

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ BATNA 2
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Docteur en Sciences
Spécialité : MÉCANIQUE
Option : CONSTRUCTION MÉCANIQUE

Par
Mohamed MASMOUDI

THÈME

**Elaboration d'un modèle numérique du
comportement élastoplastique pour la détermination
des champs de contraintes et de déformations
dans les structures composites**

Soutenue publiquement le 20.12.2017 devant le jury :

Mourad BRIOUA	Professeur, Université Batna 2	Président
Salah MADANI	Professeur, Université Batna 2	Rapporteur
Salah RAMTANI	Professeur, Université Paris 13, France	Co-rapporteur
Kamel ZIDANI	Professeur, Université Batna 2	Examineur
Mabrouk HECINI	Professeur, Université de Biskra	Examineur
Boudjemaa AGOUDJIL	Professeur, Université Batna 1	Examineur
Toufik KANIT	Professeur, Université Lille 1, France	Invité

A ma mère,

à ma mère,

à ma mère,

à mon père,

à mes frères et sœurs,

à ma femme et mes enfants,

à mes amis

et à tous mes proches.

Résumé

Une technique d'homogénéisation numérique et une analyse morphologique basée sur la méthode des éléments finis sont utilisées pour calculer les propriétés mécaniques des matériaux poreux de type lotus. Ceci est réalisé en considérant une matrice poreuse 2D contenant une distribution aléatoire de vides circulaires ou elliptiques identiques sans percolation. Plusieurs configurations de microstructures sont obtenues en faisant varier la morphologie des vides et la porosité de la matrice. Des images virtuelles de ces microstructures ont été générées et une série de simulations ont été effectuées pour déterminer le volume élémentaire représentatif V.E.R. optimal ainsi que le maillage adéquat qui serviront dans les calculs afin d'estimer l'effet de la morphologie des vides sur le comportement élastoplastique de ces microstructures. Deux propriétés mécaniques sont étudiées, la résistance maximale à la traction et le module tangent plastique. Les résultats ont montré que l'effet de la morphologie sur les deux propriétés étudiées est notable. Une confrontation des résultats numériques obtenus, des microstructures représentatives pour différentes morphologies de vides et différentes porosités, à un modèle analytique et à des données expérimentales trouvés dans la littérature est réalisée et une bonne concordance a été constatée.

Mots clés: Homogénéisation numérique; Volume élémentaire représentatif; Matériaux poreux de type Lotus; Résistance maximale effective à la traction; Module tangent plastique effectif; Analyse morphologique

Abstract

A numerical homogenization technique and morphological analysis based on the finite element method are used to calculate the mechanical properties of porous lotus materials. This is achieved by considering two-dimensional porous matrix containing random distribution of identical non-overlapping circular or elliptic voids. Several microstructure configurations are obtained by varying the voids morphology and the porosity of the matrix. Virtual images of these microstructures were generated and a series of simulations were performed to determine the representative volume element R.V.E. and the appropriate mesh size that will be used in the calculations to estimate the effect of void morphology on the elastoplastic behavior of these microstructures. Two mechanical properties are studied, the Ultimate Tensile Strength (UTS) and the Plastic Tangent Modulus (PTM). The results showed that the effect of morphology on the two properties studied is notable. A comparison of the obtained numerical results, of representative microstructures for different void morphologies and different porosities, with an analytical model and experimental data found in the literature is carried out and good agreement was found.

Keywords: Numerical homogenization; Representative volume element; Lotus-type porous materials; Effective Ultimate Tensile Strength; Effective tangent plastic modulus; Morphological Analysis

Remerciements

Bien que l'on dispose d'une infinité de modèles de l'anatomie de cette partie remerciements, mais, semble-t-il, la rédiger est une tâche délicate. Peut-on y raconter sa vie ? quelles expressions doit-on choisir ? Doit-on nommer tout le monde ? A-t-on droit à un peu d'humour ? Ou bien faut-il rester dans ce contexte académique ? Oh combien ça me tente et " le seul moyen de se délivrer de la tentation, c'est d'y céder" !

Enfin, j'y suis ! Arrivé à ce stade de la rédaction veut dire que j'ai bel et bien terminé ma thèse, Dieu merci. J'avoue que ça fait vraiment une éternité depuis ma première inscription en doctorat et qu'il fallait coûte que coûte soutenir ma thèse dans les meilleurs délais comme "tout le monde" mais il fallait aussi gagner sa vie et "c'est très difficile" surtout lorsque conditions favorables et "chance" ne sont pas de votre côté ! En tout cas, je n'étais pas le seul à qui le destin a réservé le parcours du combattant, c'est le cas de tout le groupe dit "Bahadiches" dont la majorité des membres sont aujourd'hui docteurs, oh que ça fait plaisir et c'est un grand honneur. Finalement, il est vrai que "mieux vaut tard que jamais" !

Cette modeste thèse est le fruit d'une coopération entre le Laboratoire de Mécanique des Structures et Matériaux (LaMSM) de l'Université Batna 2 en Algérie et le Laboratoire de Mécanique de Lille (LML) de l'université Lille 1 en France. Cette collaboration est à l'origine de plusieurs publications dans des revues de renommé, particulièrement de classe supérieure et de bon nombre de thèses.

Nul doute qu'elle est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu mener à bien ce travail de doctorat sans l'aide et le soutien d'Allah, et d'un grand nombre de personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt manifestés à l'égard de ma recherche m'ont permis de progresser dans cette phase délicate de "l'apprenti-chercheur".

C'est avec un grand honneur que je me permets d'exprimer mes profonds et sincères remerciements à mon directeur de thèse Salah MADANI pour ses conseils, son soutien et sa disponibilité tout au long de ce travail et à mon co-directeur de thèse Salah RAMTANI, aussi, pour ses conseils, son soutien et surtout pour son accueil à l' IUT Saint-Denis à l'université Paris 13. Je les remercie pour tout ce qu'ils ont fourni et ce malgré leurs engagements scientifiques et administratifs. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Je ne saurais trouver les mots pour adresser mes remerciements les plus vifs à monsieur Mourad BRIOUA collègue, ami et frère, tout d’abord, pour m’avoir encouragé, facilité les procédures administratives et pour avoir, ensuite, accepté de présider mon jury de thèse, c’est un grand honneur pour moi. Mes vifs remerciements sont également adressés à messieurs Kamel ZIDANI, Mabrouk HECINI ainsi que Boudjemaa AGOUDJIL d’avoir accepté de faire partie du jury pour juger ce travail.

Je souhaite ici adresser un remerciement tout exceptionnel à mon ami et collègue Wahid KADDOURI à qui notre groupe doit la compréhension des notions du “monde de l’homogénéisation”. Il a consacré un temps précieux de sa vie pour se forger une expérience dont on a pleinement bénéficiée. Il a su créer un noyau de compétences, au sein du Laboratoire de Mécanique des Structures et Matériaux (LaMSM), autour duquel bon nombre de doctorants gravite. Je ne sais pas comment te remercier Wahid pour les calculs et pour avoir toujours su surmonter ces difficultés numériques ainsi que pour tout ce que tu m’as appris. C’est un grand honneur pour moi et un immense plaisir de t’avoir croisé dans ma vie.

Je remercie aussi et chaleureusement la contribution fructueuse de Toufik KANIT, notre “parrain”, à qui l’on doit ce grand axe de recherches qui est « L’homogénéisation » et les différentes perspectives qui en découlent, c’est lui qui nous a guidés dans ce chemin et il a bien su le faire. Je te remercie Toufik, aussi, pour nous avoir bien accueillis à Lille et pour les agréables moments passés ensemble.

Mes remerciements vont aussi à monsieur Toufik OUTTAS, directeur du Laboratoire (LaMSM) qui, de par sa bonne gouvernance, nous a permis de tisser des liens avec des laboratoires dans des universités françaises et de bénéficier de visites et de stages ce qui nous a facilité la tâche dans l’accomplissement de nos travaux de recherche.

Je n’oublierai pas Mahieddine NAOUN (Didine) et son aide ô combien précieuse ! Il a toujours répondu présent pour nous faire les traductions dans des délais records. Merci infiniment Didine pour tes encouragements, tes conseils et pour les moments passés ensemble.

J’aimerais aussi saisir cette occasion pour saluer et remercier notre brave ami Fayçal KHIRREDDINE, propriétaire du “Le Timgad” à Lille, pour son accueil chaleureux et sympathique, et pour sa disponibilité pendant nos séjours. Merci Fayçal pour tous ces savoureux repas.

Mes remerciements les plus chaleureux et sincères à mes amis et collègues du bureau, Abdellah BOURIH pour sa sympathie, son humour et ses encouragements, Ahmed BOUSSAHA pour sa gentillesse, sa patience et ses encouragements et Wahid KADDOURI pour sa disponibilité et sa générosité sans limite. Je remercie aussi Kouka pour son assistance et pour le café.

Mes remerciements s’adressent également à tous les amis, collègues, enseignants et doctorants du département de mécanique et du laboratoire (LaMSM) qui, de près ou de loin, ont

contribué à l'aboutissement de ce travail. Je remercie notamment mes enseignants, Nouredine SAIDANI, Hocine BENMOUSSA, Salah DERRADJI, Brahim MOHAMEDI, Hammoudi MAZOUZ, Boubaker ZAOUCH, Rachid MENINA, Laid MESSAOUDI, Boulakhras KARI, Mohamed GHEZAL et mes collègues Djamel BAATACHE, Abdennour BENHIZIA (Malik), Mourad MENASRIA, Yacine DEMAGH et Hakim MADANI sans oublier mes anciens enseignants des écoles primaire, moyenne et secondaire, à qui je rends un grand hommage. Et que tous ceux qui ne trouvent pas leurs noms ici me pardonnent.

Je remercie également mes chers amis Abdelhafidh BOUTOUIL, Abdelhafidh MELAKHESSOU, Rafik MAKHLOUFI, Azeddine HELEILI, Hakim KAIDI, Ghazali MEBARKI, Faouzi MIMOUNE, Mokhtar KHALLOUT, Youcef TAMENE, Nouredine HABICHE et Samir ACHOURI pour leurs encouragements et soutien moral. Jamais je n'oublierai la mémoire de mes chers amis les défunts Mourad BOUZIDI et Farid AMADJI.

Enfin, je remercie ma grande et ma petite familles. En particulier, ma mère qui n'a cessé de prier pour que je réussisse, mon père, mes frères et sœurs, ma femme, mes enfants, tous les cousins et cousines et tous mes proches, merci pour vos encouragements et soutiens.

M.M. Batna 15.11.2017

Notations

Cette liste de notations n'est pas exhaustive, les notations de plusieurs autres paramètres sont définies aux paragraphes dans lesquels elles sont introduites.

σ_{ij}	Tenseur du deuxième ordre des contraintes du matériau hétérogène
ε_{ij}	Tenseur du deuxième ordre des déformations du matériau hétérogène
Σ_{ij}	Tenseur du deuxième ordre des contraintes macroscopiques du matériau homogène
E_{ij}	Tenseur du deuxième ordre des déformations macroscopiques du matériau homogène
σ_{max}	Résistance maximale à la traction
σ_{max}^{eff}	Résistance maximale effective à la traction
H_m	Module tangent plastique de la matrice
H_m^{eff}	Module tangent plastique effectif
$\langle \rangle$	Moyenne
c_{ijkl}	Tenseur local d'élasticité
s_{ijkl}	Tenseur local de souplesse
C_{ijkl}	Tenseur apparent d'élasticité
S_{ijkl}	Tenseur apparent de souplesse
P	Fraction volumique
N	Nombre de pores
n	Nombre de réalisations
k	Module de compressibilité
μ	Module de cisaillement
u	Déplacement
V	Volume du domaine 3D
∂V	Limites du domaine 3D
VER	Volume élémentaire représentatif
E	module d'élasticité
i	Indice correspondant à l'inclusion.
m	Indice correspondant à la matrice

ph	Indice de la phase
d	Taille de l'hétérogénéité
l	Taille du VER
L	Taille de la structure
A_{ijkl}	Tenseur de localisation des déformations
B_{ijkl}	Tenseur de localisation des contraintes
A, B, C, F	Paramètres de fittage
a, b, c, d, f, g	Paramètres de fittage
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Paramètres de fittage

Table des matières

Introduction générale	1
1 La technique d'homogénéisation	7
1.1 Introduction	7
1.2 Généralités sur les matériaux hétérogènes	9
1.2.1 Matériaux composites	9
1.2.2 Matériaux poreux	10
1.3 Effet d'échelles dans les matériaux hétérogènes	11
1.4 Principe et objectif de l'homogénéisation	11
1.4.1 Représentation	12
1.4.2 Localisation	14
1.4.3 Homogénéisation	14
1.4.4 Condition de HILL	15
1.4.4.1 Conditions aux limites et moyenne des champs locaux	15
1.4.5 Propriétés apparentes et effectives	16
1.5 Techniques d'homogénéisation	19
1.5.1 Les méthodes analytiques	20
1.5.2 Les méthodes numériques	20
1.5.2.1 Les méthodes intégrées	20
1.5.2.2 Les méthodes séquencées	20
1.5.3 Notion de VER dans un matériau hétérogène	21
1.6 Estimations analytiques des propriétés élastiques	23
1.6.1 Estimations analytiques	23
1.6.1.1 Einstein (1906-1911)	23
1.6.1.2 Smallwood (1944)	23
1.6.1.3 Guth-Gold (1938)	23
1.6.1.4 Budiansky (1965)	24
1.6.2 Modèles analytiques de changement d'échelles	24

1.6.2.1	Problème de l'inclusion d'Eshelby	24
1.6.2.2	Schéma des distributions diluées	25
1.6.2.3	Modèle auto-cohérent	26
1.6.2.4	Mori-Tanaka (1973)	26
1.6.3	Encadrement analytique	27
1.6.3.1	Bornes d'ordre zéro	27
1.6.3.2	Bornes du premier ordre	28
1.6.3.3	Bornes du second ordre [Dirrenberger, 2012]	30
1.7	Homogénéisation numérique	32
1.7.1	Homogénéisation numérique par des microstructures virtuelles	33
1.7.2	Homogénéisation numérique par des microstructures réelles	34
1.8	Rappel théorique du comportement élastoplastique des structures	37
1.8.1	Elastoplasticité	37
1.8.2	Critère de limite élastique ou d'épuisement	39
1.8.3	Règle d'écrouissage	39
1.8.3.1	Ecrouissage isotrope	39
1.8.3.2	Ecrouissage cinématique	40
1.8.4	Règle d'écoulement	41
1.8.5	Résolution des systèmes non linéaires	43
1.8.5.1	Méthodes incrémentales	44
1.8.5.2	Méthodes itératives	45
1.8.5.3	Méthodes mixtes	46
1.8.5.4	Méthode itérative directe	46
1.8.5.5	Méthode de Newton-Raphson	47
1.8.5.6	Méthode de la rigidité initiale ou de Newton-Raphson modifiée	48
1.8.5.7	Critères de convergence	49
1.8.5.8	Risques de divergence et remèdes	49
1.9	Modèles de changement d'échelles en mécanique non linéaire	50
1.9.1	Approches par champs moyens	51
1.9.2	Approches par champs de transformation	51
1.9.3	Analyse par champs de transformation non uniforme	51
1.9.4	Modèle de Kröner (1961)	52
1.9.5	Formulation incrémentale de Hill (1965)	52
1.9.6	Hutchinson (1976). Formulation sécante	53
1.9.7	Berveiller et Zaoui (1979). Loi en β	54
1.9.8	Formulation affine	55

1.9.9	Pedro Ponte Castañeda (1992)	56
1.9.10	Méthode FE ²	56
1.10	Synthèse	58
2	Résistance maximale effective à la traction des matériaux poreux	59
2.1	Introduction	59
2.2	Résistance maximale (ultime) à la traction. Rappel	59
2.3	Description des matériaux de type lotus	61
2.3.1	Définition des matériaux	61
2.3.2	Propriétés des métaux poreux de type lotus	62
2.3.3	Bref aperçu du modèle analytique utilisé	62
2.4	Génération des microstructures et homogénéisation numérique	63
2.4.1	Morphologie des microstructures	63
2.4.2	Conditions aux limites	65
2.4.3	Maillage éléments finis	65
2.4.4	Nombre de réalisations et taille du VER	66
2.5	Résultats numériques et modèle proposé	71
2.5.1	Résistance maximale à la traction versus taille des pores	71
2.5.2	Résistance maximale à la traction versus forme des pores	73
2.5.3	Relation représentative effective	75
2.5.4	Comparaison des résultats numériques au modèle analytique	79
2.6	Synthèse	80
3	Module tangent plastique effectif des matériaux poreux	81
3.1	Introduction	81
3.2	Génération des microstructures et homogénéisation numérique	81
3.2.1	Morphologie des microstructures	81
3.2.2	Conditions aux limites	83
3.2.3	Maillage éléments finis	83
3.3	Résultats numériques et modèle proposé	86
3.3.1	Effet de la morphologie des pores sur le MTPE	86
3.3.1.1	Variation du comportement en fonction de la fraction volumique	86
3.3.1.2	Variation du comportement en fonction du rapport de forme .	86
3.3.2	Relation représentative effective	93
3.3.3	Comparaison des résultats numériques au modèle analytique	95
3.4	Synthèse	96

Conclusion	98
Annexes	100
A Outils utilisés dans cette thèse	101
A.1 Le code de calcul ZéBuLoN	101
A.2 Digimat 	102
A.3 ABAQUS 	102
A.4 Grapher 	102
A.5 Gnuplot	103
A.6 Lyx 	103
B Tableaux des maillages (<i>H</i>)	104
C Gasar	105
Bibliographie	105

Table des figures

1.1	Exemple de matériaux hétérogènes multiphasiques : (a) réel (Institut Mines-Télécom), (b) virtuel (simulé, Mines Pris-Tech)	9
1.2	Composites hétérogènes de renforts : (a) fibres (MT Aerospace AG, Augsburg) et (b) particules (Lermps, utbm).	10
1.3	Milieus poreux : (a) microstructures, (b) mousse métallique, (c) cuivre poreux type Lotus (CNRS Photothèque/ISM)	11
1.4	Principe d’homogénéisation d’une microstructure hétérogène	12
1.5	Echelles de représentation en homogénéisation	13
1.6	Exemple de VERs d’une microstructure hétérogène,[Gitman et al., 2007].	21
1.7	Problème de l’inclusion d’Eshelby	24
1.8	Etapes de l’homogénéisation numérique	33
1.9	Exemples de microstructures virtuelles	34
1.10	Exemples de microstructures réelles : (a) Bronze (Wikipédia), (b) Crème glacée ([Kanit et al., 2006] et Neige (Liris, CNRS)	34
1.11	Etapes de préparation d’une microstructure réelle pour la simulation[El moumen, 2014]	35
1.12	Modèles de comportements mécaniques	37
1.13	Effet Bauschinger	38
1.14	Ecrouissage isotrope	40
1.15	Ecrouissage cinématique	41
1.16	Relations élastoplastiques	43
1.17	Méthode incrémentale	45
1.18	Méthodes itératives	45
1.19	Méthodes mixtes (incrémentales/itératives)	46
1.20	Méthode itérative directe	47
1.21	Méthode de Newton-Raphson	48
1.22	Méthode de la rigidité initiale (ou de Newton-Raphson modifiée)	48
1.23	Représentation schématique de la méthode (FE ²) [Hoang, 2015].	57

2.1	Courbe contrainte-déformation typique d'un acier structural : Engineering (rouge) et réelle (bleu)	60
2.2	Microstructure de cuivre poreux de type lotus, [Nakajima., 2013]	61
2.3	Résistances maximales à la traction perpendiculaire et parallèle	62
2.4	Paramètres de la géométrie des pores	64
2.5	Exemples de microstructures combinées par variation du rapport de forme et de la fraction volumique du vide : (a) $r = 0.2$, $P = 15\%$, (b) $r = 0.3$, $P = 30\%$, (c) $r = 0.5$, $P = 30\%$, et (d) $r = 1$, $P = 50\%$	64
2.6	Description des conditions aux limites	65
2.7	(a) Grille d'éléments finis, (b) microstructure initiale (c) microstructure maillée	66
2.8	Test de convergence : (a) Temps de simulation, (b) résistance maximale effective à la traction	67
2.9	Exemples de microstructures de fraction volumique $P = 0.5$ (50 %)	68
2.10	Exemples de courbes contrainte-déformation apparentes (lignes claires) et comparaison avec la courbe moyenne (ligne sombre) pour différentes configurations avec $P=50\%$. (a) $N=5$, $n=28$, (b) $N=20$, $n=14$, (c) $N=50$, $n=8$	69
2.11	Exemples de courbes contrainte-déformation apparentes (lignes claires) et comparaison avec la courbe moyenne (ligne sombre) pour différentes configurations avec $P=50\%$. (d) $N=100$, $n=8$, (e) $N=200$, $n=4$ et (f) $N=300$, $n=2$	70
2.12	Section transversale d'un matériau poreux de type lotus, Nakajima (2013)	71
2.13	Microstructures à deux populations	72
2.14	Équivalence entre simple et multiple microstructures de matériaux poreux en termes de fractions volumiques égales	72
2.15	Résistance maximale effective à la traction en fonction de la fraction volumique P_2	73
2.16	Résistance maximale à la traction effective en termes du rapport de forme	74
2.17	Fittage (ajustement) du paramètre A	76
2.18	Résultats numériques (points) et formule proposée	77
2.19	Comparaison de la formule proposée aux résultats expérimentaux de Hyun et al. (2001) et Nakajima et al. (2010)	78
2.20	Résultats numériques comparés au modèle de Bocaccini : (a) résultats numériques et formule proposée, (b) résultats numériques et modèle de Bocaccini	79
3.1	Paramètres de la géométrie des pores	82
3.2	Exemples de microstructures combinées par variation du rapport de forme et de la fraction volumique du vide : (a) $r = 0.2$, $P = 10\%$, (b) $r = 0.3$, $P = 30\%$, (c) $r = 0.5$, $P = 30\%$, et (d) $r = 1$, $P = 50\%$	82

3.3	Description des conditions aux limites pour l'étude du MTPE	83
3.4	Exemples de maillages libres	84
3.5	Test de maillage : (a) Comportement effectif de la microstructure comparé à la matrice, (b) Zoom sur le comportement	85
3.6	Comportement effectif en termes de fraction volumique pour $r = 0.2$	87
3.7	Comportement effectif en termes de fraction volumique pour $r = 0.3$	87
3.8	Comportement effectif en termes de fraction volumique pour $r = 0.4$	88
3.9	Comportement effectif en termes de fraction volumique pour $r = 0.5$	88
3.10	Comportement effectif en termes de fraction volumique pour $r = 1$	89
3.11	Comportement effectif en termes du rapport de forme pour $P = 10\%$	89
3.12	Comportement effectif en termes du rapport de forme pour $P = 20\%$	90
3.13	Comportement effectif en termes du rapport de forme pour $P = 30\%$	90
3.14	Comportement effectif en termes du rapport de forme pour $P = 40\%$	91
3.15	Comportement effectif en termes du rapport de forme pour $P = 50\%$	91
3.16	Module tangent plastique effectif en termes du rapport de forme	92
3.17	Fittage du paramètre C	94
3.18	Résultats numériques (points) et formule proposée	96
C.1	Gasar : technique de fabrication des matériaux poreux de type Lotus	105

Liste des tableaux

1.1	Définitions du VER selon certaines références	22
2.1	Nombre des différentes réalisations utilisé pour chaque nombre fixé de vides	68
2.2	Paramètres de fittage (ajustement), σ_{max}^{Boc} étant la formule de Boccaccini	75
2.3	paramètres de fittage a, b et c	76
3.1	Eléments du maillage	84
3.2	Maillages des microstructures au rapport de forme $r = 0.2$	86
3.3	Variation de (H^{eff}/H_m) en fonction de P et r	93
3.4	Paramètres de fittage (ajustement)	94
3.5	paramètres de fittage d, f et g	95
B.1	Maillages des microstructures aux rapports de forme $r = 0.3, r = 0.4, r = 0.5$ et $r = 1.0$ respectivement	104

Introduction générale

Dans le calcul des structures et à une échelle ordinaire, des hypothèses simplificatrices supposent que les matériaux constitutifs sont homogènes. En réalité, tous les matériaux sont hétérogènes à une échelle inférieure, plus ou moins petite suivant les matériaux. Lorsque l'on descend à cette échelle, dite microscopique, on constate généralement que le matériau est constitué de différents constituants possédant des propriétés morphologiques, mécaniques et physiques différentes d'où son hétérogénéité. Afin de prédire le comportement effectif ou d'optimiser les caractéristiques de ces matériaux, il est nécessaire de tenir compte des effets de toutes ces hétérogénéités. Ceci est devenu aujourd'hui possible grâce aux progrès spectaculaires des puissants calculateurs ainsi que des performants codes de calculs permettant une meilleure exploitation des approches micromécaniques ou changement d'échelles. Le recours à la technique de l'homogénéisation numérique s'avère désormais incontournable du fait de la large gamme de matériaux exigée par le développement industriel et la complexité des phénomènes multiphysiques étudiés.

Parmi les matériaux hétérogènes largement utilisés dans l'industrie on trouve les matériaux composites avec leur grande variété selon la nature des différents renforts (inclusions) y compris les matériaux poreux qui, théoriquement, peuvent être considérés comme étant des composites à renforts très souples. Les matériaux poreux occupent une place importante aussi bien dans les sciences des matériaux que dans le monde des applications industrielles. Ce type de matériaux présentent, au delà de la légèreté, des caractéristiques physiques et mécaniques très intéressantes et se trouvent très répandus dans de nombreuses applications : matériaux de construction, supports de catalyseurs, électrodes, matériaux d'amortissement des vibrations et de l'énergie acoustique, matériaux d'absorption d'énergie à impact, échangeurs, refroidisseurs. Ils ont suscité l'intérêt de nombreux chercheurs en particulier au cours des trois dernières décennies. Leurs propriétés mécaniques et physiques telles que l'élasticité, la plasticité et la conductivité thermique ont été largement étudiées et les effets des différents paramètres de leurs microstructures comme la fraction volumique, la morphologie des pores, leurs orientations, largement investigués en se servant de la technique de l'homogénéisation numérique et de la souplesse des codes de calculs. L'objectif principal des techniques d'homogénéisation étant,

bien entendu, de définir un milieu homogène virtuel ayant “en moyenne” un comportement identique à l’assemblage observé à l’échelle microscopique. Pour ce faire, un objet d’étude est introduit, dénommé volume élémentaire représentatif (V.E.R.) du matériau hétérogène. Ce (V.E.R.) est un volume de matière qui est représentatif à l’échelle microscopique de la constitution interne du matériau.

Ceci dit, et vu les exigences de plus en plus accrues de l’ingénierie des matériaux, notamment l’amélioration des performances et des coûts, il est indispensable de déterminer les propriétés de ces matériaux de manière plus rigoureuse. C’est dans ce contexte qu’une série d’investigations a été entreprise suite à la proposition du Professeur Toufik KANIT de l’université Lille 1 en France et dont le but est l’étude du comportement mécanique et physique des composites/poreux basée sur la variation des différents paramètres des microstructures étudiées et cette thèse en fait partie.

Son objectif principal est l’étude du comportement élastoplastique d’un type de matériaux poreux appelé “lotus” par l’investigation de l’influence de la morphologie des pores sur deux propriétés mécaniques en l’occurrence la résistance maximale à la traction et le module tangent plastique.

Le travail présenté dans cette thèse se compose de trois chapitres. Le premier comporte deux parties : la première est consacrée à la présentation de généralités et rappels portant sur les matériaux hétérogènes, sur l’aspect théorique des techniques d’homogénéisation et les différents modèles analytiques, sur la notion du V.E.R. ainsi que sur l’homogénéisation numérique. Dans la deuxième partie de ce chapitre, des notions et des rappels du comportement élastoplastique des structures sont évoquées, elles portent sur les règles d’écoulement et d’écoulement où les méthodes de résolution des systèmes non-linéaires sont explicitées. cette deuxième partie contient, aussi, la présentation des techniques et méthodes d’homogénéisation en mécanique non linéaire.

Le second chapitre constitue la première partie de la simulation numérique effectuée dans cette thèse. Il s’agit de l’étude de l’effet de la morphologie des pores sur la résistance maximale à la traction des matériaux poreux par l’utilisation de la technique de l’homogénéisation numérique. Le calcul se fait sur des microstructures virtuelles générées par l’outil numérique  Digimat et traitées par  ABAQUS. Plusieurs microstructures sont considérées par la variation de deux paramètres qui sont la fraction volumique des pores (porosité) et le rapport de forme de ces pores. Les calculs ont été effectués en utilisant un code commercial de calcul par éléments finis, il s’agit de **ZeBuLoN**. Les résultats de cette simulation ont permis de proposer un modèle reliant la résistance maximale effective à la traction à la fraction volumique et au rapport de forme des pores. Ce modèle a été validé par comparaison à des résultats expérimentaux trouvés dans la littérature.

Dans le troisième et dernier chapitre, Une deuxième investigation a été effectuée, elle porte sur l'influence de la morphologie des pores sur le module tangent plastique. La même démarche suivie dans le deuxième chapitre a été reprise, et un deuxième modèle reliant le module tangent plastique aux deux paramètres porosité et rapport de forme a été proposé.

A la fin de ce manuscrit, une conclusion passera en revue les principaux résultats obtenus dans cette étude, les apports et les limites des modèles proposés. Des perspectives seront enfin suggérées.

Introduction bibliographique sur le comportement mécanique non linéaire des matériaux poreux

Les propriétés physiques et mécaniques importantes présentées par les matériaux poreux ont conduit à une vaste gamme d'applications industrielles et d'ingénierie. Utilisés comme matériaux légers, supports de catalyseurs, des électrodes, des vibrations et des matériaux d'énergie d'amortissement acoustique et comme matériaux d'absorption d'énergie d'impact, ils ont suscité l'intérêt de nombreux chercheurs en particulier au cours des trois dernières décennies. Comme matériaux des structures, les propriétés mécaniques et physiques telles que l'élasticité, la plasticité et la conductivité thermique ont été largement investiguées et les effets de la morphologie des pores amplement étudiés [Danas and Aravas, 2012], [El Moumen et al., 2015], [Fritzen et al., 2012], [Hohe and Hardenacke, 2012], [Kovacic, 1998], [Hyun et al., 2001], [Hyun et al., 2004], [Kee et al., 1998], [Khdiret al., 2015], [Kujime et al., 2007], [Mbiakop et al., 2015], [Nakajima et al., 2001], [Nakajima, 2007], [Nakajima, 2010], [Qiu and Weng, 1991], [Park et al., 2006], [Pastor and Castaneda, 2002], [Ponte Castaneda and Zaidman, 1994], [Seki and Tane, 2007], [Shen et al., 2015], [Simone and Gibson, 1996], [Sueno et al., 2006], [Tane et al., 2007], [Wang and Pan, 2008], [Xu et al., 2015], [Zimmerman, 1996]. Le comportement non linéaire, la détermination de la limite élastique, de la résistance maximale effective à la traction ainsi que le module tangent plastique pour divers milieux poreux sont des sujets qui font l'objet d'importantes publications. Des modèles analytiques avaient été élaborés et des techniques expérimentales et numériques ont été récemment développées et publiées. En ce qui concerne les modèles analytiques, [Qiu and Weng, 1993] ont développé une fonction de potentiel plastique et de limite élastique d'un matériau poreux contenant des vides sphéroïdaux alignés ou arbitrairement orientés pour une porosité et une forme de pore données; en ce qui concerne l'influence de la morphologie des pores, il a été conclu que la fonction de la limite élastique et par conséquent la courbe contrainte-déformation du matériau poreux isotropique sont plus rigides lorsque les vides sont sphériques, pour les autres formes de vides, les valeurs de toutes les propriétés

diminuent.

[Ponte Castaneda and Zaidman, 1994] ont développé un modèle constitutif, pour le comportement effectif des matériaux poreux, qui tient compte de l'évolution de la microstructure du matériau sous de grandes déformations quasi-statiques. Ils ont considéré que les variables d'état appropriées sont la porosité et le rapport d'aspect du vide typique qui sert à caractériser l'évolution de la taille et de la forme des pores. Leur nouveau modèle est sensiblement meilleur pour différentes prédictions de la limite élastique que celui du modèle bien connu de Gurson.

Les matériaux poreux obtenus par le processus appelé Gasar qui permet le contrôle de la taille, la forme, l'orientation et la fraction volumique des pores, ont fait l'objet de plusieurs études expérimentales; [Simone and Gibson, 1996] ont expérimenté le comportement à la traction uni axiale de spécimens de microstructures du cuivre poreux fabriqué par le processus Gasar qu'ils ont comparé avec celui du cuivre solide. Ils ont établi que la limite d'élasticité des éprouvettes du cuivre poreux décroît linéairement, comme prévu, avec l'augmentation de la porosité, mais la limite d'élasticité des éprouvettes du cuivre solide est inférieure à celle des parois cellulaires solides du cuivre poreux, cette anomalie s'explique en termes du degré de contrainte dans les grains.

Dans une autre étude expérimentale sur les métaux poreux fabriqués par le processus Gasar, [Kovacic, 1998] a investigué les propriétés en traction du cuivre et du nickel poreux du point de vue macro et microscopique; il a été montré que les changements de structure dans les métaux poreux en fonction de la porosité sont similaires à la transition géométrique de phase selon la théorie de percolation. Par conséquent, la dépendance non-linéaire, de la porosité, des propriétés de traction des métaux poreux a été exprimée comme une fonction de percolation de la loi de puissance.

Durant les années 2000, une grande série d'investigations expérimentales pour caractériser les propriétés mécaniques et physiques des matériaux poreux, obtenus par le procédé Gasar, a été effectuée par Nakajima et son groupe; par exemple, [Hyun et al., 2001] ont examiné l'anisotropie dans le comportement à la traction uni-axiale du cuivre poreux considérant deux directions de traction, parallèle et perpendiculaire à l'axe du pore, il a été conclu que la résistance maximale à la traction et la limite élastique du cuivre poreux, avec des pores cylindriques parallèle à la direction de la traction, décroît linéairement avec l'augmentation de la porosité. Pour le cuivre poreux où l'axe des pores est perpendiculaire à la direction de la traction, la résistance maximale décroît significativement avec l'augmentation de la porosité et ce pour des niveaux de porosité bas, alors que la limite élastique atteint un maximum pour une porosité basse puis décroît lorsque la porosité augmente. Dans une autre étude expérimentale réalisée par [Nakajima et al., 2001], il a été montré que le cuivre poreux, avec de long pores alignés, présente des propriétés mécaniques supérieures et il est différent des matériaux poreux

conventionnels avec pores aléatoires comme les matériaux frittés, les matériaux en mousse et les matériaux de structure cellulaire. D'autres métaux de type lotus ont fait l'objet d'une attention soutenue de plusieurs études expérimentales menées principalement par l'équipe de recherche de Nakajima jusqu'à 2010. A la fois, les propriétés physiques et mécaniques ont été étudiées en utilisant la même technique de fabrication et la même méthode expérimentale. La plupart des œuvres présentées précédemment a traité les propriétés des matériaux poreux en particulier ceux du type lotus sans prendre en compte l'influence des différentes morphologies des vides et indépendamment de leur interaction en particulier lorsque la porosité est importante. Le but principal de ce présent travail est l'étude de l'effet de la morphologie des vides et de la porosité sur deux propriétés mécaniques à savoir la résistance maximale à la traction et le module tangent plastique des matériaux de type lotus caractérisés par des pores cylindriques alignés, dispersés de manière aléatoire sans percolation et fabriqués par la technique Gasar. La technique d'homogénéisation numérique, basée sur la méthode des éléments finis, est utilisée. Plusieurs microstructures avec des fractions volumiques et des rapports de forme différents sont analysées.

Chapitre 1

La technique d'homogénéisation

1.1 Introduction

Le présent chapitre est composé de deux parties. Dans la première, une présentation de plusieurs notions théoriques indispensables pour une bonne compréhension de la partie simulation numérique. Des généralités sur les matériaux hétérogènes seront exposées, ensuite les techniques d'homogénéisation seront explicitées. Les étapes de l'homogénéisation seront décrites, la notion du V.E.R. dans un matériau hétérogène sera introduite et les différentes méthodes analytiques ainsi que les bornes de l'encadrement analytique feront l'objet d'une description détaillée. Ces notions seront suivies par une présentation du principe de l'homogénéisation numérique.

La seconde partie de ce chapitre sera consacré à des rappels du comportement élastoplastique des structures à travers la définition de l'élastoplasticité, de la règle d'écroissage, des méthodes de résolution du comportement non-linéaire et notamment des méthodes incrémentales, itératives, mixtes ainsi que celles de Newton-Raphson. Le chapitre sera clôturé par la présentation des différents modèles de changement d'échelles utilisés en mécanique non-linéaire.

Première Partie
Homogénéisation en élasticité

1.2 Généralités sur les matériaux hétérogènes

Les matériaux hétérogènes sont des matériaux qui possèdent deux (biphasés) ou plusieurs phases (multiphase), Figure 1.1. L'avantage essentiel de ce type de matériaux est les propriétés structurales importantes que leurs constituants élémentaires ne possèdent pas individuellement, et leur permettent de remplir de nombreuses fonctions techniques. Les exemples sont nombreux : les composites fibreux ou particuliers, les matériaux poreux, les matériaux granulaires, les mousses métalliques ou céramiques, les matériaux de construction en génie civil et les matériaux vivants [El Moumen et al., 2014]. Pratiquement, tous les matériaux hétérogènes sont constitués d'éléments discontinus appelés hétérogénéités, noyés dans une phase continue appelée matrice.

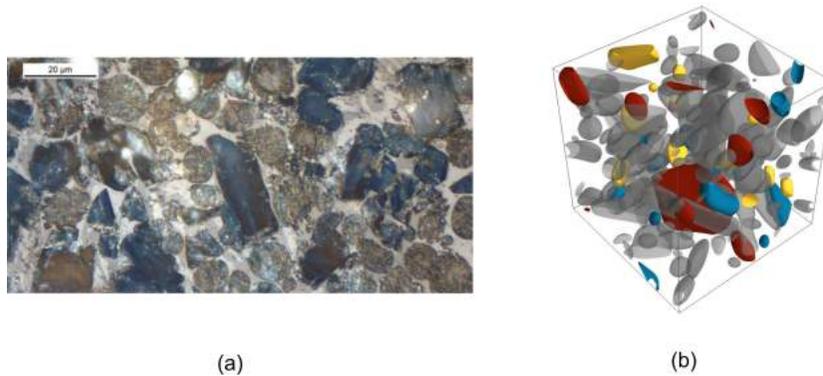


FIGURE 1.1 – Exemple de matériaux hétérogènes multiphasiques : (a) réel (Institut Mines-Télécom), (b) virtuel (simulé, Mines Pris-Tech)

1.2.1 Matériaux composites

C'est l'association de plusieurs matériaux de propriétés différentes appelées phases. Une phase matrice, généralement continue et les autres dites renforts habituellement durs de forme différente. La Figure 1.2 schématise un exemple de composites hétérogènes biphasés avec différentes formes de renforts. Dans un composite, on distingue deux types de renforts : fibre ou particule. Ces renforts ont le caractère d'être compatible avec la matrice afin d'avoir un comportement global homogène. Les composites permettent d'améliorer la qualité des matériaux pour une certaine utilisation, du fait de leur légèreté, rigidité, etc... En raison de la large utilisation de ces composites, un effort particulier est fait pour la réduction des coûts, augmenter la durée de vie, prévoir leur rupture et optimiser les propriétés d'usage.

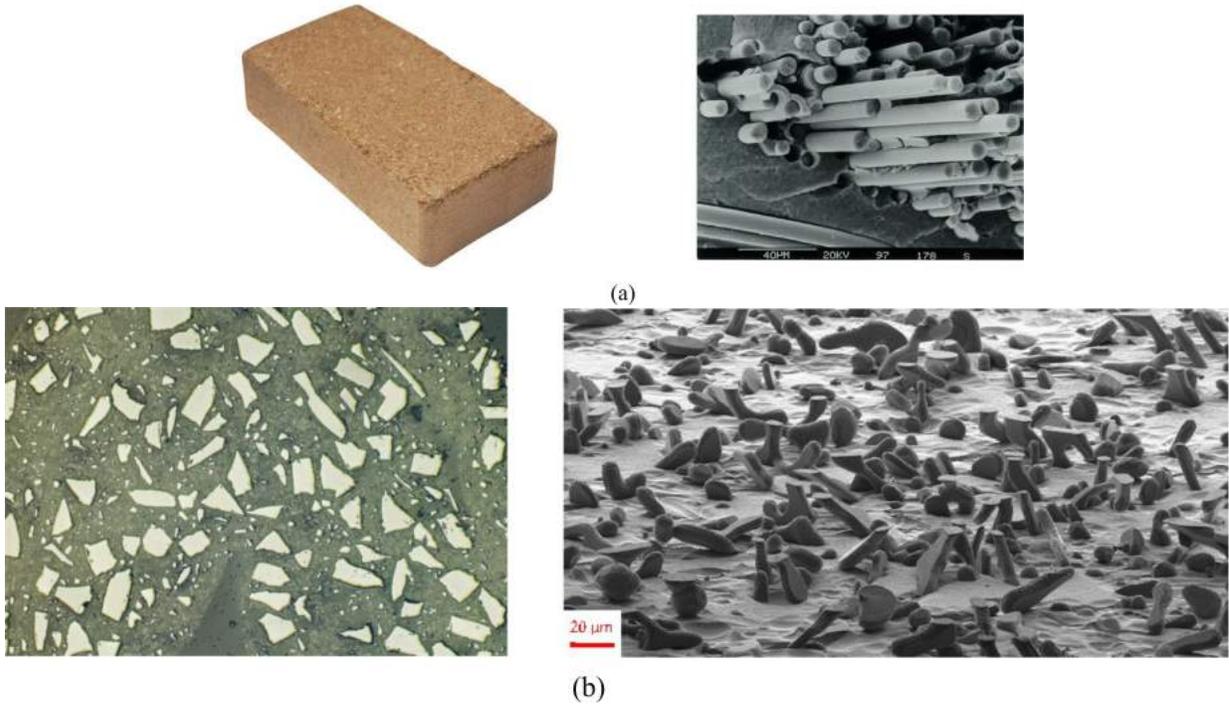


FIGURE 1.2 – Composites hétérogènes de renforts : (a) fibres (MT Aerospace AG, Augsburg) et (b) particules (Lermps, utbm).

1.2.2 Matériaux poreux

Un matériau poreux est un milieu hétérogène biphasé constitué d'une phase solide et d'une phase de vide nommée "pore". A l'échelle globale, ces matériaux sont caractérisés comme un milieu continu en introduisant l'effet de la porosité. Cette porosité peut prendre différentes formes de type sphérique, allongée, aplatie, etc... La Figure 1.3 montre des exemples de matériaux (milieux) hétérogènes poreux à différentes échelles d'observation. La description géométrique montre qu'on peut envisager deux échelles d'espace distinctes, i.e. l'échelle à laquelle on distingue les domaines occupés par le solide et le fluide. Cependant, cette échelle est plus fine que l'échelle macroscopique pour les applications pratiques. On doit noter qu'un milieu à porosité très élevée (0.75-0.95) est connu sous le nom de mousses et défini comme un milieu poreux de microstructures complexes avec une fraction volumique des pores très élevée, ce qui les a rendus ultralégers.

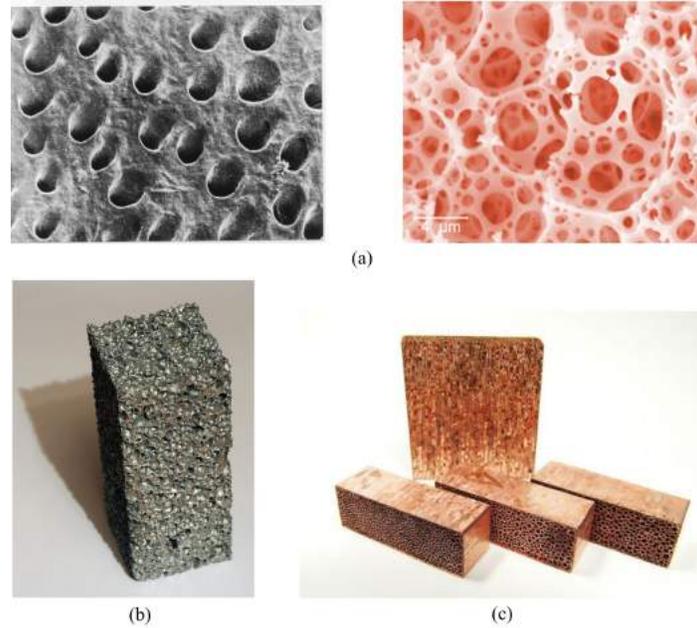


FIGURE 1.3 – Milieux poreux : (a) microstructures, (b) mousse métallique, (c) cuivre poreux type Lotus (CNRS Photothèque/ISM)

1.3 Effet d'échelles dans les matériaux hétérogènes

- Dans le cadre de la mécanique, une (micro)structure peut être décrite par trois échelles :
- échelle macroscopique où le comportement est homogène,
 - échelle mésoscopique (intermédiaire) où le comportement est hétérogène,
 - échelle microscopique où le comportement est hétérogène.

L'échelle microscopique ou locale permet de suivre la distribution, l'orientation et les contacts des particules. Dans l'échelle mésoscopique, on trouve les microstructures dans lesquelles on parle de grain, de fibre et de pore. L'échelle macroscopique est l'échelle de l'échantillon, c'est la taille du volume à partir duquel le comportement macroscopique est calculé tenant compte des informations des deux autres échelles. Le passage d'une échelle à une autre plus grande nécessite l'opération d'homogénéisation qui est composée de plusieurs étapes gouvernée par un ensemble d'équations.

1.4 Principe et objectif de l'homogénéisation

L'homogénéisation regroupe l'ensemble des opérations de moyenne et de détermination du comportement effectif équivalent du matériau hétérogène. Elle consiste à déterminer le comportement d'un matériau hétérogène à partir des comportements de ses différents constituants

élémentaires. Cette opération est connue sous le nom du passage Micro-Macro [El moumen, 2014], [Kaddouri et al., 2016].

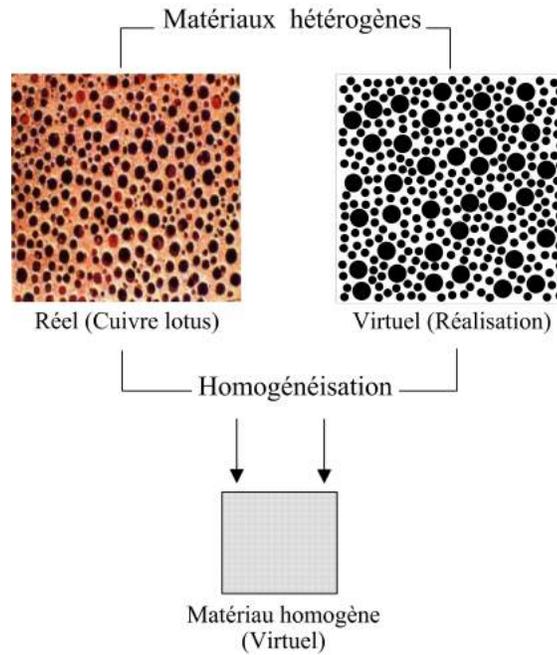


FIGURE 1.4 – Principe d'homogénéisation d'une microstructure hétérogène

La Figure 1.4 montre la description de l'approche d'homogénéisation et les éléments nécessaires pour le passage Micro-Macro et pour l'analyse multi-échelle. Il faut noter que la méthode d'homogénéisation consiste à substituer un matériau hétérogène par un matériau homogène dit matériau homogène équivalent (MHE) qui répond globalement à un chargement quelconque de la même façon. Bien entendu, ces méthodes s'appliquent à de nombreux problèmes aussi bien physiques comme la conduction thermique, l'électromagnétisme que mécanique comme l'élasticité linéaire, la plasticité ou la viscoplasticité. La méthodologie d'homogénéisation s'effectue en trois étapes [Bornert M. and P., 2010] :

1.4.1 Représentation

La technique d'homogénéisation repose sur le choix d'un plus petit volume élémentaire qui doit être représentatif du comportement macroscopique au niveau microscopique. Ce volume est appelé Volume Élémentaire Représentatif (VER), qui est décrit par [Chaboche and Suquet, 1998]. Cette étape est la plus importante de l'homogénéisation, elle consiste à déterminer le nombre de phases contenues dans le VER et par la suite à caractériser le comportement, la géométrie, la répartition spatiale et la proportion de chaque phase. Si d

est la taille caractéristique des hétérogénéités et L est la taille caractéristique de la structure macroscopique considérée, Figure 1.5, alors la taille caractéristique l du VER est soumise à deux conditions :

- $l \ll L$: condition pour que le matériau soit un milieu continu ce qui permet de déterminer des champs continus de contraintes et de déformations.
- $l \gg d$: condition nécessaire pour pouvoir considérer un comportement macroscopique du VER bien qu'il soit hétérogène à l'échelle méso/microscopique.

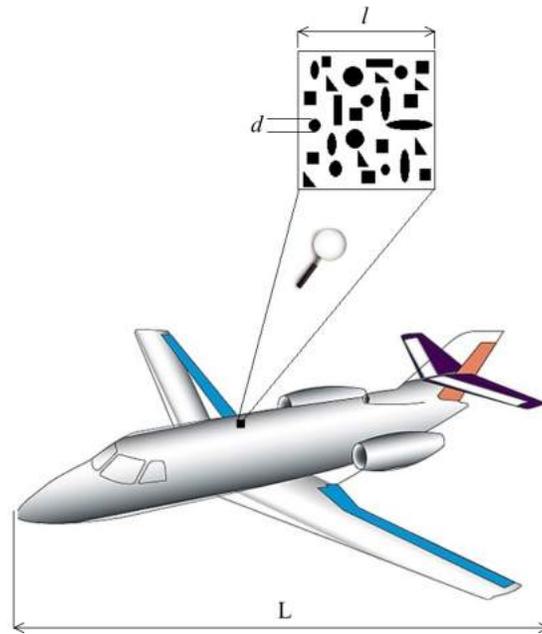


FIGURE 1.5 – Echelles de représentation en homogénéisation

En élasticité, le comportement microscopique de chaque phase « ph » est donné par :

$$(\sigma_{ij})_{ph} = (c_{ijkl})_{ph} (\varepsilon_{kl})_{ph} \quad (1.1)$$

et

$$(\varepsilon_{ij})_{ph} = (s_{ijkl})_{ph} (\sigma_{kl})_{ph} \quad (1.2)$$

avec

$$(c_{ijkl})_{ph} = (s_{ijkl}^{-1})_{ph} \quad (1.3)$$

où : $(\sigma_{ij})_{ph}$ et $(\varepsilon_{ij})_{ph}$ représentent respectivement les tenseurs de contraintes et de déformations locales de chaque phase "ph".

$(c_{ijkl})_{ph}$ et $(s_{ijkl})_{ph}$ sont respectivement les tenseurs d'ordre 4 de rigidité et de souplesse de chaque phase "ph".

1.4.2 Localisation

Cette deuxième étape consiste à relier les grandeurs microscopiques locales, définies dans l'étape de représentation, aux grandeurs macroscopiques.

En élasticité linéaire, on définit les relations entre les déformations moyennes locales de chaque phase $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{ph}$ et le tenseur des déformations macroscopiques E_{kl} imposées par :

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{ph} = (A_{ijkl})_{ph} E_{kl} \quad (1.4)$$

où : $(A_{ijkl})_{ph}$ désigne le tenseur de localisation des déformations de la phase "ph".

avec :

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{ph} = \frac{1}{V_{ph}} \int_{V_{ph}} (\varepsilon_{ij})_{ph} dV \quad (1.5)$$

De même, on définit les relations entre les contraintes, équation (1.5) moyennes locales de chaque phase $\langle \sigma_{ij} \rangle_{ph}$ et les contraintes macroscopiques Σ_{kl} imposées par :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_{ph} = (B_{ijkl})_{ph} \Sigma_{kl} \quad (1.6)$$

où : $(B_{ijkl})_{ph}$ désigne le tenseur d'ordre 4 de concentration des contraintes.

avec :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_{ph} = \frac{1}{V_{ph}} \int_{V_{ph}} (\sigma_{ij})_{ph} dV \quad (1.7)$$

1.4.3 Homogénéisation

La dernière étape consiste à déterminer le comportement équivalent du matériau hétérogène. Dans cette étape, le tenseur moyen des contraintes sur tout le $V.E.R$ est exprimé par :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{ph=1}^N P_{ph} \langle \sigma_{ij} \rangle_{ph} \quad (1.8)$$

De même le tenseur moyen des déformations sur tout le $V.E.R$ est exprimé par :

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \sum_{ph=1}^N P_{ph} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_{ph} \quad (1.9)$$

Le comportement apparent sera détaillé dans la section après avoir mis l'accent sur les conditions aux limites.

1.4.4 Condition de HILL

En élasticité linéaire, la condition de *HILL* impose l'égalité entre le travail macroscopique et la moyenne des travaux microscopiques

$$\frac{1}{2} \langle \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{2} E_{ij} \Sigma_{ij} \quad (1.10)$$

cela est assuré par l'égalité :

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = E_{ij} \text{ et } \langle \sigma_{ij} \rangle = \Sigma_{ij} \quad (1.11)$$

Ainsi pour assurer la condition de *HILL* et l'équivalence du comportement effectif, des conditions aux limites particulières aux bords du *V.E.R* sont nécessaires.

1.4.4.1 Conditions aux limites et moyenne des champs locaux

Pour calculer les propriétés effectives du matériau homogène équivalent (*MHE*) et étudier la convergence des propriétés apparentes, plusieurs conditions aux limites peuvent être appliquées ; Les plus classiquement proposées dans la littérature sont : les conditions homogènes sur le contour en déformation (*KUBC*), les conditions homogènes sur le contour en contraintes (*SUBC*) et les conditions périodiques (*PBC*).

On considère une microstructure de volume V . Pour déterminer les propriétés effectives de ce volume, on impose des conditions aux limites sur sa frontière notée ∂V . On présente dans ce qui suit les trois types de conditions aux limites utilisés dans les calculs par éléments finis pour la détermination des propriétés effectives.

– **Conditions homogènes sur le contour en déformation (KUBC)**

Dans ces conditions, on applique sur tous les nœuds de la surface extérieure ∂V du volume V un déplacement u_i qui s'écrit à partir du tenseur des déformations homogénéisées E_{ij} correspondant à la moyenne des déformations locales dans le volume par :

$$\begin{cases} u_i = E_{ij} \cdot x_j & \forall x \in \partial V \\ E_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \end{cases} \quad (1.12)$$

Le tenseur des contraintes macroscopiques est alors obtenu par la moyenne des contraintes locales dans tout le volume V :

$$\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (1.13)$$

– **Conditions homogènes sur le contour en contraintes (SUBC)**

Dans ce cas, on applique sur la surface extérieure ∂V du volume V un effort volumique $\sigma.n$ qui s'écrit à partir du tenseur des contraintes homogénéisées Σ_{ij} correspondant à la moyenne des contraintes locales dans le volume par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}.n = \Sigma_{ij}.n \\ \Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \end{array} \right. \quad \forall x \in \partial V \quad (1.14)$$

Le tenseur des déformations macroscopiques est alors obtenu par la moyenne des déformations locales dans tout le volume V :

$$E_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \quad (1.15)$$

– **Conditions aux limites périodiques (PBC)**

Dans ce cas on applique sur tous les nœuds de la surface extérieure ∂V du volume V un déplacement u qui s'écrit à partir du tenseur des déformations homogénéisées E et d'une fluctuation périodique v_i par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = E_{ij}.x_j + v_i \\ E_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \end{array} \right. \quad \forall x \in \partial V \quad (1.16)$$

La fluctuation v est périodique car elle prend la même valeur en deux points homologues de faces opposées. De même, les efforts $\sigma.n$ en deux points homologues sont opposés.

1.4.5 Propriétés apparentes et effectives

A partir des conditions aux limites décrites précédemment, les déformations et les contraintes locales vérifient les relations :

$$E_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle \quad (1.17)$$

et

$$\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle \quad (1.18)$$

Par conséquent, les tenseurs A_{ijkl} et B_{ijkl} présentent les propriétés suivantes :

$$\sum_{ph=1}^N P_{ph}(A_{ijkl})_{ph} = I_{ijkl} \quad (1.19)$$

et

$$\sum_{ph=1}^N P_{ph}(B_{ijkl})_{ph} = I_{ijkl} \quad (1.20)$$

où I_{ijkl} est le tenseur unité d'ordre 4.

La relation constitutive pour le matériau hétérogène est donnée par :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^{app} \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (1.21)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \sum_{ph=1}^N P_{ph} \langle \sigma_{ij} \rangle_{ph} &= C_{ijkl}^{app} \langle \varepsilon_{kl} \rangle \\ \Leftrightarrow \sum_{ph=1}^N P_{ph} (c_{ijkl})_{ph} \langle \varepsilon_{kl} \rangle_{ph} &= C_{ijkl}^{app} E_{kl} \\ \Leftrightarrow \sum_{ph=1}^N P_{ph} (c_{ijmn})_{ph} (A_{mnkl})_{ph} E_{kl} &= C_{ijkl}^{app} E_{kl} \\ \Rightarrow C_{ijkl}^{app} &= \sum_{ph=1}^N P_{ph} (c_{ijmn})_{ph} (A_{mnkl})_{ph} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Où C_{ijmn}^{app} et S_{ijkl}^{app} sont respectivement les tenseurs apparents d'élasticité et de souplesse pour un volume V .

On obtient ainsi le tenseur de rigidité équivalent C_{ijkl}^{app} exprimé en fonction des tenseurs de rigidité $(C_{ijkl})_{ph}$ et des tenseurs de localisation $(A_{mnkl})_{ph}$ de la déformation dans chaque phase « ph ».

Dans le cas particulier d'un milieu hétérogène constitué de N phases de type inclusions noyées dans une matrice dominante, et grâce à l'égalité sur la moyenne des tenseurs de localisation, les tenseurs apparents d'élasticité et de souplesse, peuvent être écrits, en notant m l'indice de la phase constituant la matrice par :

$$C_{ijkl}^{app} = (C_{ijkl})_m + \sum_{ph=1}^N P_{ph} ((C_{ijmn})_{ph} - (C_{ijmn})_m) (A_{mnkl})_{ph} \quad (1.23)$$

et

$$S_{ijkl}^{app} = (S_{ijkl})_m + \sum_{ph=1}^N P_{ph}((S_{ijmn})_{ph} - (S_{ijmn})_m)(B_{mnkl})_{ph} \quad (1.24)$$

Il a été observé pratiquement que les résultats apparents diffèrent d'une condition aux limites à l'autre, mais convergent avec l'augmentation de la taille du *V.E.R* en se rapprochant de la taille du *V.E.R* [Kanit et al., 2003a], [Qi, 2006], [Kari et al., 2007]. Cette convergence est plus ou moins lente selon le cas étudié. Ainsi, il est démontré que les conditions homogènes *KUBC* et *SUBC* fournissent un encadrement du comportement apparent [Huet, 1991] exprimé par :

$$S_{ijkl\Sigma}^{app-1} \leq C_{ijkl}^{eff} \leq C_{ijklE}^{app} \quad (1.25)$$

et que les conditions aux limites périodiques (*CLP*) donnent une meilleure estimation des propriétés apparentes par rapport aux conditions homogènes *KUBC*, *SUBC* [Hazanov and Huet, 1994], [Kanit et al., 2003a] données par :

$$S_{ijkl\Sigma}^{app-1} \leq S_{ijkl\Sigma_{per}}^{app-1} \leq C_{ijkl}^{eff} \leq C_{ijklE_{per}}^{app} \leq C_{ijklE}^{app} \quad (1.26)$$

Lorsque le *V.E.R* est suffisamment grand, les propriétés apparentes du matériau hétérogène ne dépendent plus du type de conditions aux limites et coïncident avec les propriétés effectives [Sab, 1992a].

$$S_{ijkl\Sigma}^{app-1} = S_{ijkl\Sigma_{per}}^{app-1} = C_{ijkl}^{eff} = C_{ijklE_{per}}^{app} = C_{ijklE}^{app} \quad (1.27)$$

Pour les propriétés isotropiques effectives il y a des cas spéciaux des conditions aux limites *KUBC*, *SUBC* et *PBC* pour lesquelles on choisit les valeurs de E_{ij} et Σ_{ij} .

Pour les propriétés élastiques, et pour la détermination du module de compressibilité k^{app} sur le volume V et pour résoudre les problèmes micromécaniques *KUBC*, le tenseur des déformations macroscopiques E_{ij}^k suivant est appliqué :

$$E_{ij}^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

et pour la détermination du module de cisaillement μ^{app} sur le volume V , le tenseur des déformations macroscopiques E_{ij}^{μ} suivant est appliqué :

$$E_{ij}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Le module de compressibilité k^{app} et le module de cisaillement μ^{app} peuvent être défini comme :

$$k^{app} = \langle \sigma_{ij} \rangle E_{ij}^k = \frac{1}{3} \text{trace} \langle \sigma_{ij} \rangle \quad (1.30)$$

$$\mu^{app} = \langle \sigma_{ij} \rangle E_{ij}^{\mu} = \text{trace} \langle \sigma_{ij} \rangle \quad (1.31)$$

Pour le cas de la condition aux limites *SUBC*, on prend :

$$E_{ij}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

et

$$E_{ij}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

dans ce cas le module de compressibilité k^{app} et le module de cisaillement μ^{app} peuvent être définis comme suit :

$$\frac{1}{k^{app}} = E_{ij}^k \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \text{trace} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \quad (1.34)$$

$$\frac{1}{\mu^{app}} = E_{ij}^{\mu} \langle \varepsilon_{ij} \rangle = 2 \langle \varepsilon_{12} \rangle \quad (1.35)$$

1.5 Techniques d'homogénéisation

Les techniques d'homogénéisation sont classées en deux grandes catégories : analytiques et numériques Jean (2009).

1.5.1 Les méthodes analytiques

Parmi les nombreuses méthodes analytiques, on peut citer les premières théories mathématiques de l'homogénéisation qui utilisent des développements asymptotiques des grandeurs mécaniques telles que la contrainte et la déformation [Beran, 1968a], [Sanchez-Palencia, 1974a], [Bensoussan and Papanicolaou, 1978a].

Il existe également un ensemble de bornes et estimations largement utilisé par les mécaniciens et les physiciens. Les bornes, supérieure et inférieure, encadrent les propriétés d'un matériau hétérogène. Il existe plusieurs types de bornes qui se différencient par la finesse de description des échelles. En effet, ces bornes sont d'autant plus resserrées que la connaissance de la microstructure est fine.

Enfin les estimations théoriques permettent, sous certaines hypothèses spécifiques, d'évaluer les propriétés effectives d'un matériau hétérogène. Elles présentent l'avantage d'approcher avec plus de précision le comportement du matériau hétérogène contrairement aux bornes qui fournissent un encadrement. On peut écrire une estimation à partir d'une approche micromécanique comme dans le cas du modèle autocohérent [Berveiller and Zaoui, 1979], ou à partir de principes variationnels [Castaneda, 1989].

1.5.2 Les méthodes numériques

Les méthodes numériques sont connues sous deux grandes classes : les méthodes intégrées et les méthodes séquencées.

1.5.2.1 Les méthodes intégrées

Elles consistent à prendre en compte simultanément les deux échelles, microscopique et macroscopique, dans le calcul par éléments finis. La méthode FE^2 [Feyel and Chaboche, 2000] est la méthode la plus citée dans la littérature. C'est une méthode qui présente plusieurs niveaux de calculs par éléments finis caractérisant différentes échelles physiques.

1.5.2.2 Les méthodes séquencées

Par ces méthodes, on cherche à estimer les propriétés macroscopiques d'un matériau en effectuant un ou plusieurs calculs d'une description pertinente de la microstructure correspondante. La plupart des travaux ont été menés sur des cas bidimensionnels comme le cas traité par [Zeman and Sejnoha, 2001], cas des fibres de carbone dans une matrice polymère. Une modélisation tridimensionnelle par les polygones de Voronoï est utilisée dans le cas des polycristaux afin d'assurer une bonne représentation de la morphologie réelle de la microstructure. Ceci permettrait une meilleure estimation des propriétés macroscopiques. Certaines

microstructures sont tellement compliquées qu'il faut recourir aux images tridimensionnelles obtenues par microtomographie [Madi et al., 2007], [Burteau et al., 2007].

Les propriétés effectives d'un matériau hétérogène sont déterminées en moyennant les champs locaux sur un Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.) caractérisé par une taille et une description géométrique suffisantes de la microstructure. La détermination du VER est assurée par la méthode statistique [Kanit et al., 2003b] qui consiste à calculer les propriétés apparentes de microstructures de tailles croissantes avec plusieurs réalisations de la microstructure à taille donnée et à caractériser la représentativité statistique de la grandeur mesurée vis-à-vis de la taille et du nombre de réalisations. Pour le calcul par éléments finis de microstructures, on impose des conditions aux limites qui sont propres à l'homogénéisation.

1.5.3 Notion de VER dans un matériau hétérogène

La description d'un matériau doit être suffisamment riche et réaliste pour estimer correctement les comportements macroscopiques. Pour cela, on cherche la taille et la description géométrique suffisantes de la microstructure représentative pour la propriété que l'on souhaite estimer. On parle ici de VER [El moumen, 2014].

Le VER joue un rôle important pour l'estimation de la réponse globale dans un matériau hétérogène. La connaissance de la taille du VER représente un élément incontournable pour la détermination des propriétés effectives. Cette taille dépend de la nature et des constituants du matériau.

Plusieurs définitions ont été proposées pour le concept VER. Ces définitions sont regroupés dans le travail de [Gitman et al., 2007]. Par exemple la taille du VER se doit d'être beaucoup plus grande que la plus grosse des hétérogénéités et négligeable aussi devant la taille de la microstructure. Il faut noter ici que l'utilisation des méthodes d'homogénéisation nécessite la connaissance de la taille du VER. La Figure 1.6 montre des exemples de VERs dans une microstructure biphasique étudiée par [Gitman et al., 2007]. Dans la même microstructure on peut distinguer plusieurs situations, dites réalisations, pour représenter la taille d'un VER. La différence entre ces réalisations est le nombre d'hétérogénéités entourées par le volume, leurs formes, leurs dispositions et finalement la distribution et la nature.

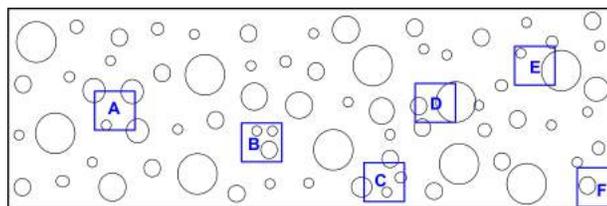


FIGURE 1.6 – Exemple de VERs d'une microstructure hétérogène, [Gitman et al., 2007].

Références	Définitions
[Sab, 1992b]	C'est un volume suffisamment grand pour que la détermination des propriétés effectives à partir de ce volume ne dépend pas du type de conditions aux limites utilisées.
[Drugan and Willis, 1996]	It is the smallest material volume element of the composite for which the usual spatially constant (overall modulus) macroscopic constitutive representation is a sufficiently accurate model to represent mean constitutive response.
[Terada et al., 1998]	C'est un volume cubique suffisamment grand par rapport à la microstructure et suffisamment petit par rapport à l'échelle macroscopique.
[Evesque, 2000]	Le VER doit être assez grand par rapport à la taille des grains afin de définir les quantités globales telles que la contrainte ou la déformation, mais cette dimension devrait être également assez petite pour ne pas cacher l'hétérogénéité macroscopique.
[Kanit et al., 2003b]	Une définition purement statistique et numérique. La taille est liée aux paramètres morphologiques, mécaniques et statistiques de la microstructure; comme la fraction volumique, le contraste, les propriétés mécaniques (élasticité et plasticité) et l'erreur absolue.

TABLE 1.1 – Définitions du VER selon certaines références

Toutefois, afin de répondre à des questions sur l'existence et la définition d'un VER, on présente sur le tableau 1.1 quelques définitions proposées dans la littérature.

Il est à noter que le VER est un paramètre qui est d'importance primordiale pour l'étude numérique des matériaux hétérogènes. Il est de nature élémentaire parce qu'il est considéré comme un point matériel du milieu équivalent et représentatif parce qu'il est possible de déterminer un seul comportement macroscopique unique pour ce volume. Pour être représentatif, ce VER doit contenir le maximum d'hétérogénéités, et pour être élémentaire, le volume doit être petit devant la structure. Deux conditions doivent guider et piloter le choix de l'échelle et les dimensions du VER : ne pas descendre à un niveau plus fin et ne pas monter jusqu'à l'échelle macroscopique.

1.6 Estimations analytiques des propriétés élastiques

Les méthodes d'analyse sont disponibles pour estimer les propriétés des matériaux hétérogènes. Elles impliquent généralement des hypothèses concernant la microstructure. Dans le domaine de la mécanique, les développements asymptotiques [Sanchez-Palencia, 1974b], [Bensoussan and Papanicolaou, 1978b] et les bornes variationnelles [Beran, 1968b], [Hashin and Shtrikman, 1962] sont des exemples d'approches analytiques. Pour un matériau élastique hétérogène, l'homogénéisation consiste à résoudre le problème micromécanique de localisation (cas de déformation imposée) ou de concentration (cas de contrainte imposée). Cela peut se faire numériquement ou analytiquement en utilisant certaines hypothèses. C'est ainsi que les estimations et les bornes ont été développées. Nous présenterons dans la section suivante quelques estimations et bornes pour les propriétés élastiques.

1.6.1 Estimations analytiques

1.6.1.1 Einstein (1906-1911)

La première et la plus simple des estimations évoquées ici est celle d'Einstein ([Einstein, 1906] et [Einstein, 1911]) qui estima les propriétés d'un fluide visqueux de type plasma contenant des particules sphériques incompressibles et isolées en suspension par :

$$\mu_{Einstein} = \mu_m (1 + 2.5P_i) \quad (1.36)$$

1.6.1.2 Smallwood (1944)

Smallwood [Smallwood, 1944] utilisa la même approche qu'Einstein pour décrire le module d'Young en petites déformations d'un matériau solide renforcé par des particules sphériques rigides. Cette estimation ne reste valable que pour de faibles fractions volumiques de particules.

$$E_{Smallwood} = E_m (1 + 2.5P_i) \quad (1.37)$$

1.6.1.3 Guth-Gold (1938)

Guth et Gold [Guth and Gold, 1938], contrairement aux estimations d'Einstein et de Smallwood, proposèrent de prendre en compte les phénomènes d'interaction entre particules et pour de plus fortes fractions volumiques ils ajoutent un terme quadratique à l'équation 1.37 :

$$E_{Guth-Gold} = E_m (1 + 2.5P_i + 14.1P_i^2) \quad (1.38)$$

1.6.1.4 Budiansky (1965)

Une estimation auto-cohérente du module de Young a été développée par Budiansky [Budiansky, 1965] qui s'applique dans le cas de particules rigides dans une matrice incompressible :

$$E_{\text{Budiansky}} = \frac{E_m}{(1 - 2.5P_i)} \quad (1.39)$$

1.6.2 Modèles analytiques de changement d'échelles.

Cette section est consacrée à la présentation des modèles théoriques de changement d'échelles, destinés à l'estimation des propriétés effectives d'un matériau hétérogène, dérivés de la solution du problème de l'inclusion hétérogène d'Eshelby. Nous commençons par la présentation de la solution de ce problème, suivie des différents modèles qui en sont dérivés, à citer : la solution diluée, la méthode auto-cohérente et le modèle de Mori-Tanaka.

1.6.2.1 Problème de l'inclusion d'Eshelby

Eshelby a résolu le problème de l'équilibre mécanique d'une inclusion I de forme ellipsoïdale, plongée dans une matrice infinie M , possédant les mêmes propriétés mécaniques que la matrice et soumise à une déformation libre [Eshelby, 1957]. Par analogie à cette première solution, il a donné la solution du problème de l'inclusion hétérogène. Si on considère une inclusion de rigidité C_{ph} plongée dans une matrice infinie de rigidité C_m initialement soumise à aucune déformation ni contrainte comme illustré par la Figure 1.7.

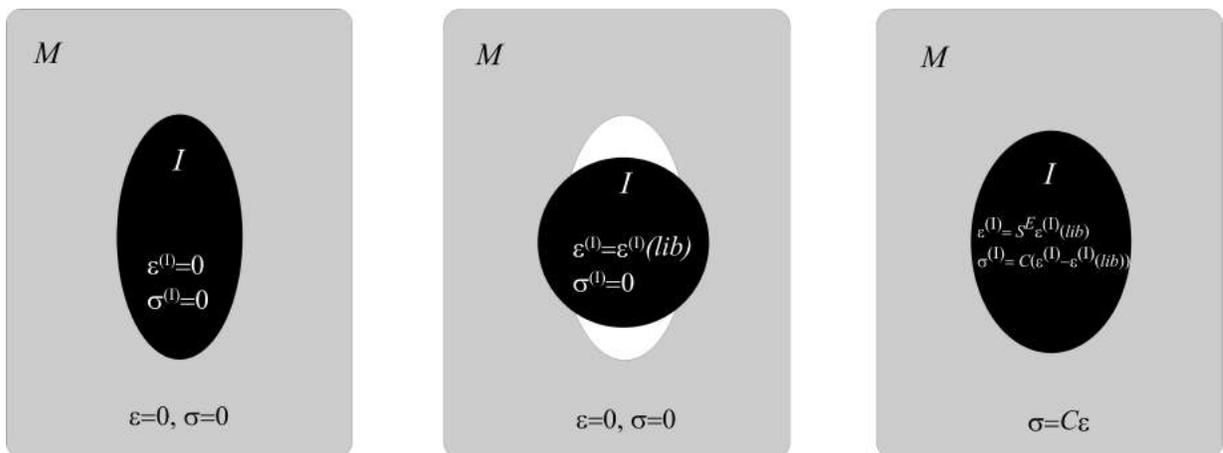


FIGURE 1.7 – Problème de l'inclusion d'Eshelby

On cherche la déformation dans l'inclusion et la matrice à l'équilibre. Eshelby a montré que

la déformation de l'inclusion à l'équilibre est homogène et uniforme et qu'il existe un tenseur d'ordre 4 reliant la déformation libre à la déformation de l'inclusion :

$$\varepsilon_{ij}^{(I)} = S^E \varepsilon_{ij}^{(I)}(lib)$$

l'expression de la matrice de localisation dans l'hétérogénéité sera :

$$A_{ph} = (I + S^E : C_m^{-1} : (C_{ph} - C_m))^{-1} \quad (1.40)$$

où S^E est le tenseur d'ordre 4 appelé tenseur d'Eshelby, dépendant des propriétés mécaniques de la matrice C_m et de la forme de l'inclusion.

Donc le comportement apparent est obtenu grâce à l'équation 1.23 qui devient :

$$C_{ijkl}^{app} = (C_{ijkl})_m + \sum_{ph=1}^N P_{ph} ((C_{ijmn})_{ph} - (C_{ijmn})_m) (A_{mnkl})_{ph} \quad (1.41)$$

1.6.2.2 Schéma des distributions diluées

Dans cette solution, chaque inclusion est considérée comme une seule entité noyée dans une matrice infinie. La solution diluée est valable si les inclusions sont suffisamment éloignées les unes des autres, donc, aucune interaction entre les inclusions n'est considérée. Par conséquent, elle s'applique seulement aux matériaux hétérogènes contenant une faible fraction volumique P .

Il s'agit donc d'appliquer le résultat du problème de l'hétérogénéité, équation 1.40, à chaque inclusion afin d'obtenir les tenseurs de localisation de chaque phase

$$A_{ph} = (I + S_{ph}^E : C_m^{-1} : (C_{ph} - C_m))^{-1} \quad (1.42)$$

Le comportement homogénéisé est obtenu grâce au tenseur des rigidités effectif exprimé par :

$$C_{ijkl}^{app} = (C_{ijkl})_m + \sum_{ph=1}^N P_{ph} ((C_{ijmn})_{ph} - (C_{ijmn})_m) (A_{mnkl})_{ph} \quad (1.43)$$

Pour un composite à 2 phases, avec des inclusions sphériques noyées dans une matrice, les coefficients de compressibilité k et de cisaillement μ équivalents sont donnés par :

$$k^{dl} = k_m + P_i \frac{(k_i - k_m)(3k_m + 4\mu_m)}{(3k_i + 4\mu_m)} \quad (1.44)$$

$$\frac{\mu^{dl}}{\mu_m} = 1 - \frac{15P_i(1 - \frac{\mu_i}{\mu_m})(1 - \nu_m)}{7 - 5\nu_m + 2(4 - 5\nu_m)\frac{\mu_i}{\mu_m}} \quad (1.45)$$

avec m l'indice attribué à la matrice et i à l'inclusion.

1.6.2.3 Modèle auto-cohérent

Dans cette méthode, chaque phase du matériau est successivement assimilée à une inclusion ellipsoïdale noyée dans un milieu infini possédant les caractéristiques du matériau homogénéisé recherché.

Le tenseur de localisation de chaque phase ph est exprimé par :

$$A_{ph} = [I + S_{ph}^E : (C^{AC})^{-1} : (C_{ph} - C^{AC})]^{-1} \quad (1.46)$$

et le tenseur des rigidités homogénéisé sera :

$$C^{AC} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} C_{ph} : [I + S_{ph}^E : (C^{AC})^{-1} : (C_{ph} - C^{AC})]^{-1} \quad (1.47)$$

où la solution de cette équation implicite est, généralement, obtenue numériquement.

Pour un composite biphasé, avec des inclusions sphériques, une solution analytique permet d'exprimer les caractéristiques élastiques recherchées [Aboudi, 1991], à savoir :

$$k^{AC} = k_m + P_i \frac{(k_i - k_m)(3k^{AC} + 4\mu^{AC})}{(3k_i + 4\mu^{AC})} \quad (1.48)$$

$$\mu^{AC} = \mu_m + P_i (\mu_i - \mu_m) \frac{15(1 - \nu^{AC})}{\mu^{AC}(7 - 5\nu^{AC}) + 2(4 - 5\nu^{AC})\mu_i} \quad (1.49)$$

Pour des problèmes à deux dimensions, [Herve and Zaoui, 1995] a proposé une expression du module de compressibilité effectif k^{AC} pour des composites biphasés donnée par :

$$k^{AC} = \frac{k_1(\mu_1 + k_2) + \mu_1 P(k_2 - k_1)}{(\mu_1 + k_2) + P(k_1 - k_2)} \quad (1.50)$$

Le module de cisaillement μ^{AC} a été proposé par [Christensen and Lo, 1979] par l'expression :

$$\mu^{AC} = \mu_1 \left(1 + \frac{P}{\frac{\mu_m}{\mu_i - \mu_m} + \frac{k_m + \frac{7}{3}\mu_m}{(2k_m + \frac{8}{3}\mu_m)} (1 - P)} \right) \quad (1.51)$$

1.6.2.4 Mori-Tanaka (1973)

Le schéma de Mori et Tanaka ([Mori and Tanaka, 1973b]; [Benveniste, 1987]) s'applique à des milieux hétérogènes constitués d'inclusions noyées dans une matrice. Les inclusions sont réparties de manière isotrope et se comportent, en moyenne, comme des inclusions isolées dans une matrice infinie, soumise à l'infini, à la déformation moyenne de la matrice ε_m (une inconnue du problème). La déformation de chaque inclusion est alors reliée à la déformation moyenne de la matrice par des « pseudo-tenseurs de localisation » T_{ph} équation 1.52, solution

du problème de l'hétérogénéité :

$$\varepsilon_{ph} = T_{ph} : \varepsilon_m \quad (1.52)$$

Le tenseur de localisation de chaque phase aura pour expression :

$$A_{ph} = T_{ph} : \left(\sum P_{ph} T_{ph} \right)^{-1} \quad (1.53)$$

et le tenseur de rigidité homogénéisé, aura pour expression :

$$C^{MT} = C_m + \sum_{ph=1}^N P_{ph} (C_{ph} - C_m) : T_{ph} : \left(\sum P_{ph} T_{ph} \right)^{-1} \quad (1.54)$$

Dans ce modèle, les interactions entre les inclusions sont prises en compte mais de manière simplifiée, et par conséquent, ce modèle n'est valable que pour des fractions volumiques inférieures à 25%.

Pour un composite élastique linéaire à deux phases avec des inclusions sphériques, le module de compressibilité équivalent k^{MT} et le module de cisaillement équivalent μ^{MT} sont définis par les relations suivantes :

$$k^{MT} = k_m + \frac{P_i(k_i - k_m)k_m}{\frac{(1-P_i)(k_i - k_m)3k_m}{(3k_i + 4\mu_m)} + k_m} \quad (1.55)$$

$$\mu^{MT} = \mu_m + \frac{P_i(\mu_i - \mu_m)\mu_m}{(1 - P_i)(\mu_i - \mu_m) \frac{6(k_m + 2\mu_m)}{5(3k_m + 4\mu_m)} + \mu_m} \quad (1.56)$$

Dans le cas de particules infiniment rigides, les estimations de Mori-Tanaka coïncident avec les bornes inférieures d'Hashin-Shtrikman.

1.6.3 Encadrement analytique

Nous allons maintenant nous concentrer sur les bornes rigoureuses qui peuvent être définies en se basant sur les principes variationnels et les informations statistiques sur la morphologie du matériau. Les propriétés effectives sont comprises entre deux de ces limites. Une limite analytique est considérée comme optimale si sa définition utilise toutes les données statistiques disponibles. Nous allons examiner les matériaux à n phases, bien que chaque borne sera spécialisée pour les matériaux à deux phases.

1.6.3.1 Bornes d'ordre zéro

On considère un matériau hétérogène multi-phasique, sa propriété équivalente Z^H est bornée entre la propriété Z_d de la phase la plus dure et la propriété Z_t de la phase la plus tendre tel que :

$$Z_t \leq Z^H \leq Z_d \quad (1.57)$$

Pour les modules de compressibilité k et de cisaillement μ on aura :

$$k_t \leq k^H \leq k_d \quad (1.58)$$

$$\mu_t \leq \mu^H \leq \mu_d \quad (1.59)$$

Ces bornes sont les plus simples, car elles ne prennent en considération aucune information concernant la microstructure.

1.6.3.2 Bornes du premier ordre

– Borne supérieure de Voigt [Voigt, 1889]

La borne de Voigt résulte d'une approche en déformation qui suppose que la déformation est constante dans toutes les phases et égale à la déformation macroscopique imposée E_{ij} :

$$\langle \varepsilon_{ij}(x) \rangle = E_{ij} \quad (1.60)$$

Le tenseur de localisation de la déformation est réduit partout au tenseur unité :

$$A_{ij}(x) = I_{ij} \quad (1.61)$$

Donc, l'expression du tenseur des rigidités équivalent sera :

$$C_{ijkl}^{Voigt} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} (c_{ijkl})_{ph} \quad (1.62)$$

La borne de [Voigt, 1889] correspond au modèle en parallèle du composite pour lequel on considère les déformations uniformes dans le matériau. On obtient les relations suivantes reliant les fractions volumiques et les modules d'élasticité de chacune des phases :

$$k^{voigt} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} \cdot k_{ph} \quad (1.63)$$

$$\mu^{voigt} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} \cdot \mu_{ph} \quad (1.64)$$

Pour un matériau biphasé de type matrice-inclusion, ces expressions se réduisent à :

$$k^{voigt} = P_m \cdot k_m + P_i \cdot k_i \quad (1.65)$$

$$\mu^{voigt} = P_m \cdot \mu_m + P_i \cdot \mu_i \quad (1.66)$$

– **Borne inférieure de Reuss [Reuss, 1929]**

La borne de [Reuss, 1929] est l'approche en contrainte qui considère que celle ci est constante dans toutes les phases et est égale à la contrainte macroscopique imposée Σ_{ij} .

$$\langle \sigma_{ij}(x) \rangle = \Sigma_{ij} \quad (1.67)$$

Le tenseur de localisation de contrainte est réduit partout au tenseur unité :

$$B_{ijkl}(x) = I_{ijkl} \quad (1.68)$$

Donc, l'expression du tenseur des souplesses équivalent sera :

$$S_{ijkl}^{Voigt} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} (c_{ijkl})_{ph}^{-1} \quad (1.69)$$

La borne de *Reuss* correspond au modèle en série du composite pour lequel on considère les contraintes uniformes dans le matériau. On obtient les relations suivantes reliant les fractions volumiques et les modules d'élasticité de chacune des phases :

$$\frac{1}{k^{Reuss}} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} \cdot \frac{1}{k_{ph}} \quad (1.70)$$

$$\frac{1}{\mu^{Reuss}} = \sum_{ph=1}^N P_{ph} \cdot \frac{1}{\mu_{ph}} \quad (1.71)$$

Pour un matériau biphasé de type matrice-inclusion, ces expressions se réduisent à :

$$k^{Reuss} = \frac{k_m k_i}{P_i k_m + P_m k_i} \quad (1.72)$$

$$\mu^{Reuss} = \frac{\mu_m \mu_i}{P_i \mu_m + P_m \mu_i} \quad (1.73)$$

Voigt et Reuss donnent deux bornes supérieure et inférieure du comportement équivalent. Ces bornes, associées à des lois de mélanges, sont des bornes du premier ordre. Elles ne supposent aucune information concernant la microstructure en dehors des fractions volumiques de chacun des constituants.

1.6.3.3 Bornes du second ordre [Dirrenberger, 2012]

Dans le cas où la répartition des phases est supposée isotrope au sein du matériau, il existe des bornes plus resserrées que les bornes de Voigt et Reuss dites bornes d'Hashin-Shtrikman [Hashin and Shtrikman, 1963]. Le schéma de Hashin-Shtrikman-Walpole (*H.S.W*) est le même que pour la méthode auto-cohérente où le matériau homogène équivalent entourant les différents constituants est remplacé par un matériau de comparaison. Si le matériau de comparaison est plus dur, on retrouve la borne supérieure de la rigidité du composite, par contre, si le matériau de comparaison est plus souple, on aboutit à la borne inférieure de la rigidité du composite.

Pour un matériau multiphasé et si le module le plus faible prend l'indice 1 et le plus fort prend l'indice n (On suppose donc que $k_{N-1} \leq k_N$ et $\mu_{N-1} \leq \mu_N$) les bornes de Hashin-Shtrikman sont définies par :

– Le module de compressibilité k :

$$k^{HS-} = k_1 + \frac{B_1}{1 + \alpha_1 B_1} \quad (1.74)$$

$$k^{HS+} = k_N + \frac{B_N}{1 + \alpha_N B_N} \quad (1.75)$$

où α_1 , α_N , B_1 et B_N sont exprimés par :

$$\alpha_1 = -\frac{3}{3k_1 + 4\mu_1} \quad (1.76)$$

$$\alpha_N = -\frac{3}{3k_N + 4\mu_N} \quad (1.77)$$

et

$$B_1 = \sum_{ph=2}^N \frac{P_{ph}}{\frac{1}{k_{ph} - k_1} - \alpha_1} \quad (1.78)$$

$$B_N = \sum_{ph=1}^N \frac{P_{ph}}{\frac{1}{k_{ph} - k_N} - \alpha_N} \quad (1.79)$$

avec P_{ph} la fraction volumique de la phase.

On obtient l'encadrement suivant pour le module de compressibilité k^H homogénéisé :

$$k^{HS-} \leq k^H \leq k^{HS+} \quad (1.80)$$

– Le module de cisaillement μ :

$$\mu^{HS-} = \mu_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{D_1}{1 + \beta_1 D_1} \right) \quad (1.81)$$

$$\mu^{HS+} = \mu_N + \frac{1}{2} \left(\frac{D_N}{1 + \beta_N D_1} \right) \quad (1.82)$$

avec β_1 , β_N , D_1 et D_N exprimés par :

$$\beta_1 = -\frac{3(k_1 + 2\mu_1)}{5\mu_1(3k_1 + 4\mu_1)} \quad (1.83)$$

$$\beta_N = -\frac{3(k_N + 2\mu_N)}{5\mu_N(3k_N + 4\mu_N)} \quad (1.84)$$

$$D_1 = \sum_{ph=2}^N \frac{P_{ph}}{\frac{1}{2(\mu_{ph}-\mu_1)} - \beta_1} \quad (1.85)$$

$$D_N = \sum_{ph=1}^{N-1} \frac{P_{ph}}{\frac{1}{2(\mu_{ph}-\mu_N)} - \beta_N} \quad (1.86)$$

On obtient l'encadrement suivant pour le module de cisaillement homogénéisé μ^H :

$$\mu^{HS-} \leq \mu^H \leq \mu^{HS+} \quad (1.87)$$

Pour le cas d'un matériau biphasé à 3 dimensions, les deux modules sont exprimés par :

– le module de compressibilité :

$$k^{HS-} = \frac{1}{\frac{P_i}{(k_i + \frac{4\mu_i}{3})} + \frac{P_m}{(k_m + \frac{4\mu_m}{3})}} - \frac{4\mu_i}{3} \quad (1.88)$$

$$k^{HS+} = \frac{1}{\frac{P_i}{(k_i + \frac{4\mu_i}{3})} + \frac{P_m}{(k_m + \frac{4\mu_m}{3})}} - \frac{4\mu_i}{3} \quad (1.89)$$

– le module de cisaillement :

$$\mu^{HS-} = \mu_m \cdot + \frac{P_i}{\frac{1}{(\mu_i - \mu_m)} + \frac{2(k_m + 2\mu_m) \cdot P_m}{5\mu_m(k_m + \frac{4}{3}\mu_m)}} \quad (1.90)$$

$$\mu^{HS+} = \mu_i \cdot + \frac{P_m}{\frac{1}{(\mu_m - \mu_i)} + \frac{2(k_i + 2\mu_i) \cdot P_i}{5\mu_i(k_i + \frac{4}{3}\mu_i)}} \quad (1.91)$$

et pour le cas 2 dimensions, les deux modules sont exprimés par :

– le module de compressibilité :

$$k^{HS-} = k_m \cdot + \frac{P_i}{\frac{1}{(k_i - k_m)} + \frac{3 \cdot P_m}{(3k_m + 4\mu_m)}} \quad (1.92)$$

$$k^{HS+} = k_i + \frac{P_m}{\frac{1}{(k_m - k_i)} + \frac{3.P_i}{(3.k_i + 4.\mu_i)}} \quad (1.93)$$

– le module de cisaillement :

$$\mu^{HS-} = \mu_m + \frac{P_i}{\frac{1}{(\mu_i - \mu_m)} + \frac{6(K_m + 2.\mu_m).P_m}{5\mu_m(3.k_m + 4.\mu_m)}} \quad (1.94)$$

$$\mu^{HS+} = \mu_i + \frac{P_m}{\frac{1}{(\mu_m - \mu_i)} + \frac{6(K_i + 2.\mu_i).P_i}{5.\mu_i(3.k_i + 4.\mu_i)}} \quad (1.95)$$

A noter que pour une distribution isotrope d'inclusions sphériques dures diluées dans une matrice molle, la borne inférieure de Hashin-Shtrikman est équivalente à l'estimation de Mori-Tanaka [Mori and Tanaka, 1973a] .

1.7 Homogénéisation numérique

La mécanique des matériaux hétérogènes s'est longtemps limitée aux approches analytiques. Les progrès considérables des moyens de calcul ont favorisé l'utilisation de la simulation numérique qui a permis de surmonter plusieurs difficultés et de traiter ainsi des microstructures de matériaux complexes. L'homogénéisation numérique constitue la deuxième catégorie de l'homogénéisation, elle consiste à utiliser des techniques de simulation numérique sur des échantillons de microstructures afin d'estimer leurs propriétés effectives à partir de leurs lois de comportement et des distributions spatiales de leurs différents composants. Les microstructures étudiées sont des images qui peuvent être virtuelles, c'est à dire générées par des outils numériques, ou réelles obtenues par le microscope ou par la tomographie (comme l'IRM en imagerie médicale). L'homogénéisation numérique est liée directement à la détermination de la taille du volume élémentaire représentatif (VER) qui a été largement étudié avec des outils numériques et statistiques [Sab, 1992b], [Ostoja-Starzewski, 1993], [Gusev, 1997], [Terada et al., 1998], [Ostoja-Starzewski, 1998], [Segurado and Llorca, 2002], [Segurado et al., 2003], [Sab, 2005], [Kanit et al., 2003b], [Segurado and Llorca, 2006], [Minshnaevsky, 2004], [Kari et al., 2007], [Kari et al., 2008], [Lachihab and Sab, 2008], [El moumen, 2014], [Kaddouri et al., 2016].

La Figure 1.8 résume le principe de l'homogénéisation numérique qui consiste en premier lieu à l'élaboration de l'image de la microstructure du matériau hétérogène étudiée, ensuite au choix du VER, suivi par le maillage et la simulation numérique aboutissant au comportement du matériau homogène équivalent (MHE).

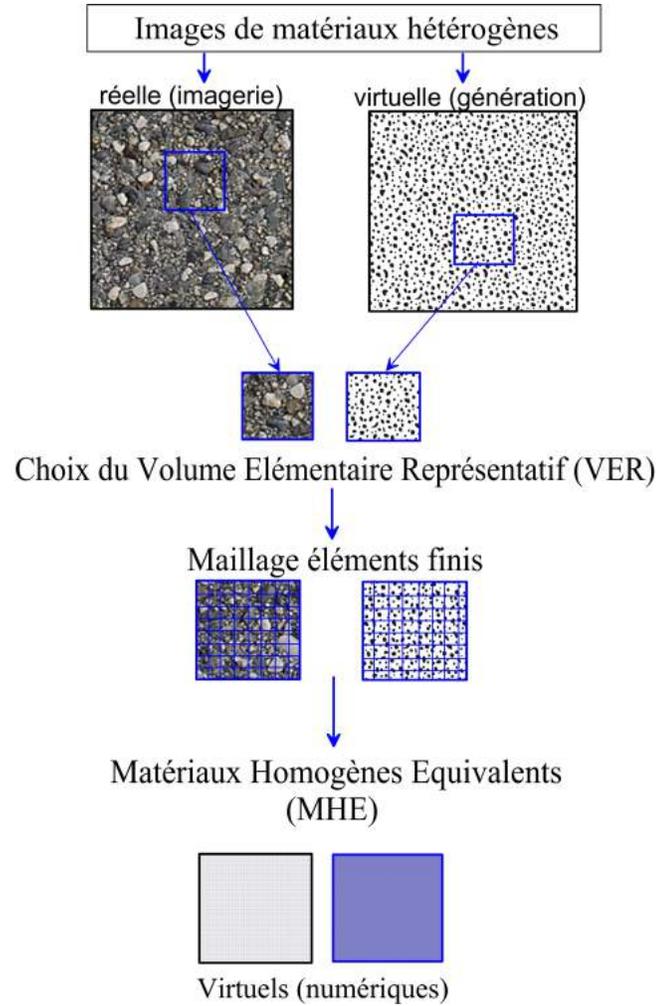


FIGURE 1.8 – Etapes de l'homogénéisation numérique

1.7.1 Homogénéisation numérique par des microstructures virtuelles

Les outils numériques de génération d'images de microstructures et de calcul ont ouvert de grandes perspectives dans la micromécanique permettant la génération d'images de microstructures variées et compliquées, Figure 1.9. Ainsi, et durant ces deux dernières décennies, un nombre considérable d'études se sont intéressées à l'étude des différentes propriétés mécaniques et physiques des différents matériaux hétérogènes, composites et poreux, et ce par l'investigation des effets des différents paramètres de ces microstructures : taille du VER, nature des particules, morphologie des renforts ou des pores, leurs orientations, fraction volumique, conditions aux limites etc... On cite, entre autres, les travaux de [Kanit et al., 2003b], [Kanit et al., 2006], [Fritzen et al., 2012], [El Moumen et al., 2013], [Khdar et al., 2013], [El moumen, 2014], [Benhizia et al., 2014] [El Moumen et al., 2015], [Kaddouri et al., 2016], [Djebara et al., 2016], [Benhizia et al., 2017]. Dans ces travaux, les propriétés mécaniques

élastiques telles que le module d'élasticité, le coefficient de compressibilité, le coefficient de cisaillement ainsi qu'une propriété physique qui est la conductivité thermique ont été largement étudiées. Le comportement non linéaire comme l'élastoplasticité a fait, aussi, l'objet de certains travaux.

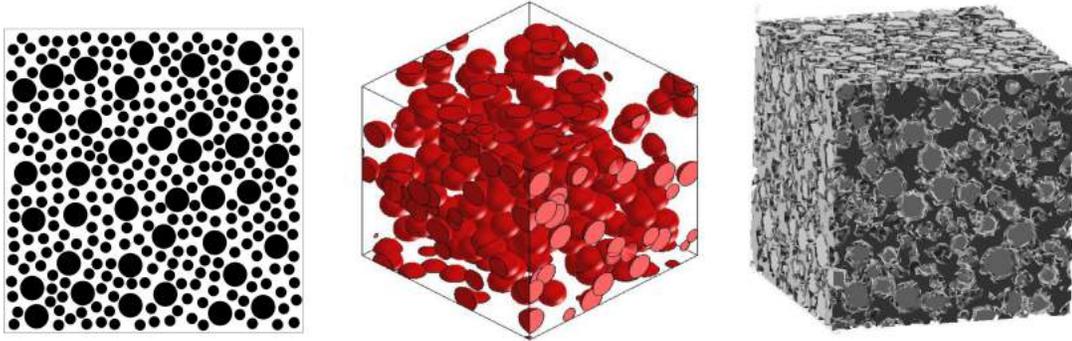


FIGURE 1.9 – Exemples de microstructures virtuelles

1.7.2 Homogénéisation numérique par des microstructures réelles

Les images des microstructures réelles sont obtenues soit par des observations microscopiques (MEB) qui fournissent des vues bidimensionnelles (2D) ou par la tomographie qui permet de reconstruire le volume d'un objet à partir d'une série de mesures effectuées par tranches depuis l'extérieur de cet objet, Figure 1.10. Les images issues de ces deux techniques nécessitent un traitement spécifique afin de les améliorer.

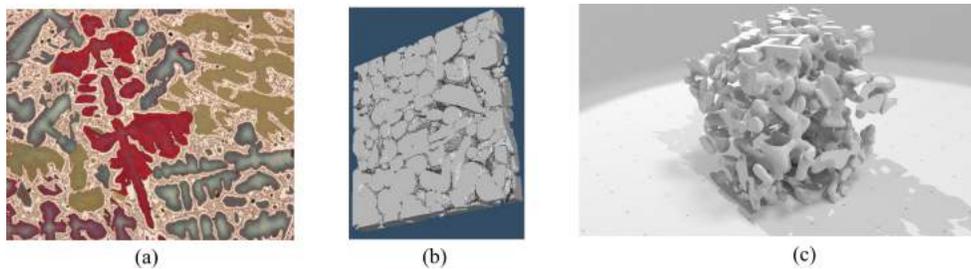


Figure 1.10: Exemples de microstructures réelles : (a) Bronze (Wikipédia), (b) Crème glacée ([Kanit et al., 2006] et Neige (Liris, CNRS))

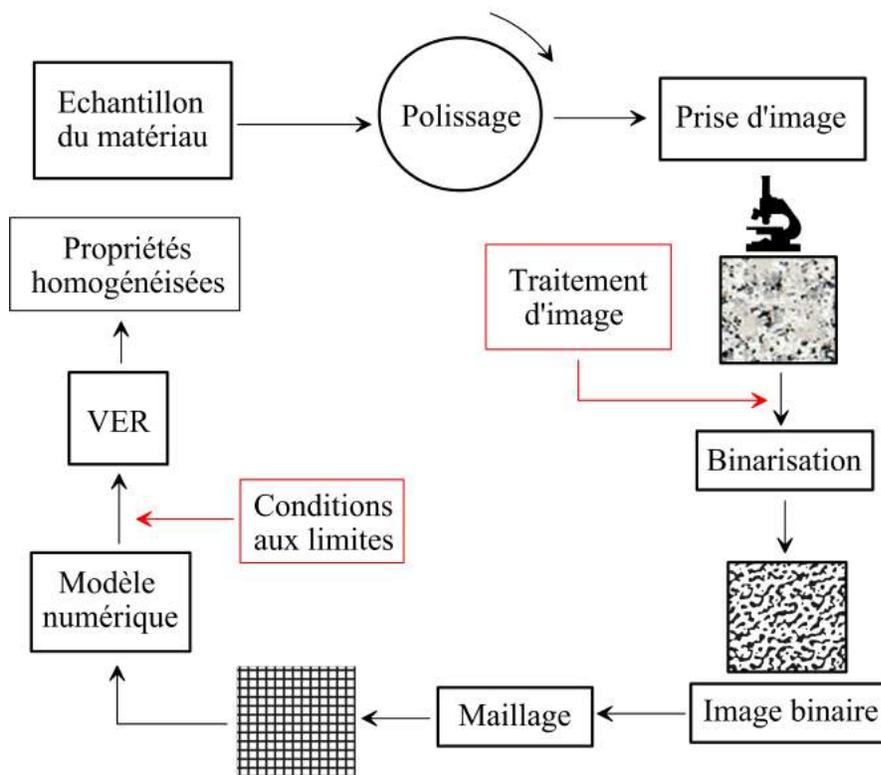


Figure 1.11: Etapes de préparation d'une microstructure réelle pour la simulation [El moumen, 2014]

Elles doivent ainsi passer par plusieurs étapes pour qu'elles soient exploitables pour une simulation numérique. Ces étapes sont illustrées par la Figure 1.11.

On peut citer ici, à titre d'exemple, le travail de [Kanit et al., 2006] qui a étudié les microstructures hétérogènes de la crème glacée. Une image 3D est obtenue après polissage successif des éprouvettes et une nouvelle technique, basée sur le couplage des méthodes numériques avec les moyennes des paramètres statistiques, pour l'estimation des propriétés apparentes et effectives a été proposée.

Deuxième Partie
Homogénéisation en élastoplasticité

1.8 Rappel théorique du comportement élastoplastique des structures

Avant de présenter les différents modèles de changement d'échelles utilisés dans l'analyse du comportement élastoplastique des matériaux hétérogènes, il est tout de même utile de rappeler la théorie de l'élastoplasticité des structures, dont les matériaux sont supposés homogènes, et ce du fait que c'est la base de cette même théorie qui est utilisée pour l'homogénéisation en élastoplasticité. Dans cette section, il sera question de donner les notions de base ainsi que les relations essentielles dans l'analyse élastoplastique des structures. Les méthodes numériques les plus utilisées dans la résolution des systèmes non-linéaires résultants seront aussi exposées [Masmoudi, 1997].

1.8.1 Elastoplasticité

La plupart des matériaux structurels ont un comportement initial élastique (réversible, linéaire ou non) mais exhibent au delà d'une certaine limite, appelée limite élastique ou seuil plastique, Figure 1.12, des déformations irréversibles ou plastiques. Les déformations augmentent avec une petite variation de la résistance qui peut être soit positive (durcissement ou écrouissage positif) ou négative (adoucissement).

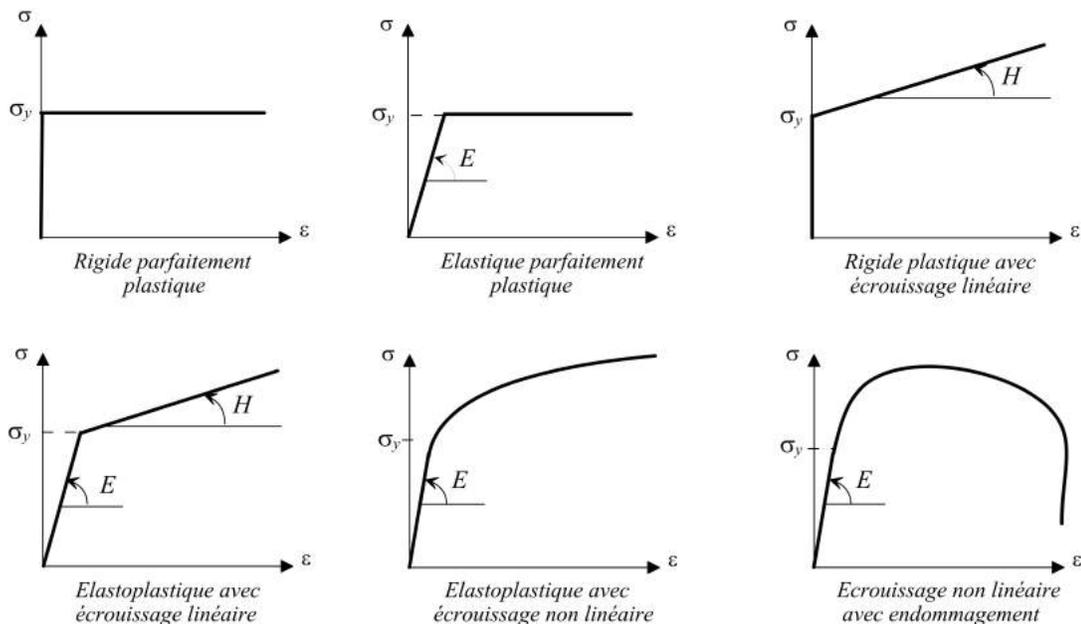


FIGURE 1.12 – Modèles de comportements mécaniques

Si on décharge complètement la structure après plastification, les déformations diminuent en suivant un chemin parallèle au tronçon élastique. Si on recharge à partir du point C, le

comportement sera élastique jusqu'au point B. La limite élastique change donc à cause de l'érouissage. Le seuil plastique dépend de l'histoire du chargement. σ_y est appelée limite élastique initiale et σ_B est la limite élastique actuelle. Si on inverse le chargement, Figure 1.13, on observe que la limite élastique dans un sens est réduite par la plastification antérieure dans l'autre sens : c'est l'effet Bauschinger qui est également lié à l'histoire des contraintes et qui induit, donc, une anisotropie dans un matériau initialement isotrope. Pour l'acier doux dont le comportement est pratiquement élastoplastique parfait, les phénomènes d'érouissage et de Bauschinger ne sont pas observés expérimentalement.

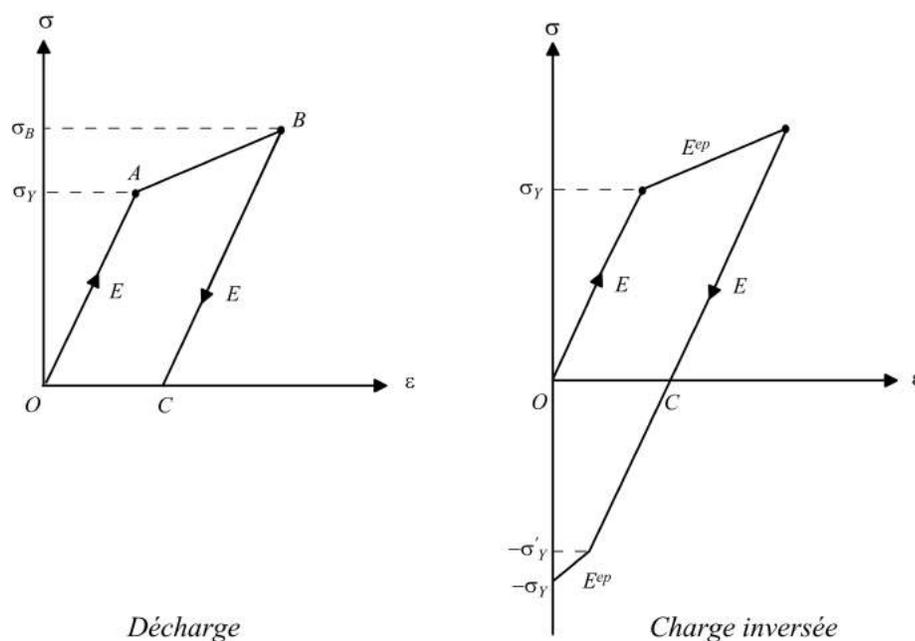


FIGURE 1.13 – Effet Bauschinger

L'érouissage signifie que les déformations sont élastiques et plastiques à la fois. Dans le cas uniaxial, l'élastoplasticité parfaite signifie qu'au delà de la limite élastique, le comportement réversible cesse et les déformations sont purement plastiques. La plasticité est une extension logique de l'élasticité et le critère de la limite élastique constitue la condition de plastification. Dans la théorie de l'élastoplasticité, les déformations sont indépendantes du temps.

Remarque

- Du point de vue microscopique, la déformation plastique d'un matériau est provoquée par le déplacement irréversible des dislocations (une dislocation est un défaut au sein d'un arrangement régulier d'un réseau cristallin). Pour provoquer une telle déformation, il faut vaincre les liaisons atomiques du réseau.
- L'érouissage signifie la modification des caractéristiques mécaniques d'un matériau par suite de déformation plastique (durcissement par déformation).

1.8.2 Critère de limite élastique ou d'épuisement

Dans le cas unidimensionnel, le critère d'épuisement est quand la contrainte courante $|\sigma|$ atteint la limite élastique $|\sigma_y|$. On peut exprimer ce critère par :

$$|\sigma| - |\sigma_y| = F(\sigma - \sigma_y) = 0 \quad (1.96)$$

Les deux contraintes sont comptées algébriquement afin de pouvoir traiter les chargements inversés éventuels.

1.8.3 Règle d'écrouissage

Cette règle doit donner la limite élastique actuelle Y et décrire l'effet Bauschinger éventuel. Plusieurs règles d'écrouissage existent. La plus simple est celle qui suppose que les limites élastiques en traction et en compression sont indépendantes. Cette règle est, néanmoins, en contradiction avec les observations expérimentales. Les écrouissages les plus utilisés sont de nature isotrope, cinématique ou combinée.

1.8.3.1 Ecrouissage isotrope

Dans ce cas, Figure 1.14(a), les conditions d'épuisement en compression et en traction sont affectées de la même manière. Si on inverse le chargement à partir du point B , l'écoulement plastique dans l'autre sens commencera à la contrainte σ_B . Il y a dans ce cas une symétrie par rapport à l'axe $\sigma = 0$. L'origine O est le centre fixe du segment entre les points limites mais celui-ci subit une expansion isotrope symétrique, Figure 1.14(b).

Cela s'exprime par :

$$F(\sigma, Y) = |\sigma| - |Y| = 0 \quad (1.97)$$

Y est la limite élastique actuelle comptée algébriquement et dépend de la déformation plastique ε^p , Figure 1.14(c).

$$Y = \sigma_Y + \int H d\varepsilon^p \quad (1.98)$$

H est une caractéristique du matériau (paramètre d'écrouissage).

Si H est constante :

$$Y = \sigma_Y + H\varepsilon^p \quad (1.99)$$

En élastoplasticité parfaite $H = 0$, donc $Y = \sigma_Y = \text{constante}$.

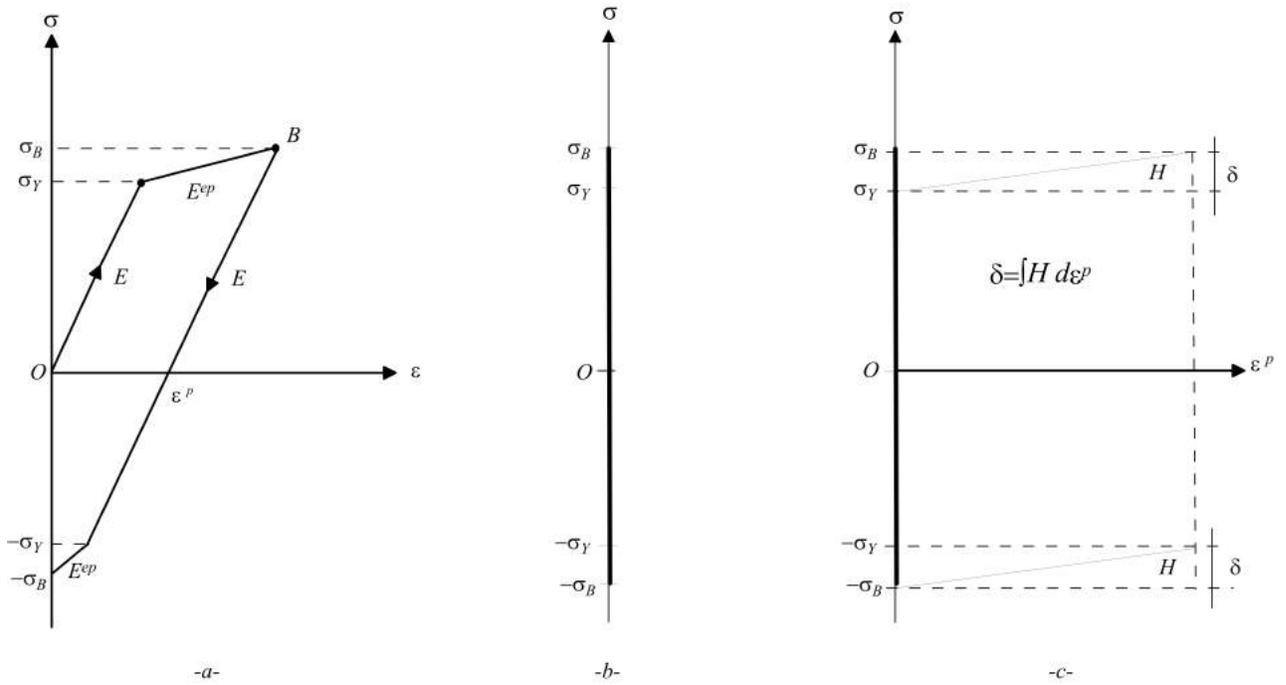


FIGURE 1.14 – Ecrouissage isotrope

1.8.3.2 Ecrouissage cinématique

Dans ce cas, on suppose que la même marge $2\sigma_Y$ est conservée quand le chargement est inversé Figure 1.15(a). Cela signifie que le segment entre les points limites garde la même dimension mais subit une translation et son centre se déplace d'une distance (contrainte) δ , Figures 1.15(b) et (c).

$$F(\sigma, \delta, \sigma_Y) = F(\bar{\sigma}, \sigma_Y) = |\bar{\sigma}| - |\sigma_Y| = 0 \quad (1.100)$$

δ est l'ordonnée du centre du segment. $\bar{\sigma} = \sigma - \delta$ est appelée contrainte réduite.

$$\delta = \int b d\epsilon^p \quad (1.101)$$

b est une caractéristique du matériau égale à H si l'écrouissage est purement cinématique, Figure 1.15(c).

Dans ce cas, l'effet Bauschinger est maximal car l'augmentation de la limite élastique par écrouissage dans un sens est totalement perdue dans l'autre sens.

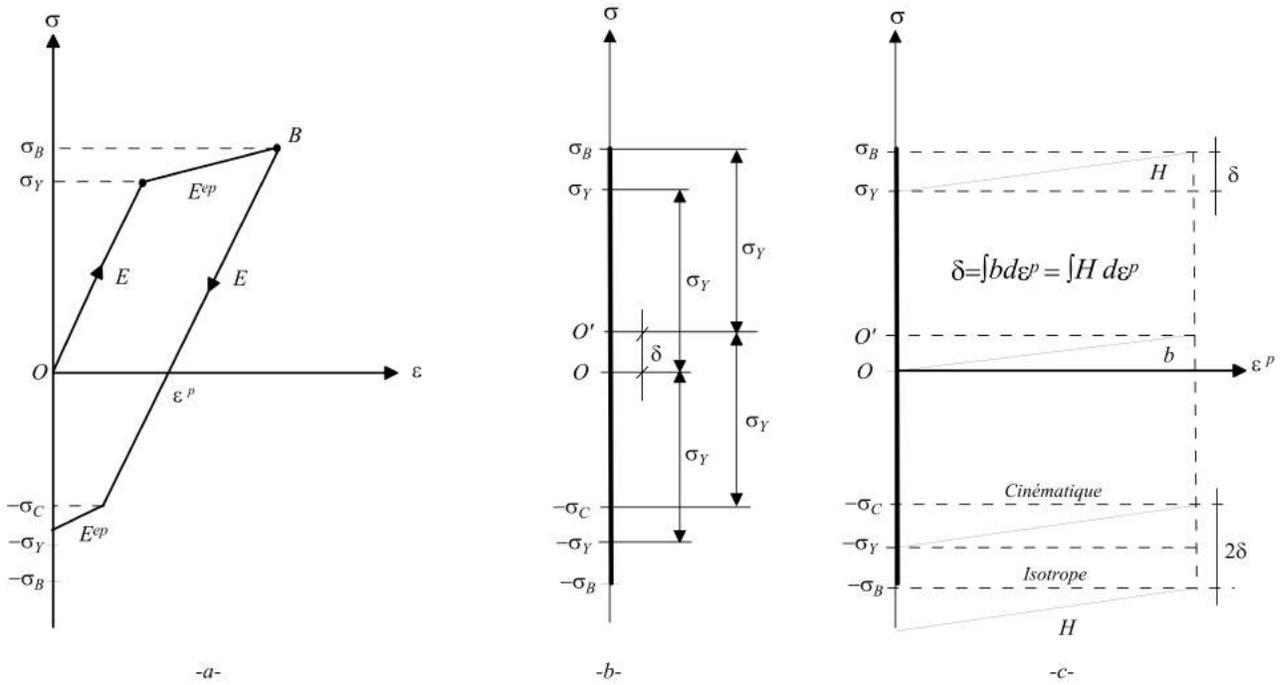


FIGURE 1.15 – Ecrouissage cinématique

1.8.4 Règle d'écoulement

A cause de la dépendance de la réponse de l'histoire du chargement et du problème de non-unicité de la solution qui peut se poser, la loi constitutive élastoplastique ne peut se formuler que de manière incrémentale. L'incrément total des déformations se compose en général de deux parties : un incrément élastique $d\varepsilon^{e1}$ et un incrément élastoplastique $d\varepsilon^{ep}$, Figure 1.16. Ce dernier se décompose lui-même en une partie élastique $d\varepsilon^{e2}$ et une partie purement plastique $d\varepsilon^p$.

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{e1} + d\varepsilon^{ep} = d\varepsilon^{e1} + d\varepsilon^{e2} + d\varepsilon^p \quad (1.102)$$

Dans le domaine élastique ou en cas de décharge, la composante plastique est nulle. dans le domaine plastique $d\varepsilon^{e1} = 0$. L'incrément correspondant des contraintes $d\sigma$ est dû aux déformations élastiques seulement.

$$d\sigma = d\sigma^e + d\sigma^{ep}$$

$$d\sigma = E d\varepsilon^e = E(d\varepsilon^{e1} + d\varepsilon^{e2}) \quad (1.103)$$

On peut lier les contraintes et les déformations plastiques ou élasto-plastiques :

$$d\sigma^{ep} = E^{ep} d\varepsilon^{ep} \quad (1.104)$$

$$d\sigma^{ep} = H d\varepsilon^p \quad (1.105)$$

E^{ep} est le module tangent et H est un paramètre d'écrouissage (module tangent plastique) qui ne sont pas forcément constants. En élastoplasticité parfaite $E^{ep} = H = 0$.

En substituant $d\varepsilon^{ep}$ par sa valeur dans l'équation 1.104, on aura :

$$\begin{aligned} d\sigma^{ep} &= E^{ep}(d\varepsilon^{e2} + d\varepsilon^p) \\ &= E^{ep}\left(\frac{d\sigma^{ep}}{E} + \frac{d\sigma^{ep}}{H}\right) \\ &= E^{ep} \cdot d\sigma^{ep} \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{E^{ep}} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H}$$

ou bien :

$$E^{ep} = E \left(1 - \frac{E}{E + H}\right)$$

$$H = \frac{E}{1 - \frac{E^{ep}}{E}} \quad (1.106)$$

La relation 1.104 est la règle d'écoulement plastique, et la relation incrémentale générale est :

$$d\sigma = E_t \cdot d\varepsilon \quad (1.107)$$

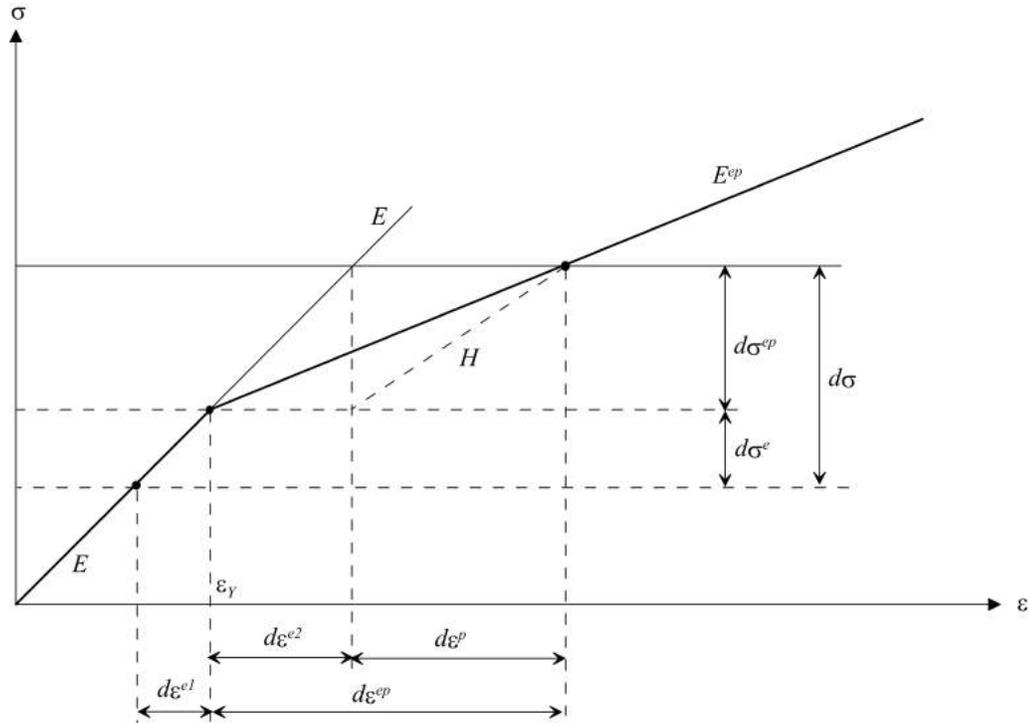


FIGURE 1.16 – Relations élastoplastiques

- En cas de chargement après épuisement : $E_t = E^{ep}$
- En cas de décharge ou dans le domaine élastique : $E_t = E$
- En cas de transition du domaine élastique au domaine plastique :

$$E_t = rE + (1 - r)E^{ep} \tag{1.108}$$

avec $0 \leq r \leq 1$.

1.8.5 Résolution des systèmes non linéaires

Des non linéarités apparaissent dans la formulation de problèmes de mécanique des structures pour deux raisons :

- les paramètres physiques supposés indépendants du déplacement U dans un modèle linéaire, tel que le module de Young E , deviennent des fonctions de U . C'est le cas de l'élastoplasticité (non-linéarité matérielle),
- des termes non-linéaires apparaissent dans les équations aux dérivées partielles, même si les propriétés physiques sont indépendantes du déplacement U . C'est le cas en élasticité avec grands déplacements où l'on doit prendre en compte les termes d'ordre supérieur dans le tenseur des déformations (non linéarité géométrique).

Il n'existe pas de méthode directe de résolution de systèmes non linéaires, elle s'effectue par des linéarisations successives tout en essayant de satisfaire les conditions non linéaires à une certaine précision. Plusieurs méthodes numériques de résolution de problèmes non linéaires existent, elles sont dans leur quasi-totalité basées sur un même principe : à partir d'une approximation initiale des déplacements (éventuellement nulle), on calcule les contraintes selon le modèle constitutif. Ces contraintes sont équivalentes à un système de forces nodales intérieurs F_I devant équilibrer les forces nodales extérieures. Généralement les deux systèmes de forces ne sont pas égaux et la différence entre les deux est appelée forces résiduelles ou simplement résidu : $R = F - F_I$.

La méthode des éléments finis conduit à une formulation discrétisée sous la forme :

$$\{R(U)\} = \{F\} - [K(U)] \{U\} = 0 \quad (1.109)$$

où $[K]$ est la matrice de rigidité.

Dans le cas de l'élastoplasticité, seule existe une forme incrémentale de 1.109 :

$$[K(U)] \{\Delta U\} = \{\Delta F\} \quad (1.110)$$

Résoudre le système non linéaire 1.109, c'est chercher un vecteur $\{U\}$ qui rend le résidu $\{R(U)\}$ aussi proche que possible de zéro. En général, pour un niveau de charge donné, un certain nombre d'itérations est nécessaire pour réduire les forces résiduelles à un certain degré de précision fixé. La qualité des résultats finaux dépend des différents paramètres numériques associés à la méthode utilisée : dimension de l'incrément, procédé d'itération, précision requise, critère de convergence...

Les nombreuses méthodes non linéaires existantes peuvent être groupées en trois classes : incrémentales, itératives et mixtes.

1.8.5.1 Méthodes incrémentales

Dans ces méthodes, le chargement est subdivisé en plusieurs incréments pas forcément égaux $\lambda_1 F, \lambda_2 F, \dots, \lambda_i F$. Durant chaque incrément, les déplacements sont obtenus par la résolution d'un système linéaire $KU = F$ où K est déduite des résultats de l'incrément précédent, et sont ajoutés aux déplacements cumulés précédemment. Le procédé est répété jusqu'au chargement final, Figure 1.17. Il n'y a aucune itération pour restaurer l'équilibre. L'inconvénient majeur réside dans le cumul des erreurs et dans l'impossibilité de prévoir la taille minimale des incréments pour satisfaire une tolérance fixée.

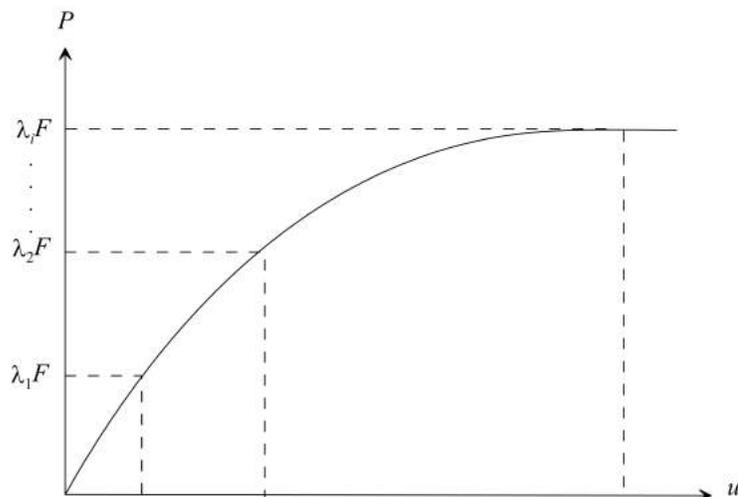


FIGURE 1.17 – Méthode incrémentale

1.8.5.2 Méthodes itératives

Le chargement est appliqué en un seul incrément. Les forces résiduelles déduites des résultats de l'itération précédente sont appliquées à leur tour et on déduit de nouveaux déplacements qu'on doit ajouter aux précédents. Ces déplacements cumulés donnent de nouvelles contraintes et de nouveaux résidus. Le procédé continue jusqu'à élimination des résidus à la précision désirée. La redistribution de forces résiduelles peut se faire avec une matrice de rigidité constante ou variable (tangente ou sécante), Figure 1.18. Les méthodes itératives sont plus lentes que les méthodes incrémentales mais permettent un meilleur contrôle de la précision et le procédé itératif peut être facilement inclus dans un algorithme non linéaire. L'inconvénient principal est que les contraintes et les déformation ne sont déterminées que pour un seul incrément sans aucune information sur le chemin non linéaire parcouru.

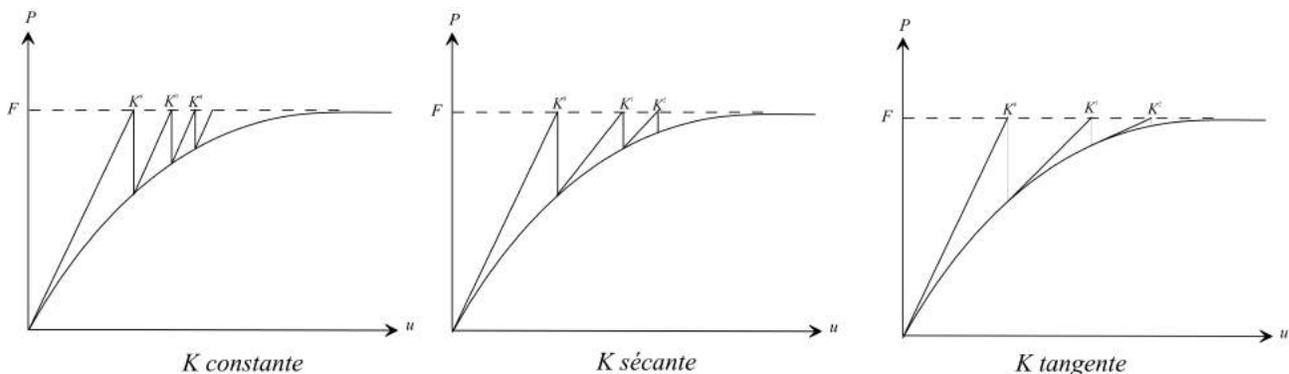


FIGURE 1.18 – Méthodes itératives

1.8.5.3 Méthodes mixtes

Incrémentales et itératives à la fois, elles combinent les avantages des deux méthodes précédentes et sont toutefois plus lentes. Le chargement est appliqué par incrément et dans chaque incrément plusieurs itérations sont effectuées afin d'assurer la convergence, Figure 1.19.

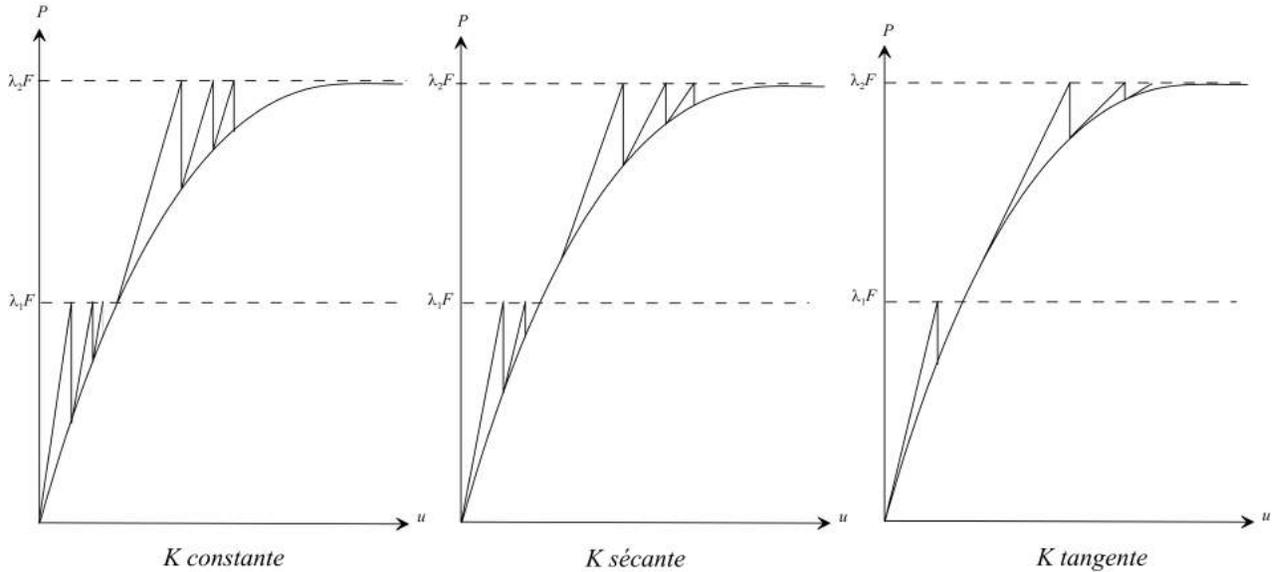


FIGURE 1.19 – Méthodes mixtes (incrémentales/itératives)

En pratique, il n'existe pas de méthode générale pour tous les cas ; la stratégie de résolution doit s'adapter, par expérience, à une classe de problèmes donnée en faisant appel à une combinaison des méthodes citées précédemment. Les principales méthodes utilisées sont exposées dans les sections suivantes.

1.8.5.4 Méthode itérative directe

Cette méthode, Figure 1.20, consiste à construire une suite de solutions $\{U^0\}, \{U^1\}, \dots, \{U^i\}$. $\{U^i\}$ étant calculé à partir de $\{U^{i-1}\}$ en résolvant le système linéaire :

$$[K(U^{i-1})] \{U^i\} = \{F\} \quad (1.111)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots$$

Ce qui peut s'écrire sous forme incrémentale en introduisant le résidu $\{R^{i-1}\}$ et connaissant les conditions initiales F^0, U^0 et $K(U^0)$:

$$\text{Résidu : } R^{i-1} = F - K^{i-1}U^{i-1}$$

Résoudre : $K^{i-1}\Delta U^i = R^{i-1}$ déduire ΔU^i

Cumuler : $U^i = U^{i-1} + \Delta U^i$ déduire K^i et R^i

Test de convergence (norme des forces ou des déplacements).

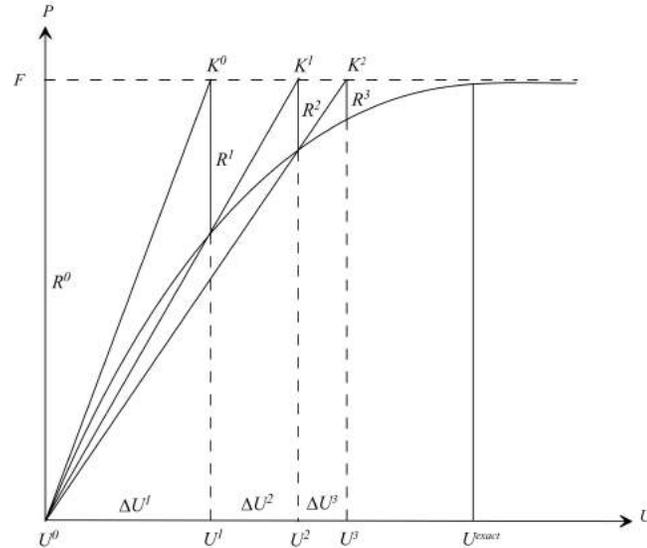


FIGURE 1.20 – Méthode itérative directe

1.8.5.5 Méthode de Newton-Raphson

La méthode est illustrée par la Figure 1.21. Les conditions initiales F^0, U^0 et K_t^0 étant connus (F^0, U^0 sont éventuellement nuls). Le résidu qu'on doit éliminer est R^0 .

On calcule ce résidu par : $R^0 = F - F^0 = F - K_t^0 U^0$.

On résout : $K_t^0 \Delta U^1 = R^0$ et on déduit ΔU^1 .

Le déplacement est : $U^1 = U^0 + \Delta U^1$ et on déduit F^1 et K_t^1 .

On calcule le nouveau résidu : $R^1 = F - F^1$

On résout : $K_t^1 \Delta U^2 = R^1$ et on déduit ΔU^2

Le nouveau déplacement est : $U^2 = U^1 + \Delta U^2$ et on déduit F^2 et K_t^2, \dots

Ainsi, l'algorithme de cette méthode est :

Résidu $R^{i-1} = F - F^{i-1}$

Résoudre $K_t^{i-1} \Delta U^i = R^{i-1}$ et déduire ΔU^i

Cumuler $U^i = U^{i-1} + \Delta U^i$ et déduire F^i et K_t^i .

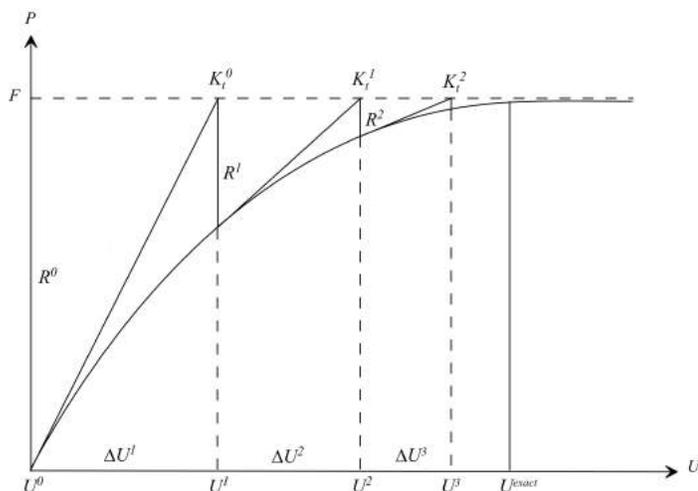


FIGURE 1.21 – Méthode de Newton-Raphson

1.8.5.6 Méthode de la rigidité initiale ou de Newton-Raphson modifiée

Pour éviter les coûteuses actualisations de K et les autres inconvénients de la méthode précédente, on utilise ici une matrice de rigidité constante, Figure 1.22.

L'algorithme est le suivant :

Résidu : $R^{i-1} = F - F^{i-1}$

Résoudre $K^0 \Delta U^i = R^{i-1}$ et déduire F^i .

Cumuler $U^i = U^{i-1} + \Delta U^i$ et déduire F^i

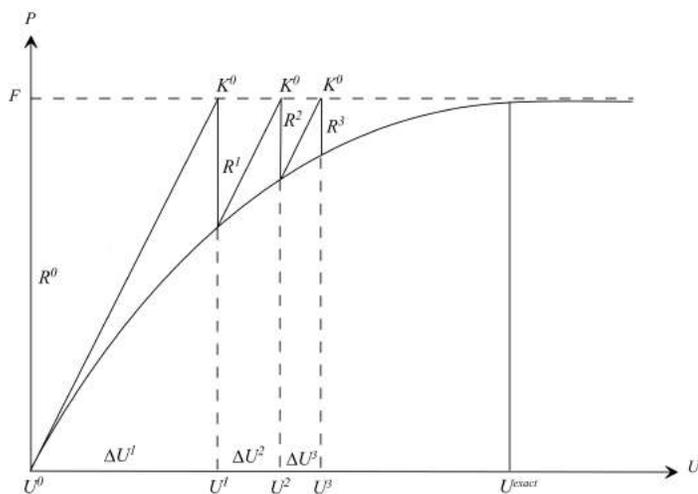


FIGURE 1.22 – Méthode de la rigidité initiale (ou de Newton-Raphson modifiée)

Bien que plus lente, cette méthode est plus économique car elle évite les actualisations répétées de K . La rigidité utilisée peut être relative à la configuration initiale (méthode de la rigidité

initiale). Cependant, la variante la plus intéressante de cette technique est celle qui consiste à actualiser périodiquement la rigidité.

Dans cette méthode, on utilise la même matrice de rigidité K^0 pour chaque itération. Il suffit, donc, de factoriser celle-ci une seule fois. L'avantage de cette méthode est donc évident mais elle est lente.

1.8.5.7 Critères de convergence

Le critère de convergence contrôle le nombre d'itérations dans un incrément. Le nombre d'itérations, le critère utilisé ainsi que la tolérance exigée influent sur les résultats. Toutefois, imposer une limite exagérée risque de coûter cher pour une précision inutile. Les critères de convergence sont formulés soit directement en fonction des forces résiduelles ou bien indirectement à travers les autres grandeurs (déplacements, déformations ou contraintes). Il est très difficile et très cher de vérifier la convergence de toutes les composantes des forces, déplacements ou autres grandeurs. On utilise une estimation globale avec les normes (moindres carrés en général). Les critères les plus utilisés sont :

– Convergence en forces :

$$\frac{\|\Delta F^i\|}{\|F^i\|} \leq T_F$$

où : T_F est la tolérance en forces,

avec :

$$\|F\| = (F^T \cdot F)^{\frac{1}{2}}, \|\Delta F\| = (\Delta F^T \cdot F)^{\frac{1}{2}}$$

– Convergence en déplacements :

$$\frac{\|\Delta U^i\|}{\|U^i\|} \leq T_D$$

où : T_D est la tolérance en déplacements.

1.8.5.8 Risques de divergence et remèdes

La convergence dans un problème non linéaire ne peut jamais être garantie notamment dans les analyses avec un nombre de degrés de liberté élevé. La divergence est toujours possible. Le choix de la solution initiale est primordial. Il peut accélérer la convergence comme il peut entraîner une divergence. Il est donc recommandé de faire un bon choix de départ, d'utiliser de petits incréments et de toujours prévoir un nombre maximal d'itérations pour éviter le déroulement indéfini des calculs en cas de divergence.

1.9 Modèles de changement d'échelles en mécanique non linéaire

Les approches de champ moyen reposent sur l'hypothèse d'un comportement de matériau élastique linéaire et ne peut pas être directement appliqué à la plupart des matériaux communs, du fait qu'ils montrent souvent un comportement non linéaire. Par conséquent, certaines considérations doivent être prises en compte pour étendre les méthodes d'homogénéisation à des comportements non linéaires telle que l'élastoplasticité. Les matériaux élastoplastiques montrent une forte dépendance vis-à-vis des chemins de chargement et notamment de nettes fluctuations des micro-champs pour chaque phase. Ces deux facteurs conduisent à des comportements différents de chaque point matériel dans une phase élastoplastique puisque chacun suit une trajectoire différente dans l'espace de contrainte. Par conséquent, le matériau non homogène devrait être théoriquement traité comme un matériau multiphasique, dans lequel chaque point de la microstructure peut être considéré comme une phase différente. Ce fait entraîne l'impossibilité d'utiliser la loi des moyennes de phase pour décrire le comportement mécanique du matériau inhomogène, comme cela est fait pour le cas élastique linéaire [Ortolano et al., 2013]. Le développement de l'homogénéisation des matériaux hétérogènes peut être attribué aux importants travaux de Kröner [Kröner, 1961], [Hill, 965b], [Hashin and Shtrikman, 1963], [Mori and Tanaka, 1973a] ou encore [Willis, 1983] entre autres.

Les premiers élargissements aux problèmes non linéaires, comme l'élastoplasticité, l'élasticité non linéaire et la viscoélasticité, ont été initiés par [Hill, 965a] et [Hutchinson, 1976]. D'autres améliorations récentes et intéressantes furent établies par [Nemat-Nasser and Hori, 2013], [Castaneda, 2002], [Lahellec and Suquet, 2013], [Willis, 1994] ou [Zaoui and Masson, 2000] parmi d'autres.

Motivée par le développement rapide des outils numériques au cours des dernières années, des progrès majeurs ont été réalisés par l'introduction des méthodes numériques dans les approches d'homogénéisation, en particulier pour surmonter les difficultés dues aux comportements non linéaires complexes des matériaux hétérogènes, ainsi que pour permettre de pousser les études vers des échelles de plus en plus fines afin de fournir des modèles aussi précis que possible.

Ainsi, plusieurs méthodes numériques d'homogénéisation ont été proposées, où des calculs numériques couplés à deux échelles sont effectués pour fournir la réponse d'une structure hétérogène non linéaire. Dans ce qui suit, une description de quelques unes de ces techniques est présentée.

1.9.1 Approches par champs moyens

Dans le domaine des comportements mécaniques non linéaires, les modèles de changement d'échelles développés s'appuient sur une linéarisation du comportement afin de pouvoir appliquer les schémas d'homogénéisation de l'élasticité linéaire [Paola, 2010]. Ces approches permettent de prendre en compte le comportement non linéaire de chaque phase en leur affectant des caractéristiques linéarisées associées à leurs déformation ou contrainte moyenne. On raisonne donc seulement sur le comportement moyen de chaque phase. Les résultats du problème d'Eshelby ont permis l'extension des modèles linéaires à l'élastoplasticité, la viscoélasticité et la viscoélastoplasticité. Ces comportements peuvent être approchés par une formulation sécante, tangente ou affine.

1.9.2 Approches par champs de transformation

L'analyse par champs de transformation (Transformation Field Analysis, TFA) a été développée par [Dvorak, 1992] qui a proposé une méthode qui permet de généraliser la localisation dans le domaine non linéaire. Il est supposé une redistribution purement élastique, dans le VER, du champ de déformation macroscopique. Les déformations plastiques sont considérées comme des déformations libres et le VER est subdivisé en sous volumes, où les champs plastiques sont supposés uniformes, constituant des parties homogènes du VER. Plus de détails de cette approche sont expliqués dans la référence citée ci-dessus.

1.9.3 Analyse par champs de transformation non uniforme

Connue sous le nom (Nonuniform Transformation Field Analysis, NTFA), c'est une extension de la précédente. Dans cette approche, il est proposé une décomposition non uniforme des déformations plastiques. Une comparaison entre les résultats donnés par les deux approches TFA et NTFA est donnée dans la référence [Roussette, 2005].

Les approches analytiques qui ont été proposées depuis les travaux pionniers de Hill ont pour objectif d'estimer ou de borner le comportement des matériaux hétérogènes non linéaires. Dans le cas des matériaux non linéaires en petites déformations, des extensions au cas non linéaire de certaines techniques classiques dans le cadre linéaire ont été proposées voir par exemple [Nemat-Nasser and Hori, 2013]; [Torquato, 2001]; [Milton and Serkov, 2000]), les travaux de [Willis, 1994], [Dvorak, 1992], [Qiu and Weng, 1992], [Castaneda, 2002] et [Hu., 1996]. Dans le cas des grandes déformations, plusieurs auteurs ont également étendu certaines approches d'homogénéisation analytiques issues du cadre linéaire pour des cas spécifiques. Dans une série de travaux, des estimations et des solutions exactes pour certaines classes de composites hyper élastiques ont été dérivées. [Castaneda, 2002] a proposé une méthode d'homogénéisation

du second ordre pour déterminer la loi de comportement effective de matériaux composites non linéaires poreux et renforcés, suivi par plusieurs autres auteurs. Quelques-unes de ces techniques sont décrites ci-dessous.

1.9.4 Modèle de Kröner (1961)

La première tentative d'homogénéisation pour les composites élastoplastiques a été réalisée par [Kröner, 1961] qui a étendu le schéma auto-cohérent à l'élastoplasticité pour décrire le comportement des polycristaux [Bornert et al., 2001]. L'idée est de supposer que chaque famille de grains de même orientation cristalline se comporte comme une inclusion ellipsoïdale, uniformément plastifiée $(\varepsilon_{ij}^p)_{ph}$, plongée dans une matrice infinie, également uniformément plastifiée (E_{ij}^p) , possédant les propriétés du MHE. La résolution du schéma auto-cohérent conduit à la loi de localisation suivante :

$$(\sigma_{ij})_{ph} - \Sigma_{ij} = -C_{ijkl} : (I_{ijkl} - S_{ijkl}^E) ((\varepsilon_{ij}^p)_{ph} - (E_{ij}^p)) \quad (1.112)$$

Si les inclusions sont considérées sphériques, l'expression précédente se ramène :

$$(\sigma_{ij})_{ph} - \Sigma_{ij} = -2\mu(1 - \beta) ((\varepsilon_{ij}^p)_{ph} - (E_{ij}^p)) \quad (1.113)$$

où μ est le module de cisaillement isotrope et où $\beta = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)}$.

Ce modèle s'avère trop raide car il suppose que l'accommodation des déformations entre la matrice et l'inclusion se fait de manière purement élastique.

1.9.5 Formulation incrémentale de Hill (1965)

[Hill, 1965b] propose de résoudre le problème posé par le modèle de Kröner en utilisant une linéarisation incrémentale de la loi d'écoulement dans le cas de l'élastoplasticité :

$$(\dot{\sigma}_{ij})_{ph} = (L_{ijkl})_{ph} : (\dot{\varepsilon}_{ij})_{ph} \quad (1.114)$$

où $(L_{ijkl})_{ph}$ est le module tangent (supposé uniforme) de la phase ph correspondant à l'état de déformation moyen $(\varepsilon_{ij})_{ph}$. Il s'agit d'une loi "multibranche", dont l'expression dépend de l'état actuel du matériau, ainsi que du type de chargement (deux expressions différentes en charge ou en décharge plastique). Cependant, chaque branche est linéarisable selon cette formulation incrémentale. On se ramène ainsi à un problème d'homogénéisation linéaire incrémental, sa résolution se fait pas à pas, l'état mécanique local étant connu au début de chaque pas et sa résolution sur un pas se faisant comme pour un problème d'homogénéisation linéaire

[Bornert et al., 2001]. Pour une vitesse de déformation macroscopique \dot{E}_{ij}^0 imposée, la vitesse de déformation locale est obtenue par la relation de la localisation :

$$(\dot{\varepsilon}_{ij})_{ph} = (A_{ijkl})_{ph} : \dot{E}_{ij}^0 \quad (1.115)$$

La vitesse de contrainte macroscopique est alors définie par :

$$\dot{\Sigma}_{ij} = \langle (\dot{\sigma}_{ij})_{ph} \rangle = \langle (L_{ijkl})_{ph} : (A_{ijkl})_{ph} \rangle : \dot{E}_{ij}^0 = (L_{ijkl})^{eff} : \dot{E}_{ij}^0 \quad (1.116)$$

où $(L_{ijkl})^{eff}$ est le module tangent effectif. La résolution du problème auto-cohérent de Kröner par l'approche incrémentale de Hill aboutit à la loi de localisation suivante, qui fournit une meilleure estimation de l'accommodation plastique :

$$(\dot{\sigma}_{ij})_{ph} - \dot{\Sigma}_{ij} = -L_{ijkl}^* : \left((\dot{\varepsilon}_{ij})_{ph} - (\dot{E}_{ij}^p) \right) \quad (1.117)$$

avec : $L^* = L^{eff} : ((S^E)^{-1} - I)$, est le tenseur de Hill.

1.9.6 Hutchinson (1976). Formulation sécante

[Hutchinson, 1976] a étendu la formulation incrémentale de Hill au cas de la viscosité-plasticité des polycristaux. En choisissant un comportement en loi puissance pour le monocristal et un schéma d'homogénéisation linéaire auto-cohérent, Hutchinson montre que la mise en œuvre de la formulation incrémentale mène au même résultat que celle d'une formulation sécante [Bornert et al., 2001].

[Berveiller and Zaoui, 1979] proposent une version simplifiée de l'approche de Hill dans le cas d'un chargement radial et monotone et pour un comportement macroscopique isotrope. Comme dans le modèle de Kröner, on considère que chaque grain ph peut être modélisé par une inclusion sphérique, uniformément plastifiée $(\varepsilon_{ij}^p)_{ph}$ entourée d'un milieu infini, également uniformément plastifiée (E_{ij}^p) , possédant les propriétés du MHE et un comportement élastoplastique de type Hencky-Mises. La loi de localisation obtenue est semblable à celle de Kröner avec la présence d'un terme d'accommodation α :

$$(\sigma_{ij})_{ph} - \Sigma_{ij} = -2\mu(1 - \beta)\alpha \left((\varepsilon_{ij}^p)_{ph} - (E_{ij}^p) \right) \quad (1.118)$$

avec :

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{3}{2}\mu \frac{p(E_{ij}^p)}{J_2(\Sigma_{ij})}$$

où :

$$p(E_{ij}^p) = \sqrt{\frac{2}{3}(E_{ij}^p) : (E_{ij}^p)}$$

est la déformation plastique équivalente cumulée,
et :

$$J_2(\Sigma_{ij}) = \sqrt{\frac{2}{3}(\Sigma_{ij}^d) : (\Sigma_{ij}^d)}, (\Sigma_{ij}^d)$$

étant la partie déviatorique de Σ_{ij} .

Le coefficient α décroît progressivement de 1 vers 0 lorsque la déformation plastique équivalente cumulée croît. Ainsi, la contrainte a tendance à s'homogénéiser à mesure que la déformation macroscopique augmente. La formulation sécante présente l'intérêt de simplifier la résolution du problème d'homogénéisation : elle permet d'estimer directement la réponse globale à une sollicitation macroscopique donnée sans passer par un traitement pas à pas. Cependant, contrairement à la formulation incrémentale (où les états locaux et globaux avant chaque pas sont connus), elle nécessite de déterminer les champs mécaniques locaux qui sont solutions d'un système d'équations implicite. La résolution requiert donc, tout de même, une procédure numérique pour le calcul des champs locaux [Bornert et al., 2001].

1.9.7 Berveiller et Zaoui (1979). Loi en β

On citera également une méthode dérivée de celle de [Berveiller and Zaoui, 1979] intitulée "loi en β " [Cailletaud and Pilvin, 1994] et [Pilvin, 1997] où la contrainte $(\sigma_{ij})_{ph}$ est proportionnelle, non plus à la différence entre déformations plastiques microscopiques et macroscopiques, mais à celle entre deux variables d'accommodations, notées $(\beta_{ij})_{ph}$ et β_{ij} , qui évoluent de façon non linéaire en fonction de la déformation plastique :

$$(\sigma_{ij})_{ph} - \Sigma_{ij} = -C_{ijkl} : (I_{ijkl} - S_{ijkl}^E) : ((\beta_{ij})_{ph} - \beta_{ij}) \quad (1.119)$$

avec :

$$\beta_{ij} = \sum_{ph} c_{ph}(\beta_{ij})_{ph} \quad (1.120)$$

et où la loi d'évolution des variables $(\beta_{ij})_{ph}$ est écrite de manière à retrouver le modèle de Kröner au début de l'écoulement plastique, puis à restituer une accommodation non-linéaire des déformations lorsque la plasticité se généralise au sein du matériau :

$$(\dot{\beta}_{ij})_{ph} = (\dot{\varepsilon}_{ij}^p)_{ph} - Dp((\dot{\varepsilon}_{ij}^p)_{ph})((\beta_{ij})_{ph} - \delta(\varepsilon_{ij}^p)_{ph}) \quad (1.121)$$

Dans le cas où l'on considère une distribution spatiale isotrope des familles de grain, le terme $C_{ijkl} : (I_{ijkl} - S_{ijkl}^E)$ de l'équation 1.119 devient $2\mu(1 - \beta)$. Les paramètres D et δ peuvent être identifiés de manière à assurer un caractère auto-cohérent au schéma ou à partir de calculs d'agrégats polycristallins où : T_F est la tolérance en forces.

1.9.8 Formulation affine

Proposée par [Molinari et al., 1987] pour les matériaux viscoplastiques. Durant la procédure d'homogénéisation, c'est le champ de contraintes qui est considéré et non pas son incrément. Une extension aux matériaux élastoplastiques a été développée par [Zaoui and Masson, 2000] et [Masson et al., 2000] où il est possible de linéariser le comportement selon une méthode affine. Le comportement non linéaire de chaque phase ph ($(\sigma_{ij})_{ph} = f_{ph}(\varepsilon_{ij}^p)_{ph}$) est remplacé, pour une déformation de référence $(\varepsilon_{ij}^{(0)})_{ph}$, par un comportement linéaire caractérisé par un tenseur des modules tangents $(L_{ijkl}^{(0)})_{ph}$ et une précontrainte $(\tau_{ij}^{(0)})_{ph}$:

$$(\sigma_{ij})_{ph} = (L_{ijkl}^{(0)})_{ph} : (\varepsilon_{ij}) + (\tau_{ij}^{(0)})_{ph} \quad (1.122)$$

avec :

$$(L_{ijkl}^{(0)})_{ph} = \frac{df_i}{d\varepsilon_{ij}}(\varepsilon_{ij}^{(0)})_{ph}$$

est la matrice tangente pour la déformation de référence $(\varepsilon_{ij}^{(0)})_{ph}$

et

$$(\tau_{ij}^{(0)})_{ph} = f_i \left((\varepsilon_{ij}^{(0)})_{ph} \right) - (L_{ijkl}^{(0)})_{ph} : (\varepsilon_{ij}^{(0)})_{ph}$$

est l'ordonnée à l'origine correspondante.

Le problème peut donc être traité par analogie à un problème thermo-élastique linéaire où la précontrainte $(\tau_{ij}^{(0)})_{ph}$ peut être identifiée au terme $-(\kappa_{ij})_{ph}\Delta T_i$ de la contrainte d'origine thermique. Le comportement macroscopique s'exprime alors selon l'équation suivante :

$$\Sigma_{ij} = L_{ijkl}^{(0)hom} : E_{ij} + T_{ij}^{(0)}, \quad (1.123)$$

avec :

$$L_{ijkl}^{(0)hom} = \left\langle (L_{ijkl}^{(0)})_{ph} : (A_{ijkl}^{(0)})_{ph} \right\rangle_V \quad \text{et} \quad T_{ij}^{(0)} = \left\langle (\tau_{ij}^{(0)})_{ph} : (A_{ijkl}^{(0)})_{ph} \right\rangle_V$$

Chaque milieu non linéaire peut être, donc, remplacé par un milieu thermoélastique de comparaison. Il est alors possible d'utiliser une méthode d'homogénéisation de l'élasticité pour obtenir le comportement effectif et les tenseurs de localisation $(A_{ijkl}^{(0)})_{ph}$ (pour la déformation

de référence $(\varepsilon_{ij}^{(0)})_{ph}$). Cependant, comme en thermoélasticité, il est nécessaire d'affecter des caractéristiques uniformes à chaque phase et de raisonner sur les valeurs moyennes des champs locaux par phase. L'inconvénient des approches à champs moyens apparaît dans le cas où les champs locaux présentent une forte hétérogénéité au sein d'une même phase.

1.9.9 Pedro Ponte Castañeda (1992)

[Castaneda, 1992] a proposé un nouveau principe variationnel pour estimer les propriétés effectives des systèmes hétérogènes non linéaires. Ce principe variationnel a été donné dans un contexte d'électrostatique non linéaire mais qui est applicable à bon nombre de disciplines non linéaires analogues, et qui peut être utilisé pour déterminer les bornes et les estimations exactes des propriétés effectives des systèmes hétérogènes non linéaires. Il exprime les fonctions effectives de la densité d'énergie des systèmes hétérogènes non linéaires en termes d'un problème d'optimisation impliquant les fonctions effectives d'énergie de systèmes hétérogènes linéaires de comparaison. Ainsi, ces nouveaux principes variationnels se prêtent à des approximations utiles dans l'une des deux façons. Si la structure est spécifiée en fraction volumique, le principe variationnel peut être utilisé pour estimer, soit exactement ou sous forme de bornes, l'énergie effective des systèmes non linéaires en termes d'estimations exactes de l'énergie effective des systèmes linéaires de comparaison. Si d'un autre côté, la microstructure n'est pas complètement spécifiée, les bornes optimales caractérisant le comportement effectif des systèmes linéaires de comparaison peuvent être utilisées pour générer des bornes pour le comportement effectif des systèmes non linéaires avec des microstructures identiques.

1.9.10 Méthode FE²

Connue sous le nom de "Méthode d'Éléments Finis au carré" (FE²), c'est une méthode d'homogénéisation numérique à deux niveaux, elle est très répandue aujourd'hui, introduite par [Feyel and Chaboche, 2000]. Dans cette technique, les problèmes mécaniques sont couplés à deux échelles simultanément : l'un à l'échelle microscopique, l'autre à l'échelle macroscopique. L'idée très simple de cette technique numérique est d'associer à chaque point d'intégration de la structure macroscopique un volume élémentaire représentatif. Au cours de la procédure itérative de recherche d'équilibre de la structure, les contraintes doivent être déterminées aux points d'intégration de Gauss du calcul éléments finis, à une itération de Newton Raphson, connaissant les déformations. Pour cela, un calcul local doit être effectué sur le volume élémentaire représentatif (VER) : les déformations macroscopiques au point d'intégration sont imposées sur le bord du VER ; le problème local est alors résolu numériquement. Les contraintes obtenues sont alors moyennées pour fournir les contraintes macroscopiques au

point d'intégration. Cette procédure est alors répétée pour tous les points d'intégration, et pour toutes les itérations avant l'équilibre de la structure macroscopique. Le principal avantage de cette méthode est de s'affranchir totalement des limitations sur les lois de comportement locales, la morphologie des inclusions, voire une possible évolution de la microstructure. L'inconvénient majeur est le coût de calcul lié au couplage entre les échelles, bien que des techniques aient été proposées pour réduire les calculs [Nezamabadi, 2009]. La méthode peut être résumée comme suit :

1. Une modélisation du VER à l'échelle microscopique.
2. Des conditions aux limites imposées sur le VER en fonction des déformations macro en chaque point d'intégration.
3. Une résolution complète du problème non linéaire sur le VER en chaque point d'intégration pour calculer par moyenne la contrainte macroscopique.
4. Une résolution de type Newton-Raphson au niveau macro. La résolution du problème macroscopique non linéaire nécessite d'évaluer l'opérateur tangent en chaque point d'intégration. Une façon d'évaluer ce tenseur est d'utiliser une méthode de perturbation (différences finies) à partir des calculs de contraintes moyennes sur le VER. [Hoang, 2015].

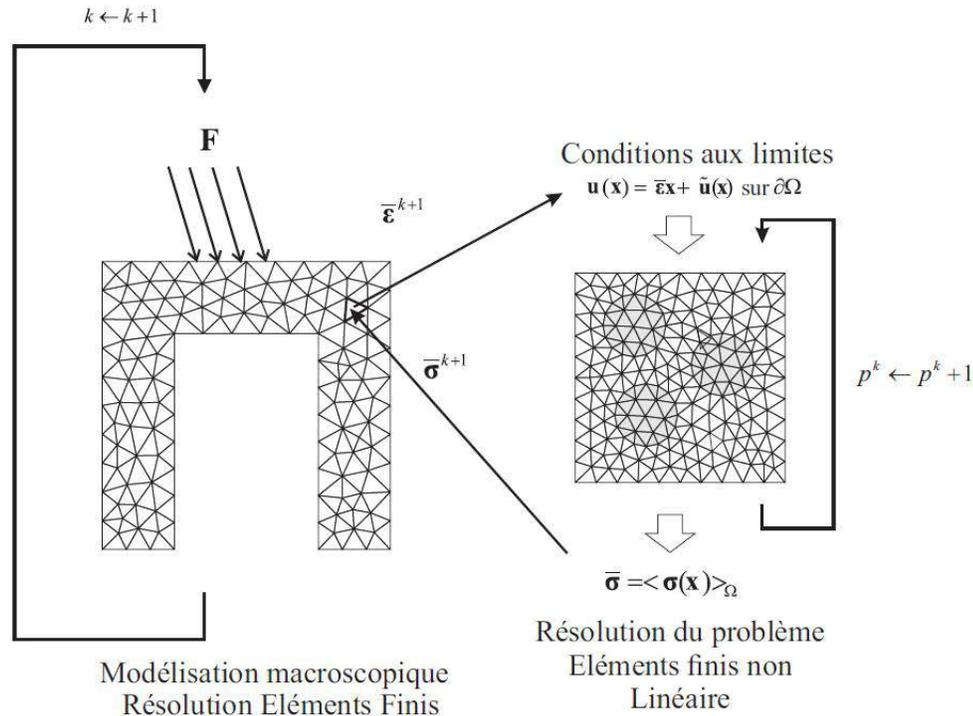


FIGURE 1.23 – Représentation schématique de la méthode (FE²) [Hoang, 2015].

1.10 Synthèse

La technique d'homogénéisation a été présentée à travers ses principes, ses étapes ainsi que ses différents modèles et bornes aussi bien en élasticité linéaire qu'en élastoplasticité. La notion du volume élémentaire représentatif a été décrite. Des rappels théoriques relatifs au comportement élastoplastique des structures ont été introduits par la description de l'écroutissement isotrope et cinématique et enfin par la présentation des modèles de changement d'échelles les plus utilisés en mécanique non linéaire.

Chapitre 2

Résistance maximale effective à la traction des matériaux poreux

2.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est l'étude de l'effet de la morphologie des pores sur la résistance maximale effective à la traction des matériaux poreux et plus précisément ceux de type lotus. La procédure consiste à générer des images de microstructures poreuses sur lesquelles des simulations numériques seront effectuées. Les microstructures sont constituées d'une matrice poreuse avec des vides, sans percolation, de forme circulaire ou elliptique et dont la distribution est aléatoire. Plusieurs microstructures seront considérées en faisant varier deux paramètres qui sont la fraction volumique P (porosité) et le rapport de forme r caractérisant la morphologie des pores et qui est défini dans la section 2.4.1. Plusieurs simulations, pour la détermination du maillage adéquat et du volume élémentaire représentatif optimal, seront effectuées. Les résultats seront exploités pour la proposition d'un modèle qui prédit la résistance maximale effective à la traction en fonction des deux paramètres P et r .

2.2 Résistance maximale (ultime) à la traction. Rappel

La résistance à la traction ultime (UTS : Ultimate Tensile Strength en anglais) ou la résistance maximale à la traction, souvent désignée par la résistance à la traction ou à la résistance ultime, est la capacité d'un matériau ou d'une structure à supporter des charges tendant à l'allonger, par opposition à la résistance à la compression où la structure doit résister aux charges tendant à la rétrécir. En d'autres termes, la résistance à la traction est une résistance à la tension (en étant étirée), alors que la résistance à la compression est

une résistance à une poussée. La résistance à la traction finale est mesurée par la contrainte maximale qu'un matériau peut supporter tout en étant étiré ou tiré avant la rupture.

Certains matériaux se cassent très fortement, sans déformation plastique, dans ce qu'on appelle une défaillance fragile. D'autres qui sont plus ductiles, y compris la plupart des métaux, connaissent une certaine déformation plastique et peuvent éventuellement se contracter avant la fracture.

La résistance maximale à la traction est définie généralement en effectuant un test de traction donnant la courbe caractéristique contrainte-déformation. Le point le plus élevé (1) de cette courbe, Figure 2.1, est la résistance maximale à la traction. C'est une propriété intensive ; par conséquent, sa valeur ne dépend pas de la taille de l'échantillon d'essai.

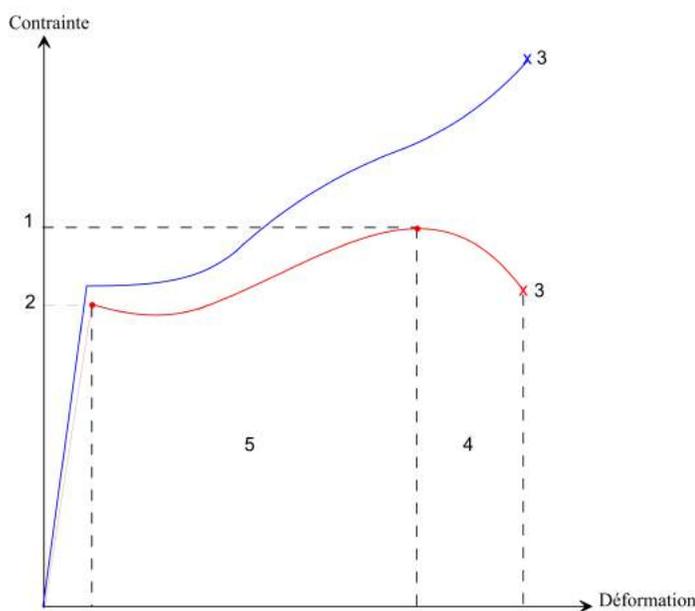


FIGURE 2.1 – Courbe contrainte-déformation typique d'un acier structural : Engineering (rouge) et réelle (bleu)

Sur la figure précédente, on définit ce qui suit :

1. Résistance maximale à la traction (Ultimate Tensile Strength).
2. Limite élastique (Yield Strength).
3. Point de rupture.
4. Région de durcissement de contraintes.
5. Région de concentration de déformations (Necking region).

2.3 Description des matériaux de type lotus

2.3.1 Définition des matériaux

Durant les vingt dernières années, un nouveau type de matériaux poreux avec de longs pores cylindriques orientés dans une direction a été fabriqué par solidification unidirectionnelle de l'hydrogène, de l'azote ou de l'oxygène sous pression. Cette technique a été étudiée par différents auteurs. [Imabayashi et al., 1983], [Svensson and Fredriksson, 1983], [Knacke et al., 1979], [Bojko et al., 1991] ont fabriqué de longs pores cylindriques en adoptant une technique de solidification unidirectionnelle sous une pression d'hydrogène élevée. [Hyun et al., 1999] et [Nakajima et al., 2001] ont aussi produit des métaux poreux comme le fer, le cuivre, le magnésium, et le nickel dans une atmosphère d'hydrogène ou d'azote sous haute pression et de l'argent poreux sous haute pression d'oxygène par la méthode de Czochralski et la technique de solidification unidirectionnelle. Durant la solidification, le gaz est déchargé du métal solide à l'interface solide-liquide en formant des pores longs qui sont alignés parallèlement à la direction de solidification, Figure 2.2. La technique de transformation utilisée est très intéressante du moment qu'elle permet le contrôle de la taille et de la direction des pores ainsi que de la porosité globale. Gasar est la dénomination utilisée par [Shapovalov, 1994], un acronyme ukrainien qui veut dire métaux composites renforcés avec du gaz. [Nakajima., 2013] a nommé ces matériaux "métaux poreux de type lotus" à cause de la morphologie du matériau qui ressemble à la racine de lotus. Ainsi, ces "métaux Gasar de type lotus" aux caractéristiques uniques sont considérés comme étant une nouvelle classe de matériaux d'ingénierie.

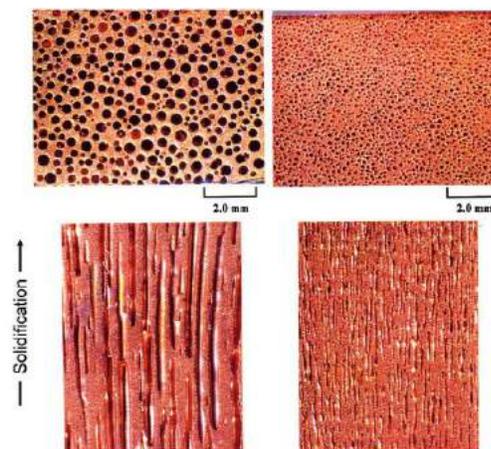


FIGURE 2.2 – Microstructure de cuivre poreux de type lotus, [Nakajima., 2013]

2.3.2 Propriétés des métaux poreux de type lotus

La représentation des métaux de type lotus est l'étape la plus importante d'une bonne estimation de la résistance maximale à la traction du moment qu'elle permet l'identification de tous les paramètres influençant cette propriété. Dans le cas de matériaux à pores unidirectionnels, les suppositions les plus fréquemment rencontrées dans la littérature sont [Nakajima., 2013] :

- Les pores sont droits.
- La taille du pore et la porosité sont contrôlables.
- Les métaux poreux peuvent être produits avec des pores de cent microns de diamètre.
- La section des pores est circulaire.
- La matrice est homogène et isotrope.
- Le matériau est considéré transversalement isotrope, ainsi il est possible de considérer deux différentes résistances maximales à la traction : une perpendiculaire à la direction des pores et une autre qui est parallèle à la direction des pores comme il est indiqué dans la Figure 2.3.
- Le comportement de résistance à la traction est indépendant de la direction parallèle aux pores, ce qui explique que le problème peut être réduit à une étude en 2D.

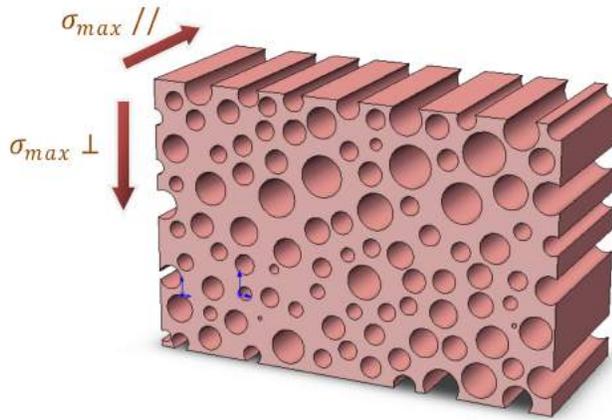


FIGURE 2.3 – Résistances maximales à la traction perpendiculaire et parallèle

2.3.3 Bref aperçu du modèle analytique utilisé

[Hyun et al., 2001] ont comparé des données expérimentales au modèle de [Boccaccini et al., 1996] donné par :

$$\frac{\sigma_{max}^{eff}}{\sigma_{max}} = (1 - P)^K \quad (2.1)$$

Où σ_{max}^{eff} est la résistance maximale à la traction effective, σ_{max} est la résistance maximale à

la traction du matériau non poreux, P est la porosité et K est le facteur de concentration de contraintes autour des pores, exprimé, pour le cas où le chargement est parallèle au rayon mineur de l'ellipse, par :

$$K = \left(1 + \frac{2b}{a}\right) \quad (2.2)$$

Où a et b sont les rayons de l'ellipse de la Figure 2.4.

Et pour le cas où le chargement est parallèle au rayon majeur de l'ellipse, le facteur de concentration de contraintes est exprimé par :

$$K = \left(1 + \frac{2a}{b}\right) \quad (2.3)$$

Cependant, les microstructures étudiées présentent des pores elliptiques avec des orientations arbitraires. La majorité des pores ne sont ni parallèles ni perpendiculaires à la direction du chargement, et ont des valeurs du facteur de concentration de contraintes entre les deux cas extrêmes 2.2 et 2.3, c'est pourquoi le facteur de concentration de contraintes doit être considéré comme étant la moyenne de ces deux cas :

$$K = \left(\left(1 + \frac{2b}{a}\right) + \left(1 + \frac{2a}{b}\right)\right)/2 \quad (2.4)$$

L'équation 2.5 est utilisée pour comparer les résultats numériques au modèle de Boccaccini.

$$K = 1 + e + \frac{1}{e} \quad (2.5)$$

avec

$$e = \frac{a}{b} \quad (2.6)$$

Il est clair que pour une section droite parfaitement circulaire des pores cylindriques du matériau de type lotus, $K = 3$, donc le modèle de l'équation 2.1 peut être utilisé.

2.4 Génération des microstructures et homogénéisation numérique

2.4.1 Morphologie des microstructures

Dans cette investigation, une analyse numérique de la résistance maximale à la traction des matériaux poreux, contenant une distribution aléatoire de pores elliptiques ou circulaires est présentée. La microstructure considérée dans cette étude est une matrice poreuse 2D qui

contient une distribution aléatoire de vides circulaires ou elliptiques identiques sans percolation. Différentes configurations de microstructures sont obtenues en faisant varier le rapport entre les rayons mineur et majeur de la géométrie des pores elliptiques de la Figure 2.4.

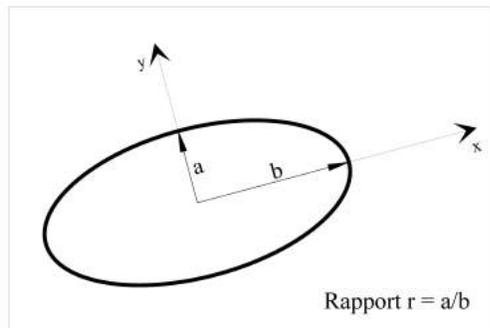


FIGURE 2.4 – Paramètres de la géométrie des pores

Les formes choisies correspondent à $r = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ et 1.0 . La fraction volumique des vides, notée P , est aussi prise en compte en considérant cinq cas différents : $P = 15\% = 0.15, 0.2, 0.3, 0.4$ et 0.5 comme il est indiqué sur la Figure 2.5.

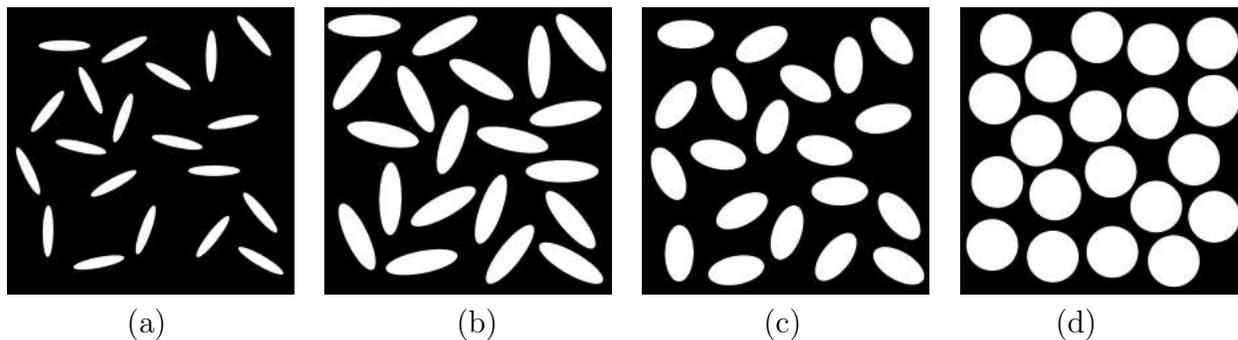


FIGURE 2.5 – Exemples de microstructures combinées par variation du rapport de forme et de la fraction volumique du vide : (a) $r = 0.2, P = 15\%$, (b) $r = 0.3, P = 30\%$, (c) $r = 0.5, P = 30\%$, et (d) $r = 1, P = 50\%$

Il est à noter que la combinaison $r = 0.2, P = 0.5$ conduit à la percolation, par conséquent, elle ne sera pas étudiée.

Il faut rappeler que les modèles analytiques qui traitent les milieux poreux, la matrice est supposée rigide parfaitement plastique et gouvernée par le critère de von Mises. Les vides sont supposés aléatoirement distribués, sans percolation possédant une rigidité nulle. Différentes résistances maximales à la traction sont attribuées au matériau non-poreux afin d'estimer la résistance maximale effective à la traction du matériau poreux.

2.4.2 Conditions aux limites

Après la description de la microstructure, la définition des conditions aux limites doit être effectuée pour les tests numériques. Dans cette étude, la microstructure est soumise à un chargement de traction uni axiale dans la direction x , comme représenté sur la Figure 2.6 et les conditions aux limites sont décrites comme suit :

- Côté OA : 0 déplacement dans la direction x et 0 contrainte tangentielle dans la direction y ;
- Côté OB : 0 déplacement dans la direction y et 0 contrainte tangentielle dans la direction x ;
- Côté BC : déplacement δ dans la direction x et 0 contrainte tangentielle dans la direction y .

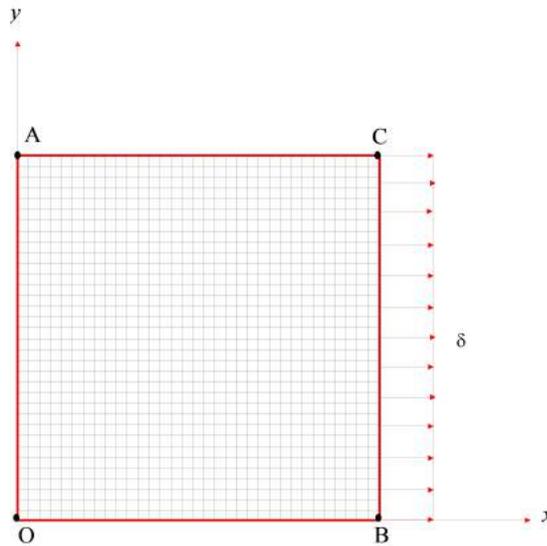


FIGURE 2.6 – Description des conditions aux limites

2.4.3 Maillage éléments finis

Dans cette étude, une technique développée par [Lippmann et al., 1997] et largement utilisée dans l'homogénéisation des images réelles et virtuelles par plusieurs auteurs comme [Kanit et al., 2003b], [Khdir et al., 2013], [El moumen, 2014], [El-Moumen et al., 2015], [Kaddouri et al., 2016] et [Djebara et al., 2016] est exploitée. Une grille régulière d'éléments finis, voir Figure 2.7(a), est superposée sur l'image de la microstructure poreuse, voir Figure 2.7(b), en utilisant la technique appelée élément multiphasique.

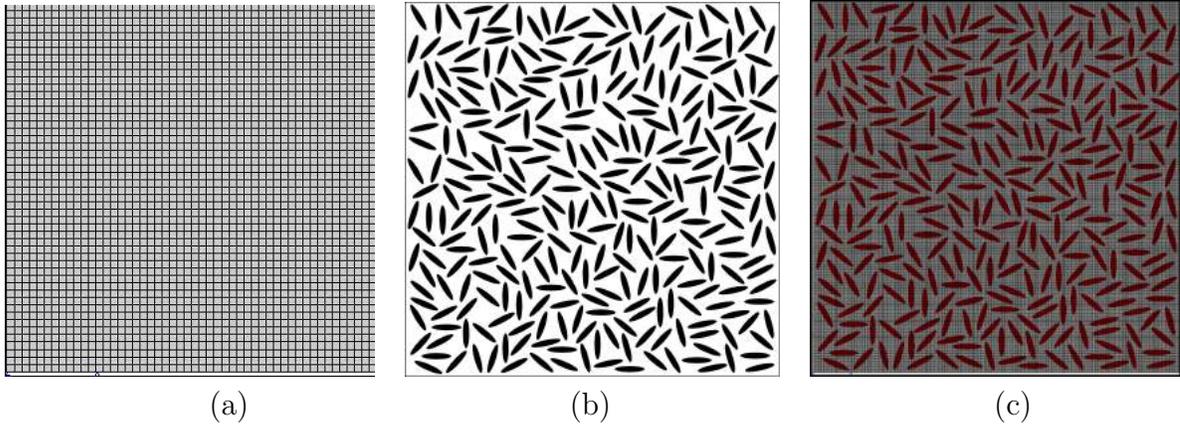


FIGURE 2.7 – (a) Grille d’éléments finis, (b) microstructure initiale (c) microstructure maillée

La microstructure maillée obtenue, voir Figure 2.7(c), est utilisée pour attribuer la propre propriété de phase à chaque point d’intégration selon la couleur du pixel sous-jacent. Les éléments quadratiques à 8 nœuds sont considérés dans cette investigation. Cette technique nécessite de trouver la grille de maillage optimale. Pour cela, on va mailler la même microstructure contenant 300 vides par différentes grilles allant de 2500 à 250000 éléments finis. Le maillage qui permet la détermination de la propriété macroscopique avec une bonne précision au cours d’un minimum de temps est le maillage optimal. Dans la Figure 2.8, la convergence de la propriété macroscopique en fonction du nombre d’éléments finis est présentée.

Il est montré qu’une grille de 90000 éléments donne la propriété macroscopique avec une précision de 6%. La superposition des courbes commence à 160000 éléments avec une précision de 1% ; par conséquent la densité de maillage de 160000 éléments est adoptée pour toutes les simulations.

2.4.4 Nombre de réalisations et taille du VER

La technique développée par [Kanit et al., 2003b], dans le cas d’un matériau élastique hétérogène et élargie par [Khdhir et al., 2013] aux composites élastoplastiques, est utilisée dans cette section pour déterminer la taille du volume élémentaire représentatif (VER) des différentes microstructures considérées. Le VER est le volume qui permet l’estimation de la propriété effective avec une seule réalisation. Il faut noter que les réalisations de la même configuration ont le même nombre N de vides. Toutes les précédentes études numériques réalisées par [Khdhir et al., 2013] pour les propriétés plastiques, [El Moumen et al., 2014] pour les propriétés élastiques et par [Kaddouri et al., 2016] pour les propriétés thermiques, ont montré que le VER est obtenu pour la plus grande fraction volumique, $P = 0.5$. Dans la présente étude, le nombre de réalisations n utilisé pour chaque nombre de vides N dans chaque volume

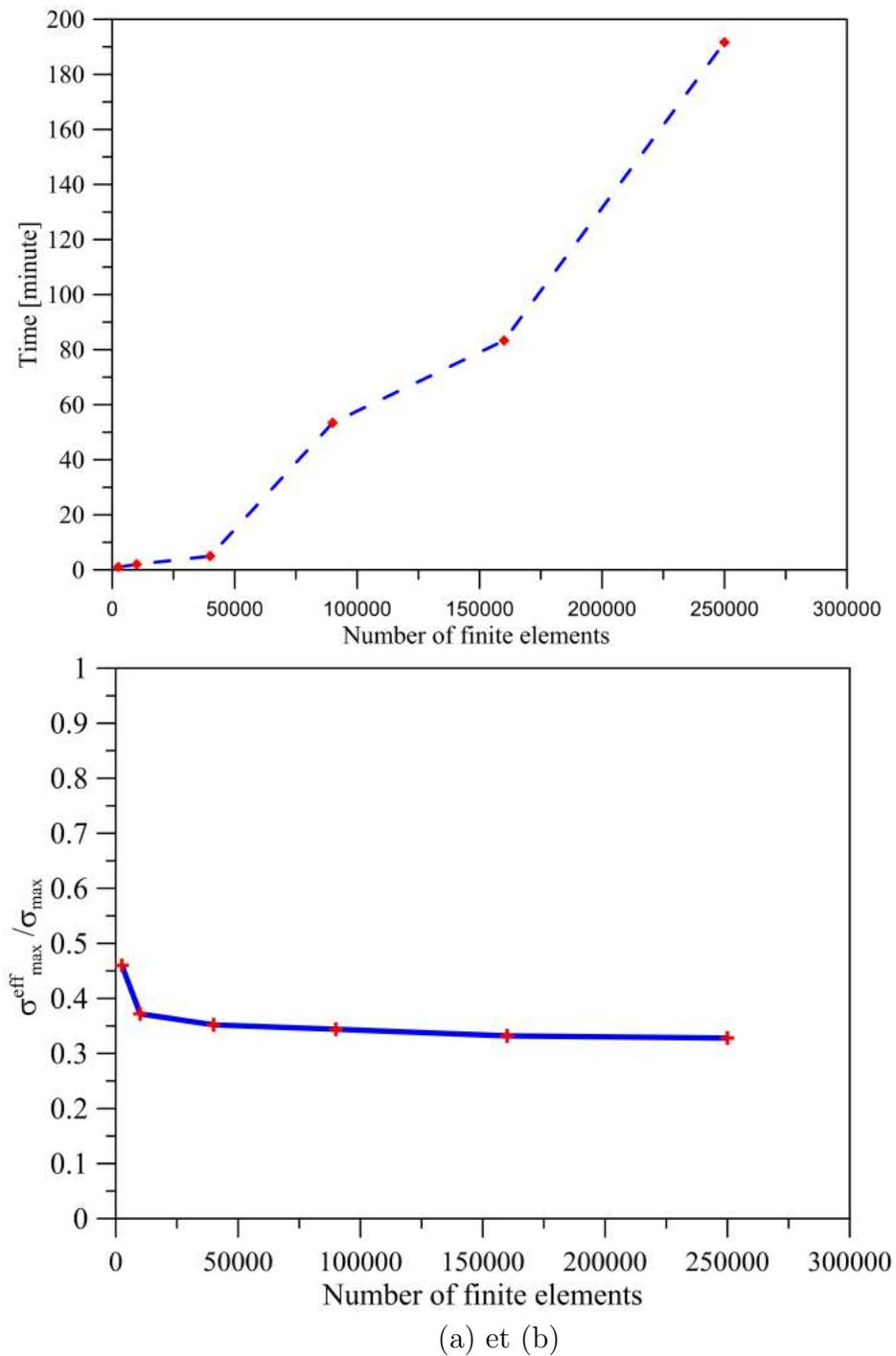


FIGURE 2.8 – Test de convergence : (a) Temps de simulation, (b) résistance maximale effective à la traction

est résumé dans le tableau 2.1.

N	1	5	20	50	100	200	300
n	216	28	14	8	8	4	2

TABLE 2.1 – Nombre des différentes réalisations utilisé pour chaque nombre fixé de vides

La Figure 2.9 représente un exemple de 28 réalisations de volume contenant 5 vides, 8 réalisations de volume contenant 50 vides et deux réalisations de volume contenant 300 vides.

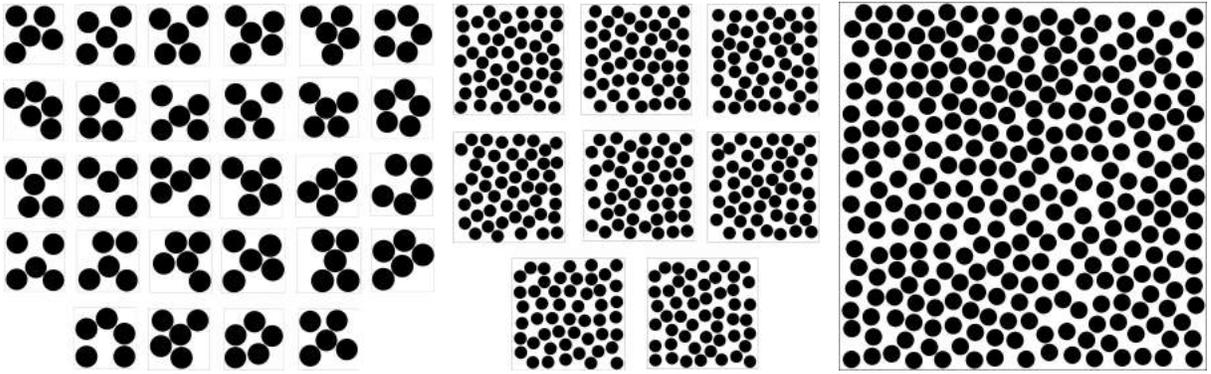


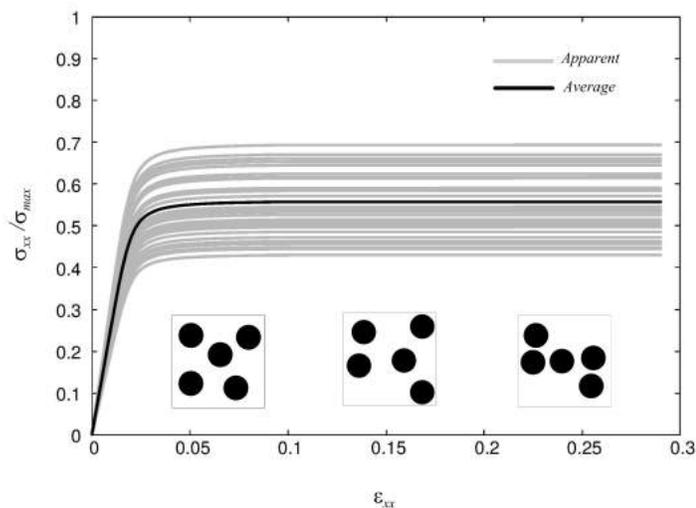
FIGURE 2.9 – Exemples de microstructures de fraction volumique $P = 0.5$ (50 %)

Les n déformations et contraintes apparentes calculées pour chaque volume sont utilisées pour calculer la déformation moyenne $\langle \varepsilon^{app} \rangle$ et la contrainte moyenne $\langle \sigma^{app} \rangle$ données à chaque incrément comme suit :

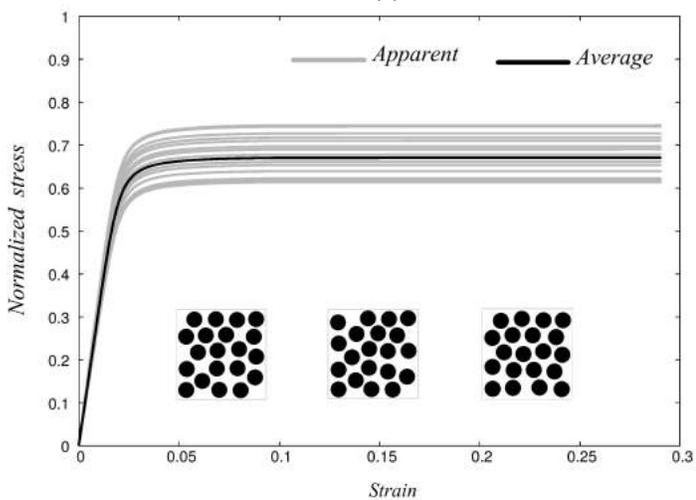
$$\langle \varepsilon^{app} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^{app} \quad (2.7)$$

$$\langle \sigma^{app} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^{app} \quad (2.8)$$

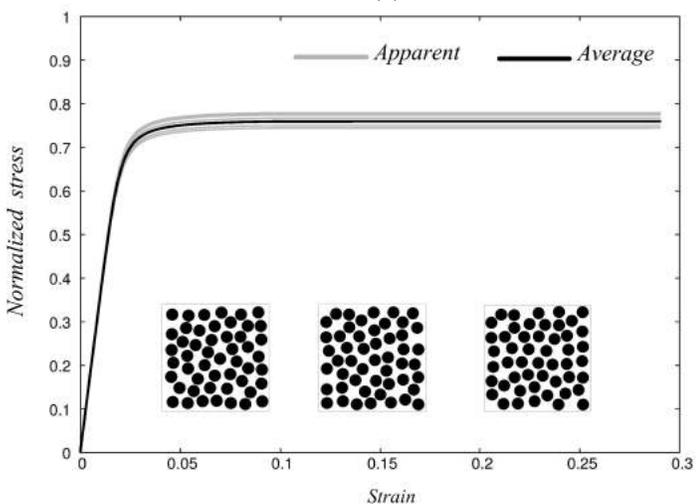
Où σ_i^{app} est la contrainte pour une déformation donnée ε_i^{app} de la réalisation i .



(a)

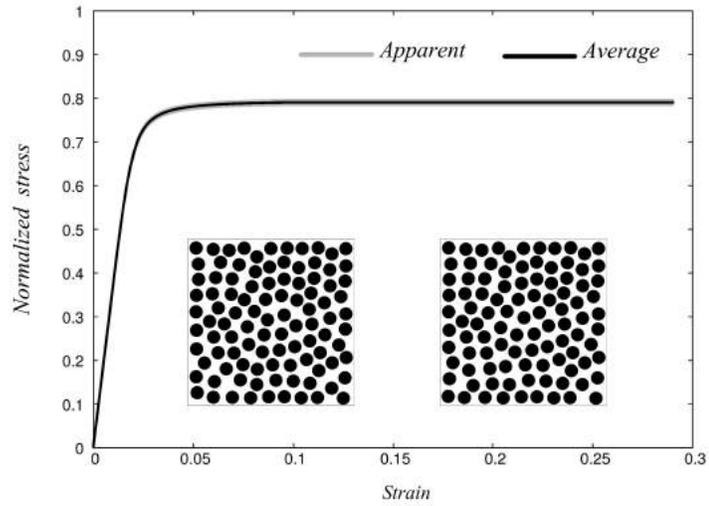


(b)

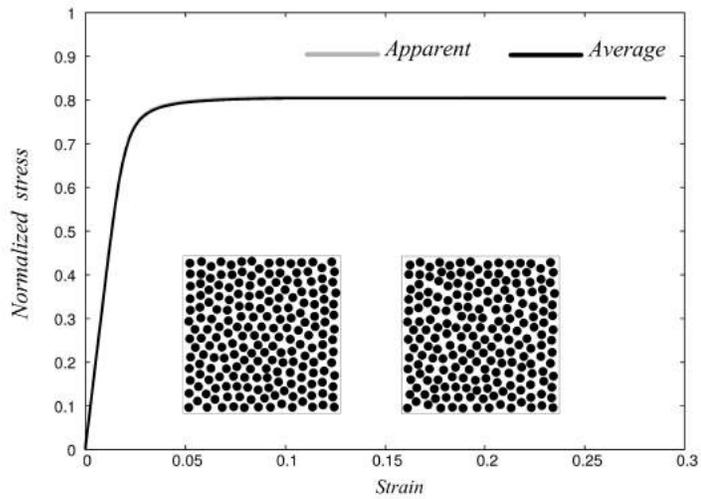


(c)

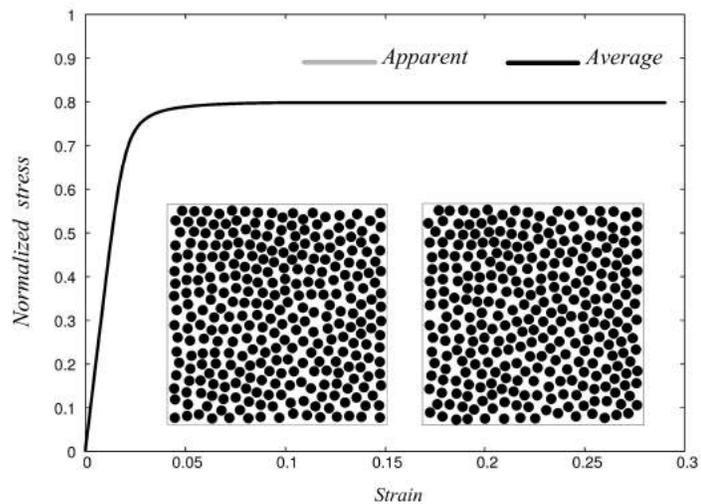
FIGURE 2.10 – Exemples de courbes contrainte-déformation apparentes (lignes claires) et comparaison avec la courbe moyenne (ligne sombre) pour différentes configurations avec $P=50\%$. (a) $N=5$, $n=28$, (b) $N=20$, $n=14$, (c) $N=50$, $n=8$.



(d)



(e)



(f)

FIGURE 2.11 – Exemples de courbes contrainte-déformation apparentes (lignes claires) et comparaison avec la courbe moyenne (ligne sombre) pour différentes configurations avec $P=50\%$. (d) $N=100$, $n=8$, (e) $N=200$, $n=4$ et (f) $N=300$, $n=2$.

Il apparaît sur les Figures 2.10 et 2.11 que la dispersion des résultats diminue lorsque la taille du volume augmente. La taille du VER est obtenu par la convergence, de la moyenne des comportements apparents pour les différents volumes, au comportement effectif. Les Figures 2.11(e) et (f) montrent clairement que la taille du VER est dans la gamme 200-300 vides. Dans cette étude, un $VER=300$ vides est adopté.

2.5 Résultats numériques et modèle proposé

les matériaux lotus sont caractérisés par différentes tailles et formes des pores, Figure 2.12. C'est pourquoi, ce travail est mené en deux étapes :

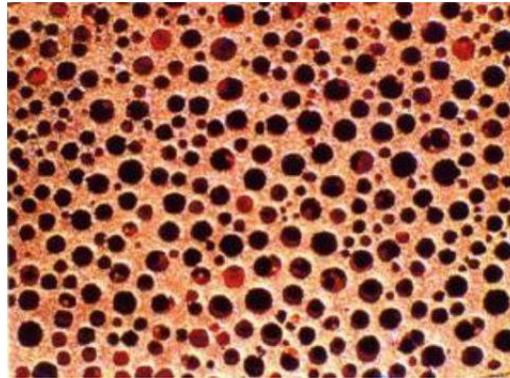


FIGURE 2.12 – Section transversale d'un matériau poreux de type lotus, Nakajima (2013)

- la première est destinée à l'étude de l'effet de la taille des pores sur la résistance maximale à la traction du matériau,
- alors que la seconde étape est réservée à l'effet de la morphologie des pores sur la même propriété.

2.5.1 Résistance maximale à la traction versus taille des pores

Dans le but d'investiguer l'effet de la taille des pores sur la résistance maximale effective σ_{max}^{eff} , en premier lieu, le cas des microstructures avec deux populations de différentes tailles des pores est étudié, ensuite généralisé à un nombre supérieur de populations. Trois fractions volumiques sont considérées : 10%, 30% et 50%. Pour chacune, des microstructures sont générées en faisant varier les fractions P_1 et P_2 des deux populations 1 et 2 respectivement. Les quatre microstructures sont obtenues en diminuant la fraction volumique de la première population de $P_1 = P$ à $P_1 = 0$ et en augmentant celle de la deuxième population de $P_2 = 0$ à $P_2 = P$. La Figure 2.13 donne une illustration des microstructures obtenues pour les trois fractions volumiques étudiées.

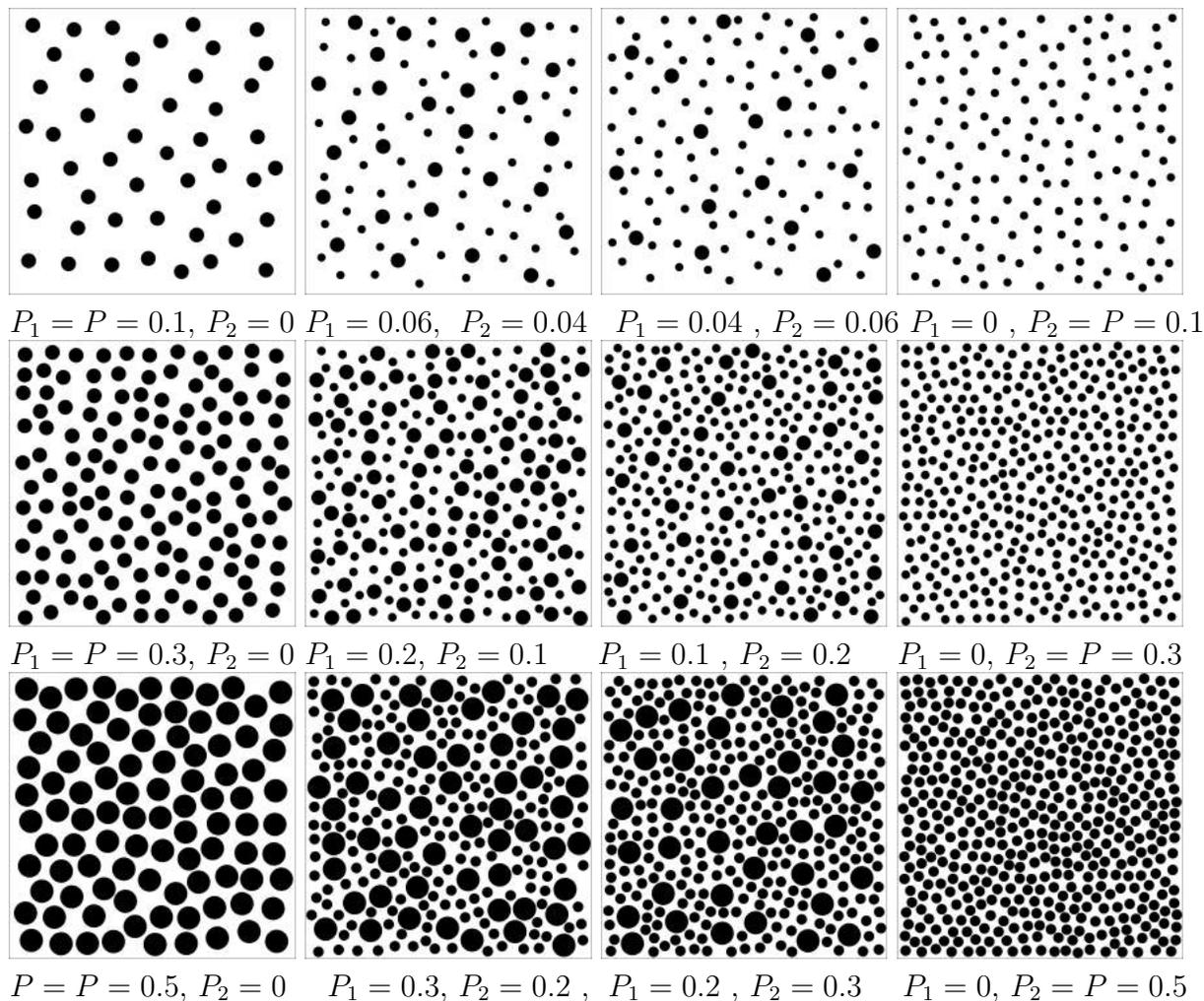


FIGURE 2.13 – Microstructures à deux populations

Les résultats obtenus pour les différentes fractions volumiques étudiées sont présentés dans la Figure 2.15 qui montre clairement que la résistance maximale à la traction reste constante pour les différentes combinaisons étudiées et pour toutes les fractions volumiques.

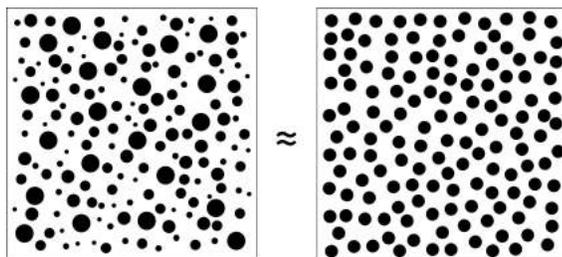


FIGURE 2.14 – Équivalence entre simple et multiple microstructures de matériaux poreux en termes de fractions volumiques égales

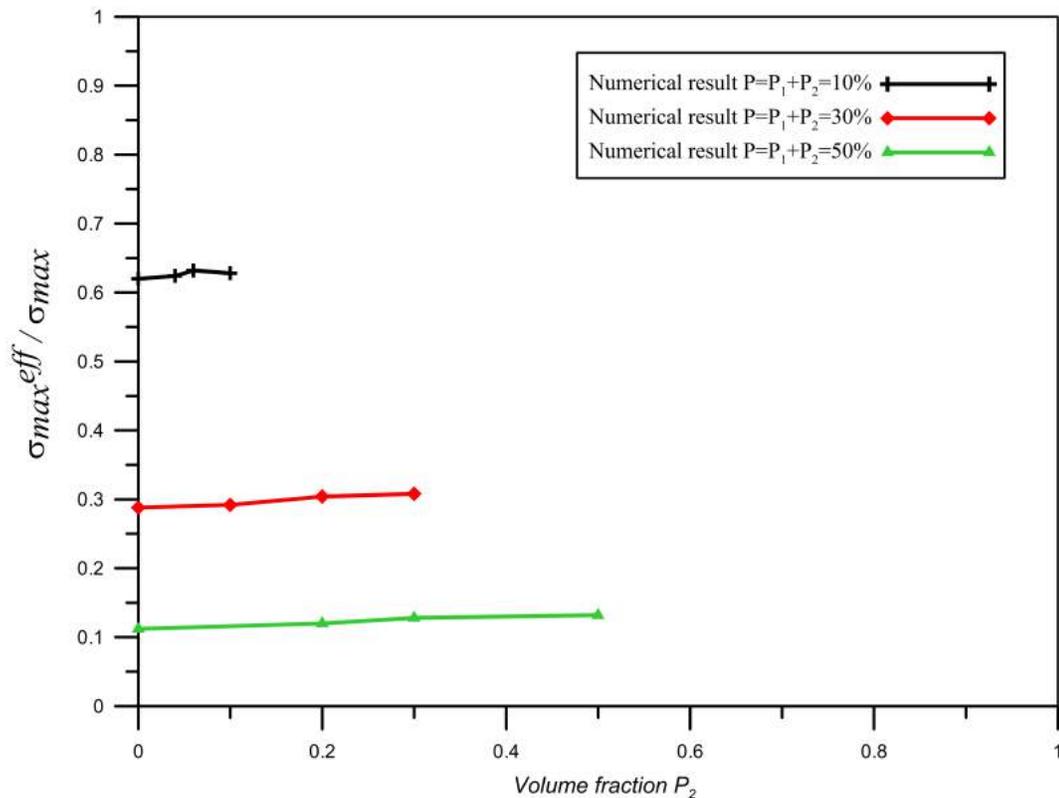


FIGURE 2.15 – Résistance maximale effective à la traction en fonction de la fraction volumique P_2

Donc, il peut être conclu que l'effet de la taille des pores sur la résistance maximale effective à la traction est absent ; par conséquent, on peut généraliser ce résultat à un nombre supérieur de populations de pores de même taille telle que : la résistance maximale effective à la traction d'une microstructure à fraction volumique P et N pores, de tailles différentes mais de même forme, est égale à celle d'une microstructure ayant la même fraction volumique P et une seule population de pores comme il est montré dans la Figure 2.14.

2.5.2 Résistance maximale à la traction versus forme des pores

Les résultats de la traction maximale effective à la traction pour chaque fraction volumique, en termes de rapports de forme r , sont présentés dans la Figure 2.16 qui illustre la variation de la résistance maximale effective à la traction comme une fonction du rapport de forme des vides pour les matériaux poreux.

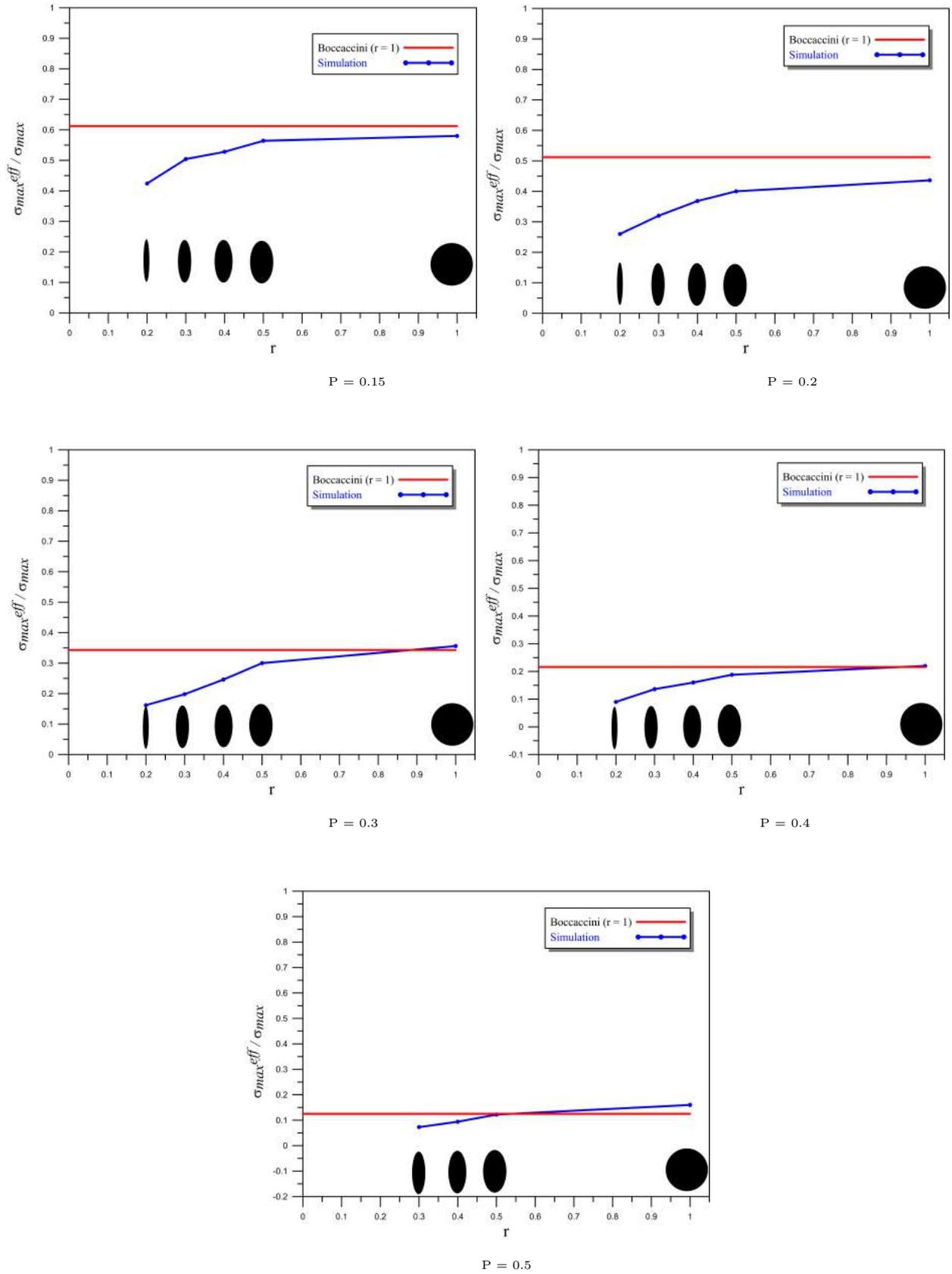


FIGURE 2.16 – Résistance maximale à la traction effective en termes du rapport de forme

Il faut noter que tous ces résultats sont comparés avec le modèle de Bocaccini avec $K = 3$. La Figure 2.16 montre que la résistance maximale effective à la traction de toutes les microstructures, pour les différentes fractions volumiques, augmente avec l'augmentation du rapport de forme considéré. Il est clair que les résultats numériques obtenus convergent au modèle de Bocaccini et en particulier pour un niveau de porosité élevé.

La conclusion principale de cette section est que la résistance maximale effective à la traction des microstructures poreuses étudiées dépend significativement de la forme des pores.

2.5.3 Relation représentative effective

L'objectif de cette section est de proposer une relation pour déterminer la résistance maximale effective à la traction d'un matériau poreux, tenant en compte l'effet de la morphologie des vides. Pour atteindre cette fin, on a effectué plusieurs tests de fittage (ajustement), avec différentes fonctions numériques, des points obtenus dans le but d'arriver à une bonne représentativité des résultats. La fonction qui a répondu le mieux à ces tests est de la forme :

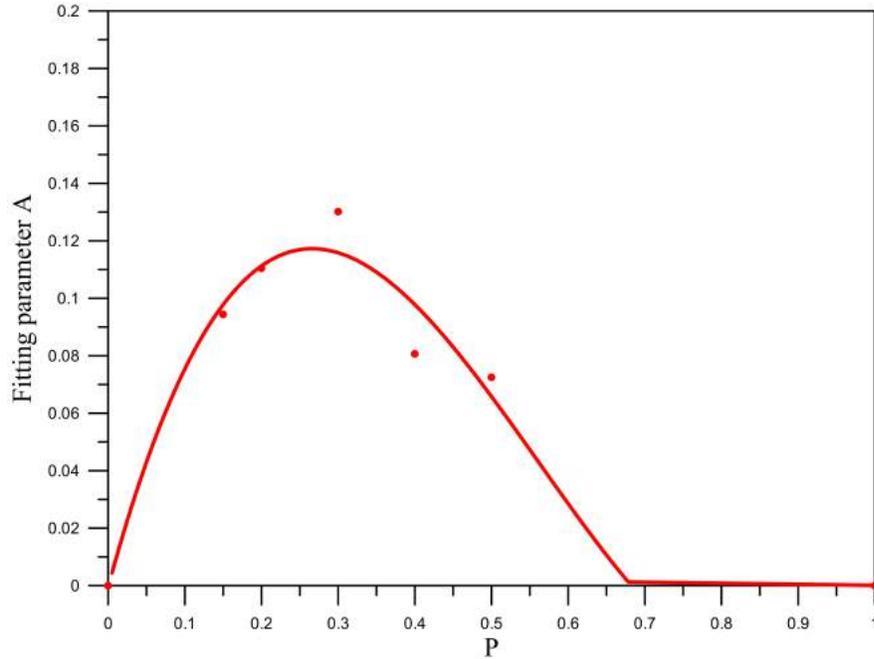
$$\frac{\sigma_{max}^{eff}}{\sigma_{max}} = A \ln r + B \quad (2.9)$$

Toutes les valeurs des paramètres A et B sont obtenues par fittage (ajustement) des résultats de la Figure 2.16 en utilisant la formule proposée 2.9 et les résultats de la simulation sont présentés dans le tableau 2.2.

P	A	B	$\sigma_{max}^{Boc} / \sigma_{max}$
0.15	0.094	0.600	0.613
0.20	0.110	0.454	0.512
0.30	0.130	0.364	0.343
0.40	0.080	0.230	0.216
0.50	0.072	0.163	0.125

TABLE 2.2 – Paramètres de fittage (ajustement), σ_{max}^{Boc} étant la formule de Bocaccini

La variation du paramètre fitté (ajusté) A varie en fonction de la fraction volumique P , il est représenté dans la Figure 2.17.

FIGURE 2.17 – Fittage (ajustement) du paramètre A

Pour évaluer le paramètre A , un fittage (ajustement) des résultats numériques du tableau 2.2 en utilisant le polynôme 2.10 qui donne une meilleure représentativité des résultats :

$$A = \alpha P + \beta P^2 + \gamma P^3 \quad (2.10)$$

α , β et γ sont des constantes.

Les résultats des divers paramètres de fittage sont résumés dans le tableau 2.3.

α	β	γ
0.98708	-2.43176	1.4452

TABLE 2.3 – paramètres de fittage a, b et c

Selon ces résultats, il est clair que $\beta = -2.5 \alpha$ et $\gamma \approx 1.5 \alpha$, par conséquent A peut être écrit comme :

$$A = \alpha P(1 - 2.5 P + 1.5 P^2) \quad (2.11)$$

Par comparaison à l'expression de [Boccaccini et al., 1996], équation 2.1, on peut remarquer que les résultats numériques vérifient la relation :

$$\alpha(1 - 2.5P + 1.5P^2) \approx P(1 - P)^3 \quad (2.12)$$

L'expression 2.10 devient :

$$A = P(1 - P)^3 \quad (2.13)$$

Le tableau 2.2 montre que la valeur du deuxième paramètre de fittage B de la fonction 2.9 peut être évaluée par la formule de Boccaccini comme suit :

$$B = (1 - P)^3 \quad (2.14)$$

Donc, la formule proposée 2.9 peut être réécrite comme ceci :

$$\frac{\sigma_{max}^{eff}}{\sigma_{max}} = P(1 - P)^3 \ln r + P(1 - P)^3 \quad (2.15)$$

Et l'expression finale de 2.9 s'écrit :

$$\frac{\sigma_{max}^{eff}}{\sigma_{max}} = (1 - P)^3(1 + P \ln r) \quad (2.16)$$

La formule proposée comparée aux résultats numériques est illustrée dans la Figure 2.18 .

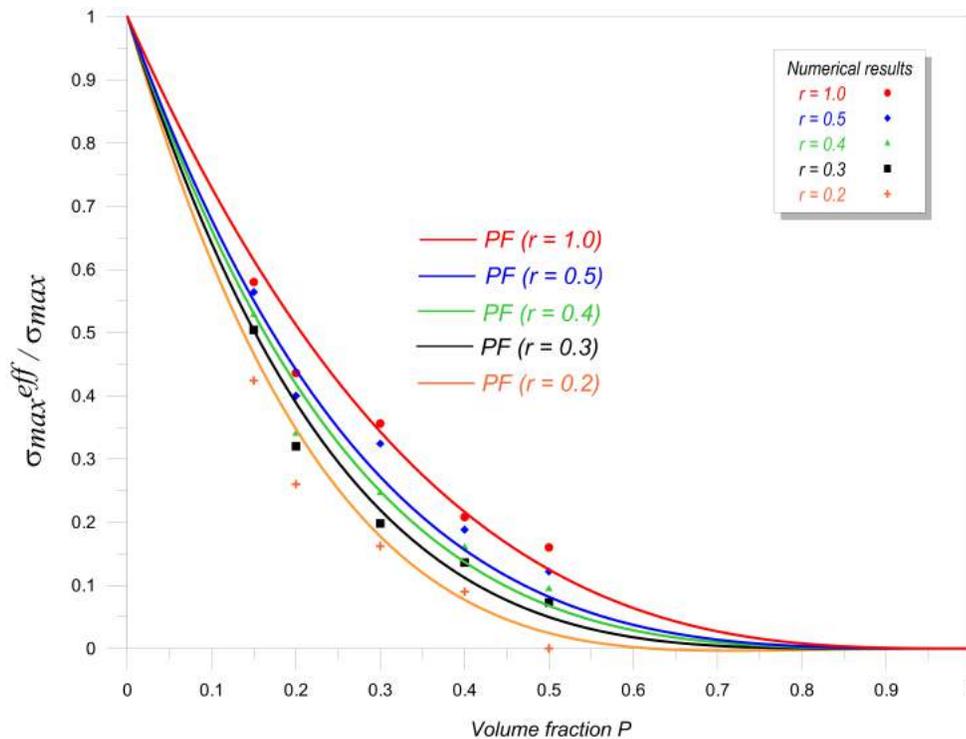


FIGURE 2.18 – Résultats numériques (points) et formule proposée

La Figure 2.18 montre que la formule proposée est en bon accord avec les résultats numériques pour tous les cas étudiés. Dans le cas où $r = 1$ et $K = 3$, qui correspond à une forme circulaire du pore, les résultats numériques coïncident parfaitement avec le modèle de Boccaccini.

La Figure 2.19 montre la validation de la formule proposée obtenue par fittage (ajustement) des résultats numériques.

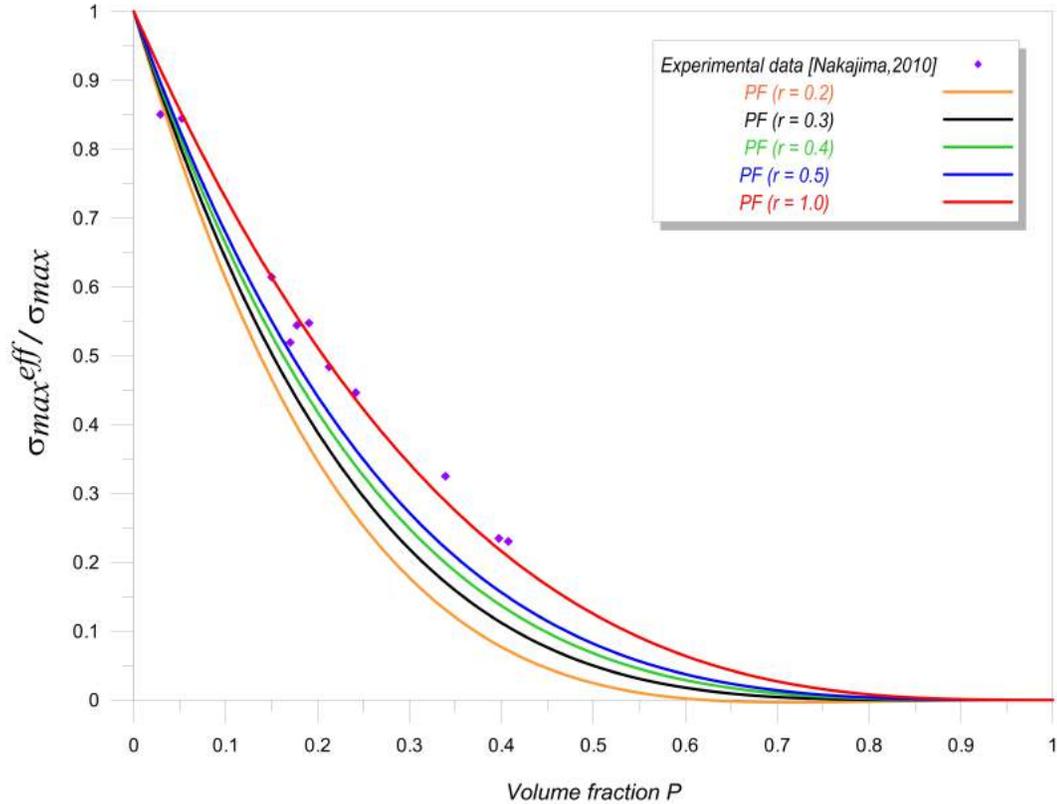
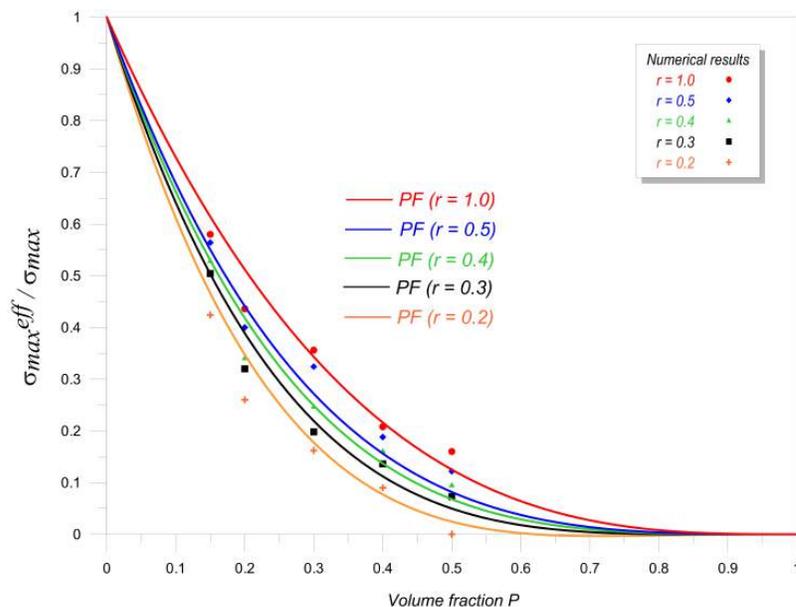


FIGURE 2.19 – Comparaison de la formule proposée aux résultats expérimentaux de Hyun et al. (2001) et Nakajima et al. (2010)

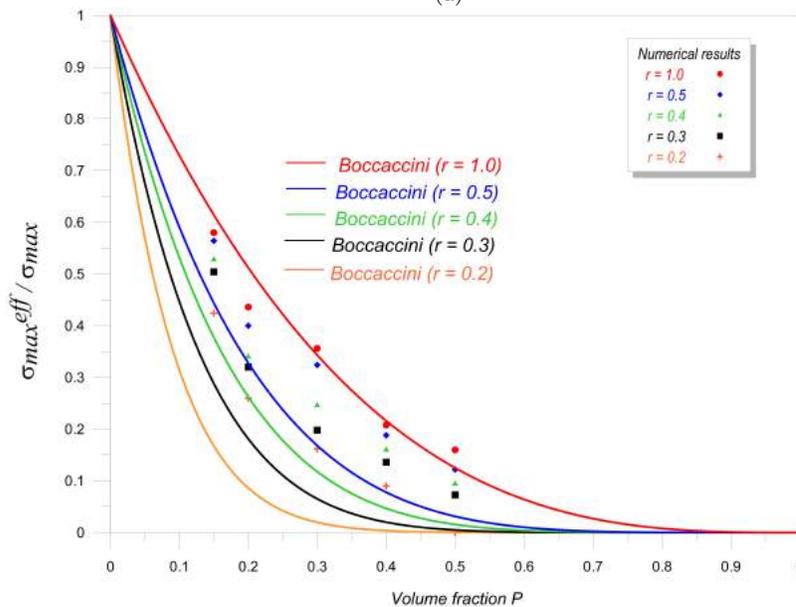
Il est clair qu'il y a une bonne concordance entre la formule proposée et les résultats expérimentaux du cuivre poreux de type lotus, les seules données trouvées dans la littérature [Hyun et al., 2001] et [Nakajima, 2010] où les auteurs ont considéré des pores cylindriques orientés perpendiculairement à la direction du chargement et ont pris les paramètres géométriques $a = b$ ($r = 1$). Il faut noter que la formule proposée est aussi représentée pour les autres rapports de forme considérés à savoir $r = 0.2, 0.3, 0.4$ et 0.5 .

2.5.4 Comparaison des résultats numériques au modèle analytique

Afin de tenir compte des différentes orientations des pores, le facteur de concentration de contraintes est pris comme étant la moyenne des deux cas extrêmes de l'orientation des pores et il est clair que les résultats numériques sont en bonne concordance avec le modèle de Boccaccini. Il faut aussi souligner qu'il est préférable d'utiliser ce modèle avec l'équation 2.5 qu'avec l'équation 2.2 comme il est montré sur la Figure 2.20.



(a)



(b)

FIGURE 2.20 – Résultats numériques comparés au modèle de Bocaccini : (a) résultats numériques et formule proposée, (b) résultats numériques et modèle de Bocaccini

2.6 Synthèse

Les simulations numériques ont permis de déterminer le maillage et le volume élémentaire représentatif V.E.R. optimaux pour les calculs. Un des résultats importants qui ressortent de cette partie est l'équivalence, en termes de fractions volumiques égales, trouvée entre deux microstructures poreuses l'une contenant des pores de même forme et de tailles différentes et l'autre des pores de même forme et de même taille. Les résultats numériques ont également montré un effet notoire de la morphologie des pores sur la résistance maximale effective à la traction, un modèle qui détermine cette propriété a été proposé et validé analytiquement et expérimentalement par comparaison à des données trouvées dans la littérature.

Chapitre 3

Module tangent plastique effectif des matériaux poreux

3.1 Introduction

Le présent chapitre est consacré à l'étude de l'effet de la morphologie des pores sur une autre propriété mécanique non linéaire qui est, cette fois-ci, le module tangent plastique effectif (MTPE) des matériaux poreux. Il est donc, tout à fait logique, que la même démarche, poursuivie dans le chapitre précédent pour l'étude de la résistance maximale effective à la traction, soit adoptée. Il faut signaler, tout de même, que l'effet de la taille des pores qui a été déjà traité dans le cas de la résistance maximale à la traction est une évidence par rapport au comportement mécanique, de ce fait, il sera inutile de le répéter dans cette partie.

Des notions de base relatives à l'élastoplasticité des structures, au module tangent plastique et à l'écroutissement ont été exposées en détails dans la section 1.8. Dans la présente partie, on va passer directement à la présentation de l'étude numérique.

3.2 Génération des microstructures et homogénéisation numérique

3.2.1 Morphologie des microstructures

Dans cette investigation, une analyse numérique du module tangent plastique des matériaux poreux, contenant une distribution aléatoire de pores elliptiques ou circulaires est présentée. La microstructure considérée dans cette étude est une matrice poreuse 2D qui contient une distribution aléatoire de vides circulaires ou elliptiques identiques sans percolation. Différentes

configurations de microstructures sont obtenues en faisant varier le rapport entre les rayons mineur et majeur de la géométrie des pores elliptiques de la Figure 3.1. Il faut signaler que les mêmes microstructures poreuses, utilisées pour l'étude de la résistance maximale à la traction, feront l'objet de la présente analyse numérique et par conséquent les mêmes figures réapparaîtront dans ce qui suit.

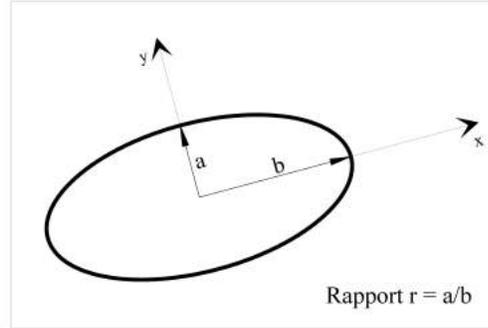


FIGURE 3.1 – Paramètres de la géométrie des pores

Les formes choisies correspondent à $r = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ et 1.0 . La fraction volumique des vides, notée P , est aussi prise en compte en considérant cinq cas différents : $P = 10\%$, 20% , 30% , 40% et 50% comme il est indiqué sur la Figure 3.2.

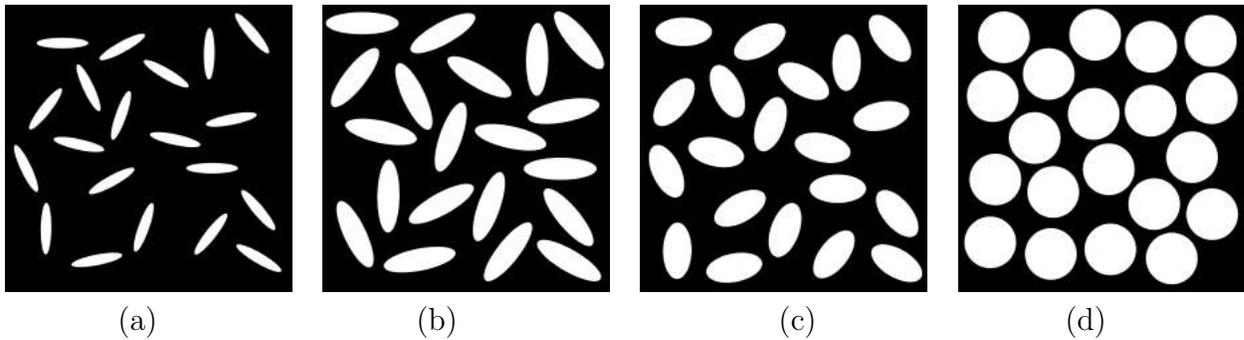


FIGURE 3.2 – Exemples de microstructures combinées par variation du rapport de forme et de la fraction volumique du vide : (a) $r = 0.2$, $P = 10\%$, (b) $r = 0.3$, $P = 30\%$, (c) $r = 0.5$, $P = 30\%$, et (d) $r = 1$, $P = 50\%$

Il est à noter que la combinaison $r = 0.2$, $P = 0.5$ conduit à la percolation, par conséquent, elle ne sera pas étudiée.

La matrice est supposée élastoplastique et gouvernée par le critère de von Mises. Les vides sont supposés aléatoirement distribués, sans percolation possédant une rigidité nulle. Différentes modules tangents plastiques sont attribuées au matériau non-poreux afin d'estimer le module tangent plastique effectif du matériau poreux.

3.2.2 Conditions aux limites

Après la description de la microstructure, la définition des conditions aux limites doit être effectuée pour les tests numériques. dans cette étude, la microstructure est soumise à un chargement de traction uniaxiale dans la direction x , comme représenté sur la Figure 3.3 et les conditions aux limites sont décrites comme suit :

- Côté OA : 0 déplacement dans la direction x et 0 contrainte tangentielle dans la direction y ;
- Côté OB : 0 déplacement dans la direction y et 0 contrainte tangentielle dans la direction x ;
- Côté BC : déplacement δ dans la direction x et 0 contrainte tangentielle dans la direction y .

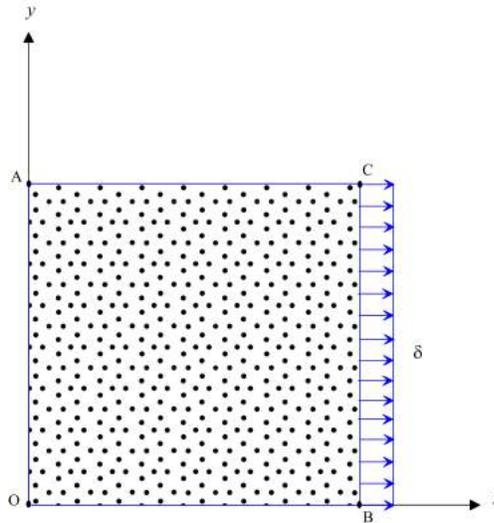


FIGURE 3.3 – Description des conditions aux limites pour l'étude du MTPE

3.2.3 Maillage éléments finis

Dans le chapitre précédent consacré à l'étude de la résistance maximale à la traction, on a utilisé un maillage régulier où on a superposé des grilles de maillage de plus en plus fines sur l'image de la microstructure pour déterminer le maillage optimal qui nous a permis de déterminer le volume élémentaire représentatif (VER). Pour le cas du module tangent plastique et du moment que le VER ait été déjà déterminé, on va utiliser un maillage libre qui est plus précis que le maillage régulier, chose qui était impossible dans le premier cas parceque on devait mailler un nombre considérable de réalisations ce qui est très couteux. Des exemples de microstructures avec un maillage libre sont présentées dans la Figure 3.4. Il faut rappeler que le VER adopté correspond à 300 vides (pores).

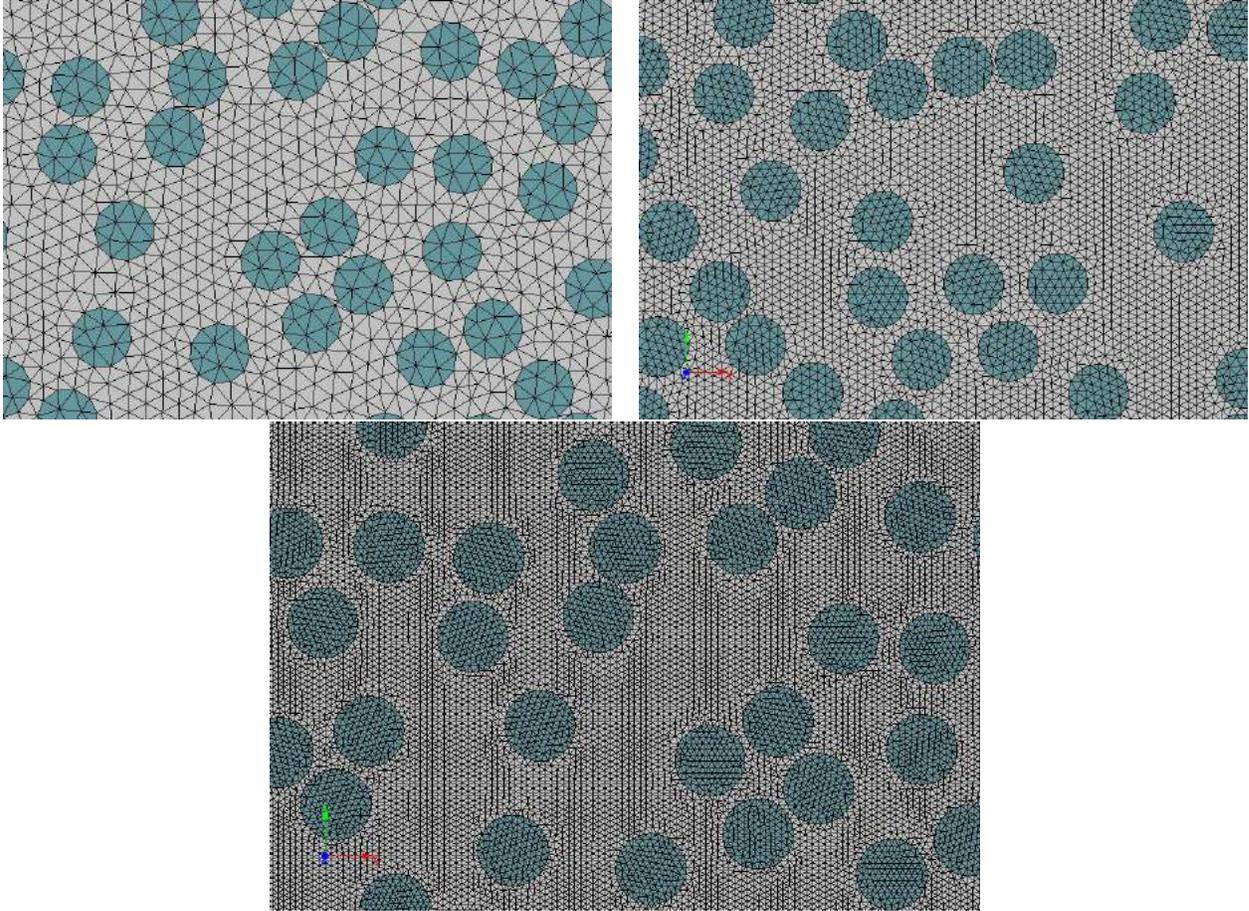


FIGURE 3.4 – Exemples de maillages libres

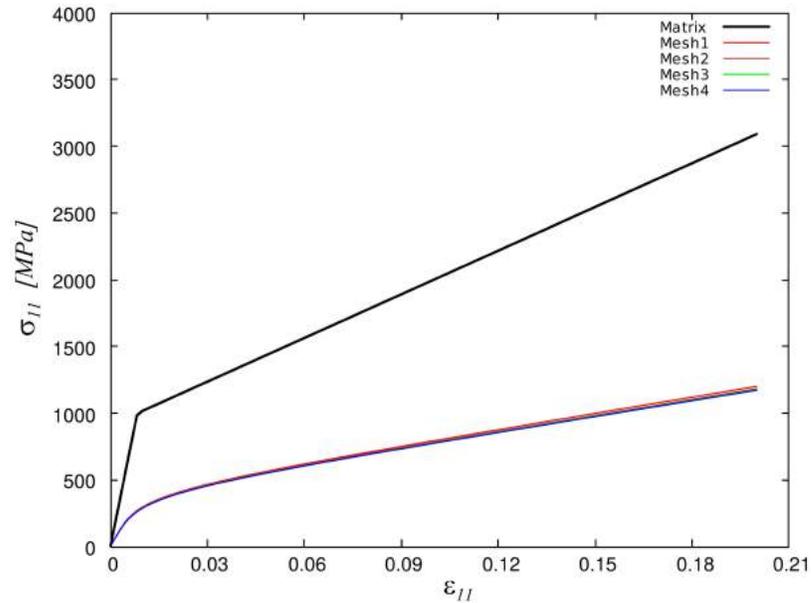
Pour déterminer le maillage optimal, un calcul est effectué sur la même microstructure avec quatre maillages différents, voir Tableau 3.1.

Maillage	Nombre d'éléments	H [MPa]	Erreur /Mesh 4 [%]
Mesh1	21645	4100	4
Mesh2	49928	4000	1.7
Mesh3	84552	3930	0.5
Mesh4	175988	3910	0

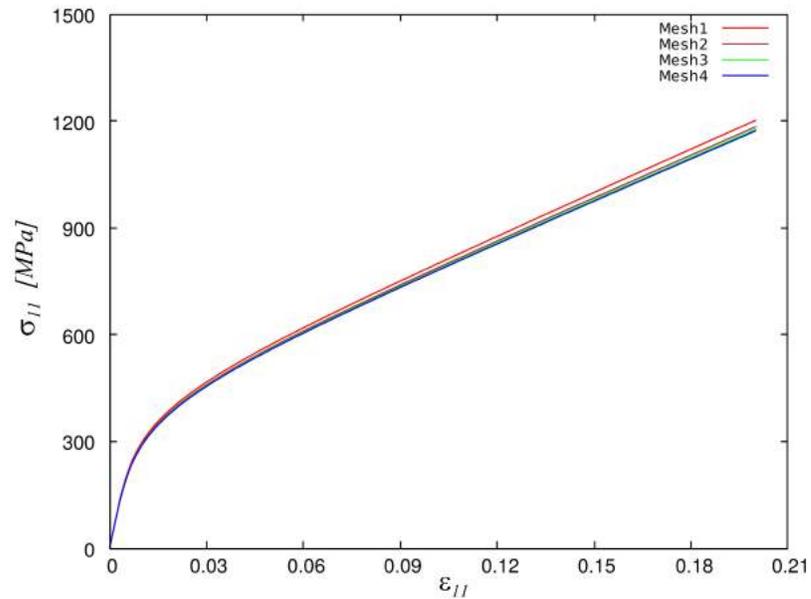
TABLE 3.1 – Eléments du maillage

La Figure 3.5(a) représente le comportement élastoplastique effectif de la microstructure comparé à celui de la matrice. La Figure 3.5(b) est un zoom qui montre que les quatre maillages donnent pratiquement le même comportement avec des erreurs qui figurent dans le Tableau 3.1. Il est clair qu'avec le maillage Mesh1 (21645 éléments), le comportement effectif est obtenu

avec une erreur de 4% relativement au maillage le plus raffiné Mesh4 (175988 éléments). A partir du maillage Mesh2 (49928 éléments) avec une erreur de 1.7%, on constate que toutes les courbes du comportement effectif se superposent avec des erreurs inférieures à 1%, Figure 3.5(b). Sur la base du test de maillage effectué, et dans le but de minimiser l'effet du maillage sur le comportement effectif (erreur < 1%), les microstructures étudiées seront maillées avec un nombre d'éléments supérieur à 50000.



(a)



(b)

FIGURE 3.5 – Test de maillage : (a) Comportement effectif de la microstructure comparé à la matrice, (b) Zoom sur le comportement

Fraction volumique P	Nombre d'éléments
10%	117775
20%	89001
30%	75334
40%	65834

TABLE 3.2 – Maillages des microstructures au rapport de forme $r = 0.2$

Le Tableau 3.2 présente un exemple de maillages des microstructures ayant un rapport de forme $r = 0.2$ et différentes fractions volumiques. Pour les autres rapports de forme ($r = 0.3, 0.4$ et 0.5) et pour les maillages des différentes microstructures voir Annexe A.

3.3 Résultats numériques et modèle proposé

La présente section est consacrée, dans une première étape, à l'étude de l'effet de la morphologie des pores sur le module tangent plastique effectif des microstructures. Dans une deuxième étape, et sur la base des différents résultats obtenus, un modèle qui prédit le MTPE, en termes de la fraction volumique P et du rapport de forme r , est proposé.

3.3.1 Effet de la morphologie des pores sur le MTPE

3.3.1.1 Variation du comportement en fonction de la fraction volumique

Les différents comportements, pour les différentes fractions volumiques étudiées, sont illustrés dans les Figures 3.6 - 3.10.

Il est clair que le comportement effectif est proportionnel à la fraction volumique, ce qui est tout à fait logique du moment que la porosité affaiblit les propriétés mécaniques du matériau.

3.3.1.2 Variation du comportement en fonction du rapport de forme

Les différents comportements, pour les différents rapports de forme étudiés, sont illustrés dans les Figures 3.11 - 3.15 qui montrent clairement que la variation du rapport de forme influe sensiblement sur le comportement effectif.

Les résultats précédents sont exploités pour étudier la variation du module tangent plastique effectif des différentes microstructures en fonction des deux paramètres P et r . Le Tableau 3.3 récapitule la variation du MTP normalisé (H^{eff}/H_m). H^{eff} est le module tangent plastique effectif et H_m est le module tangent plastique de la matrice.

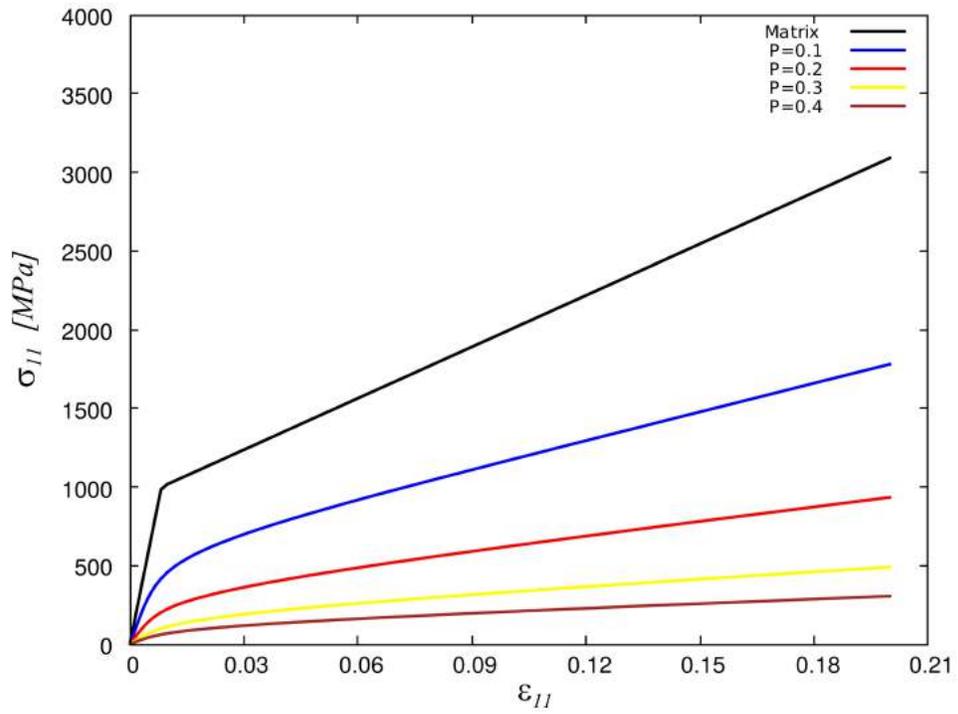


FIGURE 3.6 – Comportement effectif en termes de fraction volumique pour $r = 0.2$

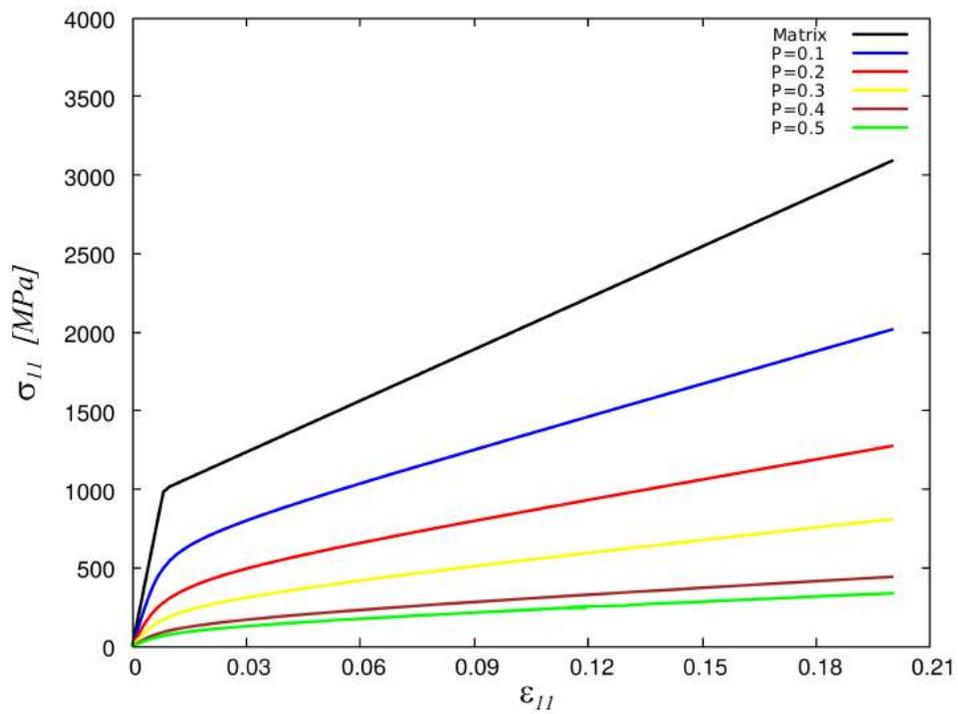
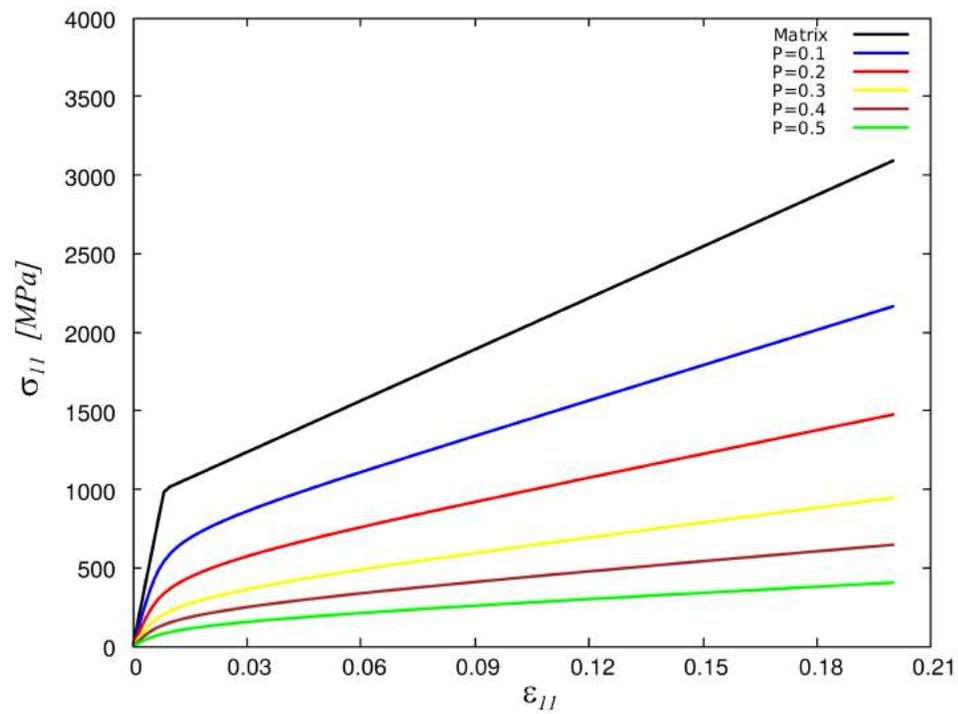
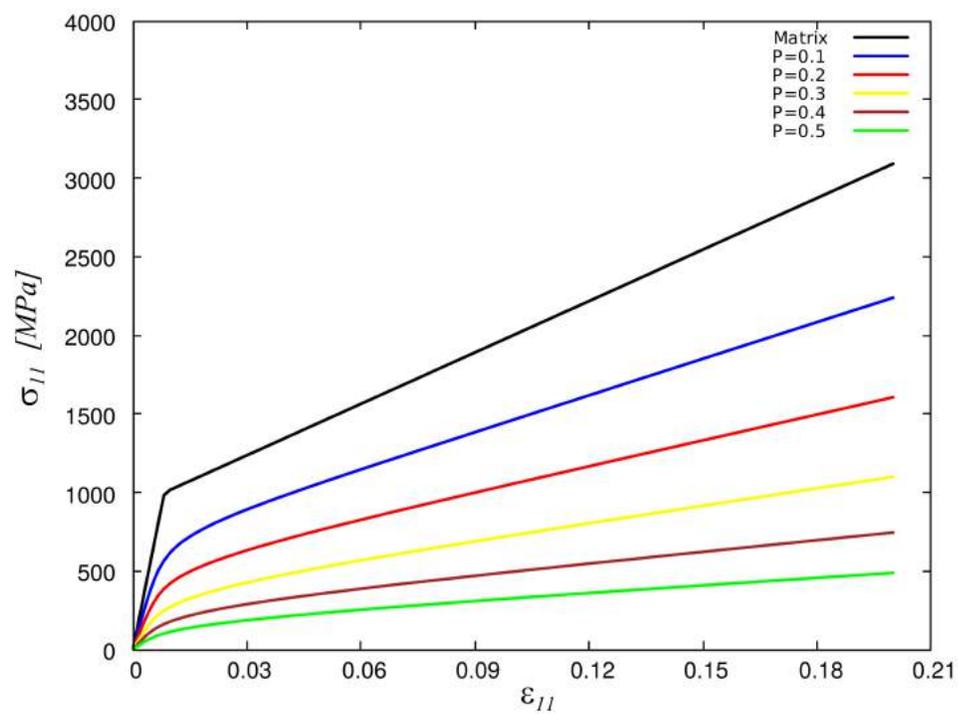


FIGURE 3.7 – Comportement effectif en termes de fraction volumique pour $r = 0.3$

FIGURE 3.8 – Comportement effectif en termes de fraction volumique pour $r = 0.4$ FIGURE 3.9 – Comportement effectif en termes de fraction volumique pour $r = 0.5$

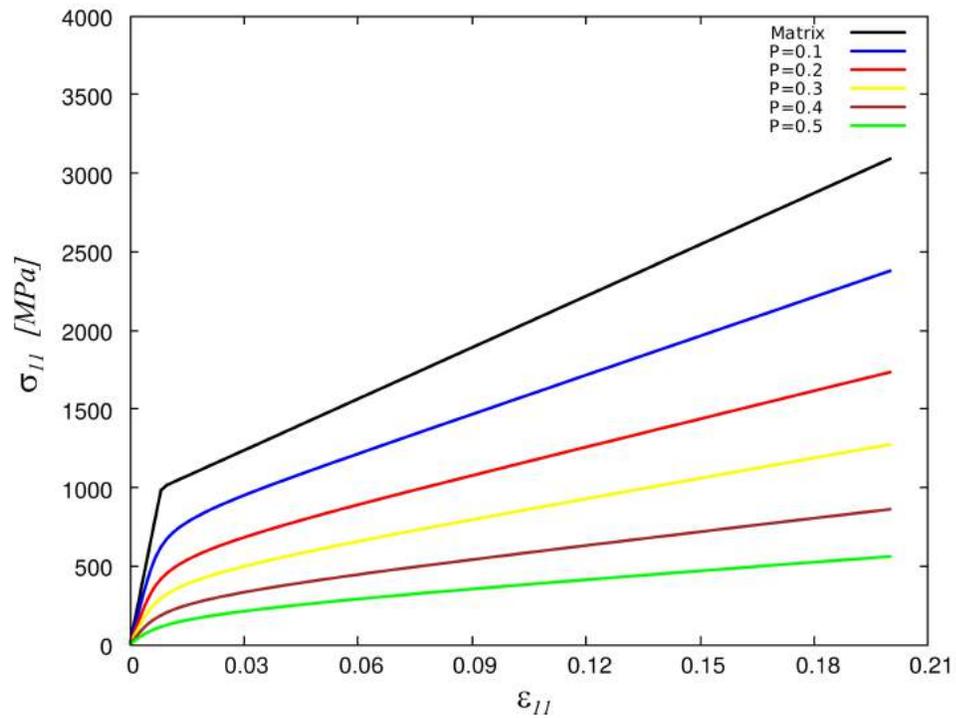


FIGURE 3.10 – Comportement effectif en termes de fraction volumique pour $r = 1$

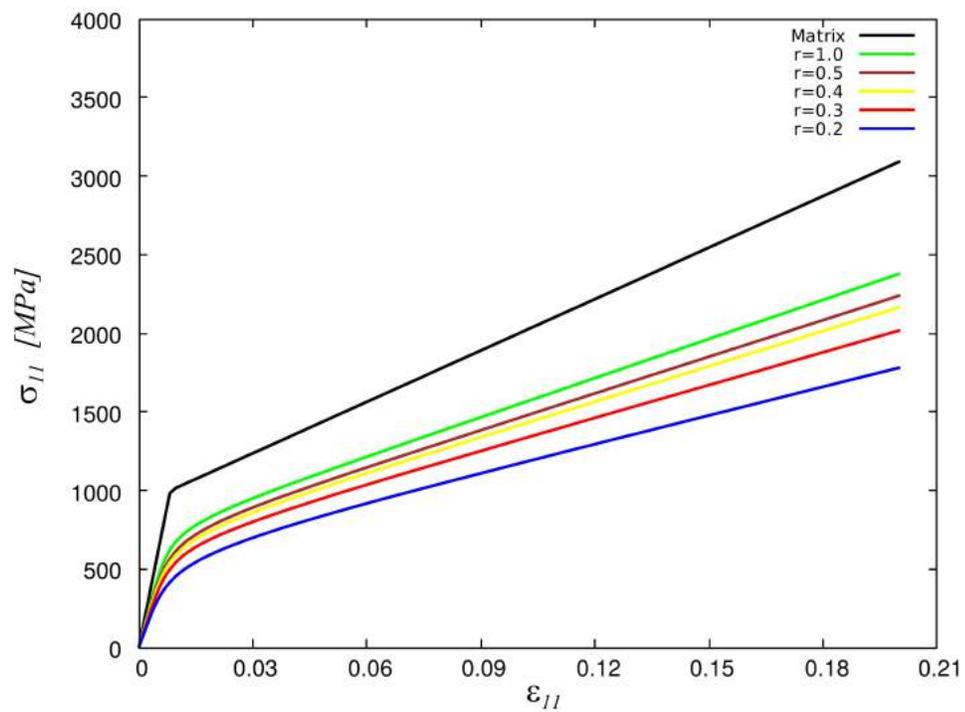


FIGURE 3.11 – Comportement effectif en termes du rapport de forme pour $P = 10\%$

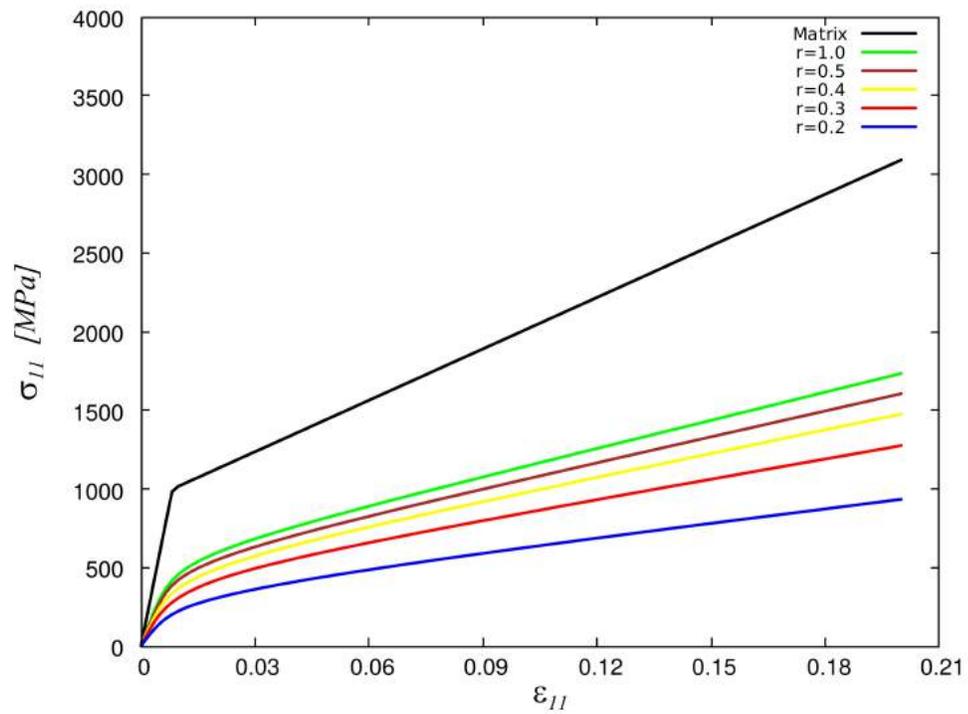


FIGURE 3.12 – Comportement effectif en termes du rapport de forme pour $P = 20\%$

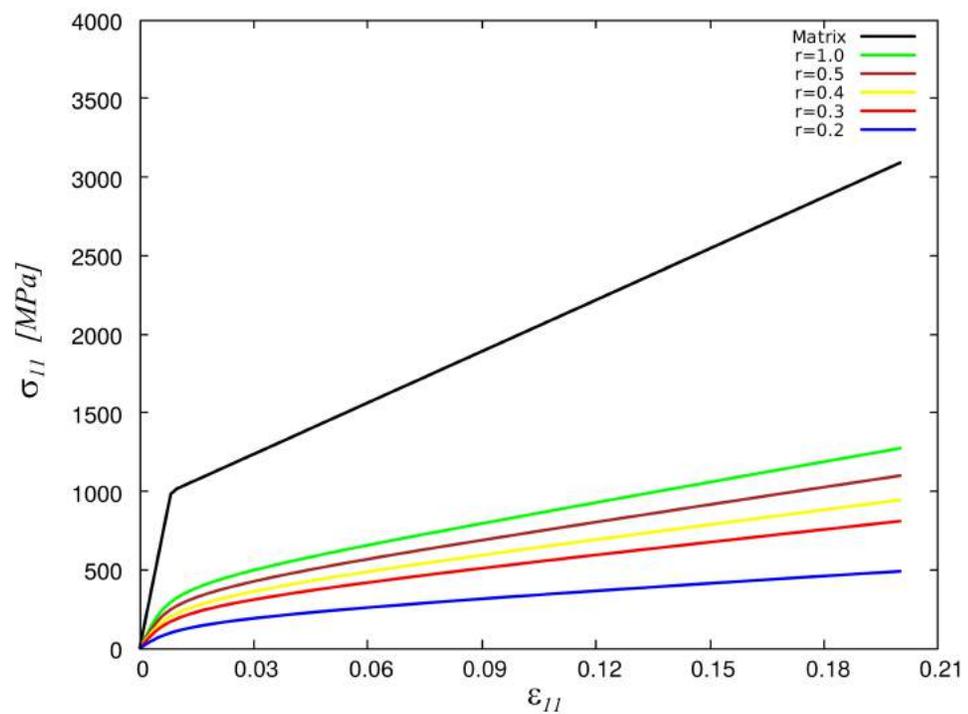


FIGURE 3.13 – Comportement effectif en termes du rapport de forme pour $P = 30\%$

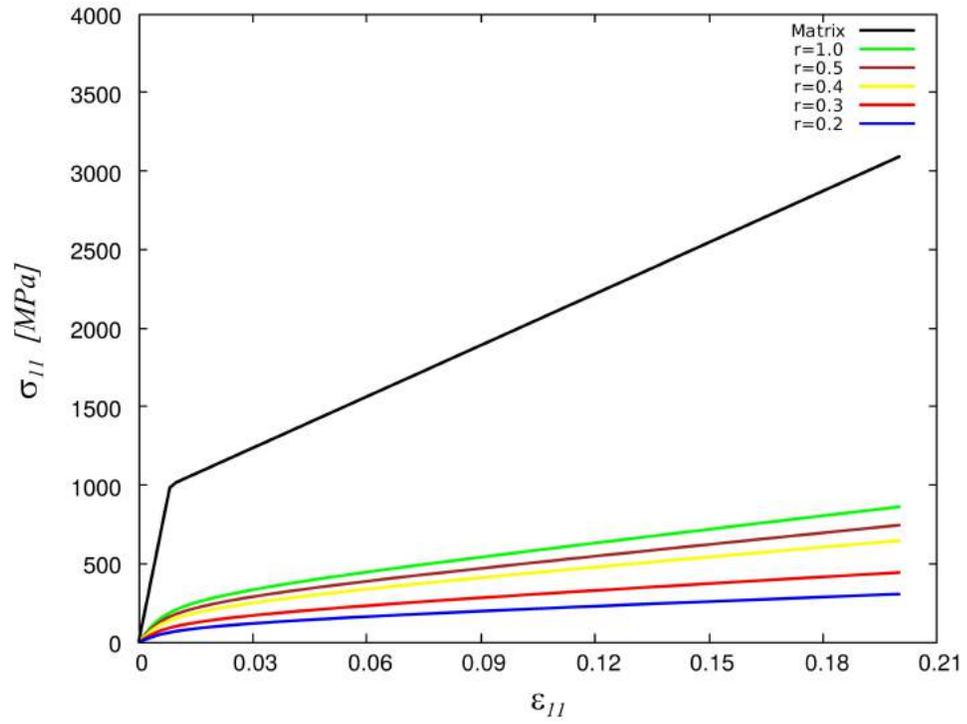


FIGURE 3.14 – Comportement effectif en termes du rapport de forme pour $P = 40\%$

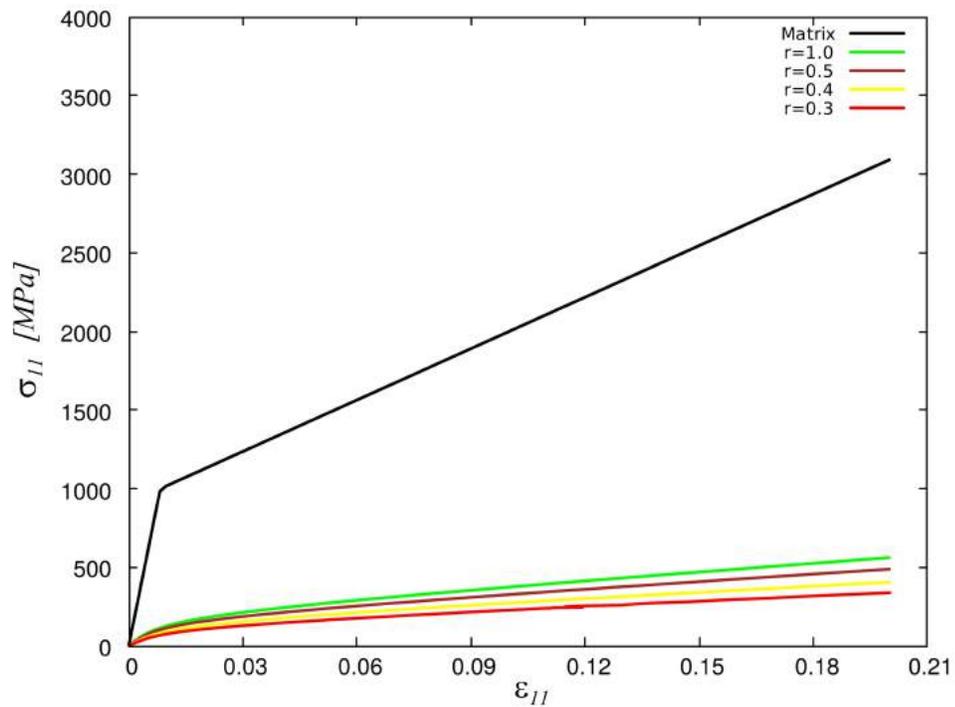


FIGURE 3.15 – Comportement effectif en termes du rapport de forme pour $P = 50\%$

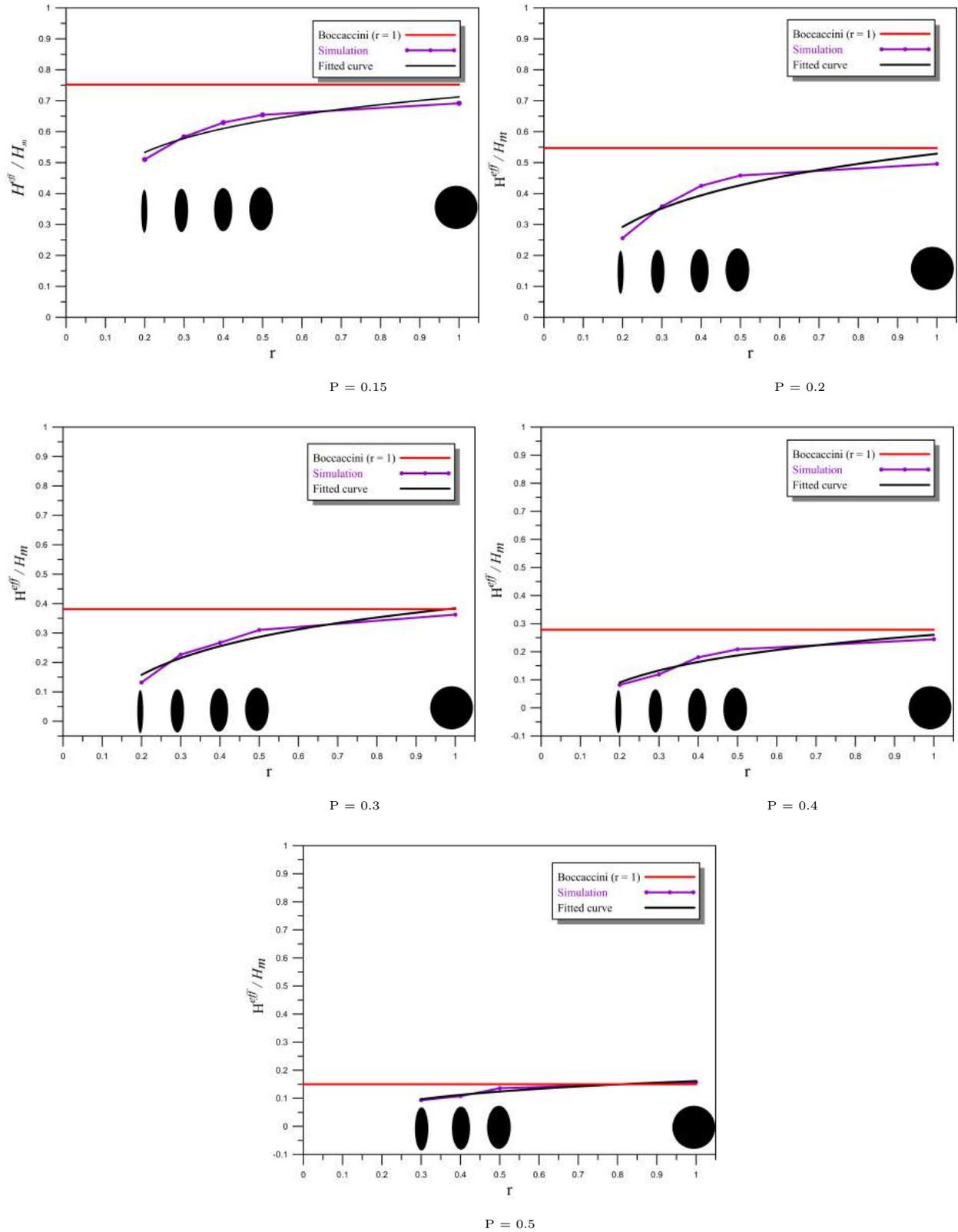


FIGURE 3.16 – Module tangent plastique effectif en termes du rapport de forme

Il faut noter que tous ces résultats sont comparés avec le modèle de Boccaccini. La Figure 3.16 montre que le module tangent plastique effectif de toutes les microstructures, pour les différentes fractions volumiques, augmente avec l'augmentation du rapport de forme considéré. Il est clair que les résultats numériques obtenus convergent au modèle de Boccaccini et en particulier pour un niveau de porosité élevé.

$P \setminus r$	0.2	0.3	0.4	0.5	1.0
10%	0.51	0.583	0.629	0.654	0.691
20%	0.255	0.358	0.425	0.458	0.495
30%	0.131	0.226	0.266	0.310	0.362
40%	0.081	0.119	0.180	0.208	0.244
50%	-	0.093	0.107	0.135	0.157

TABLE 3.3 – Variation de (H^{eff}/H_m) en fonction de P et r

Les résultats du module tangent plastique effectif pour chaque fraction volumique, en termes du rapport de forme r , sont présentés dans la Figure 3.16 qui illustre la variation du MTPE comme une fonction du rapport de forme des vides pour les matériaux poreux.

La conclusion principale de cette section est que le MTPE des microstructures poreuses étudiées dépend significativement de la forme des pores.

3.3.2 Relation représentative effective

L'objectif de cette section est de proposer un modèle pour déterminer le MTPE d'un matériau poreux tenant compte de l'effet de la morphologie des vides. Pour atteindre ce but, on a effectué plusieurs tests de fittage (ajustement), avec différentes fonctions numériques, des points obtenus et ce dans le but d'arriver à une bonne représentativité des résultats. La meilleure fonction représentant ces tests a comme allure :

$$\frac{H^{eff}}{H_m} = C \ln r + F \quad (3.1)$$

avec : H^{eff} est le module tangent plastique effectif (MTPE) et H_m est le module tangent plastique de la matrice (matériau non poreux)

Toutes les valeurs des paramètres C et F sont obtenues par fittage des résultats de la Figure 3.16 en utilisant la formule proposée 3.1. Les résultats de la simulation sont présentés dans le Tableau 3.4.

P	C	F
0.10	0.1112	0.7121
0.20	0.1471	0.5287
0.30	0.1407	0.3839
0.40	0.1056	0.2600
0.50	0.0538	0.1613

TABLE 3.4 – Paramètres de fittage (ajustement)

La variation du paramètre fitté (ajusté) C en fonction de la fraction volumique P est représentée dans la Figure 3.17.

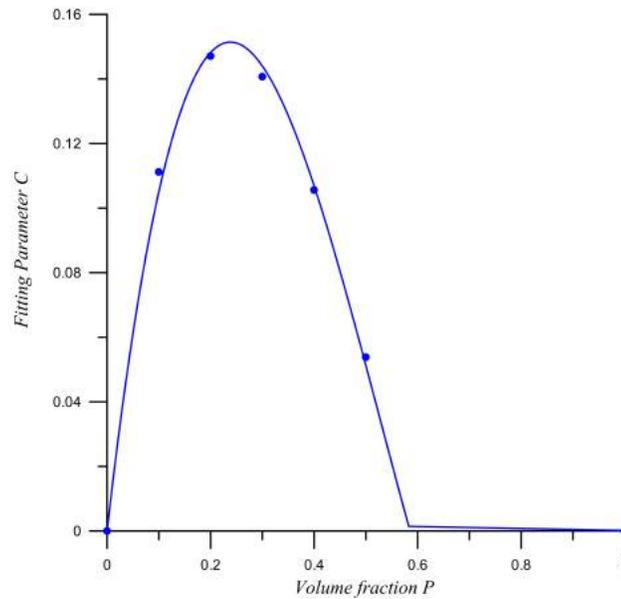


FIGURE 3.17 – Fittage du paramètre C

Pour évaluer le paramètre C , un fittage (ajustement) des résultats numériques du tableau 3.4 en utilisant le polynôme qui donne une meilleure représentativité des résultats :

$$C = dP + fP^2 + gP^3 \quad (3.2)$$

d , f et g sont des constantes.

Les résultats des divers paramètres de fittage sont résumés dans le tableau 3.5.

d	f	g
1.40	-3.81	2.40

TABLE 3.5 – paramètres de fittage d , f et g

Selon ces résultats, il est clair que $f \approx -2.5d$ et $g = 1.5d$, par conséquent C peut être écrit comme :

$$C = dP(1 - 2.5P + 1.5P^2) \quad (3.3)$$

Par comparaison à l'expression de Boccaccini, équation 2.1, on peut remarquer que les résultats numériques vérifient la relation :

$$d(1 - 2.5P + 1.5P^2) \approx dP(1 - P)^3 \quad (3.4)$$

Sachant que $d = 1.40$, l'expression 3.3 devient :

$$C = 1.4P(1 - P)^3 \quad (3.5)$$

Le tableau 3.5 montre que la valeur du deuxième paramètre de fittage F de la fonction 3.1 peut être évaluée par la formule :

$$F = \theta(1 - P)^\delta \quad (3.6)$$

Le fittage de F donne $\theta = 0.925 \approx 1$ et $\delta = 2.5$

$$F = (1 - P)^{2.5} \quad (3.7)$$

Donc, l'expression finale de la formule proposée 3.1 s'écrit :

$$\frac{H^{eff}}{H_m} = 1.4P(1 - P)^3 \ln r + (1 - P)^{2.5} \quad (3.8)$$

3.3.3 Comparaison des résultats numériques au modèle analytique

La formule proposée comparée aux résultats numériques est illustrée dans la Figure 3.18 qui montre que la formule proposée est en bon accord avec les résultats numériques pour tous les cas étudiés sauf pour le cas du rapport de forme $r = 0.2$ et particulièrement pour les basses fractions volumiques où on remarque qu'il y a une différence significative. Ceci pourrait être attribué au phénomène de concentration de contraintes. Une investigation supplémentaire dans ce sens s'impose.

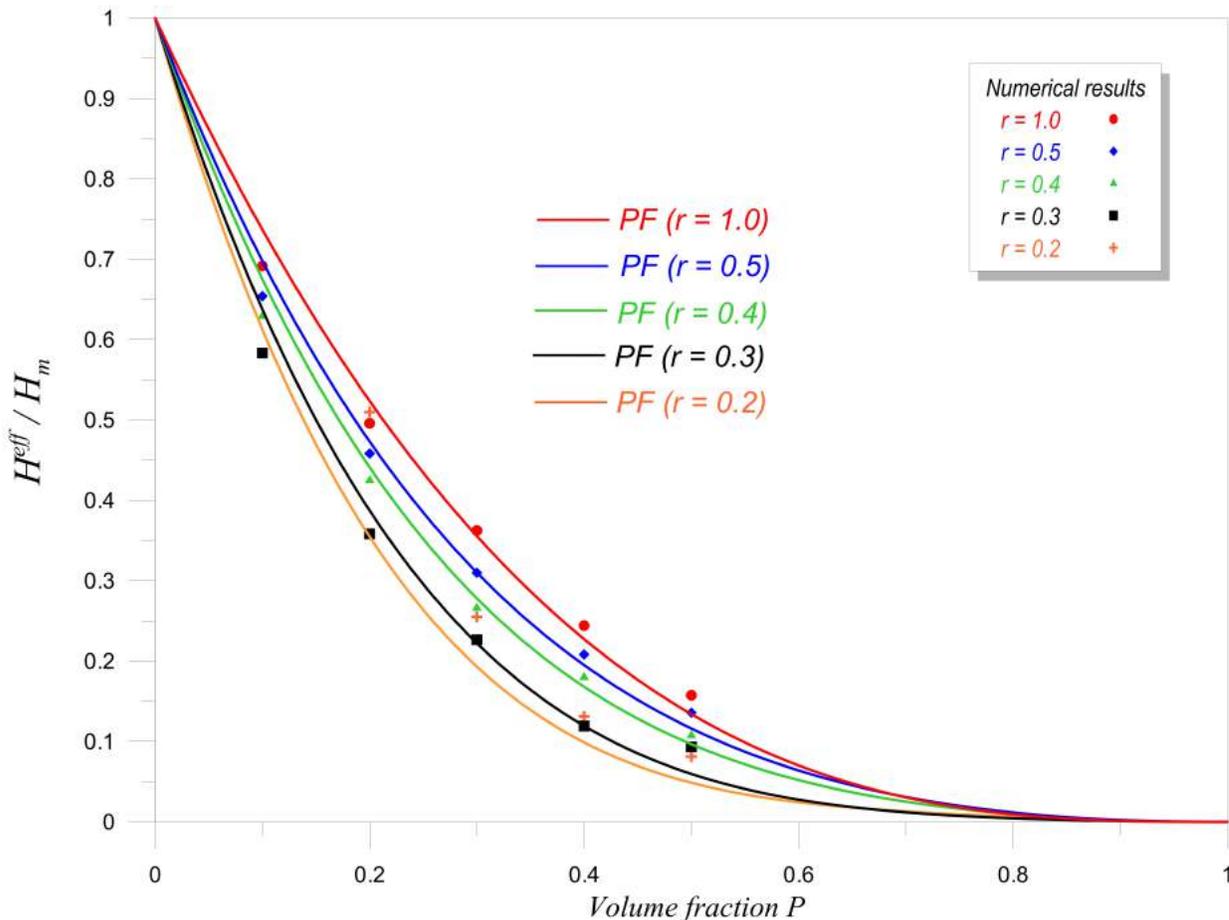


FIGURE 3.18 – Résultats numériques (points) et formule proposée

3.4 Synthèse

Après une série de tests de maillage, les simulations numériques ont permis de déterminer le maillage libre optimal pour les calculs. L'effet des deux paramètres, à savoir la fraction volumique et le rapport de forme, sur le comportement élastoplastique et par conséquent sur le module tangent plastique effectif, a fait l'objet d'une investigation minutieuse et a débouché sur :

- Sur la base du test de maillage effectué, et dans le but de minimiser l'effet du maillage sur le comportement effectif (erreur < 1%), les microstructures étudiées ont été maillées avec un nombre d'éléments supérieur à 50000.
- Les comportements des différentes microstructures ainsi que le MTPE sont sensibles aux variations des deux paramètres P et r .

- Un modèle, analogue à celui de Boccaccini, qui prédit Le MTPE en fonction de P et de r a été proposé.
- Il faut noter que ce modèle n'a pas été validé par comparaison à des données expérimentales, comme ce fut le cas de la résistance maximale effective à la traction dans le premier chapitre, ceci est dû à l'absence de ces données dans la littérature.

Conclusion

Ce travail de thèse avait pour objet la modélisation multi-échelles des matériaux poreux. Il s'agit d'étudier l'effet de la morphologie des pores sur le comportement élastoplastique de microstructures virtuelles caractérisées par une distribution aléatoire de vides ayant des formes circulaires ou elliptiques. L'étude s'est intéressée principalement à deux propriétés mécaniques en l'occurrence la résistance maximale à la traction et le module tangent plastique et ce par l'utilisation de la technique de l'homogénéisation numérique.

L'étude a commencé par la génération des images des microstructures poreuses par le moyen de l'outil numérique  Digimat et converties par la suite par l'outil  ABAQUS afin d'obtenir le fichier données utile pour la simulation. Plusieurs microstructures ont été considérées en faisant varier la fraction volumique des pores P (taux de porosité) et leur rapport de forme r , entre cercles et ellipses de différentes tailles. Les microstructures étudiées sont représentées par une distribution aléatoire, dans une surface carrée, sans percolation de vides de géométrie donnée. La méthode connue sous le nom de l'élément multiphasique est utilisée pour mailler les différentes microstructures.

La première étape de calcul consistait à déterminer la taille optimale du volume élémentaire représentatif V.E.R. des microstructures. Il faut signaler que l'approche statistique et numérique proposée par [Kanit et al., 2003b] a été utilisée dans ce travail pour l'évaluation de la taille du V.E.R.

Ensuite, une première piste d'investigation est suivie, elle consistait à étudier l'influence de la variation de la taille des pores pour une même population (même forme géométrique), tout en conservant la même fraction volumique, sur la résistance maximale effective à la traction des microstructures. Les résultats ont montré que cet effet est absent et que la résistance maximale effective à la traction d'une microstructure à fraction volumique P et N pores, de tailles différentes mais de même forme, est égale à celle d'une microstructure ayant la même fraction volumique P et une seule population (une seule forme géométrique) de pores.

L'influence de la morphologie des pores a été mise en évidence, pour des fractions volumiques différentes et avec différents rapports de forme. L'effet de la morphologie des pores sur la résistance maximale à la traction est très significatif. Il faut noter que les résultats numériques obtenus convergent au modèle analytique de Boccaccini pour $r = 1$, particulièrement pour des niveaux de porosité élevés. Afin de tenir compte des différentes orientations des pores, le facteur de concentration de contraintes est pris comme étant la moyenne des deux cas extrêmes de l'orientation des pores et il est clair que les résultats numériques sont en bonne concordance avec le modèle de Boccaccini. Il faut souligner, aussi, qu'il est préférable d'utiliser ce modèle avec l'équation 2.5 qu'avec l'équation 2.2. Un modèle qui prédit la résistance maximale effective à la traction en fonction de la fraction volumique et de la morphologie des pores a été proposé et validé analytiquement par le modèle de Boccaccini et expérimentalement par des résultats expérimentaux effectués sur des matériaux poreux de type lotus trouvés dans la littérature [Hyun et al., 2001] et [Nakajima, 2010].

La même démarche a été répétée pour une deuxième propriété mécanique qui est le module tangent plastique avec une différence qui doit être notée, elle concerne le maillage des microstructures. Une grille de maillage régulière a été utilisée dans le deuxième chapitre pour la détermination du V.E.R. optimal où un nombre important de microstructures a été traité, ce qui s'est traduit par un temps de calculs considérable. L'utilisation d'un maillage libre était alors pratiquement impossible, mais pour le cas du module tangent plastique dans le troisième chapitre, et du moment que le VER ait été déjà déterminé, un maillage libre qui est plus précis que le maillage régulier a été privilégié. Plusieurs simulations ont été effectuées afin d'explorer l'influence des paramètres morphologiques sur la propriété étudiée. Comme pour le cas de la résistance maximale à la traction, les résultats ont montré que l'effet de la morphologie existe aussi pour le cas du module tangent plastique. L'exploitation de ces résultats a permis également de proposer un modèle qui permet de prédire le module tangent plastique effectif en termes de la fraction volumique et de la morphologie des pores.

Enfin, ce travail pourrait être poursuivi en empruntant les trois chemins suivants :

- Le modèle proposé pour la prédiction de la résistance maximale effective à la traction présente des limites de validité pour des taux de porosité faibles, il serait intéressant d'approfondir l'investigation afin de l'améliorer et l'élargir au delà de ses limites.
- Une démarche plus prometteuse, mais aussi plus ambitieuse, serait de poursuivre l'étude des éventuelles interactions en s'appuyant sur des combinaisons entre différentes morphologies de pores.

- L'évolution de la morphologie des pores au cours du chargement serait une perspective aussi intéressante.

Annexe A

Outils utilisés dans cette thèse

Les outils numériques utilisés pour la “mise en scène” de cette thèse sont résumés dans ce qui suit :

A.1 Le code de calcul **ZéBuLoN**

Développé conjointement par l’ONERA, Northwest Numerics (Seattle, USA), et le Centre des Matériaux, ZéBuLoN est un code de calcul éléments finis adapté aux problèmes de mécanique non linéaire. Programmé en C++, ZéBuLoN présente une structure modulaire orientée objet, qui comprend principalement :

- Z-master : interface graphique de pré et post-traitement. Z-master est aujourd’hui distribué sous deux versions : Z-master2D, qui comprend un mailleur bidimensionnel ouvrant sur des constructions tridimensionnelles par extrusion, et Z-master3D, qui intègre les mailleurs BLSurf (tridimensionnel surfacique) et GHS3D (tridimensionnel volumique) développés à l’INRIA ;
- Z-solve : solveur numérique ;
- Z-psolve : solveur numérique parallèle ;
- Z-post : post-traitement séquentiel ou parallèle, qui propose un dépouillement des résultats de façon globale ou locale ;
- Z-sim : simulateur visant, avant d’entreprendre un calcul de structure complet, à tester les lois de comportement sur un élément de volume ;
- Z-optim : optimiseur adapté à la résolution des problèmes inverses, à la caractérisation des matériaux, et à l’optimisation de structures ;
- Z-mat : une librairie matériau particulièrement fournie, qui permet de concevoir des lois de comportement complexes par le biais d’une interface modulable orientée objet, reposant sur le langage utilisateur ZebFront. [<http://www.mat.mines-paristech.fr/>]

[Equipements/Analyse-et-simulation-numeriques/ZeBuLoN/](#)].

A.2 Digimat

Le logiciel non linéaire multi-échelle et de modélisation de structures. Il comprend essentiellement les modules :

- Digimat-FE est utilisé pour générer un élément de volume représentatif et réaliste (VER) de la grande variété de microstructures de matériaux (plastiques, caoutchoucs, métaux, graphite, ...). Digimat-FE permet de décrire la microstructure de composite, ainsi que les propriétés du matériau et de ses constituants, afin de générer le modèle FE du composite RVE. Digimat-FE utilise Abaqus / CAE pour générer le maillage de la microstructure et le modèle par éléments finis qui est alors résolu avec Abaqus / Standard. Le post-traitement du modèle se fait alors dans Abaqus / CAE et Digimat.
- Digimat-MF est le module d'homogénéisation de Digimat qui offre la possibilité de définir le comportement du matériau local comme une fonction du comportement du matériau de la matrice et la phase d'inclusion ainsi que la morphologie de la microstructure de composite (poids des inclusions, forme et taille).

A.3 ABAQUS

ABAQUS est un logiciel de calcul d'éléments finis développé par ABAQUS, Inc (Dassault Systèmes). ABAQUS est très largement utilisé dans les industries automobiles et aéronautiques. En raison du large spectre de ses capacités d'analyse et de sa bonne ergonomie, il est également très populaire dans les milieux universitaires, pour la recherche et l'éducation. ABAQUS fut d'abord conçu pour analyser les comportements non-linéaires. Il possède en conséquence une vaste gamme de modèles de matériau.

A.4 Grapher

Grapher est un logiciel développé par Golden Software. Il permet de créer des graphiques linéaires ou logarithmiques 2D et 3D, des diagrammes de dispersion, des bulles, de fonctions et de diagrammes à barres. Il permet aussi de créer des courbes polaires de ligne, de barre et de fonction. Egalement des diagrammes ternaires de lignes, de nuages de points ou de bulles. Grapher permet d'afficher les données dans plusieurs types de graphiques spécialisés, des informations statistiques avec des histogrammes, des diagrammes à secteurs...

A.5 Gnuplot

Gnuplot est un logiciel qui sert à produire des représentations graphiques en deux ou trois dimensions de fonctions numériques ou de données. Le programme fonctionne sur de nombreux ordinateurs et systèmes d'exploitation (Linux, Windows, OS/2, VMS...) et peut envoyer les graphiques à l'écran ou dans des fichiers dans de nombreux formats.

A.6 Lyx

LyX est un logiciel libre WYSIWYM sous licence GNU GPL pour la création de documents \LaTeX . À la différence des traitements de texte courants, LyX n'est pas tout à fait WYSIWYG. Le résultat de l'impression d'un document n'est pas identique à ce qui est affiché à l'écran. Le logiciel Lyx a été conçu pour que l'utilisateur n'ait pas à sa charge la mise en page, et qu'il puisse se concentrer sur le contenu du texte et sur la structure du document. Les concepteurs de LyX ont développé le logiciel afin qu'il obéisse à la règle WYSIWYM selon laquelle ce que vous voyez (à l'écran) est ce que vous voulez dire.

Annexe B

Tableaux des maillages (H)

Les tableaux suivants récapitulent les résultats des différents maillages effectués dans la section 3.2.3.

Fraction volumique P	Nombre d'éléments
10%	106475
20%	79936
30%	66231
40%	58229
50%	57035

Fraction volumique P	Nombre d'éléments
10%	89132
20%	66451
30%	59699
40%	56229
50%	56817

Fraction volumique P	Nombre d'éléments
10%	96029
20%	72428
30%	47495
40%	49502
50%	51782

Fraction volumique P	Nombre d'éléments
10%	50311
20%	48841
30%	48579
40%	51513
50%	52029

TABLE B.1 – Maillages des microstructures aux rapports de forme $r = 0.3$, $r = 0.4$, $r = 0.5$ et $r = 1.0$ respectivement

Annexe C

Gasar

Gasar est une technique de fabrication des matériaux poreux de type Lotus qui consiste à une solidification unidirectionnelle de l'hydrogène, de l'azote ou de l'oxygène sous pression. Ces matériaux sont caractérisés par de longs pores cylindriques orientés dans une direction.

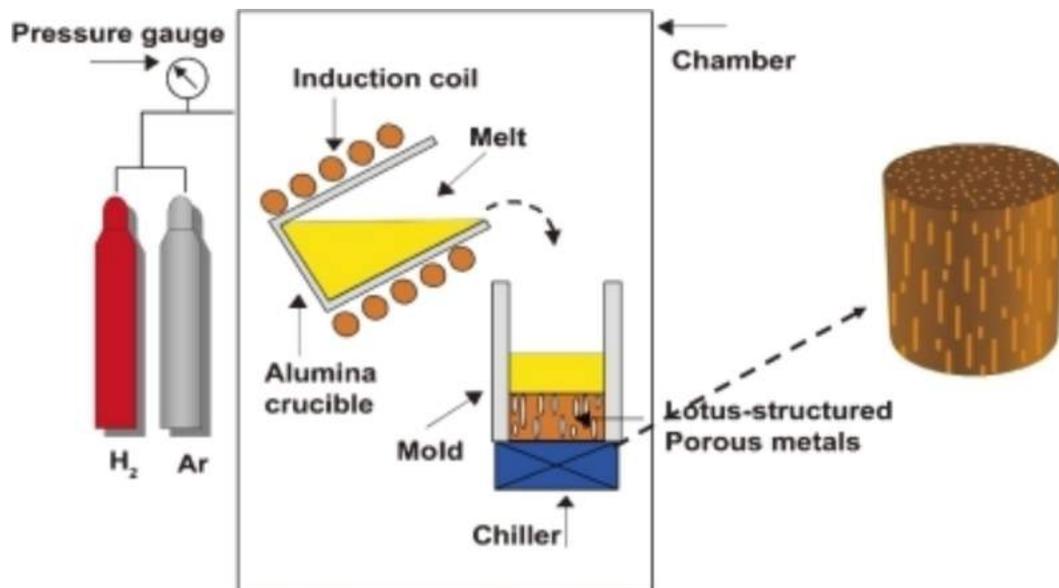


FIGURE C.1 – Gasar : technique de fabrication des matériaux poreux de type Lotus

Bibliographie

- [Aboudi, 1991] Aboudi, J. (1991). A unified micromechanical approach. *Mechanics of Composite Materials*. Elsevier.
- [Benhizia et al., 2014] Benhizia, A., Outtas, T., Kanit, T., and Imad, A. (2014). Computation of effective behavior of isotropic transverse composite in nonlinear problems. *Mechanics Research Communications*.
- [Benhizia et al., 2017] Benhizia, A., Outtas, T., Kanit, T., and Imad, A. (2017). Optimal design and nonlinear computation of mechanical behavior of sphere reinforced composites. *Composites Part B : Engineering*, 126(Supplement C) :38 – 48.
- [Bensoussan and Papanicolaou, 1978a] Bensoussan, A. Lions, J. L. and Papanicolaou, G. (1978a). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*.
- [Bensoussan and Papanicolaou, 1978b] Bensoussan, A. Lions, J. L. and Papanicolaou, G. (1978b). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*.
- [Benveniste, 1987] Benveniste, Y. A. (1987). New approach to the application of mori-tanaka’s theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6 :147–157.
- [Beran, 1968a] Beran, M. J. (1968a). *Statistical Continuum Theories*. J. Wiley, New York.
- [Beran, 1968b] Beran, M. J. (1968b). *Statistical Continuum Theories*. J. Wiley, New York.
- [Berveiller and Zaoui, 1979] Berveiller, M. and Zaoui, A. (1979). An extension of the self consistent scheme to plasticity-flowing polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 26 :325–344.
- [Boccaccini et al., 1996] Boccaccini, A., Ondracek, G., and Mombello, E. (1996). Determination of stress concentration factors in porous materials. *Journal of Materials Science Letters*.
- [Bojko et al., 1991] Bojko, L., Shapovalov, V., Chernykh, E., Belyj, I., Rastorgueva, I., Martynov, V., and Dolzhenkov, V. (1991). Properties of porous anisotropic materials on the base of nickel. *Poroshkovaya Metallurgiya*.
- [Bornert et al., 2001] Bornert, M., Bretheau, T., and Gilormini, P. (2001). *Homogénéisation en mécanique des matériaux 2-Comportements non linéaires et problèmes ouverts*.

- [Bornert M. and P., 2010] Bornert M., B. T. and P., G. (2010). Homogénéisation en mécanique des matériaux 1. *Série : Alliages Métalliques, Hermes Science Publications, ISBN : 2-7462-0199-2.*
- [Budiansky, 1965] Budiansky, B. (1965). On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *J. Mech. Phys. Solids.*, 13 :223–227.
- [Burteau et al., 2007] Burteau, A., Bartout, J.-D., NGuyen, F., Forest, S., Bienvenu, Y., and Naumann, D. (2007). *Investigation of representative volume element size for the mechanical properties of open-cell nickel foams.* National Research Council of Canada.
- [Cailletaud and Pilvin, 1994] Cailletaud, G. and Pilvin, P. (1994). Utilisation de modèles polycristallins pour le calcul par éléments finis. In *Revue Européenne des Éléments Finis 3.*
- [Castaneda, 1989] Castaneda, P. P. (1989). The overall constitutive behaviour of nonlinear elastic composites. *Proc. R. Soc. Lond.*, pages, A422 :147–171.
- [Castaneda, 1992] Castaneda, P. P. (1992). A new variational principle and its application to nonlinear heterogeneous systems. *SIAM J. appl. Math.*
- [Castaneda, 2002] Castaneda, P. P. (2002). Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.*
- [Chaboche and Suquet, 1998] Chaboche, J. L. and Suquet, P. (1998). Endommagement, interfaces. école d’été méthode d’homogénéisation en mécanique des matériaux. Technical report, La Londe-les-Maures.
- [Christensen and Lo, 1979] Christensen, R. M. and Lo, K. H. (1979). Solutions for effective shear properties of three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids*, 27 :315–330.
- [Danas and Aravas, 2012] Danas, K. and Aravas, N. (2012). Numerical modeling of elastoplastic porous materials with void shape effects at finite deformations. *Composites Part B : Engineering*, 43(6) :2544 – 2559. Homogenization and Micromechanics of Smart and Multifunctional Materials.
- [Dirrenberger, 2012] Dirrenberger, J. (2012). Propriétés effectives de matériaux architecturés. *Thèse de doctorat de l’École Nationale Supérieure des Mines de Paris.*
- [Djebara et al., 2016] Djebara, Y., Moumen, A. E., Kanit, T., Madani, S., and Imad, A. (2016). Modeling of the effect of particles size, particles distribution and particles number on mechanical properties of polymer-clay nano-composites : Numerical homogenization versus experimental results. *Composites Part B : Engineering*, 86(Supplement C) :135 – 142.

- [Drugan and Willis, 1996] Drugan, W. J. and Willis, J. R. (1996). A micromechanics-based nonlocal constitutive equations and estimates of representative volume element size for elastic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 44 :497–524.
- [Dvorak, 1992] Dvorak, G. (1992). Transformation fields analysis of inelastic composite materials. In *Proceeding of the Royal Society A* 437.
- [Einstein, 1906] Einstein, A. (1906). Eine neue bestimmung der molekuldimensionen. *Annalen der Physik*, 324 n 2 :289–306.
- [Einstein, 1911] Einstein, A. (1911). Berichtigung zu meiner arbeit : "eine neue bestimmung der molekuldimensionen". *Annalen der Physik*, 339 n 3 :591–592.
- [El moumen, 2014] El moumen, A. (2014). *Prévision du comportement des matériaux hétérogènes basée sur l'homogénéisation numérique : modélisation, visualisation et étude morphologique*. PhD thesis, Université Lille 1.
- [El Moumen et al., 2013] El Moumen, A., Kanit, T., Imad, A., and EL-Minor, H. (2013). Effect of overlapping inclusions on effective elastic properties of composites. *Mechanics Research Communications*.
- [El Moumen et al., 2014] El Moumen, A., Kanit, T., Imad, A., and EL Minor, H. (2014). A multiscale approach and microstructure design of the elastic composite behavior reinforced with natural particles. *Composites Part B : Engineering*.
- [El Moumen et al., 2015] El Moumen, A., Kanit, T., Imad, A., and El-Minor, H. (2015). Computational thermal conductivity in porous materials using homogenization techniques : Numerical and statistical approaches. *Computational Materials Science*.
- [El-Moumen et al., 2015] El-Moumen, A., Kanit, T., Imad, A., and Minor, H. E. (2015). Computational thermal conductivity in porous materials using homogenization techniques : Numerical and statistical approaches. *Computational Materials Science*, 97(Supplement C) :148 – 158.
- [Eshelby, 1957] Eshelby, J. D., editor (1957). *The determination of elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems*. *Proceeding of Royal Society A* 421.
- [Evesque, 2000] Evesque, P. (2000). Fluctuation, correlation and representative element volume (rve) in granular materials. *Poudre and grains*.
- [Feyel and Chaboche, 2000] Feyel, F. and Chaboche, J. (2000). Fe² multiscale approach for modeling the elastoviscoplastic behavior of long fibre sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183 :309–330.
- [Fritzen et al., 2012] Fritzen, F., Forest, S., BÄ¶hlke, T., Kondo, D., and Kanit, T. (2012). Computational homogenization of elasto-plastic porous metals. *International Journal of Plasticity*, 29(Supplement C) :102 – 119.

- [Gitman et al., 2007] Gitman, I., Askes, H., and Sluys, L. (2007). Representative volume : existence and size determination. *Engineering fracture mechanics*.
- [Gusev, 1997] Gusev, A. (1997). Representative volume element size for elastic composites : a numerical study. *J. Mech. Phys. Solids*, 45 :1449–1459.
- [Guth and Gold, 1938] Guth, E. and Gold (1938). On the hydrodynamical theory of the viscosity of suspensions. *Phys. Rev.*, 53 :322.
- [Hashin and Shtrikman, 1962] Hashin, Z. and Shtrikman, S. (1962). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10 :343–352.
- [Hashin and Shtrikman, 1963] Hashin, Z. and Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2) :127 – 140.
- [Hazanov and Huet, 1994] Hazanov, S. and Huet, C. (1994). Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume. *J. Mech. Phys. Solids*, 42 :1995–2011.
- [Herve and Zaoui, 1995] Herve, E. and Zaoui, A. (1995). Elastic behaviour of multiply coated fibre-reinforced composites. *International Journal of Engineering Sciences*, 33 :1419–1433.
- [Hill, 965a] Hill, R. (1965a). A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13 :213–222.
- [Hill, 965b] Hill, R. (1965b). Continuum micromechanics of elastoplastic polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*.
- [Hoang, 2015] Hoang, T. (2015). *Approches d’homogénéisation numériques incrémentales pour le calcul des structures hétérogènes élasto-plastiques et élasto-visco-plastiques*. PhD thesis, Université Paris-Est.
- [Hohe and Hardenacke, 2012] Hohe, J. and Hardenacke, V. (2012). Analysis of uncertainty effects due to microstructural disorder in cellular or porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 49(7) :1009 – 1021.
- [Hu., 1996] Hu., G. (1996). A method of plasticity for general aligned spheroidal void or fiber-reinforced composites. *Int. J. Plasticity*.
- [Huet, 1991] Huet, C. (1991). Hierarchies and bounds for size effects in heterogeneous bodies. In *Proc. Sixth Symposium on Continuum mechanics and Discrete Systems, Dijon, 1989* (ed. G.Maugin). vol. 2 pp 127-134.
- [Hutchinson, 1976] Hutchinson, J. (1976). Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. In *Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials*.

- [Hyun et al., 2004] Hyun, S., Ikeda, T., and Nakajima, H. (2004). Fabrication of lotus-type porous iron and its mechanical properties. *Science and Technology of Advanced Materials*.
- [Hyun et al., 2001] Hyun, S., Murakami, K., and Nakajima, H. (2001). Anisotropic mechanical properties of porous copper fabricated by unidirectional solidification. *Materials Science and Engineering : A*, 299(1) :241 – 248.
- [Hyun et al., 1999] Hyun, S., Shiota, Y., Murakami, K., and Nakajima, H. (1999). Mechanical properties of porous copper fabricated by unidirectional solidification under high pressure hydrogen.
- [Imabayashi et al., 1983] Imabayashi, M., Ichimura, M., and Kanno, Y. (1983). Hydrogen in pure aluminum solidified unidirectional. *Transactions of the Japan Institute of Metals*.
- [Kaddouri et al., 2016] Kaddouri, W., El Mouden, A., Kanit, T., Madani, S., and Imad, A. (2016). On the effect of inclusion shape on effective thermal conductivity of heterogeneous materials. *Mechanics of Materials*.
- [Kanit et al., 2006] Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V., and Jeulin, D. (2006). Apparent and effective physical properties of heterogeneous materials : Representativity of samples of two materials from food industry. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, (195) :3960–3982.
- [Kanit et al., 2003a] Kanit, T., Forest, S., Mounoury, V., and D., J. (2003a). Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *Int. Journal of Solids and Structures*,, 40 :3647–3679.
- [Kanit et al., 2003b] Kanit, T., Forest, S., Mounoury, V., and Jeulin, D. (2003b). Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *Int. Journal of Solids and Structures*,, 40 :3647–3679.
- [Kari et al., 2008] Kari, S., Berger, H., Gabbert, U., Guinovart-Diaz, R., Bravo-Castillero, J., and Rodriguez-Ramos, R. (2008). Evaluation of influence of interphase material parameter on effective material properties of three phase composites. *Composites Science and Technology*.
- [Kari et al., 2007] Kari, S., Berger, H., Rodriguez-Ramos, R., and U., G. (2007). Computational evaluation of effective material properties of composites reinforced by randomly distributed spherical particules. *Composite Structures*, 77 :pages 223–231.
- [Kee et al., 1998] Kee, A., Matic, P., and Everett, R. K. (1998). A mesoscale computer simulation of multiaxial yield in gasar porous copper. *Materials Science and Engineering : A*, 249(1) :30 – 39.
- [Khdir et al., 2015] Khdir, Y., Kanit, T., Zaïri, F., and Naït-Abdelaziz, M. (2015). A computational homogenization of random porous media. effect of void shape and void content on

- the overall yield surface. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 49(Supplement C) :137 – 145.
- [Khdir et al., 2013] Khdir, Y.-K., Kanit, T., Zaïri, F., and Naït-Abdelaziz, M. (2013). Computational homogenization of elastic-plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 50(18) :2829 – 2835.
- [Knacke et al., 1979] Knacke, O., Probst, H., and Wernekinck, J. (1979). *Z Metallkde*, 70 :1–6.
- [Kovacic, 1998] Kovacic, J. (1998). The tensile behaviour of porous metals made by gasar process. *Acta Materialia*, 46(15) :5413 – 5422.
- [Kröner, 1961] Kröner, E. (1961). Zur plastischen verformung des vielkristalls (for the plastic deformation of the polycrystal). *Acta metallurgica*.
- [Kujime et al., 2007] Kujime, T., Tane, M., Hyun, S., and Nakajima, H. (2007). Three-dimensional image-based modeling of lotus-type porous carbon steel and simulation of its mechanical behavior by finite element method. *Materials Science and Engineering A*, 460-461(Supplement C) :220 – 226.
- [Lachihab and Sab, 2008] Lachihab, A. and Sab, K. (2008). Does a representative volume element exists for fatigue life prediction? the case of aggregate composites. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32, issue 9 :1005–1021.
- [Lahellec and Suquet, 2013] Lahellec, N. and Suquet, P. (2013). Effective response and field statistics in elastoplastic and elasto-viscoplastic composites under radial and non-radial loadings. *International Journal of Plasticity*.
- [Lippmann et al., 1997] Lippmann, N., Steinkopff, T., Schmauder, S., and Gumbsch, P. (1997). 3d finite element modelling of microstructures with the method of multiphase elements. *Computational Materials Science*.
- [Madi et al., 2007] Madi, K., Forest, S., Boussuge, M., Gailliègue, S., Lataste, E., Buffière, J.-Y., Bernard, D., and Jeulin, D. (2007). Finite element simulations of the deformation of fused-cast refractories based on x-rau computed tomography. *Computational Materials Science*, 39 :224–229.
- [Masmoudi, 1997] Masmoudi, M. (1997). *Analyse Elasto plastique par modélisation multicouche des éléments finis poutres de Timoshenko*. PhD thesis, Université de Batna.
- [Masson et al., 2000] Masson, R., Bornert, M., Suquet, P., and Zaoui, A. (2000). An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*.
- [Mbiakop et al., 2015] Mbiakop, A., Constantinescu, A., and Danas, K. (2015). On void shape effects of periodic elasto-plastic materials subjected to cyclic loading. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 49(Supplement C) :481 – 499.

- [Milton and Serkov, 2000] Milton, G. and Serkov, S. (2000). Bounding the current in nonlinear conducting composites. *J. Mech. Phys. Solids*.
- [Minshnaevsky, 2004] Minshnaevsky, J. L. (2004). Three dimensional numerical testing of microstructures of particle reinforced composites. *Acta*.
- [Molinari et al., 1987] Molinari, A., Canova, G., and Ahzi, S. (1987). A self consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity. *Acta Metallurgica*.
- [Mori and Tanaka, 1973a] Mori, T. and Tanaka, K. (1973a). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5) :571 – 574.
- [Mori and Tanaka, 1973b] Mori, T. and Tanaka, K. (1973b). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with missfitting inclusions. *Actal. Metal.*, 21 :571–574.
- [Nakajima, 2007] Nakajima, H. (2007). Fabrication, properties and application of porous metals with directional pores. *Progress in Materials Science*, 52(7) :1091 – 1173.
- [Nakajima, 2010] Nakajima, H. (2010). Fabrication, properties, and applications of porous metals with directional pores. *Proc. Jpn. Acad., Ser. B*, 86 :884–899.
- [Nakajima., 2013] Nakajima., H. (2013). *Porous Metals with Directional Pores*. Springer.
- [Nakajima et al., 2001] Nakajima, H., Hyun, S., Ohashi, K., Ota, K., and Murakami, K. (2001). Colloids surf a :. *Physicochem Eng Aspects*, 197 :209–214.
- [Nemat-Nasser and Hori, 2013] Nemat-Nasser, S. and Hori, M. (2013). *Micromechanics : Overall Properties of Heterogenous Materials*. Elsevier.
- [Nezamabadi, 2009] Nezamabadi, S. (2009). *Méthode Asymptotique Numérique pour l'étude multi échelle des instabilités dans les matériaux hétérogènes*. PhD thesis, Université Paul Verlaine, Metz.
- [Ortolano et al., 2013] Ortolano, J. M., Hernández, J., and Oliver, J. (2013). A comparative study on homogenization strategies for multi-scale analysis of materials. Technical report, International Center for Numerical Methods in Engineering Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, Spain.
- [Ostoja-Starzewski, 1993] Ostoja-Starzewski, M. (1993). Micromechanics as basis of random elastic continuum approximations. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 8 :107–114.
- [Ostoja-Starzewski, 1998] Ostoja-Starzewski, M. (1998). Random field models of heterogeneous materials. *Int. J. Solids Structures*, 35 :2429–2455.
- [Paola, 2010] Paola, F. D. (2010). *Modélisation multi-échelles du comportement thermo-élastique de composites \tilde{A} particules sphériques*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris.

- [Park et al., 2006] Park, J.-S., Hyun, S.-K., Sueno, H., Tane, M., Nakajima, H., Um, Y.-S., Hur, B.-Y., and Ono, F. (2006). Effect of pore morphology on compressive yield strength of lotus-type porous copper with various specimen sizes. *MATERIALS TRANSACTIONS*.
- [Pastor and Castaneda, 2002] Pastor, J. and Castaneda, P. P. (2002). Yield criteria for porous media in plane strain : second-order estimates versus numerical results. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(11) :741 – 747.
- [Pilvin, 1997] Pilvin, P. (1997). Une approche inverse pour l'identification d'un modèle polycristallin élastoviscoplastique. In *Presses Académiques de l'Ouest*.
- [Ponte Castaneda and Zaidman, 1994] Ponte Castaneda, P. and Zaidman, M. (1994). Constitutive models for porous materials with evolving microstructure. *J Mech Phys Solids*.
- [Qi, 2006] Qi, B. (2006). Simulation numérique du comportement mécanique de composites à particules. rapport de stage de master 2,. *Ecole Centrale Paris*.
- [Qiu and Weng, 1991] Qiu, Y. and Weng, G. (1991). The influence of inclusion shape on the overall elastoplastic behavior of a two-phase isotropic composite. *International Journal of Solids and Structures*, 27(12) :1537 – 1550.
- [Qiu and Weng, 1992] Qiu, Y. and Weng, G. (1992). A theory of plasticity for porous materials and particle-reinforced composites. *Int. J. Plasticity*.
- [Qiu and Weng, 1993] Qiu, Y. and Weng, G. (1993). Plastic potential and yield function of porous materials with aligned and randomly oriented spheroidal voids. *International Journal of Plasticity*, 9(3) :271 – 290.
- [Reuss, 1929] Reuss, A. (1929). Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. *Z. Angew. Math. Mech.*, 9 :49–59.
- [Roussette, 2005] Roussette, S. (2005). *Analyse par champs de transformation de matériaux élastoviscoplastiques multiphases - application aux combustibles mox*. PhD thesis, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II.
- [Sab, 1992a] Sab, K. (1992a). On the homogenization and the simulation of random materials. *Eur. J. Mech. Solids*, 11 :585–607.
- [Sab, 1992b] Sab, K. (1992b). On the homogenization and the simulation of random materials. *Eur. J. Mech. Solids*, 11 :585–607.
- [Sab, 2005] Sab, K. (2005). Periodization of random media and representative volume element size for linear composites. *Compte Rendu de Mecanique* 333, 187-195.
- [Sanchez-Palencia, 1974a] Sanchez-Palencia, E. (1974a). Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *Int. J. Engrg. Sci.*, 12 :331–351.

- [Sanchez-Palencia, 1974b] Sanchez-Palencia, E. (1974b). Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *Int. J. Engrg. Sci.*, 12 :331–351.
- [Segurado et al., 2003] Segurado, J., Gonzalez, C., and Llorca, J. (2003). A numerical investigation of the effect of particle clustering on the mechanical properties of composites. *Acta*.
- [Segurado and Llorca, 2002] Segurado, J. and Llorca, J. (2002). A numerical approximation to the elastic properties of shere-reinforced composites. *J. Mech. Phys. Solids*.
- [Segurado and Llorca, 2006] Segurado, J. and Llorca, J. (2006). Computational moicromechanics of composites : The effect of particle spatial distribution. *Mechanics of materials*.
- [Seki and Tane, 2007] Seki, H. and Tane, M. and Nakajima, H. (2007). Effects of pore size distribution and loading direction on fatigue property of lotus type porous copper. *In : Met Foam*.
- [Shapovalov, 1994] Shapovalov, V. (1994). Mrs bull xix. pages 24–28.
- [Shen et al., 2015] Shen, W., Shao, J., Kondo, D., and Saxcé, G. D. (2015). A new macroscopic criterion of porous materials with a mises-schleicher compressible matrix. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 49(Supplement C) :531 – 538.
- [Simone and Gibson, 1996] Simone, A. and Gibson, L. (1996). The tensile strength of porous copper made by the gasar process. *Acta Materialia*, 44(4) :1437 – 1447.
- [Smallwood, 1944] Smallwood, H. (1944). Limiting law of the reinforcement of rubber. *J. Appl. Phys*, 15 :758–766.
- [Sueno et al., 2006] Sueno, H., Tane, M., Park, J.-S., Hyun, S.-K., and Nakajima, H. (2006). Size effects on tensile strength of lotus-type porous copper. *MATERIALS TRANSACTIONS*.
- [Svensson and Fredriksson, 1983] Svensson, I. and Fredriksson, H. (1983). Effect of hydrogen and nitrogen on formation of pores in iron. *Solidification technology on the foundry and cast house*.
- [Tane et al., 2007] Tane, M., Ichitsubo, T., Hirao, M., and Nakajima, H. (2007). Extended mean-field method for predicting yield behaviors of porous materials. *Mechanics of Materials*, 39(1) :53 – 63.
- [Terada et al., 1998] Terada, K., Ito, T., and Kikuchi, N. (1998). Characterisation of the mechanical behaviors of solid-fluid mixture by the homogenization method. *Comput. Methods Appl. Engng.*, 153 :223–257.
- [Torquato, 2001] Torquato, S. (2001). Random heterogeneous materials : Microstructure and macroscopic properties. Technical report, Springer.

- [Voigt, 1889] Voigt, W. (1889). Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitatsconstanten isotroper korper. *Annalen der Physik und Chemie*, 38 :573–587.
- [Wang and Pan, 2008] Wang, M. and Pan, N. (2008). Modeling and prediction of the effective thermal conductivity of random open-cell porous foams. *Int. Journ. Heat. Mass .Transf.*
- [Willis, 1983] Willis, J. (1983). The overall response of composite materials. *ASME J. Appl. Mech.*
- [Willis, 1994] Willis, J. (1994). Upper and lower bounds for non-linear composite behaviour. *Materials Science and Engineering*.
- [Xu et al., 2015] Xu, Z., Fan, X., Zhang, W., and Wang, T. (2015). Numerical analysis of anisotropic elastoplastic deformation of porous materials with arbitrarily shaped pores. *International Journal of Mechanical Sciences*.
- [Zaoui and Masson, 2000] Zaoui, A. and Masson, R. (2000). Micromechanics-based modeling of plastic polycrystals : an affine formulation. *Materials Science and Engineering*.
- [Zeman and Sejnoha, 2001] Zeman, J. and Sejnoha, M. (2001). Numerical evaluation of effective elastic properties of graphit fibre tow impregnated by polymer matrix. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49 :69–90.
- [Zimmerman, 1996] Zimmerman, R. (1996). Effective conductivity of a two dimensional medium containing elliptical inhomogeneities. *Mathematical, physical and engineering sciences*.

ملخص

تم استخدام تقنية التجانس العددي والتحليل المورفولوجي على أساس طريقة العناصر المحدودة لحساب الخصائص الميكانيكية للمواد المسامية المسماة اللوتس. ويتم ذلك باعتبار مصفوفة مسامية 2 D تحتوي على توزيع عشوائي من فراغات دائرية أو إهليلجية متطابقة دون التماس. يتم الحصول على عدة تركيبات مجهرية عن طريق تغيير نسبة الفراغ وشكل الفراغات. تم إنشاء الصور الافتراضية لهذه التركيبات المجهرية وتم إجراء سلسلة من المحاكاة لتحديد حجم العنصر التمثيلي V.E.R. وحجم الشبكة المناسبة، والتي سيتم استخدامها في الحسابات لتقدير تأثير شكل الفراغ على السلوك الإلاستوبلاستيكي لهذه التركيبة المجهرية. تم دراسة اثنتين من الخصائص الميكانيكية، قوة الشد القصوى والمعامل المماس البلاستيكي. أظهرت النتائج وجود تأثير شكل الفراغات على الخاصيتين الميكانيكيتين المدروستين. وقد أجريت مقارنة النتائج العددية التي تم الحصول عليها مع نموذج تحليلي ونتائج تجريبية وجدت في مراجع وقد لوحظ التوافق الجيد.

Résumé

Une technique d'homogénéisation numérique et une analyse morphologique basée sur la méthode des éléments finis sont utilisées pour calculer les propriétés mécaniques des matériaux poreux de type lotus. Ceci est réalisé en considérant une matrice poreuse 2D contenant une distribution aléatoire de vides circulaires ou elliptiques identiques sans percolation. Plusieurs configurations de microstructures sont obtenues en faisant varier la morphologie des vides et la porosité de la matrice. Des images virtuelles de ces microstructures ont été générées et une série de simulations ont été effectuées pour déterminer le volume élémentaire représentatif V.E.R. optimal ainsi que le maillage adéquat et qui serviront dans les calculs afin d'estimer l'effet de la morphologie des vides sur le comportement élastoplastique de ces microstructures. Deux propriétés mécaniques sont étudiées, la résistance maximale à la traction et le module tangent plastique. Les résultats ont montré que l'effet de la morphologie sur les deux propriétés étudiées est notable. Une confrontation des résultats numériques obtenus, pour des microstructures représentatives avec différentes morphologies de vides et différentes porosités, à un modèle analytique et à des données expérimentales trouvés dans la littérature est réalisée et une bonne concordance a été constatée.

Abstract

A numerical homogenization technique and morphological analysis based on the finite element method are used to calculate the mechanical properties of porous lotus materials. This is achieved by considering two-dimensional porous matrix containing random distribution of identical non-overlapping circular or elliptic voids. Several microstructure configurations are obtained by varying the voids morphology and the porosity of the matrix. Virtual images of these microstructures were generated and a serie of simulations were performed to determine the representative volume element R.V.E. and the appropriate mesh size that will be used in the calculations to estimate the effect of void morphology on the elastoplastic behavior of these microstructures. Two mechanical properties are studied, the Ultimate Tensile Strength (UTS) and the Plastic Tangent Modulus (PTM). The results showed that the effect of morphology on the two properties studied is notable. A comparison of the obtained numerical results, of representative microstructures for different void morphologies and different porosities, with an analytical model and experimental data found in the literature is carried out and good agreement was found.