

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITE DE BATNA
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE
LABORATOIRE DE SYSTEMES DE PROPULSION-INDUCTION
ELECTROMAGNETIQUE LSP-IE BATNA**

MEMOIRE DE MAGISTER EN ELECTROTECHNIQUE

Présenté par

KISSA NADJET

Ingénieur d'état en Electrotechnique, Université de Batna

THEME

**MODELISATION DE L'HYSTERESIS MAGNETIQUE EN VUE DE
SON INTEGRATION DANS UN CODE DE CALCUL DE CHAMP
ELECTROMAGNETIQUE**

MEMOIRE SOUTENU LE : 25/05/2006

Devant le jury composé de:

Président:	B.AZOUI	Maître de Conférences	Université de Batna
Rapporteurs:	F.Z.LOUAI	Maître de Conférences	Université de Batna
	N.NAIT-SAID	Maître de Conférences	Université de Batna
Examineurs:	A.DIB	Maître de Conférences	Université d'Oum Bouaghi
	L.MOKHNECHE	Maître de Conférences	Université de Batna

REMERCIEMENTS

Je remercie en premier lieu Dieu le tout puissant pour m'avoir donné la force, le courage et la volonté d'accomplir ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à madame Louai Fatima Zohra, maître de conférences à l'université de Batna, pour m'avoir proposé le sujet, encouragée, aidée et guidée tout au long de ce travail.

Qu'elle soit assurée de ma profonde gratitude.

Je souhaite également remercier monsieur Nait Said Nacereddine, maître de conférences à l'université de Batna, pour m'avoir aidé et assisté lors de la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier mademoiselle Kadid Fatima Zohra, maître de conférences à l'université de Batna, pour m'avoir aidée dans ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à monsieur, B.Azoui, maître de conférences à l'université de Batna, pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury.

Mes remerciements vont également à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de participer au jury, en l'occurrence :

Mademoiselle Leila Mokhneche, maître de conférences à l'université de Batna,

Monsieur A.Dib, maître de conférences à l'université d'Oum El Bouaghi,

Que tous les enseignants du département d'Electrotechnique soient remerciés pour leur soutien et encouragements incessants.

J'exprime ma profonde reconnaissance à mes très chers parents, ainsi qu'à toute ma famille.

A mes amies et qu'elles trouvent ici l'expression de ma plus sincère amitié.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	1
 CHAPITRE I/ LE MAGNETISME: ORIGINES ET CARACTERISTIQUES	
I-1 INTRODUCTION.....	4
I-2 LE MAGNETISME.....	4
I-2-1 Historique.....	4
I-2-2 Les grandeurs magnétiques.....	5
I-2-2-1 L'induction magnétique.....	5
I-2-2-2 L'intensité du champ magnétique.....	6
I-2-2-3 Le flux magnétique.....	6
I-2-2-4 L'aimantation	7
I-2-2-5 La susceptibilité magnétique.....	8
I-2-2-6 La perméabilité magnétique.....	8
I-3 LES MATERIAUX MAGNETIQUES.....	9
I-3-1 Les matériaux magnétiques doux.....	9
I-3-2 Les matériaux magnétiques durs.....	10
I-4 LE COMPORTEMENT MAGNETIQUE CE LA MATIERE	11
I-4-1 Le moment magnétique.....	11
I-4-2 Diamagnétisme.....	11
I-4-3 Paramagnétisme.....	12
I-4-4 Ferromagnétisme.....	13
I-4-5 Antiferromagnétisme.....	13
I-4-6 Ferrimagnétisme.....	14
I-5 ORGANISATION DE LA MATIERE.....	14
I-5-1 L'énergie d'échange.....	14
I-5-2 L'énergie magnétocristalline.....	15

I-5-3	l'énergie magnétoélastique.....	15
I-5-4	Les domaines élémentaires de Weiss.....	15
I-5-5	Les parois de Bloch.....	16
I-5-6	Mécanismes de l'aimantation technique.....	16
I-5-7	Courbe de première aimantation d'un matériau ferromagnétique M(H) ou B(H).....	17
I-5-7-a	Région des champs faibles.....	17
I-5-7-b	Région des champs forts.....	17
I-5-7-c	Région des champs intermédiaires.....	18
I-6	L'HYSTERESIS MAGNETIQUE.....	19
I-6-1	Définition et origine.....	19
I-6-2	Les mécanismes d'aimantation et hystérésis magnétique.....	19
I-6-3	Phénomènes dynamiques.....	21
I-6-3-1	Les pertes dans la matière.....	21
I-6-3-2	Les pertes en régime statique.....	21
I-6-3-3	Les pertes par courant de Foucault.....	22
I-6-4	L'aimantation anhystérétique	23
CONCLUSION	23

CHAPITRE II/ LES MODELES D'HYSTERESIS

II-1	INTRODUCTION.....	25
II-2	LES MODELES ANALYTIQUES.....	26
II-2-1	Le modèle de Rayleigh.....	26
II-2-2	Le modèle polynomial.....	28
II-2-3	Le modèle fractionnel.....	29
II-2-4	Le modèle d'hystérésis de Frolich.....	30
II-2-5	Les modèles à fonctions multiples.....	31
II-2-6	Le modèle avec série de Fourier.....	32
II-2-7	Le modèle à fonctions auxiliaires.....	33
II-2-8	Le modèle de Potter.....	35
II-2-9	Les modèles dynamiques.....	36
II-2-9-1	Le modèle de Duhem.....	36
II-2-9-2	Le modèle de Hodgdon.....	37
II-3	LES MODELES DE TYPE LANGEVIN.....	40

II-3-1 Le modèle de Jiles-Atherton.....	40
II-3-1-1 Loi de comportement anhystérique.....	40
II-3-1-1-a Composante irréversible de l'aimantation.....	41
II-3-1-1-b Composante réversible de l'aimantation	42
II-3-1-1-c L'aimantation totale.....	43
II-4 MODELE DE PREISACH.....	43
CONCLUSION.....	44

CHAPITRE III/ MODELE DE PREISACH

III-1 INTRODUCTION.....	46
III-2 DESCRIPTION DU MODELE DE PREISACH.....	46
III-3 INTERPRETATION GEOMETRIQUE.....	47
III-4 REPRESENTATION EQUIVALENTE.....	48
III-5 PRINCIPE DU MODELE.....	49
III-6 LES PROPRIETE DU MODELE DE PREISACH.....	52
III-6-1 L'effacement de l'histoire.....	52
III-6-2 La congruence des cycles mineurs.....	52
III-7 DETERMINATION DE LA DENSITE DE PREISACH.....	53
III-7-1 Les méthodes numériques.....	54
III-7-2 Les méthodes analytiques.....	54
III-7-2-1 La distribution de type Gauss.....	54
III-7-2-2 La distribution de type Lorentz.....	55
III-7-2-3 La distribution de type Lorentz modifiée.....	55
III-7-2-3-a Influence du paramètre a (b constant).....	56
III-7-2-3-b Influence du paramètre b (a constant).....	58
III-8 FORMULATION MATHEMATIQUE DU PHENOMENE D'HYSTERESIS.....	60
III-8-1 Formulation de la courbe de première aimantation	61
III-8-2 Formulation de la branche descendante du cycle majeur	62
III-8-3 Formulation de la branche ascendante du cycle majeur.....	64
CONCLUSION.....	65

CHAPITRE IV/ INTEGRATION DU MODELE DE PREISACH DANS UN CODE DE CALCUL PAR ELEMENTS FINIS

IV-1 INTRODUCTION.....	67
IV-2 EQUATIONS DE MAXWELL.....	67
IV-3 METHODE DE RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES.....	70
IV-4 FORMULATION DU PROBLEME ELECTROMAGNETIQUE.....	70
IV-4-1 Formulation de l'équation magnétostatique.....	70
IV-4-2 Formulation éléments finis du problème magnétostatique 2D.....	72
IV-4-3 Discrétisation de la forme intégrale.....	73
IV-5 PRINCIPE DU CODE DE CALCUL ELEMENTS FINIS POUR LE TRAITEMENT DU PROBLEME MAGNETOSTATIQUE NON-LINEAIRE.....	76
IV-5-1 Organigramme de traitement du problème magnétostatique non linéaire.....	76
IV-5-2 Algorithme de résolution de l'équation magnétostatique non linéaire.....	78
IV-6 APPLICATION DU MODELE DE PREISACH EN CALCUL DE CHAMP.....	78
IV-6-1 Dispositif étudié.....	78
IV-7 EXPLOITATION DES RESULTATS.....	81
IV-7-1 Résolution de l'équation magnétostatique pour $J_{\max}=10^{+5} \text{ A/m}^2$	81
IV-7-1-1 Evolution du cycle d'hystérésis B(H).....	81
IV-7-1-2 Evolution de la forme d'onde H(t).....	83
IV-7-1-3 Evolution de la forme d'onde B(t).....	84
IV-7-1-4 Variation radiale et axiale du potentiel vecteur magnétique A.....	85
IV-7-1-5 Les lignes équipotentielles A.....	86
IV-7-2 Résolution de l'équation magnétostatique pour $J_{\max}=5.10^{+3} \text{ A/m}^2$	86
IV-8 Illustration de la convergence.....	90
IV-8-1 Influence de la sur-relaxation.....	90
IV-8-2 Influence de la sous-relaxation.....	92
CONCLUSION.....	94
CONCLUSION GENERALE.....	96
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE.....	99

INTRODUCTION GENERALE

En électrotechnique, la détermination du champ magnétique dans les structures est essentielle afin d'optimiser la conception de matériels tant du point de vue économique que technique. En effet, le fonctionnement des dispositifs électrotechniques classiques tels que moteurs, alternateurs ou transformateurs est très lié à la distribution du champ magnétique au sein de leurs structures. La connaissance d'une telle distribution permet de calculer les grandeurs nécessaires au dimensionnement comme par exemple le flux, les pertes,...etc[1].

On commence à disposer aujourd'hui en génie électrique, d'outils performants pour la modélisation des systèmes électromagnétiques. En effet, grâce à des méthodes numériques telle que la méthode des éléments finis, il est possible d'étudier des systèmes à géométries complexes avant même de les fabriquer[2]. La modélisation est devenue donc, un acteur important dans la conception des produits, l'expérimentation n'intervenant qu'au stade de finalisation et de validation des résultats de simulation. Néanmoins, une modélisation plus fine requiert des modèles plus complexes et fiables pour retranscrire un comportement réaliste du système à étudier.

Les matériaux utilisés pour la fabrication des circuits magnétiques sont le lieu de la conversion de l'énergie électromagnétique. Ces matériaux sont en général ferromagnétiques dont la loi de comportement magnétique est fortement non linéaire et de type hystérétique. L'hystérésis est un phénomène complexe, encore assez mal connu à l'heure actuelle, donc difficile à modéliser. On sait toutefois, que ses implications sont multiples, elles sont tantôt recherchées, tantôt indésirables.

Les pertes par hystérésis qui s'ajoutent dans le cas des tôles ferromagnétiques aux pertes classiques ayant pour origine les courants induits, constituent le principal effet négatif.

Par contre, dans certaines applications, comme la fabrication d'aimants permanents, l'enregistrement magnétique et les moteurs à hystérésis, les effets de l'hystérésis sont plutôt recherchés et constituent le mécanisme de base du fonctionnement de ces dispositifs.

L'objectif de ce travail peut à présent être défini. Il s'agit donc, d'étudier en vue d'une modélisation, l'hystérésis magnétique, en particulier l'hystérésis scalaire afin de l'intégrer dans un code de calcul de champ. Cette étude permettra de choisir le modèle le mieux adapté du point de vue précision, rapidité de traitement et facilité d'implémentation. Les hypothèses de travail sont restreintes au cas du régime statique et l'équation que l'on résout en deux dimensions, est celle de la magnétostatique non linéaire.

Nous présentons dans le premier chapitre, un rappel concernant le magnétisme suivi d'une description plus ou moins détaillée du ferromagnétisme et du processus d'aimantation hystérétique associé.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude bibliographique des principaux modèles scalaires qui permettent de représenter l'hystérésis.

Le troisième chapitre ne traite que du modèle choisi qu'est le modèle de Preisach. Une description du modèle ainsi que son identification à travers les méthodes de détermination de la densité de Preisach, seront exposées.

Le quatrième chapitre, quant à lui s'intéresse à l'intégration du modèle de Preisach dans un code de calcul du champ par la méthode des éléments finis. Un dispositif de chauffage par induction fait l'objet de l'application de ce modèle.

LE MAGNETISME: ORIGINES ET CARACTERISTIQUES

I-1 INTRODUCTION

Le magnétisme est l'un des phénomènes qui a le plus frappé l'imagination de l'homme, au point que ce mot désigne aujourd'hui des réalités très diverses : il s'agit d'abord d'une science fort ancienne et néanmoins toujours d'actualité dont le champ d'application ne cesse de s'étendre, ensuite par extension, on parlera du magnétisme d'une personne attrayante et capable de dynamiser son entourage, enfin ce mot recouvre diverses pratiques parapsychologiques qui ne sont pas soumises à l'expérimentation scientifique et dont les acteurs sont appelés magnétiseurs[3].

I-2 LE MAGNETISME

I-2-1 Historique

Thalès de Milet savait déjà, il y a plus de 2500 ans, que la magnétite ou pierre d'aimant, attire le fer et Pline l'Ancien savait aussi qu'elle peut par influence communiquer cette propriété attractive à un morceau de fer. On dit alors que celui-ci est aimanté.

L'application des aimants à la navigation, sous la forme de boussole ou de compas, est sensiblement plus tardive : elle date des 11^{ème} et 12^{ème} siècles de notre ère. Peter Peregrinus (Pierre le pèlerin de Maricourt) et William Gilbert (1544-1603) traitent et développent ainsi les premières théories du magnétisme. Il faut attendre Charles Augustin Coulomb(1736-1806) et sa célèbre série de sept mémoires (1785-1791) pour connaître les lois d'action des charges magnétiques en fonction de la distance, et Denis Poisson (1781-1840) pour amorcer la théorie des champs magnétiques.

Au cours du 19^{ème} siècle, les connaissances sur les propriétés magnétiques de la matière se précisent progressivement, notamment avec la théorie de l'électromagnétisme établie par James Clerk Maxwell (1831-1879), mais c'est Pierre Curie qui, pour la première fois (1895), distingue clairement paramagnétisme et diamagnétisme et mit en évidence le passage du ferromagnétisme au paramagnétisme par élévation de température. Paul Langevin édifie ensuite en 1905 la théorie atomique du diamagnétisme et paramagnétisme, suivi par Pierre Weiss qui élabore en 1906 la théorie du ferromagnétisme. Parallèlement, avec l'essor de l'électrotechnique, les applications du magnétisme commencent à se développer et le champ des recherches s'est encore considérablement élargi [3].

I-2-2 Les grandeurs magnétiques

I-2-2-1 L'induction magnétique

Selon la loi de Biot et Savart, si un fil est parcouru par un courant continu I , le champ magnétique (parfois appelée induction magnétique ou densité du flux magnétique), en un point M associé à un élément de longueur dl parcouru par le courant I (figure I.1) est donné par [4],[5] :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} \right] \quad (\text{I.1})$$

où r la distance de l'élément dl au point M .

μ_0 la perméabilité du vide ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Henry/m (H/m)).

B l'induction magnétique exprimée en Tesla (T).

\vec{u} le vecteur unité de la droite orientée de l'élément dl au point M .

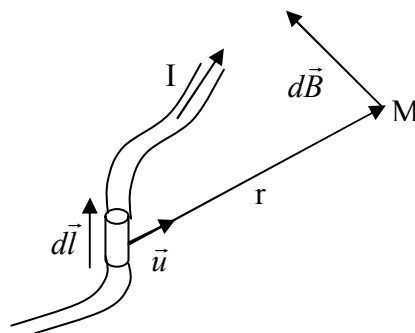


Figure I.1: L'induction magnétique $d\vec{B}$ créé par un élément de courant $I d\vec{l}$.

Pour déterminer le champ d'induction total \vec{B} en un point aux environs d'un conducteur de dimensions finies, nous devons faire la somme sur tous les éléments parcourus par le courant qui circulent dans le conducteur, d'où \vec{B} s'obtient en intégrant la relation (I.1).

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad (\text{I.2})$$

I-2-2-2 L'intensité du champ magnétique

C'est une grandeur vectorielle qui partage avec l'induction magnétique \vec{B} le rôle de caractériser en tout point de l'espace un champ magnétique.

Tandis que, l'induction est solénoïdale ($\text{div}\vec{B}=0$), l'intensité du champ magnétique \vec{H} est irrotationnelle ($\text{rot}\vec{H}=0$) en dehors des volumes dans lesquels la densité du courant n'est pas nulle[uni]. A l'intérieur des courants, en revanche son rotationnel est égal au vecteur densité du courant [6].

Le champ magnétique \vec{H} est lié à l'induction \vec{B} par la relation :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{I.3})$$

où μ est la perméabilité magnétique absolue. C'est un coefficient qui dépend du milieu.

H est le champ magnétique exprimé en Ampère par mètre (A/m).

I-2-2-3 Le flux magnétique

Soit un élément de surface $d\vec{S}$, faisant partie d'une surface de forme quelconque (figure I.2). S'il existe un champ d'induction magnétique \vec{B} dans la région où se trouve cette surface, alors le flux magnétique traversant cet élément est [4] :

$$\begin{aligned} d\phi_m &= \vec{B} \cdot \vec{n} dS \\ &= B \cdot dS \cdot \cos\theta \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

où \vec{n} est un vecteur normal à dS .

θ l'angle entre le vecteur induction magnétique B et le vecteur normal.

Le flux magnétique total est :

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (I.5)$$

Le flux ϕ_m s'exprime en Weber (Wb).

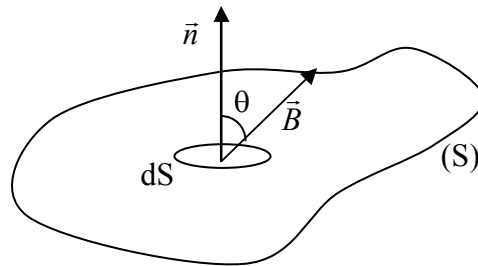


Figure I.2 : Le flux magnétique traversant un élément de surface

I-2-2-4 L'aimantation

Sachant que le magnétisme est une propriété volumique, nous admettrons dorénavant que tous les phénomènes expérimentaux sont très bien interprétés à l'échelle macroscopique par l'hypothèse que tout élément de volume d'un matériau aimanté possède un moment dipolaire magnétique. Le phénomène d'aimantation est alors entièrement caractérisé par la densité volumique du moment dipolaire, champ vectoriel que nous désignerons par M [4],[7].

Par définition, un petit élément de volume Δv , possède le moment dipolaire magnétique ΔM tel que l'on a :

$$\Delta M = M \cdot \Delta v \quad (I.6)$$

M est appelée aimantation ou intensité d'aimantation, sa connaissance en tout point permet de définir complètement l'état magnétique de la matière à l'échelle macroscopique.

Elle s'exprime en Ampère par mètre (A/m).

I-2-2-5 Susceptibilité magnétique

L'aimantation M d'un corps dépend du champ magnétique H au point où il se trouve. Le rapport de ces deux grandeurs est appelé susceptibilité magnétique du corps. Celle ci peut être représentée par :

$$\chi = M/H \quad (I.7)$$

χ : est un nombre abstrait dont la valeur est une caractéristique du matériau [ben].

I-2-2-6 La perméabilité magnétique

Par définition, la perméabilité magnétique μ est égale pour les matériaux isotropes, au quotient B/H . C'est un critère de qualité pour les substances qui s'aimantent facilement.

La perméabilité relative μ_r est plus utilisée :

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (I.8)$$

μ_r part pour $H=0$ d'une valeur μ_{rin} , (perméabilité initiale), croit très vite avec H , passe par un maximum μ_{rmax} et décroît ensuite lentement pour tendre vers l'unité aux grandes valeurs de H (saturation), (Figure I.3). En général μ_{rin} est d'autant plus élevée que le corps ferromagnétique est chimiquement pur [7].

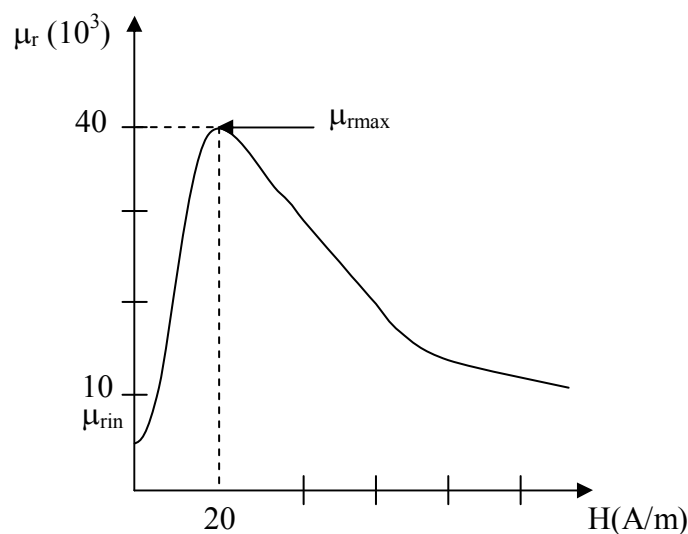


Figure I.3 : variation de la perméabilité magnétique μ_r en fonction du champ magnétique H dans le cas de l'alliage Fe-3%Si

I-3 LES MATERIAUX MAGNETIQUES

Depuis un siècle, les utilisations de l'énergie électrique ont connu un développement spectaculaire qui se poursuit encore aujourd'hui à un rythme soutenu. Or, pour produire l'énergie électrique, et très souvent pour l'utiliser, on ne peut pas se passer des matériaux magnétiques. Ils sont donc au cœur de nombreux dispositifs industriels qui relèvent du génie électrique[8]. Des gros alternateurs des centrales électriques aux périphériques des ordinateurs ou aux dizaines de capteurs et petits servomoteurs dont sont doués les véhicules modernes, les matériaux magnétiques sont omniprésents dans tous les moments sous tous les aspects de notre vie quotidienne [9].

Traditionnellement, les matériaux magnétiques sont répartis en matériaux doux et matériaux durs, auxquels on a ajouté récemment les matériaux semi-durs, classe réservée de façon restrictive aux seuls milieux d'enregistrement.

La classe de chaque type de matériau repose essentiellement sur les valeurs du champ coercitif H_c et de l'aimantation rémanente M_r qui lui sont associées.

I-3-1 Les matériaux magnétiques doux

Selon les critères de l'ingénieur électrotechnicien, un bon matériau métallique doux, soumis à l'action des champs magnétiques relativement faibles, doit présenter une aimantation élevée, proche de l'aimantation à saturation. Cette facilité d'aimantation signifie une perméabilité magnétique très élevée.

Le cycle d'hystérésis associé à ce type de matériaux est très étroit, donc un champ coercitif très réduit.

Aucun matériau ne présente à la fois l'ensembles des propriétés idéales énumérées. Mais, selon le type d'excitation magnétique auquel on soumet le matériau, toutes ces propriétés n'ont pas la même importance. Pour juger de la priorité qu'il faut accorder à l'un ou l'autre de ces critères, c'est la fréquence du champ qui joue le rôle le plus significatif [9].

Ces matériaux sont généralement très utilisés, dans les applications où il est nécessaire de guider le flux magnétique (transformateurs et moteurs). On en cite :

- Les aciers électriques.
- Les alliages FeNi et FeCo.
- Les ferrites.
- Les matériaux amorphes.

I-3-2 Les matériaux magnétiques durs

Par opposition aux matériaux magnétiques doux qu'on aimante et désaimante facilement, les matériaux durs ne peuvent être désaimantés qu'avec difficulté, d'où l'intérêt pour la réalisation des aimants permanents.

Les performances d'un aimant sont très étroitement liées à la forme de son cycle d'hystérésis, en particulier à sa courbe de désaimantation (quart supérieur gauche du cycle correspondant à $B > 0$ et $H < 0$) (figure I.4) [10].

Cette courbe donne :

- L'induction rémanente B_r .
- Le champ coercitif H_c , qui est le champ démagnétisant annulant l'induction. Plus sa valeur est élevée et plus l'aimant est stable.
- Le produit d'énergie volumique $(B.H)_{\max}$ qui définit la valeur énergétique de l'aimant par unité de volume.
- Les valeurs H_m et B_m du point de fonctionnement optimal M correspondant à $(BH)_{\max}$.

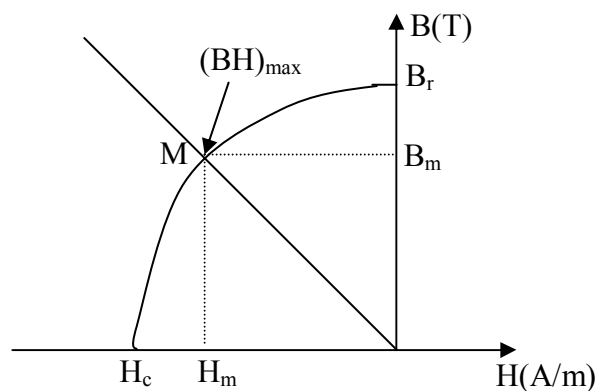


Figure I.4: Courbe de désaimantation d'un matériau pour aimant

Parmi les matériaux magnétiques durs on a :

- Matériaux céramiques : ferrites durs.
- Alliages à base d'éléments des terres rares.
- Alliages à base de Fer- Nickel- Aluminium (Alnico)

I-4 LE COMPORTEMENT MAGNETIQUE DE LA MATIERE

I-4-1 Le moment magnétique

Lorsque la matière est soumise à un champ magnétique, elle s'aimante, c'est à dire que chacun de ses éléments de volumes dv contient l'équivalent d'une petite boucle de courant, dont on définit le moment magnétique $d\vec{m}$ au moyen de :

$$d\vec{m}=I.d\vec{S} \quad (I.9)$$

avec I : l'intensité du courant circulant dans la boucle.

dS : l'aire de la surface limitée par la boucle.

m s'exprime en ($A.m^2$)

Un matériau magnétique apparaît donc, comme un ensemble de moments magnétiques élémentaires (les atomes) interagissant entre eux en un réseau cristallin.

Selon le comportement de cet ensemble, on distingue différents types de magnétisme :

I-4-2 Diamagnétisme

Dans les substances diamagnétiques, les moments magnétiques de tous les électrons d'un atome s'annulent et les atomes ne possèdent pas de moment magnétique résiduel.

Cependant, un champ magnétique appliqué à une substance diamagnétique, produit des moments magnétiques induits dans la substance qui s'alignent dans le sens opposé au champ appliqué. Par conséquent, l'aimantation produite est de sens opposée au champ extérieur (fig I.5), de sorte que la substance diamagnétique a une susceptibilité négative et faible de l'ordre de 10^{-6} . Nous pouvons ainsi assimiler la loi de comportement de ce type de matériau à celle du vide $B=\mu_0H$ [3],[4].

On retrouve parmi les substances diamagnétiques des gaz, des solides, des liquides, des métaux (or, l'argent, cuivre...), des sels et des substances organiques [5].

I-4-3 Paramagnétisme

Lorsqu'il existe dans la substance des porteurs de moment magnétique permanent, d'autres effets magnétiques se superposent au diamagnétisme, le cas le plus simple et celui où l'on peut considérer les différents moments élémentaires comme n'interagissant pas entre eux, mais seulement avec le champ magnétique appliqué, il s'agit alors du paramagnétisme : Les moments magnétiques élémentaires orientés au hasard en raison de l'agitation thermique, tendent à s'aligner le long du champ, créant ainsi une aimantation qui vient renforcer l'action du champ appliqué avec une susceptibilité positive[3],[4].

On retrouve parmi les substances paramagnétiques : l'acide nitrique, l'ozone et un grand nombre de métaux (platine, potassium, sodium, aluminium...)[5].

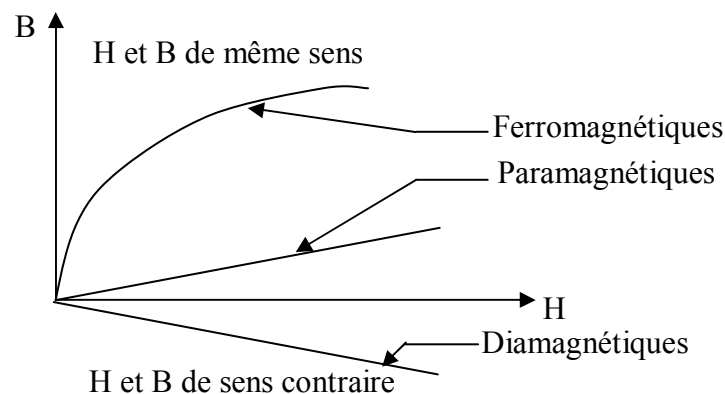


Figure I.5 : Illustration des comportements magnétiques

I-4-4 Ferromagnétisme

L'existence d'une aimantation spontanée, même en l'absence de champ magnétique appliqué, conduisit Pierre Weiss à supposer qu'il existe des interactions entre porteurs élémentaires de moments et qu'elles équivalaient à un champ magnétique fictif, appelé champ moléculaire, proportionnel à l'aimantation $\vec{H}_m = \alpha \vec{M}$ qui vient s'ajouter au champ appliqué : c'est ce qu'on appelle le ferromagnétisme.

Les propriétés des corps ferromagnétiques dépendent beaucoup de la température.

Généralement, l'aimantation à saturation prend à la température $T=0\text{ °K}$ une valeur maximale M_{S0} , correspondant au parallélisme des moments élémentaires, décroît régulièrement à mesure que la température s'élève et s'annule à une certaine température T_c , appelée température de Curie ou simplement point de Curie ferromagnétique (figure I.6) [3].

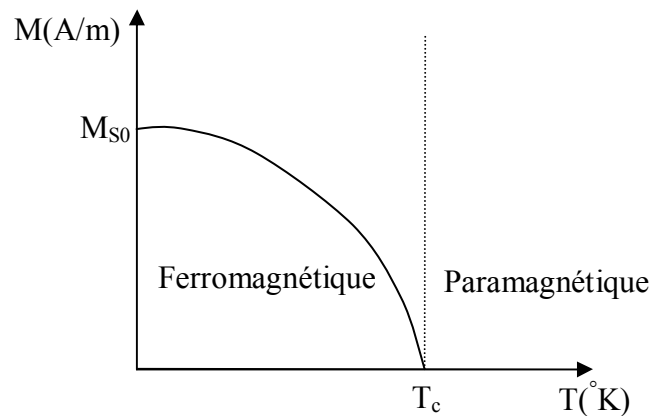


Figure I.6: courbe traduisant l'effet de la température sur l'aimantation à saturation d'un corps ferromagnétique

I-4-5 Antiferromagnétisme

Dans un corps anti-ferromagnétique, l'énergie d'échange est forte mais négative de telle sorte que l'état de plus basse énergie est l'alignement antiparallèle. Il en résulte un regroupement des moments en deux sous réseaux ayant des moments opposés (fig I.7). Ceci veut dire que le matériau ne montre aucune aimantation spontanée et son moment magnétique reste très faible ou nul.

1-4-6 Ferrimagnétisme

Un tel corps peut être vu comme un anti-ferromagnétique dont les sous réseaux portent des moments inégaux. Il en résulte un moment magnétique non nul, ces matériaux montrent un champ de saturation relativement faible et une susceptibilité élevée.

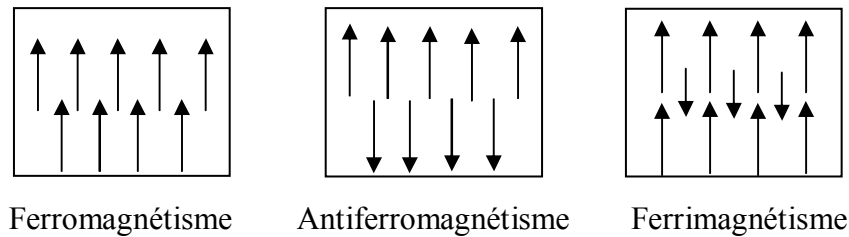


Fig I.7 : Schématisation des moments magnétiques dans différents corps magnétiques.

I-5 ORGANISATION DE LA MATIERE

I-5-1 L'énergie d'échange

Dans la plupart des substances magnétiques, il existe des interactions entre porteurs élémentaires (atomes ou ions).

L'interprétation quantique de ces interactions par Werner Heisenberg en 1928, a montré qu'elles agissaient à courte distance et possédaient un caractère local. En règle générale, ces interactions favorisent soit le parallélisme soit l'antiparallélisme des moments magnétiques et cela même sans l'application d'un champ magnétique extérieur.

L'énergie de cette interaction ou énergie d'échange entre les porteurs i et j s'écrit :

$$E_{ij} = -J_{ij} \vec{m}_i \cdot \vec{m}_j \quad (\text{I.10})$$

où J_{ij} désigne l'intégrale d'échange entre les atomes i, j .

I-5-2 L'énergie magnétocristalline

Il est plus facile d'aimanter un cristal dont la symétrie est cubique selon un axe quaternaire (arête du cube) que suivant un axe ternaire (diagonale du cube), (figure I.8).

Ainsi, il existe des directions d'orientations privilégiées des moments magnétiques élémentaires. L'énergie magnétocristalline représente l'énergie à fournir pour faire tourner l'ensemble de ces moments dans une direction donnée [11].

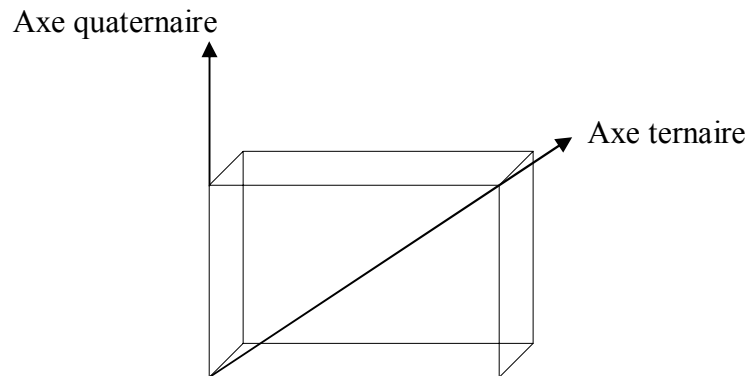


Figure I.8 : Directions de l'aimantation d'une structure cristalline de forme cubique

I-5-3 L'énergie magnétoélastique

L'expérience montre qu'un cristal soumis à des contraintes mécaniques voit se développer une nouvelle énergie d'anisotropie, induite par la contrainte, et qui peut entrer en compétition avec l'énergie magnétocristalline : il s'agit de l'énergie magnétoélastique dont la valeur dépend de l'orientation de l'aimantation, des composantes de la contrainte et des coefficients caractéristiques du matériau.

I-5-4 Les domaines élémentaires de Weiss

La minimisation naturelle de la somme de ces différentes énergies à l'intérieur de la matière a pour conséquence l'apparition des domaines magnétiques élémentaires appelés <<domaines de Weiss>> (du nom de Pierre Weiss, physicien français) qui s'intéressa au magnétisme, et montra que tous les matériaux magnétiques, tendent à se subdiviser en volumes élémentaires qu'on appelle domaines élémentaires dans lesquels les aimantations spontanées de tous les atomes sont orientées dans la même direction. Celle-ci varie d'un domaine à l'autre de sorte qu'en champ nul, l'aimantation moyenne de la substance est nulle. La taille des domaines varie selon les matériaux. L'ordre de grandeur est de quelques dizaines de nanomètres à quelques centaines de microns (voir quelques millimètres). La variation d'aimantation avec le champ correspond alors à une réorientation de l'aimantation de ces divers domaines dans le sens du champ [11],[12].

I-5-5 Les parois de Bloch

La structure en domaines précédemment décrite, engendre l'apparition de zones de transitions entre les domaines voisins où les moments magnétiques basculent d'une orientation vers une autre (figure I.9). La transition entre l'orientation d'un domaine et celle d'un domaine voisin n'est pas brutale mais se fait de manière progressive[8].

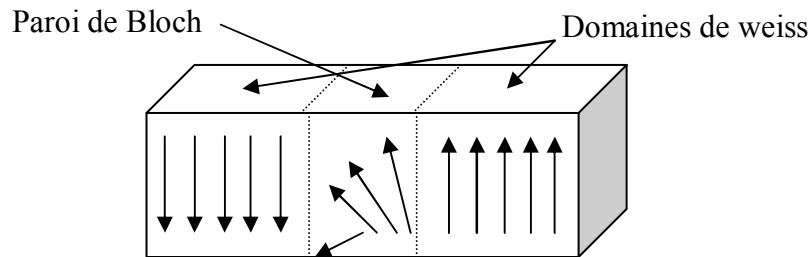


Figure I.9 : transition graduelle entre deux domaines à 180°

I-5-6 Mécanismes de l'aimantation technique

Le processus d'aimantation d'un échantillon à structure cubique (un monocristal de fer), met en jeu trois mécanismes principaux :

- Le premier mécanisme correspond au déplacement des parois séparant deux domaines élémentaires de manière à augmenter le volume du domaine dont la composante de l'aimantation dans la direction du champ appliqué est la plus grande.

Comme l'énergie à dépenser pour produire ce déplacement est inférieure à celles qui sont mises en jeu dans le deux autres processus, ce mécanisme joue un rôle prépondérant dans la région initiale de la courbe d'aimantation.

- Le deuxième mécanisme correspond à l'intérieur d'un domaine, à une rotation de l'aimantation spontanée qui s'écarte de la direction de facile aimantation pour se rapprocher de la direction du champ appliqué. Il faut pour cela surmonter l'énergie magnétocristalline. Ce mécanisme ne prend donc de l'importance que dans les champs moyens ou forts (la région terminale de la courbe d'aimantation).
- Enfin, un dernier mécanisme correspond à une augmentation de la grandeur de l'aimantation spontanée M_s sous l'action du champ appliqué[3].

I-5-7 Courbe de première aimantation d'un matériau ferromagnétique : $M(H)$ ou $B(H)$

Ces courbes représentent les variations de l'induction B ou de l'aimantation M dans un matériau ferromagnétique en fonction du champ H que l'on fait croître progressivement à partir d'un état désaimanté ($H=0, M=0$) [5].

On distingue souvent sur la courbe de première aimantation trois régions correspondant chacune à des processus d'aimantation distincts (figure I.10).

I-5-7-a Région des champs faibles :

Appelée aussi zone de Rayleigh, c'est une portion sensiblement rectiligne (région A) obtenue pour une variation régulière et lente de l'induction B ou de l'aimantation M en fonction de H .

Dans cette région, les domaines dont la direction de l'aimantation spontanée est voisine de la direction de H appliqué, augmentent de volumes au dépend des autres domaines et une légère aimantation apparaît (figure I.11.b). Pour se faire, les parois vont se déplacer (glisser) jusqu'à rencontrer les défauts du matériau ou se déformer si elles sont déjà en contact avec des défauts. Ce processus est réversible tant que les parois ne rencontrent pas d'obstacles, donc il n'engendre pas de pertes magnétiques [5],[13].

I-5-7-b Région des champs forts :

Le champ H est très intense ce qui implique que l'induction B ou l'aimantation M tendent asymptotiquement vers une limite (aimantation à saturation), (région C).

Dans cette région, la plupart des parois de Bloch ont disparu (l'échantillon est monodomaine). L'aimantation quitte progressivement la direction de facile aimantation la plus favorable pour se rapprocher de la direction du champ appliqué, on obtient ainsi la saturation de l'échantillon ferromagnétique, caractéristique intrinsèque et fondamentale du matériau (figure I.11.d) [8].

I-5-7-c Région des champs intermédiaires :

Dans cette région, le champ H est moyen, ce qui implique que l'induction B ou l'aimantation M croissent rapidement et proportionnellement avec H (région B).

Dans la région des champs intermédiaires appelée aussi région d'utilisation pratique, les parois continuent leur déplacement afin d'augmenter les volumes des domaines dont le

moment est correctement orienté par rapport au champ appliqué. C'est dans cette zone que les pertes électromagnétiques sont les plus importantes [13].

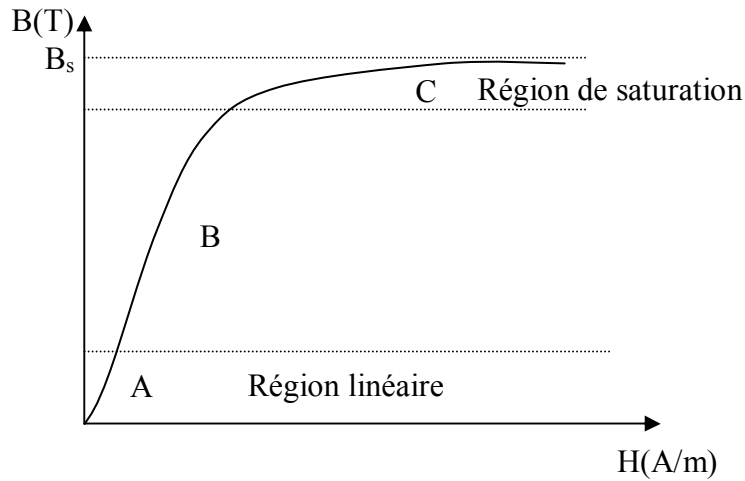


Figure I.10 : Courbe de première aimantation d'un matériau ferromagnétique

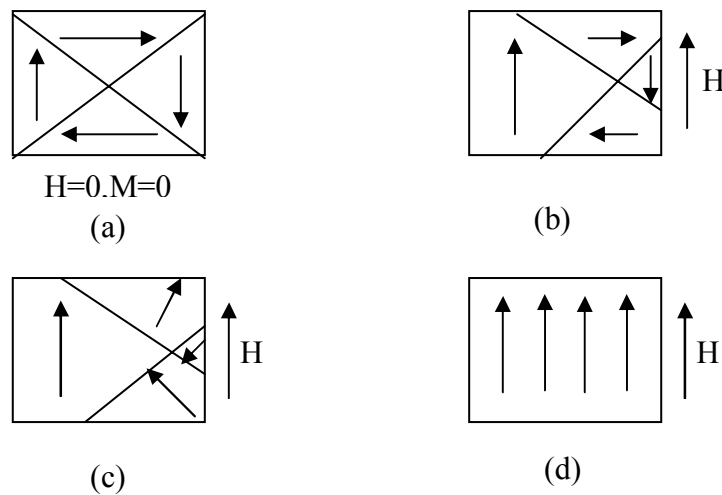


Figure I.11: structure en domaines d'une substance au cours du processus d'aimantation

I-6 L'HYSTÉRÉSIS MAGNÉTIQUE

I-6-1 Définition et origine

L'hystérésis magnétique, est un phénomène qui met en évidence le fait que l'aimantation d'un matériau ferromagnétique dépende autant des transformations qu'il a subies antérieurement que de l'intensité du champ appliqué [4].

C'est aussi une conséquence directe de l'existence des domaines élémentaires et des processus d'aimantation par déplacement et déformation des parois de Bloch dans un matériau toujours imparfait (anisotrope).

Ainsi, un matériau magnétique ayant été aimanté présentera de l'hystérésis si les déplacements de parois ou si les rotations de l'aimantation sont rendus irréversibles [3],[8].

I-6-2 Les mécanismes d'aimantation et hystérésis magnétique

Pour un matériau se trouvant dans l'état désaimanté, chaque domaine de Weiss possède une aimantation spontanée orientée aléatoirement par rapport à ses voisins (selon une direction préférentielle du matériau), ce qui conduit à une aimantation macroscopique nulle.

Sous l'application d'un champ magnétique d'excitation H , on décrit la courbe de première aimantation. En effet, le champ appliqué provoque l'apparition d'une aimantation magnétique suite à une modification de la structure en domaines par des mécanismes de déplacement des parois de Bloch. Les familles de domaines bien orientés augmentent de volume par rapport aux familles de domaines mal orientés jusqu'à l'obtention d'un nouvel équilibre énergétique. Les parois sont toutefois gênées dans leurs déplacements par les imperfections du matériau à l'échelle microscopique. Celles ci sont dues à des impuretés non magnétiques et ferromagnétiques présentes dans les matériaux, ainsi qu'aux contraintes associées à ces impuretés.

En association avec les imperfections du milieu, il existe des positions privilégiées pour les parois de Bloch qui tendent à s'accrocher en des points particuliers du cristal et résistent dans une certaine mesure aux déplacements en se déformant réversiblement.

Lorsque la pression du champ extérieur sur une paroi quelconque atteint une valeur suffisante, l'ancrage cède brutalement conduisant à une variation irréversible d'aimantation.

A partir d'un certain champ d'excitation, la structure du matériau devient pratiquement mono-domaine et les variations d'aimantation sont alors dues aux rotations d'aimantation

spontanée. Ces rotations ne se produisent que pour des champs élevés car il faut fournir une énergie importante pour vaincre l'anisotropie magnétocristalline.

L'aimantation atteint alors une valeur limite appelée aimantation de saturation M_S .

Si l'on fait ensuite décroître le champ extérieur jusqu'à sa valeur opposée, le point représentatif de l'état du matériau suit une courbe $M(H)$ qui s'écarte de la courbe de première aimantation. On observe aussi que le parcours de M n'est pas le même selon que le champ est croissant ou décroissant. La totalité du parcours (sur une période du champ d'excitation) constitue le cycle d'hystérésis (fig I.12).

Tout point (H,M) à l'intérieur du cycle est un état possible du matériau. Le comportement du matériau dépend ainsi non seulement de la valeur courante de H mais aussi de l'histoire du matériau, c'est à dire de tous les états d'aimantation antérieurs [1],[2],[12].

Le cycle majeur est caractérisé par un certain nombre de grandeurs caractéristiques :

- L'aimantation à saturation M_S : propriété intrinsèque du matériau. Dans cet état tous les moments élémentaires sont alignés dans la direction du champ appliqué.
- L'aimantation rémanente M_r : c'est l'aimantation qui subsiste après retrait du champ.
- Le champ coercitif H_c : c'est le champ magnétique qu'il faut appliquer pour annuler l'aimantation à partir d'un état saturé.

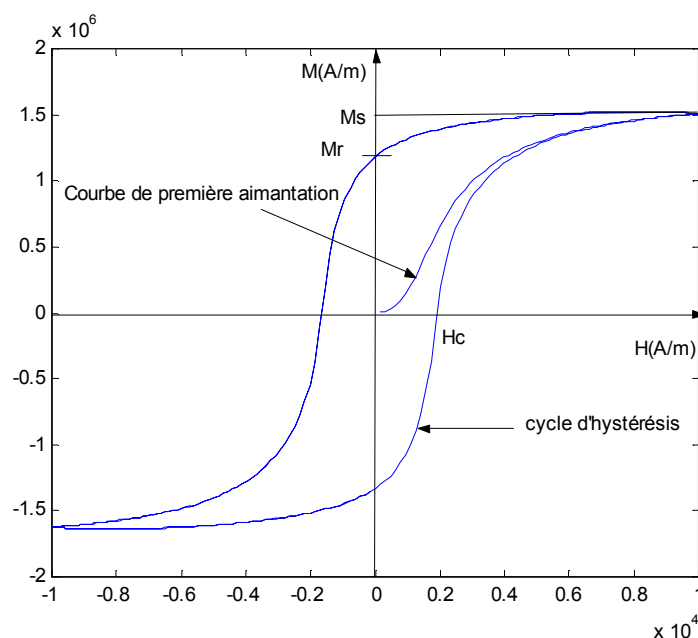


Figure I.12 : Courbe de première aimantation et cycle d'hystérésis

I-6-3 Phénomènes dynamiques

I-6-3-1 Les pertes dans la matière

Tout système à base de matériaux magnétiques soumis à un champ d'excitation extérieur variable, subit des pertes énergétiques appelées pertes fer.

On distingue deux phénomènes physiques principaux à l'origine de ces pertes : les pertes par hystérésis(déplacement des parois) et les pertes par courants de Foucault[2].

$$P_{\text{Fer}} = P_{\text{H}} + P_{\text{CF}} \quad (\text{I.11})$$

I-6-3-2 Les pertes en régime statique

On entend par régime statique, l'absence de phénomènes dynamiques dus entre autre à l'apparition des courants de Foucault lorsque le matériau est soumis à une excitation fortement variable dans le temps.

Les pertes par hystérésis en régime statique sont donc uniquement liées, de manière intrinsèque, aux propriétés physiques du matériau et à sa géométrie.

Sous l'effet des champs d'induction et d'excitation, les forces de Laplace créent des contraintes internes au matériau qui mettent en mouvement les domaines de Weiss.

Leur frottement les uns contre les autres favorise l'échauffement du matériau.

Ces pertes proviennent de la différence entre l'énergie emmagasinée durant la croissance de H et celle restituée lors de la décroissance. Pour un parcours complet du cycle, l'énergie est proportionnelle à son aire et au volume du matériau [2],[11].

Les pertes par hystérésis sont exprimées par la formule empirique de Steinmetz [5] :

$$P_{\text{H}} = K_{\text{H}} \cdot f \cdot B^n \cdot V \quad (\text{I.12})$$

avec:

- n : une constante comprise entre 1.5 et 2.5 (selon le matériau).
- f : la fréquence en hertz (Hz).
- B : l'induction maximale en Tesla(T).
- V : le volume du matériau en m³.
- P_H : les pertes par hystérésis exprimées en Watt (W).
- K_H : le coefficient d'hystérésis de Steinmetz.

I-6-3-3 Les pertes par courant de Foucault

En régime dynamique, en plus des pertes qui trouvent leurs origines dans le processus Statique et les courants induits microscopiques, il existe aussi des courants macroscopiques qui se développent dans l'ensemble du système et qui sont directement liés à la conductivité du matériau considéré. Au sein des masses métalliques, ces courants sont toujours accompagnés d'une dissipation de chaleur par effet joule connue sous le nom de << pertes par courants de Foucault >>. Ces pertes peuvent être calculées pour une induction de forme sinusoïdale par[5]:

$$P_{CF} = K_{CF} \cdot f^2 \cdot B^2 \cdot e^2 \cdot V \quad (I.13)$$

avec:

- $K_{CF} = \pi^2/6 \cdot \rho$ ou ρ la résistivité du matériau utilisé.
- f : la fréquence en hertz (Hz).
- B : l'induction maximale en Tesla(T).
- V : le volume du matériau en m^3 .
- P_{CF} : les pertes par hystérésis exprimées en Watt (W).
- e : l'épaisseur de la tôle en mètre (m).

Afin de réduire ces pertes, on utilise généralement en pratique des circuits magnétiques Feuilletés .

I-6-4 L'Aimantation anhystérétique

L'aimantation anhystérétique correspond à un état d'équilibre vers lequel tend tout matériau soumis à la fois au champ d'excitation H et à des contraintes aléatoires.

On obtient un état anhystérétique en procédant comme suit :

A partir de l'état désaimanté, lorsqu'on applique au matériau un champ d'excitation H , on obtient son aimantation normale $M(H)$. Il suffit alors de superposer à H un champ alternatif supplémentaire de même direction, de module initial suffisant pour saturer l'échantillon, que l'on fait décroître lentement et régulièrement jusqu'à une amplitude nulle.

Cela permet aux parois de franchir toutes les barrières de potentiel qu'elles rencontrent, qui dans les conditions habituelles s'opposent à leurs déplacements.

L'équilibre obtenu après ce brassage correspond à l'aimantation anhystérétique[1],[2].

CONCLUSION

Nous nous sommes intéressés, dans ce chapitre à rappeler quelques généralités concernant le magnétisme. Nous avons également présenté la classification des matériaux à partir de leur comportement magnétique. Ceci nous a amené à une description du ferromagnétisme et du processus d'aimantation hystérétique associé.

Le prochain chapitre sera consacré à une étude bibliographique des principaux modèles scalaires permettant la représentation de l'hystérésis magnétique.

LES MODELES D'HYSTERESIS

II-1 INTRODUCTION

Pour la représentation de l'hystérésis magnétique, un grand nombre de modèles scalaires est proposé dans la littérature. Certains sont purement mathématiques, d'autres phénoménologiques, dont l'état magnétique est caractérisé par un vecteur d'état contenant toute l'information relative à l'histoire du champ (modèle de PREISACH) et peu sont basés sur des considérations physiques, tel que l'état magnétique est caractérisé par le sens de variation du champ appliqué (modèle de JILES-ATHERTON) [2].

La multitude de modèles montre bien qu'il n'est pas aisé de retranscrire fidèlement la loi de comportement magnétique et hystérétique. En effet, plusieurs paramètres physiques telle que la diversité des matériaux utilisés dans les applications électromagnétiques ainsi que la contribution des courants induits, entrent en jeu.

L'étude des modèles d'hystérésis vectoriels généralement plus complexes, n'est pas abordée dans cette étude. Nous dirons simplement qu'à la différence des modèles scalaires, ces modèles sont plus particulièrement associés à la rotation de la direction de l'aimantation dans les domaines de Weiss et sont donc généralement utilisés pour représenter l'hystérésis tournante[1].

En dehors de la classification établie sur la base du caractère scalaire ou vectoriel des différents modèles, on peut aussi distinguer :

- Les modèles statiques, qui supposent que le champ appliqué varie infiniment lentement.
- Les modèles dynamiques, qui permettent de rendre compte de la vitesse de variation du champ appliqué sur l'allure des cycles d'hystérésis.

II-2 LES MODELES ANALYTIQUES

Le comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques est généralement représenté par des modèles analytiques simples, caractérisés par la description du phénomène par des formulations purement mathématiques. Cependant, ces expressions ne permettent pas de décrire tous les aspects du phénomène d'hystérésis, ne développant ainsi qu'une relation entre l'induction magnétique B ou l'aimantation M et le champ H sans prendre en compte l'histoire ou l'état d'aimantation initiale du matériau. Parmi ces modèles on a :

II-2-1 Le modèle de RAYLEIGH

C'est probablement le plus ancien des modèles analytiques développé par Lord Rayleigh en 1887. Il fournit une expression mathématique des cycles d'hystérésis caractérisant le comportement des matériaux ferromagnétiques dans le domaine des champs faibles.

Ainsi, la perméabilité magnétique sur la courbe de première aimantation est une fonction linéaire du champ d'excitation et est représentée par l'équation :

$$\mu(H) = \mu_{in} + \eta H \quad (\text{II.1})$$

avec : μ_{in} : perméabilité initiale

η : constante de Rayleigh

L'équation (II.1) conduit à une relation parabolique entre B et H sur la première portion de la courbe de première aimantation :

$$B = \mu_{in}H + \frac{1}{2} \eta H^2 \quad (\text{II.2})$$

Les termes $\mu_{in}H$ et $\eta H^2/2$ représentent respectivement les composantes réversible et irréversible de l'induction magnétique. Le cycle d'hystérésis décrit dans le domaine de Rayleigh a une forme simple (fig II.1), ses branches ascendante et descendante peuvent être mises en équations :

- **Branche ascendante :**

A partir d'un état initial $(-H_{\max}, -B_{\max})$, obtenu par des valeurs décroissantes du champ, toute augmentation du champ appliqué H , entraîne une augmentation de l'induction magnétique[8] :

$$B = \mu_{in} (H + H_{\max}) + \frac{\eta}{2} (H + H_{\max})^2 - B_{\max} \quad (\text{II.3})$$

- **Branche descendante :**

Si inversement, on part d'un état initial (H_{\max}, B_{\max}) , obtenu par valeurs croissantes de H , toute diminution du champ appliqué entraîne une diminution de l'induction magnétique :

$$B = \mu_{in} (H - H_{\max}) - \eta/2(H - H_{\max})^2 + B_{\max} \quad (\text{II.4})$$

En appliquant (II.3) au point particulier (H_{\max}, B_{\max}) on aura :

$$B_{\max} = \mu_{in} H_{\max} + \eta H_{\max}^2 \quad (\text{II.5})$$

En substituant cette équation dans (II.3) et (II.4), on peut déduire la formulation du modèle de Rayleigh qui sera décrit par l'équation suivante :

$$B = (\mu_{in} + \eta H_{\max}) H \pm \frac{\eta}{2} (H^2 - H_{\max}^2) \quad (\text{II.6})$$

Les paramètres du modèle de Rayleigh peuvent être déterminés à partir des valeurs maximales du champ d'excitation H , de l'induction B et de l'induction rémanente B_r définie au point $H=0$.

Sachant que B_r vérifie :

$$B_r = \frac{\eta}{2} H_{\max}^2 \quad (\text{II.7})$$

On peut alors déterminer la constante de Rayleigh η par :

$$\eta = 2 B_r / (H^2_{\max}) \quad (\text{II.8})$$

Connaissant la valeur de η , on peut déterminer la perméabilité initiale μ_{in} à partir de (II.5) :

$$\mu_{in} = \frac{B_{\max}}{H_{\max}} - \eta H^2_{\max} \quad (\text{II.9})$$

Nous pouvons dire donc que le modèle de Rayleigh est caractérisé par une mise en œuvre facile, cependant il reste limité aux faibles valeurs du champ d'excitation puisqu'il ne permet pas de décrire le phénomène de saturation et que le cycle d'hystérésis garde toujours une forme elliptique.

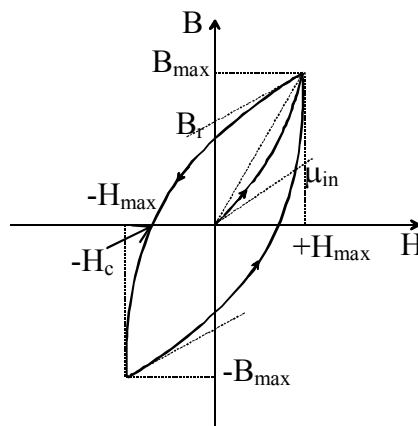


Figure II.1 : Cycle d'hystérésis et courbe de première aimantation dans le domaine de Rayleigh

II-2-2 Le modèle polynomial

L'approximation du phénomène par des séries polynomiales a fait l'objet de plusieurs recherches il y a de cela 50 ans et ceci dans le but de décrire le comportement magnétique non linéaire des matériaux ferromagnétiques.

Ainsi, la relation entre l'induction magnétique B et le champ H est donnée par :

$$B = K \cdot H^{1/n} \quad (\text{II.10})$$

Avec K et n, paramètres caractérisant le matériau magnétique. Ils sont déterminés à partir de la courbe de première aimantation (pour des matériaux ferromagnétiques, « n » a pour valeurs : $5 \leq n \leq 14$).

Ce modèle permet de décrire le comportement magnétique non linéaire des matériaux ferromagnétiques ainsi que le phénomène de saturation, seulement il est limité à la courbe de première aimantation[14].

II-2-3 Le modèle fractionnel

De nombreux auteurs (P.Weiss et son école) ont proposé une formulation empirique du type modèle fractionnel pour rendre compte de l'approche à la saturation [8].

L'équation suivante montre l'approximation du phénomène d'hystérésis en termes fractionnels $1/H^i$, $i=1 \dots n$:

$$B = \mu_0 M_s \left[1 - \frac{a}{H} - \frac{b}{H^2} - \frac{c}{H^3} - \dots - \frac{z}{H^i} \right] + \mu_0 H \quad (\text{II.11})$$

L'évolution de l'aimantation M en fonction du champ est obtenue en associant le modèle à la loi du comportement du matériau magnétique :

$$B = \mu_0 (H + M) \quad (\text{II.12})$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$M = M_s \left[1 - \frac{a}{H} - \frac{b}{H^2} - \frac{c}{H^3} - \dots - \frac{z}{H^i} \right] \quad (\text{II.13})$$

Une nouvelle formulation du modèle est obtenue avec les travaux de Dionne, Weiss et Allen[15] :

$$M = M_s \left[1 - \frac{a}{(H+H_n \pm H_c)} - \frac{b}{(H+H_k)} - \dots \right] \quad (\text{II.14})$$

avec H_c : le champ coercitif.

H_k : le champ d'anisotropie.

H_n : le champ supplémentaire.

Les valeurs $\pm H_c$ sont appliquées respectivement sur les branches montante et descendante du cycle d'hystérésis. Les paramètres a et b sont déterminés aux points ($M=0$, $H = -H_c$) et ($M=M_r$, $H=0$) tel que l'on a :

$$M(H=-H_c) = M_s \left[1 - \frac{a}{(H_n)} - \frac{b}{(-H_c+H_k)^2} \right] = 0 \quad (\text{II.15})$$

$$M(H=0) = M_s \left[1 - \frac{a}{(H_n+H_c)} - \frac{b}{(H_k)^2} \right] = M_r \quad (\text{II.16})$$

Ainsi, la détermination des paramètres a et b dépend des valeurs de H_c , H_n et H_k .

II-2-4 Le modèle d'hystérésis de Frolich

Ce modèle est également une approximation de la relation entre l'induction magnétique B et le champ H , permettant la description de la courbe de première aimantation uniquement :

$$B = \frac{H}{\alpha + \beta |H|} \quad (\text{II.17})$$

où α et β caractérisent le matériau étudié.

Les travaux de recherches cités dans la littérature, ont amélioré le modèle en subdivisant la caractéristique en deux parties, la première est définie lorsque $B \leq B_s$ et la seconde lorsque $B \geq B_s$, tel que l'on a :

$$B = \frac{H}{a_1 + b|H|} \quad (\text{II.18})$$

$$B = B_s + \frac{H - H_s}{a_2 + b_2|H - H_s|} \quad (\text{II.19})$$

En introduisant le champ coercitif H_c , l'expression du modèle respectivement sur la courbe montante et sur la courbe descendante du cycle majeur sera donnée par :

$$B = \frac{(H - H_c)}{\alpha + \beta|H - H_c|} \quad (\text{II.20})$$

$$B = \frac{(H + H_c)}{\alpha + \beta|H + H_c|} \quad (\text{II.21})$$

Le paramètre β est défini au point $(B_s, H \rightarrow \infty)$ par :

$$B_s = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{(H + H_c)}{\alpha + \beta|H + H_c|} = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{1}{B_s} \quad (\text{II.22})$$

Quant au paramètre α , il est défini au point $(B_r, H \rightarrow 0)$ par :

$$B_r = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{(H + H_c)}{\alpha + \beta(H + H_c)} = \frac{H_c}{\alpha + \beta H_c} \Rightarrow \alpha = H_c \left[\frac{1}{B_r} - \frac{1}{B_s} \right] \quad (\text{II.23})$$

Les modèles de type Frolich permettent d'avoir une approximation du phénomène de saturation ainsi qu'une représentation du cycle majeur, mais ne peuvent décrire certains phénomènes physiques liés au processus d'aimantation (les cycles mineurs) associés à l'hystérésis magnétique.

II-2-5 Les modèles à fonctions multiples

Pour ce type de modèle, l'approximation du comportement magnétique est donnée sous forme exponentielle, trigonométrique ou hyperbolique comme par exemple :

$$\text{Approximation sous forme exponentielle : } B = B_s \exp \left[\frac{H}{a+bH} \right] \quad (\text{II.24})$$

$$\text{Approximation en séries de fonctions exponentielles : } B = \sum_{i=0}^N \alpha_i (1 - \exp(-\beta_i H)) \quad (\text{II.25})$$

$$\text{Approximation en séries de fonctions trigonométriques : } B = \sum_{i=0}^N B_i \tan^{-1} \left(\frac{H}{H_i} \right) \quad (\text{II.26})$$

L'association d'autres types d'approximation du cycle en série de fonctions trigonométriques à la loi de comportement magnétique du matériau (équation (II.12)), permet d'obtenir l'aimantation de l'expression (II.27) par :

$$M = \frac{2}{\pi} M_s \tan^{-1} \left(\frac{H}{H_c} \pm 1 \right) \tan \left(\frac{\pi M_r}{2 M_s} \right) \quad (\text{II.27})$$

Ainsi, les cycles mineurs de l'hystérésis peuvent être calculés par :

$$\begin{cases} M = \frac{2K}{\pi} M_s \tan^{-1} \left(\frac{H}{H_c} \pm 1 \right) \tan \left(\frac{\pi M_r}{2 M_s} \right) \pm (1-K) M_r \\ \text{avec } K = \frac{(M_r + M_{rm})}{2 M_r} \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

où M_{rm} représente l'aimantation rémanente du cycle mineur.

En définitif, ce modèle permet d'approximer correctement le cycle majeur et même de décrire les cycles mineurs du phénomène d'hystérésis, cependant l'approximation est dénuée de toute interprétation physique du phénomène, de plus la génération des cycles mineurs dans un système soumis à un champ variable est difficile.

En général ces modèles sont utilisés pour des applications d'enregistrements magnétiques exigeant un cycle d'hystérésis large et une induction rémanente de valeur importante.

II-2-6 Le modèle avec séries de Fourier

L'application à un échantillon ferromagnétique d'un champ d'excitation sinusoïdal a pour résultat une induction magnétique non sinusoïdale et de forme complexe (comportement non linéaire du matériau) qui va être représentée à l'aide des séries de Fourier basée sur des points expérimentaux de la courbe de première aimantation[14] :

$$B - B_s = \sum_{j=0}^n \gamma_{2j+1} \left[\sin \frac{(2j+1)\pi}{4H_s} (H - H_s) \right] \quad (\text{II.29})$$

avec H_s le champ de saturation,

B_s l'induction de saturation,

et n le nombre de termes de la série.

Les coefficients γ_{2j+1} sont donnés par :

$$\gamma_{2j+1} = \frac{16H_{\max}}{((2j+1)\pi)^2} \left[\alpha_n \sin \left[(2j+1) \frac{\pi}{2} \right] + \sum_{k=1}^{N-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \sin \left((2j+1) \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (\text{II.30})$$

Les paramètres α_k ($k=1 \dots n$) représentent les pentes des segments reliant les points de mesure de la courbe de première aimantation, qui est généralement donnée par le constructeur.

Ce type de modèle permet d'approximer le cycle majeur à partir de paramètres déduits de la courbe de première aimantation sans pouvoir décrire les cycles mineurs du phénomène d'hystérésis, il est également dénué de toute interprétation du phénomène physique.

II-2-7 Le modèle à fonctions auxiliaires

Dans le but de décrire les propriétés magnétiques d'un matériau, un nouveau modèle basé sur l'approximation de l'aimantation M (équation (II.12)) est établi[14]. Il consiste à représenter M par une fraction de polynômes de second ordre :

$$M = \frac{a_1 H + a_2 H^2}{1 + b_1 H + b_2 H^2} \quad (\text{II.31})$$

Les paramètres a_1 , a_2 , b_1 et b_2 fonction de M_s , M_r , de la susceptibilité initiale k , de la constante de Neel α et de la constante de Rayleigh η sont déterminés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = k \qquad b_1 = \frac{k + \alpha \eta}{M_s - k \alpha} \\ a_2 = \frac{M_s \eta + k^2}{M_s - k \alpha} \qquad b_2 = \frac{M_s \eta + k^2}{M_s (M_s - k \alpha)} \end{array} \right. \quad (\text{II.32})$$

Le cycle majeur du phénomène d'hystérésis peut être construit à partir de deux fonctions auxiliaires $g_1(H)$ (fonction impaire) et $g_2(H)$ (fonction paire) définies par :

$$g_1(H) = \frac{B^- + B^+}{2} \qquad g_2(H) = \frac{B^- - B^+}{2} \quad (\text{II.34})$$

tel que B^+ et B^- représentent respectivement les branches montante et descendante du cycle d'hystérésis.

L'induction magnétique B est alors déterminée par :

$$B = \begin{cases} g_1 + g_2 : \text{si } H \text{ diminue} \\ g_1 - g_2 : \text{si } H \text{ augmente} \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

En tenant compte de la symétrie du cycle d'hystérésis, les fonctions auxiliaires peuvent être approximées par des fractions rationnelles du second ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(H) = \mu_0 \left[H + \frac{a_1 H + a_2 H |H|}{1 + b_1 |H| + b_2 H^2} \right] \\ g_2(H) = \mu_0 \left[\frac{c_1 (H_s - |H|) + c_2 (H_s^2 - H^2)}{1 + b_1 |H| + b_2 H^2} \right] \end{array} \right. \quad (\text{II.36})$$

Les coefficients b_1 et b_2 sont déterminés par la relation (II.32) et a_1 , a_2 , c_1 et c_2 à partir de relevés expérimentaux du cycle d'hystérésis.

Une autre identification des fonctions auxiliaires a donné :

$$g_1(H) = B_s \tan^{-1} \left(\frac{H}{H_s} \right); g_2(H) = \frac{B_s}{H_s} \frac{1}{1+(H/H_s)^2} \frac{\partial g_1(H)}{\partial H} \Big|_{H=H_s} \quad (\text{II.37})$$

Ce modèle analytique est facile à mettre en œuvre grâce à la simplicité de ses fonctions auxiliaires, cependant il ne peut décrire les boucles mineures du cycle d'hystérésis et n'est valable que pour certains échantillons ferromagnétiques.

II-2-8 Le modèle de Potter

Les travaux de Potter [15] ont permis de définir ce modèle basé sur des relevés expérimentaux de l'aimantation de saturation M_s , de l'aimantation rémanente M_r , du champ de saturation H_s et du champ coercitif H_c :

$$M(H, \alpha) = M_s \left[\text{sign}(\alpha) - \alpha \left[1 + \tanh \left[\frac{H_c - H \text{sign}(\alpha)}{H_c} \tanh^{-1} \left(\frac{M_r}{M_s} \right) \right] \right] \right] \quad (\text{II.38})$$

Le facteur α vaut ± 1 sur le cycle majeur et est redéfini par (II.39) à chaque point de renversement caractérisé par H^* et par α^* . L'aimantation M sera alors calculée en fonction de H et de α^* et sera positive quand H est croissant et négative quand H est décroissant tel que $|\alpha| \leq 1$.

$$\alpha^* = \frac{2 \text{sign}(\alpha) - \alpha \left[1 + \tanh \left[\left(1 - \text{sign}(\alpha) \frac{H^*}{H_c} \right) \tanh^{-1} \frac{M_r}{M_s} \right] \right]}{1 + \tanh \left[\left(1 + \text{sign}(\alpha) \frac{H^*}{H_c} \right) \tanh^{-1} \frac{M_r}{M_s} \right]} \quad (\text{II.39})$$

Caractérisé par une mise en œuvre facile, ce modèle décrit le cycle d'hystérésis à partir d'une fonction analytique paramétrée en α évoluant à chaque point de renversement, cependant, il ne décrit pas vraiment les cycles mineurs s'ils ne sont pas centrés autour de zéro.

II-2-9 Les modèles dynamiques

Contrairement aux modèles statiques présentés précédemment où la fréquence du champ d'excitation est faible donc l'échantillon a suffisamment de temps pour réagir à l'excitation, les modèles dynamiques tiennent compte de cette fréquence.

II-2-9-1 Le modèle de Duhem

Il est probablement l'un des premiers modèles dynamiques, basé sur la description thermodynamique du processus d'aimantation en résolvant l'équation différentielle suivante[1] :

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} = f \left[B(t), H(t), \frac{\partial H(t)}{\partial t} \right] \\ B(0) = B_0 \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

La fonction f est définie comme suit :

$$f \left[B(t), H(t), \frac{\partial H(t)}{\partial t} \right] = g \left[B(t), H(t), \text{sign} \left[\frac{\partial H(t)}{\partial t} \right] \right] \frac{\partial H}{\partial t} \quad (\text{II.41})$$

La fonction g est une fonction continue qui change de forme selon la position du point de fonctionnement sur le cycle d'hystérésis :

$$\begin{aligned} g \left[B(t), H(t), \text{sign} \left[\frac{\partial H(t)}{\partial t} \right] \right] &= g_1(H,B) \quad \text{si } \text{sign} \left[\frac{\partial H(t)}{\partial t} \right] > 0 \\ g \left[B(t), H(t), \text{sign} \left[\frac{\partial H(t)}{\partial t} \right] \right] &= g_2(H,B) \quad \text{si } \text{sign} \left[\frac{\partial H(t)}{\partial t} \right] < 0 \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

L'équation (II.43) représente la caractéristique dynamique du phénomène :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = g_1(H,B) \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{H^\uparrow} - g_2(H,B) \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{H^\downarrow} \quad (\text{II.43})$$

Les termes $\frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{H^\uparrow}$ et $\frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{H^\downarrow}$ représentent respectivement les dérivées du champ d'excitation par rapport au temps sur les branches montante et descendante du cycle d'hystérésis.

Ce modèle est difficile à mettre en œuvre car il repose sur l'identification des fonctions g_1 et g_2 . En effet, tout échantillon ferromagnétique présente un cycle différent pour lequel il faut déterminer ces fonctions avant d'entamer toute modélisation du phénomène [1].

II-2-9-2 Le modèle de Hodgdon

Il est également basé sur la description thermodynamique du processus d'aimantation en résolvant l'équation différentielle suivante afin de générer le cycle d'hystérésis :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \alpha \left| \frac{\partial H}{\partial t} \right| [f(H) - B] + \frac{\partial H}{\partial t} g(H) \quad (\text{II.44})$$

Où l'on admet que α est un coefficient strictement positif (généralement de valeur unitaire).

En utilisant la perméabilité différentielle $\frac{\partial B}{\partial H} = \mu_d$, l'équation (II.44) peut encore s'écrire:

$$\frac{\partial B}{\partial H} = \begin{cases} \alpha [f(H) - B] + g(H) & \text{si } \frac{\partial H}{\partial t} > 0 \\ -\alpha [f(H) - B] + g(H) & \text{si } \frac{\partial H}{\partial t} < 0 \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

Les fonctions f et g définissent la structure du modèle. Pour que les solutions de (II.44) soient hystérétiques, il faut que ces fonctions remplissent les conditions mathématiques suivantes :

1. f doit être une fonction impaire, continue par morceau, monotone croissante et différentiable, telle que sa dérivée f' admette une limite finie lorsque H tend vers l'infini.
2. g doit être une fonction paire, continue par morceau.

En intégrant (II.45), l'induction magnétique sur les branches montante (II.46) et descendante (II.47) du cycle majeur sous les conditions initiales B_0 et H_0 sera donnée par :

$$B^+(H)=f(H)+[B_0-f(H_0)]\exp(-\alpha(H-H_0))+\exp\left[-\alpha H \int_{H_0}^H [g(\xi)-f'(\xi)]\exp(\alpha\xi)d\xi\right] \text{ si } H < H_0 \quad (\text{II.46})$$

$$B^-(H)=f(H)+[B_0-f(H_0)]\exp(\alpha(H_0-H))-\exp\left[\alpha H \int_H^{H_0} [g(\xi)-f'(\xi)]\exp(-\alpha\xi)d\xi\right] \text{ si } H < H_0 \quad (\text{II.47})$$

où :

B^+ est la solution générale obtenue pour une évolution croissante à partir de l'état initial,

B^- est la solution générale obtenue pour une évolution décroissante à partir de l'état initial.

Des résultats satisfaisants sont obtenus avec les fonctions $f(H)$ et $g(H)$ pour la représentation du cycle d'hystérésis tel que :

$$f(H) = \begin{cases} b_1 \tan^{-1}(H_s/b_2) + \mu_0(H - H_s) & \text{si } H > H_s \\ b_1 \tan^{-1}(H/b_2) & \text{si } |H| < H_s \\ -b_1 \tan^{-1}(H_s/b_2) + \mu_0(H + H_s) & \text{si } H < -H_s \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

et

$$g(H) = \begin{cases} f'(H) [1 - b_3 \exp(-b_4 |H| / (H_s - |H|))] & \text{si } |H| < H_s \\ f'(H) & \text{si } |H| > H_s \end{cases} \quad (\text{II.49})$$

avec b_1 , b_2 , b_3 et b_4 définis en (II.50) à partir de relevés expérimentaux sur le cycle expérimental. Ces points particuliers sont l'aimantation rémanente définie au point $(0, B_r)$, le champ coercitif défini au point $(H_c, 0)$ et l'aimantation de saturation (H_s, B_s) . On obtient le système d'équations (II.50) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = 2B_s / \pi \\ b_2 = \left(\frac{\mu_s \pi H_s^2}{2B_s - \mu_s \pi} \right)^{1/2} \\ b_3 = 1 + \frac{\alpha B_r - \mu_r}{f'(0)} \\ b_4 = \frac{H_s - H_c}{H_c} \ln \left[\frac{b_3 f'(H_c)}{\alpha f(H_c) + f'(H_c) - \mu_c} \right] \end{array} \right. \quad (\text{II.50})$$

Le deuxième modèle d'Hodgdon (II.51) tient compte de la valeur de la fréquence du champ d'excitation, en remplaçant $g(H)$ par $\tilde{g}(H, \frac{\partial H}{\partial t})$ (II.52) :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \alpha \left| \frac{\partial H}{\partial t} \right| [f(H) - B] + \frac{\partial H}{\partial t} \tilde{g}(H, \frac{\partial H}{\partial t}) \quad (\text{II.51})$$

où :

$$\tilde{g}(H) = \begin{cases} f'(H) \left[1 - b_3 C \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right) \exp(-b_4 |H| / (H_s) - |H|) \right] & \text{si } |H| < H_s \\ f'(H) & \text{si } |H| > H_s \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

C désigne une nouvelle fonction structurelle dont la limite est égale à l'unité lorsque \dot{H} tend vers zéro.

$C(\frac{\partial H}{\partial t})$ est donné par :

$$C(\dot{H}) = \begin{cases} 1 + c_1 |\dot{H}| & \text{si } \dot{H} < \dot{H}_1 \\ 1 + c_1 \dot{H}_1 + c_2 (|\dot{H}| - \dot{H}_1) & \text{si } \dot{H}_1 < \dot{H} < \dot{H}_2 \\ 1 + c_1 \dot{H}_1 + c_2 (\dot{H}_2 - \dot{H}_1) + c_3 (|\dot{H}| - \dot{H}_2) & \text{si } \dot{H}_2 < |\dot{H}| \end{cases} \quad (\text{II.53})$$

La difficulté de ce modèle réside dans la détermination des coefficients de $C(\dot{H})$. En effet, Hodgdon n'a pas défini de méthode d'identification des paramètres c_1 , c_2 et c_3 et par conséquent, l'intégration du modèle statique dans un calcul de champ est facile à mettre en œuvre vu l'aspect analytique du modèle, par contre, celle du cas dynamique présente des difficultés d'identification, ce qui rend le modèle relativement inapplicable.

II-3 LES MODELES DE TYPE LANGEVIN

II-3-1 Le modèle de Jiles-Atherton

Le modèle de Jiles-Atherton, est un modèle qui décrit l'origine du phénomène d'hystérésis dans les matériaux ferromagnétiques isotropes à partir d'une approche physique. Cette description est essentiellement basée sur des considérations énergétiques liées aux déplacements de parois au sein du système magnétique [2].

II-3-1-1 Loi de comportement anhystérétique

Considérons un échantillon de matériau paramagnétique constitué d'un ensemble de moments magnétiques permanents \mathbf{m} n'interagissant pas entre eux.

En l'absence du champ appliqué, ces moments s'orientent aléatoirement dans toutes les directions et l'aimantation macroscopique résultante est nulle.

Lorsqu'on applique un champ d'excitation, les moments magnétiques tendent à s'orienter dans la même direction que le champ mais ce mécanisme est perturbé par l'agitation thermique. Un calcul statistique basé sur la théorie de Maxwell-Boltzman conduit à l'équation de Langevin qui donne l'aimantation M des matériaux paramagnétiques en fonction du champ d'excitation H et de la température T . On écrit :

$$M(H) = M_s L\left(\frac{H}{a}\right) \quad (\text{II.54})$$

avec $a = \frac{kT}{\mu_0 m}$

où $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J.K⁻¹ désigne la constante de Boltzman,

T la température en degré Kelvin,

μ_0 la perméabilité du vide,

m le moment magnétique,

M_s l'aimantation de saturation,

et $L(x)$ la fonction de Langevin telle que :

$$L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} \quad (\text{II.55})$$

L'équation (II.54), n'est valable que pour les matériaux paramagnétiques. En effet, dans le cas des matériaux ferromagnétiques, on constate que le champ d'excitation nécessaire pour atteindre la saturation est considérablement plus important que celui prédit par la théorie de Langevin. Cela s'explique par l'existence d'un couplage intense entre les moments magnétiques de spin des atomes voisins (interaction d'échange) qui ont tendance à s'aligner dans la même direction privilégiée en formant les domaines de Weiss. Tout se passe comme s'il existait au sein du matériau, en plus du champ appliqué extérieurement, un champ magnétique interne, très intense, agissant en permanence sur les moments. Il s'agit du champ moléculaire qu'on note $H_m = \alpha M$.

Ainsi, on peut dire que le modèle de Jiles-Atherton se structure autour de la loi de comportement qu'on obtiendrait en l'absence du phénomène hystérétique, c'est à dire sans l'existence du retard des variations de l'aimantation M par rapport aux variations du champ magnétique H qui est dû aux obstacles rencontrés par les parois de Bloch lors de leurs déplacements. Il s'agit donc de la loi de comportement anhystérétique donnée sous forme d'une équation de type Langevin modifiée:

$$M = M_{an}(H) = M_s \left(\coth\left(\frac{H + \alpha M}{a}\right) - \left(\frac{a}{H + \alpha M}\right) \right) \quad (\text{II.56})$$

avec $H + \alpha M = H_e$ (champ d'excitation effectif) et H le champ appliqué.

Sur la base de considérations physiques décrivant l'origine du phénomène d'hystérésis, deux contributions à l'aimantation totale du système sont déterminées :

II-3-1-1-a Composante irréversible de l'aimantation

C'est une composante qui trouve son origine dans le phénomène d'accrochage des parois lors du déplacement de celles-ci sous l'action du champ extérieur. Ce phénomène est caractérisé par une énergie de la forme :

$$E = \mu_0 \int k \delta \frac{dM}{dH} dH \quad (\text{II.57})$$

où k est une grandeur positive constante appelée coefficient d'hystérésis en $[\text{A.m}^{-1}]$

δ est un paramètre qui vaut ± 1 selon le sens d'évolution de H .

L'énergie emmagasinée dans le matériau est alors égale à l'énergie associée au comportement anhystérétique, diminuée des pertes dues au processus d'ancrage des parois :

$$\mu_0 \int M dH = \mu_0 \int M_{an} dH - \mu_0 \int k \delta \frac{dM}{dH} dH \quad (\text{II.58})$$

La relation entre l'intensité du champ magnétique et l'aimantation peut être déduite de l'équation (II.58):

$$M_{an}(H) = M + k \delta \frac{dM}{dH} \quad (\text{II.59})$$

En tenant compte du champ effectif H_e et à partir de l'équation (II.59), la composante irréversible de l'aimantation est définie par l'équation différentielle suivante:

$$M_{an}(H_e) = M_{irr} + k \delta \frac{dM_{irr}}{dH} \quad (\text{II.60})$$

En dérivant (II.60) par rapport au champ H , on obtient :

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{M_{an}(H_e) - M_{irr}}{k \delta - \alpha (M_{an}(H_e) - M_{irr})} \quad (\text{II.61})$$

II-3-1-1-b Composante réversible d'aimantation

C'est une composante qui est liée à la déformation des parois sur les sites d'accrochage. Jiles et Atherton montrent que l'aimantation réversible est proportionnelle à la différence $(M_{an} - M_{irr})$:

$$M_{rev}=c(M_{an}(H_e)-M_{irr}) \quad (\text{II.62})$$

où c est un coefficient de réversibilité.

II-3-1-1-c L'aimantation totale

L'aimantation totale est la somme des composantes réversible et irréversible :

$$M=M_{rev}+M_{irr} \quad (\text{II.63})$$

En combinant l'équation (II.62) dans l'expression de l'aimantation totale, nous pouvons écrire :

$$M=M_{irr}+c(M_{an}(H_e)-M_{irr}) \quad (\text{II.64})$$

Par conséquent, la formulation différentielle de l'aimantation s'écrit :

$$\frac{dM}{dH}=c\frac{dM_{an}(H_e)}{dH}+(1-c)\frac{M_{an}(H_e)-M_{irr}}{k\delta-\alpha(M_{an}(H_e)-M_{irr})} \quad (\text{II.65})$$

II-4 MODELE DE PREISACH

Le modèle de Preisach est un modèle d'hystérésis phénoménologique proposé par le physicien allemand Frederick Preisach en 1935, pour décrire le phénomène d'hystérésis dans les matériaux ferromagnétiques, tant dans les matériaux doux que dans les matériaux durs.

L'approche de ce modèle est totalement intuitive, elle est basée sur la compréhension du mécanisme d'aimantation.

Des extensions de ce modèle permettent de prendre en compte les effets dynamiques et l'anisotropie [12],[14].

CONCLUSION

Le présent chapitre a été consacré à l'étude bibliographique des principaux modèles d'hystérésis scalaires.

Ces modèles sont répartis en trois grandes familles :

- Les modèles analytiques sont basés sur des principes simples et leur mise en œuvre est relativement aisée. Cependant et en raison de la mauvaise représentation des cycles mineurs, le domaine d'application de ces modèles est donc particulièrement restreint.
- Le modèle de Jiles-Atherton est bien adapté pour représenter le comportement des matériaux doux, seulement la procédure d'identification des paramètres représentant le modèle peut entraîner des problèmes de convergences.
- Le modèle de Preisach paraît plus apte à représenter la réalité expérimentale car il bénéficie d'une interprétation géométrique particulière commode pour expliquer les mécanismes de variation de l'aimantation.

Les différentes étapes de description du modèle de Preisach seront détaillées dans le prochain chapitre.

MODELE DE PREISACH

III-1 INTRODUCTION

Comme nous l'avons vu précédemment, le modèle de Preisach est l'un des modèles les plus utilisés pour la représentation générale de l'hystérésis d'un matériau magnétique.

En effet, c'est le modèle qui retiendra plus spécialement notre attention dans tout ce qui suit.

Un premier objectif de ce chapitre, consiste à décrire le modèle et à présenter ses principales propriétés. Seulement, la définition du modèle de Preisach nécessite au préalable une connaissance de la fonction de distribution qui contient la description complète du comportement du matériau telle que: courbe de première aimantation et cycle majeur.

Une fois la fonction de distribution connue, on peut déterminer n'importe quelle aimantation du matériau en fonction de l'excitation qui lui est appliquée et de l'histoire qu'il a vécue [13].

III-2 DESCRIPTION DU MODELE DE PREISACH

L'idée fondamentale de ce modèle est de considérer le matériau magnétique comme un ensemble d'un très grand nombre de particules élémentaires, dits hystérons ayant deux états magnétiques possibles : soit $M=+1$ ou $M=-1$.

On affecte à chacune de ces particules, un cycle d'hystérésis élémentaire de forme rectangulaire, dissymétrique par rapport à l'origine (fig III.1.a), défini par une fonction $\phi_{\alpha\beta} = \pm 1$.

Ces cycles élémentaires sont caractérisés par les champs α et β (avec $\alpha \geq \beta$) appelés champs de basculement ou de commutation. Ils correspondent aux valeurs du champ H , pour lesquelles il se produit une transition irréversible de l'état bas ($M=-1$) vers l'état haut ($M=+1$) ou inversement[13],[16],[19].

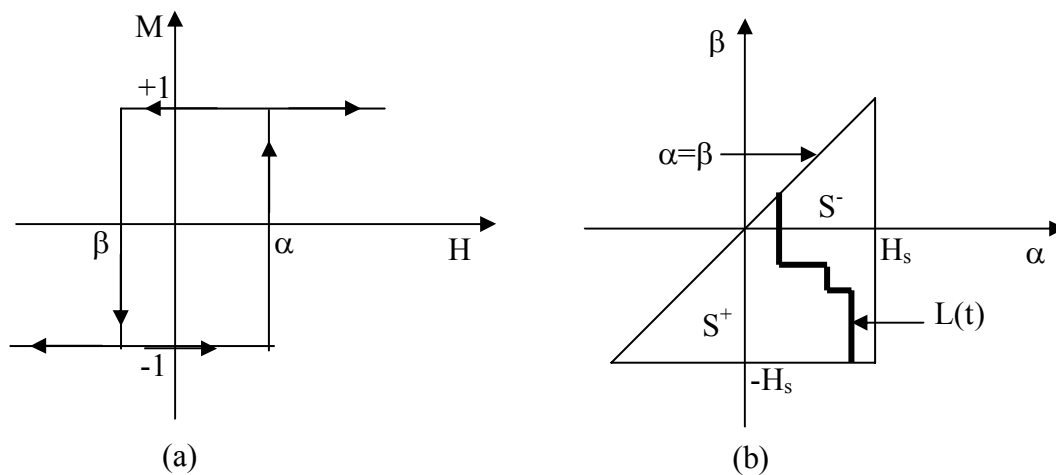


Figure III.1 : Illustration du cycle élémentaire et du triangle de Preisach

Le calcul de l'aimantation repose sur une distribution statistique des particules élémentaires, dont les variables sont les champs de commutation α et β .

Soit $\rho(\alpha, \beta)$, cette fonction de distribution appelée aussi densité de Preisach. Elle est indépendante de l'état magnétique du matériau.

L'aimantation $M(t)$ résultant de l'application du champ H à l'instant t s'écrit dans le formalisme de Preisach :

$$M(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} \rho(\alpha, \beta) \phi_{\alpha\beta}[H(t)] d\alpha d\beta \quad (\text{III.1})$$

où :

$\rho(\alpha, \beta)$ la densité de Preisach

$\phi_{\alpha\beta}[H(t)]$ représente l'opérateur associé à l'hystéron élémentaire, $\phi_{\alpha\beta}[H(t)] = \pm 1$.

III-3 INTERPRÉTATION GEOMETRIQUE

La densité de Preisach $\rho(\alpha, \beta)$ présente les propriétés suivantes :

- Elle est définie dans le demi-plan $\alpha \geq \beta$.
- Le matériau étant saturé pour les valeurs $\pm H_s$ du champ magnétique. L'aimantation ne varie presque plus, ce qui signifie que la densité $\rho(\alpha, \beta)$ est négligeable en dehors de

l'intervalle $-H_s \leq \beta \leq \alpha \leq H_s$. Le demi plan $\alpha \geq \beta$ se limite donc en pratique pour le calcul de l'aimantation au domaine borné S défini par :

$$S = \{(\alpha, \beta) / \alpha \geq \beta, -H_s \leq \beta \leq \alpha \leq H_s\} \quad (\text{III.2})$$

- Le cycle majeur étant symétrique, donc $\rho(\alpha, \beta)$ est symétrique par rapport à la droite $\alpha = -\beta$.

La représentation de ces différentes propriétés dans le plan (α, β) , permet de définir le domaine de définition, représenté par un triangle rectangle à l'intérieur duquel, la densité de Preisach indique le nombre de particules ou d'hystérons caractérisés par le couple (α, β) , il s'agit du triangle de Preisach (fig III.1.b). A chaque instant t, ce triangle est subdivisé en deux sous-domaines S^+ et S^- , comportant tous les hystérons $\phi_{\alpha\beta}$ dans les états +1 et -1 respectivement.

Avec ceci, l'équation (III.1) définissant le modèle de Preisach peut donc être exprimée à l'aide d'intégrale sur ces deux surfaces :

$$M(t) = \iint_{S^+} \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{S^-} \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (\text{III.3})$$

Il devient clair que la valeur de $M(t)$, dépend uniquement de la subdivision de S en S^+ et S^- , donc de l'allure de la frontière de Preisach $L(t)$ entre ces deux sous-domaines.

$L(t)$ est associée à un vecteur d'histoire qui définit l'état magnétique du système à l'instant t. La première valeur de ce vecteur correspond à l'état initial du système et les autres valeurs regroupent certains extremums atteints par le champ appliqué et la valeur courante du champ.

III-4 REPRESENTATION EQUIVALENTE

La densité de Preisach peut être représentée de façon équivalente en utilisant comme variables indépendantes à la place de α et de β , le champ coercitif h_c et le champ d'interaction h_i définis par les relations :

$$h_c = \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{et} \quad h_i = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (\text{III.4})$$

Ceci revient à un changement de coordonnées dans le plan de Preisach illustré par la figure (III.2):

En effet, le champ d'interaction h_i représente la grandeur de la dissymétrie du cycle élémentaire par rapport à l'origine ($H=0$). Il traduit l'influence des domaines adjacents constitutifs du matériau magnétique sur le domaine considéré. Quant au champ coercitif h_c , il représente la demi-largeur du cycle élémentaire[1].

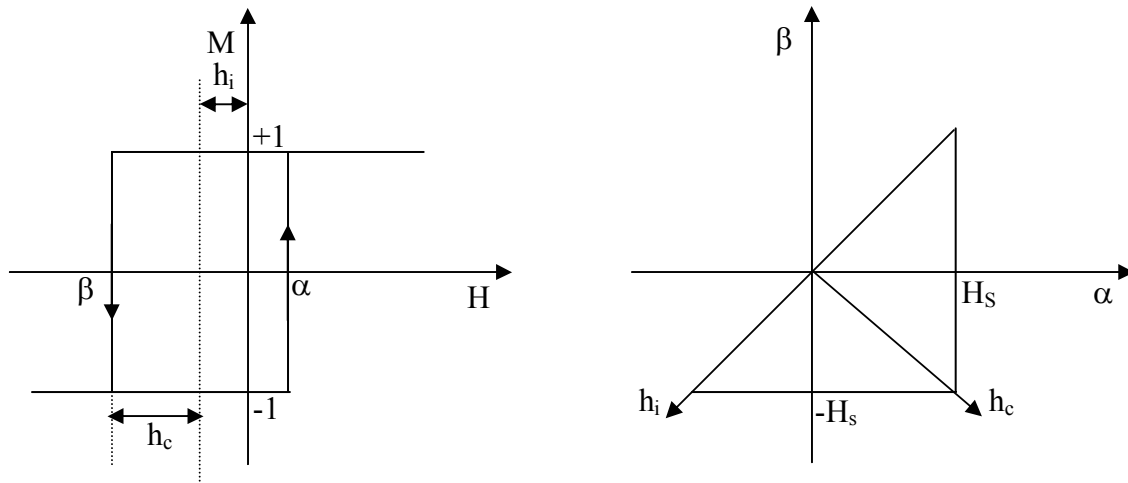


Figure III.2 : Définition du cycle élémentaire et du plan de Preisach en fonction de h_i et h_c .

III-5 PRINCIPE DU MODELE

L'un des attrait majeurs du modèle de Preisach est que l'on peut donner une interprétation géométriques des mécanismes selon lesquels celui-ci calcule l'aimantation et conserve la mémoire de tous les états magnétiques antérieurs.

Soit un matériau se trouvant initialement dans l'état désaimanté ($H=M=0$) à l'instant $t=t_0$.

La relation (III.3) nous permet d'écrire :

$$\iint_{S^+(t_0)} \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \iint_{S^-(t_0)} \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (III.5)$$

On en déduit que la frontière $L(t_0)$ est située sur la droite d'équation $\alpha = -\beta$ et les deux sous domaines S^+ et S^- sont donc superposables (fig III.3).

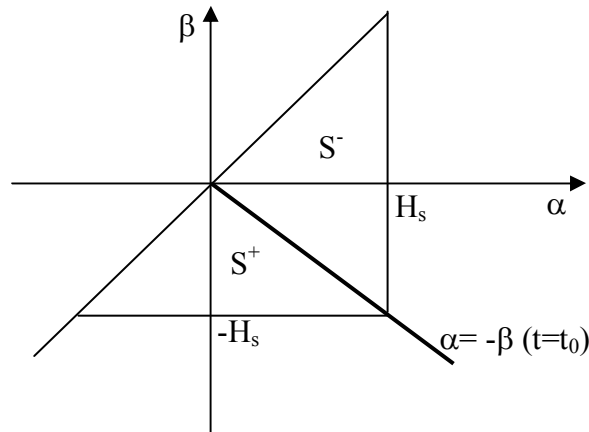


Figure III.3 : Illustration de l'état désaimanté dans le triangle de Preisach

Appliquons à ce même matériau à l'instant $t_1 > t_0$ un champ magnétique H_1 croissant inférieur à H_s , on décrit une partie de la courbe de première aimantation (fig III.4.a).

Dans le triangle de Preisach, il se produit un basculement dans l'état haut (+1) de tous les hystérons se trouvant dans l'état bas et vérifiant la condition $\alpha \leq H_1$. Ceci conduit à une augmentation du sous-domaine S^+ par rapport à S^- .

En tenant compte de cette description, on peut dire que, lorsque le champ appliqué croît, le segment supporté par la droite d'équation $\alpha = H(t)$ se déplace jusqu'à la saturation dans un mouvement de translation horizontale. On obtient ainsi à $t=t_2$, $H(t_2) = H_s$.

Dans cet état le sous-domaine S^+ occupe tout le plan de Preisach et la frontière $L(t)$ n'existe plus (fig III.4.b).

On en déduit que:

$$M(t_2) = M_s = \iint_{\alpha \geq \beta} \rho(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (\text{III.6})$$

Remarquons que l'application de tout champ H supérieur à H_s restera sans effet puisque S^+ remplit déjà tout le plan de Preisach. Ceci représente bien la saturation.

Appliquons à présent, un champ H_3 décroissant de telle sorte que l'on décrive la branche descendante du cycle majeur. Tous les hystérons se trouvant dans l'état haut (+1), dont le champ de commutation $\beta \geq H_3$, basculent dans l'état bas (-1) pour occuper le sous-domaine S^- .

Autrement dit, S^+ et S^- sont séparés par la droite $\beta = H_3$ (fig III.4.c).

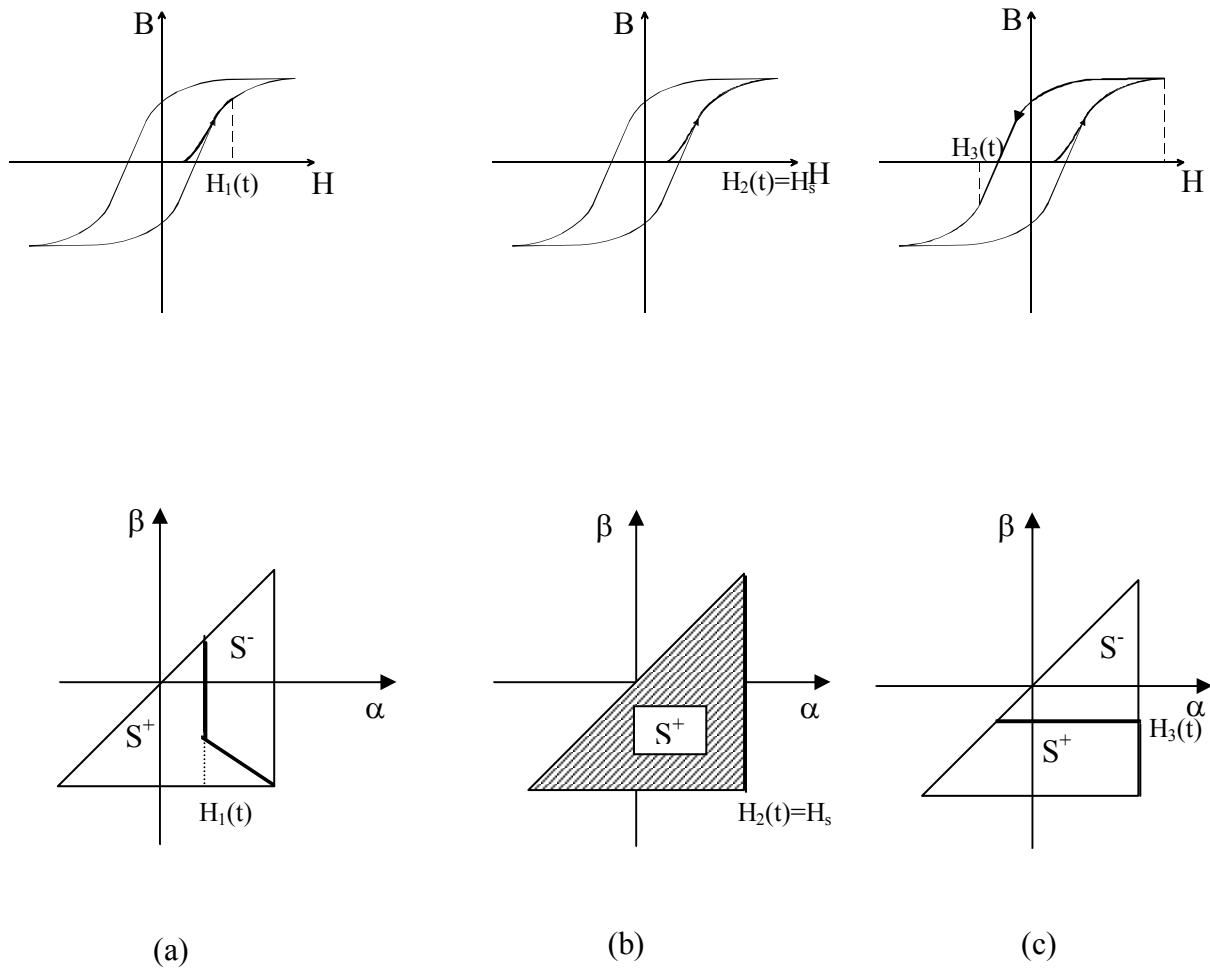


Figure III.4 : Description de la courbe de première aimantation (a,b) et une partie de la branche descendante du cycle majeur (c)

En généralisant ces résultats, on peut dire que la frontière de Preisach $L(t)$ évolue comme suit :

- En champ $H(t)$ croissant, la droite verticale $\alpha = H(t)$ balaie le plan de Preisach et fait basculer tous les opérateurs $\phi_{\alpha\beta}$ à l'état +1 dont le champ de commutation $\alpha < H(t)$.
- En champ $H(t)$ décroissant, la droite horizontale $\beta = H(t)$ balaie le plan de Preisach et fait basculer tous les opérateurs $\phi_{\alpha\beta}$ à l'état -1 dont le champ de commutation $\beta > H(t)$.

Suivant ces règles, la frontière de Preisach a toujours une forme en escalier dont les segments verticaux correspondent aux points de rebroussement positifs (valeurs maximales de H) et les segments horizontaux représentent les points de rebroussement négatifs (valeurs minimales de H).

Les sommets de cette frontière contiennent l'histoire du matériau. Le premier est toujours le point $(\alpha=+H_s, \beta=-H_s)$ restant fixe, alors que le dernier point se trouve sur la droite $\alpha=\beta$ avec $\alpha=\beta=H(t)$ [12],[14].

III-6 LES PROPRIETES DU MODELE DE PREISACH

Deux propriétés fondamentales se dégagent de la définition de ce modèle. Il s'agit de l'effet de l'effacement et de la congruence.

III-6-1 L'effacement de l'histoire

Cette propriété est celle qui fait du modèle de Preisach, un outil privilégié de modélisation du phénomène d'hystérésis. En effet, l'application, d'un champ H élimine tous les états antérieurs (α_i, β_j) tels que $\alpha_i \leq H$ ou $\beta_j \geq -H$. Partant par exemple de l'état saturé bas $(-H_{\max})$ et effectuons le trajet suivant : H croissant jusqu'à une valeur H_1 puis décroissant jusqu'à H_2 . La limite $L(t)$ conserve bien une information relative à H_1 (fig III.5). En particulier, un champ d'excitation appliqué $H \geq H_s$ ou $H \leq -H_s$ effacera toute l'histoire du matériau, celui-ci ne gardera que le minimum absolu $-H_s$ et le maximum absolu $+H_s$.

III-6-2 La congruence des cycles mineurs

Un champ H oscillant entre deux valeurs extrémales H_1 et H_2 va toujours produire des cycles congruents au sens géométrique.

Quelque soit l'histoire et l'état magnétique initial du matériau, ces cycles mineurs sont superposables par une translation verticale (fig III.6)[12].

Ces deux dernières propriétés, constituent des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système hystérétique puisse être représenté par le modèle de Preisach[13].

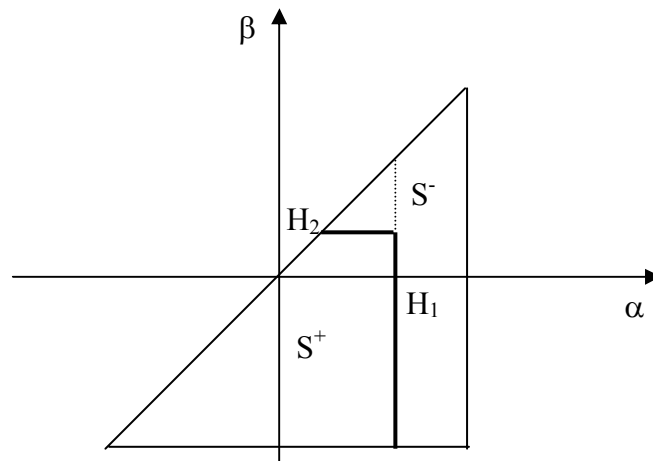


Figure III.5: Illustration de l'effet d'effacement partiel d'informations

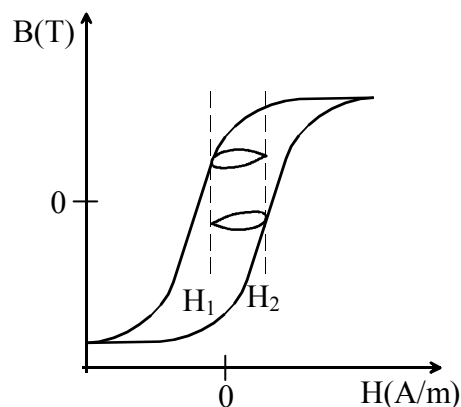


Figure III.6 : Congruence des cycles mineurs

III-7 DETERMINATION DE LA DENSITE DE PREISACH

Le problème de l'identification du modèle se ramène à celui de la détermination de la fonction de distribution ou densité de Preisach qui caractérise le matériau ferromagnétique.

Il existe deux grandes familles de méthodes pour déterminer la densité de Preisach $\rho(\alpha, \beta)$: les méthodes analytiques et les méthodes numériques [1].

Ainsi, les méthodes analytiques sont des méthodes simples d'applications, elles ne requièrent que des données expérimentales très facilement accessibles (exemple le cycle majeur). Quant aux méthodes numériques, elles ont besoin de relevés supplémentaires et un plus grand

nombre de données. Ces méthodes, relient directement certaines mesures aux valeurs de $\rho(\alpha,\beta)$ dans le triangle de Preisach discrétisé[11].

III-7-1 Les méthodes numériques

Il existe principalement trois méthodes numériques permettant l'identification de la densité de Preisach. On en cite :

- La méthode de Mayergoyz.
- La méthode de Biorci- Pescetti.
- La méthode des cycles centrés.

III-7-2 Les méthodes analytiques

Certaines formes analytiques (fonctions Gaussienne, fonctions Lorentzienne,...)[13], peuvent servir de fonctions de distributions pour la répartition des hystérons dans le triangle de Preisach. Parmi ces fonctions on a :

III-7-2-1 La distribution de type Gauss

Dans le cas de la répartition Gaussienne, la fonction de distribution peut s'écrire sous la forme :

$$\rho(h_c, h_i) = \frac{B_s}{2\pi\sigma_c\sigma_i} \exp\left[-\frac{(h_c - h_{cm})^2}{2\sigma_c^2}\right] \exp\left[\frac{-h_i^2}{2\sigma_i^2}\right] \quad (\text{III.7})$$

Les grandeurs h_c et h_i se rapportent à un changement de repère dans le plan de Preisach (§III.4)

Cinq paramètres sont à déterminer dans cette équation. Il s'agit de B_s (l'induction de saturation), σ_c et σ_i (les écarts types relatifs à h_c et h_i) et h_{cm} (le champ coercitif moyen).

Malgré que le nombre de paramètres, permet une relative flexibilité au niveau de la forme des cycles, le choix de cette forme de fonction de distribution reste limité[13].

III-7-2-2 La distribution de type Lorentz

Celle ci s'écrit sous la forme :

$$\rho(\alpha,\beta)=\frac{k}{\left(1+\left(\frac{\alpha}{H_c}-0.5\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{\beta}{H_c}+0.5\right)^2\right)} \quad (\text{III.8})$$

Avec H_c le champ coercitif et k un coefficient de régulation ou constante de normalisation.

La fonction $\rho(\alpha,\beta)$ paramétré par α et β , doit vérifier les propriétés de la densité de Preisach déjà énoncées.

L'application du modèle de Preisach associé à la fonction de distribution de Lorentz permet de suivre précisément l'évolution de l'aimantation du matériau et de son histoire[13]. Néanmoins, la précision des cycles d'hystérésis reproduits par ce modèle est affectée par l'utilisation de ce type de fonction.

Pour remédier à ce problème, et afin d'augmenter le nombre de degrés de liberté, une forme modifiée de la fonction de distribution de Lorentz a été proposée[17].

III-7-2-3 La distribution de type Lorentz modifiée

Deux échantillons ferromagnétiques présentant les mêmes paramètres k et H_c (précédemment définis), ne possèdent pas forcément le même cycle d'hystérésis. Donc une modification de la fonction de distribution de Lorentz s'impose en introduisant deux nouveaux paramètres d'ajustement a et b . Ceci permet alors d'augmenter la précision du modèle.

(III.8) est réécrite sous la forme :

$$\rho(\alpha,\beta)=\frac{ka^2}{\left(a+\left(\frac{\alpha}{H_c}-b\right)\right)\left(a+\left(\frac{\beta}{H_c}+b\right)\right)} \quad (\text{III.9})$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in [1, H_s/H_c]$.

Sachant que la précision de la fonction de distribution de Lorentz est fortement liée aux paramètres d'ajustement a et b , procédons à une analyse permettant de montrer l'influence de ces paramètres sur la distribution et l'allure des cycles.

III-7-2-3-a Influence du paramètre a (b constant).

Le paramètre a engendre une certaine modification au niveau de l'allure de la distribution spatiale de la fonction de Lorentz tout en gardant la même amplitude. Ainsi, les figures (III.7), (III.8), (III.9), (III.10), (III.11) et (III.12), illustrent l'effet de variation de ce paramètre sur l'évolution de la distribution spatiale de la fonction de Lorentz modifiée et de ses contours projetés sur le plan de Preisach pour des valeurs constantes de k , b et H_s , ($k=59$, $b=1$ et $H_s=250A/m$).

Nous constatons que pour des valeurs croissantes de a , la distribution garde sa symétrie par rapport à l'axe $\alpha = -\beta$, seulement l'aire délimitée par cette fonction augmente sur le plan de Preisach. D'autre part, la variation du paramètre a , entraîne une augmentation de l'induction maximale, de l'induction rémanente, ainsi qu'une modification de la raideur des cycles, donc c'est la perméabilité initiale qui peut être contrôlée sur la courbe de première aimantation ainsi que sur les branches ascendante et descendante du cycle majeur[18].

Les figures (III.13), (III.14), (III.15) et (III.16), représentent la variation du cycle en fonction du paramètre a pour les mêmes valeurs de k , b et H_s .

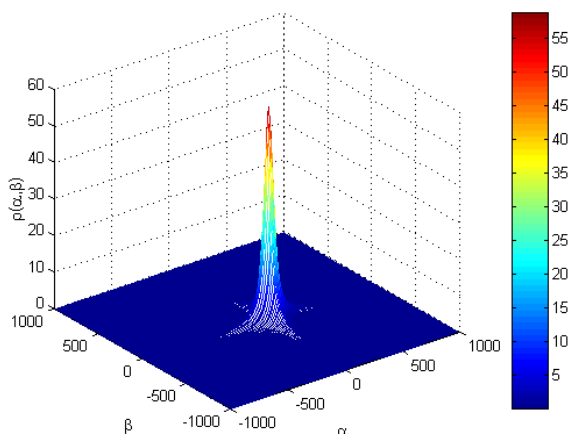


Figure III.7 La distribution spatiale pour $a=0.5$

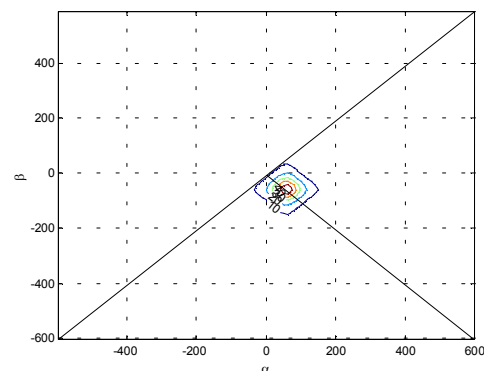


Figure III.8 Les contours de la distribution pour $a=0.5$

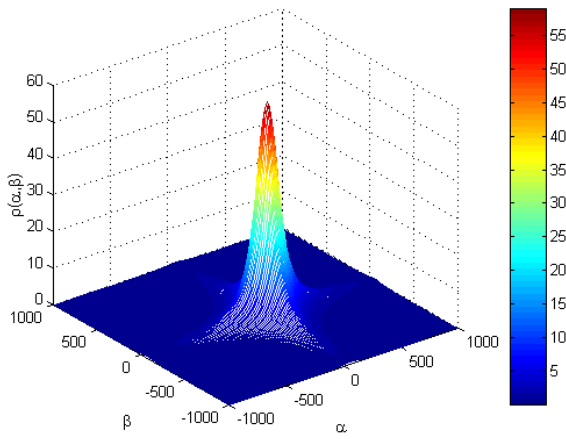


Figure III.9 La distribution spatiale pour $a=3$

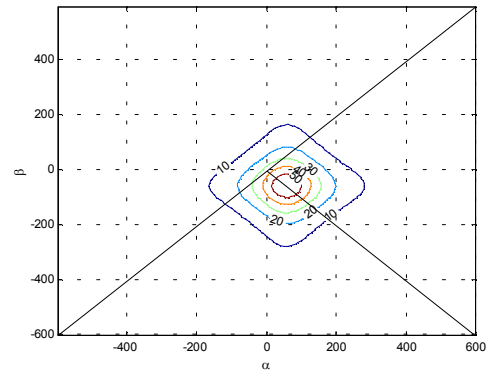


Figure III.10 Les contours de la distribution pour $a=3$

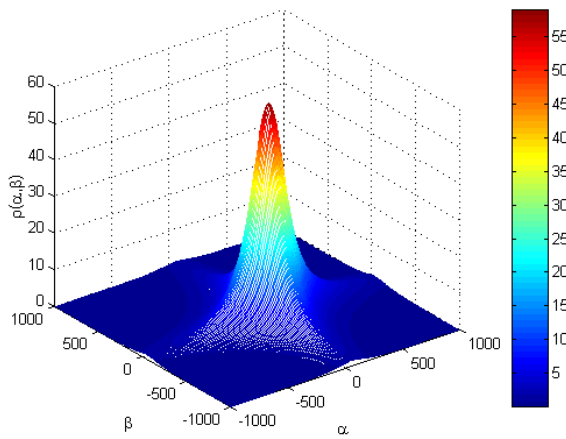


Figure III.11 La distribution spatiale pour $a=7$

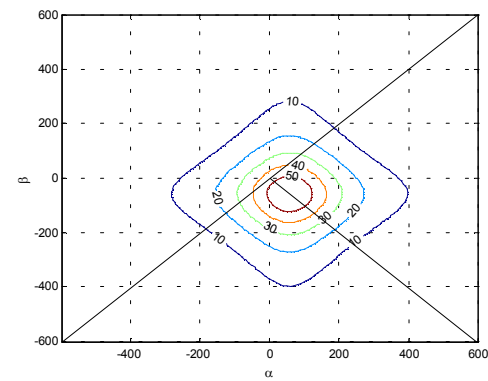


Figure III.12 Les contours de la distribution pour $a=7$

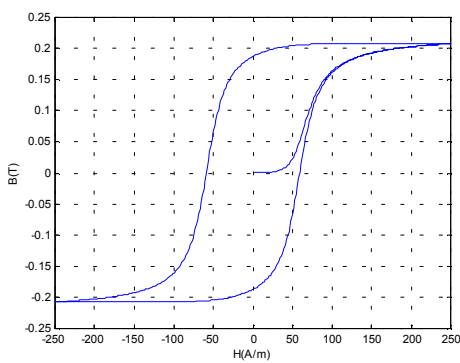


Figure III.13 Le cycle d'hystérésis pour $a=0.1$

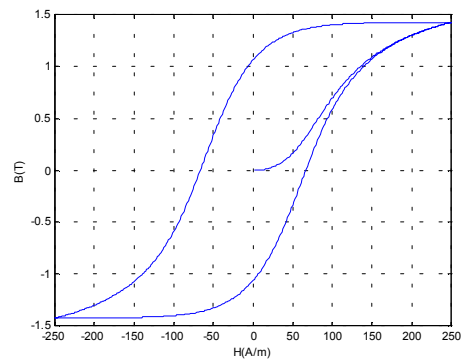
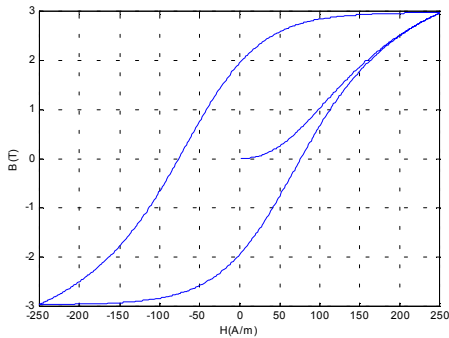
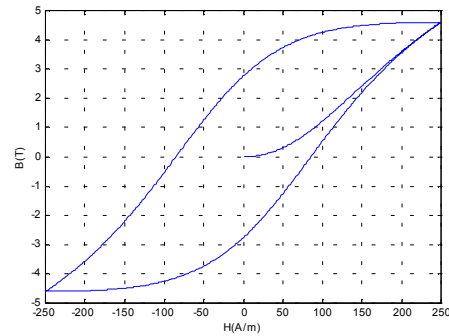


Figure III.14 Le cycle d'hystérésis pour $a=1$

Figure III.15 Le cycle d'hystérésis pour $a=5$ Figure III.16 Le cycle d'hystérésis pour $a=7$

III-7-2-3-b Influence du paramètre \mathbf{b} (\mathbf{a} constant).

Contrairement au cas précédent, le paramètre \mathbf{b} , permet d'une part de garder la même allure de la distribution spatiale avec la même amplitude, d'autre part, l'aire délimitée par cette fonction reste inchangée, tandis que les contours de cette fonction subissent un déplacement sur l'axe $\alpha = -\beta$.

Les figures (III.17), (III.18), (III.19), (III.20), (III.21) et (III.22), illustrent l'effet de variation du paramètre \mathbf{b} sur la distribution spatiale ainsi que les contours projetés sur le plan de Preisach pour des valeurs constantes de k , a , et H_s ($k=59$, $a=2$, et $H_s=250\text{A/m}$).

Les figures (III.23), (III.24), (III.25) et (III.26), montrent l'influence de la variation du paramètre \mathbf{b} sur la grandeur du champ coercitif H_c (donc sur la largeur du cycle).

En effet, l'augmentation de \mathbf{b} , engendre une augmentation de la valeur de H_c .

Finalement, on peut dire que les méthodes analytiques et en particulier la fonction de distribution de Lorentz, dépend de paramètres qui sont ajustés afin de reproduire la forme du cycle d'hystérésis généré par le modèle de Preisach[13].

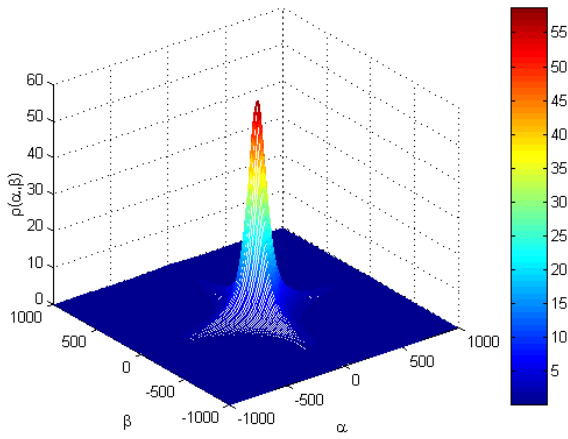


Figure III.17 La distribution spatiale pour $b=0.1$

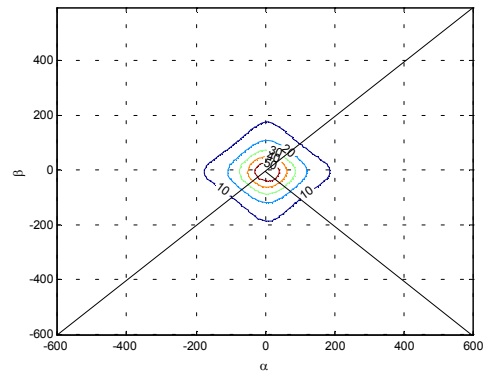


Figure III.18 Les contours de la distribution pour $b=0.1$

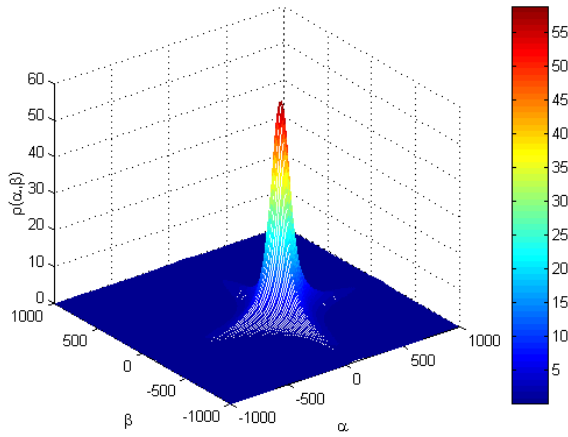


Figure III.19 La distribution spatiale pour $b=2$

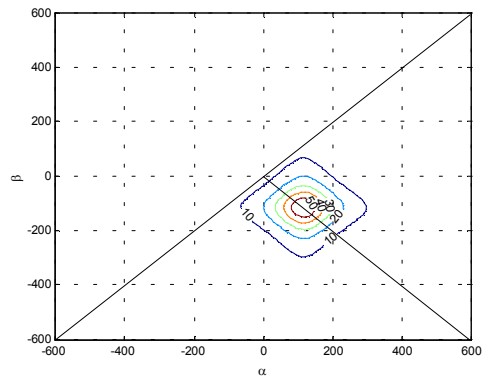


Figure III.20 Les contours de la distribution pour $b=2$

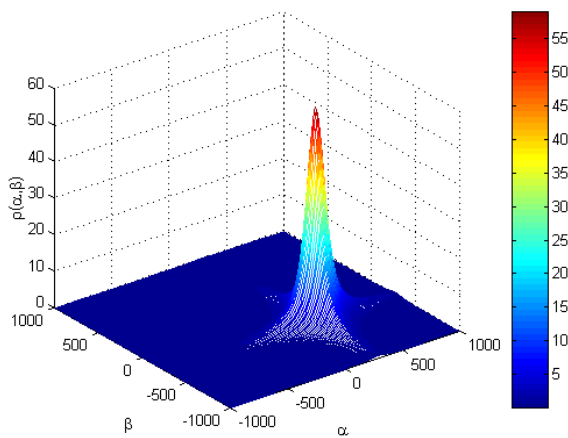


Figure III.21 La distribution spatiale pour $b=5$

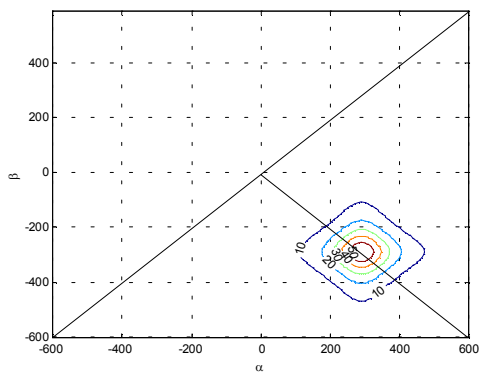


Figure III.22 Les contours de la distribution pour $b=5$

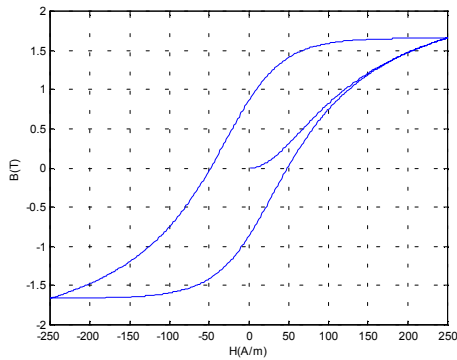


Figure III.23 Le cycle d'hystérésis pour $b=0.1$

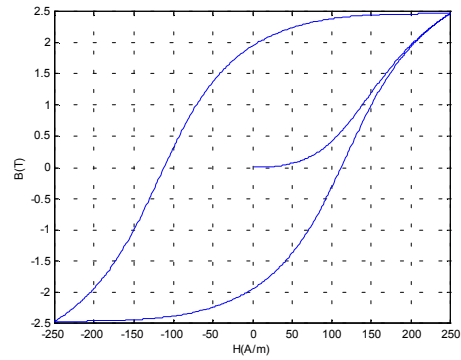


Figure III.24 Le cycle d'hystérésis pour $b=2$

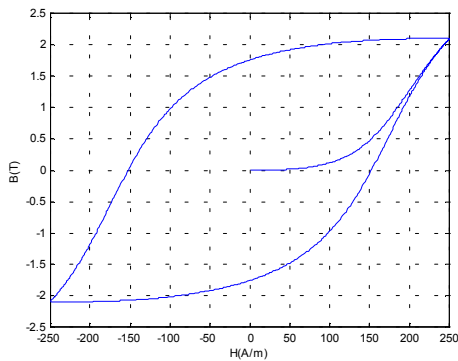


Figure III.25 Le cycle d'hystérésis pour $b=3$

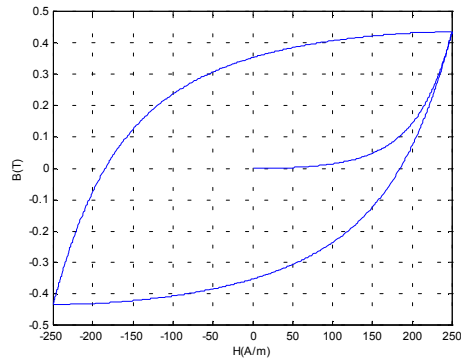


Figure III.26 Le cycle d'hystérésis pour $b=5$

III-8 Formulation mathématique du phénomène d'hystérésis

L'expression analytique de la fonction de distribution de Lorentz modifiée, permet une formulation mathématique sous forme intégrale et simple à manipuler du phénomène d'hystérésis généré par le modèle de Preisach. Celle ci est décrite par l'équation :

$$M_i(t) = M_{i-1}(t) \pm 2 \iint_s \frac{ka^2}{\left(a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)^2\right) \left(a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)^2\right)} d\alpha d\beta \quad (\text{III.10})$$

où M_{i-1} est l'aimantation à l'instant précédent.

s représente le domaine d'intégration dans le triangle de Preisach lorsque H varie (fig III.27).

III-8-1 Formulation de la courbe de première aimantation

Comme il a été montré au (§ III.5), que la courbe de première aimantation est obtenue en appliquant un champ d'excitation croissant à un matériau ferromagnétique préalablement désaimanté. La formulation mathématique, correspondante à cette courbe est déduite de l'équation (III.10) tel que l'on a [15]:

$$M_i(t) = M_{i-1}(t) + 2 \int_{H(t-1)}^{H(t)} \left(\frac{ka^2}{\left(a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)^2\right)^{-\alpha}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{d\beta}{\left(a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)^2\right)^{-\alpha}} \right) d\alpha \quad (III.11)$$

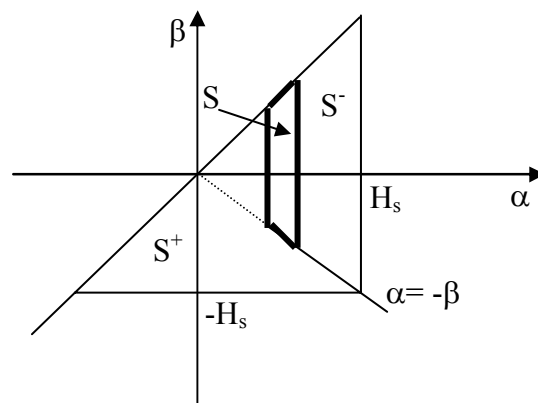


Figure III.27 : le triangle de Preisach correspondant à la courbe de Première aimantation

On pose :

$$Y(t) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{d\beta}{\left(a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)^2\right)^{-\alpha}} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1/a}{\left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)\right)^2\right)} d\beta \quad (III.12)$$

et

$$X = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\beta}{H_c} + b \right) \right) \Rightarrow dX = \frac{1}{H_c \sqrt{a}} d\beta \quad (\text{III.13})$$

Rappelons que :

$$\int \frac{1}{(1+X^2)} dX = \arctan(X) + \text{constante} \quad (\text{III.14})$$

Les bornes d'intégration sont alors :

$$-\alpha \leq \beta \leq +\alpha \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-\alpha}{H_c} + b \right) \leq X \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\alpha}{H_c} + b \right) \quad (\text{III.15})$$

(III.12) devient :

$$Y(t) = \int_{\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-\alpha}{H_c} + b \right)}^{\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\alpha}{H_c} + b \right)} \frac{\sqrt{a} H_c / a}{(1+X^2)} dX \quad (\text{III.16})$$

Finalement l'expression de l'aimantation est :

$$M_i(t) = M_{i-1}(t) + 2 \int_{H(t_{i-1})}^{H(t_i)} \left(\frac{ka\sqrt{a}H_c}{\left(a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b \right)^2 \right)} \left(\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\alpha}{H_c} + b \right) \right) - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-\alpha}{H_c} + b \right) \right) \right) \right) d\alpha \quad (\text{III.17})$$

III-8-2 Formulation de la branche descendante du cycle majeur

En appliquant un champ d'excitation décroissant allant jusqu'à $-H_s$, à partir de l'état saturé $+H_s$, chaque hystéron doit par définition basculer vers l'état bas (-1) et il devient partie du domaine S^- (fig III.4.c). Ainsi, on décrit la branche descendante du cycle représentée par :

$$M_i(t) = M_{i-1}(t) - 2 \int_{H(t)}^{H(t-1)} \left(\frac{ka^2}{\left(a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)^2\right)} \int_{\beta}^{H_s} \frac{d\alpha}{\left(a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)^2\right)} \right) d\beta \quad (\text{III.18})$$

Supposons que :

$$Z_1(t) = \int_{\beta}^{H_s} \frac{d\alpha}{\left(a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)^2\right)} = \int_{\beta}^{H_s} \frac{1/a}{\left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)\right)^2\right)} d\alpha \quad (\text{III.19})$$

Procédons de la même manière que le cas précédent et considérons :

$$X = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\alpha}{H_c} - b \right) \right) \Rightarrow dX = \frac{1}{H_c \sqrt{a}} d\alpha \quad (\text{III.20})$$

donc

$$\beta \leq \alpha \leq H_s \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\beta}{H_c} - b \right) \leq X \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{H_s}{H_c} - b \right) \quad (\text{III.21})$$

(III.19) s'écrit alors :

$$Z_1(t) = \int_{\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\beta}{H_c} - b \right)}^{\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{H_s}{H_c} - b \right)} \frac{\sqrt{a} H_c / a}{(1 + X^2)} dX \quad (\text{III.22})$$

Avec ceci (III.18) devient :

$$M_i(t) = M_{i-1}(t) - 2 \int_{H(t)}^{H(t-1)} \left(\frac{ka\sqrt{a}H_c}{\left(a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)^2\right)} \left(\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{H_s}{H_c} - b \right) \right) - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\beta}{H_c} - b \right) \right) \right) \right) d\alpha \quad (\text{III.23})$$

III-8-3 Formulation de la branche ascendante du cycle majeur

La branche ascendante du cycle est obtenue par application d'un champ croissant allant jusqu'à l'état saturé $+H_s$. Dans cet état, c'est la surface S^+ qui occupe tout le plan de Preisach (fig III.4.b). On en déduit :

$$M_i(t) = M_{i-1}(t) + 2 \int_{H(\alpha_{i-1})}^{H(\alpha_i)} \left(\frac{ka^2}{\left(a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b\right)^2\right)^{-H_s}} \int_{-H_s}^{+\alpha} \frac{d\beta}{\left(a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)^2\right)^{-H_s}} \right) d\alpha \quad (\text{III.24})$$

Supposons que :

$$Z_2(t) = \int_{-H_s}^{+\alpha} \frac{d\beta}{\left(a + \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)^2\right)^{-H_s}} = \int_{-H_s}^{\alpha} \frac{1/a}{\left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\beta}{H_c} + b\right)\right)^2\right)^{-H_s}} d\beta \quad (\text{III.25})$$

Procédons de la même manière que le cas précédent et considérons :

$$X = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\beta}{H_c} + b \right) \right) \Rightarrow dX = \frac{1}{H_c \sqrt{a}} d\beta \quad (\text{III.26})$$

donc

$$-H_s \leq \beta \leq \alpha \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-H_s}{H_c} + b \right) \leq X \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\alpha}{H_c} + b \right) \quad (\text{III.27})$$

(III.25) s'écrit alors :

$$Z_2(t) = \int_{\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-H_s}{H_c} + b \right)}^{\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\alpha}{H_c} + b \right)} \frac{\sqrt{a} H_c / a}{(1 + X^2)^{-H_s}} dX \quad (\text{III.28})$$

(III.24) devient alors :

$$M_i(t) = M_{i-1}(t) + 2 \int_{H(t_{i-1})}^{H(t_i)} \left(\frac{k a \sqrt{a} H_c}{\left(a + \left(\frac{\alpha}{H_c} - b \right)^2 \right)} \left(\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{\alpha}{H_c} + b \right) \right) - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{-H_s}{H_c} + b \right) \right) \right) \right) d\alpha \quad (\text{III.29})$$

CONCLUSION

Nous nous sommes intéressés, dans ce chapitre à la description du modèle de Preisach ainsi qu'à son identification c'est à dire la détermination de la densité $\rho(\alpha, \beta)$.

Différentes méthodes de détermination de celle-ci ont été citées. Nous avons opté pour les méthodes analytiques et en particulier la fonction de distribution de Lorentz modifiée.

Caractérisée par des calculs simples à effectuer, cette fonction semble pouvoir modéliser n'importe quelle forme de cycle.

Une formulation mathématique du modèle de Preisach a également été présentée dans le but d'une modélisation du phénomène d'hystérésis et de son implémentation dans un code de calcul par éléments finis. Ceci fera l'objet du prochain chapitre.

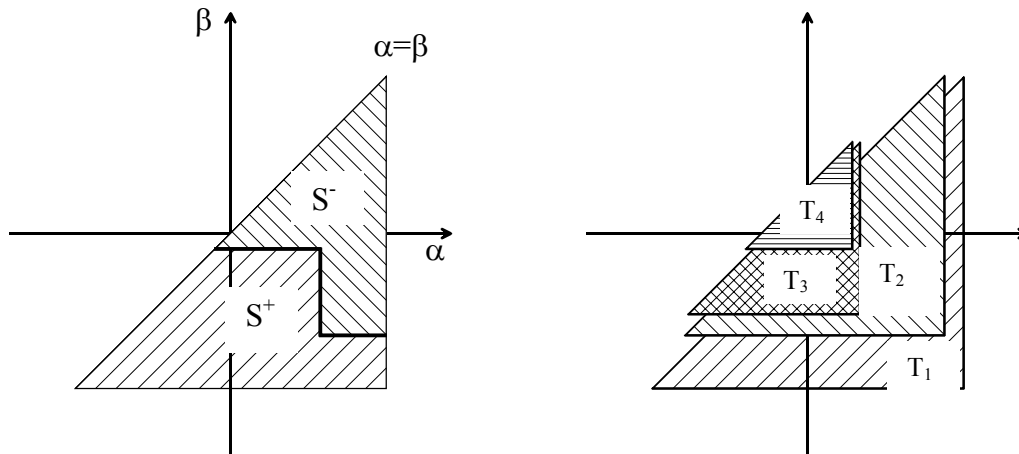


Figure III.2 : Décomposition du plan de Preisach en triangles

III-2-2-1 La méthode d'Everett

Une formulation du modèle de Preisach basée sur la fonction d'Everett est proposée. C'est une approche moins intuitive car elle s'éloigne du concept des opérateurs élémentaires, mais qui offre l'avantage de contourner les intégrales dans l'expression de l'aimantation [alex].

Celle-ci s'exprime par la relation suivante :

$$E(x,y) = \iint_{T(x,y)} \rho(\alpha,\beta) d\alpha d\beta \quad (\text{III.1})$$

$E(x,y)$ est l'intégrale de la densité de Preisach sur un triangle rectangle $T(x,y)$ inclus dans le plan de Preisach, avec x, y les coordonnées du sommet de l'angle droit et dont l'hypoténuse est confondue avec la droite $\alpha=\beta$.

Les sous-domaines S^+ et S^- du plan de Preisach, peuvent alors s'exprimer à l'aide d'une somme de triangles élémentaires dont les points (x,y) correspondent aux sommets de la frontière de Preisach (fig III.2)

Si la fonction d'Everett est connue sur l'ensemble du plan de Preisach, l'aimantation peut être obtenue par une combinaison linéaire de plusieurs fonctions d'Everett [bena].

INTEGRATION DU MODELE DE PREISACH DANS UN CODE DE CALCUL PAR ELEMENTS FINIS

IV-1 INTRODUCTION

La représentation du comportement physique des systèmes électromagnétiques nécessite le développement de modèles relativement précis, pour les introduire dans des codes de calcul de champ. En effet, trouver le modèle optimal en précision et temps de calcul semble indispensable. Néanmoins, le calcul numérique du champ magnétique dans les matériaux hystérétiques, présente une difficulté majeure dans le traitement itératif de la non linéarité associée au phénomène d'hystérésis.

En partant d'une présentation des équations fondamentales de Maxwell gouvernant l'ensemble des problèmes électromagnétiques, nous nous proposons dans ce chapitre, de mettre en évidence la modélisation de l'hystérésis par l'implantation du modèle de Preisach dans un code de calcul éléments finis, pour la résolution de l'équation magnétostatique 2D.

IV-2 EQUATIONS GENERALES DE MAXWELL

D'après la théorie de Maxwell, les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} , sont déterminés dans le cas général à partir des densités de charge ρ et de courant \vec{J} par un système de quatre équations fondamentales appelées équations de Maxwell. Celles ci sont exprimées sous la forme suivante [3]:

$$\text{Rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Loi de FARADAY} \quad (\text{IV.1})$$

$$\text{Rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{Loi d'AMPERE-MAXWELL} \quad (\text{IV.2})$$

$$\text{Div} \vec{B} = 0 \quad \text{Loi de conservation du flux} \quad (\text{IV.3})$$

$$\text{Div} \vec{D} = \rho \quad \text{Loi de GAUSS} \quad (\text{IV.4})$$

avec :

\vec{E} : Champ électrique en (V/m).

\vec{B} : Induction magnétique en (T).

\vec{H} : Champ magnétique en (A/m).

\vec{J} : Densité de courant en (A/m²).

\vec{D} : Induction électrique en (C/m²).

ρ : Densité de charge volumique en (C/m³).

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: Densité de courant de déplacement en (A/m²).

Des relations supplémentaires doivent venir compléter les équations de Maxwell en fonction des propriétés spécifiques des milieux auxquels on les appliquera.

De telles relations sont appelées équations constitutives, qui dans le cas général s'écrivent :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \tag{IV.5}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{B}_r \tag{IV.6}$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{V}_d \wedge \vec{B}) + \vec{J}_s \tag{IV.7}$$

avec :

ϵ : Permittivité en (F/m).

μ_0 : Perméabilité magnétique du vide en (H/m).

B_r : Induction magnétique rémanente (cas d'aimants permanents) en (T).

σ : Conductivité électrique en (S/m).

V_d : Vecteur vitesse des pièces en mouvement en (m/s).

J_s : Densité de courant source ou d'excitation en (A/m²).

Selon les matériaux utilisés, μ , ϵ et σ peuvent être soit des scalaires, modélisant alors le comportement de matériaux isotropes, soit des tenseurs qui permettent de tenir compte des effets d'anisotropie souvent rencontrés dans les machines électriques [21].

Afin d'assurer l'unicité de la solution du modèle mathématique regroupant les équations de Maxwell, il est nécessaire de définir les conditions aux limites associées aux champs.

Dans le cas des états quasi-stationnaires, ces dernières sont exprimées par les relations suivantes :

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n}_{12} = 0 \quad (\text{IV.8})$$

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \wedge \vec{n}_{12} = 0 \quad (\text{IV.9})$$

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \wedge \vec{n}_{12} = k \quad (\text{IV.10})$$

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n}_{12} = \rho_s \quad (\text{IV.11})$$

avec :

- \vec{n}_{12} : désigne la normale à l'interface séparant les milieux 1 et 2.
- ρ_s : densité des charges surfaciques.
- k : densité de courant surfacique

A partir de ces équations, on montre qu'il y a :

- continuité des composantes respectivement normale de l'induction magnétique B et tangentielle du champ électrique E à la traversée de la surface de séparation des deux milieux 1 et 2.
- discontinuité des composantes respectivement tangentielle du champ magnétique H et normale de l'induction électrique D par la présence du courant et des charges surfaciques.

Les équations de Maxwell décrivent globalement tous les phénomènes électromagnétiques. Suivant les dispositifs étudiés, certains phénomènes deviennent négligeables, les équations se découplent alors en donnant naissance à des modèles plus simples.

Parmi ces modèles, on en distingue [20],[21] :

- Modèle électrostatique.
- Modèle électrocinétique.
- Modèle magnétostatique scalaire.
- Modèle magnétostatique vectoriel.
- Modèle magnétodynamique.

IV-3 METHODE DE RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Les formulations mathématiques relatives aux modèles cités précédemment, ne peuvent être résolues de manière analytique dans le cas des systèmes électromagnétiques complexes. Il est donc nécessaire d'avoir recours à des méthodes numériques telle que la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis (MEF), a d'abord trouvé un domaine d'application privilégié en mécanique des fluides tels que : calcul des écoulements visqueux par résolution des équations de Navier-Stokes et calcul des écoulements transsoniques de fluides parfaits par résolution de l'équation complète du potentiel. Elle est fondée sur une formulation intégrale du phénomène analysé plutôt que sur la forme différentielle que représente l'équation aux dérivées partielles et les conditions aux limites. Cette formulation peut être de type variationnel ou de type projectif (méthode de Galerkin),.

Le principe de MEF est de découper le domaine d'intégration à deux ou trois dimensions, en domaines élémentaires de taille finie. Sur chacun de ces sous domaines, la fonction inconnue est approchée par une combinaison linéaire de polynômes à une ou plusieurs variables de faible degré. Les coefficients de chaque polynôme sont déterminés par la valeur de la fonction en des points particuliers que l'on appelle les nœuds de l'élément. La condition de minimisation de l'intégrale conduit alors à la résolution du système d'équations algébriques obtenu[3].

IV-4 FORMULATION DU PROBLEME ELECTROMAGNETIQUE

Dans le cadre de notre travail, seul le modèle magnétostatique sera considéré.

IV-4-1 Formulation de l'équation magnétostatique

Dans le cas du modèle magnétostatique vectoriel, l'objet à étudier est supposé parcouru par des courants non nuls et le champ magnétique est produit par des sources de courant indépendantes du temps. Le terme $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ est donc nul, les champs électrique et magnétique sont alors découplés. On obtient alors les équations suivantes[21] :

$$Rot \vec{H} = \vec{J} \quad (IV.12)$$

$$Div \vec{B} = 0 \quad (IV.13)$$

On doit associer à ces équations, la loi de comportement des matériaux magnétiques :

$$B = \mu_0(H + M(H)) \quad (IV.14)$$

où M, l'aimantation du matériau.

La condition (IV.13), permet de définir une fonction vectorielle \vec{A} appelée potentiel vecteur magnétique telle que l'on a :

$$\vec{B} = Rot \vec{A} \quad (IV.15)$$

A partir des équations (IV.12), (IV.14) et (IV.15), on obtient la formulation du modèle magnétostatique exprimée en potentiel vecteur magnétique \vec{A} :

$$rot(rot \vec{A}) = \mu_0(\vec{J}_s + rot \vec{M}) \quad (IV.16)$$

Associée aux conditions aux limites, l'équation (IV.16) admet une infinité de solutions. En effet, si A est solution de (IV.16), il existe une fonction scalaire f, telle que :

$$A' = A + grad f \quad (IV.17)$$

est aussi solution de (IV.16).

pour que \vec{A} soit totalement défini, il faut également fixer la valeur de sa divergence :

$$Div \vec{A} = 0 \quad (IV.18)$$

Cette condition est appelée jauge de Coulomb, elle est utilisée afin d'assurer l'unicité de la solution.

IV-4-2 Formulation éléments finis du problème magnétostatique 2D

Comme la plupart des problèmes magnétiques, nous allons nous restreindre pour cette étude au cas bidimensionnel plan. Ainsi, les systèmes considérés, possèdent une symétrie de translation suivant la troisième dimension ou une symétrie d'axe de révolution.

Dans les deux cas, la direction du vecteur densité de courant \vec{J} , doit être perpendiculaire au plan d'étude. Le problème reste donc invariant suivant l'axe oz dans les coordonnées (x,y,z), ou suivant la révolution d'axe oz dans les coordonnées cylindriques (r,θ,z)[2].

Dans les calculs suivants, nous ne considérons que le cas d'un système à symétrie de révolution. Le champ magnétique, présente alors deux composantes suivant les axes or et oz dans un plan perpendiculaire à \vec{J} , impliquant ainsi qu'une seule composante pour le potentiel vecteur magnétique A suivant la direction orthoradiale (θ), qu'on désigne par $A_\theta(r,z)$.

Le problème magnétostatique régi par l'équation (IV.16), devient alors :

$$\left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2(rA_\theta)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2(rA_\theta)}{\partial z^2} \right) \right) = \mu_0 \left(\vec{J}_s + \frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} \right) \quad (\text{IV.19})$$

avec M_r et M_z sont respectivement les projections de l'aimantation M sur les axes or et oz.

On pose pour la suite des calculs, $rA_\theta = A$.

La méthode de Galerkin consiste à choisir des fonctions de projections ω_i pour lesquelles l'équation (IV.19) devient sous la forme :

$$\iint_{\Omega} \left[\omega_i \left(-\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) \right) \right] d\Omega = \iint_{\Omega} \left[\omega_i \mu_0 \left(\vec{J}_s + \frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} \right) \right] d\Omega \quad (\text{IV.20})$$

où : Ω représente le domaine d'étude ($d\Omega = drdz$).

En utilisant l'intégration par parties aux deux membres de l'expression (IV.20), on obtient:

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} \right) d\Omega - \left[\int_{\Gamma} -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial A}{\partial n} \right) \omega_i d\Gamma \right] = \iint_{\Omega} \omega_i \mu_0 \bar{J}_s d\Omega + \iint_{\Omega} \omega_i \mu_0 \left(\frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} \right) d\Omega \quad (IV.21)$$

Par l'introduction des conditions de Neumann homogènes ($\frac{\partial A}{\partial n}=0$), ou des conditions de Dirichlet en y imposant l'annulation de ω_i , il est possible de forcer l'intégrale sur Γ à zéro [22],[23].

La forme intégrale faible s'écrit alors :

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} \right) d\Omega = \iint_{\Omega} \omega_i \mu_0 \bar{J}_s d\Omega + \iint_{\Omega} \omega_i \mu_0 \left(\frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} \right) d\Omega \quad (IV.22)$$

IV-4-3 Discrétisation de la forme intégrale

La formulation faible n'est pas utilisable en tant que telle si l'on désire modéliser le problème numériquement. La MEF consiste à discrétiser le domaine Ω en entités élémentaires appelées éléments. Sur chacun de ces éléments, on choisit d'approcher la fonction A avec un certain degré d'interpolation.

Considérons un ensemble de NN fonctions indépendantes continues et dérivables par morceau ω_j appelées fonctions d'approximation (NN étant le nombre de nœuds du domaine discrétisé).

En utilisant l'approximation nodale, le potentiel A peut être approché par une combinaison linéaire de ces fonctions :

$$A = \sum_{j=1}^{NN} A_j \omega_j \quad (IV.23)$$

A_j : Valeurs inconnues du potentiel A en chaque nœud de chaque élément du domaine subdivisé.

Les fonctions de projections ω_i sont choisies par la méthode de Galerkinge, celle ci consiste à prendre ces fonctions, identiques aux fonctions d'approximations ω_j permettant ainsi l'obtention d'un système d'équations mieux adapté à une résolution numérique précise :

$$\sum_{j=1}^{NN} \left[\iint_{\Omega} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial r} \frac{\partial \omega_j}{\partial r} + \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \frac{\partial \omega_j}{\partial z} \right) d\Omega \right] A_j = \iint_{\Omega} \omega_i \bar{J}_s d\Omega + \iint_{\Omega} \omega_i \mu_0 \left(\frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} \right) d\Omega \quad (IV.24)$$

En choisissant un nombre de fonctions de projections ω_i égal au nombre de fonctions inconnues A_j , on obtient un système de NN équations avec NN inconnues.

Ce système est de la forme :

$$\sum_{j=1}^{NN} M_{ij} A_j = F_i + G_i \quad (IV.25)$$

avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial r} \frac{\partial \omega_j}{\partial r} + \frac{\partial \omega_i}{\partial z} \frac{\partial \omega_j}{\partial z} \right) d\Omega \quad (IV.26)$$

$$F_i = \iint_{\Omega} \omega_i \mu_0 \bar{J}_s d\Omega \quad (IV.27)$$

$$G_i = \iint_{\Omega} \mu_0 \left(M_r \frac{\partial \omega_i}{\partial z} - M_z \frac{\partial \omega_i}{\partial r} \right) d\Omega \quad (IV.28)$$

où F_i appelée vecteur source, il représente l'excitation due au courant.

G_i appelé aussi vecteur source contenant les non linéarités introduites par la loi de comportement d'un matériau. Dans notre cas, G_i est calculée en fonction de l'aimantation du matériau M.

La discrétisation du domaine d'étude permet d'approcher la fonction inconnue (dans ce cas le potentiel vecteur magnétique A), par un polynôme dont le degré peut varier d'une application à une autre [24]. Dans l'analyse des problèmes bidimensionnels, les éléments les plus employés sont de forme triangulaire (fig IV.1), la fonction d'approximation correspondante est un polynôme du premier degré de la forme :

$$A = a + bx + cy \quad (IV.29)$$

Cette fonction dépend des valeurs nodales A_i , A_j et A_k de chaque élément du découpage tel que :

$$\begin{cases} A_i = a + bx_i + cy_i \\ A_j = a + bx_j + cy_j \\ A_k = a + bx_k + cy_k \end{cases} \quad (IV.30)$$

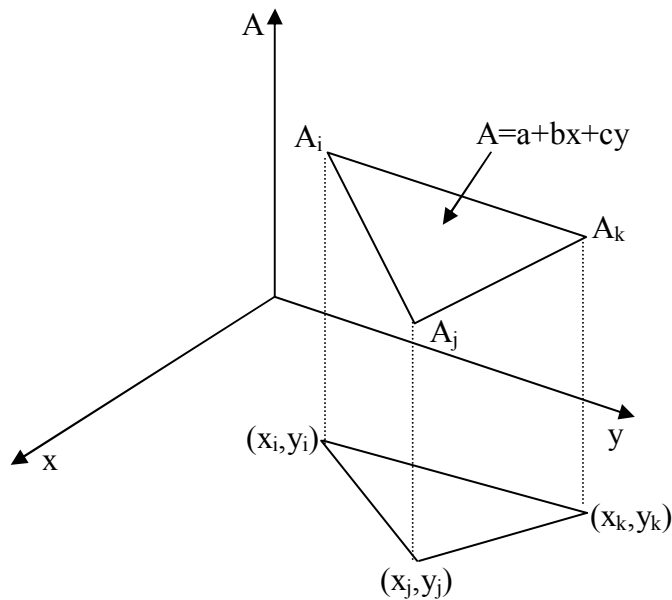


Figure IV.1 : Approximation de A sur un élément triangulaire

avec:

$$\begin{cases} A = A_i \text{ à } (x = x_i \text{ et } y = y_i) \\ A = A_j \text{ à } (x = x_j \text{ et } y = y_j) \\ A = A_k \text{ à } (x = x_k \text{ et } y = y_k) \end{cases} \quad (IV.31)$$

Les coefficients a , b et c sont déterminés à partir du système d'équations (IV.30) tel que :

$$\begin{cases} a= 1/2\Delta [(x_i y_k - x_k y_j)A_i + (x_k y_i - x_i y_k)A_j + (x_i y_j - x_j y_i)A_k] \\ b= 1/2\Delta [(y_j - y_k)A_i + (y_k - y_i)A_j + (y_i - y_j)A_k] \\ c= 1/2\Delta [(x_k - x_j)A_i + (x_i - x_k)A_j + (x_j - x_i)A_k] \end{cases} \quad (IV.32)$$

où Δ aire de l'élément triangulaire

2Δ déterminant du système d'équations (IV.30)

En substituant (IV.32) dans l'équation (IV.29), nous obtenons :

$$A=N_i A_i+N_j A_j+N_k A_k \quad (IV.33)$$

N_i, N_j et N_k sont appelées fonctions de forme

L'équation (IV.33) permet de réécrire le système d'équations (IV.26), (IV.27), et (IV.28) sous la forme suivante [23] :

$$M_{ij}=(b_i b_j + c_i c_j) \frac{\Delta}{r_m} \quad (IV.34)$$

$$F_i = \frac{\mu_0 j_s}{3} \Delta \quad (IV.35)$$

$$G_i = \mu_0 \Delta (b_i M_r - c_i M_z) \quad (IV.36)$$

avec r_m le rayon moyen.

IV-5 PRINCIPE DU CODE DE CALCUL ELEMENTS FINIS POUR LE TRAITEMENT DU PROBLEME MAGNETOSTATIQUE NON LINEAIRE

IV-5-1 Organigramme de traitement du problème magnétostatique non linéaire

La méthode des éléments finis, permet de résoudre les équations de Maxwell dans des conditions très générales et en particulier en prenant en compte le comportement non linéaire des matériaux magnétiques. Ainsi, on est amené à résoudre un système d'équation non linéaire suivant l'organigramme de la figure (IV.2).

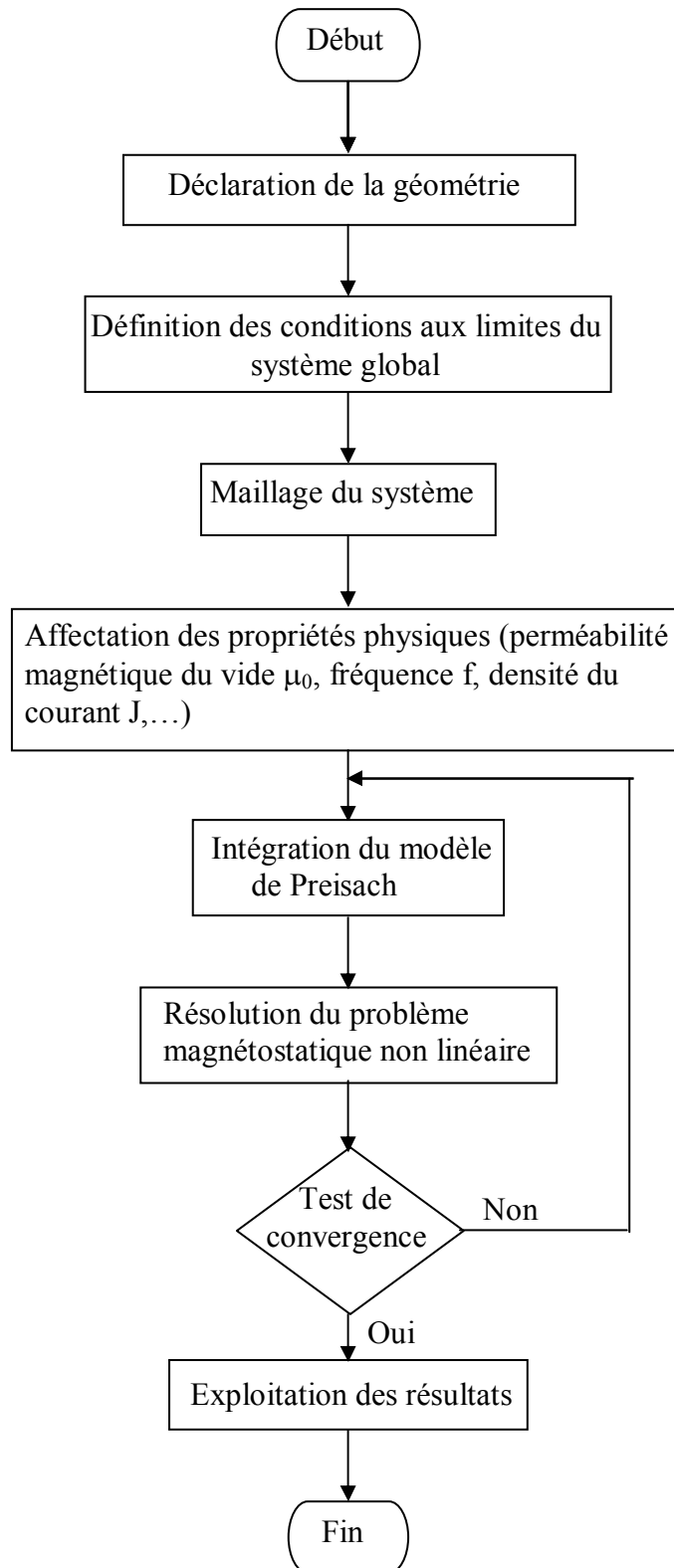


Figure IV.2 : Organigramme du principe de résolution du problème magnétostatique non linéaire.

IV-5-2 Algorithme de résolution de l'équation magnétostatique non linéaire

Contrairement au cas où seule la non linéarité de la loi de comportement magnétique (courbe de première aimantation) est prise en compte, avec le phénomène d'hystérésis, il est délicat d'utiliser l'une des méthodes numériques classiques (Newton-Raphson) pour résoudre l'équation non linéaire de manière itérative.

Pour cette raison, un programme a été développé sous environnement Matlab, permettant la résolution du problème magnétostatique non linéaire. En effet, il consiste à résoudre itérativement l'équation considérée jusqu'à la convergence de la solution en intégrant chaque fois le calcul du cycle d'hystérésis au moyen du modèle de Preisach scalaire.

Néanmoins, la difficulté majeure de ce calcul réside dans le choix du facteur de relaxation.

Le processus itératif consiste à rechercher la solution du système à une itération i donnée à partir d'une estimation de l'aimantation basée sur les résultats de l'itération précédente $i-1$.

Supposons qu'initialement, l'échantillon est dans son état désaimanté, la résolution du système d'équations (IV.25) permet le calcul du potentiel vecteur magnétique A . Celui-ci permet à son tour la détermination de l'induction magnétique B à partir de la loi (IV.15). Cette induction fournit le champ magnétique H qui sera relaxé afin d'assurer la rapidité de convergence.

Une fois que B et H d'une itération sont connus, on peut calculer la nouvelle aimantation M au moyen du modèle de Preisach. La figure (IV.3) illustre le schéma de cet algorithme.

IV-6 APPLICATION DU MODELE DE PREISACH EN CALCUL DE CHAMP

IV-6-1 Dispositif étudié

Afin de valider la méthode décrite précédemment, nous nous proposons un exemple test défini par un dispositif de chauffage par induction (fig IV.4).

Ce dispositif est composé d'une charge de forme cylindrique pleine, de diamètre $\varnothing = 8.10^{-2}$ m et de longueur $L = 4.10^{-1}$ m, entourée d'une bobine d'excitation de hauteur 50.10^{-2} m, alimentée par un courant sinusoïdal de densité $J_{\max} = 10^{+5}$ A/m² à la fréquence $f = 0.5$ Hz (régime statique).

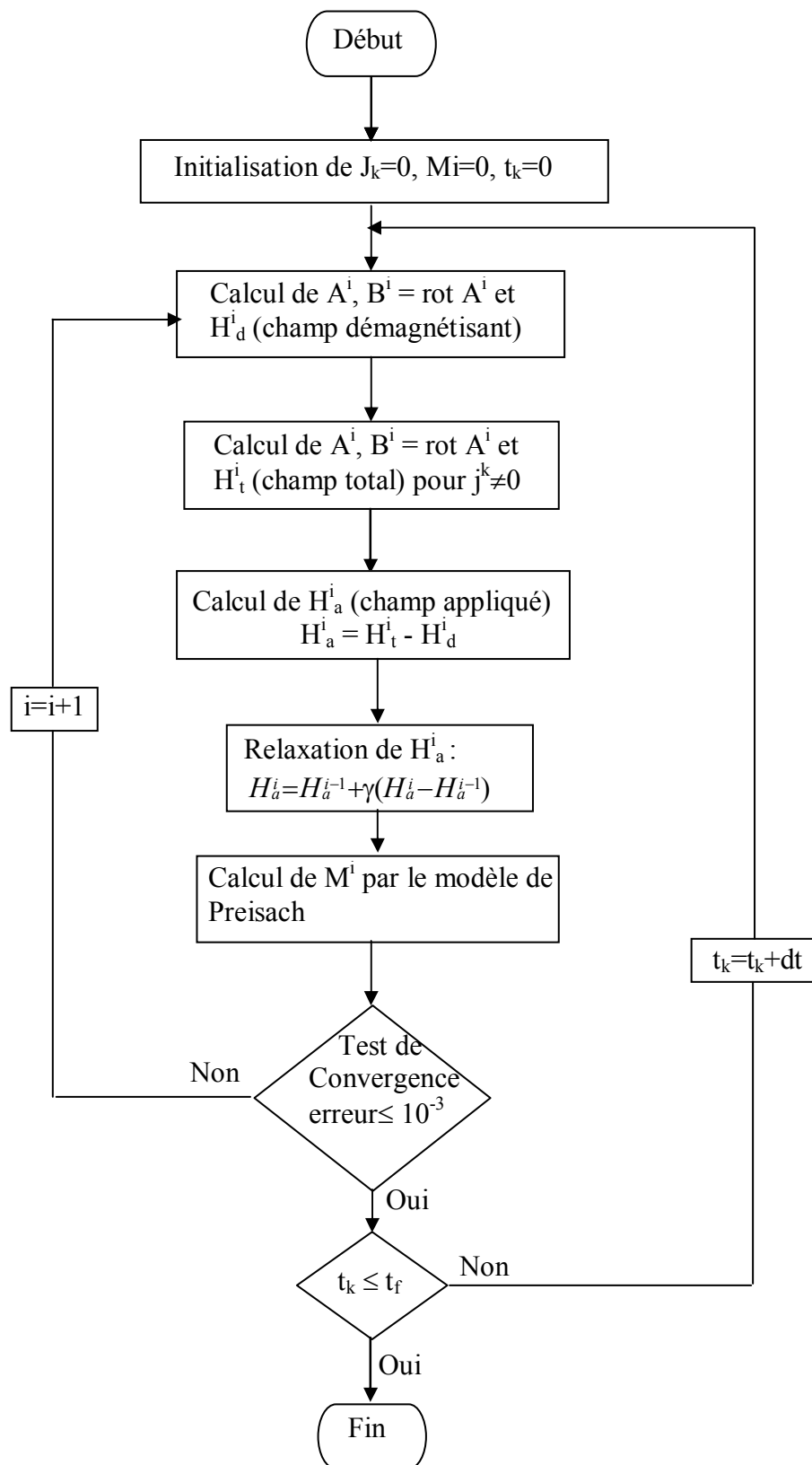


Figure IV.3 : Algorithme de résolution de l'équation magnétostatique non linéaire avec prise en compte de l'hystérésis

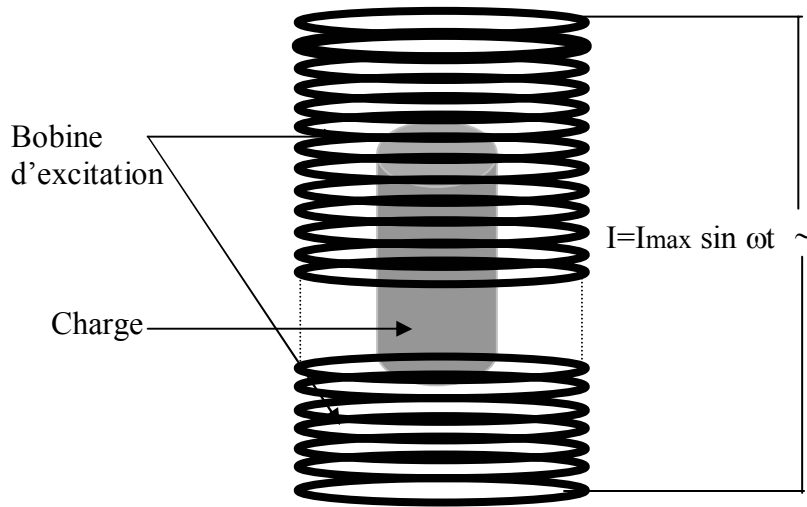


Figure IV.4 : Schéma d'un dispositif de chauffage par induction

Compte tenu de la nature axisymétrique du système, seul le quart du domaine d'étude sera considéré (figIV.5). Notons que pour des raisons de simplicité, la bobine d'excitation est représentée par un seul conducteur ayant la même forme que la charge.

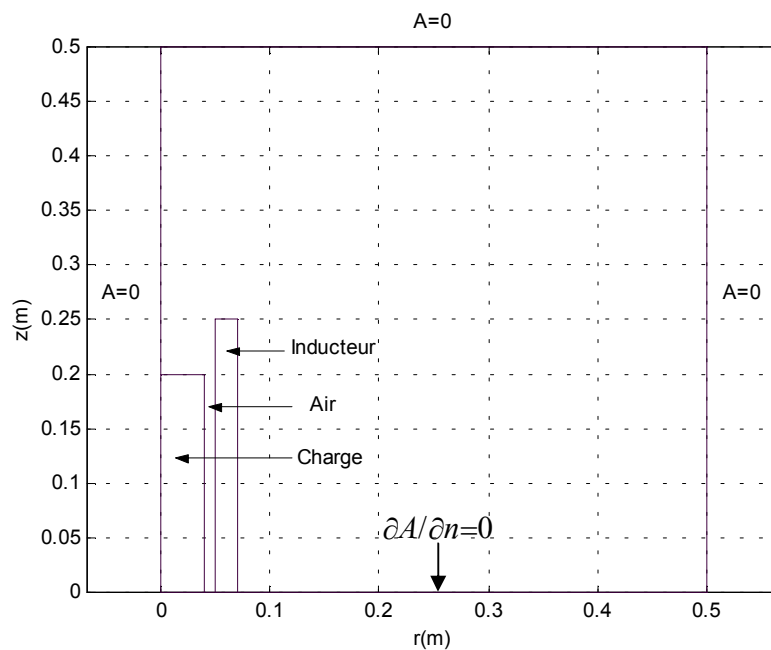


Figure IV.5: Domaine d'étude du problème axisymétrique avec les conditions aux limites.

IV-7 EXPLOITATION DES RESULTATS

Nous présentons dans cette partie, les résultats obtenus de la résolution de l'équation magnétostatique avec prise en compte de l'hystérésis, en considérant deux valeurs de l'excitation J .

IV-7-1 Résolution de l'équation magnétostatique pour $J_{\max}=10^{+5}$ A/m²

IV-7-1-1 Evolution des cycles d'hystérésis B(H)

Nous avons sélectionné quelques éléments du maillage au niveau de la charge (fig IV.6), afin d'évaluer la loi de comportement B(H) après intégration du modèle de Preisach dans le code de calcul MEF (fig IV.7). Ainsi, nous constatons une faible variation voire insignifiante entre les différents cycles (fig IV.8). Ceci peut être justifié en fait par la géométrie du dispositif qui permet d'imposer une répartition uniforme du champ (charge plongée entièrement au centre de l'inducteur) et par l'absence de l'effet de peau dû à la faible fréquence utilisée.

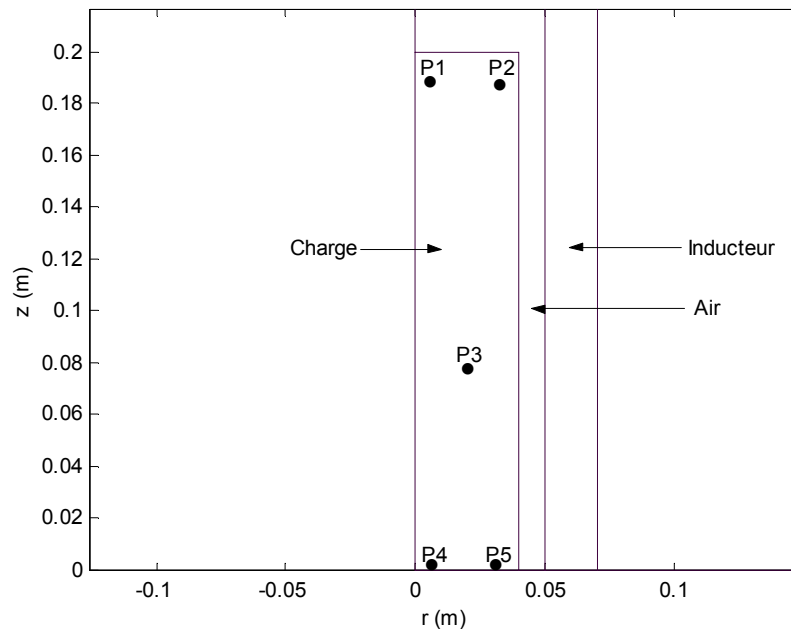


Figure IV.6: Position des points sélectionnés au niveau de la charge

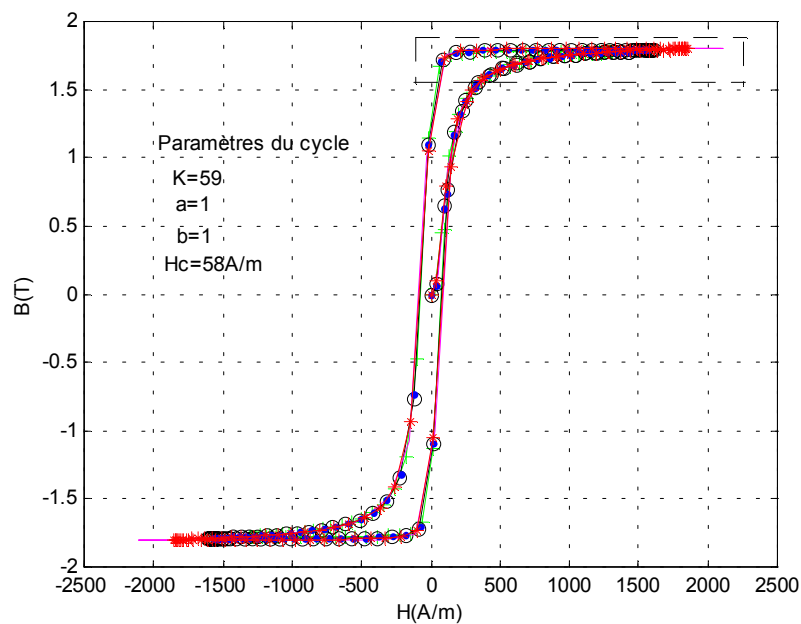


Figure IV.7 : Evolution des cycles d'hystérésis en fonction des éléments sélectionnés pour $J_{\max}=10^{+5} \text{ A/m}^2$

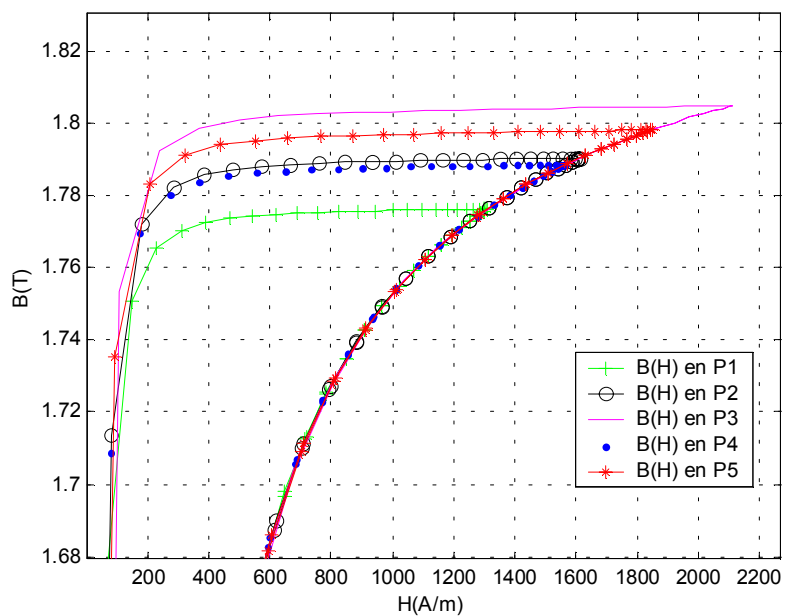


Figure IV.8: Evolution des cycles d'hystérésis en fonction des éléments sélectionnés (zoom).

IV-7-1-2 Evolution des formes d'ondes H(t)

Les figures (IV.9) et (IV.10), illustrent l'évolution temporelle du champ d'excitation H pour les mêmes éléments sélectionnés du maillage. H(t) présente la même forme sinusoïdale que celle du courant imposé (alimentation en courant) en tous les points choisis.

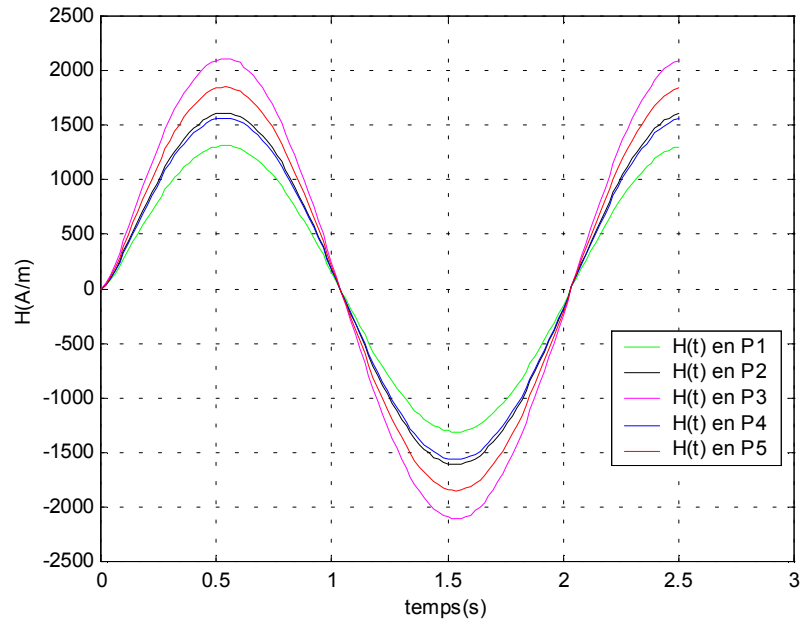


Figure IV.9 : Evolution temporelle du champ magnétique H pour $J_{\max}=10^{+5}$ A/m².

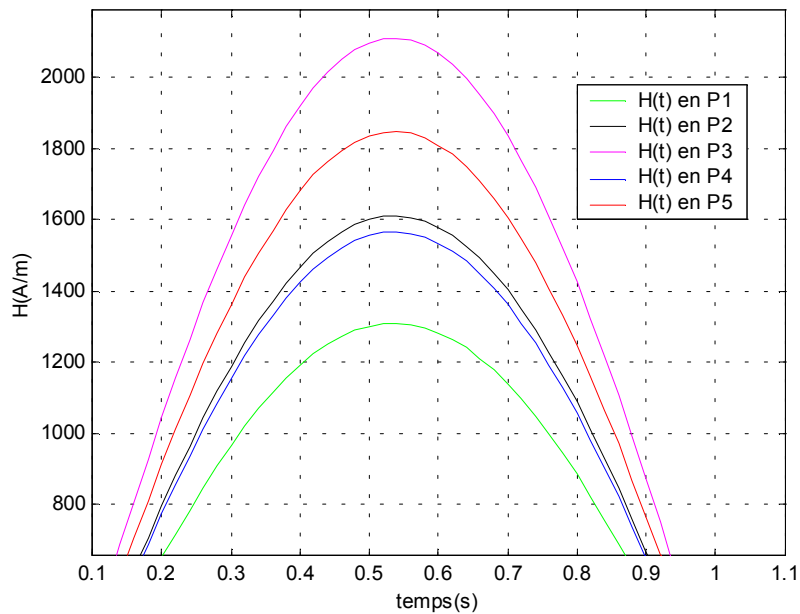


Figure IV.10: Evolution temporelle du champ magnétique H en fonction des éléments sélectionnés (zoom).

IV-7-1-3 Evolution des formes d'ondes B(t)

Les figures (IV.11) et (IV.12) représentent l'évolution temporelle de l'induction magnétique déterminée pour les mêmes points choisis que précédemment. Imposer un champ d'excitation $H(t)$ sinusoïdal (alimentation en courant), $B(t)$ est alors une fonction périodique non sinusoïdale, ceci traduit l'effet de la saturation sur la déformation de l'onde.

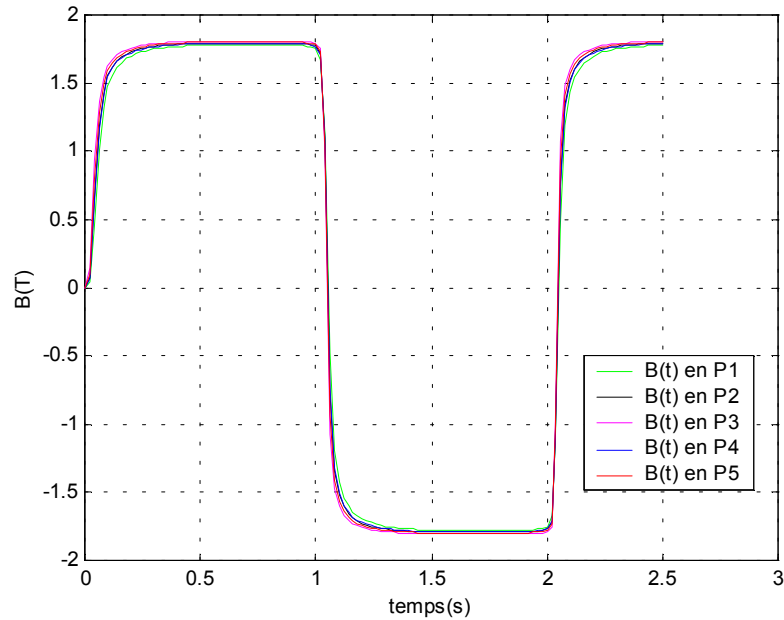


Figure IV.11 : Evolution temporelle de l'induction magnétique B pour $J_{\max} = 10^5 \text{ A/m}^2$

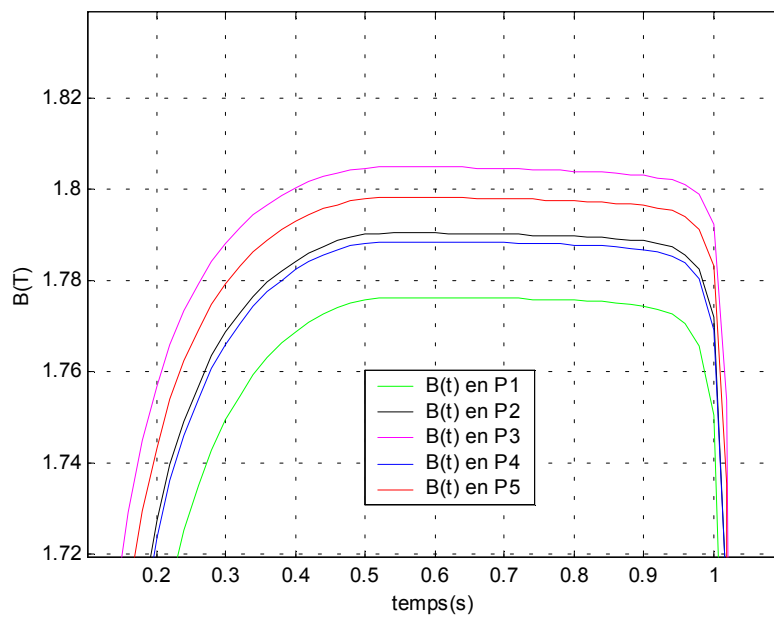


Figure IV.12 : Evolution temporelle de l'induction magnétique B en fonction des éléments sélectionnés (zoom).

IV-7-1-4 Variation radiale et axiale du potentiel vecteur magnétique A

Les figures (IV.13) et (IV.14) illustrent respectivement les variations radiale et axiale du vecteur potentiel magnétique A. On remarque bien que la valeur de A est maximale au niveau de l'inducteur puis diminue progressivement jusqu'à s'annuler aux limites du domaine d'étude.

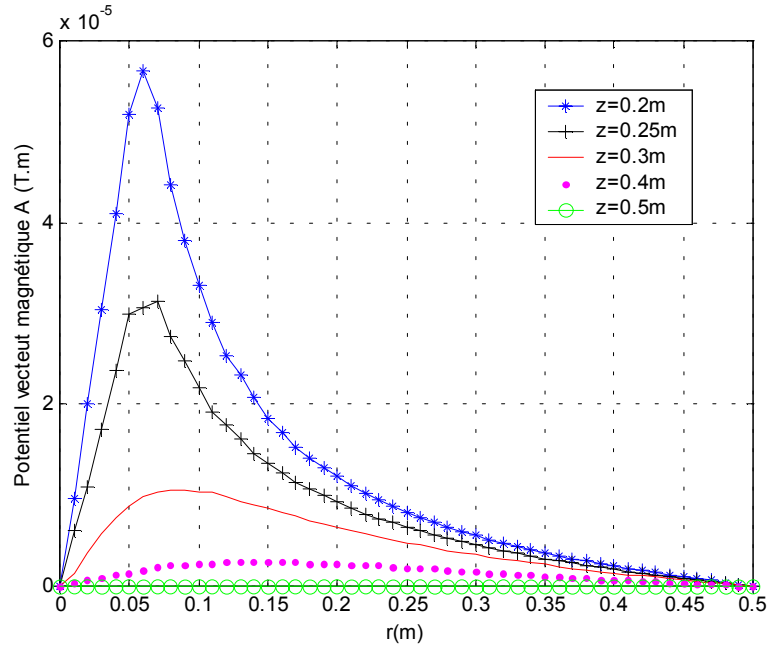


Figure IV.13 : Variation radiale du potentiel vecteur magnétique A pour $J_{\max}=10^{+5} \text{ A/m}^2$.

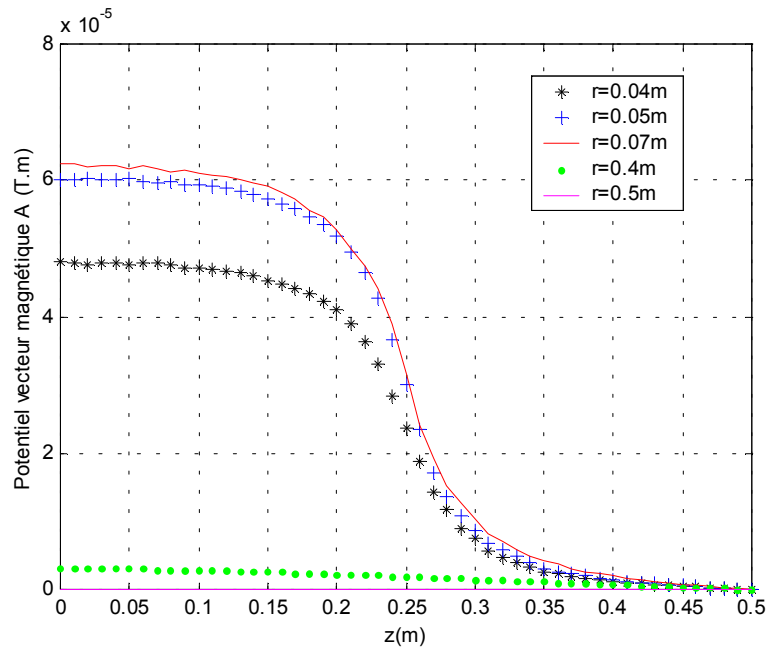


Figure IV.14: Variation axiale du potentiel vecteur magnétique A pour $J_{\max}=10^{+5} \text{ A/m}^2$.

IV-7-1-5 Lignes équipotentielles A

La figure (IV.15) représente les lignes équipotentielles A qui sont fortement concentrées au niveau de la charge. Ceci permet de caractériser le matériau choisi, d'une forte perméabilité.

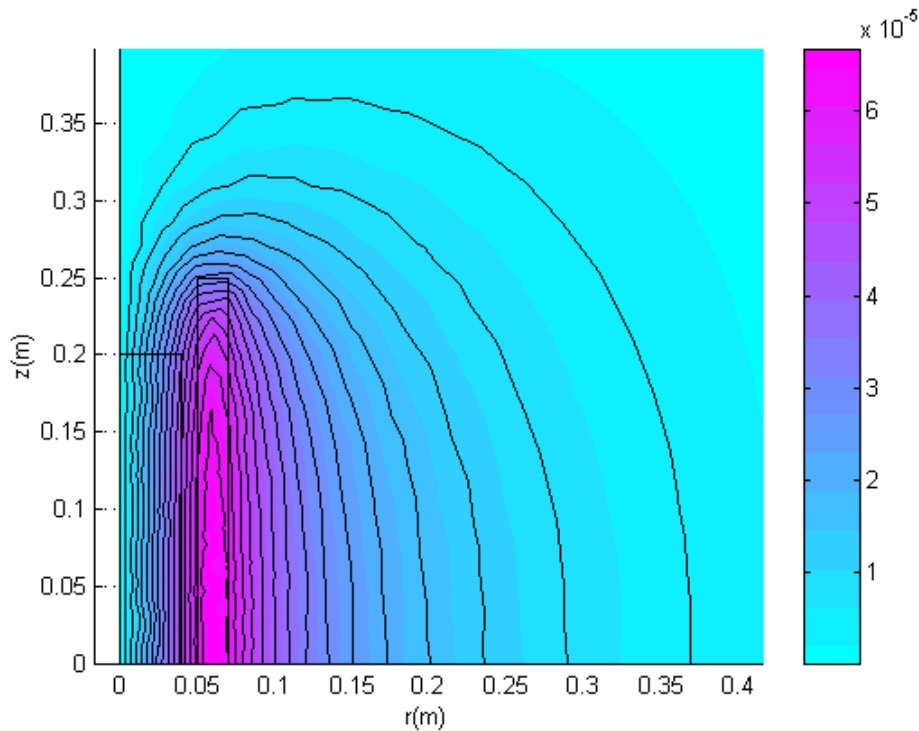


Figure IV.15: Les lignes équipotentielles A pour $J_{\max}=10^{+5} \text{ A/m}^2$

IV-7-2 Résolution de l'équation magnétostatique pour $J_{\max}=5.10^{+3} \text{ A/m}^2$

Le choix d'une excitation faible, permet de visualiser des cycles mineurs reliés entre eux (fig IV.16), dont les sommets forment la partie initiale de la courbe de première aimantation.

D'autre part la forme d'onde $H(t)$ (fig IV.17) garde la même forme sinusoïdale que dans le cas d'une forte excitation, tandis que $B(t)$, est quasi-sinusoïdale (IV.18), car le point caractéristique de l'état magnétique local parcourt dans ce cas un cycle d'hystérésis de faibles amplitudes mettant ainsi, le matériau à l'abri de la saturation.

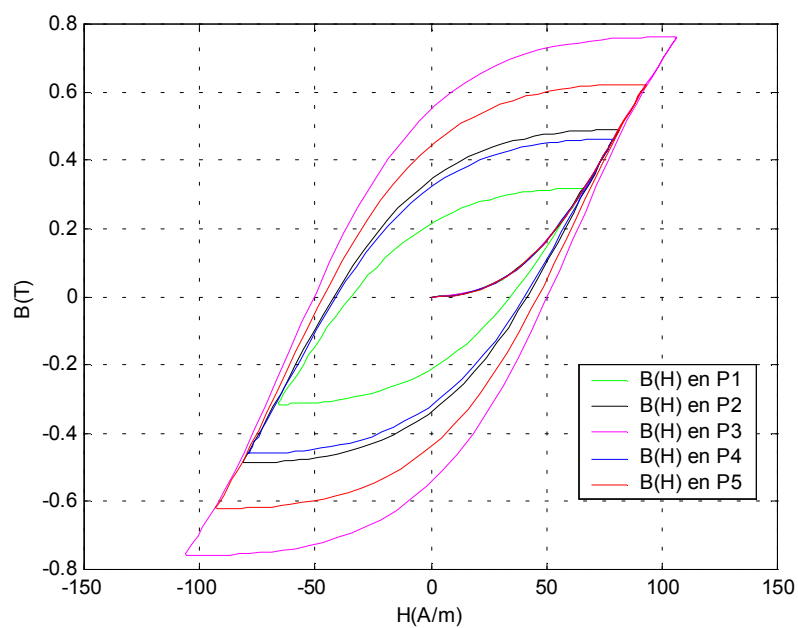


Figure IV.16 : Evolution des cycles d'hystérésis pour $J_{\max} = 5.10^{+3} \text{ A/m}^2$

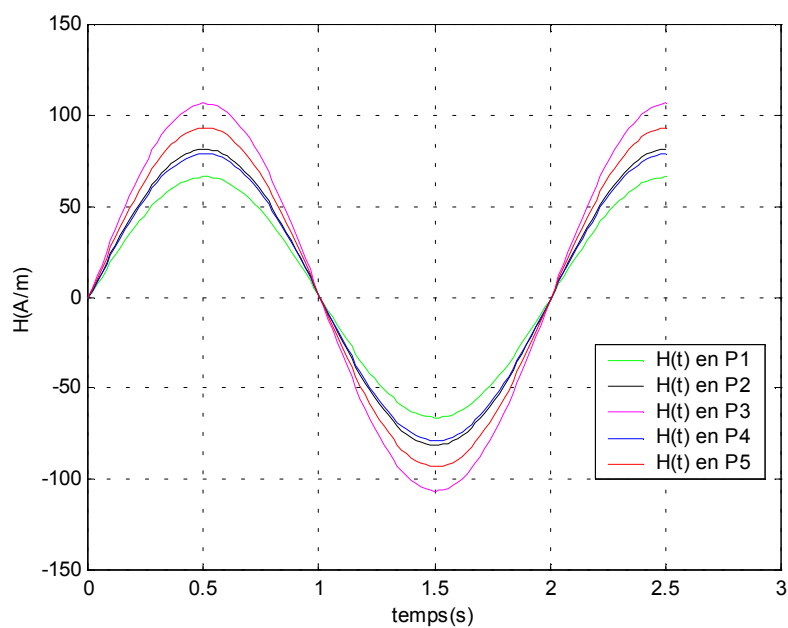


Figure IV.17 : Evolution temporelle du champ magnétique H pour $J_{\max} = 5.10^{+3} \text{ A/m}^2$.

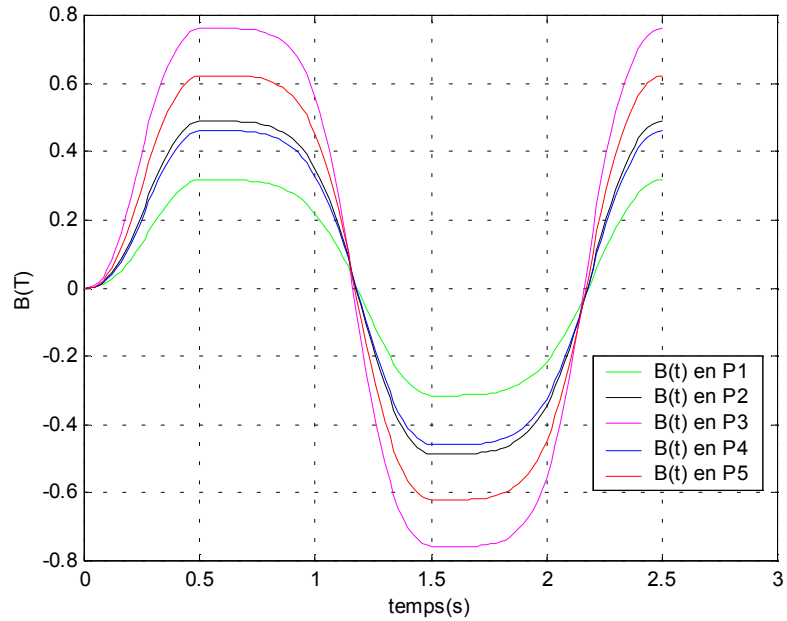


Figure IV.18 : Evolution temporelle de l'induction magnétique B pour $J_{\max}=5.10^{+3} \text{ A/m}^2$.

Les figures (IV.19), (IV.20) et (IV.21) représentent respectivement les variations radiale et axiale, ainsi que les lignes équipotentielles A . La valeur du potentiel vecteur magnétique demeure toujours maximale au niveau de l'inducteur dans le cas d'un courant d'excitation faible.

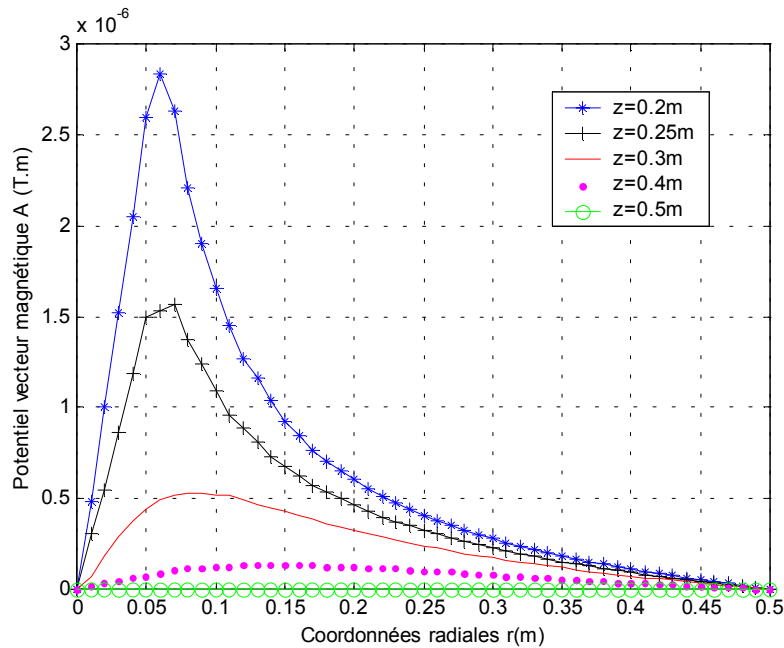


Figure IV.19: Variation radiale du potentiel vecteur magnétique A pour $J_{\max}=5.10^{+3} \text{ A/m}^2$

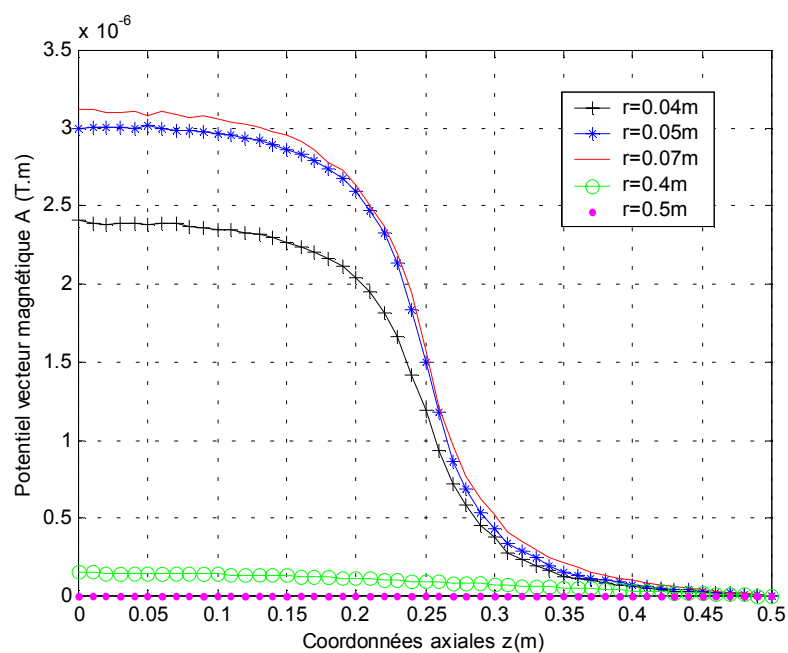


Figure IV.20: Variation axiale du potentiel vecteur magnétique A pour $J_{\max}=5.10^{+3} \text{ A/m}^2$

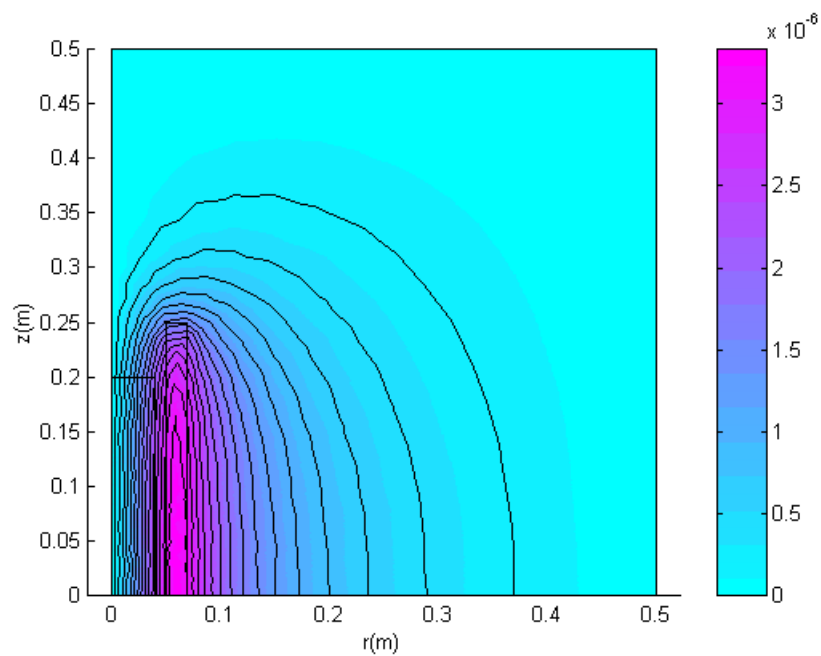


Figure IV.21: Les lignes équipotentielles A pour $J_{\max}=5.10^{+3} \text{ A/m}^2$

IV-8 Illustration de la convergence

La convergence joue un rôle central dans le traitement des méthodes itératives liées aux problèmes non linéaires. Par ailleurs, la méthode basée sur le développement en série de Taylor du résidu, limité au premier ordre diverge par manque de précision lorsqu'on est trop éloigné de la solution finale [25].

L'introduction d'un facteur de relaxation γ permet de corriger cet inconvénient, en pondérant la correction Δx^k . On écrit donc pour la solution à l'itération $k+1$:

$$R(x^k) + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_{x=x^k} \Delta x^k = 0 \quad \text{et} \quad x^{k+1} = x^k + \gamma \Delta x^k \quad (\text{IV.37})$$

On cherche la solution x qui annule le résidu en chacun des nœuds.

Une telle solution permet la convergence des calculs, en utilisant une relation de pondération du champ magnétique H de la forme :

$$H^{k+1} = H^k + \gamma \Delta H^k \quad (\text{IV.38})$$

- $\gamma > 1$ correspond à une sur-relaxation.
- $\gamma < 1$ correspond à une sous-relaxation.

Le facteur de relaxation γ est choisi de façon à accélérer la convergence.

A cet effet, analysons l'impact des deux méthodes de relaxation précédemment évoquées, sur la précision des grandeurs magnétiques.

IV-8-1 Influence de la sur-relaxation

Comme on peut le constater, l'effet d'une sur-relaxation est fortement marqué par des formes d'ondes $B(t)$ et $H(t)$ qui ne sont pas parfaitement lisses (fig IV.22) et (fig IV.23)

En outre, il est utile de noter que plus le facteur de relaxation est important, plus l'aire délimitée par le cycle d'hystérésis est mal estimée (fig IV.24).

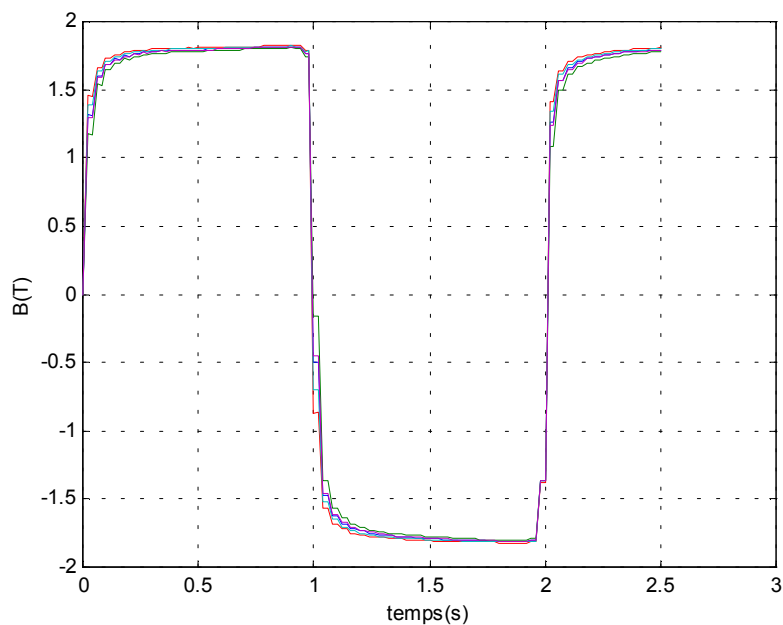


Figure IV.22: Effet de la sur-relaxation sur la forme d'onde $B(t)$ ($\gamma = 2$)

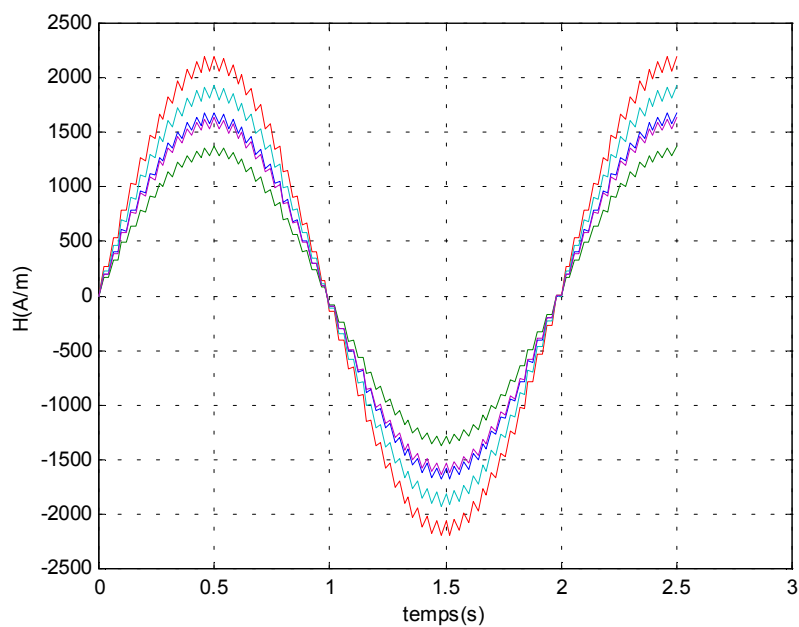


Figure IV.23: Effet de la sur-relaxation sur la forme d'onde $H(t)$ ($\gamma = 2$)

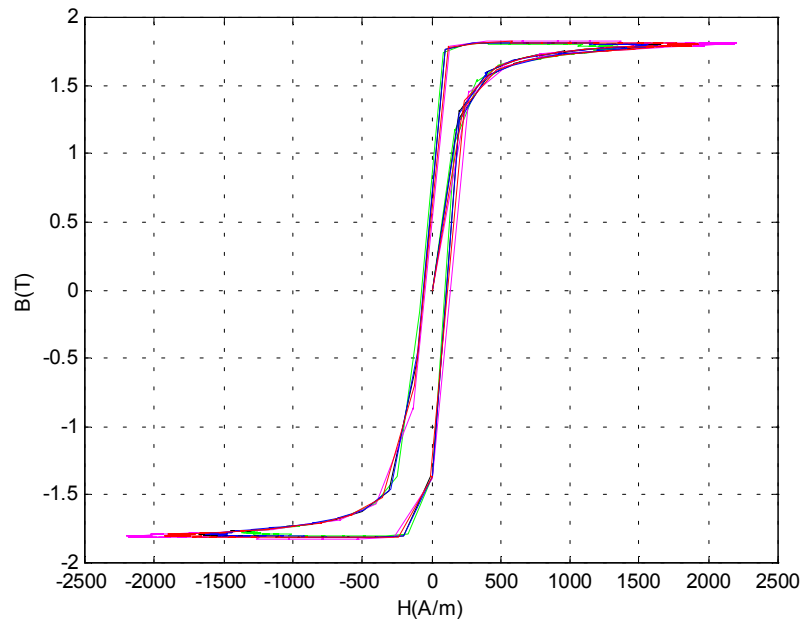


Figure IV.24: Effet de la sur-relaxation sur le cycle d'hystérésis $B(H)$ ($\gamma = 2$)

IV-8-2 Influence de la sous-relaxation

Le choix d'un facteur de relaxation faible engendre une asymétrie au niveau des formes d'ondes $H(t)$, $B(t)$ ainsi que le cycle d'hystérésis $B(H)$ (fig IV.25), (fig IV.26) et (fig IV.27), principalement due à un régime transitoire lent qui vient perturber l'efficacité des calculs. Le degré de précision est donc très sensible quant au choix d'un facteur de relaxation approprié.

Le problème de convergence peut se ramener alors à un problème d'optimisation. Ainsi, le choix d'une valeur optimale du facteur de relaxation s'avère indispensable pour la convergence des calculs.

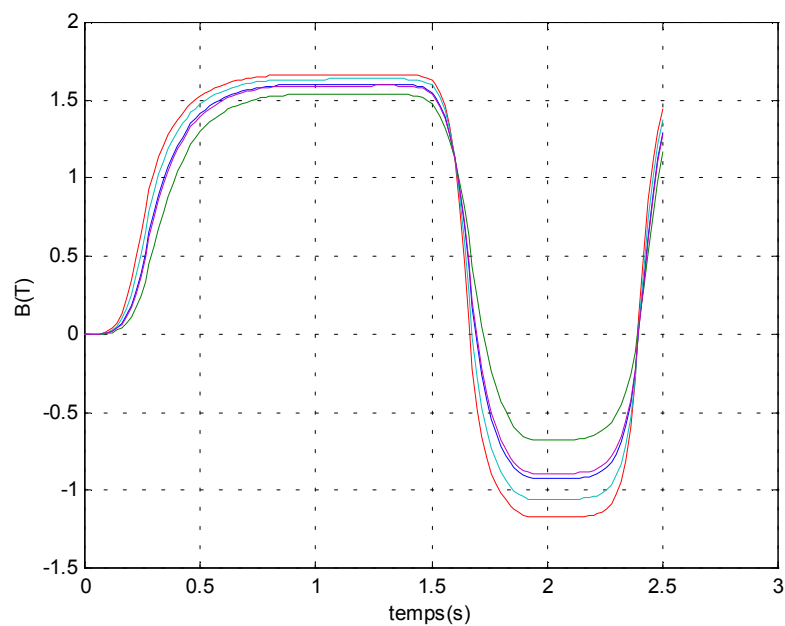


Figure IV.25: Effet de la sous-relaxation sur la forme d'onde $B(t)$ ($\gamma = 0.01$)

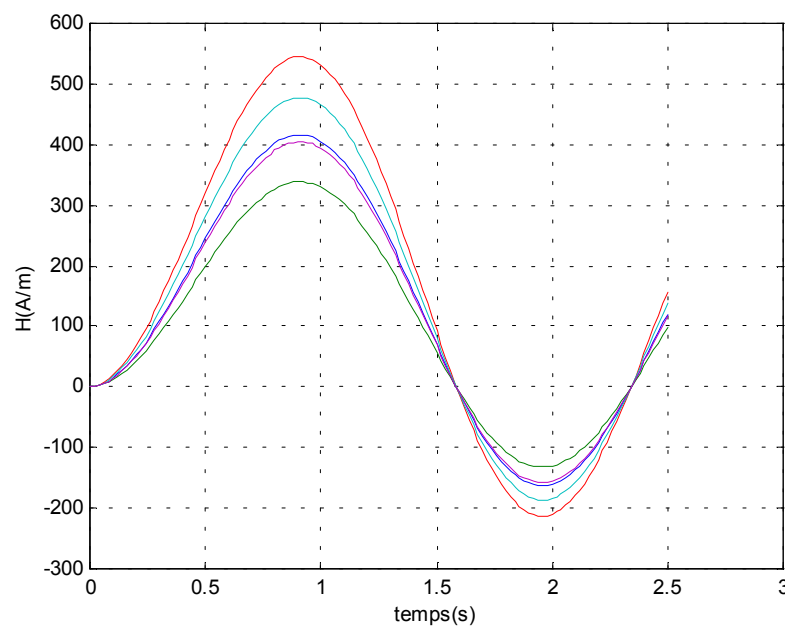


Figure IV.26: Effet de la sous-relaxation sur la forme d'onde $H(t)$ ($\gamma = 0.01$)

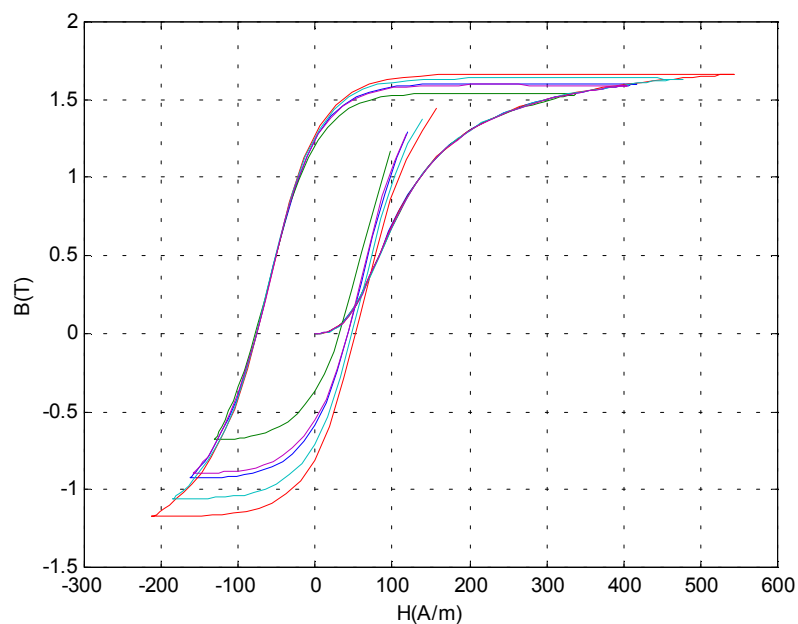


Figure IV.27: Effet de la sous-relaxation sur le cycle d'hystérésis $B(H)$ ($\gamma = 0.01$)

CONCLUSION

Le calcul numérique du champ magnétique dans les matériaux hystérétiques, présente deux difficultés majeures: la modélisation du phénomène d'hystérésis et le traitement itératif de ce type particulier de non linéarité. Par ailleurs, il a été montré que l'intégration du modèle de Preisach dans un code de calcul pour la résolution de l'équation magnétostatique convient bien pour résoudre ce problème de non linéarité car il représente avec une précision suffisante le comportement magnétique du matériau. Une méthode de relaxation a été associée au processus itératif afin d'assurer la convergence des calculs. Les résultats obtenus sont satisfaisants, toutefois il est intéressant de vérifier leur fiabilité par comparaison avec d'autres modèles ou d'autres méthodes de résolution.

CONCLUSION GENERALE

Les travaux menés sur les lois de comportement magnétique, en l'occurrence le phénomène d'hystérésis, ont permis de mettre en évidence la difficulté majeure qui existe quant au choix d'un modèle à la fois précis et rapide pour une implantation dans un code de calcul de champ basé sur la méthode des éléments finis.

En effet, et à travers ce travail, nous avons essayé de mettre en œuvre les moyens d'incorporer le phénomène d'hystérésis dans une modélisation bidimensionnelle du champ magnétique dans les dispositifs électrotechniques en régime statique.

Dans une première étape, nous avons rappelé quelques généralités de base concernant le magnétisme. Ainsi, une étude plus ou moins détaillée du comportement de la matière a permis de distinguer les différents types de magnétisme (paramagnétisme, diamagnétisme et ferromagnétisme). Par ailleurs, une description du ferromagnétisme et des mécanismes d'aimantation à différentes échelles a permis d'illustrer la complexité du phénomène d'hystérésis, d'où l'intérêt du choix d'un modèle précis et fiable pour retranscrire fidèlement la loi de comportement magnétique. Pour cette raison, Nous avons effectué une recherche bibliographique sur les principaux modèles scalaires, en se limitant au choix d'un modèle très utilisé pour la modélisation de l'hystérésis : il s'agit du modèle de Preisach.

C'est un modèle phénoménologique permettant de caractériser l'état magnétique d'un matériau en fonction de l'histoire du champ appliqué, par un vecteur d'état. Néanmoins, la difficulté majeure d'utilisation de ce modèle réside dans la détermination de la fonction de distribution qui le caractérise. Ainsi, pour la déterminer différentes méthodes ont été exposées : les méthodes numériques et les méthodes analytiques.

Parmi les méthodes analytiques qui semblent être plus intéressantes par leur simplicité de mesure et facilité de programmation, il existe la fonction de distribution de Lorenz modifiée

caractérisée par des paramètres d'ajustement permettant de modéliser n'importe quelle forme du cycle.

La seconde partie de notre travail, a été consacrée à la modélisation du champ électromagnétique qui nécessite au préalable une formulation mathématique des équations de Maxwell adaptées aux problèmes étudiés. Les hypothèses de notre étude ont été restreintes seulement au cas du problème magnétostatique vectoriel. Par ailleurs, la formulation par éléments finis du problème a conduit à l'obtention d'un système non linéaire traduit par un terme source supplémentaire au second membre de l'équation et dont la résolution par les méthodes itératives classiques (Newton-Raphson), pose souvent des problèmes de convergence.

Dans ce contexte, un programme sous environnement Matlab a été proposé permettant la résolution du problème magnétostatique non linéaire par l'intégration du modèle de Preisach dans un code de calcul de champ par la méthode des éléments finis. La convergence du calcul est vérifiée par le choix d'un facteur de relaxation optimal $\gamma = 0.35$ pour $J_{\max} = 10^5 \text{ A/m}^2$ et $\gamma = 0.8$ pour $J_{\max} = 5.10^3 \text{ A/m}^2$

L'efficacité de la méthode de résolution adoptée, a été testée par l'étude d'un dispositif de chauffage par induction. Les résultats obtenus à caractère magnétique à savoir les formes d'ondes $B(t)$, $H(t)$, ainsi que la loi de comportement $B(H)$ sont satisfaisants, ceci prouve alors, la fiabilité du modèle et de la méthode de résolution.

En perspective et afin d'assurer la continuité de ce travail, il serait intéressant de :

- Tester la fiabilité du modèle d'hystérésis par comparaison avec d'autres modèles existants (modèle de Jiles-Atherton) ou avec des résultats expérimentaux.
- Intégrer le modèle dans un code de calcul MEF couplant la résolution des équations de Maxwell à celles des équations thermiques et électriques (prise en compte d'une alimentation en tension).
- Etudier la modélisation vectorielle.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] O. DEBLECKER, "Contribution à la modélisation des champs magnétiques dans les systèmes comportant des milieux non linéaires et hystérétique", Thèse de Doctorat en Sciences Appliquées, Faculté Polytechnique de Mons, Belgique, Mars 2001.

- [2] A. BENABOU, "Contribution à la caractérisation et à la modélisation de matériaux magnétiques en vue d'une implantation dans un code de calcul de champ", Thèse de Doctorat en Génie Electrique, Ecole Doctorale des Sciences pour L'Ingénieur, Université Lille 1, France, Décembre 2002.

- [3] Encyclopaedia Universalis France S.A, 2003.

- [4] SERWEY, "Physique 2, Electricité et Magnétisme", 3^{ème} édition, Canada.

- [5] A. BENOUDJIT, "Introduction aux machines électriques (machines à courant ontinu1)", Presse de L'université de Batna,1995.

- [6] Le grand dictionnaire terminologique , Terme Francais- Terme Anglais, Banque de Documentaires Français au Bureau, Office de la langue francaise, Quebec.

- [7] J.P.FAROUX et J.RENAULT, "electromagnétisme2, Equations de Maxwell et Phénomènes d'Induction", édition Dunod, Paris, 1998.

- [8] P. BRISSONNEAU, "Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique", Edition Hermes, Paris, France, 1997.

- [9] H. GAVRILA, "Matériaux magnétiques doux", Revue Internationale de Génie Electrique, vol.1, pp.141-188,Université Polytechnica de Bucarest, Roumanie.

- [10] R. BONNFILLE, "Technique de L'Ingénieur D2 I, Génie Electrique- matériaux", 1990.
- [11] B. DUCHARNE, "Caractérisation et modélisation de circuits magnétiques : du global vers le local", Mémoire de Thèse, Université Claude Bernard-Lyon 1, France, 2003.
- [12] A. WERLING, "Modélisation numérique de l'enregistrement magnétique avec prise en compte de l'hystérésis vectoriel", Diplomarbeit, Universitat Karlsruhe (TH), 1997.
- [13] Y. BERNARD, "Contribution à la modélisation de systèmes électromagnétiques en tenant compte du phénomène d'hystérésis. Extensions du modèle de Preisach adaptées au calcul de champ", Thèse de Doctorat en Sciences, Université de PARIS –SUD, U.F.R Scientifique D'ORSAY, France, Novembre 2000.
- [14] A. IVANYI, "Hysteresis models in electromagnetic computation", Akademiai kiado, Budabest, Hungary, 1997.
- [15] Y. OULED AMOR, "Contribution à la modélisation de l'hystérésis magnétique en vue de l'analyse par éléments finis des systèmes de chauffage par induction", Thèse de Doctorat, Ecole Doctorale Science pour l'Ingénieur de Nantes, France, Juin 2000.
- [16] A.LOPES.RIBEIRO, "2D Preisach-type hysteresis modeling of electrotechnical steel laminates", IEEE. Transactions on Magnetics. Vol. 34. No. 5, September 1998.
- [17] B.AHAMADA, F.ALVES, B.BEN ABDALLAH, A.BENABOU, Y.BERNARD, F.BOULLAUT, J.P.CHABRERIE, S.CLENET, M.FELIACHI, A.LEBOUC, J.P.MASSON, E.MENDES, G.MEUNIER, A.NOURDINE, Y.OULED AMOR, F.PIRIOU, Y.SEGUI, "Caractérisation et modélisation de l'hystérésis scalaire statique : implantation dans un code de calcul élément finis", Communication à une Journée Scientifique, GDR, Sécurité et Disponibilité des Systèmes Electrotechniques, 2001.
- [18] Y. OULED OMOR, F. ALVES, M. FELIACHI, "Modeling of magnetic hysteresis with modified Lorentzian function", Communication à une Journée Scientifique, GDR, Sécurité et Disponibilité des Systèmes Electrotechniques, 2001.

- [19] L.R.DUPRÉ, J.J.GYSELINCK ET J.A.MELKEBEEK, "Complementary finite element methods in 2D magnetics taking into account a vector Preisach model", IEEE. Transactions on Magnetics. Vol. 34. No. 5, September 1998.
- [20] I.C.SABONNADIÈRE ET J.L.COULOMB, "Calcul des champs électromagnétiques", Grenoble, France.
- [21] J.L. COULOMB et J.C. SABONNADIÈRE, "CAO en électrotechnique", édition Hermes.
- [22] G.DHAT, G.TOUZOT, "Une Représentation de la Méthode des éléments finis", Maloine S.A, Editeur Paris, 1984.
- [23] L.J. SEGERLIND, "Applied finite element analysis", Agricultural Engineering Department, Michigan State University, USA.
- [24] J.L. COULOMB et J.C. SABONNADIÈRE, "La méthode des éléments finis, du modèle...à la CAO", Traité des Nouvelles Technologies, Série Assistance par Ordinateur (XAO), édition Hermès, Paris-Londre-Lausanne.
- [25] N. AYMARD, "Etude des phénomènes magnétodynamiques pour l'optimisation de structure 3D de chauffage par induction à partir du code Trifou et d'essais sur prototypes", Thèse de Doctorat en Génie Electrique, Ecole Doctorale Science de l'Ingénieur de Nantes, Université de Nantes, France.

[pot] **F.CORTIAL, F.OSSART, J.B.ALBERTINI, M.AID**, "An Improved Analytical Hysteresis Model And Its Implementation In Magnetic Recording Modeling By The Finite Element Method", IEEE Transactions on magnetics, Vol.33, No.2, Mars 1997.

[] **M. HULIN, N. HULIN, D. PERRIN**, "Equations de Maxwell ondes électromagnétiques cours, exercices et problèmes résolus", Edition Dunod, Paris 1998.

[numelec]