

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE BATNA 2- Mostefa Ben Boulaïd

Faculté de Mathématiques-Informatique
Département de Mathématiques
Laboratoire d'Équations aux Dérivées Partielles et Applications LEDPA



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT

Option : Equations aux Dérivées Partielles et Applications

Par

LOUIZA MERZOUGUI

THÈME

**HOMOGENÉISATION DE PROBLÈMES POSÉS DANS UNE
STRUCTURE MINCE**

Soutenue le : 11/03/2018

Devant le jury composé de :

Président :	Melkemi Khaled	Prof.	Univ. Batna2
Rapporteur :	Bentalha Fadila	Prof.	Univ. Batna2
Coencadreur :	Griso Georges	Prof.	Univ. Pierre et Marie Curie, France
Examineur :	ZerguineMohamed	MCA	Univ. Batna2
Examineur :	Youkana Amar	Prof.	Univ. Biskra
Examineur :	Ouldhammouda Amar	MCA	ENS de Kouba

Remerciements

Louange à dieu, le miséricordieux, sans lui rien de cela n'aurait pu être. Nous remercions notre dieu qui nous a orienté au chemin du savoir et les portes de la science.

Je remercie tout d'abord ma directrice de thèse Madame le Professeur Fadila Bentalha qui m'a soutenu tout au long de mon travail par ses conseils et ses commentaires qui m'aider de surmonter plusieurs difficultés. Elle a toujours cherché à stimuler ma curiosité scientifique et en particulier m'a insistée de voyager pour découvrir les bonnes méthodes et les différentes manières de recherche.

Je manifeste toute ma profonde reconnaissance et gratitude à mon Co-encadreur Monsieur Georges Griso qui m'a guidé avec beaucoup de patience et de gentillesse tout au long de ce travail effectué. Sa rigueur et sa détermination m'ont permis de ne pas perdre le fil de mes travaux. Je lui remercie infiniment surtout pour sa disponibilité, sa générosité, ses réponses précises qui ne sont pas tardifs et aussi pour son accueil en France.

Je remercie Khaled Melkemi de m'avoir fait l'honneur de rapporter ma thèse ainsi que pour son travail méticuleux de relecture de mon manuscrit.

Je remercie Messieurs Amar Youkana, Amar Ould-Hammouda et Mohamed Zerguine de m'avoir accepté de faire une partie de mon jury et témoigné de l'intérêt pour mes recherches.

Je voudrais remercier le personnel du département de mathématique et en particulier mes enseignements et je tiens également à remercier le personnel du laboratoire Jacques-louis Lions pour leur accueil.

Je remercie chaleureusement mes chers parents pour leur soutien, leur attention sans faille, leur patience, leur encouragements et l'amour inconditionnel m'accompagnent depuis toujours.

Finalement, de tout mon cœur, je remercie les membres de ma famille (spécialement ma sœur et mon oncle) qui m'ont toujours entourés et soutenus sans réserve, tous les membres de la famille qui a accepté de m'héberger durant mon séjour en France, mes amis, mes collègues, mes profs de lycée, de collège, de primaire et tous les personnes qui m'ont aidé pour réaliser et terminer ce travail.

Introduction générale

Ma thèse s'inscrit dans la thématique générale de l'homogénéisation mathématique des systèmes biologiques et physiques. Dans les problèmes d'homogénéisation, en général les oscillations sont notées par le paramètre ε , l'amplitude des oscillations est d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$. L'homogénéisation mathématique consiste à étudier le comportement asymptotique (ε tend vers 0) de la solution u_ε d'une équation aux dérivées partielles. La question qui se pose naturellement est la suivante : si u_0 est un point limite de la suite $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ (dans un certain sens), peut-on caractériser u_0 comme la/une solution d'une équation aux dérivées partielles ? Si la réponse à cette question est positive, le problème limite est appelé : problème homogénéisé. Ce problème est bien évidemment plus simple que le problème de départ car il ne contient pas d'oscillations. On est ensuite amené à répondre à d'autres questions naturelles comme : le problème limite est-il unique, admet-t-il des solutions et si oui en a-t-il une seule ? Dans ce dernier cas on veut savoir si u_0 est une bonne approximation de u_ε , pour cela on démontre des convergences fortes ou on établit des estimations de l'erreur. Si les réponses à ces questions sont toutes positives, on remplace la solution u_ε du problème initial par la solution u_0 du problème homogénéisé.

Dans ma thèse je me suis intéressée à l'homogénéisation de deux problèmes :

- le premier concerne l'élasticité linéaire d'une multistrukture,
- le second concerne la diffusion d'un fluide dans une structure binaire raréfiée.

Le premier problème est consacré à l'étude du comportement asymptotique d'une multistrukture élastique composée par une famille de poutres régulièrement distribuées entre deux plaques minces. Cette structure est un modèle **simplifié** de la peau ; la couche supérieure représente l'épiderme et la couche inférieure l'hypoderme. Entre ces deux couches minces,

l'ensemble des fibres de collagène est représenté par les poutres (voir Figure 1)

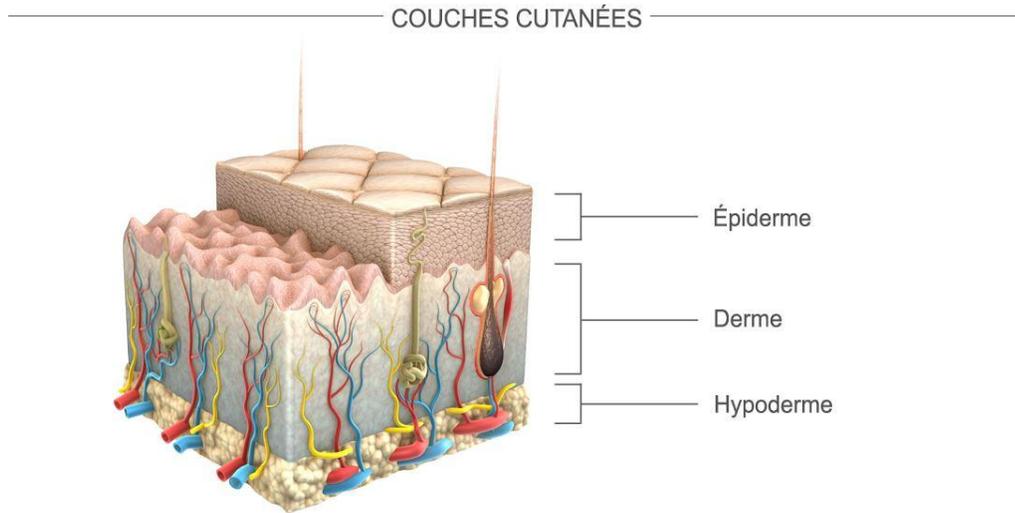


FIGURE 1 – Les trois couches de la peau.

On suppose que le bord latéral de la plaque inférieure est fixé ; d'après [3] l'épiderme et le derme sont à l'origine des propriétés mécaniques de la peau, la couche de graisse "hypoderme" a peu d'influence sur le comportement élastique de la peau.

La connaissance du comportement élastique de la peau est d'un grand intérêt pour le diagnostic des maladies cutanées et pour les tests d'efficacité des produit cosmétiques (voir [29]).

Dans cette étude, on fait l'hypothèse que les plaques et les poutres sont constituées de matériaux élastiques, isotropes et homogènes. Ainsi, le tenseur des contraintes s'exprime simplement en fonction du tenseur des déformations via les coefficients de Lamé des matériaux. La relation qui lie ces deux tenseurs est la loi de Hook (voir (2.2)). Le problème à traiter est un problème standard d'élasticité linéaire donné par (2.3) où sous forme vectorielle par

$$\mu \Delta u_\delta + (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} u_\delta) = f_\delta \quad \text{dans } \Omega_{\delta, \varepsilon, r}.$$

Cette dernière forme est l'équation de Navier-Cauchy qui s'écrit également (équation de Navier)

$$-\mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(u_\delta)) + (\lambda + 2\mu) \nabla(\operatorname{div} u_\delta) = f_\delta$$

en utilisant la formule $\text{rot}(\text{rot}(u_\delta)) = \nabla(\text{div} u_\delta) - \Delta u_\delta$.

La deuxième partie de ma thèse est consacrée à l'étude du comportement asymptotique d'un problème d'évolution gouvernant un processus de diffusion dans une structure binaire raréfiée. Les problèmes de diffusion se rencontrent dans de nombreux processus industriels et géophysiques ; c'est le cas en particulier pour le pompage du pétrole, la pollution des terrains (pollution chimique ou nucléaire). Dans l'étude des structures binaires, on s'attache tout particulièrement à établir les interactions entre les niveaux microscopique et macroscopique.

Le problème que j'ai étudié est donné par (4.7), les hypothèses sont en (4.8), (4.9) et (4.26). Ce problème a déjà été abordé dans plusieurs papiers de F. Bentalha, I. Gruais et D. Poliševki (voir [16, 30, 32]) en utilisant la méthode de la zone de contrôle et la méthode des échelles multiples.

La méthode des échelles multiples consiste à construire formellement une solution du problème initial sous la forme d'un développement asymptotique de u_ε

$$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$$

En comparant ensuite les différentes puissances de ε on déduit les problèmes vérifiés par u_0, u_1, \dots . On justifie cette démarche en montrant que u_ε converge vers u_0 , (u_0 étant la solution du problème homogénéisé, voir par exemple [15]). En 1978, Luc Tartar (voir [35]) a introduit la méthode de l'énergie pour étudier les problèmes d'homogénéisation périodique. Elle est essentiellement basée sur des choix judicieux des fonctions tests oscillantes. Ces choix permettent de passer à la limite dans le problème de départ, en éliminant les indéterminations provenant des produits de convergences faibles. En 1989, Ngueteseng a introduit la méthode de la convergence à deux échelles [26] ; cette méthode a ensuite été développée par G. Allaire [17].

Dans ma thèse, j'utilise une nouvelle méthode pour traiter le problème d'homogénéisation (4.7) : la méthode de l'éclatement périodique introduite en 2002 par D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso (voir [11, 12]). Cette nouvelle approche de l'homogénéisation périodique est basée sur la dilatation des domaines microscopiques. L'espace physique est transformé par l'opérateur d'éclatement en doublant en général sa dimension. Cette augmentation de la

dimension permet de "voir" les parties microscopiques ; il faut également noter que l'on est ainsi amené à travailler avec des ensembles de fonctions indépendantes de ε . On trouve une esquisse de cette méthode dans plusieurs travaux : celui de T. Arbogast, J. Douglas et U. Hornung en 1990 (voir [46]) pour l'étude de l'homogénéisation d'un milieu périodique à double porosité ou comme celui de G. Allaire, C. Conca et M. Vanninathan [18] en combinaison avec la méthode de convergence à deux échelles.

La méthode de l'éclatement périodique a été étendue par D. Cioranescu, A. Damlamian, P. Donato, G. Griso et R. Zaki (voir [39]) aux domaines perforés et par P. Donato, L. N. Hang, et R. Tardieu (voir [40]) aux domaines constitués de matériaux présentant différentes périodes. La méthode de l'éclatement périodique est équivalente à la méthode de la convergence à deux échelles, ce qui se voit dans la relation suivante : si $(\phi^\varepsilon)_\varepsilon$ est une suite uniformément bornée de fonctions de $L^2(\Omega)$, alors

$$\mathcal{T}^\varepsilon(\phi^\varepsilon) \rightharpoonup \phi \text{ faiblement dans } L^2(\Omega \times Y) \iff \phi^\varepsilon \text{ converge à deux échelles vers } \phi.$$

Mais avec l'éclatement périodique les démonstrations sont plus simples qu'avec la méthode à deux échelles.

Ma thèse comprend cinq chapitres. Les trois premiers concernent le problème d'élasticité, le quatrième le problème de diffusion et le dernier chapitre contient les démonstrations des lemmes techniques.

Le premier chapitre présente quelques résultats préliminaires ; essentiellement des rappels des résultats techniques utilisés dans les chapitres suivants.

Le deuxième chapitre est le plus important de cette première partie. La multistructure considérée dépend de trois petits paramètres : r le rayon des poutres, ε la période et δ l'ordre de grandeur de l'épaisseur des plaques et de la longueur des poutres, sous les conditions ($r < \varepsilon/2$ et $\varepsilon \leq \delta$). Dans une structure faisant intervenir des petites dimensions, il est souvent très difficile d'obtenir des estimations à priori (ici l'obtention d'une inégalité de type Korn). Pour surmonter cette difficulté, j'ai utilisé les décompositions des déplacements dans les plaques et dans les poutres. Les estimations aux jonctions ont été obtenues en comparant ces décompositions dans les petites portions de poutres contenues dans les plaques. À la lecture des

estimations complètes, on s'aperçoit que les déplacements des deux plaques sont du même ordre de grandeur lorsque les paramètres r , ε , δ sont liés par les relations données en (2.49) et (2.50). On peut ensuite choisir l'ordre de grandeur des forces appliquées et entamer l'étude du comportement asymptotique de cette structure. Dans le troisième chapitre on exploite les résultats du chapitre précédant pour obtenir le problème vérifié par les déplacements limites, dans la dernière section de ce chapitre on montre la convergence de l'énergie élastique totale. Dans le quatrième chapitre, j'aborde la deuxième partie de mon travail . Elle concerne l'étude du problème d'évolution dans une structure binaire raréfiée.

Les motivations de mon travail

Je m'étais fixé les objectifs suivants :

- utiliser les outils de décompositions des déplacements des structures minces pour obtenir des estimations à priori et étudier les jonctions d'une multistrukture dans le cadre de l'élasticité linéaire,
- utiliser la méthode de l'éclatement périodique pour traiter la diffusion dans une structure binaire raréfiée.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce premier chapitre, on présente quelques résultats d'élasticité linéaire utilisés dans les chapitres suivants.

On commence par définir la poutre, on rappelle la décomposition des déplacements d'une poutre et les estimations des termes de cette décomposition à l'aide de la norme L^2 du gradient symétrisé du déplacement et de l'épaisseur de la poutre. Les mêmes rappels sont ensuite présentés pour les plaques.

L'inégalité de Korn pour les déplacements d'un domaine $3d$ de frontière assez régulière est donné dans les deux cas : avec ou sans encastresments.

Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 2$. Pour tout déplacement u appartenant à $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{R}^N)$ on note

$$\nabla u = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$$

le gradient symétrisé de u .

1.1 La poutre

On note \mathbf{P}_δ la poutre de section droite le disque D_δ de centre O et de rayon δ et de longueur L :

$$\mathbf{P}_\delta = (0, L) \times D_\delta.$$

Définition 1.1.1. Le déplacement élémentaire U_e associé au déplacement u appartenant à

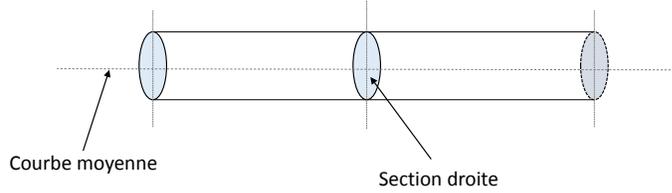


FIGURE 1.1 – Poutre et sa section droite.

$H^1(\mathbf{P}_\delta; \mathbb{R}^3)$ est défini par

$$U_e(x) = \mathcal{U}(x_1) + \mathcal{R}(x_1) \wedge (x_2 e_2 + x_3 e_3), \quad p.p. \ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{P}_\delta; \quad (1.1)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x_1) &= \frac{1}{\pi \delta^2} \int_{D(O; \delta)} u(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3, \\ \mathcal{R}_1(x_1) &= \frac{2}{\pi \delta^4} \int_{D(O; \delta)} (x_2 u_3(x_1, x_2, x_3) - x_3 u_2(x_1, x_2, x_3)) dx_2 dx_3, \\ \mathcal{R}_2(x_1) &= \frac{4}{\pi \delta^4} \int_{D(O; \delta)} x_3 u_1(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3, \\ \mathcal{R}_3(x_1) &= -\frac{4}{\pi \delta^4} \int_{D(O; \delta)} x_2 u_1(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3. \end{aligned} \quad (1.2)$$

La décomposition de u s'écrit donc

$$\begin{aligned} u(x) &= U_e(x) + \bar{u}(x) \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1(x_1) + x_3 \mathcal{R}_2(x_1) - x_2 \mathcal{R}_3(x_1) + \bar{u}_1(x) \\ \mathcal{U}_2(x_1) - x_3 \mathcal{R}_1(x_1) + \bar{u}_2(x) \\ \mathcal{U}_3(x_1) + x_2 \mathcal{R}_1(x_1) + \bar{u}_3(x) \end{pmatrix} \quad p.p. \ x \in \mathbf{P}_\delta. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Le déplacement \bar{u} , différence entre u et U_e , représente le gauchissement des sections droites de la poutre. Le gradient de u s'écrit

$$\nabla u = \left(\frac{d\mathcal{U}}{dx_1} + \frac{d\mathcal{R}}{dx_1} \wedge (x_2 e_2 + x_3 e_3) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} \quad \mathcal{R} \wedge e_2 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} \quad \mathcal{R} \wedge e_3 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} \right) \quad (1.4)$$

Le champ \mathcal{U} représente le déplacement de la ligne moyenne de la poutre. Sous l'action d'un petit déplacement élémentaire la section droite $\{x_1\} \times D_\delta$ est translatée de $\mathcal{U}(x_1)$ et elle tourne autour du vecteur $\mathcal{R}(x_1)$ d'un petit angle de mesure $\|\mathcal{R}(x_1)\|_2$. Après ce déplacement, la section droite $\{x_1\} \times D_\delta$ n'est plus en général orthogonale à la ligne moyenne déformée¹. L'angle de torsion de la section droite (angle de rotation de la section droite autour de sa ligne moyenne) est donné par la première composante de $\mathcal{R}(x_1)$.

Le théorème suivant est démontré dans [21, Théorème 3.3] :

Théorème 1.1.1. *Soit $u \in H^1(\mathbf{P}_\delta; \mathbb{R}^3)$ et U_e le déplacement élémentaire qui lui est associé. On a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \|\nabla \bar{u}\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9} &\leq C \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}, \quad \|\bar{u}\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^3} \leq C\delta \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}, \\ \delta \left\| \frac{d\mathcal{R}}{dx_1} \right\|_{[L^2(0,L)]^3} + \left\| \frac{d\mathcal{U}}{dx_1} - \mathcal{R} \wedge e_1 \right\|_{[L^2(0,L)]^3} &\leq \frac{C}{\delta} \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

La constante est indépendante de δ et L .

1.2 La plaque

Soit ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 de frontière lipschitzienne. On choisit pour origine du repère de \mathbb{R}^3 le centre de gravité de ω et deux vecteurs unitaires (e_1, e_2) dans les directions des axes principaux d'inertie de ω . La direction des normales à ω est donnée par le vecteur unitaire e_3 .

La plaque $\Omega_\delta = \omega \times]-\delta, \delta[$, $\delta > 0$, est un domaine de \mathbb{R}^3 . La surface moyenne de la plaque est l'ouvert ω de \mathbb{R}^2 ; la plaque est ici d'épaisseur 2δ . On note $x = (x_1, x_2, x_3) = (x', x_3)$ les coordonnées d'un point de Ω_δ , où $x' \in \omega$. La fibre passant par $(x', 0) \in \omega \times \{0\}$ est l'intervalle ouvert intersection de la droite passant par $(x', 0)$ de direction e_3 et de Ω_δ .

Définition 1.2.1. *Le déplacement élémentaire U_e associé au déplacement u appartenant à $H^1(\Omega_\delta; \mathbb{R}^3)$ est défini par*

$$U_e(x) = \mathcal{U}(x') + x_3 \mathcal{R}(x') \quad p.p. \quad x \in \Omega_\delta.$$

1. Dans le cas d'un déplacement de Bernoulli-Navier, après déplacement les sections droites restent orthogonales à la ligne moyenne déformée.

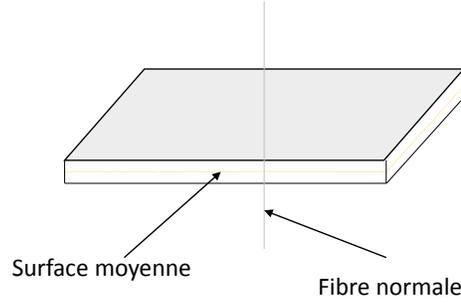


FIGURE 1.2 – Plaque mince avec son plan médian et une fibre normale.

où

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(x') &= \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} u(x', x_3) dx_3, \\ \mathcal{R}_1(x') &= \frac{3}{2\delta^3} \int_{-\delta}^{\delta} x_3 u_1(x', x_3) dx_3, \quad \text{p.p. } x' \in \omega. \\ \mathcal{R}_2(x') &= \frac{3}{2\delta^3} \int_{-\delta}^{\delta} x_3 u_2(x', x_3) dx_3.\end{aligned}$$

Le déplacement $u \in H^1(\Omega_\delta; \mathbb{R}^3)$ s'écrit

$$\begin{aligned}u(x) &= U_e(x) + \bar{u}(x) \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1(x') + x_3 \mathcal{R}_1(x') + \bar{u}_1(x) \\ \mathcal{U}_2(x') + x_3 \mathcal{R}_2(x') + \bar{u}_2(x) \\ \mathcal{U}_3(x') + \bar{u}_3(x) \end{pmatrix} \quad \text{p.p. } x \in \Omega_\delta.\end{aligned} \quad (1.6)$$

Le gradient de u s'écrit (ci-dessous, on convient que $\mathcal{R}_3 = 0$)

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} & \mathcal{R} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Sous l'action d'un petit déplacement élémentaire la surface moyenne de la plaque est translatée de $\mathcal{U}(x')$. La fibre $x' \times]-\delta, \delta[$ tourne autour du vecteur $\mathcal{R}_2(x')e_1 - \mathcal{R}_1(x')e_2$ d'un

petit angle de mesure $\|\mathcal{R}(x')\|_2$. Après ce déplacement, les fibres ne sont plus en général orthogonales à la surface moyenne déformée². Le déplacement \bar{u} renseigne sur la déformation des fibres, c'est le gauchissement.

Le théorème suivant est démontré dans [23, Théorème 2.3] :

Théorème 1.2.1. *Soit $u \in H^1(\Omega_\delta; \mathbb{R}^3)$ et U_e le déplacement élémentaire qui lui est associé par la définition 1.2.1. On a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \|\nabla \bar{u}\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9} &\leq C \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}, & \|\bar{u}\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^3} &\leq C \delta \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}, \\ \delta \|\nabla \mathcal{R}\|_{[L^2(\omega)]^4} + \|\nabla \mathcal{U}_m\|_{[L^2(\omega)]^4} + \sum_{\alpha=1}^2 \left\| \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha} + \mathcal{R}_\alpha \right\|_{L^2(\omega)} &\leq \frac{C}{\delta^{1/2}} \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

où $\mathcal{U}_m = \mathcal{U}_1 e_1 + \mathcal{U}_2 e_2$. La constante est indépendante de δ .

1.3 Inégalités de Korn pour une poutre et une plaque

Ci-dessous, on rappelle l'ingalité de Korn pour un domaine non encastré (voir [23, Théorème 2.3]) :

Théorème 1.3.1. *Soit \mathcal{O} un domaine borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, de frontière lipschitzienne. Pour tout déplacement $v \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{R}^N)$ il existe un déplacement rigide r tel que*

$$\|v - r\|_{[H^1(\mathcal{O})]^N} \leq C \|\nabla v\|_{[L^2(\mathcal{O})]^{N \times N}}.$$

La constante ne dépend que de \mathcal{O} .

1.3.1 Inégalité de Korn pour la poutre \mathbf{P}_δ

Proposition 1.3.1. *Soient $u \in H^1(\mathbf{P}_\delta; \mathbb{R}^3)$ et U_e le déplacement élémentaire qui lui est associé.*

On pose

$$\mathbf{a} = \mathcal{U}(0), \quad \mathbf{b} = \mathcal{R}(0)$$

et on considère le déplacement rigide

$$r(x) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

2. Dans le cas d'un déplacement de Kirchhoff-Love, après déplacement les fibres restent orthogonales à la surface moyenne déformée.

On a

$$\|\nabla u - \nabla r\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9} \leq \frac{CL}{\delta} \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9} \quad (1.9)$$

et

$$\begin{aligned} \|u_1 - r_1\|_{L^2(\mathbf{P}_\delta)} &\leq CL \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}, \\ \|u_2 - r_2\|_{L^2(\mathbf{P}_\delta)} + \|u_3 - r_3\|_{L^2(\mathbf{P}_\delta)} &\leq \frac{CL^2}{\delta} \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Démonstration. L'inégalité de Poincaré et l'estimation (1.5) (iii) donnent

$$\|\mathcal{R} - \mathbf{b}\|_{[L^2(0,L)]^3} = \|\mathcal{R} - \mathcal{R}(0)\|_{[L^2(0,L)]^3} \leq L \left\| \frac{d\mathcal{R}}{dx_1} \right\|_{[L^2(0,L)]^3} \leq \frac{CL}{\delta^2} \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}. \quad (1.11)$$

De (1.5) (iii) et de l'estimation ci-dessus, il vient que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\mathcal{U}_1}{dx_1} \right\|_{L^2(0,L)} &\leq \frac{C}{\delta} \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}, \\ \left\| \frac{d\mathcal{U}_2}{dx_1} - \mathbf{b}_3 \right\|_{L^2(0,L)} &\leq \|\mathcal{R}_3 - \mathbf{b}_3\|_{L^2(0,L)} + \frac{C}{\delta} \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9} \leq \frac{CL}{\delta^2} \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}, \\ \left\| \frac{d\mathcal{U}_3}{dx_1} + \mathbf{b}_2 \right\|_{L^2(0,L)} &\leq \|\mathcal{R}_2 - \mathbf{b}_2\|_{L^2(0,L)} + \frac{C}{\delta} \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9} \leq \frac{CL}{\delta^2} \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

car $\delta \leq L$. L'inégalité de Poincaré et les estimations ci-dessus mènent à

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_1 - a_1\|_{L^2(0,L)} &\leq L \left\| \frac{d\mathcal{U}_1}{dx_1} \right\|_{L^2(0,L)} \leq \frac{CL}{\delta} \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}, \\ \|\mathcal{U}_2 - a_2 - \mathbf{b}_3 x_1\|_{L^2(0,L)} &\leq L \left\| \frac{d\mathcal{U}_2}{dx_1} - \mathbf{b}_3 \right\|_{L^2(0,L)} \leq \frac{CL^2}{\delta^2} \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}, \\ \|\mathcal{U}_3 - a_3 + \mathbf{b}_2 x_1\|_{L^2(0,L)} &\leq L \left\| \frac{d\mathcal{U}_3}{dx_1} + \mathbf{b}_2 \right\|_{L^2(0,L)} \leq \frac{CL^2}{\delta^2} \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Utilisant l'expression (1.4) du gradient de u , on de u , on en déduit que

$$\begin{aligned} &\nabla u - \nabla r \\ &= \left(\frac{d\mathcal{U}}{dx_1} - \mathbf{b} \wedge e_1 + \frac{d\mathcal{R}}{dx_1} \wedge (x_2 e_2 + x_3 e_3) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} \quad (\mathcal{R} - \mathbf{b}) \wedge e_2 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} \quad (\mathcal{R} - \mathbf{b}) \wedge e_3 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} \right) \end{aligned}$$

Compte tenu de (1.8)₁, (1.8)₃ et des estimations (1.12), il vient (1.9). On utilise ensuite (1.8)₂, (1.11) et (1.13), pour obtenir (1.10). \square

Corollaire 1.3.1. *Si la poutre est fixée en l'une de ces extrémités au moins (par exemple sur $\{0\} \times \omega_\delta$) alors on a*

$$\|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9} \leq \frac{CL}{\delta} \|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9} \quad (1.14)$$

et

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{L^2(\mathbf{P}_\delta)} &\leq CL\|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}, \\ \|u_2\|_{L^2(\mathbf{P}_\delta)} + \|u_3\|_{L^2(\mathbf{P}_\delta)} &\leq \frac{CL^2}{\delta}\|\nabla u\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Démonstration. Si la poutre est fixée sur $\{0\} \times \omega_\delta$ alors les termes de la décomposition de u (voir définition 1.1) s'annulent en 0 d'où le résultat. \square

1.3.2 Inégalité de Korn pour la plaque Ω_δ

Proposition 1.3.2. *Soit $u \in H^1(\Omega_\delta; \mathbb{R}^3)$, il existe un déplacement rigide \mathbf{r} tel que*

$$\|\nabla u - \nabla \mathbf{r}\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9} \leq \frac{C}{\delta}\|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}, \quad (1.16)$$

et

$$\begin{aligned} \|(u - \mathbf{r})_\alpha\|_{L^2(\Omega_\delta)} &\leq C\|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}, \\ \|(u - \mathbf{r})_3\|_{L^2(\Omega_\delta)} &\leq \frac{C}{\delta}\|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Les constantes ne dépendent que de ω .

Démonstration. On applique le Théorème 1.3.1 avec les déplacements $2d : \mathcal{U}_m = \mathcal{U}_1 e_1 + \mathcal{U}_2 e_2$ et $\mathcal{R}_m = \mathcal{R}_1 e_1 + \mathcal{R}_2 e_2$. Il existe deux déplacements rigides

$$r'(x') = \begin{pmatrix} a_1 - b_3 x_2 \\ a_2 + b_3 x_1 \end{pmatrix} \quad r''(x') = \begin{pmatrix} b_1 - c x_2 \\ b_2 + c x_1 \end{pmatrix}$$

tels que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_m - r'\|_{[H^1(\omega)]^2} &\leq C\|\nabla \mathcal{U}\|_{[L^2(\omega)]^4} \leq \frac{C}{\delta^{1/2}}\|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}, \\ \|\mathcal{R}_m - r''\|_{[H^1(\omega)]^2} &\leq C\|\nabla \mathcal{R}\|_{[L^2(\omega)]^4} \leq \frac{C}{\delta^{3/2}}\|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

On a donc

$$\|\mathcal{R}_1 - b_1 + c x_2\|_{L^2(\omega)} + \|\mathcal{R}_2 - b_2 - c x_1\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{C}{\delta^{3/2}}\|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}. \quad (1.19)$$

D'après (1.8)₃ et (1.19) il vient que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_1} + b_1 - c x_2 \right\|_{L^2(\omega)} &\leq \|\mathcal{R}_1 - b_1 + c x_2\|_{L^2(\omega)} + \frac{C}{\delta^{1/2}}\|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9} \leq \frac{C}{\delta^{3/2}}\|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}, \\ \left\| \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_2} + b_2 + c x_1 \right\|_{L^2(\omega)} &\leq \|\mathcal{R}_2 - b_2 - c x_1\|_{L^2(\omega)} + \frac{C}{\delta^{1/2}}\|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9} \leq \frac{C}{\delta^{3/2}}\|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}. \end{aligned}$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_1} + b_1 - cx_2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_2} + b_2 + cx_1 \right) = 2c \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega).$$

D'où

$$\|2c\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \left(\left\| \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_1} + b_1 - cx_2 \right\|_{L^2(\omega)} + \left\| \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_2} + b_2 + cx_1 \right\|_{L^2(\omega)} \right) \leq \frac{C}{\delta^{3/2}} \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}.$$

Comme d est une constante, on en déduit que

$$\begin{aligned} |c| &\leq \frac{C}{\delta^{3/2}} \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}, \quad \|\nabla \mathcal{R}\|_{[L^2(\omega)]^4} \leq \frac{C}{\delta^{3/2}} \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}, \\ \sum_{\alpha=1}^2 \left\| \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha} + b_\alpha \right\|_{L^2(\omega)} &\leq \frac{C}{\delta^{3/2}} \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

De l'inégalité de Poincaré-Wirtinger et de la dernière estimation on obtient (on rappelle que l'origine du repère est au centre de gravité de ω)

$$\|\mathcal{U}_3 - a_3 + b_1 x_1 + b_2 x_2\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{C}{\delta^{3/2}} \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}. \quad (1.21)$$

On pose

$$\mathbf{r}(x) = \begin{pmatrix} a_1 - b_3 x_2 + b_1 x_3 \\ a_2 + b_3 x_1 + b_2 x_3 \\ a_3 - b_1 x_1 - b_2 x_2 \end{pmatrix} \quad x \in \Omega_\delta.$$

De (1.18)₁ et (1.20), on obtient

$$\|\nabla u - \nabla r\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9} \leq \frac{C}{\delta} \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}.$$

De l'expression (1.6) de u_α et d'après (1.18), (1.19) et (1.8)₁ on a

$$\begin{aligned} \|(u - \mathbf{r})_\alpha\|_{L^2(\Omega_\delta)} &\leq C \left(\delta^{1/2} \|\mathcal{U}_\alpha - r'_\alpha\|_{L^2(\omega)} + \delta^{3/2} \|\mathcal{R}_\alpha - r''_\alpha\|_{L^2(\omega)} + \|\bar{u}_\alpha\|_{L^2(\Omega_\delta)} \right) \\ &\leq C \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

De

$$(u - \mathbf{r})_3(x) = \mathcal{U}_3(x') - (a_3 - b_1 x_1 - b_2 x_2) + \bar{u}_3(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega_\delta$$

et (1.21) et (1.8)₁ on obtient

$$\|(u - \mathbf{r})_3\|_{L^2(\Omega_\delta)} \leq \frac{C}{\delta} \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}. \quad \square$$

On note γ une partie de mesure non nulle de $\partial\omega$. On pose

$$\mathbf{H}_{\Gamma_{0,\delta}}^1(\Omega_\delta) = \left\{ u \in H^1(\Omega_\delta; \mathbb{R}^3) \mid u = 0 \text{ sur } \Gamma_{0,\delta} \doteq \gamma \times (-\delta, \delta) \right\}.$$

Soit $u \in \mathbf{H}_{\Gamma_{0,\delta}}^1(\Omega_\delta)$, le déplacement élémentaire U_e (voir définition 1.2.1) et le gauchissement \bar{u} vérifie

$$\mathcal{U} = 0, \quad \mathcal{R} = 0 \quad \text{sur } \gamma \text{ et } \bar{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_{0,\delta}.$$

Corollaire 1.3.2. *Pour tout $u \in \mathbf{H}_{\Gamma_{0,\delta}}^1(\Omega_\delta)$ on a*

$$\|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9} \leq \frac{C}{\delta} \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}, \quad (1.23)$$

et

$$\begin{aligned} \|u_\alpha\|_{L^2(\Omega_\delta)} &\leq C \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}, \\ \|u_3\|_{L^2(\Omega_\delta)} &\leq \frac{C}{\delta} \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta)]^9}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Démonstration. Si u appartient à $\mathbf{H}_{\Gamma_{0,\delta}}^1(\Omega_\delta)$ alors dans la proposition 1.3.2 on prend le déplacement rigide $r = 0$. □

Première partie

Jonctions entre deux plaques et une famille de poutres.

Dans cette partie, on étudie le comportement asymptotique d'une multistructure élastique composée par une famille de poutres élastiques ayant la même longueur (d'ordre δ) et la même section droite (un disque de rayon r). Les poutres sont ε -périodiquement distribuées entre deux plaques. Ces plaques ont des épaisseurs différentes d'ordre δ . On suppose que $r < \varepsilon/2$ et $r \leq \delta$ afin de traiter une famille de poutres distinctes. Le bord latéral de la plaque inférieure est fixé et les autres parties de la frontière de la structure sont libres de forces. Le modèle mécanique est celui de l'élasticité isotrope linéaire. Le but de ce travail est d'introduire un modèle simplifié de la peau. La plaque supérieure représente l'épiderme, tandis que la plaque inférieure est l'hypoderme. Les poutres périodiquement distribuées entre ces deux couches représentent les fibres de collagène dans le derme (pour plus de détails, voir [2])

Lors de l'étude d'une multi-structure élastique, la première difficulté rencontrée est : comment obtenir des estimations à priori des déplacements ? Les inégalités de Korn pour une plaque, une poutre ou un domaine régulier 3D ne sont malheureusement pas suffisantes. Pour surmonter cette difficulté, on utilise les décompositions des déplacements des plaques et des poutres introduites dans [21, 23] pour les poutres droites ou courbes et les coques ou les plaques. Ces décompositions ont été étendues aux structures composées par des poutres ou par des plaques dans [22, 24]. Le déplacement d'une poutre s'écrit comme la somme d'un déplacement élémentaire et d'un gauchissement. Le déplacement élémentaire est affine dans les sections droites, il dépend de deux champs vectoriels définis sur la ligne centrale de la poutre (voir (2.9)). Le gauchissement représente la déformation des sections droites. De même, le déplacement d'une plaque s'écrit comme la somme d'un déplacement élémentaire et d'un gauchissement. Ici, le déplacement élémentaire est affine dans les fibres (voir (2.20)). Dans les sous sections 2.2.1-2.2.2, pour ces décompositions, on rappelle les estimations complètes du gauchissement et l'estimation du tenseur des déformations du déplacement élémentaire par rapport au tenseur des déformations des déplacements initiaux. On utilise ces décompositions pour l'ensemble des poutres et pour les deux plaques. Ensuite, il reste à obtenir les estimations complètes des déplacements élémentaires. Pour ce faire, on compare les termes des déplacements élémentaires dans les petites portions de poutres incluses dans les plaques. En particulier, on montre que les estimations des déplacements dans les deux plaques diffèrent

par le facteur $1 + \frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)}$. D'où, si on souhaite des déplacements des plaques du même ordre, on suppose que ce facteur est uniformément borné. Ainsi, les petits paramètres δ , ε et r sont liés par la relation

$$\varepsilon = \kappa_0 \delta^\rho, \quad r = \kappa_1 \delta^\eta, \quad \eta > 0, \quad \rho > 0$$

et des conditions sur ρ et η (voir la section (2.3)). On montre ensuite que le couple (ρ, η) appartient à un polygone convexe. Puis, on introduit les deux opérateurs de l'élatement Π_δ et Π_r ; ils permettent de "réduire" les dimensions $\delta \rightarrow 0$ et $r \rightarrow 0$.

Pour la modélisation mathématique des poutres et des plaques, nous nous référons à [42, 43, 36]. En ce qui concerne les multi-structures en élasticité linéaire et les jonctions entre des poutres et un domaine 3D ou des poutres et des plaques, nous nous référons à [41, 5, 6, 7, 8, 37, 21, 24, 25, 20, 31, 28]. La jonction entre une poutre et une plaque en élasticité non linéaire est traitée dans [9, 10].

Dans les deux chapitres suivants

- les indices grecs α et β appartiendront à $\{1,2\}$ tandis que les indices latins i, j, k, l appartiendront à $\{1,2,3\}$,
- les constantes notées C ne dépendent pas de δ , ε et r ,
- on utilise la convention d'Einstein de sommation sur des indices répétés.

Chapitre 2

Jonctions entre les plaques et les poutres

Ce chapitre comporte 6 sections. Une description de la géométrie de la structure et le problème d'élasticité sont présentés dans la section 1.

Dans la section 2 on détaille les estimations des déplacements de la structure ; on commence par l'estimation des déplacements d'une seule poutre puis de l'ensemble des poutres et pour finir on considère les déplacements des plaques.

Les cas critiques sont introduits dans la section 3. Ils proviennent des estimations obtenues dans la section précédente. L'étude de notre structure va se poursuivre dans l'un des cas critiques, on a choisi celui qui représente la situation la plus générale. Les hypothèses sur les forces appliquées sont données dans la section 4.

Dans la section 5, on définit les opérateurs Π_δ et Π_r . La dernière section est consacrée à l'obtention du problème limite et à la convergence de l'énergie élastique totale.

2.1 La géométrie de la structure et le problème d'élasticité

La structure est composée de deux plaques horizontales Ω_δ^a et Ω_δ^b dont les épaisseurs sont $2\kappa_a\delta$ et $2\kappa_b\delta$, $0 < \kappa_a, \kappa_b < 1/2$. Les deux plaques sont reliées par une famille de poutres verticales, régulièrement espacées. Ces poutres sont des cylindres de rayon r et de longueur $2\delta + \delta(\kappa_a + \kappa_b)$, où $\kappa_a + \kappa_b < 1$

On pose

— $\omega = (-L/2, L/2)^2$ la surface moyenne de référence des plaques,

- $I^a = (1 - \kappa_a, 1 + \kappa_a)$, $I^b = (-1 - \kappa_b, -1 + \kappa_b)$,
- $I_\delta^a = \delta I^a = (\delta(1 - \kappa_a), \delta(1 + \kappa_a))$, $I_\delta^b = \delta I^b = (-\delta(1 + \kappa_b), -\delta(1 - \kappa_b))$,
- $I = (-1 - \kappa_b, 1 + \kappa_a)$, $I_\delta = \delta I = (-\delta(1 + \kappa_b), \delta(1 + \kappa_a))$,
- $I^{be} = (-1 + \kappa_b, 1 - \kappa_a)$, $I_\delta^{be} = \delta I^{be} = (\delta(-1 + \kappa_b), \delta(1 - \kappa_a))$,
- $\Omega_\delta^a = \omega \times I_\delta^a$ la plaque supérieure,
- $\Omega_\delta^b = \omega \times I_\delta^b$ la plaque inférieure,
- $Y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2$, $\varepsilon = \frac{L}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$,
- $Y_\varepsilon = \varepsilon Y = \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)^2$,
- $\Xi_\varepsilon = \{1, 2, \dots, N\}^2$,
- $\omega = \text{int}\left(\bigcup_{\xi \in \Xi_\varepsilon} (\varepsilon \xi + \overline{Y_\varepsilon})\right)$,
- $D_r = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < r^2\}$, $r > 0$,
- $\mathbf{P}_\delta = D_r \times I_\delta$ la poutre dont la section droite est le disque D_r et longueur $2\delta + \delta(\kappa_a + \kappa_b)$,
- la famille de poutres $B_{\delta, \varepsilon, r} \doteq \bigcup_{\xi \in \Xi_\varepsilon} (\varepsilon \xi + D_r \times I_\delta^{be})$
- la structure complète $\Omega_{\delta, \varepsilon, r} = \text{int}(\overline{\Omega_\delta^a} \cup \overline{\Omega_\delta^b} \cup \overline{B_{\delta, \varepsilon, r}})$
- $B = D_1 \times I$, $B^{be} = D_1 \times I^{be}$ les poutres de référence.

Tout au long de ce chapitre on note par $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ le repère orthonormé de référence de \mathbb{R}^3 .

Soit u un déplacement appartenant à $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{R}^m)$, , $m \in \{2, 3\}$, où \mathcal{O} est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^m . Le tenseur des déformations ou gradient symétrisé de u est défini par

$$\nabla u = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T).$$

Ses composantes sont

$$\gamma_{kl}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad (k, l) \in \{1, \dots, d\}^2.$$

Les plaques et les poutres sont constituées de matériaux élastiques isotropes et homogènes, pour des raisons de simplicité, on choisit les mêmes constantes de Lamé dans chaque plaque.

On pose

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \lambda^{pl}, & \mu(x) &= \mu^{pl} & \text{p.p. } x \in \Omega_\delta^a \cup \Omega_\delta^b, \\ \lambda(x) &= \lambda^{be}, & \mu(x) &= \mu^{be} & \text{p.p. } x \in B_{\delta, \varepsilon, r}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où λ^{pl} , μ^{pl} et λ^{be} , μ^{be} sont les constantes de Lamé des matériaux, ces constantes sont strictement positives.

Soit $\{u_\delta\}_\delta$ une suite de déplacements avec $u_\delta \in H^1(\Omega_{\delta,\varepsilon,r}; \mathbb{R}^3)$ ¹. Le tenseur des contraintes de Cauchy σ_δ sur $\Omega_{\delta,\varepsilon,r}$ du déplacement u_δ est lié au gradient symétrique $(\nabla u_\delta)_S$ par la loi de Hooke

$$\sigma_{ij,\delta} = \lambda \left(\sum_{k=1}^3 \gamma_{kk}(u) \right) \delta_{ij} + 2\mu \gamma_{ij}(u), \quad \text{dans } \Omega_{\delta,\varepsilon,r}, \quad (2.2)$$

où $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$.

Dans le domaine $\Omega_{\delta,\varepsilon,r}$ on considère le problème standard d'élasticité linéaire. Les équations d'équilibre dans $\Omega_{\delta,\varepsilon,r}$ sont

$$-\frac{\partial \sigma_{ij,\delta}}{\partial x_j} = f_{i,\delta} \quad \text{dans } \Omega_{\delta,\varepsilon,r}, \quad (2.3)$$

où $f^\delta \in L^2(\Omega_{\delta,\varepsilon,r}; \mathbb{R}^3)$ désigne les forces volumiques appliquées.

On suppose que la plaque Ω_δ^b est fixée sur son bord latéral $\partial\omega \times I_\delta^b = \Gamma_\delta^b$

$$u_\delta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\delta^b, \quad (2.4)$$

et que le bord $\partial\Omega_{\delta,\varepsilon,r} \setminus \Gamma_\delta^b$ est libre de forces

$$\sigma_\delta \nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{\delta,\varepsilon,r} \setminus \Gamma_\delta^b, \quad (2.5)$$

où ν désigne le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega_{\delta,\varepsilon,r}$ orienté vers l'extérieur.

Remark 2.1.1. *La condition (2.5) signifie que la densité des forces appliquées de surface sur $\partial\Omega_{\delta,\varepsilon,r} \setminus \Gamma_\delta^b$ est nulle. Cette hypothèse n'est pas indispensable pour l'étude du comportement asymptotique de la structure, on peut noter qu'elle est naturelle pour la famille de poutres.*

La formulation variationnelle de (2.3)-(2.4)-(2.5) est standard. Si $V_{\delta,\varepsilon,r}$ désigné l'espace des déplacements admissibles de la structure

$$V_{\delta,\varepsilon,r} = \left\{ v \in H^1(\Omega_{\delta,\varepsilon,r}; \mathbb{R}^3) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_\delta^b \right\}.$$

1. Pour plus de clarté, dans cette section, on omet la dépendance des champs par rapport aux paramètres ε et r . Dans la section 2.6, les paramètres δ , ε et r seront liés, un seul paramètre suffira (on choisira de garder δ qui est en relation avec l'épaisseur des plaques).

La formulation variationnelle est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\delta \in V_{\delta,\varepsilon,r} \text{ tel que,} \\ \int_{\Omega_{\delta,\varepsilon,r}} \sigma_{ij,\delta} \gamma_{ij}(v) dx = \int_{\Omega_{\delta,\varepsilon,r}} f_{i,\delta} v_i dx, \quad \forall v \in V_{\delta,\varepsilon,r}. \end{cases} \quad (2.6)$$

On munit l'espace $V_{\delta,\varepsilon,r}$ de la semi-norme

$$\|v\|_V = \|(\nabla v)_S\|_{[L^2(\Omega_{\delta,\varepsilon,r})]^9}$$

Théorème 2.1.1. *Le problème variationnelle (2.6) admet une solution unique.*

Démonstration. Voir le théorème 5.1.1 de l'annexe A. □

L'énergie élastique totale du déplacement $v \in V_{\delta,\varepsilon,r}$ est notée

$$\mathcal{E}(v) = \int_{\Omega_{\delta,\varepsilon,r}} \left[\lambda \left(\sum_{k=1}^3 \gamma_{kk}(v) \right)^2 + 2\mu \sum_{i,j=1}^3 (\gamma_{ij}(v))^2 \right] dx.$$

On choisit $v = u_\delta$ dans (2.6) ce qui conduit à la relation usuelle d'énergie

$$\mathcal{E}(u_\delta) = \int_{\Omega_{\delta,\varepsilon,r}} \sum_{i=1}^3 f_{i,\delta} u_{i,\delta} dx. \quad (2.7)$$

On terminera la section 6 en donnant la limite de la suite $\left\{ \frac{1}{\delta^3} \mathcal{E}(u_\delta) \right\}_\delta$.

Pour presque tout z dans \mathbb{R}^2 , on note $[z] \in \mathbb{Z}^2$ la partie entière de z et $\{z\} \in Y$ sa partie fractionnaire, donc

$$z = [z] + \{z\}.$$

2.2 Estimations des déplacements de la structure

Pour obtenir les estimations à priori des déplacements d'une structure, il faut en général démontrer une inégalité de Korn spécifique au domaine. Ici, comme il s'agit d'une multistructure dépendant de plusieurs petits paramètres, il faut expliciter la constante dans l'inégalité de Korn par rapport à ε , δ et r , on montrera que l'on ne peut pas résumer toutes les estimations obtenues ici en une seule inégalité; c'est pourquoi on détaillera les inégalités pour chaque partie de la structure. Pour atteindre ce but, on utilise les décompositions des déplacements des poutres et des plaques.

2.2.1 Estimations pour l'ensemble des poutres

On fait les hypothèses suivantes :

$$r < \varepsilon/2, \quad r \leq \delta. \quad (2.8)$$

La première condition signifie que les poutres sont distinctes (sans contact entre elles). En imposant la deuxième condition, on veut seulement faire face à un ensemble de poutres entre les deux plaques c'est à dire on veut éliminer le cas $\frac{\delta}{r} \rightarrow 0$, car dans ce cas, les connexions entre les deux plaques doivent être assimilées à des petites plaques. Ce cas peut être étudié en utilisant les outils spécifiques aux plaques (voir [23]).

On munit l'espace $H^1(\mathbf{P}_\delta; \mathbb{R}^3)$ de la semi-norme

$$\forall v \in H^1(\mathbf{P}_\delta; \mathbb{R}^3), \quad \|v\|_{\mathbf{P}_\delta} = \|(\nabla v)_S\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}.$$

Soit u être un déplacement appartenant à $H^1(\Omega_{\delta,\varepsilon,r}; \mathbb{R}^3)$, Théorème 3.1 de [23] (voir égale-

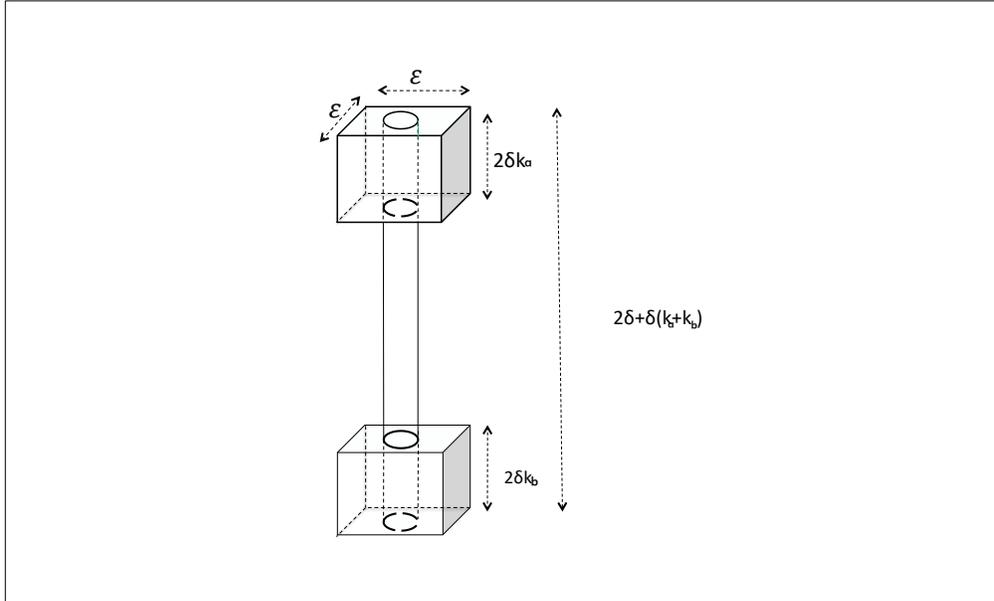


FIGURE 2.1 – La poutre \mathbf{P}_δ .

ment (1.1) et (1.3)) la décomposition de déplacement u_ξ de u dans la poutre $\varepsilon\xi + \mathbf{P}_\delta$, $\xi \in \Xi_\varepsilon$.

Pour p.p. $x = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \in \mathbf{P}_\delta$, on écrit ($x' = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$)

$$\begin{aligned} u_\xi(x) &= u(\varepsilon \xi + x) = U_\xi(x_3) + R_\xi(x_3) \wedge x' + \ddot{u}_\xi(x) \\ &= U_\xi^e(x) + \ddot{u}_\xi(x), \end{aligned} \quad (2.9)$$

où $U_\xi \in H^1(I_\delta; \mathbb{R}^3)$, $R_\xi \in H^1(I_\delta; \mathbb{R}^3)$ et $\ddot{u}_\xi \in H^1(\mathbf{P}_\delta; \mathbb{R}^3)$. Le déplacement résiduel \ddot{u}_ξ (nommé le gauchissement) satisfait pour p.p. $x_3 \in I_\delta$,

$$\begin{aligned} \int_{D_r} \ddot{u}_\xi(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 &= 0, \\ \int_{D_r} x_1 \ddot{u}_{3,\xi}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 &= \int_{D_r} x_2 \ddot{u}_3(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 = 0, \\ \int_{D_r} (x_1 \ddot{u}_{2,\xi}(x_1, x_2, x_3) - x_2 \ddot{u}_{1,\xi}(x_1, x_2, x_3)) dx_1 dx_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Les estimations suivantes des termes de la décomposition (2.9) sont prouvés dans [23, Théorème 3.1] (voir également théorème 1.1.1) :

$$\begin{aligned} \|\ddot{u}_\xi\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^3} &\leq Cr \|u_\xi\|_{\mathbf{P}_\delta}, & \|\nabla \ddot{u}_\xi\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9} &\leq C \|u_\xi\|_{\mathbf{P}_\delta}, \\ \left\| \frac{dR_\xi}{dx_3} \right\|_{[L^2(I_\delta)]^3} &\leq \frac{C}{r^2} \|u_\xi\|_{\mathbf{P}_\delta}, & \left\| \frac{dU_\xi}{dx_3} - R_\xi \wedge \mathbf{e}_3 \right\|_{[L^2(I_\delta)]^3} &\leq \frac{C}{r} \|u_\xi\|_{\mathbf{P}_\delta}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Les constantes ne dépendent pas de ε , r et δ .

De l'expression (2.9) on déduit le tenseur des déformations de u_ξ est

$$(\nabla u_\xi)_S = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(\ddot{u}_\xi) & \gamma_{12}(\ddot{u}_\xi) & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dU_{1,\xi}}{dx_3} - R_{2,\xi} \right) - x_2 \frac{dR_{3,\xi}}{dx_3} \right] + \gamma_{13}(\ddot{u}_\xi) \\ * & \gamma_{22}(\ddot{u}_\xi) & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dU_{2,\xi}}{dx_3} + R_{1,\xi} \right) + x_1 \frac{dR_3}{dx_3} \right] + \gamma_{23}(\ddot{u}_\xi) \\ * & * & \frac{dU_{3,\xi}}{dx_3} + x_2 \frac{dR_{1,\xi}}{dx_3} - x_1 \frac{dR_{2,\xi}}{dx_3} + \gamma_{33}(\ddot{u}_\xi) \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

On pose

$$\mathbf{R}_\xi^{\text{be}} = \begin{pmatrix} 0 & -R_{3,\xi} & R_{2,\xi} \\ R_{3,\xi} & 0 & -R_{1,\xi} \\ -R_{2,\xi} & R_{1,\xi} & 0 \end{pmatrix}$$

D'après l'expression (2.9) de u_ξ et après un calcul direct, on en tire

$$\|\nabla u_\xi - \mathbf{R}_\xi^{\text{be}}\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9} \leq C \left(\|\nabla \ddot{u}_\xi\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9} + r \left\| \frac{dU_\xi}{dx_3} - R_\xi \wedge \mathbf{e}_3 \right\|_{[L^2(I_\delta)]^3} + r^2 \left\| \frac{dR_\xi}{dx_3} \right\|_{[L^2(I_\delta)]^3} \right).$$

Les estimations (2.11) et celle ci-dessus conduit à

$$\|\nabla u_\xi - \mathbf{R}_\xi^{\text{be}}\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9} \leq C \|u_\xi\|_{\mathbf{P}_\delta}. \quad (2.13)$$

On note

$$\mathbf{s} = \begin{cases} +1 & \text{si } d = a, \\ -1 & \text{si } d = b. \end{cases}$$

Pour chaque $\phi \in L^1(I_\delta^d)$, $d \in \{a, b\}$, on pose

$$\mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi) = \frac{1}{2\kappa_d \delta} \int_{I_\delta^d} \phi(x_3) dx_3.$$

Rappelons les conséquences suivantes de l'inégalité Poincaré-Wirtinger ($d \in \{a, b\}$) :

$$\begin{aligned} \forall \phi \in H^1(I), \quad & \|\phi - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)\|_{L^2(I_\delta)} \leq C\delta \|\phi'\|_{L^2(I_\delta)}, \\ & |\mathcal{M}_{I_\delta^a}(\phi) - \mathcal{M}_{I_\delta^b}(\phi)| \leq C\delta^{1/2} \|\phi'\|_{L^2(I_\delta)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pour plus une démonstration voir le Lemme 5.1.3 Annexe A.

Lemme 2.2.1. *On a ($d \in \{a, b\}$)*

$$\sum_{\xi \in \Xi_\varepsilon} \|\nabla u(\varepsilon\xi + \cdot) - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\mathbf{R}_\xi^{\text{be}})\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^9}^2 \leq \frac{C\delta^2}{r^2} \|u\|_V^2 \quad (2.15)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in \Xi_\varepsilon} \|u_3(\varepsilon\xi + \cdot) - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(U_{3,\xi}) + x_1 \mathcal{M}_{I_\delta^d}(R_{2,\xi}) - x_2 \mathcal{M}_{I_\delta^d}(R_{1,\xi})\|_{L^2(\mathbf{P}_\delta)}^2 &\leq C\delta^2 \|u\|_V^2, \\ \sum_{\xi \in \Xi_\varepsilon} \|u(\varepsilon\xi + \cdot) - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(U_\xi) - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(R_\xi) \wedge (x - \mathbf{s}\delta\mathbf{e}_3)\|_{[L^2(\mathbf{P}_\delta)]^3}^2 &\leq \frac{C\delta^4}{r^2} \|u\|_V^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Les constantes ne dépendent pas de δ , ε et r .

Démonstration. D'après (2.11)₃ et (2.14)₁ on obtient $d \in \{a, b\}$

$$\forall \xi \in \Xi_\varepsilon, \quad \|\mathbf{R}_\xi^{\text{be}} - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\mathbf{R}_\xi^{\text{be}})\|_{[L^2(I_\delta)]^9} \leq C\delta \left\| \frac{dR_\xi}{dx_3} \right\|_{[L^2(I_\delta)]^3} \leq \frac{C\delta}{r^2} \|u_\xi\|_{\mathbf{P}_\delta}. \quad (2.17)$$

L'estimation (2.15) sensuit. Maintenant, (2.11)₄ et (2.17) donnent

$$\forall \xi \in \Xi_\varepsilon, \quad \begin{aligned} \left\| \frac{dU_{3,\xi}}{dx_3} \right\|_{L^2(I_\delta)} &\leq \frac{C}{r} \|u_\xi\|_{\mathbf{P}_\delta} \\ \left\| \frac{dU_{1,\xi}}{dx_3} - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(R_{2,\xi}) \right\|_{L^2(I_\delta)} + \left\| \frac{dU_{2,\xi}}{dx_3} + \mathcal{M}_{I_\delta^d}(R_{1,\xi}) \right\|_{L^2(I_\delta)} &\leq \frac{C\delta}{r^2} \|u_\xi\|_{\mathbf{P}_\delta}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|U_{3,\xi} - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(U_{3,\xi})\|_{L^2(I_\delta)} &\leq \frac{C\delta}{r} \|u_\xi\|_{\mathbf{P}_\delta}, \\ \|U_{1,\xi} - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(U_{1,\xi}) - (x_3 - \mathbf{s}\delta)\mathcal{M}_{I_\delta^d}(R_{2,\xi})\|_{L^2(I_\delta)} &\leq \frac{C\delta^2}{r^2} \|u_\xi\|_{\mathbf{P}_\delta}, \\ \|U_{2,\xi} - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(U_{2,\xi}) + (x_3 - \mathbf{s}\delta)\mathcal{M}_{I_\delta^d}(R_{1,\xi})\|_{L^2(I_\delta)} &\leq \frac{C\delta^2}{r^2} \|u_\xi\|_{\mathbf{P}_\delta}. \end{aligned}$$

Les estimations ci-dessus ainsi que (2.11)₁ et (2.17) donnent (2.16). \square

Soit \mathcal{O} un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^l , $l \in \mathbb{N}^*$. Pour chaque fonction mesurable ϕ sur $\varepsilon\Xi_\varepsilon \times \mathcal{O}$, on note $\tilde{\phi}$ la fonction constante par morceaux définie sur $\omega \times \mathcal{O}$ par

$$\tilde{\phi}(z_1, z_2, x) = \phi_\xi(x) \quad \text{pour tout } (z_1, z_2) \in \varepsilon\xi + \varepsilon Y, \quad \xi \in \Xi_\varepsilon \text{ et pour p.p. } x \in \mathcal{O}. \quad (2.18)$$

Les champs associés à la décomposition (2.9) de u_ξ sont désignés

$$\tilde{U}, \tilde{R} \in L^2(\omega; H^1(I_\delta; \mathbb{R}^3)), \tilde{\mathbf{R}}^{\text{be}} \in L^2(\omega; H^1(I_\delta; \mathbb{R}^9)) \text{ et } \tilde{u} \in L^2(\omega; H^1(\mathbf{P}_\delta; \mathbb{R}^3)).$$

Comme conséquence de (2.11), on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{[L^2(\omega \times \mathbf{P}_\delta)]^3} &\leq Cr\varepsilon \|u\|_V, & \|\nabla_x \tilde{u}\|_{[L^2(\omega \times \mathbf{P}_\delta)]^9} &\leq C\varepsilon \|u\|_V, \\ \left\| \frac{\partial \tilde{R}}{\partial x_3} \right\|_{[L^2(\omega \times I_\delta)]^3} &\leq C \frac{\varepsilon}{r^2} \|u\|_V, & \left\| \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x_3} - \tilde{R} \wedge \mathbf{e}_3 \right\|_{[L^2(\omega \times I_\delta)]^3} &\leq C \frac{\varepsilon}{r} \|u\|_V. \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.2.2 Décomposition des déplacements des plaques

Soit u dans $H^1(\Omega_{\delta,\varepsilon,r}; \mathbb{R}^3)$. Dans les plaques Ω_δ^a et Ω_δ^b , le déplacement u est décomposé en (voir la décomposition des déplacements des plaques introduite dans [23, 24], voir également (1.6))

$$u(x) = \mathcal{U}^d(x') + (x_3 - \mathbf{s}\delta)\mathcal{R}^d(x') + \bar{u}^d(x), \quad \text{pour p.p. } x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_\delta^d \quad (2.20)$$

où $x' = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, $\mathcal{U}^d = \mathcal{U}_1^d\mathbf{e}_1 + \mathcal{U}_2^d\mathbf{e}_2 + \mathcal{U}_3^d\mathbf{e}_3 \in H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{R}^d = \mathcal{R}_1^d\mathbf{e}_1 + \mathcal{R}_2^d\mathbf{e}_2 \in H^1(\omega; \mathbb{R}^2)$ et $\bar{u}^d \in H^1(\Omega_\delta^d; \mathbb{R}^3)$, $d \in \{a, b\}$. Le déplacement résiduel \bar{u}^d (également appelé le gauchissement) satisfait

$$\int_{I_\delta^d} \bar{u}^d(x', x_3) dx_3 = 0, \quad \int_{I_\delta^d} (x_3 - \mathbf{s}\delta) \bar{u}_\alpha^d(x', x_3) dx_3 = 0 \quad \text{pour p. p. } x' \in \omega. \quad (2.21)$$

En outre, on a les estimations suivantes, $d \in \{a, b\}$, (voir [23, Théorème 4.1]) et théorème 1.2.1) :

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left(\delta \|\gamma_{\alpha\beta}(\mathcal{R}^d)\|_{L^2(\omega)} + \|\gamma_{\alpha\beta}(\mathcal{U}_m^d)\|_{L^2(\omega)} \right) \\ & + \left\| \frac{\partial \mathcal{U}_3^d}{\partial x_1} + \mathcal{R}_1^d \right\|_{L^2(\omega)} + \left\| \frac{\partial \mathcal{U}_3^d}{\partial x_2} + \mathcal{R}_2^d \right\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{C}{\delta^{1/2}} \|u\|_V, \\ & \|\bar{u}^d\|_{[L^2(\Omega_\delta^d)]^3} \leq C\delta \|u\|_V, \quad \|\nabla \bar{u}^d\|_{[L^2(\Omega_\delta^d)]^9} \leq C \|u\|_V, \end{aligned} \quad (2.22)$$

où $\mathcal{U}_m^d = \mathcal{U}_1^d \mathbf{e}_1 + \mathcal{U}_2^d \mathbf{e}_2$.

Le tenseur des déformations du déplacement u est donné par ($d \in \{a, b\}$)

$$(\nabla u)_S = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^d & \Gamma_{12}^d & \frac{1}{2} \left(\mathcal{R}_1^d + \frac{\partial \mathcal{U}_3^d}{\partial x_1} \right) + \gamma_{13}(\bar{u}^d) \\ * & \Gamma_{22}^d & \frac{1}{2} \left(\mathcal{R}_2^d + \frac{\partial \mathcal{U}_3^d}{\partial x_2} \right) + \gamma_{23}(\bar{u}^d) \\ * & * & \gamma_{33}(\bar{u}^d) \end{pmatrix} \quad \text{p.p. sur } \Omega_\delta^d \quad (2.23)$$

où

$$\Gamma_{\alpha\beta}^d = \gamma_{\alpha\beta}(\mathcal{U}_m^d) + (x_3 - \mathbf{s}\delta) \gamma_{\alpha\beta}(\mathcal{R}^d) + \gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}^d).$$

A partir de maintenant, on suppose que les déplacements appartiennent à $V_{\delta, \varepsilon, r}$.

Estimations pour la plaque Ω_δ^b

On observe que si $u \in V_{\delta, \varepsilon, r}$, alors tous les termes de la décomposition de u s'annulent sur Γ_δ^b . En particulier, on a

$$\mathcal{R}^b \in H_0^1(\omega; \mathbb{R}^2), \quad \mathcal{U}^b \in H_0^1(\omega; \mathbb{R}^3).$$

D'où, de l'inégalité de Korn 2D et (2.22) (voir également corollaire 1.3.2), on obtient

$$\|\mathcal{R}^b\|_{[H^1(\omega)]^2} \leq \frac{C}{\delta^{3/2}} \|u\|_V, \quad \|\mathcal{U}_m^b\|_{[H^1(\omega)]^2} \leq \frac{C}{\delta^{1/2}} \|u\|_V. \quad (2.24)$$

Ensuite (2.22) avec (2.24)₁ conduisent à

$$\|\nabla \mathcal{U}_3^b\|_{[L^2(\omega)]^2} \leq \|\mathcal{R}^b\|_{[L^2(\omega)]^2} + \frac{C}{\delta^{1/2}} \|u\|_V \leq \frac{C}{\delta^{3/2}} \|u\|_V. \quad (2.25)$$

On applique l'inégalité de Poincaré, cela donne

$$\|\mathcal{U}_3^b\|_{H_0^1(\omega)} \leq \frac{C}{\delta^{3/2}} \|u\|_V. \quad (2.26)$$

D'où, d'après (2.22), (2.24), (2.25) et (2.26) on obtient les estimations classiques pour une plaque fixée sur son bord latéral

$$\|u_\alpha\|_{L^2(\Omega_\delta^b)} \leq C \|u\|_V, \quad \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta^b)]^9} + \|u_3\|_{L^2(\Omega_\delta^b)} \leq \frac{C}{\delta} \|u\|_V. \quad (2.27)$$

Estimations pour la plaque Ω_δ^a

Considérons le déplacement membranaire $\mathcal{U}_m^a = \mathcal{U}_1^a \mathbf{e}_1 + \mathcal{U}_2^a \mathbf{e}_2$. De la proposition 1.3.2 on sait qu'il existe un déplacement rigide \mathbf{r}^a tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^a(x') &= a_1^a - b_3^a x_2, & \mathbf{r}_2^a(x') &= a_2^a + b_3^a x_1, & x' \in \omega, \\ \|\mathcal{U}_m^a - \mathbf{r}^a\|_{[H^1(\omega)]^2} &\leq C \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \|\gamma_{\alpha\beta}(\mathcal{U}_m^a)\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{C}{\delta^{1/2}} \|u\|_V. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Il existe également un second déplacement rigide \mathbf{R}^a tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^a(x') &= b_1^a - c x_2, & \mathbf{R}_2^a(x') &= b_2^a + c x_1, & x' \in \omega, \\ \|\mathcal{R}^a - \mathbf{R}^a\|_{[H^1(\omega)]^2} &\leq C \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \|\gamma_{\alpha\beta}(\mathcal{R}^a)\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{C}{\delta^{3/2}} \|u\|_V. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Alors (2.22) et l'estimation ci-dessus (2.29) donnent

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{U}_3^a}{\partial x_1} + \mathbf{R}_1^a \right\|_{L^2(\omega)} + \left\| \frac{\partial \mathcal{U}_3^a}{\partial x_2} + \mathbf{R}_2^a \right\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{C}{\delta^{3/2}} \|u\|_V. \quad (2.30)$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_3^a}{\partial x_1} + \mathbf{R}_1^a \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_3^a}{\partial x_2} + \mathbf{R}_2^a \right) = -2c \quad \text{in } H^{-1}(\omega).$$

Cette égalité et (2.30) conduit à $|c| \leq \frac{C}{\delta^{3/2}} \|u\|_V$ qui, à son tour, avec (2.29) donne

$$\|\nabla \mathcal{R}^a\|_{[L^2(\omega)]^4} \leq \frac{C}{\delta^{3/2}} \|u\|_V. \quad (2.31)$$

Comparaison des termes des décompositions des plaques

On pose

$$\mathbf{R}_{\text{pl}}^a = \begin{pmatrix} 0 & -b_3^a & \mathcal{R}_1^a \\ b_3^a & 0 & \mathcal{R}_2^a \\ -\mathcal{R}_1^a & -\mathcal{R}_2^a & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\text{pl}}^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{R}_1^b \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_2^b \\ -\mathcal{R}_1^b & -\mathcal{R}_2^b & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemme 2.2.2. *On a*

$$\|\nabla u - \mathbf{R}_{\text{pl}}^a\|_{[L^2(\Omega_\delta^a)]^9} \leq C\|u\|_V, \quad \|\nabla u - \mathbf{R}_{\text{pl}}^b\|_{[L^2(\Omega_\delta^b)]^9} \leq C\|u\|_V. \quad (2.32)$$

Les constantes ne dépendent pas de δ , ε et r .

Démonstration. De l'expression (2.20) de u dans la plaque Ω_δ^a , on exprime $\nabla u - \mathbf{R}_{\text{pl}}^a$. Ensuite, les estimations (2.22), (2.28) et (2.31) donnent

$$\begin{aligned} & \|\nabla u - \mathbf{R}_{\text{pl}}^a\|_{[L^2(\Omega_\delta^a)]^9} \\ & \leq C(\|\nabla \bar{u}^a\|_{[L^2(\Omega_\delta^a)]^9} + \delta^{3/2}\|\nabla \mathcal{R}^a\|_{[L^2(\omega)]^4} + \delta^{1/2}\left\|\frac{\partial \mathcal{U}_3^a}{\partial x_1} + \mathcal{R}_1^a\right\|_{L^2(\omega)} \\ & \quad + \delta^{1/2}\left\|\frac{\partial \mathcal{U}_3^a}{\partial x_2} + \mathcal{R}_2^a\right\|_{L^2(\omega)} + \delta^{1/2}\|\nabla(\mathcal{U}_m^a - \mathbf{r}^a)\|_{[L^2(\omega)]^{2 \times 2}}) \leq C\|u\|_V. \end{aligned}$$

De la même manière on montre (2.32)₂. □

Pour $\phi \in L^1(\omega)$, on définit la fonction constante par morceaux $\mathcal{M}_r(\phi)$ appartenir à $L^\infty(\omega)$ par

$$\mathcal{M}_r(\phi)(x') \doteq \mathcal{M}_r(\phi)(\varepsilon\xi) = \frac{1}{|D_r|} \int_{D_r} \phi(\varepsilon\xi + z) dz, \quad \text{pour p.p. } x' \in \varepsilon\xi + Y_\varepsilon, \quad \xi \in \Xi_\varepsilon.$$

Rappelons que pour chaque $\phi \in H^1(\omega)$ ⁽²⁾

$$\begin{aligned} \|\phi(\varepsilon\xi + \cdot) - \mathcal{M}_r(\phi)(\varepsilon\xi)\|_{L^2(Y_\varepsilon)} & \leq C\varepsilon \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \|\nabla\phi\|_{[L^2(Y_\varepsilon)]^2}, \quad \forall \xi \in \Xi_\varepsilon, \\ \|\phi - \mathcal{M}_r(\phi)\|_{L^2(\omega)} & \leq C\varepsilon \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \|\nabla\phi\|_{[L^2(\omega)]^2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

2. En annexe A, nous donnons une démonstration de ces inégalités classiques.

Lemme 2.2.3. *On a ($d \in \{a, b\}$)*

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{R}^a - \mathcal{R}^b\|_{[L^2(\omega)]^2} &\leq C \left[\frac{\varepsilon \delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right] \frac{\|u\|_V}{\delta^{3/2}}, \\
 \|\mathcal{R}^a\|_{[L^2(\omega)]^2} &\leq C \left[1 + \frac{\varepsilon \delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right] \frac{\|u\|_V}{\delta^{3/2}}, \\
 \|\mathbf{R}_{pl}^d - \tilde{\mathbf{R}}^{bc}\|_{[L^2(\omega \times I_\delta)]^9} &\leq C \left[\frac{\varepsilon \delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right] \frac{\|u\|_V}{\delta}, \\
 \|\tilde{\mathbf{R}}^{bc}\|_{[L^2(\omega \times I_\delta)]^9} &\leq C \left[1 + \frac{\varepsilon \delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right] \frac{\|u\|_V}{\delta}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Les constantes ne dépendent pas de δ , ε et r .

Démonstration. On utilise (2.24), (2.32)₁ (resp. (2.31), (2.32)₂) et (2.33)₂ on déduit ($d \in \{a, b\}$)

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{R}_{pl}^d - \mathcal{M}_r(\mathbf{R}_{pl}^d)\|_{[L^2(\omega)]^9} &\leq C\varepsilon \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \frac{\|u\|_V}{\delta^{3/2}}, \\
 \|\nabla u - \mathcal{M}_r(\mathbf{R}_{pl}^d)\|_{[L^2(\Omega_\delta^d)]^9} &\leq C \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right) \|u\|_V.
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

L'estimation ci-dessus (2.35)₂ et (2.15) permettent d'obtenir

$$\sum_{\xi \in \Xi_\varepsilon} \delta r^2 |\mathcal{M}_r(\mathbf{R}_{pl}^d)(\varepsilon \xi) - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\mathbf{R}_\xi^{bc})|^2 \leq C \left(\frac{\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \right) \|u\|_V^2 \tag{2.36}$$

qui, à son tour, avec (2.35)₁ conduit à

$$\|\mathbf{R}_{pl}^d - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\tilde{\mathbf{R}}^{bc})\|_{[L^2(\Omega_\delta^d)]^9}^2 \leq C \left(\frac{\varepsilon^2 \delta^2}{r^4} + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2 r^2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \right) \|u\|_V^2. \tag{2.37}$$

En outre, à partir de (2.14)₂ et (2.19)₃ on trouve

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{\mathbf{R}}^{bc} - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\tilde{\mathbf{R}}^{bc})\|_{[L^2(\omega \times I_\delta)]^9}^2 &\leq C \frac{\delta^2 \varepsilon^2}{r^4} \|u\|_V^2, \\
 \|\mathcal{M}_{I_\delta^a}(\tilde{\mathbf{R}}^{bc}) - \mathcal{M}_{I_\delta^b}(\tilde{\mathbf{R}}^{bc})\|_{[L^2(\omega)]^9}^2 &\leq C \frac{\delta \varepsilon^2}{r^4} \|u\|_V^2.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

D'où, (2.37) et (2.38)₁ donnent (2.34)₃ tandis que (2.37) et (2.38)₂ donnent

$$\|\mathbf{R}_{pl}^a - \mathbf{R}_{pl}^b\|_{[L^2(\omega)]^9}^2 \leq C \frac{\varepsilon^2}{r^2 \delta} \left(\frac{\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \right) \|u\|_V^2.$$

Ainsi (2.34)₁ est prouvé. L'estimation ci-dessus avec (2.24)₁ conduit à (2.34)₂. Finalement, (2.38)₁ et (2.24)₁ donnent (2.34)₄ □

Comme conséquence de (2.22) et (2.34)₂, on obtient

$$\|\nabla \mathcal{U}_3^a\|_{[L^2(\omega)]^2} \leq C \left[1 + \frac{\varepsilon \delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right] \frac{\|u\|_V}{\delta^{3/2}}. \quad (2.39)$$

Dans le lemme suivant, on estime la norme L^2 du déplacement membranaire \mathcal{U}^a .

Lemme 2.2.4. *Il existe une constante C (indépendante de δ , ε et r), telle que*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_3^a - \mathcal{U}_3^b\|_{L^2(\omega)} &\leq C \varepsilon \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \left[1 + \frac{\varepsilon \delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right] \frac{\|u\|_V}{\delta^{3/2}}, \\ \|\mathcal{U}_3^a\|_{L^2(\omega)} &\leq C \left[1 + \frac{\varepsilon \delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right]^2 \frac{\|u\|_V}{\delta^{3/2}}, \\ \|\mathcal{U}_3^d - \tilde{U}_3\|_{L^2(\omega \times I_\delta)} &\leq C \varepsilon \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \left[1 + \frac{\varepsilon \delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right] \frac{\|u\|_V}{\delta}, \\ \|\tilde{U}_3\|_{L^2(\omega \times I_\delta)} &\leq C \left[1 + \frac{\varepsilon \delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right]^2 \frac{\|u\|_V}{\delta}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

et

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_\alpha^a - \mathcal{U}_\alpha^b\|_{L^2(\omega)} + \|\mathcal{U}_\alpha^a\|_{L^2(\omega)} &\leq C \left[1 + \frac{\varepsilon \delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right]^2 \frac{\|u\|_V}{\delta^{1/2}}, \\ \|\nabla \mathcal{U}_\alpha^a\|_{[L^2(\omega)]^2} &\leq C \left[1 + \frac{\varepsilon \delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right] \frac{\|u\|_V}{\delta^{1/2}}, \\ \|\tilde{U}_\alpha\|_{L^2(\omega \times I_\delta)} &\leq C \left[1 + \frac{\varepsilon \delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right] \|u\|_V. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Démonstration. Étape 1. On montre (2.40). Grâce à (2.22) et (2.35)₁ on obtient d'abord

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{U}_3^d}{\partial x_1} + \mathcal{M}_r(\mathcal{R}_1^d) \right\|_{L^2(\omega)} + \left\| \frac{\partial \mathcal{U}_3^d}{\partial x_2} + \mathcal{M}_r(\mathcal{R}_2^d) \right\|_{L^2(\omega)} \leq C \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right) \frac{\|u\|_V}{\delta^{1/2}}.$$

On utilise (2.33)₁ et l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon \in \Xi_\varepsilon} \int_{Y_\varepsilon} |\mathcal{U}_3^d(\varepsilon \xi + x') - \mathcal{M}_r(\mathcal{U}_3^d)(\varepsilon \xi) + x_1 \mathcal{M}_r(\mathcal{R}_1^d)(\varepsilon \xi) + x_2 \mathcal{M}_r(\mathcal{R}_2^d)(\varepsilon \xi)|^2 dx_1 dx_2 \\ \leq C \varepsilon^2 \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \right) \frac{\|u\|_V^2}{\delta}. \end{aligned}$$

Cette estimation avec (2.22)₃ et (2.35)₁ conduit à

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon \in \Xi_\varepsilon} \left\| u_3(\varepsilon \xi + \cdot) - \mathcal{M}_r(\mathcal{U}_3^d)(\varepsilon \xi) + x_1 \mathcal{M}_r(\mathcal{R}_1^d)(\varepsilon \xi) + x_2 \mathcal{M}_r(\mathcal{R}_2^d)(\varepsilon \xi) \right\|_{L^2(Y_\varepsilon \times I_\delta^d)}^2 \\ \leq C \left[\delta^2 + \varepsilon^2 \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) + \frac{\varepsilon^4}{\delta^2} \left(\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \right)^2 \right] \|u\|_V^2. \end{aligned}$$

Ceci avec (2.16)₁ donne

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon \in \Xi_\varepsilon} r^2 \delta |\mathcal{M}_r(\mathcal{U}_3^d)(\varepsilon\xi) - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\tilde{U}_{3,\xi})|^2 &\leq C \left[\delta + \frac{\varepsilon^2}{\delta} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \right]^2 \|u\|_V^2, \\ \implies \|\mathcal{M}_r(\mathcal{U}_3^d) - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\tilde{U}_3)\|_{L^2(\omega)}^2 &\leq \frac{C\varepsilon^2}{r^2\delta} \left[\delta + \frac{\varepsilon^2}{\delta} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \right]^2 \|u\|_V^2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

En outre, de (2.14)₂ et (2.19)₄ on trouve

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}_3 - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\tilde{U}_3)\|_{[L^2(\omega \times I_\delta)]^9}^2 &\leq C \frac{\delta^2 \varepsilon^2}{r^2} \|u\|_V^2, \\ \|\mathcal{M}_{I_\delta^a}(\tilde{U}_3) - \mathcal{M}_{I_\delta^b}(\tilde{U}_3)\|_{[L^2(\omega)]^9}^2 &\leq C \frac{\delta \varepsilon^2}{r^2} \|u\|_V^2 \end{aligned} \quad (2.43)$$

puis avec (2.42)₂

$$\|\mathcal{M}_r(\mathcal{U}_3^a) - \mathcal{M}_r(\mathcal{U}_3^b)\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C \frac{\varepsilon^2}{r^2\delta} \left[\delta + \frac{\varepsilon^2}{\delta} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \right]^2 \|u\|_V^2$$

qui, à son tour, avec (2.33)₂, (2.25) et (2.39) donnent (2.40)₁-(2.40)₂ (on observera que, grâce à l'hypothèse (2.8) on a $\frac{\varepsilon}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \geq 1$), tandis que (2.42)₂, (2.43)₁ ainsi que (2.33)₂, (2.25), (2.39) conduisent à (2.40)₃-(2.40)₄.

Étape 2. On montre (2.41). On considère (2.24)₂, (2.28) et (2.33)₁. On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon \in \Xi_\varepsilon} \|\mathcal{U}_1^b(\varepsilon\xi + \cdot) - \mathcal{M}_r(\mathcal{U}_1^b)(\varepsilon\xi)\|_{L^2(Y_\varepsilon)}^2 &\leq C\varepsilon^2 \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \frac{\|u\|_V^2}{\delta}, \\ \sum_{\varepsilon \in \Xi_\varepsilon} \|\mathcal{U}_1^a(\varepsilon\xi + \cdot) - \mathcal{M}_r(\mathcal{U}_1^a)(\varepsilon\xi)\|_{L^2(Y_\varepsilon)}^2 &\leq C\varepsilon^2 \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \|\nabla \mathcal{U}_1^a\|_{[L^2(\omega)]^2}^2, \\ \implies \sum_{\varepsilon \in \Xi_\varepsilon} \|\mathcal{U}_1^a(\varepsilon\xi + \cdot) - \mathcal{M}_r(\mathcal{U}_1^a)(\varepsilon\xi)\|_{L^2(Y_\varepsilon)}^2 &\leq C\varepsilon^2 \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \left(\frac{\|u\|_V^2}{\delta} + |b_3^a|^2 \right). \end{aligned}$$

Grâce (2.22), (2.35)₁ et les estimations précédentes, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon \in \Xi_\varepsilon} \|u_1(\varepsilon\xi + \cdot) - \mathcal{M}_r(\mathcal{U}_1^b)(\varepsilon\xi) + (x_3 + \delta)\mathcal{M}_r(\mathcal{R}_2^b)(\varepsilon\xi)\|_{L^2(Y_\varepsilon \times I_\delta^b)}^2 \\ \leq C \left[\delta^2 + \varepsilon^2 \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \right] \|u\|_V^2, \\ \sum_{\varepsilon \in \Xi_\varepsilon} \|u_1(\varepsilon\xi + \cdot) - \mathcal{M}_r(\mathcal{U}_1^a)(\varepsilon\xi) + (x_3 - \delta)\mathcal{M}_r(\mathcal{R}_2^a)(\varepsilon\xi)\|_{L^2(Y_\varepsilon \times I_\delta^a)}^2 \\ \leq C \left[\delta^2 + \varepsilon^2 \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \right] \|u\|_V^2 + C\varepsilon^2 \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \delta |b_3^a|^2. \end{aligned}$$

Les estimations ci-dessus avec (2.16)₂ conduisent à

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_r(\mathcal{U}_1^b) - \mathcal{M}_{I_\delta^b}(\tilde{U}_1)\|_{L^2(\omega)}^2 &\leq \frac{C\varepsilon^2}{r^2\delta} \left[\frac{\delta^4}{r^2} + \varepsilon^2 \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \right] \|u\|_V^2, \\ \|\mathcal{M}_r(\mathcal{U}_1^a) - \mathcal{M}_{I_\delta^a}(\tilde{U}_1)\|_{L^2(\omega)}^2 &\leq \frac{C\varepsilon^2}{r^2\delta} \left[\frac{\delta^4}{r^2} + \varepsilon^2 \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \right] \|u\|_V^2 + \frac{C\varepsilon^4}{r^2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) |b_3^a|^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

En outre, de (2.14), (2.19)₄ et (2.34)₄ on tire que

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}_1 - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\tilde{U}_1)\|_{L^2(\omega \times I_\delta)}^2 &\leq C\delta^2 \left(\frac{\varepsilon^2}{r^2} \|u\|_V^2 + \|\tilde{\mathbf{R}}^{bc}\|_{[L^2(\omega \times I_\delta)]^9}^2 \right) \\ &\leq C \left[1 + \frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right]^2 \|u\|_V^2, \\ \|\mathcal{M}_{I_\delta^a}(\tilde{U}_1) - \mathcal{M}_{I_\delta^b}(\tilde{U}_1)\|_{L^2(\omega)}^2 &\leq C \left[1 + \frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right]^2 \frac{\|u\|_V^2}{\delta}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

D'où avec (2.44)

$$\|\mathcal{M}_r(\mathcal{U}_1^a) - \mathcal{M}_r(\mathcal{U}_1^b)\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C \left[1 + \frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right]^2 \frac{\|u\|_V^2}{\delta} + C \frac{\varepsilon^4}{r^2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) |b_3^a|^2.$$

L'estimation ci-dessus et (2.33)₂ donnent

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_1^a - \mathcal{U}_1^b\|_{L^2(\omega)}^2 &\leq C\varepsilon^2 \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) (\|\nabla \mathcal{U}_1^a\|_{[L^2(\omega)]^2}^2 + \|\nabla \mathcal{U}_1^b\|_{[L^2(\omega)]^2}^2) \\ &\quad + C \left[1 + \frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right]^2 \frac{\|u\|_V^2}{\delta} + C \frac{\varepsilon^4}{r^2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) |b_3^a|^2 \\ &\leq C \left[1 + \frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right]^2 \frac{\|u\|_V^2}{\delta} + C \frac{\varepsilon^4}{r^2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) |b_3^a|^2. \end{aligned}$$

L'estimation de $\|\mathcal{U}_2^a - \mathcal{U}_2^b\|_{L^2(\omega)}^2$ est obtenue de la même façon. En conséquence, en utilisant (2.24)₂, l'estimation suivante conduit finalement à ($\alpha \in \{1, 2\}$) :

$$\|\mathcal{U}_\alpha^a\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C \left[1 + \frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right]^2 \frac{\|u\|_V^2}{\delta} + C \frac{\varepsilon^4}{r^2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) |b_3^a|^2. \quad (2.46)$$

Maintenant, on observe que

$$\begin{aligned} &\int_\omega (x_1 \mathcal{U}_2^a(x') - x_2 \mathcal{U}_1^a(x')) dx' \\ &= \int_\omega (x_1 (\mathcal{U}_2^a(x') - \mathbf{r}_2^a(x')) - x_2 (\mathcal{U}_1^a(x') - \mathbf{r}_1^a(x'))) dx' + 2b_3^a \int_\omega (x_1^2 + x_2^2) dx'. \end{aligned}$$

Alors (2.28) et (2.46) donnent

$$|b_3^a|^2 \leq C \left[1 + \frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right]^2 \frac{\|u\|_V^2}{\delta} + C \frac{\varepsilon^4}{r^2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) |b_3^a|^2.$$

Si $\frac{\varepsilon^4}{r^2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)$ est assez petit, on en déduit une estimation de b_3^a . En résumant les estimations de cette étape et en utilisant (2.28) on obtient (2.41)₁-(2.41)₂, puis (2.44)₁, (2.45)₁, (2.41)₂ et (2.24) donnent (2.41)₃. □

En conséquence des deux lemmes ci-dessus, on obtient les estimations de la restriction de u à la plaque Ω_δ^a

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta^a)]^9} &\leq C \left[1 + \frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right] \frac{\|u\|_V}{\delta}, \\ \|u_\alpha\|_{L^2(\Omega_\delta^a)} &\leq C \left[1 + \frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right]^2 \|u\|_V, \\ \|u_3\|_{L^2(\Omega_\delta^a)} &\leq C \left[1 + \frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right]^2 \frac{\|u\|_V}{\delta}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

En outre, de (2.13)-(2.34)₄, (2.11), (2.40)₄ et (2.41)₃ on tire les estimations suivantes de la restriction de u à l'ensemble des poutres $B_{\delta,\varepsilon,r}$:

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{[L^2(B_{\delta,\varepsilon,r})]^9} &\leq C \frac{r}{\varepsilon\delta} \left[1 + \frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right] \|u\|_V, \\ \|u_\alpha\|_{L^2(B_{\delta,\varepsilon,r})} &\leq C \frac{r}{\varepsilon} \left[1 + \frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right] \|u\|_V, \\ \|u_3\|_{L^2(B_{\delta,\varepsilon,r})} &\leq C \frac{r}{\varepsilon\delta} \left[1 + \frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right]^2 \|u\|_V. \end{aligned} \quad (2.48)$$

2.3 Principaux cas

En vue de (2.40), (2.41) et afin que les déplacements membranaires \mathcal{U}^a et \mathcal{U}^b soient d'un même ordre de grandeur, on suppose que

$$\frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} \text{ uniformément majoré et } \frac{\varepsilon^4}{r^2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) \text{ petit.} \quad (2.49)$$

Maintenant, les trois petits paramètres δ , r et ε sont liés. On pose

$$\varepsilon = \kappa_0 \delta^\rho, \quad r = \kappa_1 \delta^\eta, \quad \eta > 0, \quad \rho > 0. \quad (2.50)$$

Les conditions (2.49) et les hypothèses (2.8) conduisent à

$$\begin{aligned} 1 \leq \eta < 2\rho \quad \text{et} \quad 2\rho \leq 2\eta \leq \rho + 2, & \quad \kappa_1 \leq 1, \quad \text{si } \eta = 1, \\ & \quad \kappa_1 < \kappa_0/2, \quad \text{si } \rho = \eta. \end{aligned}$$

Le couple (η, ρ) doit appartenir au polygone convexe (sans le bord $\eta = 2\rho$) dont les sommets sont

$$(1, 1), \quad (1, 1/2), \quad (4/3, 2/3), \quad (2, 2).$$

Ainsi, il y a six cas à analyser. Ils correspondent à deux sommets, trois arêtes et l'intérieur du polygone. L'intérieur de ce polygone convexe correspond à la situation la plus générale. Nous analyserons ce cas dans les sections suivantes.

À partir de maintenant, on suppose (2.8) et (2.49).

Ci-dessous, nous réécrivons les estimations (2.47) et (2.48) obtenues dans la section précédente

$$\begin{aligned} \|u_\alpha\|_{L^2(\Omega_\delta^d)} &\leq C\|u\|_V, & \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\delta^d)]^9} + \|u_3\|_{L^2(\Omega_\delta^d)} &\leq \frac{C}{\delta}\|u\|_V, \\ \|u_\alpha\|_{L^2(B_{\delta,\varepsilon,r})} &\leq C\frac{r}{\varepsilon}\|u\|_V, & \|\nabla u\|_{[L^2(B_{\delta,\varepsilon,r})]^9} + \|u_3\|_{L^2(B_{\delta,\varepsilon,r})} &\leq C\frac{r}{\varepsilon\delta}\|u\|_V. \end{aligned} \quad (2.51)$$

2.4 Hypothèses sur les forces appliquées

Compte tenu de la relation (2.7) et des estimations (2.27) et (2.51), on peut donner les forces appliquées ;

— Dans la plaque Ω_δ^d , les forces volumiques appliquées sont données par ($d \in \{a, b\}$)

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\delta}(x) &= \delta f_\alpha^d\left(x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta}\right) \quad \text{dans } \Omega_\delta^d, \\ f_{3,\delta}(x) &= \delta^2 f_3^d\left(x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta}\right) \quad \text{dans } \Omega_\delta^d, \end{aligned} \quad (2.52)$$

où f^d appartient à $L^2(\Omega^d; \mathbb{R}^3)$, $d \in \{a, b\}$.

— Dans l'ensemble des poutres $B_{\delta,\varepsilon,r}$, les forces volumiques appliquées sont données par

$$\begin{aligned} f_{\alpha,\delta}(x) &= \frac{\varepsilon^2 \delta}{r^2} f_\alpha^{\text{be}}\left(\varepsilon\xi, \frac{x_1 - \varepsilon\xi_1}{r}, \frac{x_2 - \varepsilon\xi_2}{r}, \frac{x_3}{\delta}\right), \\ f_{3,\delta}(x) &= \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{r^2} f_3^{\text{be}}\left(\varepsilon\xi, \frac{x_1 - \varepsilon\xi_1}{r}, \frac{x_2 - \varepsilon\xi_2}{r}, \frac{x_3}{\delta}\right), & \xi &= \left[\frac{x'}{\varepsilon}\right], \\ &\text{dans } \varepsilon \left[\frac{x'}{\varepsilon}\right] + D_r \times I_\delta^{\text{be}}, & x' &\in \omega, \end{aligned} \quad (2.53)$$

où $f^{\text{be}} \in \mathcal{C}(\bar{\omega}; L^2(B_{\text{be}}; \mathbb{R}^3))$.

Comme conséquence de (2.27), (2.51), (2.52) et (2.53) on obtient que l'énergie élastique totale est majorée par

$$\mathcal{E}(u_\delta) = \int_{\Omega_{\delta,\varepsilon,r}} f_{i,\delta} u_{i,\delta} dx \leq C\delta^{3/2}\|u_\delta\|_V, \quad (2.54)$$

où C est une constante indépendante de δ , ε et r (voir le lemme 5.1.1 de l'Annexe A.)

Prenant en compte (2.1), (2.2) et (2.54), on déduit qu'il existe une constante $c > 0$ indépendante de δ , ε et r telle que

$$c\|u_\delta\|_V^2 \leq \mathcal{E}(u_\delta) \leq C\delta^{3/2}\|u_\delta\|_V.$$

D'où

$$\|u_\delta\|_V \leq C\delta^{3/2}, \quad \mathcal{E}(u_\delta) \leq C\delta^3. \quad (2.55)$$

La constante ne dépend pas de δ , ε et r .

2.5 Les opérateurs Π_δ et Π_r

Dans cette section on introduit les opérateurs Π_δ et Π_r et on donne quelques résultats sur ces opérateurs. Ces opérateurs sont essentiels pour l'étude des deux processus de réduction de dimension. L'opérateur Π_δ a été introduit pour l'étude des plaques minces $\delta \rightarrow 0$. Le second opérateur Π_r a été introduit pour l'étude des poutres fines $r \rightarrow 0$. Grâce à ces opérateurs, on peut donner les estimations des termes des différentes décompositions dans des domaines fixes.

2.5.1 L'opérateur Π_δ

Définition 2.5.1. *Pour toute fonction mesurable φ sur Ω_δ^d , $d \in \{a, b\}$, on définit l'opérateur $\Pi_\delta(\varphi)$ par*

$$\Pi_\delta(\varphi)(x', X_3) = \varphi(x', \delta X_3) \quad p.p. (x', X_3) \in \Omega^d.$$

L'opérateur Π_δ est linéaire et continu de $L^2(\Omega_\delta^d)$ dans $L^2(\Omega^d)$, de plus pour tout $\phi \in L^2(\Omega_\delta^d)$ on a

$$\int_{\Omega^d} \Pi_\delta(\phi) dx' dX_3 = \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_\delta^d} \phi dx' dx_3 \quad \|\Pi_\delta(\phi)\|_{L^2(\Omega^d)} = \frac{1}{\delta^{1/2}} \|\phi\|_{L^2(\Omega_\delta^d)}. \quad (2.56)$$

D'où

$$\|\Pi_\delta(\phi)\|_{L^2(\Omega^d)} = \frac{1}{\delta^{1/2}} \|\phi\|_{L^2(\Omega_\delta^d)}.$$

Si $\phi \in L^2(\omega; H^1(I_\delta^d))$, $d \in \{a, b\}$, on a

$$\frac{\partial \Pi_\delta(\phi)}{\partial X_3} = \delta \Pi_\delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right).$$

Comme conséquence de l'égalité ci-dessus on obtient

$$\left\| \frac{\partial \Pi_\delta(\phi)}{\partial X_3} \right\|_{L^2(\Omega^d)} = \delta^{1/2} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\Omega_\delta^d)}. \quad (2.57)$$

2.5.2 L'opérateur Π_r

L'opérateur Π_r défini ci-dessous sera utilisé avec des fonctions initialement définies sur $B_{\delta, \varepsilon, r}$ ou $\bigcup_{\xi \in \Xi_\varepsilon} (\varepsilon \xi + \mathbf{P}_\delta)$ puis transformées par l'opérateur $\widetilde{}$.

Définition 2.5.2. Pour ψ mesurable sur $\omega \times \mathbf{P}_\delta$, on définit l'opérateur $\Pi_r(\psi)$ par

$$\Pi_r(\psi)(x', X_1, X_2, X_3) = \psi(x', rX_1, rX_2, \delta X_3) \quad p.p. (x', X) \in \omega \times B.$$

L'opérateur Π_r est linéaire et continu de $L^2(\omega \times \mathbf{P}_\delta)$ dans $L^2(\omega \times B)$, de plus pour tout $(\Phi, \Psi) \in [L^2(\omega \times \mathbf{P}_\delta)]^2$, on a

$$r^2 \delta \int_{\omega \times B} \Pi_r(\Phi) \Pi_r(\Psi) dx' dX_1 dX_2 dX_3 = \int_{\omega \times \mathbf{P}_\delta} \Phi(x', x) \Psi(x', x) dx' dx.$$

D'où,

$$\|\Pi_r(\Phi)\|_{L^2(\omega \times B)} = \frac{1}{\delta^{1/2} r} \|\Phi\|_{L^2(\omega \times \mathbf{P}_\delta)}. \quad (2.58)$$

Si $\phi \in L^2(\omega; H^1(\mathbf{P}_\delta))$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_r(\Phi)}{\partial X_\alpha} &= r \Pi_r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} \right) && \text{dans } L^2(\omega \times B), \quad \alpha = 1, 2, \\ \frac{\partial \Pi_r(\Phi)}{\partial X_3} &= \delta \Pi_r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) && \text{dans } L^2(\omega \times B). \end{aligned}$$

À partir de ces égalités, on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \Pi_r(\Phi)}{\partial X_\alpha} \right\|_{L^2(\omega \times B)} &= \frac{1}{\delta^{1/2}} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} \right\|_{L^2(\omega \times \mathbf{P}_\delta)}, \quad \alpha = 1, 2, \\ \left\| \frac{\partial \Pi_r(\Phi)}{\partial X_3} \right\|_{L^2(\omega \times B)} &= \frac{\delta^{1/2}}{r} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\omega \times \mathbf{P}_\delta)}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

À partir de maintenant, le couple (ρ, η) appartient à l'intérieur du polygone. Dans ce cas on notera que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{r}{\varepsilon} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{r}{\delta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \delta^2}{r^2} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^4}{r^2} \ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) = 0. \quad (2.60)$$

2.6 Les champs limites

Soit $\{u_\delta\}_\delta$ une suite de déplacements avec $u_\delta \in V_{\delta, \varepsilon, r}$, satisfaisant à

$$\|u_\delta\|_V \leq C\delta^{3/2}. \quad (2.61)$$

Utilisons (2.58) et (2.59) pour trouver que les estimations (2.19) deviennent

$$\begin{aligned} & \|\Pi_r(\tilde{u}_\delta)\|_{[L^2(\omega \times B)]^3} + \left\| \frac{\partial \Pi_r(\tilde{u}_\delta)}{\partial X_\alpha} \right\|_{[L^2(\omega \times B)]^3} \leq C\varepsilon\delta, \\ & \left\| \frac{\partial \Pi_r(\tilde{u}_\delta)}{\partial X_3} \right\|_{[L^2(\omega \times B)]^3} \leq C \frac{\varepsilon\delta^2}{r}, \quad \left\| \frac{\partial \Pi_r(\tilde{R}_\delta)}{\partial X_3} \right\|_{[L^2(\omega \times I)]^3} \leq C \frac{\varepsilon\delta^2}{r^2}, \\ & \left\| \frac{\partial \Pi_r(\tilde{U}_\delta)}{\partial X_3} - \delta \Pi_r(\tilde{R}_\delta) \wedge \mathbf{e}_3 \right\|_{[L^2(\omega \times I)]^3} \leq C \frac{\varepsilon\delta^2}{r}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

et les estimations (2.34)₃-(2.34)₄, (2.40)₄, (2.41)₃ et (2.62)₃ ($d \in \{a, b\}$)

$$\begin{aligned} & \|\Pi_r(\tilde{\mathbf{R}}_\delta^{\text{bc}})\|_{[L^2(\omega \times I)]^3} \leq C, \quad \|\mathbf{R}_{\text{pl}, \delta}^d - \Pi_r(\tilde{\mathbf{R}}_\delta^{\text{bc}})\|_{[L^2(\omega \times I)]^9} \leq C \left[\frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right], \\ & \left\| \frac{\partial \Pi_r(\tilde{U}_{\alpha, \delta})}{\partial X_3} \right\|_{L^2(\omega \times I)} + \|\Pi_r(\tilde{U}_{\alpha, \delta})\|_{L^2(\omega \times I)} \leq C\delta, \quad \|\Pi_r(\tilde{U}_{3, \delta})\|_{L^2(\omega; H^1(I))} \leq C. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Les estimations (2.22), (2.24)-(2.26), (2.34)₁-(2.34)₂, (2.40)₁-(2.40)₂ et (2.41)₁ deviennent

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{U}_{\alpha, \delta}^d\|_{H^1(\omega)} + \left\| \frac{\partial \mathcal{U}_{3, \delta}^d}{\partial x_\alpha} + \mathcal{R}_{\alpha, d} \right\|_{L^2(\omega)} \leq C\delta, \quad \|\mathcal{U}_{3, \delta}^d\|_{H^1(\omega)} + \|\mathcal{R}_\delta^d\|_{[H^1(\omega)]^2} \leq C, \\ & \|\mathcal{R}_{\alpha, \delta}^a - \mathcal{R}_{\alpha, \delta}^b\|_{L^2(\omega)} \leq C \left[\frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right], \quad \|\mathcal{U}_{3, \delta}^a - \mathcal{U}_{3, \delta}^b\|_{L^2(\omega)} \leq C\varepsilon \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \\ & \left\| \frac{\partial \Pi_\delta(\bar{u}_\delta^d)}{\partial x_\alpha} \right\|_{[L^2(\Omega^d)]^3} \leq C\delta, \quad \left\| \frac{\partial \Pi_\delta(\bar{u}_\delta^d)}{\partial X_3} \right\|_{[L^2(\Omega^d)]^3} + \|\Pi_\delta(\bar{u}_\delta^d)\|_{[L^2(\Omega^d)]^3} \leq C\delta^2. \end{aligned} \quad (2.64)$$

En conséquence des estimations ci-dessus, on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.6.1. *Soit $\{u_\delta\}_\delta$ une suite de déplacements appartenant à $V_{\delta, \varepsilon, r}$ et satisfaisant (2.61). Il existe une sous-suite de $\{\delta\}$, encore notée $\{\delta\}$ et $\tilde{u} \in L^2(\omega \times I; H^1(D; \mathbb{R}^3))$, $\tilde{R}_\alpha, \tilde{U}_\alpha \in$*

$L^2(\omega)$, $(\tilde{U}_3, \hat{R}_1, \hat{R}_2, \tilde{R}_3, \hat{U}_3) \in [L^2(\omega; H^1(I))]^5$ satisfaisant $\tilde{R}_3 = 0$ dans $\omega \times (I^a \cup I^b)$, $\hat{R}_\alpha(\cdot, 0) = \hat{U}_3(\cdot, 0) = 0$ p.p. dans ω et $\tilde{Z}_\alpha \in L^2(\omega \times I)$ tels que

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\varepsilon\delta} \Pi_r(\tilde{u}_\delta) \rightharpoonup \tilde{u} \quad \text{faiblement dans } L^2(\omega \times I; H^1(D; \mathbb{R}^3)), \\
 & \frac{r}{\varepsilon\delta^2} \frac{\partial \Pi_r(\tilde{u}_\delta)}{\partial X_3} \rightarrow 0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\omega \times B; \mathbb{R}^3), \\
 & \Pi_r(\tilde{R}_\delta) \rightharpoonup \tilde{R} \quad \text{faiblement dans } L^2(\omega; H^1(I; \mathbb{R}^3)), \\
 & \frac{r^2}{\varepsilon\delta^2} \Pi_r(\tilde{R}_{\delta,\alpha} - \tilde{R}_{\delta,\alpha}(\cdot, 0)) \rightharpoonup \hat{R}_\alpha \quad \text{faiblement dans } L^2(\omega; H^1(I)), \\
 & \frac{r^2}{\varepsilon\delta^2} \Pi_r(\tilde{R}_{\delta,3}) \rightharpoonup \tilde{R}_3 \quad \text{faiblement dans } L^2(\omega; H^1(I)), \\
 & \frac{1}{\delta} \Pi_r(\tilde{U}_{\alpha,\delta}) \rightharpoonup \tilde{U}_\alpha \quad \text{faiblement dans } L^2(\omega; H^1(I)), \\
 & \Pi_r(\tilde{U}_{3,\delta}) \rightharpoonup \tilde{U}_3 \quad \text{faiblement dans } L^2(\omega; H^1(I)), \\
 & \frac{r}{\varepsilon\delta^2} \Pi_r(\tilde{U}_{3,\delta} - \tilde{U}_{3,\delta}(\cdot, 0)) \rightharpoonup \hat{U}_3 \quad \text{faiblement dans } L^2(\omega; H^1(I)), \\
 & \frac{r}{\varepsilon\delta^2} \left(\frac{\partial \Pi_r(\tilde{U}_{1,\delta})}{\partial X_3} - \delta \Pi_r(\tilde{R}_{2,\delta}) \right) \rightharpoonup \tilde{Z}_1 \quad \text{faiblement dans } L^2(\omega \times I), \\
 & \frac{r}{\varepsilon\delta^2} \left(\frac{\partial \Pi_r(\tilde{U}_{2,\delta})}{\partial X_3} + \delta \Pi_r(\tilde{R}_{1,\delta}) \right) \rightharpoonup \tilde{Z}_2 \quad \text{faiblement dans } L^2(\omega \times I).
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

En outre, il existe $\bar{u}^d \in L^2(\omega; H^1(I^d; \mathbb{R}^3))$, $\mathcal{R}_\alpha \in H_0^1(\omega)$, $\mathcal{U}_\alpha^d \in H_0^1(\omega)$, $\mathcal{U}_3 \in H_0^2(\omega)$ et $Z_\alpha^d \in L^2(\omega)$, $d \in \{a, b\}$, tels que

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\delta^2} \Pi_\delta(\bar{u}_\delta^d) \rightharpoonup \bar{u}^d \quad \text{faiblement dans } L^2(\omega; H^1(I^d; \mathbb{R}^3)), \\
 & \frac{1}{\delta} \frac{\partial \Pi_\delta(\bar{u}_\delta^d)}{\partial x_\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega^d; \mathbb{R}^3), \\
 & \mathcal{R}_{\alpha,\delta}^d \rightharpoonup \mathcal{R}_\alpha \quad \text{faiblement dans } H^1(\omega), \\
 & \frac{1}{\delta} \mathcal{U}_{\alpha,\delta}^d \rightharpoonup \mathcal{U}_\alpha^d \quad \text{faiblement dans } H^1(\omega), \\
 & \mathcal{U}_{3,\delta}^d \rightharpoonup \mathcal{U}_3 \quad \text{faiblement dans } H^1(\omega), \\
 & \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial \mathcal{U}_{3,\delta}^d}{\partial x_\alpha} + \mathcal{R}_{\alpha,\delta}^d \right) \rightharpoonup Z_\alpha^d \quad \text{faiblement dans } L^2(\omega).
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

De plus

$$\frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha} = -\mathcal{R}_\alpha, \quad \text{p.p. dans } \omega, \quad \tilde{U}_3 = \mathcal{U}_3 \quad \text{p.p. dans } \omega \times I. \tag{2.67}$$

On pose

$$\mathcal{U}_\alpha = \frac{1}{2}(\mathcal{U}_\alpha^a + \mathcal{U}_\alpha^b).$$

Les champs limites $\frac{\partial \tilde{U}_\alpha}{\partial X_3}$, \tilde{U}_α et \mathcal{U}_α , $\frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha}$ sont liés par les conditions de jonction suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_3} = -\frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_1} = \tilde{R}_2, \quad \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial X_3} = -\frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_2} = -\tilde{R}_1, \\ \tilde{U}_\alpha(\cdot, X_3) = \mathcal{U}_\alpha(\cdot) - X_3 \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha}(\cdot), \quad \mathcal{U}_\alpha^d = \mathcal{U}_\alpha - \mathbf{s} \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha}, \end{aligned} \quad \text{p.p. dans } \omega \times I. \quad (2.68)$$

Démonstration. Étape 1. Comme conséquence des estimations (2.62) et (2.63) il existe une sous-suite de $\{\delta\}$, encore notée $\{\delta\}$ et des fonctions telles que les convergences (2.65)₁, (2.65)₃- (2.65)₁₀, (2.66)₁, (2.66)₃-(2.66)₆ sont vérifiées . D'après les estimations (2.64) on déduit que les suites $\{\mathcal{R}_{\alpha,\delta}^a\}_\delta$, $\{\mathcal{R}_{\alpha,\delta}^b\}_\delta$ (resp. $\{\mathcal{U}_{3,\delta}^a\}_\delta$, $\{\mathcal{U}_{3,\delta}^b\}_\delta$) convergent vers la même limite. De plus, les conditions au bord sur les fonctions $\mathcal{U}_{\alpha,\delta}^b$, $\mathcal{U}_{3,\delta}^b$ and $\mathcal{R}_{\alpha,\delta}^b$ donnent

$$\mathcal{U}_\alpha^b, \mathcal{U}_3, \mathcal{R}_\alpha \in H_0^1(\omega).$$

Étape 2. Grâce à (2.62), la suite $\frac{r}{\varepsilon \delta^2} \left\{ \Pi_r(\tilde{u}_\delta) \right\}_\delta$ est bornée dans $L^2(\omega; H^1(B; \mathbb{R}^3))$. D'où, à une sous suite près, elle converge faiblement vers une limite appartenant à $L^2(\omega; H^1(B; \mathbb{R}^3))$. La convergence (2.65)₁ et (2.60) impliquent

$$\frac{r}{\varepsilon \delta^2} \Pi_r(\tilde{u}_\delta) = \frac{r}{\delta} \left(\frac{1}{\varepsilon \delta} \Pi_r(\tilde{u}_\delta) \right) \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^2(\omega; H^1(B; \mathbb{R}^3)).$$

D'où (2.65)₂. De même, on prouve (2.66)₂.

Étape 3. La première égalité de (2.67) est une conséquence de (2.64)₁, ainsi \mathcal{U}_3 appartient à $H_0^2(\omega)$. D'après (2.40)₃ on déduit que $\tilde{U}_3 = \mathcal{U}_3$ p.p. dans $\omega \times I$, ce qui prouve (2.67)₂.

Étape 4. On rappelle que $\left\| \frac{\partial \Pi_\delta(\tilde{U}_\delta)}{\partial X_3} - \delta \Pi_\delta(\tilde{R}_\delta) \wedge \mathbf{e}_3 \right\|_{L^2(\omega \times I)} \leq C \frac{\varepsilon \delta^2}{r}$, alors les convergences (2.65)₃ et (2.65)₅ conduit à

$$\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_3} = \tilde{R}_2, \quad \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial X_3} = -\tilde{R}_1 \quad \text{p.p. dans } \omega \times I. \quad (2.69)$$

Par conséquent \tilde{U}_α appartient à $L^2(\omega; H^2(I))$. Grâce aux estimations (2.62) et (2.63), le champ \tilde{R} ne dépend pas de la variable X_3 . Alors (2.63)₂ implique que $\tilde{R}_3 = 0$ dans $\omega \times (I^a \cup I^b)$.

Comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \delta}{r} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon \delta^2}{r^2} \cdot \frac{r}{\delta} \right) = 0$, (2.63)₂ donne également

$$\mathcal{R}_1 = \tilde{R}_2, \quad \mathcal{R}_2 = -\tilde{R}_1, \quad \text{p.p. dans } \omega. \quad (2.70)$$

Étape 5. De (2.67), (2.69) et (2.70), il existe $C_\alpha \in L^2(\omega)$ tel que

$$\tilde{U}_\alpha(\cdot, X_3) = -X_3 \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha}(\cdot) + C_\alpha(\cdot), \quad \text{dans } L^2(\omega; H^1(I)). \quad (2.71)$$

D'autre part, d'après (2.44)

$$\|\mathcal{M}_r(\mathcal{U}_{\alpha,\delta}^d) - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\tilde{U}_{\alpha,\delta})\|_{L^2(\omega)} \leq C\delta \left(\frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right). \quad (2.72)$$

Soit ϕ appartient à $L^1(\Omega^d)$. Un simple changement de variable donne

$$\mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)(x') = \mathcal{M}_{I^d}(\Pi_\delta(\phi))(x') \quad \text{pour p.p. } x' \in \omega \quad (2.73)$$

où

$$\forall \Phi \in L^1(\omega \times I^d), \quad \mathcal{M}_{I^d}(\Phi)(x') = \frac{1}{2\kappa_d} \int_{-\kappa_d}^{\kappa_d} \Phi(x', X_3 - \mathbf{s}) dX_3, \quad \text{pour p.p. } x' \in \omega.$$

D'où, d'après (2.33)-(2.64) et (2.72) avec les égalités ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\delta} \mathcal{U}_{\alpha,\delta}^d - \frac{1}{\delta} \mathcal{M}_r(\mathcal{U}_{\alpha,\delta}^d) \right\|_{L^2(\omega)} &\leq C\varepsilon \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)}, \\ \left\| \frac{1}{\delta} \mathcal{M}_r(\mathcal{U}_{\alpha,\delta}^d) - \mathcal{M}_{I^d}\left(\frac{1}{\delta} \Pi_\delta(\tilde{U}_{\alpha,\delta})\right) \right\|_{L^2(\omega)} &\leq C \left(\frac{\varepsilon\delta^2}{r^2} + \frac{\varepsilon^2}{r} \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \right). \end{aligned}$$

Le passage à la limite donne $\mathcal{U}_\alpha^d = \mathcal{M}_{I^d}(\tilde{U}_\alpha)$ et ensuite avec (2.71)

$$\mathcal{U}_\alpha^d = \mathcal{M}_{I^d}(\tilde{U}_\alpha) = -\mathbf{s} \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha} + C_\alpha.$$

On en déduit les expressions de $\tilde{U}_\alpha(\cdot, X_3)$ dans $\omega \times I$ et de \mathcal{U}_α^d dans ω (voir (2.68)). □

Comme conséquence du théorème ci-dessus et des décompositions (2.9)-(2.20), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \Pi_r(\widetilde{u}_{\alpha,\delta}) \rightharpoonup \mathcal{U}_\alpha - X_3 \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha}, \quad \Pi_r(\widetilde{u}_{3,\delta}) \rightharpoonup \mathcal{U}_3 &\quad \text{faiblement dans } L^2(\omega; H^1(B^{\text{be}})), \\ \frac{1}{\delta} \Pi_\delta(u_{\alpha,\delta}) \rightharpoonup \mathcal{U}_\alpha - X_3 \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha}, \quad \Pi_\delta(u_{3,\delta}) \rightharpoonup \mathcal{U}_3 &\quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega^d) \end{aligned}$$

Le déplacement limite est de type Kirchhoff-Love.

Chapitre 3

Le problème limite et la convergence de l'énergie

3.1 Comportement asymptotique de la structure.

Soit χ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\chi(x') = 1 \text{ pour tout } x' \in D_1,$$

$$\chi(x') \in [0, 1] \text{ pour tout } x' \in \mathbb{R}^2.$$

Ci-dessous, on rappelle deux résultats classiques d'approximation.

Lemme 3.1.1. *Soit ϕ appartient à $W^{1,\infty}(\omega)$. On définit $\phi_{\varepsilon,r}$ par*

$$\forall x' \in \omega, \quad \phi_{\varepsilon,r}(x') = \chi\left(\frac{\varepsilon}{r}\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\}\right)\phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right) + \left[1 - \chi\left(\frac{\varepsilon}{r}\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\}\right)\right]\phi(x').$$

Si $\frac{r}{\varepsilon}$ tend vers 0 alors pour tout $p \in [1, +\infty)$

$$\phi_{\varepsilon,r} \longrightarrow \phi \text{ fortement dans } W^{1,p}(\omega). \quad (3.1)$$

Soit Φ appartient à $W^{2,\infty}(\omega)$. On définit $\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r}$ par

$$\forall x' \in \omega, \quad \widehat{\Phi}_{\varepsilon,r}(x') = \chi\left(\frac{\varepsilon}{r}\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\}\right)\left[\Phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right) + \varepsilon\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\} \cdot \nabla\Phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right)\right] + \left[1 - \chi\left(\frac{\varepsilon}{r}\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\}\right)\right]\Phi(x').$$

Si $\frac{r}{\varepsilon}$ tend vers 0 alors pour tout $p \in [1, +\infty)$

$$\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} \longrightarrow \Phi \text{ fortement dans } W^{2,p}(\omega). \quad (3.2)$$

Démonstration. Voir les démonstrations des lemmes 5.1.7 et 5.1.8 de l'Annexe A. \square

3.1.1 Limites faibles des tenseurs des déformations

Comme conséquence immédiate des convergences du théorème 2.6.1 et des expressions (2.12)-(2.23) du gradient symétrisé dans les poutres et dans les plaques, on obtient

Proposition 3.1.1. *Sous les hypothèses du théorème 2.6.1, dans l'ensemble des poutres on a la convergence faible*

$$\frac{r}{\varepsilon\delta} \Pi_r((\nabla \widetilde{u}_\delta)_S) \rightharpoonup \Gamma \quad \text{faiblement dans } [L^2(\omega \times B^{be})]^{3 \times 3} \quad (3.3)$$

où les composants de la matrice symétrique Γ sont données par

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \widetilde{u}_\alpha}{\partial X_\beta} + \frac{\partial \widetilde{u}_\beta}{\partial X_\alpha} \right), & \Gamma_{33} &= \frac{\partial \widehat{U}_3}{\partial X_3} - X_1 \frac{\partial \widehat{R}_2}{\partial X_3} + X_2 \frac{\partial \widehat{R}_1}{\partial X_3}, \\ \Gamma_{13} &= \frac{1}{2} \left(\widetilde{Z}_1 - X_2 \frac{\partial \widetilde{R}_3}{\partial X_3} + \frac{\partial \widetilde{u}_3}{\partial X_1} \right), & \Gamma_{23} &= \frac{1}{2} \left(\widetilde{Z}_2 + X_1 \frac{\partial \widetilde{R}_3}{\partial X_3} + \frac{\partial \widetilde{u}_3}{\partial X_2} \right). \end{aligned}$$

Dans les plaques on obtient les convergences faible suivantes ($d \in \{a, b\}$) :

$$\frac{1}{\delta} \Pi_\delta((\nabla u_\delta)_S) \rightharpoonup \Gamma^d \quad \text{faiblement dans } [L^2(\Omega^d)]^{3 \times 3} \quad (3.4)$$

où les composants de la matrice symétrique Γ^d sont données par ($\mathcal{U}_m = \mathcal{U}_1 \mathbf{e}_1 + \mathcal{U}_2 \mathbf{e}_2$)

$$\Gamma_{\alpha\beta}^d = \gamma_{\alpha\beta}(\mathcal{U}_m) - X_3 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad \Gamma_{\alpha 3}^d = \frac{1}{2} \left(Z_\alpha^d + \frac{\partial \bar{u}_\alpha^d}{\partial X_3} \right), \quad \Gamma_{33}^d = \frac{\partial \bar{u}_3^d}{\partial X_3}. \quad (3.5)$$

□

3.1.2 Détermination du tenseur de déformation dans l'ensemble des poutres

Pour déterminer les \widetilde{Z}_α et le gauchissement \widetilde{u} on procède comme dans [5, Section 6.1] et [6, Section 8.1], on obtient \widetilde{u}_α et \widetilde{Z}_α . Cela donne (p.p. dans $\omega \times B^{be}$),

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_1(\cdot, X) &= v^{be} \left\{ -X_1 \frac{\partial \widehat{U}_3}{\partial X_3}(\cdot, X_3) + \frac{X_1^2 - X_2^2}{2} \frac{\partial \widehat{R}_2}{\partial X_3}(\cdot, X_3) - X_1 X_2 \frac{\partial \widehat{R}_1}{\partial X_3}(\cdot, X_3) \right\}, \\ \widetilde{u}_2(\cdot, X) &= v^{be} \left\{ -X_2 \frac{\partial \widehat{U}_3}{\partial X_3}(\cdot, X_3) + X_1 X_2 \frac{\partial \widehat{R}_2}{\partial X_3}(\cdot, X_3) - \frac{X_2^2 - X_1^2}{2} \frac{\partial \widehat{R}_1}{\partial X_3}(\cdot, X_3) \right\}, \\ \widetilde{u}_3(\cdot, X) &= 0, \quad \widetilde{Z}_\alpha = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

où $\nu^{be} = \frac{\lambda^{be}}{2(\lambda^{be} + \mu^{be})}$ est le coefficient de Poisson du matériau des poutres.

Pour plus de détails sur les relations ci-dessus voir le lemme 5.1.5 de l'Annexe A.

De l'expression (2.2) du champ du tenseur de déformation, de la convergence (3.3) et des expressions (3.6) de \tilde{u} et \tilde{Z}_α on obtient

$$\frac{r}{\varepsilon\delta} \Pi_r(\tilde{\sigma}_\delta) \rightharpoonup \Sigma \quad \text{faiblement dans } [L^2(\omega \times B^{be})]^{3 \times 3} \quad (3.7)$$

où

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(\cdot, X) &= \Sigma_{22}(\cdot, X) = \Sigma_{12}(\cdot, X) = 0, \\ \Sigma_{13}(\cdot, X) &= -\mu^{be} X_2 \frac{\partial \tilde{R}_3}{\partial X_3}(\cdot, X_3), \quad \Sigma_{23}(\cdot, X) = \mu^{be} X_1 \frac{\partial \tilde{R}_3}{\partial X_3}(\cdot, X_3), \quad \text{p.p. dans } \omega \times B^{be}. \\ \Sigma_{33}(\cdot, X) &= E^{be} \left(\frac{\partial \hat{U}_3}{\partial X_3}(\cdot, X_3) - X_1 \frac{\partial \hat{R}_2}{\partial X_3}(\cdot, X_3) + X_2 \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial X_3}(\cdot, X_3) \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$E^{be} = \frac{\mu^{be}(3\lambda^{be} + 2\mu^{be})}{\lambda^{be} + \mu^{be}}$ est le module de Young du matériau élastique des poutres. Dans la Section 3.2, on montrera que

$$\Sigma = 0 \quad \text{dans } \omega \times B^{be}.$$

3.1.3 Détermination de Z_α^d 's et le gauchissement \bar{u}^d , $d \in \{a, b\}$

On procède comme dans [24, Section 5.2], on en déduit d'abord que les fonctions \bar{u}_α^d et Z_α^d sont nulles et que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_3^d}{\partial X_3}(\cdot, X_3) &= -\frac{\lambda^{pl}}{\lambda^{pl} + 2\mu^{pl}} \left(\gamma_{\alpha\alpha}(\mathcal{U}_m^d) - (X_3 - \mathbf{s}) \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \right), \\ &= -\frac{\lambda^{pl}}{\lambda^{pl} + 2\mu^{pl}} \left(\gamma_{\alpha\alpha}(\mathcal{U}_m) - X_3 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \right), \end{aligned} \quad \text{p.p. dans } \Omega^d, \quad d \in \{a, b\}.$$

Pour cette égalité voir le lemme 5.1.6 de l'Annexe A.

Rappelons que de (2.21), on a $\int_{I^d} \bar{u}_3^d(x', X_3) dX_3 = 0$, p.p. dans ω . Cette égalité permet d'obtenir la fonction \bar{u}_3^d en fonction des champs \mathcal{U}_m et \mathcal{U}_3 . Mais ces dernières expressions sont inutiles. Pour donner la limite des tenseurs de déformations, nous avons seulement besoin de la connaissance de la dérivée partielle de \bar{u}_3^d par rapport à X_3 . Ainsi, de l'expression (2.2) du champ tenseur de déformation et maintenant en utilisant la convergence (3.4) on trouve

$$\frac{1}{\delta} \Pi_\delta(\sigma_\delta^d) \rightharpoonup \Sigma^d \quad \text{faiblement dans } [L^2(\Omega^d)]^{3 \times 3}. \quad (3.9)$$

Insérer l'expression ci-dessus de $\frac{\partial \bar{u}^d}{\partial X_3}$ et en tenant compte que $Z_\alpha^d = 0$ on obtient

$$\begin{aligned}\Sigma_{11}^d &= \frac{E^{pl}}{1 - (\nu^{pl})^2} \left[\gamma_{11}(\mathcal{U}_m) - X_3 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_1^2} + \nu^{pl} \left(\gamma_{22}(\mathcal{U}_m) - X_3 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_2^2} \right) \right], \\ \Sigma_{22}^d &= \frac{E^{pl}}{1 - (\nu^{pl})^2} \left[\gamma_{22}(\mathcal{U}_m) - X_3 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_2^2} + \nu^{pl} \left(\gamma_{11}(\mathcal{U}_m) - X_3 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_1^2} \right) \right], \\ \Sigma_{12}^d &= \frac{E^{pl}}{1 + \nu^{pl}} \left[\gamma_{12}(\mathcal{U}_m) - X_3 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right], \quad \Sigma_{i3}^d = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega^d\end{aligned}\tag{3.10}$$

où $\nu^{pl} = \frac{\lambda^{pl}}{2(\lambda^{pl} + \mu^{pl})}$ est le coefficient de Poisson et $E^{pl} = \frac{\mu^{pl}(3\lambda^{pl} + 2\mu^{pl})}{\lambda^{pl} + \mu^{pl}}$ est le module Young du matériau élastique des plaques.

3.1.4 Le problème limite

On pose

$$\begin{aligned}f_\alpha &= \int_{I^a} f_\alpha^a(\cdot, X_3) dX_3 + \int_{I^b} f_\alpha^b(\cdot, X_3) dX_3 + \int_{B^{be}} f_\alpha^{be}(\cdot, X) dX, \\ f_3 &= \left(\int_{I^a} X_3 \frac{\partial f_\alpha^a}{\partial x_\alpha}(\cdot, X_3) dX_3 + \int_{I^b} X_3 \frac{\partial f_\alpha^b}{\partial x_\alpha}(\cdot, X_3) dX_3 + \int_{B^{be}} X_3 \frac{\partial f_\alpha^{be}}{\partial x_\alpha}(\cdot, X) dX \right) \\ &\quad + \int_{I^a} f_3^a(\cdot, X_3) dX_3 + \int_{I^b} f_3^b(\cdot, X_3) dX_3 + \int_{B^{be}} f_3^{be}(\cdot, X) dX.\end{aligned}$$

On a $f_i \in L^2(\omega)$.

Théorème 3.1.1. *Le triplet $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3)$ est la solution du problème variationnel*

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3) &\in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega), \\ \frac{2(\kappa_a + \kappa_b)E^{pl}}{1 - (\nu^{pl})^2} \int_\omega &\left[(1 - \nu^{pl}) \gamma_{\alpha\beta}(\mathcal{U}_m) \gamma_{\alpha\beta}(\phi) + \nu^{pl} (\gamma_{kk}(\mathcal{U}_m)) (\gamma_{kk}(\phi)) \right] dx' \\ &+ \frac{\eta E^{pl}}{1 - (\nu^{pl})^2} \int_\omega \left[(1 - \nu^{pl}) \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \nu^{pl} \Delta \mathcal{U}_3 \Delta \Phi \right] dx' \\ &- \frac{2(\kappa_a - \kappa_b)E^{pl}}{1 - (\nu^{pl})^2} \int_\omega \left[(1 - \nu^{pl}) \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\phi) + \nu^{pl} \Delta \mathcal{U}_3 (\gamma_{kk}(\phi)) \right] dx' \\ &- \frac{2(\kappa_a - \kappa_b)E^{pl}}{1 - (\nu^{pl})^2} \int_\omega \left[(1 - \nu^{pl}) \gamma_{\alpha\beta}(\mathcal{U}_m) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \nu^{pl} (\gamma_{kk}(\mathcal{U}_m)) \Delta \Phi \right] dx' \\ &= \int_\omega f_\alpha \phi_\alpha dx' + \int_\omega f_3 \Phi dx', \quad \forall (\phi_1, \phi_2, \Phi) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega),\end{aligned}\tag{3.11}$$

où

$$\eta = \frac{1}{3} \left[2(\kappa_a^3 + \kappa_b^3) + 6(\kappa_a + \kappa_b) \right].$$

Démonstration. Soient ϕ_1, ϕ_2 et Φ appartenant à $\mathcal{D}(\omega)$. On définit le déplacement v_δ par

$$\begin{aligned} v_{\delta,\alpha}(x) &= \frac{1}{\delta^2} \left(\phi_{\alpha,\varepsilon,r}(x') - \frac{x_3}{\delta} \frac{\partial \widehat{\Phi}_{\varepsilon,r}}{\partial x_\alpha}(x') \right), \\ v_{\delta,3}(x) &= \frac{1}{\delta^3} \widehat{\Phi}_{\varepsilon,r}(x'), \end{aligned} \quad x \in \Omega_{\delta,\varepsilon,r},$$

où $\phi_{\alpha,\varepsilon,r}, \widehat{\Phi}_{\varepsilon,r}$ sont définis dans le Lemme 3.1.1. Puisque $\chi = 1$ dans D_1 , dans chaque poutre le déplacement v_δ coïncide avec un déplacement rigide. Par conséquent $(\nabla v^\delta)_S = 0$ p.p. dans $B_{\delta,\varepsilon,r}$.

Dans Ω_δ^d on a

$$\gamma_{\alpha\beta}(v_\delta) = \frac{1}{\delta^2} \left(\gamma_{\alpha\beta}(\phi_{\varepsilon,r}) - \frac{x_3}{\delta} \frac{\partial^2 \widehat{\Phi}_{\varepsilon,r}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right), \quad \gamma_{i3}(v_\delta) = 0.$$

On applique l'opérateur Π_δ . Le lemme 3.1.1 permet de passer à la limite. Cela donne

$$\delta^2 \Pi_\delta(\gamma_{\alpha\beta}(v_\delta)) \rightarrow \gamma_{\alpha\beta}(\phi) - X_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega^d), \quad (3.12)$$

Pour tout x dans $B_{\delta,\varepsilon,r}$ on a

$$\begin{aligned} v_{\alpha,\delta}(x) &= \frac{1}{\delta^2} \left(\phi_\alpha \left(\varepsilon \left[\frac{x'}{\varepsilon} \right] \right) - \frac{x_3}{\delta} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} \left(\varepsilon \left[\frac{x'}{\varepsilon} \right] \right) \right), \\ v_{3,\delta}(x) &= \frac{1}{\delta^3} \left(\Phi \left(\varepsilon \left[\frac{x'}{\varepsilon} \right] \right) + \varepsilon \left\{ \frac{x'}{\varepsilon} \right\} \cdot \nabla \Phi \left(\left[\frac{x'}{\varepsilon} \right] \right) \right). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi_r(\widetilde{v_{\alpha,\delta}}) &\rightarrow \phi_\alpha - X_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} \quad \text{fortement dans } L^2(\omega \times B^{\text{be}}), \\ \delta^3 \Pi_r(\widetilde{v_{3,\delta}}) &\rightarrow \Phi \quad \text{fortement dans } L^2(\omega \times B^{\text{be}}), \\ \delta^2 \Pi_\delta(v_{\alpha,\delta}) &\rightarrow \phi_\alpha - X_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega^d), \\ \delta^3 \Pi_\delta(v_{3,\delta}) &\rightarrow \Phi \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega^d). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dans (2.6) on choisit le déplacement test v_δ . On a donc

$$\int_{\Omega_\delta^a \cup \Omega_\delta^b} \sigma_{ij,\delta} \gamma_{ij}(v_\delta) dx = \int_{\Omega_\delta^a \cup \Omega_\delta^b} f_{i,\delta} v_{i,\delta} dx + \int_{B_{\delta,\varepsilon,r}} f_{i,\delta} v_{i,\delta} dx.$$

On transforme cette égalité en utilisant les opérateurs $\Pi_\delta, \widetilde{}$ et Π_r . On obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^a \cup \Omega^b} \frac{1}{\delta} \Pi_\delta(\sigma_{ij,\delta}) \delta^2 \Pi_\delta(\gamma_{ij}(v_\delta)) dx' dX_3 \\ &= \int_{\Omega^a \cup \Omega^b} f_\alpha^d \delta^2 \Pi_\delta(v_{\alpha,\delta}) dx' dX_3 + \int_{\Omega^a \cup \Omega^b} f_3^d \delta^3 \Pi_\delta(v_{3,\delta}) dx' dX_3 \\ &+ \int_{\omega \times B^{\text{be}}} \frac{r^2}{\varepsilon^2 \delta} \Pi_r(\widetilde{f_{\alpha,\delta}}) \delta^2 \Pi_r(\widetilde{v_{\alpha,\delta}}) dx' dX + \int_{\omega \times B^{\text{be}}} \frac{r^2}{\varepsilon^2 \delta^2} \Pi_r(\widetilde{f_{3,\delta}}) \delta^3 \Pi_r(\widetilde{v_{3,\delta}}) dx' dX. \end{aligned} \quad (3.14)$$

On passe à la limite dans l'égalité ci-dessus, en utilisant (3.12)-(3.13). Cela conduit à

$$\begin{aligned}
 & \sum_{d \in \{a,b\}} \int_{\Omega^d} \Sigma_{\alpha\beta}^d \left(\gamma_{\alpha\beta}(\phi) - X_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) dx' dX_3 \\
 &= \sum_{d \in \{a,b\}} \left(\int_{\Omega^d} f_\alpha^d \left(\phi_\alpha - X_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} \right) dx' dX_3 + \int_{\Omega^d} f_3^d \Phi dx' dX_3 \right) \\
 &+ \int_{\omega \times D_1 \times I^{\text{be}}} f_\alpha^c \left(\phi_\alpha - X_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} \right) dx' dX + \int_{\omega \times D_1 \times I^{\text{be}}} f_3^c \Phi dx' dX.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

On rappelle que

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{11}^d &= \frac{E^{pl}}{1 - (\nu^{pl})^2} \left[\gamma_{11}(\mathcal{U}_m) + \nu^{pl} \gamma_{22}(\mathcal{U}_m) - X_3 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_1^2} + \nu^{pl} \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_2^2} \right) \right], \\
 \Sigma_{22}^d &= \frac{E^{pl}}{1 - (\nu^{pl})^2} \left[\gamma_{22}(\mathcal{U}_m) + \nu^{pl} \gamma_{11}(\mathcal{U}_m) - X_3 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_2^2} + \nu^{pl} \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_1^2} \right) \right], \\
 \Sigma_{12}^d &= \frac{E^{pl}}{1 + \nu^{pl}} \left[\gamma_{12}(\mathcal{U}_m) - X_3 \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right].
 \end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant (3.10) dans (3.15). Après simplification on obtient (3.11) pour tout $(\phi_1, \phi_2, \Phi) \in [\mathcal{D}(\omega)]^3$. Puisque $\mathcal{D}(\omega)$ est dense dans $H_0^1(\omega)$ and $H_0^2(\omega)$, one gets (3.11) for every $(\phi_1, \phi_2, \Phi) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$.

Finalement, en remplaçant les quantités ci-dessus dans (3.15), après simplification on obtient (3.11) pour tout $(\phi_1, \phi_2, \Phi) \in [\mathcal{D}(\omega)]^3$. Puisque $\mathcal{D}(\omega)$ est dense dans $H_0^1(\omega)$ et dans $H_0^2(\omega)$, on obtient (3.11) pour tout $(\phi_1, \phi_2, \Phi) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times H_0^2(\omega)$. \square

3.2 Convergence de l'énergie

Dans cette section, on montre que l'énergie élastique totale $\frac{1}{\delta^3} \mathcal{E}(u_\delta)$ converge. On rappelle que l'énergie élastique totale est

$$\mathcal{E}(u_\delta) = \int_{\Omega_{\delta,\varepsilon,r}} \sigma_{ij,\delta} \gamma_{ij}(u_\delta) dx = \int_{\Omega_{\delta,\varepsilon,r}} f_{i,\delta} u_{i,\delta} dx.$$

Ce qui s'écrit également

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(u_\delta) &= \int_{\Omega_\delta^a \cup \Omega_\delta^b} \sigma_{ij,\delta} \gamma_{ij}(u_\delta) dx + \sum_{\xi \in \Xi_\varepsilon} \int_{D_r \times I_\delta^{\text{be}}} \sigma_{ij,\delta}(\varepsilon\xi + x) \gamma_{ij}(u_\delta)(\varepsilon\xi + x) dx \\
 &= \int_{\Omega_\delta^a \cup \Omega_\delta^b} f_{i,\delta} u_{i,\delta} dx + \sum_{\xi \in \Xi_\varepsilon} \int_{D_r \times I_\delta^{\text{be}}} f_{i,\delta}(\varepsilon\xi + x) u_{i,\delta}(\varepsilon\xi + x) dx.
 \end{aligned}$$

On transforme cette égalité en utilisant les opérateurs $\widetilde{\cdot}$, Π_r et Π_δ , puis on divise par δ^3 . D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^3} \mathcal{E}(u_\delta) &= \sum_{d \in \{a, b\}} \int_{\Omega^d} \left[\lambda^{pl} \left(\frac{1}{\delta} \Pi_\delta(\gamma_{kk}(u_\delta)) \right)^2 + 2\mu^{pl} \left(\frac{1}{\delta} \Pi_\delta(\gamma_{ij}(u_\delta)) \right) \left(\frac{1}{\delta} \Pi_\delta(\gamma_{ij}(u_\delta)) \right) \right] dx' dX_3 \\ &\quad + \int_{\omega \times B^{be}} \left[\lambda^{be} \left(\frac{r}{\varepsilon \delta} \Pi_r(\widetilde{\gamma_{kk}(u_\delta)}) \right)^2 + 2\mu^{be} \left(\frac{r}{\varepsilon \delta} \Pi_r(\widetilde{\gamma_{ij}(u_\delta)}) \right) \left(\frac{r}{\varepsilon \delta} \Pi_r(\widetilde{\gamma_{ij}(u_\delta)}) \right) \right] dx' dX \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^3} \mathcal{E}(u_\delta) &= \sum_{d \in \{a, b\}} \left(\int_{\Omega^d} f_\alpha^d \delta^2 \Pi_\delta(u_{\alpha, \delta}) dx' dX_3 + \int_{\Omega^d} f_3^d \delta^3 \Pi_\delta(u_{3, \delta}) dx' dX_3 \right) \\ &\quad + \int_{\omega \times B^{be}} \frac{r^2}{\varepsilon^2 \delta^2} \Pi_r(\widetilde{f_{\alpha, \delta}}) \delta^2 \Pi_r(\widetilde{u_{\alpha, \delta}}) dx' dX + \int_{\omega \times B^{be}} \frac{r^2}{\varepsilon^2 \delta^2} \Pi_r(\widetilde{f_{3, \delta}}) \delta^3 \Pi_r(\widetilde{u_{3, \delta}}) dx' dX. \end{aligned}$$

On rappelle que la fonctionnelle convexe $v \mapsto \mathcal{E}(v)$ est semi-continue inférieurement. Les convergences (2.65)-(2.66), (3.7)-(3.9) et les égalités (2.68) permettent de passer à la limite dans les égalités ci-dessus

$$\begin{aligned} &\sum_{d \in \{a, b\}} \int_{\Omega^d} \left[\lambda^{pl} (\Gamma_{kk}^d)^2 + 2\mu^{pl} (\Gamma_{ij}^d) (\Gamma_{ij}^d) \right] dx' dX_3 + \int_{\omega \times B^{be}} \left[\lambda^{be} (\Gamma_{kk})^2 + 2\mu^{be} (\Gamma_{ij}) (\Gamma_{ij}) \right] dx' dX \\ &\leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^3} \mathcal{E}(u_\delta) \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^3} \mathcal{E}(u_\delta) \\ &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\sum_{d \in \{a, b\}} \left(\int_{\Omega^d} f_\alpha^d \delta^2 \Pi_\delta(u_{\alpha, \delta}) dx' dX_3 + \int_{\Omega^d} f_3^d \delta^3 \Pi_\delta(u_{3, \delta}) dx' dX_3 \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\omega \times B^{be}} \frac{r^2}{\varepsilon^2 \delta^2} \Pi_r(\widetilde{f_{\alpha, \delta}}) \delta^2 \Pi_r(\widetilde{u_{\alpha, \delta}}) dx' dX + \int_{\omega \times B^{be}} \frac{r^2}{\varepsilon^2 \delta^2} \Pi_r(\widetilde{f_{3, \delta}}) \delta^3 \Pi_r(\widetilde{u_{3, \delta}}) dx' dX \right] \\ &= \sum_{d \in \{a, b\}} \left[\int_{\Omega^d} f_\alpha^d \left(\mathcal{U}_\alpha - X_3 \frac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha} \right) dx' dX_3 + \int_{\Omega^d} f_3^d \mathcal{U}_3 dx' dX_3 \right] \\ &\quad + \int_{\omega \times B^{be}} f_\alpha^{be} \widetilde{U}_\alpha dx' dX + \int_{\omega \times B^{be}} f_3^{be} \widetilde{U}_3 dx' dX = \int_\omega f_\alpha \mathcal{U}_\alpha dx' + \int_\omega f_3 \mathcal{U}_3 dx'. \end{aligned}$$

On prend $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3)$ comme tests dans (3.11). Les inégalités ci-dessus deviennent des égalités. Ce qui nous donne la convergence de l'énergie élastique totale

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^3} \mathcal{E}(u_\delta) = \sum_{d \in \{a, b\}} \int_{\Omega^d} \left[\lambda^{pl} (\Gamma_{kk}^d)^2 + 2\mu^{pl} \Gamma_{ij}^d \Gamma_{ij}^d \right] dx' dX_3,$$

$$\text{et également } \int_{\omega \times B^{be}} \left[\lambda^{be} (\Gamma_{kk})^2 + 2\mu^{be} \Gamma_{ij} \Gamma_{ij} \right] dx' dX = 0.$$

Comme conséquence immédiate de cette dernière égalité on obtient

$$\Sigma = 0 \quad \text{dans } \omega \times B^{be}.$$

En outre, les convergences faibles (3.3) et (3.4) sont des convergences fortes. On obtient ensuite

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \mathcal{U}_{\alpha, \delta}^d &\rightarrow \mathcal{U}_{\alpha}^d && \text{fortement dans } H^1(\omega), \\ \mathcal{U}_{3, \delta}^d &\rightarrow \mathcal{U}_3 && \text{fortement dans } H^1(\omega). \end{aligned}$$

Deuxième partie

**Application de la méthode de l'éclatement
périodique à l'étude d'un processus de
diffusion dans une structure binaire
raréfiée.**

Chapitre 4

Homogénéisation d'un processus de diffusion

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie le comportement asymptotique d'un problème d'évolution régissant un processus de diffusion dans une structure binaire raréfiée. Ce problème est présenté dans (4.7) avec les hypothèses (4.8)-(4.9) et (4.26). Dans ce problème la constante $a_{\varepsilon,\delta}$ représente la masse volumique des suspensions tandis que $b_{\varepsilon,\delta}$ est la diffusivité de celles-ci. Le paramètre δ est l'ordre de grandeur de la taille des suspensions dans la cellule de référence Y et ε est la longueur de la période. Le cas critique $\lim_{(\varepsilon,\delta)\rightarrow(0,0)} \delta^{N-2}/\varepsilon^2 \in (0, +\infty)$ est considéré ici.

Ce problème a d'abord été traité dans Bentalha et al. ([16]) en 2006. Dans leur article les auteurs considèrent le cas d'une diffusivité $b_{\varepsilon,\delta}$ tendant vers l'infini, les suspensions étant des sphères. Ils utilisent la méthode de la zone de contrôle. En 2007, Gruais ([30]) étudie le problème stationnaire en faisant l'hypothèse $\lim_{(\varepsilon,\delta)\rightarrow(0,0)} b_{\varepsilon,\delta} = \lim_{(\varepsilon,\delta)\rightarrow(0,0)} \delta^N a_{\varepsilon,\delta} = 1$ et en utilisant la méthode des échelles multiples. La même année, en utilisant à nouveau la méthode de la zone de contrôle Gruais et Poliřevski ont obtenu le problème limite dans le cas $\lim_{(\varepsilon,\delta)\rightarrow(0,0)} b_{\varepsilon,\delta} < +\infty$ ([32]).

Dans ce chapitre, on réexamine le problème d'évolution (4.7) avec la méthode de l'éclatement périodique introduite dans ([12]). On envisage uniquement le cas le plus intéressant :

à savoir le cas critique

$$\lim_{(\varepsilon, \delta) \rightarrow (0,0)} b_{\varepsilon, \delta} \in (0, +\infty) \quad \text{et} \quad \lim_{(\varepsilon, \delta) \rightarrow (0,0)} \delta^N a_{\varepsilon, \delta} \in (0, +\infty)$$

(voir les hypothèses (4.26)).

La méthode de l'éclatement périodique est un outil général pour étudier les problèmes d'homogénéisation périodique. De nos jours, cette méthode est utilisée dans beaucoup de nouveaux papiers car elle permet très simplement de remplacer la convergence à deux-échelles par une convergence dans un domaine fixe : via \mathcal{T}_ε dans $\Omega \times Y$ (où Y est la cellule de référence) ou via $\mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}$ dans $\Omega \times \mathbb{R}^N$.

Ce chapitre contient 6 sections. Dans la section 2 on présente les principales notations. Dans la section 3 on rappelle les définitions de certains opérateurs de l'éclatement (\mathcal{T}_ε , $\mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}$) et celle de l'opérateur de moyenne locale \mathcal{M}_ε . Ensuite les principaux résultats concernant ces opérateurs (lemmes 4.3.1 et 4.3.2) sont présentés.

Dans les sections 4 et 5, on donne pour commencer le problème d'évolution dans sa formulation variationnelle (4.10). Ensuite, l'estimation de l'énergie totale (4.11) permet d'introduire les hypothèses sur les données (4.12)-(4.13)-(4.14) et sur les deux petits paramètres ε et δ et sur $a_{\varepsilon, \delta}$, $b_{\varepsilon, \delta}$ (4.26).

Le problème d'évolution limite, dans sa forme éclatée (théorème (4.6.1)), est démontré dans la section 6. Ici, il convient de noter que pour la première fois ce problème limite est posé sous forme variationnelle dans $\Omega \times \mathbb{R}^N$. La dernière section est consacrée à l'obtention du problème homogénéisé. On utilise la transformée de Laplace pour résoudre le problème éclaté (4.33) ; on obtient les problèmes (4.63)-(4.64). Le problème d'évolution limite diffère du problème initial (4.7) par la présence d'un terme de convolution. Ce terme supplémentaire tient compte des effets de mémoire. Ici, c'est en fait un "terme étrange" (voir [14]).

4.2 Notations

Soient Ω et B deux domaines de \mathbb{R}^N de frontière lipschitzienne. On note

- $Y = (-1/2, 1/2)^N$ la cellule de base,
- $\Omega^T = (0, T) \times \Omega$,
- $Y_\delta = Y \setminus \delta\bar{B}$,
- $\Xi_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{Z}^N \mid \varepsilon(\xi + Y) \subset \Omega\}$,
- $\hat{\Omega}_\varepsilon = \text{interior}\left\{\bigcup_{\xi \in \Xi_\varepsilon} \varepsilon(\xi + \bar{Y})\right\}$,
- $\Lambda_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{\hat{\Omega}_\varepsilon}$,
- $D_{\varepsilon, \delta} = \Omega \cap \bigcup_{\xi \in \Xi_\varepsilon} \varepsilon(\xi + \delta B)$,
- $\Omega_{\varepsilon, \delta}^* = \Omega \setminus \overline{D_{\varepsilon, \delta}}$.

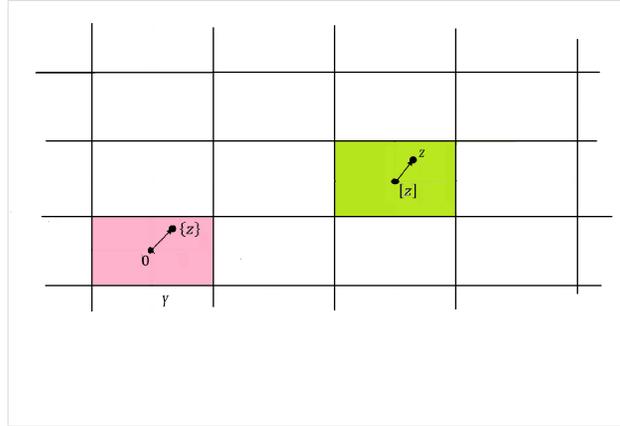
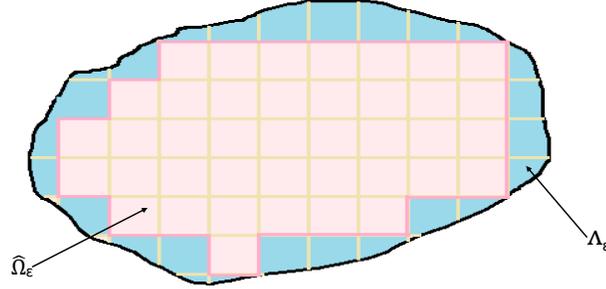


FIGURE 4.1 – Définition de $[z]$ et $\{z\}$

Pour presque tout z dans \mathbb{R}^N , on a

$$z = [z] + \{z\}$$

où $[z] \in \mathbb{Z}^N$ est la partie entière de z et où $\{z\} \in Y$ est la partie fractionnaire z .


 FIGURE 4.2 – Les ensembles Ω , $\widehat{\Omega}_\varepsilon$ et Λ_ε .

4.3 Rappels sur les opérateurs de la méthode d'éclatement : \mathcal{T}_ε , $\mathcal{T}_{\varepsilon,\delta}$ et l'opérateur de moyenne local \mathcal{M}_ε

Dans cette section, on rappelle les définitions et les principales propriétés des opérateurs de l'éclatement périodique \mathcal{T}_ε et $\mathcal{T}_{\varepsilon,\delta}$. On note que le rôle essentiel de ces opérateurs consiste à transformer l'intégrale sur Ω d'une fonction $\phi \in L^1(\Omega)$ en l'intégrale sur $\Omega \times Y$ (resp. $\Omega \times \mathbb{R}^N$) de la fonction $\mathcal{T}_\varepsilon(\phi)$ (resp. $\mathcal{T}_{\varepsilon,\delta}(\phi)$). Cela permet, par exemple, de transformer une suite de fonctions périodiques oscillant fortement (de périodes εY) en une suite constante (voir l'exemple ci-dessous). En permettant de capturer et de visualiser les fortes oscillations d'une suite, ce procédé simplifie l'étude de l'homogénéisation des EDP dont l'opérateur présente des coefficients périodiques.

Pour ϕ , fonction mesurable sur Ω , l'éclaté $\mathcal{T}_\varepsilon(\phi)$ de ϕ est défini par

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\phi)(x, y) = \begin{cases} \phi\left(\varepsilon \left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor + \varepsilon y\right) & \text{p.p. } (x, y) \in \widehat{\Omega}_\varepsilon \times Y, \\ 0 & \text{p.p. } (x, y) \in \Lambda_\varepsilon \times Y. \end{cases}$$

Comme exemple, on considère une fonction $f \in L^1(Y)$, on note $f_\varepsilon \doteq f\left(\left\{\frac{\cdot}{\varepsilon}\right\}\right) \in L^1(\Omega)$. La suite de fonctions $\{f_\varepsilon\}_\varepsilon$ est un exemple simple de suite fortement oscillantes. On a

$$\mathcal{T}_\varepsilon(f_\varepsilon)(x, y) = f(y) \quad \text{p.p. } (x, y) \in \Omega \times Y.$$

L'opérateur \mathcal{T}_ε a les propriétés suivantes voir [12] :

Lemme 4.3.1. *L'opérateur \mathcal{T}_ε est linéaire et continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega \times Y)$.*

1. Pour tout $(\psi, \phi) \in [L^2(\Omega)]^2$, $\mathcal{T}_\varepsilon(\psi\phi) = \mathcal{T}_\varepsilon(\psi)\mathcal{T}_\varepsilon(\phi)$.

2. Pour ϕ dans $L^2(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(\phi)(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \phi(x) dx - \int_{\Lambda_\varepsilon} \phi(x) dx = \int_{\widehat{\Omega}_\varepsilon} \phi(w) dx.$$

3. Pour tout u dans $L^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega \times Y} |\mathcal{T}_\varepsilon(u)| dx dy \leq \int_{\Omega} |u| dx.$$

4. Pour tout $u \in L^1(\Omega)$,

$$\left| \int_{\Omega} u dx - \int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}_\varepsilon(u) dx dy \right| \leq \int_{\Lambda_\varepsilon} |u| dx.$$

5. Soit $\{\phi_\varepsilon\}_\varepsilon$ une suite de $L^2(\Omega)$ telle que $\phi_\varepsilon \rightarrow \phi$ fortement dans $L^2(\Omega)$. Alors

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \rightarrow \phi \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega \times Y).$$

6. Soit $\{\phi_\varepsilon\}_\varepsilon$ une suite de $L^2(\Omega)$ telle que $\phi_\varepsilon \rightharpoonup \phi$ faiblement dans $L^2(\Omega)$. Alors, il existe une sous suite de ε (encore notée ε) et $\widehat{\phi} \in L^2(\Omega \times Y)$ tel que

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \rightharpoonup \widehat{\phi} \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times Y). \quad (4.1)$$

et on a $\phi = \mathcal{M}_Y(\widehat{\phi}) \doteq \int_Y \widehat{\phi}(\cdot, y) dy$.

7. Soit $\{\phi_\varepsilon\}_\varepsilon$ une suite de $H^1(\Omega)$ telle que $\phi_\varepsilon \rightharpoonup \phi$ faiblement dans $H^1(\Omega)$. Alors, il existe une sous suite de ε (encore notée ε) et $\widehat{\phi} \in L^2(\Omega; H^1_{per}(Y))$ tels que

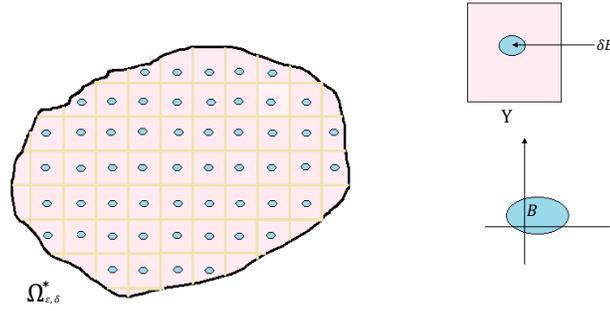
$$\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla \phi_\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x \phi + \nabla_y \widehat{\phi} \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times Y). \quad (4.2)$$

L'opérateur de moyenne local $\mathcal{M}_\varepsilon : L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ est défini comme suit : pour tout ϕ dans $L^1(\Omega)$

$$\mathcal{M}_\varepsilon(\phi)(x) = \int_Y \mathcal{T}_\varepsilon(\phi)(x, y) dy, \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Soit $\{\phi_\varepsilon\}_\varepsilon$ une suite de fonctions de $L^2(\Omega)$, telle que $\phi_\varepsilon \rightarrow \phi$ fortement dans $L^2(\Omega)$, on a alors

$$\mathcal{M}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \rightarrow \phi \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega).$$


 FIGURE 4.3 – Les ensembles $\Omega_{\epsilon, \delta}^*$ et B .

Pour ϕ , mesurable sur Ω , la fonction $\mathcal{T}_{\epsilon, \delta}(\phi)$ est définie par

$$\mathcal{T}_{\epsilon, \delta}(\phi)(x, z) = \begin{cases} \mathcal{T}_{\epsilon}(\phi)(x, \delta z) & \text{p.p. } (x, z) \in \widehat{\Omega}_{\epsilon} \times \frac{1}{\delta} Y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'opérateur $\mathcal{T}_{\epsilon, \delta}$ a les propriétés suivantes (voir Théorème 2.11 de [13]) :

Lemme 4.3.2. *L'opérateur $\mathcal{T}_{\epsilon, \delta}$ est linéaire et continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^N)$.*

1. Pour tout $(\psi, \phi) \in [L^2(\Omega)]^2$, $\mathcal{T}_{\epsilon, \delta}(\psi\phi) = \mathcal{T}_{\epsilon, \delta}(\psi)\mathcal{T}_{\epsilon, \delta}(\phi)$.
2. Pour tout ϕ dans $L^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \delta^N \int_{\Omega \times \mathbb{R}^N} \mathcal{T}_{\epsilon, \delta}(\phi)(x, z) dx dz &= \int_{\Omega \times Y} \mathcal{T}_{\epsilon}(\phi)(x, y) dx dy = \int_{\widehat{\Omega}_{\epsilon}} \phi dx, \\ \left| \int_{\Omega} \phi dx - \delta^N \int_{\Omega \times \mathbb{R}^N} \mathcal{T}_{\epsilon, \delta}(\phi)(x, z) dx dz \right| &\leq \int_{\Lambda_{\epsilon}} \phi dx. \end{aligned}$$

3. Pour tout ϕ dans $H^1(\Omega)$, on a

$$\mathcal{T}_{\epsilon, \delta}(\nabla \phi) = \frac{1}{\epsilon \delta} \nabla_z \mathcal{T}_{\epsilon, \delta}(\phi) \quad \text{in } \Omega \times \frac{1}{\delta} Y. \quad (4.3)$$

De plus, les estimations suivantes sont vérifiées :

4. Pour tout $u \in L^2(\Omega)$

$$\|\mathcal{T}_{\epsilon, \delta}(u)\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R}^N)}^2 \leq \frac{1}{\delta^N} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \|\mathcal{T}_{\epsilon, \delta}(u)\|_{L^2(\Omega \times B)}^2 \leq \frac{1}{\delta^N} \|u\|_{L^2(D_{\epsilon, \delta})}^2. \quad (4.4)$$

5. Pour tout u dans $H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \|\nabla_z(\mathcal{T}_{\varepsilon,\delta}(u))\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R}^N)}^2 &\leq \frac{\varepsilon^2}{\delta^{N-2}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \|\nabla_z(\mathcal{T}_{\varepsilon,\delta}(u))\|_{L^2(\Omega \times B)}^2 &\leq \frac{\varepsilon^2}{\delta^{N-2}} \|\nabla u\|_{L^2(D_{\varepsilon,\delta})}^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

6. Pour $N \geq 3$ et pour tout u dans $H^1(\Omega)$, on a ¹

$$\|\mathcal{T}_{\varepsilon,\delta}(u - \mathcal{M}_\varepsilon(u))\|_{L^2(\Omega; L^{2^*}(\mathbb{R}^N))}^2 \leq C \frac{\varepsilon^2}{\delta^{N-2}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Lemme 4.3.3. Pour tout $w \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ on a

$$\mathcal{T}_{\varepsilon,\delta}(w) \longrightarrow w \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\Omega; L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)). \quad (4.6)$$

Démonstration. Soit \mathcal{O} un ouvert borné de \mathbb{R}^N . Il existe $R > 0$ tel que $\mathcal{O} \subset B(0; R)$ (où $B(O; R)$ est la boule de rayon R et de centre O). Pour δ assez petit, on a $\mathcal{O} \subset B(0; R) \subset \frac{1}{\delta} Y$. Ainsi

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega \times \mathcal{O}} |\mathcal{T}_{\varepsilon,\delta}(w)(x, z) - w(x)|^2 dx dz \\ &= \int_{\Lambda_\varepsilon \times \mathcal{O}} |w(x)|^2 dx dz + \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon \times \mathcal{O}} |w(\varepsilon \left[\frac{x}{\varepsilon} \right] + \varepsilon \delta z) - w(x)|^2 dx dz \\ &\leq |\mathcal{O}| \int_{\Lambda_\varepsilon} |w(x)|^2 dx + |\Omega \times \mathcal{O}| \sup_{(x,z) \in \Omega \times \mathcal{O}} |w(\varepsilon \left[\frac{x}{\varepsilon} \right] + \varepsilon \delta z) - w(x)|^2. \end{aligned}$$

Soit ω le module d'uniforme continuité de w , on a

$$\int_{\Omega \times \mathcal{O}} |\mathcal{T}_{\varepsilon,\delta}(w)(x, z) - w(x)|^2 dx dz \leq C (\|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2 |\Lambda_\varepsilon| + \omega(\varepsilon + \varepsilon \delta R)^2).$$

Passant à la limite cela donne la convergence du lemme. □

4.4 Le problème d'évolution

On introduit ci-dessous le problème d'évolution qui régit le processus de diffusion dans notre mélange binaire

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u_{\varepsilon,\delta} \text{ tel que} & \\ \rho_{\varepsilon,\delta} \frac{du_{\varepsilon,\delta}}{dt} - \operatorname{div}_x(k_{\varepsilon,\delta} \nabla_x u_{\varepsilon,\delta}) = f_{\varepsilon,\delta} & \text{dans } \Omega^T, \\ u_{\varepsilon,\delta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u_{\varepsilon,\delta}(0) = u_{\varepsilon,\delta}^0 & \text{sur } \Omega \times \{0\}, \end{array} \right. \quad (4.7)$$

1. On rappelle que $2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant de Sobolev associé à 2.

où $f_{\varepsilon,\delta} \in L^2(\Omega^T)$ et

$$\rho_{\varepsilon,\delta} = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon,\delta}^*, \\ a_{\varepsilon,\delta} & \text{in } D_{\varepsilon,\delta}, \end{cases} \quad k_{\varepsilon,\delta} = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon,\delta}^*, \\ b_{\varepsilon,\delta} & \text{dans } D_{\varepsilon,\delta}, \end{cases} \quad (4.8)$$

où $a_{\varepsilon,\delta}$ et $b_{\varepsilon,\delta}$ sont des constantes minorées par une constante strictement positive indépendante de ε et δ . Plus précisément, il existe $c_0 > 0$ tel que pour tout (ε, δ)

$$a_{\varepsilon,\delta} \geq c_0, \quad b_{\varepsilon,\delta} \geq c_0. \quad (4.9)$$

Le premier coefficient $a_{\varepsilon,\delta}$ représente la masse des suspensions tandis que le second est la diffusivité de ces suspensions.

Lemme 4.4.1. *Le problème (4.7) a pour formulation variationnelle :*

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u_{\varepsilon,\delta} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \rho_{\varepsilon,\delta} u_{\varepsilon,\delta} \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ & \langle \rho_{\varepsilon,\delta} \frac{du_{\varepsilon,\delta}}{dt}(t), w \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} k_{\varepsilon,\delta}(x) \nabla_x u_{\varepsilon,\delta}(t, x) \nabla_x w(x) dx \\ & = \int_{\Omega} f_{\varepsilon,\delta}(t, x) w(x) dx \quad p.p. \quad t \in (0, T), \quad u_{\varepsilon,\delta}(0) = u_{\varepsilon,\delta}^0 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.10)$$

De plus $u_{\varepsilon,\delta}$ satisfait

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon,\delta}(x) |u_{\varepsilon,\delta}(t, x)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} k_{\varepsilon,\delta}(x) |\nabla_x u_{\varepsilon,\delta}(s, x)|^2 ds dx \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} f_{\varepsilon,\delta}(s, x) u_{\varepsilon,\delta}(s, x) ds dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon,\delta}(x) |u_{\varepsilon,\delta}^0(x)|^2 dx \end{aligned} \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \quad (4.11)$$

Démonstration. Voir Lemme 5.2.1 Annexe B. □

Hypothèses sur les données : On suppose qu'il existe C_0 ne dépend pas de ε et δ tel que

$$\int_{\Omega} \rho_{\varepsilon,\delta} |u_{\varepsilon,\delta}^0(x)|^2 dx + \int_{\Omega^T} \frac{1}{\rho_{\varepsilon,\delta}} |f_{\varepsilon,\delta}(t, x)|^2 dt dx \leq C_0. \quad (4.12)$$

On suppose également qu'il existe $u^0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega^T)$, $U^0 \in L^2(\Omega \times B)$ et $F \in L^2(\Omega^T \times B)$ tels que

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon,\delta}^0 & \rightharpoonup u^0 && \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \\ f_{\varepsilon,\delta} & \rightharpoonup f && \text{faiblement dans } L^2(\Omega^T), \end{aligned} \quad (4.13)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\varepsilon,\delta}(u_{\varepsilon,\delta}^0) &\rightharpoonup U^0 && \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times B), \\ \frac{1}{a_{\varepsilon,\delta}} \mathcal{T}_{\varepsilon,\delta}(f_{\varepsilon,\delta}) &\rightharpoonup F && \text{faiblement dans } L^2(\Omega^T \times B). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Lemme 4.4.2. *Il existe une constante positive C , indépendante de ε et δ , telle que*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon,\delta}(x) |u_{\varepsilon,\delta}(t, x)|^2 dx &\leq C \quad \forall t \in [0, T], \\ \int_{\Omega^T} k_{\varepsilon,\delta}(x) |\nabla_x u_{\varepsilon,\delta}(s, x)|^2 ds dx &\leq C. \end{aligned} \quad (4.15)$$

De plus

$$\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C. \quad (4.16)$$

Démonstration. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} f_{\varepsilon,\delta}(s, x) u_{\varepsilon,\delta}(s, x) ds dx &\leq \int_0^t \left\| \frac{1}{\sqrt{\rho_{\varepsilon,\delta}}} f_{\varepsilon,\delta}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} \|\sqrt{\rho_{\varepsilon,\delta}} u_{\varepsilon,\delta}(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\sqrt{\rho_{\varepsilon,\delta}}} f_{\varepsilon,\delta} \right\|_{L^2(\Omega^T)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\sqrt{\rho_{\varepsilon,\delta}} u_{\varepsilon,\delta}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Par insertion de l'inégalité ci-dessus dans (4.11) on obtient

$$\|\sqrt{\rho_{\varepsilon,\delta}} u_{\varepsilon,\delta}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\sqrt{\rho_{\varepsilon,\delta}} u_{\varepsilon,\delta}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{\rho_{\varepsilon,\delta}}} f_{\varepsilon,\delta} \right\|_{L^2(\Omega^T)}^2 + \int_0^t \|\sqrt{\rho_{\varepsilon,\delta}} u_{\varepsilon,\delta}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Le lemme de Gronwall donne

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\sqrt{\rho_{\varepsilon,\delta}} u_{\varepsilon,\delta}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &\leq (e^T - 1) \left(\|\sqrt{\rho_{\varepsilon,\delta}} u_{\varepsilon,\delta}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{\rho_{\varepsilon,\delta}}} f_{\varepsilon,\delta} \right\|_{L^2(\Omega^T)}^2 \right) \leq C_0 (e^T - 1), \\ \|\sqrt{\rho_{\varepsilon,\delta}} u_{\varepsilon,\delta}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq e^T \left(\|\sqrt{\rho_{\varepsilon,\delta}} u_{\varepsilon,\delta}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{\rho_{\varepsilon,\delta}}} f_{\varepsilon,\delta} \right\|_{L^2(\Omega^T)}^2 \right) \leq C_0 e^T. \end{aligned}$$

puis en utilisant à nouveau (4.11) on obtient

$$\int_0^t \|\sqrt{k_{\varepsilon,\delta}} \nabla_x u_{\varepsilon,\delta}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C_1 e^T. \quad (4.18)$$

D'où, grâce à (4.12) on obtient (4.15)₁. A nouveau avec (4.12) et les estimations (4.17)-(4.18)

on a (4.15)₂. Ensuite, les inégalités (4.9) conduisent à

$$\begin{aligned} \min\{1, c_0\} \int_{\Omega} |u_{\varepsilon,\delta}(t, x)|^2 dx &\leq C \quad \forall t \in [0, T], \\ \min\{1, c_0\} \int_{\Omega^T} |\nabla_x u_{\varepsilon,\delta}(s, x)|^2 ds dx &\leq C. \end{aligned}$$

Ce qui donne (4.16). □

Comme conséquence du lemme ci-dessus, on obtient

Corollaire 4.4.1. *Il existe une sous suite de (ε, δ) (encore notée (ε, δ)) et $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ tels que*

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon, \delta} &\rightharpoonup u && \text{faible * dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ u_{\varepsilon, \delta} &\rightharpoonup u && \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.5 Estimations complémentaires et convergences

Lemme 4.5.1. *Il existe une constante positive C indépendante de ε et δ , telle que*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(u_{\varepsilon, \delta} - \mathcal{M}_\varepsilon(u_{\varepsilon, \delta}))\|_{L^2(\Omega^T; L^{2^*}(\mathbb{R}^N))}^2 &\leq C \frac{\varepsilon^2}{\delta^{N-2}}, \\ \|\nabla_z(\mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(u_{\varepsilon, \delta}))\|_{L^2(\Omega^T \times \mathbb{R}^N)}^2 &\leq C \frac{\varepsilon^2}{\delta^{N-2}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

et

$$\|\mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(u_{\varepsilon, \delta})\|_{L^2(\Omega^T \times B)}^2 \leq \frac{C}{\delta^N a_{\varepsilon, \delta}}, \quad \|\nabla_z(\mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(u_{\varepsilon, \delta}))\|_{L^2(\Omega^T \times B)}^2 \leq C \frac{\varepsilon^2}{\delta^{N-2} b_{\varepsilon, \delta}}. \quad (4.21)$$

Démonstration. De (4.4) et (4.15) on déduit immédiatement (4.20).

D'après (4.4)₂ on a

$$\|\mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(u_{\varepsilon, \delta})\|_{L^2(\Omega^T \times B)}^2 \leq \frac{1}{\delta^N} \|u_{\varepsilon, \delta}\|_{L^2(D_{\varepsilon, \delta})}^2 \quad (4.22)$$

et selon (4.15)₁

$$\int_{\Omega_{\varepsilon, \delta}^*} |u_{\varepsilon, \delta}(t, x)|^2 dx + \int_{D_{\varepsilon, \delta}} a_{\varepsilon, \delta} |u_{\varepsilon, \delta}(t, x)|^2 dx \leq C.$$

D'où

$$\int_{D_{\varepsilon, \delta}} |u_{\varepsilon, \delta}(t, x)|^2 dx \leq \frac{C}{a_{\varepsilon, \delta}}. \quad (4.23)$$

On substitue (4.23) dans (4.22) ce qui donne (4.21)₁. Ensuite (4.5)₂ mène à

$$\|\nabla_z(\mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(u_{\varepsilon, \delta}))\|_{L^2(\Omega^T \times B)}^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{\delta^{N-2}} \|\nabla_x u_{\varepsilon, \delta}\|_{L^2(D_{\varepsilon, \delta}^T)}. \quad (4.24)$$

L'estimation (4.15)₂ conduit à

$$\int_{D_{\varepsilon, \delta} \times (0, T)} |\nabla u_{\varepsilon, \delta}(t, x)|^2 dt dx \leq \frac{C}{b_{\varepsilon, \delta}}. \quad (4.25)$$

On insère ensuite (4.25) dans (4.24) pour trouver (4.21)₂. □

Le lemme ci-dessus met en évidence plusieurs cas, on étudiera plus particulièrement le suivant :

$$\begin{aligned} \lim_{(\varepsilon, \delta) \rightarrow (0,0)} \frac{\delta^{N-2}}{\varepsilon^2} = \gamma_0 \in (0, +\infty), & \quad \lim_{(\varepsilon, \delta) \rightarrow (0,0)} \delta^N a_{\varepsilon, \delta} = a_0 \in (0, +\infty), \\ \lim_{(\varepsilon, \delta) \rightarrow (0,0)} b_{\varepsilon, \delta} = b_0 \in (0, +\infty) & \end{aligned} \quad (4.26)$$

qui est le plus intéressant.

Lemme 4.5.2. *Il existe une sous suite de (ε, δ) (encore notée (ε, δ)) et $U \in L^2(\Omega^T; H_{loc}^1(\mathbb{R}^N))$ avec $\nabla_z U \in L^2(\Omega^T \times \mathbb{R}^N)$ tels que*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(u_{\varepsilon, \delta}) \rightharpoonup U & \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega^T; H_{loc}^1(\mathbb{R}^N)), \\ \nabla_z \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(u_{\varepsilon, \delta}) \mathbf{1}_{1/\delta Y} \rightharpoonup \nabla_z U & \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega^T \times \mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (4.27)$$

De plus, il existe $V \in L^2(\Omega^T, L^{2^*}(\mathbb{R}^N))$ avec $\nabla_z V \in L^2(\Omega^T \times \mathbb{R}^N)$ tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(u_{\varepsilon, \delta} - \mathcal{M}_\varepsilon(u_{\varepsilon, \delta})) \mathbf{1}_{1/\delta Y} \rightharpoonup V & \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega^T; L^{2^*}(\mathbb{R}^N)), \\ \nabla_z \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(u_{\varepsilon, \delta}) \mathbf{1}_{1/\delta Y} \rightharpoonup \nabla_z V & \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega^T \times \mathbb{R}^N), \end{aligned} \quad (4.28)$$

et on a $U = V + u$.

Démonstration. De (4.21)-(4.20) on obtient (4.27) et (4.28). On a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\varepsilon(u_{\varepsilon, \delta}) \longrightarrow u & \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega^T), \\ \text{ainsi } \mathcal{M}_\varepsilon(u_{\varepsilon, \delta}) \longrightarrow u & \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega^T; L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Les convergences (4.27)₁, (4.28)₁ et (4.29) impliquent que $V = U - u$. □

On note

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \{ \Phi \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^N) \mid \nabla_z \Phi \in [L^2(\mathbb{R}^N)]^N \} = \dot{H}(\mathbb{R}^N) \oplus \mathbb{R},^2 \\ \mathbf{L} &= \{ \Phi \in L^2(\Omega; \mathbf{H}) \mid \Phi(\cdot, \infty) \in H_0^1(\Omega) \}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Pour tout $\Phi \in \mathbf{H}$, on sait qu'il existe une constante, notée $\Phi(\infty)$ (Voir le Lemme 5.2.2), telle que

$$\| \Phi - \Phi(\infty) \|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \| \nabla \Phi \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \quad (4.31)$$

La constante C ne dépend pas de Φ .

On a $U \in L^2(0, T; \mathbf{L})$ et $U(t, x, \infty) = u(t, x)$ p.p. $(t, x) \in \Omega^T$.

2. On rappelle que l'espace $\dot{H}(\mathbb{R}^N)$ est le complété de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ pour la norme $\Phi \mapsto \| \nabla \Phi \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$. Pour $N \geq 3$, c'est une sous espace de $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, où 2^* est l'exposant de Sobolev associé à 2. Donc, tous ses éléments admettent 0 comme limite à l'infini (au sens faible de $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$).

4.6 Le problème limite éclaté

On note k_0 la fonction définie par

$$k_0(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{B}, \\ b_0 & \text{si } z \in B. \end{cases} \quad (4.32)$$

Théorème 4.6.1. *Les convergences (4.19), (4.27) et (4.28) ont lieu pour toute la suite (ε, δ) .*

La fonction limite U est la solution du problème d'évolution éclaté

$$\begin{aligned} U &\in L^2(0, T; \mathbf{L}), \quad U(\cdot, \cdot, \infty) \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ U &\in H^1(0, T; L^2(\Omega; (H^1(B))')), \\ &< \frac{dU}{dt}(t, \cdot, \infty), \Phi(\cdot, \infty) >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + a_0 < \frac{dU}{dt}(t), \Phi >_{L^2(\Omega; (H^1(B))'), L^2(\Omega; H^1(B))} \\ &+ \int_{\Omega} \nabla_x U(t, \cdot, \infty) \nabla_x \Phi(\cdot, \infty) dx + \gamma_0 \int_{\Omega \times \mathbb{R}^N} k_0 \nabla_z U(t) \nabla_z \Phi dx dz \\ &= \int_{\Omega} f(t) \Phi(\cdot, \infty) dx + a_0 \int_{\Omega \times B} F(t) \Phi dx dz, \quad p.p \ t \in (0, T), \quad \forall \Phi \in \mathbf{L}, \\ U(0, x, \infty) &= u^0(x), \quad U(0, x, z) = U^0(x, z) \quad p.p \ (x, z) \in \Omega \times B. \end{aligned} \quad (4.33)$$

De plus U satisfait

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega} |U(t, \cdot, \infty)|^2 dx + \frac{a_0}{2} \int_{\Omega \times B} |U(t)|^2 dx dz \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla_x U(s, \cdot, \infty)|^2 ds dx + \gamma_0 \int_0^t \int_{\Omega \times \mathbb{R}^N} k_0 |\nabla_z U|^2 ds dx dz \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} f(s) U(s, \cdot, \infty) ds dx + a_0 \int_0^t \int_{\Omega \times B} F(s) U(s) dx dz \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^0|^2 dx + \frac{a_0}{2} \int_{\Omega \times B} |U^0|^2 dx dz. \end{aligned} \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \quad (4.34)$$

Avant de démontrer ce théorème, on montre trois lemmes qui seront essentiels dans la preuve du théorème. Le premier concerne un résultat de densité, le second est un lemme de convergence pour les fonctions s'annulant sur $D_{\varepsilon, \delta}$ et le dernier introduit une fonction de test.

L'ensemble B étant un ouvert borné, il existe $\eta_0 > 0$ tel que

$$2\eta_0 B \subset \bar{Y}.$$

Lemme 4.6.1. *L'ensemble*

$$\bigcup_{\eta \in (0, \eta_0]} \left\{ \psi \in H_{per}^1(Y) \mid \psi|_{\eta B} = 0 \right\}$$

est dense dans $H_{per}^1(Y)$.

Démonstration. On montre le lemme en deux étapes. Dans la première, on démontre le résultat pour des fonctions de $\mathcal{C}_{per}^\infty(\overline{Y})$ et dans la seconde étape on étudie le cas général.

Etape 1. On fixe une fonction χ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfaisant

$$\begin{aligned} \chi &= 0 \text{ sur } B, \\ \chi &= 1 \text{ sur } \mathbb{R}^N \setminus 2\overline{B}, \\ \chi(x) &\in [0, 1] \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Pour $\eta \in (0, \eta_0]$, on pose

$$\chi_\eta = \chi\left(\frac{\cdot}{\eta}\right).$$

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}_{per}^\infty(\overline{Y})$, on note $\phi_\eta = \chi_\eta \phi$. Puisque $\chi_\eta = 1$ sur ∂Y , la fonction ϕ_η appartient à $H_{per}^1(Y)$. On a $\phi_\eta = \phi$ sur $Y \setminus 2\overline{B}$ et $\nabla \phi_\eta = \nabla \phi \chi_\eta + \nabla \chi_\eta \phi$. D'où

$$\|\phi_\eta - \phi\|_{L^2(Y)}^2 + \|\nabla \phi_\eta - \nabla \phi\|_{L^2(Y)}^2 \leq \int_{2\eta B} |\phi|^2 dy + 2 \int_{2\eta B} |\nabla \phi|^2 dy + 2 \int_{2\eta B} |\nabla \chi_\eta|^2 |\phi|^2 dy.$$

De plus on a

$$\int_{2\eta B} |\nabla \chi_\eta|^2 |\phi|^2 dy \leq C \eta^{N-2} \|\nabla \chi\|_{[L^\infty(\mathbb{R}^N)]^N} \|\phi\|_{L^\infty(Y)}^2.$$

Etant donné que ϕ appartient à $\mathcal{C}_{per}^\infty(\overline{Y})$ et que la mesure de ηB tend vers zéro, on en déduit la convergence forte de ϕ_η vers ϕ dans $H_{per}^1(Y)$.

Etape 2. Soit ψ appartenant à $H_{per}^1(Y)$. On rappelle que l'espace $\mathcal{C}_{per}^\infty(\overline{Y})$ est dense dans $H_{per}^1(Y)$. D'où pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\varphi \in \mathcal{C}_{per}^\infty(\overline{Y})$ telle que

$$\|\psi - \varphi\|_{H^1(Y)} \leq \varepsilon. \tag{4.36}$$

On fixe la fonction φ satisfaisant (4.36). D'après l'étape 1, il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall \eta \in (0, \eta_1] \quad \|\varphi - \varphi_\eta\|_{H^1(Y)} \leq \varepsilon. \tag{4.37}$$

Comme conséquence de (4.36) et (4.37) on obtient

$$\forall \eta \in (0, \eta_1] \quad \|\psi - \varphi_\eta\|_{H^1(Y)} \leq 2\varepsilon.$$

Le lemme est prouvé. □

Lemme 4.6.2. *Supposons $p \in [1, +\infty)$. Pour tout $w \in L^p(\Omega)$*

$$w \mathbf{1}_{\Omega_{\varepsilon, \delta}^*} \longrightarrow w \quad \text{fortement dans } L^p(\Omega). \quad (4.38)$$

Démonstration. Etape 1. On montre (4.38) pour $w \in L^\infty(\Omega)$.

Soit w dans $L^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(w \mathbf{1}_{\Omega_{\varepsilon, \delta}^*} - w)(x)|^p dx &= \int_{D_{\varepsilon, \delta}} |w(x)|^p dx \\ &\leq |D_{\varepsilon, \delta}| \|w\|_{L^\infty(\Omega)}^p \leq C \delta^N \|w\|_{L^\infty(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Le passage à la limite donne (4.38) pour tout $w \in L^\infty(\Omega)$.

Etape 2. On montre (4.38) pour $w \in L^p(\Omega)$.

Soit w appartenant à $L^p(\Omega)$. Puisque $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est dense dans $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty)$, pour tout $\varepsilon_1 > 0$ il existe $W \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tel que

$$\|w - W\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon_1. \quad (4.39)$$

On fixe W satisfaisant (4.39). Alors

$$\|W \mathbf{1}_{\Omega_{\varepsilon, \delta}^*} - W\|_{L^p(\Omega)} \leq |D_{\varepsilon, \delta}| \|W\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \delta^N \|W\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

D'où, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\forall \delta \in (0, \delta_1], \quad \|W \mathbf{1}_{\Omega_{\varepsilon, \delta}^*} - W\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon_1.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|w \mathbf{1}_{\Omega_{\varepsilon, \delta}^*} - w\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|w \mathbf{1}_{\Omega_{\varepsilon, \delta}^*} - W \mathbf{1}_{\Omega_{\varepsilon, \delta}^*}\|_{L^p(\Omega)} + \|W \mathbf{1}_{\Omega_{\varepsilon, \delta}^*} - W\|_{L^p(\Omega)} + \|W - w\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|W \mathbf{1}_{\Omega_{\varepsilon, \delta}^*} - W\|_{L^p(\Omega)} + 2\|W - w\|_{L^p(\Omega)} \leq 3\varepsilon_1. \end{aligned}$$

La convergence forte (4.38) est prouvée. □

Lemme 4.6.3. Soit ψ dans $\mathbf{H} \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que le support de $\nabla_z \psi$ est borné. On pose

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon,\delta}(x) &= \psi\left(\frac{1}{\delta}\left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}\right) & \text{si } x \in \widehat{\Omega}_\varepsilon, \\ \psi_{\varepsilon,\delta}(x) &= \psi(\infty) & \text{si } x \in \overline{\Lambda}_\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.40)$$

La fonction $\psi_{\varepsilon,\delta}$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et

$$\psi_{\varepsilon,\delta} \longrightarrow \psi(\infty) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \quad (4.41)$$

Démonstration. Il existe $R > 0$ tel que le support de $\nabla_z \psi$ est inclus dans la boule $B(O; R)$. Pour δ assez petit $B(O; \delta R) \subset Y$. On effectue un changement de variables et on utilise le fait que $\psi - \psi(\infty)$ appartient à $H_0^1(B(O; R))$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon\xi + \varepsilon Y} |\psi_{\varepsilon,\delta}(x) - \psi(\infty)|^2 dx &= \int_{\varepsilon\xi + \varepsilon Y} \left| \psi\left(\frac{1}{\delta}\left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}\right) - \psi(\infty) \right|^2 dx \\ &= (\varepsilon\delta)^N \int_{B(O; R)} |\psi(z) - \psi(\infty)|^2 dz \\ &\leq C(\varepsilon\delta)^N R^2 \int_{B(O; R)} |\nabla_z \psi(z)|^2 dz. \end{aligned}$$

La constante ne dépend pas ε et δ . La sommation sur Ξ_ε conduit à

$$\int_{\Omega} |\psi_{\varepsilon,\delta}(x) - \psi(\infty)|^2 dx = \sum_{\xi \in \Xi_\varepsilon} \int_{\varepsilon\xi + \varepsilon Y} |\psi_{\varepsilon,\delta}(x) - \psi(\infty)|^2 dx \leq C\delta^N \|\nabla_z \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2.$$

D'où, on obtient la convergence forte (4.41). □

Démonstration du théorème 4.6.1. Pour commencer, on observe que le problème (4.33) a une solution unique U appartenant à $L^2(0, T; \mathbf{L})$. C'est une conséquence de la méthode de Faedo-Galerkin qui donne également l'égalité (4.34). Cela implique la convergence des suites complètes dans (4.19), (4.27) et (4.28). Il suffit donc d'obtenir le problème limite (4.33) pour une sous suite, ce que l'on fait ci-dessous.

Dans cette démonstration, l'objet des trois premières étapes est d'obtenir la formulation variationnelle (4.51) du problème de limite. Puis, dans une dernière étape, on montre que $U(\cdot, \cdot, \infty) \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et $U \in H^1(0, T; L^2(\Omega; (H^1(B))'))$.

Etape 1. Soit (ϕ, w) appartenant à $\mathcal{C}^1([0, T]) \times \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\phi(T) = 0$. On choisit $\phi(t)w(x)$ comme fonction test dans (4.10). Une l'intégration par parties conduit à

$$\begin{aligned} & - \int_{(0, T) \times \Omega_{\varepsilon, \delta}^*} u_{\varepsilon, \delta} \phi' w dt dx - \int_{(0, T) \times D_{\varepsilon, \delta}} a_{\varepsilon, \delta} u_{\varepsilon, \delta} \phi' w dt dx \\ & + \int_{(0, T) \times \Omega_{\varepsilon, \delta}^*} \phi \nabla u_{\varepsilon, \delta} \nabla w dt dx + \int_{(0, T) \times D_{\varepsilon, \delta}} b_{\varepsilon, \delta} \phi \nabla u_{\varepsilon, \delta} \nabla w dt dx \\ & = \int_{\Omega^T} f_{\varepsilon, \delta} \phi w dt dx + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon, \delta} u_{\varepsilon, \delta}^0 \phi(0) w dx. \end{aligned} \quad (4.42)$$

D'après les convergences (4.19) et (4.38) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{(0, T) \times \Omega_{\varepsilon, \delta}^*} u_{\varepsilon, \delta} \phi' w dt dx &= \int_{\Omega^T} u_{\varepsilon, \delta} \phi' w \mathbf{1}_{\Omega_{\varepsilon, \delta}^*} dt dx \longrightarrow \int_{\Omega^T} u \phi' w dt dx, \\ \int_{(0, T) \times \Omega_{\varepsilon, \delta}^*} \phi \nabla_x u_{\varepsilon, \delta} \nabla_x w dt dx &= \int_{\Omega^T} \phi \nabla_x u_{\varepsilon, \delta} \nabla_x w \mathbf{1}_{\Omega_{\varepsilon, \delta}^*} dt dx \longrightarrow \int_{\Omega^T} \phi \nabla_x u \nabla w dt dx. \end{aligned}$$

Maintenant, on applique l'opérateur d'éclatement sur $(0, T) \times D_{\varepsilon, \delta}$ et on utilise le lemme 4.3.3 et les convergences (4.27). Ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \int_{(0, T) \times D_{\varepsilon, \delta}} a_{\varepsilon, \delta} u_{\varepsilon, \delta} \phi' w dt dx &= \int_{(0, T) \times \Omega \times B} \delta^N a_{\varepsilon, \delta} \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(u_{\varepsilon, \delta}) \phi' \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(w) dt dx dz \\ &\longrightarrow \int_{(0, T) \times \Omega \times B} a_0 U \phi' w dt dx dz, \\ \int_{(0, T) \times D_{\varepsilon, \delta}} b_{\varepsilon, \delta} \phi \nabla u_{\varepsilon, \delta} \nabla w dt dx &= \int_{\Omega^T \times B} \varepsilon \delta \frac{\delta^{N-2}}{\varepsilon^2} b_{\varepsilon, \delta} \phi \nabla_z \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(u_{\varepsilon, \delta}) \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(\nabla w) dt dx dz \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Les convergences (4.6), (4.14), (4.13) et (4.38) donnent

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon, \delta} u_{\varepsilon, \delta}^0 \phi(0) w dx &= \int_{\Omega} u_{\varepsilon, \delta}^0 \phi(0) w \mathbf{1}_{\Omega^* \varepsilon, \delta} dx + \int_{\Omega \times B} \delta^N a_{\varepsilon, \delta} \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(u_{\varepsilon, \delta}^0) \phi(0) \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(w) dx dz \\ &\longrightarrow \int_{\Omega} u^0 \phi(0) w dx + \int_{\Omega \times B} a_0 U^0 \phi(0) w dx dz, \\ \int_{\Omega^T} f_{\varepsilon, \delta} \phi w dt dx &= \int_{\Omega^T} f_{\varepsilon, \delta} \phi w \mathbf{1}_{\Omega^* \varepsilon, \delta} dt dx + \int_{\Omega^T \times B} \delta^N a_{\varepsilon, \delta} \left(\frac{1}{a_{\varepsilon, \delta}} \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(f_{\varepsilon, \delta}) \right) \phi \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(w) dt dx dz \\ &\longrightarrow \int_{\Omega^T} f \phi w dt dx + \int_{\Omega^T \times B} a_0 F \phi w dt dx dz. \end{aligned}$$

Les convergences ci-dessus se résument en

$$\begin{aligned} & - a_0 \int_{\Omega^T \times B} U(t, x, z) \phi'(t) w(x) dt dx dz \\ & - \int_{\Omega^T} u(t, x) \phi'(t) w(x) dt dx + \int_{\Omega^T} \phi(t) \nabla_x u(t, x) \nabla w(x) dt dx \\ & = \int_{\Omega^T} f(t, x) \phi(t) w(x) dt dx + a_0 \int_{\Omega^T \times B} F(t, x, z) \phi(t) w(x) dt dx dz \\ & + \phi(0) \int_{\Omega} \left(u^0(x) + a_0 \int_B U^0(x, z) dz \right) w(x) dx. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Etape 2. Soit (ϕ, w) appartenant à $C^1([0, T]) \times \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\phi(T) = 0$ et soit $\psi \in \mathbf{H} \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que le support de $\nabla_z \psi$ est borné. Dans (4.10) on prend comme fonction test $\phi(t) w(x) \psi_{\varepsilon, \delta}(x)$, où $\psi_{\varepsilon, \delta}$ est donné par (4.40).

Si δ est assez petit la fonction $\psi_{\varepsilon, \delta}$ est constante (et est égale à $\psi(\infty)$) sur la frontière des cellules $\varepsilon \xi + \varepsilon Y$ ($\xi \in \Xi_\varepsilon$). En conséquence, la fonction $w \psi_{\varepsilon, \delta}$ est une fonction test admissible appartenant à $H_0^1(\Omega)$. D'où

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega^T} \rho_{\varepsilon, \delta} u_{\varepsilon, \delta} \phi' w \psi_{\varepsilon, \delta} dt dx + \int_{\Omega^T} k_{\varepsilon, \delta} \phi \nabla u_{\varepsilon, \delta} \nabla (w \psi_{\varepsilon, \delta}) dt dx \\ & = \int_{\Omega^T} f_{\varepsilon, \delta}(t, x) \phi(t) w(x) \psi_{\varepsilon, \delta}(x) dt dx + \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon, \delta} u_{\varepsilon, \delta}^0(x) \phi(0) w(x) \psi_{\varepsilon, \delta}(x) dx. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Puisque $\nabla_z \psi$ a un support compact dans \mathbb{R}^N , d'après l'égalité (4.3) et le lemme 4.3.3 on obtient

$$\varepsilon \delta \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(w \nabla \psi_{\varepsilon, \delta}) = \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(w) \nabla_z \psi \longrightarrow w \nabla_z \psi \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega \times \mathbb{R}^N). \quad (4.45)$$

Les convergences (4.19)₂, (4.27)₁, (4.45) et (4.41) permettent d'écrire

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^T} \rho_{\varepsilon, \delta} u_{\varepsilon, \delta} \phi' w \psi_{\varepsilon, \delta} dt dx \\ & = \int_{\Omega^T} u_{\varepsilon, \delta} \phi' w \psi_{\varepsilon, \delta} \mathbf{1}_{\Omega_{\varepsilon, \delta}^*} dt dx + \int_{\Omega^T \times B} \delta^N a_{\varepsilon, \delta} \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(u_{\varepsilon, \delta}) \phi' \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(w) \psi dt dx dz \\ & \longrightarrow \int_{\Omega^T} u \phi' w \psi(\infty) dt dx + a_0 \int_{\Omega^T \times B} U \phi' w \psi dt dx dz. \end{aligned} \quad (4.46)$$

On a également

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^T} k_{\varepsilon, \delta} \phi \nabla_x u_{\varepsilon, \delta} \nabla (w \psi_{\varepsilon, \delta}) dt dx \\ & = \int_{\Omega^T} k_{\varepsilon, \delta} \phi \nabla_x u_{\varepsilon, \delta} \nabla w \psi_{\varepsilon, \delta} dt dx + \int_{\Omega^T} k_{\varepsilon, \delta} \phi \nabla_x u_{\varepsilon, \delta} w \nabla \psi_{\varepsilon, \delta} dt dx. \end{aligned}$$

Des convergences (4.27)₁, (4.28)₂ et (4.41) on déduit que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^T} k_{\varepsilon, \delta} \phi \nabla_x u_{\varepsilon, \delta} \nabla w \psi_{\varepsilon, \delta} dt dx = \int_{\Omega^T} \phi \nabla_x u_{\varepsilon, \delta} \nabla w \psi_{\varepsilon, \delta} \mathbf{1}_{\Omega_{\varepsilon, \delta}^*} dt dx \\ & \quad + \int_{\Omega^T \times B} b_{\varepsilon, \delta} \phi \frac{\delta^{N-2}}{\varepsilon^2} \nabla_z \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(u_{\varepsilon, \delta}) \left(\varepsilon \delta \mathcal{T}_{\varepsilon, \delta}(\nabla w) \right) \psi dt dx dz \\ & \longrightarrow \int_{\Omega^T} \phi \nabla_x u \nabla w \psi(\infty) dt dx + 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Toujours en utilisant (4.27)₁, (4.28)₂ et (4.45) on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^T} k_{\varepsilon,\delta} \phi u_{\varepsilon,\delta} w \nabla \psi_{\varepsilon,\delta} dt dx \\
 &= \int_{\Omega^T \times \mathbb{R}^N} \phi \mathcal{T}_{\varepsilon,\delta}(k_{\varepsilon,\delta}) \frac{\delta^{N-2}}{\varepsilon^2} \nabla_z \mathcal{T}_{\varepsilon,\delta}(u_{\varepsilon,\delta}) \mathcal{T}_{\varepsilon,\delta}(w) \nabla_z \psi dt dx dz \\
 &\longrightarrow \gamma_0 \left(\int_{\Omega^T \times (\mathbb{R}^N \setminus \bar{B})} \phi \nabla_z V w \nabla_z \psi dt dx dz + b_0 \int_{\Omega^T \times B} \phi \nabla_z U w \nabla_z \psi dt dx dz \right).
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

De la même façon, de (4.13)₂ et (4.14)₂ on déduit que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^T} f_{\varepsilon,\delta} \phi w \psi_{\varepsilon,\delta} dt dx \longrightarrow \int_{\Omega^T} f \phi w \psi(\infty) dt dx + a_0 \int_{\Omega^T \times B} F \phi w \psi dt dx dz, \\
 & \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon,\delta} u_{\varepsilon,\delta}^0 \phi(0) w \psi_{\varepsilon,\delta} dx \longrightarrow \int_{\Omega} u^0 \phi(0) w \psi(\infty) dx + \int_{\Omega \times B} a_0 U^0 \phi(0) w \psi dx dz.
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Finalement, des convergences (4.46), (4.47), (4.48) et (4.49) on a

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega^T} u \phi' w \psi(\infty) dt dx - a_0 \int_{\Omega^T \times B} U \phi' w \psi dt dx dz + \int_{\Omega^T} \phi \nabla u \nabla w \psi(\infty) dt dx \\
 & + \gamma_0 \int_{\Omega^T \times \mathbb{R}^N} k_0 \phi \nabla_z U w \nabla_z \psi dt dx dz \\
 &= \int_{\Omega^T} f \phi w \psi(\infty) dt dx + a_0 \int_{\Omega^T \times B} F \phi w \psi dt dx dz \\
 & + \int_{\Omega} u^0 \phi(0) w \psi(\infty) dx + a_0 \int_{\Omega \times B} U^0 \phi(0) w \psi dx dz.
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Etape 3. L'espace des fonctions qui appartiennent à $\mathbf{H} \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et dont le support du gradient est borné est dense dans \mathbf{H} (voir le Lemme 5.2.3 Annexe B). Ainsi, l'égalité (4.50) est satisfaite pour tout ψ dans \mathbf{H} . La densité du produit tensoriel $C^1([0, T]) \otimes \mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathbf{H}$ dans $H^1(0, T; \mathbf{L})$ implique que

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega^T} U(t, \cdot, \infty) \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \cdot, \infty) dt dx - a_0 \int_{\Omega^T \times B} U \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt dx dz \\
 & + \int_{\Omega^T} \nabla_x U(t, \cdot, \infty) \nabla_x \Phi(t, \cdot, \infty) dt dx + \gamma_0 \int_{\Omega^T \times \mathbb{R}^N} k_0 \nabla_z U \nabla_z \Phi dt dx dz \\
 &= \int_{\Omega^T} f \Phi(t, \cdot, \infty) dt dx + a_0 \int_{\Omega^T \times B} F \Phi dt dx dz \\
 & + \int_{\Omega} u^0 \Phi(0, \cdot, \infty) dx + a_0 \int_{\Omega \times B} U^0 \Phi(0) dx dz
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

pour tout $\Phi \in H^1(0, T; \mathbf{L})$ tel que $\Phi(T, \cdot, \cdot) = 0$. D'où (4.33).

Etape 4. Soit Θ appartenant à \mathbf{L} et satisfaisant

$$\Theta(\infty) = 1 \quad \text{et} \quad \Theta(z) = 0 \quad \text{p.p } z \in B.$$

Pour tout $\Psi \in H_0^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ on choisit $\Phi = \Psi\Theta$ comme fonction test dans (4.51). Ce qui donne

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega^T} U(t, \cdot, \infty) \frac{\partial \Psi}{\partial t} dt dx + \int_{\Omega^T} \nabla_x U(\cdot, \infty) \nabla_x \Psi dt dx \\ & + \gamma_0 \int_{\Omega^T \times \mathbb{R}^N} k_0 \nabla_z U \Psi \nabla_z \Theta dt dx dz = \int_{\Omega^T} f \Psi dt dx. \end{aligned} \quad (4.52)$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega^T} U(t, \cdot, \infty) \frac{\partial \Psi}{\partial t} dt dx \right| & \leq \|\nabla_x U(\cdot, \infty)\|_{L^2(\Omega^T)} \|\nabla_x \Psi\|_{L^2(\Omega^T)} \\ & + C \|\nabla_z U\|_{L^2(\Omega^T \times \mathbb{R}^N)} \|\Psi\|_{L^2(\Omega^T)} \|\nabla_z \Theta\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|f\|_{L^2(\Omega^T)} \|\Psi\|_{L^2(\Omega^T)}. \end{aligned}$$

Puisque U appartient à $L^2(0, T; \mathbf{L})$, on obtient

$$\left| \int_{\Omega^T} U(t, \cdot, \infty) \frac{\partial \Psi}{\partial t} dt dx \right| \leq C \|\Psi\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}.$$

La constante dépend de $\|U\|_{L^2(0, T; \mathbf{L})}$, $\|\nabla_z \Theta\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ et $\|f\|_{L^2(\Omega^T)}$. En conséquence de l'inégalité ci-dessus, on obtient $U(\cdot, \cdot, \infty) \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Toute fonction Φ appartenant à $H_0^1(0, T; L^2(\Omega; H^1(B)))$ se prolonge en une fonction $\bar{\Phi}$ (Voir le lemme 5.2.5 Annexe B) appartenant à $H_0^1(0, T; L^2(\Omega; H^1(\mathbb{R}^N)))$ satisfaisant

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(t, x, z) & = \Phi(t, x, z) \quad \text{p.p. } (t, x, z) \in \Omega^T \times B, \\ \|\bar{\Phi}\|_{H_0^1(0, T; L^2(\Omega; H^1(\mathbb{R}^N)))} & \leq C \|\Phi\|_{H_0^1(0, T; L^2(\Omega; H^1(B)))}. \end{aligned}$$

Comme $\bar{\Phi}(t, x, \cdot) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ on a $\bar{\Phi}(t, x, \infty) = 0$ pour presque tout $(t, x) \in \Omega^T$.

On choisit $\bar{\Phi}$ comme fonction test dans (4.51). Cela conduit à

$$-a_0 \int_{\Omega^T \times B} U \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} dt dx dz + \gamma_0 \int_{\Omega^T \times \mathbb{R}^N} k_0 \nabla_z U \nabla_z \bar{\Phi} dt dx dz = a_0 \int_{\Omega^T \times B} F \bar{\Phi} dt dx dz.$$

D'où

$$\begin{aligned} a_0 \left| \int_{\Omega^T \times B} U \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} dt dx dz \right| & \leq C \|\nabla_z U\|_{L^2(\Omega^T \times B)} \|\nabla_z \bar{\Phi}\|_{L^2(\Omega^T \times \mathbb{R}^N)} \\ & + a_0 \|F\|_{L^2(\Omega^T \times B)} \|\bar{\Phi}\|_{L^2(\Omega^T \times \mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Encore une fois, en utilisant le fait que U appartient à $L^2(0, T; \mathbf{L})$, on a

$$\left| \int_{\Omega^T \times B} U \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} dt dx dz \right| \leq C \|\bar{\Phi}\|_{L^2(\Omega^T; H^1(B))}.$$

La constante dépend de $\|U\|_{L^2(0, T; \mathbf{L})}$ et de $\|F\|_{L^2(\Omega^T \times B)}$. Comme conséquence de l'inégalité ci-dessus, on obtient $U \in H^1(0, T; L^2(\Omega; (H^1(B))'))$. □

4.7 Le problème limite homogénéisé

A partir de maintenant, on étend les fonctions f et F par zéro sur $[T, +\infty[$ et on appelle encore U la solution du problème (4.33) sur $[0, +\infty[$. Cette nouvelle fonction a pour restriction à $[0, T]$ la solution de (4.33).

Pour tout $\phi \in L^2(0, +\infty)$ et pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, la transformée de Laplace $\hat{\phi}$ de ϕ est définie par (voir par ex. [34], [38] ou [45])

$$\hat{\phi}(p) = \int_0^{+\infty} \phi(t) e^{-pt} dt.$$

Après transformation le problème d'évolution (4.33) devient

$$\begin{aligned} & p \int_{\Omega} \hat{U}(p, x, \infty) \Phi(x, \infty) dx + a_0 p \int_{\Omega \times B} \hat{U}(p, x, z) \Phi(x, z) dx dz \\ & + \int_{\Omega} \nabla_x \hat{U}(p, x, \infty) \nabla_x \Phi(x, \infty) dx + \gamma_0 \int_{\Omega \times \mathbb{R}^N} k_0(z) \nabla_z \hat{U}(p, x, z) \nabla_z \Phi(x, z) dx dz \\ & = \int_{\Omega} \hat{f}(p, x) \Phi(x, \infty) dx + a_0 \int_{\Omega \times B} \hat{F}(p, x, z) \Phi(x, z) dx dz \\ & + \int_{\Omega} u^0(x) \Phi(x, \infty) dx + a_0 \int_{\Omega \times B} U^0(x, z) \Phi(x, z) dx dz, \quad \forall p > 0, \quad \forall \Phi \in \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Pour tout $p > 0$, le théorème de Lax-Milgram donne l'existence et l'unicité de $\hat{U}(p) \in \mathbf{L}$. Les estimations suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned} & p \|\hat{U}(p, \cdot, \infty)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_x \hat{U}(p, \cdot, \infty)\|_{L^2(\Omega)}^2 + p \|\hat{U}(p)\|_{L^2(\Omega \times B)}^2 + \|\nabla_z \hat{U}(p)\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R}^N)}^2 \\ & \leq \frac{C}{p} \left(\|\hat{f}(p)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\hat{F}(p)\|_{L^2(\Omega \times B)}^2 + \|u^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U^0\|_{L^2(\Omega \times B)}^2 \right), \quad \forall p > 0. \end{aligned}$$

La constante ne dépend pas de p . On rappelle que

$$\forall p > 0, \quad \|\hat{f}(p)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{p} \|f\|_{L^2(\Omega^T)}^2, \quad \|\hat{F}(p)\|_{L^2(\Omega \times B)}^2 \leq \frac{1}{p} \|F\|_{L^2(\Omega^T \times B)}^2.$$

On considère maintenant les solutions $\hat{\theta}_0$ et $\hat{\theta}_1$ des problèmes cellulaires suivants :

$$\begin{aligned} & \hat{\theta}_0(p) \in L^2(\Omega; \dot{H}(\mathbb{R}^N)), \\ & a_0 p \int_B \hat{\theta}_0(p, x) \Phi dz + \gamma_0 \int_{\mathbb{R}^N} k_0 \nabla_z \hat{\theta}_0(p, x) \nabla_z \Phi dz \\ & = a_0 \int_B \hat{F}(p, x) \Phi dz + a_0 \int_B U^0(x) \Phi dz, \\ & \text{p.p. } x \in \Omega, \quad \forall \Phi \in \dot{H}(\mathbb{R}^N), \quad \forall p > 0, \end{aligned} \quad (4.54)$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_1(p) &\in \mathbf{H}, \quad \widehat{\theta}_1(p, \infty) = 1, \\ a_0 p \int_B \widehat{\theta}_1(p) \Phi dz + \gamma_0 \int_{\mathbb{R}^N} k_0 \nabla_z \widehat{\theta}_1(p) \nabla_z \Phi dz &= 0, \\ \forall \Phi &\in \dot{H}(\mathbb{R}^N), \quad \forall p > 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Ici également, le théorème de Lax-Milgram donne l'existence et l'unicité de $\widehat{\theta}_0, \widehat{\theta}_1$. De plus on a

$$p \|\widehat{\theta}_0(p)\|_{L^2(\Omega \times B)}^2 + \|\nabla_z \widehat{\theta}_0(p)\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R}^N)}^2 \leq \frac{C}{p} (\|\widehat{F}(p)\|_{L^2(\Omega \times B)}^2 + \|U^0\|_{L^2(\Omega \times B)}^2) \quad \forall p > 0.$$

Afin d'estimer $\widehat{\theta}_1$ on considère la fonction $\vartheta \in \mathbf{H} \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ définie par

$$\vartheta(\infty) = 1, \quad \vartheta = 0 \quad \text{dans } B, \quad \nabla_z \vartheta \text{ a un support compact.} \quad (4.56)$$

La fonction $\widehat{\theta}_2 = \widehat{\theta}_1 - \vartheta$ est la solution de

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_2(p) &\in \dot{H}(\mathbb{R}^N), \\ a_0 p \int_B \widehat{\theta}_2(p) \Phi dz + \gamma_0 \int_{\mathbb{R}^N} k_0 \nabla_z \widehat{\theta}_2(p) \nabla_z \Phi dz \\ &= -\gamma_0 \int_{\mathbb{R}^N} k_0 \nabla_z \vartheta \nabla_z \Phi dz = \gamma_0 \int_{\mathbb{R}^N} k_0 \Delta_z \vartheta \Phi dz, \\ \forall \Phi &\in \dot{H}(\mathbb{R}^N), \quad \forall p > 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

On prend $\widehat{\theta}_2(p)$ comme fonction test dans (4.57), ce qui mène à

$$p \|\widehat{\theta}_2(p)\|_{L^2(B)}^2 + \|\nabla_z \widehat{\theta}_2(p)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \frac{C}{p} \|\Delta_z \vartheta\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2, \quad \forall p > 0.$$

On exprime $\widehat{U}(p)$ en fonction de $\widehat{\theta}_0(p), \widehat{\theta}_2(p), \vartheta$ et $\widehat{u}(p)$. Pour cela, on remarque que $\widehat{U}(p, x, \cdot) \in \mathbf{H}$ p.p. $x \in \Omega$ et que la transformée de Laplace $\widehat{u}(p)$ de u est en fait $\widehat{U}(p, \cdot, \infty)$.

D'après (4.53) on a

$$\begin{aligned} a_0 p \int_B \widehat{U}(p, x, z) \Phi(z) dz + \gamma_0 \int_{\mathbb{R}^N} k_0 \nabla_z \widehat{U}(p, x, z) \nabla_z \Phi(z) dz \\ = a_0 \int_B (\widehat{F}(p, x, z) + U^0(x, z)) \Phi(z) dz, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad \forall p > 0, \quad \forall \Phi \in \dot{H}(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (4.58)$$

On vérifie facilement que $\widehat{\theta}_0(p) + \widehat{u}(p)\widehat{\theta}_1(p)$ satisfait (4.58), d'où par unicité de la solution de ce problème on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{U}(p, x, z) &= \widehat{u}(p, x) \widehat{\theta}_1(p, z) + \widehat{\theta}_0(p, x, z) = \widehat{u}(p, x) \widehat{\theta}_2(p, z) + \widehat{\theta}_0(p, x, z) + \widehat{u}(p, x) \vartheta(z) \\ &\text{p.p. } (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^N, \quad \forall p > 0. \end{aligned}$$

Soit ψ dans $H_0^1(\Omega)$, on choisit ψ comme fonction test dans (4.53). Ce qui donne

$$\begin{aligned}
 & p \int_{\Omega} \hat{u}(p) \psi \, dx + a_0 p \int_{\Omega} \left(\int_B \hat{\theta}_2(p, z) \, dz \right) \hat{u}(p) \psi \, dx \\
 & + a_0 p \int_{\Omega} \left(\int_B \hat{\theta}_0(p, \cdot, z) \, dz \right) \psi \, dx + \int_{\Omega} \nabla \hat{u}(p) \nabla \psi \, dx \\
 & = \int_{\Omega} (\hat{f}(p) + u^0) \psi \, dx + a_0 \int_{\Omega} \left(\int_B \hat{F}(p, \cdot, z) \, dz \right) \psi \, dx \\
 & + a_0 \int_{\Omega} \left(\int_B U^0(\cdot, z) \, dz \right) \psi \, dx.
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Appliquant la transformée de Laplace inverse (voir [1], [34] et [38]) dans les problèmes (4.54), (4.55) et (4.59) on obtient

$$\begin{aligned}
 & \theta_0 \in H^1(0, T; L^2(\Omega; (H^1(B))')), \quad \theta_0 \in L^2(\Omega^T; \dot{H}(\mathbb{R}^N)), \\
 & a_0 \left\langle \frac{d\theta_0}{dt}(t, x), \Phi \right\rangle_{(H^1(B))', H^1(B)} + \gamma_0 \int_{\mathbb{R}^N} k_0 \nabla_z \theta_0(t, x) \nabla_z \Phi \, dz \\
 & = a_0 \int_B F(t, x) \Phi \, dz, \quad \text{p.p. } (t, x) \in (0, +\infty) \times \Omega, \\
 & \theta_0(0) = U^0, \quad \forall \Phi \in \dot{H}(\mathbb{R}^N),
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

et le problème d'évolution vérifié par θ_2

$$\begin{aligned}
 & \theta_2 \in H^1(0, T; (H^1(B))'), \quad \theta_2 \in L^2(0, T; \dot{H}(\mathbb{R}^N)), \\
 & a_0 \left\langle \frac{d\theta_2}{dt}(t), \Phi \right\rangle_{(H^1(B))', H^1(B)} + \gamma_0 \int_{\mathbb{R}^N} k_0 \nabla_z \theta_2(t) \nabla_z \Phi \, dz = 0, \\
 & \theta_2(0) = \frac{\gamma_0 k_0}{a_0} \Delta_z \vartheta, \quad \text{for a.e. } t \in (0, +\infty), \quad \forall \Phi \in \dot{H}(\mathbb{R}^N).
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Ici à nouveau, la méthode de Faedo-Galerkin donne l'existence et l'unicité des solutions des deux équations d'évolution ci-dessus. En procédant comme dans le théorème 4.6.1 on montre que $\theta_0 \in H^1(0, T; L^2(\Omega; (H^1(B))'))$ et $\theta_2 \in H^1(0, T; (H^1(B))')$.

Lemme 4.7.1. *On pose*

$$\Theta_0 = \int_B \theta_0 \, dz, \quad \Theta_2 = \int_B \theta_2 \, dz.$$

On a

$$\Theta_0 \in H^1(0, T; L^2(\Omega)), \quad \Theta_2 \in H^1(0, T).$$

De plus, la fonction Θ_2 ne dépend pas du choix de la fonction ϑ .

Démonstration. Puisque $\theta_0 \in L^2(\Omega^T \times B)$, on obtient $\Theta_0 \in L^2(\Omega^T)$ (comme conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du théorème de Fubini). On choisit $1 - \vartheta$ comme fonction test dans (4.60) (observez que $1 - \vartheta \in \dot{H}(\mathbb{R}^N)$). Ce qui donne

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d}{dt} \left(\langle \theta_0(t, x), 1 \rangle_{(H^1(B))', H^1(B)} \right) = a_0 \left\langle \frac{d\theta_0}{dt}(t, x), 1 \right\rangle_{(H^1(B))', H^1(B)} \\ & = a_0 \left\langle \frac{d\theta_0}{dt}(t, x), 1 - \vartheta \right\rangle_{(H^1(B))', H^1(B)} \\ & = \gamma_0 \int_{\mathbb{R}^N} k_0 \nabla_z \theta_0(t, x) \nabla_z \vartheta \, dz + a_0 \int_B F(t, x) \, dz. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Ensuite, sachant que

- $\langle \theta_0(t, x), 1 \rangle_{(H^1(B))', H^1(B)} = \int_B \theta_0(t, x) \, dz$ p.p. $x \in \Omega$,
- $\nabla_z \theta_0 \in [L^2(\Omega^T \times \mathbb{R}^N)]^N$,
- $\nabla_z \vartheta \in [\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)]^N$ (avec support compact)
- $F \in L^2(\Omega^T \times B)$,

et utilisant les égalités ci-dessus (4.62), on obtient $\frac{d\Theta_0}{dt} \in L^2(\Omega^T)$.

D'où $\Theta_0 \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$. En procédant de la même façon on trouve que $\Theta_2 \in H^1(0, T)$.

La transformée de Laplace $\widehat{\Theta}_2$ de Θ_2 est telle que

$$\widehat{\Theta}_2 = \int_B \widehat{\theta}_2 \, dz = \int_B (\widehat{\theta}_1 - \vartheta) \, dz = \int_B \widehat{\theta}_1 \, dz.$$

D'où Θ_2 ne dépend pas du choix de ϑ . □

Finalement, le problème (4.59) devient

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{du}{dt}(t), \psi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + a_0 \langle \Theta_2 * \frac{du}{dt}(t), \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla \psi \, dx \\ & = -a_0 \left\langle \frac{d\Theta_0}{dt}(t), \psi \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} f(t) \psi \, dx + a_0 \int_{\Omega} \left(\int_B F(t) \, dz \right) \psi \, dx \\ & u(0) = u^0, \quad \Theta_0(0) = \int_B U^0 \, dz, \quad \text{p.p. } t \in (0, +\infty), \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{4.63}$$

Ce problème s'écrit également de la façon suivante :

Théorème 4.7.1. *Le champ limite u est la solution du problème suivant :*

$$\begin{aligned}
 u &\in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\
 \frac{d}{dt} \left(u + a_0 \Theta_2 * u \right) - \Delta u &= -a_0 \frac{d\Theta_0}{dt} + G && \text{dans } \Omega^T, \\
 u &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\
 u(0) &= u^0, && \text{dans } \Omega \times \{0\},
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

où

- $\Theta_2 = \int_B \theta_2 dz$ appartient à $H^1(0, T)$, la fonction θ_2 étant la solution de (4.61),
- $G(t) = f(t) + a_0 \int_B F(t, \cdot, z) dz \in L^2(\Omega^T)$,
- $\Theta_0 = \int_B \theta_0 dz$ appartient à $H^1(0, T; L^2(\Omega))$, la fonction θ_0 étant la solution de (4.60).

Chapitre 5

Résultats complémentaires

5.1 Annexe A

Théorème 5.1.1. *Le problème variationnel (2.6) admet une solution unique.*

Démonstration. On utilise le théorème de Lax-Milgram voir [19].

On pose

$$a(u, v) = \int_{\Omega_{\delta, \varepsilon, r}} \sum_{i, j=1}^3 \sigma_{ij, \delta} \gamma_{ij}(v) dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_{\Omega_{\delta, \varepsilon, r}} \sum_{i=1}^3 f_{i, \delta} v_i dx.$$

Il faut vérifier que

- $a(u, v)$ est une forme bilinéaire continue sur V ,
- $L(v)$ est une forme linéaire continue sur V ,
- la forme bilinéaire $a(u, v)$ est coercive sur V (c'est le seul point à vérifier, les deux précédents étant immédiats)

On doit montrer que

$$\exists c > 0, \quad \forall v \in V \quad a(v, v) \geq c \|v\|_V.$$

On a

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega_{\delta, \varepsilon, r}} \sum_{i, j=1}^3 \sigma_{ij, \delta} \gamma_{ij}(v) dx \\ &= \int_{\Omega_{\delta, \varepsilon, r}} \left[\lambda \left(\sum_{k=1}^3 \gamma_{kk}(v) \right)^2 + 2\mu \sum_{i, j=1}^3 (\gamma_{ij}(v))^2 \right] dx \\ &\geq 2 \inf(\mu^{be}, \mu^{pl}) \|v\|_V^2. \end{aligned}$$

□

Lemme 5.1.1. *Pour toute $u \in H^1(\Omega_{\delta,\varepsilon,r}; \mathbb{R}^3)$ on a*

$$\mathcal{E}(u_\delta) = a(u_\delta, u_\delta) \leq C\delta^{3/2} \|u_\delta\|_V.$$

La constante ne dépend pas de δ, ε et r .

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u_\delta) &= \int_{\Omega_{\delta,\varepsilon,r}} \sum_{i=1}^3 f_{i,\delta} u_{i,\delta} dx \\ &= \sum_{d \in \{a,b\}} \int_{\Omega_\delta^d} \sum_{i=1}^3 f_{i,\delta} u_{i,\delta} dx + \int_{B_{\delta,\varepsilon,r}} \sum_{i=1}^3 f_{i,\delta} u_{i,\delta} dx \\ &= \sum_{d \in \{a,b\}} \left[\int_{\Omega_\delta^d} \sum_{\alpha=1}^2 f_{\alpha,\delta} u_{\alpha,\delta} dx + \int_{\Omega_\delta^d} f_{3,\delta} u_{3,\delta} dx \right] \\ &\quad + \int_{B_{\delta,\varepsilon,r}} \sum_{\alpha=1}^2 f_{\alpha,\delta} u_{\alpha,\delta} dx + \int_{B_{\delta,\varepsilon,r}} f_{3,\delta} u_{3,\delta} dx \\ &\leq C \left(\sum_{\alpha=1}^2 \|f_{\alpha,\delta}\|_{L^2(\Omega_\delta^d)} \|u_{\alpha,\delta}\|_{L^2(\Omega_\delta^d)} + \|f_{3,\delta}\|_{L^2(\Omega_\delta^d)} \|u_{3,\delta}\|_{L^2(\Omega_\delta^d)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha=1}^2 \|f_{\alpha,\delta}\|_{L^2(B_{\delta,\varepsilon,r})} \|u_{\alpha,\delta}\|_{L^2(B_{\delta,\varepsilon,r})} + \|f_{3,\delta}\|_{L^2(B_{\delta,\varepsilon,r})} \|u_{3,\delta}\|_{L^2(B_{\delta,\varepsilon,r})} \right), \end{aligned}$$

Des estimations (2.63) et (2.64) on obtient

$$\mathcal{E}(u_\delta) \leq C \left(\sum_{\alpha=1}^2 \|f_{\alpha,\delta}\|_{L^2(\Omega_\delta^d)} + \frac{1}{\delta} \|f_{3,\delta}\|_{L^2(\Omega_\delta^d)} + \frac{r}{\varepsilon} \sum_{\alpha=1}^2 \|f_{\alpha,\delta}\|_{L^2(B_{\delta,\varepsilon,r})} + \frac{r}{\varepsilon\delta} \|f_{3,\delta}\|_{L^2(B_{\delta,\varepsilon,r})} \right) \|u_\delta\|_V.$$

Des expressions des forces appliquées on on déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u_\delta) &\leq C\delta^{3/2} \left(\sum_{\alpha=1}^2 \|f_\alpha^d\|_{L^2(\Omega^d)} + \|f_3^d\|_{L^2(\Omega^d)} + \sum_{\alpha=1}^2 \|f_\alpha^{\text{be}}\|_{L^2(C(\bar{\omega}, L^2(B)))} + \|f_3^{\text{be}}\|_{C(\bar{\omega}, L^2(B))} \right) \|u_\delta\|_V \\ &\leq C\delta^{3/2} \|u_\delta\|_V. \end{aligned}$$

Puisque,

$$\begin{aligned} \|f_{\alpha,\delta}\|_{L^2(\Omega_\delta^d)}^2 &= \int_{\Omega_\delta^d} |f_{\alpha,\delta}(x_1, x_2, x_3)|^2 dx' dx_3 \\ &= \int_{\Omega_\delta^d} |\delta f_\alpha^d(x_1, x_2, \frac{x_3}{\delta})|^2 dx' dx_3 \\ &= \delta \int_{\Omega^d} |\delta f_\alpha^d(x_1, x_2, X_3)|^2 dx' dX_3 \\ &= \delta^3 \|f_\alpha^d\|_{L^2(\Omega^d)}^2. \end{aligned}$$

Et de même on a

$$\|f_{3,\delta}\|_{L^2(\Omega_\delta^d)}^2 = \delta^5 \|f_3^d\|_{L^2(\Omega^d)}^2.$$

Pour les forces appliquées au niveau de l'ensemble des poutres on a

$$\begin{aligned} \|f_{\alpha,\delta}\|_{L^2(B_{\delta,\varepsilon,r})}^2 &= \int_{B_{\delta,\varepsilon,r}} |f_{\alpha,\delta}(x_1, x_2, x_3)|^2 dx' dx_3 \\ &= \int_{B_{\delta,\varepsilon,r}} \left| \frac{\varepsilon^2 \delta}{r^2} f_\alpha^{\text{be}}\left(\varepsilon\xi, \frac{x_1 - \varepsilon\xi_1}{r}, \frac{x_2 - \varepsilon\xi_2}{r}, \frac{x_3}{\delta}\right) \right|^2 dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \sum_{\xi \in \Xi_\varepsilon} \int_{\mathbf{P}_\delta^c} \left| \frac{\varepsilon^2 \delta}{r^2} f_\alpha^{\text{be}}\left(\varepsilon\xi, \frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{\delta}\right) \right|^2 dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \delta r^2 \sum_{\xi \in \Xi_\varepsilon} \int_B \left| \frac{\varepsilon^2 \delta}{r^2} f_\alpha^{\text{be}}(\varepsilon\xi, X_1, X_2, X_3) \right|^2 dX_1 dX_2 dX_3. \end{aligned}$$

On prend le sup en x' , en remarquant que $\sum_{\xi \in \Xi_\varepsilon} 1 = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$ on obtient

$$\|f_{\alpha,\delta}\|_{L^2(B_{\delta,\varepsilon,r})}^2 \leq \frac{\varepsilon^2 \delta^3}{r^2} \sup_{x' \in \omega} \|f_\alpha^{\text{be}}(x', \cdot)\|_{L^2(B)}^2 \leq \frac{\varepsilon^2 \delta^3}{r^2} \|f_\alpha^{\text{be}}\|_{L^\infty(\omega; L^2(B))}^2.$$

On suit les mêmes étapes pour trouver

$$\|f_{3,\delta}\|_{L^2(B_{\delta,\varepsilon,r})}^2 \leq \frac{\varepsilon^2 \delta^5}{r^2} \|f_3^{\text{be}}\|_{L^\infty(\omega, L^2(B))}^2. \quad \square$$

Lemme 5.1.2. *Pout tout $\phi \in H^1(\omega)$ on a*

$$\|\phi - \mathcal{M}_\varepsilon(\phi)\|_{L^2(\omega)} \leq C\varepsilon \|\nabla\phi\|_{[L^2(\omega)]^2}. \quad (5.1)$$

La constante ne dépend pas de ε

Démonstration. On rappelle l'inégalité de Poincaré-Wirtinger pour les fonctions de $H^1(Y)$

$$\forall \phi \in H^1(Y), \quad \int_Y |\phi(y) - \mathcal{M}_Y(\phi)|^2 dy \leq C \int_Y |\nabla\phi(y)|^2 dy, \quad \mathcal{M}_Y(\phi) = \int_Y \phi(y) dy.$$

Soit $\phi \in H^1(\omega)$, un changement de variables donne

$$\int_{\varepsilon\xi + Y_\varepsilon} |\phi(x) - \mathcal{M}_\varepsilon(\phi)(\varepsilon\xi)|^2 dx \leq C\varepsilon^2 \int_{\varepsilon\xi + Y_\varepsilon} |\nabla\phi(x)|^2 dx.$$

Par sommation par rapport $\xi \in \Xi_\varepsilon$ on obtient

$$\int_\omega |\phi(x) - \mathcal{M}_\varepsilon(\phi)|^2 dx \leq C\varepsilon^2 \int_\omega |\nabla\phi(x)|^2 dx. \quad \square$$

Lemme 5.1.3. *Pour tout $\phi \in H^1(I_\delta)$, on a*

$$\begin{aligned} \|\phi - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)\|_{L^2(I_\delta)} &\leq C\delta \|\phi'\|_{L^2(I_\delta)}, \\ |\mathcal{M}_{I_\delta^a}(\phi) - \mathcal{M}_{I_\delta^b}(\phi)| &\leq C\delta^{1/2} \|\phi'\|_{L^2(I_\delta)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

La constante C ne dépend pas de δ .

Démonstration. On a

$$\|\phi - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)\|_{L^2(I_\delta)} = \|\phi - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)\|_{L^2(I_\delta^d)} + \|\phi - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)\|_{L^2(I_\delta/I_\delta^d)},$$

On applique le Lemme 5.1.2 pour $\phi \in H^1(I_\delta^d)$, on obtient

$$\|\phi - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)\|_{L^2(I_\delta)} \leq C\delta \|\phi'\|_{L^2(I_\delta^d)} + \|\phi - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)\|_{L^2(I_\delta/I_\delta^d)}. \quad (5.3)$$

Pour le deuxième terme de droite on a

$$\begin{aligned} \|\phi - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)\|_{L^2(I_\delta/I_\delta^d)} &\leq \|\phi - \mathcal{M}_{I_\delta}(\phi)\|_{L^2(I_\delta/I_\delta^d)} + \|\mathcal{M}_{I_\delta}(\phi) - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)\|_{L^2(I_\delta/I_\delta^d)} \\ &\leq \|\phi - \mathcal{M}_{I_\delta}(\phi)\|_{L^2(I_\delta)} + C\delta^{1/2} |\mathcal{M}_{I_\delta}(\phi) - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)| \\ &\leq C\delta \|\phi'\|_{L^2(I_\delta)} + C\delta^{1/2} |\mathcal{M}_{I_\delta}(\phi) - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)|. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Maintenant

$$|\mathcal{M}_{I_\delta}(\phi) - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)|^2 \leq C \left(|\mathcal{M}_{I_\delta}(\phi) - \phi(x_3)|^2 + |\phi(x_3) - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)|^2 \right),$$

on intègre sur I_δ^d , on obtient

$$\begin{aligned} \delta |\mathcal{M}_{I_\delta}(\phi) - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)|^2 &\leq C \left(\|\mathcal{M}_{I_\delta}(\phi) - \phi\|_{L^2(I_\delta^d)}^2 + \|\phi - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)\|_{L^2(I_\delta^d)}^2 \right) \\ &\leq C \left(\|\mathcal{M}_{I_\delta}(\phi) - \phi\|_{L^2(I_\delta)}^2 + \|\phi - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)\|_{L^2(I_\delta^d)}^2 \right) \\ &\leq C\delta^2 \|\phi'\|_{L^2(I_\delta^d)}^2, \end{aligned}$$

d'où

$$|\mathcal{M}_{I_\delta}(\phi) - \mathcal{M}_{I_\delta^d}(\phi)| \leq C\delta^{1/2} \|\phi'\|_{L^2(I_\delta^d)}. \quad (5.5)$$

D'après (5.3), (5.4) et (5.5) on obtient (5.2)₁. L'estimation (5.2)₂ s'endéduit simplement. \square

Lemme 5.1.4. Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 dont le diamètre est inférieur à R . On suppose que Ω est étoilé par rapport à la boule $B(O; 1)$. Pour tout $\phi \in H^1(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} \|\phi - \mathcal{M}(\phi)\|_{L^2(\Omega)} &\leq CR\sqrt{\ln(R)}\|\nabla\phi\|_{[L^2(\Omega)]^2} \\ \mathcal{M}(\phi) &= \frac{1}{|B(O; 1)|} \int_{B(O; 1)} \phi(x) dx \end{aligned} \quad (5.6)$$

où C ne dépend pas de R .

Démonstration. Soit ϕ appartenant à $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. On considère le segment joignant O à $P(\theta)$ sur la frontière de Ω . Sa direction est donnée par le vecteur unitaire $y' = \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in [0, 2\pi[$. On a

$$|\phi(t \cos(\theta), t \sin(\theta))| \leq |\phi(\cos(\theta), \sin(\theta))| + \int_1^t \left| \frac{\partial\phi}{\partial r}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \right| dr, \quad t \in [1, |P(\theta)|].$$

D'où

$$\begin{aligned} |\phi(t \cos(\theta), t \sin(\theta))|^2 &\leq 2\left(|\phi(\cos(\theta), \sin(\theta))|^2 + \int_1^t \frac{dr}{r} \int_1^t \left| \frac{\partial\phi}{\partial r}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \right|^2 r dr\right), \\ \Rightarrow |\phi(t \cos(\theta), t \sin(\theta))|^2 &\leq 2\left(|\phi(\cos(\theta), \sin(\theta))|^2 + \ln(R) \int_1^t \left| \frac{\partial\phi}{\partial r}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \right|^2 r dr\right). \end{aligned}$$

On multiplie par t , puis on intègre entre 1 et $|P(\theta)|$ (θ est fixé), et finalement on intègre par rapport à θ . Cela donne

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_1^{|P(\theta)|} |\phi(t \cos(\theta), t \sin(\theta))|^2 t dt d\theta &\leq R^2 \int_0^{2\pi} |\phi(\cos(\theta), \sin(\theta))|^2 d\theta \\ &\quad + R^2 \ln(R) \int_0^{2\pi} \int_1^{|P(\theta)|} \left| \frac{\partial\phi}{\partial r}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \right|^2 r dr d\theta. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{L^2(\Omega \setminus \overline{B(O; 1)})}^2 &\leq R^2(\|\phi\|_{L^2(\partial B(O; 1))}^2 + \ln(R)\|\nabla\phi\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2), \\ \Rightarrow \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 2\|\phi\|_{L^2(B(O; 1))}^2 + 2R^2(\|\phi\|_{L^2(\partial B(O; 1))}^2 + \ln(R)\|\nabla\phi\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Par densité de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ in $H^1(\Omega)$ l'inégalité ci-dessus est vérifiée pour tout ϕ dans $H^1(\Omega)$.

Maintenant, on choisit ϕ dans $H^1(\Omega)$. L'inégalité de Poincaré-Wirtinger donne

$$\|\phi - \mathcal{M}(\phi)\|_{L^2(B(O; 1))} \leq C\|\nabla\phi\|_{[L^2(B(O; 1))]^2}. \quad (5.8)$$

Le théorème de trace et l'estimation ci-dessus conduisent à

$$\begin{aligned} \|\phi - \mathcal{M}(\phi)\|_{L^2(\partial B(O; 1))}^2 &\leq C(\|\phi - \mathcal{M}(\phi)\|_{L^2(B(O; 1))}^2 + \|\nabla\phi\|_{[L^2(B(O; 1))]^2}^2) \\ &\leq C\|\nabla\phi\|_{[L^2(B(O; 1))]^2}^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

On remplace ϕ par $\phi - \mathcal{M}(\phi)$ dans (5.7)₂. Les inégalités (5.8)-(5.9) conduisent à (5.6). \square

On choisit $\Omega = Y_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ (le diamètre est égal à $\sqrt{2\varepsilon}$), Ce domaine est étoilé par rapport au disque D_r ($r < \varepsilon/2$). Soit ϕ appartenant à $H^1(Y_\varepsilon)$, on note $\mathcal{M}_r(\phi)$ la valeur moyenne de ϕ dans D_r . On applique le lemme ci-dessus avec la fonction $\psi(x) = \phi(x/r)$. On obtient

$$\|\phi - \mathcal{M}_r(\phi)\|_{L^2(Y_\varepsilon)} \leq C\varepsilon \sqrt{\ln\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)} \|\nabla\phi\|_{[L^2(Y_\varepsilon)]^2}. \quad (5.10)$$

La constante ne dépend pas de ε et r .

Lemme 5.1.5. *On a*

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(\cdot, X) &= v^{be} \left\{ -X_1 \frac{\partial \hat{U}_3}{\partial X_3}(\cdot, X_3) + \frac{X_1^2 - X_2^2}{2} \frac{\partial \hat{R}_2}{\partial X_3}(\cdot, X_3) - X_1 X_2 \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial X_3}(\cdot, X_3) \right\}, \\ \tilde{u}_2(\cdot, X) &= v^{be} \left\{ -X_2 \frac{\partial \hat{U}_3}{\partial X_3}(\cdot, X_3) + X_1 X_2 \frac{\partial \hat{R}_2}{\partial X_3}(\cdot, X_3) - \frac{X_2^2 - X_1^2}{2} \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial X_3}(\cdot, X_3) \right\}, \quad \text{p.p. } \omega \times B^{be}, \\ \tilde{u}_3(\cdot, X) &= 0, \quad \tilde{Z}_\alpha = 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

où $v^{be} = \frac{\lambda^{be}}{2(\lambda^{be} + \mu^{be})}$ est le coefficient de Poisson du matériau des poutres.

Démonstration. On rappelle que le tenseur des contraintes dans l'ensemble des poutres a pour expression

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= (2\mu^{be} + \lambda^{be})\Gamma_{11}(\tilde{u}) + \lambda^{be}\Gamma_{22}(\tilde{u}) + \lambda^{be} \left(\frac{\partial \hat{U}_3}{\partial X_3} - X_1 \frac{\partial \hat{R}_2}{\partial X_3} + X_2 \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial X_3} \right), \\ \Sigma_{22} &= (2\mu^{be} + \lambda^{be})\Gamma_{22}(\tilde{u}) + \lambda^{be}\Gamma_{11}(\tilde{u}) + \lambda^{be} \left(\frac{\partial \hat{U}_3}{\partial X_3} - X_1 \frac{\partial \hat{R}_2}{\partial X_3} + X_2 \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial X_3} \right), \\ \Sigma_{12} &= 2\mu^{be}\Gamma_{12}(\tilde{u}), \\ \Sigma_{13} &= 2\mu^{be} \left[\frac{\partial}{\partial X_1} (X_1 \tilde{Z}_1 + X_2 \tilde{Z}_2 + \tilde{u}_3) - X_2 \frac{\partial \tilde{R}_3}{\partial X_3} \right], \\ \Sigma_{23} &= 2\mu^{be} \left[\frac{\partial}{\partial X_2} (X_1 \tilde{Z}_1 + X_2 \tilde{Z}_2 + \tilde{u}_3) + X_1 \frac{\partial \tilde{R}_3}{\partial X_3} \right], \\ \Sigma_{33} &= (2\mu^{be} + \lambda^{be}) \left(\frac{\partial \hat{U}_3}{\partial X_3} - X_1 \frac{\partial \hat{R}_2}{\partial X_3} + X_2 \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial X_3} \right) + \lambda^{be} (\Gamma_{11}(\tilde{u}) + \Gamma_{22}(\tilde{u})). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ et $\bar{V} \in H^1(B^{be}; \mathbb{R}^3)$ tels que $\bar{V}(X_1, X_2, -1 + \kappa_b) = \bar{V}(X_1, X_2, 1 - \kappa_a) = 0$.

On choisit comme fonction test dans le problème (2.6)

$$\begin{aligned} v_\delta(x) &= \frac{\varepsilon}{\delta^3} \varphi \left(\varepsilon \left[\frac{x'}{\varepsilon} \right] \right) \bar{V} \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{\delta} \right) \quad x \in \varepsilon\xi + \mathbf{P}_\delta, \\ v_\delta(x) &= 0 \quad \text{p.p. } x \in \Omega_\delta^d. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$\frac{r^2\delta}{\varepsilon^2} \int_{\omega \times B^{\text{be}}} \sum_{i,j=1}^3 \Pi_r(\widetilde{\sigma_{ij,\delta}}) \Pi_r(\widetilde{\gamma_{ij}(v_\delta)}) dx' dX = \frac{r^2\delta}{\varepsilon^2} \int_{\omega \times B^{\text{be}}} \sum_{i=1}^3 \Pi_r(\widetilde{f_{i,\delta}}) \Pi_r(\widetilde{v_{i,\delta}}) dx' dX. \quad (5.13)$$

Dans la poutre $\varepsilon\xi + \mathbf{P}_\delta^c$ ($\xi \in \Xi_\varepsilon$) les composantes du tenseur des déformation de v_δ sont

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(v_\delta)(\varepsilon\xi + x) &= \frac{\varepsilon}{r\delta^3} \varphi(\varepsilon\xi) \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial X_1} \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{\delta} \right), \\ \gamma_{22}(v_\delta)(\varepsilon\xi + x) &= \frac{\varepsilon}{r\delta^3} \varphi(\varepsilon\xi) \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial X_2} \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{\delta} \right), \\ \gamma_{12}(v_\delta)(\varepsilon\xi + x) &= \frac{\varepsilon}{2r\delta^3} \varphi(\varepsilon\xi) \left(\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial X_1} \right) \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{\delta} \right), \\ \gamma_{13}(v_\delta)(\varepsilon\xi + x) &= \frac{\varepsilon}{2\delta^3} \varphi(\varepsilon\xi) \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial X_3} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial X_1} \right) \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{\delta} \right), \\ \gamma_{23}(v_\delta)(\varepsilon\xi + x) &= \frac{\varepsilon}{2\delta^3} \varphi(\varepsilon\xi) \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial X_3} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial X_2} \right) \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{\delta} \right), \\ \gamma_{33}(v_\delta)(\varepsilon\xi + x) &= \frac{\varepsilon}{\delta^4} \varphi(\varepsilon\xi) \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial X_3} \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{\delta} \right). \end{aligned}$$

Par application des opérateurs $\widetilde{}$ et Π_r on obtient

$$\begin{aligned} \Pi_r(\widetilde{\gamma_{\alpha\beta}(v_\delta)}) &= \frac{\varepsilon}{r\delta^3} \widetilde{\varphi}_\varepsilon \gamma_{\alpha\beta}(\bar{V}), \\ \Pi_r(\widetilde{\gamma_{\alpha 3}(v_\delta)}) &= \frac{\varepsilon}{2\delta^3} \widetilde{\varphi}_\varepsilon \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial \bar{V}_\alpha}{\partial X_3} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial X_\alpha} \right), \\ \Pi_r(\widetilde{\gamma_{33}(v_\delta)}) &= \frac{\varepsilon}{\delta^4} \widetilde{\varphi}_\varepsilon \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial X_3}. \end{aligned}$$

Les limites sont (on rappelle que r/δ tend vers 0)

$$\begin{aligned} \frac{r\delta^3}{\varepsilon} \Pi_r(\widetilde{\gamma_{\alpha\beta}(v_\delta)}) &\rightarrow \varphi \gamma_{\alpha\beta}(\bar{V}) && \text{fortement dans } L^2(\omega \times B^{\text{be}}), \\ \frac{r\delta^3}{\varepsilon} \Pi_r(\widetilde{\gamma_{\alpha 3}(v_\delta)}) &\rightarrow \frac{1}{2} \varphi \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial X_\alpha} && \text{fortement dans } L^2(\omega \times B^{\text{be}}), \\ \frac{r\delta^3}{\varepsilon} \Pi_r(\widetilde{\gamma_{33}(v_\delta)}) &\rightarrow 0 && \text{fortement dans } L^2(\omega \times B^{\text{be}}). \end{aligned}$$

On passe à la limite dans le problème (5.13) en utilisant la convergence (3.3) et le fait que le membre de droite converge vers 0, on obtient

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^2 \int_{\omega \times B^{\text{be}}} \varphi \Sigma_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}(\bar{V}) dx' dX + \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\omega \times B^{\text{be}}} \varphi \Sigma_{\alpha 3} \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial X_\alpha} dx' dX = 0. \quad (5.14)$$

On prend $\bar{V}_1 = \bar{V}_2 = 0$ dans (5.14), cela donne

$$\sum_{\alpha=1}^2 \int_{\omega \times B^{be}} \varphi \Sigma_{\alpha 3} \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial X_\alpha} dx' dX = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega).$$

On localise

$$\int_{B^{be}} \Sigma_{13} \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial X_1} dX + \int_{B^{be}} \Sigma_{23} \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial X_2} dX = 0 \quad \text{p.p. } x' \in \omega. \quad (5.15)$$

On observe que $\int_{D_1} \left(X_1 \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial X_2} - X_2 \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial X_1} \right) dX_1 dX_2 = 0$. On en déduit que $X_1 \tilde{Z}_1 + X_2 \tilde{Z}_2 + \tilde{u}_3 = 0$. Les conditions vérifiées par \tilde{u}_3 impliquent que $\tilde{Z}_1 = \tilde{Z}_2 = 0$ et $\tilde{u}_3 = 0$.

On prend maintenant $\bar{V}_3 = 0$ dans (5.14), puis on localise l'équation, d'où

$$\begin{aligned} & \int_{D_1} \left[(\lambda^{be} + 2\mu^{be}) \Gamma_{11}(\tilde{u}) + \lambda^{be} \Gamma_{22}(\tilde{u}) \right] \Gamma_{11}(\bar{V}) dX \\ & + \int_{D_1} \left[(\lambda^{be} + 2\mu^{be}) \Gamma_{22}(\tilde{u}) + \lambda^{be} \Gamma_{11}(\tilde{u}) \right] \Gamma_{22}(\bar{V}) dX \\ & + \int_{D_1} 4\mu^{be} \Gamma_{12}(\tilde{u}) \Gamma_{12}(\bar{V}) dX \\ & = -\lambda^{be} \int_{D_1} \left(\frac{\partial \hat{U}_3}{\partial X_3} - X_1 \frac{\partial \hat{R}_2}{\partial X_3} + X_2 \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial X_3} \right) \Gamma_{11}(\bar{V}) dX \\ & - \lambda^{be} \int_{D_1} \left(\frac{\partial \hat{U}_3}{\partial X_3} - X_1 \frac{\partial \hat{R}_2}{\partial X_3} + X_2 \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial X_3} \right) \Gamma_{22}(\bar{V}) dX. \end{aligned}$$

Système qui se résout simplement

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(\cdot, X_1, X_2, \cdot) &= \alpha^{(1)} + \beta_2^{(1)} X_2 + v^{be} \left(-\frac{\partial \hat{U}_3}{\partial X_3} + \frac{X_1^2 - X_2^2}{2} \frac{\partial \hat{R}_2}{\partial X_3} - X_1 X_2 \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial X_3} \right), \\ \tilde{u}_2(\cdot, X_1, X_2, \cdot) &= \alpha^{(2)} - \beta_2^{(1)} X_1 + v^{be} \left(-\frac{\partial \hat{U}_3}{\partial X_3} + X_1 X_1 \frac{\partial \hat{R}_2}{\partial X_3} - \frac{X_1^2 - X_2^2}{2} \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial X_3} \right). \end{aligned}$$

Les conditions vérifiées par \tilde{u}_1 et \tilde{u}_2 impliquent que $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \beta_2^{(1)} = 0$. D'où le résultat. \square

Lemme 5.1.6. *On a ($d \in \{a, b\}$)*

$$\begin{aligned} \bar{u}_\alpha^d &= 0 \quad \text{et} \quad Z_\alpha^d = 0, \\ \frac{\partial \bar{u}_3^a}{\partial X_3}(x', X_3) &= -\frac{\lambda^{pl}}{\lambda^{pl} + 2\mu^{pl}} \left(\gamma_{\alpha\alpha}(\mathcal{U}_m^a)(x') - (X_3 - 1) \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}(x') \right), \quad \text{p.p. } \Omega^a, \\ \frac{\partial \bar{u}_3^b}{\partial X_3}(x', X_3) &= -\frac{\lambda^{pl}}{\lambda^{pl} + 2\mu^{pl}} \left(\gamma_{\alpha\alpha}(\mathcal{U}_m^b)(x') - (X_3 + 1) \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}(x') \right), \quad \text{p.p. } \Omega^b. \end{aligned}$$

Démonstration. Soient $\phi \in \mathcal{D}(\omega)$ et $V \in H^1(I^a; \mathbb{R}^3)$ satisfaisant $V(1 - \kappa_a) = 0$. On définit la fonction test V_δ par

$$\begin{aligned} V_\delta(x) &= \frac{1}{\delta} \phi(x') V\left(\frac{x_3}{\delta}\right) && \text{dans } \Omega_\delta^a, \\ V_\delta(x) &= 0 && \text{dans } \Omega_{\delta, \varepsilon, r} \setminus \overline{\Omega_\delta^a}. \end{aligned}$$

Dans Ω_δ^a on a

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}(V_\delta) &= \frac{1}{2\delta} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}(x') V_\alpha\left(\frac{x_3}{\delta}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial x_\beta}(x') V_\beta\left(\frac{x_3}{\delta}\right) \right), \\ \gamma_{\alpha 3}(V_\delta) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta^2} \phi(x') \frac{dV_\alpha}{dX_3}\left(\frac{x_3}{\delta}\right) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}(x') V_3\left(\frac{x_3}{\delta}\right) \right), \\ \gamma_{33}(V_\delta) &= \frac{1}{\delta^2} \phi(x') \frac{dV_3}{dX_3}\left(\frac{x_3}{\delta}\right). \end{aligned}$$

On applique l'opérateur Π_δ puis on passe à la limite

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi_\delta(\gamma_{\alpha\beta}(V_\delta)) &\rightarrow 0 && \text{fortement dans } L^2(\Omega^a), \\ \delta^2 \Pi_\delta(\gamma_{\alpha 3}(V_\delta)) &\rightarrow \frac{1}{2} \phi \frac{dV_\alpha}{dX_3} && \text{fortement dans } L^2(\Omega^a), \\ \delta^2 \Pi_\delta(\gamma_{33}(V_\delta)) &\rightarrow \phi \frac{dV_3}{dX_3} && \text{fortement dans } L^2(\Omega^a). \end{aligned}$$

On prend V_δ comme fonction test dans (2.6) des convergences ci-dessus et (3.4) on obtient

$$\int_{\Omega^a} \Sigma_{13}^a \phi \frac{dV_1}{dX_3} dx' dX_3 + \int_{\Omega^a} \Sigma_{23}^a \phi \frac{dV_2}{dX_3} dx' dX_3 + \int_{\Omega^a} \Sigma_{33}^a \phi \frac{dV_3}{dX_3} dx' dX_3 = 0,$$

On localise et on se sert de (3.5)

$$\int_{I^a} \left(Z_\alpha^a + \frac{\partial \bar{u}_\alpha^a}{\partial X_3} \right) \frac{dV_\alpha}{dX_3} dX_3 = 0 \quad \int_{I^a} \Sigma_{23}^a \frac{dV_3}{dX_3} dX_3 = 0$$

De la première équation différentielle ci-dessus et du fait que

$$\int_{I^a} \bar{u}_\alpha^a(x', X_3) dX_3 = 0,$$

on obtient que $Z_\alpha^a = 0$ et $\bar{u}_\alpha^a = 0$, on déduit que $M_{\alpha 3}^a = 0$.

De la même on obtient que $Z_\alpha^b = \bar{u}_\alpha^b = 0$ et par suite $M_{\alpha 3}^b = 0$.

Maintenant, on rappelle que

$$\begin{aligned} \Sigma_{33}^a &= (\lambda^{pl} + 2\mu^{pl}) M_{33}^a + \lambda^{pl} (M_{11}^a + M_{22}^a) \\ &= (\lambda^{pl} + 2\mu^{pl}) \frac{\partial \bar{u}_3^a}{\partial X_3} + \lambda^{pl} \left(\gamma_{11}(\mathcal{U}_m^a) + \gamma_{22}(\mathcal{U}_m^a) - (X_3 - 1) \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_1^2} - (X_3 + 1) \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_2^2} \right) \end{aligned}$$

d'où l'expression de \bar{u}_3^a et

$$M_{33}^a = \frac{\partial \bar{u}_3^a}{\partial X_3} = \frac{-\lambda^{pl}}{\lambda^{pl} + 2\mu^{pl}} \left[\gamma_{\alpha\alpha}(\mathcal{U}_m^a) - (X_3 - 1) \frac{\partial^2 \mathcal{U}_3}{\partial x_\alpha^2} \right].$$

On procède de la même façon pour obtenir \bar{u}_3^b . □

Lemme 5.1.7. Soient ϕ dans $W^{1,\infty}(\omega)$ et $\phi_{\varepsilon,r}$ défini par

$$\phi_{\varepsilon,r}(x') = \chi\left(\frac{\varepsilon}{r}\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\}\right)\phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right) + \left[1 - \chi\left(\frac{\varepsilon}{r}\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\}\right)\right]\phi(x') \quad x' \in \omega.$$

Si $\frac{r}{\varepsilon} \rightarrow 0$ alors pour tout $p \in [1, +\infty)$ on a

$$\phi_{\varepsilon,r} \longrightarrow \phi \quad \text{fortement dans } W^{1,p}(\omega).$$

Démonstration. On a

$$\phi_{\varepsilon,r}(x') - \phi(x') = \chi\left(\frac{\varepsilon}{r}\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\}\right)\left[\phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right) - \phi(x')\right].$$

Puisque ϕ appartient à $W^{1,\infty}(\omega)$ et χ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, alors pour tout $x' \in \omega$

$$\left|\phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right) - \phi(x')\right| \leq C\varepsilon\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\omega)}, \quad \left|\chi\left(\frac{\varepsilon}{r}\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\}\right)\right| \leq \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

La constante ne dépend pas de ε . D'où

$$\|\phi_{\varepsilon,r} - \phi\|_{L^\infty(\omega)} \leq C\varepsilon\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\omega)}\|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Comme première conséquence on a

$$\phi_{\varepsilon,r} \rightarrow \phi \quad \text{fortement dans } L^\infty(\omega).$$

La dérivée partielle de $\phi_{\varepsilon,r} - \phi$ par rapport à x_α est

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\phi_{\varepsilon,r} - \phi)(x') = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial X_\alpha}\left(\frac{\varepsilon}{r}\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\}\right)\left(\phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right) - \phi(x')\right) - \chi\left(\frac{\varepsilon}{r}\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}(x').$$

Ensuite pour $\xi \in \Xi_\varepsilon$ et p.p. $y' \in Y$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\phi_{\varepsilon,r} - \phi)(\varepsilon\xi + \varepsilon y') = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial X_\alpha}\left(\frac{\varepsilon}{r}y'\right)\left(\phi(\varepsilon\xi) - \phi(\varepsilon\xi + \varepsilon y')\right) - \chi\left(\frac{\varepsilon}{r}y'\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}(\varepsilon\xi + \varepsilon y').$$

La fonction χ a un support compact dans \mathbb{R}^2 . Donc il existe $R > 0$ telle que $\text{supp}(\chi) \subset D_R$. Le support de la fonction $y' \mapsto \chi\left(\frac{\varepsilon}{r}y'\right)$ est inclu dans le disque $D_{rR/\varepsilon}$, donc p.p. $y' \in D_{rR/\varepsilon}$

$$|\phi(\varepsilon\xi) - \phi(\varepsilon\xi + \varepsilon y')| \leq rR \|\nabla\phi\|_{L^\infty(\omega)}. \quad (5.16)$$

Maintenant, on évalue la norme L^p de la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\phi_{\varepsilon,r} - \phi)$. D'après (5.16) on a

$$\begin{aligned} \int_Y \left| \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\phi_{\varepsilon,r} - \phi)(\varepsilon\xi + \varepsilon y') \right|^p dy' &= \int_{D_{rR/\varepsilon}} \left| \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\phi_{\varepsilon,r} - \phi)(\varepsilon\xi + \varepsilon y') \right|^p dy' \\ &\leq 2^{p-1} \left(\int_{D_{rR/\varepsilon}} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial\chi}{\partial X_\alpha} \left(\frac{\varepsilon}{r}y'\right) \right|^p |\phi(\varepsilon\xi) - \phi(\varepsilon\xi + \varepsilon y')|^p dy' \right. \\ &\quad \left. + \int_{D_{rR/\varepsilon}} \left| \chi\left(\frac{\varepsilon}{r}y'\right) \right|^p \left| \frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}(\varepsilon\xi + \varepsilon y') \right|^p dy' \right) \\ &\leq 2^{p-1} \left(\frac{1}{r^p} \left\| \frac{\partial\chi}{\partial X_\alpha} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^p \int_{D_{rR/\varepsilon}} |\phi(\varepsilon\xi) - \phi(\varepsilon\xi + \varepsilon y')|^p dy' \right. \\ &\quad \left. + \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^p \int_{D_{rR/\varepsilon}} \left| \frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}(\varepsilon\xi + \varepsilon y') \right|^p dy' \right) \\ &\leq 2^{p-1} \pi \frac{r^2 R^2}{\varepsilon^2} \left(R^p \left\| \frac{\partial\chi}{\partial X_\alpha} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^p \|\nabla\phi\|_{L^\infty(\omega)}^p + \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^p \left\| \frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha} \right\|_{L^\infty(\omega)}^p \right). \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\varepsilon\xi + \varepsilon Y} \left| \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\phi_{\varepsilon,r} - \phi)(x') \right|^p dx' \leq Cr^2 \left(\left\| \frac{\partial\chi}{\partial X_\alpha} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^p \|\nabla\phi\|_{L^\infty(\omega)}^p + \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^p \left\| \frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha} \right\|_{L^\infty(\omega)}^p \right).$$

Par sommation de toutes les inégalités ci-dessus on obtient

$$\begin{aligned} \int_\omega \left| \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\phi_{\varepsilon,r} - \phi)(x') \right|^p dx' &= \sum_{\xi \in \Xi_\varepsilon} \int_{\varepsilon\xi + \varepsilon Y} \left| \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\phi_{\varepsilon,r} - \phi)(x') \right|^p dx' \\ &\leq C \frac{r^2}{\varepsilon^2} \left(\left\| \frac{\partial\chi}{\partial X_\alpha} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^p \|\nabla\phi\|_{L^\infty(\omega)}^p + \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^p \left\| \frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha} \right\|_{L^\infty(\omega)}^p \right). \end{aligned}$$

Finalement

$$\|\nabla(\phi_{\varepsilon,r} - \phi)\|_{L^p(\omega)} \leq C \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{2/p} \|\chi\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)} \|\phi\|_{W^{1,\infty}(\omega)}.$$

Les constantes ne dépendent pas de ε et r . Par conséquent, si $\frac{r}{\varepsilon}$ tend vers 0 on obtient

$$\phi_{\varepsilon,r} \rightarrow \phi \quad \text{fortement dans } W^{1,p}(\omega).$$

□

Lemme 5.1.8. Soient ϕ dans $W^{2,\infty}(\omega)$ et $\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r}$ définie par

$$\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r}(x') = \chi\left(\frac{\varepsilon}{r}\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\}\right)\left[\phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right) + \varepsilon\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\} \cdot \nabla\phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right)\right] + \left[1 - \chi\left(\frac{\varepsilon}{r}\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\}\right)\right]\phi(x') \quad \forall x' \in \omega.$$

Si $\frac{r}{\varepsilon} \rightarrow 0$ alors pour chaque $p \in [1, +\infty)$ on a

$$\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} \longrightarrow \phi \quad \text{fortement dans } W^{2,p}(\omega).$$

Démonstration. Tout d'abord, on note que

$$\forall x' \in \omega, \quad \begin{aligned} \left| \phi(x) - \phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right) - \varepsilon\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\} \cdot \nabla\phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right) \right| &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} \|\phi\|_{W^{2,\infty}(\omega)}, \\ \left| \nabla\phi(x) - \nabla\phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right) \right| &\leq \varepsilon \|\phi\|_{W^{2,\infty}(\omega)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ainsi

$$\forall y' \in D_{rR/\varepsilon}, \quad \forall \xi \in \Xi_\varepsilon, \quad \begin{aligned} \left| \phi(\varepsilon\xi + \varepsilon y') - \phi(\varepsilon\xi) - \varepsilon y' \cdot \nabla\phi(\varepsilon\xi) \right| &\leq \frac{(rR)^2}{2} \|\phi\|_{W^{2,\infty}(\omega)}, \\ \left| \nabla\phi(\varepsilon\xi + \varepsilon y') - \nabla\phi(\varepsilon\xi) \right| &\leq (rR) \|\phi\|_{W^{2,\infty}(\omega)}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

On a

$$\left| (\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} - \phi)(x') \right| = \left| \chi\left(\frac{\varepsilon}{r}\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\}\right) \left(\phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right) + \varepsilon\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\} \cdot \nabla\phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right) - \phi(x') \right) \right|,$$

et d'après (5.17)₁

$$\|\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} - \phi\|_{L^\infty(\omega)} \leq C\varepsilon^2 \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \|\phi\|_{W^{2,\infty}(\omega)}.$$

Comme conséquence on obtient

$$\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} \rightarrow \phi \quad \text{fortement dans } L^\infty(\omega). \quad (5.19)$$

La dérivée partielle de $\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} - \phi$ par rapport à x_α est

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} - \phi)(x') &= \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial X_\alpha} \left(\frac{\varepsilon}{r} \left\{ \frac{x'}{\varepsilon} \right\} \right) \left[\phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right) + \varepsilon\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\} \cdot \nabla\phi\left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right]\right) - \phi(x') \right] \\ &+ \chi\left(\frac{\varepsilon}{r}\left\{\frac{x'}{\varepsilon}\right\}\right) \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \left(\varepsilon\left[\frac{x'}{\varepsilon}\right] \right) - \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} (x') \right]. \end{aligned}$$

Pour tout $\xi \in \Xi_\varepsilon$ et $y' \in Y$, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} - \phi)(\varepsilon\xi + \varepsilon y') &= \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial X_\alpha} \left(\frac{\varepsilon}{r} y' \right) \left[\phi(\varepsilon\xi) + \varepsilon y' \cdot \nabla\phi(\varepsilon\xi) - \phi(\varepsilon\xi + \varepsilon y') \right] \\ &+ \chi\left(\frac{\varepsilon}{r} y'\right) \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} (\varepsilon\xi) - \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} (\varepsilon\xi + \varepsilon y') \right]. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} - \phi)(\varepsilon\xi + \varepsilon y') \right| \\
 & \leq \left| \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial X_\alpha} \left(\frac{\varepsilon}{r} y' \right) \left(\phi(\varepsilon\xi) + \varepsilon y' \cdot \nabla \phi(\varepsilon\xi) - \phi(\varepsilon\xi + \varepsilon y') \right) \right| \\
 & + \left| \chi \left(\frac{\varepsilon}{r} y' \right) \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}(\varepsilon\xi) - \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}(\varepsilon\xi + \varepsilon y') \right] \right|.
 \end{aligned}$$

De (5.18) il vient que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} - \phi) \right\|_{L^\infty(\omega)} \leq Cr \|\chi\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)} \|\phi\|_{W^{2,\infty}(\omega)}.$$

Comme conséquence on a

$$\frac{\partial \widehat{\Phi}_{\varepsilon,r}}{\partial x_\alpha} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \quad \text{fortement dans } L^\infty(\omega). \quad (5.20)$$

On passe maintenant aux dérivées secondes de $\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} - \phi$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} - \phi)(x') &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \left(\frac{\varepsilon}{r} \left\{ \frac{x'}{\varepsilon} \right\} \right) \left[\phi \left(\varepsilon \left\{ \frac{x'}{\varepsilon} \right\} \right) + \varepsilon \left\{ \frac{x'}{\varepsilon} \right\} \cdot \nabla \phi \left(\varepsilon \left\{ \frac{x'}{\varepsilon} \right\} \right) - \phi(x') \right] \\
 &+ \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial X_\alpha} \left(\frac{\varepsilon}{r} \left\{ \frac{x'}{\varepsilon} \right\} \right) \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} \left(\varepsilon \left\{ \frac{x'}{\varepsilon} \right\} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta}(x') \right] \\
 &+ \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial X_\beta} \left(\frac{\varepsilon}{r} \left\{ \frac{x'}{\varepsilon} \right\} \right) \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \left(\varepsilon \left\{ \frac{x'}{\varepsilon} \right\} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}(x') \right] - \chi \left(\frac{\varepsilon}{r} \left\{ \frac{x'}{\varepsilon} \right\} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x').
 \end{aligned}$$

Pour $\xi \in \Xi_\varepsilon$ et p.p. $y' \in Y$, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} - \phi)(\varepsilon\xi + \varepsilon y') &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \left(\frac{\varepsilon}{r} y' \right) \left[\phi(\varepsilon\xi) + \varepsilon y' \cdot \nabla \phi(\varepsilon\xi) - \phi(\varepsilon\xi + \varepsilon y') \right] \\
 &+ \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial X_\alpha} \left(\frac{\varepsilon}{r} y' \right) \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_\beta}(\varepsilon\xi) - \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta}(\varepsilon\xi + \varepsilon y') \right] \\
 &+ \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial X_\beta} \left(\frac{\varepsilon}{r} y' \right) \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}(\varepsilon\xi) - \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}(\varepsilon\xi + \varepsilon y') \right] - \chi \left(\frac{\varepsilon}{r} y' \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(\varepsilon\xi + \varepsilon y').
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \int_Y \left| \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} - \phi)(\varepsilon\xi + \varepsilon y') \right|^p dy' &\leq C \frac{r^2 R^2}{\varepsilon^2} \left(R^{2p} \left\| \frac{\partial^2 \chi}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^p + R^p \left\| \frac{\partial \chi}{\partial X_\alpha} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^p \right. \\
 &\quad \left. + R^p \left\| \frac{\partial \chi}{\partial X_\beta} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^p + \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^p \right) \|\phi\|_{W^{2,\infty}(\omega)}^p.
 \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon\xi+\varepsilon Y} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} - \phi)(x') \right|^p dx' &\leq Cr^2 \left(\left\| \frac{\partial^2 \chi}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^p \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{\partial \chi}{\partial X_\alpha} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^p + \|\chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^p \right) \|\phi\|_{W^{2,\infty}(\omega)}^p. \end{aligned}$$

Et finalement

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} - \phi) \right\|_{L^p(\omega)} \leq C \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^{2/p} \|\chi\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)} \|\phi\|_{W^{2,\infty}(\omega)}.$$

Passons à la limite, si $\frac{r}{\varepsilon} \rightarrow 0$ on obtient

$$\frac{\partial^2 \widehat{\Phi}_{\varepsilon,r}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \quad \text{fortement dans } L^p(\omega). \quad (5.21)$$

De (5.19), (5.20) et (5.21) on déduit finalement que

$$\widehat{\Phi}_{\varepsilon,r} \longrightarrow \phi \quad \text{fortement dans } W^{2,p}(\omega). \quad \square$$

5.2 Annexe B

Lemme 5.2.1. *Le problème (4.7) a pour formulation variationnelle*

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u_{\varepsilon,\delta} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \rho_{\varepsilon,\delta} u_{\varepsilon,\delta} \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ &\langle \rho_{\varepsilon,\delta} \frac{du_{\varepsilon,\delta}}{dt}(t), w \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \int_{\Omega} k_{\varepsilon,\delta} \nabla_x u_{\varepsilon,\delta}(t, \cdot) \nabla_x w \, dx \\ &= \int_{\Omega} f_{\varepsilon,\delta}(t, x) w(x) \, dx \quad p.p. \, t \in (0, T), \quad u_{\varepsilon,\delta}(0) = u_{\varepsilon,\delta}^0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

De plus $u_{\varepsilon,\delta}$ satisfait

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon,\delta}(x) |u_{\varepsilon,\delta}(t, x)|^2 \, dx + \int_0^t \int_{\Omega} k_{\varepsilon,\delta}(x) |\nabla_x u_{\varepsilon,\delta}(s, x)|^2 \, ds \, dx \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} f_{\varepsilon,\delta}(s, x) u_{\varepsilon,\delta}(s, x) \, ds \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon,\delta}(x) |u_{\varepsilon,\delta}^0(x)|^2 \, dx \end{aligned} \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \quad (5.23)$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme utilise la méthode de Faedo-Galerkin (voir par exemple [15] ou [33]). Les trois étapes de la démonstration sont les suivantes :

— Existence de solutions approchées.

— Estimation à priori des solutions approchées.

— Passage à la limite.

On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ un espace de Hilbert séparable ; il est équipé du produit scalaire

$$\forall (\phi, \psi) \in [H_0^1(\Omega)]^2, \quad \langle \phi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dx.$$

Il admet une base hilbertienne dénombrable : $\{w_1, \dots, w_m, \dots\}$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad w_m \in H_0^1(\Omega), \\ \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} V_m = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \text{Vect}\{w_1, \dots, w_m\} \text{ est dense dans } H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (5.24)$$

On définit l'opérateur P_m de $H_0^1(\Omega)$ dans V_m par :

$$P_m v = v_m = \sum_{j=1}^m \langle v, w_j \rangle w_j \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On a

$$P_m v \longrightarrow v \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega).$$

Dans la démonstration qui suit, sans nuire à la généralité on suppose que $c_0 \in (0, 1]$.

Pour simplifier les notations on omet la dépendance en ε et δ .

Etape 1. Existence de solutions approchées.

On suppose dans un premier temps que la donnée u^0 appartient à $H_0^1(\Omega)$ et on note

$$u_m^0 = \sum_{j=1}^m \langle u^0, w_j \rangle w_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j w_j \in V_m.$$

On a

$$u_m^0 \longrightarrow u^0 \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega). \quad (5.25)$$

On cherche une solution approchée $u_m \in H^1(0, T; V_m)$ du problème (5.22) de la forme

$$u_m = \sum_{j=1}^m g_j^m w_j \quad \text{où } g_j^m \in H^1(0, T), \quad j = 1, \dots, m.$$

On considère donc le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (g_1^m, \dots, g_j^m, \dots, g_m^m) \in [H^1(0, T)]^m \text{ tel que pour tout } k \in \{1, \dots, m\} \\ \int_{\Omega} \rho \frac{\partial u_m}{\partial t} w_k \, dx + \int_{\Omega} k \nabla u_m \nabla w_k \, dx = \int_{\Omega} f_m w_k \, dx \quad \text{dans } L^2(0, T), \\ g_j^m(0) = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (5.26)$$

On pose

$$\begin{aligned}
 G^m &= (g_1^m, \dots, g_j^m, \dots, g_m^m)^T, & G_0^m &= (\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_m)^T, \\
 \mathcal{A}_m &= (a_{ij}^m)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}, & a_{ij}^m &= \int_{\Omega} \rho w_i w_j dx, \\
 \mathcal{B}_m &= (b_{ij}^m)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}, & b_{ij}^m &= \int_{\Omega} k \nabla w_i \nabla w_j dx, \\
 F_j^m(t) &= \int_{\Omega} f(t, x) w_k(x) dx, & F^m(t) &= (F_1^m(t), \dots, F_j^m(t), \dots, F_m^m(t))^T \text{ p.p. } t \in (0, T).
 \end{aligned}$$

Le système (5.26) devient

$$\begin{cases} \mathcal{A}^m \frac{dG^m}{dt}(t) = \mathcal{B}^m G^m(t) + F^m(t), & \text{p.p. } t \in (0, T), \\ G^m(0) = G_0^m. \end{cases} \quad (5.27)$$

On montre maintenant que la matrice \mathcal{A}_m est inversible. Soit $V = (V_1, \dots, V_m)^T \in \mathbb{R}^m$ et $v = \sum_{i=1}^m V_i w_i \in V_m$.

$$(\mathcal{A}_m V)_i = \sum_{j=1}^m \left(\int_{\Omega} \rho w_i w_j \right) dx V_j = \int_{\Omega} \rho w_i v dx.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_m V \cdot V &= \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega} \rho V_i w_i v \right) dx = \int_{\Omega} \rho v v dx \\
 &\geq \min(1, c_0) \int_{\Omega} |v|^2 dx = c_0 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C \left(\sum_{i=1}^m |V_i|^2 \right) \quad \forall V \in \mathbb{R}^N.
 \end{aligned}$$

Il en résulte que la matrice symétrique \mathcal{A}_m est définie positive. Elle est donc inversible. Comme conséquence le système différentiel (5.27) admet une unique solution appartenant à $[H^1(0, T)]^N$.

Etape 2. Estimations à priori.

On multiplie l'équation (5.26) par g_k^m puis on somme sur k , ce qui donne

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial u_m}{\partial t} u_m dx + \int_{\Omega} k \nabla u_m \nabla u_m dx = \int_{\Omega} f u_m dx. \quad (5.28)$$

Par intégration de 0 à t on obtient l'égalité suivante :

$$\forall t \in [0, T], \quad \frac{1}{2} \|\rho u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|k \nabla u_m\|_{L^2((0,t) \times \Omega)}^2 = \int_0^t \int_{\Omega} f(s) u_m(s) dx + \frac{1}{2} \|\rho u_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

D'où

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], \quad & \min(1, c_0) (\|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega^T)}^2) \\ & \leq \int_0^t \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \left(\int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|\rho u_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

On a donc (on rappelle que $\rho(x) \geq c_0$ et $k(x) \geq c_0$ p.p. $x \in \Omega$)

$$c_0 \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega^T)}^2 + \|\rho u_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \int_0^t \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Du lemme de Gronwall on déduit que

$$\forall t \in [0, T], \quad \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{c_0} \exp\left(\frac{t}{c_0}\right) \left(\|f\|_{L^2(\Omega^T)}^2 + \|\rho u_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Utilisant (5.29), on obtient ensuite

$$\forall t \in [0, T], \quad \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega^T)}^2 \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega^T)}^2 + \|\rho u_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Ce qui s'écrit également

$$\|u_m\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|u_m\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{c_0} \exp\left(\frac{T}{c_0}\right) \left(\|f\|_{L^2(\Omega^T)}^2 + \|\rho u_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (5.30)$$

On estime maintenant $\frac{\partial u_m}{\partial t}$ dans $L^2(\Omega^T)$.

On multiplie l'équation (5.26) par $\frac{dg_k^m}{dt}(s)$ puis on somme pour k variant de 1 à m . Ce qui donne

$$\left\| \rho \frac{\partial u_m}{\partial t}(s) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| k \nabla u_m(s) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f(s) \frac{\partial u_m}{\partial t}(s) dx \quad \text{p.p. } s \in (0, T).$$

On intègre par rapport à s entre 0 et t . D'où

$$\begin{aligned} c_0 \int_0^t \left\| \frac{\partial u_m}{\partial t}(s) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{c_0}{2} \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{c_0}{2} \|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \frac{1}{2c_0} \|f\|_{L^2(\Omega^T)}^2 + \frac{c_0}{2} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial u_m}{\partial t}(s) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega^T)}^2 \leq \frac{1}{c_0^2} \|f\|_{L^2(\Omega^T)}^2 + \|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

Ce qui conduit à

$$\left\| \frac{\partial u_m}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega^T)}^2 + \|\nabla u_m\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}^2 \leq \frac{1}{c_0^2} \|f\|_{L^2(\Omega^T)}^2 + \|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Finalement en utilisant (5.30), on obtient

$$\|u_m\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega^T)} ds + \|\rho u_m^0\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

La constante C est indépendante de m , ε et δ .

Etape 3. Passage à la limite.

Il existe une sous-suite de $\{m\}$, encore notée de la même façon, et $u \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ de sorte que

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (5.31)$$

Soit $\psi \in H^1(0, T)$ tel que $\psi(T) = 0$ et $v \in H_0^1(\Omega)$. On multiplie (5.26) par $(v, w_k)_{H_0^1(\Omega)} \psi$, on somme pour k de 1 à m puis on intègre sur $(0, T)$. On obtient pour presque tout $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega^T} \rho(x) u_m(t, x) \psi'(t) (P_m v)(x) dt dx + \int_{\Omega^T} k(x) \nabla u_m(t, x) \psi(t) \nabla (P_m v)(x) dt dx \\ & = \int_{\Omega^T} f(t, x) \psi(t) (P_m v)(x) dt dx - \int_{\Omega} \rho(x) u_m^0(x) \psi(0) (P_m v)(x) dx. \end{aligned} \quad (5.32)$$

D'après (5.31) et du fait que $P_m v$ converge fortement vers v dans $H_0^1(\Omega)$, en passant à la limite dans (5.32) on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega^T} \rho(x) u(t, x) \psi'(t) v(x) dt dx + \int_{\Omega^T} k(x) \nabla u(t, x) \psi(t) \nabla v(x) dt dx \\ & = \int_{\Omega^T} f(t, x) \psi(t) v(x) dt dx - \int_{\Omega} \rho(x) u^0(x) \psi(0) v(x) dx. \end{aligned} \quad (5.33)$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$ et $\forall \psi \in H^1(0, T)$ tel que $\psi(T) = 0$.

D'où

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^T} \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \psi(t) v(x) dt dx - \int_{\Omega^T} \rho(x) u(0, x) \psi(0) v(x) dt dx \\ & + \int_{\Omega^T} k(x) \nabla u(t, x) \psi(t) \nabla v(x) dt dx \\ & = \int_{\Omega^T} f(t, x) \psi(t) v(x) dt dx - \int_{\Omega} \rho(x) u^0(x) \psi(0) v(x) dx. \end{aligned} \quad (5.34)$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$ and $\forall \psi \in \mathcal{D}(0, T)$ tel que $\psi(T) = 0$.

D'où on conclut que $u(0, \cdot) = u^0(\cdot)$.

Par suite on en déduit que u vérifie

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial u}{\partial t} v dx + \int_{\Omega} k \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx & \text{dans } L^2(0, T), \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u(0, \cdot) = u^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5.35)$$

Comme dans l'étape 1, on montre que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 &\leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega T)}^2 + \|\rho u^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \\ \|u\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} &\leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega T)} ds + \|\rho u^0\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

On note que u appartient également à $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$.

Etape 4. Existence d'une solution de (5.22) pour une donnée initiale dans $L^2(\Omega)$.

Soit $u^0 \in L^2(\Omega)$, il existe une suite $\{u_m^0\}_m$ de fonctions de $H_0^1(\Omega)$ telle que u_m^0 converge fortement vers u^0 dans $L^2(\Omega)$.

Comme $u_m^0 \in H_0^1(\Omega)$ et que u_m est solution de (5.35) alors

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial u_m}{\partial t} v dx + \int_{\Omega} k \nabla u_m \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx & \text{dans } L^2(0, T), \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u_m(0, \cdot) = u_m^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5.36)$$

La fonction $u_m - u_p$ vérifie

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial (u_m - u_p)}{\partial t} v dx + \int_{\Omega} k \nabla (u_m - u_p) \nabla v dx = 0 & \text{dans } L^2(0, T), \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ (u_m - u_p)(0, \cdot) = u_m^0 - u_p^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5.37)$$

Comme dans l'étape 1, on obtient l'estimation

$$\|u_m - u_p\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|u_m - u_p\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \leq C \|\rho(u_m^0 - u_p^0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\rho\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_m^0 - u_p^0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

La suite $\{u_m\}_m$ est donc de Cauchy dans $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Elle converge donc vers un élément u appartenant à $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Le problème (5.36) s'écrit également

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega T} \rho(x) u_m(t, x) \psi'(t) v(x) dt dx + \int_{\Omega T} k(x) \nabla u_m(t, x) \psi(t) \nabla v(x) dt dx \\ & = \int_{\Omega T} f(t, x) \psi(t) v(x) dt dx - \int_{\Omega} \rho(x) u_m^0(x) \psi(0) v(x) dx. \end{aligned} \quad (5.38)$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$ et $\forall \psi \in H^1(0, T)$ tel que $\psi(T) = 0$.

Passons à la limite, ensuite comme dans l'étape 3 on obtient

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial u}{\partial t} v dx + \int_{\Omega} k \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx & \text{dans } H^{-1}(0, T), \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u(0, \cdot) = u^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5.39)$$

Etape 5. Pour finir on montre l'unicité de la solution de (5.39).

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (5.39), alors $u_1 - u_2$ satisfait

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial}{\partial t} (u_1 - u_2) v dx + \int_{\Omega} k \nabla (u_1 - u_2) \nabla v dx = \int_{\Omega} f (u_1 - u_2) dx & \text{dans } L^2(0, T), \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ (u_1 - u_2)(0, \cdot) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On prend comme fonction test $v = u_1 - u_2$. Après intégration on a

$$\forall t \in [0, T], \quad \frac{1}{2} \|\rho (u_1 - u_2)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|k \nabla (u_1 - u_2)\|_{L^2((0,t) \times \Omega)}^2 = \int_0^t \int_{\Omega} f(s) (u_1 - u_2)(s) ds dx.$$

D'où

$$\forall t \in [0, T], \quad \frac{1}{2} c_0 \|(u_1 - u_2)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega^T)} \int_0^t \|(u_1 - u_2)(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Le lemme de Gronwall mène à

$$\forall t \in [0, T], \quad \|(u_1 - u_2)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0.$$

D'où l'unicité de la solution. □

Lemme 5.2.2. *Pour tout $\Phi \in H$, il existe une constante notée $\Phi(\infty)$ telle que*

$$\|\Phi - \Phi(\infty)\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla \Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Démonstration. Etape 1. On montre que

$$\|\Phi - \bar{\Phi}_R\|_{L^{2^*}(B(O,R))} \leq C \|\nabla \Phi\|_{[L^2(B(O,R))]^N} \quad \text{où } \bar{\Phi}_R = \frac{1}{|B(O,R)|} \int_{B(O,R)} \Phi(z) dz. \quad (5.40)$$

La constante ne dépend pas de R .

On rappelle l'inégalité de Sobolev-Poincaré-Wirtinger dans la boule $B(O, 1)$, il existe une constante C telle que

$$\|\Psi - \bar{\Psi}\|_{L^{2^*}(B(O,1))} \leq C \|\nabla \Psi\|_{[L^2(B(O,1))]^N} \quad \text{où } \bar{\Psi} = \frac{1}{|B(O,1)|} \int_{B(O,1)} \Psi(z) dz. \quad (5.41)$$

Soit $\Phi \in H$. La fonction Φ appartient à $H_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$. On applique l'inégalité de Sobolev-Poincaré-Wirtinger à la fonction $\Psi(z) = \Phi(Rz)$, $z \in B(O, 1)$, avec R quelconque dans \mathbb{R}_+^* .

On effectue ensuite le changement de variables $x = Rz$, d'où

$$\begin{aligned}\bar{\Psi} &= \frac{1}{|B(O, 1)|} \int_{B(O, 1)} \Psi(z) dz = \frac{1}{|B(O, 1)|} \int_{B(O, 1)} \Phi(Rz) dz, \\ &= \frac{1}{|B(O, 1)|R^N} \int_{B(O, R)} \Phi(x) dx = \frac{1}{|B(O, R)|} \int_{B(O, R)} \Phi(x) dx = \bar{\Phi}_R.\end{aligned}$$

D'après (5.41) on a

$$\left(\int_{B(O, 1)} |\Psi(z) - \bar{\Psi}|^{2^*} dz \right)^{1/2^*} \leq C \left(\int_{B(O, 1)} |\nabla \Psi(z)|^2 dz \right)^{1/2}.$$

Ce qui donne

$$\left(\int_{B(O, 1)} |\Phi(Rz) - \bar{\Phi}_R|^{2^*} dz \right)^{1/2^*} \leq C \left(\int_{B(O, 1)} |\nabla_z(\Phi(Rz))|^2 dz \right)^{1/2} = C \left(\int_{B(O, 1)} R^2 |\nabla_x \Phi(Rz)|^2 dz \right)^{1/2}.$$

On effectue le changement de variable $x = Rz$, on obtient

$$\begin{aligned}R^{-\frac{N}{2^*}} \left(\int_{B(O, R)} |\Phi(x) - \bar{\Phi}_R|^{2^*} dx \right)^{1/2^*} &\leq CR^{1-\frac{N}{2}} \left(\int_{B(O, R)} |\nabla(\Phi(x))|^2 dx \right)^{1/2}, \\ \left(\int_{B(O, R)} |\Phi(x) - \bar{\Phi}_R|^{2^*} dx \right)^{1/2^*} &\leq CR^{1-\frac{N}{2}+\frac{N}{2^*}} \left(\int_{B(O, R)} |\nabla\Phi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\int_{B(O, R)} |\nabla\Phi(x)|^2 dx \right)^{1/2}\end{aligned}$$

car $2^* = \frac{2N}{N-2}$. On a montré (5.40).

Etape 2. Puisque la suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} = \{\mathbf{1}_{B(O, n)}(\Phi - \bar{\Phi}_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ car d'après (5.40) on a

$$\|\varphi_n\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} = \|\mathbf{1}_{B(O, n)}(\Phi - \bar{\Phi}_n)\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\Phi - \bar{\Phi}_n\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla\Phi\|_{[L^2(\mathbb{R}^N)]^N}.$$

Il existe donc une sous suite d'entiers, encore noté n , tel que

$$\varphi_n = \mathbf{1}_{B(O, n)}(\Phi - \bar{\Phi}_n) \rightharpoonup \varphi \quad \text{faiblement dans } L^{2^*}(\mathbb{R}^N).$$

D'après les inégalités ci-dessus on a de plus

$$\|\varphi\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla\Phi\|_{[L^2(\mathbb{R}^N)]^N}.$$

La restriction de φ_n à la boule $B(O, n)$ appartient à $H^1(B(O, n))$ et $\nabla\varphi_n = \nabla\Phi$ p.p. $B(O, n)$. Soit maintenant $\Psi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)]^N$, comme le support de Ψ est borné, pour n assez grand on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n \operatorname{div}(\Psi) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\varphi_n \cdot \Psi dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\Phi \cdot \Psi dx.$$

On passe à la limite pour obtenir

$$\forall \Psi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)]^N, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \operatorname{div}(\Psi) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\Phi \cdot \Psi dx.$$

D'où $\nabla\varphi = \nabla\Phi$. La fonction $\Phi - \varphi$ est donc constante. On note $\Phi(\infty)$ cette constante. Le lemme est démontré. \square

Lemme 5.2.3. *L'espace des fonctions appartenant à $\mathbf{H} \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et dont le support du gradient est borné est dense dans \mathbf{H} .*

Démonstration. Etape 1. On montre que l'espace des fonctions appartenant à \mathbf{H} et dont le support du gradient est borné est dense dans \mathbf{H} .

On note $\eta_R \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ la fonction réelle définie par

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, R], & \quad \eta_R(t) = 1, \\ \forall t \in [R, 2R], & \quad \eta_R(t) = \frac{1}{R}(2R - t), \\ \forall t \geq 2R, & \quad \eta_R(t) = 0, \\ \forall t \in (-\infty, 0], & \quad \eta_R(t) = \eta_R(-t) \end{aligned}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \widetilde{\eta}_R(x) = \prod_{i=1}^N \eta_R(x_i).$$

Soit maintenant $\Phi \in \mathbf{H}$. On définit la fonction Φ_R par

$$\Phi_R(x) = \widetilde{\eta}_R(x) (\Phi(x) - \Phi(\infty)) + \Phi(\infty), \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Puisque $\Phi \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et que $\widetilde{\eta}_R \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ et a un support compact, on obtient que $\Phi_R \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Etape 2. On estime $\nabla\Phi_R - \nabla\Phi$ dans $[L^2(\mathbb{R}^N)]^N$.

On a

$$\nabla\Phi_R - \nabla\Phi = (\widetilde{\eta}_R - 1)\nabla\Phi + \nabla\widetilde{\eta}_R(\Phi - \Phi(\infty)).$$

Le premier terme du membre de droite de l'égalité ci-dessus est majoré par $\|\nabla\Phi\|_{[L^2(\mathbb{R}^N \setminus (-R, R)^N)]^N}$ il converge donc vers 0 quand R tend vers $+\infty$. Concernant le deuxième terme, on a tout d'abord

$$\left| \frac{\partial \widetilde{\eta}_R}{\partial x_1}(\Phi - \Phi(\infty)) \right| = \frac{1}{R} \prod_{i=2}^N \eta_R(x_i) |\Phi - \Phi(\infty)| \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N.$$

Le support de cette fonction est dans la réunion de deux bandes

$$\Delta_R = ((-2R, -R) \times \mathbb{R}^{N-1} \cup (R, 2R) \times \mathbb{R}^{N-1}) \cap [-2R, 2R]^N.$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \widetilde{\eta}_R}{\partial x_1}(x)(\Phi(x) - \Phi(\infty)) \right|^2 dx \leq \int_{\Delta_R} \frac{1}{R^2} |\Phi(x) - \Phi(\infty)|^2 dx.$$

L'inégalité de Hölder donne

$$\int_{\Delta_R} |\Phi(x) - \Phi(\infty)|^2 dx \leq \left(\int_{\Delta_R} |\Phi(x) - \Phi(\infty)|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \left(\int_{\Delta_R} 1 dx \right)^{2/N}.$$

D'où

$$\int_{\Delta_R} |\Phi(x) - \Phi(\infty)|^2 dx \leq 4^{2(N-1)/N} R^2 \left(\int_{\Delta_R} |\Phi(x) - \Phi(\infty)|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}$$

car le volume de Δ_R est égal à $(4R)^{N-1}R$. Ainsi

$$\left\| \frac{\partial \widetilde{\eta}_R}{\partial x_1}(\Phi - \Phi(\infty)) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq 4 \|\Phi - \Phi(\infty)\|_{L^{2^*}(\Delta_R)}.$$

On procède de façon analogue pour évaluer $\left\| \frac{\partial \widetilde{\eta}_R}{\partial x_i}(\Phi - \Phi(\infty)) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, $i \in \{2, \dots, N\}$. Finalement

$$\|\nabla\widetilde{\eta}_R(\Phi - \Phi(\infty))\|_{[L^2(\mathbb{R}^N)]^N} \leq C \|\Phi - \Phi(\infty)\|_{L^{2^*}((-2R, 2R)^N \setminus [-R, R]^N)}.$$

La constante ne dépend que de N .

Le terme de droite de l'inégalité ci-dessus converge vers 0. On a donc démontré que

$$\nabla\Phi_R \longrightarrow \nabla\Phi \quad \text{fortement dans } [L^2(\mathbb{R}^N)]^N.$$

On considère pour finir la suite $\Phi_{n,R} = \rho_n * (\widetilde{\eta}_R(\Phi - \Phi(\infty))) + \Phi(\infty)$ où ρ_n est une suite régularisante définie comme dans la section IX.4 de [27]. Par construction $\Phi_{n,R} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, le support de $\nabla\Phi_{n,R}$ est borné et $\nabla\Phi_{n,R}$ converge fortement vers $\nabla\Phi_R$ dans $[L^2(\mathbb{R}^N)]^N$. Le lemme est démontré. \square

On rappelle le lemme de prolongement suivant :

Lemme 5.2.4. *Soit B un ouvert borné de \mathbb{R}^N de frontière lipschitzienne. Il existe un opérateur de prolongement $P : H^1(B) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ linéaire et continu tel que*

$$\begin{aligned} (i) \quad & P(\Phi)|_B = \Phi, \\ \forall \Phi \in H^1(B), \quad (ii) \quad & \|P(\Phi)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\Phi\|_{L^2(B)}, \\ (iii) \quad & \|P(\Phi)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\Phi\|_{H^1(B)}. \end{aligned}$$

La constante ne dépend que de B .

Lemme 5.2.5. *Soit B un ouvert borné de \mathbb{R}^N de frontière lipschitzienne et \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^M . Il existe un opérateur de prolongement $\mathcal{P} : L^2(\mathcal{O}; H^1(B)) \longrightarrow L^2(\mathcal{O}; H^1(\mathbb{R}^N))$ linéaire et continu tel que*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \mathcal{P}(\Phi)|_B = \Phi, \\ \forall \Phi \in L^2(\mathcal{O}; H^1(B)), \quad (ii) \quad & \|\mathcal{P}(\Phi)\|_{L^2(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^N)} \leq C_P \|\Phi\|_{L^2(\mathcal{O} \times B)}, \\ (iii) \quad & \|\mathcal{P}(\Phi)\|_{L^2(\mathcal{O}; H^1(\mathbb{R}^N))} \leq C_P \|\Phi\|_{L^2(\mathcal{O}; H^1(B))}. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Démonstration. On note \mathbb{V} le sous-espace $L^2(\mathcal{O}; H^1(B))$ contenant les fonctions de la forme

$$\Phi(x, z) = \sum_{q=1}^k \alpha_q \mathbf{1}_{\mathcal{O}_q}(x) \phi_q(z) \quad \text{p.p. } (x, z) \in \mathcal{O} \times B, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

où $\phi_q \in H^1(B)$, $\alpha_q \in \mathbb{R}$ et où la suite d'ouverts $\{\mathcal{O}_q\}_{1 \leq q \leq k}$ satisfait

$$\mathcal{O}_q \subset \mathcal{O}, \quad \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset \quad 1 \leq i \neq j \leq k, \quad \mathcal{O} = \text{int} \left(\bigcup_{q=1}^k \overline{\mathcal{O}_q} \right).$$

L'espace \mathbb{V} est dense dans $L^2(\mathcal{O}; H^1(B))$ pour la topologie forte de ce dernier.

Etape 1. On évalue la norme L^2 de Φ et de $\nabla_z \Phi$ pour $\Phi \in \mathbb{V}$.

On a

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{L^2(\mathcal{O} \times B)}^2 &= \int_{\mathcal{O} \times B} |\Phi(x, z)|^2 dx dz = \int_{\mathcal{O} \times B} \left| \sum_{q=1}^k \alpha_q \mathbf{1}_{\mathcal{O}_q}(x) \phi_q(z) \right|^2 dx dz \\ &= \int_{\mathcal{O} \times B} \sum_{q=1}^k \mathbf{1}_{\mathcal{O}_q}(x) (\alpha_q)^2 |\phi_q(z)|^2 dx dz = \sum_{q=1}^k \int_{\mathcal{O}_q \times B} (\alpha_q)^2 |\phi_q(z)|^2 dx dz \\ &= \sum_{q=1}^k (\alpha_q)^2 \int_{\mathcal{O}_q \times B} |\phi_q(z)|^2 dx dz = \sum_{q=1}^k (\alpha_q)^2 \int_{\mathcal{O}_q} \|\phi_q\|_{L^2(B)}^2 dx \\ &= \sum_{q=1}^k (\alpha_q)^2 \text{mesure}(\mathcal{O}_q) \|\phi_q\|_{L^2(B)}^2. \end{aligned}$$

De la même façon pour le gradient par rapport à z on obtient

$$\|\nabla_z \Phi\|_{L^2(\mathcal{O} \times B)}^2 = \sum_{q=1}^k (\alpha_q)^2 \text{mesure}(\mathcal{O}_q) \|\nabla_z \phi_q\|_{L^2(B)}^2.$$

Etape 2. On définit le prolongement des fonctions de \mathbb{V} .

Pour $\Phi \in \mathbb{V}$, $\Phi = \sum_{q=1}^k \alpha_q \mathbf{1}_{\mathcal{O}_q} \phi_q$ on pose

$$\mathcal{P}(\Phi) = \sum_{q=1}^k \alpha_q \mathbf{1}_{\mathcal{O}_q} P(\phi_q)$$

où P est l'opérateur de prolongement du lemme 5.2.4. La norme L^2 de $\mathcal{P}(\Phi)$ et $\nabla_z \mathcal{P}(\Phi)$ s'obtient en procédant comme dans l'étape 1.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(\Phi)\|_{L^2(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^N)}^2 &= \sum_{q=1}^k (\alpha_q)^2 \text{mesure}(\mathcal{O}_q) \|P(\phi_q)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2, \\ \|\nabla_z \mathcal{P}(\Phi)\|_{L^2(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^N)}^2 &= \sum_{q=1}^k (\alpha_q)^2 \text{mesure}(\mathcal{O}_q) \|\nabla_z P(\phi_q)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2. \end{aligned}$$

Le lemme 5.2.4 donne également

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(\Phi)\|_{L^2(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^N)}^2 &\leq C_P^2 \sum_{q=1}^k (\alpha_q)^2 \text{mesure}(\mathcal{O}_q) \|\phi_q\|_{L^2(B)}^2 = C_P^2 \|\Phi\|_{L^2(\mathcal{O} \times B)}^2, \\ \|\nabla_z \mathcal{P}(\Phi)\|_{L^2(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^N)}^2 &\leq C_P^2 \sum_{q=1}^k (\alpha_q)^2 \text{mesure}(\mathcal{O}_q) \|\nabla_z \phi_q\|_{L^2(B)}^2 = C_P^2 \|\nabla \Phi\|_{L^2(\mathcal{O} \times B)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient un opérateur \mathcal{P} linéaire et continu de \mathbb{V} sur son image $\mathcal{P}(\mathbb{V}) \subset L^2(\mathcal{O}; H^1(\mathbb{R}^N))$ vérifiant

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Phi)|_B &= \Phi, \\ \forall \Phi \in \mathbb{V}, \quad \|\mathcal{P}(\Phi)\|_{L^2(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^N)} &\leq C_P \|\Phi\|_{L^2(\mathcal{O} \times B)}, \\ \|\nabla_z \mathcal{P}(\Phi)\|_{L^2(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^N)} &\leq C_P \|\nabla \Phi\|_{L^2(\mathcal{O} \times B)}. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Etape 3. On définit le prolongement des fonctions de $L^2(\mathcal{O}; H^1(B))$.

Soient $\Phi \in L^2(\mathcal{O}; H^1(B))$ et $\{\Phi_m\}_m, \{\Phi'_m\}_m$ deux suites de fonctions de \mathbb{V} vérifiant

$$\begin{aligned} \Phi_m &\longrightarrow \Phi, \\ \Phi'_m &\longrightarrow \Phi, \end{aligned} \quad \text{fortement dans } L^2(\mathcal{O}; H^1(B)).$$

On a $\|\mathcal{P}(\Phi_m) - \mathcal{P}(\Phi'_m)\|_{L^2(\mathcal{O}; H^1(\mathbb{R}^N))} = \|\mathcal{P}(\Phi_m - \Phi'_m)\|_{L^2(\mathcal{O}; H^1(\mathbb{R}^N))} \leq C_P \|\Phi_m - \Phi'_m\|_{L^2(\mathcal{O}; H^1(B))}$.
 Les suites $\{\mathcal{P}(\Phi_m)\}_m, \{\mathcal{P}(\Phi'_m)\}_m$ convergent donc vers la même limite dans $L^2(\mathcal{O}; H^1(B))$.
 On note cette limite $\mathcal{P}(\Phi)$ elle ne dépend donc pas de la suite de \mathbb{V} convergeant vers Φ dans $L^2(\mathcal{O}; H^1(B))$.

Etape 4. Linéarité de l'opérateur \mathcal{P} .

Soient $(\Phi_1, \Phi_2) \in [L^2(\mathcal{O}; H^1(B))]^2$ et $\{\Phi_{1,m}\}_m, \{\Phi_{2,m}\}_m$ deux suites de fonctions de \mathbb{V} vérifiant

$$\begin{aligned} \Phi_{1,m} &\longrightarrow \Phi_1, \\ \Phi_{2,m} &\longrightarrow \Phi_2, \end{aligned} \quad \text{fortement dans } L^2(\mathcal{O}; H^1(B)).$$

Par construction, l'opérateur \mathcal{P} est linéaire sur \mathbb{V} . Donc pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\mathcal{P}(\lambda\Phi_{1,m} + \mu\Phi_{2,m}) = \lambda\mathcal{P}(\Phi_{1,m}) + \mu\mathcal{P}(\Phi_{2,m}).$$

Le passage à la limite donne

$$\mathcal{P}(\lambda\Phi_{1,m} + \mu\Phi_{2,m}) \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2), \quad \text{fortement dans } L^2(\mathcal{O}; H^1(B))$$

et

$$\lambda\mathcal{P}(\Phi_{1,m}) + \mu\mathcal{P}(\Phi_{2,m}) \longrightarrow \lambda\mathcal{P}(\Phi_1) + \mu\mathcal{P}(\Phi_2) \quad \text{fortement dans } L^2(\mathcal{O}; H^1(B)).$$

Finalement

$$\forall (\Phi_1, \Phi_2) \in [L^2(\mathcal{O}; H^1(B))]^2 \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{on a } \mathcal{P}(\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2) = \lambda\mathcal{P}(\Phi_1) + \mu\mathcal{P}(\Phi_2).$$

Egalement par passage à la limite on obtient que le prolongement vérifie (5.42) (ii)-(iii). \square

Procédant de façon analogue, on montre qu'il existe un opérateur de prolongement de $H_0^1(0, T; L^2(\Omega; H^1(B)))$ dans $H_0^1(0, T; L^2(\Omega; H^1(\mathbb{R}^N)))$ tel que pour toute fonction Φ appartenant à $H_0^1(0, T; L^2(\Omega; H^1(B)))$ son prolongement $\bar{\Phi}$ appartenant à $H_0^1(0, T; L^2(\Omega; H^1(\mathbb{R}^N)))$ satisfait

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(t, x, z) &= \Phi(t, x, z) \quad \text{p.p. } (t, x, z) \in \Omega^T \times B, \\ \|\bar{\Phi}\|_{H_0^1(0, T; L^2(\Omega; H^1(\mathbb{R}^N)))} &\leq C \|\Phi\|_{H_0^1(0, T; L^2(\Omega; H^1(\mathbb{B})))}. \end{aligned}$$

On notera dans ce cas que le sous-espace de $H_0^1(0, T; L^2(\Omega; H^1(B)))$ contenant les fonctions de la forme

$$\Phi(t, x, z) = \sum_{q=1}^k \alpha_q(t) \mathbf{1}_{\Omega_q}(x) \phi_q(z) \quad \text{p.p. } (t, x, z) \in (0, T) \times \Omega \times B, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

où $\phi_q \in H^1(B)$, $\alpha_q \in H_0^1(0, T)$ et où la suite d'ouverts $\{\Omega_q\}_{1 \leq q \leq k}$ satisfait

$$\Omega_q \subset \Omega, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad 1 \leq i \neq j \leq k, \quad \Omega = \text{int} \left(\bigcup_{q=1}^k \overline{\Omega_q} \right)$$

est dense dans $H_0^1(0, T; L^2(\Omega; H^1(B)))$ pour la topologie forte de ce dernier.

Lemme 5.2.6. *Pour tout $\Phi \in L^2(\Omega \times (0, +\infty))$ on a*

$$\|\widehat{\Phi}(p)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{p} \|\Phi\|_{L^2(\Omega \times (0, +\infty))}^2$$

Démonstration. La transformé de Laplace $\widehat{\Phi}(p)$ est égale à

$$\widehat{\Phi}(p)(x) = \int_0^{+\infty} \Phi(t, x) \exp(-pt) dt \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

La fonction $(t, x) \mapsto \Phi(t, x) \exp(-pt)$ appartient à $L^2(\Omega \times (0, +\infty))$. D'où, en appliquant Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\widehat{\Phi}(p)(x)|^2 dx &\leq \int_{\Omega} \left(\int_0^{+\infty} |\Phi(t, x)| \exp(-pt) dt \right)^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\int_0^{+\infty} |\Phi(t, x)|^2 dt \right) \left(\int_0^{+\infty} \exp(-pt) dt \right) dx \\ &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} \int_0^{+\infty} |\Phi(t)|^2 dt dx. \end{aligned}$$

Ce qui donne l'estimation du lemme. □

Bibliographie

- [1] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou. Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North-Holland Publishing Company-Amsterdam. New York. Oxford, 1978.
- [2] A. Blasselle, G. Griso. Mechanical modeling of the skin. Asymptotic Analysis, vol. 74, no. 3-4, pp. 167-198, 2011.
- [3] A. Delalleau, Analyse du comportement mécanique de la peau in vivo, thèse de Mécanique, 27 Avril 2007.
- [4] B.Amaziane, L.Pankratov, A.Piatnitski. Homogenization of a single phase flow in a porous medium containing a thin layer. Math Models Methodes Appl Sci. 2007 ;17 :1317-1349.
- [5] D. Blanchard, A. Gaudiello, G. Griso. Junction of a periodic family of elastic rods with a $3d$ plate. Part I. J. Math. Pures Appl. 88, 1, 2007, 1-33.
- [6] D. Blanchard, A. Gaudiello, G. Griso. Junction of a periodic family of elastic rods with a thin plate. Part II. J. Math. Pures Appl. 88, 2, 2007, 149-190.
- [7] D. Blanchard, G. Griso. Microscopic effects in the homogenization of the junction of rods and a thin plate. Asymp. Anal. 56, 1, 2008, 1-36.
- [8] D. Blanchard, G. Griso. Asymptotic behavior of structures made of straight rods. J. Elast. 108, 1, 2012, 85-118.
- [9] D. Blanchard, G. Griso. Junction between a plate and a rod of comparable thickness in nonlinear elasticity. J. Elast., 112, 2, 2013, 79-109.
- [10] D. Blanchard, G. Griso. Asymptotic behavior of a structure made by a plate and a straight rod. Chinese Annals of Mathematics, Series B 34 (3), (2013), 399-434.

-
- [11] D. Cioranescu, A. Damlamian, and G. Griso. Periodic unfolding and homogenization. 1335, C. R. Acad. Sci. Paris, pages 99, 104, 2002. 28
- [12] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso. Periodic unfolding method in homogenization, SIAM J. Math. Anal. 40 (2008), (4), 1585-1620.
- [13] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, D. Onofrei. The periodic unfolding method for perforated domains and Neumann sieve models, J. Math. Pures Appl. 89 (2008) 248-277.
- [14] D. Cioranescu and F. Murat, Un terme étrange venu d'ailleurs, in *Nonlinear partial differential equations and their applications, College de France Seminar, II & III*, H. Brezis and J.L. Lions (eds), Research Notes in Math. 60-70, Pitman, Boston (1982), 98–138, 154–178.
- [15] D. Cioranescu, P. Donato, An Introduction to Homogenization. Oxford Lecture Ser. in Math. Appl. 17, Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [16] F. Bentalha, I. Gruais, D. Poliřevski. A diffusion process in a rarefied binary structure. Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 52(2), 129-149, 2007.
- [17] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, SIAM J. Math. Anal., 23 (1992), pp. 1482-1518.
- [18] G. Allaire, C. Conca et M. Vanninathan, Spectral asymptotics of the Helmholtz model in fluid-solid structures, Internat. Jour. Numer. Methods Engrg. 46, Vol. 9, (1999), p. 1463- 1504.
- [19] G. Duvaut, Mécanique des milieux continus, Dunod, Masson, Paris 1998.
- [20] G.Griso, A.Migunova, J.Orlik. Asymptotic analysis for domains separated by a thin layer made of periodic vertical beams. J Elast.2017;128(2) :291-331. DOI :10.1007/s10659-017-9628-3
- [21] G. Griso, Asymptotic behavior of curved rods by the unfolding method, Math. Meth. Appl. Sci., 2004 ; 27 : 2081-2110.
- [22] Griso, Asymptotic behavior of structures made of curved rods. Analysis and Applications 6 (01), 2008, 11-22.

-
- [23] G. Griso. Decomposition of displacements of thin structures. *J. Math. Pures Appl.* 89, 1, 2008, 199-233.
- [24] G. Griso. Asymptotic behavior of Structures made of Plates. *Analysis and Applications* 3, 4, 2005), 325-266.
- [25] G. Griso, M.T. Sánchez, Homogenization of an elasticity problem for a catalyst support by using the unfolding method. *Asymptotic Analysis*, vol. 67, no. 102, pp. 45-84, 2010.
- [26] G. Nguetseng, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 20, (1989), p. 608-629.
- [27] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Dunod.
- [28] H. Le Dret. *Problèmes variationnels dans les multi-domaines : modélisation des jonctions et applications*, Research in Applied Mathematics, Vol. 19, Masson, Paris, 1991.
- [29] H.V.Tran, F.Charleux, A.Ehrlacher, M.C. Ho Ba Tho, Propriétés mécaniques multicouches de la peau humaine in vivo. *Colloque National en Calcul des Structures*. 2005
- [30] I. Gruais. Homogenizing a highly rarefied binary structure of finite diffusivity. *Applicable Analysis* 86 (2007), 633-652.
- [31] I. Gruais. Modélisation de la jonction entre une plaque et une poutre en élasticité linéarisée, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 2(1) (1993) 77-105.
- [32] I. Gruais, D. Poliševski. Homogenizing a critical binary structure of finite diffusivities. *Asymptotic Analysis* 55 (2007), 85-101.
- [33] J.L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, 1969.
- [34] L. Debnath, D. Bhatta. *Integral Transformation and Their Applications*. A Chapman & Hall Book /CRC Press, 2007.
- [35] L. Tartar, Cours Peccot au Collège de France, Unpublished, partially written in Meyers, 1977.
- [36] L. Trabucho, J.M. Viano. *Mathematical Modelling of Rods*, Hand-book of Numerical Analysis, vol. 4, North-Holland, Amsterdam, 1996.

- [37] M.Ghergu, G.Griso, H.Mechkour, B.Miara. Homogenization of thin piezoelectric perforated shells, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 41, (2007), 5, 875-895.
- [38] M.R. Spiegel. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Laplace Transforms.* McGRAW-HILL, 1965.
- [39] P. Donato, D. Cioranescu, and R. Zaki. Periodic unfolding and robin problems in perforated domains. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 2006.
- [40] P. Donato, L. N. Hang, and R. Tardieu. The periodic unfolding method for a class of imperfect transmission problems. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, Springer, 2011.
- [41] P. G. Ciarlet, *Plates and junctions in elastic multi-structures : an asymptotic analysis.* Masson, 1990.
- [42] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Volume I : Three-dimensional elasticity, Studies in Mathematics and its Applications*, 1988 North-Holland.
- [43] P. G. Ciarlet, *Mathematical elasticity, Volume II : Theory of plates, Studies in mathematics and its applications ;* 1997 ELSEVIER.
- [44] R.A. Adams and J.J.F.Fournier, *SOBOLEV SPACES*
- [45] R. Dautray, J.L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 5, Evolution Problems I.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1992, 2000.
- [46] T. Arbogast, J. Douglas et U. Hornung, Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, Vol. 21, (1990), p. 823-836.
- [47] V.A. Marchenko, EY Khruslov. *Homogenization of partial differential equations.* Boston : Birkhäuser ; 2006.