RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Batna 2 -Mustapha Ben Boulaid -Batna -

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

SPÉCIALIÉ :MATHÉMATIQUES
Option :Mathématiques Appliquées

Thème

Contrôle optimal de systèmes hyperboliques en milieu pollué : Application des méthodes de sentinelle et de contrôle à moindres regrets

Présenté par : **Merabet Abderrahmane**

Mr. S.E.Rebiai	Professeur	Université de Batna 2	Président
Mr. A.Ayadi	Professeur	Université d'Oum-El-Bouaghi	Rapporteur
Mr. A.Omrane	Professeur	Université de Guyane (France)	Examinateur
Mr. R.Benaceur	Professeur	Université de Batna 2	Examinateur
Mr. M.Deneche	Professeur	Université de Constantine1	Examinateur
Mr. M.Dalah	Professeur	Université de Constantine1	Examinateur

14 décembre 2017

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

J'exprime toute ma profonde reconnaissance à Monsieur Ayadi Abelhamid Professeur à l'Université d'Oum-El-Bouaghi , directeur de thèse , qui s'est toujours montré à l'écoute et trés disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu' il a bien voulu me consacrer et sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour. .

J'adresse les plus sincères remerciements à Monsieur Abdennebi Omrane professeur à l'université de Guyane (France), pour sa grande contribution et son apport considérable.Sans lui ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port.

Je tiens à remercier chaleureusement Monsieur Salah-Eddine Rebiai ,Professeur à l'université de Batna 2 qui m'a fait l'honneur et le plaisir d'accepter la présidence du jury.

Je remercie vivement Monsieurs Rachid Benacer Professeur à l'université de Batna 2 Deneche Mohamed , professeur à l'université de Constantine1, et Dalah Mohamed professeur à l'université de Constantine 1 ,Abdennebi Omrane professeur à l'université de Guyane (France), membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner cette thèse .
Il me serait difficile de ne pas associer à ces remerciements , l'ensemble des collègues et amis pour leur soutien et, à travers eux, toutes les personnes ayant contribuè de prés ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Également mes remerciements vont à mes parents, ma famille , et tous mes enseignants que j'adresse ma profonde reconaissance pour le soutien constant qu'ils m'ont apporté durant touts mes années d'études.

Enfin, un trés grand MERCI à ma femme pour son soutien, ses encouragements et sa patience tout au long de ces années de travail , ainsi qu'à mes enfants :Massinissa, Islam , Sohaib et Rayane, qui sont ma source d'inspiration et mon plus grand soutien.

■

Table des matières

Introduction

Il est connu que l'étude des équations aux dérivées partielles (EDP) hyperboliques est un sujet historiquement important dont les premièrs pas remontent à d'Alembert avec l'équation des ondes et et á Euler, avec les équations du même nom décrivant l'évolution d'un fluide.Elles trouvent leurs domaines d'application en physique : l'éléctromagnétisme la mécanique du solide et des fluides bien sûr,mais aussi en biologie, en chimie,...

Nombreux , donc sont les phénomènes naturels notamment de propagation qui sont modélisés et gouvernés par des équations hyperboliques.

Dans la première partie de ce mémoire on s'intéresse à l'étude du contrôle optimal à des équations hyperboliques du second ordre type équations des ondes. Il est connu dans la littérature mathématique (voir [11]) que la théorie de contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés (systèmes dynamiques) sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle).Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final en respectant éventuellement certains critères.Les systèmes sont multiples ,differentiels , discrets...Leurs origines sont trés diverses :la mécanique , l'électricité , électronique , biologie , chimie.. L'objectif peut être de stabiliser le système pour rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation) , ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal). Ainsi les domaines d'application sont multiples : aéronautique , internet et les communications en général.

Dans cette optique des choses , nous avons rappelé les résultats du contrôle optimal pour l'équation d'évolution du second ordre tout en se basant sur les résultats de minimisation de fonctionnelle , outil important dans l'étude du contrôle optimal (voir Lions [27] , [28] , [31] , [19] , [36] ainsi que pour le cadre fonctionnel de l'équation d'évolution du second ordre et le théorème d'existence et d'unicité (voir [32] , [22], [11] , [14]).

Dans le même ordre d'idées nous avons traité le cas du contrôle à moindres regrets (ou de Pareto) , notion introduite par J.-L. Lions vers 1990, pour les problèmes à données manquantes qui trouve son application dans les questions relatives à l'écologie , à l'environnement et au climat.

La notion du contrôle sans regrets , et le contrôle à moindres regrets aux problèmes à données incomplètes pour différentes applications , ont été mentionnés dans les travaux de Lions (voir [32] ,[23] ,[24], [19]...). Ce concept a été par la suite développé par A.Omrane , O.Nakoulima et J.Velin (voir [15] , [18] , [3] , [4] , [9] , [12] , [13] , [17] et [10]).

Pour notre part on donne une caractérisation du contrôle sans regrets pour les problèmes à données manquantes pour les systèmes hyperboliques en développant les différents cas d'observations .

Dans la seconde partie on s'intérèsse aux problèmes d'identification qui consistent à retrouver les causes d'un phénomène à partir d'une observation de celui-ci en s'articulant sur la théorie de la sentinelle .

Rappelons que parmi les méthodes utilisées auparavant est la méthode dite Méthode des moindres carrés où la résolution de ce type de problème se fait à l'aide d'une mesure expérimentale et d'un modèle censé reproduire le phénomène physique et permettant d'associer des observations à des causes. Ensuite, la stratégie la plus répandue consiste à rechercher des causes telles que les observations, calculèes grâce au modèle, soient les plus proches (au sens d'une distance quadratique) de celles que l'on a mesurées. Cette méthode a fait l'objet de nombreuses variantes.

A la fin des années 80, J.L. Lions propose une nouvelle méthode, appelée méthode des sentinelles, qui permet d'obtenir des informations sur les causes à partir d'une moyenne pondérée de l'observation.

Cette méthode intervient essentiellement dans presque tous les problèmes de météorologie,ou d'océanographie où les conditions initiales ne sont pas complètement connues,même chose pour des problèmes de pollution dans un lac,une rivière,un estuaire. Les conditions aux limites peuvent aussi être inconnues ,ou seulement partiellement connues sur une partie de la frontière , qui peuvent par exemple être inaccéssibles aux mesures, qu'il s'agisse de situations bio-médicales ou de situations correspondant à des accidents .Il en va de même les termes sources qui peuvent être d'accés difficile.

Grâce à cette théorie , nombreux problèmes évoqués ci-dessus ont été l'objet d 'études et ont donné lieu à beaucoup de dévéloppements.

L'objectif de la thèse :

L'objectif de ce mémoire s'articule sur la détermination du contrôle optimal de systèmes hyperboliques en milieu polué par l'application :

1. **Méthode de contôle à moindres regrets :**

   Nombreux sont les systèmes stationnaires ou d'évolution du premier degré qui ont fait l'objet d'étude par cette méthode. En ce qui nous concerne nous avons appliqué cette méthode à des systèmes hyperboliques du second ordre notamment de type équations des ondes.Nous sommes arrivés à déterminer le contrôle optimal et les systèmes d'optimalité singuliers , en développant plusieurs cas d'obsevations relativement à plusieurs exemples de fonctions coûts.

   Pour rappel , le contrôle , paramètre des systèmes distribués gouvernés par des équations hyperboliques revêt une importance particulière pour les problèmes de traitement d'images , généralement exprimés par la résolution de l'équation des ondes.

L'ultilisation de cette équation peut cependant laisser un écart entre les solutions théoriques et expérémentales , alors l'utilisation d'un contrôle optimal permet de combler cet écart , car il permet d'optimiser la distance entre les deux solutions (voir [6] et les références dans celles-ci).

2. **Méthode de la sentinelle :**

Pour notre part, nous avons appliqué la méthode de la sentinelle au système hyperbolique , plus particulièrement à l'équation des ondes.

La nouveauté dans ce travail c'est que nous avons développé la méthode de J.L. Lions (1992) tout en la généralisant pour la construction de la sentinelle des systèmes hyperboliques, en considérant deux ensembles ouverts différents , l'un pour le contrôle , l'autre pour l'observation.

L'importance des équations hyperboliques pour la méthode de la sentinelle est caractérisée par la détection des termes de bruits qui surviennent dans les problèmes de traitement d'images pour ce qui est de la télédétection, aussi bien pour les capteurs actifs (dispositif de télédétection qui utilise des sources artificielles de rayonnement -radars-) que les capteurs passifs(dispositif de télédétection qui utilise les rayonnements naturels). Comme il est bien connu, ces problèmes génèrent des ondes électromagnétiques (EM) qui sont ici modélisées par une équation d'onde non linéaire. Le rayonnement EM qui est réfléchi par différents motifs de la surface de la Terre est mesuré par des outils de télédétection. Les mesures qui consistent en l'évaluation de différentes longueurs d'ondes permettent de distinguer le type d'océan ou de couverture terrestre : l'eau, la végétation et le sol en général.

Les termes de bruit pour lesquels nous nous référons aux termes de la pollution dans notre cas sont inconnus et déterministes. Ils se trouvent dans la frontière du domaine pour les nombres d'onde élevés. Les données initiales sont également supposées inconnues, et on ne cherche pas à les trouver.

Le moyen ou l'outil principal pour détecter les termes manquants , comme nous l'avons cité supra est la méthode classique des moindres carrés , mais cette méthode détermine tous les termes manquants (les termes de bruits et les termes de données initiales manquantes). Nous utilisons ici la méthode de la sentinelle de J.L.LIONS (1992), qui permet de distinguer entre tous les termes manquants. Nous voulons ici caractériser les termes de bruits indépendamment des données initiales manquantes. Avec la méthode de la sentinelle, il y a un de gain de temps dans les calculs lorsqu' on est intéressé par des simulations.

Comme nous le voyons bien, le problème de trouver une sentinelle équivaut à un problème de contrôlabilité à zéro (voir le cas général dans le livre de Lions [28]) où le contrôle et l'observation ont leur support dans le même ensemble ouvert.

En tant qu'application immédiate, l'existence d'une sentinelle discriminante pour une équation d'onde non linéaire peut être discutée, comme nous le voyons bien dans le derniér chapitre.Enfin nous notons que le problème rétrograde apparaît sous cette forme dans la théorie de la sentinelle de Lions [28] . Nous citons les travaux d'Omrane [2] , de Miloudi et al. [10] Et [7] où est résolu le problème de contrôle avec contraintes pour l'équation de la chaleur en utilisant bien l'inégalité de Carleman bien adaptée (voir aussi Furskov et Yu Imanuvilov [21]).

Comme noté ci-dessus , nous démontrerons que le problème de la sentinelle équivaut à un problème de contrôle à zéro .Le problème général de contrôlabilité à zéro pour l'équation des ondes est bien traité , saisi et compris (voir Lions [31] et Bardos et al. [26]). En effet, en supposant la condition de contrôle géométrique (C.C.G) introduite par [8], on peut établir une estimation d'observation qui par la méthode HUM de Lions [7], mène à l'existence du contrôle v.

Plan de la thèse

On se propose d'étudier des systèmes hyperboliques du second ordre de type équations des ondes en milieu polué . Il s'agit du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y & = & f + v & \text{sur } Q. \\ y & = & g_1 & \text{sur } \Sigma. \\ y(0) & = & g_2 & \text{sur } \Omega. \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(T) & = & 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

où v est la variable de contrôle , g_1 et g_2 représentent les données manquantes : g_1 la pollution et g_2 la donnée initiale manquante.

d'où on a organisé la présentation du travail de la manière suivante :

■ **Partie I** :

On traitera le cas du contrôle à moindres regrets où l'on déterminera le contrôle optimal relativement à plusieurs exemples de fonctions coûts. et pour atteindre ce but nous avons vu qu'il utile d'introduire dans cette partie les chapitres suivants :

● **Chapitre 1 :**

Dans ce chapitre , on a donné quelques rappels et résultas de minimisation de fonctionnelles qui sont un outil mathématique essentiel pour le reste du chapitre . L'étude de l'équation d'évolution du second ordre et le théorème d'existence et unicité de la solution (cas homogène) constitue la partie fondamentale. Dans un second plan nous avons introduit la caractérisation du contrôle optimal selon certains cas d'observations distribuées. Nous avons introduit aussi un nouveau cadre fonctionnel pour l'équation d'onde (problème de Dirichlet non homogène qui diffère des cas déja étudiés , où on a soumet ce système aux différents cas d'observations découlant des différentes cas de fonctions coûts.

- **Chapitre 2 :**

La première section de ce chapitre est consacrée à la définition de la notion de contrôle sans regrets et contrôle à moindres regrets ; suivis par des applications sur un cas de problème stationnaire.

Dans la seconde section nous avons appliqué la notion de contrôle sans regrets et contrôle à moindres regrets , où on a démontré l'existence et unicité du contrôle à moindres regrets et on a ainsi déterminé le système d'optimalité singulièr .Notons que nous avons étudié différents cas d'observations.

- **Partie II :**

Cette deuxième partie est consacrée à l'application de la théorie de la sentinelle de la manière suivante :

- **Chapitre 3 :**

La première section de ce chapitre est un rappel sur les differents concepts de la théorie de la Sentinelle appliquée aux système dissipatifs, où nous avons évoqué la définition de la sentinelle , la construction de la sentinelle par l'introduction de l'état adjoint , la condition d'insensibilité, puis l'application de la méthode de pénalisation en déterminant le système d'optimalité...

Quant à le seconde section est consacrée aux systèmes hyperboliques à données incomplètes où on cherche à estimer le terme de pollution qui exerce sur le système distribué selon la méthode de Lions .

- **Chapitre 4 :**

Dans ce chapitre on applique la théorie de la sentinelle à l'équation des ondes non linéaire dont le terme pollution est sur une partie de la frontière tout en faisant l'extension de la méthode sur deux supports l'un pour l'observation et l'autre pour le contrôle.

En fait ce chapitre est la traduction d'un article écrit en collaboration avec A Omrane et A. Ayadi .

Nous avons ici caractérisé les termes de bruits indépendamment des données initiales manquantes,donc nous avons démontré l'existence du contrôle et l'observation qui ont leur supports dans deux ouverts différents.De même nous avons démontré la controlabilité à zéro sous contraintes qui corresponde à la sentinelle discriminante,ce qui constitue un nouveau problème pour les systèmes hyperboliques.

■

Première partie

Contrôle optimal de systèmes hyperboliques en milieu polué -Contrôle sans regrets,Contrôle à moindres regrets-

Chapitre 1

Contrôle optimal de l'equation hyperbolique

1 Rappels et Résultats de minimisation de fonctionnelles

Notation

Soit $\mathcal{U}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$,espace de contrôles.

- une forme bilinéaire continue sur $\mathbb{R}$, symétrique $a(u,v) = a(v,u) \ \ \forall u, v \in \mathcal{U}$.
- une forme linéaire continue sur $\mathcal{U}$: $v \longrightarrow L(v)$.
- $\mathcal{U}_{ad}$ un ensemble convexe fermé dans $\mathcal{U}$ (ensembles des contrôles admissibles)

■

1.1 Minimisation de formes coercives :Cas « a coercif » :

On considère la fonctionnelle quadratique

$$J(v) = a(v,v) - 2L(v) \tag{1.1}$$

que l'on cherche à minimiser sur $\mathcal{U}_{ad}$.

On dit que a est coercif sur $\mathcal{U}$ si

$$a(v,v) \geq c||v||^2, \quad \forall v \ \in \mathcal{U}, \quad c > 0 \tag{1.2}$$

On a alors le :

Théorème 1.1. *[38] Si a(u,v) est une forme bilinéaire continue symétrique sur $\mathcal{U}$ satisfaisant à (1.2), il existe un élément u et un seul dans $\mathcal{U}_{ad}$ tel que*

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

Remarque 1.1. *Le théorème 1.1 est vrai si l'on suppose la forme bilinéaire $a(v, v)$ définie sur $\mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{U}_{ad}$ et vérifiant (1.2) $\forall v \in \mathcal{U}_{ad}$.*

Remarque 1.2. *Soit $v \longrightarrow J(v)$ une fonction de $\mathcal{U}_{ad} \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que*

$$J(v) \longrightarrow +\infty \quad si \quad ||v|| \longrightarrow +\infty, \qquad v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{1.3}$$

$$v \longrightarrow \quad J(v) \quad est \quad s.c.i \ (semi\ continue\ inférieurement). \tag{1.4}$$

Alors il exite $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v). \tag{1.5}$$

Cette remarque s'étend même aux fonctions $v \longrightarrow J(v)$ définies sur $\mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}$ lorsque $\mathcal{U}$ est un espace de Banach reflexif.

Sous les seules hypothèses (1.3) (1.4) il n' y a plus nécessairement *unicité*, évidemment il y a *unicité* si l'on suppose que $v \longrightarrow \ J(v)$ est strictement convexe *ie* :

$$J((1-\theta)v + \theta u) < (1-\theta)J(v) + \theta J(u)$$

.

■

1.1.1 Caractérisation de l'élément réalisant le minimum :

Inégalités variationnelles

Théorème 1.2. *[38] On se place dans les hypothèses du Théorème1.1.L'élément u de $\mathcal{U}_{ad}$ réalisant le minimum est caractérisé par*

$$a(u, v-u) \geq L(v-u) \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{1.6}$$

Remarque 1.3. *Cas sans contrainte : $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{ad}$*
Si $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{ad}$, on peut prendre dans (1.6)

$$v = u \pm \varphi \quad \varphi \quad quelconque \quad dans \ \ \mathcal{U}$$

et (1.6) est équivaut alors à

$$a(u, \varphi) = L(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{U}. \tag{1.7}$$

Remarque 1.4. *Cas : $\mathcal{U}_{ad} = cône$*
Supposons que

$$\mathcal{U}_{ad} = cône \quad fermé \ \ convexe \ \ de \ \ sommet \ \ l'origine \tag{1.8}$$

Alors (1.6) est équivaut à

$$\begin{cases} a(u, v) \geq L(v) \ \ \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \\ a(u, u) = L(u). \end{cases} \tag{1.9}$$

Théorème 1.3. *[38] On suppose la fonctionnelle $v \longrightarrow J(v)$ strictement convexe différentiable et vérifiant (1.3) (hypothèse pouvant être supprimée si $\mathcal{U}_{ad}$ est borné).*

Alors l'unique élément u de $\mathcal{U}_{ad}$ vérifiant $J(u) = \inf\limits_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$ est caractérisé par

$$J'(u).(v-u) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{1.10}$$

■

1.1.2 Variante des inégalités variationnelles

Le résultat suivant est techniquement trés utile :

Théorème 1.4. *[38] On se place dans les hypothèses du Théorème 1.3.Alors la caractérisation (1.10) est équivaut à :*

$$J'(v).(v-u) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{1.11}$$

■

1.2 Le cas non coercive

1.2.1 Convexité de l'ensemble des solutions

Considérons une fonctionnelle $v \longrightarrow J(v)$ continue convexe, s.c.i pour la topologie faible.Désignons par X l'ensemble des $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v). \tag{1.12}$$

Cet ensemble X peut être *vide*; mais il ne l'est pas si par exemple $\mathcal{U}$ est borné.

Théorème 1.5. *[38] L'ensermble X est fermé et convexe dans $\mathcal{U}$.*

Théorème 1.6. *[38] soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{U}$, non nécéssairement symétrique , vérifiant*

$$a(v,v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U} \tag{1.13}$$

Alors l'ensemble X des solutions de

$$u \in \mathcal{U}_{ad} \quad a(u, v-u) \geq L(v-u) \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{1.14}$$

est un ensemble fermé convexe de $\mathcal{U}$.

■

2 Équation hyperbolique

2.1 Données et notations

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega = \Gamma$, et on note par $Q = \Omega \times (0,T)$ et par $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$.

Soient V et H deux espaces de Hilbert avec

$$V \subset H, dense \quad dans \quad H; \, V séparable. \tag{2.1}$$

On identifie H à son dual et V' désigne le dual de V, on a :

$$V \subset H \subset V' \tag{2.2}$$

La variable t désigne le temps.On suppose que $t \in]0,T[$; $T < \infty$.

On considère une famille d'opérateurs $A(t) \in \mathcal{L}(V,V')$

On pose :

$$(A(t)\varphi, \psi) = a(t,\varphi,\psi) \qquad \forall \varphi, \psi \in V. \tag{2.3}$$

On supposera :

$$\begin{cases} \forall \; \varphi, \psi \in V, \\ La \; fonction : \; t \longrightarrow a(t,\varphi,\psi) \; est \; une \, fois \;\; continuement \;\; differentiable \, dans \;\; [0,T]. \end{cases} \tag{2.4}$$

$$a(t,\varphi,\psi) = a(t,\psi,\varphi). \tag{2.5}$$

$$^1 \begin{cases} il \, existe \quad \lambda \in \mathbb{R}, tel \, que : \\ a(t,\varphi,\varphi) + \lambda|\varphi|_H^2 \geq \alpha||\varphi||_V^2, \forall \alpha > 0, \quad \forall \, \varphi \in V; \quad t \in [0,T] \end{cases} \tag{2.6}$$

■

On introduit $L^2(0,T,V)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables $t \longrightarrow y(t)$ de $[0,T] \longrightarrow V$, pour la mesure de Lesbegue dt et telle que

$$\left(\int_0^T ||y(t)||_V^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

On définit également $L^2(0,T,V')$ et $L^2(0,T,H)$.

1. $|\varphi| = ||\varphi||_H$,$||\varphi|| = ||\varphi||_V$

On considère le problème d'évolution suivant :

$$y \in L^2(0,T;V), \quad \frac{dy}{dt} \in L^2(0,T;H). \tag{2.7}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + A(t)y = f \qquad dans \ \ ]0,T[\tag{2.8}$$

Avec

$$f \ \ donné \ \ dans \ \ L^2(0,T,H) \tag{2.9}$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = y_0 \quad donnée \quad dans \quad V. \tag{2.10}$$

$$y'(0) = y_1 \quad donnée \quad dans \quad H. \tag{2.11}$$

Remarque 2.1. *Il en résulte de (2.8) que*

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f - A(t)y \in L^2(0,T;V')$$

D'où résulte que en particulier $\frac{dy}{dt}$ *est p.p égale à une fonction de* $[0,T] \longrightarrow V'$.

et d'aprés (2.7) , y est en particulier continue de de $[0,T] \longrightarrow H$. *Donc (2.10) et (2.11) ont un sens.*

■

2.2 Théorèmes d'existence et unicité

Théorème 2.1. *[38] Sous les hypothèses (2.4),(2.5),et (2.6) le problème (2.7)...(2.11) admet une solution unique.*

L'application

$$\left\{ \ f, y_0, y_1 \ \right\} \longrightarrow \left\{ \ y, \frac{dy}{dt} \ \right\} \tag{2.12}$$

est continue de $L^2(0,T,H) \times V \times H \longrightarrow L^2(0,T;V) \times L^2(0,T;H)$.

Lemme 2.1. *Lemme de Grönwall :*
Soit ϕ *une fonction continue de* $[0,T]$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *.Supposons qu'il existe* ψ *continue de* $[0,T]$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *qui vérifie pour* $0 \leq t \leq T$

$$\phi(t) \leq \phi(0) + c\int_0^t \phi(\sigma)\psi(\sigma)d\sigma$$

Alors

$$\phi(t) \leq \phi(0)e^{\int_0^t \psi(\sigma)d\sigma}$$

Lemme 2.2. *Estimation à priori :*
Sous les données et hypothèses du Théorème 2.1 on a

$$||y(t)||^2 + |y'(t)|^2 \leq c\Big(||y_0||^2 + |y_1|^2 + \int_0^T |f(\sigma)|^2 d\sigma\Big); \quad 0 \leq t \leq T$$

Démonstration du Lemme :
l'équation (2.8) est équivaut à

$$a(t, y(t), z) + \langle y'', z\rangle = \langle f(t), z\rangle \quad \forall z \in V \tag{2.13}$$

Prenant formellement $z = y'(t)$ et on aura :

$$a(t, y(t), y'(t)) + a(t, y'(t), y(t)) \ + \frac{d}{dt}|y'(t)|^2 = 2\langle f(t), y'(t)\rangle \tag{2.14}$$

Posons :

$$a'(t, y, z) = \frac{d}{dt}a(t, y, z) \quad \forall\, y, z \in V$$

(2.14) équivaut à

$$\frac{d}{dt}(a(t, y(t), y(t)) + |y'(t)|^2) - a'(t, y(t), y(t)) = 2\langle f(t), y'(t)\rangle \tag{2.15}$$

en intégrant de 0 *à* t

$$a(t, y(t), y(t)) + |y'(t)|^2 = a(0, y_0, y_0) + |y_1|^2 + \int_0^t a'(\sigma), y(\sigma), y(\sigma))d\sigma + 2\int_0^t \langle f(\sigma), y'(\sigma)\rangle d\sigma. \tag{2.16}$$

Le deuxième membre(2.16) est majoré par les (c désignant des constantes diverses)

$$c||y_0||^2 + |y_1|^2 + c\int_0^t ||y(\sigma)||^2 d\sigma + 2\int_0^t |f(\sigma)||y'(\sigma)| d\sigma$$

et le premier membre est $\geq \alpha||y(t)||^2 + |y'(t)|^2$. donc

$$||y(t)||^2 + |y'(t)|^2 \leq c\left(||y_0||^2 + |y_1|^2 + \int_0^t |f(\sigma)|^2 d\sigma\right) + c\int_0^t (||y(\sigma)||^2 + |y'(\sigma)|^2) d\sigma. \tag{2.17}$$

Appliquons le lemme de *Grönwall* on en déduit que

$$||y(t)||^2 + |y'(t)|^2 \leq c\left(||y_0||^2 + |y_1|^2 + \int_0^t |f(\sigma)|^2 d\sigma\right). \tag{2.18}$$

■

Démonstration du Thème 2.1

■ **Unicité**

Soit y satisfaisant aux conditions (2.7)...(2.11) avec $f = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$. Soit $s \in]0, T[$

On pose

$$\psi(t) = \begin{cases} -\int_t^s y(\sigma)d\sigma & t < s \\ 0 & t \geq s \end{cases} \tag{2.19}$$

Alors évidemment :

$$\int_0^T \Big\langle \frac{d^2y}{dt^2} + A(t)y, \psi \Big\rangle dt = 0 \tag{2.20}$$

et par intégration par parties on a :

$$\int_0^T [a(t, y, \psi) - \langle y', \psi' \rangle] dt = 0$$

ou encore

$$\int_0^T [a(t, \psi', \psi) - \langle y', y \rangle] dt = 0 \tag{2.21}$$

On pose

$$\frac{d}{dt} a(t, \varphi, \psi) = a'(t, \varphi, \psi) \quad \forall \varphi, \psi \in V. \tag{2.22}$$

Alors (2.21) donne

$$\int_0^s \frac{d}{dt}[a(t, \psi, \psi) - |y(t)|^2] dt - \int_0^s a'(t, \psi, \psi) dt = 0. \tag{2.23}$$

donc

$$a(0, \psi(0), \psi(0)) + |y(s)|^2 = \int_0^s a'(t, \psi, \psi) dt$$

et donc utilisant (2.6)

$$||\psi(0)||^2 + |y(s)|^2 \leq c_1 \Big(\int_0^s ||\psi(t)||^2 dt + |\psi(0)|^2 \Big). \tag{2.24}$$

Mais si l'on pose

$$\omega(t) = \int_0^t y(\sigma) d\sigma$$

(2.24) s'écrit

$$||\omega(s)||^2 + |y(s)|^2 \leq c_1 \Big(\int_0^s ||\omega(t) - \omega(s)||^2 dt + |\omega(s)|^2 \Big)$$

D'où

$$(1-2c_1 s)||\omega(s)||^2+|y(s)|^2 \leq c_2 \int_0^s (||\omega(t)||^2+|y(t)|^2)dt. \tag{2.25}$$

Si on choisit s_0 avec par exemple $1-2c_1 s_0=\frac{1}{2}$; alors (2.25) donne

$$||\omega(s)||^2+|y(s)|^2 \leq c_3 \int_0^s (||\omega(t)||^2+|y(t)|^2)dt \quad pour \quad 0 \leq s \leq s_0$$

donc $y=0$ dans $[0,s_0]$.

Mais la longueur s_0 étant indépendante du choix de l'origine, on en déduit que $y=0$ dans $[s_0,2s_0]$ et ainsi de suite,d'où *l'unicité*.

■

■ **Existence :**

On suppose que l'espace V est séparable :il existe un ensemble dénombrable dense dans V.Alors on peut considérer une base au sens suivant :

$$\begin{cases} \forall m, \omega_1, ...\omega_m \quad sont \quad linéairement \quad indépendants \quad et \quad les\, combinaisons \\ \sum\limits_{finie} \xi_j\omega_j \quad \xi_j \in \mathbb{R}., sont \quad denses \quad dans \quad V. \end{cases} \tag{2.26}$$

On définit alors une solution approchée y_m de (2.8) , (2.10) , (2.11) par :

$$y_m=\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\omega_i \tag{2.27}$$

les $g_{im}(t)$ étant déterminés de façon que :

$$a(t,y_m(t),\omega_j)+\langle y''_m,\omega_j\rangle=\langle f(t),\omega_j\rangle \qquad 1 \leq j \leq m \tag{2.28}$$

$$g_{im}(0)=\xi_{im} \ ; \qquad g'_{im}(0)=\eta_{im} \tag{2.29}$$

avec

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_{im}\omega_i \longrightarrow y_0 \quad dans \quad V \quad lorsque \quad m \longrightarrow \infty. \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \eta_{im}\omega_i \longrightarrow y_1 \quad dans \quad H \quad lorsque \quad m \longrightarrow \infty \end{cases} \tag{2.30}$$

les g_{im} sont donc déterminés par un *système différentiel linéaire* qui admet une solution unique.*Les mêmes calculs* que dans la démonstration du lemme 2.2 montrent que :

$$||y_m(t)||_V^2 + |y'_m|_H^2 \leq C \ \ indépendant \ \ de \ \ m. \tag{2.31}$$

Donc en particulier

$$\{ \ y_m \ \ (resp \ \ y'_m) \ \ demeurent \ \ dans \ \ un \ ensemble \ \ borné \ \ de \ L^2(0,T,V) \ (resp \ \ L^2(0,T,H)) \tag{2.32}$$

et on peut donc extraire y_μ de y_m de façon que

$$y_\mu \longrightarrow \ y \ \ dans \ \ L^2(0,T;V) faible.$$

$$y'_\mu \longrightarrow \ \chi \ \ dans \ \ L^2(0,T;H) faible.$$

Mais nécessairement $\chi = y'$
Reste à montrer que la fonction y ainsi construite est une solution du problème.Pour cela on introduit

$$\mathcal{C}^1_T[0,T] = \{\varphi / \ \ \varphi \ \in \mathscr{C}^1([0,T]), \ \ \varphi(T) = \varphi'(T) = 0\}$$

et l'on considère les fonctions

$$\psi = \sum_{j=1}^{\mu_0} \varphi_j \omega_j \tag{2.33}$$

Pour $m = \mu > \mu_0$,on en déduit de (2.28) (en multipliant φ_j et sommant en j de 1 $à$ μ_0) que

$$\int_0^T [a(t, y_\mu, \psi) + \langle y'_\mu, \psi' \rangle)] dt = \int_0^T \langle f, \psi \rangle dt + \langle y'_\mu(0), \psi(0) \rangle.$$

On déduit de tout cela et de la deuxième condition (2.30) que

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T a(t, y, \psi) - \langle y', \psi' \rangle dt = \int_0^T \langle f, \psi \rangle dt + \langle y_1, \psi(0) \rangle \\ \forall \ \ \psi \ \ de \ \ la \ \ forme \, (2.33) \end{array} \right. \tag{2.34}$$

Mais les ω_m formant une base de V , l'ensemble des fonctions de la forme (2.33) est dense dans l'espace des fonctions $\psi \in L^2(0;T,V)$ telles que :

$$\psi' \in L^2(0,T;H) \quad , \quad \psi(T) = 0$$

On en déduit de là que y est solution du problème.

Remarque 2.2. *Il y a en effet davantage (cf [38])*

$$\left\{ \begin{array}{ll} y & est \ continue \ de \ [0,T] \longrightarrow V, \\ \dfrac{dy}{dt} & est \ continue \ de \ [0,T] \longrightarrow H. \end{array} \right. \tag{2.35}$$

Théorème 2.2. *[40]*
On suppose que (2.4),(2.5),(2.6) et $(\lambda = 0)$ *ont lieu et que* $f \in L^2(0,T;V'), y_0 \in H, y_1 \in V'$ *sont donnés. Alors il existe* y *vérifiant le problème (2.8) , avec* $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ *et*

$$\begin{cases} y \in L^\infty(0,T;H), \\ \dfrac{dy}{dt} \in L^\infty(0,T;V'). \\ En \quad outre \\ \\ y \in \mathscr{C}^0(0,T;H), y' \in \mathscr{C}^0(0,T;V') \end{cases} \tag{2.36}$$

■

Théorème 2.3. *[38] Sous les hypothèses et données du Théorème 2.1*
Le problème suivant :

$$\begin{cases} y'' + Ay + \displaystyle\int_0^t A'(\sigma)y(\sigma)d\sigma &= f, \\ y(0) &= 0. \\ y'(0) &= 0 \end{cases} \tag{2.37}$$

admet une solution unique avec :

$$A'(\sigma) \in \mathcal{L}(V,H) \quad et \tag{2.38}$$
$$a'(\sigma,\varphi,\psi) = (A'(\sigma)\varphi,\psi)$$

■

Ďémonstration
On introduit comme dans la démonstration du Théorème 2.1 les solutions approchées y_m par :

$$\begin{cases} \langle y''_m, \omega_j\rangle + \langle A(t)y_m, \omega_j\rangle + \displaystyle\int_0^t \langle A'(\sigma)y_m(\sigma), \omega_j\rangle d\sigma = \langle f(t), \omega_j\rangle, \\ \hfill 1 \le j \le m \\ y_m(0) = 0. \\ y'_m(0) = 0 \end{cases} \tag{2.39}$$

On en déduit :

$$\frac{d}{dt}[|y'_m(t)|^2 + a(t, y_m(t), y_m(t))] - a'(t, y_m(t), y_m(t)) + 2\int_0^t \langle A'(\sigma)y_m(\sigma), y'_m(t)\rangle d\sigma = 2\langle f(t), y'_m(t)\rangle$$

d'où

$$|y'_m(t)|^2 + ||y_m(t)||^2 \le C\int_0^t (|y'_m(\sigma)|^2 + ||y_m(\sigma)||^2)d\sigma + C\int_0^t \left(\int_0^\sigma ||y_m(\sigma_1)||d\sigma_1\right)|y'_m(\sigma)|d\sigma$$

et l'on achève comme dans la démonstration de l'Existence et Unicité du Théorème 2.1.

■

3 Contrôle optimal

3.1 Notations -Propriétés

On désigne par $\mathcal{U}$ l'espace de Hilbert des contrôles et on se donne

$$B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, L^2(0,T;H)). \tag{3.1}$$

Notons par $y(v)$ une fonction :$t \longrightarrow y(v)(t) = y(v,t)$.

De même $y(v)$ dépend également de x et on notera cette fonction de x et t par $y(x,t,v)$.

Soient f , y_0 et y_1 donnés avec $f \in L^2(0,T;H)$, $y_0 \in V$, $y_1 \in H$.

$y(v)$ designe l'état du système , solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + A(t)y(v) &= f + Bv \quad (3.2) \\ y(0,v) &= y_0 \quad (3.3) \\ \dfrac{dy}{dt}(0,v) &= y_1 \quad (3.4) \end{cases}$$

$$y \in L^2(0,T;V) \quad ; \frac{dy}{dt} \in L^2(0,T;H) \tag{3.5}$$

On donne :

$$\begin{cases} N \in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U}) \quad N \quad hermitien \quad défini \quad positif, \\ \\ \langle Nu, u\rangle_{\mathcal{U}} \geq \nu ||u||^2_{\mathcal{U}} \qquad \nu \geq 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

$\mathcal{U}_{ad}$ est l'ensembles des contrôles admissibles de $\mathcal{U}$ qui est un ensemble convexe fermé.

■

3.2 Caractérisation du contrôle optimal selon les cas d'observation

3.2.1 Cas $z(v) = \mathcal{C}(y(v))$

On considère l'observation distribué suivante

$$\begin{cases} \mathcal{C} \in \mathcal{L}(L^2(0,T;V), \quad \mathcal{H}) \\ z(v) = \mathcal{C}y(v). \end{cases} \tag{3.7}$$

Où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.

A tout contrôle $v \in \mathcal{U}_{ad}$ on associe la fonction coût :

$$J(v) = ||\mathcal{C}y(v) - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \langle Nv, v\rangle_{\mathcal{U}} \qquad où \quad z_d \quad donné \quad dans \quad \mathcal{H}. \tag{3.8}$$

Le problème de contrôle est alors :

$$\textit{trouver} \quad \inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v). \tag{3.9}$$

Le contrôle optimal u est caractérisé par :

$$\langle \mathcal{C}y(u) - z_d, \mathcal{C}y(v) - \mathcal{C}y(u)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle Nu, v-u\rangle_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{3.10}$$

Notons par :

$$\begin{cases} \Lambda = isomorphisme \;\; canonique \;\; de \;\; \mathcal{H} \;\; sur \;\; \mathcal{H}' \\ \Lambda_{\mathcal{U}} = isomorphisme \;\; canonique \;\; de \;\; \mathcal{U} \;\; sur \;\; \mathcal{U}'. \end{cases} \tag{3.11}$$

Alors $\mathcal{C}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}'; L^2(0,T;V'))$ (3.10) est équivaut à :

$$\int_0^T \Big\langle \mathcal{C}^*\Lambda(\mathcal{C}y(u) - z_d), y(v) - y(u)\Big\rangle dt + \langle Nu, v-u\rangle_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{3.12}$$

On introduit l'état adjoint $p(u)$ par :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}p(u) + A(t)p(u) & = & \mathcal{C}^*\Lambda(\mathcal{C}y(u) - z_d) \quad \text{sur }]0,T[\\ p(T,u) & = & 0 \\ \dfrac{d}{dt}p(T,u) & = & 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

Comme $\mathcal{C}^*\Lambda(\mathcal{C}y(u) - z_d) \in L^2(0,T;V')$, alors nous faisons une hypothèse forte sur $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} \in \mathcal{L}(L^2(0,T;H), \mathcal{H}) \tag{3.14}$$

$$\mathcal{C}^*\Lambda(\mathcal{C}y(u) - z_d) \in L^2(0,T;H) \tag{3.15}$$

et d'aprés le Théorème 2.1 , (3.13) admet une solution unique qui vérifie

$$p(u) \in L^2(0,T;V), \frac{d}{dt}p(u) \in L^2(0,T;H). \tag{3.16}$$

■

On multiplie (3.13) par $y(u) - y(v)$ (prenant le produit scalaire dans $\mathcal{H}$) on aura :

$$\int_0^T \Big\langle \frac{d^2}{dt^2}p(u) + A^*(t)p(u), y(u) - y(v)\Big\rangle dt = \langle \mathcal{C}y(u) - z_d, \mathcal{C}y(u) - \mathcal{C}y(v)\rangle_{\mathcal{H}} \tag{3.17}$$

On applique la formule de Green au premier membre de (3.17) on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\langle p(u), \left(\frac{d^2}{dt^2} + A(t)\right)y(v) - \left(\frac{d^2}{dt^2} + A(t)\right)y(u) \right\rangle dt &= \langle \mathcal{C}y(u) - z_d, \mathcal{C}y(u) - \mathcal{C}y(v)\rangle_{\mathcal{H}} \qquad (3.18)\\
&= \int_0^T \langle p(u), B(v-u)\rangle dt \qquad (3.19)\\
&= \left\langle B^* p(u), v-u\right\rangle_{\mathcal{U}',\mathcal{U}}\\
&= \langle \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u), v-u\rangle \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

et (3.12) s'écrit

$$\left\langle \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u) + Nu, v-u\right\rangle_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{3.21}$$

■

Théorème 3.1. *On suppose que (2.4), (2.5) (2.6) ont lieu .La fonction coût est donnée par (3.8) avec $\mathcal{C}$ satisfaisant à (3.7).Le contrôle optimal u est caractérisé par le système d'équations et d'inéquations*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} y(u) + A(t)y(u) &= f + Bu \\ y(0,u) &= y_0 \\ \dfrac{d}{dt} y(0,u) &= y_1 \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} p(u) + A(t)p(u) &= \mathcal{C}^*\Lambda(\mathcal{C}y(u) - z_d) \\ p(T,u) &= 0 \\ \dfrac{d}{dt} p(T,u) &= 0 \end{cases} \tag{3.23}$$

$$\begin{cases} \langle \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u) + Nu, v-u\rangle_{\mathcal{U}} \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \\ u \in \mathcal{U}_{ad} \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\begin{cases} y(u) \quad , \quad p(u) \quad \in L^2(0.T;V) \\ y'(u) \quad , \quad p'(u) \quad \in L^2(0.T;H) \end{cases} \tag{3.25}$$

■

Remarque 3.1. *Lorsque $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$, (3.23) se réduit à :*

$$\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u) + Nu = 0. \tag{3.26}$$

On peut alors éliminer u , ce qui conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{lclcrcl} \dfrac{d^2y}{dt^2}+Ay+BN^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p &=& f & & & & \\ \dfrac{d^2p}{dt^2}+Ap-\mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}y &=& -\mathcal{C}^*\Lambda z_d; & & & & \\ y(0) &=& y_0 & & y'(0) &=& y_1 \\ p(T) &=& 0 & & p'(T) &=& 0. \end{array}\right. \tag{3.27}$$

■

3.2.2 Cas $z(v)=\mathcal{C}(y'(v))$

On considère l'observation suivante

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{C}\in\mathcal{L}(L^2(0,T;H),\quad \mathcal{H}); \\ z(v)=\mathcal{C}y'(v). \end{array}\right. \tag{3.28}$$

La fonction coût est :

$$J(v)=||\mathcal{C}y'(v)-z_d||^2_{\mathcal{H}}+N||v||^2_{\mathcal{U}} \qquad où \quad z_d \;\; donné \;\; dans \;\; \mathcal{H}. \tag{3.29}$$

Le problème de contrôle est alors :

$$trouver \;\; \inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v). \tag{3.30}$$

Le contrôle optimal u est caractérisé par :

$$\langle\mathcal{C}y'(u)-z_d,\mathcal{C}y'(v)-\mathcal{C}y'(u)\rangle_{\mathcal{H}}+\langle Nu,v-u\rangle_{\mathcal{U}}\geq 0 \quad \forall v\in\mathcal{U}_{ad} \tag{3.31}$$

Alors $\mathcal{C}^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H}';L^2(0,T,H))$
(3.31) est équivaut à :

$$\int_0^T\Big\langle\mathcal{C}^*\Lambda(\mathcal{C}y'(u)-z_d),y'(v)-y'(u)\Big\rangle dt+\langle Nu,v-u\rangle_{\mathcal{U}}\geq 0 \quad \forall v\in\mathcal{U}_{ad} \tag{3.32}$$

■

On introduit l'état adjoint $p(u)$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{d^2}{dt^2}p(u)+A(t)p(u)+\displaystyle\int_t^T A'(\sigma)p(\sigma,u)d\sigma &=& \mathcal{C}^*\Lambda(\mathcal{C}y'(u)-z_d) \quad \text{sur }]0,T[\\ p(T,u) &=& 0 \\ \dfrac{dp}{dt}(T,u) &=& 0 \end{array}\right. \tag{3.33}$$

avec

$$A'(\sigma)\in\mathcal{L}(V,H) \tag{3.34}$$

et d'aprés le Théorème 2.3 , le problème (3.32) admet une solution unique.

On multiplie (3.33) par $y'(u) - y'(v)$ (calcul formel car les produits scalaires n'ont pas de sens pour l'instant) , il vient en posant :

$$q(t) = \int_t^T A'(\sigma)p(\sigma)d\sigma;$$

$$\int_0^T \langle p''(u) + Ap(u), y'(v) - y'(u)\rangle dt + \int_0^T \langle q, y'(v) - y'(u)\rangle dt = \langle (\mathcal{C}y'(u) - z_d), \mathcal{C}y'(v) - \mathcal{C}y'(u)\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{3.35}$$

Intégrons par partie , le premier membre de (3.35) vaut

$$\begin{aligned}
&- \int_0^T \langle p'(u), y''(v) - y''(u)\rangle dt + \int_0^T a(t, p(u), y'(v) - y'(u))dt + \int_0^T \langle A'(t)p(u), y(v) - y(u)\rangle dt \\
&= -\int_0^T \langle p'(u), B(v-u)\rangle dt + \int_0^T [a(t, p'(u), y(v) - y(u))dt + a(t, p(u), y'(v) - y'(u))dt + \\
&+ a'(t, p(u), y(v) - (u))]dt \\
&= -\int_0^T \langle p'(u), B(v-u)\rangle dt + \int_0^T \frac{d}{dt} a(t, p(u), y(v) - y(u))dt \\
&= -\int_0^T \langle p'(u), B(v-u)\rangle dt \\
&= \langle -B^* P'(u), v - u\rangle \\
&= \langle -\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p'(u), v - u\rangle_{\mathcal{U}}.
\end{aligned}$$

et (3.32) devient

$$\langle -\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p'(u) + Nu, v - u\rangle_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{3.36}$$

■

Lemme de Friedrichs vectoriel

Dans un espace de Hilbert $\mathcal{E}$ muni de produit scalaire $(\langle f, g\rangle)$ on donne une famille d'opérateurs $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$,telle que la fonction $t \to \langle \mathcal{A}(t)f, g\rangle$ soit continue sur $\mathbb{R}$, de dirivée en t (au sens des distributions) mesurable, avec

$$|D_t\langle \mathcal{A}(t)f, g\rangle| = |\langle \mathcal{A}'(t)f, g|\rangle \leq c|f||g|$$

Alors, pour $u \in L^2(-\infty, +\infty; \mathcal{E})$, on a

$$v_m = D_t[\mathcal{A}(t)(u * \rho_m) - (\mathcal{A}(t)u) * \rho_m] \to 0 \;\; dans \;\; L^2(-\infty, +\infty; \mathcal{E}) \;\; lorsque \;\; m \to \infty$$

$- - - - - - -$

justification du calcul formel :

On va se ramener à des équations sur $\mathbb{R}_t$ puis régulariser.On introduit d'abord ψ solution de (on prolonge $A(t)$ sur $\mathbb{R}$ avec des propriétés analogues de celles de $A(t)$ sur $(0, T)$)

$$\left\{\begin{array}{l} \psi'' + A(t)\psi = \left\{\begin{array}{ll} B(v-u) & \mathrm{sur}(0,T) \\ 0 & \mathrm{pour}\ t > T \end{array}\right. \\ \psi(0) = 0; \psi'(0) = 0. \end{array}\right. \tag{3.37}$$

et l'on prolonge ψ par 0 pour $t < 0$, puis l'on introduit π solution de :

$$\left\{\begin{array}{l} \pi'' + A(t)\pi + \displaystyle\int_t^T A'(\sigma)\pi(\sigma)d\sigma = \left\{\begin{array}{ll} \mathcal{C}^*\Lambda(\mathcal{C}y'(u) - z_d) & \mathrm{sur}(0,T) \\ 0 & \mathrm{pour}\ t < 0 \end{array}\right. \\ \pi(T) = 0; \pi'(T) = 0. \end{array}\right. \tag{3.38}$$

que l'on prolonge par 0 pour $t > T$.
On a

$$\psi = y(v) - y(u) \quad sur \quad (0,T), \qquad \pi = p(u) \quad sur \quad (0,T)$$

et

$$\langle \mathcal{C}y'(u) - z_d, \mathcal{C}y'(v) - \mathcal{C}y'(u)\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \pi'' + A\pi + \int_t^T A'(\sigma)\pi(\sigma)d\sigma, \psi' \right\rangle dt \tag{3.39}$$

Soit $\rho_n(t) = \rho_n$ une suite régularisante sur $\mathbb{R}_t$ $\left(g * \rho_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\sigma)\rho_n(\sigma)d\sigma \right)$

Alors le deuxième membre de (3.38) vaut

$$\left\{ \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle (\pi'' + A\pi) * \rho_n + (\int_t^T A'(\sigma)\pi(\sigma)d\sigma) * \rho_n, \psi' * \rho_n \right\rangle dt = \lim_{n\to+\infty} X_n. \right. \tag{3.40}$$

et l'on peut maintenant intégrer par partie dansX_n.Il vient

$$\begin{aligned} X_n = & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left\langle -\pi' * \rho_n , \psi'' * \rho_n \right\rangle + \left\langle (A\pi) * \rho_n , \psi' * \rho_n \right\rangle + \left\langle (A'\pi) * \rho_n , \psi * \rho_n \right\rangle \right] dt \\ = & \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle -\pi' * \rho_n , B(v-u) * \rho_n \right\rangle dt + \\ + & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left\langle \pi' * \rho_n , (A\psi) * \rho_n \right\rangle + \left\langle (A\pi) * \rho_n , \psi' * \rho_n \right\rangle + \left\langle (A'\pi) * \rho_n , \psi * \rho_n \right\rangle \right] dt \end{aligned}$$

On aura alors le résultat si l'on montre que cette dernière intégrale $\to 0$.
Or on peut l'écrire

$$Y_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left\langle \pi' * \rho_n , A(\psi * \rho_n) \right\rangle + \left\langle A(\pi * \rho_n) , \psi' * \rho_n \right\rangle + \left\langle A'(\pi * \rho_n) , \psi * \rho_n \right\rangle \right] dt + Y_n^1 + Y_n^2 + Y_n^3$$

Où

$$Y_n^1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big\langle \pi' * \rho_n\,,\,(A\psi) * \rho_n - A(\psi * \rho_n)\Big\rangle dt.$$
$$Y_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big\langle (A\pi) * \rho_n - A(\pi * \rho_n)\,,\,\psi' * \rho_n\Big\rangle dt.$$
$$Y_n^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big\langle (A'\pi) * \rho_n - A'(\pi * \rho_n)\,,\,\psi * \rho_n\Big\rangle dt.$$

La première intgrale dans Y_n vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} a(t, \pi * \rho_n, \psi * \rho_n) = 0$$

et donc

$$Y_n = Y_n^1 + Y_n^2 + Y_n^3$$

Mais d'aprés le lemme de Friedrichs vectoriel , on a

$$\frac{d}{dt}\Big[(A\psi) * \rho_n - A(\psi * \rho_n\Big] \to 0 \ \ dans \ \ L^2(\mathbb{R}_\approx; V')$$

Donc

$$Y_n^1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big\langle \pi * \rho_n\,,\,\frac{d}{dt}[(A\psi) * \rho_n - A(\psi * \rho_n)]\Big\rangle dt \to 0$$

De même $Y_n^2 \to 0$, *et* $Y_n^3 \to 0$

cela justifie (3.36)

− − − − − − − − −

Théorème 3.2. *[38] On suppose que (2.4) , (2.5), (2.6) ont lieu .La fonction coût est donnée par (3.29) ,* $\mathcal{C}$ *satisfaisant (3.28).On suppose que (3.34) a lieu .Alors le contrôle optimal u est fourni par la résolution du système*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} y(u) + A(t)y(u) & = f + Bu \\ y(0,u) & = y_0 \\ \dfrac{dy}{dt}(0,u) & = y_1 \end{cases} \tag{3.41}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} p(u) + A(t)p(u) + \displaystyle\int_t^T A'(\sigma)p(\sigma,u) & = \mathcal{C}^*\Lambda(\mathcal{C}y'(u) - z_d) \\ p(T,u) & = 0 \\ \dfrac{dp}{dt}(T,u) & = 0 \end{cases} \tag{3.42}$$

$$\langle -\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p'(u) + Nu, v - u\rangle_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{3.43}$$

■

Remarque 3.2. *Lorsque $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$, (3.42) se réduit à :*

$$-\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p'(u) + Nu = 0. \tag{3.44}$$

On peut alors éliminer u ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + A(t)y - BN^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p' & = & f \\ \dfrac{d^2p}{dt^2} + A(t)p + \displaystyle\int_t^T A'(\sigma)p(\sigma)d\sigma & = & \mathcal{C}^*\Lambda(\mathcal{C}y' - z_d); \\ y(0) & = & y_0; \qquad y'(0) = y_1 \\ p(T) & = & 0; \qquad p'(T) = 0. \end{cases} \tag{3.45}$$

■

3.2.3 Cas $z(v) = \mathcal{D}_0(y(T, v))$

On considère l'observation suivante

$$\begin{cases} \mathcal{D}_0 \in \mathcal{L}(V, \quad \mathcal{H}); \\ z(v) = \mathcal{D}_0(y(T, v)) \end{cases} \tag{3.46}$$

La fonction coût est :

$$J(v) = ||\mathcal{D}_0(y(T, v)) - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \langle Nv, v\rangle_{\mathcal{U}} \qquad où \quad z_d \; donné \; dans \; \mathcal{H}. \tag{3.47}$$

Le problème de contrôle est alors :

$$trouver \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v). \tag{3.48}$$

Le contrôle optimal u est caractérisé par :

$$\langle \mathcal{D}_0(y(T, u)) - z_d, \mathcal{D}_0(y(T, v)) - y(T, u)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle Nu, v - u\rangle_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{3.49}$$

(3.49) est équivaut à :

$$\Big\langle \mathcal{D}_0^*\Lambda(\mathcal{D}_0 y(T, u) - z_d), y(T, v) - y(T, u)) \Big\rangle_{V', V} + \langle Nu, v - u\rangle_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{3.50}$$

■

L'état adjoint est formellement définit par

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}p(u) + A(t)p(u) & = 0 \quad dans \quad]0, T[. & (3.51) \\ p(T, u) & = 0 & (3.52) \\ p'(T, u) & = \mathcal{D}_0^*\Lambda(\mathcal{D}_0 y(T, u) - z_d). & (3.53) \end{cases}$$

Mais dans l'ordre d'appliquer le Théorème 2.1 $p'(T,u)$ doit être donné dans H qui conduit á l'hypothèse

$$\mathcal{D}_0 \in \mathcal{L}(H.\mathcal{H}) \tag{3.54}$$

Alors le problème (3.51) , (3.52), (3.53) admet une solution unique.

Multiplions (3.51) par $y(t,v)-y(u,t)$ et appliquons la formule de Green nous aurons :

$$\Big\langle \mathcal{D}_0^*\Lambda(\mathcal{D}_0 y(u,T)-z_d), y(T,u)-y(T,u)\Big\rangle + \int_0^T \Big\langle p(u), (\frac{d^2}{dt^2}+A)(y(v)-y(u))\Big\rangle dt = 0$$

et (3.50) nous donne

$$\big\langle -B^*p(u), v-u\big\rangle + \big\langle Nu, v-u\big\rangle_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{3.55}$$

et on a

$$\big\langle -\Lambda^{-1}B^*p(u)+Nu, v-u\big\rangle_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{3.56}$$

Théorème 3.3. *[38] On suppose que (2.4) , (2.5), (2.6) ont lieu .La fonction coût est donnée par (3.47) , $\mathcal{D}_0$ satisfaisant (3.46).Alors le contrôle optimal u est fourni par la résolution du système*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}y(u)+A(t)y(u) &= f+Bu \\ y(0,u) &= y_0 \\ y'(0,u) &= y_1 \end{cases} \tag{3.57}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}p(u)+A(t)p(u) &= 0 \\ p(T,u) &= 0 \\ p'(T,u) &= \mathcal{D}_0^*\Lambda(\mathcal{D}_0 y(u,T)-z_d). \end{cases} \tag{3.58}$$

et

$$\big\langle -\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u)+Nu, v-u\big\rangle_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{3.59}$$

Remarque 3.3. *Lorsque $\mathcal{U}_{ad}=\mathcal{U}$, (3.59) se réduit à :*

$$-\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u)+Nu=0. \tag{3.60}$$

On peut alors éliminer u dans (3.57) , (3.58) , (3.59).

■

3.2.4 Cas $z(v) = \mathcal{D}(y'(T, v))$

On considère l'observation suivante

$$\begin{cases} \mathcal{D} \in \mathcal{L}(H, \quad \mathcal{H}); \\ z(v) = \mathcal{D}(y'(T, v)) \end{cases} \tag{3.61}$$

La fonction coût est :

$$J(v) = ||\mathcal{D}(y'(T, v)) - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \langle Nv, v\rangle_{\mathcal{U}} \qquad \textit{où} \quad z_d \ \ \textit{donné} \ \ \textit{dans} \ \ \mathcal{H}. \tag{3.62}$$

Le contrôle optimal u est caractérisé par :

$$\langle \mathcal{D}(y'(T, u)) - z_d, \mathcal{D}(y'(T, v)) - y'(T, u)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle Nu, v - u\rangle_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{3.63}$$

et donc

$$\big\langle \mathcal{D}^*\Lambda(\mathcal{D}(y'(T, u)) - z_d), \mathcal{D}(y'(T, v)) - y'(T, u)\big\rangle_{\mathcal{H}} + \langle Nu, v - u\rangle_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{3.64}$$

.

L'état adjoint est formellement définit par

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}p(u) + A(t)p(u) & = 0 \quad dans \quad]0, T[. & (3.65) \\ p(T, u) & = \mathcal{D}^*\Lambda(\mathcal{D}y'(T, u) - z_d). & (3.66) \\ p'(T, u) & = 0. & (3.67) \end{cases}$$

Mais $p(T, u)$ est donné dans H .

Nous donnons

$$\Big\langle \mathcal{D}^*\Lambda(\mathcal{D}y'(T, u) - z_d), y'(T, v) - y'(T, u)\Big\rangle = \int_0^T \langle p(u), B(v - u)\rangle dt \tag{3.68}$$

(3.64) est équivaut à :

$$\big\langle B^*p(u), v - u\big\rangle + \big\langle Nu, v - u\big\rangle_{\mathcal{U}} \geq 0 \ \ \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{3.69}$$

et on a

$$\big\langle -\Lambda^{-1}B^*p(u) + Nu, v - u\big\rangle_{\mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{3.70}$$

■

4 Applications à l'équation des ondes

4.1 Résultat de régularité pour l'équation des ondes

Théorème 4.1.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - \Delta y &= f \quad sur\ Q = \Omega \times (0, T). \\ y(0) &= y_1 \quad sur\ \Omega \\ y'(0) &= y_2 \quad sur\ \Omega \\ y &= 0 \quad sur\ \Sigma = \Gamma \times (0, T) \end{cases} \tag{4.1}$$

où

$$f \in L^1(0, T, L^2(\Omega)), y_0 \in H_0^1(\Omega), y_1 \in, L^2(\Omega). \tag{4.2}$$

Alors , la frontière Γ de Ω étant supposée régulière.

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma). \tag{4.3}$$

$$||\frac{\partial y}{\partial \nu}||_{L^2(\Sigma)} \leq c\Big(||f||_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + ||y_0||_{H_0^1(\Omega)} + ||y_1||_{L^2(\Omega)}\Big) \tag{4.4}$$

Remarque 4.1. *On sait déja que*

$$y \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad y' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{4.5}$$

Alors $\Delta y = y'' - f \in W^{-1,\infty}(0, T; H_0^1(\Omega)) + L^1(0, T; L^2(\Omega))$
. Donc , si $\psi \in \mathscr{D}(]0, T[)$, $\Delta\Big(\int_0^T y(x, t)\psi(t)dt\Big) \in L^2(\Omega)$ *et donc*

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\Big(\int_0^T y\psi dt\Big) \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$$

de sorte que $\dfrac{\partial y}{\partial \nu}$ *est par exemple , une distribution à valeur dans* $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$*. Le résultat (4.3) donne un résultat beaucoup plus précis.*

Démonstration du Théorème voir [35].

■

4.2 Transposition

L'objectif est la résolution du problème non homogène.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière , on considère le problème hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - \Delta y &= f \quad \text{sur } Q = \Omega \times (0, T). \\ y(0) &= y_1 \quad \text{sur } \Omega \\ y'(0) &= y_2 \quad \text{sur } \Omega \\ y &= g \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \end{cases} \tag{4.6}$$

Avec

$$g \in L^2(\Sigma)) \tag{4.7}$$

Pour ψ donné avec

$$\psi \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) \tag{4.8}$$

Nous définissons φ par

$$\begin{cases} \varphi'' - \Delta\varphi &= \psi \quad \text{sur } Q = \Omega \times (0,T). \\ \varphi(T) &= 0 \quad \text{sur } \Omega \\ \varphi'(T) &= 0 \quad \text{sur } \Omega \\ \varphi &= 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \end{cases} \tag{4.9}$$

Supposons que y est solution de (4.6) , les données f, g, y_0, y_1 étant supposées régulières , il vient

$$\int_Q (y''-\Delta y)\varphi dxdt = \int_Q f\varphi dxdt = -\langle y_1, \varphi(0)\rangle + \langle y_0, \varphi'(0)\rangle + \int_\Sigma y\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\Sigma + \int_Q y(\varphi''-\Delta\varphi)dxdt \tag{4.10}$$

et par conséquent

$$\int_Q y\psi dxdt = \int_Q f\varphi dxdt + \langle y_1, \varphi(0)\rangle - \langle y_0, \varphi'(0)\rangle - \int_\Sigma g\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\Sigma \tag{4.11}$$

On prend alors - c'est cela la méthode de transposition - (4.1) comme définition .
Plus précisément , si $\psi \in L^1(0,T,L^2(\Omega))$, on sait que le Théorème 4.1

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma) \tag{4.12}$$

et que

$$\varphi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad \varphi(0) \in H_0^1(\Omega) \quad ,\varphi'(0) \in L^2(\Omega)$$

Par conséquent si l'on prend

$$f \in L^1(0,T,H^{-1}(\Omega)) \quad y_0 \in L^2(\Omega) \quad ,y_1 \in H^{-1}(\Omega) \tag{4.13}$$

L'application

$$\psi \longrightarrow \int_Q f\varphi dxdt + \langle y_1, \varphi(0)\rangle - \langle y_0, \varphi'(0)\rangle \int_\Sigma g\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\Sigma \tag{4.14}$$

est linéaire et continue de $L^1(0,T;L^2(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{R}$, et donc définit $y \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ par (4.11).
On a donc démontré

■

Théorème 4.2. *[35] Pour f, y_0, y_1, g donnés avec (4.12) (4.7) , il existe y unique dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ telle que l'on ait (4.11) , $\forall\psi \in L^1(0,T,L^2(\Omega))$, où φ est solution de (4.9). En outre , l'application $f, y_0, y_1, g \longrightarrow y$ est continue pour les topologies naturelles , et y est continue de $[0,T]$ dans $L^2(\Omega)$.*

On va utiliser les résultats précédents pour le cas de contrôle optimal.

■

4.3 Contrôle optimal de l'équation des ondes

On considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - \Delta y &= f + v \quad \text{sur } \Omega \times (0,T) = Q \\ y(0) &= g_1 \quad \text{sur } \Omega \\ y'(T) &= 0 \quad \text{sur } \Omega \\ y &= g_2 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0,T). \end{cases} \tag{4.15}$$

Il s'agit d'un problème de Dirichlet non homogène.
On se donne $f \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$.
On sait d'aprés le Théorème 4.2 que ce problème admet pour

$$g_2 \in L^2(\Sigma)) \tag{4.16}$$

admet une solution unique y (l'état du système) telle que

$$y \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{4.17}$$

Notons que

$$y \ \textit{est scalairement continue de} \ [0,T] \longrightarrow L^2(\Omega). \tag{4.18}$$

En effet , d'aprés (4.15)

$$y'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) + L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \subset L^1(0,T;H^{-2}(\Omega))$$

et cela joint à (4.17) , implique (4.18).
et alors pour

$$g_1 \in L^2(\Omega)$$
$$y'(T) \in H^{-1}(\Omega)$$

on a aussi

$$y' \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

On reprendra les mêmes notations que les numéros précédents :
$\mathcal{U} = L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)$ l'espace de Hilbert des contrôles , et on se donne

$$B = I \in \mathcal{L}\Big(L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)), L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))\Big).$$

■

4.3.1 Observation : cas $z(v) = y(v)$

On donne :

$$\begin{cases} N \in \mathcal{L}\Big(L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)), L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))\Big) \quad N \;\; hermitien \;\; défini \;\; positif, \\ \\ \langle Nu, u\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} \geq \nu ||u||^2_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} \qquad \nu \geq 0 \end{cases} \tag{4.19}$$

$\mathcal{U}_{ad}$ est l'ensembles des contrôles admissibles de $\mathcal{U}$, *ensemble convexe fermé.*

On considère l'observation distribuée suivante avec l'espace d'observation $\mathcal{H} = L^2(0,T;(\Omega))$.

$$\begin{cases} \mathcal{C} = I \quad dans \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ z(v) = y(v). \end{cases} \tag{4.20}$$

Soit la fonction coût :

$$J(v) = ||y(v) - z_d||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \langle Nv, v\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)} \quad où \;\; z_d \;\; donné \;\; dans \;\; L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \;\; . \tag{4.21}$$

Le contrôle optimal u est caractérisé par :

$$\big\langle y(u) - z_d, y(v) - y(u)\big\rangle_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \big\langle Nu, v-u\big\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} dt \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{4.22}$$

On introduit l'état adjoint $p(u)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}p(u) - \Delta(p(u) & = & y(u) - z_d & \text{sur } \Omega\times]0,T[\\ p(0,u) & = & 0 & \\ p'(T,u) & = & 0 & \\ p & = & 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{4.23}$$

Mais comme $y(u) - z_d \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, alors d'aprés le Théorème 4.2 , (4.23) admet une solution unique qui vérifie

$$p(u) \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad et \quad p'(u) \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{4.24}$$

■

On multiplie (4.23) par $y(u) - y(v)$ (prenant le produit scalaire entre crochets est dans $L^2(\Omega)$ on aura :

$$\Big\langle \frac{d^2}{dt^2}p(u) - \Delta p(u), y(u) - y(v)\Big\rangle = \big\langle y(u) - z_d, y(u) - y(v)\big\rangle_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \tag{4.25}$$

On applique la formule de Green au premier membre de (4.25) on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\left\langle p(u), \left[\left(\frac{d^2}{dt^2} - \Delta\right) y(v) - \left(\frac{d^2}{dt^2} - \Delta\right) y(u)\right]\right\rangle \\
&= \left\langle y(u) - z_d, y(u) - y(v)\right\rangle_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\
&= \left\langle p(u), v - u\right\rangle
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

où le dernier crochet désigne le produit scalaire entre $\mathcal{U}' = L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ et $\mathcal{U} = L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$

$$
= \left\langle \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} p(u), v - u\right\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))}
$$

et (4.22) sécrit

$$
\left\langle \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} p(u) + Nu, v - u\right\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{4.27}
$$

■

Théorème 4.3. *On suppose que (2.4), (2.5) (2.6) ont lieu .La fonction coût est donnée par (4.21) avec $\mathcal{C}$ satisfaisant à (4.20).Le contrôle optimal u est caractérisé par le système d'équations et d'inéquations*

$$
\left\{
\begin{array}{lcll}
\dfrac{d^2}{dt^2} y(u) - \Delta y(u) & = & f + u & sur\ Q \\
y(0,u) & = & g_1 & \\
y'(T,u) & = & 0 & \\
y & = & g_2 & sur\ \Sigma.
\end{array}
\right. \tag{4.28}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{lcll}
\dfrac{d^2}{dt^2} p(u) - \Delta p(u) & = & y(u) - z_d & sur\ Q \\
p(0,u) & = & 0 & \\
p'(T,u) & = & 0 & \\
p & = & 0 & sur\ \Sigma
\end{array}
\right. \tag{4.29}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left\langle \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} p(u) + Nu, v - u\right\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \\
u \in \mathcal{U}_{ad}
\end{array}
\right. \tag{4.30}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
y(u) \ \ et \ \ p(u) \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\
y'(u) \ \ et \ \ p'(u) \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))
\end{array}
\right. \tag{4.31}
$$

■

Remarque 4.2. *Lorsque $\mathcal{U}_{ad} = L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$, (4.30) se réduit à :*

$$
p(u) + Nu = 0. \tag{4.32}
$$

On peut alors éliminer u ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - \Delta y - N^{-1}p & = & f & sur\ Q \\ \dfrac{d^2p}{dt^2} - \Delta p - y & = & -z_d & sur\ Q \\ y(0) & = & g_1 & y'(T) & = & 0 \\ p(T) & = & 0 & p'(0) & = & 0 \\ y & = & g_2 & p & = 0 & sur\ \Sigma. \end{cases} \tag{4.33}$$

■

4.3.2 Observation : cas $z(v) = y'(v)$

On reprend les mêmes données comme dans le cas de l'observation du numéro 4.3.1 et on considère l'observation suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{C} = I \quad dans \quad L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ z(v) = y'(v). \end{cases} \tag{4.34}$$

La fonction coût est :

$$J(v) = ||y'(v) - z_d||^2_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \langle Nv, v\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} \quad où \quad z_d \ donné\ \mathcal{H} = L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{4.35}$$

Le contrôle optimal u est caractérisé par :

$$\sup_{t\in(0,T)} (ess)\langle y'(u) - z_d, y'(v) - y'(u)\rangle_{H^{-1}(\Omega)} + \langle Nu, v-u\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{4.36}$$

■

On introduit l'état adjoint $p(u)$ par (l'opŕateur Δ est indépendant du temps)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}p(u) - \Delta p(u) & = & y'(u) - z_d & \text{sur } Q \\ p(T,u) & = & 0 & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{d}{dt}p(0,u) & = & 0 & \text{sur } \Omega \\ p & = & 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{4.37}$$

et d'aprés le Théorème 4.1 , le problème (4.37) admet une solution unique.

Comme dans le cas précédent, ,On multiplie (4.37) par $y'(u) - y'(v)$ (le produit scalaire n' a pas de sens et sera justifié de la même façon que dans le cas du numéro 3.2.2. , on aura formellement :

$$\langle p''(u) - \Delta p(u), y'(v) - y'(u)\rangle = \langle y'(u) - z_d, y'(v) - y'(u)\rangle_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \tag{4.38}$$

Intégrons par partie,le premier membre de (4.38) vaut

$$
\begin{aligned}
&-\langle p'(u), y''(v) - y''(u)\rangle + \int_0^T a(t, p(u), y'(v) - y'(u))dxdt + \int_Q A'(t)p(u)(y(v) - y(u))dxdt \\
&= \ -\int_Q p'(u)(v-u)dxdt + \int_Q [a(t, p'(u), y(v) - y(u))dt + a(t, p(u), y'(v) - y'(u)) + \\
&+ \ a'(t, p(u), y(v) - (u))]dt \\
&= \ -\int_Q p'(u)((v-u)dxdt + \int_Q \frac{d}{dt} a(t, p(u), y(v) - y(u))dxdt \\
&= \ -\langle \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} p'(u), v-u\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))}
\end{aligned}
$$

et (4.36) devient

$$
\langle \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} p'(u) + Nu, v-u\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{4.39}
$$

■

et d'où

Théorème 4.4. *On suppose que (2.4) , (2.5), (2.6) ont lieu .La fonction coût est donnée par (4.35) , $\mathcal{C}$ satisfaisant (4.34) .Alors le contrôle optimal u est fourni par la résolution du système*

$$
\left\{
\begin{array}{lcll}
\dfrac{d^2}{dt^2} y(u) + A(t)y(u) & = & f + u & sur\ Q \\
y(0,u) & = & g_1 & sur\ \Omega \\
\dfrac{dy}{dt}(T,u) & = & 0 & sur\ \Omega \\
y & = & g_2 & sur\ \Sigma
\end{array}
\right. \tag{4.40}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{lcll}
\dfrac{d^2 p}{dt^2}(u) + A(t)p(u) & = & y'(u) - z_d & sur\ Q \\
p(0,u) & = & 0 & sur\ \Omega \\
p'(T,u) & = & 0 & sur\ \Omega \\
p & = & 0 & sur\ \Sigma
\end{array}
\right. \tag{4.41}
$$

$$
\langle \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} p'(u) + Nu, v-u\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{4.42}
$$

■

4.3.3 Observation : cas $z(v) = \mathcal{D}_0 y(T,v)$

On considère l'observation suivante :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\mathcal{D}_0 = identit\acute{e}\ de \quad L^2(\Omega),\ dans \quad \mathcal{H} = L^2(\Omega) \\
z(v) = y(T,v));
\end{array}
\right. \tag{4.43}
$$

La fonction coût est :

$$J(v) = ||y(T,v) - z_d||^2_{L^2(\Omega)} + \langle Nv, v\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} \quad \textit{où} \quad z_d \ \textit{donné} \ \textit{dans} \ \mathcal{H} = L^2(\Omega). \tag{4.44}$$

Le contrôle optimal u est caractérisé par :

$$\big\langle y(T,u)) - z_d, y(T,v) - y(T,u)\big\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle Nu, v-u\rangle_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{4.45}$$

■

L'état adjoint est formellement définit par

$$\begin{cases} \dfrac{d^2p}{dt^2}(u) - \Delta p(u) &= 0 \qquad\qquad \text{sur }]0,T[. \\ p(0,u) &= 0. \\ p'(T,u) &= y(T,u) - z_d. \end{cases} \tag{4.46}$$

Mais dans l'ordre d'appliquer le Théorème 4.3 ,$p'(T,u)$ doit $\hat{e}tre$ donné dans $H = H^{-1}(\Omega)$ qui conduit à l'hypothèse

$$\mathcal{D}_0 = \ \textit{identité} \ \textit{de} \ H = H^{-1}(\Omega) \ \textit{dans} \ \mathcal{H} = H^{-1}(\Omega). \tag{4.47}$$

Alors le problème (4.46) admet une solution unique.

Multiplions (4.46) par $y(t,v) - y(u,t)$ et appliquons la formule de Green nous aurons :

$$\Big\langle y(u,T) - z_d, y(T,u) - y(T,u)\Big\rangle + \int_0^T \Big\langle p(u), (\frac{d^2}{dt^2} - \Delta)(y(v) - y(u))\Big\rangle dt = 0$$

$$\Big\langle y(u,T) - z_d, y(T,u) - y(T,u)\Big\rangle + \big\langle p(u), v-u\big\rangle_{L^2(0,T,\Omega)} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned} \Big\langle y(u,T) - z_d, y(T,u) - y(T,u)\Big\rangle &= \big\langle -p(u), v-u\big\rangle \\ &= \big\langle -\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} p(u), v-u\big\rangle_{L^1(0,T,H^{-1}(\Omega))} \end{aligned} \tag{4.49}$$

d'où

$$\big\langle -\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} p(u), v-u\big\rangle_{L^1(0,T,H^{-1}(\Omega))} + \big\langle Nu, v-u\big\rangle_{L^1(0,T,H^{-1}(\Omega))} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{4.50}$$

et on a

$$\big\langle -\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} p(u) + Nu, v-u\big\rangle_{L^1(0,T,H^{-1}(\Omega))} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{4.51}$$

■

Théorème 4.5. *[38] On suppose que (2.4) , (2.5), (2.6) ont lieu .La fonction coût est donnée par (4.44) , $\mathcal{D}_0$ satisfaisant (4.44).Alors le contrôle optimal u est fourni par la résolution du système*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}y(u) + A(t)y(u) & = & f + u & \textit{sur } Q \\ y(0,u) & = & g_1 & \textit{sur } \Omega \\ y'(T,u) & = & 0 & \textit{sur } \Omega \\ y & = & g_2 & \textit{sur } \Sigma \end{cases} \tag{4.52}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2p}{dt^2}(u) + A(t)p(u) & = & 0 & \textit{sur } Q \\ p(T,u) & = & 0 & \textit{sur } \Omega \\ p'(T,u) & = & y(u,T) - z_d & \textit{sur } \Omega \\ p & = & 0 & \textit{sur } \Sigma \end{cases} \tag{4.53}$$

et

$$\big\langle -\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}p(u) + Nu, v-u\big\rangle_{L^1(0,T,H^{-1}(\Omega))} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \tag{4.54}$$

■

Remarque 4.3. *Lorsque* $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$ *, (4.54) se réduit à :*

$$-p(u) + Nu = 0. \tag{4.55}$$

■

Chapitre 2

Contrôle sans regrets , à moindres regrets pour les systèmes hyperboliques

1 Contrôle sans regrets , à moindres regrets pour les problèmes stationnaires

1.1 Introduction

Soit $\mathcal{V}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ de dual $\mathcal{V}'$ et soit l'opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$.

Soit $\mathcal{U}$ l'espace de Hilbert des contrôles et on donne $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V}')$.

Pour f donné dans $\mathcal{V}'$, et on désigne dans ce cadre par l' équation d'état relative au contrôle v l'équation :

$$Ay = f + Bv \tag{1.1}$$

Supposons que A est un isomorphisme de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$ et l'équation (1.1) admet une solution unique.

Considérons les situations où (1.1) n'est pas satisfaite , mais l'on a des informations sur $Ay - f - Bv$. De manière précise , soit F un espace de Hilbert , qui sera l'espace des incertitudes et soit $\beta \in \mathcal{L}(F, \mathcal{V}')$.

Soit par ailleurs :

$$G = espace\ \ de\ \ Hilbert\ \ des\ \ incertitudes\ \ g\ =\ sous\ \ espace\ \ vectoriel\ \ fermé\ \ de\ \ F. \tag{1.2}$$

On suppose

$$Ay - f - Bv \in \beta G. \tag{1.3}$$

Si $G = \{0\}$, on trouve le cas standart (1.1).

Si $G \neq \{0\}$, on revient à (1.3) qui admet une solution unique notée $y(v, g)$.

Pour chaque $g \in G$ on a ainsi un état possible , auquel on attache une fonction coût donnée par

$$J(v,g) = ||\mathcal{C}y(v,g) - z_d||^2_{\mathcal{H}} + N||v||^2_{\mathcal{U}} \tag{1.4}$$

Où $\mathcal{H}$ est l'espace de Hilbert des observations , $\mathcal{U}$ est l'espace des contrôles , $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{H})$, N est donné > 0 et z_d donné dans $\mathcal{H}$.

le problème de contrôle est de trouver

$$trouver \ \inf_{v\in\mathcal{U}} J(v,g). \tag{1.5}$$

donc :

Si $G = \{0\}$, le problème classique est $\inf\limits_{v\in\mathcal{U}} J(v,0)$

Si $G \neq \{0\}$, ceci n'a pas de sens pour $\inf\limits_{v\in\mathcal{U}} J(v,g) \quad \forall g \in G$ infini !

L'idée naturelle est procéder au calcul de

$$\inf_{v\in\mathcal{U}} \left(\sup_{g\in G} J(v,g) \right) \tag{1.6}$$

mais $\sup\limits_{g\in G} J(v,g) = +\infty$ .En effet $y(v,g) = A^{-1}(f + Bv + \beta g)$ et on aussi

$$y(v,g) = y(v,0) + y(0,g) - y(0,0)$$

et de là aboutit l'idée de J.L Lions $J(v,g) \leq J(0,g)$ donc $J(v,g) - J(0,g) \leq 0$

■

1.2 Contrôle sans regrets

1.2.1 Contrôle de Pareto

Définition 1.1. *(cf J.L.Lions [32])*
On dira que u est un contrôle de Pareto s'il n'existe pas d'élément $v \in \mathcal{U}$ tel que

$$\begin{cases} J(v,g) \leq J(u,g) \quad \forall g \in G \\ et \\ J(v,g_0) < J(u,g_0) \end{cases} \tag{1.7}$$

Théorème 1.1. *Soit u_0 donné dans $\mathcal{U}$.Il existe un contrôle de Pareto et un seul relatif à u_0 (u_0 points de Pareto)*

Preuve 1.1. *(Cf J.L.Lions [32]*

■

1.2.2 Contrôle sans regrets

Cette notion trouve son origine et appelation dans les travaux de J.L.Lions [27] ayant trait à l'étude des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles (systèmes distribués) à données incomplètes et où l'on peut appliquer des contrôles.

si v (resp g) désigne *le contrôle* (resp *la perturbation* ou *la pollution*) " la fonction coût " dépend de v et de g.On cherche , pour ces fonctions , les contrôles v , les meilleurs possibles qui , en tout cas , font " au moins aussi bien" ou " pas beaucoup , plus mal dans le pire des cas " que de ne rien faire du tout $v = 0$ .C'est pour cela que l'on introduit les contrôles *" sans regrets"* ou *"à moindres regrets"*.

Définition 1.2. *On dit que $u \in \mathcal{U}$ est un contrôle sans regrets relatif à u_0 pour (1.1) (1.4) si u est la solution du problème suivant*

$$\inf_{v\in\mathcal{U}} \sup_{g\in G} \big[J(v,g) - J(u_0,g)\big] \tag{1.8}$$

■

Remarque 1.1. *Lorsque $u_0 = 0$, la définition 1.2 se réduit à la définition du contrôle sans regrets de J.L.Lions [32]*

■

Lemme 1.1. *Pour tout u_0 fixé dans $\mathcal{U}$ et pour tout $v \in \mathcal{U}$ nous avons*

$$J(v,g) - J(u_0,g) = J(v,0) - J(u_0,0) + 2\big\langle \beta^*\zeta(v-u_0), g\big\rangle_{G',G} \quad \forall g \in G. \tag{1.9}$$

Notons par Λ : l'isomorphisme canonique de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}'$ où $\mathcal{C}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}',\mathcal{V}')$ et $\zeta(v) \in \mathcal{V}$ est défini par $v \in \mathcal{V}$ par

$$A^*\zeta(v) = \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\big(y(0,v) - y(0,0)\big). \tag{1.10}$$

A^* (resp β^*) est l'adjoint de A (resp β).

■

Preuve 1.2. *En effet nous avons*

$$J(v,g) - J(u_0,g) = J(v,0) - J(u_0,0) + 2\big\langle \mathcal{C}(y(v-u_0,0) - y(0,0), \mathcal{C}y(0,g) - y(0,0)\big\rangle_{\mathcal{H},\mathcal{H}} \quad \forall g \in G. \tag{1.11}$$

Introduisons maintenant $\zeta(v) \in \mathcal{V}$ défini par (1.10).Alors

$$\begin{aligned}\big\langle \mathcal{C}(y(v,0) - y(0,0), \mathcal{C}(y(0,g) - y(0,0))\big\rangle_{\mathcal{H},\mathcal{H}} &= \big\langle A^*\zeta(v), y(0,g) - y(0,0)\big\rangle \\ &= \big\langle \zeta(v), \beta g\big\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}'} \\ &= \big\langle \beta^*\zeta(v), g\big\rangle_{G',G}\end{aligned}$$

à noter que $A(y(0,g) - y(0,0)) = \beta g$

$\blacksquare$

Remarque 1.2. *Pour simplifier , on définit l'opérateur S tel que $S(v) = \beta^*\zeta(v)$, autrement dit*

$$\langle S(v), g\rangle = \langle \zeta(v), \beta g\rangle \quad \forall g \in G \tag{1.12}$$

d'où on a

$$J(v,g) - J(u_0,g) = J(v,0) - J(u_0,0) + 2\langle S(v-u_0), g\rangle_{G',G} \quad \forall g \in G \tag{1.13}$$

$\blacksquare$

Remarque 1.3. *Bien sûr , le problème (1.8) n'est défini que pour les contrôles $v \in \mathcal{U}$ tels que*

$$\sup_{g\in G}\Big[J(v,g) - J(u_0,g)\Big] < \infty \tag{1.14}$$

$\blacksquare$

Remarque 1.4. *D'aprés (1.13) cela est réalisé pour le contrôle sans regrets (et le contrôle de Pareto) si et seulement si $v \in K + u_0$ où*

$$K = \{w \in \mathcal{U}, \langle S(w), g\rangle = 0 \quad \forall g \in G\}$$

$\blacksquare$

Proposition 1.1. *[32] Soit $u_0 \in \mathcal{U}$, alors il existe un unique contrôle de Pareto relatif à u_0 .De plus c'est l'unique élément de l'ensemble $K + u_0$ qui minimise la fonctionnelle $J(v)$ sur $K + u_0$.*

$\blacksquare$

Le théorème montre bien l'équivalence entre le contrôle de Pareto et le contrôle sans regrets.

Théorème 1.2. *Soit $u_0 \in \mathcal{U}$ un contrôle donné , alors on a :*
$u \in \mathcal{U}$ est un contrôle de Pareto relatif à u_0 si et seulement si u est un contrôle sans regrets relatif à u_0

$\blacksquare$

Preuve
Soit u un contrôle de Pareto relatif à u_0 et soit $v \in K + u_0$.Alors

$$\big\langle S(u-u_0), g\big\rangle_{G',G} = 0 = \big\langle S(v-u_0), g\big\rangle_{G',G} \quad \forall g \in G. \tag{1.15}$$

et on a

$$\Big\langle J(u,0) \le J(v,0) \quad \text{d'aprés la proposition 1.1 , en utilisant (1.9)}$$

$$J(u,0) - J(u_0,0) + 2\big\langle S(u-u_0,g\big\rangle \leq \sup_{g\in G}\Big[J(v,g) - J(u_0,g)\Big]. \tag{1.16}$$

d'où

$$\sup_{g\in G}\Big[J(u,g) - J(u_0,g)\Big] \leq \sup_{g\in G}\Big[J(v,g) - J(u_0,g)\Big] \tag{1.17}$$

d'où

$$\sup_{g\in G}\Big[J(u,g) - J(u_0,g)\Big] = \sup_{g\in G}\Big[J(v,g) - J(u_0,g)\Big] \tag{1.18}$$

Maintenant , soit $v \in \mathcal{U} \setminus K + u_0$ .Il existe au moins un $g_0 \in G$ tel que $\langle S(v-u_0), g_0\rangle \neq 0$. Alors

$$\sup_{g\in G}\Big[J(u,g) - J(u_0,g)\Big] = \Big[J(v,0) - J(u_0,g)\Big] + 2\sup_{g\in G}\langle S(v-u_0,g\rangle = +\infty \tag{1.19}$$

A noter qur G est un espace vectoriel , et on a deux seules possibilités :

$$\sup_{g\in G}\big\langle S(w),g\big\rangle = 0 \quad ou \quad \sup_{g\in G}\big\langle S(w),g\big\rangle = +\infty$$

En effet $\lim\limits_{t\to+\infty}\big\langle S(v-u_0), tg_0\big\rangle = +\infty$

D'autre part,comme u est un contrôle de Pareto on a

$$J(u,g) - J(u_0,g) \leq 0 \quad \forall g \in G.$$

donc on a

$$J(u,g) - J(u_0,g) \leq 0 \leq \sup\big(J(v,0) - J(u_0,g)\big) \quad \forall g \in G. \tag{1.20}$$

Enfin

$$\sup_{g\in G} J(u,g) - J(u_0,g) = \inf_{v\in\mathcal{U}\setminus K+u_0}\big(J(v,0) - J(u_0,g)\big). \tag{1.21}$$

En conclusion : u est un contrôle sans regrets relatif à u_0.
Inversement : soit u est un contrôle sans regrets relatif à u_0.On a

$$\sup_{g\in G} J(u,g) - J(u_0,g) \leq \sup_{g\in G} J(v,g) - J(u_0,g). \;\; \forall v \in \mathcal{U} \tag{1.22}$$

Alors pour $v = u_0$ et le fait qu'on a (1.13) , il vient que

$$J(u,0) + \sup_{g\in G}\langle S(u-u_0,g\rangle \leq J(u_0,0) = c \;\; où \;\; c = constante \tag{1.23}$$

Comme $J(u,0) \geq 0$ ona $\sup\limits_{g\in G}\langle S(u-u_0,g\rangle \leq c$. On en déduit que $\langle S(u-u_0,g\rangle = 0$. Alors $u \in \mathcal{U} \setminus K + u_0$ et on a

$$J(u,0) \leq J(v,0) \quad \forall v \in K + u_0 \tag{1.24}$$

En conclusion u est un contrôle de Pareto relatif à u_0

Remarque 1.5. *par la proposition 1.1 , on sait qu'il existe un unique contrôle de Pareto relatif à u_0 , et c'est le seul qui minimise la fonctionnelle* $\inf J(v,0)$.

Dans la deuxième partie du Théorème 1.2 , il est prouvé que le contrôle sans regrets relatif à u_0 s'il existe , il minimise aussi cette fonctionnelle.En fait , il suffit de montrer l'existence d'un unique contrôle sans regrets relatif à u_0 et que le contrôle de Pareto et le contrôle sans regrets pour le problème (1.1) , (1.4) sont en réalité les mêmes.

■

1.3 Contrôle à moindres regrets

On s'intèresse à l'existence et la caracérisation de contrôle sans regrets (ou de Pareto), relatif à u_0, alors on va introduire la méthode à moindres regrets introduite par J.L.Lions [27]

On relaxe le problème (1.8), en introduisant pour $\gamma > 0$, cf [15] et [18] , le problème

$$\inf_{v\in\mathcal{U}} \sup_{g\in G} \Big[J(v,g) - J(u_0,g) - \gamma||g||_G^2\Big] \tag{1.25}$$

où $u_0 \in \mathcal{U}$ un contrôle donné , γ un paramètre strictement positif.

Définition 1.3. *La solution du problème (1.25) , si elle existe , sera dite le contrôle à moindres regrets relatif à u_0 , du problème (1.1) (1.4) .*

Remarque 1.6. *La notion de contrôle à moindres regrets est interprétée comme une approximation du contrôle sans regret.*

Remarque 1.7. *[22] Avec le* "le contrôle à moindres regrets" *on admet la possibilité de faire un choix de contrôle v "légerement mauvais" (car du contrôle à moindres regrets on a $J(v,g) - J(u_0,0) \leq \gamma||g||_G^2$ et non pas $J(v,g) - J(u_0,0) \leq 0$ comme dans le contrôle sans regrets) que de choisir mieux que u_0- mais pas beaucoup mieux - si on choisit γ assez petit .Le meilleur choix possible de v est alors donné par (1.25). Grâce à (1.13) , le problème perturbé (1.25) est équivalent à*

$$\inf_{v\in\mathcal{U}} \left[J(v,g) - J(u_0,g) + \sup_{g\in G}\left[\langle 2S(v-u_0), g\rangle - \gamma||g||_G^2\right]\right]$$

Remarque 1.8. *La perturbation (1.25) permet d'expliquer facilement le conjugué*

$$\sup_{g\in G} \Big\langle S(v-u_0), g\Big\rangle - \gamma||g||_G^2 \tag{1.26}$$

On trouve

$$\sup_{g\in G} \Big\langle S(v-u_0), g\Big\rangle - \gamma||g||_G^2 = \frac{1}{\gamma}||S(v-u_0)||_{G'}^2$$

■

Cela étant , si maintenant on convient d'identifier G à G' , alors le problème (1.25) prend la forme d'un problème d'optimisation standart avec une fonction coût quadratique

$$\inf_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{J}^{\gamma}(v) \tag{1.27}$$

où

$$\mathcal{J}^{\gamma}(v) = J(v,0) - J(u_0;0) + \frac{1}{\gamma}||S(v-u_0)||_G^2 \tag{1.28}$$

■

1.3.1 Existence et unicité du contrôle à moindres regrets

Proposition 1.2. *Le problème (1.27)-(1.28) admet une unique solution u_γ appelée contrôle à moindres regrets relatif à u_0*

■

Preuve :
Nous avons

$$\mathcal{J}^{\gamma}(v) \geq -J(u_0,0) \quad \forall v \in \mathcal{U} \tag{1.29}$$

Alors $d_\gamma = \inf_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{J}^{\gamma}(v)$ existe.

Soit alors $v_n = v_n(\gamma)$ une suite minimisante telle que $d_\gamma = \lim_{n \to \infty} \mathcal{J}^{\gamma}(v_n)$, on a :

$$-J(u_0,0) \leq \mathcal{J}^{\gamma}(v_n) = J(v_n,0) - J(u_0;0) + \frac{1}{\gamma}||S(v_n-u_0)||_G^2 \leq d_\gamma + 1 \tag{1.30}$$

Alors on en déduit les bornes

$$||v_n|| \leq c_\gamma, \frac{1}{\sqrt{\gamma}}||S(v_n-u_0)||_G \leq c_\gamma, ||\mathcal{C}y(v_n,0) - z_d||_{\mathcal{H}} \leq c_\gamma \tag{1.31}$$

où la constante c_γ (indépendante de n) n 'est pas la même à chaque fois.Ainsi il existe $u_\gamma \in \mathcal{U}$ tel que $v_n \rightharpoonup u_\gamma$ *dans* $\mathcal{U}$ .Aussi $y(v_n,0) \rightharpoonup y(u_\gamma,0)$ (la continuité par rapport aux données).Par conséquent $\mathcal{J}^{\gamma}(u_\gamma) = d_\gamma$ et on déduit aussi de la convexité stricte de la fonction coût $\mathcal{J}^{\gamma}$ que u_γ est unique

■

Théorème 1.3. *La solution u_γ du problème relaxé (1.27)- (1.28) converge faiblement dans $\mathcal{U}$ vers le contrôle sans regrets relatif à u_0*

Preuve[18]
Soit u_γ la solution de (1.27) - (1.28) , alors

$$J(u_\gamma,0)-J(u_0,0)+\frac{1}{\gamma}||S(v-u_0)||_G^2 \leq J(v,0)-J(u_0,0)+\frac{1}{\gamma}||S(v-u_0)||_G^2 \ \ \forall v \in \mathcal{U}. \quad (1.32)$$

En particulier pour $v = u_0$ on a

$$J(u_\gamma,0) - J(u_0,0) + \frac{1}{\gamma}||S(u_\gamma - u_0)||_G^2 \leq 0 \quad (1.33)$$

et de la structure de $J(u_\gamma, 0)$ dans (1.4) donne

$$||\mathcal{C}y(u_\gamma,0) - z_d||_{\mathcal{H}}^2 + N||u_\gamma||_{\mathcal{U}}^2 + \frac{1}{\gamma}||S(u_\gamma - u_0)||_G^2 \leq J(u_0,0) \quad (1.34)$$

On en déduit que la suite (u_γ) est borné dans $\mathcal{U}$. Alors on peut extraire une sous-suite encore notée (u_γ) qui converge faiblement vers un élément de $\mathcal{U}$, solution de (1.27).D'autre part pour tout $u \in \mathcal{U}$ on a

$$J(v,g) - J(u_0,g) - \gamma||g||_G^2 \leq J(v,g) - J(u_0,g) \ \forall g \in G \quad (1.35)$$

D'où

$$J(u_\gamma,g) - J(u_0,g) - \gamma||g||_G^2 \leq \sup_{g\in G}\big(J(v,g) - J(u_0,g)\big) \ \forall g \in G \quad (1.36)$$

Par passage à la limite $\gamma \longrightarrow 0$ on obtient

$$J(u,g) - J(u_0,g) - \gamma||g||_G^2 \leq \sup_{g\in G}\big(J(v,g) - J(u_0,g)\big) \ \forall g \in G \quad (1.37)$$

on déduit de (1.36) que u est un contrôle sans regrets relatif à u_0 .

■

1.3.2 Système d'optimalité du contrôle à moindres regrets

Proposition 1.3. *Le contrôle à moindres regrets u_γ solution de (1.27) - (1.28) est caractérisé par la solution unique $\{y_\gamma, \zeta_\gamma, \rho_\gamma, p_\gamma\}$du système d'optimalité*

$$\left\{\begin{array}{lllll} Ay_\gamma & = f + Bu_\gamma & A^*\zeta_\gamma & = & \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}y_\gamma - y(0,0)\Big). \\ A\rho_\gamma & = \dfrac{1}{\gamma}\beta^*\beta\zeta_\gamma & A^*\ p_\gamma & = & \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}y_\gamma - z_d\Big) + \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\rho_\gamma. \\ B^*p_\gamma + Nu_\gamma & = 0 & sur\, \mathcal{U}. & & \end{array}\right. \quad (1.38)$$

■

Preuve Soit u_γ la solution de (1.27) - (1.28) sur $\mathcal{U}$. La condition nécessaire d'Euler-Lagrange donne pour tout $w \in \mathcal{U}$

$$\Big\langle \mathcal{C}^*\Lambda\big(\mathcal{C}y(u_\gamma,0)-z_d\big), y(w,0)-y(0,0)\Big\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} + \Big\langle N(u_\gamma,w\Big\rangle_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} + 2\Big\langle\frac{1}{\gamma}S(u_\gamma),S(w)\Big\rangle_{G\times G} \geq 0 \tag{1.39}$$

En notant $y_\gamma = y(u_\gamma,0)$ et $\zeta_\gamma(v) = \beta S(v)$, on a

$$A^*\zeta_\gamma = \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}y_\gamma - y(0,0)\Big) \tag{1.40}$$

soit ρ_γ solution de

$$A\rho_\gamma = \frac{1}{\gamma}\beta\beta^*\zeta_\gamma \tag{1.41}$$

on introduit l'état adjoint $p_\gamma = p(u_\gamma,0)$ défini par

$$B^*p_\gamma = \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}y_\gamma - z_d\Big) + \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\rho_\gamma \tag{1.42}$$

donc

$$\big\langle \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p_\gamma + Nu_\gamma, w\big\rangle \geq 0 \quad \forall w \in \mathcal{U}. \tag{1.43}$$

Mais aussi

$$\big\langle \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p_\gamma + Nu_\gamma, w\big\rangle \leq 0 \quad \forall w \in \mathcal{U}. \tag{1.44}$$

d'où

$$\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p_\gamma + Nu_\gamma = 0. \tag{1.45}$$

■

1.3.3 Système d'optimalité singulier du contrôle sans regrets

Comme mentionné dans [32] , considérons l'opérateur $\mathcal{R}$ défini tout d'abord par la résolution du problème

$$A\rho = \beta g \quad \forall g \in G \quad \rho \in \mathcal{V} \tag{1.46}$$

puis

$$A^*\sigma = \mathcal{C}^*\mathcal{C}\rho \quad \sigma \in \mathcal{V} \tag{1.47}$$

et on pose

$$\mathcal{R}\sigma = \beta^*\sigma \tag{1.48}$$

On suppose que

$$||\mathcal{R}g||_{\hat{G}} \geq c||g||_G \quad \forall g \in G. \tag{1.49}$$

l'espace $\hat{G}$ est le complété de G dans F contenant les éléments $\mathcal{R}g$.

Remarque 1.9. *L'espace $\hat{G}$ est en fait le complété de G pour un sous espace $\big(H, ||.||_{||.||}\big)$, lequel il peut être plus grands que G.*

■

Théorème 1.4. *On suppose que (1.49) est vraie , le contrôle sans regrets u relatif à u_0 , solution du problème (1.8) est caractérisé par la solution unique $\{y, \lambda, \rho, p\}$*

$$\begin{cases} Ay & = & f + Bu. & & & \\ A\rho & = & \lambda & A^*p & = & \mathcal{C}^*\big(\mathcal{C}y - z_d\big) + \mathcal{C}^*\mathcal{C}\rho \\ B^*p + Nu & = & 0 & sur\ \mathcal{U}. & & \end{cases} \tag{1.50}$$

avec $\lambda \in G$

■

Preuve De la relation (1.34) et le Théorème 1.3 la suite u_γ converge faiblement dans $\mathcal{U}$ vers u l'unique contrôle sans regrets relatif à u_0 .L' opérateur B étant continu de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}'$, donc

$$Bu_\gamma \rightharpoonup Bu \ \ faiblement \ \ dans \ \ \mathcal{V}' \tag{1.51}$$

A partir de la proposition 1.3 la suite $\{Ay_\gamma\}$ est borné dans $\mathcal{V}'$ et comme A est un isomorphisme alors

$$Ay_\gamma \rightharpoonup Ay \ \ faiblement \ \ dans \ \ \mathcal{V}' \tag{1.52}$$

par passage à la limite dans la première equation de (1.38) on a $Ay = f + Bu$ et on déduit de la proposition 1.3 on a $B^*p_\gamma = -nu_\gamma$ est borné dans $\mathcal{V}'$.

Soit $\mathcal{R}(\dfrac{1}{\gamma}\beta^*\zeta_\gamma) = B^*p_\gamma$ alors de l'hypothèse (1.49) on déduit que $\{\frac{1}{\gamma}\beta^*\zeta_\gamma\}$ est borné dans G sous-espace fermé de F , donc $\frac{1}{\gamma}\beta^*\zeta_\gamma \rightharpoonup \lambda \in \hat{G} \subset F$.

d' où $A\rho = \beta\frac{1}{\gamma}\beta^*\zeta_\gamma$ est borné et alors $\{\rho_\gamma\}$ aussi borné grâce l'isomorphisme de A. donc

$$\rho_\gamma \rightharpoonup \rho \quad pour \quad \rho \in \mathcal{V}'$$

■

2 Contrôle sans regrets pour les equations hyperboliques

2.1 Notation

Dans cette partie on généralise la notion de contrôle sans regrets et à moindres regrets aux cas des problèms d'évolution notamment aux équations hyperboliques

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + Ay & = & f + Bv & \text{sur } Q = \Omega \times (0,T). \\ y(0) & = & y_0 + g_0 & \text{sur } \Omega \\ y'(0) & = & y_1 + g_1 & \text{sur } \Omega \\ y & = & 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \end{cases} \tag{2.1}$$

Supposons que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Γ réguliere.

Dans cette section on considère donc les espaces V, H avec $V \subset H$, V dense dans H et V séparable .

On reprend les mêmes données du *section* 2 du *chapitre*1 avec :

$A \in \mathcal{L}\Big(L^2(0,T;V), L^2(0,T;V')\Big)$
$f \in L^2(0,T;H)$.
$v \in \mathcal{U}$ espace de Hilbert des contrôles.
$B \in \mathcal{L}\Big(\mathcal{U}, L^2(0,T;H)\Big)$
Soit F un espace de Hilbert = espace des incertitudes tel que $V \subset H \subset F \subset V'$
Soit G_0 un sous espace fermé de V tels que $y_0 \in V$ et $g_0 \in G_0$.
Soit G_1 un sous espace fermé de H tels que $y_1 \in H$ et $g_1 \in G_1$.
Soit $y(v,g)$ solution de(2.1) où $g = (g_0, g_1)$.
soit $\mathcal{C} \in \mathcal{L}\Big(L^2(0,T;V), \mathcal{H}\Big)$ Où $\mathcal{H}$ est l'espace des observations.
Considérons la fonction coût

$$J(v,g) = ||y(v,g) - z_d||^2_{\mathcal{H}} + N||u||^2_{\mathcal{U}} \tag{2.2}$$

où z_d donné dans $\mathcal{H}$ et $N > 0$

2.2 Contrôle sans regrets

On prend dans le reste du chapitre $u_0 = 0$ et donc si v (resp g) désigne le contrôle (resp la perturbation ou la pollution) *" la fonction coût "* dépend de v et de g.On cherche , pour ces fonctions , les contrôles u ,dit *contrôle sans regrets* verifiant (1.25)

Lemme 2.1. *Pour tout $v \in \mathcal{U}$ nous avons*

$$J(v,g) - J(0,g) = J(v,0) - J(0,0) + 2\big\langle \zeta(v), g \big\rangle_{G',G} \quad \forall g \in G. \tag{2.3}$$

où $\zeta(v) \in L^2(0,T,V)$ est défini par $v \in \mathcal{U}$ par

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + A^*\zeta(v) = \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\big(y(v,0) - y(0,0)\big). \tag{2.4}$$

A^* est l'adjoint de A et Λ l'isomorphisme canonique de $\mathcal{H}$.dans $\mathcal{H}'$

Preuve :
En effet nous avons

$$J(v,g)-J(u_0,g) = J(v,0)-J(0,0)+2\big\langle\mathcal{C}(y(v,0)-y(0,0)),\mathcal{C}(y(0,g)-y(0,0))\big\rangle_{\mathcal{H},\mathcal{H}} \quad \forall g \in G. \tag{2.5}$$

Introduisons maintenant $\zeta(v) \in L^2(0,T,V)$ défini par (2.4).Alors

$$\begin{aligned}\big\langle\mathcal{C}(y(v,0)-y(0,0),\mathcal{C}(y(0,g)-y(0,0))\big\rangle_{\mathcal{H},\mathcal{H}} &= \big\langle\frac{d^2}{dt^2}\zeta + A^*\zeta(v), y(0,g)-y(0,0)\big\rangle \\ &= \big\langle\zeta(v), g\big\rangle_{G',G}\end{aligned}$$

on définit ainsi l'opérateur S tel que $S(v) = \zeta(v)$, autrement dit
$\langle S(v), g\rangle = \langle\zeta(v), g\rangle \quad \forall g \in G$

■

2.3 Contrôle à moindres regrets

Comme dans le numéro précédent , on relaxe le problème (1.25), en introduisant pour $\gamma > 0$, le problème devient

$$\inf_{v\in\mathcal{U}} \sup_{g\in G} \big[J(v,g) - J(0,g) - \gamma||g||_G^2\big] \tag{2.6}$$

et donc La solution du problème (2.6) , si elle existe ,est le contrôle à moindres regrets , du problème (2.1) (2.2) . Ainsi le problème perturbé (1.25) est équivalent à

$$\inf_{v\in\mathcal{U}} \left[J(v,g) - J(u_0,g) + \sup_{g\in G}\left[\langle 2S(v-u_0), g\rangle - \gamma||g||_G^2\right]\right]$$

On trouve

$$\sup_{g\in G}\langle S(v), g\rangle - \gamma||g||_G^2 = \frac{1}{\gamma}||S(v)||_G^2$$

Cela revient à trouver

$$\inf_{v\in\mathcal{U}} \mathcal{J}^\gamma(v) \tag{2.7}$$

où

$$\mathcal{J}^\gamma(v) = J(v,0) - J(0,0) + \frac{1}{\gamma}||S(v)||_G^2 \tag{2.8}$$

■

2.3.1 Existence et unicité du contrôle à moindres regrets

Proposition 2.1. *Le problème (2.7) - (2.8) admet une unique solution u_γ appelé contrôle à moindres regrets .*

Preuve :
La démonstration est analogue à celle faite pour la Proposition 1.2.

$\blacksquare$

2.4 Système d'optimalité du contrôle à moindres regrets

2.4.1 Observation : cas $z(v) = \mathcal{C}y(v)$

Le contrôle moindre regrets est caractérisé par

$$J(v,g)-J(0,g) = J(v,0)-J(0,0)+2\Big\langle \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}[y(v,0)-y(0,0)]\Big), y(0,g)-y(0,0)\Big\rangle \quad (2.9)$$

avec $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(L^2(0,T,V),\mathcal{H})$

On introduit l'état adjoint ζ_γ solution de :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{d^2\zeta_\gamma}{dt^2} + A^*\zeta_\gamma & = & \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}(y_\gamma - y(0,0))\Big) \\ \zeta_\gamma(T) & = & 0, \\ \zeta_\gamma^{'}(T) & = & 0. \end{array}\right. \quad (2.10)$$

donc(2.9) devient

$$J(v,g)-J(0,g) = J(v,0)-J(0,0)+2\Big\langle \frac{d^2}{dt^2}\zeta_\gamma + A^*\zeta_\gamma, y(0,g)-y(0,0)\Big\rangle \quad (2.11)$$

$\blacksquare$

aprés intégration par parties on obtient

$$J(v,g)-J(0,g) = J(v,0)-J(0,0)+2\big(\big\langle -\zeta'(0), g_0\big\rangle + \big\langle \zeta(0), g_1\big\rangle\big) \quad (2.12)$$

et d'aprés (1.25) on cherche le contrôle qui vérifie

$$\inf_{v\in\mathcal{U}}\sup_{g\in G}\big[J(v,g)-J(0,g)-\gamma||g||^2_G\big] \quad (2.13)$$

donc la fonctionnelle $\mathcal{J}^\gamma$ est défini par

$$\mathcal{J}^\gamma(v) = J(v,0)-J(0,0)+\frac{1}{\gamma}\Big[||\zeta(v)(0)||^2 - ||\zeta'(v)(0)||^2\Big] \quad (2.14)$$

$\blacksquare$

Soit u_γ la solution de (2.7)- (2.8) sur $\mathcal{U}$.La condition nécessaire d'Euler-Lagrange donne pour tout $w \in \mathcal{U}$

$$\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma)'.w = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}[\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma+\theta w) - \mathcal{J}^\gamma(u_\gamma)] \geq 0 \tag{2.15}$$

Donc le contrôle à moindre regrets est caractérisé par

$$\Big\langle \mathcal{C}y(u_\gamma,0)-z_d, \mathcal{C}\big(y(w,0)-y(0,0)\big)\Big\rangle_{\mathcal{H}} + \Big\langle Nu_\gamma, w\Big\rangle_{\mathcal{U}} - \Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta'(u_\gamma)(0), \zeta'(w)(0)\Big\rangle + \Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta(u_\gamma)(0), \zeta(w)(0)\Big\rangle \geq 0 \tag{2.16}$$

Puisque $\mathcal{C} \in \mathcal{L}\big(L^2(0,T;V),\mathcal{H}\big)$ alors $\mathcal{C}^* \in \mathcal{L}\big(\mathcal{H}', L^2(0,T;V')\big)$, notons par $\Lambda_{\mathcal{H}} = \Lambda$ l'isomorphisme canonique de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$ donc (2.16) est équivaut à

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big\langle \mathcal{C}^*\Lambda\big(\mathcal{C}y(u_\gamma,0)-z_d\big), y(w,0)-y(0,0)\Big\rangle_{V',V} dt \;&+\; \Big\langle Nu_\gamma, w\Big\rangle_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} - \Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta'(u_\gamma)(0), \zeta'(w)(0)\Big\rangle \\ &+\; \Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta(u_\gamma)(0), \zeta(w)(0)\Big\rangle \geq 0\end{aligned} \tag{2.17}$$

■

On introduit $\rho_\gamma = \rho(u_\gamma,0)$ solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\rho_\gamma + A\rho_\gamma &= 0 \\ \rho_\gamma(0) &= \dfrac{1}{\gamma}\zeta'(0), \\ \rho_\gamma'(0) &= \dfrac{1}{\gamma}\zeta(0). \end{cases} \tag{2.18}$$

Alors :

$$-\Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta'(u_\gamma)(0), \zeta'(w)(0)\Big\rangle + \Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta(u_\gamma)(0), \zeta(w)(0)\Big\rangle = -\Big\langle \rho_\gamma'(0), \zeta(w)(0)\Big\rangle + \Big\langle \rho_\gamma(0), \zeta'(w)(0)\Big\rangle \tag{2.19}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big\langle \rho, \zeta'' + A^*\zeta\Big\rangle &= \Big\langle \rho_\gamma'(0), \zeta(w)(0)\Big\rangle - \Big\langle \rho_\gamma(0), \zeta'(w)(0)\Big\rangle \\ &= \int_0^T \Big\langle \rho, \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}y(w,0) - y(0,0)\Big\rangle \\ &= \int_0^T \Big\langle \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\rho, y(w,0)-y(0,0)\Big\rangle\end{aligned} \tag{2.20}$$

et (2.17) devient

$$\int_0^T \Big\langle \mathcal{C}^*\Lambda\big(\mathcal{C}y(u_\gamma,0)-z_d\big) + \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\rho, y(w,0)-y(0,0)\Big\rangle dt + \Big\langle Nu_\gamma, w\Big\rangle_{\mathcal{U}} \tag{2.21}$$

■

On introduit $p_\gamma = p(u_\gamma, 0)$ solution du problème

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{d^2}{dt^2}p_\gamma + Ap_\gamma & = & \mathcal{C}^*\Lambda\big(\mathcal{C}y(u_\gamma,0) - z_d\big) + \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\rho_\gamma \\ p_\gamma(T) & = & 0 \\ p_\gamma^{'}(T) & = & 0 \end{array}\right. \tag{2.22}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left\langle \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}y(u_\gamma,0) - z_d\Big), y(w,0) - y(0,0)\right\rangle + \left\langle \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\rho_\gamma, y(w,0) - y(0,0)\right\rangle dt \\ &= \left\langle \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}y(u_\gamma,0) - z_d) + \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\rho_\gamma, y(w,0) - y(0,0)\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d^2}{dt^2}p_\gamma + Ap_\gamma, y(w,0) - y(0,0)\right\rangle \\ &= \left\langle B^*p, w\right\rangle_{\mathcal{U}',\mathcal{U}} \end{aligned} \tag{2.23}$$

puisque $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, L^2(0,T;H))$ alors $B^* \in \mathcal{L}(L^2(0,T;H), \mathcal{U}')$ dans la dernière égalité le produit scalaire est entre $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}$ donc on introduit l'isomorphisme canonique $\Lambda_\mathcal{U}$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}'$ et donc

$$\Lambda_\mathcal{U}^{-1}B^*p_\gamma = \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}y_\gamma - z_d\Big) + \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\rho_\gamma \tag{2.24}$$

d'où

$$\Lambda_\mathcal{U}^{-1}B^*p_\gamma + Nu_\gamma = 0. \tag{2.25}$$

d'où ■

Proposition 2.2. *Le contrôle à moindres regrets u_γ solution de (2.7)- (2.8) avec l'observation $z(v) = \mathcal{C}y(v)$est caractérisé par la solution unique $\{y_\gamma, \zeta_\gamma, \rho_\gamma, p_\gamma\}$du système d'optimalité*

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{d^2y_\gamma}{dt^2} + Ay_\gamma = f + Bu_\gamma & y_\gamma(0) = y_0 & y_\gamma'(0) = y_1 \\ \dfrac{d^2\zeta_\gamma}{dt^2} + A^*\zeta_\gamma = \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}y_\gamma - y(0,0)\Big) & \zeta_\gamma(T) = 0 & \zeta_\gamma^{'}(T) = 0. \\ \dfrac{d^2\rho_\gamma}{dt^2} + A\rho_\gamma = 0 & \rho_\gamma(0) = -\dfrac{1}{\gamma}\zeta_\gamma^{'}(0) & \rho_\gamma^{'}(0) = \dfrac{1}{\gamma}\zeta_\gamma(0). \\ \dfrac{d^2p_\gamma}{dt^2} + A^*p_\gamma = \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}y_\gamma - z_d\Big) + \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\rho_\gamma & p_\gamma(T) = 0 & p_\gamma'(T) = 0. \\ \Lambda_\mathcal{U}^{-1}B^*p_\gamma + Nu_\gamma = 0 \quad dans \quad \mathcal{U} & . & \end{array}\right. \tag{2.26}$$

$y_\gamma = y(u_\gamma, 0)$,$\zeta_\gamma = \zeta(u_\gamma, 0)$,$\rho_\gamma = \rho(u_\gamma, 0)$ *et* $p_\gamma = p(u_\gamma, 0)$

■

2.4.2 Système d'optimalité singulier du contrôle sans regrets

Par passage à la limite dans le système (2.9) on obtient le système d'optimalité pour le contrôle sans regrets , alors on a :

Théorème 2.1. *Le contrôle sans regrets u est caractérisé par l'unique solution* $\{y, \lambda_0, \lambda_1, \zeta, \rho, p\}$ *du système d'optimalité*

$$\begin{cases} y'' + Ay = f + Bu & y(0) = y_0 \quad y'(0) = y_1 \\ \zeta'' + A\zeta = \mathcal{C}^*\Lambda(\mathcal{C}y(u,0) - y(0,0)) & \zeta(T) = 0 \quad \zeta'(T) = 0 \\ \rho'' + A\rho = 0 & \rho(0) = \lambda_0 \quad \rho'(0) = \lambda_1 \\ p'' + Ap = \mathcal{C}^*\Lambda(\mathcal{C}y - z_d) + \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\rho & p(T) = 0 \quad p'(T) = 0 \\ \Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p + Nu = 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_0 = \lim_{\gamma \to 0} \frac{1}{\gamma}\zeta'(0) \quad \lambda_0 \in \hat{G}_0 \ \textit{ le complété de } G_0 \textit{ pour la norme de } G_0. \\ \lambda_1 = \lim_{\gamma \to 0} \frac{1}{\gamma}\zeta(0) \quad \lambda_1 \in \hat{G}_1 \ \textit{ le complété de } G_1 \textit{ pour la norme de } G_1. \end{cases} \tag{2.28}$$

■

2.4.3 Observation : cas $z(v) = \mathcal{C}y'(v)$

Proposition 2.3. *Le contrôle à moindres regrets* u_γ *solution de (2.7) - (2.8) pour l'observation* $z(v) = \mathcal{C}y'(v)$*est caractérisé par la solution unique* $\{y_\gamma, \zeta_\gamma, \rho_\gamma, p_\gamma\}$*du système d'optimalité*

$$\begin{cases} \frac{d^2y_\gamma}{dt^2} + Ay_\gamma = f + Bu_\gamma & y_\gamma(0) = y_0 & y'_\gamma(0) = y_1 \\ \frac{d^2}{dt^2}\zeta_\gamma + A\zeta_\gamma + \int_t^T A'(s)\zeta_\gamma(s)ds = \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}[y'_\gamma - y'(0,0)]\Big) & \zeta_\gamma(T) = 0 & \zeta'_\gamma(T) = 0 \\ \frac{d^2\rho_\gamma}{dt^2} + A\rho_\gamma = 0 & \rho_\gamma(0) = -\frac{1}{\gamma}\zeta'_\gamma(0) & \rho'_\gamma(0) = \frac{1}{\gamma}\zeta_\gamma(0) \\ \frac{d^2p_\gamma}{dt^2}A^* \ p_\gamma + \int_t^T A'(s)p_\gamma(s)ds = \mathcal{C}^*\Big(\mathcal{C}y'_\gamma - z_d\Big) + \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\rho_\gamma & p_\gamma(T) = 0 & p'_\gamma(T) = 0 \\ B^*p_\gamma + Nu_\gamma = 0 & \textit{dans } \mathcal{U}. \end{cases} \tag{2.29}$$

$y_\gamma = y(u_\gamma, 0)$,$\zeta_\gamma = \zeta(u_\gamma, 0)$,$\rho_\gamma = \rho(u_\gamma, 0)$ *et* $p_\gamma = p(u_\gamma, 0)$

■

Preuve La fonction coût est définie par

$$J(v) = ||\mathcal{C}y'(v,g) - z_d||^2_{\mathcal{H}} + N||V||^2_{\mathcal{U}} \tag{2.30}$$

Le contrôle à moindre regrets est caractérisé par

$$J(v,g)-J(0,g)=J(v,0)-J(0,0)+2\Big\langle \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}[y'(v,0)-y'(0,0)]\Big),y'(0,g)-y'(0,0)\Big\rangle \tag{2.31}$$

avec $\mathcal{C}\in\mathcal{L}(L^2(0,T;H),\mathcal{H})$ et Λ un isomorphisme canonique de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$

On introduit l'état adjoint ζ_γ solution de

$$\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{d^2\zeta_\gamma}{dt^2}+A\zeta_\gamma+\displaystyle\int_t^T A'(s)\zeta_\gamma(s)ds & = & \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}(y'_\gamma-y'(0,0))\Big)\\ \zeta_\gamma(T) & = & 0,\\ \zeta_\gamma^{'}(T) & = & 0.\end{array}\right. \tag{2.32}$$

En posant

$$q(t)=\int_t^T A'(s)\zeta(s)ds \tag{2.33}$$

et

$$a(t,\varphi,\psi)=(A(t)\varphi,\psi),\quad a'(s,\varphi,\psi)=(A'(s)\varphi,\psi)\ \ et\ \ A'(s)\in\mathcal{L}(V,H) \tag{2.34}$$

■

Formellement (car les produits scalaires n'ont pas de sens pour l'instant) (2.31) devient

$$J(v,g)-J(0,g)=J(v,0)-J(0,0)+2\int_0^T\Big[\Big\langle\frac{d^2}{dt^2}\zeta_\gamma+A\zeta_\gamma+q(t),y'(0,g)-y'(0,0)\Big\rangle\Big]dt \tag{2.35}$$

■

en utilisant (2.34) et intégrons par partie on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \Big\langle \frac{d^2}{dt^2}\zeta_\gamma + A\zeta_\gamma + q(t), y'(0,g) - y'(0,0)\Big\rangle dt &= \Big\langle -\zeta_\gamma'(0), g_1\Big\rangle \\
&+ \int_0^T \Big\langle -\zeta_\gamma', y''(0,g) - y''(0,0)\Big\rangle dt \\
&+ \int_0^T \Big\langle -\zeta_\gamma', A(y(0,g) - y(0,0))\Big\rangle dt \\
&+ \int_0^T \Big\langle \zeta_\gamma', A(y(0,g) - y(0,0))\Big\rangle dt \\
&+ \int_0^T \Big\langle A\zeta_\gamma, y'(0,g) - y'(0,0)\Big\rangle dt \\
&+ \int_0^T \Big\langle q(t), y'(0,g) - y'(0,0)\Big\rangle dt \\
&= \Big\langle -\zeta_\gamma'(0), g_1\Big\rangle \\
&+ \int_0^T a(t, \zeta_\gamma', y(0,g) - y(0,0))dt \\
&+ \int_0^T a(t, \zeta_\gamma', y(0,g) - y(0,0))dt \\
&+ \int_0^T a'(t, \zeta_\gamma, y(0,g) - y(0,0))dt \\
&= \Big\langle -\zeta_\gamma'(0), g_1\Big\rangle \\
&+ \int_0^T \frac{d}{dt} a(t, [\zeta_\gamma, y(0,g) - y(0,0))]dt \\
&= -\Big\langle \zeta_\gamma'(0), g_1\Big\rangle - \Big\langle \zeta_\gamma(0), g_0\Big\rangle
\end{aligned} \tag{2.36}$$

d'où

$$J(v,g) - J(0,g) = J(v,0) - J(0,0) + 2\Big\langle -\zeta_\gamma'(0), g_1\Big\rangle_{G_1} + 2\Big\langle -\zeta_\gamma(0), g_0\Big\rangle_{G_0} \tag{2.37}$$

■

Remarque 2.1. *le calcul formel est justifié de la même façon que dans (4.36)-(4.37)-(4.38)-(4.39) du chapitre 1.*

Comme le contrôle à moindres regrets est solution de

$$\inf_{v\in\mathcal{U}} \sup_{g\in G} \left[J(v,g) - J(0,g) - \gamma ||g||_G^2\right]$$

on aura pour $\gamma > 0$

$$\inf_{v\in\mathcal{U}} \sup_{g\in G} \left[J(v,g) - J(0,g) - \gamma ||g||_G^2\right] = \inf_{v\in\mathcal{U}} \left[J(v,0) - J(0,0) - \frac{1}{\gamma}||\zeta'(0)||^2 - \frac{1}{\gamma}||\zeta(0)||^2\right] \tag{2.38}$$

donc la fonctionnelle $\mathcal{J}^\gamma$ est défini par

$$\mathcal{J}^\gamma(v) = J(v,0) - J(0,0) - \frac{1}{\gamma}||\zeta'(v)(0)||^2 - \frac{1}{\gamma}||\zeta(v)(0)||^2 \tag{2.39}$$

Soit u_γ la solution de (2.7)- (2.8) sur $\mathcal{U}$.La condition nécessaire d'Euler-Lagrange donne pour tout $w \in \mathcal{U}$

$$\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma)'.w = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\Big[\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma+\theta w) - \mathcal{J}^\gamma(u_\gamma)\Big] \geq 0 \tag{2.40}$$

Donc le contrôle à moindre regret est caractérisé par

$$\begin{aligned}&\int_0^T \Big\langle \mathcal{C}y'(u_\gamma,0) - z_d, \mathcal{C}\big(y'(w,0) - y'(0,0)\big)\Big\rangle_{\mathcal{H}} dt + \Big\langle Nu_\gamma, w\Big\rangle_{\mathcal{U}} - \Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta'(u_\gamma)(0), \zeta'(w)(0)\Big\rangle \\ &-\Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta(u_\gamma)(0), \zeta(w)(0)\Big\rangle \geq 0\end{aligned} \tag{2.41}$$

Puisque $\mathcal{C} \in \mathcal{L}\big(L^2(0,T;H),\mathcal{H}\big)$ alors $\mathcal{C}^* \in \mathcal{L}\big(\mathcal{H}', L^2(0,T;H)\big)$, notons par $\Lambda_{\mathcal{H}} = \Lambda$ l'isomorphisme canonique de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$ donc (2.41) est équivaut à

$$\begin{aligned}&\int_0^T \Big\langle \mathcal{C}^*\Lambda\big(\mathcal{C}y'(u_\gamma,0) - z_d\big), y'(w,0) - y'(0,0)\Big\rangle_H + \Big\langle N(u_\gamma, w\Big\rangle_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} + \\ &-\Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta'(u_\gamma)(0), \zeta'(w)(0)\Big\rangle_{G_1} - \Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta(u_\gamma)(0), \zeta(w)(0)\Big\rangle_{G_0} \geq 0\end{aligned} \tag{2.42}$$

■

On introduit $\rho_\gamma = \rho(u_\gamma, 0)$ solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\rho_\gamma}{dt^2} + A\rho_\gamma + m(t) = 0 \\ \rho_\gamma(0) = \dfrac{1}{\gamma}\zeta'(0), \\ \rho_\gamma^{'}(0) = -\dfrac{1}{\gamma}\zeta(0). \end{cases} \tag{2.43}$$

où $m(t)$ est défini par $\big\langle \zeta, m(t)\big\rangle = \big\langle \rho, q(t)\big\rangle$ et $q(t) = \displaystyle\int_t^T A'(s)\zeta(s)ds$

Alors de :

$$\begin{aligned} -\Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta'(u_\gamma(0), \zeta'(u_\gamma(w)(0)\Big\rangle \quad &+ \quad \Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta(u_\gamma(0), \zeta(u_\gamma(w)(0)\Big\rangle \\ &= \quad -\Big\langle \rho_\gamma'(0), \zeta(w)(0)\Big\rangle + \Big\langle \rho_\gamma(0), \zeta'(w)(0)\Big\rangle \\ &= \quad \int_0^T \Big\langle \rho, \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}(y'(w,0) - y'(0,0))\Big\rangle dt \\ &= \quad \int_0^T \Big\langle \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\rho, y'(w,0) - y'(0,0)\Big\rangle dt \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\int_0^T \Big\langle \mathcal{C}y'(u_\gamma,0)-z_d, \mathcal{C}\big(y'(w,0)-y'(0,0)\big)\Big\rangle_{\mathcal{H}} dt + \Big\langle Nu_\gamma, w\Big\rangle_{\mathcal{U}} + \int_0^T \Big\langle \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\rho, y'(w,0)-y'(0,0)\Big\rangle dt \geq 0 \tag{2.45}$$

$$\int_0^T \Big\langle \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}y'(u_\gamma,0)-z_d\Big) + \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\rho, y'(w,0)-y'(0,0)\big)\Big\rangle_{\mathcal{H}} dt + \Big\langle Nu_\gamma, w\Big\rangle_{\mathcal{U}}, \geq 0 \tag{2.46}$$

■

On introduit $p_\gamma = p(u_\gamma, 0)$ solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{d^2p_\gamma}{dt^2} + Ap_\gamma + \displaystyle\int_t^T A'(s)p_\gamma(s)ds &= \mathcal{C}^*\Lambda\big(\mathcal{C}y'(u_\gamma,0)-z_d\big) + \mathcal{C}^*\mathcal{C}\rho_\gamma \\ p_\gamma(T) &= 0 \\ p_\gamma^{'}(T) &= 0 \end{cases} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Big\langle \mathcal{C}^*\Lambda\big(\mathcal{C}y(u_\gamma,0)-z_d\big), y(w,0)-y(0,0)\Big\rangle dt + \int_0^T \Big\langle \mathcal{C}^*\mathcal{C}\rho_\gamma, y'(w,0)-y'(0,0)\Big\rangle dt \\ &= \int_0^T \Big\langle \mathcal{C}^*\Lambda\big(\mathcal{C}y'(u_\gamma,0)-z_d\big) + \mathcal{C}^*\mathcal{C}\rho_\gamma, y'(w,0)-y'(0,0)\Big\rangle dt \\ &= \Big\langle \frac{d^2}{dt^2}p_\gamma + Ap_\gamma + \int_t^T A'(s)p_\gamma(s)ds, y'(w,0)-y'(0,0)\Big\rangle \\ &= \Big\langle B^*p, w\Big\rangle. \end{aligned} \tag{2.48}$$

dans la dernière égalité le produit scalaire est entre $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}$ don on introduit l'isomorphisme canonique $\Lambda_{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}'$ et donc

$$\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p_\gamma = \mathcal{C}^*\Lambda\Big(\mathcal{C}y_\gamma - z_d\Big) + \mathcal{C}^*\Lambda\mathcal{C}\rho_\gamma \tag{2.49}$$

d'où

$$\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p_\gamma + Nu_\gamma = 0. \tag{2.50}$$

■

2.4.4 Observation : cas $z(v) = \mathcal{D}_0(y(v,g)(T))$

On considère l'observation e suivante

$$\begin{cases} \mathcal{D}_0 \in \mathcal{L}(V, \quad \mathcal{H}); \\ z(v) = \mathcal{D}_0(y(v,g)(T))) \end{cases} \tag{2.51}$$

La fonction coût est :

$$J(v) = ||\mathcal{D}_0(y(v,g)(T)) - z_d||^2_{\mathcal{H}} + N||v||^2_{\mathcal{U}} \quad \textit{où} \quad z_d \ \textit{donné dans} \ \mathcal{H}. \tag{2.52}$$

d'où

$$J(v,g)-J(0,g) = J(v,0)-J(0,0)+2\Big\langle \mathcal{D}_0^*\Lambda\Big(\mathcal{D}_0[y(v,0)(T)-y(0,0)(T)]\Big), y(0,g)(T)-y(0,0)(T)\Big\rangle \tag{2.53}$$

■

On introduit formellement l'état adjoint ζ_γ solution de

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\zeta_\gamma}{dt^2} + A(t)\zeta_\gamma &= 0. \\ \zeta_\gamma(T) &= 0, \\ \zeta_\gamma'(T) &= \mathcal{D}_0^*\Lambda\Big(\mathcal{D}_0[y(v,0)(T) - y(0,0)(T)]\Big). \end{cases} \tag{2.54}$$

(2.53) devient :

$$J(v,g) - J(0,g) = J(v,0) - J(0,0) + 2\Big\langle \zeta_\gamma'(T), y(0,g)(T) - y(0,0)(T)\Big\rangle \tag{2.55}$$

et

$$\Big\langle \zeta_\gamma'' + A\zeta_\gamma, y(0,g) - y(0,0)\Big\rangle = \Big\langle \zeta_\gamma'(T), y(0,g)(T) - y(0,0)(T)\rangle - \Big\langle \zeta_\gamma'(0), g_0\Big\rangle + \Big\langle \zeta_\gamma(0), g_1\Big\rangle \tag{2.56}$$

(2.53) est équivaut à :

$$J(v,g) - J(0,g) = J(v,0) - J(0,0) + 2\Big\langle \zeta_\gamma'(0), g_0\Big\rangle - 2\Big\langle \zeta_\gamma(0), g_1\Big\rangle \tag{2.57}$$

d'où pour $\gamma > 0$ la fonctionnelle $\mathcal{J}^\gamma(v)$ sera défini par

$$\mathcal{J}^\gamma(v) = J(v,0) - J(0,0) + 2\Big\langle \zeta_\gamma'(0), g_0\Big\rangle + 2\Big\langle \zeta_\gamma(0), g_1\Big\rangle - \gamma||g||^2 \tag{2.58}$$

$$\mathcal{J}^\gamma(v) = J(v,0) - J(0,0) + \frac{1}{\gamma}\Big[||\zeta'(v)(0)||^2 - ||\zeta(v)(0)||^2\Big] \tag{2.59}$$

■

Soit u_γ la solution de (2.7)- (2.8) sur $\mathcal{U}$.La condition nécessaire d'Euler-Lagrange donne pour tout $w \in \mathcal{U}$

$$\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma)'.w = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\gamma}\Big[\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma + \theta w) - \mathcal{J}^\gamma(u_\gamma)\Big] \geq 0 \tag{2.60}$$

Donc le contrôle à moindres regrets est caractérisé par

$$\Big\langle \mathcal{D}_0 y(u_\gamma,0)(T) - z_d, \mathcal{D}_0\big(y(w,0) - y(0,0)\big)(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}} + \\ + \Big\langle Nu_\gamma, w\Big\rangle_{\mathcal{U}} + \Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta'(u_\gamma)(0), \zeta'(w)(0)\Big\rangle - \Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta(u_\gamma)(0), \zeta(w)(0)\Big\rangle \geq 0 \tag{2.61}$$

Puisque $\mathcal{D}_0 \in \mathcal{L}(V,\mathcal{H})$ alors $\mathcal{D}_0^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}',V')$, notons par $\Lambda_{\mathcal{H}} = \Lambda$ l'isomorphisme canonique de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$ donc (2.61) est équivaut à

$$\begin{aligned}&\int_0^T \Big\langle \mathcal{D}_0^*\Lambda\big(\mathcal{D}_0 y(u_\gamma,0)(T)-z_d\big), y(w,0)-y(0,0)(T)\Big\rangle_{V',V} + \Big\langle Nu_\gamma, w\Big\rangle_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \\ &+\Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta'(u_\gamma)(0),\zeta'(w)(0)\Big\rangle - \Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta(u_\gamma)(0),\zeta(w)(0)\Big\rangle \geq 0\end{aligned} \tag{2.62}$$

■

On introduit $\rho_\gamma = \rho(u_\gamma,0)$ solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\rho_\gamma}{dt^2} + A\rho_\gamma &= 0 \\ \rho_\gamma(0) &= \dfrac{1}{\gamma}\zeta'(0), \\ \rho_\gamma'(0) &= -\dfrac{1}{\gamma}\zeta(0). \end{cases} \tag{2.63}$$

Alors de :

$$\begin{aligned}&\int_0^T \Big\langle \mathcal{D}_0^*\Lambda\big(\mathcal{D}_0 y(u_\gamma,0)(T)-z_d\big), y(w,0)-y(0,0)\Big\rangle \;+\; \Big\langle Nu_\gamma, w\Big\rangle + \Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta'(u_\gamma)(0),\zeta'(w)(0)\Big\rangle \\ &-\Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta(u_\gamma)(0),\zeta(w)(0)\Big\rangle \geq 0\end{aligned} \tag{2.64}$$

on a

$$\langle\frac{1}{\gamma}\zeta'(u_\gamma)(0),\zeta'(w)(0)\rangle + \langle\frac{1}{\gamma}\zeta(u_\gamma)(0),\zeta(w)(0)\rangle = \langle \mathcal{D}_0^*\mathcal{D}_0\rho_\gamma(T), y(w,0)-y(0,0)\rangle \tag{2.65}$$

■

On introduit $p_\gamma = p(u_\gamma,0)$ solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{d^2p_\gamma}{dt^2} + Ap_\gamma &= 0 \\ p_\gamma(T) &= 0 \\ p_\gamma'(T) &= \mathcal{D}_0^*\Lambda\big(\mathcal{D}_0 y(u_\gamma,0)-z_d\big) + \mathcal{D}_0^*\mathcal{D}_0\rho_\gamma(T) \end{cases} \tag{2.66}$$

$$
\begin{aligned}
\Big\langle \mathcal{D}_0^*\Lambda\big(\mathcal{D}_0 y(u_\gamma(T),0) - z_d\big), (y(w,0) - y(0,0))(T)\Big\rangle & \\
&+ \Big\langle \mathcal{D}_0^*\mathcal{D}_0\rho_\gamma(T), y(w,0) - y(0,0)(T)\Big\rangle \\
&= \Big\langle \mathcal{D}_0^*\Lambda\big(\mathcal{D}_0 y(u_\gamma,0)(T) - z_d\big) + \\
&+ \mathcal{D}_0^*\mathcal{D}_0\rho_\gamma(T), y(w,0) - y(0,0)(T)\Big\rangle \\
&= \Big\langle \frac{d^2}{dt^2}p_\gamma + Ap_\gamma, y(w,0) - y(0,0)(T)\Big\rangle \\
&= \Big\langle -\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u), w\Big\rangle \qquad (2.67)
\end{aligned}
$$

■

Proposition 2.4. *Le contrôle à moindres regrets u_γ solution de (2.7)-(2.8) est caractérisé par la solution unique $\{y_\gamma, \zeta_\gamma, \rho_\gamma, p_\gamma\}$du système d'optimalité*

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\dfrac{d^2y_\gamma}{dt^2} + Ay_\gamma = f + Bu_\gamma & y_\gamma(0) = y_0 & y_\gamma'(0) = y_1 \\
\dfrac{d^2\zeta_\gamma}{dt^2} + A^*\zeta_\gamma = 0 & \zeta_\gamma(T) = 0 & \zeta_\gamma'(T) = \mathcal{D}_0^*\Lambda\Big(\mathcal{D}_0[y_\gamma - y(0,0)](T)\Big) \\
\dfrac{d^2\rho_\gamma}{dt^2} + A\rho_\gamma = 0 & \rho_\gamma(0) = \dfrac{1}{\gamma}\zeta_\gamma'(0) & \rho_\gamma'(0) = -\dfrac{1}{\gamma}\zeta_\gamma(0) \\
\dfrac{d^2p_\gamma}{dt^2}A^*p_\gamma = 0 & p_\gamma(T) = 0 & p_\gamma'(T) = \mathcal{D}_0^*\Lambda\Big(\mathcal{D}_0 y_\gamma(T) - z_d\Big) + \mathcal{D}_0^*\Lambda\mathcal{D}_0\rho_\gamma(T \\
B^*p_\gamma + Nu_\gamma = 0 & \quad dans \ \ \mathcal{U}. &
\end{array}
\right.
\qquad (2.68)
$$

$y_\gamma = y(u_\gamma,0)$,$\zeta_\gamma = \zeta(u_\gamma,0)$,$\rho_\gamma = \rho(u_\gamma,0)$ *et* $p_\gamma = p(u_\gamma,0)$

■

2.4.5 Observation : cas $z(v) = \mathcal{D}(y'(v,g)(T))$

On considère l'observation suivante

$$\begin{cases} \mathcal{D} \in \mathcal{L}(H, \ \mathcal{H}); \\ z(v) = \mathcal{D}(y'(T,v)) \end{cases} \tag{2.69}$$

La fonction coût est :

$$J(v) = ||\mathcal{D}y'(v,g)(T) - z_d||^2_{\mathcal{H}} + \langle Nv, v\rangle_{\mathcal{U}} \quad \text{où} \quad z_d \ \text{donné} \ \text{dans} \ \mathcal{H}. \tag{2.70}$$

d'où

$$J(v,g)-J(0,g) = J(v,0)-J(0,0)+2\Big\langle \mathcal{D}^*\Lambda\Big(\mathcal{D}[y'(v,0)(T)-y'(0,0)(T)]\Big), y'(0,g)(T)-y'(0,0)(T)\Big\rangle \tag{2.71}$$

On introduit formellement l'état adjoint ζ_γ solution de

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\zeta_\gamma}{dt^2} + A(t)\zeta_\gamma & = & 0. \\ \zeta_\gamma(T) & = & \mathcal{D}^*\Lambda\Big(\mathcal{D}[y(v,0)(T) - y(0,0)(T)]\Big). \\ \zeta'_\gamma(T) & = & 0 \end{cases} \tag{2.72}$$

donc :

$$J(v,g) - J(0,g) = J(v,0) - J(0,0) + 2\Big\langle \zeta_\gamma(T), y'(0,g)(T) - y'(0,0)(T)\Big\rangle \tag{2.73}$$

et

$$\Big\langle \zeta''_\gamma + A\zeta_\gamma, y(0,g)-y(0,0)\Big\rangle = -\Big\langle \zeta_\gamma(T), y'(0,g)(T)-y'(0,0)(T)\rangle - \Big\langle \zeta'_\gamma(0), g_0\Big\rangle + \Big\langle \zeta_\gamma(0), g_1\Big\rangle \tag{2.74}$$

(2.71) est équivaut à :

$$J(v,g) - J(0,g) = J(v,0) - J(0,0) - 2\Big\langle \zeta'_\gamma(0), g_0\Big\rangle + 2\Big\langle \zeta_\gamma(0), g_1\Big\rangle \tag{2.75}$$

d'où pour $\gamma > 0$ la fonctionnelle $\mathcal{J}^\gamma(v)$ sera défini par

$$\mathcal{J}^\gamma(v) = J(v,0) - J(0,0) - 2\Big\langle \zeta'_\gamma(0), g_0\Big\rangle + 2\Big\langle \zeta_\gamma(0), g_1\Big\rangle - \gamma||g||^2 \tag{2.76}$$

$$\mathcal{J}^\gamma(v) = J(v,0) - J(0,0) + \frac{1}{\gamma}\Big[||\zeta(v)(0)||^2 - ||\zeta'(v)(0)||^2\Big] \tag{2.77}$$

Soit u_γ la solution de (2.7)- (2.8) sur $\mathcal{U}$.La condition nécessaire d'Euler-Lagrange donne pour tout $w \in \mathcal{U}$

$$\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma)'.w = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\gamma}\Big[\mathcal{J}^\gamma(u_\gamma + \theta w) - \mathcal{J}^\gamma(u_\gamma)\Big] \geq 0 \tag{2.78}$$

Donc le contrôle à moindres regrets est caractérisé par

$$\Big\langle \mathcal{D}y'(u_\gamma,0)(T)-z_d, \mathcal{D}\big(y'(w,0)-y'(0,0)\big)(T)\Big\rangle_{\mathcal{H}} + \Big\langle Nu_\gamma, w\Big\rangle_{\mathcal{U}} - \Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta(u_\gamma)(0), \zeta'(w)(0)\Big\rangle + \Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta'(u_\gamma)(0), \zeta(w)(0)\Big\rangle \geq 0 \tag{2.79}$$

Puisque $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(H, \mathcal{H})$ alors $\mathcal{D}^* \in \mathcal{L}\big(\mathcal{H}', H\big)$, notons par $\Lambda_{\mathcal{H}} = \Lambda$ l'isomorphisme canonique de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}'$ donc (2.79) est équivaut à

$$\int_0^T \Big\langle \mathcal{D}^*\Lambda\big(\mathcal{D}_0 y(u_\gamma,0)(T)-z_d\big), y(w,0)-y(0,0)(T)\Big\rangle_{V',V} + \Big\langle N(u_\gamma, w\Big\rangle_{\mathcal{U},\mathcal{U}} + \Big\langle -\frac{1}{\gamma}\zeta(u_\gamma)(0), \zeta'(w)(0)\Big\rangle + \Big\langle \frac{1}{\gamma}\zeta'(u_\gamma)(0), \zeta(w)(0)\Big\rangle \geq 0 \tag{2.80}$$

■

On introduit $\rho_\gamma = \rho(u_\gamma, 0)$ solution du problème

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{d^2}{dt^2}\rho_\gamma + A\rho_\gamma & = & 0 \\ \rho_\gamma(0) & = & -\dfrac{1}{\gamma}\zeta(0), \\ \rho_\gamma^{'}(0) & = & \dfrac{1}{\gamma}\zeta'(0). \end{array}\right. \tag{2.81}$$

Alors de :

$$\int_0^T \Big\langle \mathcal{D}^*\Lambda\big(\mathcal{D}y'(u_\gamma,0)(T)-z_d\big), y'(w,0)-y'(0,0)\Big\rangle + \Big\langle N(u_\gamma, w\Big\rangle + \Big\langle -\tfrac{1}{\gamma}\zeta(u_\gamma)(0), \zeta'(w)(0)\Big\rangle + \Big\langle \tfrac{1}{\gamma}\zeta'(u_\gamma)(0), \zeta(w)(0)\Big\rangle \geq 0 \tag{2.82}$$

on a

$$\langle -\frac{1}{\gamma}\zeta(u_\gamma)(0), \zeta'(w)(0)\rangle + \langle \frac{1}{\gamma}\zeta'(u_\gamma)(0), \zeta(w)(0)\rangle = \langle \mathcal{D}^*\Lambda\mathcal{D}\rho_\gamma(T), y'(w,0)-y'(0,0)\rangle \tag{2.83}$$

■

On introduit $p_\gamma = p(u_\gamma, 0)$ solution du problème

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{d^2 p_\gamma}{dt^2} + Ap_\gamma & = & 0 \\ p_\gamma(T) & = & \mathcal{D}^*\Lambda\big(\mathcal{D}y'(u_\gamma,0)-z_d\big) + \mathcal{D}^*\Lambda\mathcal{D}\rho_\gamma(T) \\ p_\gamma^{'}(T) & = & 0 \end{array}\right. \tag{2.84}$$

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle \mathcal{D}^*\Lambda\big(\mathcal{D}y'(u_\gamma(T),0)-z_d\big),(y'(w,0)-y'(0,0))(T)\Big\rangle+\Big\langle \mathcal{D}^*\mathcal{D}\rho_\gamma(T),y'(w,0)-y'(0,0)(T)\Big\rangle\\
&=\Big\langle \mathcal{D}^*\Lambda\big(\mathcal{D}y'(u_\gamma,0)(T)-z_d)+\mathcal{D}^*\mathcal{D}\rho_\gamma(T),y'(w,0)-y'(0,0)(T)\Big\rangle\\
&=\Big\langle \frac{d^2}{dt^2}p_\gamma+Ap_\gamma,y'(w,0)-y'(0,0)(T)\Big\rangle\\
&=\Big\langle -\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p(u),w\Big\rangle
\end{aligned}
\tag{2.85}
$$

■

Proposition 2.5. *Le contrôle à moindres regrets u_γ solution de (2.7) - (2.8) est caractérisé par la solution unique $\{y_\gamma,\zeta_\gamma,\rho_\gamma,p_\gamma\}$du système d'optimalité*

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\dfrac{d^2y_\gamma}{dt^2}+Ay_\gamma=f+Bu_\gamma & y_\gamma(0)=y_0 & y'_\gamma(0)=y_1\\
\dfrac{d^2\zeta_\gamma}{dt^2}+A^*\zeta_\gamma=0 & \zeta_\gamma(T)=\mathcal{D}^*\Lambda\Big(\mathcal{D}[y_\gamma-y(0,0)](T)\Big) & \zeta'_\gamma(T)=0\\
\dfrac{d^2\rho_\gamma}{dt^2}+A\rho_\gamma=0 & \rho_\gamma(0)=-\dfrac{1}{\gamma}\zeta_\gamma(0) & \rho'_\gamma(0)=\dfrac{1}{\gamma}\zeta'_\gamma(0)\\
\dfrac{d^2p_\gamma}{dt^2}A^*\ p_\gamma=0 & p_\gamma(T)=\mathcal{D}^*\Lambda\Big(\mathcal{D}y_\gamma(T)-z_d\Big)+\mathcal{D}^*\Lambda\mathcal{D}\rho_\gamma(T) & p'_\gamma(T)=0\\
\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p_\gamma+Nu_\gamma=0 & \quad dans\ \ \mathcal{U}. &
\end{array}
\right.
\tag{2.86}
$$

$y_\gamma=y(u_\gamma,0)$,$\zeta_\gamma=\zeta(u_\gamma,0)$,$\rho_\gamma=\rho(u_\gamma,0)$ *et* $p_\gamma=p(u_\gamma,0)$

■

Deuxième partie

Application de la théorie de la Sentinelle au problème hyperbolique

Chapitre 3

Sentinelle distribuée pour les systèmes hyperboliques

1 Rappels sur la notion de Sentinelle

L'objectif est de trouver une méthode pour calculer les termes de *pollution*.Plusieurs méthodes peuvent être utilisées .La célèbre est celle des moindres carrés.Cependant avec cette méthode les termes de pollution et les termes manquants $\tau\hat{y}$, $\lambda\hat{\xi}$ sont calculés ensemble et nous ne pouvons pas vraiment les séparer (voir Lions [28] , et Ainseba et al. [25] pour le cas parabolique.

La méthode de la sentinelle de Lions que nous utilisons ici est une méthode de détection d'un paramètre indépendemment des autres.

A noter que dans le cas de l'équation de la chaleur , l'observatoir $\mathcal{O}$ peut être choisi arbitrairement petit ainsi que le temps final T.

Cependant la situation est différente pour les équations des ondes.Nous devrions prendre T dépendant de la géometrie de $\mathcal{O}$.

Toutes les considérations ci-dessus sont intuitives et peuvent être expliquées : la pollution exercés sur une une partie de la frontière Γ_0 ne peut être détectés par une observation dans $\mathcal{O}$ avant sa propagation.D'un autre coté , les termes de pollution exercés dans l'intervalle de temps $(T-\alpha, T)$ n' ont pas d'influence sur l'observation pour α petit.

■

1.1 Données

Les systèmes distribuès considérés ici dans ce chapitre sont ceux qui sont décrits par des équations aux dérivées partielles.

Soit alors Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$.

Considerons un système d'évolution dans Ω suivant de structure générale de la forme

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay + f(y) = \xi + \lambda\hat{\xi} \quad dans \quad \Omega \times (0, T) \tag{1.1}$$

où

A est un opérateur différentiel elleptique du 2eme ordre.
L'opérateur $y \longrightarrow f(y)$ est non linéaire.
y étant est l'état du système , qui pourrait être un scalaire ou un vecteur.

- **Termes sources** :

  Les termes du deuxième membre de (1.1) sont appelés *termes sources* où

$$\xi \text{ est connu dans un espace de Hilbert.}$$

  Le terme $\lambda\hat{\xi}$ n'est pas connu , on sait seulement qu'il demeure dans la boule unité de centre l'origine et de rayon λ

$$||\hat{\xi}|| \leq 1 \tag{1.2}$$

  Le terme λ est supposé " petit" dans $\mathbb{R}$.

- **Terme de pollution** :

  Le terme $\lambda\hat{\xi}$ est dit terme de *pollution* dont on cherche à obtenir des informations.

- **Conditions intiales :**

  La condition initiale s'exprime par :

$$y(0) = y^0 + \tau\hat{y}^0 \tag{1.3}$$

  où y^0 est donné dans un espace de Hilbert et $\hat{y}^0$ demeure dans la boule unité d'un espace de Hilbert .

  Le terme τ est supposé aussi " petit" dans $\mathbb{R}$.

$$||\hat{y}^0|| \leq 1 \tag{1.4}$$

- **systèmes à données manquantes :**

  Les conditions initiales sont incomplètes .Il s'agit donc de systèmes à données manquantes.

- **Conditions aux limites :**

  On suppose que les conditions aux limites sont connues.

$$y = 0 \quad sur \quad \Sigma = \Gamma \times (0, T) \tag{1.5}$$

- **Equation d'état :**

  L'équation d'état est donc décrite par la donnée de (1.1) , (1.3) , (1.5). Pour λ et τ donnés , ainsi que $\hat{\xi}$ et $\hat{y}^0$, l'équation admet une solution unique noté $y(x, t, \lambda, \tau)$

■

1.2 Observation du système

On "observe " l'état du système sur un observatoir $\mathcal{O}$, et pendant un temps (t_0, t_1) avec

$$0 \leq t_0 < t_1 \leq T$$

L'observatoir $\mathcal{O}$ doit être considéré *"petit"* et il peut être soit :

- Observatoir distribué

$$\mathcal{O} \subset \Omega. \tag{1.6}$$

- Observatoir frontière

$$\mathcal{O} \subset \Gamma = \partial\Omega. \tag{1.7}$$

- Observatoir dépendant du temps (cas d'un bateau observatoir)

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(t) \ t \in (t_0, t_1) \tag{1.8}$$

Pour fixer les idées , on se place dans le cas (1.6) .

On observe y (l'état du système) sur $\mathcal{O}$ pendant l'intervalle de temps T. Donc théoriquement , on va disposer de

$$y(x, t, \lambda, \tau) = y_{obs} = m_0(x, t) \quad sur \quad \mathcal{O} \times (0, T). \tag{1.9}$$

lorsque l'observation est entachée de bruit alors :

$$y(x, t, \lambda, \tau) = y_{obs} = m_0 + \sum_{i=1}^{N} \beta_i m_i \quad sur \quad \mathcal{O} \times (0, T). \tag{1.10}$$

où les fonctions m_i sont connues mais où les β_i ne sont pas connus.On sait seulement que les β_i sont"petits". Les coefficients β_i sont les termes de bruit.

■

1.3 Sentinelles

1.3.1 Définitions

Soit h_0 une fonction donnée avec

$$h_0 \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T) \tag{1.11}$$

Soit par ailleurs une fonction w à dèterminer avec

$$w \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T) \tag{1.12}$$

On considère la fonctionnelle

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 + w)y(x,t,\lambda,\tau)dxdt = S(\lambda,\tau) \tag{1.13}$$

pour $y_{obs} = m_0$ et si w est connu on a

$$S_{obs}(\lambda,\tau) = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 + w)y_{obs}(x,t,\lambda,\tau)dxdt = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 + w)m_0(x,t)dxdt \tag{1.14}$$

On dira que la fonctionnelle $S(\lambda,\tau)$ est une sentinelle définie par h_0 si les condtions suivantes ont lieu :

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}|_{\lambda=0,\tau=0} = 0 \quad \forall \hat{y}^0 \tag{1.15}$$

$$||w||_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} = min \tag{1.16}$$

Remarque 1.1.

1. *h_0 étant donné , les conditions (1.15) ,(1.16) définissent w de manière unique.On dira alors que S est la sentinelle définie par h_0.*
2. *La condition(1.15) exprime que la sentinelle n'est pas affectée par l'absence d'informations sur les termes manquants.*
3. *si h_0 vérifie*

$$h_0 \geq 0, \qquad \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} h_0 dxdt = 1 \;\; alors \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} h_0 y(x,t,\lambda,\tau)dxdt \tag{1.17}$$

est une moyenne .La condition (1.16) exprime que la sentinelle est aussi proche que possible d'une moyenne.

■

Remarque 1.2. *Désignons par y_0 solution du système suivant*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_0}{\partial t} + Ay_0 + f(y_0) & = \xi \quad sur\ \Omega \times (0,T) & (1.18) \\ y_0(0) & = y^0 \quad sur\ \Omega & (1.19) \\ y_0 & = 0 \quad sur\ \Sigma. & (1.20) \end{cases}$$

On suppose que l'on peut calculer y_0.Alors si w est calculé

$$S(0,0) = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 + w) y_0 dxdt \tag{1.21}$$

est connu.On a

$$S(\lambda,\tau) \approx S(0,0) + \lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0). \tag{1.22}$$

de sorte que si y_{obs} est connu , on dispose alors de l'information

$$\lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) \approx \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 + w) y_{obs} dxdt - S(0,0). \tag{1.23}$$

■

Donc le but est de chercher à obtenir des informations sur $\lambda\hat{\xi}$, sans chercher des précisions sur les données manquantes $\tau\hat{y}^0$, (1.23) donnera une information sur $\lambda\hat{\xi}$ et cela justifie le recours à la construction de la sentinelle.

■

1.4 Etat adjoint

1.4.1 La condition d'"insensibilité"

On pose $\dfrac{\partial y}{\partial \tau} = y_\tau$ pour $\lambda = \tau = 0$ solution

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_\tau}{\partial t} + Ay_\tau + f'(y_0)y_\tau & = 0 & (1.24) \\ y_\tau(0) & = y^0 & (1.25) \\ y_\tau & = 0 \quad \text{sur } \Sigma. & (1.26) \end{cases}$$

Alors (1.15) est équivalente

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 + w) y_\tau dxdt 0 \tag{1.27}$$

en supposant y^0 , $\hat{y}^0$ $\in L^2(\Omega)$

■

1.4.2 L'état adjoint

Soient A^* l'opérateur adjoint de A et $q = q(t,x)$ solution de

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q}{\partial t} + A^*q + f'(y_0)q & = (h_0 + w)\chi_{\mathcal{O}} & (1.28) \\ q(T) & = 0 & (1.29) \\ q & = 0 \quad \text{sur } \Sigma & (1.30) \end{cases}$$

Où $\chi_{\mathcal{O}}$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{O}$ et $f'(y_0)$ désigne la dérivée de f au point y_0.

Le système (1.28) , (1.30), (1.30) admet une solution unique sous des conditions générales sur $f'(y_0)$.

$q = q(w)$ est à déterminer.

On multiplie (1.28) par y_τ et aprés intégration par partie on obtient :

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 + w) y_\tau dxdt = \langle q(0), \hat{y}^0 \rangle \tag{1.31}$$

et la condition (1.15) (ou (1.27)) est équivaut à

$$q(0) = 0 \tag{1.32}$$

Le problème donc est de trouver w dans $L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$, telle que l'on ait (1.32) et (1.16).

■

1.5 Construction de la sentinelle

1.5.1 Equivalence à un problème de contrôlabilité

On cherche donc w tel que si $q = q(x,t,w)$ est solution de (1.28) , (1.30), (1.30) , on ait

$$q(0,w) = 0 \tag{1.33}$$

et

$$||w||_{L^2} = min \tag{1.34}$$

Il faut vérifier que $h_0 + w \neq 0$ sinon $S(\lambda, \tau) = 0$ sans avoir aucune information.

Il est assez naturel de séparer les deux composantes.

$$q = q_0 + z \tag{1.35}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q_0}{\partial t} + A^* q_0 + f'(y_0) q_0 & = & h_0 \chi_{\mathcal{O}} \\ q_0(T) & = & 0 \\ q_0 & = & 0 \qquad \text{sur}\Sigma \end{cases} \tag{1.36}$$

et

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t} + A^* z + f'(y_0) z & = & w \chi_{\mathcal{O}} \\ z(T) & = & 0 \\ z & = & 0 \qquad \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{1.37}$$

La fonction q_0 est donnée.On cherche w de façon que

$$z = z(w)$$

vérifie

$$z(0,w) = -q_0(0) \tag{1.38}$$

et (1.34)

Si l'on considère que

$$\begin{cases} w \;\; fonction \;\; de \;\; contr\hat{o}le \\ z = z(w) = \;\; \acute{e}tat \;\; du \;\; syst\grave{e}me \end{cases} \tag{1.39}$$

Alors (1.38), (1.34) est un problème de contrôlabilité. On cherche w qui conduise l'état de 0 (à l'instant initial $t = T$) jusqu'à l'état $-q_0$ à l'instant final $t = 0$ et ceci avec une " dépense" minimum pour w au sens de (1.34).

■

1.5.2 Pénalisation

Pour $\varepsilon > 0$ on introduit la fonctionnelle

$$J_\varepsilon(w,z) = \frac{1}{2}||w||^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + \frac{1}{2\varepsilon}||-z' + A^*z + f'(y_0)z - w\chi_{\mathcal{O}}||^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \tag{1.40}$$

tel que z vérifie

$$\begin{cases} -z' + A^*z + f'(y_0)z & \in & L^2(\mathcal{O}\times(0,T)) & \\ z(T) & = & 0 & \\ z(0) & = & -q_0 & \\ z & = & 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{1.41}$$

Le problème (1.40) admet une solution unique notée

$$\{w_\varepsilon, z_\varepsilon\} \tag{1.42}$$

On pose

$$\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(-z'_\varepsilon + A^*z_\varepsilon + f'(y_0)z_\varepsilon - w_\varepsilon\chi_{\mathcal{O}}) \tag{1.43}$$

Le couple $\{w_\varepsilon, z_\varepsilon\}$ est caractérisé par

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} w_\varepsilon\hat{w}dxdt + \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \rho_\varepsilon(-\hat{z}' + A^*\hat{z} + f'(y_0)\hat{z} + f'(y_0)\hat{z} - \hat{w}\chi_{\mathcal{O}})dxdt = 0 \tag{1.44}$$

$\forall \ \hat{w} \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ et pour tout $\hat{z}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcll} -\hat{z}' + A^*\hat{z} + f'(y_0)\hat{z} + f'(y_0)\hat{z} - \hat{w}\chi_{\mathcal{O}} & \in & L^2(\mathcal{O} \times (0,T)) & \\ \hat{z}(T) & = & 0 & \\ \hat{z}(0) & = & -q_0 & \\ \hat{z} & = & 0 & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \tag{1.45}$$

on en déduit

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \rho_\varepsilon' + A\rho_\varepsilon + f'(y_0)\rho_\varepsilon & = & 0 & \text{sur } \mathcal{O} \times (0,T) \\ \rho_\varepsilon & = & 0 & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \tag{1.46}$$

sans aucune information sur $\rho_\varepsilon(0)$ et $\rho_\varepsilon(T)$, et que

$$w_\varepsilon = \rho_\varepsilon \chi_{\mathcal{O}} \tag{1.47}$$

On passe à la limite ($\varepsilon \longrightarrow 0$) formellement puis justification.

■

1.5.3 Le système d'optimalité

Supposons que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \rho_\varepsilon = \rho$ on a alors

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \rho' + A\rho + f'(y_0)\rho & = & 0 & \text{sur } \mathcal{O} \times (0,T) \\ \rho(0) & = & \rho^0 & \\ \rho & = & 0 & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \tag{1.48}$$

où ρ^0 n'est pas connu pour l'instant. En utilisant (1.47)

$$\left\{ \begin{array}{lcll} -z' + A^*z + f'(y_0)z & = & \rho\chi_{\mathcal{O}} & \\ z(T) & = & 0 & \\ z & = & 0 & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \tag{1.49}$$

On doit avoir (1.38) :

$$z(0) = -q_0(0) \tag{1.50}$$

qui est une équation en ρ_0 et si ρ_0 existe alors w cherché est donné par

$$w = \rho\chi_{\mathcal{O}} \tag{1.51}$$

La sentinelle définie par h_0 est donnée par

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 + \rho) y(x,t,\lambda,\tau) dxdt. \tag{1.52}$$

Reste à résoudre (1.50) et examiner que $S \neq 0$.

■

1.5.4 Le calcul de ρ^0

On définit un opérateur linéaire sur $L^2(\Omega)$ par

$$\Lambda\rho^0 = z(0) \tag{1.53}$$

donc

$$\Lambda\rho^0 = -q_0(0) \tag{1.54}$$

****

Si on multiplie (1.49) par $\hat{\rho}$ qui est une solution de (1.48) correspondant à $\hat{\rho}^0$ on obtient

$$\langle \Lambda\rho^0, \hat{\rho}^0 \rangle = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \rho\hat{\rho}dxdt \tag{1.55}$$

$$\langle \Lambda\rho^0, \rho^0 \rangle = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \rho^2 dxdt \tag{1.56}$$

On introduit

$$||\rho^0||_F = \left(\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \rho^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.57}$$

On définit ainsi en général une norme sur $L^2(\Omega)$. En effet dans les conditions d'application du théorème de S.Mizohata : Alors , si $||\rho^0||_F = 0$ alors $\rho = 0$ sur $\mathcal{O}\times(0,T)$ donc $\rho^0 = 0$ et on définit une norme préhilbertienne sur $L^2(\Omega)$.

$- - - - --$

Composante horizontale

Soit $\mathcal{O}\times(0,T)$ un ouvert inclus dans $Q = \Omega\times(0,T)$; on dit qu' un point p de Q appartient à la composante horizontale de $\mathcal{O}\times(0,T)$ s'il existe une courbe horizontale joignant p à $\mathcal{O}\times(0,T)$ c'est à dire à une ligne dont les points ont tous la même coordonnée en temps.

Théorème de(S. Mizohata)

Soient un ouvert connexe de $\mathbb{R}^p$ et A un opérateur elliptique du second ordre dont les coefficients appartiennent à $\mathscr{C}^\infty(Q)$ où $Q = \Omega\times(0,T)$.

Soit y la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay & = & 0 \\ y(0) & = & 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} & = & 0 \;\; sur \;\; \Sigma \end{cases}$$

pour l'opérateur A et $\mathcal{O} \times (0,T)$ un ouvert inclus dans Q . Toute solution du système qui s'annule dans $\mathcal{O} \times (0,T)$ s'annule dans la composante horizontale de $\mathcal{O} \times (0,T)$

$------$

On définit F comme l'espace (grand espace) de Hilbert complété de $L^2(\Omega)$ pour la norme (1.57)

On introduit F' (espace trés petit) espace dual de F on a alors

$$\Lambda \ \ est \ \ un \ \ isomorphisme \ \ de \ \ F \ \ sur \ \ F'. \tag{1.58}$$

On note

$$q_0(0) \in F' \tag{1.59}$$

En effet si l'on multiplie (1.36) par ρ , on obtient

$$\left\langle q_0(0), \rho^0 \right\rangle = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} h_0\, \rho\, dxdt \tag{1.60}$$

donc

$$\left|\langle q_0(0), \rho^0\rangle\right| \leq ||h_0||_{\mathcal{O}\times(0,T)}||\rho^0||_{F'}$$

d'où (1.60) avec

$$||q_0(0)||_{F'} \leq ||h_0||_{\mathcal{O}\times(0,T)} \tag{1.61}$$

■

Remarque 1.3. *Il en résulte de (1.56) que* Λ *est symétrique*

$$\Lambda^* = \Lambda \ \ dans \ \ \mathcal{L}(F, F') \tag{1.62}$$

On voit donc que (1.54) admet une solution unique

$$\rho^0 = -\Lambda^{-1}q_0(0) \ \ dans \ \ \mathcal{L}(F, F') \tag{1.63}$$

■

Théorème 1.1. *[28] On suppose que l'on est dans les conditions d'application du théorème d'unicité de S.MIZOHATA pour l'équation (1.48).Il existe alors une sentinelle et une seule définie par* h_0*.Elle est donnée par*

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 + \rho) y dxdt \tag{1.64}$$

où ρ *est la solution de (1.48) correspondant à* ρ^0 *donné par (1.63).Dans (1.63)* q_0 *est donné par (1.36) à partir de* h_0

■

1.5.5 Usage d'une sentinelle

On a calculé y_0 , ρ^0 , ρ sur $\mathcal{O} \times (0,T)$ et on connait $y_{obs} = m_0$ (sans bruit). On a donc :

$$\lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) \simeq \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0+\rho)m_0 dxdt - \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (y_0+\rho)y_0 dxdt \tag{1.65}$$

Mais

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0+\rho)y_\lambda dxdt \tag{1.66}$$

Où y_λ est solution de :

$$\begin{cases} y'_\lambda + Ay_\lambda + f'(y_0)y_\lambda & = & \hat{\xi} \\ y_\lambda(0) & = & 0 \\ y_\lambda & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \end{cases} \tag{1.67}$$

Multipliant (1.24) o'u$(w = \rho\chi_{\mathcal{O}})$ par y_λ , on obtient alors :

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} q\hat{\xi} dxdt \tag{1.68}$$

La sentinelle définie par h_0 donne donc de l'information :

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (q_0+z)\lambda\hat{\xi} dxdt \simeq \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0+\rho)(m_0-y_0) dxdt \tag{1.69}$$

o'u z est donné par (1.37) avec $w = \rho$. Ceci donne une information si

$$q = q_0 + z \neq 0 \tag{1.70}$$

i.e. si

$$h_0 + \rho \neq 0 \quad \text{sur} \quad \mathcal{O}\times(0,T) \tag{1.71}$$

■

2 Sentinelles distribuées pour les systèmes hyperboliques

2.1 Données

Soit alors Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$. Considérons le système d'évolution dans Ω suivant

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y - \Delta y + f(y) = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \times (0,T) \tag{2.1}$$

où

L'opérateur $y \longrightarrow f(y)$ est non linéaire , et on suppose que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$.

y étant est l'état du système .

Les condition initiales ont des données manquantes :

$$y(0) = y^0 + \tau_0 \hat{y}^0. \tag{2.2}$$

$$y'(0) = y^1 + \tau_1 \hat{y}^1 \tag{2.3}$$

où y^0 est donné dans l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, y^1 est donné dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ et $\hat{y}^0$, $\hat{y}^1$ demeurent respectivement dans des boules unités des mêmes espaces de Hilbert respectifs tels que

$$||\hat{y}^0|| \leq 1 \;\; et \;\; ||\hat{y}^1|| \leq 1 \tag{2.4}$$

Les termes τ_1 et τ_2 sont supposés aussi " petits" dans $\mathbb{R}$

Les termes de pollution apparaissent dans les conditions aux limites :

$$\begin{cases} y &= \xi_0 + \lambda\hat{\xi_0} & \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T) \subset \Sigma \\ y &= 0 & \text{sur } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

où

ξ_0 est connu dans l'espace de Hilbert $L^2(\Sigma)$.

Le terme $\lambda\hat{\xi_0}$ n'est pas connu tel que

$$||\hat{\xi_0}|| \leq 1 \tag{2.6}$$

Le terme λ est supposé " petit" dans $\mathbb{R}$.

La méthode de la sentinelle a pour objet d'obtenir des informations sur ce terme de pollution $\lambda\hat{\xi}$.

L'équation d'état est donc décrite par la donnée de (2.1) , (2.2) , (2.3) et (2.5).

Pour λ et $\tau = (\tau_0, \tau_1)$ donnés , ainsi que $\hat{\xi_0}$,$\hat{y}^0$ et $\hat{y}^1$, l'équation admet une solution unique noté $y(x,t,\lambda,\tau)$.

■

2.2 Observation du système

On *"observe "* l'état du système sur un observatoir $\mathcal{O} \subset \Omega$. = observatoir distribué on dispose de l'observation

$$y(x,t,\lambda,\tau) = y_{obs} = y\chi_{\mathcal{O}} = m_0(x,t) \quad sur \quad \mathcal{O} \times (0,T). \tag{2.7}$$

■

2.3 Sentinelles

2.3.1 Définitions

Soit h_0 une fonction donnée avec

$$h_0 \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T)) \tag{2.8}$$

Soit par ailleurs une fonction w à dèterminer avec

$$w \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T)) \tag{2.9}$$

On considère la fonctionnelle

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 + w)y(x,t,\lambda,\tau)dxdt = S(\lambda,\tau) \tag{2.10}$$

pour $y_{obs} = m_0$ et si w est connu avec $\tau = (\tau_0, \tau_1)$ on a

$$S_{obs}(\lambda,\tau) = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 + w)y_{obs}(x,t,\lambda,\tau)dxdt = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 + w)m_0(x,t)dxdt \tag{2.11}$$

On dira que la fonctionnelle $S(\lambda,\tau)$ est une sentinelle définie par h_0 si les conditions suivantes ont lieu :

$$\frac{\partial S}{\partial \tau_0}|_{\lambda=0,\tau=0} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial \tau_1}|_{\lambda=0,\tau=0} = 0 \tag{2.12}$$

$$||w||_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} = min \tag{2.13}$$

■

Remarque 2.1.

1. *h_0 étant donné , les conditions (2.12) ,(2.13) définissent w de manière unique.On dira alors que S est la sentinelle définie par h_0.*

2. *La condition(2.12) exprime que la sentinelle n'est pas affectée par l'absence d'informations sur les termes manquants.*

3. *si h_0 vérifie*

$$h_0 \geq 0, \qquad \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} h_0 dxdt = 1 \ \ alors \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} h_0 y(x,t,\lambda,\tau)dxdt \tag{2.14}$$

est une moyenne .La condition (2.13) exprime que la sentinelle est aussi proche que possible d'une moyenne.

■

Remarque 2.2. *Désignons par y_0 solution du système suivant*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}y_0 - \Delta y_0 + f(y_0) & = 0 \quad sur\ \Omega\times(0,T) & (2.15)\\ y_0(0) & = y^0 \quad sur\ \Omega. & (2.16)\\ y_0'(0) & = y^1 \quad sur\ \Omega. & (2.17)\\ y_0 & = \xi_0 \quad sur\ \Sigma. & (2.18)\end{cases}$$

On suppose que l'on peut calculer y_0.Alors si w est calculé

$$S(0,0) = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0+w)y_0 dxdt \tag{2.19}$$

est connu.On a

$$S(\lambda,\tau) \approx S(0,0) + \lambda\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0). \tag{2.20}$$

de sorte que si y_{obs} est connu , on dispose alors de l'information

$$\lambda\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0) \approx \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0+w)y_{obs}dxdt - S(0,0). \tag{2.21}$$

Donc le but est de chercher à obtenir des informations sur $\lambda\hat{\xi}$, sans chercher des précisions sur les données manquantes $\tau_1\hat{y}^0$, $\tau_2\hat{y}^1$; (2.21) donnera une information sur $\lambda\hat{\xi}$ et cela justifie le recours à la construction de la sentinelle.

■

2.4 Etat adjoint

2.4.1 La condition d' " insensibilité "

On pose $\dfrac{\partial y}{\partial\tau_0} = y_{\tau_0}$ pour $\lambda = \tau_0 = \tau_1 = 0$ solution

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}y_{\tau_0} - \Delta y_{\tau_0} + f'(y_0)y_{\tau_0} & = 0 & (2.22)\\ y_{\tau_0}(0) & = \hat{y}^0 \quad \text{sur } \Omega. & (2.23)\\ y_{\tau_0}'(0) & = 0 \quad \text{sur } \Omega. & (2.24)\\ y_{\tau_0} & = 0 \quad \text{sur } \Sigma. & (2.25)\end{cases}$$

Alors (2.12) est équivalente

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}(h_0+w)y_{\tau_0}dxdt=0 \tag{2.26}$$

en supposant $y^0\ \hat{y}^0\ \in H_0^1(\Omega)$

On pose aussi $\dfrac{\partial y}{\partial\tau_1}=y_{\tau_1}$ pour $\lambda=\tau_0=\tau_1=0$ solution

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}y_{\tau_1}-\Delta y_{\tau_1}+f'(y_0)y_{\tau_1} & =0 & (2.27)\\ y_{\tau_1}(0) & =0 \quad sur\ \Omega. & (2.28)\\ y'_{\tau_1}(0) & =\hat{y}^1 \quad sur\ \Omega. & (2.29)\\ y_{\tau_1} & =0 \quad sur\ \Sigma\ . & (2.30)\end{cases}$$

Alors (2.12) est équivalente

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}(h_0+w)y_{\tau_1}dxdt=0 \tag{2.31}$$

en supposant $y^1\ ,\ \hat{y}^1\ \in L^2(\Omega)$

■

2.4.2 L'état adjoint

Soit l'état adjoint $q=q(t,x)$ solution de

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}q-\Delta q+f'(y_0)q & =(h_0+w)\chi_{\mathcal{O}} & (2.32)\\ q(T) & =0\ \ sur\ \ \Omega. & (2.33)\\ q'(T) & =0\ \ sur\ \ \Omega. & (2.34)\\ q & =0\ \ sur\ \ \Sigma. & (2.35)\end{cases}$$

Où $\chi_{\mathcal{O}}$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{O}$.
le système (2.32) , (2.33), (2.34) (2.35)admet une solution unique.
$q=q(w)$ est à déterminer.
On multiplie (2.32) par y_{τ_0} et aprés intégration par partie on obtient :

$$\frac{\partial S}{\partial\tau_0}(0,0)=\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}(h_0+w)y_{\tau_0}dxdt=\langle q'(0),\hat{y}^0\rangle \tag{2.36}$$

De même on multiplie (2.32) par y_{τ_1} et aprés intégration par partie on obtient :

$$\frac{\partial S}{\partial\tau_1}(0,0)=\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}(h_0+w)y_{\tau_1}dxdt=-\langle q(0),\hat{y}^1\rangle \tag{2.37}$$

et la condition (2.12) est équivaut à

$$q(0) = 0 \quad , \quad q'(0) = 0 \tag{2.38}$$

Le problème donc est de trouver w dans $L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$, telle que l'on ait (2.38) et (2.13).

■

2.5 Construction de la sentinelle

2.5.1 Equivalence à un problème de contrôlabilité

On cherche donc w tel que si $q = q(x,t,w)$ est solution de (2.32) , (2.33), (2.34) , (2.35) on ait

$$q'(0,w) = 0 \tag{2.39}$$

$$q(0,w) = 0 \tag{2.40}$$

et

$$||w||_{L^2} = min \tag{2.41}$$

Il faut vérifier que $h_0 + w \neq 0$ sinon $S(\lambda, \tau) = 0$ sans avoir aucune information.

Il est assez naturel de séparer les deux composantes.

$$q = q_0 + z \tag{2.42}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} q_0 - \Delta q_0 + f'(y_0) q_0 & = & h_0 \chi_{\mathcal{O}} \\ q_0(T) & = & 0 \\ q_0'(T) & = & 0 \\ q_0 & = & 0 \qquad \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{2.43}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} z - \Delta z + f'(y_0) z & = & w \chi_{\mathcal{O}} \\ z(T) & = & 0 \\ z'(T) & = & 0 \\ z & = & 0 \qquad \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{2.44}$$

La fonction q_0 est donnée.On cherche $z = z(w)$ qui vérifie

$$z(0,w) = -q_0(0) \tag{2.45}$$

$$z'(0,w) = -q_0'(0) \tag{2.46}$$

et (2.41) si l'on considère que

$$\begin{cases} w \;\; fonction \;\; de \;\; contrôle \\ z = z(w) = \;\; état \;\; du \;\; système \end{cases} \tag{2.47}$$

Alors (2.45) ,(2.46), (2.41) est un problème de contrôlabilité. On cherche w qui conduise l'état de $(0,0)$ (à l'instant " initial" $t = T$) jusqu'à l'état $(-q_0, -q_0')$ à l'instant "final" $t = 0$ et ceci avec une " dépense" minimum pour w au sens (2.41).

■

2.5.2 Pénalisation

Pour $\varepsilon > 0$ on introduit la fonctionnelle

$$J_\varepsilon(w,z) = \frac{1}{2}||w||^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + \frac{1}{2\varepsilon}||z'' - \Delta z + f'(y_0)z - w\chi_{\mathcal{O}}||^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \tag{2.48}$$

tel que z vérifie

$$\begin{cases} z'' - \Delta z + f'(y_0)z & \in & L^2(\mathcal{O}\times(0,T)) & & \\ z(T) & = 0 & & z(0) & = & -q_0(0) \\ z'(T) & = 0 & & z'(0) & = & -q_0'(0) \\ z & = 0 & & \text{sur } \Sigma & & \end{cases} \tag{2.49}$$

Le problème (2.49) admet une solution unique notée

$$w_\varepsilon, z_\varepsilon \tag{2.50}$$

On pose

$$\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(z_\varepsilon'' - \Delta z_\varepsilon + f'(y_0)z_\varepsilon - w_\varepsilon\chi_{\mathcal{O}}) \tag{2.51}$$

Le couple $\{w_\varepsilon, z_\varepsilon\}$ est caractérisé par

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} w_\varepsilon \hat{w} dxdt + \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \rho_\varepsilon(\hat{z}'' - \Delta\hat{z} + f'(y_0)\hat{z} + f'(y_0)\hat{z} - \hat{w}\chi_{\mathcal{O}})dxdt = 0 \tag{2.52}$$

$\forall \;\; \hat{w} \in L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$ et pour tout $\hat{z}$ tel que

$$\begin{cases} \hat{z}'' - \Delta\hat{z} + f'(y_0)\hat{z} - \hat{w}\chi_{\mathcal{O}} & \in & L^2(\mathcal{O}\times(0,T)) \\ \hat{z}(T) = \hat{z}(0) & = & 0 \\ \hat{z}'(T) = \hat{z}'(0) & = & 0 \\ \hat{z} & = & 0 \;\; \text{sur}\Sigma \end{cases} \tag{2.53}$$

on en déduit

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon'' - \Delta\rho_\varepsilon + f'(y_0)\rho_\varepsilon & = & 0 \\ \rho_\varepsilon & = & 0 \ sur \ \Sigma \end{cases} \tag{2.54}$$

sans aucune information sur $\rho_\varepsilon(0)$ et $\rho_\varepsilon'(0)$, et que

$$w_\varepsilon = \rho_\varepsilon \chi_{\mathcal{O}} \tag{2.55}$$

On passe à la limite ($\varepsilon \longrightarrow 0$) formellement puis justification.

■

2.5.3 Le système d'optimalité

Supposons que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon = \rho$ on a alors

$$\begin{cases} \rho'' - \Delta\rho + f'(y_0)\rho & = & 0 \\ \rho(0) & = & \rho^0 \\ \rho'(0) & = & \rho^1 \\ \rho & = & 0 \ sur \ \Sigma \end{cases} \tag{2.56}$$

où le couple $\{\rho^0, \rho^1\}$ n'est pas connu pour l'instant. En utilisant (2.55)

$$\begin{cases} z'' - \Delta z + f'(y_0)z & = & \rho\chi_{\mathcal{O}} \\ z(T) & = & 0 \\ z'(T) & = & 0 \\ z & = & 0 \ sur \ \Sigma \end{cases} \tag{2.57}$$

On doit avoir (2.45) et (2.46) :

$$z(0) = -q_0(0) \tag{2.58}$$

$$z'(0) = -q_0'(0) \tag{2.59}$$

qui est un système d'équations en ρ^0 et ρ^1 si ρ_0 , et ,ρ^1 existent alors w cherché est donné par

$$w = \rho\chi_{\mathcal{O}} \tag{2.60}$$

La sentinelle définie par h_0 est donnée par

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 + \rho) y(x, t, \lambda, \tau) dxdt. \tag{2.61}$$

Reste à résoudre (2.58) et (2.59) puis examiner que $S \neq 0$.

■

2.5.4 Le calcul de $\{\rho^0, \rho^1\}$

La méthode de calcul des données initiales $\{\rho^0, \rho^1\}$ repose sur

1. Pour des raisons techniques, on introduit l'opérateur Λ défini ci-dessous.
2. un théorème d'unicité. C'est grâce à un théorème d'unicité que nous pouvons introduire une (nouvelle) structure hilbertiennne F .
3. un espace de Hilbert (F) introduit à partir de l'unicité. Tout est alors ramené à l'inversion de Λ dont on verra qu'elle est automatique : c'est d'ailleurs ce qu'indique la méthode de pénalisation précédente.

a) Étape1 :Système d'optimalité : Soient les conditions initiales $\{\rho^0, \rho^1\}$ du système d'optimalité suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \rho'' - \Delta\rho + f'(y_0)\rho & = & 0 \\ \rho(0) & = & \rho^0 \\ \rho'(0) & = & \rho^1 \\ \rho & = & 0 \ sur \ \Sigma \end{array}\right. \tag{2.62}$$

Il est bien connu que ce système admet une solution unique ρ.

b) Étape2 :Introduction de l'opérateur Λ :

Dans cette étape on considère le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z'' - \Delta z + f'(y_0)z & = & \rho\chi_{\mathcal{O}} \\ z(T) & = & 0 \\ z'(T) & = & 0 \\ z & = & 0 \ sur \ \Sigma \end{array}\right. \tag{2.63}$$

qui admet aussi une solution unique.

On définit alors un opérateur linéaire Λ qui associe à $\{\rho^0, \rho^1\}$ le vecteur donné par :

$$\Lambda\{\rho^0, \rho^1\} = \{-z'(0), z(0)\} \tag{2.64}$$

Λ est bien défini car z est suffisamment régulière.

et un opérateur M par : Si on multiplie (2.43) par ρ on aura;

$$\langle -q_0'(0), \rho^0\rangle + \langle q_0(0), \rho^1\rangle = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} h_0\rho dxdt$$

donc $\langle -q_0', \rho^0\rangle + \langle q_0, \rho^1\rangle$ est en fonction de h_0 d'où on pose

$$Mh_0 = \{-q_0'(0), q_0(0)\} \tag{2.65}$$

Alors

$$\Lambda\{\rho^0, \rho^1\} = -Mh_0 \tag{2.66}$$

L'opérateur M vérifie

$$M \in \mathcal{L}\big(L^2(\mathcal{O} \times (0,T)), L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)\big) \tag{2.67}$$

et son adjoint est donné par :

$$M^*\{\rho^0, \rho^1\} = \rho\chi_{\mathcal{O}} \tag{2.68}$$

Reste à résoudre (2.66) , ce qui suppose l'introduction de nouveaux espaces fonctionnels F.

a) Étape3 :Nouveaux espaces fonctionnels/Théorème d'unicité :

On considère maintenant des données initiales $\{q_0(0), q_0'(0)\} \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ solution du problème(2.43).

Si l'on multiplie (2.63) par $\hat{\rho}$ où $\hat{\rho}$ est la solution de (2.62)correspondant à $\{\hat{\rho}^1, \hat{\rho}^0\}$ on a :

$$\big\langle \Lambda\{\rho^0, \rho^1\}, \{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\}\big\rangle = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \rho\hat{\rho}\,dxdt \tag{2.69}$$

En particulier

$$\Big\langle \Lambda\{\rho^0, \rho^1\}, \{\rho^0, \rho^1\}\Big\rangle = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \rho^2 dxdt \tag{2.70}$$

On introduit alors de manièr naturelle la norme :

$$||\{\rho^0, \rho^1\}||_F = \left(\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \rho^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.71}$$

Evidemment, le fait que $||.||_F$ définisse une norme est équivalent à ce que le théorème d'unicité suivent soit vérifié.

C'est grâce à un théorème d'unicité que nous pourrons introduire une (nouvelle) structure hilbertiennne F donné par (2.71)

Donc l'expression (2.71) définit une norme dans les conditions d'application du Théorème d'unicité de HOLMGREN , plus précisément le théorème de **L.HÖRMANDER** qui est valable dans un cadre trés général d'équations aux dérivées partielles pour des opérateurs à coefficients constants .Il s'agit en fait d'un corollaire du théorème d'unicité de Holmgren classique

Théorème 2.1. *(* **L.HÖRMANDER** *)*

Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux convexes de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ et soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants tel que tout plan Π caractéristique par rapport à $P(D)$ et vérifiant $\Pi \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ satisfait ausi $\Pi \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$. Alors toute solution $u \in \mathscr{D}'(\mathcal{O}_2)$ de l'équation $P(D) = 0$ telle que $u = 0$ dans $\mathcal{O}_1$ vérifie $u = 0$ dans $\mathcal{O}_2$

Plus précisément :
Soit Ω *un ouvert borné ,* $\mathcal{O} \subset \Omega$ *et* $T > 2$ *(diamètre de* Ω*). Alors* ρ *solution de (2.62) et* $\rho = 0$ *sur* $\mathcal{O} \times (0,T)$ *implique* $\rho \equiv 0$ On définit alors l'espace hilbertien F complété de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ pour la norme (2.70).
Les choses se simplifient (cf [28]) *si* $\mathcal{O} \times (0,T)$ *a la propriété de contrôle géométrique .*

Définition 2.1. Propriété de contrôle géométrique :
Tout rayon lumineux réfléchi selon les lois de l'optique géométrique ; issu d'un point quelconque de Ω *à l'instant* $t = 0$ *finit par rencontrer* $\mathcal{O}$ *à un instant* $t < T$ *On dit alors que que* $\mathcal{O} \times (0,T)$ *a la propriété de contrôle géométrique.*

Dans ce cas (2.71) définit une norme , telle que

$$F = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \tag{2.72}$$

avec équivalence des normes.

■

On a donc défini ainsi une (nouvelle) structure hilbertienne sur l'espace des données initiales.
Donc supposons que $\mathcal{O} \subset \Omega$ et $T > 0$ (diamètre de Ω) ou bien $\mathcal{O} \times (0,T)$ a la propriété géométrique , on a donc
de (2.69) on a :

$$\left\langle \Lambda\{\rho^0, \rho^1\}, \{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\} \right\rangle = \left\langle \{\rho^0, \rho^1\}, \{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\} \right\rangle_F \tag{2.73}$$

où $\left(.,.\right)_F$ désigne le produit scalaire associé à la norme $||.||_F$ et par conséquent

$$|\langle \Lambda\{\rho^0, \rho^1\}, \{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\} \rangle| \leq ||\{\rho^0, \rho^1\}||_F ||\{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\}||_F \tag{2.74}$$

L'inégalité (2.74) nous permet de prolonger Λ(de manière unique) en un opérateur linéaire continu de F dans l'espace dual F' (F' est aussi un espace hilbertien qu'on n'identifie pas à l'espace F)

$$\Lambda : F \longrightarrow F' \tag{2.75}$$

de (2.73) on déduit

$$\langle \Lambda\{\rho^0, \rho^1\}, \{\hat{\rho}^1, \{\hat{\rho}^0\} \rangle = \left(\{\rho^0, \rho^1\}, \{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\}\right)_F \quad \forall \{\rho^0, \rho^1\}, \{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\} \in F \tag{2.76}$$

ce qui implique

$$\Lambda = \Lambda^* \tag{2.77}$$

où Λ^* désigne l'opérateur adjoint de Λ. De tout cela résulte que Λ est un isomorphisme de F sur F'.

Remarque 2.3. *En fait on a construit l'espace* F *et l'opérateur* Λ *de façon que* Λ *soit un isomorphisme de* F *sur* F' *. Rappelons que le point de départ de cette construction est le Théorème (2.1)d'unicité.*

■

a) Etape 4 : Conclusion

Comme Λ est un isomorphisme de F sur F' ; l'équation

$$\Lambda\{\rho^0,\rho^1\} = \{-q_0'(0), q_0(0)\} \tag{2.78}$$

a une solution unique $\{\rho^0,\rho^1\} \in F$ pour tout couple de données initiales$\{q_0'(0), q_0(0)\}$ tel que

$$\{-q_0'(0), q_0(0)\} \in F' \tag{2.79}$$

en effet , on déduit de (2.43) que

$$\langle -q_0'(0), \rho^0\rangle + \langle +q_0(0), \rho^1\rangle = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} h_0\, \rho\, dxdt. \tag{2.80}$$

$$||\{-q_0'(0), q_0(0)\}||_{F'} \leq ||h_0||_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \tag{2.81}$$

Par conséquent (2.65) admet une solution unique , donnée par

$$\{\rho^0,\rho^1\} = -\Lambda^{-1}Mh_0 \tag{2.82}$$

Remarque 2.4. *la résolution de (2.76) équivaut à la recherche de :*

$$\inf_{\{\rho^0,\rho^1\}\in F} \{\frac{1}{2}\Big\langle \Lambda\{\rho^0,\rho^1\}, \{\rho^0,\rho^1\}\Big\rangle + \Big\langle q_0(0)', \rho^0\Big\rangle - \Big\langle q_0(0), \rho^1\Big\rangle\} \tag{2.83}$$

On choisit le vecteur contrôle w par

$$w = \rho\chi_{\mathcal{O}} \tag{2.84}$$

Où ρ désigne la solution de (2.62) qui correspond aux données $\{\rho^0,\rho^1\}$ vérifiant (2.78).
Alors d'aprés l'unicité du problème (2.63) et donc le contrôle w répond à la question :

2.6 Définition de la sentinelle

Par conséquent (2.65) admet une solution unique , donnée par

$$\{\rho^0,\rho^1\} = -\Lambda^{-1}Mh_0 \tag{2.85}$$

La sentinelle correspondante est donnée par

$$S(\lambda,\tau) = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 - M^*\Lambda^{-1}Mh_0)y(\lambda,\tau)dxdt \tag{2.86}$$

■

Théorème 2.2. *[28] On suppose que l'on est dans les conditions d'application du théorème d'unicité de HOLMGREN pour l'équation (2.56).Il existe alors une sentinelle et une seule définie par h_0.Elle est donnée par*

$$S(\lambda,\tau) = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 - M^*\Lambda^{-1}Mh_0)y(\lambda,\tau)dxdt \tag{2.87}$$

où ρ est la solution de(2.56) correspondant à $\{\rho^0,\rho^1\}$ donné par (2.62) .Dans (2.63) q_0 est donné par (2.43) à partir de h_0

■

2.6.1 Usage d'une sentinelle

On a calculé y_0 , $\{\rho^0,\rho^1\}$, ρ sur $\mathcal{O}\times(0,T)$ et on connait $y_{obs} = m_0$ (sans bruit). On a donc :

$$\lambda\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0) \simeq \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0+\rho)m_0dxdt - \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (y_0+\rho)y_0dxdt \tag{2.88}$$

Mais

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0) = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0+\rho)y_\lambda dxdt \tag{2.89}$$

Où y_λ est solution de :

$$\begin{cases} y_\lambda'' - \Delta y_\lambda + f'(y_0)y_\lambda & = & 0 \\ y_\lambda(0) & = & 0 \\ y_\lambda'(0) & = & 0 \\ y_\lambda & = & \hat{\xi}_0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_0 \\ y_\lambda & = & 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma\setminus\Sigma_0 \end{cases} \tag{2.90}$$

Multipliant (2.32) où($w = \rho\chi_{\mathcal{O}}$) par y_λ , on obtient alors :

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0) = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0+\rho)y_\lambda dxdt = -\int\int_{\Sigma_0} \frac{\partial q}{\partial\nu}\hat{\xi}_0 dxdt \tag{2.91}$$

où ν désigne le vecteur normal extérieur à Ω et "$\dfrac{\partial}{\partial\nu}$" la dérivée dans cette direction.

Avec $\rho = -M^*\Lambda^{-1}Mh_0$

La sentinelle définie par h_0 donne donc de l'information :

$$\begin{aligned} \int\int_{\Sigma_0} \frac{\partial q}{\partial\nu}\lambda\hat{\xi}_0 dxdt & \simeq \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0+\rho)(m_0-y_0)dxdt \\ & \simeq \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 - M^*\Lambda^{-1}Mh_0)(m_0-y_0)dxdt \end{aligned} \tag{2.92}$$

avec $w = \rho$. Ceci donne une information si

$$q = q_0 + z \neq 0 \tag{2.93}$$

i.e. si

$$h_0 + \rho \neq 0 \quad \text{sur} \quad \mathcal{O} \times (0, T) \tag{2.94}$$

■

3 Sentinelle discriminante :

On considère ici l'observation bruité :

$$y_{obs} = m_0 + \sum_{i=1}^{N} \beta_i m_i, \quad \beta_i \neq 0 \tag{3.1}$$

où les fonctions :$m_0, m_1, ...m_N$ sont connues , mais les β_i appeles termes de bruits , ne sont pas connus , ils sont seulement *petits*.

3.1 Notion de sentinelle discriminante

On dit que la fonctionnelle $S(\lambda, \tau)$ est une sentinelle *discriminante* si les conditions suivantes sont vérifiés :

- $S(\lambda, \tau_0, \tau_1)$ vérifie la condition d'insensibilité :

$$\frac{\partial S}{\partial \tau_0}(0,0,0) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \tau_1}(0,0,0) = 0 \tag{3.2}$$

- $$||w||_{L^2(\mathcal{O} \times (0,T))} = min \tag{3.3}$$

- $S(\lambda, \tau_0, \tau_1)$ vérifie la condition d'insensibilité au bruit :

$$\int\int_{\mathcal{O} \times (0,T)} (h_0 + w) m_i dxdt = 0 \quad 1 \leq i \leq N \tag{3.4}$$

■

$$\left\{ \begin{array}{l} Soit \ \ \mathcal{K}, \ \ l'espace\ engendré\ dans\ L^2(\mathcal{O} \times (0,T)) \ \ par\ les\ fonctions\ m_i. \\ Il\ n'existe\ pas\ d'élément \ \ k \in \mathcal{K} \ \ telque \\ k'' - \Delta k + f'(y_0 k = 0 \ \ dans\ \mathcal{O} \times (0,T). \end{array} \right. \tag{3.5}$$

La construction de la sentinelle discriminante est anologue à section précédente. Donc on commence par l'étape de pénalisation et on passe à la limite formelle.On obtient ensuite le systèm d'optimalité puis résoudre l'équation qui en découle.

3.2 Pénalisation :

On considère la fonctionelle suivante :

$$J_\varepsilon(w,z)=\frac{1}{2}||w||_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}+\frac{1}{2\varepsilon}||z''-\Delta z+f'(y_0)z-w_{\mathcal{O}}||^2 \tag{3.6}$$

Dans (3.6), on considère z tel que

$$\begin{cases} z''-\Delta z+f'(y_0)z & \in & L^2(\mathcal{O}\times(0,T)) & & \\ z(T) & =0 & & z(0) & =-q_0(0) \\ z'(T) & =0 & & z'(0) & =-q_0'(0) \\ z & =0 & \text{sur } \Sigma & & \end{cases} \tag{3.7}$$

Le problème (3.7) admet une solution unique notée

$$\{w_\varepsilon,z_\varepsilon\} \tag{3.8}$$

On pose

$$\rho_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}(z''_\varepsilon-\Delta z_\varepsilon+f'(y_0)z_\varepsilon-w_\varepsilon\chi_{\mathcal{O}}) \tag{3.9}$$

Le couple $\{w_\varepsilon,z_\varepsilon\}$ est caractérisé par

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}w_\varepsilon\hat{w}dxdt+\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}\rho_\varepsilon(\hat{z}''-\Delta\hat{z}+f'(y_0)\hat{z}+f'(y_0)\hat{z}-\hat{w}\chi_{\mathcal{O}})dxdt=0 \tag{3.10}$$

$\forall\ \hat{w}\in L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$ et pour tout $\hat{z}$ tels que

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}\hat{w}m_idxdt=0 \quad 1\leq i\leq N \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} \hat{z}''-\Delta\hat{z}+f'(y_0)\hat{z}-\hat{w}\chi_{\mathcal{O}} & \in & L^2(\mathcal{O}\times(0,T)) \\ \hat{z}(T)=\hat{z}(0) & = & 0 \\ \hat{z}'(T)=\hat{z}'(0) & = & 0 \\ \hat{z} & = & 0 \quad \text{sur}\Sigma \end{cases} \tag{3.12}$$

on en déduit

$$\begin{cases} \rho''_\varepsilon-\Delta\rho_\varepsilon+f'(y_0)\rho_\varepsilon & = & 0 \\ \rho_\varepsilon & = & 0 \ \ sur\ \ \Sigma \end{cases} \tag{3.13}$$

sans aucune information sur $\{\rho_\varepsilon(0),\rho'_\varepsilon(0)\}$ et $\{\rho_\varepsilon(T),\rho'_\varepsilon(T)\}$, et que

$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}(w_\varepsilon-\rho_\varepsilon)\hat{w}dxdt=0 \ \ \forall\hat{w}\in\mathcal{K}^\perp \tag{3.14}$$

d'où
$$w_\varepsilon - \rho_\varepsilon = k_\varepsilon \in \mathcal{K} \tag{3.15}$$
d'où avec $k_\varepsilon \in \mathcal{K}$, alors $h_0 + w_\varepsilon \in \mathcal{K}^\perp$ on a :
$$\begin{aligned} h_0 + \rho_\varepsilon &= h_0 + w_\varepsilon - k_\varepsilon \\ &= h_0 + w_\varepsilon + \Pi(h_0 + \rho_\varepsilon) \end{aligned} \tag{3.16}$$
alors on a :
$$k_\varepsilon = \Pi(h_0 + \rho_\varepsilon) \;\; où \;\; \Pi = projection \;\; orthogonale \;\; de \;\; L^2(\mathcal{O} \times (0,T)) \longrightarrow \mathcal{K} \tag{3.17}$$
donc
$$w_\varepsilon = \rho_\varepsilon - \Pi(h_0 + \rho_\varepsilon) \tag{3.18}$$
et que On passe à la limite ($\varepsilon \longrightarrow 0$) formellement .

■

3.3 Le système d'optimalité :

Supposons que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \rho_\varepsilon = \rho$ on a alors
$$\begin{cases} \rho'' - \Delta\rho + f'(y_0)\rho &= 0 \\ \rho(0) &= \rho^0 \\ \rho'(0) &= \rho^1 \\ \rho &= 0 \;\; sur \;\; \Sigma \end{cases} \tag{3.19}$$
où le couple $\{\rho^0, \rho^1\}$ n'est pas connu pour l'instant. En utilisant (2.55)
$$\begin{cases} z'' - \Delta z + f'(y_0)z &= \big(\rho - \Pi(h_0 + \rho)\big)\chi_{\mathcal{O}} \\ z(T) &= 0 \\ z'(T) &= 0 \\ z &= 0 \;\; sur \;\; \Sigma \end{cases} \tag{3.20}$$
On doit avoir :
$$\{z'(0), z(0)\} = \{-q_0'(0), q_0(0)\} \tag{3.21}$$
qui est un système d'équations en ρ^0 et ρ^1 si ρ_0 , et ,ρ^1 existent alors w cherché est donné par (3.18)

La sentinelle définie par h_0 est donnée par
$$\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (h_0 + \rho - \Pi(h_0 + \rho))y(x, t, \lambda, \tau)dxdt. \tag{3.22}$$
Reste à résoudre (3.21) puis examiner que $S \neq 0$.

Il est naturel de séparer les deux coposantes dans (3.20) :
$$z = z_0 + \theta \tag{3.23}$$

où

$$\begin{cases} z_0'' - \Delta z_0 + f'(y_0) z_0 & = & \big(- \Pi(h_0)\big)\chi_{\mathcal{O}} \\ z_0(T) & = & 0 \\ z_0'(T) & = & 0 \\ z_0 & = & 0 \ \ sur \ \ \Sigma \end{cases} \tag{3.24}$$

et

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta \theta + f'(y_0)\theta & = & \big(\rho - \Pi(\rho)\big)\chi_{\mathcal{O}} \\ \theta(T) & = & 0 \\ \theta'(T) & = & 0 \\ \theta & = & 0 \ \ sur \ \ \Sigma \end{cases} \tag{3.25}$$

Donc il s'agit de résoudre

$$\begin{cases} \theta(0) & = & -(z_0(0) + q_0(0)) \\ \theta'(0) & = & -(z_0'(0) + q_0'(0)) \end{cases} \tag{3.26}$$

■

3.3.1 Le calcul de $\{\rho^0, \rho^1\}$

■ **Introduction de l'opérateur Λ_Π :**

Dans cette étape on considère le système suivant :

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta \theta + f'(y_0)\theta & = & \big(\rho - \Pi(\rho)\big)\chi_{\mathcal{O}} \\ \theta(T) & = & 0 \\ \theta'(T) & = & 0 \\ \theta & = & 0 \ \ sur \ \ \Sigma \end{cases} \tag{3.27}$$

qui admet aussi une solution unique.

On définit alors un opérateur linéaire Λ_Π qui associe à $\{\rho^0, \rho^1\}$ le vecteur donné par :

$$\Lambda_\Pi\{\rho^0, \rho^1\} = \{-\theta'(0), \theta(0)\} = \{(z_0'(0) + q_0'(0)), -(z_0(0) + q_0(0)\} \tag{3.28}$$

Λ_Π est bien défini car θ est suffisamment régulière.

de (2.43)et(3.24) on a le système suivant :

$$\begin{cases} (z_0 + q_0)'' - \Delta(z_0 + q_0) + f'(y_0)(z_0 + q_0) & = & \big(h_0 - \Pi(h_0)\big)\chi_{\mathcal{O}} \\ (z_0 + q_0)(T) & = & 0 \\ (z_0 + q_0)'(T) & = & 0 \\ (z_0 + q_0) & = & 0 \ \ sur \ \ \Sigma \end{cases} \tag{3.29}$$

Multiplions (3.29)par ρ on aura;

$$\big\langle - (q_0'(0) + z_0'(0)), \rho^0 \big\rangle + \big\langle (q_0(0) + z_0(0)), \rho^1 \big\rangle = \int \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \big(h_0 - \Pi(h_0)\big)\rho dx dt$$

donc $\big\langle -(q_0' + z_0'), \rho^0\big\rangle, (q_0(0) + z_0(0)), \rho^1\rangle$ est en fonction de h_0 d'où on pose

$$M_\Pi h_0 = \{-(q_0'(0) + z_0'(0)), (q_0(0) + z_0)\} \tag{3.30}$$

Alors

$$\Lambda_\Pi\{\rho^0, \rho^1\} = -M_\Pi h_0 \tag{3.31}$$

L'opérateur M_Π vérifie

$$M_\Pi \in \mathcal{L}\big(L^2(\mathcal{O} \times (0,T)), L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)\big) \tag{3.32}$$

et son adjoint est donné par :

$$M_\Pi^*\{\rho^0, \rho^1\} = (\rho - \Pi\rho)\chi_{\mathcal{O}} \tag{3.33}$$

Reste à résoudre (3.31) , ce qui suppose l'introduction de nouveaux espaces fonctionnels F.

■ **Nouveaux espaces fonctionnels/Théorème d'unicité :**

On considère maintenant des données initiales $\{q_0(0)+z_0(0), q_0'(0)+z_0'(0)\} \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ solution du problème(3.29).

Si l'on multiplie (3.27) par $\hat{\rho}$ où $\hat{\rho}$ est la solution de (3.19)correspondant à $\{\hat{\rho}^1, \hat{\rho}^0\}$ on a :

$$\langle \Lambda\{\rho^0, \rho^1\}, \{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\}\rangle = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \big(\rho - \Pi(\rho)\big)\big(\hat{\rho} - \Pi(\hat{\rho})\big)dxdt \tag{3.34}$$

En particulier

$$\Big\langle \Lambda\{\rho^0, \rho^1\}, \{\rho^0, \rho^1\}\Big\rangle = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \big(\rho - \Pi(\rho)\big)^2 dxdt \tag{3.35}$$

On introduit alors de manièr naturelle la norme :

$$||\{\rho^0, \rho^1\}||_{F_\Pi} = \Big(\int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \big(\rho - \Pi(\rho)\big)^2 dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{3.36}$$

Evidemment, le fait que $||.||_{F_\Pi}$ définisse une norme est équivalent à ce que le théorème d'unicité suivant soit vérifié.

C'est grâce à un théorème d'unicité que nous pourrons introduire une (nouvelle) structure hilbertiennne F_Π donné par (3.36)

Donc l'expression (3.36) définit une norme dans les conditions d'application du Théorème d'unicité de HOLMGREN , plus précisément :
$||\{\rho^0, \rho^1\}||_{F_\Pi} = 0$, alors $\rho = \Pi(\rho)$.

Mais d'prés (3.5) , il en résulte que $\rho = 0$ sur $\mathcal{O} \times (0,T)$ implique $\rho \equiv 0$ donc (3.35) est une norme.

On définit alors l'espace hilbertien F_Π complété de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ pour la norme (3.35).

Les choses se simplifient (cf [28]) *si* $\mathcal{O} \times (0, T)$ *a la propriété de contrôle géométrique*
.

Dans ce cas (3.36) définit une norme , telle que

$$F_\Pi = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \tag{3.37}$$

avec équivalence des normes.

■

On a donc défini ainsi une (nouvelle) structure hilbertienne sur l'espace des donnés initiales. de (3.34) on a :

$$\langle \Lambda_\Pi\{\rho^0, \rho^1\}, \{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\}\rangle = \langle \{\rho^0, \rho^1\}, \{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\}\rangle_{F_\Pi} \tag{3.38}$$

où $\langle ., . \rangle_{F_\Pi}$ désigne le produit scalaire associé à la norme $||.||_{F_\Pi}$ et par conséquent

$$|\langle \Lambda_\Pi\{\rho^0, \rho^1\}, \{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\}\rangle| \leq ||\{\rho^0, \rho^1\}||_{F_\Pi} ||\{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\}||_{F_\Pi} \tag{3.39}$$

L'inégalité (3.39) nous permet de prolonger Λ_Π(de manière unique) en un opérateur linéaire continu de F_Π dans l'espace dual F'_Π (F'_Π est aussi un espace hilbertien qu'on n'identifie pas à l'espace F_Π)

$$\Lambda_\Pi : F_\Pi \longrightarrow F'_\Pi \tag{3.40}$$

de (3.39) on déduit

$$\langle \Lambda_\Pi\{\rho^0, \rho^1\}, \{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\}\rangle = \langle \{\rho^0, \rho^1\}, \{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\}\rangle_{F_\Pi} \quad \forall \{\rho^0, \rho^1\}, \{\hat{\rho}^0, \hat{\rho}^1\} \in F_\Pi \tag{3.41}$$

ce qui implique

$$\Lambda_\Pi = \Lambda_\Pi^* \tag{3.42}$$

où Λ_Π^* désigne l'opérateur adjoint de Λ_Π. De tout cela résulte que Λ est un isomorphisme de F sur F'.

■

■ **Conclusion**

Comme Λ_Π est un isomorphisme de F_Π sur F'_Π ; l'équation

$$\Lambda_\Pi\{\rho^0,\rho^1\} = \{(z'_0(0) + q'_0(0)), -(z_0(0) + q_0(0)\} \tag{3.43}$$

a une solution unique $\{\rho^0,\rho^1\} \in F_\Pi$ pour tout couple de données initiales $\{(z'_0(0) + q'_0(0)), (z_0(0) + q_0(0)\}$ tel que

$$\{(z'_0(0) + q'_0(0)), (z_0(0) + q_0(0)\} \in F'_\Pi \tag{3.44}$$

en effet , on déduit de (3.43) que

$$\left\langle q'_0(0) + z_0(0), \rho^0\right\rangle - \langle q_0(0) + z_0(0), \rho^1\rangle = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} [h_0 - \Pi(h_0)]\,\rho\, dxdt. \tag{3.45}$$

$$||\{(q'_0(0) + z'_0(0)), -(q_0(0) + z_0(0))\}||_{F'_\Pi} \leq ||h_0 - \Pi(h_0)||_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \tag{3.46}$$

Par conséquent (3.31) admet une solution unique , donnée par

$$\{\rho^0,\rho^1\} = -\Lambda_\Pi^{-1} M_\Pi h_0 \tag{3.47}$$

Remarque 3.1. *la résolution de (3.47) équivaut à la recherche de :*

$$\inf_{\{\rho^0,\rho^1\}\in F_\Pi} \left\{\frac{1}{2}\left\langle\Lambda\{\rho^0,\rho^1\},\{\rho^0,\rho^1\}\right\rangle - \left\langle q'_0(0) + z'_0(0), \rho^0\right\rangle + \left\langle q_0(0) + z_0(0), \rho^1\right\rangle\right\} \tag{3.48}$$

On choisit le vecteur contrôle w par

$$w = \big(\rho - \Pi(h_0 + \rho)\big)\chi_{\mathcal{O}} \tag{3.49}$$

Où ρ désigne la solution de (3.19) qui correspond aux données $\{\rho^0,\rho^1\}$ vérifiant (3.47).

Alors d'aprés l'unicité du problème (2.63) et donc le contrôle w répond à la question .

3.4 Définition de la sentinelle discriminante

Par conséquent (3.31) admet une solution unique , donnée par

$$\{\rho^0,\rho^1\} = -\Lambda_\Pi^{-1} M_\Pi h_0 \tag{3.50}$$

La sentinelle correspondante est donnée par

$$S(\lambda,\tau) = \int\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \big(h_0 + \rho - \Pi(h_0 + \rho)\big)y(x,t,\lambda,\tau)dxdt \tag{3.51}$$

■ d'où :

Théorème 3.1. *On se place dans les conditions du Théorème _reftheo3.2.2 et suppose que en outre que (3.5) a lieu .Il existe alors une sentinelle discriminante et une seule définie par* h_0 *.Elle est construite comme suit .On résout d'abord (3.19) puis on résout (3.20).On définit ensuite* $\{\rho^0, \rho^1\}$ *comme la solution (dans un espace convenable) de (3.21). La sentinelle est alors donnée par (3.51).*

■

Chapitre 4

Détection des termes de pollution dans les systèmes du second ordre de l'équation d'ondes non linéaire

Introduction

Nous rappelons aussi dans ce chapitre que les termes de la pollution sont inconnus.Ils se trouvent dans une partie de la frontière du domaine. Les données initiales sont également supposées inconnues, et nous ne cherchons à pas les trouver.

L'outil principal pour détecter les termes manquants est la méthode de la sentinelle de J.L.Lions (1992), qui permet de distinguer entre tous les termes manquants(de bruits et données initiales.

Nous voulons ici caractériser les termes de pollution indépendamment des données initiales manquantes voir [1] . Dans ce chapitre on traitera la méthode de la sentinelle d'une façon différente de celle du chapitre précédent , c'est à dire , on traitera le cas où la théorie de la sentinelle est utilisée dans son cadre général puisque nous considérons deux ensembles ouverts différents l'un pour le contrôle et l'autre pour l'observation ,Alors que le problème de trouver la sentinelle est equivalent à un problème de contrôlabilité (voir chapitre précédent ([28]) où le contrôle et l'observation ont leur support dans le même ensemble. C'est un nouveau problème pour les systèmes hyperboliques en général.
Le contrôle optimal du paramètre distribué régi par un système d'équations hyperboliques revêt une importance particulière pour les problèmes de traitement d'image généralement exprimés par la résolution de l'équation des ondes ou, de manière équivalente, par l'équation de Helmoltz.

En tant qu'application immédiate, l'existence d'une sentinelle discriminante pour une équation d'onde non linéaire peut être discutée, comme nous le voyons bien dans ce chapitre .

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 2, nous donnons une application à la théorie de la sentinelle de Lions pour les problèmes d'ondes non linéaires avec des données incomplètes et montrons l'existence d'une sentinelle pour l'équation d'onde, où le contrôle et l'observation ont leurs supports dans des ensembles ouverts différents.

Dans la section 3, nous abordons le problème de la contrôlab ilité sous contraintes qui corresponde à la recherche de sentinelles discriminantes.

■

1 Position du problème de la sentinelle

Soit Ω un ouvert $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ avec une frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^2$. Pour $T > 0$, nous posons $Q = (0,T) \times \Omega$,$\Sigma = (0,T) \times \Gamma$ et nous considérons l'équation des ondes non linéaire.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y + f(y) = 0 \quad \text{sur } Q \tag{1.1}$$

Où f est de classe $\mathscr{C}^1$. Les conditions initiales ont des données manquantes.

$$\left\{ \begin{array}{lcll} y(0) & = & y^0 + \tau_0 \hat{y}^0 & \text{sur } \Omega \\ y'(0) & = & y^1 + \tau_1 \hat{y}^1 & \text{sur } \Omega. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Où $y^0 \in H_0^1(\Omega)$, $y^1 \in L^2(\Omega)$ sont connus et $\tau_0 \hat{y}^0$, $\tau_1 \hat{y}^1$ sont inconnus (voir chapitr 3).

On suppose que

$$||(\hat{y}^0, \hat{y}^1)||_{H_0^1 \times L^2} \leq 1 \qquad et \;\; \tau_0 \,, \tau_1 \; petits.$$

Les termes de *pollution* apparaissent dans les conditions aux limites

$$y = \left\{ \begin{array}{lcll} y & = & \xi_0 + \lambda\hat{\xi_0} & \text{sur } \Sigma_0 = (0,T) \times \Gamma_0 \subset \Sigma \\ y & = & 0 & \text{sur } \Sigma \backslash \Sigma_0. \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Où $\xi_0 \in L^2(\Sigma_0)$ est donné , et où le terme $\lambda\hat{\xi_0}$ n'est pas connu.

L'objectif est de trouver une méthode pour calculer le terme de pollution $\lambda\hat{\xi_0}$.

■

Remarque 1.1. *Nous observons le système dans un ouvert $\mathcal{O} \subset \Omega$ appelé observatoir pendant un temps T que nous notons y_{obs} , cette observation est formulée par*

$$y_{obs} = m_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i m_i \tag{1.4}$$

les fonctions $m_0, m_1, ..., m_n$ sont connus dans $L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$, mais les β_i qui sont des nombres réels sont inconnus .Nous supposons seulement que les β_i sont " petits".Ces termes β_i sont appelés termes d'interférence (bruit) .De même nous supposons que pour $1 \leq i \leq n$, les fonctions m_i sont linéairement indépendants.

Remarque 1.2. *Dans le cas de l'équation de la chaleur on pouvait prendre l'observatoir $\mathcal{O}$ arbitrairement* " petit " *et on pouvait également prendre T arbitrairement petit.La situation est ici différente.Il faudra ici prendre T assez grand et la longueur de T dépendra de la* " taille" *de $\mathcal{O}$.*

Ceci est tout à fait intuitif.Une pollution s'exerçant sur Γ_0 ne saurait être dcélée par une observation faite sur $\mathcal{O}$ avant que son influence n'ait été propagée jusqu'à $\mathcal{O}$ .De même , à la fin de l'observation , les pollutions s'exerçant sur un intervalle de temps $(T-\alpha, T)$ n'ont plus d'influence sur l'observation , pour α assez petit. Autrement dit, si T est *"trop petit"* à cause de la vitesse finie de propagation des ondes, aucune action sur la frontière latérale Σ du système n'est perçue dans "les points de Ω qui sont loin de Γ". ■

1.1 La sentinelle

Nous allons maintenant introduire la notion de sentinelles suivant l'article d'Omrane [2] (voir aussi [7]). Dans cette définition , l'observation et le contrôle peuvent avoir des ensembles de support différents. En effet , on peut avoir l'observation dans une partie d'un domaine , et le contrôle dans une autre partie de Ω .Cette définition conduit à un problème de contrôlabilité non trivial.

Soit h_0 une fonction donnée sur $(0,T)\times\mathcal{O}$ telle que

$$h_0 \geq 0 \quad \int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 dxdt = 1. \tag{1.5}$$

Soit en outre ω un ouvert non vide de Ω . Pour la fonction de contrôle $v \in L^2((0,T)\times\omega)$, nous introduisons la fonctionnelle

$$S(\lambda,\tau_0,\tau_1) = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 y(t,x,\lambda,\tau_0,\tau_1) dxdt + \int_0^T \int_{\omega} v y(t,x,\lambda,\tau_0,\tau_1) dxdt \tag{1.6}$$

Nous dirons que S définit une sentinelle pour le système (1.1) - (1.3) et (1.5).

...

- S est insensible au premier ordre respectivement avec les termes manquants $\tau_0\hat{y}^0$, $\tau_1\hat{y}^1$ ce qui signifie

$$\frac{\partial S}{\partial \tau_0}(0,0,0) = 0 \qquad et \qquad \frac{\partial S}{\partial \tau_1}(0,0,0) = 0 \tag{1.7}$$

- Et w est de norme minimale dans $L^2((0,T)\times\omega)$ dans le sens

$$||w||_{L^2((0,T)\times\omega)} = \inf_{v\in L^2((0,T)\times\omega)} ||v|| \tag{1.8}$$

■

Remarque 1.3. *:*

Le point de vue classique de Lions repose sur h_0 et w ayant leur support dans le même ensemble ouvert d'observation $\mathcal{O}=\omega$. Dans ce cas la question de l'existence de la sentinelle telle que (1.7) aura lieu , est évidente. En effet , $h_0=-w$ est une solution de sorte que le vrai problème est de calculer contrôle optimal w(1.8) .

Le point de vue considéré ici est la notion de sentinelle définie par la fonction h_0 *, l'observation* y_{obs} *et le contrôle* w *, mais avec* h_0 *ayant son support dans* $\mathcal{O}$ *et* w *ayant son support dans* ω *avec* $\omega \neq \mathcal{O}$.

Dans ce cas , l'existence de la sentinelle n'est pas garantie.

■

Remarque 1.4. *. Le cas de l'observation entachée de bruit (1.4) est discuté et étudié dans la section 4.*

■

1.2 L'état adjoint - Problème de contrôlabilité

Notons par $y_{\tau_0} = \dfrac{\partial y}{\partial \tau_0}(0,0,0)$ et par $y_{\tau_1} = \dfrac{\partial y}{\partial \tau_1}(0,0,0)$ pour $\lambda = \tau_0 = \tau_1 = 0$.

Alors y_{τ_0} satisfait le système suivant :

$$\begin{cases} \Box_{a_0} y_{\tau_0} & = & 0 & \text{sur } Q. \\ y_{\tau_0} & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \\ y_{\tau_0}(0) & = & \hat{y}^0 & \text{sur } \Omega. \\ \dfrac{\partial y_{\tau_0}}{\partial t}(0) & = & 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{1.9}$$

et par y_{τ_0} satisfait à

$$\begin{cases} \Box_{a_0} y_{\tau_1} & = & 0 & \text{sur } Q. \\ y_{\tau_1} & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \\ y_{\tau_1}(0) & = & \hat{y}^1 & \text{sur } \Omega. \\ \dfrac{\partial y_{\tau_1}}{\partial t}(0) & = & 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

Où

$$\Box_{a_0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + a_0 I; \tag{1.11}$$

est le d'Alembertien avec potentiel

$$a_0 = f'(y_0) \in L^\infty(Q); \tag{1.12}$$

où a_0 est une valeur réel , et $y_0 = y(t,x,0,0)$. Il est bien connu que ces problèmes linèaires admettent chacun une unique solution de $\mathscr{C}([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap \mathscr{C}^1([0,T]; L^2(\Omega))$

Nous déduisons immédiatement que (1.7) est équivalent à :

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 y_{\tau_0}(t,x,\lambda,\tau_0,\tau_1) dxdt + \int_0^T \int_{\omega} w y_{\tau_0}(t,x,\lambda,\tau_0,\tau_1) dxdt = 0 \tag{1.13}$$

et

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 y_{\tau_1}(t, x, \lambda, \tau_1, \tau_1) dxdt + \int_0^T \int_{\omega} w y_{\tau_1}(t, x, \lambda, \tau_0, \tau_1) dxdt = 0 \tag{1.14}$$

■

Nous démontererons alors le résultat suivant

Proposition 1.1. *Soit q la solution du problème rétrograde bien posé :*

$$\begin{cases} \Box_{a_0} q &= h_0 \chi_{\mathcal{O}} + w \chi_{\omega} & sur\ Q. \\ q &= 0 & sur\ \Sigma. \\ q(T) &= 0 & sur\ \Omega. \\ \dfrac{\partial q}{\partial t}(T) &= 0 & sur\ \Omega. \end{cases} \tag{1.15}$$

Alors de la sentinelle pour (1.1)-(1.3) insensible aux données manquantes (i.e (1.13) et(1.14) auront lieu) est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro (1.15) avec

$$q(0) = \frac{\partial q}{\partial t}(0) = 0 \quad sur\ \Omega. \tag{1.16}$$

■

Preuve

Multiplions (1.15) par y_{τ_0} et intégrons par partie nous trouvons :

$$\begin{aligned} \int_Q (\Box_{a_0} q) y_{\tau_0} dxdt &= \\ &= \int_Q q \Box_{a_0} y_{\tau_0} dxdt + \int_\Omega \frac{\partial q}{\partial t}(T) y_{\tau_0}(T) dx \\ &- \int_\Omega \frac{\partial q}{\partial t}(0) y_{\tau_0}(0) dx - \int_\Omega q(T) \frac{\partial y_{\tau_0}}{\partial t}(T) dx + \int_\Omega q(0) \frac{\partial y_{\tau_0}}{\partial t}(0) dx \\ &- \int_\Sigma \frac{\partial q}{\partial \nu} y_{\tau_0} d\sigma + \int_\Sigma \frac{\partial y_{\tau_0}}{\partial \nu} q d\sigma \\ &= \int_Q (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + w \chi_\omega) y_{\tau_0} dxdt \end{aligned}$$

Mais y_{τ_0} est une solution de (1.9).Donc

$$-\int_\Omega \frac{\partial q}{\partial t}(0) \hat{y}^0 dx = \int_Q (h_0 \chi_{\mathcal{O}} + w \chi_\omega) y_{\tau_0} dxdt.$$

Si la sentinelle existe nous avons en particulier (1.13).Donc il reste :

$$\int_\Omega \frac{\partial q}{\partial t}(0) \hat{y}^0 dx = 0. \ \ \forall \hat{y}^0$$

et par conséquent

$$\frac{\partial q}{\partial t}(0) = 0 \quad dans \quad \Omega.$$

Maintenant multiplions (1.15) par $y_{\mathcal{T}_1}$ solution de (1.10) , et intégrons par partie , nous déduisons

$$\int_\Omega q(0)\frac{\partial y_{\mathcal{T}_1}}{\partial t}(0)dx = \int_Q (h_0\chi_{\mathcal{O}} + w\chi_\omega)y_{\mathcal{T}_1}dxdt.$$

et de (1.14) nous obtenons

$$\int_\Omega q(0)\hat{y}^1 dx = 0 \quad pour\,tout \quad \hat{y}^1.$$

Ainsi $q(0) = 0 \quad dans \quad \Omega$; et finallement nous avons (1.16).L'inverse est évident. ■

2 Contrôlabilité à zéro

2.1 Résultat sur l'existence de la solution

Lemme 2.1 ([31]). *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne. Pour tout $f \in L^1(0;T;L^2(\Omega))$,$\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$ Il existe une solution unique φ pour le système suivant :*

$$\begin{cases} \Box_{a_0}\varphi & = & f & sur\ Q. \\ \varphi & = & 0 & sur\ \Sigma. \\ \varphi(0) & = & \varphi_0 & sur\ \Omega. \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(T) & = & \varphi_1 & sur\ \Omega. \end{cases}$$

avec

$$\varphi \in \mathscr{C}([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap \mathscr{C}^1([0,T];L^2(\Omega))$$

* * * * * * *

2.2 Résultat sur l'existence du contrôle :

La méthode HUM permet d'obtenir la controîabilité interne (ou distribuée) au temps T lorsque la fonction contrôle v agit sur un sous-domaine ω strictement inclus dans Ω .Dans ce cas le support ω doit vérifier la condition d'optique géométrique de la définition ci-dessous(voir chapitre 3) c'est à dire $(\omega, T) \in COG$:

Définition 2.1. *On dit alors que que le couple (ω, T) satisfait la condition de contrôle géométrique , si et seulement si tout rayon lumineux réfléchi selon les lois de l'optique géométrique ; issu d'un point quelconque de Ω à l'instant $t = 0$ finit par rencontrer ω à un instant $t < T$.*

Dans cette section on considère le système d'onde suivant :

$$\begin{cases} \Box_{a_0} q & = & g & \text{sur } Q. \\ q & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \\ q(T) & = & q_0 & \text{sur } \Omega. \\ \dfrac{\partial q}{\partial t}(T) & = & q_1 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où le d'Alembertien $\Box_{a_0}$ avec le potentiel a_0 est donné par (1.11) tel que (1.12) . Il est bien connu que (cf lemme2.1) $g \in L^1([0,T], L^2(\Omega))$ et $(q_0, q_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, le problème (2.1) admet une unique solution

$$q \in \mathscr{C}([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap \mathscr{C}^1([0,T]; L^2(\Omega))$$

On étudie maintenant le problème de la contrôlabilité exacte pour les solutions du système (2.1). C'est-à-dire "étant donné un temps $T > 0$ et des conditions initiales $\{q_0, q_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe-t-il un vecteur contrôle v dans dans $L^2((0,T) \times \omega)$tel que la solution $q = q(v)$ du système (2.1) satisfasse la condition :

$$q(0; v) = \frac{\partial q}{\partial t}(0; v) = 0 \quad dans \quad \Omega \tag{2.2}$$

Autrement dit, il s'agit d'étudier l'existence d'un contrôle v dans $L^2((0,T) \times \omega)$ telle que l'unique solution q de (2.1) avec $g = \chi_\omega v$ ramène le système à l'état d'équilibre $\{0, 0\}$ au temps $t = 0$, où ω est un ouvert de Ω. ,ainsi que $W = (0,T) \times \omega$ désigne l'intérieur d'un cylindre et χ_ω la fonction caractéristique .

A nouveau la méthode HUM ramène ce problème (2.1) de contrôlabilité à un problème de contrôle optimal , introduisant la fonctionnelle J :

$$\begin{array}{lll} L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\phi^0, \phi^1) & \longrightarrow & J(\phi^0, \phi^1) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int\int_{(0,T)\times\omega} \phi^2(t,x)dxdt - \int_\Omega \langle q^1, \phi^0 \rangle + \langle q^0, \phi^1 \rangle dxdt \end{array}$$

où ϕ est solution du système

$$\begin{cases} \Box_{a_0} \phi & = & 0 & \text{sur } Q. \\ \phi & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \\ \phi(T) & = & \phi^0 & \text{sur } \Omega. \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t}(T) & = & \phi^1 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

La contrôlabilité repose alors sur l'existence d'une constante C positive telle que l'inégalité d'observabilité suivante :

$$||(\phi^0, \phi^1)||^2_{L^2 \times H^{-1}} \leq C(\omega, T) \int\int_{(0,T)\times\omega} \phi^2(t, x)dxdt$$

ait lieu pour toute donnée initiale $(\phi^0, \phi^1) \in L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega)$ de ϕ..A nouveau cette inégalité s'obtient en utilisant la méthode des multiplicateurs.

Proposition 2.1. *[8] Soit (ω, T) satisfaisant la condition de contrôle géométrique , pour toute $\{q_0, q_1\}$ dans $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$, il existe un contrôle $v \in L^2(0, T \times \omega)$ tel que la solution de (2.1) satisfasse (2.2) :$q(0; v) = \dfrac{\partial q}{\partial t}(0; v) = 0 \quad dans \quad \Omega$*

Plusieurs auteurs ont étudié le problème de contrôlabilité pour l' équations des ondes .Nous réferons à Dehman et al [16] , Gerard [30].Voir aussi les travaux de Ruiz [29] et Tataru [20] ... Dans la prochaine section nous allons considérer la contrôlabilité pour l'équation d'onde sous des contraintes.

■

3 Cas de la sentinelle discriminante

Définition 3.1. *On dit que S est une sentinelle discriminante pour le système (1.1)-(1.4) et (1.5) , s'il existe w tel que le couple (w, S) satisfait à (1.7)-(1.8) et si*

- *S est insensible au termes d'interférence $\beta_i m_i$ ie :*

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 m_i dxdt + \int_0^T \int_\omega w m_i dxdt = 0 \qquad 0 \leq i \leq n \tag{3.1}$$

Soit $\mathcal{K}$ un sous espace vectoriel fermé engendré dans $L^2((0, T) \times \omega$ par n fonctions indépendantes $m_i\chi_\omega$, $0 \leq i \leq n$. Il est facile de voir qu'il existe l'unique $k_0 \in \mathcal{K}$ tel que

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} h_0 m_i dxdt + \int_0^T \int_\omega k_0 m_i dxdt = 0 \qquad 0 \leq i \leq n$$

■

Remarque 3.1. *L'espace vectoriel $\mathcal{K}$ joue le même rôle que dans la section précédente.En plus la condition (3.1) est équivalente à*

$$w - k_0 = v \in \mathcal{K}^\perp \tag{3.2}$$

Enfin et pour résumer , le problème consiste à obtenir le contrôle w telle que le couple (w, S) satisfait (1.7) avec (3.1)(de même que (1.7) avec (3.2)) équivaut à trouver le contrôle v telle que la paire (v, q) satisfait le système suivant :

$$\begin{cases} v \in \mathcal{K}^{\perp}. & & \\ \Box_{a_0} q & = & h + v\chi_\omega & \text{sur } Q. \\ q & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \\ q(T) & = & 0 & \text{sur } \Omega. \\ \dfrac{\partial q}{\partial t}(T) & = & 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

et

$$q(0) = \frac{\partial q}{\partial t}(0) = 0 \quad dans \quad \Omega. \tag{3.4}$$

où $h = h_0\chi_{\mathcal{O}} + k_0\chi_\omega$ Donc nous avons considéré le problème original avec la contrôlabilité sous contraintes.

■

3.1 La contrôlabilité à zéro sous contraintes

Nous présentons ici un Théorème fondamental de Dehman et Omrane [5] que nous allons l'utiliser plus tard.

Nous avons besoin ici des hypothèses suivantes A1 et A2 (Nous rappelons que $\mathcal{K}$ est un sous espace de dimension finie de $L^2((0,T) \times \omega)$ définissant des contraintes).

(**A1**) Le couple (ω, T) satisfait la Condition de Contrôle Géometrique (C.C.G).

(**A2**) Le seul élément $k \in \mathcal{K}$ qui satisfait $\Box_{a_0} k = 0$ dans Q est l'élément trivial $k \equiv 0$

D'où nous avons le Théorème :

Théorème 3.1. *Sous les hypotheses A1 et A2 , pour chaque $(q_0, q_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2((\Omega)$,il existe une fonction contrôle de contrainte $v \in L^2((0,T) \times \omega)$ telle que l'état q solution du problème*

$$\begin{cases} \Box_{a_0} q & = & v\chi_\omega & sur\ Q. \\ q & = & 0 & sur\ \Sigma. \\ q(T) & = & q_0 & sur\ \Omega. \\ \dfrac{\partial q}{\partial t}(T) & = & q_1 & sur\ \Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

satisfait (2.2).

Preuve Pour la démonstration du Théorème 3.1 ,c'est une version adaptée de la méthode HUM de Lions [31] . (voir B.Dehman et A. Omrane [5].

■

3.2 Sentinelle discriminante

Nous terminons ce chapitre par la démonstration de l'existence de la sentinelle discriminante.

Proposition 3.1. *Sous les hypothèses A1 et A2 du Théoréme 3.1 , il existe une unique et non trivial sentinelle discriminante pour le problème (1.1)-(1.4) insensible aux données manquantes* $\tau_0\hat{y}^0$ *et* $\tau_1\hat{y}^1$ *et aux termes de bruit* $\beta_i m_i, \quad 1 \leq i \leq n$.

■

Preuve Du Théorème ci-dessus , l'existence de la sentinelle insensible aux données manquantes (ie ici tels que (1.7) et(3.2)) est assurée si nous démontrons qu'il existe $v \in \mathcal{K}^{\perp}$ tel que nous avons (1.16). Le système ci-dessus (3.3) est équivalent au système (2.1) sous contraintes. En effet en posant $q = z + \tilde{q}$ nous résoudrons :

$$\begin{cases} \Box_{a_0} z & = & h & \text{sur } Q. \\ z & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \\ z(T) & = & 0 & \text{sur } \Omega. \\ \dfrac{\partial z}{\partial t}(T) & = & 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

et nous posons $\tilde{q} = q - z$, alors $\left(\tilde{q}(T), \dfrac{\partial \tilde{q}(T)}{\partial t}(T)\right) = \left(q(T), \dfrac{\partial q}{\partial t}(T)\right) - \left(z(T), \dfrac{\partial z}{\partial t}(T)\right)$ et donc contrôlant q ou $\tilde{q}$ solution de

$$\begin{cases} v \in \mathcal{K}^{\perp}. \\ \Box_{a_0} \tilde{q} & = & v\chi\omega & \text{sur } Q. \\ \tilde{q} & = & 0 & \text{sur } \Sigma. \\ \tilde{q}(T) & = & 0 & \text{sur } \Omega. \\ \dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial t}(T) & = & 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

est le même.

Cependant le système (3.6) avec contraintes sur le contrôle est contrôlable à zéro grâce au Théorème 3.1

■

Conclusion et perspectives

a) **Conclusion**

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse représentent une contribution à l'étude des systèmes hyperboliques où la premère partie est consacréE à la caractérisation du contrôle optimal des systèmes hyperboliques pour des conditions de dirichlet homogènes.En ce qui nous concerne notre travail est articulé sur l'etude du contrôle optimal pour les équations pour les conditions de dirichlet non homogènes ainsi que le contrôle optimal frontière. Dans ce même cadre nous avons développé le cas du contrôle sans et à moindres regrets pour les systèmes hyperboliques relatives à plusieurs exemples de fonctions coûts tandis que nombreux travaux se sont focalisé sur les systèmes d'évolution du premier ordre. Quant à la deuxième partie , elle est consacrée à l'étude de la méthode de la sentinelle pour les systèmes hyperboliques selon la conception de Lions.En ce qui nous concerne nous avons développer cette méthode de la manière quelle soit une extension ou une généralisation de celle initiée par Lions ou l'observation et le contrôle ont des supports d'ouverts disjoints , tout en déterminant la sentinelle discriminante qu'elle est équivalente à un problème de contrôlabilité à zéro en se basant sur un Théorème dû à Dehmane et Omrane.

b) **Perspectives**

De nombreuse questions demeurent encore posés dans ce domaine .Comme futures perspectives de recherche sur les résultats présentés dans ce mémoire , nous envisageons développer et améliorer les points suivants :

- L'existence de la sentinelle pour les systèmes hyperboliques est garntie si la propriété d'unicité de HOLMOGREN est vérifiée. La question est de savoir si la propriété d'unicité de HOLMOGREN demeure vraie pour les opérateurs hyperboliques à coefficients non reguliers.
- Etudier l'existence de la sentinelle pour les systèmes hyperboliques dans le cas où la fonction f n'est pas régulière.
- illustrer le problème d'identification de paramètres dans les problèmes hyperboliques type équations des ondes non linéaire à données incomplètes en éxaminant les deux approches , la méthode des moindres carrés et la méthode de la sentinelle où l'observation et le contrôle ont des suuports d'ouverts disjoints.
- Etudier l'adaptation du contrôle à moindres regrets pour le contrôle des des pro-

blèmes hyperboliques (equation des ondes) mal posés (le cas du problème mal posé de l'équation de la chaleur a été traité par Omrane et Nakoulima).

- Etudier la nulle contrôlabilité de l'équation des ondes avec deux contraintes sur le contrôle avec application de la sentinelle discriminante.

Bibliographie

[1] A.Merabet , A.Omrane and A.Ayadi *Detection of pollution terms in nonlinear second order wave systems.* International Journal Of Parallel Emegent and Distributed systems ,2017.

[2] Omrane .A *Some aspects of the sentinel method for pollution problems.* Air quality-monitoring and modeling.In Kumar S , editor.InTech, Chap 92012 , p.185-204.ISBN978-953-51–0161-1.DOI :10.5772/33173. 2012.

[3] A.Omrane. *Contrôle de systèmes distribués à données manquantes.-Application au problème de la chaleur mal posé* . CEREGMIA EA2440 Univ des Antilles et de la Guyane.2012.

[4] O.Nakoulima , A.Omrane, J.Velin. *On the Pareto control and no-regret control for distributed systems with incompleted data.* . SIAM J CONTROL OPTIM , Vol NÂ°4 , pp 1167-1184.2012.

[5] Dehman B, Omrane A. *On the controllability under contraints on the contrôl hyperbolic equations.* Appl Math E-Notes .; 10 :36-39.2010

[6] Nazemi AR, Effati S. *Time optimal control problem of the wave equation.* Adv Model Optim .12(3) :363-382..2010

[7] Miloudi y, Nakoulima O, Omrane A. *On the instantaneous sentinels in pollution problems of incomplete data.* Inverse Prob .Sci Eng. ;17(4),451-459.2009

[8] Arnaud Münch. *Analyse numérique de quelques problèmes de contrôle et d'optimisation de formes des systèmes dynamiques.* Univ de Franche-Comté U.F.R.des Sciences et Techniques. 30/10/2008.

[9] R.Dorville,O.Nakoulima , A.Omrane. *The control off ill- posed distributed parameter systems .* . ESAIM PROCEEDING ,April 2007 , V.17,50-66.2007.

[10] Miloudi .Y , O.Nakoulima , A.Omrane. *A method for detecting pollution in dissipative systems with incomplete data.* . ESAIM ; Proc ; 17 :67-79. .2007

[11] E.Trélat *Contrôle optimal : théorie et application* . Univ Paris Sud ,Lab AN-EDP Mathématiques ;UMR8628-Bat 425 ;91405 Orsay cedex.2005.

[12] R.Dorville,O.Nakoulima , A.Omrane. *Low-regret Control off Singular Distributed Systems :The Ill Posed Backwards Heat Problem .* . Applied Mathematics Letters 17 (2004) 594-552.2004.

[13] A.Omrane. *Optimal Control of Ill Posed Parabolic Distributed Systems .* 2004.

[14] M .Bergounioux *Cours de DEA* . . Département de Mathématiques -Orléans 2001-2002.Applied Mathematics Letters 17 (2004) 594-552.

[15] O.Nakoulima , A.Omrane, J.Velin. *On the Pareto Control and no-regret control for distributed systems with incomplete data.* . SIAM J.Control Optim. Vol42.NÂ° 4, pp1167-1184.2003

[16] Dehman B, Lebeau G, Zuazua E, *Stabilization and control for the subcritical semi-linear wave equation.* Ann l'Ecole Normale SupÃ©rieure Paris. ;36(4) :525-551.2003

[17] O.Nakoulima , A.Omrane,J.Velin *No-regret Control for non linear distributed Systems with incomplete data.* . J.Math Pures Appl 81 1161-1189.(2002)

[18] O.Nakoulima , A.Omrane, J.Velin. *Perturbation à moindres regrets dans les systèmes distribués à données manquantes.* . C.R.A.Acad. Sci.Paris.t.330, Serie I, p801-806 , 2000.

[19] J.L Lions. *Duality Arguments for multi Agents Least-Regret Control.*. Collège de France , Paris , 1999.

[20] Tataru D. *The*X_θ^s *spaces and unique continuation for solutions to the semilinear wave equation.*. Commun Partial Differ Equ. ;21(5 et 6) :841-887.1996

[21] Fursikov A.Imanuvilov Oyu. *Controllability of evolution equations.* Lecture notes :research institute of mathematics , Seoul National University , Korea ; 1996.

[22] Diaz J.L , J.L Lions. *No regret and low regret control , in :Environment and their Mathematical ModeLs.*. . Eds RAM , Masson , Paris , ,pp101-123. 1994

[23] J.L Lions. *No regret and low-regret control , Environment , Economics and Their Mathematical Models* . . Masson ,Paris ,1994.

[24] D. Gabay and J.L Lions. *Décisions stratégiques à moindres regrets.* C.R.Acad.Sci. Paris .Ser. I Math ; 319 ; pp. 1249-1256.(1994)

[25] Ainseba B-E , Kernevez J-P ; Luce R. *Identification de paramètres dans des problèmes non linéaires à données incomplètes* . M2AN Math Model Numer Anal. ;28(3) :313-328.1994.

[26] Bardos. C ,Lebeau G, Rauch .J, *Sharp sufficient conditions for the observation,control and stabilization of wave from the boundary.* SIAM J Optim Control ,305 :1024-1065.1992.

[27] J.L.Lions. *Contrôle à moindre regret des systèmes distribués.* . C.R.Acad.Sci. Paris,Serie I 1315 1253-1257.(1992).

[28] J.L Lions. *Sentinelles pour les systèmes distribués à données manquantes.* . MASSON Paris Milan Barcelone Bonn 1992

[29] Ruiz A. *Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential.* J Math Pures Appl. ;71 :455-467.1992

[30] Gerard P. *Microlocal defect measures.* Commun Partial Differ Equ. ;16 :1761-1794.1991.

[31] J.L Lions. *Contrôlabilité Exacte -Perturbation et Stabilisation de systèmes distribués* . . RMA, 1988.

[32] J.L.Lions. *Contrôle de Pareto de systèmes distribués.Le cas stationnaire* . C.R.Acad.Sci. Paris,Serie I 302 223-227. (1986).

[33] J.L Lions. *Contrôle Optimal* . C.R.Acad.Sci. Paris, t .302 , Serie I nÂ° 11 , 1986.

[34] J.L Lions. *Some remarks on the optimal control of singular distributed systems* . Proceeding of Symposia in Pure Mathematics , V 45 ,Part 2.(1986) .

[35] J.L Lions. *Contrôle de systèmes distribués singuliers* . Gauthier-Villars.Bordas,Paris,1983.

[36] H.Brezis *Analyse Fonctionnelle -Théorie et Applications* . Éditions Masson ; Lieu : Paris ; Publication : 1983

[37] Boris Mordukhich , Jean Pierre Raymond emphDirichlet boundary control of hyperbolic equations in the presence of state constraints . . Departement of Mathematics , Wayane State University , Detroit ,MI48202 USA.

[38] J.L.Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivée partielles*. Dunod Paris ,1968.

[39] J.L.Lions et E .Magenes. *Problème aux limites non homogenes et Application volume2*. Dunod Paris ,1968.

[40] J.L.Lions et E .Magenes. *Problème aux limites non homogenes et Application V1*. Dunod Paris ,1968.

Notations

Ω	Domaine spatial , un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega = \Gamma$	Frontière Ω.
Q	$\Omega \times (0,T)$.
Σ	$\Gamma \times (0,T)$.
$a(.,.)$	forme bilinéaire .
$\mathcal{U}$	Espace des contôles
$\mathcal{U}_{ad}$	Sous-ensemble de $\mathcal{U}$ des contrôles admissibles.
$\mathcal{L}(X,Y)$	ensemble des opérateurs linéaires bornés de X dans Y.
B	Un opérateur de contrôle.
$\mathcal{C}$	Un opérateur d'observation.
Λ	Un isomorphisme d'un espace dans son dual.
X'	Espace duale de X.
A^*	L'adjoint de A.
N	Opérateur hermitien positif sur l'espace des contrôles A .
$L^2(\Omega)$	Un espace des fonctions carrés intégrables.
$\|\|u\|\|_{L^\infty(0,T;W)}$	$= \sup_{t\in(0,T)}(ess)\|\|u(t)\|\|_W$.
$L^p(0,T;X)$	espace des fonctions intégrable $f :]0,T[\longrightarrow X \quad tel\, que f(t) \in L^p(\Omega)$.
$\langle .,. \rangle_X$	Produit scalaire dans l'espace X.
$L^p(0,T;L^p(\Omega))$	$= L^p(0,T;\Omega)$
$\|\|.\|\|_X$	Une norme définie dans X.
$H^m(\Omega)$	Espace de Sobolev d'ordre m.
$H_0^m(\Omega)$	Espace des fonctions $f \in H^m(\Omega)$ telles que $\dfrac{\partial^k f}{\partial \nu^k}\|_{\partial\Omega} = 0 \quad 0 \le k \le m-1$.
$H^{-m}(\Omega)$	Espace dual de $H_0^m(\Omega)$.
$\mathcal{H}$	Espace des observations (Espace de Hilbert).
G	Espace des incertitudes (Espace de Hilbert).
$\mathcal{O}$	Un observatoire sur Ω .
$\chi_{\mathcal{O}}$	Fonction caractéristique de $\mathcal{O}$.

Résumé

Ce mémoire de thèse comporte deux parties. La première est consacrée l'étude du contrôle optimal des systèmes hyperboliques du secons ordre de type équations des ondes en milieu pollué.Dans le même contexte on a traité le cas du contrôle à moindres regrets , une notion qui trouve son origine dans les travaux de J.L Lions où l'on détermine le contrôle optimal relativement à plusieurs exemples de fonctions coûts. Dans la deuxième partie nous avons étudié la sentinelle pour les systèmes hyperbolique type équations des ondes dans un cadre plus général que celle initiée par J.L.Lions , où le contrôle et l'observation n'ont pas le même support mais deux ouverts différents.De même nous avons démontré l'existence de la fonctionnelle de sentinelle discriminante en résolvant un problème de la contrôlabilité á zéro avec des contraintes sur le contrôle.

Mots clés :équation hyperbolique ; contrôle optimal ; contrôle sans regrets ; contrôle à moindres regrets , sentinelle ; sentinelle discriminante

Abstract

This memory had two parts.The first comprises study the optimal control for second-order hyperbolic system type wave equation in polluted environment. In the same context , we have treated a low-regret control , a notion which has its origin and appellation in Lions' works , where we determine the optimal control relatively to to several examples of cost functions. In the second part , we have stutied the sentinel for the second-order hyperbolic equation of non-linear wave equation In a more general context As the one initiated by J.L.Lions, where the control and the observation do not have the same support but two open subsets differents.In the same way we proved the existence of the discriminating sentinel function by solving a null-control problem with constraints on the control.

Keywords : hyperbolic equation ; optimal control ; low-regret control ; no-regret controle ; sentinel ; descriminating sentinel

مُلَخَص

تَتَضَمن المُذَكِرَة قِسمَينِ، اَلَاوَل يَتَضَمن دِرَاسِة المُرَاقِب الَامثَل لِلَانظِمَة القطعيَة مِنَ

الدَّرَجة الثَانِيَة ، صِنف مُعَادَلَة المَوجَات فِي الوَسَط المُلَوَث ، اَينَ تَمَّ اخذ عبَارَة التَلَوَث علَى مُستَوَى شُرُوط الحُدُود ، مع العبَارَة النَاقِصَة (المُعطَيَات الاَوَلِيَة). فِي نَفس السَيَاق قُمنَا بِمُعَالَجَة حَلَة المُرَاقِب الاَدنَى اسَفًا ، وَ هُوَ مَفهُوم يَجِدُ اصلَهُ وَ تَسمِيَتُهُ فِي اعمَال جُون لُوِيس لِيُونس اينَ نُحَدِّد المُرَاقِب الاَمثَل بِالنِسبَة لِمَجمُوعَة امثِلَة لِدَوَال التَكلُفَة. فِي الجُزءِ الثَانِي قُمنَا بِدِرَاسَة الحَارِس بِالنِسبَة لِلَانظِمَة القَطعِيَة صِنف مُعَادَالَات المُوجَات فِي اطَار عَام خِلَاف مَا قَامَ بِهِ جُون لُوِيس لِيُونس حَيث المُرَاقِب وَ المُلَاحظَة لَيسَ لَهُمَا نَفس المَجمُوعَة ، بَل لِكُل وَاحِدَة مَجمُوعَتِهَا. اَيضَا قُمنَا بِالبُرهَانِ عَلَي وُجود دَالَة الحَارِس بِحَل مَسَالَة المُرَاقَبَة عَلَي مُستَوَي الصِفر مَع القُيُود عَلي المُرَاقِب.

اَلكَلُمَات المِفتَاحية

اَلمُعَادَلَة القَطعيَة ، اَلمُرَاقِب الاَمثَل ، اَلمُرَاقِب الاَدنَى أَسَفًا ، اَلمُرَاقِب دُون أَسَف ، اَلحَارِس ، اَلحَارِس التَمييِزِي .