

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE DE BATNA

FACULTE DES SCIENCE DE L'INGENIEUR

DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE



MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de **Magister**

Option : **Matériaux électrotechnique**

Présenté Par

MAMMERI Toufik

(Ingénieur d'Etat en Electrotechnique, Université de Batna)

Thème

Contribution à l'Etude Théorique d'un Four à induction

Soutenu le : 30/06/2012

Devant le jury composé de :

Président:	DRID Said	Professeur	Univ Batna
Rapporteur:	BENSALAH Abed-Djebar	M. Conf. -A -	Univ Batna
Examineur :	BETKA Achour	Professeur	Univ Biskra
Examineur :	BENDIB Samir	M. Conf. -A -	Univ Batna

Dédicace

A ma chère mère

A l'esprit de mon chère père

*A ma petite famille (ma femme, mes fille ikram et
manar)*

A mes chère frères et sœurs

A tout ce qui m'aime

Je dédié ce travail

Toufik

Remerciement

Je tien a remercier DR. Bensalah A.D;

Professeur Ben Aggoune Laid;

Mes enseignants durant toutes ma vie...

Mammeri. J

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	01
CHAPITRE I ETAT DE L'ART	
Introduction	03
Généralités sur les Fours	03
2. Rappel mathématique	06
2.1 Champs de scalaires, champs de vecteurs	06
2.2 Opérateurs relatifs aux champs	06
3. Induction magnétique	11
3.1 Origine physique	11
3.2 Compréhension du phénomène	12
3.3 Induction de Lorentz	12
3.4 Induction de Neumann	12
3.5 Lois de l'induction	12
3.6 Auto-induction	13
3.7 Applications de l'induction électromagnétique	13
4. Les équations de Maxwell	14
4.1 Équation de Maxwell-Gauss	14
4.2 Équation de Maxwell de conservation du flux (Équation de Maxwell-Thomson)	15
4.3 Équation de Maxwell-Faraday	16
4.4 Équation de Maxwell-Ampère	17
4.5 Équation de conservation de la charge	17
5. Courants de Foucault	19
5.1 Principe	19
5.2 Applications	19
6. Chauffage par induction	21
6. 1. Applications du chauffage par induction	22
6.1.1 Four à induction	22
6.1.2 Soudure d'induction	24
6.1.3 Cuisine d'induction	24
6.1.4 Cachetage d'induction	25
6.1.5 Chauffage à adapter	25
6.1.6 Traitement thermique	25

6.2 Propriétés du chauffage par induction	26
6.3 Avantages du chauffage par induction	27
6.4 Inconvénients du chauffage par induction	27
Conclusion	28

**CHAPITRE II PHENOMENE ELECTROMAGNETIQUE ET EQUATIONS
MATHEMATIQUE**

Introduction	29
1. Equations générales	29
2. Les ondes électromagnétiques	31
2.1. Equations de propagation en Electromagnétisme	31
2.1.1. Equation de propagation de \vec{A}	31
2.1.2. Equation de propagation de V	32
2.1.3. Equation de propagation de \vec{E}	32
2.1.4. Equation de propagation de \vec{B}	32
2.1.4. Equation de propagation de \vec{B}	33
2.2. L'onde électromagnétique dans le vide	34
2.3. L'onde électromagnétique dans un diélectrique	35
2.4. L'onde électromagnétique dans un conducteur	36
2.5. Energie des ondes électromagnétiques	36
2.6. Equations de Maxwell et approximation des états quasi-stationnaires	37
3. Formulation mathématique tridimensionnelle	37
4. Formulation Mathématique Bidimensionnelle	38
4.1 Décomposition en modes transverses	39
4.2 Les inconnues du problème	42
4.3 Les approximations standards	42
4.4. Les modèles électromagnétiques standards en symétrie axiale	44
4.5. Introduction du terme de courant source	44
5. Conditions de continuité aux interfaces	44
6. Application sur les fours a induction	46
6.1. Problème mathématique	46
6.2. Problème magnétothermique	42
6.2. 1. Modèle magnétothermique d'un four à induction de creuset	45

6.2. 1.1. Le problème de magnétodynamique	50
6.2.2. 2. Le problème thermique	51
6.2.2. 3. Couplage magnétothermique	52
6.2.3 Bilan de puissance	53
6.3. Les propriétés magnétothermique des matériaux	
Conclusion	

CHAPITRE III ONDULEUR AUTONOME

Introduction	54
1. Configuration du circuit de puissance avec la charge	54
2. Généralité sur l'onduleur de tension	55
3. Principe général de fonctionnement.....	56
3.1. Débit sur une résistance pure.....	56
3.2. Débit sur une charge RL	57
3.2.1 Régime transitoire	57
3.2.2 Régime Permanent	59
4. Onduleurs à résonance	62
5. Exemple d'une installation électrique de la commande d'un four à induction moyenne fréquence.	64
Conclusion.....	65

CHAPITRE IV MODELISATION ANALYTIQUE DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION

Introduction	66
1. Modélisation analytique du chauffage par induction	66
1. 1. Chauffage direct	66
1. 1. 1. Plaque conductrice.....	66
a) Calcul du champ magnétique à l'intérieur de la plaque \vec{H}	67
b) Calcul de la densité volumique des courants induits dans la plaque \vec{j} ...	69
c) Calcul des pertes par les courants de Foucault	69
1.1.2 Pièce conductrice sous forme cylindrique	72
a) Calcul du champ électique induit	72
b) Calcul du champ magnétique à l'intérieur de le cylindre \vec{H}	73
c) La puissance électromagnétique	73
d) Calcul du vecteur de Poyting	73

e) Calcul de la puissance électromagnétique	74
f) Calcul du courant	75
	75
g) calcul de l'impédance	77
h) Cas d'une pièce conductrice sous forme cylindrique creuse	78
2. Mise en œuvre du modèle analytique pour une plaque conductrice.....	78
2. 1. Pénétration du champ magnétique dans une plaque conductrice.....	
2.2 Pénétration de la densité volumique des courants induits dans une plaque	79
conductrice	80
2.3 Pertes dissipés part effet Joule dans la plaque	81
2.4. Épaisseur de pénétration	82
Conclusion	
CHAPITRE V CONCEPTION ET CALCUL D'UN FOUR A INDUCTION	
Introduction	83
1. Paramètres géométrique	83
2. Paramètres d'énergie thermique	84
3. Paramètres Électriques	85
4. Choix de la fréquence d'induction	89
5. Calcul d'un four a induction	90
5.1. Paramètres du fer	90
5.2. Comparaison entre les paramètres calculé et réelle	90
Conclusion	92
CONCLUSION GENERALE	
	93
REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE	
	95

INTRODUCTION

GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Dans l'industrie La fusion des métaux est une activité très importante. Les phénomènes électromagnétique a permet de crée une méthode de chauffage très efficace, il s'agit du chauffage par induction. La preuve en est les travaux de recherche industrielle et universitaire les effets électromagnétiques d'un champ inducteur sur du métal.

Le principe de base c'est; tout corps conducteur électrique soumis à l'influence d'un champ magnétique variable est le siège de courants induits. C'est le principe du chauffage par induction. Le chauffage par induction permet ainsi le traitement thermique des métaux (superficiel où à coeur). de nombreux traitements peuvent être assurés par cette technique: recuit localisé, trempe à coeur, trempe de barres au défilé, recuit de fils au défilé ...

Ce mode de chauffage se prête très bien aux traitements thermiques pour au moins deux raisons:[7]

- Il permet des transferts de chaleur à grande puissance et cela à l'intérieur même des pièces à chauffer;
- L'effet thermique peut être concentré à l'endroit voulu sans chauffer les autres parties de la pièce traitée;
- Le temps de chauffage est très court par rapport aux autres procédés de chauffage.

Ce chauffage sélectif et rapide combiné à un transfert efficace de l'énergie, fait du chauffage par induction une source substantielle d'économies d'énergie en traitement thermique.

Notre intérêt par ce modeste travail c'est de mettre les pieds dans le domaine de recherche sur le principe de chauffage par induction, et de simplifier plus la recherche pour autre chercheur dans ce domaine.

La présent mémoire est composé en cinq chapitres:

Le premier chapitre ce base sur l'état de l'art, des généralités sur les fours, et on donne quelque aspect mathématique et physique qui intéresse le chercheur dans le domaine d'électromagnétisme.

INTRODUCTION GENERALE

Pour étudier le chauffage par induction il faut ce basé sur des phénomènes bien précis, électrique, électromagnétique, thermique ...etc. dans le deuxième chapitre on va baser sur les phénomènes électromagnétique responsable du chauffage et de fonte des matériaux.

Ensuite, dans le troisième chapitre il faut donnée un petit intérêt au dispositif nécessaire pour généré des fréquences nécessaire pour une bonne efficacité du processus, c'est l'onduleur autonome à résonance (tellement que notre intérêt ce n'est pas d'étudier les phénomènes de l'électronique de puissance).

Dans le quatrième chapitre, on va donnée mis la main sur la modélisation analytique du processus de chauffage par induction, ce modèle nous permet de discuter quelque grandeurs responsable du chauffage, et de déterminer la plage d'utilisation pour chaque application (superficiel où à cœur).

Finalement, on présente une conception d'un four à induction et on donne une relation entre la géométrie d'un four à induction et quelques grandeurs physiques et paramètres de calcul,

CHAPITRE I
ETAT DE L'ART
(GENERALITES)

ETAT DE L'ART

Vu l'intérêt importante de l'aspect des chauffages et traitement des matériaux en domaine industrielle on va présenter dans ce chapitre des généralités sur les fours, et on donne quelque aspect mathématique et physique qui intéresse le chercheur dans le domaine d'électromagnétisme.

1. Généralités sur les Fours

Un four est une enceinte maçonnée ou un appareil, muni d'un système de chauffage puissant, qui transforme, par la chaleur les produits et les objets. En cuisine, il permet de cuire des aliments. Dans un processus de production d'objet, le four permet le traitement d'objets par la chaleur : poteries, céramiques, verres, métaux...

1.1. Principe des fours

Le principe de fonctionnement du four est simple: l'objet à traiter y est enfermé pour être soumis à sa chaleur interne. Cette chaleur provient d'une source de chaleur annexe aux parois internes du four. La chaleur à l'intérieur du four peut être répartie par circulation forcée d'air, par convection naturelle, par conduction thermique ou par rayonnement (infrarouge, micro-ondes).

La source d'énergie pour fournir la chaleur du four peut être :

- un combustible (bois, gaz naturel...);
- l'électricité dans des résistances;
- des micro-ondes, fours à induction avec l'électricité;
- le rayonnement solaire, (four solaire).

1.2. Four de cuisine

Le four est devenu progressivement un équipement ménager de plus en plus répandu qui est utilisé à l'intérieur de la maison pour la cuisine familiale. Les types de four les plus répandus sont le four au gaz et le four électrique. [18]

1.3. Fours de poterie

Les fours de poterie ont une conception différente des autres fours. Ils peuvent être des fours primitifs (fours enterrés par exemple), des fours à bois, ou des fours électriques ou à gaz.[18]

1.4. Fours à bois (céramique)

Les fours à bois furent les premiers fours utilisés pour la cuisson des céramiques. C'est à eux que l'on doit la production en Chine et au Japon des très beaux Céladon et autres céramiques de valeur.

Bien qu'ils puissent atteindre des températures suffisantes pour produire de la porcelaine, ils exigent cependant une grande maîtrise dans le choix du bois de chauffe, la préparation, la conduite et la surveillance de la cuisson [18].

1.5. Four à chaux

Le four à chaux ou chaufour est un four destiné à transformer le calcaire en chaux et où l'on cuit la céramique... sous l'action du feu. Ouvrage vertical fixe, en maçonnerie, ouvert par le haut, ou horizontal et rotatif. Les ouvriers qui l'actionnaient étaient appelés « chaufourniers » [18].

1.6. Four à cloche

Le four à cloche est un four constitué d'une table et d'une cloche, tous deux en matériau réfractaire. La cloche, ornée de résistances électriques sur sa face intérieure est amovible à l'aide d'un palan, ce qui a pour avantage d'y conserver une bonne partie de la chaleur pendant que des interventions sont possibles sur les objets en cours de cuisson[18].

Selon leur technique, ce type de four est apprécié de certains céramistes ainsi que de verriers pratiquant le thermoformage par exemple.

1.7. Four à micro-ondes

Un four à micro-ondes est un appareil électroménager, permettant la cuisson rapide d'aliments destinés à la consommation humaine ou animale. Il est de plus très pratique pour réchauffer des aliments déjà préparés solides ou liquides. Le chauffage s'effectue par agitation des molécules d'eau qui contiennent les aliments [18].

Cette agitation résulte de l'oscillation de la molécule d'eau dont le dipôle ou vecteur de polarisation électrique s'oriente passivement dans le champ électrique alternant du rayonnement micro-onde.

1.8. Four à pain

Ouvrage en maçonnerie, généralement voûté, ouvert par devant, pour faire cuire le pain, la pâtisserie... Four banal : au Moyen-Âge, four d'un seigneur où les vassaux devaient faire cuire leur pain moyennant une redevance[18].

1.9. Four à réverbère

Un four à réverbère est un four où la chaleur est réfléchi (réverbérée) par la voûte du four. Dans ce type de four, le combustible (charbon, gaz, fuel, etc.) est en principe brûlé dans une chambre différente de celle des matières traitées. Ces fours au principe très ancien ont fait l'objet de perfectionnements au XVIIIe et XIX^e siècle afin d'améliorer notamment les procédés de transformation métallurgique. Cette technologie permet d'augmenter l'efficacité de la chauffe et

ainsi d'augmenter la température. Une des applications est le puddlage de la fonte qui est la première grande étape de la production de masse de l'acier pendant la révolution industrielle. Ces fours ont été et sont utilisés dans l'industrie métallurgique, la cuisson des céramiques et la chimie[18].

1.10. Four électrique (sidérurgie)

En sidérurgie, four électrique désigne différents types de fours destinés à la fusion de l'acier et d'autres métaux :

- Four à arc électrique, pour la fusion de ferrailles pour leur recyclage. C'est l'appareil alimentant les aciéries dites électriques ;
- Four électrique à poche, de moindre puissance, servant à réchauffer le métal liquide.

1.11. Four crématoire

Un four crématoire est un four permettant l'incinération des morts.

1.12. Four Hoffmann

- Le Four Hoffmann est un four à feu continu destiné à la cuisson de briques, tuiles, carreaux, et autres produits en terre cuite. Cette invention fut brevetée en 1858 par Friedrich Hoffmann. Elle permit un progrès considérable dans la production des articles en terre cuite[18].

1.13. Haut fourneau

- Un haut fourneau est un four à combustion interne, destiné à la fabrication de la fonte à partir du minerai de fer. Cette fonte est par la suite affinée par chauffage (décarburation) ce qui permet de produire de l'acier et des dérivés ferreux[18].

1.14. Four solaire d'Odeillo

- Le four solaire d'Odeillo est un four fonctionnant à l'énergie solaire. Sa puissance thermique est d'un mégawatt. Avec le four solaire de Parkent en Ouzbékistan, il est l'un des deux plus grands du monde.

- Ce laboratoire doit sa renommée mondiale à son acquis scientifique unique dans le domaine des études par voie solaire des phénomènes à haute température et du comportement des matériaux soumis à des conditions extrêmes[18].

1.15. Four solaire de Mont-Louis

Le four solaire de Mont-Louis est un four solaire construit juste après la Seconde Guerre mondiale sur la commune française de Mont-Louis, dans le département des Pyrénées-Orientales, en région Languedoc-Roussillon. Première installation de ce type dans le monde, il fut un précurseur du four

solaire d'Odeillo, construit une quinzaine d'années plus tard à quelques kilomètres de là. Il fournit une puissance de 50 kW[18].

1.16. Four à induction

Un four à induction est un élément électrique. Dans la chaleur est provoqué par induction magnétique dans un milieu conducteur (habituellement un métal) placé dans un creuset, autour de quel l'enroulement magnétique est refroidi par l'eau.

L'avantage du four à induction est un processus de fonte propre, de rendement optimum et bien-contrôlable comparé à la plupart d'autres moyens de fusion des métaux. Le plus moderne fonderies employez ce type de four et maintenant également plus de fonderies de fer remplacent coupoles avec des fours à induction à fondre fer de fonte, en tant que les anciens émettez beaucoup de poussière et autre polluants. Les capacités de four à induction s'étendent de moins d'un kilogramme à cent tonnes de capacité, et sont employées pour fondre le fer et l'acier, le cuivre, l'aluminium et métaux précieux.

L'inconvénient principal à l'utilisation de four à induction dans une fonderie est le manque de capacité de raffinage; les matériaux de charge doivent être propres des produits d'oxydation et de composition connue, et quelques éléments d'alliage peuvent être dus perdu à l'oxydation (et doit être ré-ajouté à la fonte).

Gamme de fréquences d'opération de service est de (50 ou 60 Hertz) à dizaine de kilohertz, habituellement selon le matériel étant fondu, la capacité du four et la vitesse de fonte requise un four de fréquence plus élevée est habituellement plus rapide pour fondre une charge.

2. Rappel mathématique

2.1 Champs de scalaires, champs de vecteurs

a. Champ de scalaires

- Définition:

C'est une application $f : \mathcal{E} \rightarrow R$ où \mathcal{E} est un espace affine de dimension 3.

En général, f dépend aussi de t : $f(M, t)$

Choix d'une origine :

On fixe un point O, et pour tout point M, on note $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

On a ainsi $f(M) = \tilde{f}(\vec{r})$ (pratiquement, on confond f et \tilde{f})

Choix d'un système de coordonnées :

\vec{r} peut s'écrire en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques.

On a ainsi $f(\vec{r}) = \tilde{f}(x, y, z)$ en cartésiennes.

De même, on confondra aussi \tilde{f} et f .

b. Champ de vecteurs

Définition :

C'est une application de la forme $M \mapsto \vec{A}(M)$ (où $\vec{A}(M)$ appartient à un espace vectoriel de dimension 3)

Comme pour les champs scalaires, on écrira indifféremment $\vec{A}(M)$, $\vec{A}(\vec{r})$ ou $\vec{A}(x, y, z)$.

2.2 Opérateurs relatifs aux champs

On trouve pour les champs scalaires le gradient et le Laplacien (scalaire)

Pour les champs de vecteurs, on a aussi le Laplacien (vectoriel), et la divergence, le rotationnel.

a. Le gradient

On considère ici l'espace muni d'un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Définition :

Soit $f(x, y, z)$ un champ scalaire.

On pose $\vec{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$

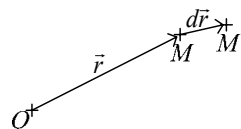
Notation nabla :

On note $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$ (notation symbolique)

Ainsi, on a $\vec{\nabla}f = \vec{\text{grad}}f$.

(Attention : il ne faut pas essayer d'adapter la notation à d'autres systèmes de coordonnées, les résultats seraient la plupart du temps faux)

Définition intrinsèque du gradient :



On considère un champ scalaire $f(x, y, z)$. On a :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Et

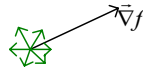
$$d\vec{r} = dx.\vec{u}_x + dy.\vec{u}_y + dz.\vec{u}_z$$

On a donc $df = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r}$, et cette définition implicite de $\vec{\nabla}f$ est indépendante de la base choisie.

Si de plus f dépend de t , on a ainsi $df = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt$

Interprétation :

On cherche les conséquences sur f d'un déplacement élémentaire :



Pour un déplacement (élémentaire) dans le plan orthogonal à $\vec{\nabla}f$, f ne varie pas : $df = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} = 0$.

C'est au contraire en se déplaçant dans la direction de $\vec{\nabla}f$ (dans le même sens ou à l'opposé) que la variation sera la plus importante.

Gradient en coordonnées cylindriques et sphériques

- Cylindriques :

Expression du gradient :

Avec $f(r, \theta, z)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Et

$$d\vec{r} = dr.\vec{u}_r + r d\theta.\vec{u}_\theta + dz.\vec{u}_z$$

Ainsi,

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

- Sphériques :

Avec $f(r, \theta, \varphi)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$$

Et

$$d\vec{r} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

Ainsi,

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

b. Divergence

Définition:

Pour un champ de vecteur \vec{A} :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Propriétés :

C'est un opérateur linéaire, et il ne dépend pas de la base choisie :

Pour un déplacement élémentaire de M à M', on a une variation $d\vec{A}$

Ainsi avec les matrices :

$$\begin{pmatrix} dA_x \\ dA_y \\ dA_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Et

$$\operatorname{Tr}(B) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{A}$$

Donc la matrice dans une autre base aura la même trace (puisqu'elles seront semblables), d'où l'indépendance de la base pour la divergence.

Les expressions de la divergence dans les différentes coordonnées c'est :

Cartésiennes:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z} \right)$$

Cylindriques:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r a_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z} \right)$$

Sphériques:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r^2 a_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial a_\theta \sin \theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right)$$

c. Rotationnel

Définition :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \dots$$

Propriétés :

- C'est un pseudo-opérateur (il dépend de la convention d'orientation choisie). Si \vec{A} est un vecteur vrai, $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ sera un pseudo-vecteur.
- C'est un opérateur linéaire
- Il est indépendant de la base choisie.

Les expressions de la divergence dans les différentes coordonnées c'est :

Cartésiennes:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

Cylindriques:

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Sphériques :

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(a_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$$

d. Laplacien

Scalaire

Soit f un champ scalaire.

$$\Delta f = \text{div} \overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f$$

On pose alors

Vectorel

En coordonnées cartésiennes :

Pour $\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$

On pose

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{\nabla}^2 A_x \vec{u}_x + \vec{\nabla}^2 A_y \vec{u}_y + \vec{\nabla}^2 A_z \vec{u}_z$$

On a une définition intrinsèque :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad div}} \vec{A} - \overrightarrow{\text{rot rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

e. Formulaire

Identités :

$$\overrightarrow{\text{rot grad}} f = \vec{0} \quad (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{0})$$

$$\text{div } \overrightarrow{\text{rot}} f = 0 \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0)$$

Produits :

$$\vec{\nabla} f g = g \vec{\nabla} f + f \cdot \vec{\nabla} g$$

$$\vec{\nabla} \cdot f \vec{A} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{A} + f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \wedge f \vec{A} = f \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{\nabla} f \wedge \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

Composition :

$$\vec{\nabla} g(f(\vec{r})) = g'(f) \vec{\nabla} f$$

3. Induction magnétique

L'induction électromagnétique, aussi appelé *induction magnétique*, est un phénomène physique qui se manifeste par la production d'une différence de potentiel électrique aux bornes d'un conducteur électrique ou encore d'un courant électrique en son sein.

Ce phénomène est notamment utilisé dans les transformateurs électriques, les bobines, ou encore les plaques à induction grâce aux courants de Foucault .

3.1 Origine physique

Ce phénomène a pour origine la force de Lorentz, notée \vec{F} appliquée aux électrons libres dans le conducteur électrique.

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}$$

où

- q est la charge de la particule, en coulomb

- \vec{E} est le champ électrique, en volt par mètre
- \vec{v} est la vitesse de la particule, en mètre par seconde
- \vec{B} est l'induction magnétique, en tesla

Ces grandeurs sont toutes mesurées dans le même référentiel galiléen au point où se trouve la particule. La notion de référentiel est ici très importante car suivant le référentiel dans lequel on se place, il y a deux manières d'interpréter le même phénomène. Dans ces deux points de vue, cela se modélise par la loi de Lenz-Faraday, ou bien une des quatre équations de Maxwell.

3.2 Compréhension du phénomène

On considère l'expérience suivante : un conducteur électrique se déplace dans un champ magnétique fixe. Suivant le référentiel dans lequel on choisit de se placer, on va observer deux types d'inductions, qui représentent le même phénomène.

3.3 Induction de Lorentz

On parle de l'induction de Lorentz lorsqu'on considère le champ magnétique constant et qu'on déplace ou déforme le conducteur électrique. Dans ce référentiel les électrons ont alors une vitesse, et subissent une force qui correspond à la *partie magnétique* de la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

C'est le cas des machines à courant continu.

3.4 Induction de Neumann

Dans le cas de l'induction de Neumann, le conducteur électrique est considéré rigide et fixe. Dans ce référentiel, celui du conducteur qui se déplace, les électrons n'ont pas de vitesse, donc la contribution de la force de Lorentz est nulle. Cependant, on observe la variation du flux du champ magnétique.

C'est le cas des alternateurs, des moteurs asynchrones et moteurs à induction ainsi que des transformateurs électriques.

3.5 Lois de l'induction

Il existe deux formes, intégrale et locale, qui sont équivalentes.

Loi locale

La loi d'Ohm s'écrit localement :

$$\vec{j} = \sigma(-\vec{\nabla}V + \overline{E_{em}})$$

où σ est la conductivité électrique du conducteur, \vec{j} est la densité volumique du courant électrique.

En l'absence de générateur électrochimique (qui crée un gradient de potentiel $\vec{\nabla}V$), seuls les phénomènes d'induction peuvent expliquer la naissance de courant, via le champ électromoteur

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B}$$

Loi de Faraday

La forme intégrale, ou loi de Faraday, est la suivante : un circuit soumis à un flux magnétique ψ (issu d'un champ magnétique variable B) subit une force électromotrice e (en volts, en orientant e selon une convention générateur, voir l'article Flux du champ magnétique) telle que :

$$e = -\frac{d\psi}{dt}$$

Dans un schéma électrique, cette force électromotrice est toujours fléchée avec la convention générateur. Ainsi, lorsqu'on utilise la convention récepteur, la tension u aux bornes de ce circuit est égale à la somme des chutes de tension liées à l'intensité i qui le parcourt, retranchées de cette force électromotrice.

En régime de courant continu, on peut alors écrire ce qu'on appelle la loi d'Ohm généralisée :

$$U = RI - e$$

où R est la résistance électrique du conducteur.

3.6 Auto-induction

L'auto-induction est la propriété électromagnétique remarquable qu'a un conducteur parcouru par un courant électrique, de s'opposer aux variations de celui-ci.

En effet, un conducteur parcouru par un courant électrique génère un champ magnétique. La loi de Lenz-Faraday fait que lorsque le flux du champ magnétique qui traverse un circuit conducteur varie au cours du temps, il apparaît dans ce circuit une tension appelée force électromotrice. La f.e.m. ainsi créée est orientée de façon à générer des courants s'opposant à la variation du flux :

$$e = -\frac{d\psi}{dt}$$

Toute variation du courant produit une variation de ce champ induit, ce qui a pour effet de produire une tension qui s'oppose à la variation du champ donc qui s'oppose à la variation du courant:

$$u = -L \frac{di}{dt}$$

où L s'appelle le coefficient d'auto-inductance du circuit ou inductance propre du circuit. Il ne dépend que de la configuration géométrique du circuit, et est toujours strictement positif.

3.7 Applications de l'induction électromagnétique

On peut citer :

- les bobines ;
- les transformateurs ;
- les alternateurs ;
- les lampes à induction ;
- les plaques à induction et le freinage par induction sont dus aux courants de Foucault.

L'induction électromagnétique entre en jeu dans de nombreux moteurs électriques (machine asynchrone).

4. Les équations de Maxwell

Aussi appelées *équations de Maxwell-Lorentz*, sont des lois fondamentales de la physique. Elles constituent les postulats de base de l'électromagnétisme, avec l'expression de la force électromagnétique de Lorentz.

Ces équations traduisent sous forme locale différents théorèmes (Gauss, Ampère, Faraday) qui régissaient l'électromagnétisme avant que Maxwell ne les réunisse sous forme d'équations intégrales. Elles donnent ainsi un cadre mathématique précis au concept fondamental de champ introduit en physique par Faraday dans les années 1830.

Ces équations montrent notamment qu'en régime stationnaire, les champs électrique et magnétique sont indépendants l'un de l'autre, alors qu'ils ne le sont pas en régime variable. Dans le cas le plus général, il faut donc parler du champ électromagnétique, la dichotomie électrique/magnétique étant une vue de l'esprit. Cet aspect trouve sa formulation définitive dans le formalisme covariant présenté dans la seconde partie de cet article : le champ électromagnétique y est représenté par un être mathématique unique : le tenseur électromagnétique, dont certaines composantes s'identifient.

4.1 Équation de Maxwell-Gauss

L'équation locale de Maxwell

Cette équation locale donne la divergence du champ électrique en fonction de la densité de la charge électrique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Cette équation correspond à un « terme de source » : la densité de charge électrique est une source du champ électrique. Par exemple, pour une charge ponctuelle q fixée à l'origine O , la loi de Coulomb donnant le champ électrostatique en un point M de l'espace, point repéré par le vecteur position $\vec{OM} = \vec{r} = r \vec{u}_r$ où \vec{u}_r est le vecteur unitaire radial, s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Ce champ électrostatique vérifie l'équation de Maxwell-Gauss pour la source statique :

$$\rho(\vec{r}, t) = q\delta^3(\vec{r})$$

où $\delta^3(\vec{r})$ est la distribution de Dirac dans l'espace à trois dimensions.

Le théorème de Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss est héritée du théorème de Gauss, qui permet de lier le flux du champ électrique à travers une surface fermée à la charge intérieure à cette surface :

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

où Σ est une surface fermée arbitraire, appelée surface de Gauss, et Q_{int} la charge électrique totale intérieure à cette surface Σ .

On remarquera que l'équation de Maxwell-Gauss se retrouve facilement en appliquant le théorème d'Ostrogradski au théorème de Gauss et en prenant un volume infinitésimal.

4.2 Équation de Maxwell de conservation du flux (Équation de Maxwell-Thomson)

Le flux du champ magnétique à travers une surface Σ fermée est toujours nul :

$$\iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

L'équation locale de Maxwell

Cette équation locale est au champ magnétique ce que l'équation de Maxwell-Gauss est au champ électrique, à savoir une équation avec « terme de source », ici identiquement nul :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$$

Elle traduit le fait expérimental suivant : il n'existe pas de monopôle magnétique. Un monopôle magnétique serait une source ponctuelle de champ magnétique, analogue de la charge électrique ponctuelle pour le champ électrique. Or, l'objet de base source d'un champ magnétique est l'aimant, qui se comporte comme un dipôle magnétique : un aimant possède en effet un pôle nord et un pôle sud. L'expérience fondamentale consistant à tenter de couper un aimant en deux donne naissance à deux aimants, et non un pôle nord et un pôle sud séparément².

Introduction du potentiel-vecteur

L'analyse vectorielle montre que la divergence d'un rotationnel est toujours identiquement nulle :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0$$

Réciproquement, tout champ de vecteurs dont la divergence est identiquement nulle peut localement être exprimé sous la forme d'un rotationnel.

L'équation locale de conservation du flux magnétique permet donc de définir au moins localement un potentiel-vecteur \vec{A} tel que:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

4.3 Équation de Maxwell-Faraday

Cette équation locale traduit le phénomène fondamental d'induction électromagnétique découvert par Faraday.

L'équation locale

Elle donne le rotationnel du champ électrique en fonction de la dérivée temporelle du champ magnétique :

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cela correspond à un « terme variationnel » : la variation du champ magnétique crée un champ électrique. Sa forme intégrale est la loi de Faraday :

$$\varepsilon = - \frac{d\psi}{dt}$$

où ε , est la force électromotrice d'induction dans un circuit électrique et ψ le flux magnétique à travers ce circuit.

Introduction du potentiel électrique

L'analyse vectorielle montre que le rotationnel d'un gradient est toujours identiquement nul :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot a) = \vec{0}$$

L'équation de Maxwell-Faraday couplée à l'existence locale d'un potentiel-vecteur \vec{A} permettent de définir (au moins localement) le potentiel électrique V (scalaire) tel que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Le problème important de l'unicité du potentiel électrique est discuté dans *Invariance de jauge de la théorie*.

4.4 Équation de Maxwell-Ampère

L'équation locale de Maxwell

Cette équation est héritée du théorème d'Ampère. Sous forme locale, elle s'écrit en termes du vecteur densité de courant \vec{j} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Introduction du courant de déplacement

L'équation précédente peut se réécrire :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D)$$

en introduisant le courant de déplacement de Maxwell :

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La forme intégrale lie la circulation du champ magnétique sur un contour C fermé, et les courants qui traversent la surface s'appuyant sur ce contour

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

4.5 Équation de conservation de la charge

Prenons la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mathbf{0} = \mu_0 \vec{\nabla} \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On peut écrire en permutant les dérivées spatiales et temporelles, puis en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

On obtient finalement l'équation locale de conservation de la charge électrique :

$$\vec{\nabla} \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathbf{0}$$

La présence du terme de courant de déplacement, introduit par Maxwell, est essentielle à l'obtention de cette équation.

Invariance de jauge de la théorie

L'analyse vectorielle montre que la divergence d'un rotationnel est toujours identiquement nulle :

$$\text{div } \overline{\text{rot}} = 0$$

L'équation locale de conservation du flux magnétique permet donc de définir au moins localement un *potentiel-vecteur* \vec{A} tel que :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

L'analyse vectorielle nous dit également que

$$\overline{\text{rot}} \overline{\text{grad}} = \vec{0}$$

Alors le potentiel-vecteur n'est pas défini de manière unique puisque la transformation suivante, avec f une fonction quelconque

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f$$

ne modifie pas la valeur du champ \vec{B} . Ceci est un exemple de transformation de jauge. Il faut donc imposer des conditions supplémentaires pour déterminer \vec{A} de façon non-ambigüe. On appelle cela des conditions de jauge, par exemple la jauge de Coulomb ou encore la jauge de Lorenz.

Le lecteur notera qu'en physique classique, le potentiel-vecteur semble n'être qu'un outil mathématique commode pour analyser les solutions des équations de Maxwell, mais ne semble pas être une grandeur physique directement *mesurable*. En 1959, dans le cadre de la physique quantique, Aharonov et Bohm ont démontré que le potentiel-vecteur avait un effet observable en mécanique quantique : c'est l'effet Aharonov-Bohm.

L'analyse vectorielle montre que le rotationnel d'un gradient est toujours identiquement nul.

L'équation de Maxwell-Faraday couplée à l'existence locale d'un potentiel-vecteur \vec{A} permettent de définir (au moins localement) le potentiel électrique V (scalaire) tel que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Le potentiel V lui non plus n'est pas défini de façon unique mais la transformation de jauge associée est liée à celle de \vec{A} est la suivante (on rappelle celle de \vec{A} par souci de clarté) et on a

$$\begin{cases} V \rightarrow V - \partial_t f \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla} f \end{cases}$$

Ces deux équations donnent l'invariance de jauge complète des équations de Maxwell.

5. Courants de Foucault

On appelle les courants de Foucault les courants électriques créés dans une masse conductrice, soit par la variation au cours du temps d'un champ magnétique extérieur traversant ce milieu, soit par un déplacement de cette masse dans un champ magnétique constant. Ils sont une conséquence de l'induction magnétique. Ce phénomène a été découvert par le physicien français Léon Foucault en 1851.

5.1 Principe

Le champ magnétique variable au cours du temps est responsable de la naissance d'une force électromotrice à l'intérieur du milieu conducteur. Cette force électromotrice induit des courants dans la masse. Ces courants ont deux effets :

- ils provoquent un échauffement par effet Joule de la masse conductrice ;
- ils créent un champ magnétique qui s'oppose à la cause de la variation du champ extérieur (loi de Lenz).

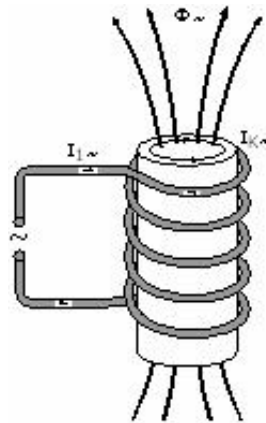


Fig. (1.1) Courant de Foucault induits

Quand la variation de flux est due à un déplacement du milieu devant un champ magnétique constant, les *courants de Foucault* sont responsables de la naissance de forces de Laplace qui s'opposent au déplacement, d'où l'effet de freinage observé.

5.2 Applications

Les courants de Foucault sont la base plusieurs application industrielle comme le chauffage par induction magnétique et le freinage ... ect.

Freinage

Des systèmes de freinage à *courants de Foucault* sont utilisés notamment sur les véhicules poids lourds et sur les autocars sous le nom de « ralentisseur », ou sous le nom commercial *Telma*, marque d'un important fabricant de ce système de freinage. Le premier brevet de ralentisseur électromagnétique a été déposé par Steckel en 1903. Raoul Sarazin a réalisé en 1936 la première application pratique sur véhicule d'un ralentisseur utilisant le principe des courants de Foucault.

Des disques solidaires des roues sont encadrés par des électroaimants fixés au véhicule. Lorsque ceux-ci sont mis sous tension, les courants induits dans les disques vont générer un couple de freinage. Ces freins sont intéressants du fait des économies d'entretien : rareté des réglages et quasi absence d'usure (pas de contact, pas de frottement mécanique). Néanmoins ce type de freinage est d'autant plus efficace que la vitesse est élevée et ils ne peuvent en aucun cas permettre le blocage d'un véhicule à l'arrêt. C'est pour cela qu'ils sont doublés de freins classiques, à frottement, et que les roues ne peuvent se bloquer (comme dans le cas de

ABS). L'inconvénient est que l'énergie est dissipée par effet joule sous forme de chaleur et donc non récupérée.



Fig.2 Frein à courants de Foucault sur un train rapide japonais Shinkansen.

- Dans les chemins de fer, la rame à grande vitesse ICE 3 de la Deutsche Bahn utilise un système de freins à courant de Foucault comme système de frein de service sur certaines lignes nouvelles, et comme système de freinage d'urgence ailleurs.

Chauffage

- Le chauffage par induction est produit par les courants de Foucault induits dans la pièce à chauffer. Ce type de chauffage est donc réservé aux matériaux conducteurs. Il est par exemple utilisé dans les plaques de cuisson à induction, et également en métallurgie avec les fours à induction qui chauffent la masse métallique jusqu'à la faire fondre.

- On utilise les propriétés des courants de Foucault pour réaliser des capteurs de distance sans contact. Ils sont généralement constitués d'une bobine excitée à haute fréquence (200 kHz à 2 MHz), la proximité d'une pièce conductrice en modifie l'inductance, la mesure de cette inductance permet de déterminer la distance de la pièce mesurée.

- Le moteur asynchrone est aussi basé sur ces courants, générés au rotor par le champ créé par le stator.

- Les courants de Foucault sont également utilisés en contrôle non destructif, par exemple pour la détection des fissures dans les pièces métalliques comme les rails ferroviaires. En effet, en cas de

défaut internes, les courants de Foucault sont différents, ce qui se traduit par une modification du champ magnétique induit.

- Les compteurs de vitesse à aiguille utilisent également les courants de Foucault : un aimant est relié à une roue, cette roue est entourée par un tube métallique sur lequel est fixé une aiguille, le tube pivotant autour de son axe est retenu par un ressort en spirale, lequel est chargé de ramener l'aiguille à zéro. Plus la roue tourne vite, plus la force exercée sur le ressort est grande, et plus l'aiguille s'éloigne de sa position initiale.
- Ils sont aussi utilisés pour détecter des défauts internes dans des métaux, une application est la fabrication des lames pour les armes d'escrime sportive¹

Les courants de Foucault sont aussi responsables de pertes (*pertes par courant de Foucault*) dans les circuits magnétiques des machines électriques alternatives et des transformateurs. C'est la raison pour laquelle les circuits magnétiques sont feuilletés : on cherche à limiter ces courants (qui provoqueraient également un échauffement par effet Joule).

6. Chauffage par induction

Un *chauffage par induction* est une technique de chauffage reposant sur l'induction électromagnétique. Son avantage est de chauffer des matériaux sans contact avec la source d'énergie.



Fig. 3 Chauffage par induction par une solénoïde

La chaleur inductive fonctionne grâce à la perte du courant de Foucault qui génère du courant alternatif à basse fréquence.[15]

Le corps à chauffer baigne dans un champ électromagnétique. Ce champ électromagnétique se crée lorsqu'il y a rencontre entre un matériau conducteur (un métal par exemple) et un aimant capable de créer un champ magnétique. Cet aimant va exercer une force sur les électrons libres présents dans le

matériau générant ainsi un courant électrique. L'énergie se dissipe alors à l'intérieur du corps sous forme de chaleur. L'exemple le plus concret repose sur le fonctionnement d'une plaque à induction.

Cette chaleur inductive est essentiellement utilisée pour réchauffer les matières plastiques et les métaux. Elle s'utilise également pour les techniques de trempe, de soudure, de fusion de métaux, pour le thermoscellage de récipients ou encore pour le tirage de cristaux. Contrairement au chauffage par induction, les fours à micro-ondes utilisent les pertes diélectriques lors de haute fréquence, et ne s'applique pas au métal puisqu'il pourrait y avoir création d'arcs électriques.

Le plasma inductif est une variante de haute-technologie du processus par induction. Elle est utilisée entre autres pour la fabrication de la fibre de verre. Grâce à cette technique, on peut atteindre jusqu'à 10 000 degrés dans la matière, et ce, sans faire fondre l'environnement de production[15].

6. 1. Applications du chauffage par induction

Le chauffage d'induction permet le chauffage visé d'un article applicable, pour des applications comprenant ; durcissement extérieur, fondant, soudure et soudant et chauffant à l'ajustement. Fer et son alliages répondent mieux au chauffage d'induction, dû au leur ferromagnétique nature. Des courants de Foucault peuvent, cependant, être produits dans n'importe quel conducteur, et l'hystérésis magnétique peut se produire en n'importe quel matériel magnétique. Le chauffage d'induction a été employé pour chauffer les conducteurs liquides (tels que les métaux fondus) et également les conducteurs gazeux (tels qu'un plasma de gaz). Le chauffage d'induction est employé souvent pour chauffer des creusets de graphite (contenant d'autres matériaux) et est employé intensivement dans l'industrie de semi-conducteur pour le chauffage du silicium et d'autres semi-conducteurs.

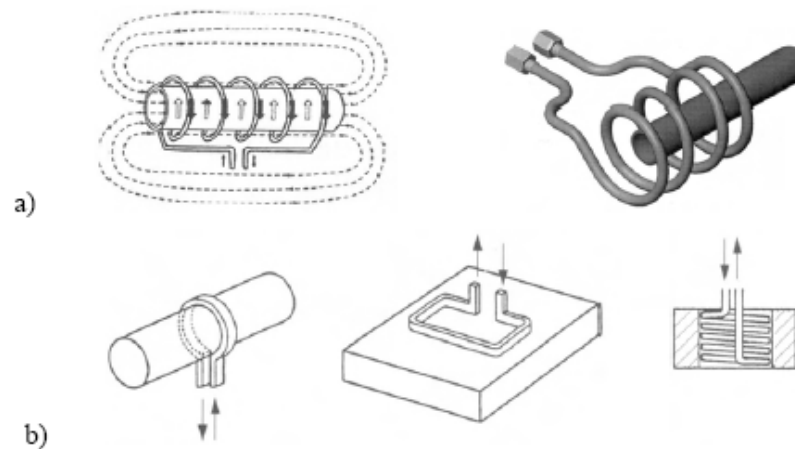


Fig (1. 4) Systèmes de chauffage par induction : (a) chauffage dans la masse et (b) chauffage localise

6.1.1 Four à induction

Four à induction emploie l'induction pour chauffer un métal à son point de fusion. Une fois que fondu, le champ magnétique à haute fréquence peut également être employé pour remuer l'à fonte, qui est utile en assurant cela additions de alliage sont entièrement mélangés dans la fonte. La plupart des fours à induction se composent d'un tube des anneaux de cuivre refroidis à l'eau, entourant un récipient de réfractaire matériel. Des fours à induction sont utilisés dans la plupart des fonderies modernes, comme méthode plus propre de fondre des métaux qu'a four reverberatory ou a coupole. Les tailles s'étendent d'un kilogramme de capacité, d'à la capacité cent tonnes. Les fours à induction émettent souvent un gémissement ou un fredonnement aigu quand ils fonctionnent, selon leur fréquence de fonctionnement. Les métaux fondus incluent fer et acier, cuivre, aluminium, et métaux précieux. Puisqu'il est un propre et non procédé de contact il peut être employé dans un vide ou une atmosphère inerte. Les fours de vide se servent du chauffage d'induction pour la production des aciers de spécialité et d'autres alliages qui s'oxyderaient si de chauffage en présence de l'air.

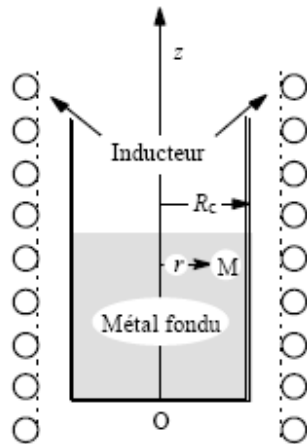


Fig. (1.5) Four à induction

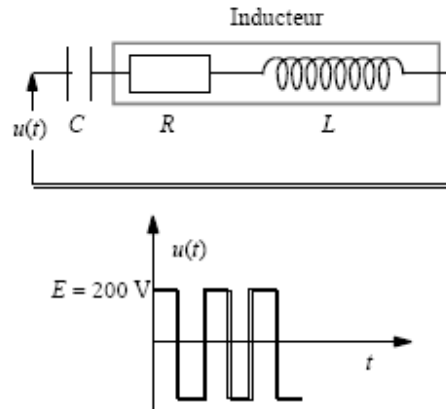


Fig. (1.6) Schéma équivalent de l'inducteur

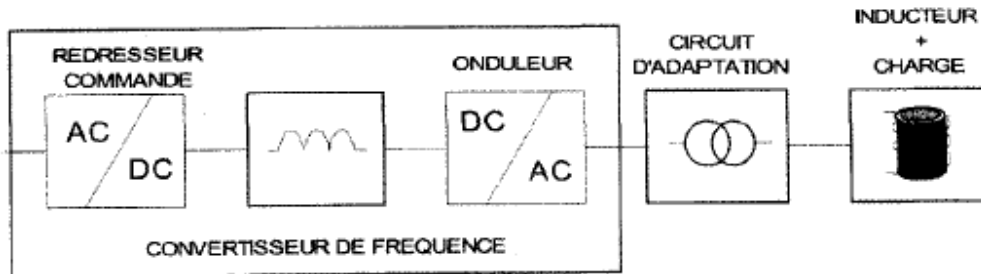


Fig.(1.7) La chaîne de conversion d'énergie

6.1.2 Soudure d'induction

Un processus semblable et sur une échelle plus petite est employé pour soudure d'induction. Des plastiques peuvent également être soudés par induction, s'ils sont enduits de la céramique ferromagnétique (où l'hystérésis magnétique des particules fournit la chaleur exigée) ou par les particules métalliques.

6.1.3 Cuisine d'induction

Dans cuisine d'induction, une bobine d'induction dans le faire cuire-dessus chauffe la base de fer du cook-ware. Cuivrez les casseroles basées, casseroles d'aluminium et la plupart des casseroles d'acier inoxydable ne sont pas appropriées.

Le provoqué par la chaleur dans la base est transféré à la nourriture par l'intermédiaire de conduction. Les avantages des cuiseurs d'induction incluent l'efficacité, la sûreté (le faire cuire-dessus d'induction n'est pas chauffé) et la vitesse. Les inconvénients incluent le fait que le cookware non ferreux tel que le cuivre, l'aluminium et le verre ne peut pas être employé sur un faire cuire-dessus d'induction. Les cuiseurs installés et portatifs d'induction sont disponibles.

6.1.4 Cachetage d'induction

Le chauffage d'induction est employé souvent dedans cachetage d'induction ou « cachetage de chapeau ».

6.1.5 Chauffage à adapter

Le chauffage d'induction est employé souvent pour chauffer un article le faisant augmenter avant l'ajustage de précision ou l'assemblée. Des roulements sont par habitude chauffés de cette façon en utilisant la fréquence de forces (50/60Hz) et un type en acier stratifié noyau de transformateur passant par le centre du roulement.

6.1.6 Traitement thermique

Le chauffage d'induction est employé souvent dans traitement thermique des articles en métal. Les applications les plus communes sont durcissement d'induction des pièces en acier et induction soudure/soudure en tant que moyens de joindre des composants en métal. Le chauffage d'induction peut produire les densités de puissance élevée qui accordent des temps courts d'interaction d'atteindre la température exigée. Ceci donne la commande serrée du chauffage « modèle » avec le modèle suivant le champ magnétique appliqué tout à fait de près et permet la déformation et les dommages thermiques réduits. Cette capacité peut être employée dans le durcissement pour produire des parties avec les propriétés variables. Le processus durcissant le plus commun est de produire un durcissement extérieur localisé d'un secteur qui a besoin de porter-résistance, tout en maintenant la dureté de la structure originale comme nécessaire ailleurs. La profondeur des modèles durcis par induction peut être commandée par le choix de l'induction-fréquence, de la puissance-densité et du temps d'interaction. Il y a des limites à la flexibilité du processus - principalement résultant de la nécessité de produire les inducteurs consacrés pour beaucoup d'applications. C'est tout à fait cher et exige le rassemblement des courant-densités élevées dans de petits inducteurs de cuivre, qui peuvent exiger la technologie et le « cuivre-ajustage de précision » spécialisés.

Détails

L'installation de base est C.A. alimentation d'énergie cette électricité de rendement avec le bas tension mais très haut courant et haut fréquence. L'objet à chauffer est placé à l'intérieur de l'enroulement d'air conduit par l'alimentation d'énergie. Le champ magnétique alternatif induit courants de Foucault dans l'objet.

Fréquence appropriée :

Fréquence [kHz]	Type d'objet
5 - 30	Matériaux épais
100 - 400	Petits objets ou pénétration peu profonde
480	Morceaux microscopiques

Les matériaux magnétiques améliorent le processus de la chaleur d'induction en raison d'hystérésis. Essentiellement matériaux avec la haute perméabilité (100-500) il est plus facile chauffer avec le chauffage d'induction. Le chauffage d'hystérésis se produit au-dessous de la température de curie là où les matériaux perdent leurs propriétés magnétiques.

La perméabilité et les températures tellement élevés au-dessous de la température de curie dans l'objet est utile. En outre différence de la température, masse, et influence spécifique de la chaleur le chauffage d'objet.

Le transfert d'énergie du chauffage d'induction est couplé à la distance entre l'enroulement et l'objet. Les déperditions d'énergie se produisent à travers conduction de la chaleur de l'objet au montage, convection normale, et rayonnement thermique.

La bobine d'induction est habituellement faite de 3.175 millimètre - tuyauterie d'en cuivre de 4.7625 millimètres de diamètre et refroidi au liquide. Le diamètre, la forme, et le nombre de tours influencent l'efficacité et le modèle de champ.

6.2 Propriétés du chauffage par induction

a. Transfert de puissance

L'effet Joule, dû aux courants de Foucault, qui est responsable de l'augmentation de température de l'objet à chauffer. La formulation simple de la puissance $P = RI^2$ ne peut pas être utilisée du fait de la non-uniformité de la distribution des courants de Foucault dans le conducteur.

La puissance déposée peut être décrite comme[13]:

$$P = \pi d h H^2 \sqrt{\pi \rho \mu_0 \mu_r f} C F$$

d : diamètre du cylindre (m)

h : Hauteur du cylindre (m)

H : Intensité du flux magnétique (A/m)

ρ : Résistivité ($\Omega.m$)

μ_0 : Perméabilité magnétique du vide

μ_r : Perméabilité relative

F : Fréquence (Hz)

C : Facteur de couplage; corrige les différences relatives des dimensions de la charge et de l'inducteur.

F : facteur de transmission de puissance; prend en compte la relation entre la profondeur de pénétration et les dimensions externes de la charge.

En concluant que La puissance peut être augmentée en augmentant l'intensité du flux magnétique.

b. Procédé technique

- Grace à la haute densité de puissance, une installation à induction peut être compacte et réaliser un chauffage rapide.
- L'induction permet d'obtenir des températures de chauffage très élevées.
- L'induction peut être appliquée de façon très locale.
- Les installations à induction sont compatibles avec les automatismes.

c. Consommation énergétique

- Les installations à chauffage par induction ont règle générale un bon rendement.
- Une part importante des pertes calorifiques peut être récupérée.

6.3 Avantages du chauffage par induction

La chaleur inductive permet :

- de régler la chaleur à diffuser de manière précise. La chaleur se transmet beaucoup plus rapidement le long de l'objet qu'une chaleur par convection traditionnelle ;
- de chauffer des parties inaccessibles, comme par exemple des morceaux de métal, encastrés dans du bois, du PVC, ou dans d'autres vacuum.
- une économie d'espace que les installations pour chaleur par convection dans la mesure où la chaleur est présente elle-même dans la matière, la radiation thermique est alors très petite ;
- de meilleures conditions de travail sans saleté ni fumée par rapport aux installations traditionnelles de chauffage ;
- d'avoir une rentabilité beaucoup plus importante, conditionnée par une moindre perte de chaleur et d'émission.

6.4 Inconvénients du chauffage par induction

Lors de mauvaises manipulations, d'autres objets peuvent être involontairement chauffés. Pour y remédier, on utilise le procédé d'émulsion ou le refroidissement par eau ;

- des coûts d'acquisition élevés pour les fortes puissances ;
- des champs électromagnétiques peuvent apparaître ce qui peut alors perturber l'environnement, lorsque les isolations sont mauvaises ou bien lorsqu'il y a une protection HF.

Conclusion

Le traitement des matériaux (fusion, trempe, soudure, collage, ...), le chauffage par induction est le principe de plusieurs applications industrielle, Un chauffage par induction est une technique de chauffage reposant sur l'induction électromagnétique. Son avantage est de chauffer des matériaux sans contact avec la source d'énergie, ce type de chauffage est résulte de la création des courants de Foucault induits dans les matériaux à traiter.

Le chauffage d'induction peut produire les densités de puissance élevée qui accordent des temps courts d'interaction d'atteindre la température exigée, un four induction représente l'un des applications vastes de ce processus dans l'industrie et notre vie quotidienne.

CHAPITRE II

PHENOMENE

ELECTROMAGNETIQUE

ET EQUATIONS

MATHEMATIQUES

Introduction

L'étude du four à induction est basé sur des phénomènes bien précis, électrique, électromagnétique, thermique ...etc. dans ce chapitre on va baser sur les phénomènes électromagnétique responsable du chauffage et de fonte des matériaux.

La représentation mathématique des procédés de chauffage par induction nécessite au minimum un couplage multi-physique entre un solveur électromagnétique et thermique. Par ailleurs un couplage supplémentaire thermo-mécanique permet d'étudier la déformation de la pièce par dilatation thermique. L'établissement d'un modèle électromagnétique peut soulever quelques questions comme le choix des inconnues du problème ou le choix des approximations plus ou moins fortes qui peuvent être utilisées, ainsi que leur domaine de validité.

1. EQUATIONS GENERALES [4][6]

Les équations de Maxwell permettent de décrire tous phénomènes électromagnétiques. Elles sont au nombre de quatre et sont applicables sans aucune restriction à tous les milieux matériels:

$$\text{Equation du flux magnétique} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{Équation de Maxwell-Gauss:} \quad \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho_{total} = (\rho_{libres} + \rho_{liés}) \quad (2.2)$$

$$\text{Équation de Maxwell-Faraday:} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\text{Équation de Maxwell-Ampere:} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial (\varepsilon \vec{E})}{\partial t} \quad (2.4)$$

Où \vec{B} est l'induction magnétique, \vec{E} est le champ électrique, \vec{H} est le champ magnétique, \vec{j} est la densité de courant électrique associée aux charges libres et ρ_{total} est la densité de charge totale regroupant les charges liées et les charges libres. Les paramètres physiques sont, la perméabilité magnétique, et ε , la permittivité du milieu au point considéré. En particulier pour les métaux, les charges libres sont les électrons de conduction et les charges liées sont représentées par les cations du réseau cristallin. En régime permanent ou dans tout le domaine des fréquences hertziennes, on estime qu'il n'y a pas d'excédent local de charge et donc la densité totale de charge est considérée comme étant nulle. On peut alors réécrire l'équation de Maxwell-Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{E}) = 0 \quad (2.5)$$

Pour des milieux isotropes, l'excitation magnétique \vec{H} est reliée à l'induction magnétique \vec{B} par la relation constitutive:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{2.6}$$

Il est courant de décomposer la perméabilité magnétique par :

$$\mu = \mu_0 \mu_r \tag{2.7}$$

où μ_r est sans dimension et représente la perméabilité magnétique relative. Pour des milieux paramagnétiques et diamagnétiques, μ_r est une constante très proche 1. En revanche, pour des milieux ferromagnétiques, la relation liant les champs \vec{B} et \vec{H} n'est plus linéaire: la perméabilité magnétique relative μ_r est fonction de la norme de \vec{H} et de la température T :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r(|\vec{H}|, T) \vec{H} \tag{3.8}$$

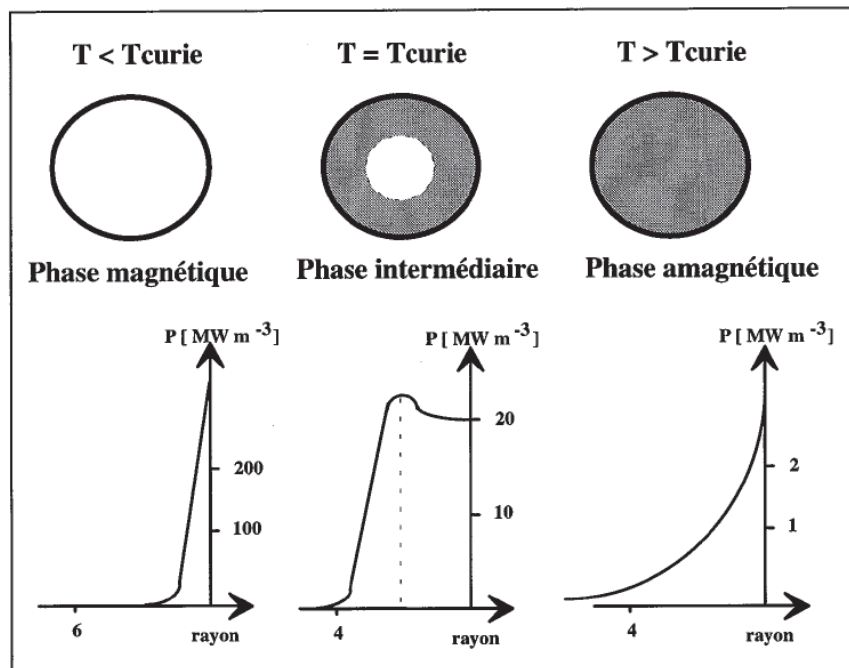


Fig.(2.1) Evolution de la distribution de puissance électromagnétique avec la température au passage de la température de Curie pour une billette d'acier de diamètre 120mm et une fréquence d'alimentation de 300Hz[7]

La dépendance de la perméabilité magnétique pour un ferromagnétique par rapport à la température est importante, notamment lors de la transition de Curie : le matériau devient amagnétique avec une perméabilité relative constante et proche de un. Les profils électromagnétiques dans la pièce vont être considérablement modifiés, voir la Figure (2.1).

Si on applique un champ électromagnétique de fréquence fixée aux frontières d'un matériau paramagnétique ou diamagnétique, donc linéaire, la réponse du milieu sera linéaire et les champs électromagnétiques internes au matériau oscilleront à la même fréquence bien que pouvant être déphasés. En revanche, pour des matériaux ferromagnétiques, des harmoniques secondaires de fréquence nouvelles sont générés déformant la forme de l'onde électromagnétique: ces matériaux sont non linéaires. Cette non- linéarité se traduit mathématiquement par une dépendance de la perméabilité magnétique par rapport à \vec{H} .

La dernière équation nécessaire est la loi d'Ohm :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2.9)$$

où σ est la conductivité électrique dépendante de la température. Finalement le système d'équations initiales s'écrit:

$$\text{Equation du flux magnétique} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.10)$$

$$\text{Equation de Maxwell-Gauss} \quad \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0, \quad (2.11)$$

$$\text{Equation de Maxwell-Faraday} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.12)$$

$$\text{Equation de Maxwell-Ampère} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial (\epsilon \vec{E})}{\partial t}, \quad (2.13)$$

$$\text{Relation intrinsèque au matériau} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (2.14)$$

$$\text{Loi d'Ohm} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

(2.15)

2. LES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

2.1. Equations de propagation en Electromagnétisme

On se limite au milieu linéaire, homogène et isotrope, à partir des équations de maxwell

Les équations de propagation électromagnétique peuvent s'écrient comme suit:[20]

2.1.1. Equation de propagation de \vec{A}

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu \vec{j} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ \Delta \vec{A} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu \vec{j} \end{aligned} \quad (2.16)$$

V est le potentiel scalaire. ($\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V$)

Il existait plusieurs couples de valeurs possibles (\vec{A}, V) et nous choisissons celui qui vérifie

$$\vec{\nabla} \vec{A} + \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (2.17)$$

Ce résultat important est connu sous le nom de *relation de jauge de Lorentz*.

Ainsi, nous obtenons l'équation de propagation

$$\Delta \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} \quad (2.18)$$

Jauge de Lorentz

Soit le couple (\vec{A}', V') vérifiant $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}'$ et $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \vec{\nabla} V'$.

Nous formons un autre potentiel vecteur par la relation $\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla} f$. En reportant dans l'expression de \vec{E} ,

on trouve $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \vec{\nabla} V' - \vec{\nabla} \frac{\partial f}{\partial t}$.

La question est de savoir s'il est possible de trouver une fonction f telle que le couple (\vec{A}, V) vérifie la jauge de Lorentz ?

En remplaçant dans cette relation, on obtient l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta f - \epsilon\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \vec{A}' - \frac{\partial V'}{\partial t}$$

qui permet de calculer la fonction f ou, surtout, qui prouve que cette fonction existe.

2.1.2. Equation de propagation de V

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \vec{A} - \Delta V \quad (2.19)$$

$$\Delta V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.20)$$

2.1.3. Equation de propagation de \vec{E}

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

$$\Delta \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \vec{\nabla} \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.22)$$

2.1.4. Equation de propagation de \vec{B}

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \mu \vec{\nabla} \times \vec{j} \quad (2.23)$$

$$\Delta \vec{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \vec{\nabla} \times \vec{j} \quad (2.24)$$

2.2. L'onde électromagnétique dans le vide

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \quad (2.25)$$

$$\Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.26)$$

Nous avons étudié jusqu'à présent des équations aux dérivées partielles d'une grandeur scalaire à une dimension d'espace; ici nous devons traiter des équations aux dérivées partielles pour des grandeurs vectorielles (trois dimensions d'espace).

Le champ électrique et le champ magnétique sont reliés dans les équations de Maxwell (il s'agit d'un champ électromagnétique), ils ont été découplés en utilisant des dérivations pour former les équations de propagation.

Les techniques des séries de Fourier ou de la transformée de Fourier permettent de se ramener à une étude de base où la dépendance avec le temps est de la forme $\exp j\omega t$.

Nous posons $\vec{E} = \vec{E}^* \exp j\omega t$ et $\vec{B} = \vec{B}^* \exp j\omega t$.

On appelle *onde plane monochromatique* le cas particulier où \vec{E}^* et \vec{B}^* ne sont fonctions que d'une seule variable cartésienne soit, par exemple, x .

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^* = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x^*}{\partial x} = 0$ le champ électrique de l'onde n'a pas de composante suivant x .

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^* = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x^*}{\partial x} = 0$ le champ magnétique de l'onde n'a pas de composante suivant x .

Le champ électromagnétique est contenu dans des plans perpendiculaires à l'axe des x .

Un choix de l'axe des y permet d'écrire $\vec{E}^* = f(x) \vec{e}_y$.

En reportant dans l'équation de propagation, on obtient

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0 \quad (\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1) \quad (2.27)$$

et

$$\vec{E} = \left(E_1 \exp \left[j\omega t \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] + E_2 \exp \left[j\omega t \left(t + \frac{x}{c} \right) \right] \right) \vec{e}_y \quad (2.28)$$

Nous trouvons, pour le cas particulier de l'onde plane monochromatique, la superposition de deux ondes (progressive et régressive) se propageant à vitesse c , appelée " *vitesse de la lumière* ".

Nous continuons l'étude avec l'onde progressive et calculons le champ magnétique à partir de la relation $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ qui entraîne $\vec{B} = \left(\frac{E_1}{c} \exp \left[j\omega t \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \right) \vec{e}_x$

Pour l'onde progressive, le vecteur vitesse est égale à $\vec{v} = c \vec{e}_x$ et $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}$

Cette dernière relation reste vérifiée pour l'onde régressive à condition d'écrire $\vec{v} = -c \vec{e}_x$

Remarque : ces relations ne sont vraies que pour les ondes planes monochromatiques. Il en est de même pour le vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_x$ qui, d'une manière générale pour une propagation suivant la direction x , s'écrit avec $\vec{k} = k(\omega) \vec{e}_x$ avec $\vec{k} \neq \frac{\omega}{c}$.

2.3. L'onde électromagnétique dans un diélectrique

Ce qui est dit dans le paragraphe précédent reste vrai en remplaçant ε_0 par ε . La vitesse de propagation de l'onde devient $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$ où n est l'indice de réfraction du milieu

($\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0 = n^2$).

On notera que les milieux diélectriques sont, à priori, dispersifs puisque ($\varepsilon_r = \varepsilon(\omega)$) [la polarisation dépend de la fréquence du champ excitateur]

2.4. L'onde électromagnétique dans un conducteur

Nous supposons vérifiées les conditions de validité de la loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (nous excluons le domaine des hyperfréquences), ce qui entraîne que la densité volumique de charges ρ est nulle.

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.29)$$

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.30)$$

La direction x est choisie comme direction d'écoulement du courant et nous considérons un conducteur en forme de plaque de dimensions supposées infinies dans la direction des z plutôt qu'un conducteur à symétrie de révolution pour lequel la résolution amène à utiliser des fonctions de Bessel.

$$\vec{E} = \vec{E}^*(x, y) \exp j\omega t \vec{e}_x \Rightarrow \frac{\partial^2 E^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E^*}{\partial y^2} - j\omega\mu_0\sigma E^* + \frac{\omega^2}{c^2} E^* = 0 \quad (2.31)$$

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles, nous utilisons la technique de séparation de variables en posant

$$E^* = f(x)g(y).$$

On obtient

$$\frac{f''}{f} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \text{ et } \frac{g''}{g} - j\omega\mu_0\sigma = 0. \quad (2.32)$$

En se limitant à une onde progressive et un conducteur

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}y\right) \exp\left[j\left(\omega t - \frac{\omega\pi}{c} - \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}y\right)\right] \quad (2.33)$$

- Cette formule montre que le courant électrique passe plus facilement en surface qu'en profondeur (ce phénomène est appelé *effet pelliculaire* ou *effet de peau* ; il devient

significatif dans un conducteur pour des fréquences élevées ; l'épaisseur de peau est définie par

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \tag{2.34}$$

Cette épaisseur est représentée dans le schéma suivant:

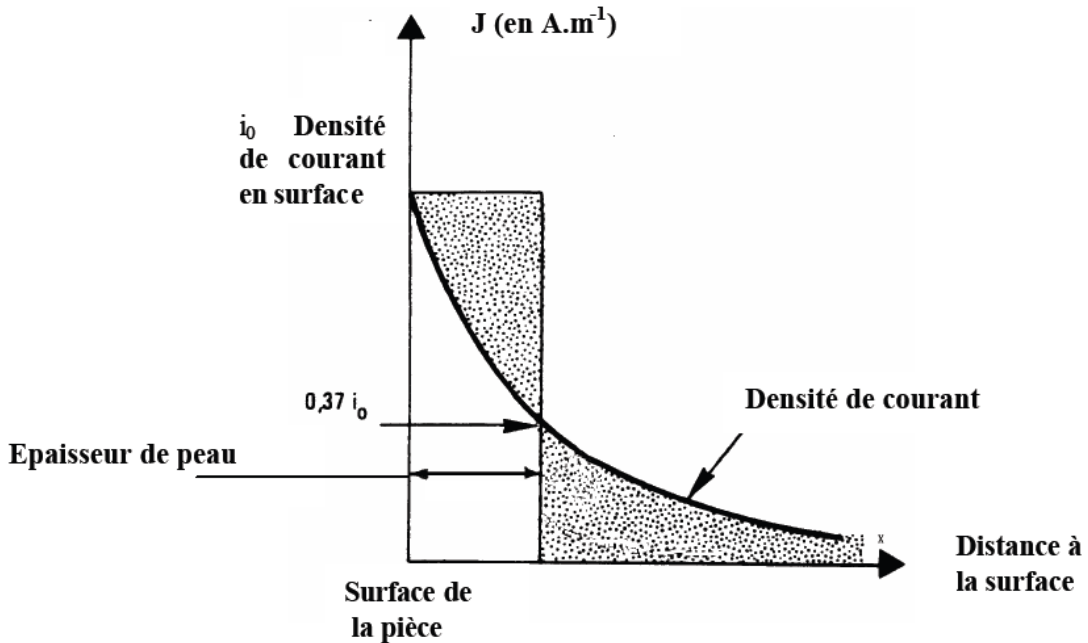


Fig.2 Représentation de la profondeur de peau[7]

- Elle montre aussi explicitement en quoi consiste l'approximation des états quasi stationnaires dans un conducteur (c'est à dire quand on peut négliger l'aspect propagation). En négligeant les phénomènes liés à l'effet de peau (ce qui se passe dans la direction y), on peut écrire :

$$\vec{E} \approx \vec{e}_x E_0 \exp \left[(j\omega t - \frac{\omega x}{c}) \right] \tag{2.35}$$

Pour un conducteur de longueur l , négliger le phénomène de propagation revient à avoir la condition $\frac{\omega l}{c} \ll 2\pi$.

2.5. Energie des ondes électromagnétiques

Il est convenable de définir le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$

L'analyse vectorielle combinée aux équations de Maxwell donne:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{2.36}$$

Nous reconnaissons :

$$\frac{\partial}{\partial t} (w_e + w_m) = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.37)$$

- où w_e et w_m sont respectivement les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique.

$$\vec{E} \vec{j} = \frac{\partial w_J}{\partial t} \quad (2.38)$$

Où w_J est la densité volumique d'énergie par effet Joule (on dit *dissipée* par effet Joule pour rappeler que cette énergie se transforme en d'autres formes que de l'énergie électromagnétique).

Suivant le théorème d'Ostrogradsky :

$$\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) d\tau = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_V (w_e + w_m + w_J) d\tau \right) \quad (2.39)$$

relation qui donne l'intérêt pratique du vecteur de Poynting.

2.6. Equations de Maxwell et approximation des états quasi-stationnaires

En reprenant la démonstration des équations de propagation, on remarque que les phénomènes de propagation sont liés à l'existence du terme

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \left(\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Dans le cadre de l'approximation des états quasi-stationnaires, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.40)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.41)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (2.42)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V \quad (2.43)$$

Par suite, la conservation de la charge devient $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$: dans l'approximation des états quasi stationnaires, $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ (la densité volumique de charges est constante ou nulle).

La relation de jauge de Lorentz devient celle de Coulomb ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$).

3. FORMULATION MATHEMATIQUE TRIDIMENSIONNELLE[6]

La procédure standard consiste à remplacer le système d'équations différentielles du premier ordre (10)-(15) par une équation différentielle du second ordre de type équation de propagation des ondes. Par élimination de l'induction magnétique B dans l'équation de Maxwell-Faraday (12) à l'aide des équations (13) à (14) et en supposant le matériau isotrope, on obtient l'équation vectorielle suivante pour le champ électrique:

$$\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = 0. \quad (2.44)$$

De la même manière, on décrit le champ magnétique H par une équation de propagation des ondes :

$$\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{H} \right) = 0. \quad (2.45)$$

Ainsi nous avons une équation vectorielle à résoudre d'inconnues les vecteurs électriques \vec{E} ou magnétiques \vec{H} là où il faut rajouter les conditions de divergence nulle $\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0$ ou $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

4. FORMULATION MATHEMATIQUE BIDIMENSIONNELLE[6]

4.1 Décomposition en modes transverses

Dans une configuration bidimensionnelle, les équations de Maxwell se décomposent en deux sous-ensembles indépendants d'équations avec des solutions indépendantes. Le mode **TE** (*Transverse Electric*) qui consiste à trouver un champ \vec{H} solution, perpendiculaire au plan pour lequel le champ électrique \vec{E} est transversal, Figure 4. Inversement, le mode **TM** (*Transverse Magnetic*) consiste à trouver un champ E solution tel qu'il soit perpendiculaire au plan pour lequel le champ magnétique \vec{H} est transversal.

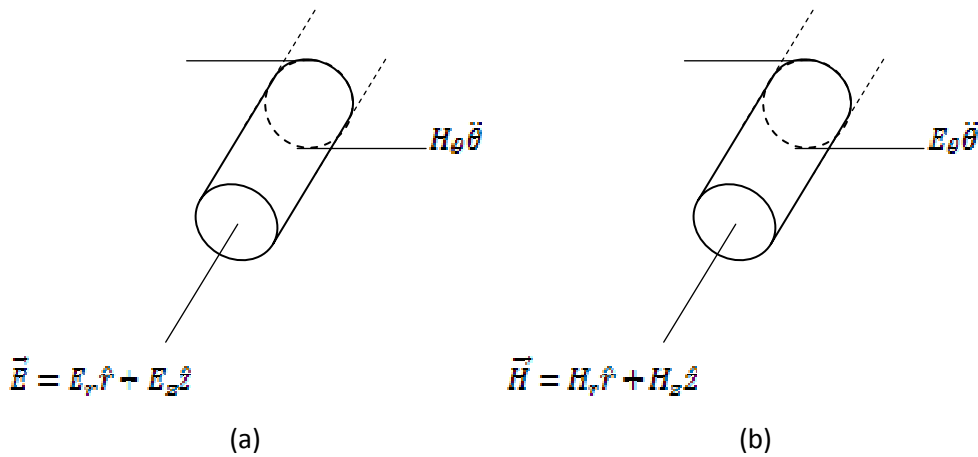


Figure 4: Représentations des modes TE (a) et TM (b) pour une symétrie axiale.

Décomposition en modes TE et TM pour un problème axisymétrique

Dans un système de coordonnées cylindriques $[r, \theta, z]$, de part la symétrie axiale, les champs électriques et magnétiques ne dépendent pas de la coordonnée angulaire θ .

$$\vec{E} = E_r(r, z) \hat{r} + E_\theta(r, z) \hat{\theta} + E_z(r, z) \hat{z} \quad (2.46)$$

$$\vec{H} = H_r(r, z) \hat{r} + H_\theta(r, z) \hat{\theta} + H_z(r, z) \hat{z} \quad (2.47)$$

Si on remplace les champs \vec{E} et \vec{H} par leurs expressions (46) et (47) dans les équations de Maxwell (48), (49) qui représentent les équations (12) et (13) modifiées à l'aide des relations (14) et (15),

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.48)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial(\epsilon \vec{E})}{\partial t} \quad (2.49)$$

On obtient :

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_r}{\partial t} \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\mu \frac{\partial H_\theta}{\partial t} \quad (2.51)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial H_\theta}{\partial r} = -\sigma E_r - \epsilon \frac{\partial E_r}{\partial t} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \sigma E_\theta + \epsilon \frac{\partial E_\theta}{\partial t} \quad (2.54)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_z)}{\partial r} = -\sigma E_z + \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (2.55)$$

Les équations (50), (52) et (54) sont découplées des équations (51), (53) et (55). D'autre part, il n'est pas nécessaire d'introduire les conditions de divergences nulles car elles sont déjà prises en compte indépendamment. Ainsi les champs $[E_\theta, H_r, H_z]$ sont indépendants des champs $[H_\theta, E_r, E_z]$ dans une configuration bidimensionnelle. Les systèmes d'équations peuvent donc être résolus indépendamment et leurs solutions ajoutées. L'ensemble de solutions $[E_\theta, H_r, H_z]$ constitue le mode TM, représentatif et adapté à un problème de chauffage par induction avec une symétrie axiale. Les champs $[H_\theta, E_r, E_z]$ représentent le mode TE et sont adaptés à la description d'un problème de conduction électrique ou chauffage par effet Joule.

4.2 Les inconnues du problème

Pour une configuration bidimensionnelle à symétrie axiale, il est naturel de décrire le procédé de chauffage par induction avec le champ électrique E_θ en éliminant les champs H_r, H_z dans les équations (50), (52) et (54). Finalement, l'équation décrivant le champ électromagnétique peut être réduite à une équation scalaire pour le champ $\vec{E}_z(r, z) = (0, E_\theta(r, z), 0)$:

$$\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = 0 \quad (2.56)$$

Néanmoins une formulation en champ électrique se rencontre rarement dans la littérature. La raison principale, mis à part des raisons historiques, provient certainement du fait que le terme source, par exemple un champ imposé ou une densité de courant source, n'apparaît pas explicitement dans l'équation (56).

Le terme source doit être introduit manuellement en décomposant le champ électrique en une contribution par courant induit et une contribution par courant source imposé, ce qui permet d'introduire un terme supplémentaire. Un autre moyen de faire consiste simplement à imposer des conditions aux limites spécifiques sur la surface de la pièce ou de l'inducteur.

Plus communément dans la littérature, on rencontre plutôt le potentiel magnétique $\vec{A} = (0, A_z, 0)$ car dans ce cas le terme source est introduit de manière naturelle.

$$\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = -\sigma \vec{\nabla} V = \vec{J}_s. \quad (2.57)$$

Dans une configuration plane avec une symétrie de translation, le mode TE est mieux adapté pour décrire les phénomènes électromagnétiques et dans ce cas l'inconnue du problème est réduite à la composante orthogonale du champ magnétique $\vec{H} = (0, 0, H_z(x, y))$.

D'autre part, de par sa complexité, l'équation (56) ou (57) n'est jamais gardée telle quelle dans la littérature. Les approximations utilisées sont décrites dans la section suivante.

4.3 Les approximations standards

a/ L'approximation des régimes quasi permanents (ARQP)

Une approximation standard et couramment utilisée est de négliger les courants de déplacement (57) dans l'équation de Maxwell-Ampère. Cette approximation des lois générales de l'électromagnétisme est valide pour des distributions ne variant pas trop rapidement dans le temps.

$$\vec{J}_D = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.58)$$

Domaine de validité de l'ARQP

Nous allons introduire les potentiels électriques et magnétiques obtenus à partir des équations de Maxwell (10) et (12) :

- un champ vectoriel $\vec{A} = (\vec{r}, t)$ appelé potentiel vecteur magnétique

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (2.59)$$

- un potentiel scalaire électrique V tel que

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - \vec{\nabla}V \quad (2.60)$$

En remplaçant dans les équations (2) et (4) les champs par leurs expressions (59) et (60) et en utilisant la jauge de Lorenz :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} = \vec{0} \quad (2.61)$$

Où c est la vitesse des ondes dans le vide, on arrive aux équations de Poisson :

$$\Delta \cdot \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{J} = \vec{0} \quad (2.62)$$

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = \vec{0} \quad (2.63)$$

Dont une solution physiquement acceptable pour une distribution de dimension finie est la solution des potentiels retardés:

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho(t - \frac{r}{c})}{r} dv, \quad (2.64)$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(t - \frac{r}{c})}{r} dv. \quad (2.65)$$

De même, dans le cadre de l'ARQP, on obtient de la même manière avec les équations réduites les solutions :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho(t)}{r} ds, \quad (2.66)$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(t)}{r} ds. \quad (2.67)$$

En comparant, les deux ensembles de solutions (64), (65) et (66), (67), on s'aperçoit que l'ARQP revient notamment à négliger les retards $\Delta t = r/c$ qui figurent dans les expressions des potentiels retardés (64), (65). Ainsi l'ARQP reste valide tant que le retard $\Delta t = r/c$ reste petit devant le temps de propagation, soit devant la longueur d'onde T de l'onde. Ceci revient à dire que la distance r entre la distribution source et le point M où est calculé le champ doit rester petit devant la longueur d'onde $\lambda = cT$ de l'onde électromagnétique de période T : $r \ll \lambda$. Les fréquences utilisées pour les applications industrielles du procédé de chauffage par induction étant en général inférieures au mégahertz, on arrive à des tailles d'installation industrielles devant être inférieure à 300m ce qui justifie parfaitement l'emploi de l'ARQP pour des installations de taille usuelle. Finalement sous cette hypothèse largement répandue, on arrive au système d'équations de Maxwell simplifié, encore appelé équations de Maxwell à

basses fréquences, point de départ de la majorité des modèles numériques mis en place pour modéliser les procédés de chauffage par induction :

$$\text{Equation du flux magnétique} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.68)$$

$$\text{Équation de Maxwell-Gauss:} \quad \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0, \quad (2.69)$$

$$\text{Équation de Maxwell-Faraday:} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.70)$$

$$\text{Équation de Maxwell-Ampere:} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}}, \quad (2.71)$$

$$\text{Relation intrinsèque au matériau} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (2.72)$$

$$\text{Loi d'Ohm} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (2.73)$$

Par élimination successive des champs magnétiques dans les équations (70)-(73), on arrive à l'équation simplifiée pour le champ électrique (75), identique à l'équation complète (56) mais sans le terme de propagation (74):

$$\epsilon \frac{\partial^2 E_B}{\partial t^2}. \quad (2.74)$$

$$\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = 0. \quad (2.75)$$

Cette approximation mène à une équation de type parabolique alors que précédemment nous avions une équation de type hyperbolique.

b/L'approximation harmonique

Une seconde approximation, l'approximation harmonique, est communément employée dans la littérature. Elle est basée sur le fait que pour un matériau non magnétique, par exemple un alliage non ferrique, soumis à un champ électromagnétique extérieur oscillant sinusoïdalement, les champs électromagnétiques générés dans la pièce vont également osciller de manière sinusoïdale. Si on applique l'approximation harmonique au chauffage par induction, cela suppose que l'inducteur est parcouru par un courant source sinusoïdal. Tous les champs, électriques et magnétiques décrivant les courants sources et induits, oscillent à la même fréquence. En revanche, ils peuvent être déphasés. Ainsi si un courant périodique sinusoïdal de fréquence f et de pulsation $\omega = 2\pi f$ est appliqué aux bornes de l'inducteur: $I = I_0 e^{i\omega t}$, l'approximation harmonique permet de découpler les dépendances spatiales et temporelles. Les champs électromagnétiques peuvent s'écrire:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{B}(\vec{r}) e^{i\omega t}), \quad (2.76)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{H}(\vec{r}) e^{i\omega t}), \quad (2.77)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t}), \quad (2.78)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{A}(\vec{r})e^{i\omega t}). \quad (2.79)$$

Où $\vec{B}, \vec{H}, \vec{E}, \vec{A}$ représentent les champs électromagnétiques complexes et $\text{Re}(\cdot)$ la partie réelle. De cette manière, le problème est réduit à une équation stationnaire. Les modules des champs complexes calculés représentent les amplitudes efficaces des champs sinusoïdaux réelles et la phase des champs complexes donne la différence de phase avec le signal périodique source imposé aux bornes de l'inducteur. Cette approximation devient inadaptée si:

- la source de courant appliquée aux bornes de l'inducteur n'est plus de forme sinusoïdale car dans ce cas les champs électromagnétiques eux-mêmes sont de nature différente,
- le matériau employé a un comportement magnétique non linéaire car dans ce cas, une source de courant, même sinusoïdale, donne naissance à des champs électromagnétiques non sinusoïdaux.

Néanmoins, malgré ces limitations importantes, la grande majorité des auteurs ont utilisé cette approche et ont favorisé, par une approche stationnaire, la réduction des temps de calcul.

c/ Conclusion sur les approximations standards

La quasi-totalité des modèles mathématiques utilisés pour modéliser le chauffage par induction négligent les courants de déplacement, approximation raisonnable dans le domaine de fréquence employé typiquement sur les installations industrielles. Une large majorité des auteurs a également choisi d'appliquer en plus l'approximation harmonique malgré le fait qu'elle soit mal adaptée aux matériaux ferromagnétiques. En effet pour ces matériaux, les harmoniques secondaires des champs électromagnétiques, de fréquences différentes, ne sont pas calculées et donc n'apparaîtront pas au niveau du calcul de la puissance Joule injectée dans le calcul thermique. Bien sûr, pour des matériaux non magnétiques et une source sinusoïdale, cette approche est de loin la meilleure car elle amène des réductions significatives en termes de temps de calcul.

4.4. Les modèles électromagnétiques standards en symétrie axiale

Les différentes équations que l'on peut trouver dans la littérature pour décrire le champ électromagnétique au cours d'un procédé de chauffage par induction axisymétrique ont été répertoriées. Tous les modèles sont fondés sur le calcul du potentiel vecteur magnétique réduit dans ce cas à une composante scalaire perpendiculaire au domaine d'étude:

$\vec{A} = (0, A_\theta(r, z), 0)$ En remplaçant \vec{E} par son expression $\vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{A}$ dans l'équation (71) et en utilisant la loi d'Ohm (73) on obtient :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (2.80)$$

La densité de courant \vec{j} représente la contribution des courants sources, aussi bien que la contribution des courants induits. Il est important de noter que des courants sont induits aussi bien dans la pièce que dans l'inducteur. Il suffit alors de remplacer \vec{E} par son expression en terme de potentiel (60) pour obtenir l'équation vectorielle :

$$\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = -\sigma \vec{\nabla} V = \vec{j}_s, \quad (2.81)$$

où $\vec{j}_s = -\sigma \vec{\nabla} V$ représente la densité de courant imposée dans l'inducteur. En coordonnées cylindriques, l'équation (81) devient :

$$\sigma \frac{\partial A_\theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) = J_s, \quad (2.82)$$

Au lieu de développer l'équation en coordonnées cylindriques, de nombreux auteurs utilisent la formule vectorielle:

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) - \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \vec{A} \right) \quad (2.83)$$

Associée à la condition de jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, (81) devient une équation de type diffusion:

$$\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \vec{A} \right) = \vec{j}_s. \quad (2.84)$$

Si on réécrit l'équation (84) en coordonnées cylindriques et que l'on compare avec l'équation (82), on trouve qu'il manque deux termes dans l'équation (84):

$$\frac{A_\theta}{\mu_r r^2}, \quad (2.85)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu} \right) \frac{A_\theta}{r}. \quad (2.86)$$

Le terme (86) peut être significatif pour des matériaux ferromagnétiques sous la température de Curie ou en présence de gradients de température locaux. Cependant ce terme est toujours négligé dans les modèles mathématiques pouvant être trouvé dans la littérature. De même, peu d'auteurs prennent en compte le terme supplémentaire (85). Il serait intéressant d'évaluer l'importance de ce terme dans le calcul du potentiel magnétique.

L'approximation harmonique

L'inducteur est parcourue par un courant sinusoïdal de pulsation ω . La formulation harmonique consiste à remplacer le potentiel magnétique par son expression complexe (79) dans l'équation électromagnétique (84). La dérivée en temps du potentiel magnétique est remplacée par le produit du potentiel par $j\omega$. On obtient les équations stationnaires suivantes où le terme supplémentaire (86) est présent ou non suivant les auteurs:

$$j\sigma\omega\vec{A} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \vec{A} \right) = \vec{J}_s, \quad (2.87)$$

$$j\sigma\omega\vec{A} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \vec{A} \right) + \frac{\vec{A}}{\mu r^2} = \vec{J}_s, \quad (2.88)$$

Une équation similaire peut être développée pour le champ électrique réduit à sa composante orthoradiale scalaire.

4.5. Introduction du terme de courant source

Il existe trois régions distinctes à prendre en compte: la pièce à chauffer, le ou les inducteur(s) et l'air environnant. Si on considère un inducteur, l'équation électromagnétique possède un terme supplémentaire provenant du courant imposé aux bornes de l'inducteur. Dans ce cas, la densité de courant qui le parcourt contient une contribution due aux courants imposés et une contribution due aux courants induits:

$$\vec{J} = J_{source} \hat{e}_\theta + J_{induit} \hat{e}_\theta, \quad (2.89)$$

où la densité source $\vec{J}_{source} = J_{source} \hat{e}_\theta$ est définie de manière générale comme le gradient du potentiel électrique V :

$$J_{source} \hat{e}_\theta = -\sigma \vec{\nabla} V. \quad (2.90)$$

Etant donné que le potentiel électrique local n'est pas connu, il est préférable de se ramener à la tension totale aux bornes de l'inducteur. En symétrie axiale, il vient:

$$J_{source} \hat{e}_\theta = -\sigma \vec{\nabla} V = -\sigma \frac{V}{2\pi r} \hat{e}_\theta. \quad (2.91)$$

où V est la tension totale imposée aux bornes de l'inducteur. La densité induite

$\vec{J}_{induit} = J_{induit} \hat{e}_\theta$ correspond à la variation du potentiel magnétique :

$$J_{induit} = \sigma \frac{\partial A_\theta}{\partial t} \quad (2.92)$$

5. CONDITIONS DE CONTINUITÉ AUX INTERFACES

En l'absence de courants de surface, la composante normale de l'induction magnétique \vec{B} , ainsi que la composante tangentielle du champ magnétique \vec{H} doivent être continues:

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{n} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n}, \quad (2.93)$$

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \vec{t} = \vec{J}_{surface} \times \vec{n} = 0, \quad (2.94)$$

Qui s'écrit:

$$[\vec{H} \times \vec{n}] = 0,$$

où la notation $[f]$ désigne le saut de la fonction f à l'interface, $\vec{n} = \vec{n}_r \vec{e}_r + \vec{n}_z \vec{e}_z$ et \vec{t} représentent respectivement la normale et la tangente à l'interface. Si on applique ces conditions de passage au potentiel vecteur, il vient :

$$\begin{cases} [A] = 0 \\ \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial A_{\theta 1}}{\partial n} \right) = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial A_{\theta 2}}{\partial n} \right) \end{cases} \quad (2.95)$$

6. APPLICATION SUR LES FOURS A INDUCTION

Comme on a vu dans le premier chapitre le four à induction est une application de chauffage par induction, dans ce paragraphe on se base sur les fours à induction.

6.1. PROBLEME MATHÉMATIQUE

Pour calcul un champ électromagnétique il est nécessaire de résoudre les équations de Maxwell (96-98). afin de résoudre ces équations pour notre but, nous devons faire plusieurs conditions: (96) le système est rotationnelle symétrique sur l'axe z , tous les matériaux sont isotropes, non magnétiques et n'ont aucune charge électrique nette, (98) le courant de déplacement est négligées, (99) la distribution du courant électrique (et aussi la tension) est uniforme dans la bobine, (101) la qualité des courants (imposés et induits) est à stable et en conséquence les valeurs de champ électromagnétique sont des fonctions harmoniques avec une fréquence fixe.[2]

Dans ces conditions, les équations de Maxwell en forme différentielle et dans le système d'unités (mètre-kilogramme - seconde - coulomb) s'écrivent:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.96)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.97)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j} \quad (2.98)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.99)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2.100)$$

On introduit le vecteur du potentiel électrique \vec{A}

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.101)$$

Et avec la supposition de l'état axisymétrique, nous pouvons écrire les équations (96-100) sous la forme scalaire suivante:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_B}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_B}{\partial z} \right) = -\mu j_{\theta} \quad (2.102)$$

dans lequel le ψ_B est la fonction du flux magnétique défini par $\psi_B(r, z, t) \equiv r A_\theta(r, z, t)$, où A_θ est la composante azimutal de \vec{A} et (r, θ, z) sont les coordonnées cylindrique. En autres termes, nous supposons que tous les courants (coulant (J_e) et induits) coulant seulement dans la direction azimutale dans l'enroulement et dans l'objet à chauffé.[2]

Si nous incluons l'effet de l'inductance dans la bobine d'inducteur les courants de Foucault seront représentés par $J_f = -(\sigma/r) (\partial \psi_B / \partial t)$, donc

$$J_\theta = \begin{cases} J_e + J_f - J_e - \frac{\sigma_{cu}}{r} \frac{\partial \psi_B}{\partial t} \\ J_f = -\frac{\sigma_\omega}{r} \frac{\partial \psi_B}{\partial t} \end{cases} \quad (2.103)$$

σ_{cu} et σ_ω sont la conductivité électrique de la bobine et d'objet, respectivement. Mettant $J_e = J_0 \cos \omega t$ est comme courant d'entraînement dans l'enroulement nous trouvons une solution de la forme

$$\psi_B(r, z, t) = C(r, z) \cos \omega t + S(r, z) \sin \omega t \quad (2.104)$$

là où $C(r; z)$ est la composante dans la phase et $S(r; z)$ est le composant hors phase de la solution.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial z} \right) = \begin{cases} -\mu_{cu} \left(J_0 - \frac{\sigma_{cu}}{r} S \right) & \text{dans la bobine} \\ \frac{\mu_\omega \sigma_\omega \omega}{r} S & \text{dans l'objet} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial z} \right) = \begin{cases} -\mu_{cu} \left(\frac{\sigma_{cu}}{r} C \right) & \text{dans la bobine} \\ -\frac{\mu_\omega \sigma_\omega \omega}{r} C & \text{dans l'objet} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.106)$$

Après la solution des deux équations (105) et (106) pour $C(r, z)$ et $S(r, z)$, la distribution des courants de Foucault et le du taux de dissipation d'énergie peuvent être calculés par:[2]

$$J_f = \frac{\sigma_\omega \omega}{r} [C(r, z) \sin \omega t - S(r, z) \cos \omega t]$$

$$J_f = J_s \sin \omega t - J_c \cos \omega t \quad (2.107)$$

Et :

$$P(r, z, t) = \frac{J_\theta^2}{\sigma}$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{\sigma_{cu} \omega^2}{r^2} \left[C^2 \sin^2 \omega t + \left(\frac{J_0 r}{\sigma_{cu} \omega} - S \right)^2 \cos^2 \omega t + C \left(\frac{J_0 r}{\sigma_{cu} \omega} - S \right) \sin 2\omega t \right] \right. & \text{pour la bobine} \\ \left. \frac{\sigma_{cu} \omega^2}{r^2} [C^2 \sin^2 \omega t + S^2 \cos^2 \omega t - C S \sin 2\omega t] \right] & \text{pour l'objet} \end{cases} \quad (2.108)$$

Ainsi, la puissance est généré dans toutes les parties métalliques (y compris la bobine) en fonction de 2ω La période de cette dépendance de temps est $\tau = 2\pi/\omega$ pour un système d'induction.

Quand on atteint plus d'un période on arrive au taux volumique de la génération de chaleur.

$$q(r, z) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} P(r, z, t) dt$$

$$= \begin{cases} \frac{\sigma_{cu}\omega^2}{2r^2} \left[C^2 + \left(\frac{J_0 r}{\sigma_{cu}\omega} - S \right)^2 \right] & \text{pour la bobine} \\ \frac{\sigma_{cu}\omega^2}{2r^2} [C^2 + S^2] & \text{pour l'objet} \end{cases} \quad (2.109)$$

6.2. PROBLEME MAGNETOTHERMIQUE

Le four à induction de creuset consiste principalement d'un creuset construit par une matière réfractaire, dans lequel la masse métallique à chauffer et être fondue est située, une couche mince de matériel isolant thermique et une bobine d'induction refroidie par circulation de l'eau.

D'autres pièces sont les jougs, placés autour de l'enroulement aux intervalles réguliers, à l'armature métallique, à un dispositif d'inclinaison et, dans la plupart des cas, à un couvercle

6.2. 1. Modèle magnétothermique d'un four à induction de creuset[8]

6.2. 1.1. Le problème de magnétodynamique

On propose le domaine de calcul représenté sur le figure 1, dans rOz coordonne. Cette 2D structure correspond à demi de coupe longitudinale du modèle physique représenté dans des coordonnées de cylindrique.

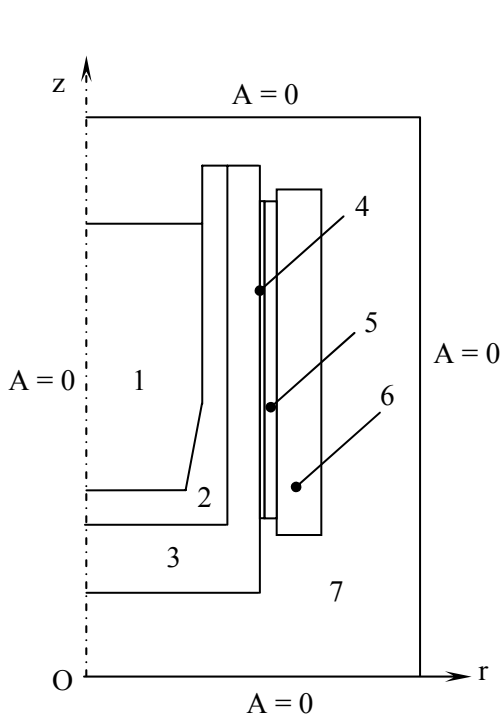


Fig. 2.5 – domaine de calcul pour le problème magnétique

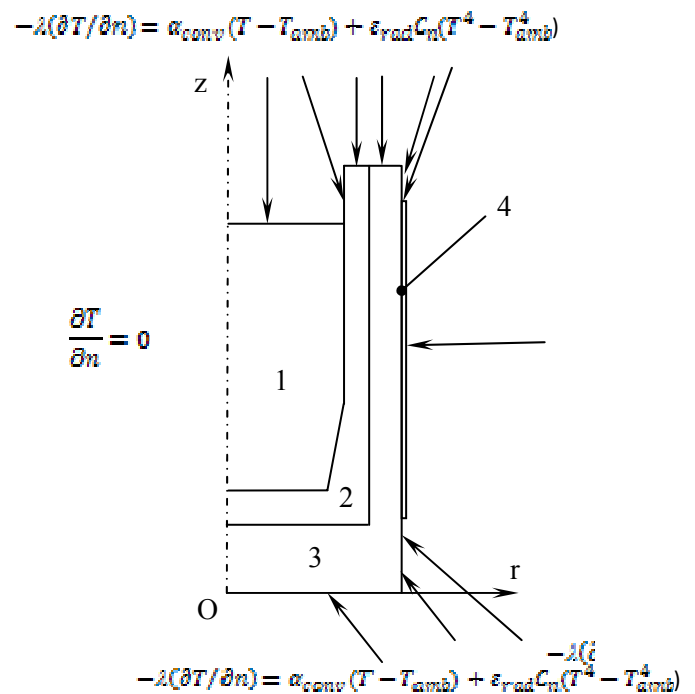


Fig. 2.6 – domaine de calcul pour le problème thermique, la variante du four sans couvercle[2]

Les régions sont:

- 1 - La charge - Région conductrice magnétique ou non magnétique, constitué de composition métallique;
- 2 - région en doublure réfractrice, non magnétique et non conductrice;
- 3 - région non magnétiques et non conductrice construite d'un matériau isolant;
- 4 - région mince isolante thermique entre le creuset et l'inducteur, pour la protection thermique des enroulements –non magnétiques et non-conductrice;
- 5 - inducteur (habituellement, cuivre) non magnétique.
- 6 - la région entourant (air) –non magnétique et non-conductrice;
- 7 - jougs magnétiques – peut être considérée la région magnétique et non-conductrice, en raison du niveau bas des pertes spécifiques dans les couches. Il y a deux exceptions: d'abord, les fours fonctionnant aux hautes fréquences quand elle est nécessaire pour considérer les jougs comme région magnétique et conductrice en raison des pertes accrues et en second lieu, le cas spécial des fours à basses capacités, fonctionnant aux dix ou aux centaines de kHz, quand les plaques sont faits en cuivre et nous doivent considérer cette région en tant qu'un matériau magnétique et conductrice.

En raison de la symétrie, la modélisation du four à induction de creuset est un problème axisymétrique 2D. Les courants sont seulement les composants ortho radial; le vecteur potentiel magnétique a la même direction que le courant. Le modèle mathématique qui exprime le vecteur de potentiel magnétique \vec{A} est donné par l'équation:

$$\vec{\nabla} \times \left(\left(\frac{1}{\mu} \right) \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) + j\omega \frac{1}{\rho} \vec{A} = \vec{J}_1 \quad (2.110)$$

là où, en général, on a la résistivité $\rho = \frac{1}{\sigma} = \rho(\theta)$ avec la température et le perméabilité magnétique $\mu = \frac{1}{\nu} = \mu(\theta, H)$ variable avec la température et champ magnétique, respectivement la réductivité $\nu = \mu(A, \theta)$.

Dans l'équation (1), la deuxième limite vers la gauche représente la densité des courants induits, dans une région non-conductrice il est nul. Si nous considérons un inducteur fait par un fil mince, cette limite est non nul seulement dans la charge. Le deuxième membre représente la source de densité de courant dans l'inducteur. Nous pouvons écrire (110) pour les régions du domaine de calcul:

- la charge 1:
$$\vec{\nabla} \times \left(\left(\frac{1}{\mu} \right) \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) + j\omega \sigma \vec{A} = \mathbf{0}. \quad (2.111)$$

- les couches de creuset et l'air (2+3+4+7):
$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mathbf{0}. \quad (2.112)$$

$$\text{- l'inducteur (5):} \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \cdot \vec{J}_1. \quad (2.113)$$

$$\text{- les jogs (6), si il existe:} \quad \vec{\nabla} \times \left(\left(\frac{1}{\mu_{Fe}} \right) \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = 0 \quad (2.114)$$

En ce qui concerne le problème axisymétrique, l'équation peut être écrite dans des coordonnées cylindriques (plan r-z). Le problème est résolu en utilisant le potentiel magnétique modifié $\tilde{r}\vec{A}$. Pour une excitation harmonique, nous prenons:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \vec{A}) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \vec{A}) \right) \right] + j\omega\sigma \frac{1}{r} (r \cdot \vec{A}) = \vec{J}_{ex} \quad (2.115)$$

Là où σ est conductivité électrique la et \vec{J}_{ex} est source de densité de courant dans l'inducteur.

Si nous supposons (dans certains cas) que la perméabilité magnétique est constante, ce 2D problème est beaucoup plus facile; La jauge de coulomb est satisfait implicite et le potentiel de vecteur est caractérisé par une valeur inconnue simple.

Dans le domaine de calcul représenté sur la Fig 2.5, la région d'inducteur est présentée en mode simplifié, comme une région rectangulaire, dans le plan r - z. Les dimensions de ce rectangle sont la profondeur de pénétration δ_1 dans le cuivre d'inducteur, à la fréquence de fonctionnement et à la vraie taille de l'inducteur. Quand nous assignons la source à cette région, nous devons tenir compte du facteur de remplissage axial de l'enroulement.

Pour le problème magnétique, les conditions de frontière sont représentées sur le fig. 10 et ont les explications suivantes:

- L'axe Oz est considéré une ligne de champ magnétique, ainsi $\vec{A} = 0$ respectivement

$$\vec{U} = r \cdot \vec{A} = 0;$$

- Toutes autres lignes qu'étoit le domaine de calcul sont considéré jusqu'ici situées de la zone de champ de force pendant que ces lignes représente l'infini, où le champ magnétique devient nul et $\vec{A} = 0$ respectivement $\vec{U} = 0$.

6.2.2. 2. Le problème thermique

Correspondant au domaine de calcul pour le champ magnétique, le domaine de calcul pour le champ thermique passer pour le four à induction de creuset est montré dans Fig. 2.

Les régions pour ce domaine sont: 1 – la charge, 2 – la doublure réfractaire, 3 – l'isolation thermique du creuset et 4 – la couche mince isolante thermique entre le creuset et l'inducteur. Ces régions représentent des matériaux avec les propriétés thermiques connues des données initiales.

Le modèle mathématique du passage thermique $\theta = \theta(r, z, t)$ est exprimé par l'équation:

$$(\gamma C_p) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{div}(-\lambda \cdot \text{grad } \theta) = p_j \quad (2.115)$$

là où ρ est la densité, C_p est la chaleur spécifique, γC_p est la capacité calorifique et λ est la conductivité thermique. Le membre côté droite de (7) représente la source de champ thermique, la densité volumique (valeur moyenne dans une période) de la puissance électromagnétique développée par l'effet de Joule des courants de Foucault:

$$p_j = \frac{1}{2} \sigma \omega^2 A A^* \quad (2.116)$$

C'est l'élément principal de couplage entre les phénomènes électromagnétiques et thermiques. Pour l'unicité de la solution de l'équation (7) il est nécessaire de connaître le champ thermique initial et la condition de frontière, en outre la source thermique de champ et les propriétés de matériaux.

L'état initial associé au modèle du champ thermique passager est $\theta(r, z, 0) = \theta_a$, qui signifie que, sur le commencement du processus de chauffage, tout dispositif à l'entourage de θ_a , à l'hypothèse acceptable pour la charge de fonctionnement du four. Pour d'autres situations il est possible de commencer le processus à d'autres températures $\theta \neq \theta_a$. Addition

Les frontières du domaine de calcul sont en fait les surfaces par celui le transfert thermique à partir des pièces de four à l'entourage ou l'eau de refroidissement est faite. Les conditions de frontière satisfaites par l'inconnue $\theta(r, z, t)$ sont:

– à l'axe de symétrie Oz , respectivement l'axe de symétrie du champ thermique, $\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0$, qui signifie la condition du flux thermique nul;

– sur toutes les surfaces d'échange thermique (convection et rayonnement) avec l'extérieur:

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} = \alpha_{conv} (\theta - \theta_a) + \varepsilon_{rad} \cdot C_n \cdot (\theta^4 - \theta_a^4) \quad (2.117)$$

Là où le côté droite, la première limite représente la convection et la deuxième limite, le rayonnement. α_{conv} est le coefficient de convection, ε_{rad} est l'émissivité total et $C_n = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ est la constante de Stefan.

Les deux coefficients pourraient dépendre de la température et l'émissivité pourrait dépendre en outre de l'addition de la qualité de la surface.

Un cas particulier est représenté par la surface thermique d'échange entre l'inducteur et l'eau de refroidissement qui circule dans les enroulements. Ici la transmission thermique est réalisée seulement par la convection:

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} = \alpha_{conv ind-apa} (\theta - \theta_{med apa}) \quad (2.118)$$

là où $\alpha_{conv ind-apa}$ est la transmissivité spécifique entre l'inducteur et l'eau de refroidissement dont la température moyenne est $\theta_{med apa}$.

Habituellement, dans le modèle numérique, cette condition est imposée sur la surface entre la couche d'isolation thermique et la région d'inducteur (dans ces situations n'apparaît pas dans le problème thermique); cette condition peut être également imposée sur la surface de la séparation entre les jougs et l'inducteur seulement si nous considérons que les jougs sont coincés à l'inducteur. Cette manière d'imposer des conditions de frontière sur les surfaces entre l'inducteur et presque les régions (solides) qui ne donnent pas des erreurs significatives parce que la conductivité thermique élevée du cuivre (environ 393 W/mK) détermine une plage négligeable de diminution de la température dans la petite épaisseur de l'enroulement d'inducteur[8].

6.2.2. 3. Couplage magnétothermique

Ces modèles sont employés pour résoudre le problème magnétothermique du four à induction de creuset, pour étudier respectivement l'accouplement entre le champ électromagnétique harmonique représenté par l'inconnu $\vec{A}(r,z)$ et le champ thermique transitoire $\theta(r, z, t)$ dans le domaine de calcul. Il est possible de résoudre ce problème couplé par différentes manières, la méthode la plus utilisée étant méthode d'accouplement alternative (étape par étape). Ainsi, au début du processus ($t = 0$) dans le système 2D on détermine la distribution du champ électromagnétique harmonique. Basant sur ceci et sachant les valeurs des propriétés électromagnétiques des matériaux, correspondant à la température initiale, on détermine la densité volumique de la puissance induite dans la charge (ou dans la charge et le conducteur, dans le cas du creuset d'acier ou de graphite).[8]

Quand on a la distribution des sources thermiques nous pouvons faire une première détermination de la distribution du champ thermique au premier pas qu'on fait.

6.2.3 Bilan de puissance

Nous déterminons les paramètres énergiques comme suit:

$$\text{– Rendement thermique:} \quad \eta_t = (P_{J2} - P_t)/P_{J2} \quad (2.119)$$

$$\text{– Rendement électrique:} \quad \eta_e = P_{J2}/(P_{J2} + P_{J1}) \quad (2.120)$$

$$\text{– Rendement totale :} \quad \eta = (P_{J2} - P_t)/(P_{J2} + P_{J1}) \quad (2.121)$$

Nous considérons au dessus:

$$\text{– la puissance induite dans la charge:} \quad P_{J2} = \int_{V2} \rho_2 J_2^2 dv \quad (2.122)$$

$$\text{– Les pertes de joule dans l'inducteur:} \quad P_{J1} = \int_{V1} \rho_1 J_1^2 dv \quad (2.123)$$

$$\text{– Les pertes thermiques} \quad P_t = \sum_{i=1}^n A_i \oint_{\Gamma_i} \alpha_i (\theta - \theta_a) ds \quad (2.124)$$

Là où ρ_2 est la résistivité de la charge métallique dans chaque nœud de la mainlle, J_2 est la densité de courant induite locale aux mêmes points et V_2 est le volume de charge. Puisque pendant le processus c'est une grande variation de la température de charge (généralement entre la température ambiante et la température de fonte ou versante) c'est un état impératif pour considérer la variation de la résistance de charge avec la température pour des résultats précis du modèle. On note que cette variation détermine la variation de la puissance induite dans la charge P_{J_2} et par conséquent la variation des rendements calculées comme ci-dessus pendant le processus [8].

Semblable, dans (124), ρ_1 est la résistivité du cuivre d'inducteur et J_1 est la densité de courant dans l'inducteur (source de champ électromagnétique).

On ce qui concerne la source de densité de courant dans l'inducteur, il est possible de résoudre le problème par deux manières différentes:

- la première variante, courant d'alimentation - consiste d'imposer une valeur de la densité de courant dans l'inducteur, d'une valeur constante pour le processus entier. C'est le cas d'une source de courant constant (un convertisseur qui maintien le courant constant quel que soit la variation de la résistance et de la réactance équivalentes du four pendant le processus);
- deuxième variante - tension d'alimentation – supposent que la tension appliquée sur l'inducteur est constante pendant le processus. Quand la configuration de l'inducteur est connu (nombre de spire, les dimensions de la section transversale, l'isolation) le courant total et la densité du courant dans l'inducteur sont résultent. Mais ces valeurs ne sont pas des constantes parce que tous les paramètres du four changent pendant le chauffage. Résulte dans ce cas la variation du courant et des pertes Joule P_{J_1} dans l'inducteur.

Les rendements (119-121) ont fortement une variation pendant le processus de chauffage. L'efficacité globale, représente la quantité qui caractérise mieux le processus électrothermique entier dans le four:

$$\eta_{global} = \frac{P_{J_2med} - P_{tmed}}{P_{J_2med} + P_{J_1}} \quad (2.125)$$

Où:

$$P_{J_2med} = \frac{\int_0^{t_i} \int_{V_2} \rho_2 J_2^2 dv dt}{t_i} \quad (2.126)$$

Est la valeur moyenne de la puissance induite responsable pendant le chauffage, et

$$P_{t\text{med}} = \frac{\int_0^{t_i} \left(\sum_{i=1}^n A_i \phi_{T_i} \alpha_i (\theta - \theta_a) ds \right) dt}{t_i} \quad (2.127)$$

Représente la valeur moyenne des pertes thermiques.

Dans les fours spéciaux avec le creuset conducteur (graphite ou acier), utilisé dans certains cas pour fondre les alliages ou les métaux non ferreux ayant une grande conductivité ou les métaux précieux, le chauffage est mixte par induction et par la conduction thermique du creuset de chauffage. Dans ce cas, le rendement global est:[8]

$$\eta_{\text{global}} = \frac{P_{J2\text{med}} + P_{J\text{grafit med}} - P_{t\text{med}}}{P_{J2\text{med}} + P_{J\text{grafit med}} + P_{J1}} \quad (128)$$

où $P_{J\text{grafit}}$ est la valeur moyenne de la puissance induite dans le creuset conducteur.

6.3. LES PROPRIÉTÉS MAGNETOTHERMIQUE DES MATÉRIAUX

Pour une analyse magnétothermique précise du four à induction de creuset il est nécessaire de connaître avec précision la variation par rapport à la température des propriétés de matériaux et des conditions d'échange thermiques pour le domaine de variation de la température entier. En outre, si nous essayons d'étudier le processus de chauffage au-dessus du point de fusion, il est important de tenir compte la variation de tous les paramètres pendant le changement de la phase. Nous proposons ici quelques lois de variation pour des propriétés de matériaux et échangeons des conditions afin de simuler mieux le processus électrothermique dans le four à induction de creuset.

Par exemple, pour le chauffage de la fonte dans le four à induction, les propriétés (variables avec la température) sont:

– résistivité: $\rho = 0,51 \cdot 10^{-6} \cdot (1 + 0,001 \cdot \theta) \Omega m$

– conductivité thermique: $\lambda = 2,5 \cdot 10^{-7} \cdot \theta^3 - 0,05 \cdot \theta + 50 \text{ W/mK}$

– perméabilité magnétique relative, donnée implicite par la dépendance $B = B(H, \theta)$

$$B(H, \theta) = \mu_0 + J_{s0} \cdot \frac{H_a + 1 - \sqrt{(H_a + 1)^2 - 4 \cdot H_a (1 - \alpha)}}{2 \cdot (1 - \alpha)} \cdot \text{coef}(\theta) \quad (2.129)$$

là où $H_a = \mu_0 H \cdot \frac{\mu_{r0} - 1}{J_{s0}}$, μ_{r0} est la perméabilité relative initiale, J_{s0} est la saturation de magnétisation, α est un coefficient pour ajuster la courbe de magnétisation ($0 \leq \alpha \leq 0,5$) et $\text{coef}(\theta)$ représente la variation des propriétés magnétique par rapport à la température.

– la chaleur spécifique – le " gaussien modèle + exponentiel ", doit tenir compte les deux phases de la transition pendant le processus entier, au point de curie et au point de fusion.[8]

$$\gamma \cdot C = \begin{cases} \gamma c_1(\theta) = \frac{E_{Curie}}{\sigma_{Curie} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-0,5 \cdot \left[\frac{\theta - \theta_{Curie}}{\sigma_{Curie}}\right]^2\right) + (V_0 - V_i) \cdot \exp\left(\frac{-\theta}{\tau_{Curie}}\right) + V_i, & \text{si } \theta \leq 1105^\circ\text{C} \\ \frac{E_{top}}{\sigma_{top} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-0,5 \cdot \left[\frac{\theta - \theta_{top}}{\sigma_{top}}\right]^2\right) + \gamma c_1(1105) \cdot \exp\left(\frac{-\theta}{\tau_{top}}\right) + V_i, & \text{si } \theta > 1105^\circ\text{C} \end{cases} \quad (2.130)$$

là E_{Curie} et E_{top} sont les énergies spécifiques des transformations au températures.

Conclusion

Comme l'on a vu la mise en équations mathématique des problèmes magnétique passe par les équations de maxwell les caractéristiques magnétique et électrique des matériaux à chauffé dépend de la température (perméabilité, conductivité,..) ce qui complique une modélisation numérique de ce phénomène.

CHAPITRE III

ONDULEUR

AUTONOME

Introduction

Un four à induction est basé sur un principe d'alimenter une charge inductive avec des fréquences élevées (moyenne où forte), nous savons cette fréquence est obtenu grâce à un onduleur. Que plus que la fréquence est élevée plus que les pertes dû aux courants de Foucault sont importante ce qui résulte un échauffement plus important. Cette fréquence est générer par un onduleur de tension prenons le cas d'un onduleur monophasé qui alimente l'inducteur d'un four Moyen fréquence (MF en KHZ).

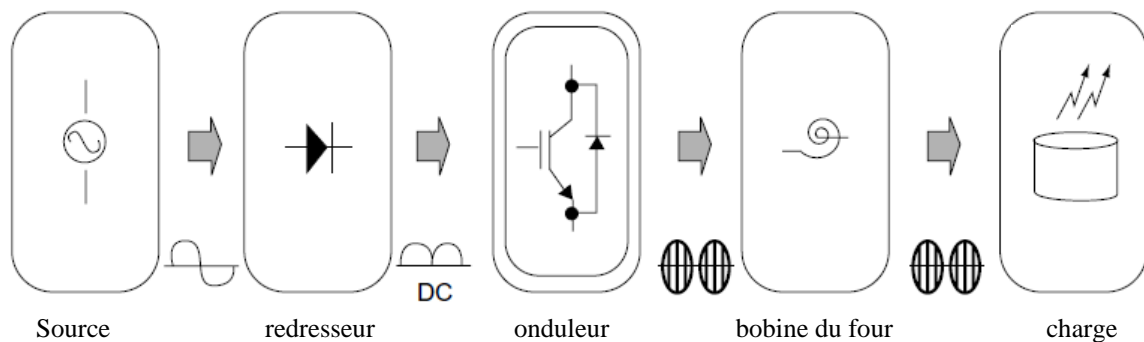


Fig (3.1) Chaîne d'alimentation d'un four à induction moyenne/haute fréquence

1. CONFIGURATION DU CIRCUIT DE PUISSANCE AVEC LA CHARGE

Le dispositif est constitué de deux ponts:

Un pont redresseur triphasé en série avec un pont onduleur monophasé susceptible de nous fournir une tension en MF, entre les deux une self de lissage Figure (3.2).

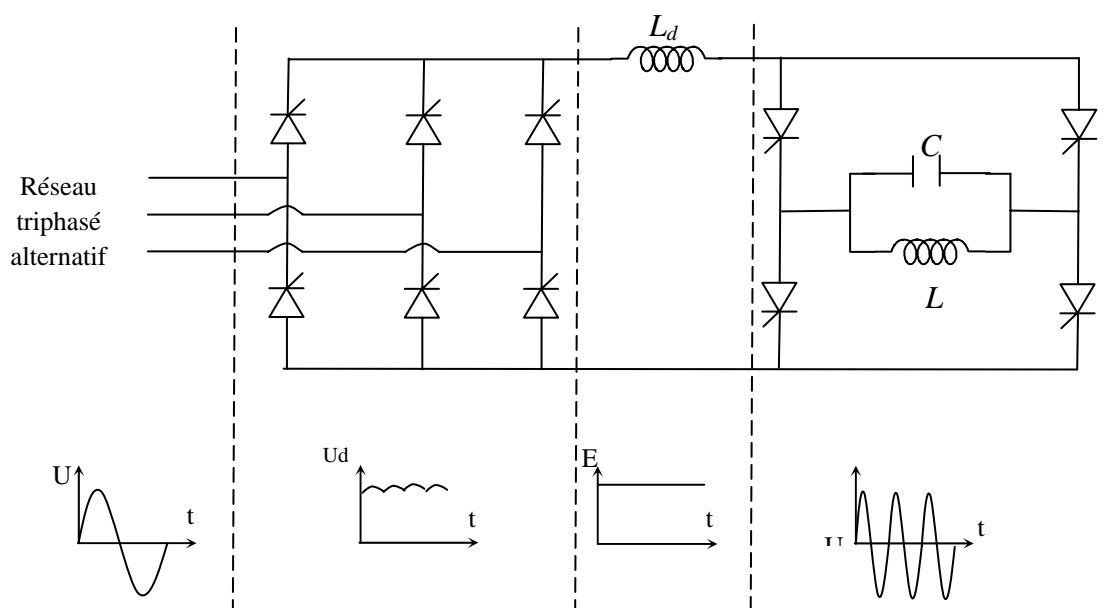


Fig. (3.2) principe d'alimentation d'un four

2. GENERALITE SUR L'ONDULEUR DE TENSION

Les onduleurs sont les convertisseurs statiques continu-alternatif permettant de fabriquer une source de tension alternative à partir d'une source de tension continue, un redresseur commandé tout thyristors peut fonctionner en onduleur. Ce type d'onduleur est dit «non autonome » ou encore «assisté » car il ne permet de fixer ni la fréquence ni la valeur efficace des tensions du réseau alternatif dans lequel il débite [14].

En se limitant pour le moment au cas des onduleurs monophasés, on peut classer ceux-ci en fonction de la forme d'onde qu'ils délivrent, classement que nous avons résumé ci-après.

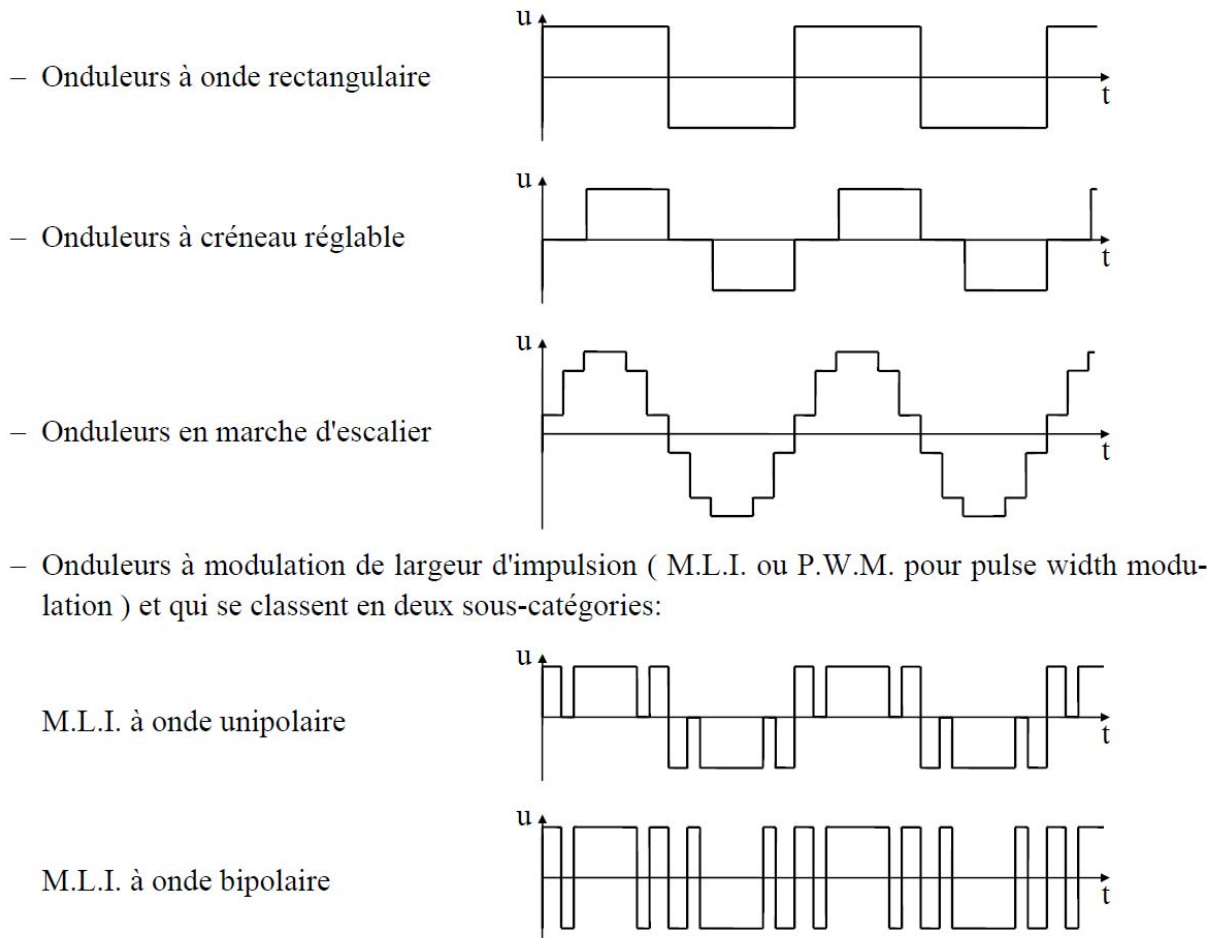


Fig. (3.3) Formes d'ondes à la sortie des onduleurs

à l'onduleur non autonome qui se contentait de réaliser le transfert de puissance d'une source continue vers un réseau alternatif préexistant, l'onduleur autonome génère un réseau alternatif totalement indépendant à partir d'une alimentation continue qui peut être, soit une batterie d'accumulateurs (ou toute autre source de f.é.m. continue), soit la tension issue d'un réseau alternatif redressé (dans ce cas, on qualifie également le montage de convertisseur indirect de fréquence).

On se propose dans ce chapitre d'étudier les onduleurs autonomes. Ces derniers fixent eux-mêmes la fréquence et la valeur efficace de leur tension de sortie.

3. Principe général de fonctionnement

Pour réaliser un onduleur autonome, il suffit de disposer d'un interrupteur inverseur K et d'une source de tension continue E la sortie du redresseur.

On se base ici sur le montage en pont

Deux types de montages sont utilisés :

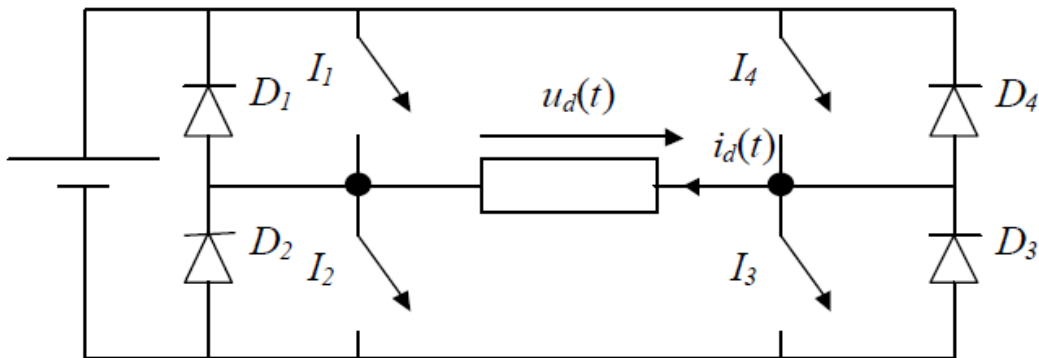


Fig. (3.4) montage en pont d'un onduleur monophasé

Le montage en pont, bien que plus complexe est de plus en plus utilisé du fait que l'on dispose de semi-conducteurs de moins en moins onéreux à puissance commutée fixe. En outre, dans le montage en demi-pont, la tension aux bornes des condensateurs fluctue toujours, ce qui rend difficile l'équilibrage du pont.

3.1. Débit sur une résistance pure

La charge est constituée par une résistance pure R . On considère la figure (3.4).

On a à tout instant: $u_d(t) = Ri_d(t)$

L'état des interrupteurs commandés nous permettent de donner l'expression de $u_d(t)$:

- pour $0 < t < T/2$: I_1 et I_3 sont ouverts.
 I_2 et I_4 sont fermés.

Donc $u_d(t) = +E$.

- pour $T/2 < t < T$: I_1 et I_3 sont fermés.
 I_2 et I_4 sont ouverts.

Donc $u_d(t) = -E$.

Le graphe de la tension $u_d(t)$ est représenté sur la figure (3.5)

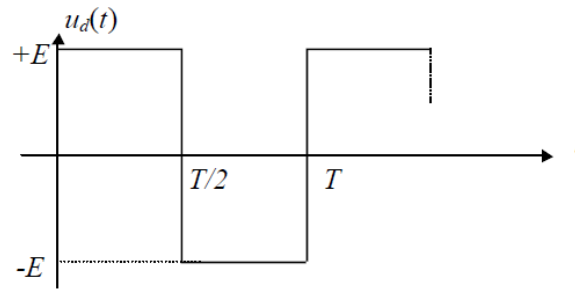


Fig. (3.5) Tension ondulée $u_d(t)$.

3.2. DEBIT SUR UNE CHARGE RL

La charge est constituée par une résistance R en série avec une inductance L .

On considère la figure (3.6).

On a, à tout instant:

$$u_d(t) = Ri_d(t) + L \frac{di_d}{dt} \tag{3.1}$$

La commande des interrupteurs est rappelée ci-dessous :

- Pour $0 < t < T/2$, Les interrupteurs I_2 et I_4 sont commandés à la fermeture; soit par application d'une tension Base-Emetteur permettant de saturer le transistor si les interrupteurs sont constitués de transistors ; soit par application d'un train d'impulsions sur leur gâchette s'il s'agit de thyristors GTO.
- Pour $T/2 < t < T$, les interrupteurs I_1 et I_3 sont commandés à la fermeture de la même façon.

3.2.1 Régime transitoire

On considère le système initialement au repos, soit: $i_d(0)=0$.

- pour $0 < t < T/2$

$$u_{d1}(t) = Ri_{d1}(t) + L \frac{di_{d1}}{dt} = E \tag{3.1}$$

L'indice « 1 » correspond à la première demi période.

La solution de cette équation est la somme du régime transitoire et du régime permanent et s'écrit :

$$i_{d1}(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} \tag{3.3}$$

A $t = 0$, on a: $i_{d10} = K + (E/R)$, soit $K = i_{d10} - (E/R)$ et, en remplaçant dans l'équation de $i_{d1}(t)$:

$$i_{d1}(t) = \left(i_{d10} - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} \tag{3.4}$$

i_{d10} étant le courant à $t = 0$. Le courant $i_{d1}(t)$ tend vers la valeur asymptotique finale (E/R) de façon exponentielle (système du premier ordre).

Pour la première demi période, nous avons considéré les conditions initiales nulles, soit $i_{d10} = i_{d1}(0) = 0$,

$$i_{d1}(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (3.5)$$

A $t = T/2$, les interrupteurs I_1 et I_3 sont commandés à la fermeture. Ils ne peuvent pas conduire car le courant est positif à $t = T/2$:

$$i_{d1}(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right) \quad (3.6)$$

Ce sont les diodes D_1 et D_3 qui conduisent. I_2 et I_4 sont ouverts.

Tant que le courant dans la charge est positif, on a:

$$u_{d2}(t) = R i_{d2}(t) + L \frac{di_{d2}}{dt} = E \quad (3.7)$$

De même que précédemment, la solution de cette équation s'écrit :

$$i_{d2}(t) = \left(i_{d20} + \frac{E}{R} \right) e^{-(t-T/2)/\tau} - \frac{E}{R} \quad (3.8)$$

i_{d20} étant le courant à $t = T/2$ soit:

$$i_{d20} = i_{d1}\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{E}{R} (1 - e^{-T/2\tau}) \quad (3.9)$$

Le courant $i_{d2}(t)$ tend vers la valeur asymptotique finale ($-E/2$) de façon exponentielle. Il s'annulera pour un temps $t_{10} < T$ du fait que $i_{d20} > 0$.

Pour $t < T_{10}$, les interrupteurs I_1 et I_3 entrent en conduction alors que les diodes D_1 et D_3 se bloquent.

La figure (3.6) décrit le régime transitoire du courant pour une charge RL pour trois facteurs de qualité différents. Plus Q augmente, plus le régime permanent est long à s'établir car pour une période T de fonctionnement donnée la constante de temps du circuit RL ($\tau = L/R$) augmente.

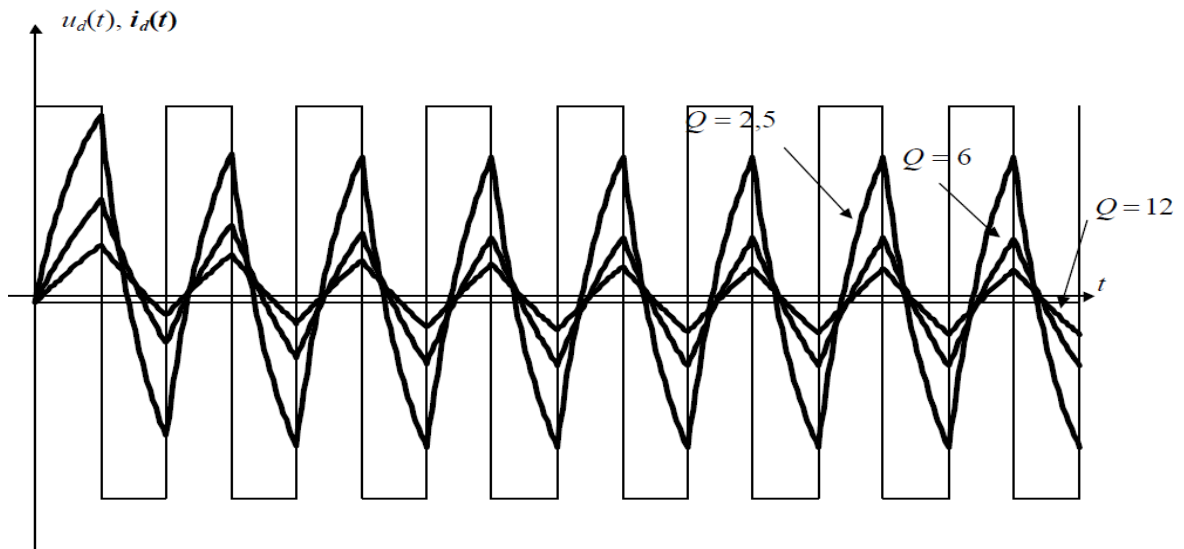


Fig. (3.6) charge RL, régime transitoire

3.2.2 Régime Permanent

Partant de conditions initiales nulles, on a vu qu’au bout d’un temps dépendant du facteur de qualité $Q = (L\omega/R)$, on atteindra un régime de fonctionnement permanent.

En régime permanent, le courant « oscille » entre I_{dM} et $-I_{dM}$ comme le montre la figure (3.7).

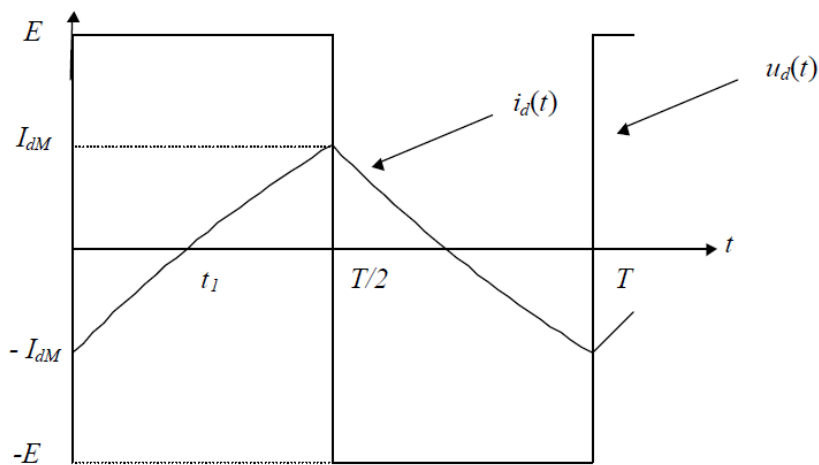


Fig (3.7) formes d’ondes en, cas d’une charge RL

Nous allons à présent calculer les caractéristiques propres au régime permanent.

Remarque préliminaire:

En régime permanent, $i_a(t)$ est forcément périodique de période T car l’équation différentielle $u_d(t)$ est linéaire (R et L sont indépendants du courant $i_a(t)$).

La charge étant inductive, le courant $i_a(t)$ sera en retard sur la tension $u_d(t)$, ce retard étant compris entre $t=0$ (charge R pure) et $t = T/4$ (charge L pure). Donc en régime permanent le courant $i_a(t)$ passera d’une valeur négative à une valeur positive à $t = t_1$ avec $0 < t_1 < T/4$.

.Ce courant, par raison de symétrie du fonctionnement du montage, passera d'une valeur positive à une valeur négative à $t = T/2 + t_1$.

Dans les deux cas, le courant «suit» l'allure de la tension $u_d(t)$ avec un retard t_1 .

a) Expressions de $i_d(t)$ et $u_d(t)$

Au cours d'une période de fonctionnement, on distingue quatre séquences.

- pour $0 < t < t_1$, I_1 et I_3 sont ouverts. I_2 et I_4 sont commandés à la fermeture. Le courant $i_d(t)$ étant négatif à $t = 0$, égal à $-I_{dM}$, ils ne peuvent conduire. Ce sont donc les diodes D_2 et D_4 qui conduisent le courant $i_d(t)$.

On a :

$$u_d(t) = Ri_d(t) + L \frac{di_d}{dt} = E \tag{3.10}$$

$$i_{d1}(t) = \left(-I_{dM} - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} \tag{3.11}$$

avec $\tau = LR$

A $t = t_1$, $i_d(t)$ s'annule.

- pour $t_1 < t < T/2$, I_2 et I_4 se mettent à conduire tandis que D_2 et D_4 se bloquent. Les équations donnant $i_d(t)$ et $u_d(t)$ restent les mêmes que précédemment.
- pour $T < t < t + T/2$, I_2 et I_4 sont commandés à l'ouverture et se bloquent. I_1 et I_3 sont commandés à la fermeture. Le courant $i_d(t)$ étant positif à $t = T/2$, égal à $+I_{dM}$ par raison de symétrie, I_1 et I_3 ne peuvent pas conduire. Ce sont donc les diodes D_1 et D_3 qui conduisent le courant $i_d(t)$.

On a : $u_d(t) = -E = Ri(t) + L$

d'où :

$$i_d(t) = -\frac{E}{R} + \left(I_{dM} + \frac{E}{R}\right) \exp\left(-\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau}\right) \tag{3.12}$$

A $t = T + t_1$, $i_d(t)$ s'annule.

- pour $T/2 + t_1 < t < T$, I_1 et I_3 conduisent. D_1 et D_3 sont bloquées. Les équations donnant $u_d(t)$ et $i_d(t)$ restent les mêmes que précédemment.

b) Calcul de I_{dM}

- Pour $0 < t < T/2$, l'équation différentielle permettant de donner l'allure de $i_d(t)$ s'écrit :

$$E = Ri_{d1}(t) + L \frac{di_{d1}}{dt} \Rightarrow i_{d1}(t) = \left(-I_{dM} - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} \tag{3.13}$$

L'indice «1» correspond à l'intervalle de temps $0 < t < T/2$

- Pour $T/2 < t < T$, on a :

$$-E = Ri_{d2}(t) + L \frac{di_{d2}}{dt} \Rightarrow i_{d2}(t) = -\frac{E}{R} + \left(I_{dM} + \frac{E}{R}\right) \exp\left(-\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau}\right) \quad (3.14)$$

En régime permanent, le courant $i_d(t)$ étant périodique de période T, on écrit:

$$i_{d1}(0) = -I_{dM} = i_{d2}(T) = -\frac{E}{R} + \left(I_{dM} + \frac{E}{R}\right) \exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right) \quad (3.15)$$

$$i_{d1}(T/2) = I_{dM} = i_{d2}(T) = \frac{E}{R} + \left(-I_{dM} - \frac{E}{R}\right) \exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right) \quad (3.16)$$

L'une ou l'autre des deux équations précédentes permet d'obtenir I_{dM} .

Prenons l'équation de $i_{d1}(0)$.

$$-I_{dM} = \frac{E}{R} \left(-1 + \exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)\right) + I_{dM} \exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right) \quad (3.17)$$

$$-I_{dM} \left(1 + \exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)\right) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)\right) \quad (3.18)$$

Soit:

$$I_{dM} = \frac{E}{R} \frac{\left(-1 + \exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)\right)}{\left(1 + \exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)\right)} = \frac{E}{R} \operatorname{th}\left(\frac{T}{4\tau}\right) \quad (3.19)$$

c) Calcul de t_1

A $t = t_1$, $i_{d1}(t) = 0$, soit:

$$0 = \frac{E}{R} + \left(-I_{dM} - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{t_1}{\tau}} \quad (3.20)$$

d'où:

$$t_1 = -\tau \ln \frac{\frac{E}{R}}{I_{dM} + \frac{E}{R}} = -\tau \ln \left(\frac{1}{1 + \operatorname{th}\left(\frac{T}{4\tau}\right)}\right) = \tau \ln \left(1 + \operatorname{th}\left(\frac{T}{4\tau}\right)\right) \quad (3.21)$$

4. Onduleurs à résonance

On désigne sous ce nom des onduleurs de tension ou de courant dont la charge est constituée par des circuits oscillants peu amortis et dont la fréquence de fonctionnement est adaptée aux paramètres de la charge de façon à avoir en permanence un fonctionnement au voisinage de la

résonance, ce qui entraîne en particulier que la grandeur non imposée par la source présente une allure quasi sinusoïdale. Par ailleurs, l'impédance de la charge évoluant très rapidement avec la fréquence, ceci permet de régler l'amplitude de la grandeur de sortie libre par simple action sur la fréquence de fonctionnement de l'onduleur[14].

Initialement, les onduleurs à résonance étaient réalisés à base de thyristors. Pour éviter d'avoir à leur adjoindre des circuits de blocage, on faisait systématiquement fonctionner ceux-ci à des fréquences telles que le circuit de charge se comporte comme un récepteur capacitif. Actuellement, l'utilisation, au moins dans le cas des onduleurs de tension, de semi-conducteurs à blocage par l'électrode de commande permet de s'affranchir de cette contrainte, le choix de la fréquence de fonctionnement n'étant plus guidé que par des considérations de réglage du signal de sortie non imposé par la source.[11]

Les onduleurs à résonance étant essentiellement à base de structures en pont, nous nous contenterons ici de rappeler les deux montages possibles, en précisant simplement leurs conditions de fonctionnement.

Soit;

$X_L = jL\omega$ et $X_C = 1/j\omega C$ on obtient la résonance quand $X_L = X_C$, la fréquence de résonance est donné donc par : $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$.

a) Onduleur de tension à résonance série

Sa charge est constituée par un circuit RLC série. Compte tenu de ses caractéristiques, comportement capacitif aux fréquences inférieures à la fréquence de résonance $1/2\pi\sqrt{LC}$ et inductif au-delà, la fréquence de l'onduleur devra être inférieure à la fréquence de résonance pour avoir un fonctionnement en commutation naturelle. Par contre, si les interrupteurs de l'onduleur peuvent fonctionner en commutation forcée, il est préférable d'utiliser une fréquence supérieure ou égale à la fréquence de résonance puisque les harmoniques du signal de sortie sont d'autant plus étouffés que la fréquence est plus grande.[11]

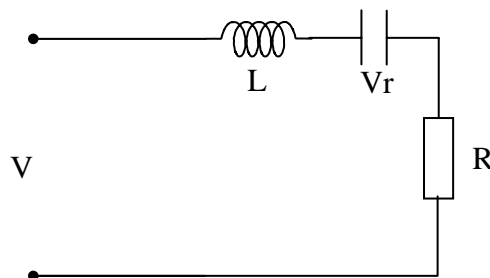


Fig. (3.8) Résonance série

b) Onduleur de courant à résonance parallèle

Sa charge est constituée par un circuit RLC parallèle dont la fréquence de résonance reste égale à $1/2\pi\sqrt{LC}$ mais qui, lui par contre, est inductif aux basses fréquences et capacitif aux fréquences élevées. Ceci permet en particulier un fonctionnement en commutation naturelle au-delà de la fréquence de résonance, donc l'utilisation de commutateurs à thyristors tout en minimisant les harmoniques du signal de sortie.

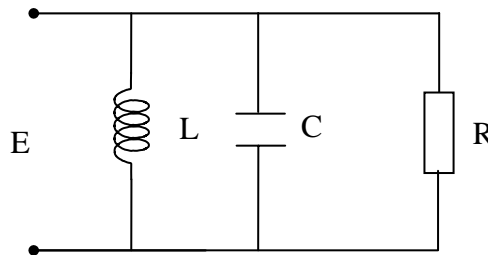


Fig. (3.9) Résonance parallèle

Il faut cependant noter que, dans ce cas, comme le condensateur est déchargé à la mise sous tension de l'onduleur, la première commutation ne pourrait pas s'effectuer correctement. Il faut donc procéder à un "démarrage" de l'onduleur, par exemple en excitant une première fois le circuit RLC à l'aide d'un condensateur auxiliaire, lui-même chargé au préalable.[11]

Les formes suivantes représentent l'énergie électrique (E_L) emmagasiné dans l'inducteur et transmis à la capacité, (E_C) est l'énergie emmagasinée dans la capacité et transmis à l'inducteur. (3.21)

$$i = \sqrt{2}I \sin \omega t \text{ (A)}$$

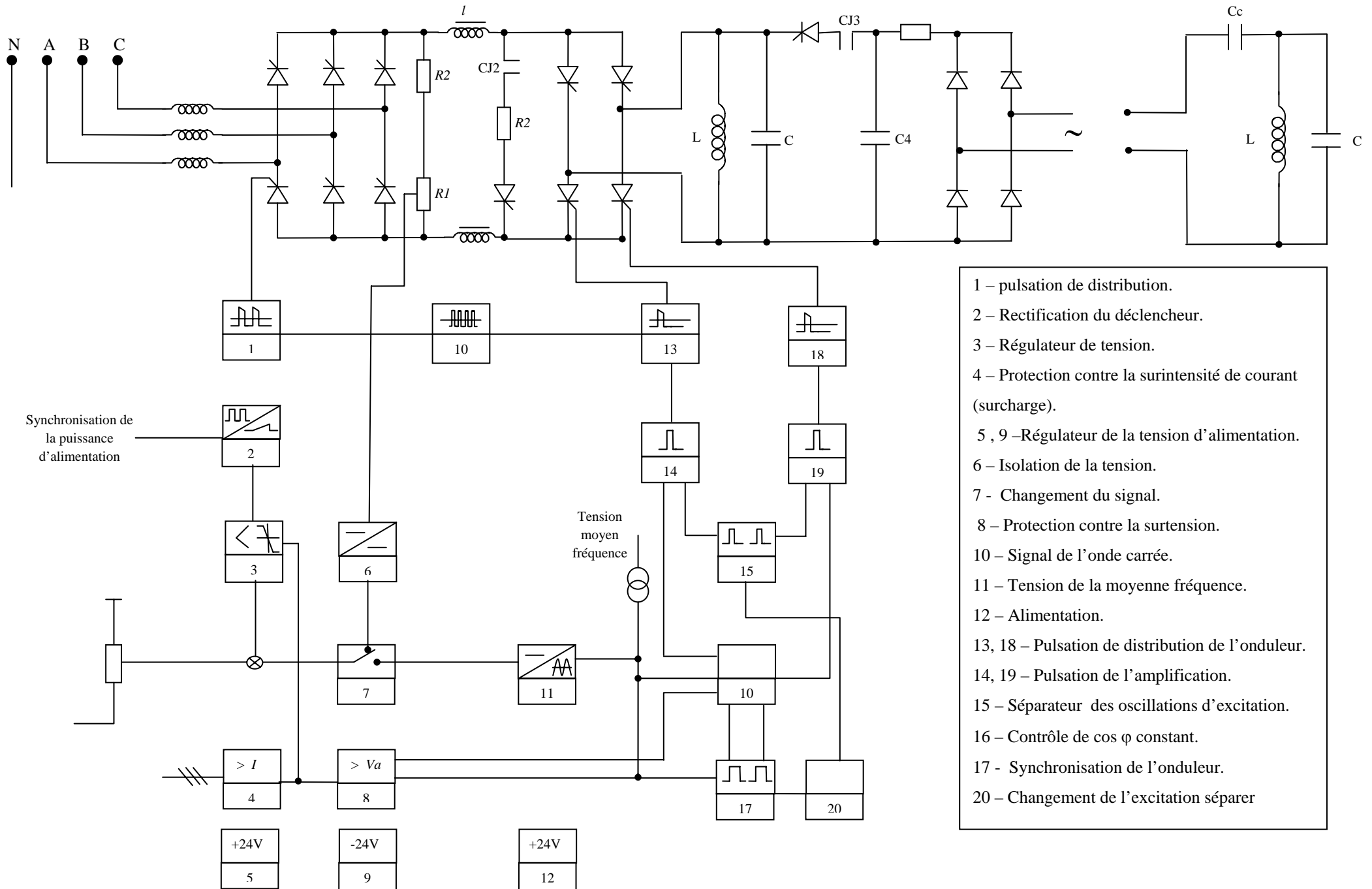
$$V_c = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{\sqrt{2}I}{\omega C} \cos \omega t \text{ (V)} \quad (3.22)$$

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2 = L I^2 \sin^2 \omega t \text{ (Joule)} \quad (3.23)$$

$$E_C = \frac{1}{2} C V_c^2 = \frac{I^2}{\omega^2 C} \cos^2 \omega t = L I^2 \cos^2 \omega t \text{ (Joule)}. \quad (3.24)$$

5. Exemple d'une installation électrique de la commande d'un four à induction moyenne fréquence.

La figure (3.10) représente un schéma électrique simplifié de la commande électrique d'un four à induction fréquence KPGS 160KW (tension continue max 500V, courant max 340A, tension alternatif maximale MF (700V) et le courant alternatif max 306A avec un facteur de puissance de 0.81.



- 1 – pulsation de distribution.
- 2 – Rectification du déclencheur.
- 3 – Régulateur de tension.
- 4 – Protection contre la surintensité de courant (surcharge).
- 5, 9 – Régulateur de la tension d'alimentation.
- 6 – Isolation de la tension.
- 7 – Changement du signal.
- 8 – Protection contre la surtension.
- 10 – Signal de l'onde carrée.
- 11 – Tension de la moyenne fréquence.
- 12 – Alimentation.
- 13, 18 – Pulsation de distribution de l'onduleur.
- 14, 19 – Pulsation de l'amplification.
- 15 – Séparateur des oscillations d'excitation.
- 16 – Contrôle de $\cos \varphi$ constant.
- 17 – Synchronisation de l'onduleur.
- 20 – Changement de l'excitation séparer

Fig. installation électrique à base des thyristors pour moyenne fréquence.

Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté une brève représentation d'un onduleur autonome, il représente une partie importante du four à induction, le processus de chauffage par induction est basé sur les pertes par courant de Foucault qui dépendent de la fréquence, la fréquence imposé à l'inducteur est généré par cet onduleur, On utilise essentiellement des onduleurs à résonance. Les circuits de charge ne sont généralement pas de type oscillant, il faut les compléter par une inductance ou un condensateur suivant le cas.

CHAPITRE IV

MODELISATION ANALYTIQUE DU CHAUFFAGE PAR INDUCTION

Introduction

On a vu précédemment que le phénomène de chauffage par induction est lié aux lois générales d'électromagnétisme, le calcul des grandeurs physique d'un four à induction passe par la résolution des équations de Maxwell, cette résolution peut être faite par des différentes méthodes, permet ces méthodes les éléments fini, l'analytique, les différences finis, les volumes fini, etc.

Dans ce chapitre on présente une méthode analytique qui passe toujours par la résolution des équations de Maxwell.

1. Modélisation analytique du chauffage par induction

Pour modélisé le processus du chauffage par induction on ce base sur les phénomènes électromagnétique et thermique présentés dans le chapitre précédent, donc pour notre cas on déterminera le champ magnétique, les courants de Foucault induits et la puissance dissipé par effet Joule dans la pièce à chauffer, en plus le calcul de la température résultante de la puissance dissipée.

On ce base sur deux cas, le premier cas c'est une plaque conductrice sous forme rectangulaire, le deuxième cas d'une cylindre.

1. 1. Plaque conductrice

Une plaque conductrice de longueur et largeur infini, d'épaisseur (e) plongée dans un champ magnétique variable appliqué suivant l'axe (Oy), comme le montre la figure (4. 1).

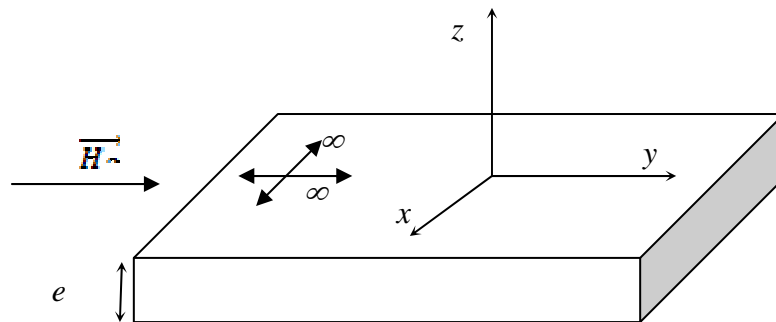


Fig. (4. 1) plaque infini

Cette plaque possède une perméabilité μ et une conductivité σ constantes.

On suppose aussi que les courants de déplacement $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mathbf{0}$. [1]

Pour calculer les différentes grandeurs \vec{H} , \vec{J} , et \vec{E} dans la plaque, il faut résoudre les équations de Maxwell couplées aux équations du milieu.

Les deux équations de Maxwell suivantes:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (4.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.2)$$

Et les équations du milieu:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (4.3)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (4.4)$$

a) Calcul du champ magnétique à l'intérieur de la plaque \vec{H}

Comme le champ d'excitation est appliqué suivant l'axe « Oy », le champ à l'intérieur est aussi suivant cette direction.

$$\text{On à: } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{\sigma} \vec{\nabla} \times \vec{J} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

ce qui donne:

$$\frac{1}{\sigma} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (4.5)$$

Le laplacien vectoriel s'écrit comme suit:

$$\Delta \vec{H} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (4.6)$$

Où:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \text{ donc } \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -\Delta \vec{H} \quad (4.7)$$

Remplaçant dans l'équation (4.5)

$$-\Delta \vec{H} = -\sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (4.8)$$

$$\Delta \vec{H} = \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (4.9)$$

L'équation (4.9) est appelé l'équation de Helmholtz[1].

Et comme on a considéré que la pièce est infinie suivant les deux axes (Oy) et (Oz), le champ est homogène suivant ces deux directions, mais il dépend de la troisième direction et le temps(t).

$$\Delta H = \begin{pmatrix} \Delta H_x \\ \Delta H_y \\ \Delta H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta H(z, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 H(z, t)}{\partial z^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 H(z, t)}{\partial z^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial H(z, t)}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 H(z, t)}{\partial z^2} = \mu \sigma \frac{\partial H(z, t)}{\partial t} \quad (4.12)$$

Le champ d'excitation est variable dans le temps. On peut l'écrire sous la forme:

$$\vec{H} = H_0 e^{i(\omega t)} \vec{u}_y \quad (4.13)$$

Pour résoudre l'équation (4.12), on utilise la méthode de séparation des variables:

$$\vec{H}(z, t) = \bar{h}(z, t) e^{i(\omega t)} \quad (4.14)$$

On dérive l'équation (4.14) et en remplace dans l'équation (4.12), on obtient:

$$\frac{\partial^2 \bar{h}(z, t)}{\partial z^2} - i \mu \sigma \omega \bar{h}(z, t) = 0 \quad (4.15)$$

L'équation différentielle est une équation ordinaire deuxième ordre son équation caractéristique est:

$$k^2 - i \mu \sigma \omega = 0 \Rightarrow k = \pm (i + 1) \frac{1}{\delta} \quad (4.16)$$

δ est l'épaisseur de pénétration (peau) qui donné par;

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}} \quad (4.17)$$

Donc la solution de l'équation (4.15) est donnée par:

$$\bar{h}(z, t) = \bar{A} \cdot ch(kz) + \bar{B} \cdot sh(kz) \quad (4.18)$$

Pour trouver les constantes \bar{A}, \bar{B} on utilise les conditions aux limites (symétrie ou antisymétrie) le repère au centre de la plaque.

$$\bar{A} \left(-\frac{e}{2} \right) = h \left(\frac{e}{2} \right) = H_0 \quad (4.19)$$

Alors la fonction est paire donc on peut éliminer le (sh) de l'équation (4.18)

$$\bar{h}(z, t) = \bar{A} \cdot ch(kz) \quad (4.20)$$

$$\bar{h}(z, t) = \frac{H_0}{ch\left(k\frac{e}{2}\right)} \cdot ch(kz) \quad (4.21)$$

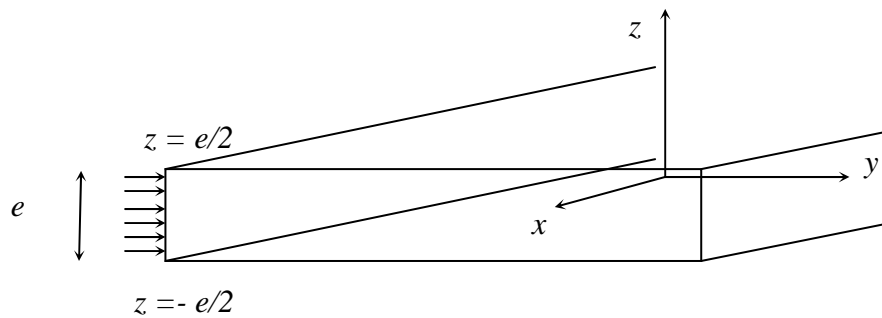


Fig. (4. 2) la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique

b) Calcul de la densité volumique des courants induits dans la plaque \vec{J}

On a d'après l'équation de maxwell:

$$J = -\frac{\partial H(z, t)}{\partial z} \hat{i} \Rightarrow \vec{J}(z) = -\frac{H_0}{ch\left(k\frac{e}{2}\right)} \cdot sh(kz) \quad (4.22)$$

Pour calculer les pertes, on doit calculer:

$$|\vec{J}^2(z)| = \vec{J}(z) \cdot \vec{J}^*(z) \quad (4.23)$$

Donc l'expression de la densité volumique des courants s'écrit:

$$|\vec{J}^2(z)| = H_0^2 \frac{2}{\delta^2} \cdot \frac{\left(ch\left(\frac{2}{\delta}z\right) - \cos\left(\frac{2}{\delta}z\right) \right)}{\left(ch\left(\frac{e}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2}{\delta}\right) \right)} \quad (4.24)$$

c) Calcul des pertes par les courants de Foucault

Soit:

$$dP = dR \cdot I^2 \quad (4.25)$$

$$R = \rho \frac{L}{s} \Rightarrow dP = \rho \frac{dL}{s} I^2 \quad (4.26)$$

$$P = \frac{1}{\sigma} \iiint |J^2(z)|.dv \rightarrow P = \frac{1}{\sigma} \iiint |J^2(z)|.dxdydz \quad (4.27)$$

$$P = \frac{2e.l.L}{\sigma\delta e} H_0^2 \cdot \frac{\left(sh\left(\frac{2}{\delta}\right) - sin\left(\frac{2}{\delta}\right) \right)}{\left(ch\left(\frac{e}{\delta}\right) - cos\left(\frac{2}{\delta}\right) \right)} \quad (4.28)$$

Et $v = e.l.L$

Donc les pertes par unités de volume peut être calculé par:

$$\frac{P}{v} = \frac{2}{\sigma\delta e} H_0^2 \cdot \frac{\left(sh\left(\frac{2}{\delta}\right) - sin\left(\frac{2}{\delta}\right) \right)}{\left(ch\left(\frac{e}{\delta}\right) - cos\left(\frac{2}{\delta}\right) \right)} \quad (4.29)$$

Cette dernière expression s'appel les pertes par courants de Foucault par unité de volume.

L'analyse du rapport (e/δ) exprime la pénétration du champ. Deux cas possible d'analyse:

$$* \frac{e}{\delta} \ll 1$$

$$* \frac{e}{\delta} \gg 1$$

1^{er} cas: $\frac{e}{\delta} \ll 1$ (faible fréquence)

En utilisant la série de Taylor on obtient :

$$\frac{P}{v} = \frac{\pi^2}{6} \sigma . e^2 (B_{max} f)^2 \quad (4.30)$$

2^{ème} cas: $\frac{e}{\delta} \gg 1$ (haute fréquence)

On obtient :

$$\frac{P}{v} = \frac{2 \cdot \sqrt{\pi}}{e} \sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot \mu^{-\frac{3}{2}} (B_{max} f)^{\frac{1}{2}} \quad (4.30)$$

Pour obtenir la pénétration du champ, la densité volumique des courants induits, ainsi que les pertes volumiques dissipées par effet joules, en utilisant les résultats trouvés précédemment (équations 4.21, 4.24 et 4.29).

1.2 Pièce conductrice sous forme cylindrique

Soit une pièce conductrice sous forme cylindrique de longueur infinie, et rayon (a), plongée dans un champ magnétique alternatif (variable) appliquée suivant (Oz). Comme le montre la figure suivante:

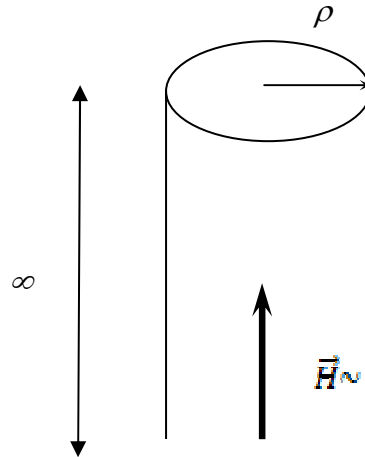


Figure (4.3) Cylindre plein

On suppose que la plaque possède une perméabilité μ et une conductivité σ constantes. On suppose aussi que les courants de déplacement $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mathbf{0}$.

Pour calculer le vecteur de Poyting il faut calculer les différentes grandeurs \vec{H} , \vec{E} dans le cylindre, il faut résoudre les équations de Maxwell couplées aux équations du milieu.

A partir des équations (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4) on trouve:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -\mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (4.32)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.33)$$

Et comme la pièce est infinie suivant (Oz) le champ est homogène suivant ces deux directions, mais il dépend de (ρ) et du temps.

Donc on peut calculer les grandeurs comme suit:

a) Calcul du champ électrostatique induit

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{\rho} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E(\rho, t) \end{vmatrix} = -\frac{\partial E(\rho, t)}{\partial \rho} \vec{e}_\varphi \quad (4.34)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \frac{1}{\rho} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -\rho \frac{\partial E(\rho, t)}{\partial \rho} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E(\rho, t)}{\partial \rho} \right) \vec{e}_z \quad (4.35)$$

On remplace dans l'équation (4.33)

$$\frac{\partial^2 E(\rho, t)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E(\rho, t)}{\partial \rho} - \mu \sigma \frac{\partial E(\rho, t)}{\partial t} = 0 \quad (4.36)$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, et comme l'excitation est sinusoïdale, on a donc:

$$E(\rho, t) = A \bar{E}(\rho, t) e^{i\omega t} \text{ en complexe} \quad (4.37)$$

A : constante qui dépend des conditions aux limites

$$\frac{\partial E(\rho, t)}{\partial \rho} = A \frac{\partial \bar{E}(\rho, t)}{\partial \rho} e^{i\omega t} \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial^2 E(\rho, t)}{\partial \rho^2} = A \frac{\partial^2 \bar{E}(\rho, t)}{\partial \rho^2} e^{i\omega t} \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial E(\rho, t)}{\partial t} = A i\omega \bar{E}(\rho, t) e^{i\omega t} \quad (4.39)$$

En remplace dans l'équation (4.36)

$$A \frac{\partial^2 \bar{E}(\rho, t)}{\partial \rho^2} e^{i\omega t} + \frac{1}{\rho} A \frac{\partial \bar{E}(\rho, t)}{\partial \rho} e^{i\omega t} - A \mu \sigma i\omega \bar{E}(\rho, t) e^{i\omega t} = 0 \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}(\rho, t)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{E}(\rho, t)}{\partial \rho} - i\mu \sigma \omega \bar{E}(\rho, t) = 0 \quad (4.41)$$

En fait un changement de variable;

Posons

$$k^2 = i\mu \sigma \omega = 0 \Rightarrow k = \pm (1 - i) \frac{1}{\delta} \quad (4.42)$$

δ est donné par l'équation (4.17).

Donc:

$$(k\rho)^2 \frac{\partial^2 \bar{E}(\rho, t)}{\partial \rho^2} + (k\rho) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{E}(\rho, t)}{\partial \rho} - (k\rho)^2 \bar{E}(\rho, t) = 0 \quad (4.43)$$

C'est une équation différentielle de la forme: $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$.

Avec: $x = k\rho$, $\alpha = 0$ et $y = \bar{E}(\rho)$

La solution de cette équation appelée fonction de Bessel ($J_\alpha(x)$ d'ordre α).

La solution de l'équation (4.43) est donnée par:

$$J_0(k\rho) = 1 - \frac{\left(\frac{k\rho}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{k\rho}{2}\right)^4}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{k\rho}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \dots \quad (4.44)$$

Donc en remplace dans l'équation (4.37)

$$\bar{E}(\rho, t) = A J_0(k\rho) e^{i\omega t} = \vec{E}(\rho, t) = A J_0(k\rho) e^{i\omega t} \vec{e}_z \quad (4.45)$$

b) Calcul du champ magnétique à l'intérieur de le cylindre \vec{H}

On a:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}(\rho, t)}{\partial \rho} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{E}(\rho, t)}{\partial \rho} \vec{e}_\varphi \quad (4.46)$$

$$-\frac{\partial \bar{E}(\rho, t)}{\partial \rho} = -A \frac{\partial J_0(k\rho)}{\partial \rho} e^{i\omega t} \quad (4.47)$$

Donc:

$$\alpha = 0 \Rightarrow -\frac{\partial \bar{E}(\rho, t)}{\partial \rho} = Ak J_1(k\rho) e^{i\omega t} \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \vec{H}(\rho, t)}{\partial \rho} = -\frac{1}{\mu} Ak J_1(k\rho) e^{i\omega t} \vec{e}_\varphi \quad (4.49)$$

$$\vec{H}(\rho, t) = -\frac{Ak}{i\mu\omega} J_1(k\rho) e^{i\omega t} \vec{e}_\varphi \quad (4.50)$$

c) La puissance électromagnétique

Dans ce paragraphe on cherche à trouver les composantes de la puissance (P et Q) ; où P conditionnant l'échauffement et Q incontournable pour créer le champ magnétique support du chauffage dans notre cas. Ces puissances serviront au dimensionnement de l'inducteur et à la modélisation du système. Elles peuvent calculer le flux du vecteur de Poyting à travers les surfaces de la pièce qui représente $P + iQ$ [1].

L'expression du vecteur de Poyting est donnée par:

$$\vec{P}_g = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad (4.51)$$

La puissance électromagnétique s'exprime par:

$$P + iQ = \iint_S \vec{P}_g \cdot d\vec{s} \quad (4.52)$$

d) Calcul du vecteur de Poyting

On a:

$$E(\rho, t) = A J_0(k\rho) e^{i\omega t} \vec{e}_z \quad (4.53)$$

Et:

$$\vec{H}(\rho, t) = -\frac{Ak}{i\mu\omega} J_1(k\rho) e^{i\omega t} \vec{e}_\varphi \Rightarrow \vec{H}^*(\rho, t) = \frac{Ak^*}{i\mu\omega} J_1(k^*\rho) e^{-i\omega t} \vec{e}_\varphi \quad (4.54)$$

Donc:

$$\vec{E} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & E(\rho) \\ 0 & H^*(\rho) & 0 \end{vmatrix} = -H^*(\rho, t) E(\rho, t) \vec{e}_\rho \quad (4.55)$$

$$\vec{P}_g = -A J_0(k\rho) e^{i\omega t} \frac{Ak^*}{i\mu\omega} J_1(k^*\rho) e^{-i\omega t} \vec{e}_\rho \quad (4.56)$$

$$\vec{P}_g = -A^2 \frac{k^*}{i\mu\omega} J_0(k\rho) J_1(k^*\rho) \vec{e}_\rho \quad (4.57)$$

Cette expression exprime le vecteur de Poyting

e) calcul de la puissance électromagnétique

on à:

$$- \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dv = - \iint_S \vec{P} \cdot d\vec{s} \quad (4.58)$$

Il n'existe que le flux sur la surface latérale

$$\text{Avec: } d\vec{s} = a \cdot d\varphi \cdot dz \vec{e}_\rho$$

a : le rayon du cylindre à la surface latérale c.-à-d.: $\rho = a$ le vecteur de Poyting vaut:

$$\vec{P} = -A^2 \frac{k^*}{i\mu\omega} J_0(ka) J_1(k^*a) \vec{e}_\rho \quad (4.59)$$

$$- \iint_S \vec{P} \cdot d\vec{s} = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 -A^2 \frac{k^*}{i\mu\omega} J_0(ka) J_1(k^*a) a dz d\varphi \quad (4.60)$$

$$- \iint_S \vec{P} \cdot d\vec{s} = A^2 \frac{k^*}{i\mu\omega} J_0(ka) J_1(k^*a) 2\pi a l \quad (4.61)$$

Avec l : longueur du cylindre.

Donc:

$$P_{em} = A^2 \frac{k^*}{i\mu\omega} J_0(k\alpha) J_1(k^*\alpha) 2\pi a l \quad (4.62)$$

L'expression de l'équation (4.62) exprime la puissance électromagnétique.

Si on suppose que les champs varient de façon sinusoïdale en fonction du temps (champ harmonique) implique l'étude en régime permanent.

On peut dire que la puissance électromagnétique est égale à la puissance apparente et la où cette dernière est donnée par:

$$S = Z.I. I^* \Rightarrow P_{em} = Z.I. I^* \quad (4.63)$$

Avec Z: et l'impédance et $V = Z.I.$

Donc on peut calculer l'impédance, pour représenter le schéma électrique équivalent de four à induction mais avant le calcul de celle-ci il faut calculer en premier lieu le courant électrique.

f) Calcul du courant:

On à:

$$I = \iint_{\vec{s}} \vec{j} d\vec{s} \Rightarrow I = \iint_{\vec{s}} \sigma \vec{E}(\rho, t) \cdot d\vec{s} \quad (4.64)$$

$$d\vec{s} = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi \vec{e}_z \Rightarrow I = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sigma A J_0(k\rho) e^{i\omega t} \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi \quad (4.65)$$

$$I = 2\pi \sigma A e^{i\omega t} \int_0^a \rho J_0(k\rho) d\rho \quad (4.66)$$

Donc:

$$I = 2\pi \sigma A \frac{a}{k} J_1(ka) e^{i\omega t} \quad (4.67)$$

Pour $\rho = a$ on à:

$$H = -\frac{Ak}{i\mu\omega} J_1(ka) e^{i\omega t}$$

Avec: a de direction \vec{e}_φ

$$I = 2\pi a \frac{\sigma}{k^2} J_1(ka) e^{i\omega t} \Rightarrow I = 2\pi \cdot a \frac{\sigma}{-i\mu\sigma\omega} k J_1(ka) e^{i\omega t} \quad (4.68)$$

Avec:

$$H = \frac{\sigma}{-i\mu\sigma\omega} k J_1(ka) e^{i\omega t} \Rightarrow I = 2\pi a H \quad (4.69)$$

Cette équation s'appelle théorème d'Ampère (circulation de \vec{H} sur la circonférence).

g) calcul de l'impédance

la puissance apparente est donnée par:

$$S = Z.I. I^*$$

Où:

$$I = 2\pi a \frac{\sigma}{-i\mu\omega} k J_1(ka) e^{i\omega t} \Rightarrow I^* = 2\pi a \frac{\sigma \cdot A}{k^*} J_1(k^*a) e^{-i\omega t} \quad (4.70)$$

donc:

$$I.I^* = 4\pi^2 a^2 \sigma^2 A^2 \frac{1}{k.k^*} J_1(ka) J_1(k^*a) \quad (4.71)$$

Alors:

L'étude est faite en régime permanent on à:

$$P_{em} = S \Rightarrow$$

$$P_{em} = A^2 \frac{k^*}{i\mu\omega} J_0(ka) J_1(k^*a) 2\pi a l = \left[4\pi^2 a^2 \sigma^2 A^2 \frac{1}{k.k^*} J_1(ka) J_1(k^*a) \right] \cdot Z \quad (4.72)$$

\Rightarrow

$$\frac{k^*}{i\mu\omega} J_0(ka) l = \left[2\pi a \sigma^2 \frac{1}{k.k^*} J_1(ka) \right] \cdot Z \quad (4.73)$$

$$Z = \frac{\frac{k^*}{i\mu\omega} J_0(ka) l}{2\pi a \sigma^2 \frac{1}{k.k^*} J_1(ka)} = \frac{k.k^* l}{2\pi a \sigma^2} \frac{1}{i\mu\omega} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)} \quad (4.74)$$

$$Z = \frac{l}{\pi a^2 \sigma} \frac{ka}{2} \frac{k^* J_0(ka)}{i\mu\omega J_1(ka)} \quad (4.75)$$

Avec:

$$k = \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}} (1 - i) \Rightarrow k^* = \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}} (1 + i)$$

$$k^* k = \frac{\mu\omega\sigma}{2} (1 + 2i - 1) = i\mu\omega\sigma$$

$$Z = \frac{l}{\pi a^2 \sigma} \frac{ka}{2} \frac{i\mu\omega\sigma J_0(ka)}{i\mu\omega J_1(ka)} \quad (4.76)$$

Avec:

$$R_{dc} = \frac{1}{\pi a^2} \quad (4.77)$$

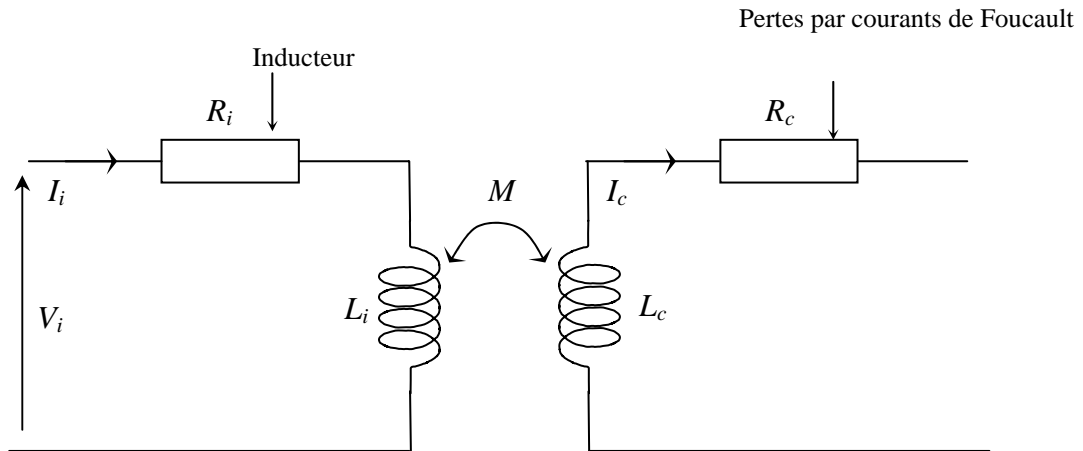
R_{dc} : Résistance en courant continu.

Donc l'impédance Z s'écrit:

$$Z = R_{dc} \frac{ka J_0(ka)}{2 J_1(ka)} \quad (4.78)$$

$$Z = R + iX$$

D'après l'équation précédente on peut présenter le schéma électrique équivalent du four à induction comme l'indique la figure suivante.



V_i est la tension sinusoidale aux bornes de l'inducteur, I_i le courant dans l'inducteur, R_i, L_i sont les paramètres propres de l'inducteur et R_c, L_c les paramètres propres de la pièce à chauffer. M est la inductance des deux circuits, on la prendra égale à $M = k\sqrt{L_i L_c}$ ou k et le coefficient de couplage qui traduit l'existence des fuites magnétiques.

L'analyse du rapport (e/δ) exprime la pénétration du champ. Deux cas possible d'analyse:

- * $\frac{e}{\delta} \ll 1$
- * $\frac{e}{\delta} \gg 1$

1^{er} cas: $\frac{e}{\delta} \ll 1$ (faible fréquence)

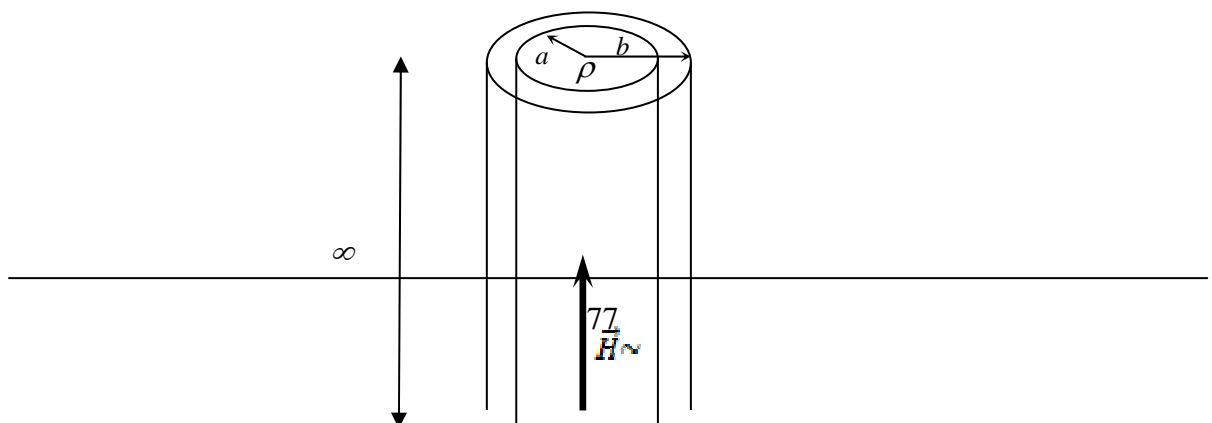
Le champ pénètre bien dans la pièce cylindrique, ce qui correspond à un chauffage à cœur.

2^{ème} cas: $\frac{e}{\delta} \gg 1$ (haute fréquence)

La pénétration du champ magnétique est mauvaise, ce qui permet de réaliser un chauffage superficiel de la pièce cylindrique.

h) Cas d'une pièce conductrice sous forme cylindrique creuse

Considérant une pièce conductrice sous forme cylindrique de longueur infinie, de rayon intérieur (a) et extérieur (b), on appliqué un champ variable suivant l'axe (Oz)



La puissance apparente égale à la puissance électromagnétique [1], donc:

$$P_{em} = S = P + iQ \quad (4.79)$$

On considère que le diamètre extérieur (b) est très grand par rapport à l'épaisseur ($e = b - a$) donc cette cylindre creuse est assimilé à une plaque, donc:

$$P = \frac{2l.L}{\sigma\delta} H_0^2 \cdot \frac{\left(sh\left(\frac{2}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2}{\delta}\right) \right)}{\left(ch\left(\frac{e}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2}{\delta}\right) \right)} \quad (4.80)$$

La puissance réactive est calculée à partir du vecteur de Poyting;

$$Q = \frac{2l.L}{\sigma\delta} H_0^2 \cdot \frac{\left(sh\left(\frac{2}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2}{\delta}\right) \right)}{\left(ch\left(\frac{e}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2}{\delta}\right) \right)} \quad (4.80)$$

2. Mise en œuvre du modèle analytique pour une plaque conductrice.

Le modèle analytique est appliqué sur une plaque conductrice en cuivre pour différentes fréquences du champ d'excitation et qui possède les propriétés suivantes:

- L'épaisseur de la plaque $e = 19$ mm.
- Perméabilité magnétique: $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$
- Champ magnétique d'excitation: $H_0 = 1000 A.m^{-1}$
- Conductivité électrique: $\sigma = 5.8 \times 10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$

Les résultats sont obtenus par l'utilisation du logiciel Matlab.

2. 1. Pénétration du champ magnétique dans une plaque conductrice

On remarque sur la figure qui représente le résultat de calcul que pour une fréquence concéder comme basse fréquence le champ magnétique pénètre bien travers toute la plaque, quand on augmente la fréquence la pénétration diminue d'une façon remarquable pour les

moyenne (quelques KHz) et les hautes fréquences (des centaines de KHz). La pénétration du champ magnétique est inversement proportionnelle au rapport de l'épaisseur de la plaque et l'épaisseur de peau (e/δ). Donc les basses fréquences sont utilisés au chauffage à cœur et les moyennes et hautes fréquences pour des chauffages superficiel.

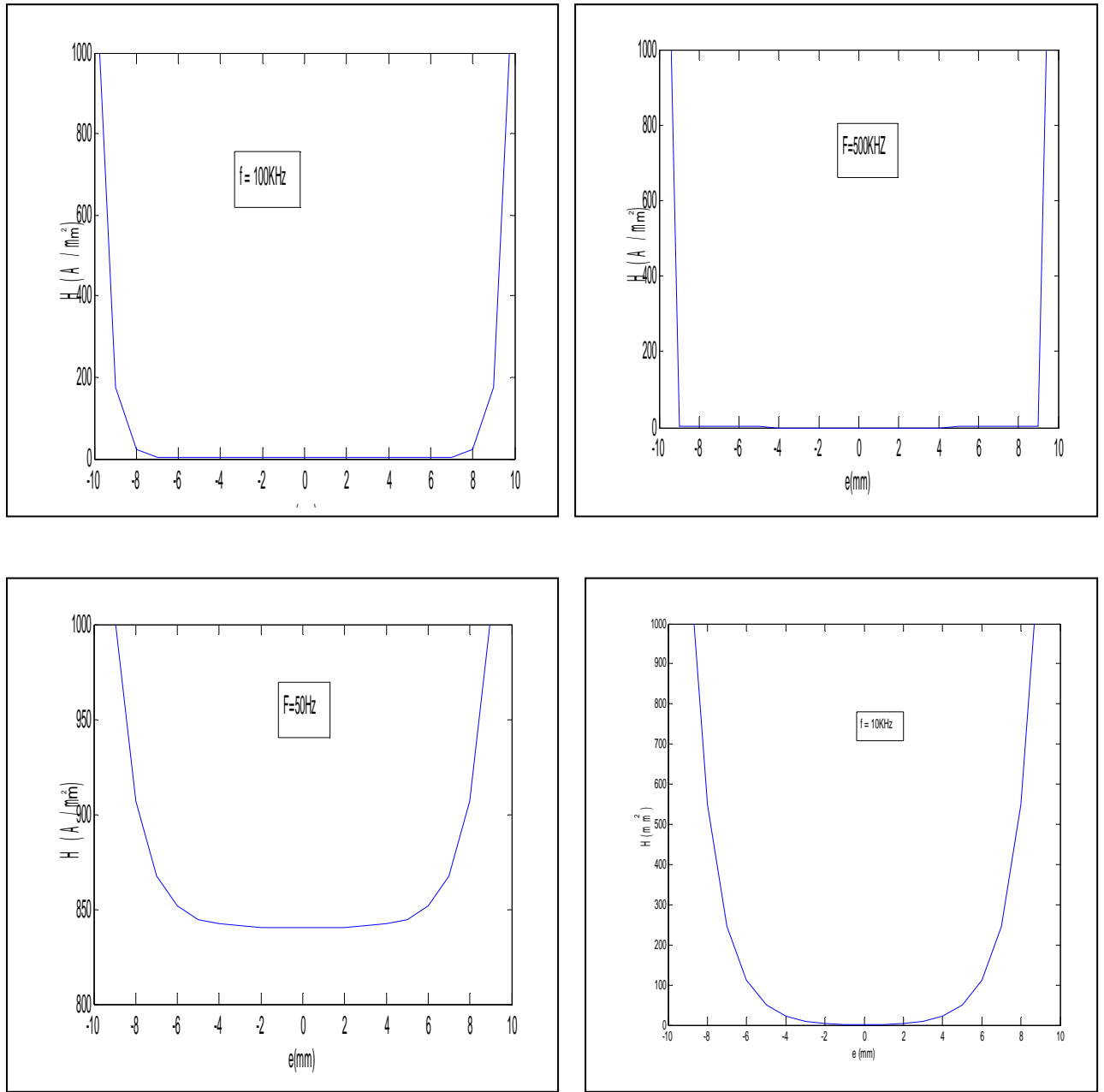


Fig. (4. 5) Pénétration du champ magnétique dans une plaque en cuivre

2.2 Pénétration de la densité volumique des courants induits dans une plaque conductrice

Les résultats de notre modèle analytique montrent que la bonne pénétration des courants de Foucault se fait de la même manière que la pénétration du champ magnétique, donc plus qu'on augmente la fréquence plus que l'intensité de la densité de courant augmente, les courants de Foucault créent un champ qui s'oppose au champ appliqué ce qui donne cette

mauvaise pénétration du champ magnétique dans la plaque et crée une dissipation d'énergie sous forme des pertes Joule qui provoquent la création de la chaleur.

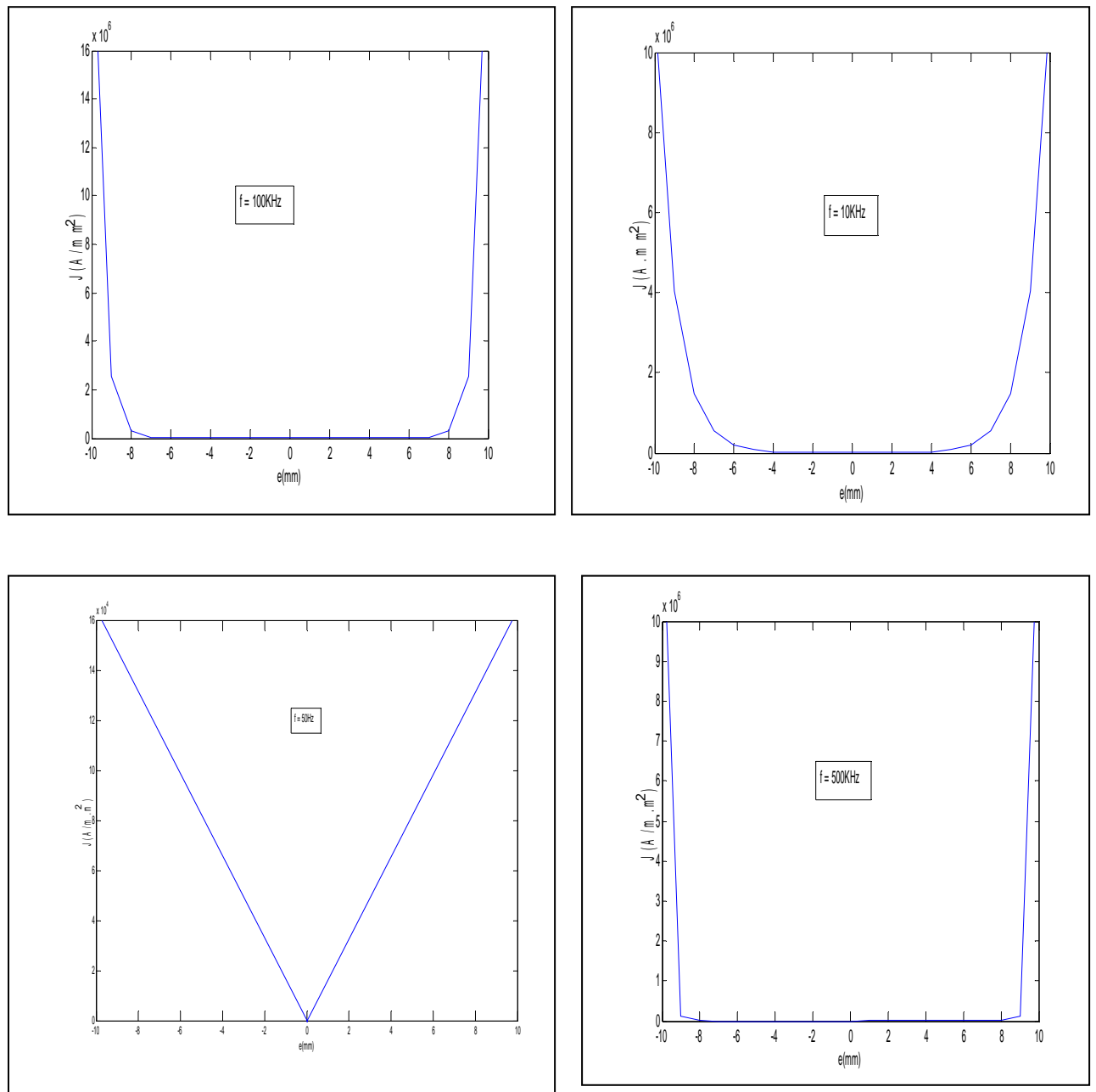


Fig. (4. 6) Pénétration de la densité volumique des courants induits dans la plaque

2.3 Pertes dissipés part effet Joule dans la plaque

La figure (4.7) représente la relation entre la fréquence et les pertes Joules, on remarque que plus la fréquence augmente plus que les pertes dissipés par effet joule augmente aussi, l'augmentation des pertes Joule est dû à l'augmentation de la densité des courants de

Foucault. Cela donne une bonne explication en ce qui concerne l'utilisation des fréquences élevée à la fusion des métaux

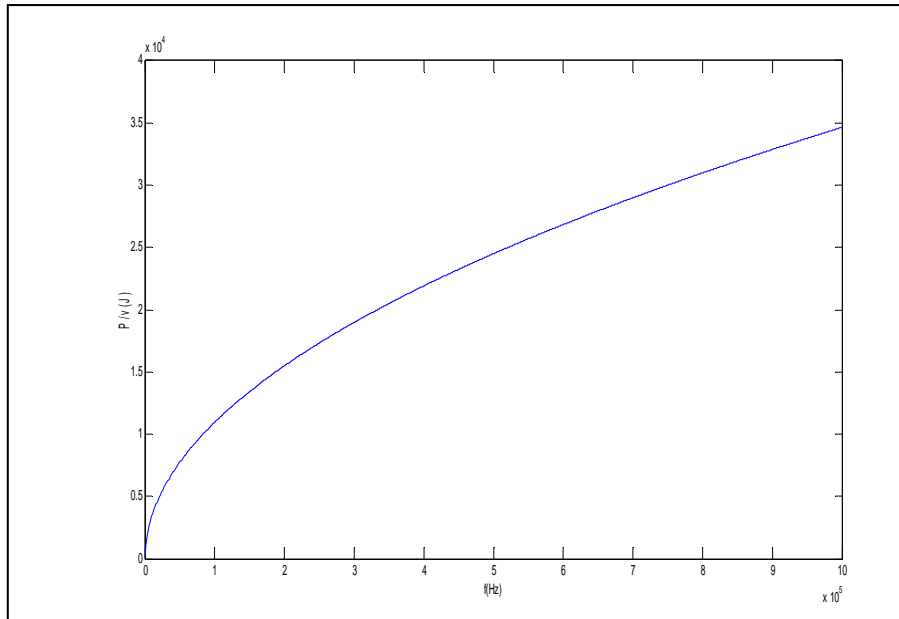


Fig (4.7) pertes Joule dans une plaque conductrice

2.4. Épaisseur de pénétration

L'effet de peau est caractérisé par la profondeur de pénétration δ , qui se définit comme l'épaisseur de la couche surfacique dans laquelle circule 87% de la puissance générée[13].

Le calcul de l'épaisseur de peau pour trois matériaux de différentes caractéristique électrique et magnétique (conductivité, perméabilité) en fonction de la fréquence les résultats sont présentés sur la figure (4.8).

D'après la figure (4.8), il apparait que la profondeur de pénétration est inversement proportionnelle à la perméabilité magnétique μ_r .

Pour des matériaux non magnétiques tels que le cuivre ou l'aluminium, le coefficient de perméabilité magnétique $\mu_r = 1$, alors que les matériaux ferro-magnétiques (tels que le fer et de nombreux types d'acier) ont, au contraire, un coefficient de perméabilité beaucoup plus élevé. Ces matériaux offrent donc des profondeurs de pénétration beaucoup moins importantes.

L'augmentation de fréquence pour tous les matériaux provoque une diminution de l'épaisseur de peau

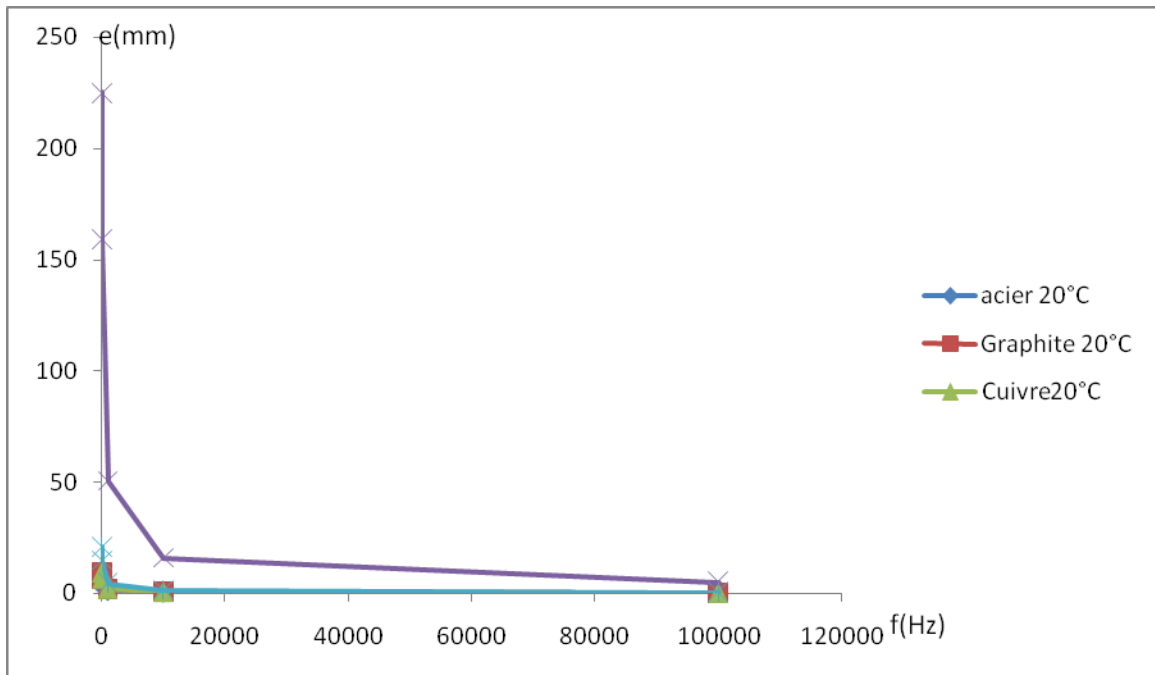


Fig (4.8) Epaisseur de peau en fonction de la fréquence

Conclusion

Dans ce chapitre on a résolu les équations de Maxwell pour obtenir un modèle analytique du processus de chauffage par induction, ce modèle nous a permis de calculer le champ magnétique et la densité des courants de Foucault qui pénètrent dans une plaque en cuivre placée dans une source de champ magnétique, on a vu donc que la mauvaise pénétration du champ magnétique est obtenue par l'application de hautes fréquences, par contre pour les faibles fréquences on obtient une bonne pénétration, la même chose est remarquée pour la densité des courants induits. Et quand on augmente la fréquence les pertes Joule dans la plaque augmentent ce qui provoque un bon échauffement.

Donc ce modèle nous permet de choisir la fréquence appliquée à l'inducteur selon le type de chauffage.

CHAPITRE V

CONCEPTION ET CALCUL D'UN FOUR A INDUCTION

Introduction

Dans ce dernier chapitre on va étudier la conception d'un four à induction, les différentes parties des fours présentent des caractéristiques magnétique, thermique et électrique, la géométrie du four contribue à la définition de certains paramètres. Cette analyse est basée sur un four de 4 tonnes de capacité de fer fondu.

1. Paramètres géométrique

Un four à induction est constitué généralement d'un creuset, d'une bobine inductrice, enveloppe, système de refroidissement et une cote mécanique, le creuset est formé des matériaux réfractrice où la bobine est couvrir, la charge où l'objet à fondu est placé dans ce creuset, le matériau réfractrice est choisi suivant la nature des objets à fondre (c'est-à-dire basique, acide ou neutre). La figure 1 montre la composition typique d'un four à induction de fonderie. La forme géométrique du four est cylindrique

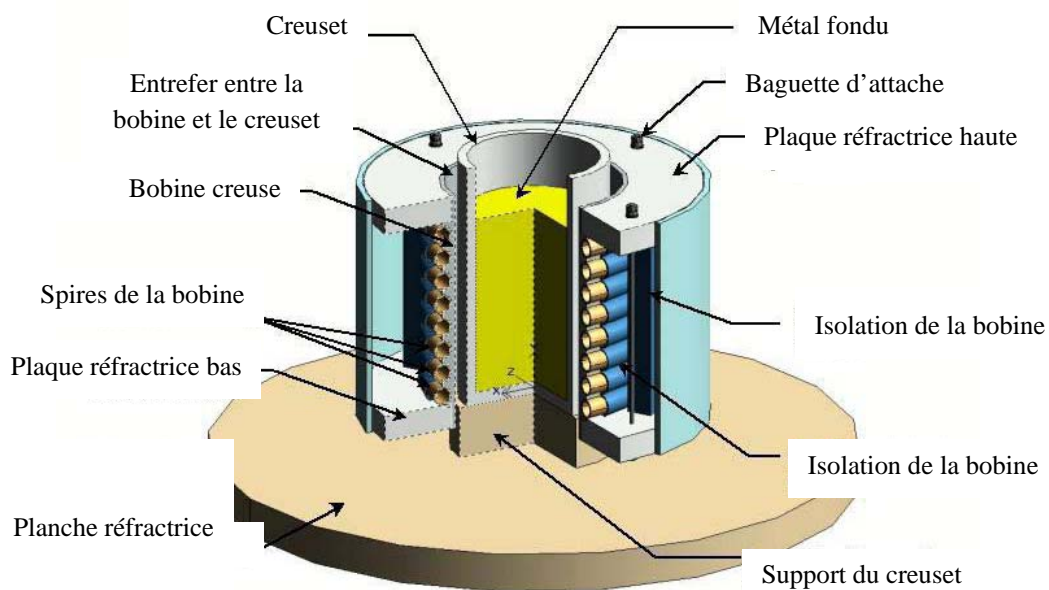


Fig. (1.5) composition d'un four à induction[9]

Le diamètre intérieur et l'hauteur du creuset sont déterminés par:[22]

$$\frac{H_m}{D_c} = 1,6 \rightarrow 2; \tag{5.1}$$

Où: H_m est l'hauteur du creuset (m).

D_c : diamètre du creuset (m).

Le volume de la charge peut être donné par:

$$V_m = \frac{\pi d_m^2 H_m}{4} \tag{5.2}$$

d_m représente du matériau fondu (m).

Aussi,

$$V_m = \frac{M}{\rho_v} \quad (5.3)$$

Où M est la masse de la charge en kg, ρ_v est la densité volumique (kg/m^3).

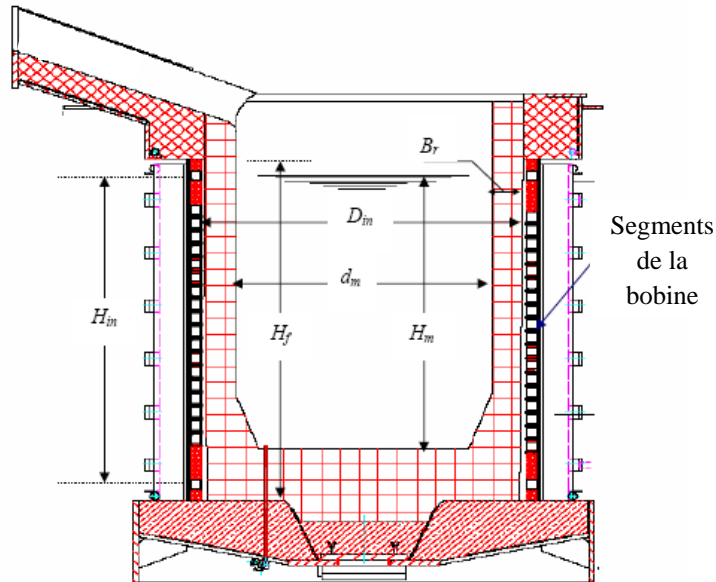


Fig 5.2 Forme géométrique d'un four à induction[9]

L'épaisseur de la doublure réfractaire du creuset peut être déterminée à partir par la relation:[9][22]

$$E_r = 0,084 \sqrt{T} \quad (5.4)$$

Là où T est la capacité de four en tonne. Le diamètre interne de l'inducteur peut être calculé par l'équation:

$$D_{in} = D_c + 2(B_r + B_{ins}) \quad (5.5)$$

Où; B_{ins} est l'épaisseur de la couche d'isolant ($5,5 \text{ mm} \leq B_{ins} \leq 6 \text{ mm}$).

L'hauteur de l'enroulement d'inducteur est donné par:[22]

$$H_{in} = (1,1 \rightarrow 1,2) H_m \quad (5.6)$$

La taille du four du fond du bain au bec versant est:

$$H_f = H_m + h_s + b_t \quad (5.7)$$

Là où h_s = taille des scories formé = 4% de H_m et b_t = épaisseur de la doublure réfractaire égal à 20 centimètres pour une capacité de 4 tonnes.

2. Paramètres d'énergie thermique

L'énergie calorifique théorique requis, Q_{th} , a consommé pendant la première période de la fondre est donné par [22][9]:

$$Q_{th} = Q_m + Q_{sh} + Q_s + Q_{en} + Q_{ex} \quad (5.8)$$

Là où,

Q_m = quantité d'énergie calorifique pour fondre 4 tonnes de charge matériel, Joule.

Q_{sh} = d'énergie calorifique pour surchauffer le matériau à fondre à la température de surchauffent, Joule.

Q_s = requise pour former les scories du matériau fondu, Joule.

Q_{en} = requise pour le processus endothermique, Joule.

Q_{ex} = d'énergie calorifique libérée aux raisons des réactions exothermiques, Joule.

Théoriquement $Q_{en} \approx Q_{ex}$

Par conséquent,

$$Q_{th} = Q_m + Q_{sh} + Q_s \quad (5.9)$$

$$Q_m = MC (\theta_1 - \theta_0) + ML_{pt} \quad (5.10)$$

Là où, C = capacité de chaleur spécifique du matériau de la charge, J/kg.k°.

L_{pt} = la chaleur latente de la fusion, J/kg

θ_1 = la température de la charge, k°.

θ_0 = la température ambiante, 25°C (298 k°)

De même,

$$Q_{sh} = MC_m \theta_{sh} \quad (5.11)$$

Là où, C_m = capacité de chaleur moyenne de métal fondu, J/kg.k°.

θ_{sh} = la quantité de la température de surchauffent, prise en tant que 330 et,

$$Q_s = K_s G_s \quad (5.12)$$

K_s = quantité de scories formée (kilogramme), prise comme 4% de capacité de four;

G_s = énergie calorifique pour 300 kJ/kg de scories.

3. Paramètres Électriques

Supposant un élément d'épaisseur (dx) avec un rayon (x) de l'axe vertical, et un flux sinusoïdal

$$\psi = \psi_m \sin \omega t \quad (5.13)$$

là où

$$\psi_m = B_m S \quad (5.14)$$

Puis

$$\psi = B_m S \sin \omega t \quad (5.15)$$

L'f.e.m induite est donné par:

$$e = \frac{dW}{dt} = \frac{dB_m \cdot S \sin \omega t}{dt} \quad (5.16)$$

$$e = \pi \omega x^2 B_m \cos \omega t \quad (5.17)$$

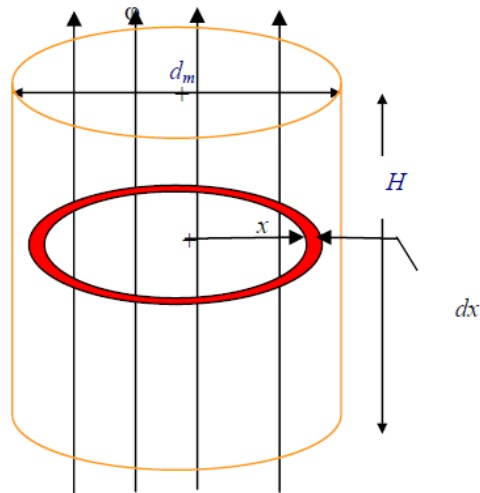


Fig. 5.3 charge cylindrique (l'objet fondu)

La valeur efficace de cette f.e.m dans le chemin d'élément est:

$$E = \frac{2\pi f x^2 B_m}{\sqrt{2}} \quad (5.18)$$

Si \$\rho\$ est la résistivité du matériau, la résistance de chaque chemin élémentaire est,

$$R = \frac{\rho l}{S} = \frac{\rho 2\pi x}{H_m dx} \quad (5.19)$$

Les courants de courant de Foucault dans le matériau peuvent être calculés à partir de l'équation:

$$J_m = \frac{\pi \omega f B_m H_m}{\sqrt{2} \rho} dx \quad (5.20)$$

Puisque le courant circule sur la couche externe du métal, on peut écrire donc:

$$R = \frac{\rho \pi d_m}{H_m \delta_0} \quad (5.21)$$

$$J_m = \frac{\pi d_m f B_m H_m}{\sqrt{2} \rho} \delta_0 \quad (5.22)$$

Là où \$\delta_0\$ est la profondeur de peau et est donné près:

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\rho}{\pi f \mu}} \quad (5.23)$$

Tout le courant de Foucault absorbé dans la charge est

$$P = J_m^2 R \quad (5.24)$$

$$P = \frac{\pi^2 d_m^5 H_m f^2 B_m^2}{8\rho} \sqrt{\frac{\rho}{\pi f \mu}} \quad (5.25)$$

La perméabilité de la charge est égale à la perméabilité du vide à 1100°C.

B_m : densité maximum de flux (Tesla),

R : résistance du matériau de la charge (R_L),

J_m : courante circulant dans le matériau de la charge.

A partir de l'équation précédente

$$B_m = \sqrt{\frac{\pi^2 d_m^5 H_m f^2 \rho}{8 P \rho}} \quad (5.26)$$

La puissance (P) peut être calculée à partir du Th théorique de l'énergie calorifique Q calculé à par de l'équation:

$$P = \frac{Q_{th}}{t} \quad (5.27)$$

Là où t est toute la période totale du processus de fondre.

Le four à induction peut être considéré comme un transformateur son secondaire est un simple tour court-circuité. Le schéma 5.4 représente le circuit équivalent de l'enroulement de four avec la charge basé sur la conception d'un transformateur,

$$I_{bob} = \sqrt{\left[\frac{I_m}{N}\right]^2 + I_0^2} \quad (5.28)$$

$$NI_{bob} = \sqrt{I_m^2 + (NI_0)^2} \quad (5.29)$$

sachant que $NI_0 = Hl$ et $H = B/\mu$;

$$N = \frac{l}{I_{bob}} \sqrt{I_m^2 + (Hl)^2} \quad (5.30)$$

$$N = \frac{l}{I_{bob}} \sqrt{I_m^2 + \left(\frac{B_m l}{\sqrt{2}\mu}\right)^2} \quad (5.31)$$

Puisque, l'inductance d'individu de l'enroulement L_l est donnée par:

$$L_l = L_l + NI_M \quad (5.32)$$

Par conséquent,

$$L_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{l} \quad (5.33)$$

$$S = \frac{\pi D_m^2}{4} \text{ et } l = H_{in} \quad (5.34)$$

La tension à travers la charge est égale à

$$\frac{I_m}{N} N^2 R_L = I_0 N L_M \omega \quad (5.35)$$

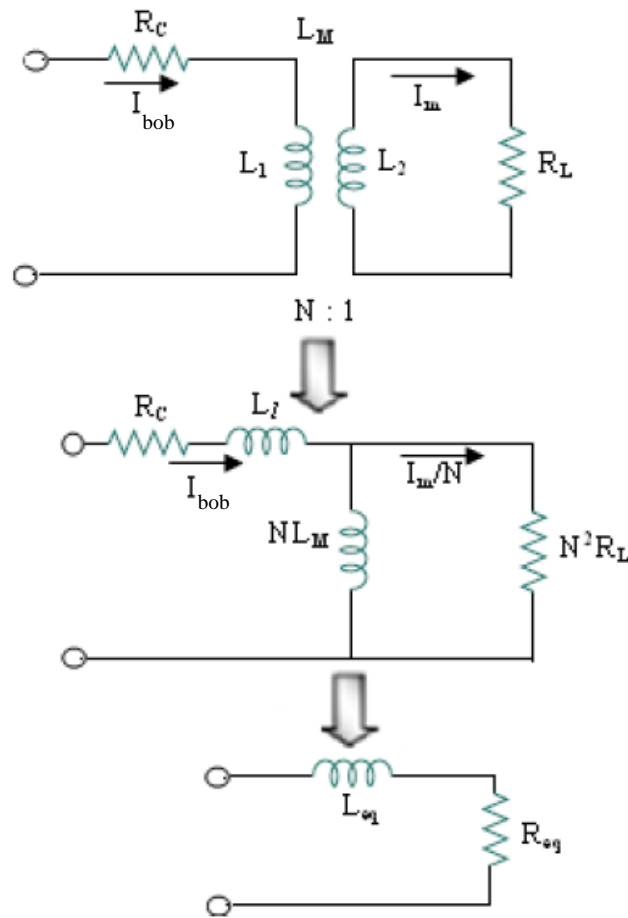


Fig. (5.4) Circuit équivalent d'un four à induction avec charge basé sur le concept d'un transformateur

La résistance reproduite de la charge $R_{ch} = N^2 R_L$ donc,

$$NL_M = \frac{\sqrt{2} I_m R_{ch} \mu_0 \mu_r}{E_m t \omega} \tag{5.35}$$

Puisque toute l'énergie magnétique est stockée dans des lacunes d'air, l'isolation entre les conducteurs, et dans le conducteur où μ_r est essentiellement 1,0 et constante, donc $\mu = \mu_0$, ce qui résulte,

$$L_1 = \frac{\mu_0 N^2 \pi D_{in}^2}{4 H_{in}} - \frac{\sqrt{2} I_m R_{ch} \mu_0}{E_m H_{in} 2 \pi f} \tag{5.36}$$

La résistance de la bobine en cuivre est donnée par

$$R_c = \frac{\rho_c l_{bob}}{S_c} \tag{5.37}$$

Où, l_{bob} est la longueur de la bobine et S_l est la section

$$\rho_c = 1,72 \cdot 10^{-7} \Omega m \quad \text{à } 25^\circ C$$

l_c = la longueur totale de la tube de la bobine $l_c = \pi D_{in} N_r S_l$ = section du tube conduite.

$$St = \frac{I_0 b}{J} \tag{5.38}$$

Là où J est la densité de courant (de 20 à 40 A/mm² pour le conducteur de tuyauterie refroidi par eau).

Puisque I_0 est très petit par rapport I_m/N , NL_M peut être négligé en ce qui concerne R_{ch} . Par conséquent, la résistance équivalente $R_{eq} = R_c + R_{ch}$ et l'inductance équivalente est $L_{eq} = L_l$.

4. Choix de la fréquence d'induction

La fréquence affecte l'efficacité d'accouplement du champ électromagnétique à la charge et l'agitation caractéristiques du métal fondu dans le four. Pour l'exécution optimale de four, le choix du système la fréquence de fonctionnement d'induction est très importante. Le diagramme dans Fig. (5.5) décrit la relation entre la fréquence et la taille de four pour différentes conditions de fonte. Une fonte idéale peut être déterminée quand l'intersection de la fréquence et la taille de four situé sur la ligne centrale dans la zone moyenne.

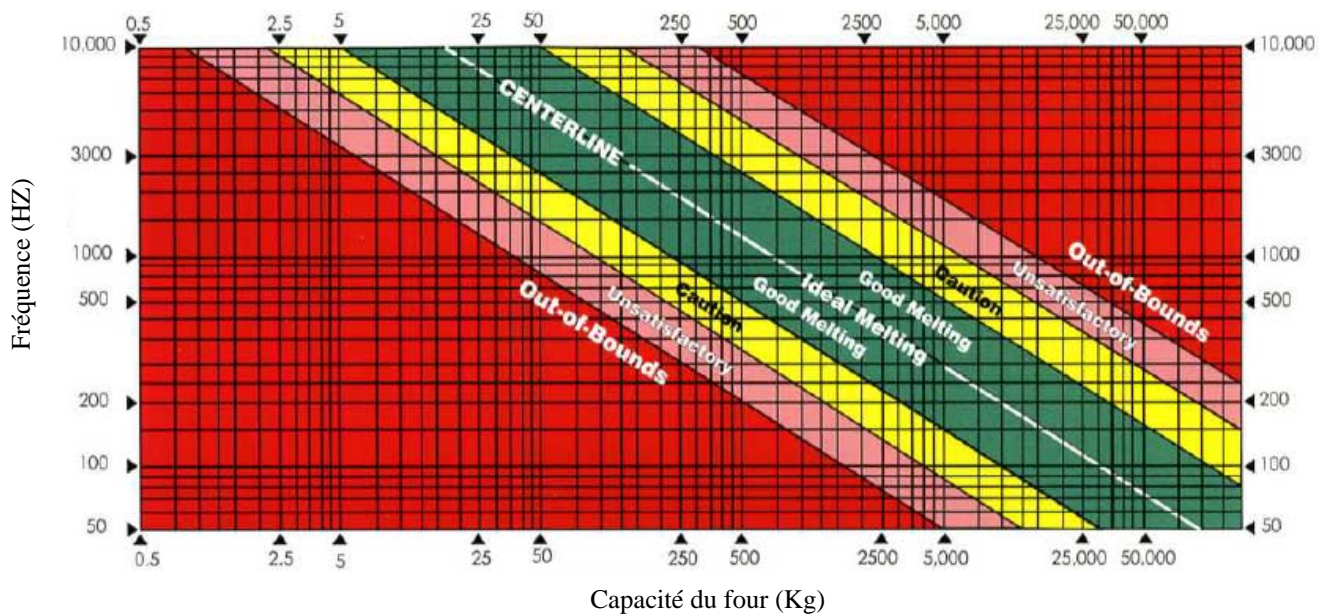


Fig. (5.6) relation entre la taille du four et la fréquence d'induction[9]

5. CALCUL D'UN FOUR A INDUCTION

5.1. Paramètres du fer

Les paramètres thermiques du fer son données sur le tableau suivant

N°	Paramètre	Valeur	unité
01	Capacité thermique spécifique	460	kJ/kg.k°
02	Température de fusion	1573	k°
03	Température latente	267	kJ/kg
04	Résistivité électrique	0,1	$\mu\Omega\text{m}$
05	Coefficient de température	$56 e^{-3}$	/
06	Densité	7000	Kg/m^3

Tableau.(4.1) Paramètres thermique du fer

5.2. Comparaison entre les paramètres calculé et réelle

Pour vérifier les résultats de conception, une comparaison entre certain des ces résultats on été fait entre un four réel et calculable [9], les résultats de comparaison sont donnée au-dessous.

Les paramètres géométrique et électrique du four son dressées sur les deux tableaux suivant:[9]

N°	Paramètre	Valeur	unité
01	Volume de la charge (V_m)	0,5714	m^3
02	Diamètre de la fondre (d_m)	76,90	cm
03	Epaisseur de la doublure réfractrice (H_m)	16,80	cm
04	Diamètre intérieur de l'inducteur (B_r)	16,80	cm
05	Hauteur de l'inducteur (D_{in})	111,50	cm
06	Hauteur de la bobine inducteur (H_{in})	135,3	cm
07	Hauteur du four (H_f)	147,96	cm

Tableau.(4.2) Paramètres géométrique du four

N°	Paramètre	Valeur	unité
01	Fréquence optimal (f)	250	Hz
02	Résistance de la charge (R_L)	0,0512	m Ω
03	Courant dans le métal (I_m)	232,57	kA
04	Puissance requis dans la charge pendant 20 minutes (P)	2,766	MW
05	section du tube conduite (S_t)	814	mm ²
06	Courant de la bobine (I_{bob})	11,803	kA
07	Nombre de bobines	20	Tours
08	Résistance de la bobine (R_c)	1,50	m Ω
09	Résistance équivalente (R_c)	21,90	m Ω
10	Inductance équivalente (L_{eq})	0,19014	mH

Tableau (4.3) Paramètres électrique du four

Les résultats de comparaison son;

N°	Paramètre	Valeurs Calculées	Valeurs réelles
01	Nombre de tours de la bobine (N)	20 tours	20 tours
02	L'inductance équivalente (L_{eq})	0,190 mH	0,192 m Ω
03	Volume de la charge (V_m)	0,5714 m ³	0,5714 m ³
04	Diamètre de la fondre (d_m)	76,90 cm	85 cm
05	Epaisseur de la doublure réfractrice (H_m)	123 cm	107 cm
06	Diamètre intérieur de l'inducteur (B_r)	16,80 cm	10.5 cm
07	Hauteur de l'inducteur (D_{in})	111,50 cm	107 cm
08	Hauteur de la bobine de l'inducteur (H_{in})	135,3 cm	131,5 cm

Tableau (4.4) résultats de la comparaison

Remarquant que les résultats de calcul sont presque réels, sauf de brèves différences entre quelque paramètre qui sont liées à des erreurs de mesures et aussi aux paramètres négligé qui complique ce calcul.

Conclusion

Tellement la simplicité de cette conception qui est purement analytique, mais elle procède une très grande importance à la définition de certains paramètres, la relation entre les paramètres magnétique, thermique et électrique avec la géométrie du four montre que pour dimensionner un four il faut passer par des calculs bien précis et résultants des analyses électro-magnéto-thermique, la fréquence appliquée sur l'inducteur est choisie passant par la géométrie du four. Donc ce qu'on résulte que tous les paramètres contribuent aux choix du four.

CONCLUSION

GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, on a mis les pieds dans le domaine de recherche sur le processus de chauffage par induction magnétique qui est largement utilisé, notre objectif c'est d'arriver à un modèle analytique nous permettra de définir les grandeurs physique nécessaire pour comprendre le phénomène.

Le chauffage d'induction peut produire les densités de puissance élevée qui accordent des temps courts d'interaction d'atteindre la température exigée, un four induction représente l'un des applications vastes de ce processus dans l'industrie et notre vie quotidienne.

Le principe de chauffage par induction est basé sur les pertes par courant de Foucault qui dépendent de la fréquence, la fréquence imposée à l'inducteur est générée par un onduleur autonome à résonance.

La résolution des équations de Maxwell nous permet d'obtenir un modèle analytique de la méthode de chauffage par induction, ce modèle nous a permis de calculer le champ magnétique et la densité des courants de Foucault qui pénètrent dans une plaque en cuivre placée dans une source de champ magnétique, on peut conclure par la résolution de ce modèle que :

- La mauvaise pénétration du champ magnétique, et la densité des courants de Foucault, s'apparait quand l'alimentation de l'inducteur est à une haute fréquence,
- Par contre pour les faibles fréquences on obtient une bonne pénétration du champ magnétique, la même chose est remarquée pour la densité des courants induits.
- Quand on augmente la fréquence les pertes joules dans la plaque augmentent ce qui provoque un bon échauffement.
- la profondeur de pénétration est inversement proportionnelle à la perméabilité magnétique μ_r .

Pour des matériaux non magnétiques tels que le cuivre ou l'aluminium, le coefficient de perméabilité magnétique $\mu_r = 1$, alors que les matériaux ferro-magnétiques (tels que le fer et de nombreux types d'acier) ont, au contraire, un coefficient de perméabilité beaucoup plus élevé. Ces matériaux offrent donc des profondeurs de pénétration beaucoup moins importantes.

CONCLUSION GENERALE

L'augmentation de fréquence pour tous les matériaux provoque une diminution de l'épaisseur de peau.

Donc le choix de la fréquence appliquée à l'inducteur est basé sur le type de chauffage (superficiel, cœur), ainsi que sur la géométrie du four.

Finalement, l'étude du phénomène de chauffage par induction est basée sur le couplage magnéto thermique, donc les différentes grandeurs électromagnétiques dépendants de la température, donc pour arriver à des résultats bi en précisent (qualitatives) on fait appel à une méthode numérique de calcul, ce que on va entamer dans nous recherches prochaines.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] **OUARLAL BACHIR**, Contribution à la modélisation analytique du phénomène de chauffage par induction, thèse d'ingénieur d l'université de Batna 2008.
- [2] **M. H. TAVAKOLI, H. KARBASCHI, AND F. SAMAVAT**, Computational modeling of induction heating process, Progress In Electromagnetics Research Letters, Vol.11, 2009.
- [3] **MACH, P. KARBAN, I. DOLEZEL, D. TRUTWIN**, Stirring of liquid steel in crucible induction furnace, International Scientific Colloquium, Modelling for Material Processing Riga, June 8-9, 2006.
- [4] **GUY MARQUIS**, Cours d'électromagnétisme, IPG Strasbourg, 2004.
- [5] **G. RIBAUD**, La théorie du chauffage par courants induits de haute fréquence, Journal de physique n°11, 1932.
- [6] **VALERIE LABBE**, Modélisation numérique du chauffage par induction, Approche éléments finis et calcul parallèle, thèse doctorat, l'Ecole des Mines de Paris,2002.
- [7] **SVEN WANSER**, Simulation des phénomènes de chauffage par induction, Application à la trempe superficielle, thèse doctorat, l'Ecole Doctorale de Lyon des Sciences pour l'Ingénieur, 1995.
- [8] **PASCA SORIN**, Particularities en numerical modeling of crucible induction furnance,
- [9] **M. AHMED, M. MASOUD AND A. EL-SHARKAWY**, Design of a coreless induction furnace for melting iron, International conference on communication, computer and power (icccp'09) muscat, February 15-18, 2009.
- [10] **Nathan Rhoades**, A fundamental overview of heating by induction, April 22,2006.
- [11] Fairchild Semiconductor, Induction heating system topology review, discrete application, Power device division, July 2000.
- [12] **ARMAN BOLOURIAN**,Evaluations of Energy Efficiency Improvement, Master of Science Thesis in Electric Power Engineering, Chalmers university of technology, Goteborg, Sweden, 2010.
- [13] **JEAN CALLEBAUT**, Chauffage par induction, Laborelec, décembre 2006
- [14] Cours du module Énergie et convertisseurs d'énergie, Licence EEA, Université de Savoie.

[15] fr.wikipedia.org/wiki/Chauffage_par_induction.

[16] <http://www.richieburnett.co.uk/indheat.html>.

[17] http://en.wikipedia.org/wiki/Induction_heating.

[18] fr.wikipedia.org

[19] <http://en.wikipedia.org/wiki/Furnace>.

[20] <http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/blanquet/synophys/33onelm/33one...21/12/2008>.

[21] **BELDJABEL YASINE**, Etude du four à induction, rapport de stage, ENITA, 1997.

[22] **K. C. Bal**, Design Analysis of an Electric Induction Furnace for Melting Aluminum Scrap, AU Journal of Technology vol (9) n° (2), Oct. 2005.