rot} \vec{A} = \begin{cases} \frac{1}{l_2 l_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} (l_3 A_w) - \frac{\partial}{\partial w} (l_2 A_v) \right\} \\ \frac{1}{l_1 l_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial w} (l_1 A_u) - \frac{\partial}{\partial u} (l_3 A_w) \right\} \\ \frac{1}{l_1 l_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (l_2 A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (l_1 A_u) \right\} \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{l_2 l_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (l_2 l_3 A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (l_3 l_1 A_v) + \frac{\partial}{\partial w} (l_1 l_2 A_w) \right\} \quad (\text{B.18})$$

$$\Delta V = \frac{1}{l_1 l_2 l_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{l_2 l_3}{l_1} \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{l_3 l_1}{l_2} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{l_1 l_2}{l_3} \frac{\partial V}{\partial w} \right) \right\} \quad (\text{B.19})$$

D'autre part, on utilise la définition suivante du Laplacien d'un vecteur :

$$\Delta \vec{A} = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) \quad (\text{B.20})$$

B. 2. 2. Application aux coordonnées elliptiques

- **Unités de longueurs locales**

On a :

$$\begin{cases} x_1 = h c h \zeta \cos \eta \\ x_2 = h s h \zeta \sin \eta \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

On applique (B.15) et on trouve les unités de longueur suivantes:

$$\begin{cases} l_1^2 = h^2 (c h^2 \zeta - \cos^2 \eta) \\ l_2^2 = h^2 (s h^2 \zeta - \cos^2 \eta) \\ l_3^2 = 1 \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

Dans la suite de cette annexe, on notera toujours :

$$\Delta = \sqrt{c h^2 \zeta - \cos^2 \eta} \quad (\text{B.23})$$

Il vient :

$$l_1 = l_2 = h \Delta \quad \text{et} \quad l_3 = 1 \quad (\text{B.24})$$

- **Opérateurs différentiels**

En remplaçant l_1, l_2 et l_3 par leurs valeurs (B.24) dans les équations (B.16) à (B.19), et en poursuivant les calculs, on trouve les expressions suivantes des opérateurs différentiels elliptiques :

$$\text{grad} \vec{V} = \begin{cases} \frac{1}{h \Delta} \frac{\partial V}{\partial \zeta} \\ \frac{1}{h \Delta} \frac{\partial V}{\partial \eta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{cases} \frac{1}{h\Delta} \frac{\partial A_z}{\partial \eta} - \frac{\partial A_\eta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\zeta}{\partial z} - \frac{1}{h\Delta} \frac{\partial A_z}{\partial \zeta} \\ \frac{1}{h\Delta^3} (sh\zeta ch\zeta A_\eta - \sin\eta \cos\eta A_\zeta) + \frac{1}{h\Delta} \left(\frac{\partial A_\eta}{\partial \zeta} - \frac{\partial A_\zeta}{\partial \eta} \right) \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{h\Delta^3} (sh\zeta ch\zeta A_\zeta + \sin\eta \cos\eta A_\eta) + \frac{1}{h\Delta} \left(\frac{\partial A_\zeta}{\partial \zeta} + \frac{\partial A_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \quad (\text{B.27})$$

$$\Delta V = \frac{1}{h^2 \Delta^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (\text{B.28})$$

De plus, en utilisant les résultats précédents et en appliquant (B.20), on obtient :

$$\Delta \vec{A} = \begin{cases} \frac{1}{h^2 \Delta^2} \left(\frac{2 \cos\eta \sin\eta}{\Delta^2} - \frac{2 ch\zeta sh\zeta}{\Delta^2} \frac{\partial A_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 A_\zeta}{\partial z^2} \\ - \frac{\cos^2 \eta \sin^2 \eta + ch^2 \zeta sh^2 \zeta}{\Delta^4} A_\zeta + \frac{\partial^2 A_\zeta}{\partial \zeta^2} \\ \frac{1}{h^2 \Delta^2} \left(\frac{2 ch\zeta sh\zeta}{\Delta^2} \frac{\partial A_\eta}{\partial \eta} - \frac{2 \cos\eta \sin\eta}{\Delta^2} \frac{\partial A_\zeta}{\partial \zeta} \right) \\ - \frac{\cos^2 \eta \sin^2 \eta + ch^2 \zeta sh^2 \zeta}{\Delta^4} A_\eta + \frac{\partial^2 A_\eta}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 A_\eta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 A_\eta}{\partial z^2} \\ \frac{1}{h^2 \Delta^2} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

A.3. Les fonctions de Mathieu

Ici encore, nous ne présentons que les résultats que nous utilisons dans ce mémoire. On trouve de plus amples développements dans la littérature.

A3.1. Équation de Helmholtz en coordonnées elliptiques

On rappelle que :

$$\begin{cases} x_1 = hch\zeta \cos\eta \\ x_2 = hsh\zeta \sin\eta \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

Utilisons la notation complexe :

$$\begin{cases} z = x_1 + ix_2 \\ \bar{z} = x_1 - ix_2 \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

alors :

$$z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{et} \quad 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \quad (\text{B.32})$$

De plus, (B.30) et (B.31) permettent d'écrire :

$$\begin{cases} z = hchE \\ \bar{z} = hch\bar{E} \end{cases} \quad \text{ou} \quad E = \zeta + i\eta \quad (\text{B.33})$$

Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{hshE} \frac{\partial}{\partial E} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{hsh\bar{E}} \frac{\partial}{\partial \bar{E}} \quad (\text{B.34})$$

et :

$$4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{h^2 shE sh\bar{E}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \quad (\text{B.35})$$

Or:

$$shE sh\bar{E} = sh(\zeta + i\eta)sh(\zeta - i\eta) = ch^2\zeta - \cos^2\eta \quad (\text{B.36})$$

On obtient finalement, en utilisant (B.32) et (B.35) :

$$\frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} = \frac{1}{h^2(ch^2 \zeta - \cos^2 \eta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \quad (\text{B.37})$$

Donc l'équation de Helmholtz s'écrit en coordonnées elliptiques :

$$\frac{1}{h^2(ch^2 \zeta - \cos^2 \eta)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right) + k^2 \phi = 0 \quad (\text{B.38})$$

A.3. 2. Équation de Mathieu et équation de Mathieu modifiée

Pour résoudre (B.38), on utilise une méthode de séparation de variables. On pose :

$$\phi(\zeta, \eta) = \phi_\zeta(\zeta) \phi_\eta(\eta) \quad (\text{B.39})$$

d'où, en reportant dans (B.38) :

$$\frac{\phi_\zeta^N}{\phi_\zeta} + k^2 h^2 ch^2 \zeta = k^2 h^2 \cos^2 \eta - \frac{\phi_\eta^N}{\phi_\eta} \quad (\text{B.40})$$

Le premier membre de (B.40) ne dépend que de ζ , et son second membre de dépend que de η . Par conséquent, on pose qu'ils sont égaux à une constante $\bar{\gamma}$. Alors (B.40) nous permet d'écrire :

$$\phi_\eta^N + (\bar{\gamma} - k^2 h^2 \cos^2 \eta) \phi_\eta = 0 \quad (\text{B.41})$$

et :

$$\phi_\zeta^N + (\bar{\gamma} - k^2 h^2 \cos^2 \zeta) \phi_\zeta = 0 \quad (\text{B.42})$$

(B.41) est appelée *équation de Mathieu*. Si on remplace ζ par $i\zeta$ dans (B.42), on obtient (B.41). Par conséquent, (B.42) est appelée *équation de Mathieu modifiée*.

3. Fonctions de Mathieu et fonctions de Mathieu modifiées

- Les solutions de (B.41) s'écrivent sous la forme :

$$\phi_{\eta}(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \{a_m^e S_m^e(kh, \cos\eta) + b_m^e F_m^e(kh, \cos\eta)\} \quad \bar{\gamma} = \bar{\gamma}_m^e, m = 0, 1, \dots$$

$$\phi_{\eta}(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \{a_m^0 S_m^0(kh, \cos\eta) + b_m^0 F_m^0(kh, \cos\eta)\} \quad \bar{\gamma} = \bar{\gamma}_m^0, m = 1, 2, \dots \quad (\text{B.43})$$

$S_m^e(kh, \cos\eta)$ et $S_m^e(kh, \cos\eta)$ sont les fonctions de Mathieu de première espèce et d'ordre m , respectivement paires et impaires. Ce sont des fonctions périodiques, de période π ou 2π , selon que m est pair ou impair. $F_m^e(kh, \cos\eta)$ et $F_m^e(kh, \cos\eta)$ sont les fonctions de Mathieu de deuxième espèce et d'ordre m . Ces fonctions ne sont pas périodiques.

- Les solutions de (13) s'écrivent sous la forme :

$$\phi_{\zeta}(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \{c_m^e J_m^e(kh, \cos\eta) + d_m^e N_m^e(kh, \cos\eta)\} \quad \bar{\gamma} = \bar{\gamma}_m^e, m = 0, 1, \dots$$

$$\phi_{\zeta}(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \{c_m^0 J_m^0(kh, \cos\eta) + d_m^0 N_m^0(kh, \cos\eta)\} \quad \bar{\gamma} = \bar{\gamma}_m^0, m = 1, 2, \dots \quad (\text{B.44})$$

$J_m^e(kh, ch)$ et $J_m^0(kh, ch\zeta)$ sont les fonctions de Mathieu modifiées de première espèce et d'ordre m , respectivement paires et impaires. Ce sont des fonctions périodiques, de période π ou 2π , selon que m est pair ou impair.

$N_m^e(kh, ch\zeta)$ et $N_m^0(kh, ch\zeta)$ sont les fonctions de Mathieu modifiées de deuxième espèce et d'ordre m . Ces fonctions ne sont pas périodiques.

B.4. Références

- [1] A. Angot, *Compléments de Mathématiques à l'Usage des Ingénieurs de l'Electrotechnique et des Télécommunications*. Collection technique et scientifique du C.N.E.T., 1961.
- [2] N.W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*. Oxford University Press, 1947.

Annexe C

Publications internationales dans le cadre de cette thèse

1. **R. Bedra**, S. Bedra, S. Benkouda, and T. Fortaki, "Efficient full-wave analysis of resonant modes of circular microstrip antenna printed on isotropic or uniaxially anisotropic substrate," *Wireless personal communications*, vol. 81, pp. 239-251, 2015.
2. **R. Bedra**, S. Bedra, and T. Fortaki, "Analysis of elliptical-disk microstrip patch printed on isotropic or anisotropic substrate materials," *International Journal of Microwave and Wireless Technologies*, vol. 8, pp. 251-255, 2016.
3. S. Bedra, **R. Bedra**, S. Benkouda, and T. Fortaki, "Efficient CAD Model to Analysis of High Tc Superconducting Circular Microstrip Antenna on Anisotropic Substrates," *Advanced Electromagnetics*, vol. 6, pp. 40-45, 2017.
4. S. Bedra, **R. Bedra**, S. Benkouda, and T. Fortaki, "Superstrate loading effects on the resonant characteristics of high Tc superconducting circular patch printed on anisotropic materials," *Physica C: Superconductivity and its Applications*, vol. 543, pp. 1-7, 2017.

ملخص:

الهدف من هذه الأطروحة هو تصميم نموذج هوائيات ذات شريط مدقق مصنوعة من ناقل طبيعي أو فائقة الناقلية مع وبدون طبقة واقية باستخدام طريقتين مختلفتين: نموذج التجويف القائم على المعرفة الكهرومغناطيسية والنهج الطيفي، جنباً إلى جنب مع الشروط الحدودية للمقاومة المركبة. تم اختيار الطريقة الأولى، لأنها على عكس الأساليب الصارمة، توفر فهمًا نوعيًا بالإضافة إلى ذلك تتطلب تطويرات رياضية قصيرة نسبيًا. أما الطريقة الثانية فقد استعملت لدراسة خصائص الرنين لهوائي دقيق ذو شكل دائري فائق التوصيل مع طبقة واقية، بحيث يمكن للطريقة التعامل مع أوضاع وسائط انتشار أعلى. يتم تحديد ودراسة تردد الرنين والنطاق الترددي ونمط الإشعاع كدالة في المعلمات الكهربائية والفيزيائية للهوائي مع مراعاة تباين أحادي المحور في العزل الكهربائي. تمت دراسة النتائج العددية لكل بنية ومقارنتها بالبيانات النظرية والتجريبية الواردة في المراجع.

كلمات مفتاحية - هوائيات ذات شريط مدقق؛ أشرطة فائقة الناقلية؛ طبقة واقية؛ وسط متباين الخواص؛ خصائص الرنين.

Abstract

The aim of this thesis is the analysis of microstrip antennas fabricated with perfectly conducting and superconducting patches with and without a protecting layer using two different methods: the cavity model based on electromagnetic knowledge and the spectral approach in conjunction with the complex resistive boundary conditions. The first method is chosen because, unlike rigorous methods, it provides a qualitative understanding in addition to requiring relatively short mathematical developments. The second method is reserved for studying the resonance characteristics of a high critical temperature superconducting circular microstrip patch with a protecting layer. Numerical results are presented for the fundamental mode as well as for high order modes. A parametrical study is achieved in order to quantify the influence of some electrical and physical parameters on the antenna performances taking into account the uniaxial anisotropy in the dielectric. The numerical results of each structure are compared with the theoretical and experimental data reported in the open literature.

Keywords - *Microstrip antennas; superconducting films; resonance characteristics; protecting layer; anisotropic substrates.*

Résumé

L'objectif de cette thèse est l'analyse des antennes microrubans fabriquées à base de patches parfaitement conducteurs et supraconducteurs avec et sans couche protectrice utilisant deux méthodes différentes : le modèle de la cavité basé sur les connaissances électromagnétiques et l'approche spectrale conjointement avec les conditions aux limites de la résistivité complexe. La première méthode est choisie puisque, contrairement aux méthodes rigoureuses, elle fournit une compréhension qualitative en plus de requérir des développements mathématiques relativement courts. La deuxième méthode est réservée à l'étude des caractéristiques de résonance d'un patch microbande circulaire supraconducteur à haute température critique avec une couche protectrice. Des résultats numériques sont présentés pour le mode fondamental aussi bien que pour les modes d'ordre supérieur. Une étude paramétrique est menée pour quantifier l'influence de certains paramètres électriques et physiques sur les performances de l'antenne en tenant compte de l'anisotropie uniaxiale dans le diélectrique. Les résultats numériques de chaque structure sont comparés aux données théoriques et expérimentales reportées dans la littérature ouverte.

Mots Clés - Antennes microbandes ; films supraconducteurs ; caractéristiques de résonance ; couche protectrice ; substrats anisotropes.