

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
**Université de Batna -2-**  
**Faculté de Technologie**  
**Département de Mécanique**



**THÈSE**

Présentée pour l'obtention du diplôme de  
**DOCTORAT en SCIENCES**  
Spécialité: Génie Mécanique  
Option: Construction Mécanique

Par

**Mr BENDAOU MESSAOUD**

**Thème**

---

**Etude de la variation du coefficient de conductivité  
thermique lors du poinçonnement de la couche  
transverse isotrope**

---

Soutenue le 28/06/2018

Devant le jury:

Dr BRIOUA Mourad	Prof.	Université de Batna -2-	Président
Dr SEGHIR Kamel	M.C.A	Université de Batna -2-	Rapporteur
Dr BENBOUTA Rachid	Prof.	Université de Batna -2-	Co-rapporteur
Dr BELBACHA El-Djemai	Prof.	Université de Batna -1-	Examineur
Dr ZEDIRA Hamma	Prof.	Université de Khenchela	Examineur
Dr BECHKI Djamel	M.C.A	Université d'Ouargla	Examineur

## ملخص

إن الطريقة الشبه تحليلية التي طبقت في هذا البحث من اجل اكتشاف مدى تأثير معامل الناقلية الحرارية على توزيع الاجهادات الناظمة على مستوى سطح التلامس بين الطبقة المرنة و الطابع الاسطواني الصلب وذلك لأخذ بعين الاعتبار فعالية الحقل الحراري الناتج عن هذه العملية على الاجهادات الناظمة. إن حل المشكلة على مستوى سطح التلامس المرن تحت تأثير الحرارة يكمن في طبيعة المعادلات التكاملية المستعملة و المحققة لشروط الحقل الحراري والمرن في نفس الوقت بحيث اختزلت هذه الاخيره إلى معادلة تكاملية واحدة. والتي تنقسم إلى جزئين أساسيين منفصلين تماما عن بعضهما و هما:  
- الجزء الميكانيكي الخالص.  
- الجزء الحراري المؤثر من الناحية الميكانيكية.  
ومن بين المنحنيات المرسومة يمكننا إيجاد التغيرات الحاصلة في معامل الناقلية الحرارية في الاتجاه العمودي (Z) خلال عملية الطبع الحاصلة على مستوى التلامس بأخذ قيم مختلفة لنصف القطر (ρ).

**مفردات ذات مدلول:** الناقلية الحرارية، الطبقة المرنة الموحدة الخواص ، الطابع الاسطواني الصلب.

## Résumé

Une méthode semi analytique est décrite pour trouver l'influence du coefficient de la conductivité thermique sur la répartition des contraintes normales dans la surface de séparation d'une couche élastique isotrope, sollicité par un poinçon cylindrique rigide. L'effet du champ thermique sur les contraintes normales dans la superficie de contact des deux corps est également considéré. La solution du problème thermo élastique à l'interface du contact poinçon-couche élastique est trouvée. Le problème formulé en termes d'équations intégrales satisfaisant les conditions aux limites des champs élastique et thermique à la fois sont réduites en une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.

Cette dernière est décomposée en deux parties indépendantes

- la partie proprement mécanique.
- la partie thermique influente sur le coté mécanique.

A partir des résultats graphiques, nous pouvons déterminer la variation de la conductivité dans la direction verticale (Z) pendant l'opération du poinçonnement et ce pour chaque valeur du rayon (ρ) de la zone de contact.

**Mots clés :** conductivité thermique, couche élastique isotrope, poinçon cylindrique rigide.

## Abstract

A semi-analytical method is described to find the influence of the coefficient of thermal conductivity on the stress distribution normal in the parting surface of an isotropic elastic layer biased by a rigid cylindrical punch. The effect of the thermal field on the normal stresses in the area of contact between the two bodies is also considered. The solution of the problem thermo elastic interface of the contact layer is elastic punch found. The problem formulated in terms of Integral equations satisfying the boundary conditions of the elastic fields thermal and both are reduced to a fredholm integral equation of the second kind. The latter is split into two independent parts:

- Part purely mechanical.
- Influential thermal part of mechanical side.

From the graphical results, we can determine the variation of the conductivity in the vertical direction (z) during operation of indentation and this for each value of radius (p) of the contact zone.

**Keywords:** thermal conductivity, isotropic elastic layer, rigid cylindrical punch.

# Remerciements

Durant les années de préparation de ma thèse, j'ai eu le plaisir de rencontrer et de côtoyer de nombreuses personnes que je tiens à remercier ici, car leur aide m'a été précieuse :

## **Un grand merci :**

À Mr K. SEGHIR, Maître de conférences, encadreur, et Mr R. BENBOUTA, Professeur, Co-encadreur, pour toutes leurs orientations et leurs précieux conseils qui m'ont permis de concrétiser ce travail, à qui j'exprime ma profonde gratitude et reconnaissance.

À Mr M. BRIOUA, Professeur à l'Université de Batna2, d'avoir accepté la présidence de ce jury.

Je remercie également les membres du jury, Messieurs :

Mr El-Dj. BELBACHA, Professeur à l'Université de Batna 1, Mr H. ZEDIRA, Professeur à l'Université de Khenchela, Mr DJ. BECHKI, Maître de conférences à l'Université d'Ouargla, d'avoir accepté d'être membres du jury et d'évaluer mon travail.

Je remercie aussi mes collègues du département de mécanique qui m'ont encouragé, en particulier mes amis, Dr. M. Lahbari et Dr. H. Ameddah.

Je souhaite finalement remercier tous ceux qui m'ont apporté leur soutien amical.

# SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Position du problème</b> .....	4

## **Chapitre 1 Etude bibliographique**

1.1 Historique .....	6
1.2 Applications aux multi matériaux.....	8
1.3 Présentation du problème thermique.....	9
1.3.1 Les sources de chaleur.....	10
1.3.2 Les modèles thermiques.....	10
1.3.3 Les conditions aux limites.....	11
1.3.4 Dissipation d'énergie à l'interface.....	11
1.4 Le couplage thermomécanique.....	12

## **Chapitre 2 Relations fondamentales relatives au problème axisymétrique (Couche transverse –isotrope)**

2.1 Solution générale du problème d'élasticité sous chargement mécanique.....	14
2.1.1 Expressions générales des contraintes et déplacement.....	16
2.2 Solution générale du problème d'élasticité sous chargement thermique.....	18
2.2.1 Expressions générales des contraintes et déplacements thermiques .....	19

## **Chapitre 3 Solutions aux limites du problème d'élasticité axisymétrique sous chargement mécanique**

3.1 Hypothèses.....	21
3.2 Détermination des contraintes (Couche transverse isotrope) .....	22
3.2.1 Formulation du problème.....	22
3.2.2 Méthode de résolution aux limites du problème .....	23

3.2.3	Méthodologie de résolution du système d'équations algébriques .....	24
3.2.4	Etude du cas général de deux poinçons de différents rayons.....	27
3.2.5	Etude de cas particuliers qui découlent directement du cas général .....	30
3.2.5.1	Cas de poinçons de même géométrie.....	30
3.2.5.2	Cas d'un seul poinçon.....	31
3.3	Cas de matériaux homogènes isotropes .....	31
3.3.1	Cas de poinçons de même géométrie.....	32
3.3.2	Cas d'un seul poinçon.....	32
3.3.3	Cas de demi-espèce.....	33
3.3.4	Etude du cas général de deux poinçons de différents rayons.....	33

## **Chapitre 4                    Solution aux limites du problème thermo-élastique**

4.1	Généralités sur la conduction thermique .....	38
4.1.1	Equation de la conduction thermique dans un solide.....	39
4.1.2	Distribution stationnaire de la température dans un corps .....	40
4.1.3	Equation de la convection.....	40
4.1.4	Conditions aux limites .....	41
4.1.5	Méthodes de résolution de l'équation de conduction de la chaleur.....	42
4.1.5.1	Méthode des potentiels.....	42
4.1.5.2	Méthodes semi- analytiques : transformation intégrales.....	42
4.1.5.3	Méthodes numériques.....	43
4.1.6	Avantages et inconvénients .....	43
4.1.7	Effets de la chaleur sur les matériaux.....	44
4.2	Détermination de la température et des contraintes thermiques (Couche transverse isotrope)...	45
4.2.1	Position du problème .....	45
4.2.2	Solution aux limites du problème de conduction de la chaleur.....	45
4.2.3	Détermination de la répartition de la température .....	51
4.2.4	Détermination des contraintes et déplacements thermiques.....	52
4.3	Position du problème de la thermoélectricité .....	53
4.3.1	Méthode de résolution aux limites du problème thermo élastique.....	53

4.3.2	Résolution du système d'équations algébriques.....	55
4.3.3	Résolution du système d'équations intégrales gouvernant le problème de la Thermo-élasticité.....	60
4.3.4	Découplage des problèmes mécanique et thermique.....	63

## **Chapitre 5          Calcul numérique et résultats graphiques**

5.1	Calcul numérique du Problème mécanique .....	66
5.1.1	Matériau transverse isotrope .....	66
5.1.1.1	Calcul des contraintes aux interfaces de contactes poinçons - couche .....	66
5.1.2	Cas de matériaux homogène isotrope .....	70
5.1.2.1	Calculs des Contraintes de contact (Couche homogène isotrope).....	70
5.1.2.2	Cas de l'Espace semi infini .....	72
5.2	Résolution numérique du problème thermo élastique (Couche transverse isotrope).....	73
5.2.1	L'influence de coefficient de la conductivité thermique $\lambda_z$ sur la température.....	73
5.2.2	Variations de la distribution des contraintes pour différentes valeurs de $\lambda_z$ .....	76
	<b>Conclusion générale</b> .....	79
	<b>Références bibliographiques</b> .....	82

### **Annexes**

## **Liste des Figures**

<b>Figure 1</b> Croquis schématique du problème thermo-élastique .....	<b>04</b>
<b>Figure 4.1</b> Croquis schématique du problème thermique.....	<b>45</b>
<b>Figure 5.2</b> Distribution des contraintes non-dimensionnelle aux interfaces du contact.....	<b>69</b>
<b>Figure 5.3</b> Distribution des contraintes non-dimensionnelle dans la zone de contact.....	<b>70</b>
<b>Figure 5.4</b> Distribution des contraintes non dimensionnelles dans la zone du contact (Matériau homogène isotrope).....	<b>71</b>
<b>Figure 5.6</b> Courbes représentatives de la distribution de la température dans les zones du contact .....	<b>74</b>
<b>Figure 5.7</b> Courbes de répartition de contraintes mécanique due au champ thermique dans les zones du contact.....	<b>78</b>

## **Introduction générale**

Depuis fort longtemps les problèmes de la théorie de l'élasticité sont des plus importants en mécanique en particulier ceux concernant le contact. En effet, la concentration des efforts, la fatigue du matériau se produit souvent dans la zone de contact entre éléments de construction. C'est pourquoi la zone de contact est classée zone critique.

L'avance technologique a connu un progrès énorme dans beaucoup de domaines. Dans le domaine du transport, les grandes vitesses des avions modernes donnent lieu à un chauffage aérodynamique produisant des contraintes thermique internes qui réduisent les résistances de la structure. Les vitesses considérables des véhicule routiers nécessitent des études profondes dans le choix des matériaux qui travaillent en contact, et ce afin de diminuer le risque et d'augmenter la sécurité. Malgré, les moyens dont on dispose la mécanique de contact reste impuissante devant certaines questions de répartition de température et le calcul des contraintes thermo-élastiques tenant compte de l'hétérogénéité dans la zone contact.

Les matériaux (anisotrope) sont de plus en plus utilisés dans des différentes industries (mécanique, électronique,...etc.). Pour s'en servir dans le bon sens il est impératif de développer de ces nouvelles études théorique permettant de prendre en considération l'environnement des nouveaux matériaux qui au fils des années se substituent ou anciens matériaux isotropes pour lesquelles la théorie classique de l'élasticité été capable de faire face et de répandre a beaucoup de problèmes de contact d'ordre mécanique et thermo élastique.

Nous traitons dans la présente contribution, la question de contraintes dans la couche élastique transverse isotrope comprimée sur les surfaces limites par deux poinçons cylindrique sous champ de température stable.

Afin de percevoir l'effet de la température sur les contraintes élastiques aux niveaux des surfaces de contacts, il est nécessaire de déterminer d'abord la répartition de la température, en fonction de coefficient de conductivité de chaleur poinçons-couche.

Ce travail a été effectué selon les étapes suivantes :

### **Chapitre 1 :**

Chaque travail est précédé d'une étude théorique (étude bibliographique) dans la nôtre cela nous a permis de voir les procédés de calcul utilisés, les difficultés rencontrés dans les plus récents travaux de recherche dans le domaine du contact.

### **Chapitre 2 :**

Les solutions fondamentales jouent un rôle important dans les études théoriques et appliquées et peuvent être utilisées pour construire de nombreuses solutions analytiques lorsque les conditions aux limites sont imposées. Dans ce chapitre sont regroupées les relations fondamentales utilisées pour résoudre le problème de contact axisymétrique de couche transverse isotrope sous les chargements mécanique et thermique.

### **Chapitre 3 :**

Nous commençons par résoudre le problème mécanique de la couche transverse-isotrope comprimée sur ses faces limites par deux poinçons cylindriques rigides. Nous déduisant au cours du traitement, la solution pour le cas de la couche homogène-isotrope par simple passage aux limites des expressions lorsque les coefficients d'anisotropie tendent vers l'unité.

### **Chapitre 4 :**

Ici, la couche transverse-isotrope est chargée par deux poinçons chauffés à la température fixes. Ce qui implique l'effet de chargement mécanique et thermique (thermo-élastique).

Afin de prendre compte des deux effets, nous utilisant la technique de superposition des effets, en applique alors les relations fondamentales (chapitre1) aux conditions aux limites du problème. On sera donc conduit dans un premier temps a la résolution de l'équation de La place et déterminé la répartition de la température afin d'en utiliser pour le calcul des contraintes thermiques.

Enfin découplé l'effet mécanique de l'effet thermomécanique est le but de ce présent travail, cela nous permettra de voir l'influence de la chaleur sur les contraintes mécaniques.

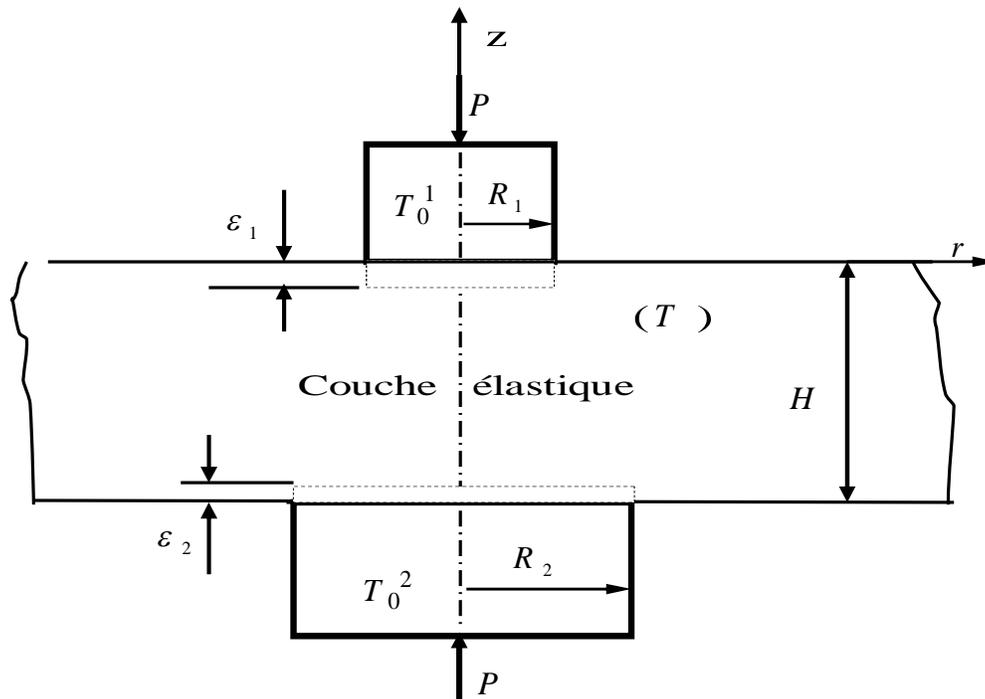
### **Chapitres 5 :**

Les résultats graphiques relatifs aux formules closes des répartitions des contraintes mécaniques et thermomécaniques ainsi que la distribution de la température sont interprétés et discutés dans ce volet.

## Position du Problème

La détermination des contraintes de contact tenant compte des champs de températures sont importantes pour l'étude de la résistance et le choix correct des matériaux des pièces de machines et des éléments de construction dans leur zone d'interaction . On se propose d'étudier l'effet du champ de température sur les contraintes élastiques au niveau des surfaces de contacts d'une couche transverse – isotrope comprimée par deux poinçons cylindriques rigides portées à des températures fixe.

Le problème ainsi passé est axisymétrique est étudié dans le système de coordonnées cylindrique  $(r, \theta, z)$  qui coïncide avec la surface limite supérieure de la couche et l'axe de symétrie de la structure (voir Fig.1).



**Fig.1.** croquis schématique du problème thermo-élastique

Soient les Conditions aux limites :

$$\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = h_0 (T_0^1 - T) \quad : (0 \leq r < R_1, \quad z = 0)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad : (r > R_1, \quad z = 0)$$

$$\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = h_0 (T - T_0^2) \quad : (0 \leq r < R_2, \quad z = -H)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad : (r > R_2, \quad z = -H)$$

$$1) \quad U_z^{(P)} + U_z^{(T)} = -\varepsilon_1 \quad : (0 \leq r \leq R_1, \quad z = 0)$$

$$2) \quad \tau_{rz}^{(P)} + \tau_{rz}^{(T)} = 0 \quad : (0 \leq r \leq \infty, \quad z = 0)$$

$$3) \quad \sigma_z^{(P)} + \sigma_z^{(T)} = 0 \quad : (r > R_1, \quad z = 0)$$

$$4) \quad U_z^{(P)} + U_z^{(T)} = +\varepsilon_2 \quad : (0 \leq r < R_2, \quad z = -H)$$

$$5) \quad \tau_{rz}^{(P)} + \tau_{rz}^{(T)} = 0 \quad : (0 \leq r \leq \infty, \quad z = -H)$$

$$6) \quad \sigma_z^{(P)} + \sigma_z^{(T)} = 0 \quad : (r > R_2, \quad z = -H)$$

$\lambda_z$  : Coefficient de conductibilité thermique.

$T_0^1, T_0^2$  : Températures des poinçons.

$h_0$  : Conductivité au contact.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  : Représentent les profondeurs de pénétration des poinçons dans la couche élastique.

$H$  : étant l'épaisseur de la couche élastique.

Les surfaces limites en dehors des zones de contact sont libres des forces extérieures, les contraintes tangentielles dans les zones de contact sont égales à zéro. La surface latérale des poinçons est maintenue constante.

# Chapitre 1

## Etude bibliographique

### 1.1 Historique

L'usure et le chauffage sont les aspects qui affectent la performance des pièces en contact. La détermination du champ de température au sein d'un contact est essentielle pour contrôler la défaillance induite thermiquement au sein du contact.

La conduction à travers une interface solide-solide fait partie du chemin d'écoulement de chaleur dans des nombreuses applications conduisant à des comportements non uniformes. L'exemple du mécanisme d'embrayage et de freinage en est un, la chaleur génère à l'interface une distorsion qui conduit à l'instabilité thermo-élastique par friction.

Les conditions aux limites idéalisées conduisent à des problèmes stationnaires mal posées. De nombreuses études ont été développées concernant les problèmes de contacts de corps élastiques. Les contraintes à l'interface d'un solide semi-infini lorsque un corps rigide de forme prescrite est pressé sur sa surface libre et associé au nom de Boussinesq discuté dans le traite [1]. Un compte rendu détaillé du problème est formulé dans Sneddon [2] ainsi que des Green et Zerna [3].

Les contraintes thermiques aux interfaces des contacts sont souvent accompagnées de pression, la taille de la zone de contact dépend de l'amplitude et de la direction du flux de chaleur entre les corps. Shibuya et al. [4] ont également étendu cette technique pour déterminer la répartition des contraintes dans une couche élastique indentée par une paire de poinçons annulaires rigides et plats.

Keer et Fu [5] ont également étudié le problème de distribution des contraintes thermoélastiques dues à la charge combinée de poinçons circulaires rigides non symétrique indentant une plaque élastique épaisse. Ishihara et al. [6] discutent le problème de flexion thermo élastique transitoire en utilisant le théorème d'incrément de déformation et déterminent la température et la déformation thermo élastique pour

les processus de chauffage et de refroidissement dans une plaque mince circulaire soumise à une distribution de chaleur partiellement distribuée et axisymétrique.

Hany et al. [7] ont résolu le problème bidimensionnel d'une plaque épaisse dont les surfaces inférieures et supérieures sont exemptes de traction et soumises à une température donnée dans le cadre de la théorie de la thermo élasticité avec un temps de relaxation. Les fonctions potentielles ainsi que les techniques de transformation de Laplace et Hankel sont utilisées pour dériver la solution dans le domaine.

Rokne et al. [8] ont trouvé la solution d'un problème de type Boussinesq axisymétrique pour un demi-espace sous chauffage optimal de profil arbitraire. Sharma et al. [9] ont étudié le comportement de la plaque épaisse thermo élastique axisymétrique sous charge latéral et obtenu les résultats pour les déplacements radiaux et axiaux et le changement de température ont été calculés numériquement et illustrés graphiquement pour différentes théories de thermoélasticité généralisé.

Yoshihito. [10] montre que le problème axisymétrique de la thermo élasticité stable avec génération de chaleur non uniforme sur la région, Cette méthode peut également être appliquée à des problèmes de contraintes thermiques dans le cadre de la génération de chaleur compliquée. Cependant, pour la chaleur générale le domaine doit être divisé en petites zones dans lesquelles les distributions de la génération de chaleur satisfont approximativement l'équation de Laplace. Kulkarni et al. [11] ont déterminé le déplacement et les contraintes thermiques dans une plaque circulaire épaisse en raison de l'apport de chaleur arbitraire sur la surface supérieure ou la surface inférieure et à température nulle et le bord circulaire fixe est isolé thermiquement.

Récemment, Noda et al. [12] ont examiné une plaque circulaire épaisse et infinie et discutent des contraintes thermiques dues au flux de chaleur arbitraire sur les surfaces supérieure et inférieure, Les résultats numériques sont effectués pour différentes plaques de métal.

Nowacki [13] a déterminé les contraintes thermiques en régime permanent dans une plaque circulaire soumise à une distribution de température axisymétrique sur la face supérieure avec une température nulle sur la face inférieure et le bord circulaire. Roy Choudhary [14,15] et Wankhede [16] ont déterminé les contraintes thermiques quasi-

statiques dans les plaques circulaires minces. Gogulware et Deshmukh [17] ont déterminé les contraintes thermiques dans une plaque mince circulaire avec sources de chaleur. Tikhe et Deshmukh [18] ont également étudié la déformation thermo élastique transitoire dans une plaque fine circulaire.

Qian et Batra [19] ont étudié la déformation thermo élastique transitoire d'une plaque épaisse fonctionnellement graduée. Nasser et M.El-Maghry [20,21] a résolu le problème bidimensionnel de la plaque épaisse avec sources de la chaleur en thermo-élasticité généralisée. Ruhi et al [22] ont réalisé une analyse thermo-élastique de cylindres finis à paroi épaisses de matériaux fonctionnels et obtenu les résultats de contrainte de déformation et de déplacement à travers l'épaisseur et la longueur en fonction de la pression interne et de la charge thermique.

## **1.2 Applications aux multi matériaux**

Ces dernières années, l'intérêt s'est concentré également sur la solution des problèmes de contact de matériaux anisotropes, et ce pour leurs applications d'impact liées aux matériaux composites. Afin d'y aboutir, comme le confirme les travaux récents [23,24] on est souvent amenés à résoudre deux problèmes au lieu d'un seul (isotrope transverse et orthotrope). Beaucoup plus disponible sont les solutions des chargements de contact de demi espace, alors qu'aujourd'hui on s'intéresse plus aux problèmes des couches d'épaisseurs finis.

Récemment Swan son et al [25] utilise la méthode de Willis permanent [26] (double transformation de Fourier) et propose comme solution celle de Turner [27] pour les matériaux isotropes dans laquelle il remplace le module d'élasticité par une combinaison de modules pour matériaux isotrope transverse. Batra et Vel [28] utilisent le formalisme de Stroh [29] pour étudier les déformations infinitésimales dans une couche anisotrope; afin de stabiliser la convergence des séries solutions, il finira par résoudre au lieu d'un, deux problèmes de contact (l'un isotrope et l'autre orthotrope).

### 1.3 Présentation du problème thermique

Le transfert thermique entre deux solides en contact est d'un grand intérêt physique et technologique. En effet, dans un matériau non contraint avec des bords libres, la variation de température n'entraîne pas de champ de contraintes dans le massif, au contraire, si les conditions aux limites s'opposent au champ de déplacement, la dilatation provoque la génération de contraintes qui s'ajoutent au champ existant (les effets d'échauffement dus à la déformation sont négligeables) dilatation thermique linéaire.

Un barreau isotrope soumis à une variation de température  $\Delta T$ , s'allonge d'une quantité :

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T .$$

Son élongation unitaire ( $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$ ) a pour expression :

$$\varepsilon = \alpha \cdot \Delta T$$

Ainsi, le coefficient de dilatation thermique linéaire ( $\alpha$ ) peut se définir comme le rapport de l'élongation unitaire de température. Graphiquement, il représente la pente de la courbe  $\frac{\Delta L}{L_0} f(\Delta T)$ .

Il est en général donné pour un domaine de température limité. Le coefficient de dilatation est un paramètre intrinsèque au matériau (dépendance vis-à-vis de la nature chimique donc des forces inter atomiques). Du fait de l'anharmonicité des potentiels atomiques, une augmentation de température s'accompagne d'une dilatation volumique macroscopique du solide. Un matériau à caractère covalent (liaisons fortes) présente généralement de faibles valeurs de  $\alpha$ . Des anisotropies de dilatation peuvent être observées dans les matériaux multi phases (orientation préférentielle de certaines phases).

De nombreuses études ont été effectuées sur la détermination de la répartition de la chaleur à l'interface des corps en contact. Seulement y a eu beaucoup d'hypothèses simplificatrices à chaque fois et les résultats ne coïncidaient pas avec la réalité physique du problème. Les hypothèses admises peuvent être du genre ; contact lisse (parfait) ou avec aspérités ainsi que le régime thermique, permanent ou transitoire.

Les études bibliographiques montrent que suivant le cas, le problème peut être traité de façon spécifique. Dans le cas de régime permanent, on utilise généralement la notion de résistance thermique de contact avec des expressions différentes selon que l'on considère un mouvement d'un des deux corps ou non. En revanche, dans le cas du régime transitoire, la résolution des équations (de la chaleur et les conditions aux limites) est nettement plus compliquée.

L'autre paramètre important est celui de la génération de chaleur. Il faut noter la différence entre le paramètre décrivant le partage du flux de chaleur entre deux corps en contact, et le paramètre représentant la part du flux de chaleur qui est générée dans l'un des deux corps. L'autre paradoxe est la vitesse infinie de la propagation de la chaleur que prévoit l'équation de la conduction de la chaleur (type parabolique).

Lord et Shulman [30] proposent une théorie « L-S » prévoyant un temps de relaxation dans l'équation de conduction généralisée de Maxwell Cattaneo's, dite première généralisation à la théorie couplée d'élasticité.

### **1.3.1 Les sources de chaleur**

Les sources de chaleur (appelées également puits de chaleur) correspondent à la source interne d'énergie provenant de la contribution mécanique.

Il existe deux sources principales de chaleur :

- la déformation plastique.
- le contact avec frottement.

### **1.3.2 Les modèles thermiques**

Lors de la résolution du problème thermique, l'aspect le plus difficile à modéliser est la transmission de la chaleur au niveau du contact. Cette transmission peut se décomposer en deux parties:

- la conduction thermique à travers l'interface de contact lorsque les températures des surfaces des corps en contact sont différentes
- la dissipation d'énergie (et donc de chaleur) dans le contact par frottement.

Le problème de conduction thermique est le plus facile à traiter. Pour cela un modèle de conductance thermique de contact est souvent utilisé.

Pour le problème de la génération de flux de chaleur par frottement, la quantité facilement mesurable a priori est l'énergie totale dissipée à l'interface par frottement. Le problème se pose ensuite de savoir comment cette énergie totale se répartit dans les corps en contact. Ce problème étant très complexe, plusieurs approches sont possibles.

### **1.3.3 Les conditions aux limites**

Les conditions limites à appliquer sur la frontière extérieure des corps en contact peuvent être de trois types :

- Une frontière adiabatique : frontière sur laquelle le flux thermique l'a traversant est nul.
- Une frontière convective: frontière sur laquelle un flux par convection est imposé.

La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre la surface du solide et un liquide ou un gaz environnant. Le flux de convection est fonction de la température à la frontière, de la température du milieu infini (gazeux ou liquide) avec lequel il y a échange de chaleur ainsi que d'un coefficient issu de l'expérimentation appelé coefficient de convection.

- Une frontière à température imposée.

### **1.3.4 Dissipation d'énergie à l'interface**

Une majorité des analyses conventionnelles de la génération de température par frottement prennent en compte un modèle à deux corps. Il est alors nécessaire de déterminer quelle part de la chaleur générée est transmise dans chacun des deux corps. Celle-ci peut varier dans le temps et dépend de nombreux aspects tels que :

- la nature du contact qui dépend des matériaux en présence, des états de surface, des duretés superficielles,
- des propriétés thermo-physiques des matériaux. Le partage de flux met donc en jeu des phénomènes microscopiques complexes qui dépendent fortement des propriétés tribologiques. Il existe différents modèles permettant de déterminer le partage de flux. Ceux-ci peuvent être rangés dans deux catégories: les modèles thermiques avec contact parfait et les modèles thermiques avec contact imparfait.

## 1.4 Le couplage thermomécanique

Certains auteurs [31] emploient dans le cadre de la thermo élasticité couplée un temps de relaxation nul dans un système d'équations parabolique, la solution est en contradiction avec l'observation physique correspondant à la vitesse infinie de propagation de la chaleur. D'autres auteurs préfèrent ignorer les effets d'inertie en théorie couplée [32] ou en négligeant l'effet d'accouplement. La deuxième généralisation de la théorie couplée de l'élasticité est ce qui est connu comme théorie de thermo élasticité avec deux fois le temps de relaxation dite aussi théorie « G-L » de Green et Lindsay [33]. Muller [34], dans un examen de la thermo élasticité des solides thermo élastiques, propose l'inégalité de production d'enthalpie avec l'aide de ces restrictions construit une classe d'équations constitutives.

Green et Lows [35] ont proposés la généralisation de cette inégalité .Ces équations ont été également obtenues indépendamment par Suhubi [36]. Cette théorie contient deux constantes qui agissent en tant que temps de relaxation et modifier toutes les équations de la théorie couplée, non seulement l'équation de la chaleur. La loi de Fourier classique de la conduction de la chaleur n'est pas violée si le milieu à étudier possède un centre de symétrie. Depuis beaucoup de chercheurs l'on utilisée à des fins bien déterminés [37-39].

Les éléments structuraux sont soumis à des variations de températures qui peuvent influencer leurs propriétés mécaniques même dans un sens approximatif. Sur ce, il est question d'en tenir compte dans l'analyse thermique.

Hasselman et al [40], Youssef et al [41] dans leurs travaux récents ont tenu compte en considérant un plat de couches se composant de divers matériaux, chacune est homogène et isotrope. Quand ce plat, initialement au repos est soudainement chauffé sur les surfaces libres, un écoulement de la chaleur et de champ thermique se produit. Le modèle mathématique thermo élastique généralisé unidimensionnel avec la conductivité thermique variable pour le problème de conduction de la chaleur est construit pour un plat mince posé. Les équations de base sont transformées par Laplace et résolu par une méthode directe. Les transformations de Laplace sont obtenues numériquement. La température, l'effort et les distributions de déplacements sont représentés graphiquement.

Chen et al [42] ont dérivés une solution générale tridimensionnelle compacte pour les matériaux thermo élastiques transversalement isotropes. Peng-Fei Hou et autres [43] Emploient les solutions générales harmoniques compactes des matériaux transversalement isotropes et construisent les solutions fondamentales tridimensionnelles pour une source de chaleur régulière de point sur la surface d'un matériel thermo élastique transversalement isotrope semi infini par trois fonctions harmoniques nouvellement présentées.

M.Kumar et Ku.Uma Hiremath [44] ont considérés le problème de la répartition de température à la surface limite d'une couche élastique homogène et isotrope pressée par un poinçon cylindrique annulaire chauffé. La solution est réduite à la résolution d'une équation intégrale triple. Les équations intégrales triples sont réduites à la solution d'un ensemble infini d'équations simultanées en raison de la singularité dans la région limite du poinçon. Cette imperfection est résolue numériquement et les dix premières racines sont considérées. Les variations de la charge totale sous le poinçon sont montrées graphiquement.

En utilisant la technique différente Keer et Fu [45] ont déterminés les distributions thermo élastiques d'efforts dues au chargement combiné des poinçons symétriques et circulaires dentelant une couche élastique épaisse. La méthode de Shibuya réduit les équations intégrales triples dues aux trois conditions mixtes par parties sur la surface de contact dans un ensemble d'équations simultanées linéaires. Ces équations simultanées sont résolues numériquement.

## Chapitre 2

### Relations fondamentales relatives au problème axisymétrique (couche transverse –isotrope)

#### 2.1 Solution générale du problème d'élasticité sous chargement mécanique

Les composantes du tenseur de contraintes s'expriment par l'intermédiaire des composantes du vecteur déplacement [46, 47] :

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \left[ A_{11} \frac{\partial}{\partial r} + (A_{11} - 2A_{66}) \frac{1}{r} \right] U_r + A_{13} \frac{\partial U_z}{\partial z} \\
 \sigma_z &= A_{13} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) U_r + A_{33} \frac{\partial U_z}{\partial z} \\
 \sigma_\theta &= (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial U_r}{\partial r} + A_{11} \frac{U_r}{r} + A_{13} \frac{\partial U_z}{\partial z} \\
 \tau_{rz} &= A_{44} \left( \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Où les  $A_{ij}$ , sont les constantes d'élasticité du matériau [46,48].

La fonction de contraintes  $\varphi(r, z)$  est introduite sous la forme :

$$\begin{aligned}
 U_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\
 U_z &= k \frac{\partial \varphi}{\partial r}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Où :  $k$  est une constante quelconque.

Substituons les relations (2.1) dans les équations d'équilibre locales (problème d'élasticité axisymétrique) et tenant compte de (2.2), on déduit les équations différentielles suivantes :

$$A_{11}\nabla_1^2\varphi+[A_{44}+k(A_{13}+A_{44})]\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

$$[A_{13}+(1+k)A_{44}]\nabla_1^2\varphi+kA_{13}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

Egalisons ces deux dernières expressions, on obtient.

$$\left(\nabla_1^2+v_i^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_i=0, \quad (i=1,2) \quad (2.3)$$

$$\text{Avec : } \frac{A_{44}+k_i(A_{13}+A_{44})}{A_{11}}=\frac{k_iA_{13}}{A_{13}+(1+k)A_{44}}=v_i^2 \quad (2.4)$$

et

$$\nabla_1^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \quad (2.5)$$

Les paramètres  $v_1^2$  et  $v_2^2$  sont les racines de l'équation suivante obtenue à partir des équations (2.4) par élimination de la constante  $k_i$  ( $i=1,2$ ).

$$A_{44}A_{11}v_i^4+[A_{13}(A_{13}+2A_{44})-A_{44}A_{11}]v_i^2+A_{33}A_{44}=0 \quad (2.6)$$

$k_i$  ( $i=1,2$ ): Valeurs de la constante ( $k$ ), définie de l'égalité (2.4) respectivement pour  $v_i^2$  ( $i=1,2$ ).

Pour la solution des équations (2.3), concernant les domaines de grandes  $d$ 'étendues, il convient d'utiliser la transformation de Hankel d'ordre zéro des fonctions de contraintes  $\varphi(r, z)$ , soit :

$$\bar{\varphi}_i(\xi, z)=\int r\varphi_i(r, z)J_0(\xi r)dr$$

En intégrant les équations différentielles (2.3) conformément aux transformations inverses de Hankel [5,2] des fonctions espèce  $\varphi(r, z)$ .

$$\bar{\varphi}_i(r, z)=\int_0^\infty \xi\bar{\varphi}_i(\xi, z)J_0(\xi r)d\xi \quad (2.7)$$

$J_0$ : étant la fonction de Bessel d'ordre zéro.

On déduit les solutions générales à partir de ces équations différentielles ordinaires suivantes.

$$\frac{\partial^2 \overline{\varphi}_i(\xi, z)}{\partial z^2} - \frac{\xi^2}{(v_i^2)^2} \overline{\varphi}_i(\xi, z) = 0$$

La solution de l'équation (2.7) est donnée par

$$\overline{\varphi}_i(\xi, z) = B_{i1}(\xi) e^{\frac{\xi z}{v_i}} + B_{i2}(\xi) e^{-\frac{\xi z}{v_i}} \quad (2.8)$$

$B_{i1}(\xi)$  et  $B_{i2}(\xi)$  ( $i = 1, 2$ ) : sont des fonctions inconnues d'intégrations à déterminer par les conditions aux limites.

### 2.1.1 Expressions générales des contraintes et déplacements

Ayant trouvé les fonctions  $\varphi_1(\eta)$  et  $\varphi_2(\eta)$  remplaçons leurs expressions dans ceux des déplacements (2.2) puis dans ceux des contraintes (2.1), ce qui donne :

$$U_r = \frac{\partial}{\partial r} [\varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta)]$$

$$U_z = \frac{\partial}{\partial z} [k_1 \varphi_1(\eta) + k_2 \varphi_2(\eta)]$$

$$U_r = - \int_0^\infty \xi^2 [S_1(\xi z) + S_2(\xi z)] J_1(\xi r) d\xi$$

$$U_z = \int_0^\infty \xi^2 \left[ \frac{k_1}{v_1} S_1(\xi z) + \frac{k_2}{v_2} S_2(\xi z) \right] J_0(\xi r) d\xi$$

$$\sigma_z = \int_0^\infty \xi^3 \left[ \frac{d_1}{v_1^2} S_1(\xi z) + \frac{d_2}{v_2^2} S_2(\xi z) \right] J_0(\xi r) d\xi$$

$$\tau_{rz} = -A_{44} \int_0^\infty \xi^3 \left[ \frac{1+k_1}{v_1} S_1(\xi z) + \frac{1+k_2}{v_2} S_2(\xi z) \right] J_1(\xi r) d\xi$$

$$\sigma_r = - \int_0^\infty \xi^3 \left[ \frac{d_3}{v_1^2} S_1(\xi z) + \frac{d_4}{v_2^2} S_2(\xi z) \right] J_0(\xi r) d\xi + \frac{2A_{66}}{r} \int_0^\infty \xi^3 [S_1(\xi z) + S_2(\xi z)] J_1(\xi r) d\xi \quad (2.9)$$

Avec

$$d_i = k_i A_{33} - v_i^2 A_{13} \quad (i = 1, 2)$$

$$d_3 = -k_1 A_{13} + v_1^2 A_{11}$$

$$d_4 = -k_2 A_{13} + v_2^2 A_{11} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
S_1(\xi z) &= B_{11}(\xi)e^{-\frac{\xi z}{\nu_1}} + B_{12}(\xi)e^{\frac{\xi z}{\nu_1}} \\
S_2(\xi z) &= B_{21}(\xi)e^{-\frac{\xi z}{\nu_2}} + B_{22}(\xi)e^{\frac{\xi z}{\nu_2}} \\
S_3(\xi z) &= -B_{11}(\xi)e^{-\frac{\xi z}{\nu_1}} + B_{12}(\xi)e^{\frac{\xi z}{\nu_1}} \\
S_4(\xi z) &= -B_{21}(\xi)e^{-\frac{\xi z}{\nu_2}} + B_{22}(\xi)e^{\frac{\xi z}{\nu_2}}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Nous signalons que dans le cas de l'espace transverse isotrope les modules suivants :

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{(a_{11} - a_{12})[a_{33}(a_{11} + a_{12}) - 2a_{13}^2]} \\
A_{33} &= \frac{a_{11} + a_{12}}{a_{33}(a_{11} + a_{12}) - 2a_{13}^2} \\
A_{13} &= \frac{a_{13}}{a_{33}(a_{11} + a_{12}) - 2a_{13}^2} \\
A_{44} &= \frac{1}{a_{44}} \\
A_{66} &= \frac{A_{11} - A_{13}}{2}, \quad A_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \mu
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\text{Ici : } a_{11} = \frac{1}{E}, \quad a_{33} = \frac{1}{E'}, \quad a_{44} = \frac{1}{\mu'}, \quad a_{12} = \frac{-\delta'}{E}, \quad a_{13} = \frac{-\delta}{E}$$

$E, E'$  : Modules de Young correspondants aux contraintes dans le plan d'isotropie et dans le plan perpendiculaire à celui-ci.

$\delta, \delta'$  : Coefficients de Poisson correspondants aux contraintes lors de la traction dans le plan d'isotropie et dans le plan perpendiculaire à celui-ci.

$\mu'$  : Module de glissement caractérise le glissement des angles entre les directions de plans d'isotropie et les directions perpendiculaires à ces dernières

## 2.2 Solution générale du problème d'élasticité Sous chargement thermique

Dans le cas du matériau transverse isotrope le champ thermique satisfait l'équation différentielle suivante [46,48].

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \lambda_z^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2.13)$$

Les contraintes et les déplacements sont déterminés par les potentiels thermo-élastiques  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  selon les formules suivantes :

$$U_z^{(r)} = -a_1 \left( S_2^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)$$

$$U_r^{(r)} = -a_1 \left( S_1^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right)$$

$$\sigma_z^{(r)} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \quad (2.14)$$

$$\tau_{rz}^{(r)} = - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z}$$

$$\sigma_r^{(r)} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( S_1^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right)$$

Les fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  doivent satisfaire le système d'équations différentiel suivant,

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + v_2^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = \frac{1}{a_2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - a_3 T \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + v_1^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = a_4 T \quad (2.15)$$

Dans ces formules (2.13) , (2.14) et (2.15) sont introduits les symboles suivants :

$\lambda_z^2$  : Rapport entre coefficients de conductibilité thermique dans la direction de l'axe de symétrie de la structure et dans la direction perpendiculaire à celle - ci.

$v_1^2$  et  $v_2^2$  : sont les racines de l'équation indiquées auparavant.

$$A_{11} A_{44} v_i^4 + [A_{13} (A_{13} + 2A_{44} - A_{11} A_{44}) v_i^2 + A_{33} A_{44}] v_i^2 + A_{33} A_{44} = 0$$

$s_1^2$  et  $s_2^2$  : sont les racines de l'équation suivante.

$$A_{44}S^4 - (A_{11} - A_{12})S^2 + \frac{(A_{11} - A_{12})^2(A_{13} + A_{44})}{(A_{11}A_{33} - A_{13}^2)} = 0$$

$$a_1 = a_{11} - a_{12}, \quad a_2 = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_1a_{11}}, \quad a_3 = \frac{a_{11}\beta_T - a_{13}\alpha_T}{a_1a_{11}}, \quad a_4 = a_3v_1^2 - \frac{\alpha_T}{a_{11}}$$

$a_{ij}$  : Coefficients de déformations [47] liés aux modules d'élasticités  $A_{ij}$  par les formules précédentes.

$\alpha_T$  et  $\beta_T$  : sont les coefficients de dilatation thermique linéaires respectivement dans le plan d'isotropie et dans la direction perpendiculaire à ce plan.

Le champ thermique est trouvée par analogie au cas de matériau isotrope, la formule correspondante possède la même forme, soit :

$$T = \int_0^\infty \xi \left[ A(\xi) e^{\frac{\xi Z}{\lambda_z}} + B(\xi) e^{-\frac{\xi Z}{\lambda_z}} \right] J_0(\xi r) d\xi \quad (2.16)$$

Les solutions particulières du potentiel thermique sont trouvées par la résolution du système d'équations (2.15) .

### 2.2.1 Expressions générales des contraintes et déplacements thermiques

Connaissant le champ thermique(2.16), on détermine à partir de la deuxième équation (2.15) la fonction  $\varphi_2$ , Substituons maintenant la valeur trouvée de  $\varphi_2$  et la valeur de la température dans la première équation(2.15) , on trouve la fonction  $\varphi_1$  .

Toute transformation faite on obtient :

$$\varphi_1 = h_0 \int_0^\infty \xi^{-1} \left[ A(\xi) e^{\frac{\xi Z}{\lambda_z}} + B(\xi) e^{-\frac{\xi Z}{\lambda_z}} \right] J_0(\xi r) d\xi \quad (2.17)$$

$$\varphi_2 = \frac{a_4 \lambda_z^2}{v_1^2 - \lambda_z^2} \int_0^\infty \xi^{-1} \left[ A(\xi) e^{\frac{\xi Z}{\lambda_z}} + B(\xi) e^{-\frac{\xi Z}{\lambda_z}} \right] J_0(\xi r) d\xi \quad (2.18)$$

Les composantes des déplacements et contraintes correspondants aux relations(2.16), tenons compte de (2.17)et (2.18) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}
U_z^{(T)} &= -a_1 \lambda_z h_2^* \int_0^\infty \left[ A(\xi) e^{\frac{\xi Z}{\lambda_z}} + B(\xi) e^{-\frac{\xi Z}{\lambda_z}} \right] J_0(\xi r) d\xi \\
\sigma_z^{(T)} &= -\lambda_z^2 h_1^* \int_0^\infty \xi \left[ A(\xi) e^{\frac{\xi Z}{\lambda_z}} + B(\xi) e^{-\frac{\xi Z}{\lambda_z}} \right] J_0(\xi r) d\xi \\
\tau_{rz}^{(T)} &= \lambda_z h_1^* \int_0^\infty \xi \left[ A(\xi) e^{\frac{\xi Z}{\lambda_z}} + B(\xi) e^{-\frac{\xi Z}{\lambda_z}} \right] J_0(\xi r) d\xi
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Les valeurs  $h_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) expriment la relation entre les paramètres inclus dans les expressions, à savoir:

$$h_1^* = \frac{1}{a_2 (v_2^2 - \lambda_z^2)} \left( \frac{a_4 \lambda_z^2}{v_1^2 - \lambda_z^2} - a_3 \right)$$

$$h_2^* = s_2^2 h_0 - \frac{a_4}{v_1^2 - \lambda_z^2}$$

## Chapitre 3

# Solutions aux limites du problème axisymétrique d'élasticité sous chargement mécanique

### 3.1 Hypothèses

Nous supposons qu'aux points du corps élastique éloignés des poinçons rigides chacune des composantes du tenseur de contraintes tends vers zéro. On formule également l'hypothèse que la perturbation de la configuration d'équilibre est assez réduite pour que les conditions aux limites sur les surfaces libres soient remplacées par les conditions correspondantes sur la limite plane non déformée. Dans le cas de la symétrie axiale, il est plus approprié d'utiliser la transformation de Hankel au lieu de celle de Fourier.

Une procédure de calcul des contraintes de contact est élaborée par implication de la transformation de Hankel réduisant ainsi l'équation différentielle reliant les composantes de contraintes et déplacements en un système d'équations intégral. Dans des travaux récents les auteurs reviennent sur l'utilisation de la transformation de Hankel pour résoudre les chargements de contact de couches d'épaisseurs finis. Dans notre présente contribution, nous acceptons qu'aux points éloignés du poinçon, les composantes de contraintes et déplacements soient négligeables et que la perturbation de la planéité des surfaces libres est assez réduite.

Nous construisons dans un premier temps le système d'équations intégrales aux limites de façon similaire aux travaux précédents [3,4]. A la différence après avoir appliqué la transformation inverse de Hankel aux équations différentielles et déterminer les expressions générales des contraintes et déplacements, nous introduisons deux fonctions paramètres inconnues  $\phi_1(\eta)$  et  $\phi_2(\eta)$  dans les conditions

aux limites et un changement de variables convenable qui rendent plus facile le traitement des équations intégrales ce qui aboutit enfin de compte à un système d'équations intégrale numériquement.

Les expressions qui définissent la répartition des contraintes sous les poinçons sont déterminées.

Les résultats obtenus de l'exemple étudié sous forme de courbes seront vérifiés comparativement à ceux trouvés en littérature. Autrement dans les cas limites suivants on peut également vérifier les résultats :

- Lorsque  $\nu_1, \nu_2$  (respectivement caractéristiques du matériau dans le plan d'isotropie et dans le plan perpendiculaire à celui-ci) tendent vers l'unité, le matériau devient quasiment isotrope.
- Lorsque l'épaisseur «  $H$  » tend vers l'infini, la couche devient alors un espace semi infini.

## **3.2 Détermination des contraintes normales aux interfaces couche-poinçons**

### **3.2.1 Formulation du problème**

La couche d'épaisseur «  $H$  » à faces parallèles de matériau isotrope transverse est statiquement comprimée par deux cylindres rigides à extrémités plates sur sa face supérieure. et sa face inférieure. Le problème ainsi posé est axisymétrique et peut être étudié dans le système de coordonnées cylindrique  $(r, \theta, z)$  coïncidant avec la surface supérieur de la couche et l'axe de symétrie de la structure (Fig.1).

Soient les conditions aux limites suivantes :

$$U_z = -\varepsilon_1 : \quad (0 \leq r \leq R_1, \quad z = 0) \quad (3.1)$$

$$\tau_{rz} = 0 : \quad (0 \leq r \leq \infty, \quad z = 0) \quad (3.2)$$

$$\sigma_z = 0 : \quad (r > R_1, \quad z = 0) \quad (3.3)$$

$$U_z = \varepsilon_2 : \quad (0 \leq r < R_2, \quad z = -H) \quad (3.4)$$

$$\tau_{rz} = 0 : \quad (0 \leq r \leq \infty, \quad z = -H) \quad (3.5)$$

$$\sigma_z = 0 : \quad (r > R_2, \quad z = -H) \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Méthode de résolution aux limites du problème

Les formules générales des contraintes et déplacements élastiques utilisée pour résoudre le problème mécanique s'écrivent, après avoir introduit le changement de variables suivant.

$$F_i(\eta) = \frac{\eta^3}{R_1^3} B_i \left( \frac{\eta}{R_1} \right)$$

$$\rho = \frac{r}{R_1}, \quad \xi = \frac{\eta}{R_1}, \quad \zeta = \frac{z}{R_1}$$

$$U_z = \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left\{ \frac{k_1}{v_1} \left[ -F_1 e^{\frac{\eta\zeta}{v_1}} + F_2 e^{\frac{\eta\zeta}{v_1}} \right] + \frac{k_2}{v_2} \left[ -F_3 e^{\frac{\eta\zeta}{v_2}} + F_4 e^{\frac{\eta\zeta}{v_2}} \right] \right\} J_0(\eta\rho) d\eta$$

$$\tau_{rz} = \frac{-A_{44}}{R} \int_0^\infty \left\{ \frac{1+k_1}{v_1} \left[ -F_1 e^{\frac{\eta\zeta}{v_1}} + F_2 e^{\frac{\eta\zeta}{v_1}} \right] + \frac{1+k_2}{v_2} \left[ -F_3 e^{\frac{\eta\zeta}{v_2}} + F_4 e^{\frac{\eta\zeta}{v_2}} \right] \right\} J_1(\eta\rho) d\eta \quad (3.7)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{R} \int_0^\infty \left\{ \frac{d_1}{v_1^2} \left[ F_1 e^{\frac{\eta\zeta}{v_1}} + F_2 e^{\frac{\eta\zeta}{v_1}} \right] + \frac{d_2}{v_2^2} \left[ F_3 e^{\frac{\eta\zeta}{v_2}} + F_4 e^{\frac{\eta\zeta}{v_2}} \right] \right\} J_0(\eta\rho) d\eta$$

Satisfaisons les conditions aux limites et introduisons deux nouvelles fonctions  $\phi_1(\eta)$  et  $\phi_2(\eta)$  Respectivement dans les conditions (3.3) et(3.6), nous obtenons le système d'équations algébrique aux inconnues  $F_i(\eta)$  ( $i = 1, 4$ ):

$$\int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left\{ \frac{k_1}{v_1} \left[ -F_1(\eta) + F_2(\eta) \right] + \frac{k_2}{v_2} \left[ -F_3(\eta) + F_4(\eta) \right] \right\} J_0(\eta\rho) d\eta = -\varepsilon_1 \quad (3.8)$$

$$\frac{1+k_1}{v_1} \left[ -F_1(\eta) + F_2(\eta) \right] + \frac{1+k_2}{v_2} \left[ -F_3(\eta) + F_4(\eta) \right] = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{d_1}{v_1^2} \left[ F_1(\eta) + F_2(\eta) \right] + \frac{d_2}{v_2^2} \left[ -F_3(\eta) + F_4(\eta) \right] = R_1 \eta \phi_1(\eta) \quad (3.10)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left\{ \frac{k_1}{v_1} \left[ -F_1(\eta) e^{\frac{\eta\ell}{v_1}} + F_2(\eta) e^{\frac{-\eta\ell}{v_1}} \right] + \frac{k_2}{v_2} \left[ -F_3(\eta) e^{\frac{\eta\ell}{v_2}} + F_4(\eta) e^{\frac{-\eta\ell}{v_2}} \right] \right\} J_0(\eta\rho) d\eta = \varepsilon_2 \quad (3.11)$$

$$\frac{1+k_1}{v_1} \left[ -F_1(\eta) e^{\frac{\eta\ell}{v_1}} + F_2(\eta) e^{\frac{-\eta\ell}{v_1}} \right] + \frac{1+k_2}{v_2} \left[ -F_3(\eta) e^{\frac{\eta\ell}{v_2}} + F_4(\eta) e^{\frac{-\eta\ell}{v_2}} \right] = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{d_1}{v_1^2} \left[ F_1(\eta) e^{\frac{\eta\ell}{v_1}} + F_2(\eta) e^{\frac{-\eta\ell}{v_1}} \right] + \frac{d_2}{v_2^2} \left[ F_3(\eta) e^{\frac{\eta\ell}{v_2}} + F_4(\eta) e^{\frac{-\eta\ell}{v_2}} \right] = R_1 \eta \phi_2(\eta) \quad (3.13)$$

Reprenons les expressions (3.9), (3.12), (3.10) et (3.13):

$$\frac{1+k_1}{\nu_1}[-F_1(\eta)+F_2(\eta)]+\frac{1+k_2}{\nu_2}[-F_3(\eta)+F_4(\eta)]=0 \quad (3.14)$$

$$\frac{1+k_1}{\nu_1}\left[-F_1(\eta)e^{\frac{\eta\ell}{\nu_1}}+F_2(\eta)e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_1}}\right]+\frac{1+k_2}{\nu_2}\left[-F_3(\eta)e^{\frac{\eta\ell}{\nu_2}}+F_4(\eta)e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_2}}\right]=0 \quad (3.15)$$

$$\frac{d_1}{\nu_1^2}[F_1(\eta)+F_2(\eta)]+\frac{d_2}{\nu_2^2}[-F_3(\eta)+F_4(\eta)]=\eta\phi_1(\eta)R_1 \quad (3.16)$$

$$\frac{d_1}{\nu_1^2}\left[F_1(\eta)e^{\frac{\eta\ell}{\nu_1}}+F_2(\eta)e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_1}}\right]+\frac{d_2}{\nu_2^2}\left[F_3(\eta)e^{\frac{\eta\ell}{\nu_2}}+F_4(\eta)e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_2}}\right]=\eta\phi_2(\eta)R_1 \quad (3.17)$$

Résolvons le système d'équations algébriques obtenu (3.8)- (3.13) et exprimons les fonctions  $F_i(\eta)(i=1,4)$  Par  $\phi_j(\eta)(j=1,2)$ .

Ecrivons le système d'équations pour les quatre dernières équations (3.14)- (3.17) Sous forme matricielle.

$$\begin{pmatrix} \frac{-(1+k_1)}{\nu_1} & \frac{1+k_1}{\nu_1} & \frac{-(1+k_2)}{\nu_2} & \frac{1+k_2}{\nu_2} \\ -\frac{(1+k_1)}{\nu_1}e^{\frac{\eta\ell}{\nu_1}} & \frac{1+k_1}{\nu_1}e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_1}} & -\frac{(1+k_2)}{\nu_2}e^{\frac{\eta\ell}{\nu_2}} & \frac{1+k_2}{\nu_2}e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_2}} \\ \frac{d_1}{\nu_1^2} & \frac{d_1}{\nu_1^2} & \frac{d_2}{\nu_2^2} & \frac{d_2}{\nu_2^2} \\ \frac{d_1}{\nu_1^2}e^{\frac{\eta\ell}{\nu_1}} & \frac{d_1}{\nu_1^2}e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_1}} & \frac{d_2}{\nu_2^2}e^{\frac{\eta\ell}{\nu_2}} & \frac{d_2}{\nu_2^2}e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(\eta) \\ F_2(\eta) \\ F_3(\eta) \\ F_4(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta R_1 \phi_1(\eta) \\ \eta R_1 \phi_2(\eta) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

### 3.2.3 Méthodologie de résolution du système d'équation algébrique

La résolution du système d'équations (3.18) par Gauss est assez compliquée, Nous, nous en passons de cette manière.

De la deuxième équation (condition) (3.2), on tire le résultat suivant :

$$(-F_1(\eta)+F_2(\eta))=\frac{1+k_2}{1+k_1}\frac{\nu_1}{\nu_2}(F_3(\eta)-F_4(\eta)) \quad (3.19)$$

La première condition (3.1) s'écrit en fonction de  $F_3(\eta)$  et  $F_4(\eta)$  de cette façon ;

$$\int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left[ \frac{k_1}{\nu_1} \frac{1+k_2}{1+k_1} \frac{\nu_1}{\nu_2} - \frac{k_2}{\nu_2} \right] (F_3(\eta)-F_4(\eta)) J_0(\eta\rho) d\rho = -\varepsilon_1 \quad : \quad \rho < 1 \quad (3.20)$$

La troisième condition prend la forme suivante :

$$\int_0^{\infty} \eta \phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad : \quad \rho > 1 \quad (3.21)$$

Soustrayons (3.15) de (3.17) après avoir multiplié respectivement par les paramètres  $k_1$  et  $(1+k_1)$ ,

On obtient la relation entre  $F_3(\eta)$  et  $F_4(\eta)$ .

$$F_4(\eta) = e^{\frac{2\eta\ell}{\nu_2}} F_3(\eta) \quad (3.22)$$

De la condition (3.9), on tire après avoir substitué  $F_3(\eta)$  et  $F_4(\eta)$  la relation entre

$F_1(\eta)$  et  $F_2(\eta)$ , soit :

$$F_2(\eta) = e^{\frac{2\eta\ell}{\nu_1}} F_1(\eta) \quad (3.23)$$

Substituons à présent dans les équations (3-14) et (3-16)  $F_2(\eta)$  et  $F_4(\eta)$  exprimant

$$\begin{bmatrix} \frac{1+k_1}{\nu_1} (e^{\frac{2\eta\ell}{\nu_1}} - 1), & \frac{1+k_2}{\nu_2} (e^{\frac{2\eta\ell}{\nu_2}} - 1) \\ \frac{d_1}{\nu_1^2} (e^{\frac{2\eta\ell}{\nu_1}} + 1), & \frac{d_2}{\nu_2^2} (e^{\frac{2\eta\ell}{\nu_2}} + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(\eta) \\ F_3(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R_1 \eta \phi_1(\eta) \end{bmatrix}$$

Par la méthode de Cramer, on cherche  $F_1(\eta)$  et  $F_3(\eta)$  par les rapports :

$$F_1(\eta) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$F_3(\eta) = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$F_1(\eta) = \frac{-\frac{(1+k_2)}{v_1} sh\left(\frac{\eta\ell}{v_2}\right) R_1 \eta \phi_1(\eta)}{2Q(\eta)e^{v_1}}$$

$$F_3(\eta) = \frac{-\frac{(1+k_1)}{v_2} sh\left(\frac{\eta\ell}{v_1}\right) R_1 \eta \phi_1(\eta)}{2Q(\eta)e^{v_1}}$$

$$F_2(\eta) = \frac{-\frac{(1+k_2)}{v_1} e^{\frac{\eta\ell}{v_2}} sh\left(\frac{\eta\ell}{v_2}\right) R_1 \eta \phi_1(\eta)}{Q(\eta)}$$

$$F_4(\eta) = \frac{-\frac{(1+k_1)}{v_2} e^{\frac{\eta\ell}{v_1}} sh\left(\frac{\eta\ell}{v_1}\right) R_1 \eta \phi_1(\eta)}{Q(\eta)}$$

Le système d'équations (3.8)- (3.13) se réduit à quatre équations intégrales après avoir introduit les fonctions inconnues  $F_i(\eta)$  ( $i=1,4$ ) que nous écrivons :

$$\int_0^\infty \phi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = \frac{-\varepsilon_1 \delta_0}{R_1} + \int_0^\infty [\phi_2(\eta) D_2(\eta\ell) - \phi_1(\eta) D_1(\eta\ell)] J_0(\eta\rho) d\eta \quad : \quad \rho < 1 \quad (3.24)$$

$$\int_0^\infty \eta \phi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \quad : \quad \rho > 1 \quad (3.25)$$

$$\int_0^\infty \phi_2(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = \frac{-\varepsilon_2 \delta_0}{R_1} + \int_0^\infty [\phi_1(\eta) D_2(\eta\ell) - \phi_2(\eta) D_1(\eta\ell)] J_0(\eta\rho) d\eta \quad : \quad \rho < c \quad (3.26)$$

$$\int_0^\infty \eta \phi_2(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \quad : \quad \rho > c \quad (3.27)$$

Ou :

$$\delta_0 = \frac{(A_{13} + A_{44}) v_2 d_1 (1+k_2)}{A_{11} (v_1 + v_2) v_2 v_1^2}$$

$$\ell = \frac{H}{R_1}, \quad c = \frac{R_2}{R_1}, \quad \alpha = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}, \quad \beta = \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}$$

$$D_1(\eta\ell) = \frac{C_2(\eta\ell)}{Q_1(\eta\ell)}$$

$$D_2(\eta\ell) = \frac{C_1(\eta\ell)}{Q_1(\eta\ell)}$$

$$C_1(\eta\ell) = (v_1 - v_2) \left[ 2v_1 sh \frac{\eta\ell}{v_2} - 2v_2 sh \frac{\eta\ell}{v_1} \right]$$

$$C_2(\eta\ell) = (v_1 + v_2)^2 ch\beta\eta\ell - (v_1^2 - v_2^2) sh\beta\eta\ell - (v_1 - v_2)^2 e^{-\alpha\eta\ell} - 4v_1v_2$$

$$Q_1(\eta\ell) = 4v_1v_2 + (v_1 - v_2)^2 ch\alpha\eta\ell - (v_1 + v_2)^2 ch\beta\eta\ell$$

### 3.2.4 Etude du cas général de deux poinçons de différents rayons

Considérons le cas général du double poinçonnement correspondant aux poinçons de rayons  $R_1 \neq R_2$  sollicités respectivement par deux forces identiques de même valeur (voir fig.1).

Par le changement de variables suivant ( $\rho = c\rho^*$  et  $\eta^* = c\eta$ ) et la représentation suivante des fonctions  $\phi_1(\eta)$  et  $\phi_2(\eta)$  [14,15] ;

$$\phi_1(\eta) = \delta_0 \int_0^1 f_1(t) \cos(\eta t) dt \quad (3.28)$$

$$\phi_2(\eta) = \phi_2\left(\frac{\eta^*}{c}\right) = c^2 \phi_2^*(\eta^*) = c^2 \delta_0 \int_0^1 f_2(t) \cos(\eta^* t) dt \quad (3.29)$$

Les équations (3.25) et (3.27) sont satisfaites .en effet,

$$\int_0^\infty \eta \phi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = \begin{cases} 0 & : \rho > 1 \\ \frac{f_1(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_1^\rho \frac{f_1'(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} & : \rho < 1 \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\int_0^\infty \eta \phi_2(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = \int_0^\infty \eta^* \phi_2^*(\eta^*) J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^*$$

$$\int_0^\infty \eta \phi_2(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = \begin{cases} 0 & : \rho^* > 1 \\ \frac{f_2(1)}{\sqrt{1-\rho^{*2}}} - \int_1^\rho \frac{f_2'(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^{*2}}} & : \rho^* < 1 \end{cases} \quad (3.31)$$

Alors que les contraintes aux surfaces de contact ( $z = 0, z = -H$ ) sont déterminées

par:

$$\sigma_z(\rho, 0) = \delta_0 \left[ \frac{f_1(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{f_1'(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \right] \quad (3.32)$$

$$\sigma_z(\rho^*, -\ell^*) = \delta_0 \left[ \frac{f_2(1)}{\sqrt{1-\rho^{*2}}} - \int_{\rho}^1 \frac{f_2'(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^{*2}}} \right] \quad (3.33)$$

Les équations (3.24) et (3.25) se ramènent à deux intégrales D'Abel suivant,

$$\int_0^{\rho} \frac{f_1(t)}{\sqrt{\rho^2-t^2}} dt = g_1(\rho)$$

$$\int_0^{\rho} \frac{f_2(t)}{\sqrt{\rho^{*2}-t^2}} dt = g_2(\rho^*)$$

(3.34)

Qui se résous respectivement par [3, 5] :

$$f_1(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g_1(\rho)}{\sqrt{t^2-\rho^2}} d\rho \quad (3.35)$$

$$f_2(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho^* g_2(\rho^*)}{\sqrt{t^2-\rho^{*2}}} d\rho^*$$

Avec :

$$g_1(\rho) = \frac{-\varepsilon_1}{R_1} + c^2 \int_0^{\infty} D_2(\eta \ell) J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f_2(t) \cos(c\eta t) dt - \int_0^{\infty} D_1(\eta \ell) J_0(\eta \rho) d\eta * \int_0^1 f_1(t) \cos(\eta t) dt \quad (3.36)$$

$$g_2(\rho) = \frac{-\varepsilon_2}{cR_1} - \int_0^{\infty} D_1(\eta^* \ell^*) J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* \int_0^1 f_2(t) \cos(\eta^* t) dt + \frac{1}{c^2} \int_0^{\infty} D_2(\eta^* \ell^*) J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* * \int_0^1 f_1(t) \cos\left(\frac{\eta^*}{c} t\right) dt \quad (3.37)$$

Substituons (3.36) et (3.37) dans chacune des expressions (3.34) et (3.35) et tenons compte (3.30) et (3.31), nous obtenons deux équations intégrales de Fredholm relative aux fonctions  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$ .

$$f_1(t) = -\frac{2\varepsilon}{\pi R_1} - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(x) dx \int_0^\infty D_1(\eta \ell) \cos(\eta x) \cos(\eta t) d\eta + \frac{2c^2}{\pi} \int_0^1 f_2(x) dx * \\ * \int_0^\infty D_2(\eta \ell) \cos(c\eta x) \cos(\eta t) d\eta \quad : 0 < t \leq 1 \quad (3.38)$$

$$f_2(t) = -\frac{2\varepsilon_1}{\pi c R_1} - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(x) dx \int_0^\infty D_1(\eta^* \rho^*) \cos(\eta^* x) \cos(\eta^* t) d\eta^* + \frac{2}{\pi c^2} \int_0^1 f_1(x) dx * \\ * \int_0^\infty D_2(\eta^* \rho^*) \cos\left(\frac{\eta^*}{c} x\right) \cos(\eta^* t) d\eta^* \quad : 0 < t \leq 1 \quad (3.39)$$

Utilisons les conditions d'équilibres statiques aux interfaces ( $z = 0$  ;  $z = -H$ ).

$$P = -2\pi R_1^2 \int_0^1 \rho \sigma_z(\rho, 0) d\rho \quad (3.40)$$

$$P = -2\pi R_1^2 c^2 \int_0^1 \rho^* \sigma_z(\rho^*, -\ell^*) d\rho^* \quad (3.41)$$

Les contraintes normales aux interfaces ( $z = 0$  ;  $z = -H$ ) s'expriment par :

$$\sigma_z(\rho, 0) = \delta_0 \int_0^1 f_1(t) \cos(\eta t) dt \int_0^\infty \eta J_0(\eta \rho) d\eta \quad (3.42)$$

$$\sigma_z(\rho^*, -\ell^*) = \delta_0 \int_0^1 f_2(t) \cos(\eta^* t) dt \int_0^\infty \eta^* J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* \quad (3.43)$$

On écrit, après avoir substitués  $\sigma_z(\rho, 0)$  et  $\sigma_z(\rho^*, -\ell^*)$  par sons expressions, tenant compte de (3.38) et (3.39) et effectuer l'intégration par rapport à la variable ( $t$ ).

$$f_1(t) = -\frac{P}{2\pi R_1^2 \delta_0} \Psi_1(t) \quad (3.44)$$

$$f_2(t) = -\frac{P}{2\pi R_1^2 c^2 \delta_0} \Psi_2(t) \quad (3.45)$$

Avec :

$$\Psi_1(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \Psi_1(x) K_1(x, t) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \Psi_2(x) K_2(x, t) dx = 1 \quad (3.46)$$

$$\Psi_2(t) + \frac{2}{\pi c} \int_0^1 \Psi_2(x) K_3(x, t) dx - \frac{2}{\pi c} \int_0^1 \Psi_1(x) K_4(x, t) dx = 1$$

Où :

$$K_1(x, t) = \int_0^\infty D_1(\eta \ell) \cos(\eta x) \left[ \cos(\eta t) - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta$$

$$K_2(x, t) = \int_0^{\infty} D_2(\eta \ell) (\cos(\eta cx) \left[ \cos(\eta t) - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta$$

$$K_3(x, t) = \int_0^{\infty} D_1(\eta^* \ell^*) \cos(\eta^* x) \left[ \cos(\eta^* t) - \frac{\sin \eta^*}{\eta^*} \right] d\eta^*$$

$$K_4(x, t) = \int_0^{\infty} D_2(\eta^* \ell^*) \cos\left(\frac{\eta^*}{c} x\right) \left[ \cos(\eta^* t) - \frac{\sin \eta^*}{\eta^*} \right] d\eta^*$$

Les paramètres ( $x$  et  $t$ ) se situent dans le même intervalle :  $0 \leq t \leq 1$  ,  $0 \leq x \leq 1$

$\Psi_1(t)$  et  $\Psi_2(t)$ : Sont les fonctions inconnues à déterminer à partir de la résolution du système d'équations (3.46).

Enfin, les contraintes aux interfaces de contacts poinçons- couche se déterminent par les formules suivantes :

$$\sigma_z(\rho, 0) = \frac{P}{2\pi R_1^2 \delta_0} \sigma_z^*(\rho, 0) \quad (3.47)$$

$$\sigma_z(\rho^*, -\ell^*) = \frac{P}{2\pi R_1^2 c^2 \delta_0} \sigma_z^*(\rho^*, -\ell^*)$$

Avec :

$$\sigma_z^*(\rho, 0) = \frac{\Psi_1(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{\Psi_1'(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \quad (3.48)$$

$$\sigma_z^*(\rho^*, -\ell^*) = \frac{\Psi_2(1)}{\sqrt{1-\rho^{*2}}} - \int_{\rho}^1 \frac{\Psi_2'(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^{*2}}}$$

Les expressions  $\sigma_z^*(\rho, 0)$  et  $\sigma_z^*(\rho^*, -\ell^*)$  représentent les contraintes sans dimensions.

### 3.2.5 Etude de cas particuliers qui découlent directement du cas générale

#### 3.2.5.1 Cas de poinçons de même géométrie

Lorsque la couche est comprimée par deux poinçons de même géométrie avec deux forces de mêmes valeurs c'est-dire ( $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ ,  $R_2 = R_1$ ,  $\phi_2(\eta) = \phi_1(\eta) = \phi(\eta)$ )

Le système d'équations précédent (3.24) - (3.27) se réduit aux deux équations intégrales suivantes :

$$\int_0^{\infty} \phi(\eta) J_0(\eta \ell) d\eta = -\frac{\varepsilon \delta_0}{R} + \int_0^{\infty} G(2\eta \ell) \phi(\eta) J_0(\eta \ell) d\eta \quad : \rho < 1 \quad (3.49)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \phi(\eta) J_0(\eta \ell) d\eta = 0 \quad : \rho > 1 \quad (3.50)$$

Avec:  $G(2\eta \ell) = 1 - \frac{D_1(\eta \ell) - C_1(\eta \ell)}{Q(\eta \ell)}$

### 3.2.5.2 Cas d'un seul poinçon

Considérons le cas où  $R_2$  tends vers l'infini (ou bien  $\varepsilon_2$  égale à zéro). Dans l'un ou l'autre des deux suppositions le poinçon de dessous est donc un appui plan.

Prenons  $\varepsilon_2 = 0$  dans l'équation (3.26), on tire de cette dernière  $\phi_2(\eta)$  en fonction de  $\phi_1(\eta)$ .

$$\text{Soit : } \phi_2(\eta) = \frac{sh(\eta\ell)_1 + \eta\ell ch(\eta\ell)}{\eta\ell + sh(\eta\ell)ch(\eta\ell)} \phi_1(\eta) \quad (3.51)$$

Remplaçons dans l'équation (3.24)  $\phi_2(\eta)$  par sa nouvelle expression (3.51) on obtient l'autre système de deux équations intégrales, que nous écrivons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\infty} \phi(\eta) J_0(\eta\ell) d\eta &= -\frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\infty} G(\eta\ell) \phi(\eta) J_0(\eta\ell) d\eta & : \rho < 1 \\ \int_0^{\infty} \eta \phi(\eta) J_0(\eta\ell) d\eta &= 0 & : \rho > 1 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Avec :

$$G(\eta\ell) = 1 - \frac{sh \frac{\eta\ell}{v_1} sh \frac{\eta\ell}{v_2}}{\frac{1}{v_2} ch \frac{\eta\ell}{v_1} sh \frac{\eta\ell}{v_2} - \frac{1}{v_1} ch \frac{\eta\ell}{v_2} sh \frac{\eta\ell}{v_1}}$$

### 3.3 Cas de matériaux homogène isotrope

Lorsque les coefficients d'anisotropie tendent vers l'unité ( $v_1 = v_2 = 1$ ), le matériau sera considéré comme homogène isotrope. Les limites des expressions (3.24)- (3.27) deviennent :

$$\int_0^{\infty} \phi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = \frac{-\varepsilon_1 b_4}{R_1} + \int_0^{\infty} [\phi_2(\eta) R_2(\eta\ell) - \phi_1(\eta) R_1(\eta\ell)] J_0(\eta\rho) d\eta \quad : \rho \leq 1 \quad (3.53)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \phi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \quad : \rho > 1 \quad (3.54)$$

$$\int_0^{\infty} \phi_2(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = \frac{-\varepsilon_1 b_4}{R_1} + \int_0^{\infty} [\phi_1(\eta) R_2(\eta\ell) - \phi_2(\eta) R_1(\eta\ell)] J_0(\eta\rho) d\eta \quad : \rho \leq c \quad (3.55)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \phi_2(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \quad : \rho > c \quad (3.56)$$

Avec :

$$c = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\lim_{\nu_1=\nu_2=1} (D_1(\eta\ell)) = R_1(\eta\ell) = \frac{\eta\ell + \eta^2\ell^2 + e^{-\eta\ell} sh\eta\ell}{sh^2\eta\ell - \eta^2\ell^2}$$

$$\lim_{\nu_1=\nu_2=1} (D_2(\eta\ell)) = R_2(\eta\ell) = \frac{sh\eta\ell + \eta\ell ch\eta\ell}{sh^2\eta\ell - \eta^2\ell^2}$$

$$\lim_{\nu_1=\nu_2=1} (\delta_0) = b_4 = \frac{b_1}{1+b_1}$$

### 3.3.1 Cas de poinçons de même géométrie

Lorsque la couche est comprimée par deux poinçons identiques sous mêmes pressions c'est-à-dire ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ,  $R_1 = R_2$ ,  $\phi_1(\eta) = \phi_2(\eta) = \phi(\eta)$ ) Alors le système d'équations précédent (3.53) – (3.56) se réduit au système de deux équations intégrales suivantes

$$\int_0^\infty \phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = \frac{-\varepsilon b_4}{R_1} + \int_0^\infty G(\eta\ell) \phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta \quad : \rho \leq 1 \quad (3.57)$$

$$\int_0^\infty \eta \phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \quad : \rho > 1 \quad (4.58)$$

Avec :  $G(\eta\ell) = R_2(\eta\ell) - R_1(\eta\ell)$

### 3.3.2 Cas d'un seul poinçon.

Dans le cas où  $R_2$  tends vers l'infini (ou bien  $\varepsilon_2$  égale à zéro). Dans l'une ou l'autre des deux suppositions le poinçon de dessous devient un appui plan.

Prenons  $\varepsilon_2 = 0$  ; de l'équation (3.55) on tire  $\phi_2(\eta)$  en fonction de  $\phi_1(\eta)$  .

Soit :

$$\phi_2(\eta) = \frac{R_2(\eta\ell)}{1+R_1(\eta\ell)} \phi_1(\eta) \quad (3.59)$$

Remplaçons dans l'équation (3.53)  $\phi_2(\eta)$  par sa nouvelle expression (3.59), on obtient l'autre système de deux équations intégrales, que nous écrivons :

$$\int_0^{\infty} \phi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = \frac{-\varepsilon b_4}{R_1} + \int_0^{\infty} \phi_1(\eta) G(2\eta\ell) J_0(\eta\rho) d\eta \quad : \rho \leq 1 \quad (3.60)$$

$$\phi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta \quad : \rho > 1 \quad (3.61)$$

Où :

$$G(2\eta\ell) = \frac{1 + 2\eta\ell - e^{-2\eta\ell}}{sh2\eta\ell + 2\eta\ell}$$

Dans ces deux cas particuliers il suffit de résoudre seulement le système de deux équations intégrales (3.58) ou (3.61).

Les contraintes aux interfaces s'expriment par :

$$\sigma_z(\rho, 0) = \frac{-P}{2\pi R_1^2} \left[ \frac{\Psi_1(t)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{\Psi_1'(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \right] \quad (3.62)$$

La fonction  $\Psi(t)$  est celle à déterminée de l'équation suivante :

$$\Psi(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \Psi(x) dx \int_0^{\infty} Q(\eta\ell) \cos(\eta x) [\cos(\eta t) \left[ \cos(\eta t) - \frac{\sin\eta}{\eta} \right] d\eta = 1 \quad : 0 < t \leq 1 \quad (3.63)$$

Où :  $Q(\eta\ell) = G(\eta\ell)$  pour le cas (3.3.1) et  $Q(\eta\ell) = G(2\eta\ell)$  pour le cas (3.3.2).

### 3.3.3 Cas de demi-espace.

Dans le cas où l'épaisseur relative ( $\ell = \frac{H}{R}$ ) tends vers l'infini, la solution sera celle de l'espace semi- infini. La fonction  $G(2\eta\ell)$  prendra la valeur zéro et par conséquent la fonction  $\Psi(t)$  sera égale à l'unité d'après (3.63). La pression à l'interface (3.62) s'exprime par :

$$\sigma_z(\rho, 0) = \frac{-P}{2\pi R^2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

### 3.3.4 Etude du cas général de deux poinçons de différents rayons.

Reprenant le système d'équations (3.53)-(3.56) du double poinçonnement correspondant aux poinçons de rayons  $R_1$  et  $R_2$  soumis aux forces identiques (fig. 1).

Par le changement de variables  $\rho^* = \frac{\rho}{c}$  et  $\eta^* = c\eta$  et la représentation suivante des fonctions  $\phi_1(\eta)$  et  $\phi_2(\eta)$  [17,18].

$$\phi_1(\eta) = b_4 \int_0^1 f_1(t) \cos(\eta t) dt \quad (3.64)$$

$$\phi_2(\eta) = \phi_2\left(\frac{\eta^*}{c}\right) = c^2 \phi_2^*(\eta^*) = \frac{c^2}{b_4} \int_0^1 f_2(t) \cos(\eta^* t) dt \quad (3.65)$$

Les équations (3.54) et (3.56) sont satisfaites.

En effet,

$$\int_0^\infty \eta \phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = \begin{cases} 0 & : \rho > 1 \\ \frac{f_1(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_\rho^1 \frac{f_1'(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} & : \rho < 1 \end{cases} \quad (3.66)$$

$$\int_0^\infty \eta \phi_2(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = \int_0^\infty \eta^* \phi_2^*(\eta^*) J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* = \begin{cases} 0 & : \rho^* > 1 \\ \frac{f_2(1)}{\sqrt{1-\rho^{*2}}} - \int_{\rho^*}^1 \frac{f_2'(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^{*2}}} & : \rho^* < 1 \end{cases} \quad (3.67)$$

Les équations (3.53) et (3.55) se ramènent à deux intégrales D'Abel,

$$\int_0^\rho \frac{f_1(t)}{\sqrt{\rho^2-t^2}} dt = g_1(\rho) \quad (3.68)$$

$$\int_0^\rho \frac{f_2(t)}{\sqrt{\rho^{*2}-t^2}} dt = g_2(\rho^*)$$

Ce qui démontre facilement [3, 5].

$$f_1(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g_1(\rho)}{\sqrt{t^2-\rho^2}} d\rho \quad (3.69)$$

$$f_2(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho^* g_2(\rho^*)}{\sqrt{t^2-\rho^{*2}}} d\rho^*$$

Avec :

$$g_1(\rho) = \frac{-\varepsilon}{R_1} + c^2 \int_0^\infty R_2(\eta \ell) J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f_2(t) \cos(c\eta t) dt - \int_0^\infty R_1(\eta \ell) J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f_1(t) \cos(\eta t) dt \quad (3.70)$$

$$g_2(\rho) = \frac{-\varepsilon_1}{cR_1} - \int_0^{\infty} R_1(\eta^* \ell^*) J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* \int_0^1 f_2(t) \cos(\eta^* t) dt + \frac{1}{c^2} \int_0^{\infty} R_2(\eta^* \ell^*) J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* \int_0^1 f_1(t) \cos\left(\frac{\eta^*}{c} t\right) dt \quad (3.71)$$

Substituons (3.70) et (3.671) dans chacune des expressions (3.69). Nous obtenons après transformations deux équations intégrales de Fredholm relative aux fonctions  $\phi_1(\eta)$  et  $\phi_2(\eta)$ .

$$f_1(t) = \frac{-2\varepsilon}{\pi R_1} - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(x) dx \int_0^{\infty} R_1(\eta \ell) \cos(\eta x) \cos(\eta t) d\eta + \frac{2c^2}{\pi} \int_0^1 f_2(x) dx \int_0^{\infty} R_2(\eta \ell) \cos(c\eta x) \cos(\eta t) d\eta \quad : 0 < t \leq 1 \quad (3.72)$$

$$f_2(t) = \frac{-2\varepsilon_1}{\pi c R_1} - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(x) dx \int_0^{\infty} R_1(\eta^* \ell^*) \cos(\eta^* x) \cos(\eta^* t) d\eta^* + \frac{2}{\pi c^2} \int_0^1 f_1(x) dx \int_0^{\infty} R_2(\eta^* \ell^*) \cos\left(\frac{\eta^*}{c} x\right) \cos(\eta^* t) d\eta^* \quad : 0 < t \leq 1 \quad (3.73)$$

Utilisons les équations d'équilibres statiques aux interfaces ( $z = 0$ ;  $z = H$ ).

$$P = -2\pi R_1^2 \int_0^1 \rho \sigma_z(\rho, 0) d\rho \quad : 0 \leq \rho \leq 1 \quad (3.74)$$

$$P = -2\pi R_1^2 c^2 \int_0^1 \rho^* \sigma_z(\rho^*, -\ell^*) d\rho^* \quad : 0 \leq \rho^* \leq 1 \quad (3.75)$$

Les contraintes normales aux interfaces ( $z = 0$ ;  $z = -H$ ) s'expriment par :

$$\sigma_z(\rho, 0) = \chi_0 \int_0^1 f_1(t) \cos(\eta t) dt \int_0^{\infty} \eta J_0(\eta \rho) d\eta \quad (3.76)$$

$$\sigma_z(\rho^*, -\ell^*) = \chi_0 \int_0^1 f_2(t) \cos(\eta^* t) dt \int_0^{\infty} \eta^* J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* \quad (3.77)$$

Avec :

$$f_1(t) = -\frac{P}{2\pi R_1^2 \chi_0} \Psi_1(t)$$

$$f_2(t) = -\frac{P}{2\pi R_1^2 c^2 \chi_0} \Psi_2(t)$$

$$\chi_0 = \frac{2b_3 b_1}{1+b_1}$$

Portons maintenant (3.72) dans (3.76) puis dans (3.74) et (3.73) dans (3.77) puis dans (3.75), intégrons par rapport à la variable ( $t$ ). Après transformations évidentes nous obtenons le système d'équations algébrique suivant :

$$\Psi_1(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \Psi_1(x) K_1(x,t) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \Psi_2(x) K_2(x,t) dx = 1$$

$$\Psi_2(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \Psi_2(x) K_3(x,t) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \Psi_1(x) K_4(x,t) dx = 1$$
(3.78)

Avec :

$$K_1(x,t) = \int_0^\infty R_1(\eta \ell) \cos(\eta x) \left[ \cos(\eta t) - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta$$

$$K_2(x,t) = \int_0^\infty R_2(\eta \ell) (\cos(\eta c x)) \left[ \cos(\eta t) - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta$$

$$K_3(x,t) = \int_0^\infty R_1(\eta^* \ell^*) \cos(\eta^* x) \left[ \cos(\eta^* t) - \frac{\sin \eta^*}{\eta^*} \right] d\eta^*$$

$$K_4(x,t) = \int_0^\infty R_2(\eta^* \ell^*) \cos\left(\frac{\eta^*}{c} x\right) \left[ \cos(\eta^* t) - \frac{\sin \eta^*}{\eta^*} \right] d\eta^*$$

$$R_1(\eta \ell) = \frac{\eta \ell + \eta^2 \ell^2 + sh \eta \ell e^{-\eta \ell}}{sh^2 \eta \ell - \eta^2 \ell^2}$$

$$R_2(\eta \ell) = \frac{sh \eta \ell + \eta \ell ch \eta \ell}{sh^2 \eta \ell - \eta^2 \ell^2}$$

$$R_1(\eta^* \ell^*) = \frac{\eta^* \ell^* + \eta^{*2} \ell^{*2} + e^{-\eta^* \ell^*} sh \eta^* \ell^*}{sh^2 \eta^* \ell^* - \eta^{*2} \ell^{*2}}$$

$$R_2(\eta^* \ell^*) = \frac{sh \eta^* \ell^* + \eta^* \ell^* ch \eta^* \ell^*}{sh^2 \eta^* \ell^* - \eta^{*2} \ell^{*2}}$$

$\Psi_1(t)$  et  $\Psi_2(t)$  sont les fonctions inconnues à déterminer à partir de la résolution du système d'équations (3.78).

Enfin, les contraintes aux interfaces de contact poinçons- couche (3.48) tenant compte de (3.66) et (3.67) se déterminent par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_z(\rho, 0) &= \frac{P}{2\pi R_1^2 \chi_0} \sigma_z^*(\rho, 0) && : \rho < 1 \\ \sigma_z(\rho^*, -\ell^*) &= \frac{P}{2\pi R_1^2 c^2 \chi_0} \sigma_z^*(\rho^*, -\ell^*) && : \rho^* < 1\end{aligned}\tag{3.79}$$

Ou :

$$\begin{aligned}\sigma_z^*(\rho, 0) &= \frac{\Psi_1(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{\Psi_1'(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \\ \sigma_z^*(\rho^*, -\ell^*) &= \frac{\Psi_2(1)}{\sqrt{1-\rho^{*2}}} - \int_{\rho^*}^1 \frac{\Psi_2'(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^{*2}}}\end{aligned}\tag{3.80}$$

## Chapitre 4

### Solution aux limites du problème thermo-élastique

#### 4.1 Généralités sur la conduction thermique

Il existe trois types de transmission de la chaleur :

La conduction, la convection et le rayonnement.

La conduction est un transfert de chaleur dans les milieux au repos (solide, liquide ou gazeux).

- La conduction caractérise les interactions directes entre particules voisines lors d'un transfert de chaleur avec support matériel mais sans transfert de matière. C'est la présence d'un gradient de température qui régit la propagation d'un flux de chaleur par conduction [48]. Le champ de température dans le massif est déterminé par la résolution des équations de la conduction.

-La convection est un transfert de chaleur dans les milieux liquides ou gazeux en mouvement. On distingue deux modes de convection : la convection libre (fluide mis en mouvement par différence de température) et la convection forcée (mouvement du fluide imposée).

- Le rayonnement est la transmission de chaleur par ondes électromagnétiques. Le phénomène de rayonnement se produit seulement à haute température, c'est pourquoi il n'est assez répondu dans la littérature par rapport aux phénomènes de conduction.

La convection est souvent utilisée comme condition aux limites, soit sous forme de convection libre avec le milieu extérieur, soit sous forme de convection forcée.

### 4.1.1 Equation de la conduction thermique dans un solide

L'équation de la conduction est obtenue en écrivant l'équilibre énergétique d'un volume élémentaire d'un milieu au repos dans un repère fixe. Sous sa forme la plus générale dans un solide avec des propriétés continues, elle s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_i(x) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + g = \rho c_p \frac{dT}{dt}$$

$g$  : Chaleur  $q$  produite par une source interne telle que les déformations plastiques.

$\rho$  : La densité du matériau.

$c_p$  : Chaleur spécifique, (est un paramètre intrinsèque au matériau et ne dépend que de sa composition chimique, de l'état physique, de la structure, de la température et de la pression).

$k$  : Conductivité thermique, (caractérise le flux de chaleur traversant une section sur une distance élémentaire est dirigé de la zone chaude vers la zone plus froide).

En tenant compte de certaines hypothèses ;

-prise en compte des phénomènes transitoires, (la dérivée totale devient partielle).

-pas de source de chaleur interne.

-variation des propriétés seulement dans la direction.

L'équation précédente se simplifie à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + k(x) \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{k(x)}{D(x)} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Avec :

$D$  : La diffusivité thermique du matériau définie.

Telle que :

$$D = \frac{k}{\rho c_p}$$

-Dans le cas stationnaire, le second membre est nul.

### 4.1.2 Distribution stationnaire de la température dans un corps

Si le processus est stationnaire sans source de chaleur. Autrement dit si la température ne dépend pas du temps, mais uniquement des coordonnées des points du corps, alors la distribution de la température coïncide avec la solution de l'équation de Laplace.

En coordonnées cylindrique cette dernière s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Si la température  $T(r, \varphi, z)$  ne dépend pas du paramètre  $z$  mais uniquement de  $r$  et  $\varphi$ , l'équation se simplifie et devient,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0$$

### 4.1.3 Equation de la convection

La convection est un phénomène complexe, nécessitant la résolution simultanée d'un problème de thermique et d'un problème de mécanique des fluides. La variation locale de la température d'un liquide induit une évolution de ses propriétés, soit l'échange de chaleur entre le fluide et des corps en contact dans le cas où le mouvement préexisterait (convection forcée). Ces deux phénomènes sont régis par les mêmes équations mais leurs effets d'un point de vue thermique sont très différents. Enfin le mouvement du fluide provoque un cisaillement qui génère un flux thermique non négligeable. La convection peut être considérée comme une condition aux limites à la surface d'un corps. Dans ce cas, l'échange de chaleur est approximé par un flux linéaire de type [49]:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + H(T_s - T_a) = 0$$

- $T_a$  la température ambiante,
- $T_s$  la température de la surface,
- $H$  la conductance de la paroi,
- $\vec{n}$  la normale à la surface extérieure.

#### 4.1.4 Conditions aux limites

D'un point de vue mathématique, les conditions aux limites d'un problème de thermo-élasticité sont de deux types :

-conditions aux limites de type Dirichlet : c'est trouver une fonction vérifiant l'équation de Laplace à l'intérieure du domaine ( $d$ ) en prenant en chaque point ( $M$ ) de la surface(s) des valeurs données  $T|_s = \psi(M)$  (la valeur de l'inconnue est imposée « déplacement, température »).

-conditions aux limites de type Neumann : si sur la surface du corps la température n'est pas connue mais en revanche on connaît le flux de chaleur en chaque point de la surface qui est proportionnel à  $\frac{\partial T}{\partial n}$ , on aura sur la surface ( $S$ ) au lieu de la condition

aux limites précédentes, la condition suivante  $\frac{\partial T}{\partial n}|_s = \psi(M)$  (dérivées imposées, nécessitant un traitement particulier des phases de résolution du problème « flux, contraintes imposées »).

En effet, le flux thermique s'écrit de la manière suivante :  $\bar{Q} = -k \frac{\partial T}{\partial n} \bar{n}$

Avec :

$T$ : La température,

$k$ : La conduction thermique et

$\bar{n}$ : La normale extérieure à la surface.

Le signe négatif implique un flux négatif, la variation de température dans le matériau sera aussi négative (température plus importante en surface que dans la profondeur). Un flux négatif en surface correspond donc à une entrée d'énergie dans le massif. Une température imposée est plus facile à traiter numériquement, mais est moins réaliste physiquement. Ce type de conditions est utilisé si les bords du solide sont éloignés de la source de chaleur. Les conditions aux limites mécaniques correspondent soit à un déplacement, soit à une contrainte normale ou tangentielle imposée sur les différentes zones. Il existe trois degrés de liberté en déplacement, il y a alors trois équations à résoudre pour déterminer les conditions aux limites.

## 4.1.5 Méthodes de résolution de l'équation de conduction de la chaleur

### 4.1.5.1 Méthode des potentiels

Cette méthode consiste à transformer un système d'équations en un système d'équations équivalent plus simple à résoudre. Les inconnues sont exprimées sous forme de fonctions harmoniques (appelées généralement potentiels de déplacement).

Pour cela, une propriété fondamentale des équations de Lamé est utilisée :

La bi harmonicité des composants de l'état élastique, soit :  $\Delta\Delta\{u\} = 0$

Avec :

$u$  : Le vecteur des déplacements

Il a été montré [66] que si les forces de volume dérivent d'un potentiel, toutes les fonctions de la théorie de l'élasticité sont elles aussi bi harmoniques. Dans les cas les plus généraux, cette méthode permet de déterminer une solution analytique au problème d'élasticité.

### 4.1.5.2 Méthodes semi- analytiques : transformation intégrales

Le principe de la transformation intégrale est de travailler non plus dans l'espace réel, mais dans l'espace transformé en diminuant le nombre d'inconnues. Les inconnues sont projetées sur une base orthogonale de l'espace fonctionnel et la résolution est conduite sur l'équation transformée. Cette opération a pour but de dériver ou de diminuer le nombre de variables transformées de Laplace, de Hankel, ou de Fourier.

La formulation générale des transformations intégrales est la suivante :

$$F(\tau) = \int_a^b k(\tau, t) f(t) dt$$

Avec :

- $k(\tau, t)$  : le noyau,
- $F(\tau)$  : la fonction projetée dans l'espace des  $\tau$ ,
- $f(t)$  : la fonction originale.

### 4.1.5.3 Méthodes numériques

Pour résoudre numériquement un problème, il faut diviser l'espace en mailles élémentaires dans lesquelles les équations sont résolues localement. La méthode de discrétisation la plus utilisée actuellement est la méthode des éléments finis. Elle s'adapte à n'importe quelle géométrie, la taille du maillage est modifiée en fonction du problème posé, des lois de comportement (élasticité, plasticité, visco-plasticité) peuvent être considérées.

L'inconvénient principal de ce type de résolution est le temps de calcul. Dans le cas de géométries simples, la méthode des différences finies est plus simple à mettre en œuvre et aussi efficace. Le domaine est maillé en rectangles de mêmes dimensions.

Les techniques de discrétisation sont utilisées pour écrire un problème continu sous la forme d'un système d'équations linéaires. La taille de ce système est directement proportionnelle à celle du maillage.

### 4.1.6 Avantages et inconvénients

Les méthodes analytiques telles que les méthodes basées sur les potentiels ou l'analogie avec les ressorts sont avantageuses en termes de temps de calcul. Les résultats sont immédiats. De plus, la solution est continue. Par contre, leur domaine d'application est restreint à cause des différentes hypothèses utilisées pour déterminer les solutions.

Les méthodes semi-analytiques présentent un bon compromis entre le temps nécessaire à la résolution et la complexité du problème. Par contre, elles imposent un certain nombre d'hypothèses sur la géométrie. Les couches doivent être d'épaisseur constante, homogènes. La prise en compte d'un gradient de propriétés est possible avec une loi de variation définie (type loi puissance ou exponentielle), mais nécessite la reformulation du modèle.

Enfin, la géométrie du solide est imposée, soit parallélépipède, soit cylindrique en utilisant les transformations de Hankel équivalentes aux transformées de Fourier dans un repère axisymétrique, ou la méthode des potentiels.

**4.1.7 Effets de la chaleur sur les matériaux**

Dans un matériau non contraint avec des bords libres, la variation de température n'entraîne pas de champ de contraintes dans le massif. Au contraire, si les conditions aux limites s'opposent au champ de déplacement, la dilatation provoque la génération de contraintes qui s'ajoutent au champ existant (les effets d'échauffement dus à la déformation sont négligeables).

## 4.2 Détermination de la température et des contraintes thermiques

### 4.2.1 Position du problème

Le problème ainsi posé est axisymétrique, sera étudié en coordonnées cylindriques figure (4.1), les poinçons cylindriques supérieurs et inférieurs sont portés à une température respectivement  $T_0^1, T_0^2$ .

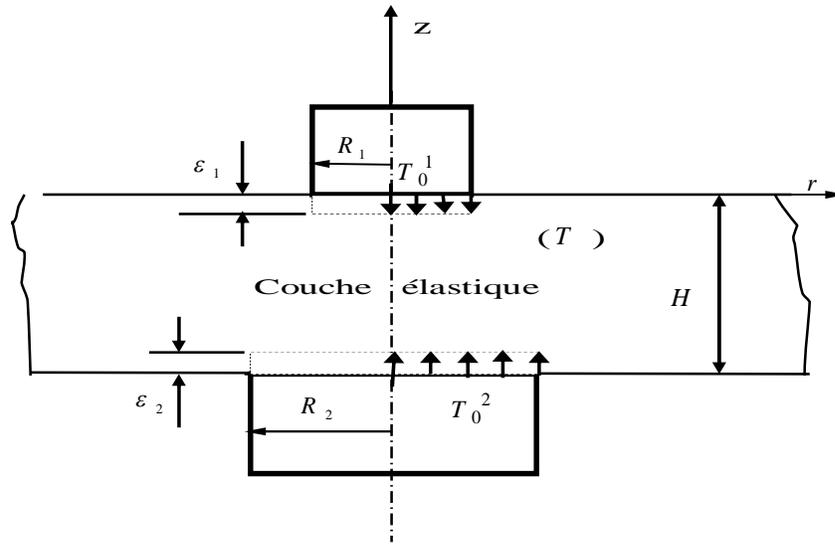


Fig.4.1. schéma du problème thermique

### 4.2.2 Solution aux limites du problème de conduction de la chaleur

La solution générale du problème du genre relatif à la distribution de la température (cas de transverse isotrope) s'exprime par la formule (2.16).

Soient les conditions aux limites relatives au problème (Fig.4.1), sont :

$$\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = h_0 (T_0^1 - T) \quad : (0 \leq r < R_1, \quad z = 0) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad : (r > R_1, \quad z = 0) \quad (4.2)$$

$$\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = h_0 (T - T_0^2) \quad : (0 \leq r < R_2, \quad z = -H) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad : (r > R_2, \quad z = -H) \quad (4.4)$$

Considérons le changement des variables suivants :

$$\rho = \frac{r}{R_1}, \quad \eta = \xi R_1, \quad \zeta = \frac{Z}{R_1},$$

$$\ell = \frac{H}{R_1}, \quad c = \frac{R_2}{R_1}$$

$$E_1(\eta) = \frac{\eta}{R_1^2} A\left(\frac{\eta}{R_1}\right)$$

$$E_2(\eta) = \frac{\eta}{R_1^2} B\left(\frac{\eta}{R_1}\right)$$

Par le changement de variables l'expression de  $T(\rho, \zeta)$  et sa première dérivée passent aux formes suivantes.

$$T(\rho, \zeta) = \int_0^{\infty} \left[ E_1(\eta) e^{\eta \frac{\zeta}{\lambda_z}} + E_2(\eta) e^{-\eta \frac{\zeta}{\lambda_z}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial T(\rho, \zeta)}{\partial \zeta} = \frac{1}{R \lambda_z} \int_0^{\infty} \left[ E_1(\eta) e^{\eta \frac{\zeta}{\lambda_z}} - E_2(\eta) e^{-\eta \frac{\zeta}{\lambda_z}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta \quad (4.6)$$

Satisfaisons les conditions aux limites indiquées fig.(4.1), nous obtenons un système de quatre équations intégrales :

$$\int_0^{\infty} \left[ (\eta + h_1) E_1(\eta) + (h_1 - \eta) E_2(\eta) \right] J_0(\rho \eta) d\eta = h_1 T_0^1 \quad : \rho < 1 \quad (4.7)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \left[ E_1(\eta) - E_2(\eta) \right] J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad : \rho > 1 \quad (4.8)$$

$$\int_0^{\infty} \left[ (\eta - h_1) E_1 e^{-\eta \frac{\ell}{\lambda_z}} - (\eta + h_1) E_2 e^{\eta \frac{\ell}{\lambda_z}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta = -h_1 T_0^2 \quad : 0 \leq \rho \leq c \quad (4.9)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \left[ E_1(\eta) e^{-\eta \frac{\ell}{\lambda_z}} + E_2(\eta) e^{\eta \frac{\ell}{\lambda_z}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad : \rho > c \quad (4.10)$$

Avec :

$$h_1 = \frac{h_0}{\alpha_z} R_1 \lambda_z$$

Reconsidérons les conditions (4.2) et (4.4) : en introduisant deux nouvelles fonctions  $\phi_1(\eta)$  et  $\phi_2(\eta)$ .

$$\begin{cases} E_1(\eta) - E_2(\eta) = \phi_1(\eta) \\ E_1(\eta) e^{-\eta \frac{\ell}{\lambda_z}} + E_2(\eta) e^{\eta \frac{\ell}{\lambda_z}} = \eta \phi_2(\eta) \end{cases}$$

D'où

$$E_1(\eta) = \frac{1}{2ch\left(\eta \frac{\ell}{\lambda_z}\right)} \left[ e^{\eta \frac{\ell}{\lambda_z}} \phi_1(\eta) + \eta \phi_2(\eta) \right]$$

$$E_2(\eta) = \frac{1}{2ch\left(\eta \frac{\ell}{\lambda_z}\right)} \left[ \eta \phi_2(\eta) - e^{-\eta \frac{\ell}{\lambda_z}} \phi_1(\eta) \right]$$

Les équations intégrales (4.7)-(4.10) s'écrivent de nouveau :

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{\eta}{ch\left(\eta \frac{\ell}{\lambda_z}\right)} \phi_2(\eta) + th\left(\eta \frac{\ell}{\lambda_z}\right) \phi_1(\eta) \right] J_0(\eta \rho) d\eta = h_1 T_0^1 \quad : \rho < 1 \quad (4.11)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad : \rho > 1 \quad (4.12)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \left[ \frac{1}{ch\left(\eta \frac{\ell}{\lambda_z}\right)} \phi_1(\eta) - \eta th\left(\eta \frac{\ell}{\lambda_z}\right) \phi_2(\eta) \right] J_0(\eta \rho) d\eta = -h_1 T_0^2 \quad : \rho < c \quad (4.13)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \phi_2(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad : \rho > c \quad (4.14)$$

Introduisant pour la résolution de ce présent système (4.11) (4.14) les fonctions  $U(x)$  et  $Y(x)$  définies par :

$$U(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases}, \quad Y(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases}$$

Soient  $U(\rho)$  et  $Y(\rho)$  les fonctions développables en séries de fonctions de Bessel.

$$X(\rho) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k J_0(\lambda_k \rho)$$

$$X(\rho=1) = a_0 = 0$$

$$Y(\rho) = b_0 + \sum_{k=1}^N b_k J_0\left(\frac{\lambda_k}{c} \rho\right)$$

$$Y(\rho=c) = b_0 = 0$$

$\lambda_k$  : Sont les racines de la fonction de Bessel d'ordre zéro.

$a_0 = b_0 = 0$ : marquer la continuité et compléter le domaine d'intégration.

Les deux conditions (4.12) et (4.14) se réécrivent en un nouveau système de deux équations intégrales.

$$\int_0^{\infty} \eta \phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = U(1-\rho) X(\rho) \quad : 0 \leq \rho < \infty \quad (4.15)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \phi_2(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = U(c-\rho) Y(\rho) \quad : 0 \leq \rho < \infty \quad (4.16)$$

Par les transformations inverses de Hankel, on tire de l'équation (4.15) et (4.16) les fonctions  $\phi_1(\eta)$  et  $\phi_2(\eta)$ .

$$\phi_1(\eta) = \int_0^{\infty} \rho U(1-\rho) X(\rho) J_0(\eta \rho) d\rho = \int_0^1 \rho X(\rho) J_0(\eta \rho) d\rho = \sum_{k=1}^N a_k \int_0^1 \rho J_0(\eta \rho) J_0(\lambda_k \rho) d\rho$$

$$\int_0^1 \rho J_0(\eta \rho) J_0(\lambda_k \rho) d\rho = \frac{-\lambda_k J_1(\lambda_k) J_0(\eta)}{\eta^2 - \lambda_k^2}$$

D'où :

$$\phi_1(\eta) = \sum_{k=1}^{N_1} a_k^* \frac{J_0(\eta)}{\eta^2 - \lambda_k^2} \quad (4.17)$$

Avec :

$$a_k^* = -\lambda_k J_1(\lambda_k) a_k = a_k \lambda_k J_{-1}(\lambda_k)$$

$$\phi_2(\eta) = \int_0^\infty \rho U(c - \rho) Y(\rho) J_0(\eta \rho) d\rho = \int_0^1 \rho Y(\rho) J_0(\eta \rho) d\rho = \sum_{k=1}^{N_1} b_k \int_0^1 \rho J_0(\eta \rho) J_0\left(\frac{\lambda_k}{c} \rho\right) d\rho$$

$$\phi_2(\eta) = \sum_{k=1}^{N_2} b_k^* \frac{J_0(c\eta)}{\eta^2 - \left(\frac{\lambda_k}{c}\right)^2} \quad (4.18)$$

Avec :

$$b_k^* = -\lambda_k J_1(\lambda_k) b_k = b_k \lambda_k J_{-1}(\lambda_k)$$

Substituons maintenant  $\phi_1(\eta)$  et  $\phi_2(\eta)$  dans les équations (4.11) et (4.13) .

$$\sum_{k=1}^N a_k^* \int_0^\infty th\left(\frac{\eta\ell}{\lambda_z}\right) \frac{J_0(\eta) J_0(\eta\rho)}{\eta^2 - \lambda_k^2} d\eta + \sum_{k=1}^N b_k^* \int_0^\infty \frac{\eta}{ch\left(\frac{\eta\ell}{\lambda_z}\right)} \frac{J_0(c\eta) J_0(\eta\rho)}{\eta^2 - \left(\frac{\lambda_k}{c}\right)^2} d\eta = h_1 T_0^1 \quad : \rho < 1 \quad (4.19)$$

$$\sum_{k=1}^N a_k^* \int_0^\infty \frac{\eta}{ch\left(\frac{\eta\ell}{\lambda_z}\right)} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta\rho)}{\eta^2 - \lambda_k^2} d\eta - \sum_{k=1}^N b_k^* \int_0^\infty \eta^2 th\left(\frac{\eta\ell}{\lambda_z}\right) \frac{J_0(c\eta) J_0(\eta\rho)}{\eta^2 - \left(\frac{\lambda_k}{c}\right)^2} d\eta = -h_1 T_0^2 \quad : \rho < c$$

(4.20) Les équations précédentes (4.19) (4.20) s'écrivent symboliquement :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_2} a_k^* L_k^1(\rho_j) + \sum_{k=1}^{n_2} b_k^* L_k^2(\rho_j) &= h_1 T_0^1 \\ \sum_{k=1}^{n_2} a_k^* L_k^3(\rho_j) + \sum_{k=1}^{n_2} b_k^* L_k^4(\rho_j) &= -h_1 T_0^2 \end{aligned} \quad , \quad (j = 1, n_1) \quad (4.21)$$

Avec:

$$L_k^1(\rho_j) = \int_0^\infty th \left( \frac{\eta \ell}{\lambda_z} \right) \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{\eta^2 - \lambda_k^2} d\eta$$

$$L_k^2(\rho_j) = \int_0^\infty \frac{\eta}{ch \left( \frac{\eta \ell}{\lambda_z} \right)} \frac{J_0(c\eta) J_0(\eta \rho)}{\eta^2 - \left( \frac{\lambda_k}{c} \right)^2} d\eta$$

$$L_k^3(\rho_j) = \int_0^\infty \frac{\eta}{ch \left( \frac{\eta \ell}{\lambda_z} \right)} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{\eta^2 - \lambda_k^2} d\eta$$

$$L_k^4(\rho_j) = \int_0^\infty \eta^2 th \left( \frac{\eta \ell}{\lambda_z} \right) \frac{J_0(c\eta) J_0(\eta \rho)}{\eta^2 - \left( \frac{\lambda_k}{c} \right)^2} d\eta$$

Sous forme linéaire :

$$a_1^* L_1^1(\rho_1) + a_2^* L_2^1(\rho_1) + \dots + a_{n_2}^* L_{n_2}^1(\rho_1) + b_1^* L_1^2(\rho_1) + b_2^* L_2^2(\rho_1) + \dots + b_{n_2}^* L_{n_2}^2(\rho_1) = h_1 T_0^1$$

$$a_1^* L_1^1(\rho_2) + a_2^* L_2^1(\rho_2) + \dots + a_{n_2}^* L_{n_2}^1(\rho_2) + b_1^* L_1^2(\rho_2) + b_2^* L_2^2(\rho_2) + \dots + b_{n_2}^* L_{n_2}^2(\rho_2) = h_1 T_0^1$$

.....

$$a_1^* L_1^1(\rho_{n_1}) + a_2^* L_2^1(\rho_{n_1}) + \dots + a_{n_2}^* L_{n_2}^1(\rho_{n_1}) + b_1^* L_1^2(\rho_{n_1}) + b_2^* L_2^2(\rho_{n_1}) + \dots + b_{n_2}^* L_{n_2}^2(\rho_{n_1}) = h_1 T_0^1$$

$$a_1^* L_1^3(\rho_1) + a_2^* L_2^3(\rho_1) + \dots + a_{n_2}^* L_{n_2}^3(\rho_1) + b_1^* L_1^4(\rho_1) + b_2^* L_2^4(\rho_1) + \dots + b_{n_2}^* L_{n_2}^4(\rho_1) = -h_1 T_0^2$$

$$a_1^* L_1^3(\rho_2) + a_2^* L_2^3(\rho_2) + \dots + a_{n_2}^* L_{n_2}^3(\rho_2) + b_1^* L_1^4(\rho_2) + b_2^* L_2^4(\rho_2) + \dots + b_{n_2}^* L_{n_2}^4(\rho_2) = -h_1 T_0^2$$

.....

$$a_1^* L_1^3(\rho_{n_1}) + a_2^* L_2^3(\rho_{n_1}) + \dots + a_{n_2}^* L_{n_2}^3(\rho_{n_1}) + b_1^* L_1^4(\rho_{n_1}) + b_2^* L_2^4(\rho_{n_1}) + \dots + b_{n_2}^* L_{n_2}^4(\rho_{n_1}) = -h_1 T_0^2$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} L_1^2(\rho_1) & L_2^2(\rho_1) & \dots\dots\dots & L_{n_2}^2(\rho_1) & L_1^1(\rho_1) & L_2^1(\rho_1) & \dots\dots\dots & L_{n_2}^1(\rho_1) \\ L_1^2(\rho_2) & L_2^2(\rho_2) & \dots\dots\dots & L_{n_2}^2(\rho_2) & L_1^1(\rho_2) & L_2^1(\rho_2) & \dots\dots\dots & L_{n_2}^1(\rho_2) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ L_1^2(\rho_{n_1}) & L_2^2(\rho_{n_1}) & \dots\dots\dots & L_{n_2}^2(\rho_{n_1}) & L_1^1(\rho_{n_1}) & L_2^1(\rho_{n_1}) & \dots\dots\dots & L_{n_2}^1(\rho_{n_1}) \\ L_1^3(\rho_1) & L_2^3(\rho_1) & \dots\dots\dots & L_{n_2}^3(\rho_1) & L_1^4(\rho_1) & L_2^4(\rho_1) & \dots\dots\dots & L_{n_2}^4(\rho_1) \\ L_1^3(\rho_2) & L_2^3(\rho_2) & \dots\dots\dots & L_{n_2}^3(\rho_2) & L_1^4(\rho_2) & L_2^4(\rho_2) & \dots\dots\dots & L_{n_2}^4(\rho_2) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ L_1^3(\rho_{n_1}) & L_2^3(\rho_{n_1}) & \dots\dots\dots & L_{n_2}^3(\rho_{n_1}) & L_1^4(\rho_{n_1}) & L_2^4(\rho_{n_1}) & \dots\dots\dots & L_{n_2}^4(\rho_{n_1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \dots \\ a_{n_2}^* \\ b_1^* \\ b_2^* \\ \dots \\ b_{n_2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 T_0^1 \\ h_1 T_0^1 \\ \dots \\ h_1 T_0^1 \\ -h_1 T_0^2 \\ -h_1 T_0^2 \\ \dots \\ -h_1 T_0^2 \end{pmatrix}$$

### 4.2.3 Détermination de la répartition de la température

Revenant à présent à la formule générale (2.16) calculant la température  $T(\rho, \zeta)$  dans laquelle nous remplaçant  $E_1(\eta), E_2(\eta)$  par leurs expressions.

$$T(\rho, \zeta) = \int_0^\infty \left[ E_1(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda_z}} + E_2(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{\lambda_z}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta$$

$$T(\rho, \zeta) = \int_0^\infty \frac{1}{2ch \left( \frac{\eta \ell}{\lambda_z} \right)} \left[ \phi_1(\eta) \left( e^{\frac{\eta(\ell+\zeta)}{\lambda_z}} - e^{-\frac{\eta(\ell+\zeta)}{\lambda_z}} \right) + \eta \phi_2(\eta) \left( e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda_z}} + e^{-\frac{\eta \zeta}{\lambda_z}} \right) \right] J_0(\eta \rho) d\eta$$

Remplacent  $\phi_1(\eta)$  et  $\phi_2(\eta)$  par leurs nouvelles expressions (4.17), et (4.18).

$$T(\rho, \zeta) = \sum_{k=1}^{N_1} a_k^* \int_0^\infty \frac{sh \frac{\eta(\ell+\zeta)}{\lambda_z}}{ch \left( \frac{\eta \ell}{\lambda_z} \right)} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta \rho)}{\eta^2 - \lambda_k^2} d\eta + \sum_{k=1}^{N_2} b_k^* \int_0^\infty \frac{\eta ch \left( \frac{\eta \zeta}{\lambda_z} \right)}{ch \left( \frac{\eta \ell}{\lambda_z} \right)} \frac{J_0(c\eta) J_0(\eta \rho)}{\eta^2 - \left( \frac{\lambda_k}{c} \right)^2} d\eta \quad (4.22)$$

Sous forme comprimée :

$$T(\rho, \zeta) = \sum_{k=1}^{n_2} a_k^* L_k^5(\rho_j) + \sum_{k=1}^{n_2} b_k^* L_k^6(\rho_j) \quad , \quad (j = 1, n_1) \quad (4.23)$$

Avec :

$$L_k^5(\rho_j) = \int_0^\infty \frac{sh \frac{\eta(\ell + \zeta)}{\lambda_z}}{ch\left(\frac{\eta\ell}{\lambda_z}\right)} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta\rho)}{\eta^2 - \lambda_k^2} d\eta$$

$$L_k^6(\rho_j) = \int_0^\infty \frac{\eta ch\left(\frac{\eta\zeta}{\lambda_z}\right)}{ch\left(\frac{\eta\ell}{\lambda_z}\right)} \frac{J_0(c\eta) J_0(\eta\rho)}{\eta^2 - \left(\frac{\lambda_k}{c}\right)^2} d\eta$$

L'expression finale de la répartition du champ thermique étant définie, dont les coefficients  $a_k^*$  et  $b_k^*$  sont déterminés de la résolution du système d'équations algébriques (4.21),

Sous forme linéaire :

$$T(1,1) = a_1^* L_1^5(\rho_1) + a_2^* L_2^5(\rho_1) + \dots + a_{n_2}^* L_{n_2}^5(\rho_1) + b_1^* L_1^6(\rho_1) + b_2^* L_2^6(\rho_1) + \dots + b_{n_2}^* L_{n_2}^6(\rho_1)$$

$$T(2,1) = a_1^* L_1^5(\rho_2) + a_2^* L_2^5(\rho_2) + \dots + a_{n_2}^* L_{n_2}^5(\rho_2) + b_1^* L_1^6(\rho_2) + b_2^* L_2^6(\rho_2) + \dots + b_{n_2}^* L_{n_2}^6(\rho_2)$$

.....

$$T(n,1) = a_1^* L_1^5(\rho_{n_1}) + a_2^* L_2^5(\rho_{n_1}) + \dots + a_{n_2}^* L_{n_2}^5(\rho_{n_1}) + b_1^* L_1^6(\rho_{n_1}) + b_2^* L_2^6(\rho_{n_1}) + \dots + b_{n_2}^* L_{n_2}^6(\rho_{n_1})$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} T(1,1) \\ T(2,1) \\ \dots \\ T(n,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^5(\rho_1) & L_2^5(\rho_1) & \dots & L_{n_2}^5(\rho_1) & L_1^6(\rho_1) & L_2^6(\rho_1) & \dots & L_{n_2}^6(\rho_1) \\ L_1^5(\rho_2) & L_2^5(\rho_2) & \dots & L_{n_2}^5(\rho_2) & L_1^6(\rho_2) & L_2^6(\rho_2) & \dots & L_{n_2}^6(\rho_2) \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ L_1^5(\rho_{n_1}) & L_2^5(\rho_{n_1}) & \dots & L_{n_2}^5(\rho_{n_1}) & L_1^6(\rho_{n_1}) & L_2^6(\rho_{n_1}) & \dots & L_{n_2}^6(\rho_{n_1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ \dots \\ a_{n_2}^* \\ b_1^* \\ \dots \\ b_{n_2}^* \end{pmatrix}$$

#### 4.2.4 Détermination de contraintes thermiques

Substituant  $E_1(\eta)$ ,  $E_2(\eta)$ ,  $\phi_1(\eta)$  et  $\phi_2(\eta)$  par leur expression dans (2.19), on aura la formule déterminant les contraintes sous l'effet thermique :

$$\sigma_z^{(T)}(\rho, \zeta) = -\lambda_z^2 h_1^* \left[ \sum_{k=1}^{N_2} a_k^* L_k^5(\rho) + \sum_{k=1}^{N_2} b_k^* L_k^6(\rho) \right] \quad (4.24)$$

D'où l'expression (4.24) donnant la distribution des contraintes dans la couche. Les valeurs de  $a_k^*$  et  $b_k^*$  sont définis dans l'annexe 3, il suffit de varier les valeurs de ( $\rho$ ) pour chaque valeur de ( $\zeta$ ) et calculer les intégrales correspondantes  $L_k^i(\rho_j)$  ( $i = 1, 4$ ), ( $k = 1, n_2$ ), ( $j = 1, n_1$ ).

### 4.3 Position du problème de la thermoélectricité

La couche transverse-isotrope est à présent chargée par deux poinçons chauffés à la température respectivement  $T_0^1, T_0^2$ . Ce qui implique l'effet des chargements mécaniques et thermiques (thermo-élastique).

Soient les conditions aux limites :

$$U_z^{(P)} + U_z^{(T)} = -\varepsilon_1 \quad : (0 \leq r \leq R_1, \quad z = 0) \quad (4.25)$$

$$\tau_{rz}^{(P)} + \tau_{rz}^{(T)} = 0 \quad : (0 \leq r \leq \infty, \quad z = 0) \quad (4.26)$$

$$\sigma_z^{(P)} + \sigma_z^{(T)} = 0 \quad : (r > R_1, \quad z = 0) \quad (4.27)$$

$$U_z^{(P)} + U_z^{(T)} = +\varepsilon_2 \quad : (0 \leq r < R_2, \quad z = -H) \quad (4.28)$$

$$\tau_{rz}^{(P)} + \tau_{rz}^{(T)} = 0 \quad : (0 \leq r \leq \infty, \quad z = -H) \quad (4.29)$$

$$\sigma_z^{(P)} + \sigma_z^{(T)} = 0 \quad : (r > R_2, \quad z = -H) \quad (4.30)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  : Profondeurs de pénétration dans la couche élastique des deux poinçons respectivement de dessus et de dessous.

#### 4.3.1 Méthode de résolution aux limites du problème thermo-élastique

Rappelons les formules générales des contraintes et déplacements élastiques et thermiques utilisés pour résoudre séparément les deux problèmes mécanique et thermique.

Les formules des contraintes et déplacements élastiques :

$$U_z = \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \frac{k_1}{v_1} \left\{ \left[ -F_1(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{v_1}} + F_2(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{v_1}} \right] + \frac{k_2}{v_2} \left[ -F_3(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{v_2}} + F_4(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{v_2}} \right] \right\} J_0(\eta \rho) d\eta$$

$$\tau_{rz} = -\frac{A_{44}}{R} \int_0^\infty \left\{ \frac{1+k_1}{v_1} \left[ -F_1(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{v_1}} + F_2(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{v_1}} \right] + \frac{1+k_2}{v_2} \left[ -F_3(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{v_2}} + F_4(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{v_2}} \right] \right\} J_0(\eta \rho) d\eta$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{R} \int_0^\infty \left\{ \frac{d_1}{v_1^2} \left[ F_1(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{v_1}} + F_2(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{v_1}} \right] + \frac{d_2}{v_2^2} \left[ F_3(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{v_2}} + F_4(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{v_2}} \right] \right\} J_0(\eta \rho) d\eta$$

Les formules déterminant les contraintes et les déplacements sous l'effet thermique :

$$U_z^{(T)}(\rho, \zeta) = -a_1 \lambda_z h_2^* R \int_0^\infty \eta^{-1} \left[ E_1(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda_z}} + E_2(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{\lambda_z}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta$$

$$\tau_z^{(T)}(\rho, \zeta) = \lambda_z h_1^* \int_0^\infty \left[ E_1(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda_z}} + E_2(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{\lambda_z}} \right] J_1(\eta \rho) d\eta$$

$$\sigma_z^{(T)}(\rho, \zeta) = -\lambda_z^2 h_1^* \int_0^\infty \left[ E_1(\eta) e^{\frac{\eta \zeta}{\lambda_z}} + E_2(\eta) e^{-\frac{\eta \zeta}{\lambda_z}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta$$

Satisfaisons les conditions (4.25) - (4.30) et introduisons deux nouvelles fonctions  $\phi_1(\eta)$  et  $\phi_2(\eta)$  dans les conditions (4.27) et (4.30), nous obtenons le système d'équations algébrique aux inconnues suivantes  $F_i(\eta) : (i=1,4)$ .

$$\int_0^{\infty} \eta^{-1} \left\{ \frac{k_1}{v_1} [-F_1(\eta) + F_2(\eta)] + \frac{k_2}{v_2} [-F_3(\eta) + F_4(\eta)] - a_1 \lambda_z h_2^* R_1 [E_1(\eta) + E_2(\eta)] \right\}^* \quad (4.31)$$

$$* J_0(\eta \rho) d\eta = -\varepsilon_1$$

$$\frac{1+k_1}{v_1} [-F_1(\eta) + F_2(\eta)] + \frac{1+k_2}{v_2} [-F_3(\eta) + F_4(\eta)] - \left( \frac{R_1}{A_{44}} \lambda_z h_1^* \right) [E_1(\eta) + E_2(\eta)] = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{d_1}{v_1^2} [F_1(\eta) + F_2(\eta)] + \frac{d_2}{v_2^2} [-F_3(\eta) + F_4(\eta)] - \lambda_z^2 h_1^* R_1 [E_1(\eta) + E_2(\eta)] = R_1 \eta \phi_1(\eta) \quad (4.33)$$

$$\int_0^{\infty} \eta^{-1} \left\{ \frac{k_1}{v_1} \left[ -F_1(\eta) e^{\frac{\eta \ell}{v_1}} + F_2(\eta) e^{-\frac{\eta \ell}{v_1}} \right] + \frac{k_2}{v_2} \left[ -F_3(\eta) e^{\frac{\eta \ell}{v_2}} + F_4(\eta) e^{-\frac{\eta \ell}{v_2}} \right] \right\} J_0(\eta \rho) d\eta - * \quad (4.34)$$

$$* - a_1 \lambda_z h_2^* R_1 \int_0^{\infty} \eta^{-1} \left[ E_1(\eta) e^{\frac{-\eta \ell}{\lambda_z}} + E_2(\eta) e^{\frac{\eta \ell}{\lambda_z}} \right] J_0(\eta \rho) d\eta = \varepsilon_2$$

$$\frac{1+k_1}{v_1} \left[ -F_1(\eta) e^{\frac{\eta \ell}{v_1}} + F_2(\eta) e^{-\frac{\eta \ell}{v_1}} \right] + \frac{1+k_2}{v_2} \left[ -F_3(\eta) e^{\frac{\eta \ell}{v_2}} + F_4(\eta) e^{-\frac{\eta \ell}{v_2}} \right] - * \quad (4.35)$$

$$* \left( \frac{R_1}{A_{44}} \lambda_z h_1^* \right) \left[ E_1(\eta) e^{\frac{\eta \ell}{\lambda_z}} + E_2(\eta) e^{-\frac{\eta \ell}{\lambda_z}} \right] = 0$$

$$\frac{d_1}{v_1^2} \left[ F_1(\eta) e^{\frac{\eta \ell}{v_1}} + F_2(\eta) e^{-\frac{\eta \ell}{v_1}} \right] + \frac{d_2}{v_2^2} \left[ F_3(\eta) e^{\frac{\eta \ell}{v_2}} + F_4(\eta) e^{-\frac{\eta \ell}{v_2}} \right] - * \quad (4.36)$$

$$* (\lambda_z^2 R_1 h_1^*) \left[ E_1(\eta) e^{\frac{\eta \ell}{\lambda_z}} + E_2(\eta) e^{-\frac{\eta \ell}{\lambda_z}} \right] = R_1 \eta \phi_2(\eta)$$

Ecrivons le système d'équations algébrique (4.32), (4.35), (4.33) et (4.36), aussi obtenu.

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{-(1+k_1)}{v_1} & \frac{1+k_1}{v_1} & \frac{-(1+k_{s2})}{v_2} & \frac{1+k_2}{v_2} \\ \frac{-(1+k_1)e^{\frac{\eta\ell}{v_1}}}{v_1} & \frac{1+k_1}{v_1}e^{-\frac{\eta\ell}{v_1}} & \frac{-(1+k_2)e^{\frac{\eta\ell}{v_2}}}{v_2} & \frac{1+k_2}{v_2}e^{-\frac{\eta\ell}{v_2}} \\ \frac{d_1}{v_1^2} & \frac{d_1}{v_1^2} & \frac{d_2}{v_2^2} & \frac{d_2}{v_2^2} \\ \frac{d_1}{v_1^2}e^{\frac{\eta\ell}{v_1}} & \frac{d_1}{v_1^2}e^{-\frac{\eta\ell}{v_1}} & \frac{d_2}{v_2^2}e^{\frac{\eta\ell}{v_2}} & \frac{d_2}{v_2^2}e^{-\frac{\eta\ell}{v_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(\eta) \\ F_2(\eta) \\ F_3(\eta) \\ F_4(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R}{A_{44}}\lambda_z h_1^* [E_1(\eta) + E_2(\eta)] \\ \frac{R_1}{A_{44}}\lambda_z^2 h_1^* \left[ E_1(\eta)e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} + E_2(\eta)e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} \right] \\ \lambda_z^2 h_1^* R_1 [E_1(\eta) + E_2(\eta)] + R_1 \eta \phi_1(\eta) \\ \lambda_z^2 h_1^* R_1 \left[ E_1(\eta)e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} + E_2(\eta)e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} \right] + R_1 \eta \phi_2(\eta) \end{pmatrix}$$

Résoudre ce système d'équations linéaire et obtenir les fonctions  $F_i(\eta) : (i=1,4)$

exprimées en fonction de  $\phi_1(\eta)$  et  $\phi_2(\eta)$  n'est pas pratique par les méthodes directes telle que la méthode de Gauss. Les expressions seront très longues, difficiles à les manipuler et les erreurs sont très probables. Nous, nous en passons de cette manière.

### 4.3.2 Méthodologie de résolution du système d'équations algébriques

Soustrayons l'équation condition (4.32) de l'équation condition (4.35) après avoir multiplié les deux équations respectivement par  $k_1$  et  $(1+k_1)$

$$\left[ -(1+k_1)\frac{k_2}{v_2} + (1+k_2)\frac{k_1}{v_2} \right] e^{\frac{\eta\ell}{v_2}} F_1(\eta) + \left[ (1+k_1)\frac{k_2}{v_2} - (1+k_2)\frac{k_1}{v_2} \right] e^{-\frac{\eta\ell}{v_2}} F_2(\eta) = *$$

$$* (1+k_1)a_1\lambda_z h_2 R_1 \left[ E_1(\eta)e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} + E_2(\eta)e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} \right] - k_1 \frac{R_1}{A_{44}} \lambda_z h_1 \left[ E_1(\eta)e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} + E_2(\eta)e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} \right]$$

D'où l'expression de  $F_2(\eta)$  en fonction de  $F_1(\eta)$ ,

$$F_2(\eta) = \left( (1+k_1)a_1\lambda_z h_2 R_1 - k_1 \frac{R_1}{A_{44}} \lambda_z h_1 \right) \frac{v_2}{(k_2 - k_1)} \left[ E_1(\eta)e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} + E_2(\eta)e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} \right] e^{\frac{\eta\ell}{v_2}} + e^{-\frac{2\eta\ell}{v_2}} F_1(\eta)$$

Sous forme simplifiée

$$F_2(\eta) = \beta_1 (E_1 e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} + E_2 e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}}) e^{\frac{\eta\ell}{v_2}} + e^{-\frac{2\eta\ell}{v_2}} F_1(\eta)$$

Avec :

$$\beta_1 = \left( (1+k_1)a_1\lambda_z h_2 R_1 - k_1 \frac{R_1}{A_{44}} \lambda_z h_1 \right) \frac{v_2}{k_2 - k_1}$$

Substituons  $F_2(\eta)$  par  $F_1(\eta)$  dans l'équation condition (4.31).

$$\frac{1+k_1}{\nu_1} \left[ -F_1 e^{\frac{\eta\ell}{\nu_1}} + F_2 e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_1}} \right] + \frac{1+k_2}{\nu_2} \left[ -F_3 e^{\frac{\eta\ell}{\nu_2}} + F_4 e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_2}} \right] = \frac{R_1}{A_{44}} \lambda_z h_1 (E_1 e^{-\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} + E_2 e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}})$$

Qui se simplifie en :

$$\frac{1+k_1}{\nu_1} \left[ -F_4 e^{\frac{\eta\ell}{\nu_1}} + F_3 e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_1}} \right] + \frac{1+k_2}{\nu_2} \beta_1 \left[ E_1 e^{-\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} + E_2 e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} \right] = \frac{R_1}{A_{44}} \lambda_z h_1 \left[ E_1 e^{-\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} + E_2 e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} \right]$$

Ce qui donne  $F_4(\eta)$  en fonction de  $F_3(\eta)$

$$F_4(\eta) = \beta_2 (E_1 e^{-\frac{\eta\ell}{\lambda_z}} + E_2 e^{\frac{\eta\ell}{\lambda_z}}) e^{\frac{\eta\ell}{\nu_1}} + e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_1}} F_3(\eta)$$

Avec :

$$\beta_2 = \left[ \frac{R_1}{A_{44}} \lambda_z h_1 - \frac{1+k_2}{k_2-k_1} (a_1 \lambda_z h_2 R_1 (1+k_1) - \frac{R_1}{A_{44}} \lambda_z h_1 k_1) \right] \frac{\nu_1}{1+k_1}$$

Substituons à présent dans les équations conditions (4.33) et (4.34)  $F_2(\eta)$  exprimée par  $F_1(\eta)$  et  $F_4(\eta)$  exprimée par  $F_3(\eta)$  on obtient deux équations algébriques en fonction de  $F_1(\eta)$  et  $F_3(\eta)$ .

$$\begin{pmatrix} A \left( e^{\frac{\eta\ell}{\nu_2}} - e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_1}} \right) - (B-A) sh \frac{\eta\ell}{\nu_1} & A \left( e^{\frac{\eta\ell}{\nu_1}} - e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_2}} \right) - (A+B) sh \frac{\eta\ell}{\nu_1} \\ B e^{\frac{\eta\ell}{\nu_2}} - A e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_1}} - (B-A) ch \frac{\eta\ell}{\nu_1} & A e^{\frac{\eta\ell}{\nu_1}} + B e^{-\frac{\eta\ell}{\nu_2}} - (A+B) ch \frac{\eta\ell}{\nu_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(\eta) \\ F_3(\eta) \end{pmatrix} = *$$

$$* \begin{pmatrix} T_1 E_1(\eta) + T_2 E_2(\eta) - R_1 \eta (1+k_1) \phi_1(\eta) sh \frac{\eta\ell}{\nu_1} \\ V_1(\eta\ell) E_1(\eta) + V_2(\eta\ell) E_2(\eta) - R_1 \eta (1+k_1) \left( \phi_2(\eta) - \phi_1(\eta) ch \frac{\eta\ell}{\nu_1} \right) \end{pmatrix}$$

Par Cramer, on détermine la fonction  $F_1(\eta)$  par le rapport :

$$F_1(\eta) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$\Delta$  : Etant le déterminant de la matrice des coefficients des inconnues  $F_1(\eta)$  et  $F_3(\eta)$

$$\Delta = \left( D_2 e^{\frac{\eta \ell}{\lambda_z}} - D_1 e^{\frac{\eta \ell}{v_1}} - (D_2 - D_1) ch \frac{\eta \ell}{v_1} \right) E_1(\eta) \left( D_2 e^{\frac{\eta \ell}{\lambda_z}} - D_1 e^{\frac{\eta \ell}{v_1}} - (D_2 - D_1) ch \frac{\eta \ell}{v_1} \right) E_2(\eta) - *$$

$$*R_1 \eta (1 + k_1) \left( \phi_2 - \phi_1 ch \frac{\eta \ell}{v_1} \right)$$

Qui se simplifie en :

$$\Delta = \frac{A^2}{v_1^2} \left[ 4v_1 v_2 + (v_1 - v_2)^2 ch(\alpha \eta \ell) - (v_1 + v_2)^2 ch(\beta \eta \ell) \right]$$

Avec :

$$A = \frac{1}{v_1 v_2^3} \frac{(k_1 A_{33} - v_1^2 A_{13})(k_2 A_{33} - v_1^2 A_{13})}{A_{44}}$$

$\Delta_1$  : Est le déterminant de la matrice composée des coefficients de l'inconnue  $F_3(\eta)$  et des termes de la colonne gauche en remplacement des coefficients de l'inconnue  $F_1(\eta)$ .

$$\Delta_1 = [T_1 E_1 + T_2 E_2] \left[ A e^{\frac{\eta \ell}{v_1}} + B e^{\frac{-\eta \ell}{v_2}} - (A + B) ch \frac{\eta \ell}{v_1} \right] - [V_1 E_1 + V_2 E_2] \left[ A (e^{\frac{\eta \ell}{v_1}} + e^{\frac{-\eta \ell}{v_2}}) - (A + B) sh \frac{\eta \ell}{v_1} \right] + *$$

$$*R_1 \eta (1 + k_1) \left( A - \frac{e^{\beta \eta \ell}}{2} (A + B) - \frac{e^{\alpha \eta \ell}}{2} (A - B) \right) \phi_1 R_1 \eta (1 + k_1) \left[ A e^{\frac{\eta \ell}{v_1}} + \frac{e^{\frac{-\eta \ell}{v_2}}}{2} (B - A) - \frac{e^{\frac{-\eta \ell}{v_2}}}{2} (A + B) \right] \phi_2$$

$$F_3(\eta) = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$\Delta_3$  : Est le déterminant de la matrice composée des coefficients de l'inconnue  $F_1(\eta)$  et des termes de la colonne droite en remplacement des coefficients de l'inconnue  $F_3(\eta)$ .

$$\Delta_3 = [V_1 E_1 + V_2 E_2] \left[ A (e^{\frac{\eta \ell}{v_2}} - e^{\frac{\eta \ell}{v_1}}) - (B - A) sh \frac{\eta \ell}{v_1} \right] - [T_1 E_1 + T_2 E_2] \left[ B e^{\frac{\eta \ell}{v_2}} - A e^{\frac{\eta \ell}{v_1}} (B - A) ch \frac{\eta \ell}{v_1} \right] + *$$

$$*R_1 \eta (1 + k_1) \left[ A e^{\frac{-\eta \ell}{v_2}} - \frac{e^{\frac{\eta \ell}{v_1}}}{2} (A + B) - \frac{e^{\frac{\eta \ell}{v_2}}}{2} (A - B) \right] \phi_2 R_1 \eta (1 + k_1) \phi_1 sh \frac{\eta \ell}{v_1} \left[ B e^{\frac{\eta \ell}{v_2}} - A e^{\frac{\eta \ell}{v_1}} - (B - A) ch \frac{\eta \ell}{v_1} \right]$$

Avec :

$$T_1(\eta^\ell) = D_1 \left[ e^{\frac{\eta^\ell}{\lambda_z}} - e^{\frac{\eta^\ell}{\nu_1}} \right] - (D_2 - D_1) sh \frac{\eta^\ell}{\nu_1}$$

$$T_2(\eta^\ell) = D_1 \left[ e^{\frac{\eta^\ell}{\lambda_z}} - e^{\frac{\eta^\ell}{\nu_1}} \right] - (D_2 - D_1) sh \frac{\eta^\ell}{\nu_1}$$

$$V_1(\eta^\ell) = \left[ D_2 e^{\frac{\eta^\ell}{\lambda_z}} - D_1 e^{\frac{\eta^\ell}{\nu_1}} \right] - (D_2 - D_1) ch \frac{\eta^\ell}{\nu_1}$$

$$V_2(\eta^\ell) = \left[ D_2 e^{\frac{\eta^\ell}{\lambda_z}} + D_1 e^{\frac{\eta^\ell}{\nu_1}} \right] - (D_2 - D_1) ch \frac{\eta^\ell}{\nu_1}$$

De l'équation condition (4.32), on tire la somme des deux fonctions  $(-F_1(\eta) + F_2(\eta))$  en fonction de la somme des deux autres  $(-F_3(\eta) + F_4(\eta))$  soit :

$$-F_1(\eta) + F_2(\eta) = \frac{\nu_1}{1+k_1} \left[ \frac{R_1}{A_{44}} \lambda_z h_1 (E_1(\eta) + E_2(\eta)) - \frac{1+k_2}{\nu_2} (-F_3(\eta) + F_4(\eta)) \right]$$

Que nous substituons dans les conditions (4.31) et (4.34) on aura :

$$\frac{k_1 - k_2}{(1+k_1)\nu_2} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} [F_3(\eta) - F_4(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta = -\varepsilon_1 + a_1 \lambda_z h_2^* R_1 \int_0^\infty \frac{1}{\eta} [E_1 + E_2] J_0(\eta\rho) d\eta$$

$$\frac{k_1 - k_2}{(1+k_1)\nu_2} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left[ F_3 e^{\frac{\eta^\ell}{\nu_2}} - F_4 e^{-\frac{\eta^\ell}{\nu_2}} \right] J_0(\eta\rho) d\eta = \varepsilon_2 + (a_1 \lambda_z h_2^* R_1) \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left[ E_1 e^{-\frac{\eta^\ell}{\lambda_z}} + E_2 e^{\frac{\eta^\ell}{\lambda_z}} \right] J_0(\eta\rho) d\eta$$
(4.37)

Le système d'équations intégrales (4.36)-(4.36) se réduit à quatre équations intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty \phi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta - \frac{\varepsilon}{R_1} \delta_0 + \int_0^\infty [G_2(\eta^\ell) \phi_2(\eta) + G_1(\eta^\ell) \phi_1(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta + (a_1 \lambda_z h_2^* \delta_0)^*$$
(4.38)

$$* \int_0^\infty \frac{1}{\eta} [\phi_1(\eta) + \phi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta - \frac{1}{1+k_1} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} [Z_1(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta \quad : \rho < 1$$

$$\int_0^\infty \eta \phi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \quad : \rho > 1 \quad (4.39)$$

$$\int_0^\infty \phi_2(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = \frac{-\varepsilon_1}{R_1} \delta_0 \int_0^\infty [G_2(\eta^\ell) \phi_1(\eta) + G_1(\eta^\ell) \phi_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta + (a_1 \lambda_0 h_2^* \delta_0)^*$$
(4.40)

$$* \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \left[ \phi_1(\eta) e^{\frac{\eta^\ell}{\lambda_z}} + \phi_2(\eta) e^{-\frac{\eta^\ell}{\lambda_z}} \right] J_0(\eta\rho) d\eta - \frac{1}{(1+k_1)} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} [Z_2(\eta)] J_0(\eta\rho) d\eta \quad : \rho < c$$

$$\int_0^\infty \eta \phi_2(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0 \quad : \rho > c \quad (4.41)$$

L'introduction de nouvelles fonctions  $Z_1(\eta)$  et  $Z_2(\eta)$  Réduisant le volume de l'équation (4.38) et (4.40).

Avec :

$$Z_1(\eta) = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} (v_1 - v_2)(T_1(\eta\ell)E_1(\eta) + T_2(\eta\ell)E_2(\eta)) \left( 2v_2ch\frac{\eta\ell}{v_2} - 2v_1ch\frac{\eta\ell}{v_1} \right) - \\ (v_1 - v_2)(V_1(\eta\ell)E_1(\eta) + V_2(\eta\ell)E_2(\eta)) \left( 2v_1ch\frac{\eta\ell}{v_2} - 2v_2sh\frac{\eta\ell}{v_1} \right) \end{array} \right\}$$

$$Z_2(\eta) = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} (v_1 - v_2)(T_1(\eta\ell)E_1 + T_2(\eta\ell)E_2) \left( 2v_1e^{\frac{\eta\ell}{v_1}}sh\frac{\eta\ell}{v_2} - 2v_2 - 2v_1ch\frac{\eta\ell}{v_1}ch\frac{\eta\ell}{v_2} - 2v_2ch\frac{\eta\ell}{v_1}ch\frac{\eta\ell}{v_2} \right) \\ (V_1(\eta\ell)E_1 + V_2(\eta\ell)E_2) \left( 2v_1ch\frac{\eta\ell}{v_2} - 2v_2sh\frac{\eta\ell}{v_1} \right) \end{array} \right\}$$

$$\delta_0 = \frac{(A_{13} + A_{44})v_2d_1(1+k_2)}{A_{11}(v_1 + v_2)v_1^2v_2}$$

$$G_1(\eta\ell) = 1 \frac{(v_1 - v_2) \left[ (v_1 - v_2)sh(\alpha\eta\ell) - (v_1 + v_2)sh(\beta\eta\ell) \right]}{\frac{A^2}{v_1^2} \left[ 4v_1v_2 + (v_1 - v_2)^2 ch(\alpha\eta\ell) - (v_1 + v_2)^2 ch(\beta\eta\ell) \right]}$$

$$G_2(\eta\ell) = \frac{(v_1 - v_2) \left[ 2v_1ch\eta\frac{\ell}{v_2} - 2v_2sh\eta\frac{\ell}{v_1} \right]}{\frac{A^2}{v_1^2} \left[ 4v_1v_2 + (v_1 - v_2)^2 ch(\alpha\eta\ell) - (v_1 + v_2)^2 ch(\beta\eta\ell) \right]}$$

### 4.3.3 Résolution du système d'équations intégrales gouvernant le problème de la thermo-élasticité

Alors le problème se résume donc en la solution des équations intégrales suivante :

(4.38), (4.39), (4.40) et (4.41) par le changement de variables suivant  $\rho = c\rho^*$  et  $\eta^* = c\eta$

et la représentation suivante des fonctions  $\phi_2(\eta)$  et  $\phi_1(\eta)$  [4,15].

$$\phi_1(\eta) = \delta_0 \int_0^1 f_{10}(t) \cos(\eta t) dt \quad (4.42)$$

$$\phi_2(\eta) = \phi_2\left(\frac{\eta^*}{c}\right) = c^2 \phi_2^*(\eta^*) = c^2 \delta_0 \int_0^1 f_{20}(t) \cos(\eta^* t) dt \quad (4.43)$$

Les équations (4.39) et (4.41) sont satisfaites. En effet,

$$\int_0^{\infty} \eta \phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = \begin{cases} 0 & : \rho > 1 \\ \frac{f_{10}(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{f'_{10}(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} & : \rho < 1 \end{cases} \quad (4.44)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \phi_2(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = \int_0^{\infty} \eta^* \phi_2^*(\eta^*) J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* = \begin{cases} 0 & : \rho^* > 1 \\ \frac{f_{20}(1)}{\sqrt{1-\rho^{*2}}} - \int_{\rho}^1 \frac{f'_{20}(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^{*2}}} & : \rho^* < 1 \end{cases} \quad (4.45)$$

Les contraintes aux surfaces du contact ( $z = 0 ; z = -H$ ) sont déterminées par:

$$\sigma_z(\rho, 0) = \delta_0 \left[ \frac{f_{10}(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{f'_{10}(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \right] \quad (4.46)$$

$$\sigma_z(\rho^*, -\ell^*) = \delta_0 \left[ \frac{f_{20}(1)}{\sqrt{1-\rho^{*2}}} - \int_{\rho}^1 \frac{f'_{20}(t) dt}{\sqrt{t^2-\rho^{*2}}} \right] \quad (4.47)$$

Les équations (4.38) et (4.40) se ramènent à deux intégrales D'Abel suivant,

$$\int_0^{\rho} \frac{f_{10}(t) dt}{\sqrt{\rho^2-t^2}} = g_1(\rho) \quad (4.48)$$

$$\int_0^{\rho} \frac{f_{20}(t) dt}{\sqrt{\rho^{*2}-t^2}} = g_2(\rho^*) \quad (4.49)$$

Qui se résous respectivement par [3, 5] :

$$f_{10}(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g_1(\rho) d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \quad (4.50)$$

$$f_{20}(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho^* g_2(\rho^*) d\rho^*}{\sqrt{t^2-\rho^{*2}}} \quad (4.51)$$

Avec:

$$\begin{aligned} g_1(\rho) = & \frac{-\mathcal{E}}{R_1} + c^2 \int_0^{\infty} G_2(\eta \ell) J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f_{20}(t) \cos \cos(\eta t) dt + \int_0^{\infty} G_1(\eta \ell) J_0(\eta \rho) d\eta * \\ & * \int_0^1 f_{10}(t) \cos \cos(\eta t) dt + [a_1 \lambda_z h_2^* \delta_0] \left[ \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f_{20}(t) \cos \cos(\eta t) dt + ** \right. \\ & \left. ** \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f_{10}(t) \cos \cos(\eta t) dt \right] - \frac{1}{1+k_1} \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} [Z_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned}
 g_2(\rho^*) &= \frac{-\varepsilon_1}{R_1} + c^2 \delta_0 \int_0^\infty G_2(\eta^* \ell^*) J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* + \int_0^1 f_{10}(t) \cos\left(\frac{\eta^*}{c} t\right) dt + \int_0^\infty G_1(\eta^* \ell^*) J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* + * \\
 &* \int_0^1 f_{20}(t) \cos(\eta^* t) dt + [a_1 \lambda_z h_2^* \delta_0] \left[ \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{\frac{-\eta \ell}{\lambda_z}} J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* \int_0^1 f_{10}(t) \cos\left(\frac{\eta^*}{c} t\right) dt + ** \right. \\
 &** \left. \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{\frac{\eta \ell}{\lambda_z}} J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* \int_0^1 f_{20}(t) \cos(\eta^* t) dt \right] - \frac{1}{1+k_1} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} [Z_2(\eta^*)] J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

Substituons (4.52) et (4.53) dans les expressions (4.50) et (4.51) nous obtenons deux équations intégrales de Fredholm relative aux fonctions  $f_{10}(t)$  et  $f_{20}(t)$ .

$$f_{10}(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\varepsilon}{R_1} + c^2 \int_0^\infty G_2(\eta \ell) J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f_{20}(t) \cos(\eta t) dt + \\ & \int_0^\infty G_1(\eta \ell) J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f_{10}(t) \cos(\eta t) dt + [a_1 \lambda_z h_2^* \delta_0] \\ & \left[ \int_0^\infty \frac{1}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^\infty \frac{1}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f_{10}(t) \cos(\eta t) dt \right] - \\ & \frac{1}{1+k_1} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} [Z_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 f_{10}(t) &= -\frac{2\varepsilon}{\pi R_1} - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_{20}(x) dx \int_0^\infty G_2(\eta \ell) \cos(\eta x) \cos(\eta t) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_{10}(x) dx \int_0^\infty G_1(\eta \ell) * \\
 &* \cos(\eta x) \cos(\eta t) d\eta + \frac{2c^2}{\pi} [a_1 \lambda_z h_2^* \delta_0] \int_0^1 f_{20}(t) \cos(\eta t) dt \int_0^\infty \frac{1}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta ** \\
 &** \int_0^\infty \frac{1}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 f_{10}(t) \cos(\eta t) dt - \frac{1}{1+k_1} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} [Z_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta \quad (4.54)
 \end{aligned}$$

$$f_{20}(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \frac{\rho^* d\rho^*}{\sqrt{t^2 - \rho^{*2}}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{-\varepsilon_1}{R_1} + c^2 \delta_0 \int_0^\infty G_2(\eta^* \ell^*) J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* + \int_0^1 f_{10}(t) \cos\left(\frac{\eta^*}{c} t\right) dt + \\ & \int_0^\infty G_1(\eta^* \ell^*) J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* + \int_0^1 f_{20}(t) \cos(\eta^* t) dt + [a_1 \lambda_z h_2^* \delta_0] \\ & \left[ \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{\frac{-\eta \ell}{\lambda_z}} J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* \int_0^1 f_{10}(t) \cos\left(\frac{\eta^*}{c} t\right) dt + \right. \\ & \left. \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{\frac{\eta \ell}{\lambda_z}} J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* \int_0^1 f_{20}(t) \cos(\eta^* t) dt \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
f_{20}(t) &= \frac{2\varepsilon_1}{\pi c R_1} - \frac{2}{\pi c^2} \int_0^1 f_{10}(t) dx \int_0^\infty G_2(\eta^* \ell^*) \cos(c\eta x) \cos(c\eta t) d\eta + \frac{2}{\pi c^2} \int_0^1 f_{20}(t) dx \int_0^\infty G_1(\eta^* \ell^*) \\
&* \cos(c\eta x) \cos\left(\frac{\eta^*}{c} t\right) d\eta^* + [a_1 \lambda_z h_2^* \delta_0] \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{\frac{-\eta \ell}{\lambda_z}} \cos(\eta x) d\eta \int_0^1 f_{10}(x) dx \cos\left(\frac{\eta^*}{c} t\right) d\eta^* + ** \\
& ** a_1 \lambda_z h_2^* \delta_0 \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{\frac{\eta \ell}{\lambda_z}} \cos(c\eta x) d\eta \int_0^1 f_{20}(x) dx - \frac{1}{1+k_1} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} [Z_2(\eta^*)] J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* \quad (4.55)
\end{aligned}$$

L'équilibre mécanique thermo élastique à l'interface des contacts supérieure et inférieure ( $z = 0$ ,  $z = -H$ ) se traduit par les équations d'équilibre statique suivant :

$$\sigma_z(\rho, 0) = \sigma_z^P(\rho, 0) + \sigma_z^T(\rho, 0)$$

$$\sigma_z(\rho^*, -\ell^*) = \sigma_z^P(\rho^*, -\ell^*) + \sigma_z^T(\rho^*, -\ell^*)$$

$\sigma_z(\rho, 0)$  : La contrainte normale thermo élastique à l'interface du contact supérieure

$\sigma_z(\rho^*, -\ell^*)$  : La contrainte normale thermo élastique à l'interface du contact inférieure

$\sigma_z^P$  : Représente la contrainte élastique due à la force de pression du poinçon

$\sigma_z^T$  : Représente la contrainte thermique due à l'effet de la température

$$P = -2\pi R_1^2 \int_0^1 \rho \sigma_z(\rho, 0) d\rho$$

$$P = -2\pi R_1^2 c^2 \int_0^1 \rho^* \sigma_z(\rho^*, -\ell^*) d\rho^*$$

D'où

$$\frac{-P}{2\pi R_1^2} = \int_0^1 \rho \sigma_z(\rho, 0) d\rho = \chi_0 \int_0^1 f_{10}(t) dt$$

$$\frac{-P}{2\pi R_1^2 c^2} = \int_0^1 \rho^* \sigma_z(\rho^*, -\ell^*) d\rho^* = \chi_0 \int_0^1 f_{20}(t) dt$$

Les contraintes normales aux interfaces s'expriment par :

$$\sigma_z(\rho, 0) = \delta_0 \int_0^1 f_{10}(t) \cos(\eta t) dt \int_0^\infty \eta J_0(\eta \rho) d\eta \quad (4.56)$$

$$\sigma_z(\rho^*, -\ell^*) = \delta_0 \int_0^1 f_{20}(t) \cos(\eta^* t) dt \int_0^\infty \eta^* J_0(\eta^* \rho^*) d\eta^* \quad (4.57)$$

#### 4.3.4 Découplage des problèmes mécanique et thermique

Le but du travail est d'évaluer l'effet du champ thermique des poinçons chauffés sur la couche transversalement isotrope concernant la distribution des contraintes au sein du contact sous les deux poinçons, Pour ce but :

On écrit, après avoir substitués  $\sigma_z(\rho, 0)$  et  $\sigma_z(\rho^*, -\ell^*)$  par sons expressions, tenant compte de (4.54) et (4.55) et effectuer l'intégration par rapport à la variable ( $t$ ).

$$\begin{aligned} f_{10}(t) &= -\frac{P}{2\pi R_1^2 \delta_0} \Psi_1(t) - \lambda_z^2 h_0 \Psi_1(t) \\ f_{20}(t) &= -\frac{P}{2\pi R_1^2 c^2 \delta_0} \Psi_2(t) - \lambda_z^2 h_0 \Psi_2(t) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Par identification des termes on tire le système d'équations qui expriment chacune des deux parties mécanique et thermique. La première est celle caractérisant la partie mécanique du problème.

- Effet mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} \Psi_1^P(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \Psi_1^P(x) K_1(x, t) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \Psi_2^P(x) K_2(x, t) dx &= 1 \\ \Psi_2^P(t) + \frac{2}{\pi c} \int_0^1 \Psi_2^P(x) K_3(x, t) dx - \frac{2}{\pi c} \int_0^1 \Psi_1^P(x) K_4(x, t) dx &= 1 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Le système d'équations (4.59) c'est la partie élastique déjà traitée dans le chapitre 3.

- Effet thermique s'écrit :

$$\begin{aligned} \Psi_1^T(t_i) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N+1} A_k \Psi_1^T(t_k) g_1(t_k, t_i) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N_1} a_k^* \alpha_k(t_i) &= 1 \quad : (i=1, N+1, k=1, N+1) \\ \sum_{k=1}^{N+1} A_k \Psi_2^T(t_k) \beta_0(t_k, \rho_n) - \sum_{k=1}^{N_1} a_k^* \beta_k(\rho_n) &= 0 \quad : (n=1, N_1) \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\text{Avec : } A_1 = A_{N+1} = \frac{1}{2N}$$

$$A_k = \frac{1}{N} \quad (k=2, N)$$

$$g_1(t_k, t_i) = \int_0^{\infty} G(2\eta\ell) \cos(\eta t_k) \cos(\eta t_i) \left[ \cos(\eta t_i) - \frac{\sin(c\eta)}{c\eta} \right] d\eta$$

$$\alpha_k(t_i) = \int_0^{\infty} \frac{P_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \frac{\eta J_0(c\eta)}{\eta^2 - \left(\frac{\lambda_k}{c}\right)^2} \left[ \cos(\eta t_i) - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta$$

$$\beta_0(t_k, \rho_n) = \eta \frac{P(\eta)}{Q(\eta)} J_0(\eta \rho_n) \cos J_0(\eta \rho_n) \cos(\eta t_k) d\eta$$

$$\beta_k(\rho_n) = \int_0^{\infty} \eta \frac{R(\eta)}{Q(\eta)} \frac{\eta J_0(c\eta)}{\eta^2 - \left(\frac{\lambda_k}{c}\right)^2} J_0(\eta \rho_n) d\eta$$

Le système d'équations (4.60) c'est la partie thermique qu'on doit calculer par la méthode de Gauss de la même forme que le système élastique. Enfin, les contraintes aux interfaces du contact poinçons- couche se déterminent par les formules suivantes :

- L'expression de la contrainte thermo élastique  $\sigma_z(\rho, 0)$  à la surface limite  $z=0$  :

$$\sigma_z(\rho, 0) = \frac{P}{2\pi R_1^2 \delta_0} \sigma_z^*(\rho, 0) \quad : \rho < 1 \quad (4.61)$$

Où :

$$\sigma_z^*(\rho, 0) = \frac{\Psi_1^T(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{\Psi_1'^T(t_i) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \quad : \rho < 1 \quad (4.62)$$

-L'expression de la contrainte thermo-élastique  $\sigma_z(\rho^*, -\ell^*)$  à la surface limite  $z = -H$  :

$$\sigma_z(\rho^*, -\ell^*) = \frac{P}{2\pi R_1^2 c^2 \delta_0} \sigma_z^*(\rho^*, -\ell^*) \quad : \rho^* < 1 \quad (4.63)$$

Où :

$$\sigma_z^*(\rho^*, -\ell^*) = \frac{\Psi_2^T(1)}{\sqrt{1-\rho^{*2}}} - \int_{\rho}^1 \frac{\Psi_2'^T(t_k) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^{*2}}} \quad : \rho^* < 1 \quad (4.64)$$

## Chapitre 5

### Calcul numérique et résultats graphiques

#### 5.1 Hypothèses pour résolution numérique

Le schéma (Fig.1) du problème de contact étudié le double poinçonnement de la couche d'épaisseur  $H$  à faces parallèles de matériau (transverse isotrope) par deux cylindres rigides à extrémités plates de rayons  $R_1$  et  $R_2$  sur ses faces limites supérieure et inférieure. Pour rendre le problème faisable, les prétentions suivantes sont faites:

- les poinçons sont rigides et non conducteurs de sorte que l'écoulement de la chaleur soit dirigée seulement dans le milieu élastique .
- l'extérieur libre en dehors du secteur des poinçons est thermiquement sous conditions.
- le mouvement des poinçons est lent de sorte que des effets d'inertie ou de choc soient négligés;
- le secteur de contact est stationnaire en ce qui concerne la couche élastique sans la séparation entre les poinçons et la surface de contact.

#### 5.1.1 Matériau transverse isotrope

##### 5.1.1.1 Calcul des contraintes aux interfaces de contacts poinçons- couche

Considérons le cas général du double poinçonnement correspondant aux poinçons de rayons  $R_1 \neq R_2$  sollicités respectivement par deux forces différentes (voir fig.1).

Soit la couche élastique d'épaisseur relative  $\ell = H/R_1 = 2$ , discrétisons les rayons  $R_1$  et  $R_1 = 2R_2$  en 20 et 40 parties ( $n=20$ ,  $n_1=40$ ). Utilisons pour l'approximation des fonctions  $\Psi_i(t)$  les polynômes de degré ( $k=5$ ).

Les résultats obtenus sont représentés par les courbes (Fig.5.2).

Les formules closes (3.47), (3.48) calculent les contraintes du contact aux interfaces de couche élastique



Qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix}
 1 + \frac{h}{\pi} K_1(1.1) & \frac{2h}{\pi} K_1(2.1) & \dots & \frac{h}{\pi} K_1(n.1) & -\frac{h}{\pi} K_2(1.1) & -\frac{2h}{\pi} K_2(2.1) & \dots & -\frac{h}{\pi} K_2(n.1) \\
 \frac{h}{\pi} K_1(1.2) & \frac{2h}{\pi} K_1(2.1) & \dots & \frac{h}{\pi} K_1(n.2) & -\frac{h}{\pi} K_2(1.2) & -\frac{2h}{\pi} K_2(2.2) & \dots & -\frac{h}{\pi} K_2(n.2) \\
 \dots & \dots \\
 \frac{h}{\pi} K_1(1.n) & \frac{2h}{\pi} K_1(2.n) & \dots & 1 + \frac{h}{\pi} K_1(n.n) & -\frac{h}{\pi} K_2(1.n) & -\frac{2h}{\pi} K_2(2.n) & \dots & -\frac{h}{\pi} K_2(n.n) \\
 -\frac{h}{\pi} K_4(1.1) & -\frac{2h}{\pi} K_4(2.1) & \dots & -\frac{h}{\pi} K_4(n.1) & 1 + \frac{h}{\pi} K_3(1.1) & \frac{2h}{\pi} K_3(2.1) & \dots & \frac{h}{\pi} K_3(n.1) \\
 -\frac{h}{\pi} K_4(1.2) & -\frac{2h}{\pi} K_4(2.2) & \dots & -\frac{h}{\pi} K_4(n.2) & \frac{h}{\pi} K_3(1.2) & 1 + \frac{2h}{\pi} K_3(2.2) & \dots & \frac{h}{\pi} K_3(n.2) \\
 \dots & \dots \\
 -\frac{h}{\pi} K_4(1.n) & -\frac{2h}{\pi} K_4(2.n) & \dots & -\frac{h}{\pi} K_4(n.n) & \frac{h}{\pi} K_3(1.n) & \frac{2h}{\pi} K_3(2.n) & \dots & 1 + \frac{h}{\pi} K_3(n.n)
 \end{pmatrix}^*$$

$$\begin{pmatrix}
 \Psi_1(1) \\
 \Psi_1(2) \\
 \dots \\
 \Psi_1(n) \\
 \Psi_2(1) \\
 \Psi_2(2) \\
 \dots \\
 \Psi_2(n)
 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix}
 1 \\
 1 \\
 \dots \\
 1 \\
 1 \\
 1 \\
 \dots \\
 1
 \end{pmatrix}$$

Utilisons pour l'approximation des fonctions  $\Psi_1(t_i)$  et  $\Psi_2(t_i)$  ; (i =1, N) le polynôme de degré k=5 et faisant appel aux formules:

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(t_i) &= a_0 + \sum_{k=1}^N a_k t_i^k \\
 \Psi_2(t_i) &= b_0 + \sum_{k=1}^N b_k t_i^k
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Ce qui permet d'écrire (3.47) et (3.48) sous la forme :

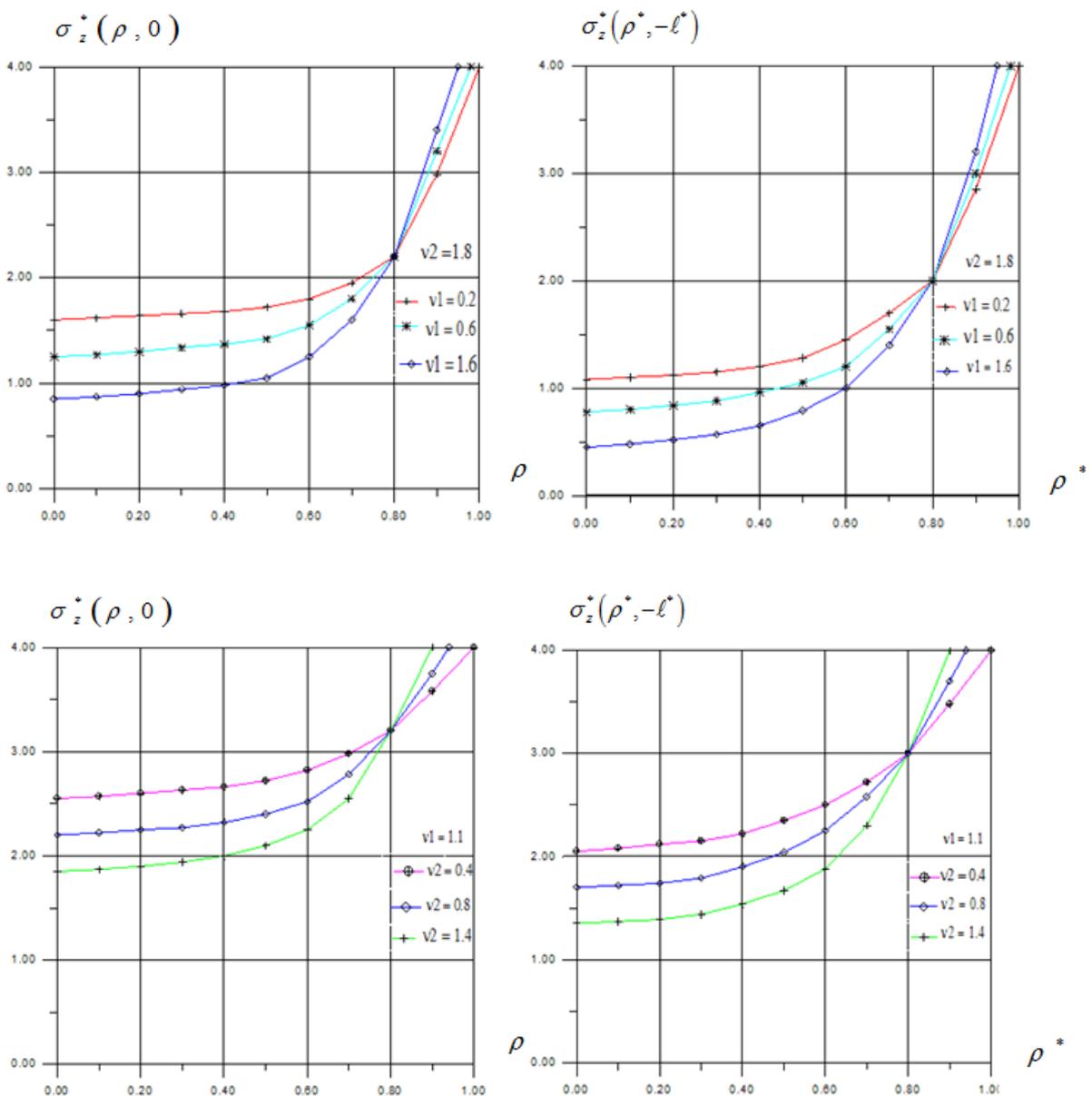
$$\begin{aligned}
 \sigma_z^*(\rho, 0) &= \frac{a_0}{\sqrt{1-\rho^2}} - \sum_{k=1}^N k a_k \int_{\rho}^1 \frac{t^{k-1}}{\sqrt{t^2-\rho^2}} dt \\
 \sigma_z^*(\rho^*, -\ell^*) &= \frac{b_0}{\sqrt{1-\rho^{*2}}} - \sum_{k=1}^N k b_k \int_{\rho}^1 \frac{t^{k-1}}{\sqrt{t^2-\rho^{*2}}} dt
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Résolution des équations (5.1) pour déterminer  $\Psi_1(t_i), \Psi_2(t_i)$  par un programme (annexe1) et son approximation, ainsi un programme (annexe 2) pour la détermination des contraintes normales sans dimensions (5.2)  $\sigma_z^*(\rho, 0),$ .

a) **Cas général poinçons de différents rayons  $R_1 \neq R_2$**

Prenons  $R_2=2R_1$  , Fixons les valeurs;  $\nu_1=1.2$  et changeons  $\nu_2=0.4; 0.8; 1.4$

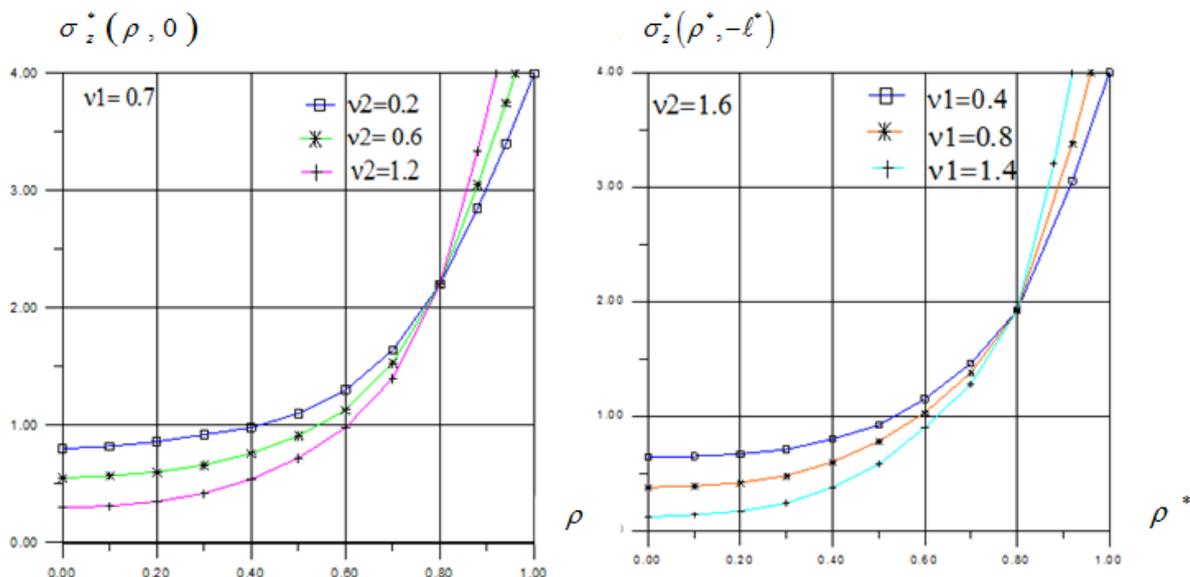
ensuite fixons la valeur  $\nu_2=1.8$  et changeons  $\nu_1=0.2; 0.6; 1.2.$



**Fig.5.2** Distribution des contraintes non-dimensionnelle aux interfaces du contact.

**b) Cas d'un seul poinçon**

Fixons les valeurs  $R_1=2$  ;  $\nu_1=0.8$  et changeons  $\nu_2=0.2; 0.6; 1.6$  ensuite fixons la valeur  $\nu_2=1.6$  et changeons  $\nu_1=0.4; 0.5; 1.4$ .



**Fig.5.3** Distribution des contraintes non-dimensionnelle dans la zone de contact

Les résultats numériques obtenus permettent de montrer l'influence de l'anisotropie aux travers des courbes représentées figure (5.2), figure (5.3). Comme la pression sous le poinçon est une constante et ne dépend pas de l'épaisseur de la couche, alors la répartition est assez forte aux bords de la surface limite.

Il est clair d'après ces courbes que jusqu'à ( $\rho = 0.3$ ) la variation n'est pas importante, mais à partir de là en allant vers l'extérieur du poinçon la variation est plus nette.

**5.1.2 Cas de matériaux homogène isotrope**

**5.1.2.1 Calcule des Contraintes aux interfaces de contact**

L'utilisation de la méthode des sommes finies (intégration numérique) pour la résolution des équations intégrales (3.78) nous conduit au système d'équations algébrique linéaire aux inconnues  $\Psi_1(t_i)$ ,  $\Psi_2(t_i)$  ( $i=1, \dots, n+1$ ).

L'approximation des fonctions  $\Psi_1(t_i)$  et  $\Psi_2(t_i)$  par des polynômes de type (5.1) ;

Résolution de système d'équations intégrales (3.78) par la même méthode président :

Enfin, pour déterminer les contraintes aux interfaces du contact poinçon-couche par les formules (3.79), (3.80) [50] :

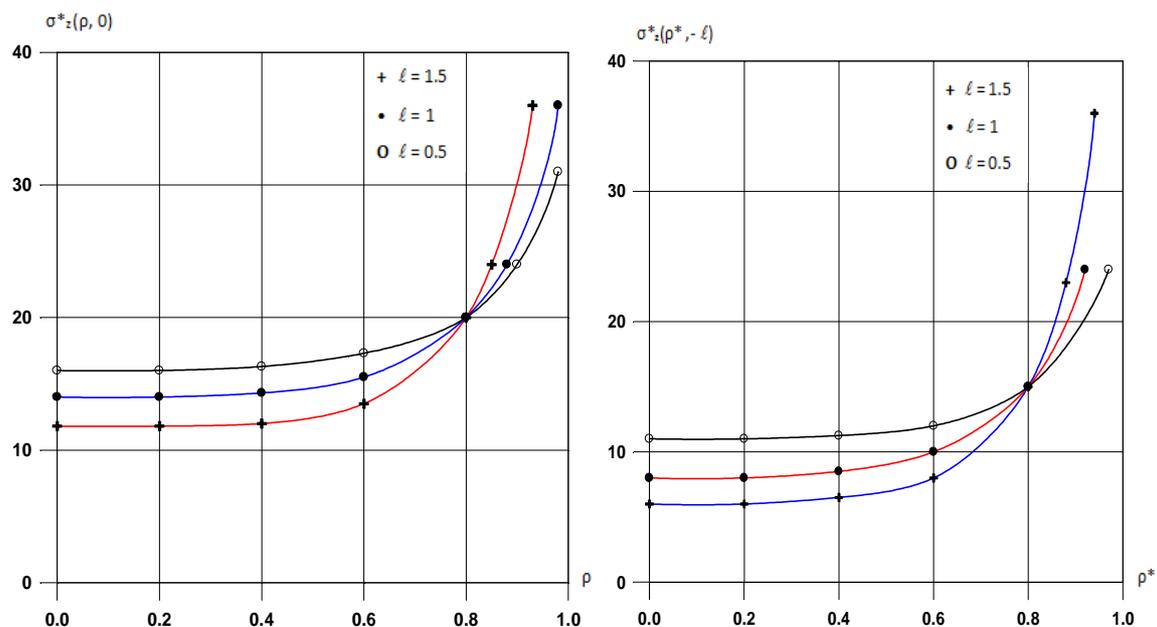
$\sigma_z^*(\rho, 0)$  et  $\sigma_z^*(\rho^*, -\ell^*)$  sont les contraintes adimensionnelles.

Les paramètres (x et t) se situent dans le même intervalle :  $0 \leq t \leq 1$  ,  $0 \leq x \leq 1$  ;

$\Psi_1(t_i)$  et  $\Psi_2(t_i)$  sont les fonctions inconnues à déterminer à partir de la résolution du système d'équations (3.78).

Même méthode de résolution des équations (5.2) pour déterminer  $\sigma_z^*(\rho, 0)$  et  $\sigma_z^*(\rho^*, -\ell^*)$  par un programme mais seulement les formules différentes.

Un calcul est prévu (annexe 1) pour la définition des fonctions  $\Psi_1(t_i)$ ,  $\Psi_2(t_i)$  et son approximation, ainsi un programme (annexe 2) pour la détermination des contraintes normales sans dimensions  $\sigma_z^*(\rho, 0)$ ,  $\sigma_z^*(\rho^*, -\ell^*)$



**Fig.5.4** distribution des contraintes non dimensionnelles dans la zone du contact Matériau homogène isotrope

Il est clair que le profil de la distribution de la contrainte ne changera pas d'allure par rapport à celui du matériau transverse isotrope.

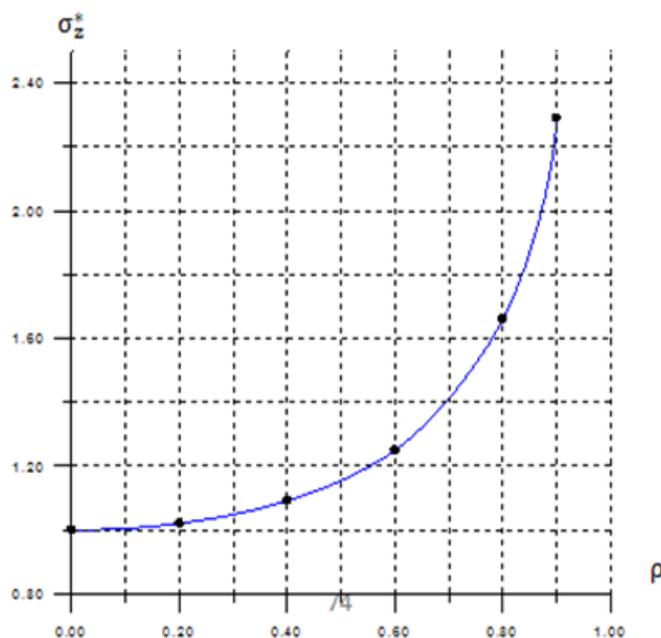
La pression ne dépend pas de la nature de la matière diminue logiquement avec l'augmentation de la section du contact.

Le croisement des deux courbes au voisinage de  $(\rho \rightarrow 0.8)$  résultat obtenu sur toutes les courbes en témoigne de l'efficacité de cette méthode, en effet la pression sous les poinçons est constante (représentée par l'aire limitée entre l'axe des abscisses et les courbes en question) et ne dépend pas de l'épaisseur de la couche, c'est pourquoi et afin de garder cette même valeur doit figurer le point de rencontre des courbes.

### 5.1.2.2 Cas de l'Espace semi infini

Dans le cas où l'épaisseur de la couche est infiniment grande (c'est-à-dire  $H$  tends vers l'infini), le rapport relatif  $\ell = \frac{H}{R}$  tends vers l'infini, la fonction  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} G(\eta\ell)$  tends vers zéro et par conséquent la fonction  $\Psi(t)$  tends vers l'unité. Ce résultat coïncide exactement avec celui de la bibliographie du demi-espace de Boussinesq .

Alors la contrainte adimensionnelles sera définie seulement par : 
$$\sigma_z^*(\rho, 0) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$



**Fig.5.5** distribution de contraintes non dimensionnelles de l'espace semi infini

Dont la courbe représentatif correspond exactement à celle obtenue par le programme, il est remarquable que le profil de la distribution au voisinage de  $(r = R)$  tends vers l'infini et ce pour marquer la singularité mathématique dans les expressions.

## 5.2 Résolution numérique du problème thermo élastique

### 5.2.1 L'influence de coefficient de la conductivité thermique sur la température

La formule pour la détermination du champ de la température dans le secteur du contact et obtenue en (chapitre 4) (4.23).

$$\sum_{k=1}^{n_2} b_k^* L_k^1(\rho_j) + \sum_{k=1}^{n_2} a_k^* L_k^2(\rho_j) = h_0 T_0^1, \quad (j = 1, n_1)$$

$$\sum_{k=1}^{n_2} a_k^* L_k^3(\rho_j) - \sum_{k=1}^{n_2} b_k^* L_k^4(\rho_j) = -h_0 T_0^2$$

$a_k^*$  et  $b_k^*$  sont les coefficients à définir à partir de la résolution du système d'équation algébriques (4.21).

Que nous pouvons représenter par

$$\begin{pmatrix} L_1^2(\rho_1) & L_2^2(\rho_1) & \dots & L_{n_2}^2(\rho_1) & L_1^1(\rho_1) & L_2^1(\rho_1) & \dots & L_{n_2}^1(\rho_1) \\ L_1^2(\rho_2) & L_2^2(\rho_2) & \dots & L_{n_2}^2(\rho_2) & L_1^1(\rho_2) & L_2^1(\rho_2) & \dots & L_{n_2}^1(\rho_2) \\ \dots & \dots \\ L_1^2(\rho_{n_1}) & L_2^2(\rho_{n_1}) & \dots & L_{n_2}^2(\rho_{n_1}) & L_1^1(\rho_{n_1}) & L_2^1(\rho_{n_1}) & \dots & L_{n_2}^1(\rho_{n_1}) \\ L_1^3(\rho_1) & L_2^3(\rho_1) & \dots & L_{n_2}^3(\rho_1) & L_1^4(\rho_1) & L_2^4(\rho_1) & \dots & L_{n_2}^4(\rho_1) \\ L_1^3(\rho_2) & L_2^3(\rho_2) & \dots & L_{n_2}^3(\rho_2) & L_1^4(\rho_2) & L_2^4(\rho_2) & \dots & L_{n_2}^4(\rho_2) \\ \dots & \dots \\ L_1^3(\rho_{n_1}) & L_2^3(\rho_{n_1}) & \dots & L_{n_2}^3(\rho_{n_1}) & L_1^4(\rho_{n_1}) & L_2^4(\rho_{n_1}) & \dots & L_{n_2}^4(\rho_{n_1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \dots \\ a_{n_2}^* \\ b_1^* \\ b_2^* \\ \dots \\ b_{n_2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 T_0^1 \\ h_1 T_0^1 \\ \dots \\ h_1 T_0^1 \\ -h_1 T_0^2 \\ -h_1 T_0^2 \\ \dots \\ -h_1 T_0^2 \end{pmatrix}$$

Le calcul de l'intégrale (annexe3) pose certaines difficultés que se soit au niveau des bornes d'intégration, ou au niveau des singularités ( $\lambda_k$ ) qui le rendent non discontinus non intégrable en ces points.

Pour éviter cette situation, on utilise la règle de l'hôpital comme pour dégager l'indétermination. Pour ce but, choisissant une valeur ( $\varepsilon$ ) suffisamment petite pour rester loin des indéterminations qui ont pour valeurs les racines de la fonction de

Bessel d'ordre zéro ( $\lambda_k$ ). Ainsi, au voisinage des valeurs ( $\lambda_k$ ) le rapport  $\frac{J_0(\eta)}{\eta^2 - \lambda_k^2}$  sera

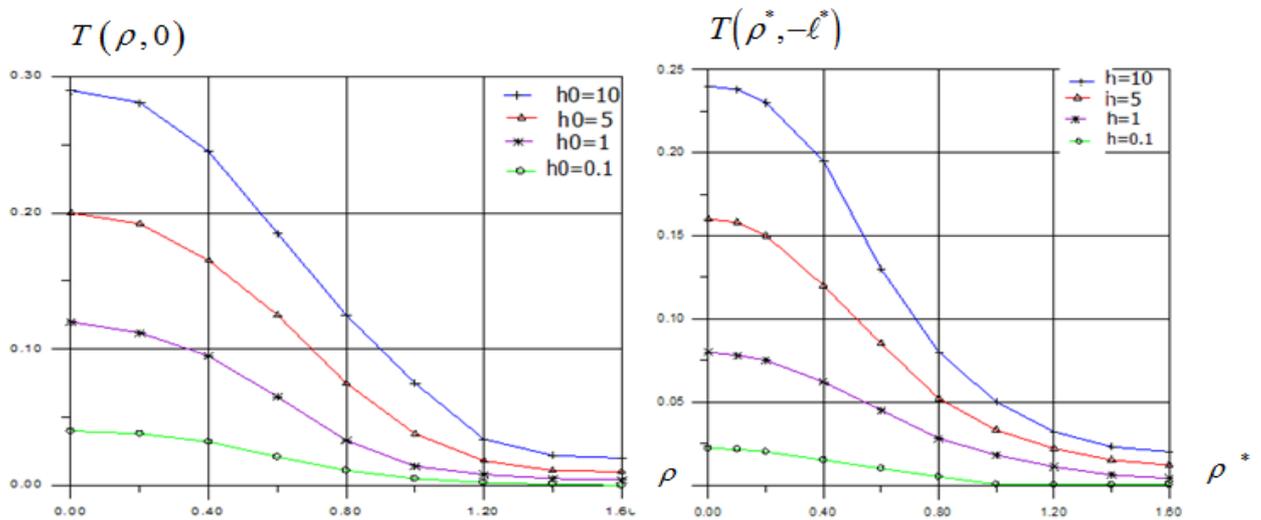
remplacé par  $-\frac{1}{2} \frac{J_1(\lambda_k)}{\lambda_k}$  d'après le rapport des dérivée ; ce qui est valable

également pour le calcul de la répartition de la température  $T(\rho, \zeta)$ .

L'équation (4.23) Sous forme matricielle permet de déterminé la température  $T(\rho, \zeta)$ :

$$\begin{pmatrix} T(1,1) \\ T(2,1) \\ \dots \\ \dots \\ T(n_1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1^5(\rho_1) & L_2^5(\rho_1) & \dots & L_{n_2}^5(\rho_1) & L_1^6(\rho_1) & L_2^6(\rho_1) & \dots & L_{n_2}^6(\rho_1) \\ L_1^5(\rho_2) & L_2^5(\rho_2) & \dots & L_{n_2}^5(\rho_2) & L_1^6(\rho_2) & L_2^6(\rho_2) & \dots & L_{n_2}^6(\rho_2) \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ L_1^5(\rho_{n_1}) & L_2^5(\rho_{n_1}) & \dots & L_{n_2}^5(\rho_{n_1}) & L_1^6(\rho_{n_1}) & L_2^6(\rho_{n_1}) & \dots & L_{n_2}^6(\rho_{n_1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ \dots \\ a_{n_2}^* \\ b_1^* \\ \dots \\ b_{n_2}^* \end{pmatrix}$$

Le programme (annexe 4) de calcul prévoit les valeurs  $(\lambda_k)$ , la résolution du système d'équation algébriques et la détermination des valeurs de  $(a_k^*$  et  $b_k^*)$  et les valeurs de la température en différents points du contact de la couche élastique (4.23)  $T(\rho, 0)$ ,  $T(\rho^*, -\ell^*)$ .



**Fig.5.6** courbes représentatives de la distribution de la température dans les zones du contact

Les résultats graphiques qui sont sur la figure (5.6), montre l'effet de la conductivité du contact  $h_0$  sur la distribution de la température T dans la zone de contact.

La vitesse de décroissement du gradient de la température augmente tout en s'approchant de la surface libre de la couche.

Apartir de  $(\rho = 0.4)$  et de fait que la couche(surface libre) est isolée,il est donc logique que la valeur de la température chute et tend ver zero.

Enfin, avec l'isolation thermique tout le long de la surface du contact, il est démontré qu'avec une augmentation de la conductivité du contact, la température de surface diminue considérablement, ce qui est également attribuée à l'augmentation de flux de chaleur.

En outre. L'augmentation de la conductivité du contact  $h_0$  rend le flux de chaleur sur la surface de contact se coule rapidement dans la couche ce qui conduit à une diminution de la température. À partir de laquelle on peut voir que la température maximale de surface se produit près du centre de la région de contact en raison de la pression de contact maximale. La température de surface diminue significativement lorsque ( $\rho$ ) augmente, ce qui est correspondant à l'augmentation de flux de chaleur beaucoup plus sur la frontière de la surface de contact.

Lorsque la conductivité du contact augmente et que d'autres paramètres prennent la même valeur, la chaleur générée à la surface de contact s'écoule dans le milieu plus librement, ce qui provoque une diminution de température à la surface de contact. Le résultat est compatible avec celui de [43].

**5.2.2 Variations de la distribution des contraintes pour différents valeurs de  $h_0$**

Une deuxième partie est les contraintes mécaniques sous l'influence du champ thermique déterminée par la résolution des équations (4.60):

Le système d'équations (4.60) c'est la partie thermique qu'on doit calculer.

$\Psi_1(t_i)$  et  $\Psi_2(t_i)$  Sont les fonctions inconnues à déterminées à partir de la résolution du système des équations algébriques suivant :

$$\Psi_1(t_1) - \frac{2}{\pi} [A_1 g_1(t_1, t_1) \Psi_1(t_1) + A_2 g_1(t_2, t_1) \Psi_1(t_2) + \dots + A_{N+1} g_1(t_{N+1}, t_1) \Psi_1(t_{N+1})] = *$$

$$* 1 - \frac{2}{\pi} [a_1^* \alpha_1(t_1) + a_2^* \alpha_2(t_1) + \dots + a_{N_1}^* \alpha_{N_1}(t_1)]$$
  

$$\Psi_1(t_2) - \frac{2}{\pi} [A_1 g_1(t_1, t_2) \Psi_1(t_1) + A_2 g_1(t_2, t_2) \Psi_1(t_2) + \dots + A_{N+1} g_1(t_{N+1}, t_2) \Psi_1(t_{N+1})] = *$$

$$* 1 - \frac{2}{\pi} [a_1^* \alpha_1(t_2) + a_2^* \alpha_2(t_2) + \dots + a_{N_1}^* \alpha_{N_1}(t_2)]$$
  

.....

$$\Psi_1(t_{N+1}) - \frac{2}{\pi} [A_1 g_1(t_1, t_{N+1}) \Psi_1(t_1) + A_2 g_1(t_2, t_{N+1}) \Psi_1(t_2) + \dots + A_{N+1} g_1(t_{N+1}, t_{N+1}) \Psi_1(t_{N+1})] = *$$

$$* 1 - \frac{2}{\pi} [a_1^* \alpha_1(t_{N+1}) + a_2^* \alpha_2(t_{N+1}) + \dots + a_{N_1}^* \alpha_{N_1}(t_{N+1})]$$
  

$$[A_1 \beta_0(t_1, \rho_1) \Psi_2(t_1) + A_2 \beta_0(t_2, \rho_1) \Psi_2(t_2) + \dots + A_{N+1} \beta_0(t_{N+1}, \rho_1) \Psi_2(t_{N+1})] = *$$

$$* [a_1^* \beta_1(\rho_1) + a_2^* \beta_2(\rho_1) + \dots + a_{N_1}^* \beta_{N_1}(\rho_1)]$$
  

$$[A_1 \beta_0(t_1, \rho_2) \Psi_2(t_1) + A_2 \beta_0(t_2, \rho_2) \Psi_2(t_2) + \dots + A_{N+1} \beta_0(t_{N+1}, \rho_2) \Psi_2(t_{N+1})] = *$$

$$* [a_1^* \beta_1(\rho_2) + a_2^* \beta_2(\rho_2) + \dots + a_{N_1}^* \beta_{N_1}(\rho_2)]$$
  

.....

$$[A_1 \beta_0(t_1, \rho_{N_1}) \Psi_2(1) + A_2 \beta_0(t_2, \rho_{N_1}) \Psi_2(2) + \dots + A_{N+1} \beta_0(t_{N+1}, \rho_{N_1}) \Psi_2(t_{N+1})] = *$$

$$* [a_1^* \beta_1(\rho_{N_1}) + a_2^* \beta_2(\rho_{N_1}) + \dots + a_{N_1}^* \beta_{N+1}(\rho_{N_1})]$$

Le système d'équations précédent se présente sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix}
 1 - \frac{2}{\pi} A_1 g_1(t_1, t_1) & \frac{-2}{\pi} A_2 g_1(t_2, t_1) & \dots & \frac{-2}{\pi} A_{n+1} g_1(t_{N+1}, t_1) \\
 \frac{-2}{\pi} A_1 g_1(t_1, t_2) & 1 - \frac{2}{\pi} A_2 g_1(t_2, t_2) & \dots & \frac{-2}{\pi} A_{n+1} g_1(t_{N+1}, t_2) \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \frac{-2}{\pi} A_1 g_1(t_1, t_{N+1}) & \frac{-2}{\pi} A_1 g_1(t_2, t_{N+1}) & \dots & 1 - \frac{2}{\pi} A_{n+1} g_1(t_{N+1}, t_{N+1})
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \Psi_1(t_1) \\
 \Psi_1(t_2) \\
 \dots \\
 \dots \\
 \Psi_1(t_{N+1})
 \end{pmatrix}
 = *$$

$$* \begin{pmatrix}
 1 - \frac{2}{\pi} [a_1^* \alpha_1(t_1) + a_2^* \alpha_2(t_1) + \dots + a_{N_1}^* \alpha_{N_1}(t_1)] \\
 1 - \frac{2}{\pi} [a_1^* \alpha_1(t_2) + a_2^* \alpha_2(t_2) + \dots + a_{N_1}^* \alpha_{N_1}(t_2)] \\
 \dots \\
 1 - \frac{2}{\pi} [a_1^* \alpha_1(t_{N+1}) + a_2^* \alpha_2(t_{N+1}) + \dots + a_{N_1}^* \alpha_{N_1}(t_{N+1})]
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
 A_1 \beta_0(t_1, \rho_1) & A_2 \beta_0(t_2, \rho_1) & \dots & A_{N+1} \beta_0(t_{N+1}, \rho_1) \\
 A_1 \beta_0(t_1, \rho_2) & A_2 \beta_0(t_2, \rho_2) & \dots & A_{N+1} \beta_0(t_{N+1}, \rho_2) \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 A_1 \beta_0(t_1, \rho_{N_1}) & A_2 \beta_0(t_2, \rho_{N_1}) & \dots & A_{N+1} \beta_0(t_{N+1}, \rho_{N_1})
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \Psi_2(t_1) \\
 \Psi_2(t_2) \\
 \dots \\
 \Psi_2(t_{N+1})
 \end{pmatrix}
 = *$$

$$* \begin{pmatrix}
 [a_1^* \beta_1(\rho_1) + a_2^* \beta_2(\rho_1) + \dots + a_{N_1}^* \beta_{N_1}(\rho_1)] \\
 [a_1^* \beta_1(\rho_2) + a_2^* \beta_2(\rho_2) + \dots + a_{N_1}^* \beta_{N_1}(\rho_2)] \\
 \dots \\
 [a_1^* \beta_1(\rho_{N_1}) + a_2^* \beta_2(\rho_{N_1}) + \dots + a_{N_1}^* \beta_{N_1}(\rho_{N_1})]
 \end{pmatrix}$$

Enfin, les contraintes aux interfaces des contacts poinçons- couche se déterminent par les formules (4.62), (4.64):

Utilisons pour l'approximation des fonctions  $\Psi_1(t_i)$  et  $\Psi_2(t_i)$  ; (i=1, N+1) le polynôme de degré k=5 et faisant appel aux formules (5.1):

Un calcul est prévu (annexe1) pour la définition des fonctions  $\Psi_1(t_i)$  et  $\Psi_2(t_i)$  et son approximation, ainsi un programme (annexe2) pour la détermination des contraintes normales sans dimensions  $\sigma_z^*(\rho, 0), \sigma_z^*(\rho^*, -\ell^*)$ .

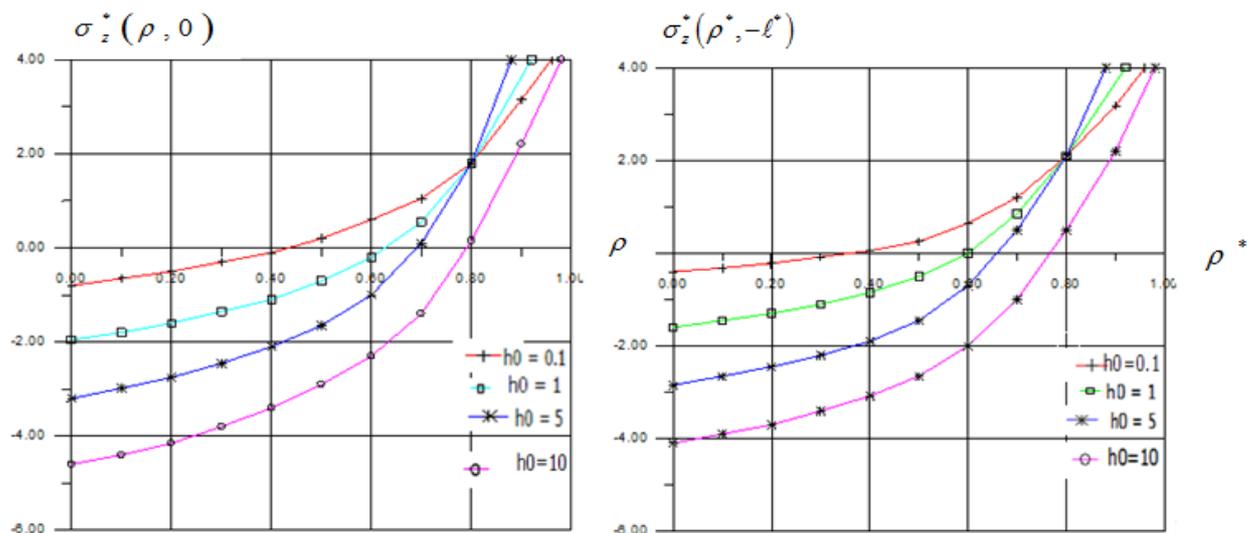


Fig. 5.7 Courbes de répartition de contraintes mécanique due au champ thermique dans les zones du contact

Nous montrons à travers ces courbes (Fig.5.7) l'influence du champ thermique sur les contraintes mécaniques (autrement dit la partie additionnelle de contraintes mécaniques que peut apporter la présence de la chaleur). L'influence thermique dans la frontière de surface du contact est beaucoup plus importante, est un résultat évident pour les données de l'exemple.

## **Conclusion générale**

Le but principal de ce travail est d'étudier comment influe le coefficient de conduction thermique à l'interface « poinçons-couche élastique » sur la répartition des contraintes normales dans la superficie du contact. L'effet d'anisotropie sur la répartition des contraintes normales est également considéré.

Les solutions semi analytiques pour le champ axisymétrique du à un chargement mécanique et à un champ thermique stationnaire sont présentes séparément ; puis regroupés pour donner le problème thermo élastique.

Concernant le problème mécanique relatif à la compression de la couche élastique par deux poinçons cylindriques plats de différents rayons ( $R_1, R_2$ ) ; les solutions de formes closes sont obtenues par l'emploi de la transformation de Hankel essentiellement et des transformations évidents par l'utilisation de deux fonctions auxiliaires notés  $\{\phi_1(\eta) \text{ et } \phi_2(\eta)\}$  qui est une première dans les conditions aux limites ainsi qu'un changement de variable convenable et ce afin de normalisé le domaine d'intégration. Le traitement se résume après transformation en la solution d'un système d'équations algébriques linéaires aux inconnues  $\Psi_1(t_i) \text{ et } \Psi_2(t_i)$  ; ( $i=1, n+1$ ) L'approximation des fonctions de  $\Psi_i(t)$  permet le calcul des pressions aux interfaces de la couche élastique.

Les résultats numériques traités sont présents pour les matériaux arbitraires, car les paramètres employés dans les expressions des solutions sont sans dimensions. La représentation graphique montre clairement au travers des courbes l'influence de l'anisotropie sur la répartition des pressions sous les poinçons.

Les cas particuliers qui s'écoulent directement de la solution de ce problème, sont :

- La solution du problème couche élastique homogène et isotrope peut être obtenue par simples limites des expressions du précédent cas lorsque ( $\nu_1 = \nu_2 = 1$ ). Ce cas particulier a fait l'objet d'une publication dans un Journal International.
- D'autres solutions de problèmes de contacts rencontrés dans la bibliographie sont également trouvées comme cas particuliers de notre présente étude.
- Le cas où l'épaisseur relative ( $\ell = \frac{H}{R_1}$ ) tend vers l'infini, la solution sera celle de l'espace semi-infini par un seul poinçon.
- Lorsque le rayon du deuxième poinçon ( $R_2$ ) tend vers l'infini (ou bien  $\varepsilon_2 = 0$ ) le poinçon de dessous devient appui plan et la solution correspondra à celle la couche élastique comprimée par un seul poinçon.
- Quand les poinçons sont de même rayons ( $R_1 = R_2$ ), la solution sera considérée pour le cas suivant ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ,  $(R_1 / R_2) = 1$ ,  $\phi_1(\eta) = \phi_2(\eta) = \phi(\eta)$ ).

Dans cette partie du travail, nous nous sommes limités à donner la méthode générale et l'algorithme de calcul qui permet de donner l'influence de tel ou tel paramètre par simple variation dans les formules closes.

Le problème avec chargement thermique est résolu de la même manière par l'emploi de la transformée de Hankel. La distribution du champ thermique à travers l'épaisseur c'est-à-dire dans la direction de l'axe « z » est presque la même. La température chute plus vite en allant dans la direction de l'axe « r » ; ce résultat est évident du fait que la propagation de chaleur va vers les zones moins chaudes. Résultat qui intéresse peut du fait qu'ici on s'intéresse au phénomène thermique plutôt au voisinage des surfaces limites de contacts.

Les résultats de calcul, témoignent que dans le cas des matériaux transverses-isotropes (magnésium), la température dans la zone de contact diminue plus que dans le cas des matériaux homogène isotrope. Tandis que la composante de la contrainte normale dû à la température augmente jusqu'à 10%, cette étude montre que la conductivité de contact affecte la distribution de température et la composante normale de la contrainte thermique.

Pour revenir au cas de matériau homogène isotrope, il suffit de prendre les limites des expressions (cas de matériau transverse-isotrope) pour  $(\nu_1 \rightarrow \nu_2 \rightarrow 1)$ ,  $(\rho_1 \rightarrow \rho_2 \rightarrow 1)$  et  $(k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow 1)$  ainsi que  $\alpha_T = \beta_T$  (Conductibilité dans la direction d'isotropie et perpendiculaire à celle-ci).

La solution du problème thermo-élastique aux interfaces est trouvée. Le problème formulé en termes d'équations intégrales satisfaisant les conditions aux limites des champs élastiques et thermiques sont réduits à deux équations intégrales de Fredholm de seconde espèce. Etant superposés par hypothèse les efforts mécaniques et thermiques. Nous découplons les effets des deux chargements dans les équations ainsi obtenues et orienter l'étude sur l'influence de la conductivité sur la répartition des champs de température et la contrainte normale sur la superficie du contact.

## **Références Bibliographiques**

- [1] Boussineq, j. Application des potentiels et l'étude de l'Equilibre et du mouvement des solides Elastiques, Paris, 1885.
- [2] Snedden, I.N Fourier Transforms, McGraw Hill BookInc. N.Y, 1951.
- [3] Green, A. E and zerna, W. Theoretical Elasticity, Clarendon Press, Oxford, 1954.
- [4] Shibuya, T. Koizumi, T. and Nakahara, I, An elastic contact problem for a Half Space Indented by a Flat Annular Rigid Punch, Int. J.Engng. Sci, Vol. 12,pp. 759-771,1974.
- [5] Keer, L.M.and Fu, W. S., Stress distribution in an elastic plate due to rigid Heated Punch, Int, J. Engng. Sci.,5, 555, 1967.
- [6] Ishihara, M. Tanigawa ,Y, Ryuusuke, K and Noda, N,Theoretical analysis of thermo elastic deformation of a circular plate due to a partially distributed heat supply. Journal of thermal stresses, 20, pp 203-225, 1997.
- [7] Hany, H S and Farid ,AH. Generalized thermo elastic problem of a thick plate under ax symmetric temperature distribution. Journal of Thermal stresses, 17(3), pp 435-452, 1994.
- [8] Rokne J, Singh BM, Dhaliwal RS, and Vbrik J. The Ax symmetric Boussinesq type Problem for half space under optimal heating of arbitrary profile. IJMMS, Hindwai Publication, 40, pp 2123-2131, 2004.
- [9] Sharma. JN, Sharma. RL. Behavior of thermo elastic thick plate under lateral loads. Journal of thermal stresses, 27, pp 171-191, 2004.
- [10] Yoshihiro O ax symmetric thermal stress analysis in the steady state with heat generation in the region by boundary element method. Journal of thermal stresses, 19 (3), pp 273-286, 1996.
- [11] Kulkarni. VS. and Deshmukh KC. Quasi-static Thermal Stresses in a thick circular plate. Applied Mathematical Modeling, Elsevier Publication, 31(8), pp. 1479-1488, 2007.
- [12] Noda N, Hetnarski RB.and Tanigawa Y. Thermal Stresses 2<sup>nd</sup> edn. pp 259-261, Taylor and Francis New York, 2008.
- [13] Nowacki, W33. "The state of stresses in a thick circular plate due to temperature field" . Bull. Acad Polon Sci. Scr. Sci. Tech... Vol 5, pp 227, 1957.

- [14] Roy Choudhary. S.K. "A note of quasi static stress in a thin circular plate due to transient temperature applied along the circumference of a circle over the upper face". Bull Acad. Polon Sci, Ser, Scl, Tech, pp 20-21, 1972.
- [15] Roy Choudhary. S.K."A note on Quasi-static thermal deflection of a thin clamped circular region of the upper face". Journal of the Franklin Institute. Vol.206, No 3. Sept, 1973.
- [16] Wankhede, P.C., .On the Quasi static thermal stresses in a circular plate, Indian Journal of Pure and Mathematics, Vol. 13, No11, pp. 1273-1277, 1982.
- [17] Gogulwar, V S. and Deshmukh , K.C. "Thermal stresses in a thin circular plate with heat source". Journal of Indian Academy of Mathematics, Vol .27, No.1, 2005.
- [18] Tikhe , A. K. and Deshmukh, K. C., Transient thermoelastic deformation in a thin circular plat, Journal of Advances in Mathematical Sciences and Applications, Vol .15, No.1, 2005.
- [19] Qian, L. F., and Batra, R. C, "Transient thermoelastic deformation of a thick functionally graded plate". Journal of Thermal Stresses. Vol.27, pp. 705-740, 2004.
- [20] Nasser M.EL-Maghraby. "TWO dimensional problem with heat sources in generalized thermoelasticity with heat sources". Journal of Thermal Stresses, Vol. 27. Pp. 227-239, 2004.
- [21] Nasser M.EL-Maghraby. "Two dimensional problem for a thick plate with heat sources in generazied thermoelasticity" . Journal of thermal stresses, Vol .28, pp. 1227-1241, 2005.
- [22] Ruhi, M: Angoshatari, A. and Naghdabadi, R. "Thermoelastic analysis of thick walled finite length cylinders of functionally graded material". Journal of Thermal Stresses, Vol.28,pp. 391-408, 2005.
- [23] Hayes, W. C., Keer, L. M., Herrmann, G. and Mockros, L. F. A mathematical analysis for indentation tests of articular cartilage. J. Biomech. 5, 541-551. 4, 1980.
- [24] Cohen, B., T.R. Gradner and G.A. Ateshian, "The influence of transverse isotropy on cartilage indentation behavior. A study on the human humeral head", Trans. Aorthop. Res. Soc., 18, 185, 1993.
- [25] Swanson, S.R., Composites Part A: Applied Science and Manufacturing issue 10 36 1421-1429, 2005.
- [26] Willis, J.R., Journal of the mechanics and of the physics of solids issue 03,14, 163- 176, 1966.

- [27] Turner, J.R., International Journal of solids and structures issue 05,16 ,409-419, 1966.
- [28] Batra, R.C, Vel, S.S, International Journal of solids and structures 37 , 715- 733, 2000.
- [29] Stroh, A.N., Journal of the mathematics and physics 41, 77-103, 1962.
- [30] Lord, H.W., Shulman, Y., A generalized dynamical theory of thermoelasticity. J. Mech. Phys. Solids 15, 299–309, 1967.
- [31] Roberts, A., on the steady motion of a line load over a coupled thermoelastic half-space subsonic case, Quart. J. Mech. Appl. Math. 25, 497-511 , 1972.
- [32] Yang ,Y. and Chen, C. Thermoelastic transient response of an infinitely long annular cylinder composed of two different materials, Int. J. Eng. Sci. 24, 569-581, 1986.
- [33] Green,A.E., Lindsay, K.A., Thermoelasticity. J. Elast. 2, 1–7, 1972.
- [34] Müller, I. The coldness, a universal function in thermoelastic solids, Arch. Rat. Mech. Anal. 41, 319, 1971.
- [35] Green, A. and Laws, N. on the entropy production inequality, Arch. Rat. Anal. 54, 7 . 96, 1972.
- [36] Şhubi, E. and Erbay, S. longitudinal wave propagation in a generalized thermo-elastic cylinder, J. Therm. Stresses 90, 279, 1986.
- [37] Yang, Y. and Chen, C. Thermo elastic transient response of an infinitely long annular cylinder composed of two different materials, Int. J. Eng. Sci. 24, 569-581 , 1986.
- [38] Ignaczak, J. a strong discontinuity wave in thermoelastic with relaxation times, J. Thermal Stresses 8, 25, 1985.
- [39] Ignaczak, J. Decomposition theorem for thermoelasticity with finite wave speeds, J. Thermal Stresses 1, 41, 1978.
- [40] Hasselman, D. P. H. and Heller, R. A. Thermal Stresses in Sever Environments, Plenum Press, New York, 1980.
- [41] Youssef, H.M. and Bary, A.A.El- mathematical model for thermal shock problem of a generaliszed thermoelastic layered composite material with variable thermal conductivity.Computational Methods in science and Technologie 12(2), 165-171, 2006.

- [42] Chen,W.Q. Ding, H.J. Ling, D.S. Thermoelastic field of transversely isotropic elastic medium containing a penny-shaped crack: exact fundamental solution. *International Journal of Solids and Structures* 41, 69–83, 2004.
- [43] Peng-Fei Hou,Andrew Y.T. Leung, Chang-Ping Chen, Fundamental solution for transversely isotropic thermo elastic materials. *International Journal of Solids and Structures* 45, 392-408, 2015.
- [44] Kumar, M. et Hiremath, Ku.Uma the axisymmetric Boussinesq problem for a heated annular punch, *Indian J.pure appl.Math.*, 15(9) : 1036-1047, 1984.
- [45] Keer, L.M. and Fu, w.s., Somme stress distribution in a elastic plate due to rigid heated punches.*Int.J.Engng Sci.*, 5,555, 1967.
- [46] Shibuya,T., An elastic contact problem for a half-space indented by a flat annular rigid stamp.*Int.J.Engng Sci*, 1974.
- [47] Grilitskii,D.V., Kizyma,Y., Theory of déformation elastic and thermic, axisymmetric contact problème, Nauka, Moscow, 1981.
- [48] Carslaw, H. S. et Jaeger, J. C. conduction de la chaleur dans les solides, Clarendon, Oxford, 2e éd., p. 267, 1959.
- [49] crabrol, D., transferts de chaleur, tome 1 le principe, collection technologique ,1989.
- [50] Seghir K., Benbouta R., Balbacha El., Analysis of stresses in the contact zone Rigid cylindrical indenter – transversely isotropic elastic layer, *Matériaux & Techniques* 98 : 227-232. 2010.

## Annexe 1

### La définition de la fonction $\Psi(t)$ et son approximation

Sous forme simplifiée :  $\Psi(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \Psi(x)k(x, t)dx = 1$  Nous écrivons

l'équation :  $\Psi(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \Psi(x)dx \int_0^\infty G_1(2\eta\ell) \cos \eta x \left[ \cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] d\eta = 1$

Avec :

$$K(x, t) = \int_0^\infty G_1(2\eta\ell) \cos \eta x \left[ \cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right] , \quad (x, t) \in [0,1]$$

L'équation Sous forme matricielle linéaire  $[A][X] = [B]$  :

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 - \frac{h}{\pi}k(1.1) & -\frac{2h}{\pi}k(2.1) & \dots & \dots & -\frac{2h}{\pi}k(n-1,1) & -\frac{h}{\pi}k(n,1) \\ -\frac{h}{\pi}k(1.2) & 1 - \frac{2h}{\pi}k(2.2) & \dots & \dots & -\frac{2h}{\pi}k(n-1,2) & -\frac{h}{\pi}k(n,2) \\ -\frac{h}{\pi}k(1.3) & -\frac{2h}{\pi}k(2.3) & \dots & \dots & -\frac{2h}{\pi}k(n-1,3) & -\frac{h}{\pi}k(n,3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{h}{\pi}k(1.n) & -\frac{2h}{\pi}k(2.n) & \dots & \dots & -\frac{2h}{\pi}k(n-1,n) & 1 - \frac{h}{\pi}k(n.n) \end{pmatrix}$$

$$[X] = \begin{pmatrix} \Psi(1) \\ \Psi(2) \\ \Psi(3) \\ \dots \\ \dots \\ \Psi(n) \end{pmatrix} ; \quad [B] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

La fonction  $\Psi(t)$  est définie en N points par la résolution de l'équation  $A][X] = [B]$  dans l'intervalle  $t \in [0,1]$  divisé en N parties de longueur « h », c'est-à-dire par les couples  $(t_i, \Psi_i)$ .

$$\Psi(t) = \{ (t_1, \Psi_1), (t_2, \Psi_2), (t_3, \Psi_3) \dots \dots \dots, (t_n, \Psi_n) \}$$

Nous aurons besoin également de la dérivée de la fonction  $\Psi(t)$ , dans ce cas il faut l'approximer par la forme suivante :

$$\Psi(t_i) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k t_i^k$$

Ce qui conduit à un système de N équations algébriques suivant :

$$\Psi(t_1) = a_0 + a_1 t_1^1 + a_2 t_1^2 + a_3 t_1^3 + \dots + a_n t_1^n$$

$$\Psi(t_2) = a_0 + a_1 t_2^1 + a_2 t_2^2 + a_3 t_2^3 + \dots + a_n t_2^n$$

.....

.....

$$\Psi(t_n) = a_0 + a_1 t_n^1 + a_2 t_n^2 + a_3 t_n^3 + \dots + a_n t_n^n$$

Un programme de calcul est prévu (annexe 3) pour déterminer les termes  $k_{IJ}$  de la matrice [A], la résolution successive des systèmes d'équations aboutissant à la détermination des coefficients d'interpolations «  $a_i$  » de la fonction  $\Psi(t) = \{\Psi(t_i)\}$  et enfin à sa détermination.

## Annexe 2

### Calcul de l'intégrale : $L_k(\rho)$

L'expression finale de la répartition du champ thermique étant définie, dont les coefficients sont à déterminer de la résolution du système d'équations algébriques suivant décrit auparavant par (III.17), exprimé par l'équation matricielle suivante

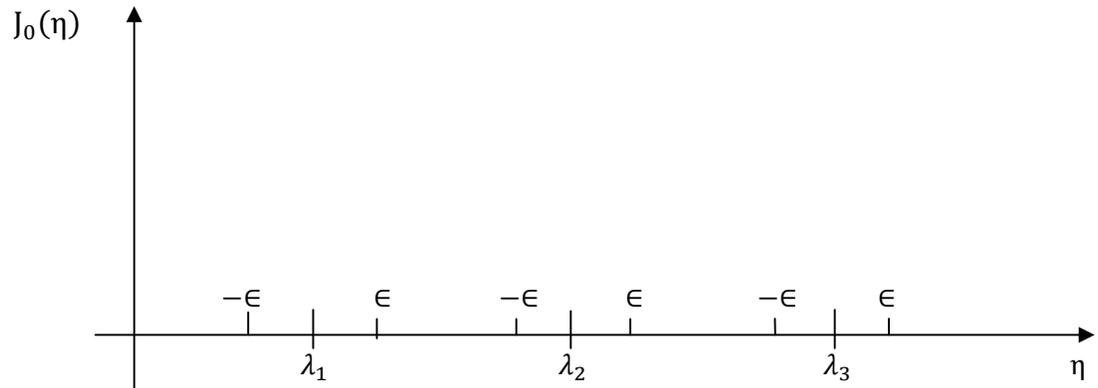
$$\begin{pmatrix} L_1(\rho_1) & L_2(\rho_1) & L_3(\rho_1) & \dots & \dots & L_N(\rho_1) \\ L_1(\rho_2) & L_2(\rho_2) & L_3(\rho_2) & \dots & \dots & L_N(\rho_2) \\ L_1(\rho_3) & L_2(\rho_3) & L_3(\rho_3) & \dots & \dots & L_N(\rho_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_1(\rho_n) & L_2(\rho_n) & L_3(\rho_n) & \dots & \dots & L_N(\rho_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \\ \dots \\ \dots \\ a_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 T_0^1 \\ h_1 T_0^1 \\ h_1 T_0^1 \\ \dots \\ \dots \\ h_1 T_0^1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^N a_k^* L_k(\rho) = h_1 T_0^1$$

Avec :

$$L_k(\rho) = \int_0^\infty \eta \frac{P(\eta) J_0(\eta\rho) J_0(\eta)}{Q(\eta) (\eta^2 - \lambda_k^2)} d\eta$$

Le calcul de ce type d'intégral pose un problème, que soit au niveau des bornes d'intégration, ou au niveau des singularités qui les rendent discontinues non intégrables en ces points. Les singularités ont pour valeurs les racines de la fonction de Bessel d'ordre zéro  $\lambda_k$ . Afin de contourner cette difficulté on a adopté une simplification de ces expressions par l'application de la règle de l'Hôpital connu pour dégager l'indétermination, ainsi



$$\frac{d J_0(C\eta)}{d\eta} = -CJ_1(\eta)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \lambda_k} \frac{J_0(\eta)}{\eta^2 - \lambda_k^2} = \lim_{\eta \rightarrow \lambda_k} \left[ -\frac{1}{2} \frac{J_1(\eta)}{\eta} \right] = -\frac{1}{2} \frac{J_1(\lambda_k)}{\lambda_k}$$

$$L_k(\rho) = \int_0^{\lambda_1 - \epsilon} \dots + \int_{\lambda_1 - \epsilon}^{\lambda_2 + \epsilon} \dots + \int_{\lambda_2 - \epsilon}^{\lambda_3 + \epsilon} \dots + \int_{\lambda_3 - \epsilon}^{\lambda_4 + \epsilon} \dots + \int_{\lambda_4 - \epsilon}^{\lambda_5 + \epsilon} \dots$$

$\epsilon$  : Est une valeur choisie suffisamment petite pour rester loin de l'indétermination

Les fonctions de Bessel sont prises sous la forme intégrale approchée.

D'où le calcul de l'intégrale  $L_k(\rho)$

$$L_k(\rho) = \sum \left[ \int_{A_1}^{A_2} \eta \frac{P(\eta)}{Q(\eta)} \frac{J_0(\eta\rho)J_0(\eta)}{(\eta^2 - \lambda_k^2)} d\eta + \left( -\frac{1}{2} \int_{B_1}^{B_2} \eta \frac{P(\eta)}{Q(\eta)} \frac{J_1(\lambda_k)J_0(\eta)}{\lambda_k} d\eta \right) \right]$$

## Annexe 3

### Calcul d'intégral

L'approximation de la fonction est de la forme polynomiale :  $\Psi(t) = \sum_{k=0}^N a_k t^k$

Sa dérivée est :  $\Psi'(t) = \sum_{k=0}^N k a_k t^{k-1}$

La partie à intégrer s'écrit:

$$\int_{\rho}^1 \frac{\Psi'(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} = \sum_{k=0}^N \int_{\rho}^1 \frac{k a_k t^{k-1}}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt = \sum_{k=1}^N k a_k \int_{\rho}^1 \frac{t^{k-1}}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt$$

Choisissons le changement de variable suivant pour faciliter l'intégration

$$\sqrt{t^2 - \rho^2} = t + x \quad ; \quad t = \frac{-(x^2 + \rho^2)}{2x}$$

$$\text{Alors} \quad dt = \frac{-(x^2 + \rho^2)}{2x^2} dx$$

D'où les bornes d'intégration ;

$$t = \rho \text{ implique } x = -\rho \quad \text{et} \quad t = 1 \quad \text{implique } x = -1 + \sqrt{1 - \rho^2}$$

D'où, la nouvelle forme de l'intégral (voir annexe5)

$$\int_{\rho}^1 \frac{t^k}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt = \int_{-\rho}^{-1 + \sqrt{1 - \rho^2}} \left( \frac{-(x^2 + \rho^2)}{2x} \right)^k \frac{2x}{x^2 + \rho^2} \frac{-(x^2 - \rho^2)}{2x^2} dx = \frac{-1}{2^k} \int_{-\rho}^{-1 + \sqrt{1 - \rho^2}} \frac{(x^2 + \rho^2)^k}{x^{k+1}} dx$$