REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE BATNA 2- Mostefa Ben Boulaïd

Faculté de Mathématiques-Informatique
Département de Mathématiques
Laboratoire d'Application des Mathématiques à l'Electronique et à l'Informatique
LAMEI

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT

Option : Equations aux Dérivées Partielles et Applications

Par

KAMOUCHE NESRINE

THEME

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DES INTEGRALES DE LAPLACE ET APPLICATIONS

Soutenue le : 26 avril 2017

Devant le jury composé de :

Président :	Dr. Salah Eddine Rebiai	Prof.	Université de Batna 2
Rapporteur :	Dr. Abdallah Benaissa	Prof.	Université de Batna 2
Examinateur :	Dr. Ahmed Zerrouk Mokrane	MCA	Université de Batna 2
Examinateur :	Dr. Lamine Melkemi	Prof.	Université de Batna 1
Examinateur :	Dr. Abdelkader Ziadi	Prof.	Université de Sétif

Remerciements

Je remercie ALLAH le tout puissant qui m'a offert volonté, patience et santé, me permettant de mener à terme ce présent travail.

Je tiens exprimer toute ma reconnaissance au professeur **Abdallah Benaissa** *d'avoir accepté de diriger mon travail. Qu'il trouve ici toute ma gratitude pour ses encouragements, ses conseils tout au long de ce travail effectué sous sa direction au sein de l'université de Batna 2. En plus de ses conseils et de ses encouragements, je tiens à le remercier spécialement pour sa disponibilité, sa sollicitude et sa générosité tant sur le plan professionnel que sur le plan humain.*

J'adresse mes plus vifs remerciements à monsieur **Salah Eddine Rebiai**, *professeur à l'université de Batna 2 pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je lui exprime ici toute ma gratitude.*

Je remercie aussi, monsieur **Ahmed Zerrouk Mokrane**, *maître de conférence classe A à l'université de Batna 2, monsieur* **Lamine Melkemi** , *professeur à l'université de Batna 1 et monsieur* **Abdelkader Ziadi**, *professeur à l'université Ferhat Abbas de Sétif, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres de jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.*

Je remercie sincèrement le professeur **Hisao Fujita Yashima** *de l'université de Guelma pour ces conseils et ses encouragements tout au long de mes recherches.*

Je remercie également le professeur **Sylvie Benzoni Gavage** *de l'université de Lyon 1 de m'avoir accueilli dans son laboratoire et mis à ma disposition tous les moyens pour réaliser ce travail.*

Je voudrais également remercie le professeur **Claud Roger** *de l'université de Lyon 1 pour ses remarques et ses suggestions importantes.*

Finalement, je remercie **"mes parents"** *pour leur contribution, leur soutien et leur patience durant toutes mes études et qui m'ont toujours aidé et encouragé aux moments opportuns. Et plus particulièrement mon frère et mes soeurs qui ont contribué à l'aboutissement de cette étude. Sans oublier tous mes proches amis et collègues qui m'ont aidé de prés où de loin dans l'élaboration de ce travail, j'adresse mes remerciements les plus sincères.*

Analyse asymptotique des intégrales de Laplace et applications

Kamouche Nesrine
Thèse de doctorat en mathématiques
Université de Batna 2

6 mai 2017

Table des matières

Introduction **3**

1 Préliminaire **8**

1.1 Comparaison des fonctions 8

1.1.1 Fonction négligeable (Prépondérante) 8

1.1.2 Fonction dominante 9

1.1.3 Fonction équivalente 10

1.2 Propriétés des relations de comparaison 11

1.2.1 Propriétés des relations de domination et de prépondérance. 11

1.2.2 L'équivalence des fonctions et les opérations algébriques. 13

2 Développement asymptotique **16**

2.1 Développement limité 16

2.1.1 Troncature d'un développement limité 16

2.2 Développement asymptotique au sens de Poincaré 17

2.3 Fonction exponentiellement négligeable 18

2.4 Développement asymptotique généralisé 19

2.4.1 Suite asymptotique 21

2.4.2 Développement asymptotique généralisé 23

2.4.3 Opérations sur les séries asymptotiques 23

2.5 Distinction (Convergence/asymptoticité) 31

3 Méthode pour les intégrales unidimensionnelles **37**

3.1 Lemme de Watson 38

3.2 Quelques exemples d'application du lemme de Watson 40
3.3 Méthode de Laplace 42
3.4 Exemples sur la méthode de Laplace 45
3.5 Méthode de Laplace dans le cas d'un point minimum intérieur non dégénéré 51
3.6 Méthode de Laplace dans le cas d'un point minimum frontalier 54

4 Intégrales doubles **56**
4.1 Cas d'un point minimum intérieur non dégénéré 56
4.1.1 Lemme de Morse 56
4.1.2 Intégrales de Laplace dans le cas d'un point minimum intérieur . . 60
4.2 Point minimum frontalier 62
4.2.1 Introduction 62
4.2.2 Principaux résultats 64
4.2.3 Définitions et outils de base 65
4.2.4 Transformations préliminaires 67
4.2.5 Cas de régularité de la frontière au voisinage du point minimum . 69
4.2.6 Cas de non-régularité de la frontière au voisinage du point minimum 80
4.2.7 Calcul du terme principal 83
4.2.8 Conclusion et exemples 87

5 Application à un problème du temps de sortie **91**

Bibliographie **93**

Introduction

On parle d'analyse asymptotique lorsqu'on s'intéresse au comportement d'une fonction, dépendant d'un certain paramètre, quand ce paramètre s'approche d'une valeur déterminée. L'analyse asymptotique d'intégrales dépendant d'un paramètre a été considérée dès la fin du dix-huitième siècle par des mathématiciens de l'époque pour approcher numériquement certaines solutions d'équations différentielles, en exploitant des séries non forcément convergentes. Néanmoins, l'assise des fondements mathématiques rigoureux de la théorie de l'analyse asymptotique à travers l'exploitation de séries éventuellement divergentes, connue aujourd'hui sous l'appellation "développement asymptotique", est due à Poincaré en 1886. Ce dernier l'a élaboré avec l'idée de l'appliquer aux équations différentielles analytiques : sa principale motivation était de donner un sens à une solution de série formelle divergente d'une telle équation différentielle, c'est-à-dire d'"incarner" une solution formelle en une vraie solution.
Alors, il est plus juste de dire que Poincaré était le premier qui a dégagé le concept avec ses principales propriétés (notamment les opérations : addition, multiplication, intégration, substitution, $\cdots$) et qui l'a appliqué dans des situations "très générales". D'abord, à l'étude des équations différentielles linéaires, puis à celle des développements perturbatifs en mécanique céleste (également en relation avec des équations différentielles). L'exemple suivant illustre bien l'efficacité de l'outil "développement asymptotique".

Exemple 0.0.1.
Soit l'intégrale

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos t \, dt, \tag{0.1}$$

pour des valeurs positives du réel x. Essayons d'évaluer cette intégrale par le développement de $\cos t$ en série de puissances de t et ensuite l'intégration terme à terme.

On obtiendra

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos t dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left[1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \right] dt \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} - \dots \end{aligned}$$

Sous la condition $x > 1$, la série précédente converge vers

$$F(x) = \frac{x}{x^2 + 1}. \tag{0.2}$$

La validité de cette méthode est confirmée par la possibilité d'obtenir ce résultat directement par l'intégration par parties deux fois, où cette dernière méthode nous permet d'élargir le résultat à $x > 0$.

Appliquons maintenant la même procédure à l'intégrale

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt. \tag{0.3}$$

On obtiendra

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left[1 - t + t^2 - \dots \right] dt \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots \end{aligned} \tag{0.4}$$

Cette dernière série diverge pour toute valeur finie de x, et ainsi à première vue apparaît sans intérêt pour évaluer $G(x)$.

On tente maintenant et d'une façon heuristique d'utiliser cette dernière série pour évaluer numériquement les valeurs de $G(x)$ pour certaines valeurs de x, par exemple pour $x = 10$. Les quatre premiers termes sont donnés par

$$0,1000 - 0,0100 + 0,0020 - 0,0006,$$

et la somme de ces quatre termes est

$$0,0914.$$

On remarque alors que cette valeur est très proche de la valeur exacte de

$$G(10) = 0,09156\cdots$$

Ainsi, il est légitime d'explorer la piste de l'utilisation de la série (bien que divergente) (0.4) pour évaluer numériquement les valeurs de $G(x)$. On considère alors la différence ε_n entre $G(x)$ est la somme des n premiers termes de la série (0.4), donnée par

$$\varepsilon_n = G(x) - g_n(x), \tag{0.5}$$

où

$$g_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}. \tag{0.6}$$

Puisque

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)\,t^n}{1+t}, \tag{0.7}$$

l'insertion dans (0.5) donne

$$\varepsilon_n(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-xt}}{1+t}\,dt, \tag{0.8}$$

d'où

$$|\varepsilon_n(x)| \leq \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\,dt = \frac{n!}{x^{n+1}}. \tag{0.9}$$

En d'autres termes, numériquement, la somme $g_n(x)$ des n premiers termes de la série (0.4) approxime $G(x)$ avec une erreur inférieure au premier terme négligé de cette série. Les premières sommes partielles de la série (0.4) donne de bonnes approximations numériques de $G(x)$. Ainsi, cette série ressemble à une série convergente. Mais pour x fixé, l'erreur $\varepsilon_n(x)$ croit énormément, et ainsi la série (0.4) n'est pas convergente pour aucune valeur de x. Une opinion hâtive nous motive à décider (à tort) de l'inutilité de cette série, dont les premières sommes partielles donnent de bonnes approximations de la fonction $G(x)$. A partir de cet exemple, on peut affirmer qu'une certaine classe de

séries (non pas nécessairement convergentes) peuvent être d'une grande utilité pour approximer numériquement des fonctions. Il s'agissait ici de ce qu'on appelle les séries asymptotiques.

Historiquement le développement formel menant à la série divergente (0.4) est un exemple typique de séries divergentes obtenues à partir d'équations intégrales ou différentielles, ou par autres procédures, utilisées fréquemment dès le dix-huitième siècle par des mathématiciens, en particulier par Euler. La manipulation formelle des séries asymptotiques divergentes a duré jusqu'à l'élaboration des premiers fondements mathématiques rigoureux par le mathématicien français Henri Poincaré en 1886. L'extension de l'utilisation des séries asymptotiques a des situations non couvertes par le modèle élaboré par Poincaré a mené d'une façon naturelle à une généralisation permettant l'utilisation d'une échelle approximante quelconque, en contraste avec la théorie de Poincaré pour laquelle l'échelle approximante est formée uniquement de fonctions puissances ($x^k, k \in \mathbb{Z}$).

- Présentation de la thèse

La thèse se compose de cinq chapitres et est organisée de la façon suivante :

- Dans les deux premiers chapitres, nous exposons des préliminaires et quelques notions de base, où on explique le concept du développement asymptotique au sens de Poincaré et la généralisation naturelle de ce concept par d'autres mathématiciens.

- Le troisième chapitre est consacré à deux outils fondamentaux, le lemme de Watson qui concerne des intégrales de Laplace et la méthode de Laplace qui s'applique à une classe plus générale d'intégrales, à savoir les intégrales de type de Laplace.

- On estime que les plus importants résultats originaux de cette thèse se situent au niveau du quatrième chapitre. Dans ce chapitre on propose une nouvelle méthode pour construire des développements asymptotiques des intégrales doubles de type de Laplace dans le cas de points minimaux frontaliers, non stationnaires pour la phase.

Cette nouvelle méthode résout complètement le problème dans le cas analytique. L'importance de notre méthode est contrastée par le fait que, à notre connaissance, tous les travaux antérieurs ne résolvent le problème que dans le cas très particulier correspondant à la situation où la restriction de la phase à la frontière n'est pas dégénérée.

- Enfin, dans le chapitre cinq, On termine notre thèse par un exemple d'application à un problème de sortie d'un système dynamique perturbé par un bruit aléatoire. On note que les principaux résultats de cette thèse ont été publiés dans [25].

Chapitre 1

Préliminaire

Pour tout $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ on pose :

- $V_{x_0} = \left\{B \subset \overline{\mathbb{R}} : \exists \eta > 0 \text{ et }]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset B\right\} \quad \text{si} \quad x_0 \in \mathbb{R},$
- $V_{x_0} = \left\{B \subset \overline{\mathbb{R}} : \exists A \in \mathbb{R} \text{ et }]-\infty, A[\subset B\right\} \quad \text{si} \quad x_0 = -\infty$
- $V_{x_0} = \left\{B \subset \overline{\mathbb{R}} : \exists A \in \mathbb{R} \text{ et }]A, +\infty[\subset B\right\} \quad \text{si} \quad x_0 = +\infty$

Un élément de V_{x_0} est appelé un voisinage de x_0. L'ensemble des voisinages de x_0 est stable par intersection.

Pour tout $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, on désigne par F_{x_0} l'ensemble des fonctions définies dans un voisinage de x_0. Cet ensemble est stable par addition, par multiplication et par multiplication par une constante.

1.1 Comparaison des fonctions

Soient f, g deux éléments de F_{x_0}.

1.1.1 Fonction négligeable (Prépondérante)

Définition 1.1.1. *On dit que f est négligeable devant g ou que g est prépondérante devant f au voisinage de x_0 si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $V \in V_{x_0}$ tel que*

$$\forall x \in V, \quad |f(x)| \leq \epsilon |g(x)|.$$

1.1.2 Fonction dominante

Définition 1.1.2. *On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0 s'il existe $V \in V_{x_0}$ et $M > 0$ tel que*

$$\forall x \in V, \quad |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

On désigne respectivement par $O(g)$ et $o(g)$ l'ensemble des fonctions dominées par g et l'ensemble des fonctions négligeables devant g au voisinage de x_0. Il est clair que $o(g) \subset O(g) \subset F_{x_0}$.

Parfois, par abus d'écriture, on note $O(g)$ et $o(g)$ un élément quelconque de ces ensembles (c'est souvent le cas dans l'écriture des développements limités). On peut aussi écrire $O_{x_0}(g)$ et $o_{x_0}(g)$ lorsque différentes valeurs de x_0 interviennent.

Remarquons que

• Si $f \in O(g)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

• La fonction f est négligeable devant une fonction constante non nulle si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Exemple 1.1.1.

1. Soient f et g des fonctions réelles définies par

$$f(x) = \cos x + 2, \quad g(x) = x.$$

   Par une étude triviale des deux fonctions, on sait que g prend des valeurs aussi grandes que l'on veut au voisinage de l'infini tandis que f ne peut prendre des valeurs qu'entre 1 et 3, l'écart entre f et g au voisinage de l'infini ne cesse d'augmenter et n'est pas borné. Dans ce contexte on peut dire que f est négligeable devant g ou que g est prépondérante devant f au voisinage de l'infini, et on écrit

$$f(x) = o(g(x)), \quad (x \to +\infty) \quad \text{(notation de Landau)}$$

   ou

$$f(x) \prec g(x), \quad (x \to +\infty) \quad \text{(notation de Hardy)}.$$

2. $x^3 = o(x^2), \quad x \to 0 \quad$ et $\quad x^2 = o(x^3), \quad (x \to +\infty)$.

3. $\log x = o(x), \quad (x \to +\infty)$.

On peut facilement montrer le résultat suivant.

Théorème 1.1.1. *On a $f \in o(g)$ si et seulement si'il existe dans F_{x_0} une fonction ϵ telle que $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$ et $f(x) = \epsilon(x) g(x)$.*
Si g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0 alors,

$$f \in o(g) \quad \textit{équivaut à} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On a un résultat analogue pour la relation de domination en remplaçant la fonction ε par une fonction M bornée dans un voisinage de x_0.

Exemple 1.1.2.

Au voisinage de $+\infty$ on a

$$x^\alpha \in o(e^x) \quad \text{et} \quad \ln x \in o(x^\alpha) \quad si \quad \alpha > 0.$$

Et

$$x^\alpha \in o(x^{\alpha'}) \quad \text{et} \quad e^{\alpha x} \in o(e^{\alpha' x}) \quad \text{si} \quad 0 < \alpha < \alpha'.$$

Exemple 1.1.3.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

De la propriété $\lim_{u \to \pm\infty} e^{-u^2} u^n = 0$, on déduit

$$\lim_{x \to 0, x \neq 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0,$$

d'où

$$f(x) \in o(x^n).$$

1.1.3 Fonction équivalente

Définition 1.1.3. *Deux fonctions f et g de F_{x_0} sont dites équivalentes au voisinage de x_0 si*

$$f - g \in o(g).$$

On écrit dans ce cas

$$f \sim g.$$

Théorème 1.1.2. *On a $f \sim g$ si et seulement si'il existe une fonction ε dans F_{x_0} telle que*

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$$

pour tout x d'un voisinage de x_0.
Si g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0, alors

$$f \sim g \quad \text{équivaut à} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Démonstration.

Si $f \sim g$ alors $f - g \in o(g)$ et il existe une fonction ε de limite nulle en x_0 telle que $f(x) - g(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout x d'un voisinage V de x_0. Il en résulte $f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$ pour tout x de V. La réciproque est facile.
Si g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0 alors, $f \sim g$ équivaut à $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ car $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \varepsilon(x)$.

□

1.2 Propriétés des relations de comparaison

1.2.1 Propriétés des relations de domination et de prépondérance.

Dans les résultats suivants, f, g et h sont des fonctions numériques de F_{x_0} et qui ne s'annulent pas au voisinage de x_0. Les relations de comparaisons sont établies quand x tend vers x_0.

Proposition 1.2.1.

1. *Si $f = O(h)$ et $g = O(h)$ alors $f + g = O(h)$.*
2. *Si $f = o(h)$ et $g = o(h)$ alors $f + g = o(h)$.*
3. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, si $f = O(g)$ alors $\alpha f = O(\alpha g)$.*
4. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, si $f = o(g)$ alors $\alpha f = o(g)$.*

5. *Si* $f_1 = O(g_1)$ *et* $f_2 = O(g_2)$ *alors* $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$.
6. *Si* $f_1 = o(g_1)$ *et* $f_2 = o(g_2)$ *alors* $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.
7. *Si* $f = O(g)$ *et* $g = O(h)$ *alors* $f = O(h)$.
8. *Si* $f = o(g)$ *et* $g = o(h)$ *alors* $f = o(h)$.
9. *Si* $f = o(g)$ *alors* $f = O(g)$.
10. *Si* $f = o(g)$ *et* $g = O(h)$ *alors* $f = o(h)$.

Démonstration.

Ces propriétés sont faciles à vérifier. Cependant, pour illustration, on va expliciter la démonstration des propriétés 5 et 10.

5. Montrons que : si $f_1 = O(g_1)$ et $f_2 = O(g_2)$ alors $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$.

On a $f_1 = O(g_1)$ alors $\exists\, M_1 > 0$ tel que : $\left|f_1(x)\right| \leqslant M_1 \left|g_1(x)\right|$

et on a $f_2 = O(g_2)$ alors $\exists\, M_2 > 0$ tel que : $\left|f_2(x)\right| \leqslant M_2 \left|g_2(x)\right|$

alors

$$\left|f_1(x)\right| \left|f_2(x)\right| \leqslant M_1 M_2 \left|g_1(x)\right| \left|g_2(x)\right|$$

donc

$$\exists\, M = M_1 M_2 > 0 \text{ tel que } \left|f_1(x) f_2(x)\right| \leqslant M \left|g_1(x) g_2(x)\right|.$$

D'où

$$f_1 f_2 = O(g_1 g_2).$$

10. Montrons que : si $f = o(g)$ et $g = O(h)$ alors $f = o(h)$.

On a

(**1**) $f = o(g)$ alors $f(x) = \varepsilon(x) \cdot g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

(**2**) $g = O(h)$ alors $\exists V$ de x_0, $\exists c > 0$ tel que

$$|g(x)| \leq c|h(x)|.$$

(**1**) et (**2**) nous donnent

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\varepsilon(x) g(x)| \\ &\leq \varepsilon(x).c|h(x)| \end{aligned}$$

$$=\varepsilon_1(x)|h(x)|$$

avec $\varepsilon_1(x) = c\varepsilon(x)$, d'où $\underset{x\to x_0}{\varepsilon_1(x)} = 0$, alors

$$f = o(h).$$

□

1.2.2 L'équivalence des fonctions et les opérations algébriques.

Proposition 1.2.2. *La relation binaire $\sim$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration.

Seule la symétrie n'est pas évidente. Si $f \sim g$ alors il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de x_0 et de limite nulle en x_0 telle que, pour tout x de V,

$$f(x) = (1+\varepsilon(x))g(x).$$

Comme $\lim\limits_{x\to x_0}(1+\varepsilon(x)) = 1$, il existe un voisinage W de x_0 sur lequel $1+\varepsilon(x) > 0$.
Pour tout $x \in V \cap W$, on a

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{1}{1+\varepsilon(x)}f(x) &= \Big(1-\frac{\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)}\Big)f(x) \\ &= (1+\varepsilon_1(x))f(x), \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_1(x) = -\frac{\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)}$.
On a $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon_1(x) = 0$ et donc

$$g \sim f.$$

□

Proposition 1.2.3.

a)- *La relation d'équivalence est compatible avec la multiplication :*

$$f_1 \sim f_2 \ \ et \ \ g_1 \sim g_2 \quad impliquent \quad f_1g_1 \sim f_2g_2.$$

b)- *Si f ne s'annule pas dans un voisinage de x_0 alors,*

$$f \sim g \quad implique \quad \frac{1}{f} \sim \frac{1}{g}.$$

c)- *Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ alors,*

$$g_2 \in o(g_1) \quad \textit{implique} \quad f_1 + f_2 \sim g_1.$$

Démonstration.

La preuve de **a)** utilise le théorème (1.1.2).

Pour **b)**, on adapte la preuve de la proposition (1.2.2).

Donnons une preuve abrégée de **c)**. Il existe des fonctions ε_1, ε_2 et ε_3 telles que

$$\begin{aligned} f_1(x) =& (1+\varepsilon_1(x))g_1(x), \\ f_2(x) =& (1+\varepsilon_2(x))g_2(x), \\ g_2(x) =& \varepsilon_3(x)g_1(x). \end{aligned}$$

D'où

$$f_1(x) + f_2(x) = \big(1 + \varepsilon_1(x) + \varepsilon_3(x) + \varepsilon_2(x)\varepsilon_3(x)\big)g_1(x)$$

et donc

$$f_1 + f_2 \sim g_1.$$

□

En général, l'équivalence des fonctions n'est pas compatible avec l'addition.

Au voisinage de 0,

$$1 + x^2 \sim 1 + x \quad \text{et} \quad -1 \sim -1.$$

Mais $x^2 \nsim x$.

On a cependant le résultat suivant.

Proposition 1.2.4. *Soient f_1, f_2, g_1, g_2 dans F_{x_0} telles que*

$$f_1 \sim f_2 \quad \textit{et} \quad g_1 \sim g_2.$$

S'il existe un voisinage de x_0 dans lequel $f_1 \geq 0$ et $g_1 \geq 0$ alors

$$f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2.$$

Démonstration.

Soit V un voisinage de x_0 sur lequel $f_1 \geq 0$ et $g_1 \geq 0$ et ε_1, ε_2 des fonctions de limites nulles en x_0 telles que

$$\begin{aligned} f_2(x) =& (1+\varepsilon_1(x))f_1(x), \\ g_2(x) =& (1+\varepsilon_2(x))g_1(x). \end{aligned}$$

Posons, pour x dans V,

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f_1(x)+g_1(x)=0, \\ \frac{\varepsilon_1(x)f_1(x)+\varepsilon_2(x)g_1(x)}{f_1(x)+g_1(x)} & \text{si} \quad f_1(x)+g_1(x)>0. \end{cases}$$

On a, pour tout x de V,

$$f_2(x)+g_2(x) = (1+\varepsilon(x))(f_1(x)+g_1(x)).$$

Pour tout x de V, il est clair que, si $f_1(x)+g_1(x)=0$, alors

$$|\varepsilon(x)| \leq |\varepsilon_1(x)| + |\varepsilon_2(x)|.$$

Sinon

$$\begin{aligned} \left|\frac{\varepsilon_1(x)f_1(x)+\varepsilon_2(x)g_1(x)}{f_1(x)+g_1(x)}\right| \leq& |\varepsilon_1(x)|\frac{f_1(x)}{f_1(x)+g_1(x)} \\ &+ |\varepsilon_2(x)|\frac{g_1(x)}{f_1(x)+g_1(x)} \\ \leq& |\varepsilon_1(x)| + |\varepsilon_2(x)|. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et donc

$$f_1+g_1 \sim f_2+g_2.$$

□

Chapitre 2

Développement asymptotique

2.1 Développement limité

Définition 2.1.1. (Développement limité d'ordre n en un point)

Soit $f : I = [b, c] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in I$. Soit n un entier naturel, on dit que f admet un développement limité (en abrégé DL) d'ordre n en x_0 s'il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_n$ et une fonction $x \to \varepsilon(x)$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

2.1.1 Troncature d'un développement limité

Supposons que f admet un DL d'ordre n en x_0. Soit p un entier naturel, avec $p \leqslant n$. Alors f admet un DL d'ordre p en x_0 obtenu par la troncature du premier DL, plus précisément

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o\big((x - x_0)^n\big) \\ \Rightarrow \quad f(x) &= \sum_{k=0}^{p} a_k (x - x_0)^k + o\big((x - x_0)^p\big). \end{aligned}$$

Par exemple si $f(x) = 1 - x + 2x^3 + x^4 + o(x^4)$ alors $f(x) = 1 - x + 2x^3 + o(x^3)$.

Définition 2.1.2. (Développement limité au voisinage de $\pm\infty$)

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $\pm\infty$, $n \in \mathbb{N}$. On dit que f a un développement limité d'ordre n en $+\infty$ (resp en $-\infty$), s'il existe des réels $a_0, a_1, ...a_n$ et une

fonction $x \to \varepsilon(x)$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + \frac{\varepsilon(x)}{x^k} \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Remarque 2.1.1.

– *Avec les notations de Landau, le développement précédent s'écrit*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

– *Les DL en ∞ ont des propriétés analogues à celles des DL en un point fini (unicité, troncature, $\cdots$, etc).*

– *D'ailleurs un DL en ∞ peut toujours se ramener à un DL en 0 en posant $y = \dfrac{1}{x}$.*
En effet, si f est définie au voisinage de ∞ alors $g(y) = f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ est définie au voisinage de 0, et on a l'équivalence

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \Longleftrightarrow g(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^k + o(y^n).$$

2.2 Développement asymptotique au sens de Poincaré

Un développement asymptotique décrit le comportement asymptotique d'une fonction en termes d'une suite de fonctions de jauge. La définition a été introduite par Poincaré (1886), et il fournit une base mathématique solide pour l'utilisation de nombreuses séries divergentes.

1. **Au voisinage de l'infini :**

   Définition 2.2.1. *Soit $f(z)$ définie dans une partie non bornée Ω de $\mathbb{C}$. La série de puissances $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$ (convergente ou divergente) est dite un développement asymptotique (au sens de Poincaré) de $f(z)$, si pour tout entier fixé $N \geqslant 0$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n} + O\big(z^{-(N+1)}\big), \quad (z \to \infty), \tag{2.1}$$

   dans ce cas, nous écrivons

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}, \quad (z \to \infty).$$

2. **Au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$:**

Définition 2.2.2. *On dit que la série de puissances $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ est une série asymptotique associée à f et on note*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad (z \to z_0), \tag{2.2}$$

si

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n + O\big((z-z_0)^{N+1}\big), \quad z \in \Omega.$$

Théorème 2.2.1. (Unicité). *Si une fonction $f(z)$ admet un développement asymptotique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$, alors ce développement est unique. Cela résulte du fait que les coefficients a_n sont définis, à partir de la fonction $f(z)$ par les relations récurrentes*

$$a_0 = \lim_{z\to\infty} f(z), \quad a_n = \lim_{z\to\infty} \frac{\left[f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{-k}\right]}{z^{-n}}. \tag{2.3}$$

2.3 Fonction exponentiellement négligeable

On dit qu'une fonction $f(z)$ est exponentiellement négligeable au voisinage de l'infini, s'ils existent $a, b > 0$ telle que

$$f(z) = O\Big(e^{-a|z|^b}\Big), \quad (z \to \infty). \tag{2.4}$$

D'après (2.3) une fonction exponentiellement négligeable $f(z)$ admet la série nulle ($a_0 = a_1 = \ldots = 0$) comme développement asymptotique au voisinage de l'infini. Il en résulte que si la différence $f(z) - g(z)$ de deux fonctions f et g est exponentiellement négligeable et l'une de ces deux fonctions admet un développement asymptotique, alors l'autre fonction admet le même développement.

Exemple 2.3.1.

Si $f(x)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, alors sa série de Taylor (non nécessairement convergente)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{2.5}$$

est un développement asymptotique de $f(x)$ au point x_0, i.e.

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \quad (x \to x_0). \tag{2.6}$$

Cela résulte du résultat suivant de Taylor.

Proposition 2.3.1. *Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage d'un point x_0, d'après le théorème de Taylor on a*

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| \leqslant c_{N+1} \left| x - x_0 \right|^{N+1} \tag{2.7}$$

avec $c_{N+1} = \sup \left| \frac{f^{(N+1)}(x)}{(N+1)!} \right|$.

Démonstration.

Pour la preuve voir ([1], p 19).

□

2.4 Développement asymptotique généralisé

Dans certaines situations, il s'avère utile d'approximer au voisinage d'un point une fonction dans une échelle de fonctions qui ne sont pas nécessairement de fonctions puissances. Ainsi, puisque le formalisme de Poincaré ne peut pas couvrir ces nouvelles importantes situations, les mathématiciens Shmidt en 1937 et ensuite Erdélyi en 1961 avaient généralisé le concept de développement asymptotique. La différence principale entre le modèle de Poincaré et ce nouveau modèle est, d'un côté la série approximante n'est pas forcément formée de fonctions puissances et de l'autre côté les fonctions majorant l'erreur peuvent être différentes des fonctions de la série approximante.

Exemple 2.4.1.

Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}{x-1}. \tag{2.8}$$

De la formule de la somme des premiers termes d'une suite géométrique on a

$$x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}.x^{-1} + x^{-\frac{1}{3}}.(x^{-1})^2 + \ldots + x^{-\frac{1}{3}}.(x^{-1})^n = x^{-\frac{1}{3}} \frac{1-(x^{-1})^{n+1}}{1-x^{-1}} \tag{2.9}$$

et

$$x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}.x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}}.(x^{-1})^2 + \ldots + x^{-\frac{1}{2}}.(x^{-1})^n = x^{-\frac{1}{2}}\frac{1-(x^{-1})^{n+1}}{1-x^{-1}}. \tag{2.10}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}{x-1} &= \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \ldots \frac{1}{x^{\frac{3n+1}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{2n+1}{2}}} \\
&\quad + \frac{x^{-\left(\frac{1}{3}+n+1\right)}}{1-x^{-1}} + \frac{x^{-\left(\frac{1}{2}+n+1\right)}}{1-x^{-1}} \\
&= \left[\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right] + \left[\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right] + \ldots + \left[\frac{1}{x^{\frac{1}{3}+n}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+n}}\right] \\
&\quad + \frac{1}{x-1}\left[\frac{1}{x^{\frac{1}{3}+n}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+n}}\right].
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier n, on peut écrire

$$\frac{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}{x-1} = \sum_{k=0}^{n} f_n(x) + o\big(f_n(x)\big), \quad (x \to +\infty) \tag{2.11}$$

où

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}+n}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+n}}. \tag{2.12}$$

Bien qu'elle donne une certaine approximation de la fonction $f(x)$ au voisinage de l'infini, l'expression (2.11) ressemble, mais elle n'est pas identique à l'expression (2.1) définissant le développement asymptotique au sens de Poincaré. L'une des différences, c'est que dans cette expression les fonctions $f_n(x)$ ne sont pas des fonctions puissances de x.

Exemple 2.4.2.

Considérons pour $x \geq C > 1$, la fonction définie par la série uniformément convergente

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\big((n+1)\pi x\big)}{x^n}. \tag{2.13}$$

On a pour tout entier N,

$$\begin{aligned}
\left|g(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin\big((n+1)\pi x\big)}{x^n}\right| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\big((N+k+1)\pi x\big)}{x^{N+k+1}}\right| \\
&= \frac{1}{x^{N+1}}\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\big((N+k+1)\pi x\big)}{x^k}\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{x^{N+1}} \Big| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\big((k+1)\pi x\big)}{x^k} \Big| \\
&= \frac{1}{x^{N+1}} |g(x)|.
\end{aligned}
$$

Puisque

$$
\begin{aligned}
|g(x)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \Big| \frac{\sin\big((n+1)\pi x\big)}{x^n} \Big| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{x}{x-1} \\
&\leq 1 + \frac{1}{C-1} = C_1,
\end{aligned}
$$

on a

$$
\begin{aligned}
\Big| g(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin\big((n+1)\pi x\big)}{x^n} \Big| &= \frac{1}{x^{N+1}} |g(x)| \\
&= o\Big(\frac{1}{x^N}\Big).
\end{aligned}
$$

Dans cet exemple on a construit une approximation de la fonction $g(x)$ au voisinage de $x = +\infty$. On remarque que les fonctions majorant l'erreur $\big($ici $\frac{1}{x^n}\big)$ sont différentes des fonctions de la série approximante $\big($ici $\frac{\sin(n+1)\pi x}{x^n}\big)$.
Ces deux exemples justifient en quelque sorte la définition suivante généralisant le concept de développement asymptotique.

2.4.1 Suite asymptotique

Définition 2.4.1. *Soit $\{\varphi_n(z)\}$ une suite de fonctions définies sur la même partie Ω de $\mathbb{C}$, et soit z_0 un point limite de Ω.*
On dit que cette suite $\{\varphi_n\}$ est une suite asymptotique pour $z \to z_0$, si pour tout entier n

$$
\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z)), \quad (z \to z_0). \tag{2.14}
$$

Exemple 2.4.3.

1. $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varphi_n(z) = (z - z_0)^n$, on a

$$
\lim_{z \to z_0} \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = 0
$$

d'où

$$\varphi_{n+1} = o(\varphi_n), \quad (z \to z_0).$$

Donc $(\varphi_n)_n$ est une suite asymptotique.

2. $z_0 = \infty$, $\varphi_n(z) = \frac{1}{z^n}$, on a

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{z} = 0$$

d'où

$$\varphi_{n+1} = o(\varphi_n), \quad (z \to \infty).$$

Donc $(\varphi_n)_n$ est une suite asymptotique.

3. $X = [0, +\infty[$, $Y = \mathbb{R}$, $x_0 = +\infty$, $\varphi_n(x) = e^{\frac{x}{n}}$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{-x^2}{n(n+1)}} = 0$$

d'où

$$\varphi_{n+1} = o(\varphi_n), \quad (x \to +\infty).$$

Donc $(\varphi_n)_n$ est une suite asymptotique.

Définition 2.4.2. *Deux suites $\{\varphi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ et $\{\psi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ (non nécessairement asymptotiques) sont dites asymptotiquement équivalentes si*

$$\varphi_n = O(\psi_n) \quad \text{et} \quad \psi_n = O(\varphi_n) \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Remarque 2.4.1.

- Si $\lim_{z \to z_0} \left| \frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)} \right| = L_n$ telles que $0 < L_n < +\infty$ pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$. Alors $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ sont asymptotiquement équivalentes.

- Si $\{\varphi_n\}$ et $\{\psi_n\}$ sont asymptotiquement équivalentes et $\{\varphi_n\}$ est une suite asymptotique, alors $\{\psi_n\}$ l'est également.

2.4.2 Développement asymptotique généralisé

Définition 2.4.3. *Soient $f(z)$ et $f_n(z)$, $n = 0,1,2,\ldots$, des fonctions définies sur $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit $\{\varphi_n\}$ une suite asymptotique pour $z \to z_0$. On dit que la série formelle $\sum f_n$ est un développement asymptotique par rapport à la suite asymptotique $\{\varphi_n\}$, si pour tout entier n,*

$$f(z) - \sum_{k=0}^{n} f_k(z) = o(\varphi_n), \quad (z \to z_0). \tag{2.15}$$

Dans ce cas, on écrit

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z), \quad \{\varphi_n\}, \quad (z \to z_0). \tag{2.16}$$

Si pour tout entier k, $f_k(z) = a_k\varphi_k$, où a_k est un nombre complexe, le développement asymptotique est dit du type de Poincaré.
Si en plus $\varphi_n(z) = \zeta(z)^{\lambda_n}$, λ_n étant un nombre complexe, on dit que le développement asymptotique est de la forme d'une série puissance.

Commentaire

Bien que la généralisation du concept de développement asymptotique a été très utile pour l'approximation asymptotique de certaines classes de fonctions, non couvertes par le modèle de Poincaré, certains mathématiciens sont un peu réticents à cette nouvelle formulation. Les reproches essentielles sont dues, surtout à la non-unicité de tels développements asymptotiques et à la difficulté d'exploiter numériquement ces développements, à cause de la complexité des fonctions approximantes.

2.4.3 Opérations sur les séries asymptotiques

Avant d'exposer les propriétés des opérations sur les séries asymptotiques, on commence par l'unicité des développements asymptotiques.
On a vu qu'une fonction admet au plus un développement asymptotique au sens de Poincaré (cf.(2.2.1)). On va voir, à travers le théorème suivant que cette propriété d'unicité reste valable pour les développements asymptotiques du type de Poincaré.
Evidemment cette propriété n'est pas vérifiée dans le cas général de développement asymptotique généralisé, voir l'exemple suivant.

Exemple 2.4.4.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}, \ \{x^{-n-1}\}, \quad (x \to \infty), \\
\frac{1}{1+x} &\sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1+e^{-x}}{x^{n+1}}, \ \{x^{-n-1}\}, \quad (x \to \infty), \\
\frac{1}{1+x} &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}, \ \{x^{-\frac{n+1}{2}}\}, \quad (x \to \infty).
\end{aligned}$$

1- Unicité

Théorème 2.4.1. *Soient M une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, z_0 un point dans $\overline{M}$, $\{\varphi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ une suite asymptotique pour $z \to z_0$.*
Alors, une fonction $f : M \to \mathbb{C}$ admet au plus une série asymptotique

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n(z), \quad (z \to z_0). \tag{2.17}$$

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{r=0}^{n} a_r \varphi_r(z) + o(\varphi_n(z)) \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} a_r \varphi_r(z) + a_n \varphi_n(z) + o(\varphi_n(z)).
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$f(z) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r \varphi_r(z) = a_n \varphi_n(z) + o(\varphi_n(z))$$

et par suite

$$\frac{f(z) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r \varphi_r(z)}{\varphi_n(z)} = a_n + \frac{o(\varphi_n(z))}{\varphi_n(z)},$$

d'où finalement

$$a_n = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r \varphi_r(z)}{\varphi_n(z)}.$$

Montrons que

$$a_0 = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{\varphi_0(z)},$$

on a

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\varphi_0(z)}-a_0 &= \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-a_0\varphi_0(z)}{\varphi_0(z)}\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{R_0(z)}{\varphi_0(z)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

2- Linéarité

Bien que la propriété de linéarité est vérifiée dans le cas de développement asymptotique généralisé, par souci de simplicité on va la démontrer ici dans le cas de développement asymptotique du type de Poincaré.

Théorème 2.4.2. *Soient $f, g : M \to \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $h = \alpha f + \beta g$. Si*

$$f(z) \sim \sum_{r=0}^{+\infty} a_r\varphi_r(z), \quad (z \to z_0)$$

et

$$g(z) \sim \sum_{r=0}^{+\infty} b_r\varphi_r(z), \quad (z \to z_0).$$

Alors

$$h(z) \sim \sum_{r=0}^{+\infty} \big(\alpha a_r + \beta b_r\big)\varphi_r(z), \quad (z \to z_0).$$

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(z) = \sum_{r=0}^{n} a_r\varphi_r(z) + F_n(z)\varphi_n(z), \quad (z \to z_0)$$

et

$$g(z) = \sum_{r=0}^{n} b_r\varphi_r(z) + G_n(z)\varphi_n(z), \quad (z \to z_0),$$

avec

$$\lim_{z\to z_0} F_n(z) = \lim_{z\to z_0} G_n(z) = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} h(z) &= \alpha f(z) + \beta g(z) \\ &= \alpha\left(\sum_{r=0}^{n} a_r\varphi_r(z) + F_n(z)\varphi_n(z)\right) + \beta\left(\sum_{r=0}^{n} b_r\varphi_r(z) + G_n(z)\varphi_n(z)\right) \\ &= \sum_{r=0}^{n} \alpha a_r\varphi_r(z) + \alpha F_n(z)\varphi_n(z) + \sum_{r=0}^{n} \beta b_r\varphi_r(z) + \beta G_n(z)\varphi_n(z) \\ &= \sum_{r=0}^{n} \big(\alpha a_r + \beta b_r\big)\varphi_r(z) + \big(\alpha F_n(z) + \beta G_n(z)\big)\varphi_r(z), \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{z\to z_0}\big(\alpha F_n(z) + \beta G_n(z)\big) = \alpha.0 + \beta.0 = 0.$

D'où

$$h(z) \sim \sum_{r=0}^{+\infty} \big(\alpha a_r + \beta b_r\big)\varphi_r(z), \quad (z \to z_0).$$

□

3- Produit

Si on prend le produit formel de $\sum\limits_m a_m\varphi_m$ et $\sum\limits_n a_n\varphi_n$, on obtient une expression qui contient tous les produits possibles $\varphi_m\varphi_n$ tels que $m,n \in \mathbb{N}$.

En général, il n'est pas possible d'arranger les fonctions $\{\varphi_m\varphi_n\}_{m,n=0}^{+\infty}$ en une suite asymptotique, mais on va limiter notre travail aux suites asymptotiques vérifiant la propriété suivante

$$\varphi_m(z)\varphi_n(z) = \alpha\varphi_{m+n}(z), \tag{2.18}$$

où une suite vérifiant (2.18) peut-être multipliée d'une façon similaire à la multiplication polynomiale.

Lemme 2.4.1. *Si* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $z \to z_0$ *est une suite asymptotique qui vérifie* (2.18) *alors,* φ_n *peut s'écrire sous la forme* $\varphi_n(z) = \alpha\beta^n(z)$ *tel que*

$$\lim_{z\to z_0} \beta(z) = 0, \quad z \in M \quad \textit{et} \quad \beta^0(z) = 1.$$

Théorème 2.4.3. *Soit* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ *une suite vérifiant* (2.18). *Si*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\varphi_n(z), \quad (z \to z_0)$$

et

$$g(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\varphi_n(z), \quad (z \to z_0),$$

alors

$$f.g \sim \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \varphi_n(z), \quad (z \to z_0),$$

avec

$$C_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}.$$

Démonstration.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(z) + F_N(z)\varphi_N(z)$$

et

$$g(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n \varphi_n(z) + G_N(z)\varphi_N(z),$$

avec

$$\lim_{z \to z_0} F_N(z) = \lim_{z \to z_0} G_N(z) = 0.$$

On introduit l'indice $p = j + k$ avec (p entre 0 et $2N$),

$$\begin{aligned} f.g &= \left(\sum_{j=0}^{N} a_j \varphi_j + F_N \varphi_N\right)\left(\sum_{k=0}^{N} b_k \varphi_k + G_N \varphi_N\right) \\ &= \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} a_j \varphi_j b_k \varphi_k + \sum_{j=0}^{N} a_j \varphi_j G_N \varphi_N + \sum_{k=0}^{N} b_k \varphi_k F_N \varphi_N + F_N \varphi_N G_N \varphi_N \\ &= \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} a_j b_k \varphi_j \varphi_k + \sum_{j=0}^{N} \left(a_j G_N + b_j F_N\right) \varphi_j \varphi_N + F_N G_N \varphi_N \varphi_N. \end{aligned}$$

On a

1)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} a_j \varphi_j b_k \varphi_k &= \sum_{p=0}^{2N} \Big(\sum_{j+k=p} a_j b_k \varphi_j \varphi_k \Big) \\ &= \sum_{p=0}^{2N} \Big(\sum_{j+k=p} a_j b_k \alpha^2 \beta^{j+k} \Big) \quad \text{(d'après le lemme (2.4.1))} \\ &= \sum_{p=0}^{2N} \Big(\alpha^2 \beta^p \sum_{j+k=p} a_j b_k \Big) \\ &= \sum_{p=0}^{2N} \alpha \Big(\alpha \beta^p \sum_{j+k=p} a_j b_k \Big) \\ &= \sum_{p=0}^{2N} \alpha \Big(\varphi_p \sum_{j+k=p} a_j b_k \Big) \quad \text{(d'après (2.18))} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p=0}^{N} \alpha\big(\varphi_p \sum_{j+k=p} a_j b_k\big) + \sum_{p=N+1}^{2N} \alpha\big(\varphi_p \sum_{j+k=p} a_j b_k\big) \\
&= \sum_{p=0}^{N} \alpha\big(\varphi_p \sum_{j+k=p} a_j b_k\big) + o(\varphi_N) \\
&= \sum_{p=0}^{N} A_p \varphi_p + o(\varphi_N),
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
A_p &= \alpha \sum_{j+k=p} a_j b_k \\
&= \alpha \sum_{r=0}^{p} a_r b_{p-r}.
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N} \big(a_j G_N + b_j F_N\big)\varphi_j \varphi_N &= \sum_{j=0}^{N} \big(a_j G_N + b_j F_N\big)\varphi_{j+N} \quad \text{(d'après (2.18))} \\
&= o(\varphi_N).
\end{aligned}
$$

3)

$$
\begin{aligned}
F_N \varphi_N G_N \varphi_N &= F_N G_N \alpha \varphi_{2N} \\
&= o(\varphi_{2N}) \\
&= o(\varphi_N).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
f \cdot g \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n
$$

avec

$$
C_n = \alpha \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.
$$

□

4- Intégration

Théorème 2.4.4. *Soit $\{\varphi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ ($z \to z_0$ dans M) une suite asymptotique telle que, pour tout n, φ_n est holomorphe dans M.*

Si f est une fonction holomorphe dans M et

$$
f(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n(z), \quad (z \to z_0),
$$

alors, les primitives $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *des fonctions* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ *forment une suite asymptotique, et*

$$\int_{z_0}^{z} f(t)\,dt \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \psi_n(z), \quad (z \to z_0).$$

Démonstration.

Pour la preuve voir ([1], p 37-38).

□

5- Différentiation

Il n'y a pas un résultat général qui établit que la dérivée d'un développement asymptotique d'une fonction est un développement asymptotique de la dérivée de cette fonction. Néanmoins, dans certains cas particuliers importants on peut démontrer des résultats de ce genre, comme le théorème suivant.

Théorème 2.4.5. *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$, *si*

1. *Pour tout* n, φ_n *est holomorphe dans un ouvert convexe* M *et* $z_0 \in \overline{M}$.
2. $\{\varphi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ *et* $\{\varphi_n^{'}\}_{n=0}^{+\infty}$ *sont des suites asymptotiques quand* $z \to z_0$ *dans* M.
3. $$\frac{\varphi_n}{\varphi_n^{'}} = \begin{cases} O(z-z_0)\ (z \to z_0 \quad dans\ M), & si \quad z_0 \neq +\infty, \\ O(z)\ (z \to +\infty \quad dans\ M), & si \quad z_0 = +\infty. \end{cases}$$
4. f *est holomorphe dans* M.
5. $f(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n(z)$, $z \to z_0$ *dans* M,
   alors
   $$f^{'}(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n^{'}(z), \quad (z \to z_0).$$

Démonstration.

Pour la preuve voir ([1], p 39-40).

□

Remarque 2.4.2. *Une fonction* f *peut avoir deux développements asymptotiques différents par rapport à deux suites asymptotiques, et en plus ces deux suites ne sont pas nécessairement asymptotiquement équivalentes, voir l'exemple (2.4.4.).*

Remarque 2.4.3. *En plus, du fait qu'une fonction f peut avoir des développements asymptotiques différents par rapport à des suites asymptotiques différentes, la même série asymptotique peut être une représentation asymptotique pour plus d'une fonction.*

En particulier, on a la proposition suivante.

Proposition 2.4.1. *Si*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n(z)$$

et

$$f - g = o(\varphi_n), \quad (z \to z_0) \quad \textit{pour tout} \;\; n \in \mathbb{N},$$

alors

$$g(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n(z), \quad (z \to z_0).$$

Démonstration.

On a

$$f(z) = \sum_{r=0}^{n} a_r \varphi_r(z) + o(\varphi_n(z))$$

et

$$f(z) - g(z) = o(\varphi_n(z)).$$

Alors

$$\sum_{r=0}^{n} a_r \varphi_r(z) + o(\varphi_n(z)) - g(z) = o(\varphi_n(z)),$$

donc

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{r=0}^{n} a_r \varphi_r(z) + \left[o(\varphi_n(z)) - o(\varphi_n(z)) \right] \\ &= \sum_{r=0}^{n} a_r \varphi_r(z) + o(\varphi_n(z)). \end{aligned}$$

D'où

$$g(z) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n(z), \quad (z \to z_0).$$

□

Exemple 2.4.5.

Considérons les fonctions

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1+e^{-x}}{1+x},$$

d'après la remarque (2.4.2), on sait que

$$\frac{1}{1+x} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}, \quad (x \to +\infty),$$

et la différence entre f et g est évaluée par

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{1+e^{-x}}{1+x} \\ &= \frac{e^{-x}}{1+x}, \end{aligned}$$

où

$$\frac{e^{-x}}{1+x} = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad (x \to +\infty).$$

D'où, d'après la proposition (2.4.1), on obtient

$$\frac{1+e^{-x}}{1+x} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}, \quad (x \to +\infty).$$

2.5 Distinction (Convergence/asymptoticité)

Une série asymptotique n'est pas nécessairement convergente. Pour expliquer la différence en détails, on considère la série formelle $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n(x)$ où $\{a_n\}$ est une suite de coefficients et $\{\varphi_n(x)\}$ est une suite asymptotique quand $x \to 0$, on désigne par $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x)$ la somme partielle.

La convergence concerne le comportement de $S_N(x)$ quand $N \to +\infty$ avec x fixé, alors que l'asymptoticité (en $x = 0$) concerne le comportement de $S_N(x)$ quand $x \to 0$ avec N fixé.

Les exemples suivants illustrent la différence entre la notion de série asymptotique et celle de série convergente.

On sait que la série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ est une série asymptotique. Cette série converge si la fonction est analytique.

On construira dans les deux exemples qui suivent une série asymptotique qui ne converge pas, et une série asymptotique convergente.

Exemple 2.5.1. (Série asymptotique non convergente)
Si $M =]-\infty, 0[$, considérons la fonction f définie sur M par

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \int_{-\infty}^{\frac{1}{x}} \frac{e^t}{t} dt.$$

Par intégrations par parties successives, il vient

$$\forall n \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{r=0}^{n} r! x^r + (n+1)! \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x} \int_{-\infty}^{\frac{1}{x}} \frac{e^t}{t^{n+2}} dt.$$

On a

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left|(n+1)! \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x} \int_{-\infty}^{\frac{1}{x}} \frac{e^t}{t^{n+2}} dt\right| \\
&\leqslant (n+1)! \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{|x|} \int_{-\infty}^{\frac{1}{x}} \frac{e^t}{|t^{n+2}|} dt \\
&\leqslant (n+1)! \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{|x|} |x^{n+2}| \int_{-\infty}^{\frac{1}{x}} e^t dt \\
&\leqslant (n+1)! e^{\frac{-1}{x}} |x|^{n+1} e^t \,|_{-\infty}^{\frac{1}{x}} \\
&\leqslant (n+1)! |x|^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$R_n(x) = O(x^{n+1}),$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{r=0}^{n} r! x^r + O(x^{n+1}), \quad (x \to -\infty).$$

Ainsi, la série non convergente

$$\sum_{r=0}^{+\infty} r! x^r$$

est une série asymptotique associée à f.

Exemple 2.5.2. (Série asymptotique convergente)

Evaluons la transformée de Laplace de $\cos(t)$

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(t)\, dt, \quad (x > 0),$$

on sait que

$$\cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\, dt, \quad (x > 0).$$

Il en découle

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xt} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^{2n}\, dt. \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = xt$ donne

$$\begin{aligned} I(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{x}\right)^{(2n)} \frac{du}{x} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! x^{2n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{2n}\, du. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{2n}\, du = 2n!,$$

d'où

$$\begin{aligned} I(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! x^{2n+1}} (2n)! \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n+1}} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{x^2}\right)^n. \end{aligned} \tag{2.19}$$

La série qu'on a trouvée est une série géométrique de raison $-\dfrac{1}{x^2}$, elle est convergente pour $x > 1$, et elle est également asymptotique.

Comparaison :

la série asymptotique est parfois plus pratique pour approximer une fonction qu'une série convergente. On illustre ça par l'exemple suivant.

Exemple 2.5.3.

La fonction erreur $erf : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ est définie par

$$erf\,x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

• On construit la série de Taylor de la fonction erreur en $x = 0$ de la façon suivante.

On a

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!},$$

le développement de Taylor en $x = 0$, alors pour $x = t^2$ on obtient

$$\begin{aligned} e^{-t^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} \\ &= 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \ldots \end{aligned}$$

Intégrons entre 0 et x, on aura

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \ldots$$

alors

$$erf\,x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ x - \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \ldots \right\},$$

qui est une série convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais pour des grandes valeurs de x la convergence est très lente.

• De l'autre côté, on a

$$erf\,x \sim 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2^n} \frac{1}{x^{n+1}}, \quad (x \to +\infty) \tag{2.20}$$

où

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1).$$

L'expression (2.20) est une série asymptotique de la fonction erreur.

Pour approximer erf à la précision 10^{-5} on a besoin de 31 termes dans la série de Taylor, alors que, deux termes seulement, suffisent dans le développement asymptotique.

On termine ce chapitre par démontrer un résultat qu'on a utilisé dans la comparaison précédente. A savoir que la série donnée par l'expression (2.20) est une série asymptotique.

Proposition 2.5.1. *Le développement* (2.20) *est un développement asymptotique pour la fonction erreur.*

Démonstration.

On écrit

$$erf\,x = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt,$$

on considère le changement de variable suivant $s = t^2$,

$$erf\,x = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x^2}^{+\infty} s^{-\frac{1}{2}} e^{-s}\,ds.$$

Pour $n = 0, 1, 2, \cdots$, on définit

$$F_n(x) = \int_{x^2}^{+\infty} s^{-n-\frac{1}{2}} e^{-s} ds.$$

Par intégration par parties, on trouve que

$$F_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}} - (n + \frac{1}{2}) F_{n+1}(x).$$

En répétant cette relation de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned}
erf\,x &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} F_0(x) \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big[\frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{1}{2} F_1(x) \Big] \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big[e^{-x^2} \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} \Big) + \frac{1 \cdot 3}{2^2} F_2(x) \Big] \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \Big[\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \ldots + (-1)^N \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2N-1)}{2^N x^{2N+1}} \Big) \\
&\quad + (-1)^{N+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2N+1)}{2^{N+1}} F_{N+1}(x) \Big].
\end{aligned}$$

Il en résulte

$$erfx = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n x^{2n+1}} + R_{N+1}(x),$$

tel que

$$R_{N+1}(x) = (-1)^{N+1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2N+1)}{2^{N+1}} F_{N+1}(x).$$

Comme

$$\begin{aligned} |F_n(x)| &= \left| \int_{x^2}^{+\infty} s^{-n-\frac{1}{2}} e^{-s}\, ds \right| \\ &\leqslant \frac{1}{x^{2n+1}} \int_{x^2}^{+\infty} e^{-s}\, ds \\ &\leqslant \frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}}. \end{aligned}$$

On a

$$|R_{N+1}(x)| \leqslant C_{N+1} \frac{e^{-x^2}}{x^{2N+3}}, \tag{2.21}$$

avec

$$C_{N+1} = (-1)^{N+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2N+1)}{2^{N+1}\sqrt{\pi}}.$$

D'où le résultat.

□

Chapitre 3

Méthode pour les intégrales unidimensionnelles

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement asymptotique de certaines intégrales paramétriques. Les origines de la méthode remontent à Pierre-Simon de Laplace (1749 – 1827), qui a étudié l'estimation des intégrales, rencontrées en théorie de probabilités, de la forme

$$I(\lambda) = \int_a^b g(x)e^{-\lambda f(x)}dx, \quad (\lambda \to +\infty). \tag{3.1}$$

Ici f et g sont des fonctions réelles continues définies sur l'intervalle réel (fini ou infini) $[a, b]$. Dans ce qui suit, nous appelons les intégrales du type (3.1), **les intégrales du type de Laplace**. Laplace a fait observer que la majeure contribution de l'intégrale devrait venir de l'intégration au voisinage de points où f atteint sa plus petite valeur. Si f a sa valeur minimale seulement en un point x_0 sur (a, b) où $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors le résultat de Laplace est

$$\int_a^b g(x)e^{-\lambda f(x)}dx \sim g(x_0)e^{-\lambda f(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f''(x_0)}}, \quad (\lambda \to \infty). \tag{3.2}$$

Le signe $\sim$ est utilisé pour signifier que le rapport de la quantité à gauche et celle à droite se rapproche à 1 quand $\lambda \to +\infty$. Cette formule est maintenant connue comme **l'approximation de Laplace**. Une preuve heuristique de cette formule peut s'envisager comme suit. Tout d'abord, nous remplaçons f et g par les principaux termes dans leurs développements en série de Taylor autour de $x = x_0$, puis étendre les limites d'in-

tégration à $-\infty$ et $+\infty$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)e^{-\lambda f(x)}dx &\approx \int_a^b g(x_0)e^{-\lambda\left(f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2\right)}dx \\
&\approx g(x_0)e^{-\lambda f(x_0)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}dx \\
&\approx g(x_0)e^{-\lambda f(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f''(x_0)}}, \quad (\lambda\to+\infty). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

3.1 Lemme de Watson

Considérons l'intégrale

$$I(\lambda)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{1+x}dx$$

où $\lambda>0$. En utilisant l'identité bien connue

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k x^x+(-1)^N\frac{x^N}{1+x} \quad (N\geq 0),$$

l'intégration terme à terme donne

$$I(\lambda)=\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\frac{k!}{\lambda^{k+1}}+(-1)^N\int_0^{+\infty}\frac{x^N}{1+x}e^{-\lambda x}dx,$$

où

$$\begin{aligned}
\left|(-1)^N\int_0^{+\infty}\frac{x^N}{1+x}e^{-\lambda x}dx\right| &= \int_0^{+\infty}\frac{x^N}{1+x}e^{-\lambda x}dx \\
&\leq \int_0^{+\infty}x^N e^{-\lambda x}dx \\
&= \frac{N!}{\lambda^{N+1}}.
\end{aligned}$$

Et donc, par définition,

$$I(\lambda)\sim\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k!}{\lambda^{k+1}}, \quad (\lambda\to\infty).$$

Ceci est un cas particulier d'un résultat beaucoup plus général, maintenant connu comme le lemme de Watson. Le théorème est dû à George Neville Watson (1886−1965). C'est un résultat significatif dans la théorie des développements asymptotiques des intégrales du type de Laplace.
Compte tenu de son importance, la preuve du résultat est reproduite ci-dessous.

Théorème 3.1.1. (Lemme de Watson). *Soit $f(x)$ une fonction d'une variable réelle x et à valeurs complexes telle que*
(i) f est continue sur $(0,\infty)$,
(ii)

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\rho_k - 1}, \quad (x \to 0) \tag{3.4}$$

avec

$$0 < \rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \cdots, \quad \textit{et}$$

(iii) pour un certain $c > 0$ fixé,

$$f(x) = O(e^{cx}), \quad (x \to +\infty).$$

Alors on a

$$\int_0^{+\infty} f(x) e^{-\lambda x} dx \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \Gamma(\rho_k)}{\lambda^{\rho_k}}, \quad (\lambda \to +\infty).$$

Démonstration.

Soit $N \in \mathbb{N}$. En vertu des conditions (i), (ii) et (iii), l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x) e^{-\lambda x} dx$$

converge pour $\lambda > c$.
Les conditions (ii) et (iii) impliquent qu'il existe une constante $K_N > 0$, telle que

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^{\rho_k - 1} \right| \leq K_N e^{cx} |x^{\rho_N - 1}| \quad \text{pour} \quad (x > 0).$$

Ainsi, nous avons

$$\left| \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\lambda x} dx - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \int_0^{+\infty} x^{\rho_k - 1} e^{-\lambda x} dx \right| \leq K_N \int_0^{+\infty} |x^{\rho_N - 1}| e^{-(\lambda - c)x} dx.$$

Notons que, pour $\lambda > 0$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^{\rho_k-1}e^{-\lambda x}dx &= \frac{1}{\lambda^{\rho_k}}\int_0^{+\infty} t^{\rho_k-1}e^{-t}dt \\ &= \frac{\Gamma(\rho_k)}{\lambda^{\rho_k}}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}dx - \sum_{k=0}^{N-1}\frac{a_k\Gamma(\rho_k)}{\lambda^{\rho_k}}\Big| &\leq K_N\int_0^{+\infty}|x^{\rho_N-1}|e^{-(\lambda-c)x}dx \\ &= K_N\frac{\Gamma(\rho_N)}{|(\lambda-c)^{\rho_N}|},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-\lambda x}dx = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{a_k\Gamma(\rho_n)}{\lambda^{\rho_k}} + O\Big(\frac{1}{\lambda^{\rho_N}}\Big), \quad (\lambda\to+\infty), \tag{3.5}$$

ce qui prouve le lemme de Watson.

□

3.2 Quelques exemples d'application du lemme de Watson

Exemple 3.2.1.

Considérons la fonction

$$f(t) = \frac{1}{1+t}.$$

f est évidemment continue sur $(0,\infty)$ et

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n, \quad |t|<1,$$

d'où

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n, \quad (t\to 0).$$

Ainsi, par le lemme de Watson, on obtient

$$\begin{aligned}F(\lambda) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-\lambda t}dt \\ &= \int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{1+t}dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sim \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^{n+1}}, \quad (\lambda\to+\infty)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{\lambda^{n+1}}. \end{aligned}$$

Exemple 3.2.2.

Considérons la fonction

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

f est continue sur $(0,\infty)$ et

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}t^{2n}, \quad |t|<1,$$

le lemme de Watson donne

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-\lambda t}dt\\ &= \int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{1+t^2}}dt\\ &\sim \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}.\frac{(2n)!}{\lambda^{2n+1}}, \quad (\lambda\to+\infty), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)_n &= \frac{1}{2}.\frac{3}{2}\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\\ &= \frac{1.3\cdots(2n-1)}{2^n}.\frac{2.4\cdots(2n)}{2^n n!}\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{1+t^2}}dt\sim\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2\frac{1}{\lambda^{2n+1}}, \quad (\lambda\to+\infty).$$

Exemple 3.2.3.

Considérons la fonction

$$f(t)=\ln(1+t^2).$$

f est continue sur $(0,\infty)$ et

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{2n+2}, \quad |t| < 1.$$

Par le lemme de Watson, on aura

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^{\infty} ln(1+t^2) e^{-\lambda t} dt \\ &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} . \frac{(2n+2)!}{\lambda^{2n+3}}, \quad (\lambda \to +\infty). \end{aligned}$$

Cela peut également être écrit

$$\int_0^{\infty} \ln(1+t^2) e^{-\lambda t} dt \sim 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \frac{(2n+1)!}{\lambda^{2n+3}}, \quad (\lambda \to +\infty).$$

3.3 Méthode de Laplace

Dans cette section, nous revisitons la méthode classique de Laplace. Dans le premier paragraphe, nous prouvons le théorème fondamental sur le développement asymptotique des intégrales du type de Laplace, un développement de la forme (3.1) mentionnée dans l'introduction de ce chapitre.

La méthode de Laplace est l'une des techniques les plus connues et les plus utilisées dans le traitement des développements asymptotiques des intégrales. Nous présentons ici une extension de la formule (3.2) mentionnée dans l'introduction de ce chapitre. On note que cette généralisation est due à Arthur Erdélyi (1908 – 1977) (voir, par exemple, ([34], p 85.), ([46], p 57.)).

Considérons l'intégrale de la forme (3.1), où (a, b) est un intervalle réel (fini ou infini), λ est un grand paramètre positif et les fonctions f et g sont continues. On suppose que f a un seul point minimum, qu'on peut supposer sans perdre de généralité, situé à la borne inférieure a de l'intervalle $[a, b]$.

Théorème 3.3.1. *Considérons l'intégrale*

$$I(\lambda) = \int_a^b g(x) e^{-\lambda f(x)} dx,$$

telle que

1)

$$f(x) \sim f(a) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^{k+\alpha}, \quad (x \to a^+) \tag{3.6}$$

et

$$g(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^{k+\beta-1}, \quad (x \to a^+), \tag{3.7}$$

avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *et que le développement de* f *est dérivable terme à terme, c'est-à-dire*

$$f'(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\alpha)(x-a)^{k+\alpha-1}, \quad (x \to a^+). \tag{3.8}$$

Et supposons que les conditions suivantes sont vérifiées.

2) $f(x) > f(a)$ *pour tout* $x \in (a,b)$, *et pour chaque* $\delta > 0$ *la borne inférieure de* $f(x) - f(a)$ *sur* $[a+\delta, b)$ *est positive,*

3) $f'(x)$ *et* $g(x)$ *sont continues dans un voisinage de* $x = a$, *sauf éventuellement en* a, *et*

4) *l'intégrale* $I(\lambda)$ *converge absolument pour tous* λ *suffisamment grands.*

Dans ces conditions, on a le développement asymptotique suivant

$$I(\lambda) \sim e^{-\lambda f(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\Big(\frac{n+\beta}{\alpha}\Big) c_n \lambda^{-\frac{(n+\beta)}{\alpha}}, \quad (\lambda \to +\infty), \tag{3.9}$$

où les coefficients c_n *sont exprimés en fonction de* a_n *et* b_n.

Les trois premiers coefficients c_n *sont donnés explicitement par*

$$c_0 = \frac{b_0}{\alpha a_0^{\beta/\alpha}},$$

$$c_1 = \frac{1}{a_0^{(\beta+1)/\alpha}} \Big(\frac{b_1}{\alpha} - \frac{(\beta+1) a_1 b_0}{\alpha^2 a_0} \Big),$$

et

$$c_2 = \frac{1}{a_0^{(\beta+2)/\alpha}} \Big(\frac{b_2}{\alpha} - \frac{(\beta+2) a_1 b_1}{\alpha^2 a_0} + \big((\beta+\alpha+2) a_1^2 - 2\alpha a_0 a_2 \big) \frac{(\beta+1) b_0}{2\alpha^2 a_0^2} \Big).$$

Démonstration.

Par les conditions **1)** et **3)**, il existe un nombre $c \in (a,b)$ tel que $f'(x)$ et $g(x)$ sont continues sur $(a,c]$ et $f'(x)$ est également positive.

On introduit la variable t définie par

$$t = f(x) - f(a).$$

Comme $f(x)$ est croissante sur (a,c), on peut écrire

$$e^{\lambda f(a)} \int_a^c g(x) e^{-\lambda f(x)} dx = \int_0^T h(t) e^{-\lambda t} dt \tag{3.10}$$

où

$$T = f(c) - f(a)$$

et $h(t)$ est la fonction continue sur $(0,T]$ donnée par

$$h(t) = g(x) \frac{dx}{dt} = \frac{g(x)}{f'(x)}. \tag{3.11}$$

Par hypothèse

$$t \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^{k+\alpha}, \quad (x \to a^+)$$

et ainsi, par l'inversion d'une série, on obtient

$$x - a \sim \sum_{k=1}^{\infty} d_k t^{k/\alpha}, \quad (t \to 0^+). \tag{3.12}$$

La substitution de (3.12) dans (3.11), donne

$$h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\frac{k+\beta}{\alpha}-1}, \quad (t \to 0^+), \tag{3.13}$$

où les coefficients c_k sont exprimés en termes de a_k et b_k.

Nous appliquons maintenant le lemme de Watson à l'intégrale dans le terme à droite de (3.10) pour obtenir

$$\int_a^c g(x) e^{-\lambda f(x)} dx \sim \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda f(a)} \Gamma\Big(\frac{n+\beta}{\alpha}\Big) c_n \lambda^{-\frac{n+\beta}{\alpha}}, \quad (\lambda \to +\infty). \tag{3.14}$$

Tout ce qui reste est de montrer que l'intégrale sur l'intervalle qui reste (c,b) est négligeable.

On pose

$$\varepsilon = \inf_{c \le x < b} \big(f(x) - f(a)\big).$$

La condition **2)** assure que ε est positif.

Soit λ_0 une valeur de λ pour laquelle $I(\lambda)$ est absolument convergente. On a pour tout $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\begin{aligned}\lambda(f(x)-f(a)) =&(\lambda-\lambda_0)(f(x)-f(a))+\lambda_0(f(x)-f(a))\\ \geq&(\lambda-\lambda_0)\varepsilon+\lambda_0(f(x)-f(a))\end{aligned}$$

et

$$\left|e^{\lambda f(a)}\int_c^b g(x)e^{-\lambda f(x)}dx\right| \leq Ke^{-\varepsilon\lambda},$$

où

$$K = e^{\lambda_0(\varepsilon+f(a))}\int_c^b |g(x)|e^{-\lambda_0 f(x)}dx$$

est une constante.

□

3.4 Exemples sur la méthode de Laplace

Exemple 3.4.1.

Considérons la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce

$$\mathrm{K}_v(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda\cosh t}\cosh(vx)dx$$

et occupons-nous de son comportement pour $\lambda \to \infty$.

Ici $f(x) = \cosh x$ a une valeur minimale égale 1 en $x = 0$.

On pose

$$v = \cosh x - 1,$$

pour x petit,

$$v = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{3.15}$$

Nous pouvons inverser ceci pour trouver x comme une fonction de v. Pour v petit, le terme principal est $x = (2v)^{\frac{1}{2}}$. Cela indique que pour v petit, nous pouvons écrire

$$x = (2v)^{\frac{1}{2}} + c_1 v + c_2 v^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

Ainsi en substituant dans (3.15), on trouve

$$\begin{aligned} v &= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\Big[(2v)^{\frac{1}{2}} + c_1 v + c_2 v^{\frac{3}{2}} + \cdots\Big]^2 + \frac{1}{4!}\Big[(2v)^{\frac{1}{2}} + c_1 v + c_2 v^{\frac{3}{2}} + \cdots\Big]^4 + \cdots \\ &= v + v^{\frac{3}{2}} c_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + v^2\Big[\frac{\sqrt{2}}{2} c_2 + \frac{c_1^2}{2} + \frac{1}{6}\Big] + \cdots \end{aligned}$$

La comparaison des mêmes puissances de v sur les deux côtés, implique que

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_2 &= -\frac{1}{6\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

alors

$$x = (2v)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}} v^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_v(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda \cosh x} \cosh(vx)\, dx \\ &= e^{-\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda v} \frac{dx}{dv}\Big[1 + \frac{v^2}{2} x^2 + \cdots\Big] dv \\ &= e^{-\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda v} \Big[\frac{1}{2}\sqrt{2} v^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} v^{\frac{1}{2}} + \cdots\Big]\Big[1 + \frac{v^2}{2}(2v) + \cdots\Big] dv \\ &= e^{-\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda v} \Big[\frac{\sqrt{2}}{2} v^{-\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} v^2 - \frac{1}{4\sqrt{2}}\Big) + \cdots\Big] dv, \end{aligned}$$

cela donne

$$\mathrm{K}_v(\lambda) = e^{-\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\Big[1 + \frac{1}{2}\Big(v^2 - \frac{1}{4}\Big)\frac{1}{\lambda} + \cdots\Big], \quad (\lambda \to \infty).$$

Exemple 3.4.2. (Formule de Stirling pour λ grand).

Nous allons montrer comment la méthode de Laplace peut être utilisée pour estimer la fonction Gamma $\Gamma(\lambda)$ pour les grandes valeurs de l'argument.

On considère la fonction

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty e^{-y} y^\lambda\, dy, \tag{3.16}$$

d'où

$$\Gamma(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-y} y^\lambda dy.$$

Notons que

$$e^{-y} y^\lambda = e^{-y+\lambda \log y},$$

et que la fonction

$$r(y) = -y + \lambda \log y$$

a un minimum en $y = \lambda$, et posons

$$y = \lambda t.$$

La substitution dans (3.16), donne

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\lambda^\lambda t^\lambda \lambda dt \\ &= \lambda^\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda(t-\log t)} dt,\end{aligned}$$

on considère maintenant l'intégrale

$$I(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda(\tau-\log\tau)} d\tau.$$

La fonction $P(\tau) = \tau - \log\tau$ a une valeur minimale égale à 1 en $\tau = 1$ pour $\tau > 0$.

On considère pour l'intégrale $I(\lambda)$ la décomposition suivante

$$I(\lambda) = \int_0^1 e^{-\lambda P(\tau)} d\tau + \int_1^\infty e^{-\lambda P(\tau)} d\tau \tag{3.17}$$

$$= I_1(\lambda) + I_2(\lambda) \tag{3.18}$$

et on estime les deux intégrales séparément.

On pose $t = 1 - \tau$ dans $I_1(\lambda)$, de telle sorte que le minimum se produit en $t = 0$. Alors

$$I_1(\lambda) = \int_0^1 e^{-\lambda(1-t-\log(1-t))} dt. \tag{3.19}$$

Ensuite, soit

$$\begin{aligned} v &= 1 - t - \log(1-t)) - 1 \\ &= -t - \log(1-t). \end{aligned}$$

Pour t petit, on a

$$v = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \cdots \tag{3.20}$$

L'inversion de (3.20) donne

$$t = (2v)^{\frac{1}{2}} + c_1 v + c_2 v^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2}\Big[(2v)^{\frac{1}{2}} + c_1 v + c_2 v^{\frac{3}{2}} + \cdots\Big]^2 + \frac{1}{3}\Big[(2v)^{\frac{1}{2}} + c_1 v + \cdots\Big]^3 \\ &\quad + \frac{1}{4}\Big[(2v)^2 + \cdots\Big] + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\Big[2v + 2\sqrt{2v}c_1 v + 2\sqrt{2v}c_2 v^{\frac{3}{2}} + c_1^2 v^2 + \cdots\Big] \\ &\quad + \frac{1}{3}\Big[(2v)^{\frac{3}{2}} + 3(2v)(c_1 v + c_2 v^{\frac{3}{2}}) + \cdots\Big] + v^2 + \cdots \\ &= v + v^{\frac{3}{2}}\Big[\sqrt{2}c_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\Big] + v^2\Big[\sqrt{2}c_2 + \frac{c_1^2}{2} + 2c_1 + 1\Big] + \cdots \end{aligned}$$

En assimilant les mêmes puissances de v sur les deux côtés, on aura

$$c_1 = -\frac{2}{3}$$

et

$$\begin{aligned} \sqrt{2}c_2 &= -\Big(1 + 2c_1 + \frac{c_1^2}{2}\Big) \\ &= -\Big(1 - \frac{4}{3} + \frac{2}{9}\Big) \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$c_2 = \frac{\sqrt{2}}{18}$$

et on a

$$t = (2v^{\frac{1}{2}}) - \frac{2}{3}v + \frac{\sqrt{2}}{18}v^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

cela donne

$$\frac{dt}{dv} = \frac{1}{\sqrt{2}} v^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6\sqrt{2}} v^{\frac{1}{2}} + \cdots, \tag{3.21}$$

quand $v \to 0^+$.

La substitution de $v = -t - \log(1-t)$ dans la première intégrale du deuxième membre de (3.17) donne

$$I_1(\lambda) = e^{-\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda v} \frac{dt}{dv} dv.$$

Pour appliquer le lemme de Watson, il suffit de remplacer $\frac{dt}{dv}$ par son développement (3.21), pour obtenir

$$\begin{aligned} I_1(\lambda) &\sim e^{-\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda v} \Big[\frac{1}{\sqrt{2}} v^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6\sqrt{2}} v^{\frac{1}{2}} + \cdots \Big] dv \\ &= e^{-\lambda} \Big[\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} - \frac{2}{3\lambda} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{12\lambda^{\frac{3}{2}}} + \cdots \Big]. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Evaluons maintenant la deuxième intégrale dans (3.17).

$$\begin{aligned} I_2(\lambda) &= \int_1^\infty e^{-\lambda(\tau - \log \tau)} d\tau \\ &= e^{-\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda(t - \log(1+t))} dt. \end{aligned} \tag{3.23}$$

La fonction a une valeur minimale égale 0 en $t = 0$, et

$$v = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \ldots, \tag{3.24}$$

où

$$v = t - \log(1+t).$$

L'inversion de (3.24) pour t au voisinage de 0 donne

$$t = (2v)^{\frac{1}{2}} + c_1 v + c_2 v^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
v &= \frac{1}{2}\Big[(2v)^{\frac{1}{2}} + c_1 v + c_2 v^{\frac{3}{2}} + \cdots\Big]^2 - \frac{1}{3}\Big[(2v)^{\frac{1}{2}} + c_1 v + \cdots\Big]^3 \\
&\quad + \frac{1}{4}\Big[(2v)^2 + \cdots\Big] + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\Big[2v + 2\sqrt{2v}c_1 v + 2\sqrt{2v}c_2 v^{\frac{3}{2}} + c_1^2 v^2 + \cdots\Big] \\
&\quad - \frac{1}{3}\Big[(2v)^{\frac{3}{2}} + 3(2v)(c_1 v + c_2 v^{\frac{3}{2}}) + \cdots\Big] + v^2 + \cdots \\
&= v + v^{\frac{3}{2}}\Big[\sqrt{2}c_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\Big] + v^2\Big[\sqrt{2}c_2 + \frac{c_1^2}{2} + 2c_1 + 1\Big] + \cdots
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$c_1 = \frac{2}{3}$$

et

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}c_2 &= -\Big(1 + 2c_1 + \frac{c_1^2}{2}\Big) \\
&= -\Big(1 - \frac{4}{3} + \frac{2}{9}\Big) \\
&= \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$c_2 = \frac{\sqrt{2}}{18}$$

et on a

$$t = (2v^{\frac{1}{2}}) + \frac{2}{3}v + \frac{\sqrt{2}}{18}v^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

Cela donne

$$\frac{dt}{dv} = \frac{1}{\sqrt{2}}v^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6\sqrt{2}}v^{\frac{1}{2}} + \cdots,$$

quand $v \to 0^+$.

La substitution de $v = t - \log(1+t)$ dans (3.23) donne

$$\begin{aligned}
I_2(\lambda) &\sim e^{-\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda v}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}v^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6\sqrt{2}}v^{\frac{1}{2}} + \cdots\Big]dv \\
&= e^{-\lambda}\Big[\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} + \frac{2}{3\lambda} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{12\lambda^{\frac{3}{2}}} + \cdots\Big]. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

La combinaison des approximations de $I_1(\lambda)$ et $I_2(\lambda)$ obtenues dans (3.22) et (3.25) donne

$$\Gamma(\lambda) \sim \lambda^\lambda e^{-\lambda}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\Big[1+\frac{1}{12\lambda}+\cdots\Big], \quad (\lambda\to\infty).$$

Cette formule s'appelle la formule de Stirling.

3.5 Méthode de Laplace dans le cas d'un point minimum intérieur non dégénéré

Soient $I=[a,b]$ un intervalle fermé borné, $f: I\to\mathbb{R}$ une fonction réelle, $g: I\to\mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes et λ un grand paramètre positif.

Dans cette section nous allons étudier le comportement asymptotique de l'intégrale du type de Laplace $I(\lambda)$ définie dans (3.1), dans le cas d'un point minimum intérieur non dégénéré.

Nous supposons ici que f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, la fonction f a un minimum au point intérieur x_0 de l'intervalle $[a,b]$, c'est-à-dire $a<x_0<b$.

Dans ces conditions forcément

$$f'(x_0)=0.$$

Supposons de plus que

$$f''(x_0)\neq 0.$$

Alors

$$f''(x_0)>0.$$

Cela s'explique par le fait que, dans un voisinage de x_0 la fonction f a le développement de Taylor suivant

$$f(x)=f(x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}+O\big((x-x_0)^3\big). \tag{3.26}$$

Ce point x_0 est appelé point critique non dégénéré.

Alors, quand $\lambda\to\infty$ la principale contribution à l'intégrale vient d'un petit voisinage de x_0. Dans ce voisinage la fonction f est presque constante et peut-être remplacée par sa valeur en x_0. Les termes d'ordre $(x-x_0)^3$ peuvent être négligés et en plus l'intégrale

peut-être étendue à l'ensemble de la droite réelle.

En utilisant l'intégrale standard de Gauss

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{\alpha}{2}y^2\right)} dy = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}, \quad (\alpha > 0), \tag{3.27}$$

on obtient le terme principal

$$I(\lambda) \sim g(x_0) e^{-\lambda f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{f''(x_0)}} \lambda^{-\frac{1}{2}}, \quad (\lambda \to \infty). \tag{3.28}$$

Ce résultat de Laplace a été généralisé sous la forme du développement asymptotique suivant.

Théorème 3.5.1. *Soit $I = [a,b]$ et $f, g \in \mathscr{C}^{\infty}(I)$, f a un seul point minimum x_0, $a < x_0 < b$ et $f''(x_0) \neq 0$. Alors, pour l'intégrale $I(\lambda)$ définie dans*(3.1) *on a le développement asymptotique*

$$I(\lambda) \sim e^{-\lambda f(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^{-\left(\frac{1+k}{2}\right)}, \quad (\lambda \to \infty). \tag{3.29}$$

Les coefficients c_k étant exprimés en fonction de dérivées de g et f en x_0.

Démonstration.

On décompose l'intégrale $I(\lambda)$ en la somme de deux intégrales :

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_a^b g(x) e^{-\lambda f(x)} dx \\ &= \int_a^{x_0} g(x) e^{-\lambda f(x)} dx + \int_{x_0}^b g(x) e^{-\lambda f(x)} dx \\ &= I_1(\lambda) + I_2(\lambda). \end{aligned}$$

Les conditions de la méthode de Laplace sont vérifiées pour l'intégrale $I_2(\lambda)$ et on a

$$f(x) \sim f(x_0) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+\alpha} \tag{3.30}$$

et

$$g(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k+\beta-1}, \tag{3.31}$$

où, par le développement de Taylor

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2, \\
a_k &= \frac{f^{(k+2)}(x_0)}{(k+2)!}, \\
\beta &= 1, \\
b_k &= \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}.
\end{aligned}$$

D'où

$$I_2(\lambda) \sim e^{-\lambda f(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big) \widetilde{c}_n \lambda^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \quad (\lambda \to \infty). \tag{3.32}$$

Pour développer $I_1(\lambda)$ on passe d'abord par le changement de variable

$$X = -x.$$

On aura

$$I_1(\lambda) = \int_{-x_0}^{-a} \widetilde{g}(X) e^{-\lambda \widetilde{f}(X)} dX$$

avec

$$\widetilde{g}(X) = g(-X),$$

$$\widetilde{f}(X) = f(-X),$$

et en plus les conditions de la méthode de Laplace sont vérifiées pour $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$.

On en déduit le développement asymptotique suivant

$$I_1(\lambda) \sim e^{-\lambda f(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big) \widetilde{\widetilde{c}}_n \lambda^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \quad (\lambda \to \infty). \tag{3.33}$$

La combinaison de (3.32) et (3.33) donne le développement asymptotique

$$I(\lambda) \sim e^{-\lambda f(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big) c_n \lambda^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \quad (\lambda \to \infty), \tag{3.34}$$

où

$$c_n = \widetilde{c_n} + \widetilde{\widetilde{c_n}}.$$

En particulier

$$c_0 = g(x_0) \Big(\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}\Big)^{-\frac{1}{2}}.$$

On en déduit

$$I(\lambda) \sim e^{-f(x_0)} g(x_0) \Big(\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \Big)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} \lambda^{-\frac{1}{2}}, \quad (\lambda \to \infty).$$

□

Exemple 3.5.1. (La formule de Stirling)

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \big[1 + O\big(x^{-1}\big) \big], \quad (x \to \infty)$$

est obtenu par l'application de la méthode de Laplace à l'intégrale

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^\infty e^{x\left(\ln t - t\right)} dt.$$

Exemple 3.5.2.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$

$$m_n(\varphi) = \int_0^\infty t^n \varphi(t) dt < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

alors la transformation de Stieltjes de φ,

$$\mathscr{S}(\varphi)(x) = \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t+x} dt,$$

a le développement asymptotique

$$\mathscr{S}(\varphi)(x) \sim \sum_{k=0}^\infty (-1)^k m_k(\varphi) x^{-1-k}, \quad (x \to \infty).$$

3.6 Méthode de Laplace dans le cas d'un point minimum frontalier

On reprend les notations du début de la section (3.5) et on suppose ici que la fonction f a un minimum à la borne inférieure a de l'intervalle $[a, b]$ sur lequel elle est définie.

On considère ici la situation où $f'(a) \neq 0$, alors forcément $f'(a) > 0$, on suppose en plus que $g(a) \neq 0$.

Alors la principale contribution à l'intégrale provient d'un petit intervalle $[a, a+\epsilon]$.

On a

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + O\big((x-a)^2\big). \tag{3.35}$$

En remplaçant la fonction g par sa valeur en a et en négligeant les termes non linéaires dans $f(x)$, nous obtenons

$$I(\lambda) \sim e^{-\lambda f(a)} \frac{g(a)}{f'(a)} \lambda^{-1}, \quad (\lambda \to \infty). \tag{3.36}$$

L'expression rigoureuse de ces idées nous permettra, à travers l'utilisation de la méthode de Laplace, de démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.6.1. *Soient $I = [a, b]$, f, $g \in \mathscr{C}^\infty(I)$ tels que, f a comme seul point minimum la borne inférieure a de l'intervalle $[a, b]$ et $f'(a) \neq 0$.*
Alors, on a le développement asymptotique

$$I(\lambda) \sim e^{-\lambda f(a)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^{-1-k}, \quad (\lambda \to \infty). \tag{3.37}$$

Les coefficients c_k sont exprimés en termes des dérivées de f et g en a.

Exemple 3.6.1.

En utilisant la méthode de Laplace on peut avoir le développement asymptotique suivant.

1) **Fonction Erreur**

$$\begin{aligned} Erfx &= \int_x^\infty e^{-t^2} dt \\ &\sim \frac{e^{-x^2}}{2x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k} x^{-2k}, \quad (x \to \infty). \end{aligned} \tag{3.38}$$

2) **Fonction Gamma Incomplète**

$$\begin{aligned} \gamma(a,x) &= \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt \\ \gamma(a,x) &= \Gamma(a) + e^{-x} x^{a-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-k)} x^{-k}, \quad (0 < a < \infty,\ x > 0). \end{aligned}$$

Chapitre 4

Intégrales doubles

4.1 Cas d'un point minimum intérieur non dégénéré

4.1.1 Lemme de Morse

Théorème 4.1.1. (Lemme de Morse). *Soit x_0 un point critique non dégénéré d'une fonction f de deux variables. Alors, on peut choisir des coordonnées locales appropriées (X, Y) de telle sorte que la fonction f soit exprimée dans (X, Y) par une des trois formes standard suivantes*

$$\begin{cases} i) & f = X^2 + Y^2 + c \\ ii) & f = X^2 - Y^2 + c \\ ii) & f = -X^2 - Y^2 + c \end{cases} \tag{4.1}$$

où c est une constante $c = f(x_0)$ et x_0 est l'origine $\big(x_0 = (0,0)\big)$.

Démonstration.

(On suit ici la démarche exposée dans [29]).

Nous pouvons supposer que le point x_0 est l'origine $(0,0)$ dans les coordonnées (x, y). Dans la discussion suivante nous pouvons supposer pour simplifier que $f(x_0) = 0$. On va montrer que nous pouvons supposer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \neq 0. \tag{4.2}$$

Bien sûr, il n'y a rien à prouver si nous avons déjà $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \neq 0$. Aussi si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) \neq 0$, alors même si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) = 0$, par la permutation de l'axe-x et l'axe-y, on peut supposer que la condition (4.2) est vérifiée. Alors nous considérons le cas où $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) = 0$.

Dans ce cas le Hessien H_f par rapport à (x, y) (au point x_0) est comme suit

$$H_f = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0. \tag{4.3}$$

Ici nous précisons que $a \neq 0$, car x_0 est un point critique non dégénéré. On introduit un nouveau système de coordonnées locales (X, Y) par

$$x = X - Y, \quad y = X + Y. \tag{4.4}$$

Alors le Jacobien J pour le changement de coordonnées de (X, Y) à (x, y) est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Il en découle que le Hessien H_f par rapport à (X, Y) est

$$H_f = {}^tJH_fJ = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2a \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

par le lemme (1.8) dans ([29], page 7). Cette égalité montre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(x_0) = 2a \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(x_0) = -2a \neq 0. \tag{4.7}$$

En utilisant l'ancienne notation (x, y) pour (X, Y), on voit que f satisfait la condition (4.2). Donc dans la suite nous pouvons procéder avec l'hypothèse (4.2).

Maintenant, supposons qu'on a une fonction $z = f(x, y)$ définie au voisinage de l'origine avec $f(0,0) = 0$. Alors, il existe des fonctions $g(x, y)$ et $h(x, y)$ telles qu'on peut écrire

$$f(x, y) = xg(x, y) + yh(x, y) \tag{4.8}$$

dans un certain voisinage de l'origine, et telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = g(0,0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = h(0,0). \tag{4.9}$$

D'abord, nous allons prouver ce fait.

Nous supposons pour plus de simplicité que $z = f(x, y)$ est définie dans tout le plan xy.

On choisit un point arbitraire (x, y), qui reste fixe. On considère une fonction $f(tx, ty)$

avec un paramètre t. Si on dérive cette fonction par rapport à t et on intègre, on obtient (4.8). En particulier, si l'on considère l'intégrale définie sur $[0,1]$ avec la condition $f(0,0)=0$, on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^1 \frac{df(tx,ty)}{dt}dt \\ &= \int_0^1 \left\{x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\right\}dt \\ &= xg(x,y)+yh(x,y). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dans la dernière ligne de l'égalité (4.10), on pose

$$g(x,y)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)dt, \quad h(x,y)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)dt. \tag{4.11}$$

Donc nous avons montré l'égalité (4.8). En outre, en substituant $(x,y)=(0,0)$ dans (4.11), nous établissons l'égalité (4.9).

Maintenant dans notre cas, puisque nous supposons que l'origine $x_0=(0,0)$ est un point critique de la fonction f, on a

$$g(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0, \quad h(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0. \tag{4.12}$$

L'application de la propriété précédente à nos fonctions $g(x,y)$ et $h(x,y)$ nous permet d'écrire

$$g(x,y)=xh_{11}(x,y)+yh_{12}(x,y) \tag{4.13}$$

et

$$h(x,y)=xh_{21}(x,y)+yh_{22}(x,y). \tag{4.14}$$

Nous combinons les égalités (4.13) et (4.14) avec l'égalité (4.8) pour obtenir

$$f(x,y)=x^2h_{11}+xy(h_{12}+h_{21})+y^2h_{22}. \tag{4.15}$$

Les substitutions $H_{11}=h_{11}$, $H_{12}=\frac{h_{12}+h_{21}}{2}$, et $H_{22}=h_{22}$ dans (4.15) donnent

$$f(x,y)=x^2H_{11}+2xyH_{12}+y^2H_{22}. \tag{4.16}$$

Et, on peut vérifier que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2H_{11}(0,0), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 2H_{12}(0,0), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2H_{22}(0,0). \end{cases} \tag{4.17}$$

Supposons que le terme à gauche de la première égalité est non nul. Par conséquent dans un certain voisinage de $(0,0)$

$$H_{11}(0,0) \neq 0. \tag{4.18}$$

Nous définissons maintenant une nouvelle coordonnée X au voisinage de $(0,0)$ par

$$X = \sqrt{|H_{11}|}\Big(x + \frac{H_{12}}{H_{11}} y\Big). \tag{4.19}$$

Le Jacobien entre (x,y) et (X,y) évalué à l'origine n'est pas nul, donc (X,y) est certainement un système de coordonnées locales pour un certain voisinage de $(0,0)$.
On a

$$\begin{aligned} X^2 &= |H_{11}|\Big(x^2 + 2\frac{H_{12}}{H_{11}} xy + \frac{H_{12}^2}{H_{11}^2} y^2\Big) \\ &= \begin{cases} H_{11}x^2 + 2H_{12}xy + \frac{H_{12}^2}{H_{11}} y^2 & (H_{11} > 0), \\ -H_{11}x^2 - 2H_{12}xy - \frac{H_{12}^2}{H_{11}} y^2 & (H_{11} < 0). \end{cases} \end{aligned} \tag{4.20}$$

Si nous comparons (4.20) avec (4.16), on voit que pour $H_{11} > 0$

$$f = X^2 + \Big(H_{22} - \frac{H_{12}^2}{H_{11}}\Big) y^2, \tag{4.21}$$

et pour $H_{11} < 0$

$$f = -X^2 + \Big(H_{22} - \frac{H_{12}^2}{H_{11}}\Big) y^2. \tag{4.22}$$

De l'égalité (4.17) on aura

$$H_{11}(0,0)H_{22}(0,0) - H_{12}^2(0,0) = \frac{1}{4} \det H_f \neq 0, \tag{4.23}$$

où $\det H_f \neq 0$ puisqu'on a supposé que $(0,0)$ est un point critique non dégénéré. Si nous choisissons une nouvelle coordonnée Y au voisinage de $x_0 = (0,0)$ par

$$Y = \sqrt{\Big|\frac{H_{11}H_{22} - H_{12}^2}{H_{11}}\Big|}\, y. \tag{4.24}$$

Les égalités (4.21) et (4.22) aboutissent à l'expression suivante de f dans les coordonnées locales (X, Y) :

$$f = \begin{cases} X^2 + Y^2 & (H_{11} > 0,\ K > 0), \\ X^2 - Y^2 & (H_{11} > 0,\ K < 0), \\ -X^2 + Y^2 & (H_{11} < 0,\ K < 0), \\ -X^2 - Y^2 & (H_{11} < 0,\ K > 0), \end{cases} \tag{4.25}$$

où

$$K = H_{11}H_{22} - H_{12}^2.$$

On note que, par une "rotation de 90 degrés", les expressions $f = X^2 - Y^2$ et $f = -X^2 + Y^2$ sont équivalentes.

□

4.1.2 Intégrales de Laplace dans le cas d'un point minimum intérieur

Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \to \mathbb{C}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω et λ un grand paramètre positif.

Nous allons étudier les développements asymptotiques des intégrales bidimensionnelles du type de Laplace

$$I(\lambda) = \int_\Omega g(x) e^{-\lambda f(x)} dx, \quad (\lambda \to \infty), \tag{4.26}$$

dans le cas où la phase f a un seul point minimum $x_0 \in \Omega$, qu'on suppose non dégénéré.

Le résultat du développement asymptotique dans le cas d'un point minimum intérieur non dégénéré, démontré dans le cas des intégrales unidimensionnelles, se généralise aux intégrales doubles par le théorème suivant.

Théorème 4.1.2. *Soient $f, g \in \mathscr{C}^\infty$. Si f atteint son minimum en un seul point $x_0 \in \Omega$ qui est non dégénéré, alors on a le développement asymptotique suivant*

$$I(\lambda) \sim e^{-\lambda f(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)}, \quad (\lambda \to \infty), \tag{4.27}$$

les coefficients a_k étant exprimés en fonction des dérivées de g et f au point x_0.

Démonstration.

Sans perdre de généralité on suppose que $x_0 = 0$ et que le minimum de f est égal à 0. Du lemme de Morse (4.1.1), f peut s'écrire sous l'une des trois formes standard de (4.1). En outre le fait que 0 est un point minimum de la fonction f, oblige la fonction f à s'écrire exactement sous la forme $i)$ de (4.1).

Ainsi, on peut supposer que notre intégrale est sous la forme

$$I(\lambda) = \int_{B_\rho} g(x_1, x_2) e^{-\lambda(x_1^2+x_2^2)} dx_1 dx_2, \tag{4.28}$$

où B_ρ est le disque de rayon ρ centré à l'origine.

On utilise les coordonnées polaires

$$x_1 = r\cos\theta,$$

$$x_2 = r\sin\theta,$$

pour écrire (4.28) sous la forme

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{B_\rho} r g(x_1(r,\theta), x_2(r,\theta)) e^{-\lambda r^2} d\theta dr \\ &= \int_0^\rho r \widetilde{g}(r) e^{-\lambda r^2} dr, \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{g}(r) = \int_0^{2\pi} g(x_1(r,\theta), x_2(r,\theta)) d\theta.$$

La formule de Taylor pour la fonction $\widetilde{g}$ donne

$$\widetilde{g}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widetilde{g}^{(k)}(0)}{k!} r^k.$$

Donc la condition (3.7) de la méthode de Laplace est vérifiée pour $\widetilde{g}$, avec

$$\begin{aligned} \beta &= 1, \\ a &= 0, \\ b_k &= \frac{\widetilde{g}^{(k)}(0)}{k!}. \end{aligned}$$

Egalement la condition (3.6) de la méthode de Laplace est vérifiée, avec

$$a = 0, \quad \alpha = 2,$$

et

$$a_0 = 1, \quad \alpha = 2.$$

Ainsi la méthode de Laplace donne le développement asymptotique suivant

$$I(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big) c_n \lambda^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \quad (\lambda \to \infty). \tag{4.29}$$

En particulier

$$c_0 = \pi.$$

C'est-à-dire

$$I(\lambda) \sim \pi^{\frac{3}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}}, \quad (\lambda \to \infty). \tag{4.30}$$

□

4.2 Point minimum frontalier

4.2.1 Introduction

Dans cette section, nous considérons le développement asymptotique d'intégrales doubles de type de Laplace au cas de points minimaux non stationnaires, situés sur la frontière du domaine d'intégration. On démontre dans ce travail que l'ordre de contact entre la courbe frontière du domaine d'intégration et la courbe niveau de la phase à travers le point minimum gère le développement asymptotique en question. Cette idée permettra de construire des développements asymptotiques complets dans des contextes plus généraux. En particulier, le problème sera complètement résolu si la phase et la courbe de la frontière sont analytiques au voisinage du point minimum.
Considérons les intégrales de type de Laplace

$$I(\lambda) = \int_D g(x_1, x_2) e^{-\lambda f(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 \tag{4.31}$$

et les intégrales oscillantes

$$J(\lambda) = \int_D g(x_1, x_2) e^{-i\lambda f(x_1,x_2)} dx_1 dx_2,$$

où D est un domaine borné dans $\mathbb{R}^2$, f et g sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs réelles dans un voisinage de la fermeture $\overline{D}$ du domaine D, et λ est un grand paramètre positif. Ces deux types d'intégrales sont étroitement liées, et chaque méthode pour le développement asymptotique du premier type peut généralement être adaptée pour le deuxième type.

Les principales contributions au développement asymptotique des intégrales $I(\lambda)$ proviennent des points sur $\overline{D}$ où la phase f atteint son minimum global ([46], Ch. 8, §§10-11). Ces intégrales sont rencontrées dans nombreux domaines de la science, en particulier dans les problèmes de probabilité (voir par exemple [12], [38]). Dans ce chapitre, nous serons préoccupés par le problème du développement asymptotique des intégrales de type de Laplace $I(\lambda)$ dans le cas où la phase f atteint son minimum global en un point (x_1^0, x_2^0) non stationnaire. $\big((x_1^0, x_2^0)$ est un point non stationnaire pour la phase f signifie qu'au moins l'une des deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)$ au $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)$ est non nulle$\big)$. Puisque l'ensemble niveau de la phase f à travers le point non stationnaire (x_1^0, x_2^0) ne se réduit pas à un seul point (en raison d'un théorème des fonctions implicites), le point minimum global (x_1^0, x_2^0) est nécessairement situé sur la frontière ∂D de D. Comme pour les intégrales oscillantes, si ce point minimum (x_1^0, x_2^0) se trouve dans une partie lisse de la frontière ∂D, on dit que ce point est du deuxième type, sinon, un tel point minimum sur la frontière est dit du troisième type. Le problème étudié ici a déjà été étudié par plusieurs auteurs, mais sous des hypothèses supplémentaires restrictives (voir par exemple [10], Ch. 8 et [46], Ch. 8, et aussi [11], [14], [20], [23] pour des problèmes similaires pour les intégrales oscillantes). En effet, le problème du deuxième type a été examiné dans la littérature sous l'hypothèse supplémentaire que la deuxième dérivée tangentielle de la phase f au point minimum est non nulle, où les approximations dérivées étaient de l'ordre de $\lambda^{-\frac{3}{2}}$. Le problème du troisième type a été étudié dans la littérature dans le cas particulier d'un point angulaire.

On note également que Kaminski et Paris avaient étudié dans [24] ce dernier cas, sans

imposer la non dégénérescence de la phase f. Leur méthode consiste à représenter les intégrales doubles du type de Laplace sous la forme d'intégrales itérées de Mellin-Barnes, puis en appliquant la théorie des résidus, l'estimation du premier terme étant calculé par l'utilisation de la géométrie du diagramme de Newton. Des problèmes similaires pour les intégrales multiples complexes ont également été étudiés dans la littérature, voir par exemple l'étude [17] de Delabaere et Howls et les références incluses. Dans [17], il était imposé aux hypersurfaces frontières se rencontrent transversalement. Cependant, il semble que l'approche, poursuivie dans le présent chapitre pour traiter le cas de non-régularité de la frontière (en particulier la situation (c) de la figure **2**), pourrait être d'une certaine utilité dans l'étude du problème dans le cas où les hypersurfaces frontières se rencontrent tangentiellement.
La principale contribution dans le présent chapitre est de montrer que le développement asymptotique est régi par l'ordre de contact $q \geq 1$ entre la courbe frontière ∂D et la courbe niveau de la phase f à travers ce point minimum. Cette réalisation nous a permis de résoudre le problème dans des contextes plus généraux.

4.2.2 Principaux résultats

Le résultat principal dans ce chapitre est présenté par les deux théorèmes suivants.

Théorème 4.2.1. *Dans le cas d'un point minimum du deuxième type (i.e, quand il y a tangence entre la courbe frontière et la courbe niveau de la phase), le développement asymptotique de l'intégrale $I(\lambda)$ est gouverné par l'ordre de contact $q \geq 1$ entre la courbe frontière ∂D du domaine d'intégration D et la courbe niveau de la phase f à travers le point minimum : plus cet ordre de contact est grand plus l'intégrale est asymptotiquement importante. Plus précisément, dans cette situation, le développement asymptotique de l'intégrale $I(\lambda)$ est obtenu dans l'échelle*

$$\lambda^{-\frac{q+k}{q+1}}, \quad (k \geq 2).$$

Donc ce développement est de l'ordre de

$$\lambda^{-\frac{q+2}{q+1}}.$$

Théorème 4.2.2. *Dans le cas où la frontière est constituée de deux courbes* Γ_1 *et* Γ_2 *qui se rencontrent en un point minimum (c'est-à-dire dans le cas d'un point minimum du troisième type), un développement asymptotique de l'intégrale* $I(\lambda)$ *est construit dans l'échelle*

$$\lambda^{-\frac{q_i+k}{q_i+1}}, \quad (1 \leq i \leq 2,\ k \geq 2),$$

où q_i, $i = 1,2$, *est l'ordre de contact entre la courbe frontière* Γ_i *et la courbe niveau de la phase* f *à travers le point minimum* (x_1^0, x_2^0). *Le premier terme dans cette situation est de l'ordre*

$$\lambda^{-\frac{\max(q_1,q_2)+2}{\max(q_1,q_2)+1}},$$

et son coefficient peut également être exprimé en fonction des données initiales du problème.

Remarque 4.2.1. *On peut montrer que l'ordre de contact* $q \geq 1$ *est identique à l'ordre d'annulation de la dérivée tangentielle.*

Remarque 4.2.2. *Puisque le minimum absolu de* f *intervient dans le développement asymptotique de l'intégrale* (4.31) *par le terme exponentiel multiplicatif* $e^{-\lambda f(x_1^0,x_2^0)}$, *sans perte de généralité nous supposons dans la présente partie que* $f(x_1^0, x_2^0) = 0$.

4.2.3 Définitions et outils de base

Définition 4.2.1. (Ordre de contact entre deux courbes de classe $\mathscr{C}^\infty$).
Soient γ *et* Γ *deux courbes de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *dans le plan* $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ *qui se rencontrent à l'origine* $(0,0)$.
1- Si γ *et* Γ *ne sont pas tangentes au point* $(0,0)$, *on dit que l'ordre de contact entre ces deux courbes au point* $(0,0)$ *est égal à zéro.*
2- Sinon, on peut donc supposer que la tangente commune à γ *et* Γ *au point* $(0,0)$ *est l'axe* $x_2 = 0$, *et que les courbes* γ *et* Γ *sont définies au voisinage de* $(0,0)$ *par deux fonctions de classe* $\mathscr{C}^\infty$, $x_1 \to x_2 = h_1(x_1)$ *et* $x_1 \to x_2 = h_2(x_1)$, *respectivement. Nous définissons* $h(x_1) = h_1(x_1) - h_2(x_1)$.
a- Si toutes les dérivées de la fonction h *en* $x_1 = 0$ *sont nulles, nous disons que l'ordre de*

contact entre les deux courbes γ et Γ au point $(0,0)$ est infini.

b- Sinon, l'ordre de contact est le nombre entier $q = p - 1 \geq 1$, où

$$p = \inf\Big\{k \in \mathbb{N}^* = N - \{0\} : \frac{d^k h}{dx_1^k}(0) \neq 0\Big\}.$$

Définition 4.2.2. *On dit que (x_1^0, x_2^0) est un point non stationnaire pour la fonction f, si au moins l'une des deux dérivées partielles*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \quad ou \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)$$

est non nulle.

Définition 4.2.3. *Soit Ω un ouvert, et soit f une fonction définie sur Ω et $x_0 \in \overline{\Omega}$, on dit que γ est un ensemble niveau, si elle est définie par*

$$\gamma = \big\{(x_1, x_2) \in \overline{\Omega} : f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2^0)\big\}.$$

Définition 4.2.4. (Développement de Maclaurin)

Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ dans un voisinage V de zéro et si f admet une dérivée d'ordre $n+1$ sur V, alors, il existe un réel c_x tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_x),$$

où $f^{(n)}$ est la fonction dérivée n-ième de f.

Théorème 4.2.3. *Soit f une fonction à deux variables réelles, définie sur un ouvert Ω. Si le gradient*

$$\nabla f(x_1^0, x_2^0) \neq 0,$$

alors l'ensemble niveau

$$\gamma = \big\{(x_1, x_2) \in \overline{\Omega} : f(x_1, x_2) = f(x_1^0, x_2^0)\big\}$$

au voisinage de (x_1^0, x_2^0) est une courbe simple.

Théorème 4.2.4. Fonction implicite (cas d'une fonction à deux variables)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de $(x_0, y_0) \in D$. Si $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et une fonction φ de I dans R de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et pour tout $x \in I$

$$f(x, \varphi(x)) = f(x_0, y_0) \quad et \quad \varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x, \varphi(x))}{\partial_y f(x, \varphi(x))}.$$

4.2.4 Transformations préliminaires

Nous supposons que la phase f a un point minimum unique non stationnaire (x_1^0, x_2^0) sur la fermeture $\overline{D}$ de D. En d'autres termes, nous supposons que

1. $f(x_1^0, x_2^0) = \min\{f(x) : x \in \overline{D}\} = 0$, et
2. au moins l'une des deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)$ est non nulle, c'est-à-dire

$$\nabla f(x_1^0, x_2^0) \neq 0.$$

Par le théorème des fonctions implicites, au voisinage du point (x_1^0, x_2^0), la courbe niveau $\gamma = f^{-1}(0)$ est une courbe simple (alors en conséquence, le point minimum (x_1^0, x_2^0) est nécessairement situé sur la frontière ∂D de D) laquelle nous supposons être paramétrée par sa longueur d'arc s

$$\left[-\eta, \eta\right] \ni s \to \xi(s) = (\xi_1(s), \xi_2(s)),$$

où $\eta > 0$ et $\xi(0) = (x_1^0, x_2^0)$.

On considère la transformation tubulaire

$$M : (s,t) \to M(s,t) = (M_1(s,t), M_2(s,t)) \tag{4.32}$$

du rectangle $R_{\eta,\delta} = \left]-\eta, \eta\right[\times \left]-\delta, \delta\right[$ $\left(\eta, \delta > 0\right)$ à $\mathbb{R}^2$, où

$$M_1(s,t) = \xi_1(s) - t\frac{d\xi_2}{ds}(s) \quad \text{et} \quad M_2(s,t) = \xi_2(s) + t\frac{d\xi_1}{ds}(s).$$

Notons que

$$\nu_\gamma(s) = \left(-\frac{d\xi_2}{ds}(s), \frac{d\xi_1}{ds}(s)\right)$$

est la normale unitaire de la courbe niveau γ, et donc nous pouvons écrire

$$M(s,t) = \xi(s) + t\nu_\gamma(s).$$

Il est évident que $M(0,0) = (x_1^0, x_2^0)$.

Proposition 4.2.1. *Le Jacobien $\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(s,t)}$ de la transformation M est*

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(s,t)} = 1 + t\kappa_\gamma(s),$$

où $\kappa_\gamma(s)$ est la courbure de la courbe γ au point $\xi(s) = (\xi_1(s), \xi_2(s))$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(s,t)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial M_1}{\partial t}(s,t) \\ \frac{\partial M_2}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial M_2}{\partial t}(s,t) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{d\xi_1}{ds}(s) - t\frac{d^2\xi_2}{ds^2}(s) & -\frac{d\xi_2}{ds}(s) \\ \frac{d\xi_2}{ds}(s) + t\frac{d^2\xi_2}{ds^2}(s) & \frac{d\xi_1}{ds}(s) \end{vmatrix} \\
&= \Big(\frac{d\xi_1}{ds}(s) - t\frac{d^2\xi_2}{ds^2}(s)\Big)\Big(\frac{d\xi_1}{ds}(s)\Big) \\
&\quad -\Big[\Big(\frac{d\xi_2}{ds}(s) + t\frac{d^2\xi_1}{ds^2}(s)\Big)\Big(-\frac{d\xi_2}{ds}(s)\Big)\Big] \\
&= \Big(\frac{d\xi_1}{ds}(s)\Big)^2 - t\frac{d^2\xi_2}{ds^2}(s)\frac{d\xi_1}{ds}(s) \\
&\quad +\Big(\frac{d\xi_2}{ds}(s)\Big)^2 + t\frac{d^2\xi_1}{ds^2}(s)\frac{d\xi_2}{ds}(s) \\
&= \Big(\frac{d\xi_1}{ds}(s)\Big)^2 + \Big(\frac{d\xi_2}{ds}(s)\Big)^2 \\
&\quad +t\Big[\frac{d^2\xi_1}{ds^2}(s)\frac{d\xi_2}{ds}(s) - \frac{d\xi_1}{ds}(s)\frac{d^2\xi_2}{ds^2}(s)\Big] \\
&= 1 + tk_\gamma(s).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

Proposition 4.2.2. *On a*

$$\Big|\iint\limits_{\overline{D}\cap M(R_{\eta,\delta})} ge^{-\lambda f}\,dx_1dx_1\Big| \le e^{-\lambda\varepsilon_1}\int\limits_{\overline{D}} |g|dx_1dx_2, \tag{4.33}$$

où

$$\varepsilon_1 = \min\big\{f(x) : x \in \overline{D}\cap M(R_{\eta,\delta})\big\} > 0.$$

Démonstration.

Ce résultat découle du fait que $\overline{D} - M(R_{\eta,\delta}) \cap \overline{D}$ est un sous-ensemble compact de $\overline{D}$ qui ne contient pas le point minimum (x_1^0, x_2^0).

□

Il suffit donc d'approximer l'intégrale

$$I_{\eta,\delta}(\lambda) = \int\limits_{M(R_{\eta,\delta})\cap\overline{D}} g(x_1,x_2)e^{-\lambda f(x_1,x_2)}\,dx_1dx_2. \tag{4.34}$$

Théorème 4.2.5. *Pour $\delta > 0$ et $\eta > 0$ suffisamment petites, $|t| \leq \delta$ et $|s| \leq \eta$, on peut utiliser le changement de variables $(x_1, x_2) \to (s, t)$ pour avoir*

$$I_{\eta,\delta}(\lambda) = \iint_{M(R_{\eta,\delta})\cap\overline{D}} g e^{-\lambda f} dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega_{\eta,\delta}} G e^{-\lambda F} ds dt,$$

où

$$\Omega_{\eta,\delta} = M^{-1}(M(R_{\eta,\delta}) \cap \overline{D}), \tag{4.35}$$

$$F(s,t) = f(M(s,t))$$

et

$$G(s,t) = g(M(s,t))(1 + t\kappa_\gamma(s)).$$

Démonstration.

Cela résulte de

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(s,t)}(s,t) > 0$$

pour $\delta > 0$ et $\eta > 0$ suffisamment petites, $|t| \leq \delta$ et $|s| \leq \eta$.

□

On note que le changement de variables $(x_1, x_2) \to (s, t)$ transforme la courbe niveau $f(x_1, x_2) = 0$ en l'axe des abscisses $t = 0$ i.e,

$$F(s, 0) = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad s \in [-\eta, \eta].$$

4.2.5 Cas de régularité de la frontière au voisinage du point minimum

On va voir que, dans cette section, l'ordre de contact $p - 1$ entre la frontière ∂D et la courbe niveau à travers le point minimum (x_1^0, x_2^0) est forcément impair. Dans une telle situation, au voisinage d'un point minimum (x_1^0, x_2^0), la courbe niveau se trouve entièrement en dehors du domaine D. Cela signifie que, dans le plan (s, t), au voisinage de $(0, 0)$, la frontière ∂D se trouve entièrement dans le demi-plan $t \geq 0$.
Supposons qu'au voisinage du point $(x_1^0, x_2^0) = M(0, 0)$, la frontière ∂D de D est définie par une équation implicite

$$h(x_1, x_2) = 0,$$

où h est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\nabla h(x_1, x_2) \neq 0$.

Théorème 4.2.6. *L'image réciproque* $\Gamma = M^{-1}(M(R_{\eta,\delta}) \cap \partial D)$ *de la frontière* ∂D *de* D *au voisinage du point minimum* (x_1^0, x_2^0) *est définie par une fonction de classe* $\mathscr{C}^\infty$

$$[-\eta, \eta] \ni s \to t = \beta(s). \tag{4.36}$$

Démonstration.

D'après l'hypothèse ci-dessus, au voisinage de $(s,t) = (0,0) = M^{-1}(x_1^0, x_2^0)$, l'image réciproque $\Gamma = M^{-1}(M(R_{\eta,\delta}) \cap \partial D)$ est déterminée par une équation implicite

$$H(s,t) = 0,$$

où

$$\nabla H(0,0) = \Big(\frac{\partial H}{\partial s}(0,0), \frac{\partial H}{\partial t}(0,0)\Big) \neq 0.$$

Puisque (x_1^0, x_2^0) est l'unique point minimum de f dans $\overline{D}$ et le gradient $\nabla f \neq 0$, ce point est forcément situé sur la frontière ∂D de D et en plus cette frontière est tangente à la courbe niveau à travers ce point minimum (x_1^0, x_2^0). Il en résulte

$$\frac{\partial H}{\partial s}(0,0) = 0,$$

et par suite, le fait que $\nabla H(0,0) \neq 0$ donne

$$\frac{\partial H}{\partial t}(0,0) \neq 0.$$

Remarque 4.2.3. *La fonction H s'exprime en fonction de la fonction h et la transformation tubulaire M de la façon suivante*

$$\begin{aligned} H(s,t) &= \xi_2(s) + t\frac{d\xi_1}{ds}(s) - h_2\Big[\xi_1(s) - t\frac{d\xi_2}{ds}(s)\Big] \\ &= h_1(\xi_1(s)) + t\frac{d\xi_1}{ds}(s) - h_2\Big[\xi_1(s) - t\frac{d\xi_2}{ds}(s)\Big]. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Ainsi, par le théorème des fonctions implicites, la courbe Γ est exprimée dans les coordonnées (s,t), au voisinage de $(s,t) = (0,0)$, par une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, β :

$$[-\eta, \eta] \ni s \to t = \beta(s).$$

Définition 4.2.5. *Soit $p \geq 2$ l'entier positif défini par*

$$p = \inf\left\{k \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} : \frac{\partial^k \beta}{\partial s^k}(0) \neq 0\right\}. \tag{4.38}$$

Nous supposons que p est fini. Alors, le développement de Maclaurin d'order p de la fonction β permet d'écrire

$$\beta(s) = s^p \widetilde{\beta}(s), \tag{4.39}$$

où $\widetilde{\beta}(s)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\widetilde{\beta}(0) = \frac{1}{p!}\frac{d^p\beta}{ds^p}(0).$$

Pour fixer les idées, on suppose par la suite que la courbe niveau γ est orientée de sorte que la normale unitaire $v_\gamma(0)$ pointe vers le domaine D.

Théorème 4.2.7. *Sous les hypothèses ci-dessus on a*

1. Pour tout $t \geq 0$ assez petit, les points $(0, t)$ sont situés dans $\Omega_{\eta,\delta}$.

2. Etant donné que la courbe niveau $F(s, t) = 0$ coïncide avec l'axe $x_2 = 0$ au voisinage de $(0,0)$, et $(0,0)$ est l'unique minimum global de F dans $\Omega_{\eta,\delta}$, alors, l'entier p dans (4.38) est nécessairement pair et

$$\frac{d^p\beta}{ds^p}(0) > 0.$$

Remarque 4.2.4. *On peut démontrer que l'ordre de contact (comme défini dans l'introduction) entre la courbe frontière et la courbe niveau de la phase, le nombre entier $q = p - 1$ défini dans (4.38), et l'ordre d'annulation des dérivées tangentielles de la phase ont la même signification.*

Démonstration.

Par le théorème des fonctions implicites, la courbe Γ est exprimée dans les coordonnées (s, t) par une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, $s \to t = \beta(s)$. "Le premier entier $p > 1$ tel que la dérivée $\frac{d^p\beta}{ds^p}(0)$ est non nulle" est égal à " le premier entier $p > 1$ tel que la dérivée partielle $\frac{\partial^p H}{ds^p}(0,0)$ est non nulle " lequel, à partir de (4.37) est égal à "le premier entier $p > 1$ tel que $\frac{dh_1^p}{ds^p}(0) \neq \frac{dh_2^p}{ds^p}(0)$".

□

Le lemme suivant montre que si le gradient $\nabla f(x_1^0, x_2^0)$ de la phase f au point (x_1^0, x_2^0) n'est pas nul, il en sera de même pour la dérivée normale de f par rapport à la courbe niveau au même point (x_1^0, x_2^0).

Lemme 4.2.1. *Si*

$$\nabla f(x_1^0, x_2^0) \neq 0,$$

alors

$$0 \neq \frac{\partial F}{\partial t}(0,0) = \nabla f(x_1^0, x_2^0).\nu_\gamma(0), \tag{4.40}$$

où $\nabla f(x_1^0, x_2^0).\nu_\gamma(0)$ *est le produit scalaire de* $\nabla f(x_1^0, x_2^0)$ *et* $\nu_\gamma(0)$.

Démonstration.

Comme

$$f(x_1, x_2) = F(s, t),$$

la formule de la dérivée d'une fonction composée donne

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) = \frac{\partial F}{\partial s}(0,0)\frac{\partial s}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) + \frac{\partial F}{\partial t}(0,0)\frac{\partial t}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \tag{4.41}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) = \frac{\partial F}{\partial s}(0,0)\frac{\partial s}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) + \frac{\partial F}{\partial t}(0,0)\frac{\partial t}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0). \tag{4.42}$$

Parce que F est constante en $t = 0$, les dérivées partielles de F par rapport à s sont nulles pour $t = 0$. En conséquence, à partir de (4.41) et (4.42) nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) = \frac{\partial F}{\partial t}(0,0)\frac{\partial t}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) \tag{4.43}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) = \frac{\partial F}{\partial t}(0,0)\frac{\partial t}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0). \tag{4.44}$$

La première assertion de (4.40) découle de (4.43) et (4.44), en gardant à l'esprit que $\nabla f(x_1^0, x_2^0) \neq 0$. La deuxième assertion découle de la formule de la dérivée d'une fonction composée

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s,0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\xi(s)\big)\Big(-\frac{\partial \xi_2}{\partial s}(s)\Big) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\big(\xi(s)\big)\frac{\partial \xi_1}{\partial s}(s)$$

et le fait que la normale unitaire $\nu_\gamma(s)$ de la courbe γ au point $\xi(s)$ est donnée par

$$\nu_\gamma(s) = \Big(-\frac{\partial \xi_2}{\partial s}(s), \frac{\partial \xi_1}{\partial s}(s)\Big).$$

□

Remarque 4.2.5. *La tangence de la courbe niveau γ et la frontière ∂D au point (x_1^0, x_2^0) implique que la normale unitaire $\nu_\gamma(0)$ de γ est aussi la normale unitaire de ∂D au même point (x_1^0, x_2^0).*

Corollaire 4.2.1. *Si $\eta, \delta > 0$ sont suffisamment petites, alors*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s,t) > 0 \tag{4.45}$$

et

$$F(s,t) > 0 \tag{4.46}$$

pour tout $|s| \leq \eta$ et $0 < t \leq \delta$.

Démonstration.

Puisque $(0,0)$ est un point minimum global de F, $(0,t) \in \Omega_{\eta,\delta}$ se trouve dans le demi-plan $t \geq 0$ et $\frac{\partial F}{\partial t}(0,0) \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial t}(0,0)$ est nécessairement supérieure à zéro. L'inégalité (4.45) suit donc par continuité. A partir de (4.45), $\eta > 0$ peut être choisi de telle sorte que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s,0) > 0$$

pour tout $|s| \leq \eta$ et donc le développement de Maclaurin, donne

$$F(s,t) = t\Big[\frac{\partial F}{\partial t}(s,0) + o(1)\Big] \quad (t \to 0), \tag{4.47}$$

uniformément par rapport à $|s| \leq \eta$. Evidemment (4.47) donne (4.46).

□

Maintenant, on considère le deuxième changement de variables. Ce changement de variables consiste en la transformation de l'intégrale double obtenue par le premier changement de variables en une intégrale unidimensionnelle de Laplace. Pour ce faire, on utilise le théorème de résolution d'intégrales multiples (voir e.g., [46], Ch. 5), à travers le changement de variables

$$m(s,t) = (s,u) : u = F(s,t). \tag{4.48}$$

Pour η, δ assez petit, et ($|s| \leq \eta$, $0 < |t| < \delta$), on a

$$\frac{\partial(s,u)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial F}{\partial t}(s,t) > 0. \tag{4.49}$$

Cette condition assure l'inversibilité de la transformation m. En effet, cette condition garantit que, pour $|s| \leq \eta$, la fonction de la variable réelle $t \to u = F(s,t)$ est injective, et donc m est inversible. Par conséquent, le changement de variables $(s,t) \to (s,u)$ donne

$$\iint\limits_{\Omega_{\eta,\delta}} G(s,t)e^{-\lambda F(s,t)}dsdt = \iint\limits_{m(\Omega_{\eta,\delta})} \widetilde{G}(s,u)e^{-\lambda u}dsdu,$$

où

$$\widetilde{G}(s,u) = G(s,t)\Big(\frac{\partial F}{\partial t}(s,t)\Big)^{-1}. \tag{4.50}$$

Si on pose

$$B_\rho = \big\{(s,t) \in \Omega_{\eta,\delta} : F(s,t) \leq \rho\big\},$$

où

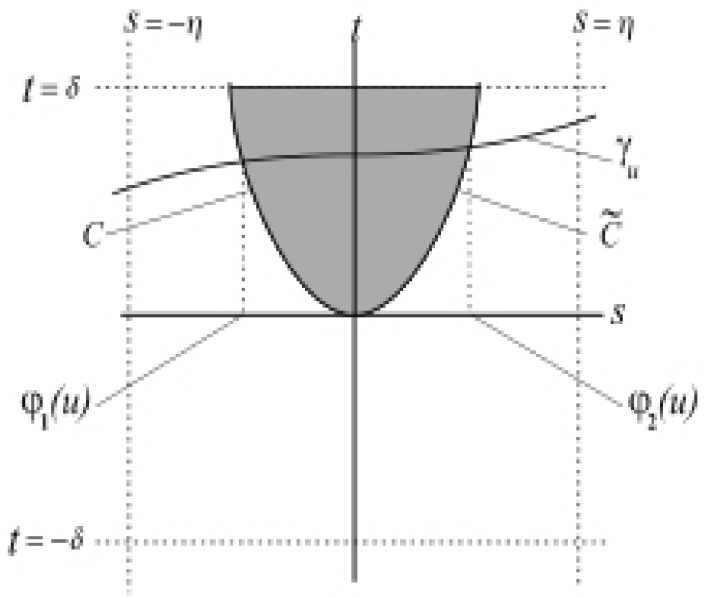
$$\rho = \inf\big\{F(s,\delta) : |s| \leq \eta\big\} > 0, \tag{4.51}$$

alors dans (4.33), on a

$$\iint\limits_{\Omega_{\eta,\delta}\setminus B_\rho} G(s,t)e^{-\lambda F(s,t)}dsdt = o\Big(e^{-\varepsilon_2\lambda}\Big) \tag{4.52}$$

pour un certain $\varepsilon_2 > 0$. Nous approximons

$$\iint\limits_{B_\rho} G(s,t)e^{-\lambda F(s,t)}dsdt$$



Fiqure 1. Illustration de l'ensemble $\Omega_{\eta,\delta}$ et les deux extrémités $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$ de l'intervalle I_u. L'ensemble $\Omega_{\eta,\delta}$ est représenté ici en gris.

Remarque 4.2.6. *I_u n'est pas en général un intervalle. Trois situations peuvent se produire :*
(i) Si $u > \sup\{F(s,\delta) : |s| \le \eta\}$ alors $I_u = \emptyset$: soit $-\eta \le s \le \eta$ à partir de la coissance de la fonction $[0,\delta] \ni t \to F(s,t)$, on a $F(s,t) \le F(s,\delta) < u$ pour tout $0 \le t \le \delta$, cela donne $F(s,t) \ne u$ pour tout $0 \le t \le \delta$ et alors $s \notin I_u$.
(ii) Si $\min\{F(s,\delta) : |s| \le \eta\} < u < \sup\{F(s,\delta) \ : |s| \le \eta\}$, l'ensemble I_u peut être composé d'une union d'intervalles.
(iii) Si $u \le \rho = \min\{F(s,\delta) : |s| \le \eta\}$, I_u est un intervalle. A cause de cela nous avons choisi $\rho = \min\{F(s,\delta) : |s| \le \eta\}$.

Pour $\eta > 0$, définissons $\widetilde{\widetilde{\beta}}(s)$ par

$$[-\eta,\eta] \ni s \to \widetilde{\widetilde{\beta}}(s) = s\big(\widetilde{\beta}(s)\big)^{\frac{1}{p}},$$

où la fonction $\widetilde{\beta}(s)$ est définie dans (4.39). Il est facile de vérifier que

$$\beta^{\frac{1}{p}}(s) = \begin{cases} -\widetilde{\widetilde{\beta}}(s) & \text{pour} \quad s \le 0, \\ \widetilde{\widetilde{\beta}}(s) & \text{pour} \quad s \ge 0. \end{cases} \tag{4.53}$$

Puisque, au voisinage de $s = 0$, $\widetilde{\widetilde{\beta}}(s)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\frac{d\widetilde{\widetilde{\beta}}}{ds}(0) = \left(\frac{1}{p!}\frac{\partial^p \beta}{\partial s^p}(0)\right)^{\frac{1}{p}} > 0, \tag{4.54}$$

par le théorème de l'inversion locale, dans un voisinage de $s = 0$, $\widetilde{\widetilde{\beta}}$ a une fonction inverse de classe $\mathscr{C}^\infty$

$$[-\widetilde{\delta}, \widetilde{\delta}] \ni t \to s = \left(\widetilde{\widetilde{\beta}}\right)^{-1}(t).$$

La prise en considération de (4.53) et la restriction de δ si nécessaire (δ doit satisfaire $\left|\delta^{\frac{1}{p}}\right| \leq \widetilde{\delta}$), nous pouvons écrire

$$\Omega_{\eta,\delta} = \left\{(s,t) : 0 \leq t < \delta,\ a_1(t) \leq s \leq a_2(t)\right\},$$

où $\Omega_{\eta,\delta}$ est défini dans (4.35) et

$$a_1(t) = \widetilde{\widetilde{\beta}}^{-1}\left(-t^{\frac{1}{p}}\right), \quad a_2(t) = \widetilde{\widetilde{\beta}}^{-1}\left(t^{\frac{1}{p}}\right). \tag{4.55}$$

D'autre part, la définition (4.51) de ρ assure que, pour chaque $0 < u \leq \rho$, l'ensemble

$$I_u = \left\{|s| \leq \eta : (s,u) \in m(B_\rho)\right\}$$

est un intervalle d'extrémités

$$\varphi_1(u) = a_1(t_1(u)) \tag{4.56}$$

et

$$\varphi_2(u) = a_2(t_2(u)), \tag{4.57}$$

où $t_1(u)$ et $t_2(u)$ sont déterminés sous l'hypothèse suivante (voir Figure **1**) :

$$\begin{cases} \text{le point } (a_1(t_1(u)), t_1(u)) \text{ sur la courbe } C : \tau \to (a_1(\tau), \tau) \\ \text{et le point } (a_2(t_2(u)), t_2(u)) \text{ sur la courbe } \widetilde{C} : \tau \to (a_2(\tau), \tau) \\ \text{appartiennent aussi à la courbe } \gamma_u = \left\{(s,t) \in R_{\eta,\delta} : F(s,t) = u\right\}. \end{cases}$$

Par conséquent, par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \iint\limits_{B_\rho} G(s,t)e^{-\lambda F(s,t)}\,ds\,dt &= \iint\limits_{m(B_\rho)} \widetilde{G}(s,u)e^{-\lambda u}\,ds\,du \\ &= \int\limits_0^\rho \int\limits_{\varphi_1(u)}^{\varphi_2(u)} \widetilde{G}(s,u)e^{-\lambda u}\,ds\,du. \end{aligned} \tag{4.58}$$

En utilisant une idée de Benaissa et Roger (cf. [5], §4 ou [6], §4), nous allons maintenant exprimer les bornes d'intégrales $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$ comme des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de l'exposant fractionnaire $u^{\frac{1}{p}}$ de la variable u.

Considérons trois fonctions

$$\left[0,\widetilde{\delta}\right] \ni \tau \to V_1(\tau) = F(a_1(\tau^p),\tau^p))^{\frac{1}{p}}, \tag{4.59}$$

$$\left[0,\widetilde{\delta}\right] \ni \tau \to V_2(\tau) = F(a_2(\tau^p),\tau^p))^{\frac{1}{p}}, \tag{4.60}$$

et

$$\left[-\widetilde{\delta},\widetilde{\delta}\right] \ni \tau \to V(\tau) = \left(\left(\widetilde{\widetilde{\beta}}^{-1}(\tau),\tau^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \operatorname{sng}\tau. \tag{4.61}$$

Pour voir que V est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on utilise la formule

$$F(s,t) = t\left[\frac{\partial F}{\partial t}(s,0) + o(1)\right], \quad (t \to 0).$$

A partir de (4.47), nous pouvons écrire V sous la forme

$$V(\tau) = \tau\left[\frac{\partial F}{\partial t}\left(\widetilde{\widetilde{\beta}}(\tau),0\right) + o(1)\right]^{\frac{1}{p}}, \quad (\tau \to 0),$$

où

$$\left[\frac{\partial F}{\partial t}\left(\widetilde{\widetilde{\beta}}^{-1}(\tau),0\right) + o(1)\right]^{\frac{1}{p}}_{\tau=0} = \frac{\partial F}{\partial t}(0,0)^{\frac{1}{p}} > 0.$$

En outre, en prenant en considération (4.47), nous voyons que V est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\frac{dV}{d\tau}(0) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(0,0)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.62}$$

Proposition 4.2.3. *On a*

$$V_1^{-1}(z) = -V^{-1}(-z) \quad \textit{et} \quad V_2^{-1}(z) = V^{-1}(z). \tag{4.63}$$

Démonstration.

La formule (4.63) découle directement de la formule $V_1(\tau) = -V(-\tau)$, qu'on va démontrer maintenant.

$$\begin{aligned} V_1(\tau) =& F(a_1(\tau^p),\tau^p)^{\frac{1}{p}} \\ =& F\left(\widetilde{\widetilde{\beta}}^{-1}(-\tau),\tau^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{ à partir de (4.55)}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= F\Big(\widetilde{\widetilde{\beta}}^{-1}(-\tau), (-\tau^p)\Big)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{ parceque } p \text{ est pair })\\
&= -F\Big(\widetilde{\widetilde{\beta}}^{-1}(-\tau), (\tau)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \operatorname{sgn}(-\tau)\\
&= -V(-\tau).
\end{aligned}
$$

Corollaire 4.2.2. *V est bijective sur l'intervalle $\left[-\widetilde{\delta}, \widetilde{\delta}\right]$, pour $\widetilde{\delta} > 0$ suffisamment petit, et a donc une fonction inverse V^{-1} de classe $\mathscr{C}^{\infty}$. L'utilisation de* (4.55) - (4.57) *et* (4.59) - (4.63)*, montrent que $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$ dans* (4.56) *et* (4.57) *sont de la forme*

$$
\varphi_1(u) = \phi(-u^{\frac{1}{p}}) \quad \textit{et} \quad \varphi_2(u) = \phi(u^{\frac{1}{p}}) \tag{4.64}
$$

où

$$
\phi = \widetilde{\widetilde{\beta}}^{-1} o\, V^{-1}. \tag{4.65}
$$

Démonstration.

On a

$$
\varphi_1(u) = a_1(t_1(u)),
$$

où, de la condition (4.58), t_1 réalise

$$
F(a_1(t_1), t_1) = u
$$

ce qui signifie

$$
F\Big(a_1\Big(\Big(t_1^{\frac{1}{p}}\Big)^p\Big), \Big(t_1^{\frac{1}{p}}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} = u^{\frac{1}{p}}.
$$

C'est-à-dire

$$
V_1\Big(t_1^{\frac{1}{p}}\Big) = u^{\frac{1}{p}}
$$

où

$$
t_1^{\frac{1}{p}} = V_1^{-1}\Big(u^{\frac{1}{p}}\Big).
$$

il en résulte

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(u) &= a_1(t_1)\\
&= a_1\Big(V_1^{-1}\Big(u^{\frac{1}{p}}\Big)\Big)^p\\
&= \widetilde{\widetilde{\beta}}^{-1}\Big(-V_1^{-1}\Big(u^{\frac{1}{p}}\Big)\Big) \quad (\text{à partir de } (4.55))\\
&= \widetilde{\widetilde{\beta}}\Big(V^{-1}\Big(-u^{\frac{1}{p}}\Big)\Big) \quad (\text{à partir de } (4.63))\\
&= \phi\Big(-u^{\frac{1}{p}}\Big).
\end{aligned}
$$

D'une manière similaire, on obtient

$$\begin{aligned}\varphi_2(u) =& \tilde{\tilde{\beta}}^{-1}\Big(V_2^{-1}\Big(u^{\frac{1}{p}}\Big)\Big)\\ =& \tilde{\tilde{\beta}}\Big(V^{-1}\Big(u^{\frac{1}{p}}\Big)\Big)\\ =& \phi\Big(u^{\frac{1}{p}}\Big).\end{aligned}$$

□

Ainsi, la dernière intégrale dans (4.58) prend la forme itérative

$$\int_0^{\rho}\int_{\phi\left(-u^{\frac{1}{p}}\right)}^{\phi\left(u^{\frac{1}{p}}\right)} \widetilde{G}(s,u)e^{-\lambda u}dsdu.$$

Donc, on peut écrire cette intégrale sous la forme

$$\int_0^{\rho} \Psi\Big(u^{\frac{1}{p}}\Big)e^{-\lambda u}du,$$

où Ψ est la fonction de classe $\mathscr{C}^{\infty}$

$$\Psi : z \to \Psi(z) = \int_{\phi(-z)}^{\phi(z)} \widetilde{G}\big(s, z^p\big)ds.$$

Le développement de Maclaurin de Ψ donne

$$\Psi\Big(u^{\frac{1}{p}}\Big) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi^{(k)}}{k!}(0)\,u^{\frac{k}{p}}, \quad (u \to 0). \tag{4.66}$$

Maintenant, nous sommes prêts à énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 4.2.8. *Si la phase f a un point minimum non stationnaire unique $(x_1^0, x_2^0) \in \partial D$, et p dans* (4.38) *est fini, alors p est pair et*

$$I(\lambda) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi^{(k)}}{k!}(0)\Gamma\Big(\frac{k}{p}+1\Big)\lambda^{-\left(\frac{k}{p}+1\right)}, \tag{4.67}$$

où le terme principal est

$$\begin{cases} 2g(x_1^0, x_2^0)\Big(\frac{1}{p!}\frac{\partial^p \beta}{\partial s^p}(0)\Big)^{-\frac{1}{p}}\big(\nabla f(x_1^0, x_2^0).\nu_\gamma(0)\big)^{-\left(\frac{1}{p}+1\right)} \\ \times\Gamma\Big(\frac{1}{p}+1\Big)\lambda^{-\left(\frac{1}{p}+1\right)}. \end{cases} \tag{4.68}$$

Démonstration.

a- Le développement asymptotique (4.67) résulte de (4.66) et le lemme de Watson (cf. [34], p. 71) (en gardant à l'esprit (4.33) et (4.52)),

b- l'expression (4.68) du premier terme est obtenue par l'application de la formule de la différenciation d'une fonction intégrale (voir [2], p. 78) afin d'obtenir $\Psi^{(1)}(0) = 2\varphi^{(1)}(0)\widetilde{G}(0,0)$, puis en utilisant (4.65), (4.62), (4.54) et (4.50).

□

4.2.6 Cas de non-régularité de la frontière au voisinage du point minimum

Dans cette section, nous supposons que la frontière ∂D de D se compose de deux courbes lisses Γ_1 et Γ_2 qui se rencontrent au point minimum (x_1^0, x_2^0). Les deux courbes Γ_1 et Γ_2 ne sont pas supposées être une partie d'une même courbe lisse dans un voisinage du point minimum (x_1^0, x_2^0), mais ils peuvent avoir la même tangente en (x_1^0, x_2^0). Les principales situations qui peuvent se produire sont illustrées sur la figure **2**.

Puisque (x_1^0, x_2^0) est l'unique point minimum de f sur $\overline{D}$, au voisinage de (x_1^0, x_2^0) tous les points de $\overline{D}$ doivent se trouver du même côté de la courbe niveau γ. On suppose que la courbe niveau γ soit orienté de telle sorte que la normale unitaire $\nu_\gamma(0)$ de γ, au point $(x_1^0, x_2^0) = \xi(0)$, pointe du même côté de γ, où se trouve le domaine D. Deux situations peuvent se produire :

S1 : les deux courbes frontières Γ_1 et Γ_2 se trouvent du même côté de la normale à la courbe niveau au point (x_1^0, x_2^0), dans cette situation les images réciproques $M^{-1}(\Gamma_1)$ et $M^{-1}(\Gamma_2)$ se trouvent du même côté de l'axe $s = 0$.

S2 : les deux courbes frontières ne se trouvent pas du même côté de la normale à la courbe niveau γ au point (x_1^0, x_2^0), dans cette situation, les images réciproques $M^{-1}(\Gamma_1)$ et $M^{-1}(\Gamma_2)$ ne se trouvent pas du même côté de l'axe $s = 0$.

Raisonnons comme dans le cas de régularité de la frontière, séparément pour chaque courbe frontière Γ_1 et Γ_2, on voit que $M^{-1}(\Gamma_i)$, $(i = 1,2)$ sont définies par des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$

$$t = \beta_i(s), \quad (i = 1,2). \tag{4.69}$$

Définissons

$$p_i = \inf\left\{k \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} : \frac{\partial^k \beta_i}{\partial s^k}(0) \neq 0\right\}, \quad (i = 1,2) \tag{4.70}$$

et supposons que p_1 et p_2 sont finis. L'adaptation de l'argument utilisé dans le cas de régularité de la frontière, nous permet de voir que (4.58) est également vérifiée dans ce cas, où les bornes $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$ de l'intégrale sont de la forme

$$\varphi_1(u) = \phi_1\left(u^{\frac{1}{p_1}}\right) \quad \text{et} \quad \varphi_2(u) = \phi_2\left(u^{\frac{1}{p_2}}\right), \tag{4.71}$$

ϕ_1 et ϕ_2 étant des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$. Toutefois, dans ce cas, il n'y a pas de relation entre $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$ comme dans (4.64). A partir de (4.71), nous pouvons écrire

$$I(\lambda) \sim \int_0^\rho \Big[\int_{\phi_1\left(u^{\frac{1}{p_1}}\right)}^{\phi_2\left(u^{\frac{1}{p_2}}\right)} \widetilde{G} ds \Big] e^{-\lambda u} du$$

$$= \int_0^\rho \Phi_1\left(u^{\frac{1}{p_1}}\right) e^{-\lambda u} du + \int_0^\rho \Phi_2\left(u^{\frac{1}{p_2}}\right) e^{-\lambda u} du$$

où

$$z \to \Phi_1(z) = \int_{\phi_1(z)}^0 \widetilde{G}\left(s, z^p\right) ds$$

$$z \to \Phi_2(z) = \int_0^{\phi_2(z)} \widetilde{G}\left(s, z^p\right) ds.$$

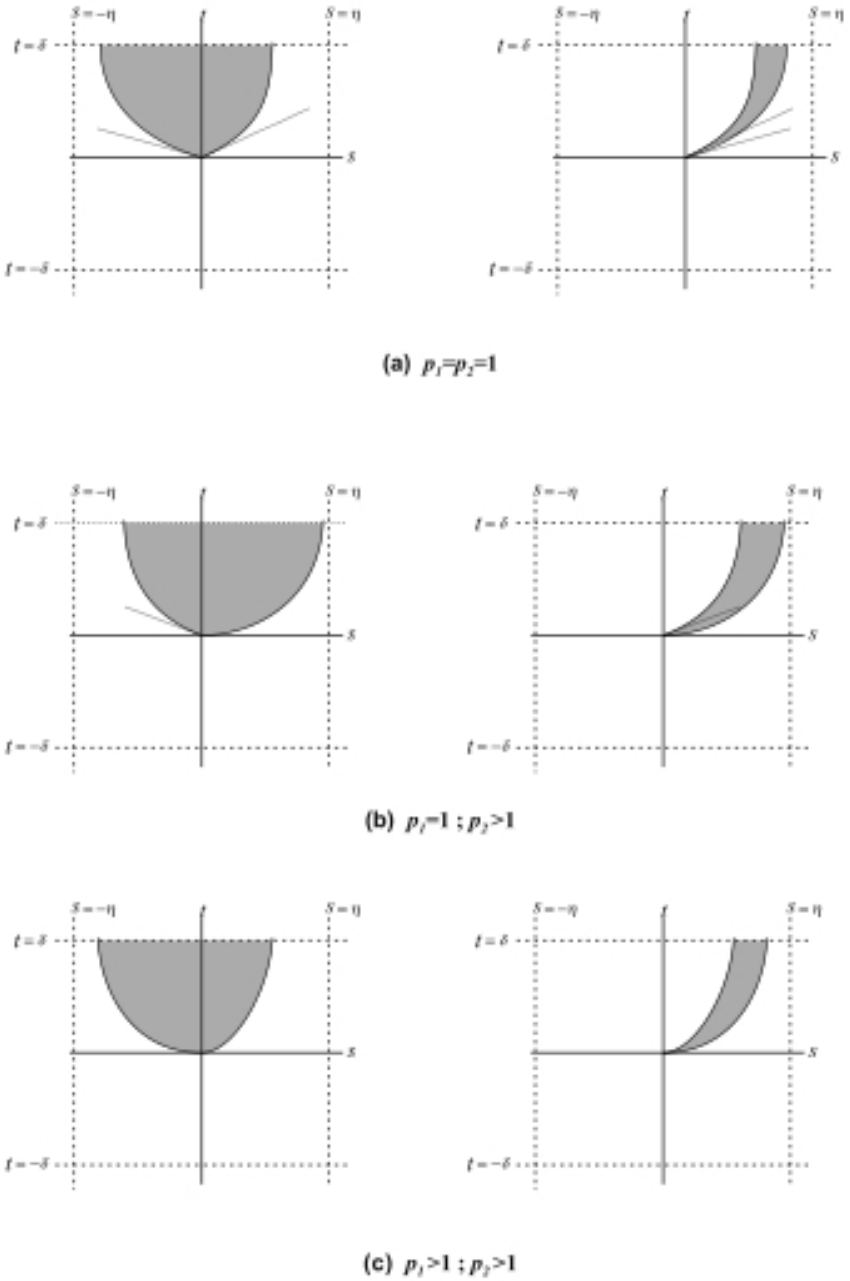


Figure 2. Ici est illustré dans le plan (s, t) les principales situations qui peuvent se produire dans le cas où la frontière ∂D de D est constituée de deux courbes frontières Γ_1 et Γ_2. A droite, sont représentés les situations où Γ_1 et Γ_2 sont du même côté de la normale à la courbe niveau γ au point (x_1^0, x_2^0) et à gauche les autres situations. L'ensemble $\Omega_{\eta,\delta}$ est montré ici en gris.

Comme dans le cas de régularité de la frontière, le lemme de Watson nous permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 4.2.9. *Sous les hypothèses de cette section, nous avons*

$$I(\lambda) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_1^{(k)}(0)\Gamma\Big(\frac{1}{p_1}+k\Big)\lambda^{-\left(\frac{1}{p_1}+k\right)} + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_2^{(k)}(0)\Gamma\Big(\frac{1}{p_2}+k\Big)\lambda^{-\left(\frac{1}{p_2}+k\right)},$$

où le premier terme est de l'ordre

$$\lambda^{-\left(\frac{1}{\max(p_1,p_2)}+1\right)}.$$

Par rapport aux travaux antérieurs qui n'avaient considéré le problème que dans le cas d'un point angulaire, la méthode décrite dans cette section nous permet de résoudre le problème pour toutes les situations qui peuvent se produire relativement à la position des deux courbes frontières Γ_1 et Γ_2.

4.2.7 Calcul du terme principal

Dans cette section, nous décrivons une méthode pour calculer en fonction des données initiales du problème, le premier terme du développement asymptotique construit dans le présent chapitre. Nous commençons par le lemme important suivant, qui nous permettra de calculer la dérivée $\frac{d^p\beta}{ds^p}(0)$ de la fonction β (cf. (4.36)) en fonction des données initiales du problème.

Lemme 4.2.2. *Soit $x_1 \to x_2 = h(x_1)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une variable réelle, définie sur l'intervalle $[-a,a]$ $(a>0)$, pour laquelle il existe un entier $p \geq 2$ tel que*

$$\frac{d^p h}{dx_1^p}(0) \neq 0 \quad \textit{et} \quad \frac{d^k h}{dx_1^k}(0) = 0, \tag{4.72}$$

pour tout $0 \leq k < p$. Considérons la transformation tubulaire $M : (s,t) \to (x_1,x_2)$ définie dans (4.32)*, où ici la courbe γ est le graphe C_h de la fonction h.*

Sous les hypothèses ci-dessus, les assertions suivantes sont vérifiées.

1. Si on définit les fonctions ϖ et ϱ comme suit

$$\varpi : [-a,a] \ni x_1 \to \varpi(x_1) = \big(x_1, h(x_1)\big)$$

et

$$[-a,a] \ni x_1 \to \varrho(x_1) = \int_0^{x_1} \sqrt{1+\Big(\frac{dh}{dx}(\zeta)\Big)^2}\, d\zeta,$$

alors

$$\xi : \big[\varrho(-a), \varrho(a)\big] \ni s \to \xi(s) = (\varpi o \varrho^{-1})(s)$$

est une paramétrisation de la courbe γ par sa longueur d'arc et $\xi(0) = (0,0)$.

2. Au voisinage du point $(x_1, x_2) = (0,0)$, l'axe $x_2 = 0$ est représenté dans les coordonnées (s,t) par une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, $s \to t = \beta(s)$, où

$$\frac{d^p\beta}{ds^p}(0) = -\frac{d^p h}{dx^p}(0) \quad \text{et} \quad \frac{d^k\beta}{ds^k}(0) = 0 \tag{4.73}$$

pour tout $0 \le k < p$.

Démonstration.

1. Il est facile de vérifier que

$$\Big(\frac{d\xi_1}{ds}(s)\Big)^2 + \Big(\frac{d\xi_2}{ds}(s)\Big)^2 = 1.$$

2. Un point (x_1, x_2) appartient à l'axe $x_2 = 0$ signifie que

$$x_2(s,t) = \xi_2(s) + t\frac{d\xi_1}{ds}(0) = 0.$$

D'où, par le théorème des fonctions implicites, au voisinage de $(x_1^0, x_2^0) = (0,0)$, l'axe $x_2 = 0$ est défini par une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, $t = \beta(s)$. A partir de la définition de $t(x_1, x_2)$, il est facile de voir que

$$\beta(s)^2 = t^2 = (h(\xi_1(s)))^2\Big[1+\Big(\frac{dh}{dx}(\xi_1(s))\Big)^2\Big] \tag{4.74}$$

pour x_1 assez petit et $(s,t) = M^{-1}(x_1, 0)$.

D'autre part, de

$$s = \int_0^{\xi_1(s)} \sqrt{1+\Big(\frac{dh}{dx}(x)\Big)^2}\, dx.$$

On a

$$\xi_1(s) = s + o(s), \quad (s \to 0). \tag{4.75}$$

par conséquent (4.74) - (4.75) et (4.72), donnent

$$\begin{aligned}\beta(s)^2 &= \Big[\frac{1}{p!}\frac{d^p h}{dx^p}(0)s^p[1+o(s)]\Big]^2[1+o(s)^2]\\ &= \Big[\frac{1}{p!}\frac{d^p h}{dx^p}(0)s^p\Big]^2\big[1+o(s)\big].\end{aligned}$$

il en résulte

$$\Big|\frac{d^p\beta}{ds^p}(0)\Big| = \Big|\frac{d^p h}{dx^p}(0)\Big| \quad \text{et} \quad \frac{d^k\beta}{ds^k}(0) = 0$$

pour tout $k < p$. La preuve du lemme est terminée en remarquant que les dérivées $\frac{d^p\beta}{ds^p}(0)$ et $\frac{d^p h}{dx^p}(0)$ sont de signe opposé.

□

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer explicitement, dans le cas de régularité de la frontière, le terme principal en fonction des données initiales du problème.

Théorème 4.2.10. *Considérons la situation où la courbe frontière ∂D de D est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au point minimum (x_1^0, x_2^0). Nous pouvons, en utilisant des changements successifs de coordonnées, supposer que le point minimum est $(0,0)$, la frontière du domaine d'intégration D coïncide dans le voisinage de $(0,0)$ avec l'axe $x_1 = 0$, et le développement de Maclaurin de la phase f est de la forme*

$$f_{10}x_1 + f_{11}x_1x_2 + f_{02}x_2^2 + \dots, \tag{4.76}$$

avec $f_{10} \neq 0$ (voir par exemple ([23], §4) ou ([34], Ch. 8, §7)). Si on pose

$$p = \inf\{p \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N}_0 : f_{0p} \neq 0\}$$

et on suppose que p est fini.
Alors, nous avons l'expression explicite suivante du terme principal en fonction des données initiales du problème :

$$2g(x_1^0, x_2^0) = \frac{1}{f_{0p}^{\frac{1}{p}} f_{10}} \times \Gamma\Big(\frac{1}{p}+1\Big)\lambda^{-\left(\frac{1}{p}+1\right)}. \tag{4.77}$$

Démonstration.

Nous écrivons

$$f(x_1, x_2) = f_{10}x_1[1 + P(x_1, x_2)] + f_{0p}x_2^p[1 + Q(x_1, x_2)],$$

où $P(x_1, x_2)$ et $Q(x_1, x_2)$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, et

$$P(0,0) = Q(0,0) = 0.$$

On considère ensuite les nouvelles coordonnées

$$u = x_1[1 + P(x_1, x_2)], \quad v = x_2[1 + Q(x_1, x_2)]^{\frac{1}{p}}.$$

Ainsi

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)}(0,0) = 1$$

et

$$F(u, v) = f_{10}u + f_{0p}v^p,$$

où $F(u, v)$ est la transformée de $f(x_1, x_2)$.

Evidemment,

$$v \to (h(v), v) : h(v) = \Big(-\frac{f_{0p}}{f_{10}}v^p\Big)$$

est une paramétrisation de la courbe niveau $F(u, v) = 0$ à travers la transformée du point minimum (x_1^0, x_2^0) (c'est-à-dire, à travers le point $(0,0)$ dans le plan (u, v)). L'expression (4.77) est finalement obtenue en remplaçant dans (4.68) $\frac{d^p\beta}{ds^p}(0)$ par $p!\frac{f_{0p}}{f_{10}}$ et $\big(\nabla f(x_1^0, x_2^0).\nu_\gamma(0)\big)$ par f_{10}.

□

Pour une vérification, remarquons que (4.77) est en accord avec l'expression du premier terme du développement (11.3) dans le livre de Wong ([46], p. 468), dérivée de la méthode de Jones et Kline [23].

La méthode ci-dessus pour calculer le premier terme en fonction des données initiales du problème décrite dans le cas où la frontière ∂D est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage du point minimum (x_1^0, x_2^0), peut-être également adapté pour le cas où la frontière ∂D n'est pas de classe $\mathscr{C}^\infty$ au point minimum (x_1^0, x_2^0). Cependant, pour telles situations, il faut faire les constructions pour chaque fonction β_1 et β_2 dans (4.69), séparément.

4.2.8 Conclusion et exemples

1. Dans le cas où la phase f a plus d'un point minimum sur la frontière, les contributions dominantes au développement asymptotique de l'intégrale $I(\lambda)$ proviennt des points de plus haut contact entre la courbe frontière et la courbe niveau de la phase. L'estimation d'ordre $\lambda^{-\frac{3}{2}}$, rencontrée dans la littérature, correspond au cas particulier où l'ordre de contact est un.

2. La méthode décrite dans le présent chapitre permettra de résoudre complètement le problème dans le cas où la phase f et la frontière ∂D sont analytiques au voisinage du point minimum (x_1^0, x_2^0). Ceci est dû au fait que, dans une telle situation, p dans (4.38), est un nombre entier fini.

3. Le cas de non-régularité de la frontière, étudié dans la section (4.2.6), n'a été examiné dans la littérature que dans la situation d'un point angulaire. Tandis qu'ici, le problème est résolu quelle que soit la position relative des deux courbes Γ_1 et Γ_2. En outre, comme pour le cas de régularité de la frontière, le problème est complètement résolu si la phase f et les deux courbes frontières Γ_1 et Γ_2 sont analytiques au voisinage du point minimum (x_1^0, x_2^0).

4. Nous concluons ce chapitre avec des exemples simples.

a- Cas de régularité :

1- Soit $D = \{(x_1, x_2) : -1 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$, $f(x_1, x_2) = \cos x_1 \sin x_2 + x_2^6 x_1^4 + x_1^4 + x_2^6$ et $g \equiv 1$ alors le théorème (4.2.8) donne

$$I(\lambda) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda^{-\left(\frac{k+4}{4}\right)}$$

avec $A_0 = 2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$.

2- Utilisant toujours le domaine $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | -1 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$ et la fonction $g \equiv 1$, on pourrait remplacer x_1^4 dans l'expression de $f(x_1, x_2)$ par exemple par

$$(1 - \cos x_1)^2, \quad \text{ou} \quad 1 - \cos(1 - \cos x_1), \quad \text{ou} \quad 1 - \cos(x_1 - \sin x_1), \quad \text{ou} \quad (x_1 - \sin x_1)^2,$$

de sorte que la fonction $f(x_1, x_2)$ devient

$$f(x_1, x_2) = \cos x_1 \sin x_2 + x_2^6 (1 - \cos x_1)^2 + (1 - \cos x_1)^2 + x_2^6$$

ou

$$f(x_1,x_2)=\cos x_1\sin x_2+x_2^6(1-\cos(1-\cos x_1))+(1-\cos(1-\cos x_1))+x_2^6$$

ou

$$f(x_1,x_2)=\cos x_1\sin x_2+x_2^6(1-\cos(x_1-\sin x_1))+(1-\cos(x_1-\sin x_1))+x_2^6$$

ou

$$f(x_1,x_2)=\cos x_1\sin x_2+x_2^6(x_1-\sin x_1)^2+(x_1-\sin x_1)^2+x_2^6$$

respectivement. Il est clair que $(1-\cos x_1)^2$ et $1-\cos(1-\cos x_1)$ se comportent localement comme x_1^4, tandis que $1-\cos(x_1-\sin x_1)$ et $(x_1-\sin x_1)^2$ se comportent comme x_1^6. Si on examine la fonction

$$\varphi_1(x)=(1-\cos x)^2,$$

on a

$$\varphi_1(x)\big|_{x=0}=\frac{d\varphi_1(x)}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2}\Big|_{x=0}=\frac{d^3\varphi_1(x)}{dx^3}\Big|_{x=0}=0,\qquad \frac{d^4\varphi_1(x)}{dx^4}\Big|_{x=0}>0,$$

ce qui est analogue au cas

$$x^4\big|_{x=0}=\frac{dx^4}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{d^2x^4}{dx^2}\Big|_{x=0}=\frac{d^3x^4}{dx^3}\Big|_{x=0}=0,\qquad \frac{d^4x^4}{dx^4}\Big|_{x=0}>0.$$

Si on pose

$$\varphi_2(x)=1-\cos(1-\cos x_1),$$

on a

$$\varphi_2(x)\big|_{x=0}=0,\qquad \frac{d\varphi_2(x)}{dx}\Big|_{x=0}=\big[\sin(1-\cos x)\cdot\sin x\big]\big|_{x=0}=0,$$

$$\frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\big[\sin(1-\cos x)\cdot\sin x\big]=\cos(1-\cos x)\cdot\sin^2 x+\sin(1-\cos x)\cdot\cos x,$$

donc

$$\frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2}\Big|_{x=0}=0,$$

en continuant le calcul, on a

$$\frac{d^3\varphi_2(x)}{dx^3}=-\sin(1-\cos x)\cdot\sin^3 x+3\cos(1-\cos x)\cdot\sin x\cdot\cos x-\sin(1-\cos x)\cdot\sin x,$$

et donc

$$\frac{d^3\varphi_2(x)}{dx^3}\Big|_{x=0} = 0.$$

Mais on a

$$\frac{d^4\varphi_2(x)}{dx^4} = -\cos(1-\cos x)\cdot\sin^4 x - 6\sin(1-\cos x)\cdot\cos x\cdot\sin^2 x +$$

$$+3\cos(1-\cos x)\cdot\cos^2 x - 4\cos(1-\cos x)\cdot\sin^2 x - \sin(1-\cos x)\cdot\cos x$$

et donc

$$\frac{d^4\varphi_2(x)}{dx^4}\Big|_{x=0} = 3.$$

En résumant, les fonctions x^4, $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont nulles au point $x = 0$ et leurs dérivées première, seconde et troisième s'annulent au point $x = 0$, tandis que leur dérivée quatrième est strictement positive. Donc le développement asymptotique de $I(\lambda)$ prend la forme

$$I(\lambda) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda^{-\left(\frac{k+4}{4}\right)}$$

où $A_0 = 2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$.

Aussi, Si on fait le calcul, on trouvera que les fonctions x^6, $\psi_1(x) = 1-\cos(x-\sin x)$ et $\psi_2(x) = (x_1 - \sin x_1)^2$ sont nulles au point $x = 0$ et leurs dérivées première, seconde, troisième, quatrième et cinquième s'annulent au point $x = 0$, tandis que leur dérivée sixième est strictement positive. Donc le développement asymptotique de $I(\lambda)$ prend la forme

$$I(\lambda) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda^{-\left(\frac{k+6}{6}\right)}$$

où $A_0 = 2\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)$.

b- Cas de non-régularité :

1- Soient $0 < n < m$ deux entiers $D = \left\{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1,\ x_1^m < x_2 < x_1^n\right\}$, $f(x_1, x_2) = x_2 + x_1^4 x_2^3$ et $g \equiv 1$.

Alors le théorème (4.2.9) donne

$$I(\lambda) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda^{-\left(\frac{1}{m}+k\right)} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \lambda^{-\left(\frac{1}{n}+k\right)},$$

où le terme principal est d'ordre $\lambda^{-\left(\frac{1}{m}+1\right)}$.

2- Utilisant le même domaine $D = \left\{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, x_1^m < x_2 < x_1^n\right\}$, la fonction $f(x_1, x_2) = \frac{1}{4!}x_2^4 + x_1^2 x_2^6$ et $g \equiv 1$.
Alors le théorème (4.2.9) donne

$$I(\lambda) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda^{-\left(\frac{1}{m}+k\right)} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \lambda^{-\left(\frac{1}{n}+k\right)},$$

où le terme principal est d'ordre $\lambda^{-\left(\frac{1}{m}+1\right)}$.

Chapitre 5

Application à un problème du temps de sortie

On considère le problème suivant, d'une perturbation d'un système dynamique en trois dimensions $\big(x = (x_1, x_2, x_3)\big)$ sur un domaine borné, par une petite perturbation aléatoire (voir [37], Ch7, §7.4).

$$\frac{dx}{dt} = b(x) \tag{5.1}$$

$$dx_\varepsilon = b(x_\varepsilon)dt + \varepsilon\sigma(x_\varepsilon)dw(t), \tag{5.2}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^3$, $w(t)$ est le mouvement Brownien en trois dimensions, $b(x)$ est un champ de vecteurs, $\sigma(x)$ est la matrice de diffusion, et $\varepsilon \neq 0$ est un petit paramètre réel. Etudions le problème du développement asymptotique en ε de la distribution de probabilité $p_\varepsilon(x, y)$ des points y sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω, où les trajectoires x_ε du système perturbé (5.2), partant de $x \in \Omega$, quittent Ω. Dans le cas où le système déterministe (5.1) a un point d'équilibre stable, par le moyen d'une technique de perturbation singulière, il a été démontré que, pour une fonction test f définie sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω,

$$\begin{aligned} C_0 &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega} f(y)p_\varepsilon(x,y)dy \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{\partial\Omega} e^{\frac{\phi}{\varepsilon^2}} w_0 f b.v d\Omega_y}{\int_{\partial\Omega} e^{\frac{\phi}{\varepsilon^2}} w_0 b.v d\Omega_y}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

où les fonctions ϕ et w_0 sont liées au problème en question, ν est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$, et $d\Omega_y$ est l'élément de surface de $\partial\Omega$ (voir [37], page 174, formule (7.4.16)). Toujours dans le même livre, les expressions de la limite C_0 sont données dans certains cas liés au type de l'ensemble des points de $\partial\Omega$ où ϕ atteint son maximum (formules (7.4.22)-(7.4.24), pp 175-176).

Ici, nous allons donner une nouvelle expression de la limite C_0, extraite de l'article [7] de Benaissa et Benlahcene.

En effet, supposons que l'ensemble des points γ dans $\partial\Omega$ où f atteint son maximum est une courbe simple de Jordan, et supposons qu'il existe un entier $r \geq 2$ tel que, pour chaque point A dans γ, il existe des coordonnées locales de $\partial\Omega$,

$$\mathbb{R}^2 \supset O \ni \nu = (\nu_1, \nu_2) \to x(\nu)$$

$$= \big(x_1(\nu_1, \nu_2), x_2(\nu_1, \nu_2), x_3(\nu_1, \nu_2)\big)$$

$$\in U \cap \partial\Omega \subset \mathbb{R}^3.$$

Au voisinage du point A, telles que

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial^r \phi}{\partial \nu_1^r}(\nu_1, \nu_2)\right| + \left|\frac{\partial^r \phi}{\partial \nu_2^r}(\nu_1, \nu_2)\right| \neq 0, \\ \frac{\partial^k \phi}{\partial \nu_i^k}(\nu_1, \nu_2) = 0 \\ \text{pour tout} \quad x(\nu_1, \nu_2) \in \gamma, \ i = 1, 2 \ \text{ et } \ k < r. \end{cases} \tag{5.4}$$

Ici O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, et $A \in U \cap \partial\Omega$. Parce que $\partial\Omega$ est une surface lisse dans $\mathbb{R}^3$, sans perte de généralité, on peut supposer que les coordonnées (y_1, y_2, y_3) de l'ensemble ouvert U dans $\mathbb{R}^3$ sont telles que $(\nu_1, \nu_2) = (y_1, y_2)$ et

$$O \ni (\nu_1, \nu_2) \to (\nu_1, \nu_2, 0) \in U \cap \partial\Omega \tag{5.5}$$

est une paramétrisation de $U \cap \partial\Omega$. Exprimée en coordonnées (ν_1, ν_2), la partie $\gamma \cap U$ de la courbe γ, contenue dans U, est une courbe simple dans un ouvert $O \in \mathbb{R}^2$, avec ses deux extrémités sur la frontière ∂O de O.

La condition (5.4) et la formule (3.5) dans [7] fournissent donc des approximations asymptotiques locales pour les intégrales de (5.3), et la compacité de la courbe assure

la validité de ces approximations sur toute la frontière $\partial\Omega$ de Ω.

Par l'utilisation de ces approximations, on obtient l'expression suivante de C_0.

$$C_0 = \frac{\int_\gamma \frac{w_0 f b.v}{\left(\left(\frac{\partial^r \phi}{\partial v_2^r}\right)^{\frac{2}{r}} + \left(\frac{\partial^r \phi}{\partial v_2^r}\right)^{\frac{2}{r}}\right)^{\frac{1}{2}}} d\gamma}{\int_\gamma \frac{w_0 b.v}{\left(\left(\frac{\partial^r \phi}{\partial v_2^r}\right)^{\frac{2}{r}} + \left(\frac{\partial^r \phi}{\partial v_2^r}\right)^{\frac{2}{r}}\right)^{\frac{1}{2}}} d\gamma}, \tag{5.6}$$

$d\gamma$ étant l'élément de la longueur de la courbe γ. En particulier, la mesure

$$f \to \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial\Omega} p(x,y) f \, d\partial\Omega$$

sur $\partial\Omega$ est concentrée sur la courbe γ.

Dans (5.5) on peut supposer que v_1 est la longueur d'arc de la courbe γ (voir [34], Ch IV, §23), et alors (5.6) prend la forme

$$C_0 = \frac{\int_\gamma \frac{w_0 f b.v}{\left(\frac{\partial^r \phi}{\partial v_2^r}\right)^{\frac{1}{r}}} d\gamma}{\int_\gamma \frac{w_0 b.v}{\left(\frac{\partial^r \phi}{\partial v_2^r}\right)^{\frac{1}{r}}} d\gamma}. \tag{5.7}$$

Notons que les formules (5.6) et (5.7) sont obtenues sous la condition (5.4) qui n'est vérifiée que dans la situation où l'ordre d'annulation des dérivées normales de ϕ, par rapport à la courbe γ, est constante ($\equiv r$) sur la courbe γ. Si la condition (5.4) n'est pas satisfaite, alors, comme démontré à la section 4 dans [7], le développement asymptotique uniforme peut être utilisé pour étudier le problème.

Bibliographie

[1] ALOUANI. A, *Les séries asymptotiques*, Mémoire de master, Université de Batna, juin 2014.

[2] APPEL. W, *Mathematics for physics and physicists*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007. Translated from the 2001 French original and with a foreword by Emmanuel Kowalski.

[3] ARNAUDIÈS. J. M. AND FRAYSSE. H, *Cours de mathématique S-1, Algèbre*, Bordas, Paris, 1987.

[4] AVRAMIDI. I, *Lecture Notes on Asymptotic expansion*, New Mexico Institue of Mining and Technology, Socorro, NM 87801. Octobre 19, 2000.

[5] BENAISSA. A. AND ROGER. C, *Développement asymptotique d'intégrales oscillantes doubles.* (French, with English and French summaries), C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333**, no. 1, (2001) 17 - 22.

[6] BENAISSA. A. AND ROGER. C, *Asymptotic expansion of multiple oscillatory integrals with a hypersurface of stationary points of the phase*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **469**, no. 2155, (2013) 20130109.

[7] BENAISSA. A. AND BENLAHCENE. M, *Asymptotic expansion of double- type integrals with a curve of minimal points*, A paraître dans Mathematica Slovaca.

[8] BLEISTEIN. N, *Uniform asymptotic expansion of integrals with many nearby stationary points and algebraic singularities.* J. Math. and Mech. **17**, (1967) 533-560.

[9] BLEISTEIN. N. AND HANDELSMAN. R. A, *Multidimentional stationary phase.* An alternative derivation, SIAM J. Math. Anal. **6**, (1975) 480-487.

[10] BLEISTEIN. N. AND HANDELSMAN. R. A, *Asymptotic expansions of integrals*, 2nd ed., Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[11] BRAUN. G, *Zur Methode der stationären Phase* (German), Acta Phys. Austriaca **10**, (1956) 8-33.

[12] BREITUNG. K. W, *Asymptotic approximations for probability integrals, Lecture Notes in Mathematics*, vol. **1592**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[13] CAUCHY. A. -L, *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique*, $1^{\text{è}re}$ *partie, Analyse algébrique*, Debure frères, libraires du Roi, 1821.

[14] CHAKO. N, *Asymptotic expansions of double and multiple integrals occurring in diffraction theory*, J. Inst. Math. Appl. **1**, (1965) 372-422.

[15] CHESTER. C, FRIEDMAN. B. AND URSELL. F, *An extension of the method of steepest descents.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **53**, (1957) 599-611.

[16] COOKE. J. C, *Stationary phase in two dimensions.* IMA J. Appl. Math. **29**, (1982) 25-37.

[17] DELABAERE. E. AND HOWLS. C. J, *Global asymptotics for multiple integrals with boundaries*, Duke Math. J. **112**, no. 2, (2002) 199-264.

[18] ÉRDÉLYI. A, *Asymptotic representations of Fourier integrals and the method stationary phase*, J. Soc. Indust. Appl. Math. **3**, (1955) 17-27.

[19] FERRARD. J. M, *Cours de Mathématiques en MPSI*, 2014.

[20] FOCKE. J, *Asymptotische Entwicklungen mittels der Methode der stationären Phase* (German), Ber. Verh. S¨achs. Akad. Wiss. Leipzig. Math. -Nat. Kl. **101** , no. 3, (1954) 48.

[21] FULKS. W. B. AND SATHER. J. O, *Laplace method for multiple integrals.* Pacific J. Math. **11**, (1962) 185-192.

[22] HUNTER. J. T, *Asymptotic Analysis and Singular Perturbation theory*, University of California at Davis, 2004.

[23] JONES. D. S. AND KLINE. M, *Asymptotic expansions of multiple integrals and the method of stationary phase.* J. Math. Phys. **37**, (1958) 1-28.

[24] KAMINSKI. D. AND PARIS R. B, *Asymptotics of a class of multidimensional Laplace-type integrals. I. Double integrals*, R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **356**, no. 1737, (1998) 583-623.

[25] KAMOUCHE. N. AND BENAISSA. A, *Asymptotic expansion of double Laplace-type integrals : the case of non-stationary minimum points.* Proceeding of the American Mathematical Society. **144**, (2016) 3741-3756.

[26] KONTROVITCH. M. I, KARATYGIN. V. A. AND ROSOV. V. A, *Asymptotic evaluation of a surface integral for the case of stationary line.* Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz. **10**, (1970) 811-817.

[27] LIAKHOVETSKI. C. V. AND PARIS. R. B, *Asymptotic expansions of Laplace-type integrals.* III, J. of Comp. and Appl. Math **132**, (2001) 409-429.

[28] MALGRANGE. B, *Ideals of Differentiable Functions.* Oxford Univ. Press. Bombay, 1966.

[29] MATSUMOTO. Y, *An Introduction to Morse Theory,* Translations of Mathematical Monographs, **208**, AMS, 1997.

[30] MCCLURE. J. P. AND WONG. R, *Asymptotic expansion of a double integral with a curve of stationary points.* IMA J. app. math. **38**, (1987) 49-59.

[31] MERCIER. D. J, *L'épreuve d'exposé au CAPES Mathématiques*, Vol **2**, 2006.

[32] DE MOIVRE. A, *Miscellanea Analytica de seriebus et quadraturis*, Londres, 1730.

[33] NEMES. G, *Asymptotic Expansions for integrals,* (M. Sc. Thesis), Loránd Eötvös University, May 23, 2012.

[34] OLVER. F. W. J, *Asymptotics and special functions*, Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974.

[35] RUDIN. W, *Fonctional Analysis*, McGraw Hill, New York, 1973.

[36] RUDIN. W, *Analyse réelle et complexe*, Masson, Paris, New York, 1987.

[37] SCHUSS. Z, *Stochastic differential equations.* Wiley and Sons, New York, 1980.

[38] SCHUSS. Z, *Theory and applications of stochastic processes*, An analytical approach, Applied Mathematical Sciences, vol. **170**, Springer, New York, 2010.

[39] SERVADIO. S, " Truly Three- Body " scattering and unitarity-I, Nuovo Climento B 100 (5) (1987) 565-585.

[40] SERVADIO. S, " Truly Three- Body " scattering and unitarity-II, Nuovo Climento B 100 (5) (1987) 587-617.

[41] STOKER. J. J, *Differential geometry* Wiley and Sons, New York, 1966.

[42] STIRLING. J, *Methodus Differentialis sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum*, Londres, 1730.

[43] URSELL. F, *Integrals with a large parameter. Several nearly coincident saddle points*. Proc. Cambridge Philos. Soc. **72**, (1972) 49-65.

[44] VAN ROESSEL. H. J. J. AND JOHN. C. B, *Asymptotic Methods*, University of Edmonton, Canada, 2008.

[45] WASOW. W, *Asymptotic expansion for ordinary differential equations*, Robert E. Krieger Publising Company, Huntington, New York, 1976.

[46] WONG. R, *Asymptotic approximations of integrals*, Computer Science and Scientific Computing, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1989.

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude du développement asymptotique des intégrales de type de Laplace dans le cas bidimensionnel. Le choix du sujet est motivé surtout par son intervention dans la résolution de beaucoup de problèmes physique et mathématiques.

Dans les deux premiers chapitres, nous exposons des préliminaires et quelques notions de base, où on explique le concept du développement asymptotique au sens de Poincaré et la généralisation naturelle de ce concept par d'autres mathématiciens.

Le troisième chapitre est consacré à deux outils fondamentaux, le lemme de Watson qui concerne des intégrales de Laplace et la méthode de Laplace qui s'applique à une classe plus générale d'intégrales, à savoir les intégrales de type de Laplace.

On estime que les plus importants résultats originaux de cette thèse se situent au niveau du quatrième chapitre. Dans ce chapitre on propose une nouvelle méthode pour construire des développements asymptotiques des intégrales doubles de type de Laplace dans le cas de points minimaux frontaliers, non stationnaires pour la phase. Cette nouvelle méthode résout complètement le problème dans le cas analytique. L'importance de notre méthode est contrastée par le fait que, à notre connaissance, tous les travaux antérieurs ne résolvent le problème que dans le cas très particulier correspondant à la situation où la restriction de la phase à la frontière n'est pas dégénérée.

On termine notre thèse par un exemple d'application à un problème de sortie d'un système dynamique perturbé par un bruit aléatoire.

On note que les principaux résultats de cette thèse ont été publiés dans un article de « Proceedings of the american mathematical society ».

Abstract

In this thesis, we are interested in the study of the asymptotic expansion of Laplace-type integrals.

In the first two chapter, we present some preliminaries. In particular, we talk about the concept of the asymptotic expansion in the sense of Poincaré and the extension of this concept by other mathematicians.

The third chapter is devoted to Watson's lemma which is applied to Laplace's integrals and the Laplace's method which is used to study the asymptotic expansion of Laplace-type integrals.

Our main contributions in this thesis are contained in the fourth chapter. After talking about the main methodes used to approximate two-dimensionnal Laplace-type integrals, we propose a new method to solve the problem in the case of non-stationary minimum points of the phase, located on the boundary of the domain of integration. Unlike the previous works, This method solves the problem in more general cases and with less conditions.

We finish this thesis by an example of application, where is investigated the asymptotic behaviour of the exit time for a random dynamical system.

Note that the main results of the thesis were published in an article in « Proceedings of the american mathematical society ».

ملخّص

في هذه الأطروحة، نهتم بدراسة النشر المقارب لتكاملات لابلاس ثنائية الأبعاد .

الدافع وراء اختيار هذا الموضوع هو تدخله في حل العديد من المشاكل الفيزيائية والرياضية.

في الفصلين الأولين، نقدّم بعض الأساسيات والمفاهيم الأولية، حيث نشرح مفهوم النشر المقارب بمعنى بوانكاريه والتعميم الطبيعي للمفهوم من قبل الرياضيين.

وخصص الفصل الثالث لاثنين من الأدوات الأساسية، توطئة واتسون التي تتعلق بتكاملات لابلاس، وطريقة لابلاس التي تطبّق على فئة أعم من التكاملات، وهي التكاملات من نوع لابلاس.

ونشير إلى أن أهمّ النتائج الأصلية لهذه الأطروحة تقع في الفصل الرابع .في هذا الفصل نقترح طريقة جديدة لبناء النشر المقارب للتكاملات الثنائية من نوع لابلاس في حالة النقاط الحدّية غير المستقرّة .هذه الطريقة الجديدة تحلّ المشكلة تماما في الحالة التحليلية .إن أهمية الطريقة المقترحة هنا تكمن في أن جميع الأعمال السابقة، على حد علمنا، تناولت هذه المسألة في حالة خاصة من دراستنا، أين تكون المشتقة المماسية الثانيّة غير معدومة .

في الأخير نُنهي هذه الأطروحة بتقديم مثال تطبيقي يتناول مشكلة وقت الخروج لنظام ديناميكي متذبذب بواسطة ضجيج عشوائي.

النتائج الأساسية لهذه الأطروحة نُشرت في مقال علمي في المجلّة الأمريكيّة

« Proceedings of the american mathematical society ».