

République Algérienne démocratique & populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur & de la recherche scientifique



**Université de BATNA**  
*Faculté de Technologie*  
*Département d'Electrotechnique*



Mémoire présenté : pour l'obtention du diplôme de  
Magistère en électrotechnique

Option : *Machines électrique et commande des systèmes*

Par : **Mr. Bâazouzi Kamel**  
Ingénieur d'état en électrotechnique

Intitulé

***Technique de la passivité dans le  
domaine de la commande des  
systèmes d'électrotechnique***

Soutenu devant le jury :

1- Drid Said	<i>Professeur</i>	Université de Batna	-Président-
2- Bensalah A/Djebbar	<i>Maitre de conférences</i>	Université de Batna	-Rapporteur-
3- Betka Achour	<i>Professeur</i>	Université de Biskra	-Examineur-
4- Bendib samir	<i>Maitre de conférences</i>	Université de Batna	-Examineur-

Promotion : 2009-2010

# Remerciements

*Ce travail a été mené à bien grâce à un savoir infini grandissant des idées et des innovations mythologique.*

*Je remercie très sincèrement mon encadreur **Dr. Bensalah A/Djebbar** ''maître de conférences à l'Université de Batna'' pour la confiance qu'il a manifesté à mon égard, son hospitalité et toutes les remarques utiles qu'il m'a procuré tout au long de l'élaboration de ce travail.*

*Je suis très reconnaissant à **Mr. Drid Saïd** ''professeur à l'Université de Batna'' d'avoir accepté la présidence du jury.*

*Je tiens également à adresser ma sincère et profonde reconnaissance à **Mr. Betka Achour**'' professeur à l'Université de Biskra'' et à **Mr. Bendib Samir** ''maitre de conférence à l'Université de Batna'' pour avoir accepté de participer au jury de thèse et à la lecture consciencieuse et minutieuse de ce travail.*

*J'adresse en fin toute ma reconnaissance à ma famille qui ma toujours accompagné, soutenu et aidé dans la vie.*

*A tous, je leur exprime ma vive reconnaissance.*

# *Dédicace*

*A la mémoire de mon père*

*A ma femme pour son soutien et compréhension*

*A mes enfants Amani & Housseme*

*À tous Je dédie ce travail.*

## ***Résumé :***

Habituellement, le problème majeur de la commande d'un système physique provient essentiellement du manque d'informations sur sa structure qui était supposé toujours linéaire, par exemple, la variation des paramètres et du couple d'un moteur à induction provoque automatiquement un changement d'état imprévu d'où un risque d'instabilité.

Toutefois, un changement de modèle de commande est surtout nécessaire pour les systèmes électrotechniques multi-variables incorporant les effets non linéaires et des phénomènes variant dans le temps ; d'où l'exigence du développement d'une nouvelle structure de commande tout en respectant les spécifications désirées concernant leurs stabilités.

Cependant, dans ce travail une nouvelle technique de commande dite « commande par passivité (PBC) » basée sur le principe de contrôle d'échange d'énergie via un retour d'état a été présentée avec des exemples d'application pratique.

La PBC permet d'œuvrer dans plusieurs domaines tels que l'électrotechnique (électronique de puissance, moteurs électriques), l'automatique (contrôle des systèmes,), la robotique....etc.

Pour le moteur à induction, la PBC est un nouveau paradigme où l'énergie est le facteur essentiel dans le problème de commande et dans l'étape de modélisation. La fonction énergétique détermine son comportement stationnaire et transitoire par le biais du transfert d'énergie entre les sous-systèmes.

L'application de la commande passive dite « IDA-PBC » sur le moteur à induction exige sa modélisation sous forme hamiltonienne à port en boucle fermé pour que le processus converge vers un état désiré, avec une modification de l'énergie interne du moteur.

Les résultats obtenus démontrent que les lois de commande fondées sur cette technique aboutissent aux performances désirées, en même temps peuvent être facilement implantées et validées expérimentalement.

Nous pouvons conclure que la commande IDA-PBC via le modèle Hamiltonien à port du moteur à induction permis d'exprimer une structure de contrôle meilleur et robuste avec une mise en œuvre facile et acceptable dans l'industrie.

**Mots clés:** Commande passive(PB ) – IDA-PBC – forme Hamiltonienne à port – Moteur à induction.

## ***Abstract :***

Usually, the main problem of the control of a physical system is mainly the lack of information on its structure, which was supposed to be linear, for example, the variation of parameters and the torque of an induction motor automatically causes a change state where unforeseen risk of instability.

However, a paradigm shift control is especially necessary for electrotechnical systems incorporating multi-variable non-linear effects and time-varying phenomena, hence the requirement for the development of a new command structure while respecting desired specifications relating to their stability.

However, in this work a new control technique called "passive control (PBC)" based on the principle of energy exchange control via state feedback was presented with examples of practical application. PBC can work in several fields such as electrical engineering (power electronics, electric motors), automation (control systems), robotics .... etc.

For the induction motor, the PBC is a new paradigm where energy is the key factor in the control problem and the modeling stage. The energy function determines the steady and transient behavior through the transfer of energy between the subsystems.

The application of passive control called "IDA-PBC" on the induction motor requires its modeling to port Hamiltonian form closed loop for the process converges to a desired state, with a change in the internal energy of the motor.

The results show that the control law based on this technique lead to the desired performance, at the same time can be easily implemented and experimentally validated.

We can conclude that the IDA-PBC control via the model Hamiltonian to port induction motor allowed to express a control structure with better robust and easy implementation and acceptable in the industry.

**Key words :** IDA-PBC – Model Port – Hamiltonian – Passive control – PBC.

## ملخص:

ففي غالب الأمر المشكلة الرئيسية لنظام التحكم في جسم مادي هو عدم وجود المعلومات الكافية عن نموذج الرياضي، والذي كان يفترض دائما أنه خطيا، على سبيل المثال، تغير وسطاء وعزم دوران لمحرك كهربائي بسبب تغيير تلقائي غير منتظر لحالته ، مما يؤدي إلى مخاطر غير متوقعة يمكن أن تنتج حالة من عدم الاستقرار للمحرك.

لذلك أصبح البحث عن طريقة تحكم جديد خاصة بالنسبة للأنظمة الكهروتقنية ضروري بحيث يعتبر نموذج هذه الأجسام متعدد المتغيرات مع الأخذ بعين الاعتبار الأفعال الغير خطية، الظواهر المتغيرة مع الزمن و احترام المواصفات المتعلقة باستقرار هذه الأنظمة.

في هذه الدراسة نقتراح تقنية جديدة في التحكم تسمى "التحكم باستعمال السيطرة السلبية" PBC التي تعتمد على مبدأ التحكم في تبادل الطاقة بواسطة التغذية المرتدة مع أمثلة تطبيقية واقعية. يمكن لهذه التقنية العمل في العديد من المجالات مثل الهندسة الكهربائية (الالكترونيات القوى، المحركات الكهربائية)، التشغيل الآلي (أنظمة التحكم)، الروبوتيك.... الخ.

بالنسبة للمحرك الغير متزامن يعتبر "التحكم باستعمال السيطرة السلبية" نموذجا جديدا ،حيث أن الطاقة هي العامل الأساسي في مشكلة التحكم ومرحلة النمذجة بحيث أن وظيفة الطاقة تحدد السلوك الثابت والعابر للمحرك من خلال نقل الطاقة بين الأنظمة الفرعية.

إن تطبيق تقنية المراقبة المتزامنة باستعمال السيطرة السلبية المسماة "IDA-PBC" على محرك غير متزامن يتطلب النمذجة في حالة التغذية المرتدة على شكل النموذج الهاميلتوني ذو الماخذ مع تغيير في الطاقة الداخلية للمحرك حتى يتم لعملية التحكم التقرب إلى الحالة المطلوبة.

كما أظهرت النتائج أن نظام مراقبة المعتمد على هذه التقنية يؤدي إلى الأداء المطلوب، في الوقت نفسه يمكن تنفيذها بسهولة والتحقق من صحتها تجريبيا.

يمكننا أن نستنتج أيضا أن تقنية IDA-PBC عن طريق النموذج الهاميلتوني ذو الماخذ للمحرك غير متزامن يسمح بتعبير جديد عن النموذج مع مراقبة أفضل وسهولة التنفيذ ومقبولة في المجال الصناعي.

**الكلمات الدالة:** التحكم باستعمال السيطرة السلبية PBC - المحرك غير متزامن - المراقبة المتزامنة باستعمال السيطرة السلبية المسماة "IDA-PBC" - النموذج الهاميلتوني ذو الماخذ

# Sommaire

## Introduction générale

1- Mise en contexte et problématique .....	01
2- Organisation de la thèse .....	02

## Chapitre I : Différentes commandes des systèmes électrotechnique

I.1. Modélisation de la machine à induction .....	03
I.1.1 Description .....	03
I.1.2 Hypothèses de travail .....	04
I.1.3 Equations générale de la machine Asynchrone .....	04
I.1.3.1 Equations électriques .....	04
I.1.3.2 Equations Magnétiques .....	04
I.1.4 Transformation de Park .....	05
I.1.5 Modèle de la machine asynchrone dans le repère biphasé .....	06
I.1.5.1 Equations électriques .....	07
I.1.5.2 Equations Magnétiques .....	07
I.1.5.3 Le couple électromagnétique .....	07
I.1.5.4 Equation mécanique .....	09
I.2. Types de commandes de la machine à induction .....	09
I.2.1 Commandes du modèle linéaire .....	10
I.2.1.1 Commande Scalaire .....	10
I.2.1.2 Commande vectorielle .....	15
I.2.2 Commandes du modèle non-linéaire .....	22
I.2.2.1. Définitions .....	22
I.2.2.2. La commande à structure variable .....	25
I.2.2.3. La commande stabilisante de Lyapunov .....	29
I.2.2.4. La commande par Backstepping .....	30

## Chapitre II : Théorie de la commande par passivité

II.1. Introduction à la passivité .....	35
II.2. Définitions .....	36
II.2.1. Notions mathématique .....	36
II.2.2. Notions de passivité .....	38
II.2.2.1 Définition intuitive de la passivité .....	38
II.2.2.2 Système statique passif .....	38
II.2.2.3. Système dynamique passif .....	40
II.2.2.4 Signification graphique de la passivité .....	42
II.2.3. Excès et restriction de la passivité .....	43
II.2.3.1 Action parallèle d'entrée .....	43
II.2.3.2 Rétroaction de la sortie .....	44
II.2.3.3 Combinaison des deux actions .....	45
II.2.4. Propriété des systèmes passifs .....	45
II.2.4.1 Connexion parallèle .....	45
II.2.4.2 Connexion par rétroaction .....	46
II.2.5. Passivité des systèmes linéaire .....	48





---

Conclusion générale .....	97
Bibliographie.....	99
Annexe.....	103

# *Liste des Acronymes*

- CVOFR : *Commande Vectorielle par Orientation Flux Rotorique*
- CBI : *Control By Interconnection (Commande par interconnexion)*
- EBE : *Energy Balance Equation (équation énergétique d'équilibre)*
- IDA-PBC : *Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control  
(Commande par Assignement d'interconnexion et d'amortissement)*
- KYP : *Kalman-Yakubovich-Popov*
- MAI : *Moteur à Induction*
- PBC : *Passivity Based control (commande par passivité)*
- PH : *forme Hamiltonienne à Ports*
- SIDA-PBC: *Simultaneous Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control  
(Commande par assignement et injection d'amortissement simultanément)*
- ZED : *Zéro Etat Détectable*
- ZEO : *Zéro Etat Observable*

# Introduction générale

## Introduction générale

### **1. Mise en contexte et problématique :**

Initialement, le moteur à courant continu a été privilégié dans l'industrie pour une commande dynamique rapide, précise et moins coûteuse que celle d'une machine à courant alternatif. Néanmoins, ce moteur présente des difficultés d'utilisation pour des puissances élevées et une faiblesse liée à son collecteur mécanique. En effet, ce collecteur augmente l'encombrement de la machine, son coût de fabrication et d'entretien, Il limite aussi sa vitesse de rotation, ainsi que le danger qu'il puisse entraîner dans des atmosphères explosibles [1].

C'est pourquoi, la machine dite à induction (ou asynchrone), est choisit pour plusieurs applications industrielles vu sa conception simple, sa robustesse, peut coûteuse à l'achat et en entretien. De plus, elle supporte des surcharges pouvant aller jusqu'à 5 ou 7 fois son couple nominal.

Par contre, il faut reconnaître que sa commande en vitesse variable (ou en couple) est plus complexe que celle d'une machine à courant continu, car la machine à induction ne fournit aucun renseignement direct sur le courant induit au rotor (non accessible). Mais on peut remédier aujourd'hui cet inconvénient, grâce à une bonne élaboration d'estimateur en temps réel des grandeurs non mesurables de la machine.

La difficulté majeure rencontrée dans la commande des machines à courant alternatif, réside dans le faite que les deux variables - couple et flux - sont fortement couplées.

Parmi les questions qui se posent pour commander les moteurs asynchrones subsiste celles relative au choix du type de commande la plus appropriée. Une stratégie traditionnellement utilisé consiste à commander la machine en courant ou en tension en lui incluant l' autopilotage. On dispose alors comme variables de commande des références en courant ou en tension. On admet que la dynamique de la vitesse est lente par rapport à celle des grandeurs électriques.

Les différentes techniques de commande des machines à induction reposent sur le contrôle du flux magnétique. La variation du couple de la machine à induction provoque automatiquement un changement d'état magnétique de la machine, d'où un risque d'instabilité ; ainsi plusieurs méthodes de commande, dont le degré de complexité varie de l'une à l'autre suivant les performances demandées, sont utilisées pour contrôler la machine.

La non linéarité de son modèle de fonctionnement exige une commande complexe.

Pour qu'une commande assure de bonnes performances, une information fiable provenant des processus à contrôler est nécessaire.

Dans le cas de la machine asynchrone, cette information peut parvenir des capteurs électriques directs (courants, tensions, flux, couple électromagnétique) ou mécanique (vitesse de rotation). La

suppression du capteur mécanique pourrait devenir indispensable pour des difficultés qu'il peut représenter lors de son montage, pour sa sensibilité aux interférences extérieures et pour son coût.

Pour contourner tout ces problèmes posés et surtout la variation des paramètres de la machine qui rendent notre modèle incertain, nous proposons dans cette thèse, le développement d'une approche basée sur la passivité validée par des simulations.

## **2. Organisation de la thèse :**

Cette thèse est structurée en trois principaux chapitres qui décrivent les étapes nécessaires pour bâtir une commande par passivité et qui fonctionne surtout par une simulation.

Le premier chapitre sera consacré à l'étude des différentes commandes des systèmes électrotechnique déjà existantes avec leurs avantages et inconvénients. Une application sur la machine asynchrone fait fois de cette étude.

Dans le deuxième chapitre une représentation théorique du principe de la commande par passivité des systèmes électrotechnique sera élaborée suivant son apport positif dans l'amélioration des performances de ces systèmes.

Pour se rapprocher plus de la réalité, une application sur la machine asynchrone sera abordée dans le troisième chapitre avec une simulation sur MATLAB.

L'analyse des différents résultats obtenus lors de l'application de la commande par passivité sur la machine asynchrone nous permettra de conclure sur la méthode de la passivité, de valider nos modèles et d'envisager les perspectives et suites à donner à ce travail.

# Chapitre I

## I.1. Modélisation de la machine à induction :

### I.1.1 Description :

La machine asynchrone triphasée - a  $p$  paire de pôle - est la plus réputée des machines à induction, sa structure générale est constituée de six enroulements avec un décalage spatiaux temporel. Les trois axes portant les enroulements statorique fixe ( $S_a, S_b, S_c$ ) décalés entre eux d'un angle électrique de  $(2\pi/3)$ , ainsi que les trois autres axes portant les enroulements rotorique ( $R_a, R_b, R_c$ ) en court circuit (figure I.01) tournant à une vitesse mécanique  $\Omega = \frac{d\theta_{méc.}}{dt}$ .

$\theta$  : représente l'angle électrique entre l'axe de référence fixe de la phase statorique  $S_a$  avec celui de la phase rotorique  $R_a$  ou :  $\theta = p \cdot \theta_{méc.}$

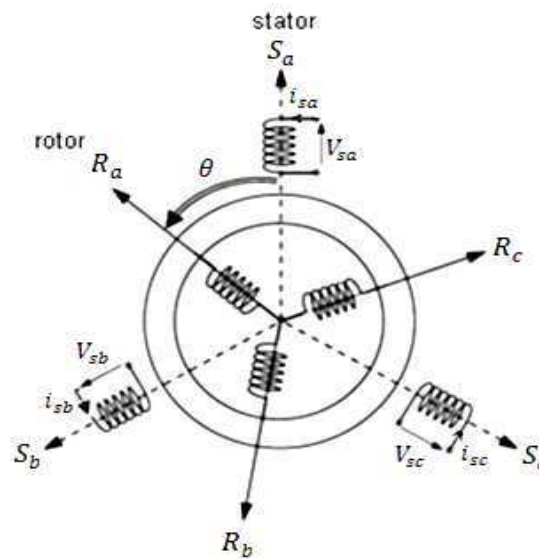


Figure I.01 : Représentation de la machine à induction (Asynchrone).

Le bobinage statorique est traversé par un système de courants triphasé équilibré défini par :

$$\begin{cases} I_{sa} = I_m \cos \omega_s t \\ I_{sb} = I_m \cos \left( \omega_s t + \frac{2\pi}{3} \right) \\ I_{sc} = I_m \cos \left( \omega_s t + \frac{4\pi}{3} \right) \end{cases}$$

Avec :

$\omega_s$  : Pulsation des courant statorique.

$I_m$  : Amplitude maximum du courant statorique.

Le bobinage de l'armature rotorique est traversé par des courants induits triphasé équilibré défini par :

$$\begin{cases} I_{ra} = I_{rm} \cos \omega_r t \\ I_{rb} = I_{rm} \cos \left( \omega_r t + \frac{2\pi}{3} \right) \\ I_{rc} = I_{rm} \cos \left( \omega_r t - \frac{4\pi}{3} \right) \end{cases}$$

$\omega_r$  : Pulsation des courants rotorique induits.

$I_{rm}$  : Amplitude maximum du courant rotorique.

### I.1.2 Hypothèses de travail :

Avant d'établir le modèle de la machine asynchrone en vue de sa commande, nous rappelons brièvement quelques hypothèses simplificatrices retenues :

- La symétrie de construction de la machine est parfaite.
- L'entrefer est constant.
- Le circuit magnétique est feuilleté au stator qu'au rotor ce qui permet de diminuer les pertes fer.
- La densité du courant dans les conducteurs est uniforme (effet de peau).
- Les inductances propres sont constantes.
- Les inductances mutuelles entre deux enroulements sont à répartition sinusoïdale.
- Distribution spatiale sinusoïdale des forces magnétomotrices d'entrefer.
- Les pertes fer sont négligés.

#### Convention de signe :

- Une tension positive crée un courant positif.
- Un courant déterminé positive crée un flux positif à travers son enroulement.
- Le sens trigonométrie est compté positif pour les angles et la vitesse de rotation de la machine.

### I.1.3. Equations générale de la machine Asynchrone :

#### I.1.3.1 Equations électriques:

La loi des mailles nous permet d'écrire les équations électriques de la machine asynchrone représentée par la figure I.01 sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{array}{cc}
 \underline{\text{Armature statorique}} & \underline{\text{Armature rotorique}} \\
 \begin{bmatrix} V_{sa} \\ V_{sb} \\ V_{sc} \end{bmatrix} = R_s \cdot \begin{bmatrix} I_{sa} \\ I_{sb} \\ I_{sc} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_{sa} \\ \Phi_{sb} \\ \Phi_{sc} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V_{ra} \\ V_{rb} \\ V_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = R_r \cdot \begin{bmatrix} I_{ra} \\ I_{rb} \\ I_{rc} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_{ra} \\ \Phi_{rb} \\ \Phi_{rc} \end{bmatrix}
 \end{array} \quad (1.01)$$

Avec :

$R_s$  : Résistance statorique identique pour les trois phases (par hypothèse).

$R_r$  : Résistance rotorique identique pour les trois phases (par hypothèse).

$[\Phi_{sa} \ \Phi_{sb} \ \Phi_{sc}]^T$ : Matrice de flux engendré au niveau du stator.

$[\Phi_{ra} \ \Phi_{rb} \ \Phi_{rc}]^T$ : Matrice de flux engendré au niveau rotor.

#### I.1.3.2 Equations électromagnétiques :

Le flux totalisé dans les phases statorique et rotorique est défini par :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{sa} \\ \Phi_{sb} \\ \Phi_{sc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_s & m_s & m_s \\ m_s & l_s & m_s \\ m_s & m_s & l_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{sa} \\ I_{sb} \\ I_{sc} \end{bmatrix} + m_{sr} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{ra} \\ I_{rb} \\ I_{rc} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \Phi_{ra} \\ \Phi_{rb} \\ \Phi_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_r & m_r & m_r \\ m_r & l_r & m_r \\ m_r & m_r & l_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{ra} \\ I_{rb} \\ I_{rc} \end{bmatrix} + m_{rs} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{sa} \\ I_{sb} \\ I_{sc} \end{bmatrix}$$

Avec :

$l_s$  : Inductance propre d'une phase statorique.

$m_s$  : Inductance mutuelle entre deux phases statorique décalées de  $2\pi/3$ .

$m_r$  : Inductance mutuelle entre deux phases rotorique décalées de  $2\pi/3$ .

$m_{sr} = m_{rs}$  : Inductance mutuelle entre une phase statorique et une phase rotorique et réciproque pour  $\theta = 0^\circ$  (valeur maximum).

Sous forme condensée, les flux statorique et rotorique s'expriment par :

$$[\Phi_s]_{a,b,c} = [L_s] \cdot [I_s]_{a,b,c} + [M_{sr}] \cdot [I_r]_{a,b,c} \quad (1.02)$$

$$[\Phi_r]_{a,b,c} = [L_r] \cdot [I_r]_{a,b,c} + [M_{rs}] \cdot [I_s]_{a,b,c}$$

Avec :

$$[L_s] = \begin{bmatrix} l_s & m_s & m_s \\ m_s & l_s & m_s \\ m_s & m_s & l_s \end{bmatrix}, \quad [L_r] = \begin{bmatrix} l_r & m_r & m_r \\ m_r & l_r & m_r \\ m_r & m_r & l_r \end{bmatrix}.$$

$$[M_{sr}] = [M_{rs}]^t = m_{sr} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos\theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Ce modèle présente certains inconvénients :

1. La formulation des flux statorique, rotorique est compliquée vu la présence de six enroulements.
2. Les éléments mutuels entre stator et rotor ne sont pas constants, ils dépendent de l'angle de rotation  $\theta$  du rotor/stator.

D'où, la nécessité d'une transformation qui réduit l'ordre du système et élimine cette dépendance vis-à-vis de  $\theta$ .

Pour cela on procède à la transformation triphasé-biphasé dite de Park [2], avec l'hypothèse que les courants homopolaire  $I_0$  ne peuvent circuler (neutre isolé).

#### 1.1.4. Transformation de Park :

Pour obtenir un système d'équations à coefficient constants, il est usuel de faire appel à La transformation de R. H. Park, qui permet de faire une conversion du triphasé au biphasé suivie d'une rotation (voir figure (1.02)).

Cette transformation satisfait une équivalence entre la puissance instantanée créée par les trois bobines (statorique et rotorique) et celle créée par les deux bobines ( $d, q$ ) on aspect de termes.

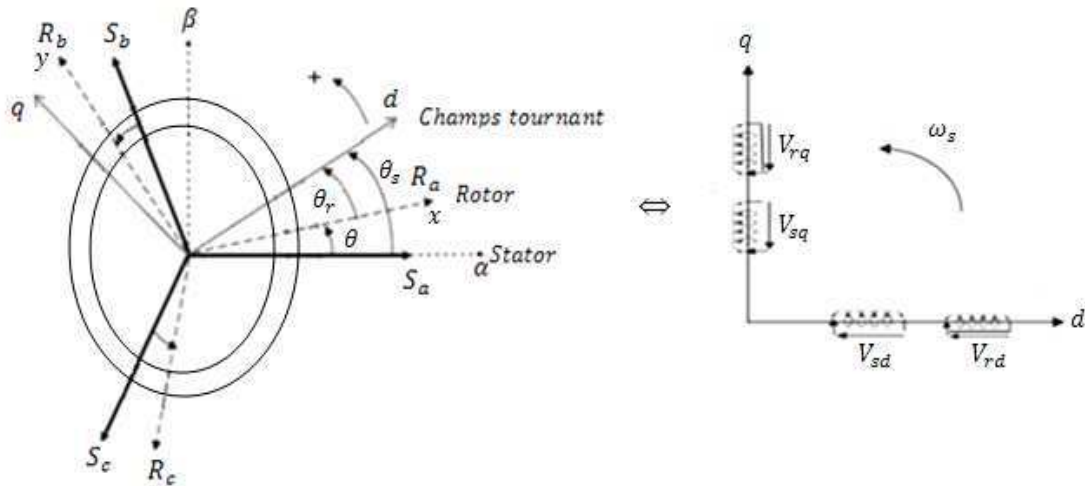


Figure I.02 : Illustration de la machine triphasé et machine biphasé équivalente.

Elle est illustrée selon la loi de suivante :

$$\begin{bmatrix} X_d \\ X_q \\ X_0 \end{bmatrix} = P(\theta) \cdot \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \\ X_c \end{bmatrix} \quad (1.03)$$

Où :  $[X_a \ X_b \ X_c]^T$  vecteur triphasé quelconque de l'espace.

$X_0$ : Composante homopolaire du vecteur espace (égale à zéro pour un système symétrique et équilibré).

$P(\theta)$ : Matrice de passage du triphasé au biphasé dite de Park orthonormée.

$$P(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

La transformée inverse de Park (du biphasé au triphasé) est donnée par :

$$\begin{bmatrix} X_a \\ X_b \\ X_c \end{bmatrix} = P^{-1}(\theta) \cdot \begin{bmatrix} X_d \\ X_q \\ X_0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec : } P^{-1}(\theta) = P^t(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

### I.1.5. Modèle de la machine asynchrone dans le repère biphasé :

Selon la figure I.02, l'application de la transformation de Park (1.03) aux systèmes d'équations (1.01-02) engendre un nouveau système d'équations de la forme (plus de détail voir [2]) :

**1.1.5.1 Equations électriques :**

$$\begin{cases} V_{sd} = R_s \cdot I_{sd} + \frac{d\phi_{sd}}{dt} - \omega_s \cdot \phi_{sq} \\ V_{sq} = R_s \cdot I_{sq} + \frac{d\phi_{sq}}{dt} + \omega_s \cdot \phi_{sd} \\ V_{rd} = 0 = R_r \cdot I_{rd} + \frac{d\phi_{rd}}{dt} - \omega_r \cdot \phi_{rq} \\ V_{rq} = 0 = R_r \cdot I_{rq} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} + \omega_r \cdot \phi_{rd} \end{cases} \quad (1.04)$$

Avec :

$\omega_s = \frac{d\theta_s}{dt}$  : Appelée pulsation statorique (bien que le régime peut être quelconque).

$\omega_r = \frac{d\theta_r}{dt} = \frac{d(\theta_s - \theta)}{dt} = \omega_s - \omega$  : Pulsation rotorique.

$\omega = \frac{d\theta}{dt} = p \cdot \Omega$  : Pulsation mécanique.

$\Omega$  : Vitesse de rotation mécanique du rotor/stator.

$p$  : Nombre de paire de pôles de la MAS.

Donc :

$$\omega_s = \omega_r + p \cdot \Omega \quad (1.05)$$

La formule (1.05) est défini comme étant la loi d'autopilotage de la machine asynchrone.

**1.1.5.2 Equations électromagnétiques :**

Le flux total qui traverse chaque bobine du stator peut être décomposé en flux propre de la même bobine et des flux mutuels provenant des autres bobines (figure 1.02) :

$$\begin{cases} \phi_{sd} = L_s I_{sd} + M \cdot I_{rd} \\ \phi_{sq} = L_s I_{sq} + M \cdot I_{rq} \\ \phi_{rd} = L_r I_{rd} + M \cdot I_{sd} \\ \phi_{rq} = L_r I_{rq} + M \cdot I_{sq} \end{cases} \quad (1.06)$$

Avec :

$L_s = l_s - m_s$  : Inductance propre cyclique d'une phase statorique.

$L_r = l_r - m_r$  : Inductance propre cyclique d'une phase rotorique.

$M = \frac{3}{2} m_{sr}$  : Inductance mutuelle cyclique entre stator-rotor.

**1.1.5.3 Le couple électromagnétique :**

On se basant sur la conversion de l'énergie électrique fournie au stator  $E_{éleS}$ , le couple électromagnétique  $C_{em}$  peut être formulé dans le repère  $(d, q)$  de la manière suivante :

Soit  $P_{éleS}(t)$  la puissance électrique instantanée statorique de la machine asynchrone donc :

$$P_{\text{éleS}}(t) = \frac{dE_{\text{éleS}}}{dt} = V_{sd} \cdot I_{sd} + V_{sq} \cdot I_{sq}$$

$$P_{\text{éleS}}(t) = R_s \cdot (I_{sd}^2 + I_{sq}^2) + \left( \frac{d\phi_{sd}}{dt} \cdot I_{sd} + \frac{d\phi_{sq}}{dt} \cdot I_{sq} \right) + \omega_s \cdot (\phi_{sd} \cdot I_{sq} - \phi_{sq} \cdot I_{sd})$$

Elle comporte : un terme lié aux pertes joule statorique ( $R_s \cdot (I_{sd}^2 + I_{sq}^2)$ ), un terme lié à la puissance électromagnétique stockée dans le champ magnétique statorique (ou le flux)  $\left( \frac{d\phi_{sd}}{dt} \cdot I_{sd} + \frac{d\phi_{sq}}{dt} \cdot I_{sq} \right)$  et le terme qui représente la puissance électrique transformée du stator au rotor à travers l'entrefer ( $\omega_s \cdot (\phi_{sd} \cdot I_{sq} - \phi_{sq} \cdot I_{sd})$ ).

$P_{\text{éleR}}(t) = V_{rd} \cdot I_{rd} + V_{rq} \cdot I_{rq} = 0$ , (rotor est en court circuit).

$$P_{\text{éleR}}(t) = R_r \cdot (I_{rd}^2 + I_{rq}^2) + \left( \frac{d\phi_{rd}}{dt} \cdot I_{rd} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} \cdot I_{rq} \right) + (\omega_s - \omega) \cdot (\phi_{rd} \cdot I_{rq} - \phi_{rq} \cdot I_{rd}) = 0 \Rightarrow$$

$$R_r \cdot (I_{rd}^2 + I_{rq}^2) + \left( \frac{d\phi_{rd}}{dt} \cdot I_{rd} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} \cdot I_{rq} \right) + \omega_s \cdot (\phi_{rd} \cdot I_{rq} - \phi_{rq} \cdot I_{rd}) - \omega (\phi_{rd} \cdot I_{rq} - \phi_{rq} \cdot I_{rd}) = 0 \Rightarrow$$

$$-\omega_s \cdot (\phi_{rd} \cdot I_{rq} - \phi_{rq} \cdot I_{rd}) = R_r \cdot (I_{rd}^2 + I_{rq}^2) + \left( \frac{d\phi_{rd}}{dt} \cdot I_{rd} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} \cdot I_{rq} \right) - \omega (\phi_{rd} \cdot I_{rq} - \phi_{rq} \cdot I_{rd})$$

D'après (I.06) on a :

$$(\phi_{rd} \cdot I_{rq} - \phi_{rq} \cdot I_{rd}) = -(\phi_{sd} \cdot I_{sq} - \phi_{sq} \cdot I_{sd}) = -M(I_{rd}I_{sq} - I_{sd}I_{rq})$$

D'où :

$$\omega_s \cdot (\phi_{sd} \cdot I_{sq} - \phi_{sq} \cdot I_{sd}) = R_r \cdot (I_{rd}^2 + I_{rq}^2) + \left( \frac{d\phi_{rd}}{dt} \cdot I_{rd} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} \cdot I_{rq} \right) + \omega \cdot M(I_{rd}I_{sq} - I_{sd}I_{rq}).$$

Donc :

La puissance électrique transformée du stator au rotor comporte un terme lié aux pertes joule rotorique, un terme lié aux variations de la puissance magnétique statorique et le terme représentant la puissance mécanique :  $P_{\text{mec.}} = \omega \cdot M(I_{rd}I_{sq} - I_{sd}I_{rq})$ .

Comme la puissance produisant le couple mécanique est :

$$P_{\text{mec.}} = C_{em} \cdot \Omega$$

$$\text{Et : } \Omega = \frac{\omega}{p}$$

Alors :

$$P_{\text{mec.}} = C_{em} \cdot \frac{\omega}{p} = \omega \cdot M(I_{rd}I_{sq} - I_{sd}I_{rq})$$

D'où :

$$C_{em} = P \cdot M \cdot (I_{rd} \cdot I_{sq} - I_{sd} \cdot I_{rq})$$

On général le couple électromagnétique peut prendre plusieurs formes selon le besoin et le repère d'étude, exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 C_{em.} = P.M. (I_{rd} \cdot I_{sq} - I_{sd} \cdot I_{rq}) \\
 C_{em.} = P \cdot \frac{M}{L_s} \cdot (\Phi_{sq} \cdot I_{rd} - \Phi_{sd} \cdot I_{rq}) \\
 C_{em.} = P \cdot \frac{M}{L_r} \cdot (\Phi_{rd} \cdot I_{sq} - \Phi_{rq} \cdot I_{sd}) \\
 C_{em.} = P \cdot \frac{M}{L_s L_r - M^2} \cdot (\Phi_{rd} \cdot \Phi_{sq} - \Phi_{rq} \cdot \Phi_{sd}) \\
 C_{em.} = P \cdot (\Phi_{sd} \cdot I_{sq} - \Phi_{sq} \cdot I_{sd}) \\
 C_{em.} = P \cdot (\Phi_{rq} \cdot I_{rd} - \Phi_{rd} \cdot I_{rq})
 \end{array} \right. \quad (1.07)$$

#### 1.1.5.4 Equation mécanique de la machine Asynchrone:

Pour que le modèle de la machine asynchrone soit complet, on établit l'équation mécanique soit :

$$J \cdot \frac{d\Omega}{dt} = C_{em} - C_r - f \cdot \Omega \quad (1.08)$$

Avec :

$\Omega$  : Vitesse de rotation mécanique du rotor (rd/s).

$J$  : Moment d'inertie total du système (Kg.m<sup>2</sup>).

$C_r$  : Couple résistant (N.m).

$f$  : Coefficient de frottement.

$C_{em}$  : Couple électromagnétique responsable de la rotation de la machine (N.m).

#### Remarque :

Le choix du repère de transformation biphasé est fixé selon l'objectif de l'application, il peut être :

- ◇ Fixe au stator( $\alpha, \beta$ ) est  $\omega_s = 0$  : Pour l'étude des grandeurs rotoriques.
- ◇ Fixe au rotor( $x, y$ ) est  $\omega_r = 0$  : Pour l'étude des grandeurs statoriques.
- ◇ ou bien lié au champ tournant de la machine( $d, q$ ) : Pour l'étude de la commande.

Le référentiel lié au stator est le mieux adapté pour travailler avec les grandeurs instantanées. Il peut être utilisé pour étudier les régimes de démarrage et de freinage des machines à courant alternatif.

## 1.2. Types de commandes de la machine à induction :

La grandeur la plus importante pour le contrôle de la machine à induction est le flux magnétique. En conséquence, ce flux magnétique, statorique, rotorique ou d'entrefer, doit être contrôlé d'une part pour imposer un état magnétique désiré de la machine on évitant une saturation magnétique trop élevée qui provoquerait un appel de courant important, cet appel de courant entraînerait un surplus d'échauffement de la machine et des contraintes dangereuses sur les semi-conducteurs, et d'autre part un réglage du flux qui assure le contrôle du couple électromagnétique pour un certain fonctionnement désiré.

Plusieurs techniques ont été développées, permettant de commander le vecteur flux, soit son module (scalaire), ou l'argument et la norme en même temps (vectorielle).

On peut ainsi, citer les types de commande les plus réputés de la machine à induction :

## **I.2.1. Commandes du modèle linéaire :**

Ces types de commandes classiques considèrent le modèle de la machine asynchrone comme linéaire à coefficients constants, on peut citer :

### **I.2.1.1 Commande Scalaire :**

Cette méthode de commande est la plus ancienne, elle équipe un grand nombre de variateurs à dynamique relativement lente ; elle ne nécessite pas de fonctionnement à très basse vitesse avec de forts couples (par exemple les ventilateurs, les compresseurs, les climatiseurs, ...etc.) ou des performances dynamiques très élevées.

#### **I.2.1.1.1 Principe :**

Le principe de la commande scalaire est fondé sur la modélisation en régime permanent de la machine à induction.

On cherche à maximiser les capacités du couple, le flux doit être maintenu constant (égal à sa valeur nominale ( $\phi_{nominal}$ ) en module sans tenir compte de sa position, dans une large plage, qui correspond au maintien du rapport  $\frac{Tension(V)}{fréquence(f)} = constant$  .

C'est une technique simple à réaliser, sans offrir de bonnes performances dynamiques surtout pour les basses vitesses de fonctionnement.

On distingue deux types de commande scalaire :

#### **1. Le contrôle direct du flux :**

Son principe est de canaliser directement l'un des flux (statorique, rotorique ou d'entrefer) à partir des capteurs jugés très coûteux.

Dans des applications industrielles de la machine à induction, les grandeurs d'état ou de sortie utilisées pour l'élaboration de la commande sont souvent difficilement accessibles pour des raisons techniques (flux, courants rotorique, ...) ou pour des problèmes de coût (vitesse, position ...). Il faut donc les déterminer sans utiliser de capteurs dédiés. On procède plutôt à une estimation ou une observation d'état, c'est-à-dire à une reconstitution, par exemple, du flux à partir de tout ou une partie du modèle mathématique de la machine ; c'est le principe du contrôle scalaire indirect.

#### **2. Le contrôle indirect du flux :**

Cette technique est basée sur le principe qui consiste à déterminer et d'imposer le flux indirectement à partir des relations mathématiques, par exemple  $\frac{Tension}{fréquence}$  ou  $\frac{courant}{fréquence}$ , en régime permanent sinusoïdal pour chaque point de fonctionnement.

Plusieurs types de la commande scalaire indirecte existent selon qu'on agit sur le courant ou sur la tension statorique (l'accessibilité facile).

Ce type de contrôle dépend surtout de la topologie de l'actionneur utilisé (onduleur de courant ou de tension).

### 1.2.1.1.2. Modes de la commande scalaire :

#### 1.2.1.1.2.1 Alimentation en courant :

En régime permanent et dans un repère lié au champ tournant( $d, q$ ), les équations électriques (1.04) et magnétiques (1.05) de la machine à induction sont regroupées sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{sd} = R_s \cdot I_{sd} + \frac{d\phi_{sd}}{dt} - \omega_s \cdot \phi_{sq} \\ V_{sq} = R_s \cdot I_{sq} + \frac{d\phi_{sq}}{dt} + \omega_s \cdot \phi_{sd} \\ 0 = R_r \cdot I_{rd} + \frac{d\phi_{rd}}{dt} - \omega_r \cdot \phi_{rq} \\ 0 = R_r \cdot I_{rq} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} + \omega_r \cdot \phi_{rd} \\ \phi_{sd} = L_s I_{sd} + M \cdot I_{rd} \\ \phi_{sq} = L_s I_{sq} + M \cdot I_{rq} \\ \phi_{rd} = L_r I_{rd} + M \cdot I_{sd} \\ \phi_{rq} = L_r I_{rq} + M \cdot I_{sq} \end{array} \right. \quad (1.09)$$

L'expression du flux statorique s'exprime en fonction du courant statorique comme suit (plus de détails voir [2]) :

$$I_s = \frac{\phi_s}{L_s} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{L_r \cdot \omega_r}{R_r}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sigma \cdot L_r \cdot \omega_r}{R_r}\right)^2}} \quad (1.10)$$

Avec :

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s \cdot L_r} : \text{Coefficient de dispersion de Blondel.}$$

$$I_s = \sqrt{I_{sd}^2 + I_{sq}^2} : \text{Module du courant statorique dans le repère}(d, q).$$

$$\phi_s = \sqrt{\phi_{sd}^2 + \phi_{sq}^2} : \text{Module du flux statorique dans le repère}(d, q),$$

La relation (1.10) est basée sur des lois de commande à flux constant des machines alimentées en courant. Les transformations de coordonnées adoptées conservent le module du flux.

#### Remarque :

La relation (1.10) reste identique, dans le référentiel lié au stator ou au rotor.

$$\text{Le couple électromagnétique est donné par : } C_{em} = p \cdot M \cdot (I_{sq} \cdot I_{rd} - I_{sd} \cdot I_{rq})$$

D'où après arrangement, on obtient :

$$C_{em.} = 3p. \left(\frac{M}{L_s}\right)^2 \phi_s^2 \frac{\frac{R_r}{\omega_r}}{\left(\left(\frac{R_r}{\omega_r}\right)^2 + (\sigma L_r)^2\right)}$$

Ou bien :

$$C_{em.} = 3p. \phi_r^2 \frac{\omega_r}{R_r}$$

Ces équations du couple montre clairement que lorsque le module du flux statorique ou rotorique est constant, le couple ne dépend que de la pulsation  $\omega_r$ .

Pour un couple donné, on peut déterminer  $\omega_r$  donnant le couple maximal pour lequel la réactance de fuite et la résistance rotorique sont égaux.

$$C_{max.} = \phi_s^2 \cdot \frac{3}{2} p. \left(\frac{M}{L_s}\right)^2 \frac{1}{\sigma L_r}, \quad \text{pour : } \omega_{rmax} = \frac{R_r}{\sigma L_r}$$

Donc :  $\omega_r$  permet de contrôler le couple.

Comme la pulsation rotorique  $\omega_r$  est inaccessible, on utilisera la relation naturelle d'autopilotage (I.05) de la machine à induction à savoir :

$$\omega_r = \omega_s - p. \Omega$$

Avec :

$\omega_s$  : grandeur imposable et  $\Omega$  : Grandeur mesurable.

### 1.2.1.1.2.2 Alimentation en Tension :

L'onduleur de tension étant maintenant le plus utilisé en petite et moyenne puissance.

On considère que la machine est alimentée en tension, c'est-à-dire que pour chaque point de fonctionnement, l'amplitude de la tension statorique est imposée.

En régime permanent sinusoïdal, on choisit un repère de référence qui tourne à la vitesse de synchronisme( $d, q$ ), de manière que les variables soient de type continu.

On peut formuler la commande en  $\frac{V}{f}$  par élimination des courants et les flux rotorique de l'équation (I.09), ainsi on obtient :

$$V_s = \phi_s \frac{R_s}{L_s} \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{L_s \omega_s + L_r \omega_r}{R_s} + \frac{L_r \omega_r}{R_r}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sigma L_s L_r \omega_s \omega_r}{R_s R_r}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sigma L_r \omega_r}{R_r}\right)^2}} \quad (1.11)$$

Avec :

$$V_s = \sqrt{V_{sd}^2 + V_{sq}^2} : \text{Module de la tension statorique dans le repère}(d, q).$$

$$\phi_s = \sqrt{\phi_{sd}^2 + \phi_{sq}^2} : \text{Module du flux statorique dans le repère}(d, q).$$

La relation (I.11) montre que le maintien du flux statorique  $\phi_s$  à une amplitude constante nécessite la prise en compte de la pulsation rotorique  $\omega_r$ , c'est-à-dire de la charge de la machine.



Donc, il est difficile d'avoir un flux statorique constant sur toute la plage de fonctionnement, particulièrement quand la machine est en charge et à basse vitesse de rotation.

Dans le domaine des fréquences statorique moyennes et élevées, quand il est possible de négliger la résistance du stator et la pulsation rotorique est très faible, la relation (I.11) se réduit à :

$$\Phi_s = \frac{V_s}{\omega_s} = \text{Constante}.$$

On retrouve bien la loi classique  $\frac{\text{Tension}}{\text{fréquence}}$  valable seulement pour le cas où la résistance  $R_s$  est négligée.

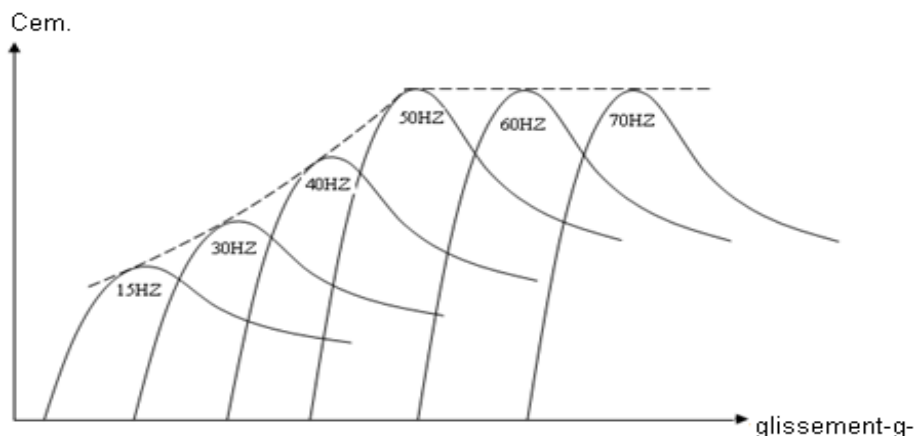
Le principe du maintien du rapport  $\Phi_s = \frac{\text{Tension}}{\text{Fréquence}} = \text{flux nominale}$ , dans une large plage de fonctionnement, permet de maximiser les capacités du couple électromagnétique ( $C_{max.}$ ) avec :

$$C_{max.} = \frac{3 \cdot p}{2 \cdot \omega_r} \cdot \left( \frac{V_s}{\omega_s} \right)^2$$

On voit bien que le couple maximum est directement proportionnel au carré du rapport de la tension sur la fréquence statorique.

Le maintenant de ce rapport constant consiste à régler la fréquence statorique  $\omega_s$ , on déplace ainsi la courbe du couple électromagnétique (régime quasi-statique) de la machine à induction (figure. I.03).

Le faite de garder le rapport constant revient à maintenir le flux constant. Quand la tension atteint sa valeur maximale, on commence alors à décroître ce rapport ce qui provoque une diminution du couple que peut produire la machine, régime « défluxage ».



**Figure I.03** : Couple - glissement en fonction de la fréquence d'alimentation.

Ce régime permet de dépasser la vitesse nominale de la machine on l'appelle donc aussi régime de survitesse (partie  $\Omega > \Omega_s$  de la figure I.04).

De par son fondement, cette technique est sensible dans les phases transitoires aux variations paramétriques à savoir la résistance statorique [4], ce qui va être validé par une simulation.

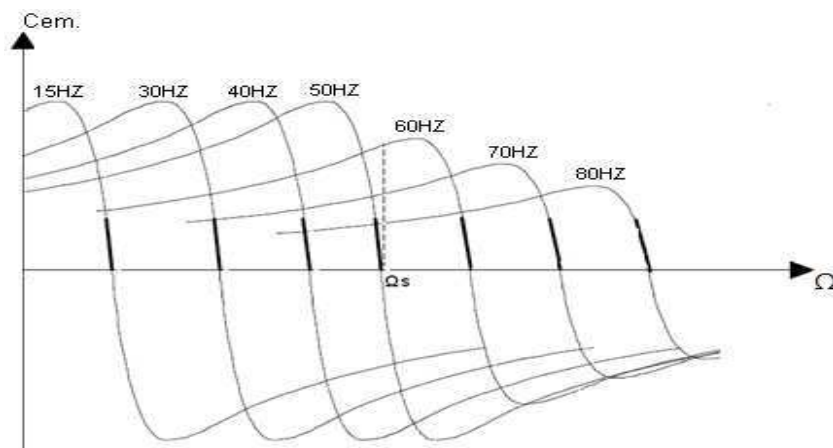


Figure I.04 : Couple - Vitesse en fonction de la fréquence d'alimentation

**I.2.1.1.3 Résultats de simulation de la Commande Scalaire sur MATLAB :**

Les résultats obtenus après une simulation de la commande scalaire, sur MATLAB, pour la machine à induction, sont schématisés par la figure I.05 :

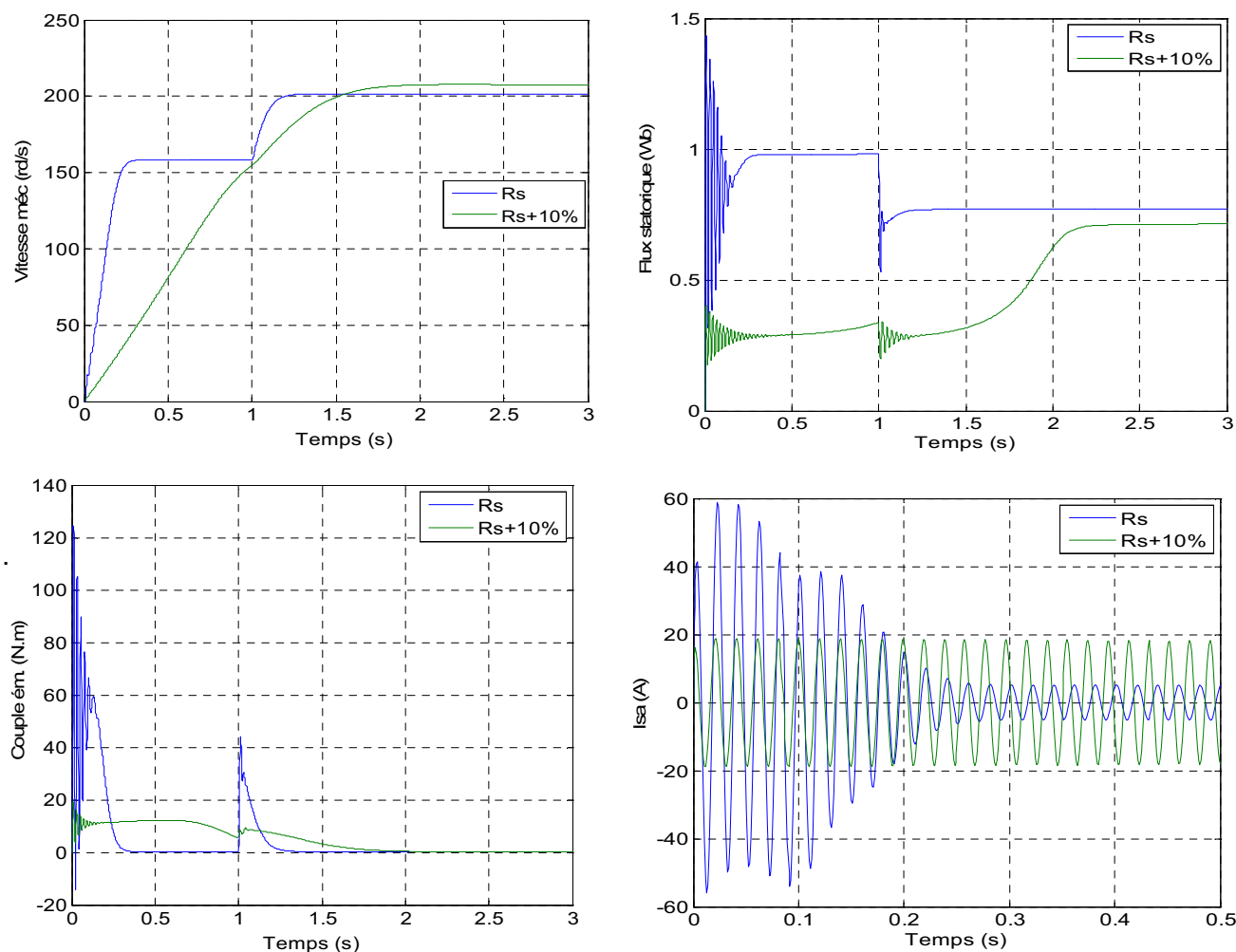


Figure I.05 : Résultats de simulation de la commande Scalaire de la MAI.

On constate que le flux statorique est bien maintenu constant en régime permanent, par contre il n'est pas contrôlé durant la phase transitoire.

Ce transitoire sur le flux se traduit par un temps d'établissement du couple de plusieurs dixièmes de secondes.

L'impact des variations paramétriques ( $R_s + 10\%$ ) est clair sur l'établissement de la vitesse et du couple.

#### **I.2.1.1.4 Conclusion :**

La commande scalaire de la machine à induction est influencée par les paramètres de la machine ( $R_s, R_r$  et la constante de temps) qui varient selon la température ce qui provoque une désorientation du flux à contrôler au moment voulu.

L'utilisation des régulateurs à hystérésis engendre des perturbations surtout dans le couple et dans le courant. L'absence d'une boucle de régulation de flux dans cette commande crée une différence entre la valeur de flux réelle et la valeur de consigne ce qui diminue les performances de cette commande.

Elle correspond à des domaines de vitesse assez réduits (rapport entre vitesse maximale et vitesse minimale ne dépassant guère 3 ou 4), à des fonctionnements qui ne correspondent pas à de très basses vitesses et de forts couples.

La commande scalaire permet le contrôle du couple seulement en régime permanent par contre il n'est pas contrôlé durant la phase transitoire.

Ce transitoire se traduit par un temps d'établissement du couple de plusieurs dixièmes de secondes par rapport au flux.

C'est ce temps de réponse qui pourrait être minimisé en utilisant une commande plus performante dite vectorielle.

### **I.2.1.2. Commande vectorielle :**

#### **I.2.1.2.1 Introduction :**

Dans les machines électriques, le couple électromagnétique est exprimé par un produit vectoriel du courant induit et du flux inducteur. Pour une machine à courant continu, le champ inducteur et le courant induit sont naturellement orthogonaux ainsi, le couple est maximal ce qui donne aux machines à courant continu des performances remarquables en commande.

Au contraire, une machine asynchrone présente un fort couplage entre toutes ses grandeurs électromagnétiques, grâce à une structure de commande vectorielle une simulation avec la machine à courant continu est créée. La composante d'axe ( $d$ ) du courant statorique joue le rôle de l'excitation et permet de régler la valeur du flux dans la machine et la composante d'axe ( $q$ ) joue le rôle du courant induit et permet de contrôler le couple.

Cette technique de commande est appelé « commande à flux orienté » réalisée par Blaschke sous le titre de la commande découplée : découplage entre le flux magnétique et le couple électromagnétique, que nous allons exposer brièvement son principe.

#### **1.2.1.2.2 Principe :**

Toute grandeur vectorielle est caractérisée par son module et son argument (phase). Le principe du contrôle vectoriel d'une grandeur repose sur la connaissance quasi instantanée de cette grandeur en module et en phase [5]. Pour la machine à induction, le principe de la commande vectorielle consiste à éliminer le couplage entre l'inducteur et l'induit, en dissociant le courant statorique en deux composantes en quadrature de façon que l'une des composantes commande le flux et l'autre contrôle le couple électromagnétique, ce qui permet d'obtenir un fonctionnement comparable à celui de la machine à courant continu à excitation séparée.

#### **1.2.1.2.3 Commande vectorielle par orientation du flux rotorique (OFR) :**

La commande vectorielle à orientation du flux rotorique est la plus utilisée car elle élimine l'influence des réactances de fuite rotorique et statorique et donne de meilleurs résultats que les méthodes basées sur l'orientation du flux statorique ou d'entrefer [1-6-7].

La méthode de commande vectorielle par OFR est qualifiée par : directe ou indirecte, selon la détermination du module du flux  $|\phi_r|$  et de l'angle de sa position  $\theta_s$  (l'angle d'orientation).

#### **1.2.1.2.4. Méthodes de la commande vectorielle à OFR :**

##### **1.2.1.2.4.1 Méthode directe :**

Cette méthode est basée sur la mesure directe de l'amplitude et de la position du flux à orienter par des capteurs.

Par exemple, la mesure du flux dans l'entrefer est effectuée par deux sondes à effet Hall, l'une placée sur l'axe direct, et l'autre sur l'axe en quadrature.

Ensuite, l'angle d'orientation est donné directement à partir des composantes biphasées du flux.

L'utilisation des capteurs de flux, sont inconfortables, et rend cette méthode moins utilisée car Les avantages du moteur à induction (simplicité, robustesse ainsi que son faible coût) sont alors perdus [8][9][10].

On retiendra donc : que la méthode directe nécessite un capteur de flux ou son estimation.

##### **1.2.1.2.4.2 Méthode indirecte :**

Elle présente l'avantage de ne pas nécessiter la mesure ou la reconstitution du flux, il est fixé en boucle ouverte [2].

La présence d'un capteur de position du rotor permet d'orienter le flux en question d'un angle calculé par l'intégration de la pulsation du stator  $\omega_s$  déduite de l'équation d'autopilotage (I.05).

L'immense avantage de cette méthode réside dans le fait qu'on n'utilise pas l'amplitude du flux rotorique mais, seulement, sa position ; c'est pourquoi cette méthode est la plus utilisée, comme illustre certain travaux [8-11].

On retiendra donc que la méthode indirecte nécessite un capteur de vitesse ou son estimation.

### 1.2.1.2.5. Application à la machine à induction :

Le principe de la commande vectorielle OFR d'une machine à induction consiste à : choisir un système d'axe lié au champ tournant ( $d, q$ ) est de l'orienter sur le flux rotorique désiré et une loi de commande assurant le découplage entre le couple électromagnétique et le flux [2].

Si le flux rotorique est orienté sur l'axe ( $d$ ) du champ tournant ( $\Phi_{rd} = \Phi_r$  et  $\Phi_{rq} = 0$ ) figure I.06, le modèle mathématique de la machine à induction s'exprime de la manière suivante :

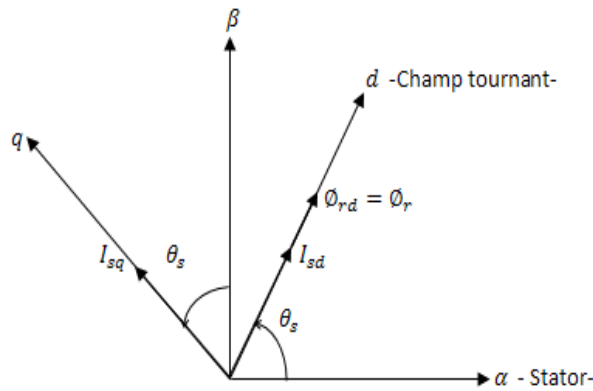


Figure I.06 : Diagramme d'orientation du flux rotorique

#### 1.2.1.2.5.1 Expression des tensions statorique :

L'équation électrique (I.04) de la machine dans le référentiel ( $d, q$ ) s'exprime sous la nouvelle forme suivante :

$$\begin{cases} V_{sd} = \left( R_s + \frac{R_r M^2}{L_r^2} \right) \cdot I_{sd} + L_s \sigma \frac{dI_{sd}}{dt} - \sigma L_s \omega_s I_{sq} - \frac{R_r M}{L_r^2} \Phi_r \\ V_{sq} = R_s \cdot I_{sq} + \sigma L_s \frac{dI_{sq}}{dt} + \sigma L_s \omega_s I_{sd} + \frac{M}{L_r} \omega_s \Phi_r \end{cases}$$

Comme :  $\omega_s = \omega_r + \omega$  on aura :

$$\begin{cases} V_{sd} = \left( R_s + \frac{R_r M^2}{L_r^2} \right) \cdot I_{sd} + \sigma L_s \cdot \frac{dI_{sd}}{dt} - \sigma L_s \omega_s \cdot I_{sq} - \frac{R_r M}{L_r^2} \cdot \Phi_r \\ V_{sq} = \left( R_s + \frac{R_r M^2}{L_r^2} \right) \cdot I_{sq} + \sigma L_s \cdot \frac{dI_{sq}}{dt} + \sigma L_s \omega_s I_{sd} + \frac{M}{L_r} \omega \cdot \Phi_r \end{cases}$$

Soit :  $\gamma = \frac{1}{\sigma \cdot L_s} \left( R_s + R_r \cdot \frac{M^2}{L_r^2} \right)$ , donc :

$$\begin{cases} V_{sd} = \sigma \gamma L_s \cdot I_{sd} + \sigma L_s \frac{dI_{sd}}{dt} - \sigma L_s \omega_s \cdot I_{sq} - \frac{R_r M}{L_r^2} \cdot \Phi_r \\ V_{sq} = \sigma \gamma L_s \cdot I_{sq} + \sigma L_s \frac{dI_{sq}}{dt} + \sigma L_s \omega_s \cdot I_{sd} + \frac{M}{L_r} \omega \cdot \Phi_r \end{cases} \quad (1.12)$$

### 1.2.1.2.5.2 Expression du flux rotorique :

Le flux rotorique utilisé pour l'élaboration de la CVOFR est difficilement accessible pour des raisons techniques, donc le flux peut être reconstitué par estimation en boucle ouverte ou par un observateur en boucle fermée corrigeant l'estimation.

L'estimation du flux rotorique repose sur l'utilisation du système d'équations (1.04-06) de la machine à induction qui va synthétiser l'évolution du flux sous la forme suivante :

$$\frac{d\widehat{\Phi}_r}{dt} \cdot \tau_r + \widehat{\Phi}_r = M \cdot I_{sd}$$

Avec :  $\widehat{\Phi}_r$  le flux estimé et  $\tau_r = \frac{L_r}{R_r}$  la constante de temps rotorique.

Finalement, le courant  $I_{sd}$  fixe le flux rotorique ( $\widehat{\Phi}_r$ ) et on retrouve le comportement d'une machine à courant continu [2].

La position du flux rotorique est assurée par la formule (1.05) de l'autopilotage de la machine :

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \omega_s = \omega_r + P \cdot \Omega$$

La pulsation rotorique  $\omega_r$  est défini par :  $\omega_r = \frac{M}{\tau_r} \cdot \frac{I_{sq}}{\widehat{\Phi}_r}$

Donc :  $\omega_s = \frac{M}{\tau_r} \cdot \frac{I_{sq}}{\widehat{\Phi}_r} + P \cdot \Omega$

Cette équation n'est pas exploitable telle quelle puisque  $\widehat{\Phi}_r = 0$  (s'il n'existe pas de flux rémanent) au démarrage de la machine, pour l'implantation, nous utilisons l'équation :

$$\omega_s = \frac{M}{\tau_r} \cdot \frac{I_{sq}}{\widehat{\Phi}_r + \varepsilon} + P \cdot \Omega$$

Avec, par exemple,  $\varepsilon = 0,001$ .

La position du flux rotorique est défini par :  $\theta_s = \int \omega_s \cdot dt$

### 1.2.1.2.5.3 Expression du couple électromagnétique :

On adopte l'expression du couple électromagnétique suivante choisit de l'équation (1.06) :

$$C_{em.} = P \cdot \frac{M}{L_r} \cdot (\Phi_{rd} \cdot I_{sq} - \Phi_{rq} \cdot I_{sd}).$$

Comme :

$$\Phi_{rq} = 0 \text{ et } \Phi_{rd} = \Phi_r.$$

Donc :  $C_{em.} = P \cdot \frac{M}{L_r} \cdot (\Phi_r \cdot I_{sq}).$

Alors, le courant  $I_{sq}$  fixe le couple électromagnétique  $C_{em.}$ .

#### Remarque :

Le couple est maximal à tout instant car les courants statorique  $I_{sd}, I_{sq}$  sont toujours perpendiculaires et peuvent être commandés indépendamment (figure 1.06).

#### 1.2.1.2.5.4 Equation mécanique :

L'équation mécanique de la machine à induction est exprimée par :

$$J \cdot \frac{d\Omega}{dt} = C_{em} - C_r - f \cdot \Omega$$

L'examen des équations (I.12) révèle l'existence de termes croisés qui induisent une forte interaction entre les deux axes ( $d, q$ ) i.e.  $V_{sd}, V_{sq}$  influent à la fois sur  $I_{sd}$  (donc sur le flux) et  $I_{sq}$  (sur couple) ; ce qui impose la création des techniques de découplage entre les deux axes.

On définit deux types de découplage :

#### 1.2.1.2.5.5 Découplage par compensation :

Deux nouvelles variables de commande  $V_{ds1}$  et  $V_{qs1}$  considérés comme des perturbations sont décrites afin de concevoir un découplage entre les axes ( $d, q$ ) [2] avec :

$$V_{sd1} = \sigma \cdot L_s \cdot \omega_s \cdot I_{sq} + \frac{MR_r}{L_r^2} \cdot \Phi_r$$

$$V_{sq1} = \sigma \cdot L_s \cdot \omega_s \cdot I_{sd} + \frac{M}{L_r} \cdot \omega \cdot \Phi_r$$

L'équation (I.12) s'exprime en fonction des nouvelles variables ( $V_{sd1}, V_{sq1}$ ) de la manière suivante :

$$\begin{cases} V_{sd} = \sigma L_s \gamma \cdot I_{sd} + \sigma \cdot L_s \frac{dI_{sd}}{dt} - V_{sd1} \\ V_{sq} = \sigma L_s \gamma \cdot I_{sq} + \sigma \cdot L_s \frac{dI_{sq}}{dt} + V_{sq1} \end{cases}$$

Ainsi, un découplage des axes ( $d, q$ ) est conçu figure (I.07).

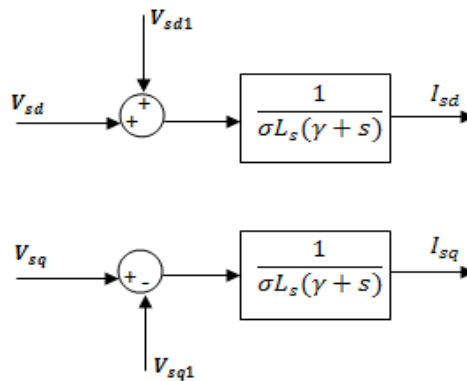


Figure I.07. : Découplage par compensation.

Cette technique reste très sensible à la variation des paramètres de la machine à induction, notamment la résistance rotorique.

#### 1.2.1.2.5.6 Découplage par retour d'état :

Cette technique est basée sur la linéarisation entrée-sortie, son but est de trouver un retour d'état  $v(x)$  qui découple le système. Sous la commande  $v(x)$  le système est équivalent à une chaîne constituée d'un seul intégrateur figure (I.08).

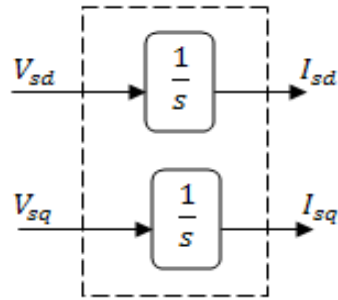


Figure I.08. : Découplage par retour d'état.

### I.2.1.2.6 Schéma bloc de la commande vectorielle OFR :

Le schéma bloc de la commande vectorielle OFR indirect est proposé dans la figure (I.09), avec l'implantation des régulateurs de courants, et de vitesse du type proportionnel intégral (PI), une commande indirecte ne comporterait pas de régulateur de flux (en cas de survitesse), il est déduit de la vitesse à partir du bloc de défluxage.

- Les grandeurs mesurées dont nous avons besoin sont : la vitesse mécanique et les courants statorique  $i_{sa}, i_{sb}, i_{sc}$ .
- L'alimentation contrôlée en tension qui convient pour régler les courants.
- C'est le découplage par compensation qui a été adopté.

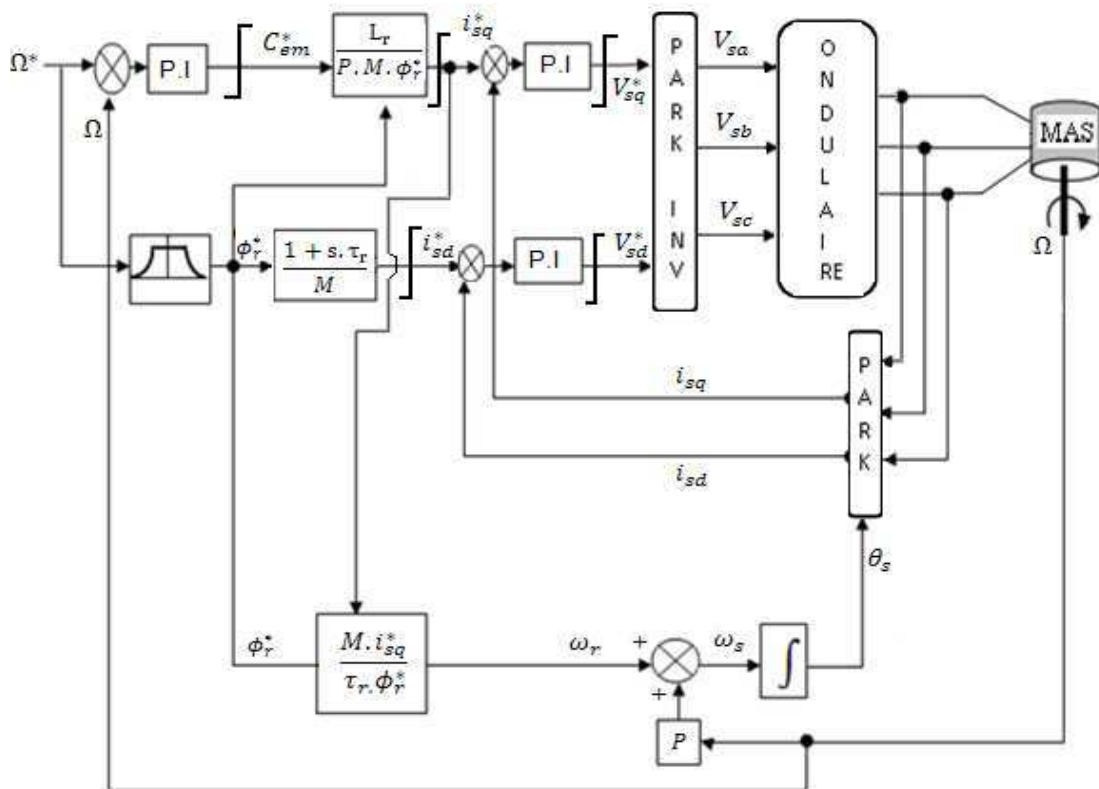


Figure I.09 : Schéma bloc de la commande indirecte à flux rotorique orienté pour la MAI.



### I.2.1.2.7 Résultats de simulation de la Commande Vectorielle OFR:

Cette analyse est confirmée par les résultats issus d'une simulation du modèle sur MATLAB :

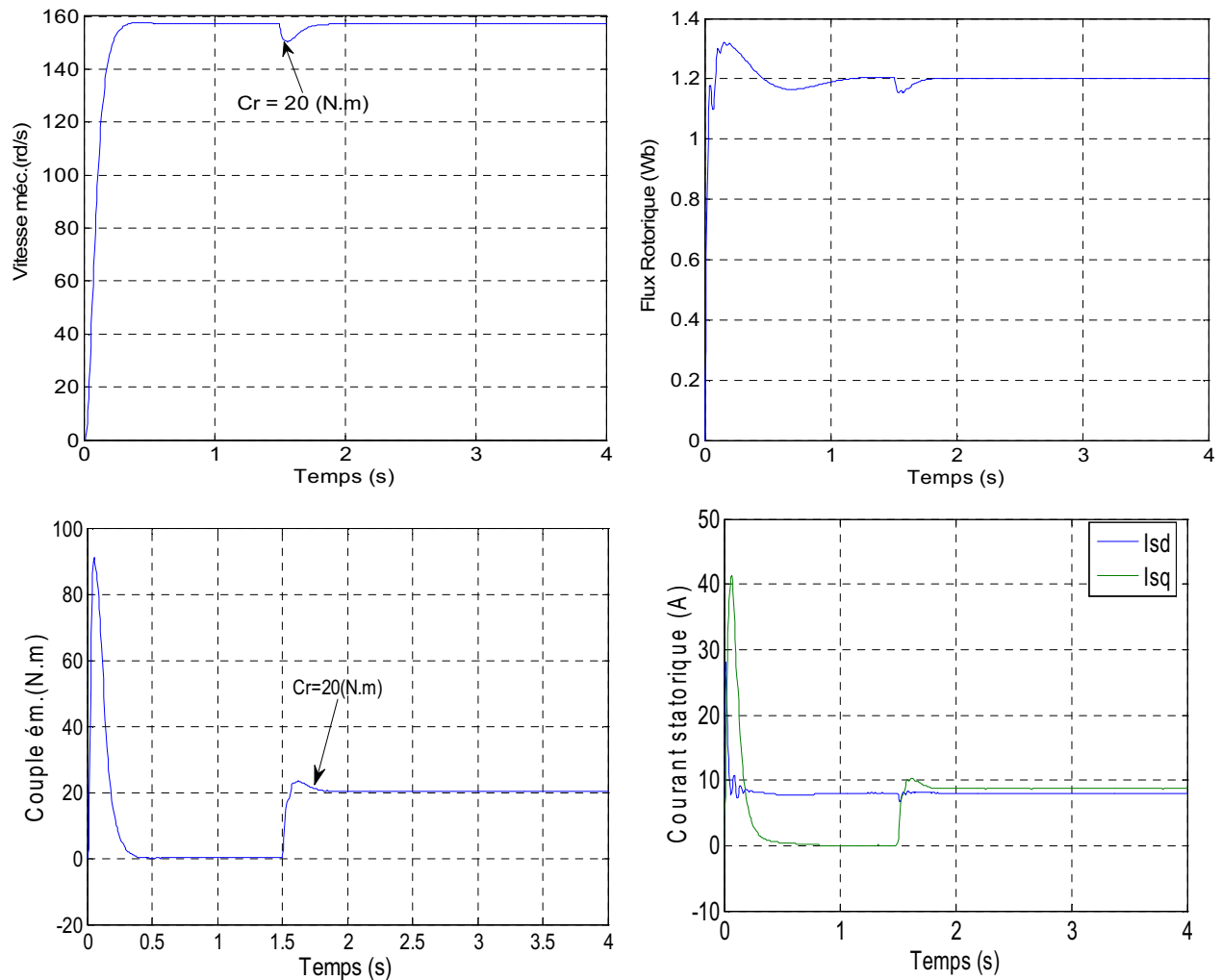


Figure I.10 : Résultats de simulation de la commande vectorielle à OFR de la MAI.

### I.2.1.2.8 Conclusion :

La commande vectorielle permet le contrôle du couple seulement en régime dynamique, elle doit être fiable pour avoir une caractéristique couple vitesse quasi-linéaire.

L'expérience a mis en valeur quelques faiblesses de cette méthode face aux perturbations dues aux incertitudes des paramètres, qu'ils soient mesurés, comme la vitesse, ou qu'ils varient au cours du fonctionnement, comme les résistances du rotor et du stator ce qui peut nuire à la détermination exacte de la position du flux.

En effet, les résultats de simulation montrent que, l'utilisation du modèle de la machine rend cette solution très sensible à la précision avec laquelle les paramètres du modèle sont connus. Ces paramètres dépendent largement des conditions de fonctionnement (saturation, échauffement, fréquence,...). En cas d'imprécision sur la détermination de ces paramètres, le découplage entre flux

et couple ne sera pas assuré. La conséquence serait une dégradation des performances dynamiques et statiques.

C'est cet handicap qui rend la commande vectorielle moins performante et non précise.

D'après les résultats médiocres obtenus par les commandes du modèle linéaire, les performances dynamiques de la machine à induction ne sont plus maintenues ce qui nécessite d'autres techniques de commande tenant compte de la non linéarité du modèle.

Une approche non linéaire se présente comme alternative obligatoire.

## **I.2.2. Commandes du modèle non linéaire :**

Il y a deux approches possibles pour la commande d'un système non linéaire :

La première : vise la linéarisation du système à commander, afin de profiter des techniques de l'automatique linéaire. Cette linéarisation est réalisée, moyennant des approximations ou des transformations géométriques dans l'espace de phase.

La deuxième : cette approche consiste à trouver une fonction de commande dite de Lyapunov garantissant certaines performances pour le système en boucle fermée, actuellement la plupart des techniques de commande utilisent cette approche.

On va présenter quelques techniques de ces deux approches dans ce qui suit.

### **I.2.2.1. Définitions :**

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques critères de stabilité qui peuvent être utilisés pour analyser les systèmes non linéaires. D'une façon générale, les systèmes non linéaires sont les plus difficiles à étudier parce qu'il est délicat d'en faire l'étude dans le domaine fréquentiel (fonction de transfert difficile à exploiter).

Il est alors préférable d'avoir un critère utilisant le modèle du système dans le domaine temporel.

Pour étudier ce problème, on considère un système non linéaire  $\Sigma$  est défini par :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

Avec :

$x \in \mathbb{R}^n$  : Variable d'état.

$u \in \mathbb{R}^m$  : Vecteur d'entrée et  $y \in \mathbb{R}^m$  : vecteur de sortie.

$f(x)$ ,  $h(x)$ : Champs de vecteur.

#### **I.2.2.1.1. Stabilité des systèmes non linéaire:**

La stabilité y était considérée comme la capacité du cycle limite de se maintenir même après perturbation de celui-ci. Ce type de stabilité sera appelé asymptotique.

##### **I.2.2.1.1.1 Point d'équilibre d'un système non commandé:**

Si le système  $\Sigma$  non commandé défini par l'équation d'état  $\dot{x} = f(x, t)$  possède une dynamique nulle en un point  $x_*$ , alors ce point  $x_*$  est un point d'équilibre du système.

On considérera toujours l'équilibre à l'origine 0. Pour le cas général, il suffit de faire une translation.

### 1.2.2.1.1.2 Point d'équilibre d'un système commandé :

Pour les systèmes commandés, la notion de stabilité est basée essentiellement sur l'énergie sans recours à la résolution des équations différentielles paraît difficile.

Si le système est initialement "légèrement" perturbé de son point d'équilibre le système reste "proche" de ce point d'équilibre figure I.11.

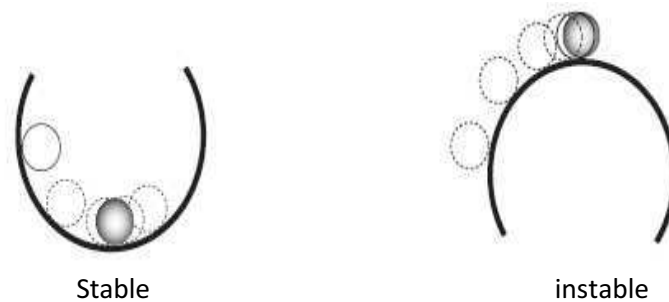


Figure I.11 : Illustration de la définition intuitive de la stabilité.

### 1.2.2.1.1.3 Stabilité asymptotique :

La stabilité asymptotique exige l'existence d'un voisinage autour du point d'équilibre  $x = 0$  du système d'équations  $\dot{x} = f(x, t)$  tel que toute trajectoire ayant pour condition initiale un point de ce voisinage converge vers le point d'équilibre. En somme, on aimerait que le système revienne et s'arrête au point d'équilibre lorsqu'il en est légèrement perturbé.

### 1.2.2.1.1.4 Stabilité Asymptotiquement globale :

Le point d'équilibre déjà mentionné est dit Globalement Asymptotiquement Stable si le rayon  $R_0$  de la boule des conditions initiales est infini, c'est-à-dire : si celle-ci correspond à tout l'espace d'état.

### 1.2.2.1.1.5 Etat Zéro Détectable et observable :

Soit le système  $\Sigma$  définit par :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad \text{et } x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$\Sigma$  : est zéro état observable (ZEO) avec une entrée nulle  $u = 0$  depuis la sortie  $y$  si :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \text{ nous avons : } y(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0.$$

$\Sigma$  : est zéro état détectable (ZED) si :

$$y(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

### 1.2.2.1.1.6 Inconvénients de la définition :

La définition de stabilité présente certains désavantages importants :

- Il est nécessaire de pouvoir calculer de manière explicite chaque solution correspondant à chacune des conditions initiales.
- Le maniement de la définition est fastidieux.

Par conséquent, des résultats permettant de déterminer la stabilité sans devoir intégrer les équations dynamiques seraient les bienvenus, c'est ce qui va être représenté dans le paragraphe suivant.

### **I.2.2.1.2. Stabilité au sens de Lyapunov :**

Un système est stable au sens de Lyapunov, si  $\forall R > 0, \exists r > 0$  tel que:  $\|x_0\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < R$  avec  $x_0$  condition initiale du système.

Cette définition signifie que, quelle que soit la boucle d'exigence de taille  $R$ , il est toujours possible de choisir une certaine sous-boucle de taille  $r$  telle que, pour toutes conditions initiales comprises dans cette sous-boucle, les trajectoires résultantes seront, en tout temps, comprises dans la boucle d'exigence de taille  $R$ .

Lorsque le système est stable, il est toujours possible de trouver une telle sous-boucle, même lorsque le rayon  $R$  de la boucle d'exigence a diminué de manière de le rendre arbitrairement petit, augmentant ainsi les contraintes sur les conditions initiales.

#### **Remarque :**

Un système est instable au sens de Lyapunov lorsqu'il n'est pas stable au sens de Lyapunov.

#### **I.2.2.1.2.1 Fonction candidate de Lyapunov :**

Le candidat de Lyapunov est une fonction  $V(x)$  qui possède deux propriétés essentielles :

- La première est la qualité d'extremum au point d'équilibre, à savoir s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum. Le point d'équilibre a tendance à être stable si cet extremum est un minimum. Afin de forcer la présence d'un minimum au point d'équilibre, la fonction sera contrainte à être positive pour toute valeur différente de l'origine. Elle ne pourra s'annuler qu'à l'origine.
- La deuxième particularité de la fonction candidate de Lyapunov est que : lors de la présence d'un système stable, elle a tendance à diminuer ou d'être conservée lors de l'évolution du système.

En conséquence, on exigera en plus du candidat de Lyapunov que la dérivée de celui-ci soit négative :  $\dot{V}(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T f(x) < 0$ .

#### **Exemple :**

La fonction d'énergie  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$  est une fonction candidate de Lyapunov qui présente ce type de particularité.

Ainsi, le théorème de stabilité fondamental (*méthode directe*) de la théorie de Lyapunov peut maintenant être énoncé :

#### **I.2.2.1.2.2 méthode directe :**

Si une fonction candidate de Lyapunov  $V(x)$  existe pour un système donné, alors ce système est stable. Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante, c'est-à-dire que :

$\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$ , alors la stabilité est en plus asymptotique.

Cette définition de la stabilité sera adoptée pour exposer la commande des systèmes non linéaire.

### I.2.2.2. La commande à structure variable :

Cette technique a connu un développement théorique au début des années 60 par l'école Soviétique plus connue sous la dénomination de « la commande par mode glissant » grâce à la résolution des équations différentielles à entrée discontinue avec second membre par le mathématicien russe A.Fillipov, suivie des recherches de S. Emelyanov en 1967 puis c'est Utkin [13] qui a introduit la notion de commande équivalente en 1977. Cette dernière définit le comportement du système une fois la consigne (surface glissante) atteinte.

#### I.2.2.2.1 Principe :

Le réglage par mode glissant est un mode de fonctionnement particulier des systèmes de réglage à structure variable [14-15]. Un système à structure variable est un système pouvant changer de structure en faisant commuter sa commande entre deux valeurs suivant une logique de commutation bien spécifique  $\emptyset(x)$  comme illustré par la figure I.12.(a), permettant à toutes les variétés de trajectoires de converger vers un comportement désiré et de les maintenir sur cette trajectoire appelée « surface de glissement ».

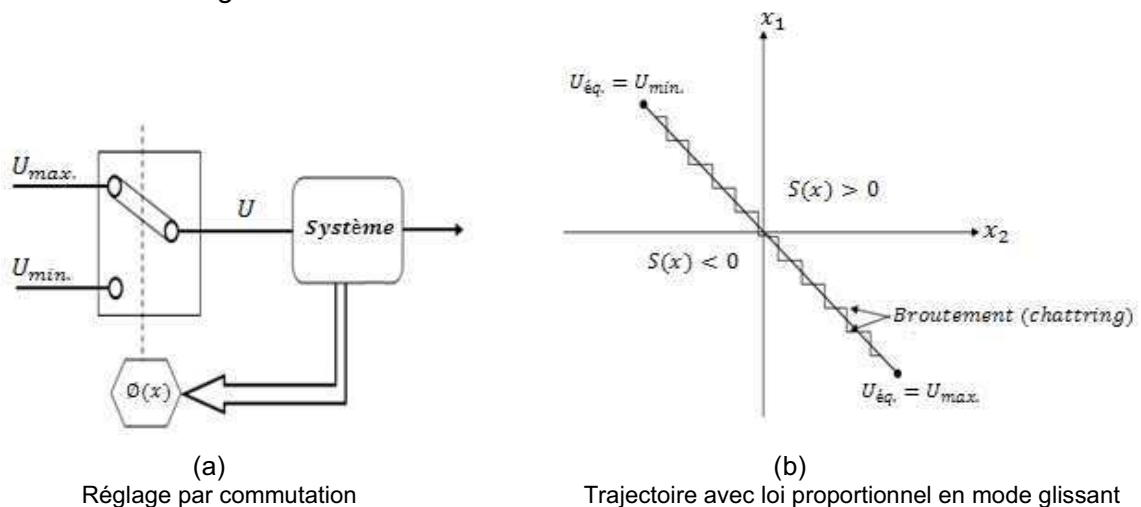


Figure I.12.: Principe de la commande à structure variable

#### I.2.2.2.2 Algorithme :

L'algorithme de la commande par mode glissant est basé sur trois étapes :

##### 1. Détermination de la surface de glissement

Pour déterminer la surface de glissement, J.J. Slotine propose une forme d'équation générale:

$$S(X) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e$$

$n$  : Ordre du système.

$\lambda$  : Coefficient positive.

$e = X_d - X$  : L'écart.

$X$  : Vecteur d'état et  $X_d$  : l'état désiré.

### 2. Condition de convergence

La condition de convergence est définie par l'équation de Lyapunov :  $S(X) \cdot \dot{S}(X) < 0$  rend la surface de commutation attractive et invariante.

$\dot{S}(X)$  : La dérivée de la fonction d'état  $S(X)$ .

### 3. Calcul de la loi de commande

Les lois de commande par mode glissant sont en générale de type relais  $U_{min}/U_{max}$  ou par changement de la contre-réaction d'état, les fréquences de commutation sont d'environ 10 à 20kHz pour des puissances de quelques kw.

Considérons le cas d'une loi de commutation du type proportionnel :  $S(X_c) = -K_x X_c + K_E E$

Avec  $X_c$  vecteur d'état à commander,  $E$  une consigne et  $K_x, K_E$  : des constantes.

La loi de commande impose :

$$U = \begin{cases} U_{max} & \text{pour } S(X_c) > 0 \\ U_{min} & \text{pour } S(X_c) < 0 \end{cases}$$

$U$  oscille continuellement entre ces deux valeurs avec une fréquence de commutation infini. Dans ce cas le vecteur d'état reste sur la trajectoire :  $S(X_c) = 0$  figure I.11.(b) :

Pour éliminer l'erreur statique et réduire l'effet de broutement, un intégrateur peut être rajouté dans la loi de commande.

#### 1.2.2.3 Condition d'existence du mode glissant:

La condition qui prélude à l'existence de la commande est la propriété de transversalité qui s'apparente à la notion de degré relatif unitaire qui exige que la commande équivalente soit comprise entre les valeurs extrêmes de la commande instantanée c.-à-d. les commutations ont lieu continuellement entre  $U_{max}$  et  $U_{min}$ . Ce phénomène est illustré dans la figure (I.13) pour le cas d'un système de réglage du deuxième ordre avec les deux variables d'état  $x_1$  et  $x_2$ .

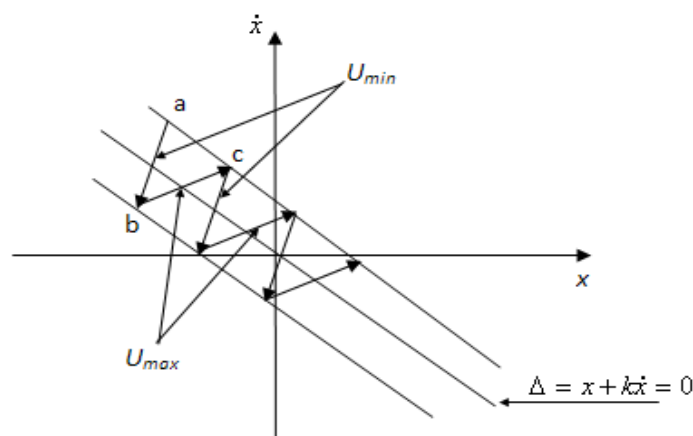


Figure I.13 : Démonstration du mode glissant.

Cette commande, robuste par principe, suppose en théorie une fréquence de commutation arbitrairement élevée mais s'apparente dans les cas réels et simples à une commande par hystérésis.

On considère d'abord une hystérésis sur la loi de commutation  $S(x) = 0$  (droite en trait interrompu), les commutations ont lieu sur les droites décalées parallèlement de  $\pm \Delta S$ . Une trajectoire avec  $U = U_{max}$  touche au point "a" le seuil de basculement inférieur. Si avec  $U = U_{min}$ , la trajectoire est orientée vers l'intérieur de la zone de l'hystérésis, elle touche au point "b" le seuil de basculement supérieur ou lieu de commutation sur  $U = U_{min}$ . Si la trajectoire est de nouveau orientée vers l'inférieur et ainsi de suite. Il y'a donc un mouvement continu à l'intérieur de la zone de l'hystérésis. Par conséquent la loi de commutation fait un mouvement infiniment petit autour de  $S(x) = 0$  et le vecteur  $x$  suit une trajectoire qui respecte cette condition.

#### 1.2.2.2.4 Application à la machine à induction :

La commande par mode glissant est naturellement applicable à la machine asynchrone car cette dernière présente une structure variable et non-linéaire.

Ce type de contrôle est utilisé avec les commandes vectorielles de la machine asynchrone [2][13], il s'agit d'un contrôleur numérique de position implanté sur la machine alimentée en courant.

Deux variables d'états ont été retenues soit  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ .

avec :

$x_1 = \Delta\theta$  erreur de position.

$x_2 = \frac{d\theta}{dt} = \Omega$  la vitesse de rotation.

Dans un repère lié au champ tournant, une commande vectorielle est réalisée. Dans ce contexte,  $I_{sd}^*$  fixe le flux et  $I_{sq}^*$  le couple.

La commande est donnée par :

$$U = K \left( c_i \cdot \text{signe}(S_i(X)) + \left( \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \text{signe}(S_i(X)) \cdot X_1 \right) \cdot X_1 + \left( \frac{d+e}{2} + \frac{d-e}{2} \text{signe}(S_i(X)) \cdot x_2 \right) \cdot x_2 \right)$$

Et :

$$\begin{cases} S_1(X) = \alpha \cdot x_2^2 + x_1 - \theta_0 \\ S_2(X) = x_2 - \Omega_0 \\ S_3(X) = \beta x_1 + x_2 \end{cases}$$

Où :  $\Omega_0$  désigne la vitesse initiale,  $\theta_0$  la position initiale et  $a, b, d$  : des constantes.

$c_i$  : permet d'éliminer l'erreur statique due aux frottements secs et à la charge. Il vaut 0 si  $i = 1$  ou 2 & une constante si  $i$  vaut 3.

La trajectoire  $S_2$  doit être en dessus de la vitesse maximale de la machine et  $S_1$ ,  $S_3$  doivent être à l'intérieur de la zone d'accélération et de décélération limite quelque soit la variation des paramètres (inertie, frottement, paramètres électriques).

Le schéma bloc et la trajectoire de cette commande est donné par les figures I.14-15.

Elle est décomposée en :

- une phase d'accélération.
- une vitesse constante.
- Une phase de décélération lorsque l'erreur de position tend vers 0.

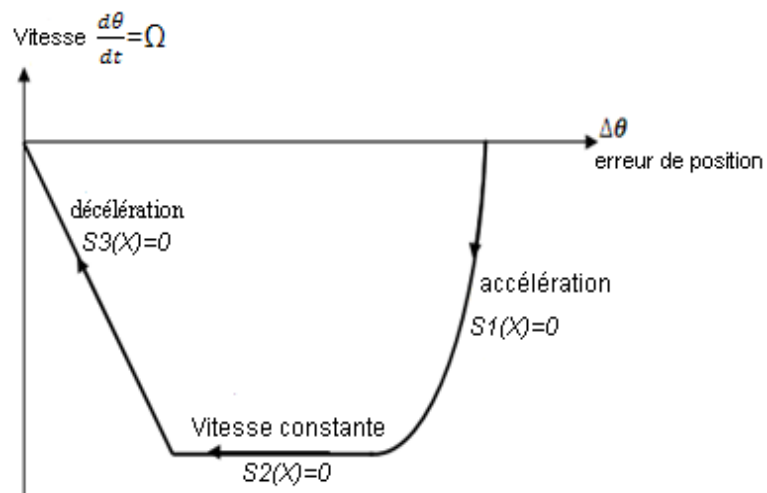


Figure I.14: Trajectoire de glissant.

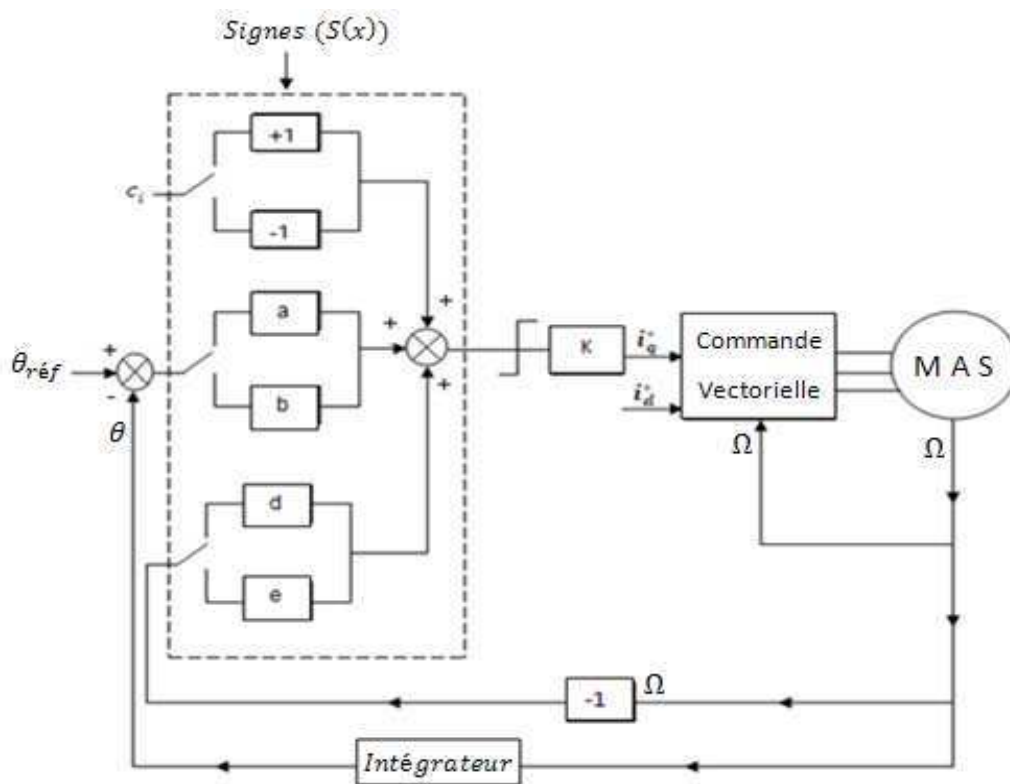


Figure I.15. : Le schéma bloc de la commande par mode glissement



### I.2.2.2.5 Résultats de simulation de la commande par mode glissant sur MATLAB :

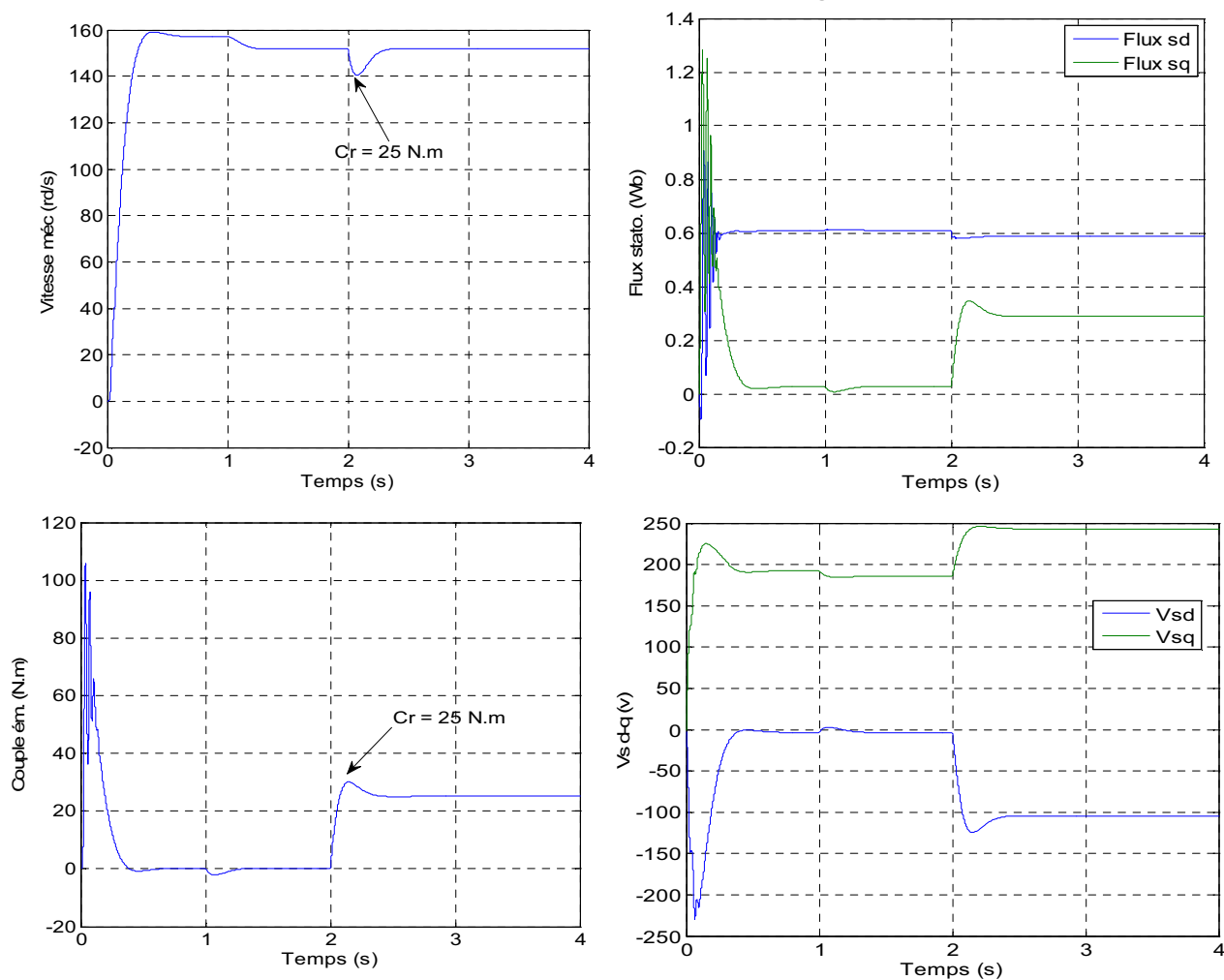


Figure I.16.: Résultats de simulation de la commande par mode glissant de la MAI.

### I.2.2.2.6 Conclusion :

L'inconvénient majeur de la commande par mode glissant est la présence d'un régime transitoire de couple indésirable et de l'effet du broutement ce qui perturbe la stabilité du système.

Ainsi que la fréquence de commutation libre qui génère des spectres de tensions et/ou de courants non confinés.

Les travaux actuels se situent dans le domaine multi variable et dans l'optimisation des surfaces de commutation.

### I.2.2.3. La commande stabilisante de Lyapunov :

#### I.2.2.3.1 Principe :

Cette commande est basée sur le choix d'une fonction scalaire candidate de Lyapunov positive et décroissante pour les variables d'état  $S(x)$  du système afin de garantir l'attraction de la variable à contrôler vers sa valeur de référence de manière à stabiliser le système.

Ainsi, la fonction de Lyapunov est définie comme suit :

$$V(x) = \frac{1}{2}S^2(x), \text{ sa dérivée } \dot{V}(x) = S(x) \cdot \dot{S}(x).$$

Pour que la fonction  $V(x)$  puisse décroître, il suffit d'assurer que sa dérivée est négative. D'où la condition de convergence exprimée par  $S(x). \dot{S}(x) < 0$

Le choix de la fonction candidate est en général défini comme étant l'erreur de l'énergie (l'écart entre l'état et son point d'équilibre).

### **1.2.2.3.2. Inconvénients :**

- Dans le cas des systèmes non linéaire, il n'y a pas de méthode constructive directe pour le choix de la fonction candidate, la recherche d'une telle fonction est généralement heuristique, ce qui engendre beaucoup de temps de calcul.
- Si une critique peut être formulée il s'agirait de la nécessité pour cette commande, quand elle existe, de calculer les points d'équilibre qui entrent dans son calcul.

De ce fait, cette commande est sensible aux erreurs de paramètres.

### **1.2.2.4. La commande par Backstepping :**

#### **1.2.2.4.1 Principe :**

L'idée de la commande par le backstepping est basée sur le calcul d'une loi de commande des systèmes non linéaire, tout en respectant leurs non linéarité, afin de garantir que la dérivée d'une certaine fonction de Lyapunov définie positive soit toujours négative. Pour cela, le système est décomposé en un ensemble de sous systèmes imbriqués. Le calcul de la fonction de Lyapunov s'effectue, ensuite, récursivement en partant de l'intérieur de la boucle. A chaque étape, l'ordre du système est augmenté et la partie non stabilisée lors de l'étape précédente est traitée. La loi de commande à appliquer est synthétisée à la dernière étape. Elle doit garantir, à chaque instant, la stabilité globale du système compensé tout en travaillant en poursuite ou en régulation.

#### **1.2.2.4.2 Algorithme :**

L'algorithme de la commande par backstepping est basé sur les étapes suivantes :

- 1) Calculons, pour un sous système, la première commande virtuelle a partir de l'erreur de poursuite  $e_1 = (y_{référence} - y)$  et la dynamique d'adaptation, qui va être utilisée au second étage comme signal de référence pour l'état suivant.
- 2) Déterminons une fonction de Lyapunov (représente, en quelque sorte, l'énergie de l'erreur) de telle sorte que sa dérivée soit négative.
- 3) Répétons l'opération jusqu'au  $n^{ième}$  étage (ordre du système) qui nous permet de générer la commande qui garantit la stabilité globale du système et qui va lui être appliquée.

Exemple :

Appliquant l'algorithme du Backstepping au système particulier non linéaire  $\Sigma$  défini comme suit:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f_1(x, z) + g_1(x, z)z & (\Sigma 1) \\ \dot{z} = f_2(x, z) + g_2(x, z).u & (\Sigma 2) \end{cases}$$

$(x, z)$  sont les variables d'état et  $u$  la commande. Les fonctions  $f_1, f_2, g_1$  et  $g_2$  sont continues et non nulles  $\forall x, z$ , on suppose que le système a pour point d'équilibre l'origine  $(0,0)$ .

Puisque le système  $\Sigma$  est constitué de deux états  $(x, z)$ , alors la méthode de conception récursive est conçue de deux étapes. On traite donc  $\Sigma$  comme deux sous-systèmes  $(\Sigma_1), (\Sigma_2)$  en cascade ; chacun avec une seule entrée et une seule sortie.

On va commencer tout d'abord la commande du sous-système  $(\Sigma_1)$  par l'intermédiaire de la variable d'état  $z$  (commande virtuelle), puis on commande le système globale  $\Sigma$  par  $u$  stabilisante à partir de la fonction de Lyapunov (défini positive et radialement non bornée) strictement attribuable a notre système.

- 1) Considérons le sous système  $(\Sigma_1)$  avec  $z$  comme commande, on suppose l'existence d'une fonction de Liapunov  $V_1(x)$  positive et radialement non bornée tels que :

$$\dot{V}_1(x) = \frac{\partial V_1}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V_1}{\partial x} [f_1(x, z) + g_1(x, z)\phi(x)] \leq -W(x)$$

Où  $\phi(x)$  est la fonction (loi de commande) par retour d'état à définir ; et  $W(x)$  une fonction défini positive.

Ainsi  $(\Sigma_1)$  est asymptotiquement stable (car  $\dot{V}_1(x) \leq 0$ ).

- 2) A partir de la fonction de Lyapunov réduite, il est possible de trouver la fonction candidate complet  $V(x, z)$  on ajoutant à la fonction  $\dot{V}_1(x)$  un terme d'erreur quadratique entre l'état  $z$  réel et sa valeur correspondant à  $\phi(x)$  ( $e = z - \phi(x)$ ) donc :

$$V(x, z) = V_1(x) + \frac{1}{2}e^2$$

- 3) Sa dérivée totale le long des trajectoires solutions est :

$$\dot{V}(x, z) \leq \dot{V}_1(x) + e \cdot \dot{e} \leq -W(x) + [z - \phi(x)] \cdot [f_2(x, z) + g_2(x, z) \cdot u - \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}]$$

$\dot{V}(x, z)$  contient un terme clairement négatif  $-W(x)$ , pour rendre  $\dot{V}(x) < 0$ , on peut choisir la commande  $u$  de la manière suivante :

$$u(x, z) = \frac{1}{g_2(x, z)} \left( -K[z - \phi(x)] - f_2(x, z) + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right)$$

Avec  $K$  une constante positive.

Ainsi, la fonction de Lyapunov globale  $V(x, z)$  est décroissante assurant la stabilité asymptotique globale du système  $\Sigma$ .

#### 1.2.2.4.3 Application à la machine à induction :

Le système d'équations différentielles représentant la machine à induction sera le modèle réduit (I.13) ci-dessous, l'équation du flux rotorique en quadrature ( $\phi_{rq}$ ) est désormais éliminée vu qu'on impose l'orientation du flux rotorique sur l'axe  $d$  :

$$\begin{bmatrix} \frac{dI_{sd}}{dt} = \dot{I}_{sd} \\ \frac{dI_{sq}}{dt} = \dot{I}_{sq} \\ \frac{d\phi_r}{dt} = \dot{\phi}_r \\ \frac{d\Omega}{dt} = \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma \cdot I_{sd} + \omega_s \cdot I_{sq} + \frac{M}{\sigma L_s L_r \tau_r} \cdot \phi_r \\ -\omega_s \cdot I_{sd} - \gamma \cdot I_{sq} - \frac{PM}{\sigma L_s L_r} \cdot \Omega \cdot \phi_r \\ \frac{M}{\tau_r} \cdot I_{sd} - \frac{1}{\tau_r} \cdot \phi_r \\ \frac{PM}{J L_r} \phi_r \cdot I_{sq} - \frac{f}{J} \Omega - \frac{1}{J} C_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{sd} \\ V_{sq} \end{bmatrix} \quad (I.13)$$

$u = [V_{sd} \ V_{sq}]^T$  : L'entrée de la machine à induction.

$y = x_1 = [\Omega \ \phi_r]^T$  : Sa sortie commandée.

$x_2 = [I_{sd} \ I_{sq}]^T$  : Vecteur de courant statorique.

$x = [x_1 \ x_2]^T$  : Le vecteur d'état.

Les éléments du vecteur d'état  $x$  sont tous mesurables sauf le flux rotorique qui sera estimé à partir des équations de la machine à induction (I.04-05-06), on obtient :

$$\frac{d\phi_r}{dt} = \frac{M}{\tau_r} \cdot I_{sd} - \frac{1}{\tau_r} \cdot \phi_r \quad \text{➤ Détermination du module du flux rotorique estimé.}$$

$$(\omega_s - p \cdot \Omega) \cdot \phi_r = \frac{M}{\tau_r} \cdot I_{sq} \quad \text{➤ Calcul de l'angle de position du vecteur flux rotorique } (\theta_s = \int \omega_s \cdot dt)$$

Notre objectif est de forcer la sortie  $y = x_1$  à suivre leurs références  $(\Omega_{réf.}, \phi_{r(réf.)})$  respectivement.

### Etape1 :

On définit l'erreur de poursuite de la vitesse de rotation et du flux rotorique comme suit :

$$e_1 = \Omega_{réf.} - \Omega$$

$$e_2 = \phi_{r(réf.)} - \phi_r$$

Soit la fonction énergétique  $V_1$  positive définie par :  $V_1 = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} e_2^2$

Sa dérivée est :  $\dot{V}_1 = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 = e_1 (\dot{\Omega}_{réf.} - \dot{\Omega}) + e_2 (\dot{\phi}_{r(réf.)} - \dot{\phi}_r)$

$$\dot{V}_1 = e_1 \left( \dot{\Omega}_{réf.} - \frac{PM}{J L_r} \phi_r \cdot I_{sq} + \frac{f}{J} \Omega + \frac{1}{J} C_r \right) + e_2 \left( \dot{\phi}_{r(réf.)} - \frac{M}{\tau_r} \cdot I_{sd} + \frac{1}{\tau_r} \cdot \phi_r \right)$$

On remplaçant  $I_{sq}$  par  $I_{sq(réf.)}$  et  $I_{sd}$  par  $I_{sd(réf.)}$ , alors la dynamique de la fonction énergétique

$$\text{s'écrit : } \dot{V}_1 = e_1 \left( \dot{\Omega}_{réf.} - \frac{PM}{J L_r} \phi_r I_{sq(réf.)} + \frac{f}{J} \Omega + \frac{1}{J} C_r \right) + e_2 \left( \dot{\phi}_{r(réf.)} - \frac{M}{\tau_r} \cdot I_{sd(réf.)} + \frac{1}{\tau_r} \cdot \phi_r \right)$$

Pour rendre  $\dot{V}_1$  négative, on fait un choix convenable des nouvelles entrées virtuelles  $I_{sd(réf.)}$  et  $I_{sq(réf.)}$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} I_{sq(réf.)} = \frac{J L_r}{PM \phi_r} \left( K_1 e_1 + \dot{\Omega}_{réf.} + \frac{f}{J} \Omega + \frac{1}{J} C_r \right) \\ I_{sd(réf.)} = \frac{\tau_r}{M} \left( K_2 e_2 + \dot{\phi}_{r(réf.)} + \frac{1}{\tau_r} \cdot \phi_r \right) \end{cases}$$

$K_1, K_2$  des constantes strictement positive.

**Etape2 :**

Ensuite, la seconde étape est dédiée à la synthèse des boucles de courants statorique ( $x_2$ ).

On définit la fonction candidate de Lyapunov  $V(x)$  pour le système complet (I.12) comme suit :

$$V(x) = V_1(x) + \frac{1}{2}e_3^2 + \frac{1}{2}e_4^2$$

Avec :

$$e_3 = I_{sq}(réf.) - I_{sq}$$

$$e_4 = I_{sd}(réf.) - I_{sd}$$

Donc, sa dérivée est :

$$\dot{V}(x) = \dot{V}_1(x) + e_3\dot{e}_3 + e_4\dot{e}_4 = e_3(\dot{I}_{sq}(réf.) - \dot{I}_{sq}) + e_4(\dot{I}_{sd}(réf.) - \dot{I}_{sd}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = \dot{V}_1(x) + e_3 \left( \dot{I}_{sq}(réf.) + \omega_s \cdot I_{sd} + \gamma \cdot I_{sq} + \frac{PM}{\sigma L_s L_r} \cdot \Omega \cdot \Phi_r - \frac{1}{\sigma L_s} V_{sq} \right) + \\ + e_4 \left( \dot{I}_{sd}(réf.) + \gamma \cdot I_{sd} - \omega_s \cdot I_{sq} - \frac{M}{\sigma L_s L_r \tau_r} \cdot \Phi_r - \frac{1}{\sigma L_s} V_{sd} \right) \end{aligned}$$

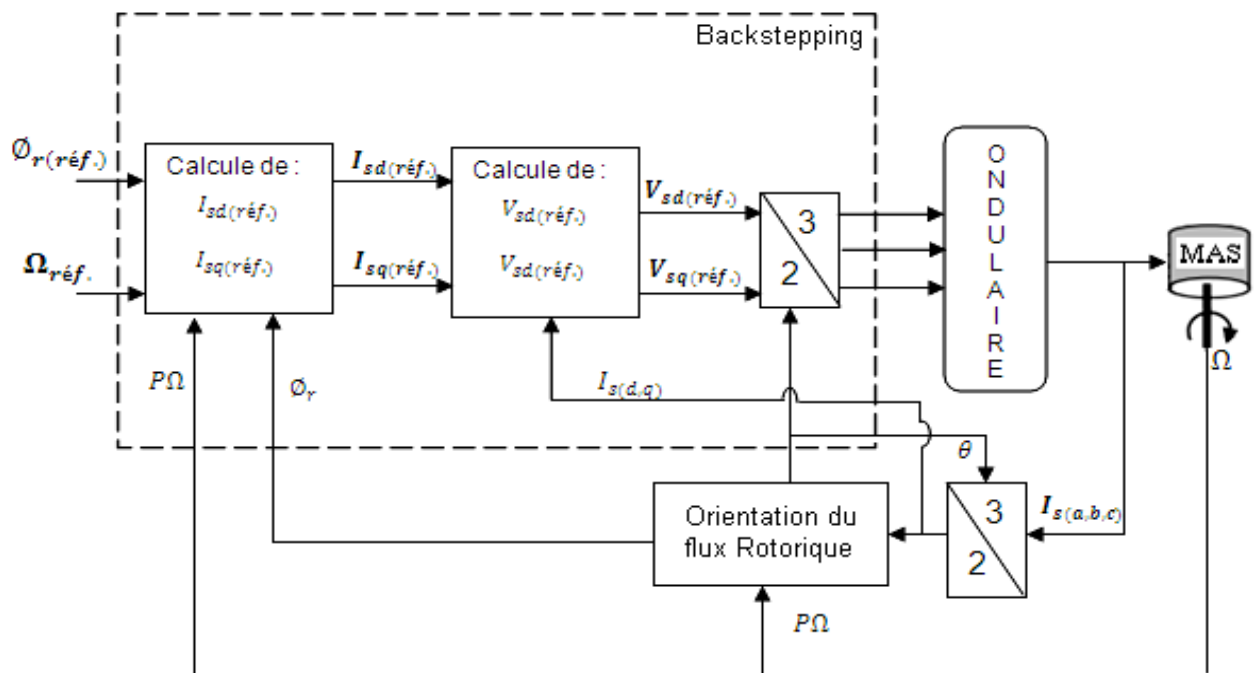
On choisissant la lois de commande suivante :

$$\begin{cases} V_{sq}(réf.) = \sigma L_s \left( K_3 \cdot e_3 + \dot{I}_{sq}(réf.) + \omega_s \cdot I_{sd} + \gamma \cdot I_{sq} + \frac{PM}{\sigma L_s L_r} \cdot \Omega \cdot \Phi_r \right) \\ V_{sd}(réf.) = \sigma L_s \left( K_4 e_4 + \dot{I}_{sd}(réf.) + \gamma \cdot I_{sd} - \omega_s \cdot I_{sq} - \frac{M}{\sigma L_s L_r \tau_r} \cdot \Phi_r \right) \end{cases}$$

Avec  $K_3, K_4$  des constantes strictement positive.

La dérivée  $\dot{V}(x)$  de la fonction de Lyapunov est négative, notre système est stable par la commande backstepping.

Cette technique de commande est schématisée par la figure (I.17).



**Figure I.17 :** Schémas bloc de la commande par Backstepping de la machine à induction

#### **I.2.2.4.4 Conclusion :**

L'intervention des constantes de temps  $\tau_s, \tau_r$  dans la formulation des lois de commande rend la technique de backstepping sensible aux variations paramétriques causées par la température qui influent sur le couplage lors de la commande de la machine.

De l'expression de la loi de commande  $V_{sq(ref.)}, V_{sd(ref.)}$ , on peut voir clairement que la structure du contrôleur généré par la version du backstepping est composée d'une action proportionnelle, à laquelle est ajoutée une action dérivée sur les erreurs. Une telle structure rend le système sensible aux bruits de mesure.

La solution de ce problème est la conception d'une nouvelle commande dotée de plus de performances. C'est le but de notre étude dans le chapitre suivant.

## Chapitre II

## Théorie de la commande par passivité

### II.1 Introduction à la passivité :

Le principe de la commande passive est basé sur l'idée de la formation d'énergie des systèmes, qui a été inspirée des travaux de Takegaki et Arimoto [17] dans la commande de manipulateur de robot, ce champ bien connu et fortement réussi.

Un des premiers résultats sur la passivité remonte aux années 50, où le raccordement entre la passivité et la stabilité des réseaux linéaires a été établi par le travail de Youla, dans le contexte de la théorie de circuit.

L'utilisation de ces idées pour une grande classe des systèmes (exemple modèle d'Euler-Lagrange) été suggéré dans [18], (voir également le papier innovateur de Slotine [19] et la vue relative sur la commande des systèmes physiques par Hogan [20]).

Employer la notion fondamentale de la passivité, le principe plus tard a été formalisé dedans [21], où la limite de la commande passive était inventée pour définir une méthodologie de conception de contrôleur dont le but est de rendre le système en circuit fermé (retour d'état) passif avec une fonction de stockage attribuée.

L'importance de lier la passivité à l'énergie formée peut à peine être surestimée. D'une part, visionnement de l'action de commande en termes d'interconnexions des systèmes passifs fournit une interprétation de la balance énergétique du mécanisme de stabilisation.

La commande passive a été ensuite, prolongée pour couvrir des applications étendue.

A la même époque, J. Wyatt *et al* [22-23] ont réalisé le lien entre la propriété dissipative [24] et les propriétés passives des réseaux électriques. En plus, une forme canonique de représentation des systèmes conservatifs a été développée. La propriété antisymétrique de certaines matrices des modèles bilinéaires d'une large classe de circuits électriques est démontrée pour la première fois.

R. Ortega *et al*. [25] ont présenté la commande passive adaptative en 1989, concernant toujours les robots-manipulateurs. L'originalité vient du fait que, pour la première fois, l'ensemble commande-estimateur-système sont intégrés au même processus de calcul et de synthèse du correcteur stabilisant, ce qui donne des résultats de stabilité globale très intéressants.

Il faut attendre 1990 pour voir apparaître la première commande d'un convertisseur basée sur le « modelage » de l'énergie totale via Lyapunov, mais n'exploite que le critère de Lyapunov pour concevoir une commande stabilisant le système [26].

En 1993 R. Ortega *et al* [27] utilisent l'approche passive pour stabiliser un système caractérisé par plus de degrés de liberté que d'actions de commande : la régulation du couple d'un moteur à induction. Ils assurent la stabilité globale du système grâce à une étude de la dynamique des zéros non généralisable à une classe de systèmes plus vaste. Néanmoins, ils ouvrent une voie de recherche et d'applications très large.



Ce n'est qu'en 1995 que la première commande passive d'un convertisseur statique est présentée par Sira-Ramirez et al [28]. Il s'agit de stabiliser des convertisseurs DC-DC de type hacheur parallèle et série/parallèle. Ce type de convertisseur présente l'avantage d'avoir une dynamique des zéros d'ordre unitaire, ce qui simplifie la vérification de la stabilité.

Pour finir ce petit historique, il faut mentionner l'article de Ortega et al [29], où une approche mixte commande passive/modes glissants est adoptée.

## II.2. Définitions :

### II.2.1. Notions mathématiques :

Dans la suite, nous donnons quelques indications clés de la passivité, tout en étant très proche du théorème du petit gain, afin de pouvoir bien comprendre comment l'exploiter dans la commande des systèmes flexibles –comprenant des modes résonants–en électrotechnique et la manière de garantir leurs stabilité en boucle fermée.

#### II.2.1.1 Espace $\mathcal{L}_q$ :

L'espace  $\mathcal{L}_q$ ,  $q \in \{1, 2, \dots\}$  est défini comme l'ensemble des fonctions  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  : qui contentent l'inégalité :

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^q dt < \infty$$

-  $\mathcal{L}_2$  est l'espace d'ensembles des fonctions  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  : à énergie bornée :

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

#### II.2.1.2 La norme de l'espace $\mathcal{L}_q$ :

La fonction  $\| \cdot \|_q : \mathcal{L}_q \rightarrow \mathbb{R}_+$  est appelée norme de  $\mathcal{L}_q$  définit par :

$$\|f(t)\|_q = \left[ \int_0^{\infty} |f(t)|^q dt \right]^{1/q}, q \in \{1, 2, \dots, \infty\}$$

- La norme euclidienne  $\mathcal{L}_2$  est ainsi formulée :

$$\|f(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt}$$

- L'application des fonctions vecteur définit par :  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui ont une norme euclidienne bornée :

$\|f\|_2 < \infty$  est appelée l'espace  $\mathcal{L}_2^m$  de Hilbert (l'indice exposant indique la dimension).

#### II.2.1.3 L'Opérateur dans l'espace $\mathcal{L}_q$ :

Un opérateur est une application  $G: \mathcal{L}_q \rightarrow \mathcal{L}_q$  reliant l'entrée  $u \in \mathcal{L}_q$  et la sortie  $y \in \mathcal{L}_q$  tels que :

$$y = G.u$$

Un tel opérateur est : additionnel, commutatif, associatif et linéaire.

**II.2.1.4 La fonction sans mémoire :**

L'application  $G: \mathcal{L}_q \rightarrow \mathcal{L}_q$  est dite « fonction sans mémoire » si la sortie  $y = G(u(t_0))$  ne dépend que de l'instant  $t_0$ .

**II.2.1.5 La dérivée de Lie :**

C'est une fonction scalaire notée  $L_f h$  définie comme étant la dérivée d'une fonction scalaire  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  suivant la direction d'un champ vecteur  $f$ , elle est égale au produit scalaire entre le gradient de cette fonction et le champ de vecteur :  $L_f h = \nabla h \cdot f$

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$  : Opérateur gradient.

Cette dérivée représente le taux d'évolution de la fonction  $h$  le long du champ de vecteur  $f(x)$ .

Si  $g$  un autre champ de vecteur, alors on a :  $L_g L_f h = \nabla(L_f h)g = L_g \left( \frac{\partial h}{\partial x} \cdot f \right)$

**II.2.1.6 Taux d'approvisionnement :**

Le taux d'approvisionnement d'un système quelconque défini respectivement par  $u, y$  comme entrée et sortie  $= \frac{1}{2}(\gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2)$ , avec :  $\gamma$  une constante réelle.

**II.2.1.7 Stockage disponible :**

Pour tout variable d'état  $x \in X$ ,  $X$  espace d'état, on définit le stockage disponible  $V_\alpha(x): X \rightarrow \mathbb{R}^+$  par :  $V_\alpha(x(T)) = \sup \frac{1}{2} \int_0^T (\gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2) dt$ .

Avec :

$x(0) = x_0$  : L'état initial du système,  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

$u$  : L'entrée du système  $u \in \mathcal{L}_2[0, T]$ ,  $T > 0$ .

$y$  : La sortie.

L'interprétation du stockage disponible  $V_\alpha x(t)$ , comme étant la plus grande quantité d'énergie qui peut être extraite à partir du système.

**II.2.1.8 Fonction de stockage :**

Une fonction  $H(x): X \rightarrow \mathbb{R}^+$  est dite de stockage si l'intégral suivant est satisfait ( $\forall t > t_0$ ) :

$$H(x(t)) - H(x(t_0)) \leq \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (\gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2) d\tau,$$

Avec :  $H(0) = 0$ ,  $u \in \mathcal{L}_2[t_0, t]$  et  $x(t_0)$  comme condition initiale avec  $t_0$  fixe.

Notons bien que : La fonction de stockage  $H(x)$  n'est pas unique pour un système donné, car elle dépend du choix de la constante  $\gamma$  et de l'entrée  $u$  en plus, elle change à tout moment.

L'intégral droite représente l'énergie fournie au système, tandis que celui de gauche est composée de la différence entre l'énergie fournie à l'entrée et celle perdue à la sortie.

### II.2.1.9 Système dissipatif :

Un système est dit dissipatif, avec un taux d'approvisionnement  $= \frac{1}{2}(\gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2)$ , si la fonction de stockage  $H(x)$  citée ci-dessus existe.

### II.2.2. Notions de passivité :

Plusieurs définitions caractérisent la notion de passivité des systèmes, on peut retenir les déterminations suivantes :

#### II.2.2.1 Définition intuitive de la passivité :

Le système représenté par l'équation d'état suivante :

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$$

Possédant à la fois une entrée  $u$  (utilisée pour injecter ou soutirer de la puissance) et une sortie  $y = h(x, u)$ , est dit passif s'il ne peut pas y avoir de génération interne de puissance.

En d'autre terme, l'apport de puissance est positif ( $P = u \cdot y \geq 0$ ).

Ainsi, le soutirage de la puissance se fait au détriment du stock interne d'énergie du système. Pour une compréhension facile des concepts de dissipation et de passivité, il est convenable d'imaginer que  $\Sigma$  est un système physique caractérisé par la propriété que son énergie peut être augmentée seulement par l'approvisionnement d'une source extérieure.

#### II.2.2.2 Système statique passif :

Les systèmes passifs les plus simples sont ceux qui ne comportent pas de dynamique. La sortie est directement fonction de la valeur de la grandeur d'entrée.

Pour simplifier encore d'avantage la présentation, on considère que l'entrée  $u$  comporte une seule dimension idem pour la sortie.

Donc, pour que la puissance consommée soit entièrement dissipée à chaque instant, il faut que le produit entrée-sortie ( $u \cdot y$ ) soit positif.

#### Exemple :

La résistance électrique  $v = Ri$  de la figure II.01 illustre parfaitement ce cas de système.

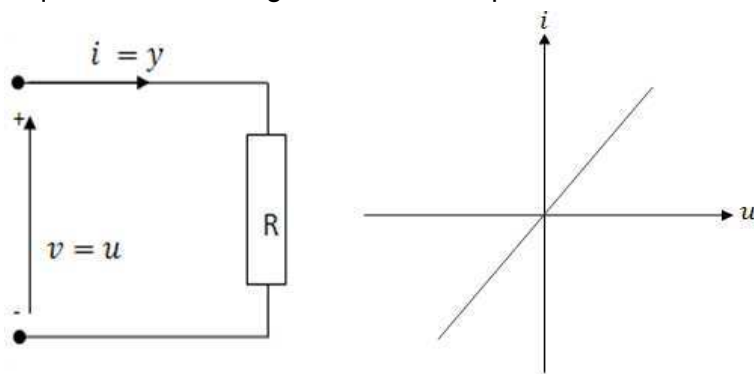


Figure II.01 : Exemple d'élément linéaire passif statique « Résistance électrique ».

Etant donné que le système est statique, la puissance est dissipée instantanément. Il n'y a pas de notion de stockage interne de puissance.

Un simple calcul donne aisément :  $uy = Ri^2$

Avec :

$u = v$  : L'entrée du système représente la tension d'alimentation.

$y = i$  : La sortie du système représente le courant de circulation.

$R$  : La résistivité de l'élément passif.

Confirmez que la puissance instantanée est effectivement dissipée totalement dans la résistance électrique à tout moment par effet joule.

### Cas général :

L'exemple de la résistance électrique peut s'étendre par analogie à une plus large classe de systèmes. L'extension doit cependant prendre en compte la nécessité de dissiper instantanément la puissance que donne le couple (entrée-sortie). En conséquence, il est impératif que :  $u \cdot y \geq 0$ .

La caractéristique graphique  $y = f(u)$  doit être implantée dans le premier et le troisième quadrant ce qui est représenté par la figure II.02.

Si le système est à multiports alors,  $(u, y)$  sont des vecteurs et le flux de puissance dans le réseau est exprimé par :  $u^T y = \sum_{i=1}^p u_i y_i$ .

$u^T$  : Vecteur ligne "transposé" de  $u$ .

$p$  : Nombre de port « entrées=sorties » du système.

Alors, dans ce cas le système est passif si :  $u^T y \geq 0, \forall u$ .

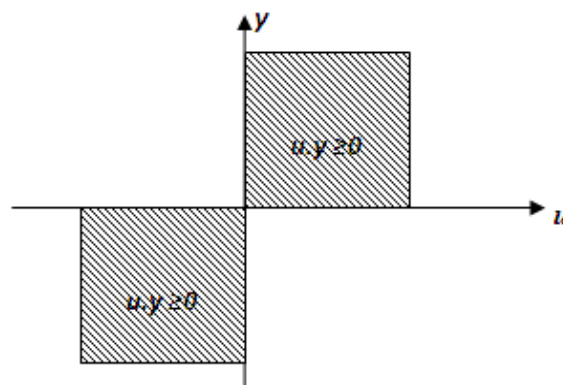


Figure. II.02 : signification graphique de la passivité.

### Remarque :

- Pour un système passif non linéaire, la caractéristique  $y = f(u)$  générée est non linéaire figure II.03 (a).
- Pour un système non passif la caractéristique  $y = f(u)$  appartient à tout l'espace, comme illustrée dans la figure II.03 (b).

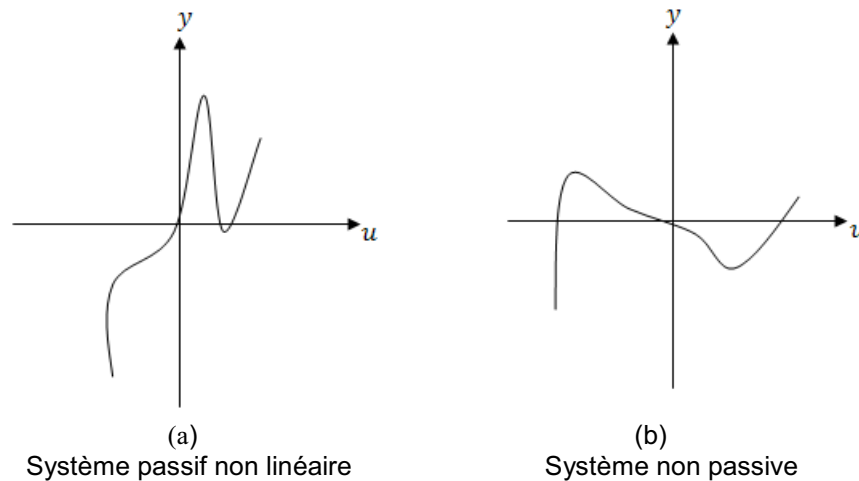


Figure II.03 : Les types de la caractéristique :  $y = f(u)$ .

### II.2.2.3. Système dynamique passif :

Une extension mathématique de la notion de passivité est possible pour une large classe des systèmes. Lorsque le système comporte une partie dynamique, certaines variables d'état sont associées au système, le produit de l'entrée par la sortie ( $u \cdot y$ ) ne suffit plus pour caractériser la passivité, en effet, la puissance peut être emmagasinée dans les éléments dynamiques comme elle peut également être restituée à l'entrée du système.

#### II.2.2.3.1 Définition différentielle et équation énergétique d'équilibre -EBE- :

On peut dire qu'un système dynamique est passif si l'énergie fournie à ce dernier est divisée en deux tranches : l'une stockée à l'intérieur et l'autre dissipée, mathématiquement on a :

$$\int_0^t u(s) \cdot y(s) ds = V(x(t), t) + D(x(t), t)$$

$$\text{Energie fournie} = \text{Energie stockée} + \text{Energie dissipée}$$

Où  $V(x(t), t) > \text{constante}$  : est la fonction de stockage et  $D(x(t), t)$  est une fonction positive qui capture les effets de dissipation (exemple : résistance électrique, les frictions...etc.).

Cette égalité est intitulée " équation énergétique d'équilibre (EBE en anglais)". Donc un système qui satisfait EBE est passif.

En termes de puissance on obtient :  $\frac{dV(t)}{dt} = u(t) \cdot y(t) - \Psi(t)$

Avec :

$\frac{dV(t)}{dt} = \dot{V}(t)$  : La puissance stockée dans le système.

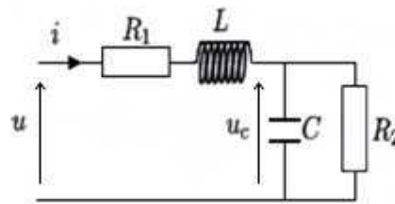
$\Psi(t) = \frac{dD(t)}{dt}$  : Une fonction définit positive représentant la dissipation.

Un système est passif si sa puissance stockée est inférieure à la puissance fournie à son entrée :

$\dot{V}(t) \leq u(t) \cdot y(t)$  : cette définition de la passivité est appelée " définition différentielle ".

**Exemple :**

Pour mieux comprendre cette définition, considérons un circuit électrique dynamique comportant des résistances, une inductance et une capacité comme indiqué sur la figure II.04 :



**Figure II.04.** : Système dynamique passif « Circuit électrique R-L-C »

Ce circuit peut recevoir le flux de puissance par l'intermédiaire du couple entrée-sortie ( $tension = u \times courant = i$ ), cette puissance est alors dissipée partiellement dans les résistances  $R_1$ ,  $R_2$  et stockée dans les deux éléments  $L$ ,  $C$ .

Le circuit peut également fournir de la puissance à l'entrée en diminuant son stock interne d'énergie (à partir de la charge dans la capacité ou le champ magnétique dans la bobine).

La dynamique d'un tel système est décrite par :

$$\begin{cases} u = R_1 i + L \frac{di}{dt} + u_c \\ y = C \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{R_2} u_c \end{cases}$$

Avec :

$u$  : Tension d'alimentation(entrée).

$y = i$  : Courant électrique(sortie).

On pose comme variables d'état :  $x_1 = i$ ,  $x_2 = u_c$  on parvient à la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{C} x_1 - \frac{1}{R_2 L} x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

L'énergie emmagasinée dans le circuit est :  $V(x) = \frac{1}{2} L x_1^2 + \frac{1}{2} C x_2^2$ .

On peut définir l'évolution de cette énergie dans le temps par :

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial (x_1, x_2)} = L x_1 \dot{x}_1 + C x_2 \dot{x}_2 = L x_1 \left( -\frac{R_1}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \right) + C x_2 \left( -\frac{1}{C} x_1 - \frac{1}{R_2 L} x_2 \right)$$

$$\dot{V}(x) = u y - \left( R_1 x_1^2 + \frac{1}{R_2} x_2^2 \right) = u y - \Psi(x).$$

Avec :  $\Psi(x) = R_1 x_1^2 + \frac{1}{R_2} x_2^2 \geq 0$  : La puissance dissipée.

D'où :  $\dot{V}(x) \leq u y$  et le circuit R-L-C est un système dynamique passif (définition différentielle).

**Cas particulier :**

Si :  $\dot{V}(t) = u(t) \cdot y(t)$ , alors : le système est dit "sans perte".

**Cas général :**

Une extension mathématique de la notion de passivité à des systèmes multiports est possible. Soit

la représentation d'état suivante : 
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad \text{Où : } (u, y) \text{ sont des vecteurs.}$$

S'il existe une constante :  $\gamma > -\infty$ ,  $V > \gamma$ , et  $\dot{V}(x) = u^T y - \Psi(x)$ , avec  $\Psi(x) \geq 0$ , alors : Le système est passif.

**II.2.2.3.2 Définition intégrale:**

Il est possible de donner une autre définition équivalente de la passivité sous forme d'intégrale ne faisant pas intervenir de notion différentielle.

Soit le système passif multiport précédent, alors :

$\exists \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma > -\infty$ ,  $V(x) > \gamma$  et  $\Psi(x) \geq 0$  tel que :  $\dot{V}(x) = u^T y - \Psi(x)$ .

Ceci implique :  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > -\infty$  telle que "la définition intégrale" suivante est satisfaite :

$$\int_0^{\infty} u^T(\tau)y(\tau).d\tau > \alpha$$

Alors le système est passif.

En fait, la définition intégrale signifie qu'il est impossible en jouant sur l'entrée de rendre arbitrairement petit le stock interne d'énergie car il est borné inférieurement «  $V(x) > \gamma$  ».

**Remarque :**

Pour voir la correspondance entre les deux définitions on résonne comme suit :

$$\int_0^{\infty} \dot{V}(\tau).d\tau = \int_0^{\infty} u^T(\tau)y(\tau).d\tau - \int_0^{\infty} \Psi(\tau).d\tau \leq \int_0^{\infty} u^T(\tau)y(\tau).d\tau \Rightarrow V(x) - V(0) \leq \int_0^{\infty} u^T(\tau)y(\tau).d\tau$$

Or :  $V(x) > \gamma$  et  $\int_0^{\infty} u^T(\tau)y(\tau).d\tau > \alpha$ , alors :  $\alpha = \gamma - V(0) \leq V(\infty) - V(0) \leq \int_0^{\infty} u^T(\tau)y(\tau).d\tau$ .

**II.2.2.4 Signification graphique de la passivité :**

Si le terme de passivité est assigné à toute fonction  $y = h(t, u)$  indépendamment de son origine physique, on dit que le graphe  $y = h(t, u)$  doit appartenir au secteur  $[0, \infty]$ , où zéro et l'infini représentent la limite de la pente du graphe (figure II.05).

**Remarque :**

- Si la caractéristique  $y = h(t, u)$  change avec le temps, le graphe  $u - y$  varie aussi dans le temps mais sans dépasser le secteur  $[0, \infty]$  pour que  $u^T h(t, u) \geq 0, \forall (t, u)$  reste valable tout le temps.
- Si :  $u^T y = 0$ , l'extrême cas de passivité, le système est sans perte [30].
- Pour une fonction de vecteur, nous pouvons donner une représentation graphique de la passivité dans le cas spécial où  $h(u, t)$  est découplé, i.e.  $h(u, t)$  dépendent seulement de  $u$  :

$$h(t, u) = \begin{bmatrix} h_1(t, u_1) \\ h_2(t, u_2) \\ \dots \\ h_m(t, u_m) \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas-ci, le graphe de chaque composante appartient au secteur  $[0, +\infty]$ .

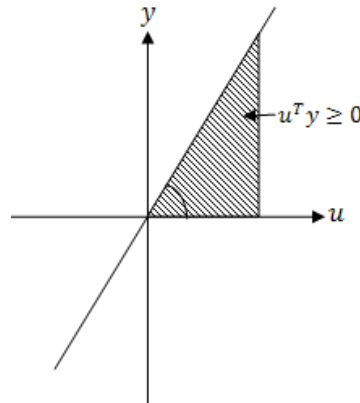


Figure II.05 : Interprétation graphique de la passivité.

La représentation graphique est rarement sollicitée, on utilise contrairement la définition analytique que le système est passif si :  $u^T y \geq 0$ .

### II.2.3. Excès et restriction de la passivité :

Pour modifier l'état de passivité d'un système, on s'appuie sur les critères suivants :

#### II.2.3.1 Action parallèle d'entrée :

Considérons la fonction  $y = h(t, u)$  qui satisfait  $u^T \cdot y \geq u^T \cdot \phi(u)$  pour certaine fonction  $\phi(u)$ . Lorsque  $u^T \cdot \phi(u) > 0, \forall u \neq 0$ ,  $h$  est appelée « entrée strictement passive » car, la passivité est stricte dans le sens que:  $u^T \cdot y = 0$  seulement si  $u = 0$  (le graphe  $u - y$  ne touche l'axe  $u$  que dans le point d'origine). Quand  $h(t, u)$  est un scalaire et  $\phi(u) = k \cdot u$  où :  $k \in [-\infty, +\infty]$  un gain d'ajustement on a :

- Si :  $k > 0$  on dit que le système a un excès de passivité (ne touche plus l'axe  $u$ ) figure II.06 (a).
- Si :  $k < 0$  le système n'est pas obligatoirement passif « restriction de passivité » figure II.06 (b).

L'excès et la restriction de passivité peuvent être modifiés par une action d'entrée en parallèle (Feedforward) figure II.06 (c), avec une nouvelle sortie définie par :  $\tilde{y} = y - \phi(u)$ , on obtient le nouveau système caractérisé par la puissance :  $u^T \cdot \tilde{y} = u^T \cdot (y - \phi(u)) = u^T \cdot y - u^T \cdot \phi(u) \geq 0$ , une fonction passive par entrée en parallèle.

Donc, toute fonction qui satisfait :  $u^T \cdot y \geq u^T \cdot \phi(u)$  peut être transformée en une fonction appartenant au secteur  $[0, +\infty]$  via une entrée en parallèle (feedforward).



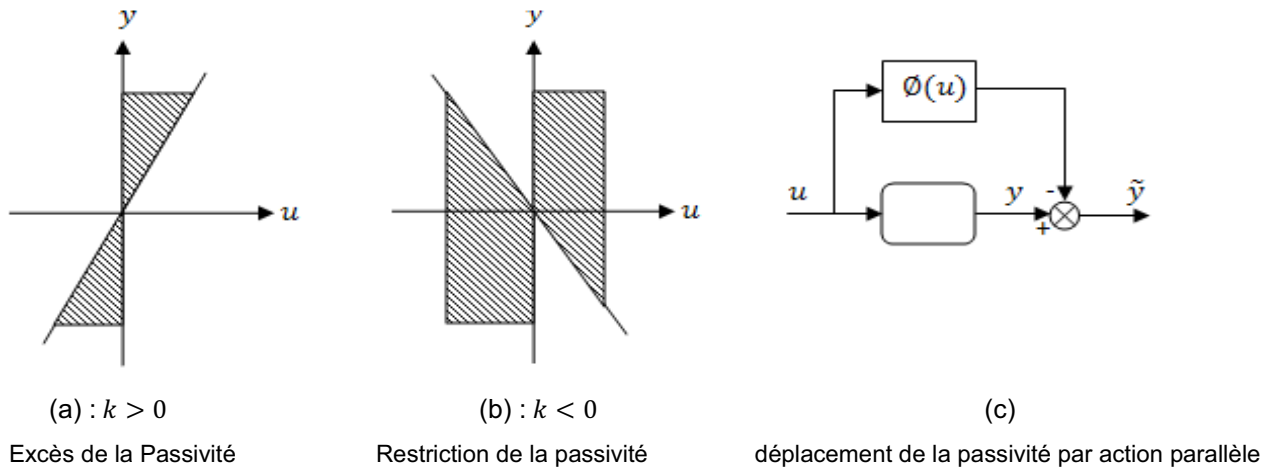


Figure II.06 : Représentation graphique de l'action parallèle sur la passivité.

**II.2.3.2 Rétroaction de la sortie:**

Supposant que :  $u^T \cdot y \geq y^T \cdot \rho(y)$  pour certaine fonction  $(y)$  .

Identiquement à l'analyse pour la technique précédente, lorsque  $y^T \cdot \rho(y) > 0, \forall y \neq 0$ , il y a un excès de passivité et si  $y^T \cdot \rho(y) < 0$  pour quelques valeurs de  $y$ , alors il y a striction de passivité.

Si  $h(t, u)$  est un scalaire et  $\rho(y) = \varepsilon \cdot y$  où :  $\varepsilon \in [-\infty, +\infty]$  un gain d'ajustement on a :

- Si  $\varepsilon > 0$  on dit que le système a un excès de passivité (ne touche plus l'axe  $y$ ) figure II.07 (a).
- Si  $\varepsilon < 0$  le système n'est pas obligatoirement passif « restriction de passivité » figure II.07 (b).

Excès et restriction de passivité peuvent être modifiés par une opération de rétroaction de la sortie (Feedback) figure II.07 (c), avec la nouvelle entrée définie par  $\tilde{u} = u - \rho(y)$ , on obtient le nouveau système caractérisé par la puissance :

$\tilde{u}^T \cdot y = (u - \rho(y))^T \cdot y = u^T \cdot y - y^T \cdot \rho(y) \geq 0$ , « une fonction passive par rétroaction de la sortie ».

Donc, toute fonction qui satisfait :  $u^T \cdot y \geq y^T \cdot \rho(y)$  peut être transformée en une fonction appartenant au secteur  $[0, +\infty]$  via rétroaction de la sortie.

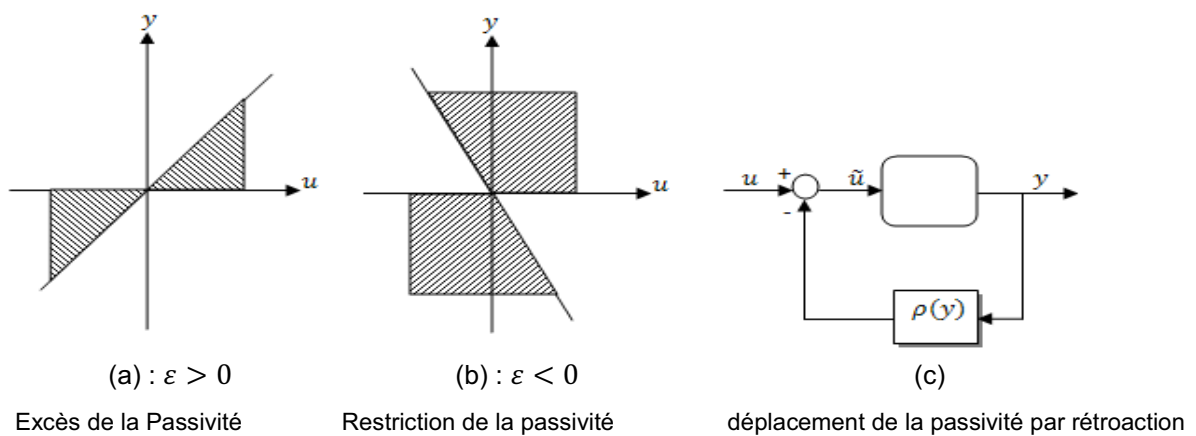


Figure II.07 : Représentation graphique de la rétroaction sur la passivité.

### II.2.3.3 Combinaison des deux actions :

Considérons la fonction scalaire  $h(t, u) = y$  qui satisfait l'inégalité:  $\alpha \cdot u^2 \leq u^T \cdot y \leq \beta \cdot u^2$ ;  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  et  $\alpha \leq \beta$ ,  $\forall (t, u)$ .

La caractéristique de la fonction  $h(t, u)$  est limitée par les deux droites :  $y = \beta u$ ,  $y = \alpha u$  : on dit que  $h(t, u)$  appartient à l'intervalle borné  $[\alpha, \beta]$  pour  $\alpha \in [-\infty, +\infty]$  et  $\beta > 0$  figure II.08 (a-b).

Si on compare le champ de la figure II.08 avec celui des figures II.06-07, nous remarquons que la fonction  $h(t, u)$  dans l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  combine entre la passivité par entrée en parallèle et la passivité par rétroaction. Alors, le secteur  $[\alpha, \beta]$  est l'intersection de l'intervalle  $[\alpha, \infty]$  avec  $[0, \beta]$ .

On peut dire qu'une fonction  $h(t, u)$  peut être transformée en une autre fonction appartenant au secteur  $[0, \infty]$  par une séquence : entrée en parallèle + rétroaction de sortie.

Ce résultat est importante dans la commande des systèmes par la passive via rétroaction et entrée en parallèle.

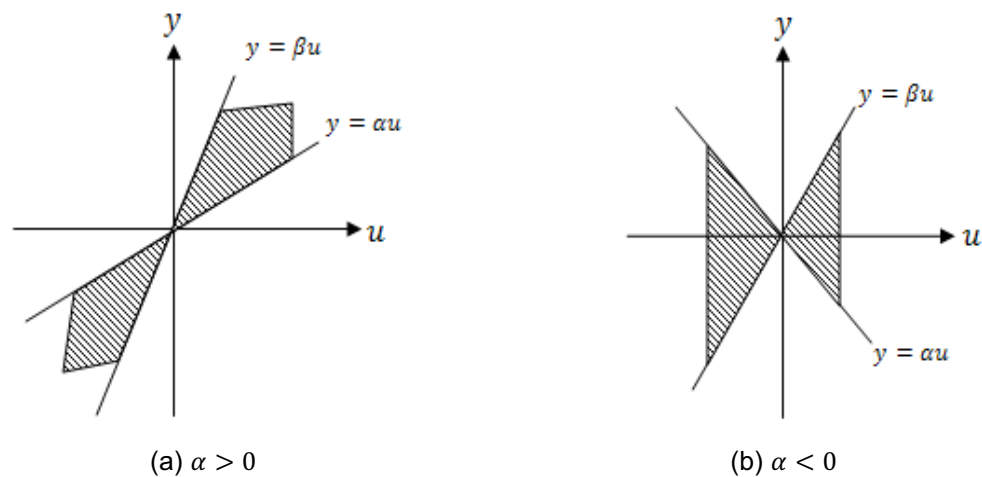


Figure II.08 : Représentation graphique de la combinaison action parallèle+rétroaction.

### II.2.4. Propriété des systèmes passifs :

L'immense avantage des systèmes passifs est leur plasticité lors de connexion en tout genre. En effet, ces systèmes se comportent très bien lors de connexion en série, en parallèle et en rétroaction car ils agissent en quelque sorte indépendamment de leur connexion. Ce dernier cas est important lors d'association des sous-systèmes passifs par retour de sortie.

La connexion des systèmes passifs, donne ceci :

#### II.2.4.1 Connexion parallèle :

Lors d'une connexion parallèle de deux systèmes passifs  $i = 1, 2$  avec les fonctions de stockage interne et de dissipation du système  $i$   $V_i, \Psi_i$  respectivement, la passivité est préservée.

Preuve :

Selon la figure II.09(a) est d'après la définition différentielle on a :

$$\dot{V}_1 = u_1 y_1 - \Psi_1$$

$$\dot{V}_2 = u_2 y_2 - \Psi_2$$

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = u_1 y_1 + u_2 y_2 - \Psi_1 - \Psi_2 = u(y_1 + y_2) - (\Psi_1 + \Psi_2)$$

$$\dot{V} = uy - \Psi : \text{Système passif, avec : } \Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \geq 0.$$

### II.2.4.2 Connexion par rétroaction :

Etant donné que lors de la connexion par rétroaction les deux systèmes interagissent d'amont en aval et ceci à l'infini. La passivité est donc maintenue.

Preuve :

Soit donc la connexion par rétroaction négative de la figure II.09(b).

En tenant compte de la particularité de la connexion :

$$\dot{V}_1 = u_1 y - \Psi_1, \quad \Psi_1 \geq 0$$

$$\dot{V}_2 = y y_2 - \Psi_2, \quad \Psi_2 \geq 0$$

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = (u - y_2)y + y_2 y - \Psi_1 - \Psi_2 = uy - y_2 y + y_2 y - (\Psi_1 + \Psi_2)$$

$$\dot{V} = uy - \Psi : \text{Système passif, avec : } \Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \geq 0.$$

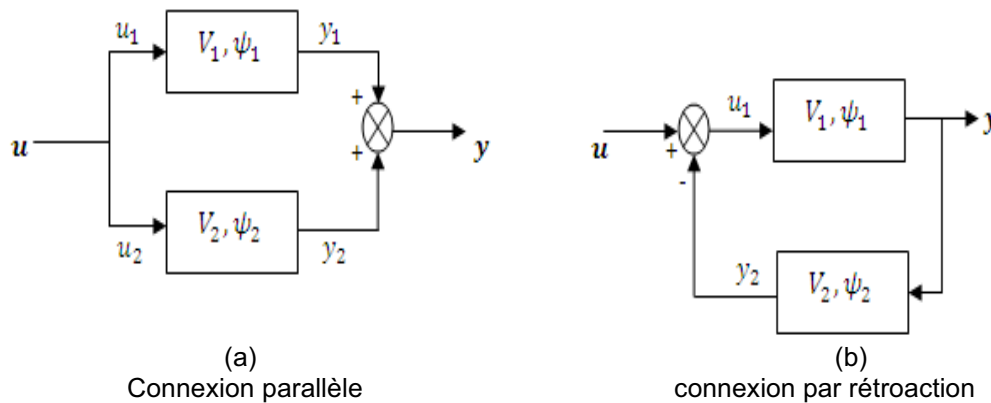


Figure II.09 : La connexion des systèmes passifs

### Remarque :

La propriété de maintenir la passivité après connexion par rétroaction négative de deux systèmes passifs est extrêmement utile pour synthétiser des lois de commande. En effet, il est possible d'identifier des sous-systèmes passifs dans un système à commander. Lorsque ceci n'est pas directement le cas, un bouclage partiel peut transformer une sous-partie en une sous-partie passive. Lorsque le système complet admet (après bouclage) une décomposition en systèmes passifs (chaque sous-système est connecté aux autres par connexion parallèle, série ou par rétroaction négative) la stabilité sera garantie par les propriétés de connexion élaborées ci-dessus. Ceci permet de constituer une fonction de Lyapunov compliquée à partir de fonctions plus simples associées aux sous-parties passives. Nous examinerons de telles techniques dans la section consacrée à la synthèse.

### Quelques exemples :

#### 01) Intégrateur pur :

L'intégrateur est un système sans perte, d'après la figure II.09(a) On a :

$u = \dot{x}$ ,  $y = \int u = x$ , l'énergie emmagasinée dans un tel système est :  $V = \frac{1}{2}x^2$

Donc :  $\dot{V} = x \cdot \dot{x} = uy$  : Système sans perte.

02) Connexion en cascade d'intégrateur avec une fonction sans mémoire :

L'équation d'état d'un tel système - figure II.09(b) - est la suivante :

$$\dot{x} = u$$

$$y = H(x)$$

La fonction de stockage :  $\dot{V}(x) = H(x) \cdot \dot{x} = y \cdot u$ , le système est sans perte  $\forall H$ .

03) Connexion en parallèle d'intégrateur avec une fonction sans mémoire :

L'équation d'état d'un tel système -figure II.09(c)- est définie par :

$$\dot{x} = u \Rightarrow \int u = x$$

$$y = x + H(u)$$

L'énergie emmagasinée :  $V = \frac{1}{2}x^2$ , et :  $\dot{V} = x\dot{x} = (y - H(u)) \cdot u = uy - H(u)u$

- Si :  $H(u) \in [0, +\infty]$  : le système est passif.

- Si :  $u \cdot H(u) > 0, \forall u \neq 0$  : le système est strictement passif.

04) Connexion par rétroaction d'intégrateur avec une fonction sans mémoire :

L'équation d'état d'un tel système - figure II.09(d)- est définie par :

$$\dot{x} = u - H(x)$$

$$y = x$$

L'énergie emmagasinée :  $V = \frac{1}{2}x^2$ , et :  $\dot{V} = x\dot{x} = y(u - H(y)) = uy - H(y)y$

- Si :  $H(y) \in [0, \infty]$  : le système est passif.

- Si :  $y \cdot H(y) > 0, \forall y \neq 0$  : le système est strictement passif.

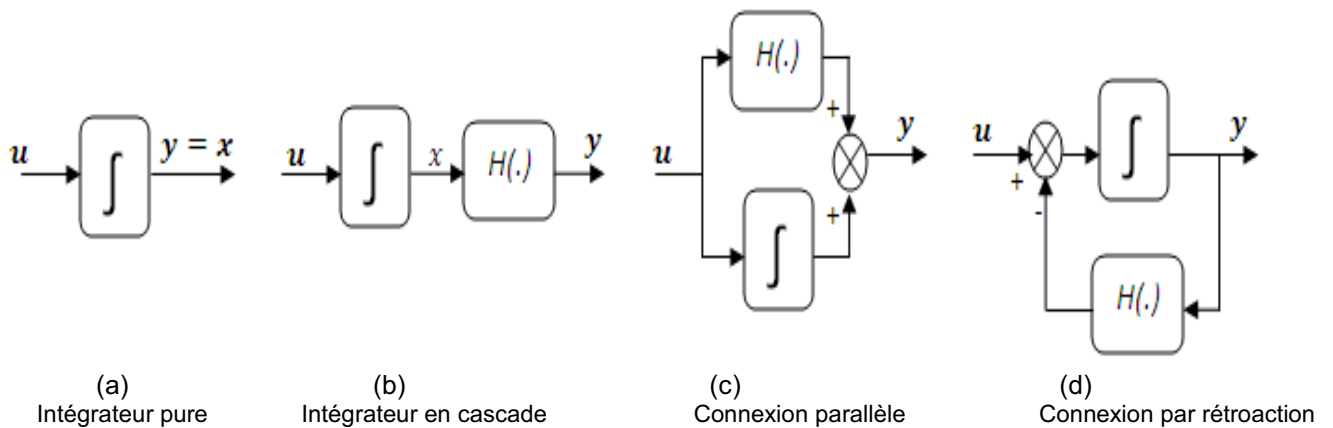


Figure II.09 : Types de connexions d'un intégrateur.

## II.2.5. Passivité des systèmes linéaire:

Les deux définitions de la passivité (différentielle et intégrale), s'appliquent aussi bien aux systèmes linéaires que non-linéaires.

Pour les systèmes linéaires, la propriété de la passivité peut se caractériser par la fonction de transfert du système  $G(s)$  en variable de Laplace  $s$  dans le domaine fréquentielle.

Il est possible aussi de caractériser la passivité en fonction de la réponse harmonique du système linéaire.

Soit le système linéaire :

$$S : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$u$  : L'entrée du système.

$y$  : La sortie.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B, C \in \mathbb{R}^n, (A, B)$  commandable et  $(A, C)$  observable.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{\prod_{i=0}^m (s - z_i)}{\prod_{i=0}^n (s - p_i)}$$

Avec :

$z_i$  : Zéros de  $G(s)$ ,  $m$  le nombre des zéros.

$p_i$  : Pôles de  $G(s)$ ,  $n$  le nombre des pôles.

### II.2.5.1. Quelques définitions :

#### II.2.5.1.1 Degré relatif :

Le degré relatif du système  $S$  est défini comme :  $r = n - m$ .

Etant donné qu'un système physique est causal, son degré relatif sera toujours considéré positif ou nul ( $r \geq 0$ ).

#### II.2.5.1.2 Minimum de phase :

$G(s)$  est à minimum de phase si tous les zéro ont la partie réelle strictement négative ( $Re(z_i) < 0$ ) c.-à-d. une dynamique nulle.

La notion de minimum de phase joue un rôle majeur lors de la commande de système par linéarisation entrée-sortie. Cette propriété est liée à la position des zéro dans le plan complexe.

#### II.2.5.1.3 Stabilité d'un système linéaire :

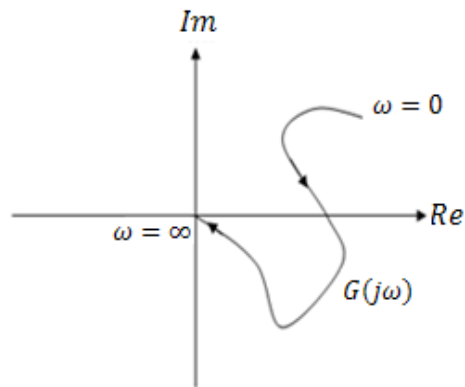
Le système  $S$  est stable si tous les pôles de  $G(s)$  sont à partie réelle négative ( $Re(p_i) < 0$ ).

### II.2.5.2. Passivité d'un système linéaire :

#### II.2.5.2.1 La passivité dans le domaine fréquentiel (Théorème):

Le système  $S$  définit dans le domaine fréquentiel par sa fonction de transfert  $G(j\omega)$  est passif s'il est un système à partie réelle positif «  $Re[G(j\omega)] \geq 0, \forall \omega \geq 0$  » figure II.10.

Le résultat de ce théorème indique qu'un système passif ne pourra jamais dépasser l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



**Figure II.10** : Diagramme de Nyquist d'un système linéaire passive.

Le système  $S$  est strictement passif, si  $G(s)$  est strictement à partie réelle positive «  $Re[G(s)] > 0, \forall \omega > 0$  ». Une telle caractéristique indique que le système est strictement stable (sans pôle sur l'axe imaginaire). La démonstration de ce théorème peut être consultée dans [31].

Le théorème précédent implique la définition de la passivité des systèmes linéaires en fonction de la partie réelle de leur réponse harmonique.

#### II.2.5.2.2 Système à partie réelle positive :

Pour détecter les systèmes à partie réelle positive, quelques critères simples sont à notre disposition : c'est en fonction de la caractéristique des pôles et des zéro qu'il est possible d'établir une réponse harmonique ayant la propriété du théorème II.2.5.2.1.

Deux notions jouent un rôle fondamental dans cette analyse, Il s'agit du degré relatif et de la phase minimale définis précédemment.

Si la fonction de transfert est à partie réelle positive ( $Re[G(s)] \geq 0, \forall \omega \geq 0$ ), alors (voir [31]):

1. Le degré relatif est nul ou égal à 1 ;
2. Il n'y a pas de zéro à partie réelle positive ( $G(s)$  est à phase minimale) ;
3. Le système est stable (les pôles de  $G(s)$  à partie réelle négative).

Il est alors intéressant de s'interroger sur la structure de la représentation d'état d'un système linéaire passif.

#### II.2.5.2.3 Lemme de Kalman-Yakubovich-Popov :

Soit  $G(s) = C(sI - A)^{-1} - B$  la fonction de transfert du système linéaire  $S$  sans lien direct entrée/sortie qui est à la fois commandable et observable.

Le système  $S$ , est passif ( $Re[G(s)] > 0, \forall \omega > 0$ ) au sens du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov si et seulement s'il existe une fonction de stockage quadratique :  $H(x) = \frac{1}{2}x^T Qx$  avec  $Q = Q^T \geq 0$  une matrice symétriques définies positives tels que :

$$\begin{cases} QA + A^T Q \leq 0 \\ C = B^T Q \end{cases} \quad (\text{Pour la démonstration voir [32]}).$$

Pour se rapprocher plus des systèmes physiques qui sont caractérisés par une modélisation non linéaire, on va étendre la passivité pour cette classe intéressante.

### II.3. Passivité des systèmes non-linéaire :

Un système affine non linéaire multi variables est représenté par l'équation d'état :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad \text{et } x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Avec:

$x \in \mathbb{R}^n$  : Variable d'état,

$u \in \mathbb{R}^m$  : Vecteur d'entrée et  $y \in \mathbb{R}^m$  : vecteur de sortie, définissant le débit énergétique :  $w(t) = u^T y$ .

$f(x)$  : Champ de vecteur.

On suppose que  $f(x)$  est au moins un point d'équilibre, nous pouvons assumer que :  $f(0) = 0$ ,  $h(0) = 0$ .

#### II.3.1. Définitions :

$\Sigma$  est passif s'il est dissipatif par rapport au débit énergétique  $w(t) = u^T y$ .

Les définitions, différentielle et intégrale, évoquées antérieurement peuvent aussi caractériser la passivité des systèmes non linéaire. Pour des détails supplémentaires voir [17] et [26].

Une des définitions les plus importantes des systèmes passifs non linéaire est le lemme suivant :

##### II.3.1.1 Lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) :

Supposant que le système non linéaire  $\Sigma$  définit ci-dessus est passif, dérivable  $r$  fois et possédant une fonction de stockage  $H(x)$ , alors par définition :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathbb{R}^m : \dot{H}(x) \leq u^T \cdot y$ .

$$\text{Or: } \dot{H}(x) = \left( \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right)^T dx = \left( \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right)^T f(x) + \left( \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right)^T g(x) \cdot u \leq u^T \cdot h(x)$$

$$\text{Donc : } \left( \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right)^T f(x) + \left( \left( \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right)^T g(x) - h^T(x) \right) \cdot u \leq 0$$

Pour satisfaire cette inégalité, il faut que :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x}\right)^T f(x) \leq 0 \\ \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x}\right)^T g(x) = h^T(x) \end{cases} \quad (\text{II.01})$$

La condition (II.01) est l'énoncée du lemme de KYP de la passivité pour les systèmes non linéaire.

$\left(\frac{\partial H(x)}{\partial x}\right)^T f(x) = L_f H(x)$  : représente la dérivée de Lie de  $H(x)$  le long du vecteur  $f(x)$ .

Un système non linéaire, ayant une fonction de stockage qui satisfait la propriété de KYP est passif, et réciproquement.

### II.3.1.2 Indice de passivité :

Pour étudier la condition de stabilité des systèmes passifs et non-passifs, on définit les indices de passivité qui mesurent le degré de celle-ci. Ces indices de passivité peuvent être définis en termes d'excès ou de manque de passivité, ce qui a été prouvé précédemment par action d'entrée en parallèle et par rétroaction.

Considérons le système  $\Sigma$  à entrée/sortie multi variables de la figure II.11, définissons une matrice de gain  $[K_i I]$ ,  $i = 1, 2$  où  $I$  matrice identité et  $K_i$  constantes, telle que :

- $\Sigma$  est passif en anticipation d'entrée avec la matrice de gain  $-K_1 I$ , s'il est dissipatif pour :  
 $w(u, y) = u^T y - K_1 \|u\|^2$ , où :  $K_1 > 0$ . figure II.11(a).
- $\Sigma$  est passive en rétroaction de sortie avec la matrice de gain  $-K_2 I$ , s'il est dissipatif pour :  
 $w(u, y) = u^T y - K_2 \|y\|^2$  où  $K_2 > 0$ . figure II.11(b).

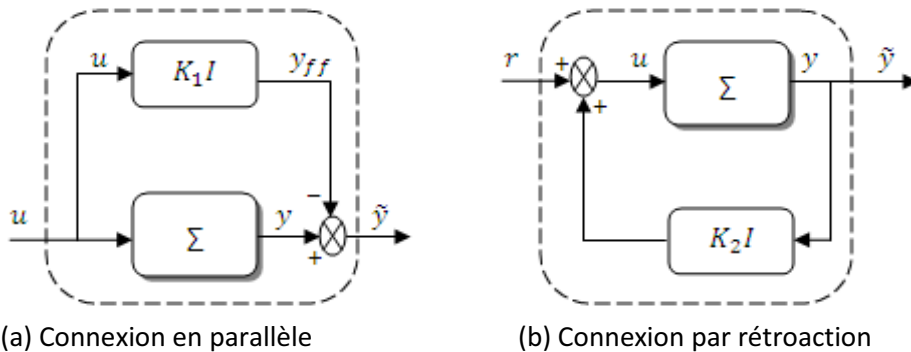


Figure II.11 : Indice de passivité

**Exemple :** (secteur statique non linéaire)

Considérons le système statique non linéaire de la figure II.12 où :  $\alpha \cdot u \leq y = \varphi(u) \leq \beta \cdot u$

Où :  $\varphi(u)$  une fonction bornée contrôlable ; on peut écrire :  $\alpha \cdot u^2 \leq u \cdot \varphi(u) \leq \beta \cdot u^2$ .

Si on manipule la fonction  $\varphi(u)$  on obtient :

$$u \cdot y - \alpha \cdot u^2 \geq 0 \quad \text{Et} \quad u \cdot y - \frac{1}{\beta} \cdot y^2 \geq 0$$

Ainsi, le secteur non linéaire  $y = \varphi(u)$  est passive par anticipation d'entrée ( $K_1 = \alpha$ ) aussi bien qu'il est passive par rétroaction de sortie ( $K_2 = \frac{1}{\beta}$ ).



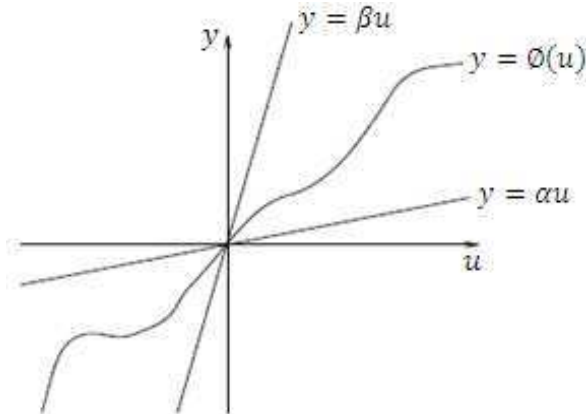


Figure II.12 : Exemple d'indice de passivité -secteur non linéaire-

## II.3.2. Propriétés:

### II.3.2.1 Interconnexion des systèmes non linéaire passifs :

Soient deux systèmes non linéaire  $\Sigma_1: u_1 \mapsto y_1$  et  $\Sigma_2: u_2 \mapsto y_2$ , connectés de manière classique  $u_2 = y_1$  et  $u_1 = -y_2$  (figure II.13).

Si  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont passifs, alors le système en boucle fermé  $\Sigma : u = (u_1 \ u_2)^T \mapsto y = (y_1 \ y_2)^T$  est aussi passif.

De plus, s'ils sont à sortie strictement passive, alors  $\Sigma$  l'est aussi [voir 32].

L'interconnexion par rétroaction est un exemple typique de la conservation de la puissance par  $(u_1^T y_1 + u_2^T y_2 = -y_2^T y_1 + y_1^T y_2 = 0)$ .

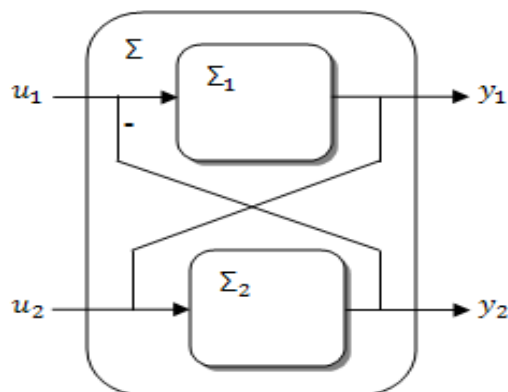


Figure II.13 : Interconnexion des systèmes non linéaires passifs.

### II.3.2.2. Stabilité des systèmes passifs :

Le concept de la stabilité via de la passivité implique l'utilisation d'une fonction de stockage  $H(x)$  définie semi positive, cette stabilité n'est pas toujours assurée par la passivité, il faut des exigences additives.

Par exemple : si un système est défini par deux variable d'états  $[x_1 \ x_2]^T$  et d'une fonction de stockage définie semi positive  $H(x) = \frac{1}{2}x_1^2$ , alors la passivité avec  $H(x)$  n'implique pas la stabilité de  $x_2$ . Des conditions additionnelles sur la détectabilité et l'observabilité d'état zéro sont requises.

Donc, si le système  $\Sigma$  est à sortie strictement passive avec cette fonction de stockage  $H(x)$ , on a :

- Si  $\Sigma$  est à état zéro observable, alors  $H(x) > 0$  pour tout  $x \neq 0$ .
- Si  $H(x) > 0$  pour tout  $x \neq 0$ ,  $H(0) = 0$  et  $\Sigma$  est à état zéro détectable, alors  $x = 0$  est un état d'équilibre localement asymptotiquement stable de  $\dot{x} = f(x)$ . De plus, si  $H(x)$  est non bornée ( $H(x) \rightarrow \infty$  quand  $\|x\| \rightarrow \infty$ ), alors la stabilité est globale. (pour la démonstration voir [32])

Plusieurs méthodes sont utilisées pour la stabilité des systèmes via la passivité, on peut citer :

### II.3.2.2.1 Stabilité par l'intermédiaire d'énergie formée :

- L'énergie d'un système non contrôlé ( $u^T = 0$ ) est décroissante ( $H[x(t)] \leq H[x(0)]$ ), elle diminue réellement en présence de dissipation; comme la fonction de stockage  $H(x)$  est bornée inférieurement, le système converge volontairement vers un point d'équilibre minimum  $x_*$  donc  $H(x)$  est qualifiée comme une fonction de Lyapunov.

- $H(x)$  est aussi décroissante pour la sortie  $y = 0$ .

Toutes les trajectoires du système  $\Sigma$  ainsi définis sont « à une dynamique zéro ».

### II.3.2.2.2 Stabilité par injection d'amortissement :

En outre, si on termine le port de  $\Sigma$  par un retour d'état  $u = -K \cdot y$ , avec  $K = K^T > 0$  un prétendu gain d'amortissement injecté afin de stabiliser un point d'équilibre assigné  $x_*$  et si  $H(x) > 0$  on a :

$$\dot{H} \leq u^T \cdot y = -y^T \cdot K \cdot y \leq 0 \text{ avec : } y = h(x).$$

Alors il est facile de prouver que le point d'équilibre ( $x_*$ ) est asymptotiquement stable s'il est détectable par la sortie  $y$  (c'est à dire si l'implication :  $y(t) \equiv 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_*$  est vrai).

## II.3.3. Conclusion :

En conclusion, le but de la passivité est de faire converger les trajectoires du système vers un point d'équilibre désiré ( $x_*$ ) a minimum d'énergie. Si les minimums sont stricts,  $H(x)$  est qualifié comme fonction de Lyapunov pour eux et la commande passive forme l'énergie minimale requise en ce moment.

### Remarque :

L'énergie totale qui peut être extraite d'un système passif est limitée.

## II.4. La commande basée sur la passivité (PBC en anglais)

### II.4.1 Introduction :

L'énergie est l'élément principal dans la commande par la passivité (PBC) des systèmes en électrotechnique. La fonction énergétique d'un système détermine son comportement statique et

transitoire via le transfert d'énergie entre ses sous-systèmes. Ainsi, les systèmes (processus et contrôleur) sont vus comme des dispositifs transformateurs d'énergie, qui sont interconnectés pour atteindre un comportement désiré en incorporant des connaissances préalables et apportant des modes de régulation requis [30].

La commande PBC a été présentée par Ortega et Spong (1989) [25] avec la conception d'un contrôleur qui réalise la stabilité par la passivité. L'objectif du contrôleur est : en premier lieu, d'imposer au système passif une énergie de stockage minimum au point d'équilibre désiré et d'assurer en deuxième étape une stabilité asymptotique à la sortie du système passif. L'idée a été inspirée de la stabilité des systèmes mécaniques, formulés par les équations d'Euler-Lagrange, par la formation seulement d'énergie potentielle [30].

La PBC a été également appliquée aux systèmes physiques électriques et électromécaniques [27-28-29]. Cette technique permet d'obtenir des contrôleurs robustes qui ont une interprétation physique claire en termes d'interconnexions du système avec son environnement.

La PBC est une méthode de conception qui, à partir des propriétés de passivité du processus, propose un contrôleur qui transforme le processus en un système passif ayant une fonction d'énergie différente [33].

En particulier, pour la PBC l'énergie totale du système en boucle fermée est la différence entre l'énergie du système et l'énergie fournie par le contrôleur.

#### **II.4.2 Principe :**

Le principe de base de la PBC consiste à modifier l'énergie totale du système afin de stabiliser un point d'équilibre, on vise une fonction d'énergie positive définie pour qu'elle agisse à titre de fonction de Lyapunov en lui rajoutant un terme d'amortissement pour améliorer la réponse transitoire et atteindre la stabilité asymptotique.

Si par cette commande, on modifie l'énergie du système pour converger vers une énergie minimum désirée, alors l'état du système converge vers le minimum.

Pour accélérer la vitesse de convergence à l'état désiré, un régulateur basé sur la passivité doit être capable d'injecter un terme dissipatif additif positif au système plus performant par rapport à celui obtenue avec la dissipation naturelle fournie par le système lui même.

Il faut bien savoir que, le point où l'énergie en boucle ouverte est minimale (qui coïncide typiquement avec l'état zéro) n'a pas habituellement d'intérêt pratique, et la commande PBC est présente pour faire fonctionner le système autour d'un certain point d'équilibre différent de zéro ( $x_*$ ).

Pour atteindre cet objectif, trois formulations sont possibles :

- 1) Soit un changement de la fonction énergétique du système par un retour d'état passive.
- 2) Soit une commande par interconnexion, dont l'énergie est ajoutée.
- 3) Où la décomposition du processus en blocs secondaires et concevoir un contrôle PBC pour chacun d'eux.

### II.4.3. Méthodes de synthèses de lois de commande par PBC :

Lorsque la PBC est utilisé pour stabiliser un point  $x_* \in \mathbb{R}^n$ , la fonction de stockage  $H_d(x)$  est utilisée comme fonction de Lyapunov, ainsi il est essentiel que :

$$x_* = \operatorname{argmin} H_d, \text{ alors : } \nabla H_d = 0 \text{ est une condition nécessaire.}$$

#### II.4.3.1. PBC par rétroaction (feedback)

Pour rendre un processus passif (stockage interne d'énergie  $\leq$  apport extérieur) via de la rétroaction c'est possible, une telle conception est stable et facile à commander.

##### II.4.3.1.1 Principe :

Soit le système non linéaire  $\Sigma$  décrit par :

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

Avec:

$x \in \mathbb{R}^n$  : variable d'état.

$u \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^m$  sont respectivement, la commande et la sortie du système  $\Sigma$ .

Si on peut trouver une transformation par retour d'état définit par :

$$u = \alpha(x) + v \tag{II.02}$$

Avec  $v$  une entrée virtuelle.

La nouvelle dynamique de  $\Sigma$  en boucle fermée est :

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f_d(x) + g(x)v \\ y_d = h_d(x) \end{cases}$$

Où :  $f_d(x) = f(x) + g(x)\alpha(x)$  et  $y_d$  la sortie désirée.

De telle sorte que la fonction de stockage désirée  $H_d$  a un stricte minimum en  $x_*$  (minimum de phase) et qui vérifie :  $\dot{H}_d \leq v^T y_d$ , donc, le système  $\Sigma$  est passif par rétroaction.

En termes d'EBE, on a :

$$\dot{H}_d = \left(\frac{\partial H_d}{\partial x}\right)^T (f(x) + g(x)\alpha(x)) + \left(\frac{\partial H_d}{\partial x}\right)^T g(x)v, \text{ par intégration on obtient :}$$

$$H_d[x(t)] - H_d[x(0)] = \int_0^t v^T(s) \cdot y_d(s) \cdot ds - d_a(t)$$

$-d_a(t) = \int_0^t \left(\frac{\partial H_d}{\partial x}\right)^T (f(x) + g(x)\alpha(x)) \cdot ds \geq 0$ : Une fonction positive remplaçant le terme dissipatif elle augmente le taux de convergence en ajustant sa valeur, elle s'appelle «injection d'amortissement».

$y_d = g^T(x) \left(\frac{\partial H_d}{\partial x}\right)$  : La sortie désirée.

La transformation (II.02) est appelée : « PBC par rétroaction ».

**II.4.3.1.2 Propriétés :**

- La dynamique du système passif  $\Sigma$  est nulle (*minimum de phase*) par rétroaction, alors il est asymptotiquement stable (voir [34]).
- Il est bien connu que stabiliser le système par l'intermédiaire de la passivité assure automatiquement les propriétés de sa robustesse [33].
- Si on compare la balance énergétique en boucle ouverte avec celle de la boucle fermée, on constate que la sortie est aussi modifiée, si  $y = h(x)$  ne satisfait pas  $\nabla h g(0) > 0$  alors le système n'est pas qualifié comme une conception à retour d'état.

**Remarque :**

- Le choix de la dissipation désirée dans l'étape d'injection d'amortissement est loin d'être évidente, par exemple nous pouvons réaliser la stabilité asymptotique, et l'amortissement peut dégrader cette stabilité.
- Le vecteur commande  $u$  dans beaucoup de cas pratiques, contient quelques variables externes non manœuvrables, telles que les perturbations, où leurs action de commande n'entre pas dans  $u$  par exemple : les dispositifs de commutations.

**II.4.3.1.3 Conclusion :**

La PBC par rétroaction (retour d'état) réalise deux étapes de base :

- 1) Une modification de la fonction énergétique du système pour assigner l'équilibre désiré.
- 2) Injection d'amortissement (dissipation) dans la dynamique de l'erreur d'asservissement :

$$x - x_{consigne} \Rightarrow (\text{stabilisation asymptotique}(x_*, 0)).$$

Donc : PBC = Energie formée + Injection d'amortissement.

**II.4.3.2. PBC par anticipation «feedforward»**

Beaucoup de processus stable peuvent être rendu passif par une anticipation statique [35].

**II.4.3.2.1 Principe :**

Soit le processus  $\Sigma_1$  de la figure II. 14, connecté en parallèle avec  $\Sigma_2$ , définit par :

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{x} = f_1(x) + g_1(x)u_1 \\ y_1 = h_1(x) \end{cases}$$

Supposons que le processus  $\Sigma_1$  n'est pas passif mais globalement stable on  $x = 0$ , avec la fonction candidate de Lyapunov  $H_1(x)$ . Le système feedforward  $\Sigma_2$  peut être conçu pour rendre  $\Sigma_1$  passif.

La méthode de concevoir cette anticipation passif, est de s'assurer que le système globale passif  $\Sigma$  a la même équation d'état que  $\Sigma_1$  et de trouver une sortie appropriée  $y(t) = h(x)$  tel que  $\Sigma$  est passif :

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f_1(x) + g_1(x)u_1 \\ y = h(x) \end{cases}$$

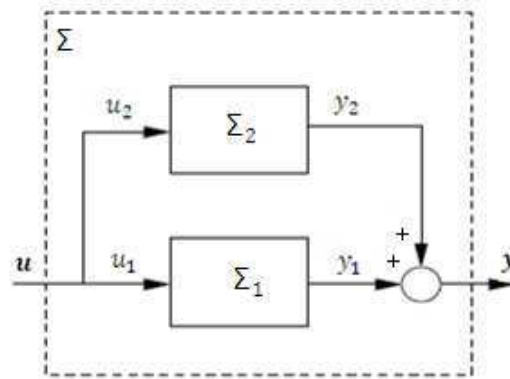


Figure II.14 : PBC par connexion en parallèle

On se réfère au lemme de KYP (II.01), avec  $H(x)$  une fonction de stockage de  $\Sigma$ , alors :

La condition :  $L_{f_1}H(x) \leq 0$  est toujours satisfaite.

Si on choisit :  $h^T(x) = L_{g_1}H(x)$ , alors le système  $\Sigma$  est passif.

Le système de connexion feedforward  $\Sigma_2$  peut être obtenu par la soustraction  $y$  de  $y_1$  :

$$\Sigma_2: \begin{cases} \dot{x} = f_1(x) + g_1(x)u_2 \\ y_2 = \left[ \frac{\partial H(x)}{\partial x} g_1(x) \right]^T - h_1(x) \end{cases}$$

Une telle anticipation stabilisera la dynamique des zéro de  $\Sigma_1$  (de sorte que  $\Sigma$  soit à minimum de phase) et avoir un degré relatif ne dépassant pas 1.

#### Remarque :

- Pour les systèmes linéaires, la connexion en parallèle est obtenue en utilisant le lemme de KYP linéaire.

#### II.4.3.2.2 Conclusion :

N'importe quelle commande qui stabilise le processus peut être passive par connexion en parallèle.

Il est impossible de rendre un processus, instable, passif avec une connexion en parallèle, car il n'affecte pas les dynamiques libre du système (quand  $u = 0$ ). Dans ce cas la passivité par rétroaction est seule sollicitée.

#### II.4.3.3. PBC par la balance énergétique (EB) et dissipation

##### II.4.3.3.1 Principe :

La PBC par EB a été employée pour la première fois en robotique (Takegaki et Arimoto, 1981) avec la stabilisation des systèmes mécanique entièrement actionnés qui vise essentiellement l'énergie potentielle. La commande par EB consiste à :

- Trouver une fonction de stockage désirée  $H_d(x)$  en boucle fermée qui représente la différence entre l'énergie stockée du processus et l'énergie assurée par le contrôleur :

$$\underbrace{H_d(x)}_{\text{Énergie en-boucle fermée}} = \underbrace{H(x)}_{\text{Stockée}} - \underbrace{H_a(x)}_{\text{Assurée}}$$

En outre, si  $H_d(x)$  est minimum au point d'équilibre désiré  $x_*$  alors le système sera stable.

Pour réaliser ce concept, considérons un retour d'état du processus  $u = \alpha(x) + v$  tel qu'avec la nouvelle entrée  $v$  du système est passif i.e.:  $H_d[x(t)] - H_d[x(0)] = \int_0^t v^T(s).y_d(s).ds - d_a(t)$

En effet si  $-\int_0^t v^T(s).y(s).ds = H_a[x(t)] + k$ ,  $k > 0$ , pour une certaine énergie  $H_a[x(t)]$  façonnée par le contrôleur, alors :  $v \mapsto y$  est passive avec la nouvelle fonction d'énergie désirée en boucle fermée  $H_d(x)$  c'est le principe d'EB.

### **Exemple :**

Considérons l'exemple classique du règlement de position d'un système mécanique entièrement actionné avec les coordonnées généralisées  $q \in \mathbb{R}^{n/2}$  et l'énergie totale:  $H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} + V(q)$

Où :

$D(q) = D^T > 0$  : Matrice des masses générales.

$V(q)$  : L'énergie potentielle du système, elle est bornée inférieurement

La sortie passive d'un tel système est la vitesse ( $y = \dot{q}$ ).

La manière la plus simple de satisfaire EB avec la forme de l'énergie est de considérer un retour d'état  $u = \alpha(x) + v$  tel que :  $v(q) = \frac{\partial V(q)}{\partial q} - k_p(q - q_*)$ , ou  $k_p = k_p^T > 0$  un gain d'ajustement et  $q_*$  la position désirée.

En remplaçant dans l'expression ci-dessus, on obtient :

$-\int_0^t v^T(q(s)).\dot{q}(s).ds = -V[q(t)] + \frac{1}{2} K_p [q(t) - q_*]^T . [q(t) - q_*] + k$ , la nouvelle énergie de la boucle fermée passive ( $v \mapsto \dot{q}$ ) est :

$H_d(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} + \frac{1}{2} K_p (q - q_*)^T (q - q_*)$ . Qui a un minimum désiré  $(q_*, 0)$ .

Pour s'assurer que la trajectoire converge réellement à ce minimum (c.-à-d., l'équilibre est asymptotiquement stable), on injecte un amortissement :  $v = -K_{di}.\dot{q}$ .

Naturellement, le contrôleur présenté ci-dessus est très bien connu (Proportionnel Dérivateur + compensation de pesanteur [36]).

Le but de l'exemple est de fournir une nouvelle interprétation pour l'action de ce contrôleur, soulignant le fait que la fonction de stockage qui est assignée à la boucle fermée est la différence entre l'énergie stocké et l'énergie assurée par le contrôleur :

$$H_d(x) = H(x) - \int_0^t u^T(s).y(s).ds.$$

Par conséquent, l'application de PBC via EB pour le règlement de position de mécanique est bien rentable.

### II.4.3.3.2. Application d'EB au système non linéaire:

La stabilisation par la balance énergétique peut être appliquée au système non-linéaires passif  $\Sigma$  définit précédemment.

Comme  $\Sigma$  est passif, il existe une fonction de stockage non négative  $H(x)$  qui satisfait la condition

$$(II.01) \text{ de KYP : } \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x}\right)^T f(x) \leq 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x}\right)^T g(x) = h^T(x).$$

Si  $\Sigma$  admet un point d'équilibre  $x_*$  avec la fonction énergétique désirée  $H_d(x)$ , et si on peut trouver la fonction  $\alpha(x)$  de sorte que l'équation différentielle suivante est satisfaite :

$$\left(\frac{\partial H_d(x)}{\partial x}\right)^T [f(x) + g(x) \cdot \alpha(x)] = -h^T(x) \alpha(x) \quad (II.03)$$

$H_d(x)$  : La solution de l'équation (II.03) et la fonction  $H_d(x)$  définit précédemment est minimum en  $x_*$  alors :  $u = \alpha(x) + v$  : est une commande par EB.

Par conséquent, pour  $v = 0$  nous avons  $x_*$  un point d'équilibre stable avec la différence entre l'énergie stockée et celle façonnée par le contrôleur constituant une fonction de Lyapunov.

### II.4.3.3.3. Inconvénients :

- Ce résultat, bien que tout à fait général, est d'intérêt limité, pour le modèle  $(f, g, h)$  qui n'indique pas le rôle joué par la fonction énergétique dans la dynamique du système. Par conséquent il est difficile d'incorporer l'information préalable pour choisir un  $\alpha(x)$  afin de résoudre l'équation différentielle (II.03). Un résultat plus pratique sera présenté plus tard pour une classe plus appropriée des modèles, à savoir, les systèmes modélisés sous la forme Hamiltonienne à Ports et commandés par PBC.

- *Obstacle de la dissipation en EB :*

L'application d'EB est sévèrement limitée par la dissipation normale du système : Comme on vient de le voir dans l'exemple du réglage de position d'un système mécanique, une condition nécessaire pour la résolution de l'équation différentielle est :

$$f(\bar{x}) + g(\bar{x})\alpha(\bar{x}) = 0 \Rightarrow h^T(\bar{x}) \cdot \alpha(\bar{x}) = 0.$$

L'extraction de la puissance à l'équilibre ( $= h^T \alpha$ ) doit être nulle.

Donc : EB est applicable seulement pour les systèmes sans amortissement dominant.

### II.4.3.3.4 Conclusion :

La PBC par EB est robuste pour la régulation des systèmes mécaniques ( $Puissance = F^T \dot{q}$ ), mais restrictive pour les systèmes électrique et électromécanique ( $Puissance = v^T i$ ).

## II.4.3.4. PBC par interconnexion (CBI)

### II.4.3.4.1 Principe :

Pour avoir une interprétation physique des idées précédentes, le processus  $\Sigma$  et le contrôleur  $\Sigma_c$  sont considérés comme deux systèmes physiques qui échangent l'énergie à travers un réseau de



connexion  $\Sigma_I$  choisit de telle sorte que les énergies de  $\Sigma$  et  $\Sigma_c$  s'additionnent (figure II.15), c'est le principe de commande PBC par interconnexion (CBI):

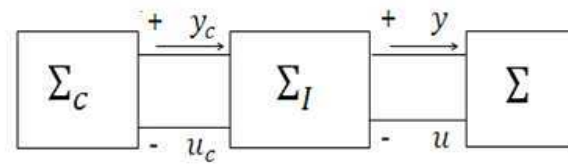


Figure II.15 : PBC par interconnexion.

#### II.4.3.4.2 Propriétés :

1) *Conservation de la puissance* : La CBI impose la conservation de la puissance ( $\Sigma_I$  est sans perte)

$$u_c^T(t) \cdot y_c(t) + u^T(t) \cdot y(t) = 0 \quad \forall t > 0.$$

#### Exemple :

L'interconnexion classique par retour d'état représentée par la figure II.16 du processus avec son

contrôleur :  $\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_c \\ y_c \end{bmatrix}$  conserve la puissance puisque :  $uy + u_c y_c = -u_c \cdot y_c + u_c \cdot y_c = 0$ .

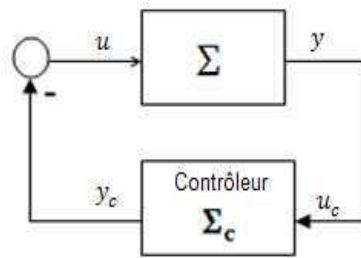


Figure II.16 : Interconnexion par retour d'état

2) Si on assume une interconnexion par anticipation (figure II.14), avec des entrées externes  $(v, v_c)$

$$\text{tels que : } \begin{bmatrix} u \\ u_c \end{bmatrix} = \Sigma_I \begin{bmatrix} y \\ y_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ v_c \end{bmatrix}$$

Avec :  $\Sigma_I$  est sans perte.

$\Sigma, \Sigma_c$  sont passifs avec des variables d'états  $x$  et  $\xi$ , et des fonctions énergétiques  $H(x), H_c(\xi)$  respectivement, alors l'application  $(v, v_c) \mapsto (y, y_c)$  est aussi passive pour le système interconnecté, avec la nouvelle fonction énergétique :  $H_d(x, \xi) = H(x) + H_c(\xi)$ .

Preuve :

$$\int_0^t [v^T(s) \quad v_c^T(s)] \begin{bmatrix} y(s) \\ y_c(s) \end{bmatrix} ds = \int_0^t u^T(s) y(s) ds + \int_0^t u_c^T(s) y_c(s) ds \geq H(x(t)) - H(x(0)) + H_c(\xi(t)) - H_c(\xi(0))$$

Où : la première équation est issue de la propriété de  $\Sigma_I$  (sans perte), et la dernière inégalité est obtenue de la propriété de  $\Sigma_c, \Sigma$  (sont passifs).

De la propriété citée ci-dessus, on conclut que les contrôleurs passifs et l'interconnexion préservant la puissance peut, en principe, être utilisés " pour former " toute l'énergie en boucle fermée. Cependant, bien que  $H_c(\xi)$  puisse être assigné librement, la fonction énergétique  $H(x)$  du système est définie, et elle n'est pas claire comment nous pouvons efficacement former l'énergie globale.

3) *Méthode de la Fonction Invariante* : L'idée principale de la méthode de l'invariance de fonctions [37], [38] est de limiter le mouvement du système en boucle fermée à un certain sous espace de  $(x, \xi)$  ainsi, nous pouvons exprimer toute l'énergie en boucle fermée  $H_d(x, \xi)$  en fonction de  $x$  seulement, et d'avoir un minimum au point désiré.

Pour réaliser cet aspect, il faut limiter la dynamique d'espace paramétré  $(x, \xi)$  a, donc la variable d'état du contrôleur peut s'exprimer par :  $\xi = F(x) + k$  :

$k$  : est une constante de niveau déterminé par le contrôleur CBI, alors :

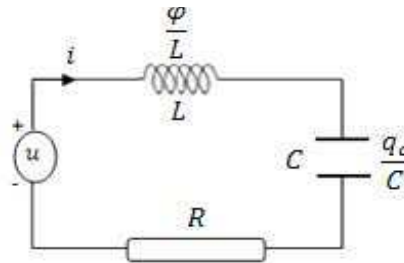
$$H_d(x) = H(x) + H_c(F(x) + k).$$

Soit :  $C(x, \xi)$  la fonction candidate invariable telle que  $C(x, \xi) = F(x) - \xi$ .

Donc : trouver  $F(\cdot)$  qui rend la dynamique de  $C(x, \xi)$  invariable i.e. :  $\left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^T \dot{x} - \dot{\xi} \right)_{\xi=F(x)+k} = 0$ .

### **Exemple :**

Soit le circuit électrique RLC série de la figure II.17 :



**Figure II.17** : Circuit électrique RLC série.

Avec :  $u$  comme tension d'alimentation,  $\varphi_L$  : le flux,  $q_c$  : la charge électrique et  $x = [q_c \quad \varphi_L]^T$  les variables d'états.

L'équation dynamique d'un telle système est décrite par :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L} x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{C} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + u \\ y = \frac{1}{L} x_2 \end{cases}$$

Soit un contrôleur  $\Sigma_c$  du type intégrateur définit par :

$$\Sigma_c : \begin{cases} \dot{\xi} = u_c \\ y_c = \frac{\partial H_c}{\partial \xi}(\xi) \end{cases}$$

Avec une interconnexion  $\Sigma_I$  par retour d'état:  $\begin{bmatrix} u \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y_c \end{bmatrix}$  et un choix de la fonction candidate invariante :  $C(x_1, \xi) = F(x_1) - \xi$ , alors :  $\frac{dC}{dt} = \frac{1}{L}x_2 \left( \frac{\partial F(x_1)}{\partial x_1} - 1 \right)$

On choisit :  $F(x_1) = x_1$ , avec un contrôleur d'énergie :  $H_c(\xi) = \frac{1}{2C_a}\xi^2 - \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_a}\right)x_{1*}\xi$ , ( $C_a$ : est un paramètre de conception) on récupère le précédent.

$x_* = [x_{1*}, 0]^T$  : Est le point d'équilibre ou la puissance extraite est nulle.

#### 4) Interconnexion partielle :

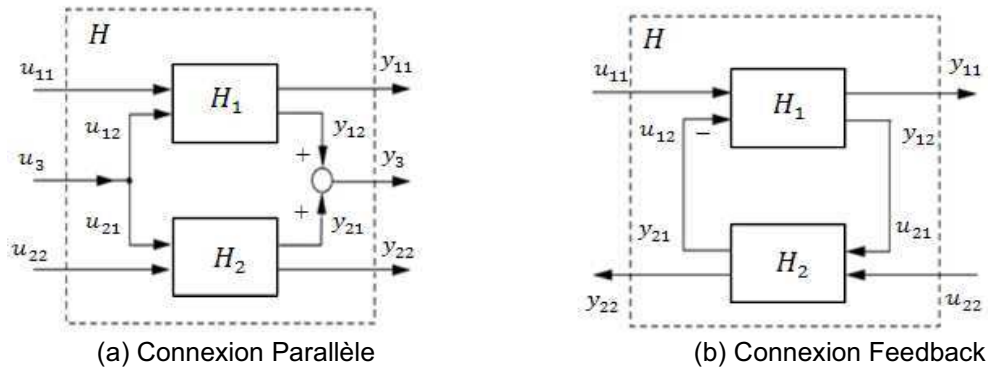
Considérons les systèmes  $H_1 : u_1 \mapsto y_1$  et  $H_2 : u_2 \mapsto y_2$ , avec :

$$u_1 = [u_{11}^T \ u_{12}^T]^T, \quad u_2 = [u_{21}^T \ u_{22}^T]^T, \quad y_1 = [y_{11}^T \ y_{12}^T]^T, \quad y_2 = [y_{21}^T \ y_{22}^T]^T.$$

Si les systèmes  $H_1$  et  $H_2$  sont passifs, alors les deux systèmes, l'un obtenu par une connexion partielle et l'autre par connexion en boucle fermée (figure II.18) sont tous les deux passifs [35].

Si :  $S_1(x_1), S_2(x_2)$  des fonctions de stockage et dérivables respectivement de  $H_1$  et  $H_2$ , alors le point d'équilibre  $(x_1, x_2) = (0,0)$  des deux systèmes est stable.

Avec :  $x_1, x_2$  les variables d'état de  $H_1$  et  $H_2$  respectivement.



**Figure II.18** : Connexion partielles des systèmes passifs.

#### Preuve :

$H_1$  et  $H_2$  passifs  $\Rightarrow \exists S_1(x_1), S_2(x_2)$  deux fonctions de stockage définies positive, telles que :

$$S_i(x_i(t_1)) - S_i(x_i(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} u_i^T y_i \cdot dt, \quad i = 1, 2.$$

Définissons :  $S(x) = S_1(x_1) + S_2(x_2)$  positive et  $x = [x_1^T, x_2^T]^T$  variable d'état donc :

$$S(x(t_1)) - S(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} (u_1^T y_1 + u_2^T y_2) \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} (u_{11}^T y_{11} + u_{12}^T y_{12} + u_{21}^T y_{21} + u_{22}^T y_{22}) \cdot dt$$

Pour le système a connexion partielle parallèle :  $u_3 = u_{12} = u_{21}$ ,  $y_3 = y_{12} + y_{21}$ , la combinaison d'entrée ( $u$ ) et de sortie ( $y$ ) avec :  $u = [u_{11}^T \ u_3^T \ u_{22}^T]^T$ ,  $y = [y_{11}^T \ y_3^T \ y_{22}^T]^T$ .

Alors :  $S(x(t_1)) - S(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} (u_{11}^T y_{11} + u_3^T y_3 + u_{22}^T y_{22}) \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} y^T u \cdot dt$

Pour le système en boucle fermée:  $y_{12} = -y_{21}$ ,  $u_{21} = y_{12}$ , la combinaison d'entrée ( $u$ ) et de sortie ( $y$ ) avec :  $u = [u_{11}^T \ u_{22}^T]^T$ ,  $y = [y_{11}^T \ y_{22}^T]^T$ , alors :

$$S(x(t_1)) - S(x(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} (u_{11}^T y_{11} - y_{21}^T y_{12} + y_{12}^T y_{21} + u_{22}^T y_{22}) \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} y^T u dt$$

Par conséquent, les deux interconnexions sont passives.

Si :  $H_1, H_2$  satisfait KYP conditions, l'équilibre  $(x_1, x_2) = (0,0)$  des deux connexions est stable par principe de Lyapunov.

#### II.4.3.4.3 Conclusion :

En conséquence, si un processus est passif, il peut être stabilisé au point d'équilibre ( $x = 0$ ) par n'importe quel contrôleur passif via l'interconnexion (CBI), même s'il est fortement non-linéaire et/ou fortement couplé.

#### II.4.3.5. PBC par Le modèle d'Euler-Lagrange :

Cette approche consiste à établir les grandeurs et fonctions d'Euler-Lagrange du circuit qui sont :

- L'énergie cinétique : emmagasinée dans les inductances, pour les systèmes électriques.
- L'énergie potentielle : Celle emmagasinée dans les condensateurs
- La fonction de dissipation : correspond en pratique à la dissipation par effet Joule ou à la friction.
- et aux entrées exogènes du système.

Cette approche est expliquée dans [39-40], elle est appliquée, essentiellement, aux systèmes mécaniques (robots).

#### II.4.3.6. PBC par la forme Hamiltonienne à Ports (PH) :

##### II.4.3.6.1 Introduction :

La modélisation des systèmes dynamiques complexes sous la forme hamiltonienne à port (PH) est une méthode adaptée, car elle permet de caractériser la dynamique des sous-ensembles en employant une structure de liaison de Dirac et décrire de manière naturelle les propriétés fondamentales physiques du système (lois de conservation, termes de dissipation,...).

La modélisation sous forme PH et son utilisation pour la commande des systèmes non-linéaires a déjà été appliquée avec succès à de nombreux domaines de la physique tels que la mécanique, l'électromagnétisme, la mécatronique, ...etc. [43].

Cette description a été étendue aux systèmes dynamiques décrits par des équations aux dérivées partielles [44].

##### II.4.3.6.2. Description de la forme Hamiltonienne à ports (PH) :

###### II.4.3.6.2.1 Principe :

Le système PH est un modèle non linéaire sans pertes (conservation de la puissance) muni de ports extérieurs (interface d'un élément avec un autre défini par deux variables, l'effort et l'écoulement)

agissant comme des entrées et définit par une représentation d'état traditionnel. Il est caractérisé par une inclusion explicite de la contribution du gradient de l'énergie totale du système dans les équations différentielles décrivant l'évolution du vecteur d'état (pour plus de détail voir [37-35]).

En plus, L'interconnexion des systèmes Hamiltonien à Ports est encore un système PH.

La représentation mathématique des systèmes PH qui relie l'entrée, l'état et la sortie est définit sous la forme suivante :

$$\Sigma_{(u,y)}: \begin{cases} \dot{x} = [J(x) - \mathcal{R}(x)]\nabla H(x) + g(x)u \\ y = g^T(x)\nabla H(x) \end{cases} \quad (II.04)$$

Où :

$x \in \mathbb{R}^n$ : Vecteur d'état.

$J(x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ : Matrice antisymétrique d'interconnexion naturelle dépend strictement de  $x$  caractérisée par :  $J(x) = -J^T(x)$  (le système conserve l'énergie (ou continuité de puissance)).

$\mathcal{R}(x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ : Matrice symétrique d'amortissement, ne dépend que de  $x$ , reflète les pertes internes du système avec:  $\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}^T(x) \geq 0$ .

On pose  $F(x) = J(x) - \mathcal{R}(x) \Rightarrow F + F^T = -2\mathcal{R} \leq 0$ .

$H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ : Appelée la « fonction Hamiltonienne » qui représente la fonction énergétique du système (n'est pas nécessairement semi défini et positif ni bornée inférieurement),

$\nabla H(x) = \frac{\partial H(x)}{\partial x}$ : Le gradient de la fonction énergétique.

$g(x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ : Matrice de connexion externe décrivant le port de raccordement du système avec l'extérieur, elle définit l'écoulement de l'énergie (du/vers) du système à travers  $u$  et  $y$ .

$u \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \leq n$ : L'action de la commande.

$y \in \mathbb{R}^m$ : est la sortie.

$(u, y)$  sont les variables conjuguées dont le produit est l'unité de puissance, définissant le sens d'échange de cette puissance avec l'environnement du système, par exemple : le courant et la tension dans les circuits électriques et la forces et la vitesse pour les systèmes mécaniques.

### **Exemple 01 :**

Pour l'exemple du circuit RLC série de la figure II.17, on définit  $x = [x_1 = q_c \quad x_2 = \varphi_L]^T$  comme variables d'états. L'énergie stockée dans le circuit est:  $H(x) = \frac{1}{2C}x_1^2 + \frac{1}{2L}x_2^2$  est  $\nabla H(x) = \frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{L}x_2$

La dynamique du circuit est décrite par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{C}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + u \\ y = \frac{1}{L}x_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} x_1 \\ \frac{1}{L} x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Le modèle PH est défini par :

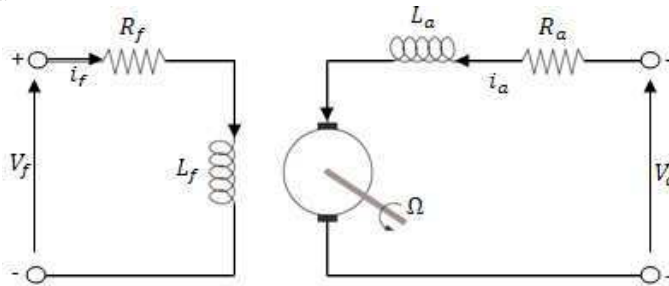
$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \cdot \nabla H(x) + g \cdot u \\ y = g^T(x) \nabla H(x) \end{cases}$$

$$\text{Où : } F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -R \end{bmatrix}, \quad \nabla H(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} x_1 \\ \frac{1}{L} x_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

### **Exemple 02 :**

La modélisation du moteur à courant continu à excitation séparée de la figure II.19, s'exprime sous la forme PH avec les variables d'état  $x^T = [\phi_f \quad \phi_a \quad \Omega]$  et la fonction hamiltonienne :

$$H(x) = \frac{1}{2L_f} \phi_f^2 + \frac{1}{2L_a} \phi_a^2 + \frac{1}{2} J \Omega^2 \text{ de la manière suivante :}$$



**Figure II.19 :** Moteur à courant continu à excitation séparée

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \cdot \nabla H(x) + g \cdot u \\ y = g^T(x) \nabla H(x) \end{cases}$$

$$\text{Avec : } J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_a i_f \\ 0 & L_a i_f & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{R}(x) = \begin{bmatrix} R_f & 0 & 0 \\ 0 & R_a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f_r}{J} \end{bmatrix}; \quad g(x) = I_3 \text{ (matrice identité } 3 \times 3)$$

Port d'entrée :  $u^T = [V_f \quad V_a \quad C_r]$  et la sortie passive :  $y^T = [i_f \quad i_a \quad C_r]$ .

### **Exemple 03 :**

Soit le système électromécanique de la figure II.20, constitué d'une boule de fer en mouvement dans un champ magnétique commandé par un inducteur :

Avec  $x = [p \quad q \quad \phi]^T$  comme variables d'état :

$p = x_1$  : Position de la boule.

$q = x_2$  : Quantité de mouvement.

$\phi = x_3$  : Flux magnétique de l'inducteur.

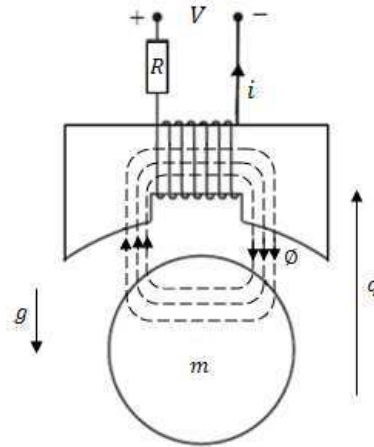


Figure II.20 : Boule de fer dans un champ magnétique.

Soit :  $L(x_1)$  inductance magnétique,  $R$  résistance électrique de l'enroulement parcouru par un courant  $i$  et  $F_m$  la force magnétique.

Donc :  $x_3 = L(x_1)i$ ,  $F_m = \frac{\partial W_c}{\partial x_1}$  où :  $W_c$  : La co-énergie magnétique assumée comme linéaire :

$$W_c = W_c = \frac{1}{2}L(x_1)i^2$$

Les équations du mouvement du système électromécanique sont :

$$\dot{x}_1 = \frac{x_2}{m}$$

$$\dot{x}_2 = mg + F_m$$

$$\dot{x}_3 = -Ri + V$$

En générale,  $L(x_1)$  est une fonction complexe en  $x_1$ , une approximation classique pour l'inductance pour un petit déplacement  $x_1$  peut être défini :  $L(x_1) = \frac{K_1}{K_2 + x_1}$ , avec  $K_1, K_2$  des constantes.

Donc :

$$i = \frac{x_3}{L(x_1)} = \frac{K_2 + x_1}{K_1} x_3 \Rightarrow i^2 = \frac{(K_2 + x_1)^2}{K_1^2} x_3^2$$

$$W_c = \frac{1}{2}L(x_1)i^2 = \frac{K_1}{2(K_2 + x_1)} i^2 = \frac{1}{2} \frac{(K_2 + x_1)}{K_1} x_3^2$$

$$F_m = \frac{\partial W_c}{\partial x_1} = \frac{x_3^2}{2K_1}$$

Alors, la représentation d'état du système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{m} \\ \dot{x}_2 = mg + \frac{x_3^2}{2K_1} \\ \dot{x}_3 = -R \frac{(K_2 + x_1)}{K_1} x_3 \end{cases}$$

L'énergie emmagasinée est :  $H(x) = mgx_1 + \frac{x_2^2}{2m} + W_c$

$$\nabla H(x) = \left[ \frac{\partial H}{\partial x_1} \quad \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad \frac{\partial H}{\partial x_3} \right]^T = \left[ mg + \frac{x_3^2}{2K_1} \quad \frac{x_2}{m} \quad \frac{(K_2 + x_1)x_3}{K_1} \right]^T$$

La description de la dynamique du modèle sous la forme PH est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H}{\partial x_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} V$$

C'est le type d'accouplement entre deux systèmes physique (mécanique & magnétique) via PH, où la variable magnétique dans ce cas est le flux  $\phi$  tandis que la variable mécanique est la position  $q$ .

#### II.4.3.6.2 Propriétés :

##### 1) Equation énergétique d'équilibre EBE et la dissipation des systèmes PH :

La variation de l'énergie dans le système PH est donnée par le bilan énergétique suivant:

$$\frac{dH(x)}{dt} = \frac{\partial^T H(x)}{\partial x} \left[ (J(x) - \mathcal{R}(x)) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)u \right]$$

Si on considère la propriété de conservation d'énergie et l'expression de la sortie  $y$ , on obtient :

$$\frac{dH(x)}{dt} = - \frac{\partial^T H(x)}{\partial x} \mathcal{R}(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + y^T u : \text{Équation d'équilibre de la puissance.}$$

La variation de l'énergie dans le système hamiltonien est donc égale : à l'énergie fournie  $y^T u$

moins l'énergie dissipée  $\left[ \frac{\partial^T H(x)}{\partial x} \mathcal{R}(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right]$ .

Comme :  $\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}^T(x) \geq 0$  on obtient l'inégalité :  $\dot{H} \leq y^T u$  donc le système PH est dissipatif.

Par intégration on obtient la balance d'énergie pour  $t \geq 0$  formulé par :

$$\underbrace{\int_0^t u^T(s)y(s)ds}_{\text{énergie fourni}} = \underbrace{H[x(t)] - H[x(0)]}_{\text{énergie stockée}} + \underbrace{\int_0^t \left[ \frac{\partial H}{\partial x}(x) \right]^T \mathcal{R} \frac{\partial H}{\partial x}(x(s))ds}_{\text{énergie dissipée}} \quad (\text{II.05})$$

L'équation (II.05) exprime l'énergie d'équilibre formée via la commande par interconnexion.

##### 2) La Passivité des Systèmes PH:

La relation entre les systèmes Hamiltoniens à ports et les systèmes passifs peut être déduite de la propriété précédente, par le fait de dire que : le système PH avec dissipation est passif.

La fonction de stockage est la fonction Hamiltonienne  $H(x)$ .

Preuve :

Le système PH (II.04) avec dissipation peut être interprété comme étant un système affine non linéaire de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$



Avec :

$$f(x) = [J(x) - \mathcal{R}(x)] \frac{\partial H(x)}{\partial x}$$

$$h(x) = g^T(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x}$$

Vérifions, si la condition (II.01) de KYV concernant la passivité des systèmes PH est satisfaite :

On a:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right)^T f(x) = \left( \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right)^T [J(x) - \mathcal{R}(x)] \frac{\partial H(x)}{\partial x} \\ \left( \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right)^T g(x) = h^T(x) \end{cases}$$

En exploitant l'antisymétrie :  $J(x) = -J^T(x)$  et l'inégalité :  $\mathcal{R} = \mathcal{R}^T \geq 0$ , on aura :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right)^T f(x) = -\frac{\partial^T H(x)}{\partial x} \mathcal{R}(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} \leq 0 \\ \left( \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right)^T g(x) = \left[ g^T(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right]^T \end{cases}$$

Donc : la condition (II.01) de KYV est satisfaite et le système PH est passif.

S'il n'y a aucune dissipation dans le système ( $\mathcal{R}(x) = 0$ ), alors  $\left( \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right)^T f(x) = 0$  système sans perte. Donc, un système PH sans dissipation est un système sans perte. De plus, si  $\mathcal{R}(x) > 0$ , le système PH est strictement passif. Ainsi, la propriété de la passivité des système PH peuvent être déterminées en vérifiant simplement le signe de la matrice  $\mathcal{R}(x)$ .

#### Remarque :

Les systèmes PH sont caractérisés par une limite inférieure de la fonction hamiltonienne:  $H(x) \geq -K$ ,  $K \in \mathbb{R}^+$ . Dans ce cas, il est toujours possible de prouver qu'un système PH est un système passif en considérant  $H^*(x) = H(x) + K \geq 0$  comme fonction de stockage.

#### II.4.3.6.2.3 Conclusion :

En plus de considérer la conservation de l'énergie, la modélisation sous forme PH souligne des propriétés structurelles du système modélisé. Elle permet aussi de mettre en évidence les échanges énergétiques qui se produisent à l'aide de la matrice d'interconnexion  $J(x)$  et de la matrice d'amortissement  $\mathcal{R}(x)$ .

Un autre aspect considéré par les modèles PH est le fait que la structure d'interconnexion interne et l'interconnexion avec l'extérieur sont différenciées.

#### II.4.3.6.3. Types de commande par PBC des systèmes PH :

##### II.4.3.6.3.1. Commande par interconnexion (CBI):

###### II.4.3.6.3.1.1 Principe :

Dans la commande par interconnexion CBI, le façonnement d'énergie est accompli en choisissant un contrôleur qui est aussi Hamiltonien à port. Le dispositif est composé d'une interconnexion préservant la puissance entre le processus et le contrôleur, ce qui entraîne une fonction de stockage égale à la somme des fonctions d'énergie du processus et du dispositif de commande.

Le contrôleur de base est un PH actionné par les flux de la forme :

$$\Sigma_c(u_c, y_c): \begin{cases} \dot{\xi} = [J_c(\xi) - \mathcal{R}_c(\xi)] \frac{\partial H_c}{\partial \xi}(\xi) + g_c(\xi)u_c \\ y_c = g_c^T(\xi) \frac{\partial H_c}{\partial \xi}(\xi) \end{cases}$$

$\xi$  : L'état du contrôleur et  $H_c(\xi)$  une fonction de stockage a déterminer.

Une interconnexion de  $\Sigma_c$  avec le système PH (II.04) par retour d'état préserve la puissance :

$$\begin{bmatrix} u \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y_c \end{bmatrix}$$

L'ensemble global définit dans l'espace d'état prolongé  $(x, \xi)$  peut être écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(x) - \mathcal{R}(x) & -g(x) \cdot g_c^T(\xi) \\ g_c(\xi) \cdot g^T(x) & J_c(\xi) - \mathcal{R}_c(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial H_c}{\partial \xi}(\xi) \end{bmatrix}$$

Avec l'énergie totale stockée du modèle PH commandé par CBI  $=H(x) + H_c(\xi)$ .

On introduit le concept des fonctions de casimir [39-40], (quantités conservées du système pour tout choix du hamiltonien déterminées d'une façon géométrique par la structure d'interconnexion du système) qui définissent l'invariance de la structure du système PH.

### Définition (fonction de casimir) :

Considérons le système PH suivant, avec l'espace d'état  $X$  et la fonction hamiltonienne  $H: X \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = [J(x) - \mathcal{R}(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u \\ y = g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) \end{cases}$$

La fonction  $C: X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de casimir pour le système PH si et seulement si le hamiltonien  $H$  est nul en tout point :  $\frac{dC(x)}{dt} = 0$ .

Donc, la fonction scalaire  $C(x, \xi): X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de casimir de notre système CBI :  $\Sigma(u, y) - \Sigma_c(u_c, y_c)$  si et seulement si sa dérivée par rapport au temps est nulle le long de la dynamique en boucle fermée pour toutes les fonctions hamiltonienne  $H(x)$ , ceci signifie que :

$$\frac{dC(x, \xi)}{dt} = \frac{\partial^T C(x, \xi)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial^T C(x, \xi)}{\partial \xi} \dot{\xi} = 0$$

Donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial^T C(x, \xi)}{\partial x} [J(x) - \mathcal{R}(x)] - \frac{\partial^T C(x, \xi)}{\partial \xi} [g(x) \cdot g_c^T(\xi)] = 0 \\ \frac{\partial^T C(x, \xi)}{\partial \xi} [J_c(\xi) - \mathcal{R}_c(\xi)] + \frac{\partial^T C(x, \xi)}{\partial x} [g_c(\xi) \cdot g^T(x)] = 0 \end{cases}$$

Ces conditions sont des conséquences directes de la loi d'interconnexion CBI.

L'existence de la fonction de casimir d'un système en boucle fermée joue un rôle important dans la commande par interconnexion et le façonnement de l'énergie.

#### II.4.3.6.3.1.2 Propriété :

Dans la commande CBI il n'existe aucun lien entre l'état du système et celui du contrôleur, le choix de l'énergie du contrôleur pour régler le système est difficile.

Dans ce cas, la solution est de limiter l'état du système en boucle fermée en un certain sous espace d'état ( $\xi = F(x) + k$ ,  $k$  constante,) correspondant à la fonction de casimir du type :

$$C(x, \xi) = F(x) - \xi \quad (\text{II.06})$$

Ceci signifie que nous recherchons les solutions de l'équation aux dérivées partielles (EDP) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^T F(x)}{\partial x} [J(x) - \mathcal{R}(x)] + g(x) \cdot g_c^T(\xi) = 0 \\ -J_c(\xi) + \mathcal{R}_c(\xi) + \frac{\partial^T F(x)}{\partial x} [g_c(\xi) \cdot g^T(x)] = 0 \end{cases} \quad (\text{II.07})$$

La fonction (II.06) satisfait EDP (II.07) si (voir [41]):

$$\begin{cases} \frac{\partial^T F(x)}{\partial x} J(x) = -g_c(\xi) \cdot g^T(x) \\ \mathcal{R}(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^T F(x)}{\partial x} [g_c(\xi) \cdot g^T(x)] = J_c(\xi) \\ \mathcal{R}_c(\xi) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.08})$$

Dans ce cas, la dynamique réduite du système (II.04) est un modèle PH de la forme :

$$\dot{x} = [J(x) - \mathcal{R}(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x)$$

Avec la fonction d'énergie façonnée :  $H_d(x) = H(x) + H_c[F(x) + k]$ .

L'état :  $\mathcal{R}(x) \frac{\partial F}{\partial x}(x) = 0$  de (II.08) caractérise la dissipation admissible pour la balance d'énergie PBC en termes de coordonnées là où l'énergie peut être formée.

En effet, si l'état précédent est pris pour :  $\mathcal{R}(x) \frac{\partial H_c(F)}{\partial x}(x) = 0$  pour toute fonction de contrôle d'énergie  $H_c$  en général, ceci signifie que  $H_c$  ne devrait pas dépendre des coordonnées où il y a amortissement normal. La dernière restriction peut alors être interprétée comme: dissipation dans la balance d'énergie PBC est admissible seulement sur les coordonnées qui n'exigent pas " formation

d'énergie." Par exemple : dans les systèmes mécaniques où l'état constitué de la position et des vitesses, l'amortissement est associé aux derniers; par conséquent, dans la commande de la position, seule l'énergie potentielle est concernée; ainsi la condition  $\mathcal{R}(x) \frac{\partial H_c(F)}{\partial x}(x) = 0$  sera satisfaite.

#### II.4.3.6.3.1.2 Conclusion :

On peut appliquer la stratégie CBI aux systèmes PH avec le flux construit antérieurement, qui garantis la préservation du flux et de la dissipation sans contraintes additionnelles.

#### II.4.3.6.3.2. Commande par modulation état-source :

Pour prolonger PBC aux systèmes avec une dissipation infinie, nous présentons deux modifications principales :

- 1) D'abord, puisque ces systèmes ne peuvent pas être stabilisés en extrayant une quantité d'énergie finie du contrôleur, nous considérons ce dernier comme une source d'énergie infinie décrit par :

$$\Sigma_c(u_c, y_c): \begin{cases} \dot{\xi} = u_c \\ y_c = \frac{\partial H_c}{\partial \xi}(\xi) \end{cases} \quad (\text{II.09})$$

Avec la fonction énergétique :  $H_c(\xi) = -\xi$ .

- 2) En second lieu, une interconnexion unitaire classique en boucle fermée (par les variables de port de puissance), qui impose des contraintes strictes sur les structures des systèmes et du contrôleur reflété par les conditions :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right)^T \mathcal{J}(x) \cdot \frac{\partial F(x)}{\partial x} &= \mathcal{J}_c(\xi) \\ \left( \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right)^T \mathcal{J}(x) &= g_c(\xi) \cdot g^T(x) \end{aligned}$$

Pour fournir plus de conception élastique, nous proposons d'incorporer l'information d'état, en couplant le système de source avec le système façonné par l'intermédiaire d'une interconnexion état modulée de la forme :

$$\begin{bmatrix} u(s) \\ u_c(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta(x) \\ \beta(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(s) \\ y_c(s) \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

Cette interconnexion est clairement de puissance préservée.

Le système global (II.04), (II-09) et (II-10) relié ensemble, peut être écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}(x) - \mathcal{R}(x) & -g(x) \cdot \beta(x) \\ \beta^T(x) \cdot g^T(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial H_c(\xi)}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

Ce qui est toujours un système PH, avec une énergie totale :  $H(x) + H_c(\xi)$ .

Il est important de noter que la dynamique de  $x$  décrit le comportement du système :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

Avec une rétroaction statique d'état  $u = \beta(x)$ ; par conséquent, notre choix de  $\beta$  pour la fonction d'état-modulation (voir [25]).

La restriction d'amortissement :  $\mathcal{R}(x) \frac{\partial F}{\partial x}(x) = 0$  est une condition nécessaire pour l'existence de la fonction de casimir [34] dans ce cas aussi bien. Le point clés ici est que l'énergie du sous-ensemble de  $x$  peut être formé et la structure PH préservée sans génération de fonctions de casimir. En effet, si : pour  $\mathcal{J}(x), \mathcal{R}(x)$  et  $g(x)$  données nous pouvons résoudre l'équation aux dérivées partielle :  $[\mathcal{J}(x) - \mathcal{R}(x)] \cdot \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) = g(x)\beta(x)$  (II.11)

Pour quelque  $\beta(x)$ , alors la dynamique du système de façonnement est décrite par :

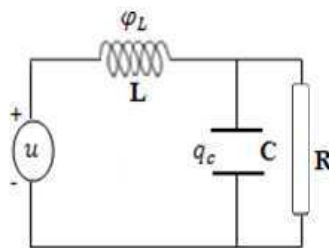
$$\dot{x} = [\mathcal{J}(x) - \mathcal{R}(x)] \cdot \frac{\partial H_d}{\partial x}(x), \text{ avec la fonction énergétique : } H_d(x) = H(x) + H_a(x).$$

En outre, si nous pouvons s'assurer que  $H_d(x)$  a un minimum au point d'équilibre désiré, alors la commande par retour d'état statique  $u = \beta(x)$  rend ce point stable.

Notons qu'il n'y a aucune contrainte " dissipation finie " pour la résolution de (II.11) ; par conséquent cette nouvelle conception de PBC est, en principe, applicable aux systèmes avec dissipation infini.

### **Exemple :**

Soit le circuit R-L-C parallèle de la figure II.21 :



**Figure II.21:** Circuit électrique RLC parallèle

L'équation d'état de cet exemple est décrite par :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L} x_2 - \frac{1}{CR} x_1 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{C} x_1 + u \\ y = \frac{1}{L} x_2 \end{cases}$$

Où :  $x_1 = q_c$ ,  $x_2 = \varphi_L$

Le résultat principal de cet exemple est un procédé systématique pour PBC des systèmes commandés de la forme hamiltonienne à ports.

La description PH (II.04) de la dynamique du circuit RLC peut être écrite avec la fonction

$$\text{énergétique : } H(x) = \frac{1}{2C} x_1^2 + \frac{1}{2L} x_2^2 \text{ et les matrices : } \mathcal{J}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'équation aux dérivées partielles (II.11) est formulée par :

$$\begin{cases} -\frac{1}{R} \frac{\partial H_a(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial H_a(x)}{\partial x_2} = 0 \\ -\frac{\partial H_a(x)}{\partial x_1} = \beta(x) \end{cases}$$

Où :

➤ La première équation : peut être généralement résolue pour  $H_a(x) = \emptyset(Rx_1 + x_2)$ , avec  $\emptyset: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction différentiable arbitraire.

➤ La deuxième équation : définit la loi de commande.

On doit choisir la fonction  $\emptyset$  telle que  $H_d(x)$  est minimale au point d'équilibre désiré  $x_* = (Cu_*, \frac{L}{R}u_*)$ .

Pour simplification, on choisit une fonction quadratique :

$$\emptyset(Rx_1 + x_2) = \frac{K_p}{2} [(Rx_1 + x_2) - (Rx_{*1} + x_{*2})]^2 - Ru_* (Rx_1 + x_2)$$

On peut vérifier que l'énergie désirée façonnée  $H_a(x)$  est obtenue pour :  $K_p > \frac{-1}{L+CR^2}$  (II.12)

Et la fonction assignée d'énergie, comme prévue, est quadratique incrémentée.

$$H_d(x) = (x - x_*^T) \begin{bmatrix} \frac{1}{C} + R^2 K_p & RK_p \\ RK_p & \frac{1}{L} + K_p \end{bmatrix} (x - x_*) + k$$

Clairement, (II.12) est une condition nécessaire et suffisante pour que  $x_*$  soit l'unique minimum de la fonction désirée  $H_d(x)$ .

La loi de commande est simple (type linéaire a retour d'état) définit par :

$$u(x) = -K_p [R(x_1 - x_{1*}) + x_2 - x_{2*}] + u_*$$

**Remarque :**

Bien que cet exemple linéaire soit simple, ceci ne sera pas le point de vérité pour le cas général non-linéaire. En outre, l'importance de la détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour la solution de l'équation aux dérivées partielles peut à peine être surestimée.

### II.4.3.6.3.3. Commande par Assignement d'interconnexion et d'amortissement (IDA) :

#### II.4.3.6.3.3.1 Principe :

On vient de voir que la conception d'un contrôleur PBC s'articule essentiellement sur nos capacités à résoudre l'équation aux dérivées partielles (II.11), hormis sa solution ne soit pas facile.

Ainsi, l'incorporation de la commande IDA-PBC avec la connaissance antérieure du système va simplifier la tâche.

L'idée fondamentale de cette technique est d'imposer une forme énergétique désirée  $H_d(x)$  au système en boucle fermée par une action de commande  $\beta(x) = u$ . L'aspect mathématique de cette commande est la résolution de la prétendue équation aux dérivées partielle :

$$[\mathcal{J}(x) - \mathcal{R}(x)]. \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x). \beta(x) = [\mathcal{J}_d(x) - \mathcal{R}_d(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x)$$

Avec de nouvelles matrices d'interconnexion et d'amortissement désirées, respectivement :

$$\mathcal{J}_d(x) = -\mathcal{J}_d^T(x) ; \mathcal{R}_d(x) = \mathcal{R}_d^T(x) \geq 0 \text{ qui satisfaites :}$$

$$\mathcal{J}_d(x) = \mathcal{J}(x) + \mathcal{J}_c(x) \quad ; \quad \mathcal{R}_d(x) = \mathcal{R}(x) + \mathcal{R}_c(x)$$

Où :  $\mathcal{J}_c(x)$ ,  $\mathcal{R}_c(x)$  sont les nouveaux paramètres de conception qui ajoutent plus de degrés de liberté à la résolution de l'EDP qu'on verra plus tard, c'est le principe d'IDA-PBC.

**Remarque :**

$H_d(x) = H(x) + H_c(x)$  Où :  $H_c(x)$  l'énergie garantie par le contrôleur en boucle fermée.

Dans la méthode d'IDA-PBC, nous suivons les deux étapes de base de PBC [26] :

- 01) Energie façonnée : nous modifions toute la fonction énergétique du système pour assigner un équilibre désiré ( $x_*$ ).
- 02) Injection d'amortissement : pour réaliser une stabilité asymptotique et préserver l'énergie, nous exigeons également du système en boucle fermée d'être de la forme PH [42].

**II.4.3.6.3.2 Conception d'un contrôleur IDA-PBC :**

La commande basée sur la passivité à assignement d'interconnexion & d'amortissement (IDA-PBC) utilise le modèle dynamique PH représenté mathématiquement par la forme (II.04), L'échange interne d'énergies est saisi par les matrices d'interconnexion  $\mathcal{J}(x)$  et d'amortissements  $\mathcal{R}(x)$ .

La version d'IDA-PBC est rapportée en deux concepts :

- ◆ Quand les matrices d'interconnexion et d'amortissement ( $\mathcal{J}(x), \mathcal{R}(x)$ ) sont laissés inchangé, la conception est appelée IDA-PBC Basic (BIDA).
- ◆ Quand ils sont modifiés, on appelle la conception IDA-PBC simplement.

Ni l'un ni l'autre des arrangements n'est limité par l'obstacle de dissipation.

Donc, la conception d'un contrôleur IDA-PBC est basée sur les principes suivants :

En premier lieu : on fixe la structure désirée de ses matrices (IDA).

Puis : nous dérivons l'équation aux dérivées partielles paramétrées par le choix des matrices solutions caractéristique de toutes les fonctions énergétique assignées.

Finalement : parmi ces solutions on choisit celle qui satisfait le minimum requit ensuite on calcule la commande.

Plus précisément, le but final d'IDA-PBC est de trouver l'état statique en boucle fermée :  $u = \beta(x)$  de sorte que la dynamique du système est un modèle PH avec dissipation de la forme :

$$\dot{x} = [J_d(x) - \mathcal{R}_d(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x)$$

La nouvelle fonction énergétique  $H_d(x)$  a un minimum strictement localisé au point d'équilibre désiré  $x_*$  avec :  $J_d(x) = -J_d^T(x)$  et  $\mathcal{R}_d(x) = \mathcal{R}_d^T \geq 0$ , les matrices, respectivement, d'interconnexions et d'amortissement désirées.

#### II.4.3.6.3.3 Application IDA-PBC aux systèmes non-linéaires:

La méthode (IDA-PBC) manipule la dissipation dominante, elle ne compte pas sur la dynamique par incrémentation, ainsi que les fonctions énergétiques seront (en général) non quadratiques.

Malheureusement, dans quelques applications de technologie les modèles physiques PH sont trop complexes pour la commande, la conception et une étape de réduction est habituellement nécessaire. Par conséquent, l'intérêt de prolonger IDA-PBC à une classe plus générale des systèmes comme décrit dans la proposition suivante :

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (\text{II.13})$$

Avec :

$x \in \mathbb{R}^n$  : Vecteur d'état.

$f(x)$  : Vecteur fonction.

$u \in \mathbb{R}^m$ : L'action de commande ( $m \leq n$ ).

$g(x) \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  : Matrice de commande.

Supposent l'existence des matrices:  $J_d(x) = -J_d^T(x)$ ,  $\mathcal{R}_d(x) = \mathcal{R}_d^T \geq 0$ , et une fonction  $H_d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$g^\perp(x)f(x) = g^\perp(x)[J_d(x) - \mathcal{R}_d(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \quad (\text{II.14})$$

Où :  $g^\perp(x)$  est la matrice orthogonale de  $g(x)$  de rang  $(n - m)$  :  $g^\perp(x).g(x) = 0$ .

Soit  $x_* \in \{x \in \mathbb{R}^n / g^\perp(x)f(x) = 0\}$  le point d'équilibre a stabiliser.

Avec :  $x_* = \operatorname{argmin} H_d(x)$  (II.15)

Alors le système (II.13) en boucle fermée ( $u = \beta(x)$ ) doit avoir la loi de commande suivante :

$$\beta(x) = [g^T(x).g(x)]^{-1}.g^T(x) \times \left\{ [J_d(x) - \mathcal{R}_d(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x} - f(x) \right\} \quad (\text{II.16})$$

Avec une forme PH du type :

$$\dot{x} = [J_d(x) - \mathcal{R}_d(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \quad (\text{II.17})$$

Pour que  $x_*$ , le point d'équilibre (local), soit asymptotiquement stable il faut que  $x_*$  est un minimum isolé de  $H_d(x)$  ainsi que le plus grand ensemble invariable au dessous de la dynamique (II.17) de la boucle fermée contenue dans  $\left\{ x \in \mathbb{R}^n / \left[ \frac{\partial H_d}{\partial x} \right]^T \mathcal{R}_d(x) \frac{\partial H_d}{\partial x} = 0 \right\}$  égale  $\{x_*\}$  (voir [34]).



Une estimation de son domaine d'attraction est donnée par le plus grand degré limité de l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n / H_d(x) \leq c\}$  où  $c$  une constante.

Preuve :

Remplaçons  $u$  du terme droite de (II.13) par  $u = \beta(x)$ , faire l'égalité avec le terme droite de (II.17), on obtient l'expression :

$$f(x) + g(x)\beta(x) = [J_d(x) - \mathcal{R}_d(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \quad (\text{II.18})$$

Multiplions (II.18) par  $g^\perp(x)$  on obtient l'EDP (II.14), l'expression de la commande est obtenue par la multiplication du terme gauche par la pseudo-inverse de  $g(x)$ . La stabilité de  $x_*$  est établit le long de la trajectoire de (II.17) et nous avons :

$$\dot{H}_d = - \left[ \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \right]^T \mathcal{R}_d(x) \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \leq 0.$$

Alors,  $H_d(x)$  est qualifiée comme une fonction de Lyapunov.

En conclusion, s'assurer que les solutions demeurent bornées, nous estimons le domaine d'attraction de  $H_d(x)$  comme le plus grand ensemble a degré limité.

**Discussion :**

Il est clair de la proposition 01 que l'étape principale dans la conception IDA-PBC est la résolution de l'équation (II.14) ; nous soulignons le fait que dans cette équation:

- (i)  $J_c(x)$  et  $\mathcal{R}_c(x)$  sont libres.
- (ii)  $H_d(x)$  peut être totalement, ou partiellement, fixé et nous pouvons assurer (II.15).
- (iii) il y a un degré de liberté additionnelle dans  $g^\perp(x)$  qui n'est pas uniquement définit par  $g(x)$  (ce degré de liberté peut être employé par exemple pour éliminer la non-linéarité de l'EDP qui apparaît dans les systèmes mécaniques).

#### II.4.3.6.3.3.4 Les différents types IDA-PBC (Approches basés sur la résolution de l'EDP):

Pour résoudre l'équation aux DP (II.14), au moins, trois manières de procéder :

- **IDA Non-Paramétré** : un cas extrême [34], on peut fixer, apriori,  $J_c(x)$ ,  $\mathcal{R}_c(x)$  (en première étape égales à zéro) ainsi que  $g^\perp(x)$  pour le système PH (II.04), ce qui mène alors à une EDP en fonction de  $H_d(x)$  donnant un ensemble de solutions qui définissent l'énergie admissible ( $H_d(x)$  pour les matrices d'interconnexion et d'amortissement données) [34]. Parmi la famille des solutions nous choisissons celle qui satisfait (II.15).
- **IDA Algébrique** : l'autre cas extrême (proposition originale [45]), on fixe la fonction d'énergie désirée  $H_d(x)$ , alors l'EDP est une équation algébrique en fonction de :  $J_d(x)$ ,  $\mathcal{R}_d(x)$  et  $g^\perp(x)$ .
- **IDA Paramétré** : Pour certains types de systèmes physiques il est souhaitable de limiter la fonction d'énergie désirée à une certaine classe de fonctions.

Par exemple, pour les systèmes mécaniques ce sera la somme de l'énergie potentielle,  $V_d(q)$ , qui ne dépend que de la position et de l'énergie cinétique qui est une forme quadratique des moments,  $M_d^{-1}(q)$ , [46] :  $H_d(q, p) = \frac{1}{2} p^T M_d^{-1}(q) p + V_d(q)$

En donnant une structure fixe à la fonction  $H_d(x)$ , on obtient une nouvelle EDP qui impose quelques contraintes sur les matrices d'interconnexion et d'amortissement.

### Choix de $J_d(x)$ , $\mathcal{R}_d(x)$ et $g^\perp(x)$

De la proposition 1, on déduit que la sélection de  $J_d(x)$ ,  $\mathcal{R}_d(x)$  et  $g^\perp(x)$  est essentielle pour le succès de la version IDA-PBC paramétrée ou non-paramétrée. Adopter un simple point de vue informatique peut être assimilé à « une commande à actions additionnelle » qui sont utilisés pour simplifier la solution d'EDP (II.14). Par exemple, elles peuvent être choisies pour vérifier les conditions du théorème de Frobenius :  $g^\perp(x)[J_d(x) - \mathcal{R}_d(x)] \frac{\partial H_d}{\partial x} = 0$ , qui est une solution (génériquement) nécessaire pour (II.14). Ce point de vue est purement analytique et peu utilisé en pratique et c'est souvent préférable d'essayer d'incorporer la connaissance antérieure disponible au sujet pour l'application actuelle, en particulier lors du traitement des systèmes physiques.

### **Exemple 01:**

Considérons le système non linéaire représenté par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + Kx_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1x_2 + u \end{cases} \quad (01)$$

Avec :  $K > 0$  un gain et  $u$  la commande.

Pour une fonction énergétique :  $H(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}Kx_2^2$ , le système s'exprime sous la forme PH :

$$\dot{x} = [J(x) - \mathcal{R}(x)] \cdot \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u \quad (02)$$

$$\text{Avec : } J(x) = \begin{bmatrix} 0 & x_2 \\ -x_2 & 0 \end{bmatrix} ; \mathcal{R}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'objectif de la commande est de réguler, par exemple,  $x_2$  à une valeur désirée  $x_{2d}$ .

Le point d'équilibre correspondant à l'équation (01) est donnée par :  $(x_{1*} = K(x_{2d})^2, u_* = K(x_{2d})^3)$

En utilisant la technique IDA algébrique, nous écrivons l'équation (02) comme suit :

$$\dot{x} = [J_d(x) - \mathcal{R}_d(x)] \cdot \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \quad (03)$$

$$\text{Avec : } J_d(x) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha(x) \\ -\alpha(x) & 0 \end{bmatrix} ; \mathcal{R}_d(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

$$\text{Et : } H_d(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_{1*})^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - x_{2d})^2 \quad (04)$$

$\alpha(x)$  est une fonction qui sera déterminée par l'équation matricielle (05) ci-dessous et  $\gamma > 0, r > 0$  sont des paramètres ajustables, donc :

$$[J(x) - \mathcal{R}(x)] \cdot \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)\beta(x) = [J_d(x) - \mathcal{R}_d(x)] \cdot \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \quad (05)$$

A partir de la première ligne de l'équation (05) on obtient :  $Kx_2^2 - x_1 = \frac{\alpha(x)}{\gamma}(x_2 - x_{2d}) - (x_1 - x_{1*})$ , en déduit :  $\alpha(x) = \frac{\gamma}{x_2 - x_{2d}}(Kx_2^2 - x_{1*}) = \gamma K(x_2 + x_{2d})$

En substituant ce résultat dans la deuxième ligne de l'équation (05) on aura :

$\beta - x_1 x_2 = -\alpha(x_1 - x_{1*}) - \frac{r}{\gamma}(x_2 - x_{2d})$ . Ainsi, la loi de commande est d'écrite par :

$$\beta = x_1 x_2 - \gamma K(x_1 - x_{1*})(x_2 + x_{2d}) - \frac{r}{\gamma}(x_2 - x_{2d})$$

Cette commande représente un système PH en boucle fermé avec  $J_d, \mathcal{R}_d, H_d$  qui a un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable  $(x_{1*}, x_{2d})$ .

**Exemple 02 :** Pour bien illustrer les trois approches d'IDA-PBC, considérons le problème de régulation de la position d'un système électrostatique de la figure (II.22) [47]:

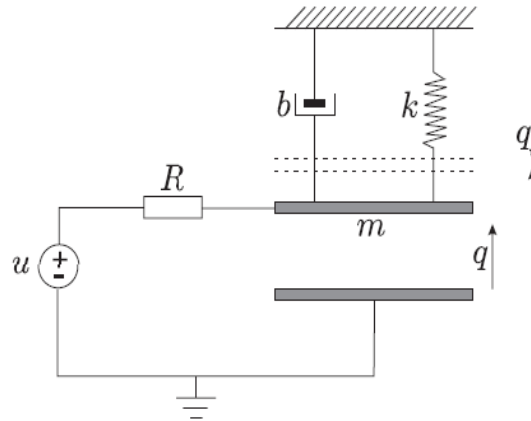


Figure II.22 : Modèle d'un système électrostatique

L'équation dynamique du mouvement est défini par :

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -k(q - q_*) - \frac{Q^2}{2A\epsilon} - \frac{b}{m}p \\ \dot{Q} = -\frac{qQ}{RA\epsilon} + \frac{1}{R}u \end{cases} \quad (06)$$

$p$  : La quantité de mouvement (habituellement difficile a mesurée),  $q$  : La position,  $Q$ : la charge du dispositif,  $A, m$  et  $\epsilon$  représentent respectivement l'air, la masse et la perméabilité. La raideur du ressort et le coefficient de frottement sont données respectivement par les coefficients positive  $k, b$  et  $R$  la résistance d'entrée et  $u$  la tension de commande.

Avec :  $(q_*, 0, 0)$  comme équilibre désiré a stabiliser.

L'équation (06) représente la forme hamiltonienne (II.04) du système avec :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}, \quad g^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

Et une fonction énergétique de la forme :  $H(q, p, Q) = \frac{1}{2}k(q - q_*)^2 + \frac{1}{2m}p^2 + \frac{q}{2A\varepsilon}Q^2$

- Commençons avec IDA Algébrique : supposons qu'on va assigner une fonction d'énergie quadratique :  $H_d(p, q, Q) = \frac{\gamma_1}{2}(q - q_*)^2 + \frac{1}{2m}p^2 + \frac{\gamma_2}{2}Q^2$  où :  $\gamma_1, \gamma_2$  des constantes positives.

Définissons les matrices désirées d'interconnexion et d'amortissement déterminées par :

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & j_{12} & j_{13} \\ -j_{12} & 0 & j_{23} \\ -j_{13} & -j_{23} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_d = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}. \quad (07)$$

Après un calcul simple, l'équation aux dérivées partielles (II.14) devient algébrique avec une seule

solution matricielle :  $J_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{Q}{2A\gamma_2} \\ 0 & \frac{Q}{2A\gamma_2} & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{R}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$ , où  $\gamma_1 = k, \gamma_2, r_3 > 0$  des paramètres

libres et  $j_{23} = -\frac{Q}{2A\gamma_2} \neq 0$

La loi de commande (II.16) est décrite par :  $\beta(q, p, Q) = \left(\frac{1}{m \cdot 2A\varepsilon \cdot \gamma_2} p - r_3 \gamma_2\right) R \cdot Q + \frac{1}{A \cdot \varepsilon} q Q$ .

Notons Bien que : la loi de commande dépend de l'état  $p$  non mesurable.

- Pour appliquer IDA Paramétré : on utilise la même structure  $(J_d - \mathcal{R}_d)$  de (07), EDP s'écrit :

$$r_1 \nabla_q H_d + j_{12} \nabla_p H_d + j_{13} \nabla_Q H_d = \frac{p}{m}.$$

$$-j_{12} \nabla_q H_d - r_2 \nabla_p H_d + j_{23} \nabla_Q H_d = -k(q - q_*) - \frac{Q^2}{2A\varepsilon} - \frac{b}{m} p.$$

Il n'y a aucune indication claire sur la façon de choisir les éléments de  $(J_d - \mathcal{R}_d)$ , nous les fixons comme des constantes. Basé sur des considérations physiques, nous pouvons choisir la matrice  $(J_d - \mathcal{R}_d)$  de la façon suivante :

$$J_d - \mathcal{R}_d = \begin{bmatrix} 0 & j_{12} & 0 \\ -j_{12} & -r_2 & j_{23} \\ 0 & -j_{23} & -r_3 \end{bmatrix}.$$

La solution de EDP est une expression encombrante avec un contrôleur plus compliqué qui dépend toujours de  $p$ , posons  $r_2 = j_{12}b$ , on obtient la fonction d'énergie désirée :

$$H_d(q, p, Q) = \frac{1}{2 \cdot j_{12}} \left( \frac{1}{m} p^2 + \frac{k}{2A\varepsilon} (q - q_*)^2 + \frac{j_{23}^2}{3j_{12}^2 A\varepsilon} q^3 + \frac{j_{23}}{j_{12} A\varepsilon} q^2 Q + \frac{1}{A\varepsilon} q Q^2 \right) + \psi \left( \frac{j_{23}}{j_{12}} q + Q \right).$$

$\psi(\cdot)$  : Une fonction libre sélectionnée pour garantir l'équilibre assigné (II.14).

La loi de commande est donnée par :  $\beta(q, p, Q) = \frac{j_{23}R}{j_{12}m} p - r_3 R \left( \frac{j_{23}}{2 \cdot j_{12}^2 A\varepsilon} q^2 + \frac{1}{4j_{12} A\varepsilon} q + \psi_Q \right) + \frac{1}{A\varepsilon} q Q$ .

Finalement, la partie mécanique du système suggère la considération d'une fonction d'énergie constituée de la somme d'énergie cinétique en boucle ouverte et d'une fonction à définir, telles que :

$$H_d(q, p, Q) = \frac{1}{2m} p^2 + \varphi(q, Q).$$

Cette paramétré fixe ( $J_d - \mathcal{R}_d$ ) d'une manière à avoir :  $J_d - \mathcal{R}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -r_3 \end{bmatrix}$

La solution d'EDP (II.14) rapport :  $\varphi(q, Q) = \frac{k}{2}(q - q_*)^2 + \frac{1}{2A\varepsilon} qQ^2 + \psi(Q)$ , avec  $\psi(Q)$  gain libre de l'équilibre assigné. Après un calcul, on obtient la loi de commande en boucle fermée :

$$\beta(q, Q) = -(r_3 R - 1) \frac{1}{A\varepsilon} qQ - r_3 R \dot{\psi} \text{ qui ne dépend plus de l'état non mesuré } p.$$

**Remarque :**

- Un cas particulier  $r_3 = \frac{1}{R}$  et  $\psi(Q)$  quadratique qui décrit le fameux contrôleur de charge linéaire en boucle fermée [45], mais il garantit également l'emploi des fonctions non-linéaires, par exemple, niveaux de saturation.
- Nous devrions également mentionner que l'arrangement de la commande a été obtenu en utilisant un control par amortissement plus l'approche interconnexion.

**II.4.3.6.3.3.5 Propriété d'IDA-PBC :**

**01. IDA-PBC d'interconnexion état – modulée :**

Soit le contrôleur a énergie infinie définit par :

$$\Sigma_c : \begin{cases} \dot{\zeta} = u_c \\ y_c = \frac{\partial H_c}{\partial \zeta}(\zeta) \end{cases}$$

Avec la fonction énergétique :  $H_c(\zeta) = -\zeta$ .

L'interconnexion par état-modulé (préservation de la puissance)  $\Sigma_I$  est ainsi définit :

$$\begin{bmatrix} u(s) \\ u_c(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta(x) \\ \beta(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(s) \\ y_c(s) \end{bmatrix}; \text{ Ou : } \beta(x) = u(x) \text{ en boucle fermée.}$$

De façon générale l'interconnexion du système PH avec l'énergie totale  $H(x) + H_c(\zeta)$  est :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(x) - \mathcal{R}(x) & -g(x)\beta(x) \\ \beta^T(x)g^T(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial H_c}{\partial \zeta}(\zeta) \end{bmatrix}$$

**02. IDA-PBC une balance d'énergie**

Le mécanisme de stabilisation par IDA-PBC est, en particulier, clair une fois appliqué aux systèmes PH (II.04) avec certaines propriétés d'amortissement. En effet, il a été montré dans [34] que si l'amortissement naturel du système PH satisfait :

$$\mathcal{R}(x).(\nabla H_d - \nabla H) = 0 \tag{II.19}$$

Donc : pas d'amortissement supplémentaire à injecter et  $\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}_d(x)$ , alors (le long des trajectoires de la boucle fermée du système) l'expression de la fonction d'énergie désirée est donnée par :

$$H_d(x(t)) = H(x(t)) - \int_0^t u^T(s) \cdot y(s) \cdot ds \quad (II.20)$$

L'équation indique que, dans ce cas-ci, l'IDA-PBC assigne comme fonction d'énergie la différence entre l'énergie stockée dans le système et l'énergie assurée par l'environnement, par conséquent on dit que le contrôleur est de type « balance d'énergie ».

IDA-PBC est une balance d'énergie si nous modifions seulement l'énergie potentielle du système [48]. Même lorsque (II.19) n'est pas satisfaite, l'action de commande d'IDA-PBC admet la balance d'énergie comme interprétation.

Dans [47], si l'interconnexion et l'amortissement ne sont pas modifiés, c-à-d- :  $J_d(x) = J(x)$ ;  $\mathcal{R}_d(x) = \mathcal{R}(x)$  avec la matrice  $J(x) - \mathcal{R}(x)$  est de plein rang, alors  $H_d(x(t))$  satisfait toujours (II.20) avec la nouvelle sortie  $\tilde{y}$ :  $\tilde{y} = -g^T(x)[J(x) - \mathcal{R}(x)]^{-T} \times \{[J(x) - \mathcal{R}(x)]\nabla H - g(x) \cdot u\}$ .

De même, Nous avons pour une entrée simple du système qui vérifie (II.19) la nouvelle sortie  $\tilde{y}$  coïncide exactement avec  $y$  naturelle. Bien que,  $u^T \tilde{y}$  n'a pas (en général) l'unité de puissance, il est aussi démontré dans [49], que pour les systèmes électromécaniques le nouveau port variable est obtenu par le théorème de Thevenin-Norton de la transformation de la tension-courant au port variable  $(u, y)$ .

### 03. IDA-PBC une Action Intégrale

L'IDA-PBC avec une action intégrale  $u = u_{es} + u_{di} + v$

ou :  $\dot{v} = -K_I \cdot g^T \cdot \frac{\partial H_d}{\partial x}$  et  $K_I = K_I^T > 0$ , préserve la stabilité.

Preuve :

Soit :  $W(x, v) = H_d + \frac{1}{2} v^T K_I^{-1} v$ , le système en boucle fermée s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_d(x) - \mathcal{R}_d(x) & g K_I \\ -K_I g^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial v} \end{bmatrix} \text{ Est clairement un système PH.}$$

Pour élargir l'ensemble de systèmes stabilisé via IDA-PBC, on suggère d'effectuer simultanément l'énergie façonnée et l'injection d'amortissement, cette méthode est défini par SIDA-PBC (Simultaneous Injection Damping and Assignment).

#### II.4.3.6.3.6 Conclusion:

Pour la version IDA PBC, on a aménagé l'action d'IDA basique étendu pour une solution explicite aux équations algébriques concernant la dissipation et la fonction d'énergie désirées.

En plus, IDA manipule la dissipation dominante, elle est plus proche de l'interprétation de la commande comme une application de l'espace d'états dans l'espace des entrées.

Pour élargir l'ensemble de systèmes stabilisé via IDA-PBC, on suggère d'effectuer simultanément l'énergie façonnée et l'injection d'amortissement, cette méthode est défini par SIDA-PBC (Simultaneous Injection Damping and Assignment).

### II.4.3.6.3.4 Commande par assignement et injection d'amortissement simultanément (SIDA) :

Considérons le problème de stabilisation d'un point d'équilibre du système non linéaire (II.13) :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

Comme on vient de voir, l'objectif de commande par IDA-PBC est accompli en deux étapes :

Premièrement : le signal de control est décomposé en deux termes :  $u = u_{es} + u_{di}$  où :

$u_{es}$  : Responsable de l'étape de formation d'énergie.

$u_{di}$  : La commande qui injecte de l'amortissement.

Deuxièmement : La résolution de l'équation clé :  $g^\perp(x)f(x) = g^\perp(x)[J_d(x)]\nabla H_d$  (II.21)

Pour quelques  $H_d$ ,  $J_d(x)$  et  $g^\perp(x)$  où :

$$J_d(x) + J_d^T(x) = 0 \quad (II.22)$$

Et l'assignement de l'équilibre désiré  $x_*$  avec :  $x_* = \arg \min H_d(x)$  (II.23)

En boucle fermée le système (II.16) avec la commande  $u = u_{es} + u_{di}$  où :

$$u_{es} = [g^T(x) \cdot g(x)]^{-1} \cdot g^T(x) \times [J_d(x)\nabla H_d - f(x)]$$

Rend notre système sous forme PH controlé de la forme :

$$\dot{x} = J_d(x)\nabla H_d + g(x) \cdot u_{es}$$

$$y = g^T(x)\nabla H_d$$

Ce système PH sans le terme de dissipation est "conservateur" i.e. :  $\dot{H}_d = 0$  et  $x_*$  est un point d'équilibre stable (avec la fonction de Lyapunov  $H_d(x)$ ).

Pour ajouter de la dissipation a notre système, nous bouclons la sortie passive  $y$ , par exemple, avec :  $u_{di} = -K_{di}y$ ,  $K_{di} = K_{di}^T > 0$ .

Alors, on obtient un système PH avec dissipation :

$$\dot{x} = [J_d(x) - \mathcal{R}_d(x)]\nabla H_d + g(x) \cdot v$$

$$y = g^T(x)\nabla H_d$$

Où :  $\mathcal{R}_d(x) = \mathcal{R}_d^T(x) = g(x) \cdot K_{di}g^T(x) > 0$

$v$  : Signal ajouté pour définir le port variable.

Le nouveau système en boucle fermée ( $v = 0$ ) satisfait  $\dot{H}_d = y^T \cdot K_{di} \cdot y$ , c'est facile de vérifier que  $x_*$  est asymptotiquement stable s'il est détectable par la sortie  $y$  ( $y(t) \equiv 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_*$ ).

La motivation d'élargir la classe des systèmes pour les quels cette équation est établie nous proposons en cela, pour éviter la décomposition de la commande en énergie formée et injection d'amortissement, d'effectuer simultanément les deux étapes et remplacent l'équation (II.14), par celle désignant la SIDA-PBC :

$$g^\perp(x)f(x, t) = g^\perp(x)F_d(x, t)\nabla H_d$$

Avec la condition que:

$$F_d(x, t) + F_d^T(x, t) \leq 0, \quad J_d(x) = \frac{1}{2}(F_d(x, t) - F_d^T(x, t)) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_d(x) = -\frac{1}{2}(F_d(x, t) + F_d^T(x, t)) \geq 0$$

La loi de commande s'exprime par :

$$u = [g^T(x) \cdot g(x)]^{-1} \cdot g^T(x) \times [F_d(x, t) \cdot \nabla H_d - f(x, t)] \quad (\text{II.24})$$

Puisque l'ensemble des matrices symétriques est strictement contenu dans l'ensemble des matrices avec la partie négative symétrique semi définie, il est clair que l'ensemble des fonctions  $\{f(x, t), g(x)\}$  pour lequel l'équation (II.21), avec la condition (II.22), est solvable soit strictement petit que l'ensemble auquel l'équation :  $g^\perp(x)f(x, t) = g^\perp(x)F_d(x, t)\nabla H_d$  ,avec la condition :  $F_d(x, t) + F_d^T(x, t) \leq 0$ , est solvable.

### Exemple :

Considérons l'exemple cité ci-dessus définit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + Kx_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1x_2 + u \end{cases} \quad \text{où : } K \text{ un gain positif}$$

$$\text{Avec : } f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + Kx_2^2 \\ -x_1x_2 \end{bmatrix}; \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } u \text{ la commande.}$$

Si on applique SIDA-PBC, on doit chercher :  $F_d = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$  et la loi de commande (II.24) tel que :

$$u = F_{21} \frac{\partial H_d}{\partial x_1} + F_{22} \frac{\partial H_d}{\partial x_2} + x_1x_2$$

Où :  $F_{21}$  et  $F_{22}$  des paramètres qui satisfaire :  $F_d(x, t) + F_d^T(x, t) \leq 0$  et l'équation (II.15).

Notons bien : que nous avons plus de degrés de liberté que la technique IDA-PBC.

➤ Le choix évident de la fonction énergétique est du type quadratique :

$$H_d(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_{1*})^2 + \frac{1}{2}K(x_2 - x_{2d})^2$$

$$\text{Alors : } \frac{\partial H_d}{\partial x_1} = x_1 - x_{1*} \quad ; \quad \frac{\partial H_d}{\partial x_2} = K(x_2 - x_{2d}).$$

Posons :  $F_{21} = -x_2$  ;  $F_{22} = -\frac{A}{K}$  où  $A$ : paramètre libre. Donc la loi de commande par SIDA-PBC est la suivante :  $u = x_{1*}x_2 - A(x_2 - x_{2d})$  un control par rétroaction plus simple qui ne dépend que d'un seul état mesuré  $x_2$ .

➤  $F_{11}$  et  $F_{12}$  sont choisis de sorte qu'ils doivent satisfaire la dynamique de  $x_1$  :

$$Kx_2^2 - x_1 = F_{11}(x_1 - x_{1*}) + F_{12}K(x_2 - x_{2d})$$

Pour simplifier le calcul, on prend :  $F_{11} = -1$  ce qui implique :  $F_{12} = x_2 + x_{2d}$

Finalement, pour prouver la stabilité du système il suffit de s'assurer que:  $F_d + F_d^T = \begin{bmatrix} -2 & x_{2d} \\ x_{2d} & -\frac{2A}{K} \end{bmatrix} \leq 0$



$F_d + F_d^T \leq 0$  Si :  $\frac{4A}{K} - x_{2d}^2 \geq 0$ , inégalité de Schur, on déduit que :  $A \geq \frac{1}{4}Kx_{2d}^2 = \frac{1}{4}x_{1*}$

## II.5 Conclusion :

Du point de vue théorique, la PBC nous a expliqué la commande comme l'acte d'interconnecter des systèmes dans le but d'obtenir un comportement désiré. Nous affirmons que l'énergie joue un rôle fondamental dans la modélisation et que le façonnement de l'énergie devrait être incorporé comme principe de conception. A priori, ce paradigme repose sur la prémisse que, dans le but de commander, l'interconnexion des systèmes et l'échange d'énergie sont plus intuitifs, conceptuellement plus attirants et plus naturels que le traitement de signaux et la pensée entrée/sortie.

Au niveau technique, nous avons obtenu une caractérisation de tous les régulateurs basés sur la passivité surtout pour PBC-IDA et PBC-SIDA.

Vu les nombreux avantages de ces méthodes, on va essayer de les utiliser pour rendre la commande du moteur à induction robuste de point de vue variations paramétriques, ce qui fera l'objectif du chapitre suivant.

## Chapitre III

## La commande par passivité d'un moteur à induction

### III.1. Introduction :

Le moteur à induction (MAI) constitue une classe intéressante et pratique des systèmes électrotechnique non linéaires et en constante évolution pour la commande non-linéaire.

En général, il est décrit par une équation différentielle non linéaire de cinquième ordre à deux entrées, et de trois variables d'état disponibles pour la mesure.

Notre contribution dans le présent chapitre est d'appliquer la commande basée sur la passivité de la vitesse mécanique sur le MAI tout en préservant sa robustesse et sa stabilité.

### III.2. Mise sous forme PH du moteur à induction :

#### III.2.1 Equations électrique et mécanique :

Le modèle du MAI est formulé dans le repère de Park lié au champ tournant (d,q) comme suit (chapitre (I) équations (I.04-05)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{sd} = R_s \cdot I_{sd} + \frac{d\phi_{sd}}{dt} - \omega_s \cdot \phi_{sq} \\ V_{sq} = R_s \cdot I_{sq} + \frac{d\phi_{sq}}{dt} + \omega_s \cdot \phi_{sd} \\ 0 = R_r \cdot I_{rd} + \frac{d\phi_{rd}}{dt} - \omega_r \cdot \phi_{rq} \\ 0 = R_r \cdot I_{rq} + \frac{d\phi_{rq}}{dt} + \omega_r \cdot \phi_{rd} \\ \omega_r = \omega_s - \omega = \omega_s - p \cdot \Omega \end{array} \right.$$

En tenant compte de l'équation mécanique de la machine, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi_{sd}}{dt} = -R_s \cdot I_{sd} + \omega_s \cdot \phi_{sq} + V_{sd} \\ \frac{d\phi_{sq}}{dt} = -R_s \cdot I_{sq} - \omega_s \cdot \phi_{sd} + V_{sq} \\ \frac{d\phi_{rd}}{dt} = -R_r \cdot I_{rd} - P\Omega \cdot \phi_{rq} + \omega_s \phi_{rq} \\ \frac{d\phi_{rq}}{dt} = -R_r \cdot I_{rq} + P\Omega \cdot \phi_{rd} - \omega_s \phi_{rd} \\ J \frac{d\Omega}{dt} = C_{em} - C_r - f \cdot \Omega \end{array} \right. \quad (III.01)$$

Avec :

$C_r$  : Couple résistive de friction.

$f \cdot \Omega$  : Couple résistive de viscosité.

$C_{em}$  : Couple électromagnétique.

### III.2.2 Equation magnétique :

Les expressions des flux statorique et rotorique dans le repère (d,q) sont données par la relation suivante (chapitre I (I.06)) :

$$\begin{cases} \Phi_{sd} = L_s I_{sd} + M \cdot I_{rd} \\ \Phi_{sq} = L_s I_{sq} + M \cdot I_{rq} \\ \Phi_{rd} = L_r I_{rd} + M \cdot I_{sd} \\ \Phi_{rq} = L_r I_{rq} + M \cdot I_{sq} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Phi_{sd} \\ \Phi_{sq} \\ \Phi_{rd} \\ \Phi_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & M & 0 \\ 0 & L_s & 0 & M \\ M & 0 & L_r & 0 \\ 0 & M & 0 & L_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{sd} \\ I_{sq} \\ I_{rd} \\ I_{rq} \end{bmatrix}$$

Sous forme matricielle :

$$[\Phi] = L \cdot [I] \text{ Ou : } [I] = L^{-1} \cdot [\Phi]$$

Avec :

$$[\Phi] = [\Phi_{sd} \ \Phi_{sq} \ \Phi_{rd} \ \Phi_{rq}]^T : \text{Vecteur flux.}$$

$$[I] = [I_{sd} \ I_{sq} \ I_{rd} \ I_{rq}]^T : \text{Vecteur courant.}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_s & 0 & M & 0 \\ 0 & L_s & 0 & M \\ M & 0 & L_r & 0 \\ 0 & M & 0 & L_r \end{bmatrix} : \text{Matrice inductance de la machine.}$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & -\frac{M}{\sigma L_s L_r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} & 0 & -\frac{M}{\sigma L_s L_r} \\ -\frac{M}{\sigma L_s L_r} & 0 & \frac{1}{\sigma L_r} & 0 \\ 0 & -\frac{M}{\sigma L_s L_r} & 0 & \frac{1}{\sigma L_r} \end{bmatrix} : \text{Matrice inverse d'inductance de la machine.}$$

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s \cdot L_r} : \text{Coefficient de dispersion de Blondel.}$$

Donc, on peut écrire que :

$$\begin{cases} I_{sd} = \frac{1}{\sigma L_s} \Phi_{sd} - \frac{M}{\sigma L_s L_r} \Phi_{rd} \\ I_{sq} = \frac{1}{\sigma L_s} \Phi_{sq} - \frac{M}{\sigma L_s L_r} \Phi_{rq} \\ I_{rd} = -\frac{M}{\sigma L_s L_r} \Phi_{sd} + \frac{1}{\sigma L_r} \Phi_{rd} \\ I_{rq} = -\frac{M}{\sigma L_s L_r} \Phi_{sq} + \frac{1}{\sigma L_r} \Phi_{rq} \end{cases} \quad (\text{III.02})$$

### III.2.3 Equation d'état :

La modélisation du MAI sous la forme d'état :  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  est traitée avec les hypothèses suivantes :

- Les variables d'état de la machine à induction sont : le flux statorique et rotorique ainsi que la vitesse mécanique  $x = [x_1 = \Phi_{sd} \ x_2 = \Phi_{sq} \ x_3 = \Phi_{rd} \ x_4 = \Phi_{rq} \ x_5 = \Omega]^T$ .

- Le couple résistif de friction est une perturbation proportionnelle à la vitesse mécanique du moteur à induction :  $C_r = f_r \cdot \Omega$ , où :  $f_r > 0$
- Le couple électromagnétique :  $C_{em} = P(\Phi_{rq} \cdot I_{rd} - \Phi_{rd} \cdot I_{rq})$ .
- La pulsation statorique  $\omega_s$  est un élément additionnel de commande :  $u = [V_{sd} \quad V_{sq} \quad \omega_s]^T \in \mathbb{R}^3$ .

Remplaçant l'équation (III-02) dans (III-01) on obtient:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{\sigma\tau_s} x_1 + \frac{M}{\sigma\tau_s L_r} x_3 + \omega_s \cdot x_2 + V_{sd} \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{\sigma\tau_s} x_2 + \frac{M}{\sigma\tau_s L_r} x_4 - \omega_s \cdot x_1 + V_{sq} \\ \dot{x}_3 = \frac{M}{\sigma L_s \tau_r} x_1 - \frac{1}{\sigma\tau_r} x_3 - P x_5 \cdot x_4 + \omega_s x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{M}{\sigma L_s \tau_r} x_2 - \frac{1}{\sigma\tau_r} x_4 - \omega_s x_3 + P x_5 \cdot x_3 \\ \dot{x}_5 = -\frac{P}{J} \frac{M}{\sigma L_s L_r} x_4 x_1 + \frac{P}{J} \frac{M}{\sigma L_s L_r} x_3 x_2 - \frac{B}{J} \cdot x_5 \end{cases}$$

Avec :

$\tau_s = \frac{L_s}{R_s}$  : Constante de temps statorique.

$\tau_r = \frac{L_r}{R_r}$  : Constante de temps rotorique.

$B = f_r + f$  : Une constante positive.

Sous la forme matricielle on a :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (III.03)$$

Avec :

$$f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma\tau_s} x_1 + \frac{M}{\sigma\tau_s L_r} x_3 \\ -\frac{1}{\sigma\tau_s} x_2 + \frac{M}{\sigma\tau_s L_r} x_4 \\ \frac{M}{\sigma\tau_r L_s} x_1 - \frac{1}{\sigma\tau_r} x_3 - P x_5 x_4 \\ \frac{M}{\sigma\tau_r L_s} x_2 - \frac{1}{\sigma\tau_r} x_4 + P x_5 \cdot x_3 \\ \frac{PM}{\sigma J L_s L_r} x_3 x_2 - \frac{PM}{\sigma J L_s L_r} x_4 x_1 - \frac{B}{J} \cdot x_5 \end{bmatrix} ; \quad g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & -x_1 \\ 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^3 \quad \text{Et : } u = \begin{bmatrix} V_{sd} \\ V_{sq} \\ \omega_s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

### III.2.4 La fonction énergétique de la machine à induction :

Pour décrire le modèle dynamique de la MAI sous forme hamiltonienne à ports (PH), il faut une expression en terme d'échange d'énergie, cette approche permet de décrire naturellement la structure physique et les propriétés fondamentales de la MAI (lois de conservation, termes de dissipation...) [50].

L'énergie de la MAI est la somme de : l'énergie magnétique emmagasinée dans les bobines plus l'énergie cinétique de rotation du rotor, donc la fonction énergétique  $H(x)$  s'exprime par :

$$H(x) = \frac{1}{2} [\emptyset]^T \cdot L^{-1} \cdot [\emptyset] + \frac{1}{2} J \Omega^2$$

Le gradient de la fonction énergétique  $H(x)$  suivant le vecteur d'état  $x$  est :

$$\frac{\partial H(x)}{\partial x} = \left[ \frac{\partial H(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial H(x)}{\partial x_2} \quad \frac{\partial H(x)}{\partial x_3} \quad \frac{\partial H(x)}{\partial x_4} \quad \frac{\partial H(x)}{\partial x_5} \right]^T = L^{-1} x_1 + L^{-1} x_2 + L^{-1} x_3 + L^{-1} x_4 + J \Omega$$

$$\frac{\partial H(x)}{\partial x} = L^{-1} \cdot [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T + J \Omega = L^{-1} [\emptyset] + J \Omega$$

Comme :  $L^{-1} \cdot [\emptyset] = [I]$ , alors :  $\frac{\partial H(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} [I] \\ J \Omega \end{bmatrix}$ .

Avec :  $\frac{\partial H(x)}{\partial x_1} = I_{sd}$  ;  $\frac{\partial H(x)}{\partial x_2} = I_{sq}$  ;  $\frac{\partial H(x)}{\partial x_3} = I_{rd}$  ;  $\frac{\partial H(x)}{\partial x_4} = I_{rq}$  ;  $\frac{\partial H(x)}{\partial x_5} = J \Omega$

### III.2.5 Forme Hamiltonienne à port (PH) de la MAI :

En plus des hypothèses citées ci-dessus, on définit la sortie mesurée du système comme étant les courants statorique  $y = [I_{sd} \quad I_{sq} \quad 0]^T \in \mathbb{R}^3$ , où la troisième ligne du vecteur de sortie est utilisée pour maintenir le cadre mathématique de la passivité ( $u^T(t) \cdot y(t) = \text{la puissance instantanée}$ ).

Ainsi, la modélisation sous forme PH des équations électrique (III.01) du moteur à induction est déterminée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -R_s \cdot I_{sd} + \omega_s \cdot x_2 + V_{sd} \\ \dot{x}_2 = -R_s \cdot I_{sq} - \omega_s \cdot x_1 + V_{sq} \\ \dot{x}_3 = -R_r \cdot I_{rd} - P x_4 \cdot \Omega + \omega_s x_4 \\ \dot{x}_4 = -R_r \cdot I_{rq} + P x_3 \cdot \Omega - \omega_s x_3 \\ \dot{x}_5 = \frac{P}{J} x_4 \cdot I_{rd} - \frac{P}{J} x_3 \cdot I_{rq} - \frac{B}{J} \cdot x_5 \end{cases} \quad \text{Et : } y = \begin{bmatrix} I_{sd} \\ I_{sq} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.04})$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_r & 0 & -\frac{P}{J} x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -R_r & \frac{P}{J} x_3 \\ 0 & 0 & \frac{P}{J} x_4 & -\frac{P}{J} x_3 & -\frac{B}{J^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{sd} \\ I_{sq} \\ I_{rd} \\ I_{rq} \\ J \Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & -x_1 \\ 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{sd} \\ V_{sq} \\ \omega_s \end{bmatrix}$$

$$\text{Et : } y = \begin{bmatrix} I_{sd} \\ I_{sq} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & -x_1 & x_4 & -x_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{sd} \\ I_{sq} \\ I_{rd} \\ I_{rq} \\ J\Omega \end{bmatrix} = g^T(x) \cdot \frac{\partial H(x)}{\partial x}$$

**Remarque :**

La troisième ligne du vecteur  $y$  est nulle car :  $x_2 \cdot I_{sd} - x_1 \cdot I_{sq} + x_4 \cdot I_{rd} - x_3 \cdot I_{rq} = (\Phi_{sq} I_{sd} - \Phi_{sd} I_{sq}) + (\Phi_{rq} I_{rd} - \Phi_{rd} I_{rq}) = 0$  (Chapitre I définition I.1.5.3.).

Finalement, le moteur à induction est représenté sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = [J(x) - \mathcal{R}(x)] \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x) \cdot u \\ y = g^T(x) \cdot \frac{\partial H(x)}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{III.05})$$

Où :

$$J(x) = -J(x)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{P}{J}x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{P}{J}x_3 \\ 0 & 0 & \frac{P}{J}x_4 & -\frac{P}{J}x_3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 x \mathbb{R}^5 : \text{Matrice d'interconnexion naturelle.}$$

$$\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(x)^T = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{B}{J^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 x \mathbb{R}^5 : \text{Matrice d'amortissement positive.}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & -x_1 \\ 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 x \mathbb{R}^3 : \text{Matrice d'entrée.}$$

$$\text{d'où : } g^\perp(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m-n=2} x \mathbb{R}^5 : \text{matrice orthogonale de } g(x).$$

**III.3. Commande par passivité de la machine à induction :****III.3.1 Application de la technique IDA-PBC :**

La commande basée sur la passivité à assignement et d'interconnexion (IDA-PBC) du MAI consiste à modifier l'énergie interne de la machine par un retour d'état  $u = \beta(x)$  tel que :

$$g(x)\beta(x) = [J_d(x) - \mathcal{R}_d(x)] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} - [J(x) - \mathcal{R}(x)] \cdot \frac{\partial H(x)}{\partial x} \quad (\text{III.06})$$

Avec de nouvelles matrices d'interconnexion et d'amortissement  $\mathcal{J}_d(x)$  et  $\mathcal{R}_d(x)$  et une fonction énergétique désirée  $H_d$ , de sorte que :  $\dot{x} = [\mathcal{J}_d(x) - \mathcal{R}_d(x)] \cdot \frac{\partial H_d}{\partial x}(x)$ .

Donc l'EDP (III.05) s'écrit comme suite :

$$g^\perp(x)(\mathcal{J}(x) - \mathcal{R}(x)) \cdot \frac{\partial H}{\partial x}(x) = g^\perp(x)(\mathcal{J}_d(x) - \mathcal{R}_d(x)) \cdot \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) \quad (III.07)$$

En utilisant la technique IDA paramétré, avec un choix de  $\mathcal{J}_d(x)$ ,  $\mathcal{R}_d(x)$  du type :  $\mathcal{J}_d(x) = \mathcal{J}(x)$  et  $\mathcal{R}_d(x) = \mathcal{R}(x)$  ; l'EDP (III.07) s'écrit :

$$g^\perp(x)(\mathcal{J}(x) - \mathcal{R}(x)) \cdot \frac{\partial H_c}{\partial x}(x) = 0 \quad (III.08)$$

Où :

$H_c$  : l'énergie façonnée par le contrôleur en boucle fermée afin d'assigner l'état d'équilibre désiré :  $x_* = \operatorname{argmin} H_d(x)$  a stabiliser.

A partir de l'EDP (III.08), on obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} x_3 \frac{\partial H_c}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial H_c}{\partial x_4} = 0 \\ x_4 \frac{\partial H_c}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial H_c}{\partial x_4} - \frac{B}{PJ} \frac{\partial H_c}{\partial x_5} = 0 \end{cases}$$

Pour la résolution des deux équations aux dérivées partielles, on applique le principe de séparation des variables :

Pour la première équation :

$$\text{Soit : } H_c(x_3, x_4) = F(x_3) \cdot P(x_4) \Rightarrow \frac{\partial H_c}{\partial x_3} = \frac{dF(x_3)}{dx_3} \cdot P(x_4) ; \frac{\partial H_c}{\partial x_4} = \frac{dP(x_4)}{dx_4} \cdot F(x_3)$$

$$\Rightarrow x_3 \frac{\partial H_c}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial H_c}{\partial x_4} = x_3 \frac{dF(x_3)}{dx_3} \cdot P(x_4) + x_4 \frac{dP(x_4)}{dx_4} \cdot F(x_3) = 0 \text{ divisons par } H_c(x_3, x_4) \text{ on obtient :}$$

$$\frac{x_3}{dx_3} \frac{dF(x_3)}{F(x_3)} + \frac{x_4}{dx_4} \frac{dP(x_4)}{P(x_4)} = 0 \Rightarrow \frac{x_3}{dx_3} \frac{dF(x_3)}{F(x_3)} = N \text{ et } \frac{x_4}{dx_4} \frac{dP(x_4)}{P(x_4)} = -N ; N : \text{une constante réelle.}$$

$$\text{Alors : } \frac{dF(x_3)}{F(x_3)} = \frac{dx_3}{x_3} N \text{ par intégration on aura : } F(x_3) = C_1 \cdot x_3^N \text{ où : } C_1 \text{ la constante d'intégration.}$$

$$\text{De même on aura : } P(x_4) = C_2 \cdot x_4^{-N} ; C_2 \text{ constante d'intégration.}$$

$$\text{Finalement : } H_c(x_3, x_4) = F(x_3) \cdot P(x_4) = C_1 C_2 \left(\frac{x_3}{x_4}\right)^N \text{ soit : } C = C_1 C_2 \text{ d'où : } H_c(x_3, x_4) = C \left(\frac{x_3}{x_4}\right)^N .$$

$$\text{Pour : } C = N = 1 \Rightarrow H_{c1}(x_3, x_4) = \frac{x_3}{x_4} = z$$

$$\text{Avec : } \frac{\partial z}{\partial x_3} = \frac{1}{x_4} ; \frac{\partial z}{\partial x_4} = -\frac{x_3}{x_4^2}$$

Pour la deuxième équation :

$$x_4 \frac{\partial H_c}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial H_c}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_4} = \frac{B}{PJ} \frac{\partial H_c}{\partial x_5} \Rightarrow x_4 \frac{\partial H_c}{\partial z} \frac{1}{x_4} + x_3 \frac{\partial H_c}{\partial z} \frac{x_3}{x_4^2} = \frac{B}{PJ} \frac{\partial H_c}{\partial x_5} \Rightarrow \frac{\partial H_c}{\partial z} + \frac{\partial H_c}{\partial z} \left(\frac{x_3}{x_4}\right)^2 = \frac{B}{PJ} \frac{\partial H_c}{\partial x_5}$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial H_c}{\partial z} + \frac{\partial H_c}{\partial z} \left( \frac{x_3}{x_4} \right)^2 &= \frac{B}{PJ} \frac{\partial H_c}{\partial x_5} \Rightarrow \frac{\partial H_c}{\partial z} \left( 1 + \left( \frac{x_3}{x_4} \right)^2 \right) = \frac{B}{PJ} \frac{\partial H_c}{\partial x_5} \Rightarrow \frac{dH_c}{dz} \left( 1 + \left( \frac{x_3}{x_4} \right)^2 \right) = \frac{B}{PJ} \frac{dH_c}{dx_5} \Rightarrow \\ dx_5 &= \frac{B}{PJ} \frac{dz}{(1+z^2)}. \end{aligned}$$

Par intégration on obtient :  $x_5 = \frac{B}{PJ} \arctg(z) + M$ .

Avec  $M$  : constante d'intégration.

Alors :  $H_{c2}(x_3, x_4, x_5) = f(M) = -\frac{B}{PJ} \arctg\left(\frac{x_3}{x_4}\right) + x_5$

Finalemnt :

Puisque  $x_1$  et  $x_2$  sont indépendants on peut écrire :

$$\begin{cases} \frac{dH_c}{dx_1} = K_1 \Rightarrow dH_c = K_1 dx_1 \Rightarrow H_{c3}(x_1) = K_1 x_1 \\ \frac{dH_c}{dx_2} = K_2 \Rightarrow dH_c = K_2 dx_2 \Rightarrow H_{c4}(x_2) = K_2 x_2 \end{cases} ; (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$$

Avec une solution générale  $H_c(x)$  de l'EDP (III.07) du type :

$$H_c(x) = H_{c3}(x_1) + H_{c4}(x_2) + H_{c2}(x_3, x_4, x_5) = K_1 x_1 + K_2 x_2 - \frac{B}{PJ} \arctg\left(\frac{x_3}{x_4}\right) + x_5$$

### III.3.2 Commande de la vitesse de rotation de la MAI :

On doit sélectionner une fonction énergétique  $H_c(x)$  souhaitable afin d'assigner le point d'équilibre désiré  $x^*$  pendant un moment transitoire tolérable.

Puisque l'objectif de ce contrôleur est le réglage de la vitesse mécanique angulaire  $x_5^* = \Omega^*$ , alors la fonction d'énergie appliquée est choisie de sorte que :

$$H_c(x) = K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 \left[ -\frac{B}{PJ} \arctg\left(\frac{x_3}{x_4}\right) + x_5 \right]$$

Avec :  $K_3 \in \mathbb{R}$  un gain d'ajustement.

#### Condition et point d'équilibre :

Le point d'équilibre  $x^* = [x_1^* \ x_2^* \ x_3^* \ x_4^* \ x_5^*]^T$  en boucle fermée doit avoir une dynamique nulle :  $\left. \frac{\partial H(x)}{\partial x} + \frac{\partial H_c(x)}{\partial x} \right|_{x=x^*} = 0$ .

Or:

$$\frac{\partial H(x)}{\partial x} = \left[ \frac{\partial H(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial H(x)}{\partial x_2} \quad \frac{\partial H(x)}{\partial x_3} \quad \frac{\partial H(x)}{\partial x_4} \quad \frac{\partial H(x)}{\partial x_5} \right]^T = L^{-1} \cdot [\emptyset] + J\Omega$$

$$\frac{\partial H(x)}{\partial x} = \left[ \frac{1}{\sigma L_s} x_1 - \frac{M}{\sigma L_s L_r} x_3 \quad \frac{1}{\sigma L_s} x_2 - \frac{M}{\sigma L_s L_r} x_4 \quad \frac{1}{\sigma L_r} x_3 - \frac{M}{\sigma L_s L_r} x_1 \quad \frac{1}{\sigma L_r} x_4 - \frac{M}{\sigma L_s L_r} x_2 \quad Jx_5 \right]^T$$

Et :

$$\frac{\partial H_c(x)}{\partial x} = \left[ \frac{\partial H(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial H(x)}{\partial x_2} \quad \frac{\partial H(x)}{\partial x_3} \quad \frac{\partial H(x)}{\partial x_4} \quad \frac{\partial H(x)}{\partial x_5} \right]^T = \left[ K_1 \quad K_2 \quad -K_3 \frac{B}{PJ} \frac{x_4}{x_3^2 + x_4^2} \quad K_3 \frac{B}{PJ} \frac{x_3}{x_3^2 + x_4^2} \quad K_3 \right]^T$$

$$\text{Donc : } \left. \frac{\partial H(x)}{\partial x} + \frac{\partial H_c(x)}{\partial x} \right|_{x=x^*} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sigma L_s} x_1^* - \frac{M}{\sigma L_s L_r} x_3^* + K_1 = 0 \\ \frac{1}{\sigma L_s} x_2^* - \frac{M}{\sigma L_s L_r} x_4^* + K_2 = 0 \\ \frac{1}{\sigma L_r} x_3^* - \frac{M}{\sigma L_s L_r} x_1^* - K_3 \frac{B}{PJ} \frac{x_4^*}{x_3^{*2} + x_4^{*2}} = 0 \\ \frac{1}{\sigma L_r} x_4^* - \frac{M}{\sigma L_s L_r} x_2^* + K_3 \frac{B}{PJ} \frac{x_3^*}{x_3^{*2} + x_4^{*2}} = 0 \\ Jx_5^* + K_3 = 0 \end{cases}$$

La solution générale du point d'équilibre  $x^*$  est déterminée par la résolution des 05 équations.

De la 05<sup>ème</sup> équation, on déduit que :  $x_5^* = -\frac{K_3}{J} = \Omega^*$  un point d'équilibre unique, ce qui valide que

le contrôleur est un régulateur de vitesse pour le MAI.

Pour les autres variables d'état on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma L_s} x_1^* - \frac{M}{\sigma L_s L_r} x_3^* + K_1 = 0 \\ \frac{1}{\sigma L_s} x_2^* - \frac{M}{\sigma L_s L_r} x_4^* + K_2 = 0 \\ \frac{1}{\sigma L_r} x_3^* - \frac{M}{\sigma L_s L_r} x_1^* - K_3 \frac{B}{PJ} \frac{x_4^*}{x_3^{*2} + x_4^{*2}} = 0 \\ \frac{1}{\sigma L_r} x_4^* - \frac{M}{\sigma L_s L_r} x_2^* + K_3 \frac{B}{PJ} \frac{x_3^*}{x_3^{*2} + x_4^{*2}} = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$x_1^* = \frac{2K_3B}{\rho} \left\{ K_3 L_r B (K_2^2 - K_1^2) + K_1 K_2 C \right\} - \frac{L_s L_r - M^2}{L_r} K_1$$

$$x_2^* = -L_s K_2 - \frac{2L_r K_1 K_3 B - K_2 [M^2 (K_1^2 + K_2^2) + C]}{2L_r (K_1^2 + K_2^2)}$$

$$x_3^* = \frac{2K_3 L_r B}{M\rho} \left\{ K_3 L_r B (K_2^2 - K_1^2) + K_1 K_2 C \right\}$$

$$x_4^* = -\frac{2L_r K_1 K_3 B + K_2 [M^2 (K_1^2 + K_2^2) - C]}{2M (K_1^2 + K_2^2)}$$

$$x_5^* = -\frac{K_3}{J}$$

Avec :

$$C = \pm \sqrt{(K_1^2 + K_2^2)^2 M^4 - 4L_r^2 K_3^2 B^2} ; \quad \rho = (K_1^2 + K_2^2) \{ 2K_2 K_3 L_r B + K_1 [M^2 (K_1^2 + K_2^2) + C] \}$$

- Si :  $(K_1^2 + K_2^2) M^2 = 2L_r K_3 B$ , le système converge vers un seul point d'équilibre.
- Si :  $(K_1^2 + K_2^2) M^2 > 2L_r K_3 B$ , le système admet deux points d'équilibre.
- Pour :  $(K_1^2 + K_2^2) M^2 < 2L_r K_3 B$ , le système diverge.

**Application numérique:**

Avec des paramètres utilisés du moteur indiqués en annexe et un choix des gains tel que :

$$K_1 = -0.05 ; K_2 = -15 ; K_3 = -1.1 ; C = -42.205 ;$$

le point d'équilibre est défini par :

$$x^* = \left( x_1^* = 0.025 \quad x_2^* = 7.4861 \quad x_3^* = 0.02173 \quad x_4^* = 6.4961 \quad x_5^* = 314.28 \frac{rd}{s} \right)$$

**III.3.3 La lois de commande :**

La loi de commande de la vitesse de rotation du MAI qui doit être appliqué est déterminée soit à

partir de l'équation (III.06) ou bien par :  $\dot{x} = f(x) + g(x)\beta(x) = [J_d(x) - \mathcal{R}_d(x)] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x}$

$$\text{Comme : } J_d(x) - \mathcal{R}_d(x) = J(x) - \mathcal{R}(x) \Rightarrow \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} = \frac{\partial H(x)}{\partial x} + \frac{\partial H_c(x)}{\partial x}$$

Alors :

$$\beta(x) = [g^T(x).g(x)]^{-1}.g^T(x) \times \left\{ [J(x) - \mathcal{R}(x)] \left( \frac{\partial H(x)}{\partial x} + \frac{\partial H_c(x)}{\partial x} \right) - f(x) \right\}$$

D'après (III.03) on a :

$$f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma\tau_s}x_1 + \frac{M}{\sigma\tau_s L_r}x_3 \\ -\frac{1}{\sigma\tau_s}x_2 + \frac{M}{\sigma\tau_s L_r}x_4 \\ \frac{M}{\sigma\tau_r L_s}x_1 - \frac{1}{\sigma\tau_r}x_3 - Px_5x_4 \\ \frac{M}{\sigma\tau_r L_s}x_2 - \frac{1}{\sigma\tau_r}x_4 + Px_5 \cdot x_3 \\ \frac{PM}{\sigma J L_s L_r}x_3x_2 - \frac{PM}{\sigma J L_s L_r}x_4x_1 - \frac{B}{J} \cdot x_5 \end{bmatrix} ; \quad g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & -x_1 \\ 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \beta(x) = \begin{bmatrix} V_{sd} \\ V_{sq} \\ \omega_s \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{cases} V_{sd} = -K_1 R_s - x_2 \omega_s \\ V_{sq} = -K_2 R_s + x_1 \omega_s \\ \omega_s = K_3 R_r \frac{B}{PJ} \frac{1}{x_3^2 + x_4^2} - K_3 \frac{P}{J} \end{cases}$$

Ce qui implique une loi de commande du type :

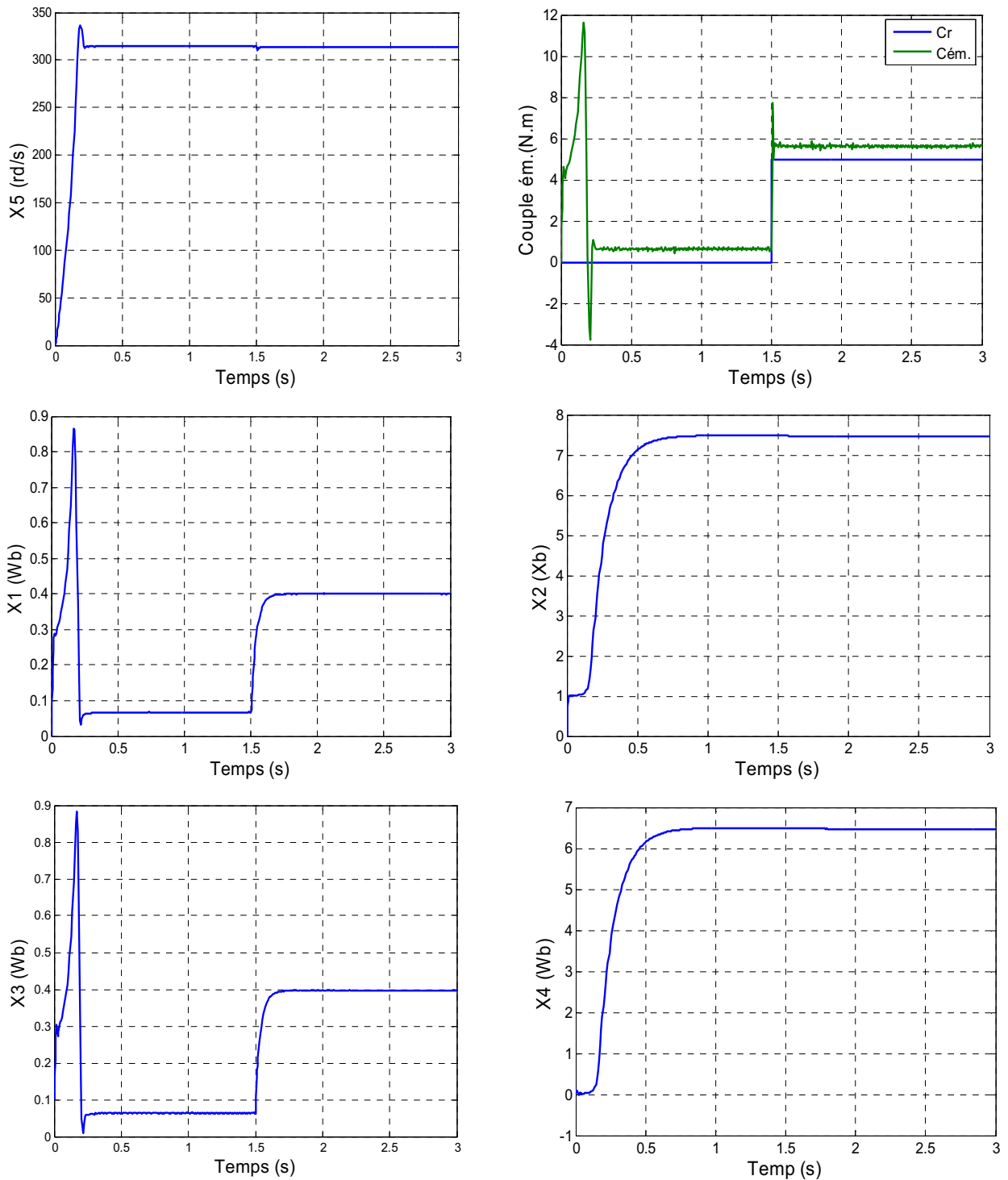
$$\begin{cases} V_{sd} = -K_1 R_s + K_3 \frac{P}{J} x_2 - K_3 \frac{BR_r}{PJ} \frac{x_2}{x_3^2 + x_4^2} \\ V_{sq} = -K_2 R_s - K_3 \frac{P}{J} x_1 + K_3 \frac{BR_r}{PJ} \frac{x_1}{x_3^2 + x_4^2} \\ \omega_s = K_3 R_r \frac{B}{PJ} \frac{1}{x_3^2 + x_4^2} - K_3 \frac{P}{J} \end{cases}$$

### III.4 Résultats de simulation et interprétation :

Le comportement globale du moteur à induction est simulé en utilisant *MATLAB* et *Simulink*, le contrôleur d'IDA-PBC est et mis en application de sorte que les résultats soient plus près du système réel figure III.01.

Les paramètres utilisés du moteur à induction sont indiqués en annexe.

Les gains du contrôleur sont choisis comme suite :  $K_1 = -0.05$  ;  $K_2 = -15$  ;  $K_3 = -1.1$ .



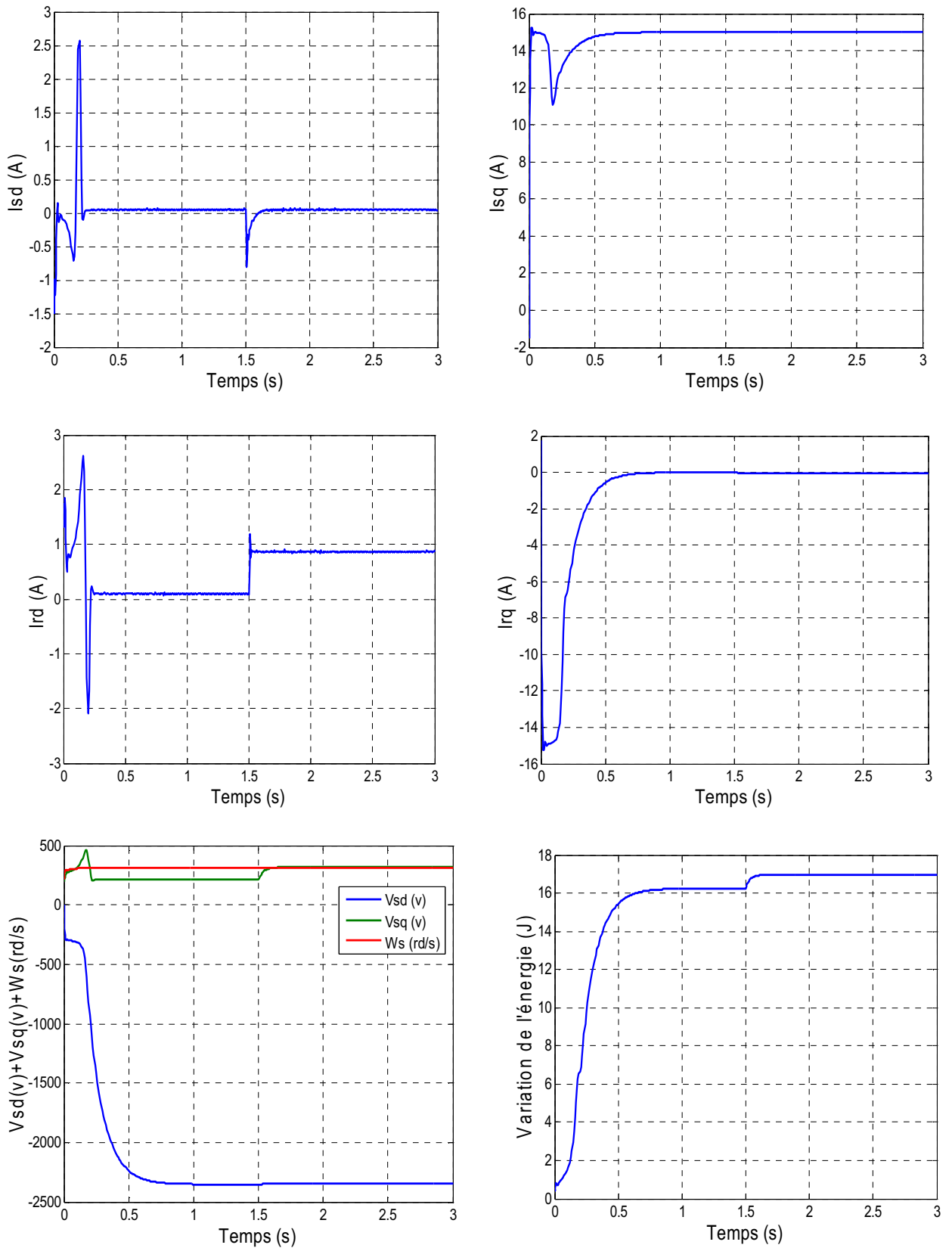


Figure III.01 : Résultats de simulation de la commande passive (cas d'IDA-PBC) du moteur à induction.

**Discussion :**

- Les résultats de simulation montrent qu'après un régime transitoire ( $t_r \cong 0.5s$ ), l'état converge vers le point d'équilibre  $x^*$  lorsque le temps tend vers l'infinie.
- Pour une variation de la résistance statorique ( $R_s + 10\%.R_s$ ) aucun effet n'est apparu sur le changement de la vitesse de rotation ou du couple.
- Après un temps ( $t = 1.5s$ ) un couple de charge est appliqué à la machine mais la robustesse du contrôleur IDA-PBC a permis une adaptation adéquate du processus tout en gardant le point d'équilibre inchangé.

**III.4 Conclusion :**

L'objectif de ce chapitre a été l'application de la commande passive sur le moteur à induction en se référant à la modélisation du moteur sous forme hamiltonienne en boucle fermée par une approche énergétique dite passive.

Spécifiquement, pour assigner un état désiré on fait appel à la technique d'IDA-PBC qui consiste à modifier l'énergie interne par un retour d'état avec injection d'amortissement afin d'accélérer le processus de convergence.

Donc on a proposé des lois de commandes robustes fondées sur une démarche théorique cohérente, mais en même temps qui peuvent être facilement implantées et validées expérimentalement avec du matériel disponible dans un environnement industriel.

Cette méthodologie ajoute des actions " dérivées " dans la commande qui rapporte naturellement des réponses plus rapides.

En plus, elle est robuste et fournit de meilleurs résultats vu que le modèle considéré est multi-variables, non-linéaire et fortement couplé surtout pour les systèmes électrotechniques.

**Conclusion générale**

## Conclusion générale

C'est l'intérêt d'élaborer des méthodes génériques qui permet de rendre l'étude des systèmes non linéaire systématique qui nous a poussé à explorer la discipline de la passivité présentant ce modeste travail.

En matière de régulation des moteurs à induction a impulsé des travaux de recherche sur la technique de commande par passivité du modèle comme étant multi-variable, non linéaire et fortement couplé.

Ainsi, la passive est présentée comme une nouvelle méthode de synthèse de lois de commande asymptotiquement stabilisantes et adaptatives pour ces systèmes, elle permet de concevoir un contrôleur robuste stabilisant les modèles non linéaire.

C'est une approche basée sur des considérations énergétique des modèles physiques réelle.

La démarche suivie a conduit à un aperçu sur les notions de base de la théorie de la passivité ainsi que les étapes concernant le choix d'une description appropriée de ces systèmes et des variable d'état ce qui nous a permet d'adopter les modèles Hamiltoniens à port qui définissent la structure d'interconnexion relié aux échanges de l'énergie en exploitant leurs propriétés structurales et avoir une interprétation physique claire en termes d'interconnexions du système avec son environnement.

L'objectif de ce mémoire est l'étude par simulation de la commande passive sur les systèmes électrotechnique avec une application sur le moteur dit asynchrone pour définir les avantages requis par rapport aux autres commandes définies dans le premier chapitre.

Notre premier but est la détermination du modèle Hamiltonien de la machine qui fait intervenir la notion d'énergie du système.

Après cette étape la détermination de la loi de commande répondant au cahier de charge est essentielle tout en montant la stabilité globale du moteur.

Les résultats de simulation obtenus témoignent sur l'efficacité de cette approche.

Enfin on peut conclure que l'objectif de cette étude est atteint vu la proposition de la commande passive comme une technique moderne systématique pour la commande des systèmes non linéaire.

### **Avantages de la commande passive :**

- La passivité assure la préservation de la structure Hamiltonienne, avec pour fonction de stockage de bilan énergétique ; d'après les résultats obtenus sur le moteur à induction elle stabilise facilement les systèmes non linéaire.



- La PBC dispose d'une robustesse vis-à-vis des effets dissipatifs non modélisés et exhibe des performances robustes dues à son optimalité inverse.
- La commande par passivité génère une robustesse du contrôleur contre les incertitudes paramétriques.
- Un dernier avantage de la commande par passivité est le fait qu'elle est systématique et que le contrôleur peut être facilement synthétisé en utilisant le calcul symbolique.

Plusieurs applications de cette méthode à une large classe des systèmes physiques peuvent être élaborées (mécanique, électromécanique, électromagnétique ...) et d'œuvrer dans plusieurs domaines tels que l'électrotechnique (électronique de puissance, moteurs), l'automatique (contrôle des systèmes), et les systèmes embarqués et temps réel.

Il y a beaucoup de prolongements et améliorations possibles à la théorie que nous avons présenté pour la recherche de solutions visant la commande des systèmes physique.

# Bibliographie

## BIBLIOGRAPHIE (Chapitre I)

- [1] A.Baba, “*Optimisation du flux dans la machine à induction par une commande vectorielle : Minimisation des pertes*“, Thèse de Doctorat de l’Université Pierre & Marie curie (Paris VI), spécialité : Génie électrique, France, Janvier 1997.
- [2] Gay Grellet, Guy Clerc, “*Actionneurs Electriques -principe modèles commande-*“, pp.46-47, France, Novembre 1999.
- [3] J. Lesenne , F.Notelet et G.Seguirer, “*Introduction à l’électrotechnique approfondie*“, N°4609, p.64, France, Décembre 1980.
- [4] F. Marlait , “*Problème d’identification et d’observabilité du moteur à induction pour la variation de vitesse industrielle sans capteur*“, France, Février 2001.
- [5] Xing Yu, Matthew W. Dunnigan, and W.Williams , “*A novel rotor resistance identification method for indirect rotor flux oriented controlled induction machine system*“, IEEE Trans. On power electronics, vol.17, N°03, pp.353-364. May 2002.
- [6] L. Baghli, “*Contribution à la commande de la machine asynchrone, utilisation de la logique flou, des réseaux neurones et des algorithmes génétiques*“, Thèse de Doctorat de l’université Henri Poincar (Nancy1), France, Janvier 1999.
- [7] K. Yazid, “*Commande vectorielle avec prise en compte des variations de la constante de temps rotorique*“, Thèse de Magistère, USTHB, Algérie, 1996.
- [8] Lajoie-Mazence, “*Les techniques de commande vectorielle des machines asynchrones destinées à la variation de vitesse à haute performance*“, EDF -direction des études et recherche-, 92 NI R 0002, pp 1-35. France, janvier 1992.
- [9] M. Pietrazak-David et B.Fornel, “*Comparaison et synthèse des procédés de commande vectorielle*“, journée SEE, Lille, France, 1992.
- [10] M. Ouadghiri, " *Contribution à la commande vectorielle des moteurs asynchrones alimentés par un onduleur de tension: comparaison des méthodes d’estimation du flux rotorique et de la vitesse* ", Thèse de doctorat en sciences appliquées, faculté polytechnique de Mons, Jan. 1995.
- [11] M. Pietrazak-David et B.Fornel, “*Comparaison et synthèse des procédés de commande vectorielle*“, journée SEE, Lille, France, 1992.
- [12] G.A. CAPOLINO, H.HENAO. “*Sliding mode position control of induction machine: discrete case* “. Proceedings EPE, EPE Firenze, Vol.03,p.521-526, Florence, Italie 1991.
- [13] V.A. Utkin, “*Equations of sliding mode control in discontinuous systems*“, Automation and Remote Control, Vol.1, N° 12, pp 1897-1907, 1971.

- [14] A. Benchaib, R.Ahmed, A.Eric, M.Tadjine, “ *Real-Time sliding-mode observer and control of an induction Motor* “, IEEE Transactions on industrial electronics, Vol.46, N°01, pp.128-138 February 1999.
- [15] C. Attainese, A.Damiano, I. Marongiu and A. Perfetto, “*Robust model reference control of induction motor drive* “, PEMC, pp.1102-1107, 20-22 September 1994 (Warsaw-Poland).
- [16] H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft, *Nonlinear dynamical control systems*, Springer-Verlag, ISBN-387-97234-X, Berlin 1990.

## BIBLIOGRAPHIE (Chapitre II)

- [17] M. Takegaki, S. ARIMOTO, “*A new feedback method for dynamic control of manipulators*”, ASME J. Dyn. Syst. Meas. Cont., vol. 102, pp. 119-125, 1981.
- [18] E. Jonckheere, “*Lagrangian theory of large scale systems*”, in Proc. European Conf. Circuit Th. and Design, The Hague, , pp. 626-629. The Netherlands, 1981
- [19] J.J. Slotine, “*Putting physics in control—the example of robotics,*” IEEE Contr. Syst. Mag., vol.8, pp. 12-17, Décembre 1988.
- [20] N. Hogan, “*Impedance control: An approach to manipulation: Part 1—Theory,*”ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr., vol. 107, pp 1-7, Mar. 1985.
- [21] R. Ortega and M. Spong, “*Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial,*”Automatica, vol.25, no. 6, pp. 877-888, 1989.
- [22] J.L. Wyatt, JR., L.O. Chua, J.W. Gannett, I.C. Göknar, D.N. Green, « *Energy concepts in the state-space theory of nonlinear n-ports : part I-Passivity* », IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-28, No. 1, 1981.
- [23] J.L. Wyatt, JR., L.O. Chua, J.W. Gannett, I.C. Göknar, D.N. Green, “ *Energy concepts in the state-space theory of nonlinear n-ports : part II-Losslessness* “, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-29, No. 7, 1982.
- [24] J.C. Willems, « *Dissipative dynamical systems. Part I : General theory* », Arch. Rational Mech. Anal., 45, 5, pp321-351, 1972.
- [25] R. Ortega, A.J. van der Schaft, and B. Maschke, “*Putting energy back in control,*” IEEE Control Syst. Mag., vol. 21, no. 2, pp.18–33, Apr. 2001.
- [26] R. Ortega, M.W. Spong, “*Adaptive motion control or rigid robots: a tutorial*”, Automatica, Vol.25, No. 6, pp. 877-888, 1989.
- [27] S.R. Sanders, G.C. Verghese: “*Lyapunov-Based Control for Switched Power Converters*”, PESC’90, pp 51-58. 1990.

- [28] R. Ortega, G. Espinosa, “*Torque regulation of induction motors*”, *Automatica*, Vol. 29, No. 3, pp.621-633, 1993.
- [29] H. Sira-Ramirez, R. Ortega, “*Passivity-Based Controllers for the Stabilization of DC to DC Power Converters*”, 34th Conference on Decision & Control, New Orleans; pp 3471-3476, December 1995.
- [30] R. Ortega, H. Sira-Ramirez, “*Lagrangian modeling and control of switch regulated DC to DC power converters*”, *Control using logic-based switching*, Springer-Verlag, 1996.
- [31] Philippe Mullhaupt, “*Introduction à l’analyse et à la commande des systèmes non linéaires*”, pp.114-120, Lausanne- Suisse, juin 2007.
- [32] K. Hassen Khalil., “*Nonlinear Systems*”, pp.227-262, Printice hall New jersey, Third Edition, pp.227-245, USA, 2002.
- [33] R. Ortega, A. J. van der Schaft, F. Castanos, and A. Astolfi, “*Control by interconnection and standard passivity-based control of port-Hamiltonian systems*”, *IEEE Trans. Autom. Control*, 53 (2008), pp. 2527 – 2542.
- [34] R. Ortega, H. Sira-Ramirez A. van der Schaft, B. Maschke, and G. Escobar, “*Interconnection and damping assignment passivity based control of port-controlled Hamiltonian systems*,” *Automatica* (submitted), 2002.
- [35] Byrnes, C. I., Isidori, A., and Willems, J. C., “*Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems*”. *IEEE Trans. Autom. Control* 36, 1228–1240. 1991.
- [36] M. Takegaki and S. Arimoto, “*A new feedback method for dynamic control of manipulators*,” *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Cont.*, vol. 102, pp. 119-125, 1981.
- [37] Jie. Bao, and Peter L.Lee, “*Process control, The passive systems Approach*”. Springer Edition. SBN-13:9781846288920, pp.:21-26, University of New South Wales, Australia, February 2007.
- [38] M. Dalsmo and A.J. van der Schaft, “*On representations and integrability of mathematical structures in energy-conserving physical systems*,” *SIAM J. Optim. Contr.*, vol. 37, no. 1, 1999.
- [39] M.C. Kim, S.K. Park, H.G. Ahn, and S.S. Yoon. “*Robust Passivity Based Control with Sliding Mode for DC-to-DC Converters*.” In *IEEE International Conference on Industrial Technology*, pages 1690–1693, 2006. 99, 114.
- [40] R. Ortega, A. Loria, P.J. Nicklasson, and H. Sira-Ramirez. “*Passivity-based control of Euler-Lagrange systems. Mechanical, electrical and electromechanical applications*.” Springer-Verlag, 1998. 98, 99, 104, 110, 114, 116, 125

- 
- [41] J. Marsden and T. Ratiu, “*Introduction to Mechanics and Symmetry*.” New York: Springer, USA, 1994.
- [42] A.J. Van der Schaft, “ *$\mathcal{L}_2$ -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*.” Berlin,: Springer-Verlag, Germany, 1999.
- [43] J. Marsden and T. Ratiu, “*Introduction to Mechanics and Symmetry*”. New-York: Springer, USA, 1994.
- [44] R. Ortega, A. van der Schaft, B. Maschke, and G. Escobar, “*Energy-shaping of port-controlled Hamiltonian systems by interconnection*”, in *Proc. IEEE Conf. Dec. and Control*, Phoenix, AZ, December. 1999.
- [45] Fujimoto K, Sugie T.” *Canonical transformations and stabilization of generalized Hamiltonian systems*”. *Syst Control Lett* 2001; 42(3): 217–227.
- [46] Ortega R, Spong M, Go´mez F, Blankenstein G.” *Stabilization of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment*”. *IEEE Trans Autom Control* 2002; 47(8): 1218–1233.
- [47] Maithripala DHS, Berg JM, Dayawansa WP. ”*Nonlinear dynamic output feedback stabilization of electrostatically actuated MEMS*”. *IEEE conference on decision and control*, Maui, Hawaii, USA, December 2003.
- [48] Romeo Ortega and Eloisa Garcia-Canseco “*Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based-Control: A Survey*”, *European Journal of Control*, EUCA 2004.
- [49] Jeltsema D, Ortega R, Scherpen J. “*An energy-balancing perspective of IDA-PBC of non linear systems*”. *Automatica* 2004; 40(9): 1643–1646.
- [50] Gonzalez H.& Al. “*A novel induction motor control scheme using IDA-PBC*”, *Journal control theory*, university of Chile, April 2008.

## Annexe

### ***Paramètres du moteur asynchrone (commande scalaire+CVOFR+commande à structure variable):***

$R_s = 1,2 \Omega$  : Résistance d'une phase statorique.

$L_s = 0,1554 H$  : Inductance propre d'une phase statorique.

$R_r = 1,8 \Omega$  : Résistance d'une phase rotorique.

$L_r = 0,1554 H$  : Inductance propre d'une phase rotorique.

$M = 0,15 H$  : Inductance mutuelle maximale entre le stator et le rotor.

$p = 2$  : Nombre de paires de pôles.

$J = 0,07 Kg.m^2$  : Moment d'inertie.

$f = 0,001$  : Coefficient de frottement.

### ***Paramètres du moteur à induction (commande passive):***

$R_s = 12,75 \Omega$  : Résistance d'une phase statorique.

$L_s = 0,4991 H$  : Inductance propre d'une phase statorique.

$R_r = 5,1498 \Omega$  : Résistance d'une phase rotorique.

$L_r = 0,4331 H$  : Inductance propre d'une phase rotorique.

$M = 0,4331 H$  : Inductance mutuelle maximale entre le stator et le rotor.

$p = 1$  : Nombre de paires de pôles.

$J = 0,0035 Kg.m^2$  : Moment d'inertie.

$f = 0,001$  : Coefficient de frottement.