

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE BATNA

FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

Laboratoire des Systèmes de Propulsion Induction Electromagnétique LSPIE-  
2000, Batna

**Mémoire de Magister**

En vue de l'obtention du diplôme de Magister en Electrotechnique

**Option : Commande électrique**

Présenté par :

**M<sup>r</sup> Benali Walid**

Ingénieur d'État en Electrotechnique de l'Université de Batna

**Thème**

---

---

**Commande LQ d'un moteur synchrone**

---

---

Soutenu le : 26/06/2014 devant le Jury composé de :

|                                 |       |              |               |
|---------------------------------|-------|--------------|---------------|
| Dr. <b>MENACER Arezki</b>       | Prof. | Univ. Biskra | Président     |
| Dr. <b>Benagoune Said</b>       | MCA   | Univ. Batna  | Rapporteur    |
| Dr. <b>DRID Said</b>            | Prof. | Univ. Batna  | Co-Rapporteur |
| Dr. <b>BENSALAH Abdeldjabar</b> | MCA   | Univ. Batna  | Examineur     |
| Dr. <b>BENDIB Samir</b>         | MCA   | Univ. Batna  | Examineur     |

2013/2014

## Remerciements

*Je remercie, en premier lieu, ALLAH qui m'a donné ce bien là pour que je vive ce jour, ALLAH qui m'a donné la force et la patience pour terminer ce travail.*

*Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance et ma gratitude à mes encadrateurs ,Dr. Benaggoune Saïd et le Professeur S.DRID qui sont proposés et dirigés ce travail.*

*Mes remerciements vont aussi à messieurs les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer mon travail.*

*Je tiens à remercier les responsables et tout le personnel du département de L'électrotechnique pour les facilités qu'ils m'ont accordé pour parfaire ce travail.*

*Je tiens à remercier M R.AMRANI pour son soutien.*

*Ce travail de mémoire que j'ai effectué doit beaucoup à certaines personnes que je tiens à remercier sincèrement.*

*Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à ma formation et à l'élaboration de ce modeste mémoire.*

## Dédicaces

*A mes chers parents,*

*A ma chère femme et mes petits enfants « ZIAD et  
RITADJ »,*

*A mes chers frères et sœurs,*

*A toute ma famille,*

*A tous mes amis,*

*A vous*

*Je dédie ce mémoire.*

## Sommaire

|   |    |
|---|----|
| Introduction générale .....   | 1  |
| <b>Chapitre I: modélisation et simulation de la MSAP</b>                                      |    |
| I.2. Constitution de la machine synchrone à aimant permanent (MSAP).....                      | 1  |
| I.2.1. Le stator .....  | 2  |
| I.2.2. Le rotor .....   | 2  |
| a- Structures sans pièces polaires « Pôles lisses » .....                                     | 2  |
| b- Structures avec pièces polaires« Pôles saillants » .....                                   | 4  |
| c- Structure avec pièces polaires sans concentration de flux .....                            | 4  |
| d- Structure avec pièces polaires et concentration de flux.....                               | 4  |
| e- Les matériaux utilisés pour la MSAP .....  | 5  |
| I.4. Démarrage des machines synchrones à aimants permanents .....                             | 6  |
| I.4.1.Démarrage par un dispositif extérieur .....   | 6  |
| I.4.2.Démarrage à fréquence progressive .....   | 7  |
| I.5. Avantages des Machines Synchrones à Aimants Permanents.....                              | 7  |
| I.6. Inconvénients des Machines Synchrones à Aimant Permanent [17], [18],[19] .....           | 7  |
| I.7. Modélisation de la machine synchrone à aimant permanent.....                             | 8  |
| I.7.1. Hypothèses simplificatrices [20] .....   | 8  |
| I.7.2. Représentation de la MSAP dans le système d'axe triphasés a, b, c.....                 | 8  |
| I.7.3. Représentation de la MSAP dans le système d'axe d, q .....                             | 10 |
| I.8. Mise sous forme d'équation d'état .....  | 13 |
| I.9. Modélisation de l'association MSAP-Onduleur de tension .....                             | 14 |
| I.9.1. Définition de l'onduleur de tension .....  | 14 |
| I.9.2. Modélisation de l'onduleur de tension .....  | 15 |
| I.9.3. Principe de la commande de l'onduleur par la stratégie MLI triangulo-sinusoïdale... 16 |    |
| I.10. Résultats de simulation.....  | 17 |
| I.10.1. Alimentation par un réseau triphasé équilibré.....                                    | 17 |
| I.10.2. Alimentation par un onduleur de tension .....   | 19 |
| I.11.conclusion.....  | 21 |
| <b>Chapitre II: la commande vectorielle de la MSAP</b>  |    |
| II.1. Introduction .....  | 22 |
| II.2. Les équations du MSAP en régime quelconque.....   | 22 |
| II.3. Principe de la commande vectorielle .....   | 24 |
| II.4. Commande vectorielle de la MSAP alimentée en tension .....                              | 25 |
| II.4.1. Description du système global .....   | 25 |
| II.4.2 Technique de découplage .....  | 26 |

## Sommaire

|   |    |
|---|----|
| II.4.3. Calcul des régulateurs .....  | 27 |
| II.4.4. Dimensionnement des régulateurs .....   | 28 |
| II.5. Résultats de simulation de la commande vectorielle de la MSAP alimentée en tension .. | 31 |
| II.5. Etude de robustesse aux variations paramétriques de la MSAP .....                     | 34 |
| II.6. Conclusion.....   | 39 |

## Chapitre III: Etude et simulation de la commande LQ

|   |    |
|---|----|
| III.1. Introduction.....  | 40 |
| III.2.1 Formulation du problème de commande à retour d'état.....                    | 40 |
| III.2.2 Le critère d'optimalité L.Q.....  | 41 |
| III.2.2.a Vitesse de rejet de perturbation .....                                    | 41 |
| III.2.2.b Energie de commande.....  | 42 |
| III.2.2.c Critère de compromis.....   | 43 |
| III.3. Gestion des objectifs et spécification des matrices de pondération .....     | 43 |
| III.4. La solution du problème L.Q stationnaire. ....                               | 45 |
| III.5. La matrice HAMILTONIENNE et la solution de l'équation de RICCATI.....        | 48 |
| III.6. Stabilité de la boucle fermée.....   | 49 |
| III.7. générations de la commande et choix des pondérations .....                   | 50 |
| III.8. Problème de commande stochastique à retour de sortie .....                   | 50 |
| III.9. Observateur d'état et principe de séparation.....                            | 51 |
| III.9.1 Observateur d'état.....   | 51 |
| III.9.2 Principe de séparation:.....  | 54 |
| III.9.3. L'observateur optimal de Kalman .....                                      | 55 |
| III.10. Solution du problème LQG.....   | 58 |
| III.11. Choix des pondérations.....   | 59 |
| III.11.1. Réglage de l'estimateur d'état.....                                       | 59 |
| III.12. Structure de la commande.....   | 60 |
| III.12.1. Réglage de deux variables d'état ( $i_{ds}$ , $i_{qs}$ ).....             | 60 |
| III.12.2. Interprétation des résultats .....  | 62 |
| III.12.3. Interprétation des résultats des testes de robustesse .....               | 60 |
| III.12.4. Réglage de trois variables d'état ( $i_{ds}$ , $i_{qs}$ , $\omega$ )..... | 60 |
| III.12.5. Interprétation des résultats des tests de robustesse .....                | 64 |
| III.13. conclusion .....  | 64 |
| Conclusion générale.....  | 66 |

## Introduction générale

La plupart des techniques de commande des systèmes linéaires sont basées sur la connaissance précise de leur modèle mathématique. Cependant, ceci n'est pas toujours possible car on est confronté à des imprécisions dues : [01], [02]

- A la structure du modèle qui est toujours une simplification de la réalité ;
- Aux paramètres du modèle qui sont entachés d'erreurs de mesure ou d'estimation
- Aux paramètres variables avec le temps
- A la représentation linéaire de certain système non-linéaire, où le changement des conditions de fonctionnement modifie les valeurs des paramètres.

Vue l'impossibilité de décrire précisément le comportement d'un procédé [01], l'idée de base est qu'il serait plus fructueux de considérer son modèle comme l'association d'un modèle nominal auquel on attache des incertitudes (structurées ou non structurées). Dans ce cas, la problématique de commande doit être abordée de façon à assurer la robustesse vis-à-vis de ces incertitudes [03].

Les méthodes classiques comme PI ,PID de la commande robuste ont prouvé leur efficacité dans de nombreux problèmes de régulation ou de poursuite pour les systèmes linéaires mais lorsque le système est entaché par des incertitudes, des perturbations ou des exigences sur les performances, alors, la commande robuste classique devient insuffisante pour répondre aux performances exigées.

Pour surmonter ces obstacles, l'utilisation des méthodes de commande avancées comme (la commande prédictive, commande fréquentielle, commande linéaire quadratique) est nécessaire.

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse particulièrement à la dernière commande c'est-à-dire à la commande LQ qui présente une solution plus performante aux problèmes cités auparavant.

D'une manière générale, la robustesse d'une commande peut être définie comme une qualité qui décrit l'invariance ou la résistance du comportement d'un système asservi à un certain nombre de phénomènes internes ou externes [04].

Donc, Le défi majeur de ce travail de recherche est de concevoir une loi de commande plus performante au niveau de la poursuite de trajectoires, le rejet de perturbations, la stabilité, et la robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques.

## Introduction générale

La technologie moderne des systèmes d'entraînement exige de plus en plus un contrôle précis et continu de la vitesse, du couple et de la position, tout en garantissant la stabilité, la rapidité et le rendement le plus élevé possible [05].

Le moteur à courant continu, a satisfait une partie de ces exigences. Cependant la présence du système balais collecteur a toujours été un grand inconvénient du moteur parmi d'autres qui limitant de plus en plus son utilisation ce qui limite la puissance et la vitesse maximale et présente des difficultés de maintenance et des interruptions de fonctionnement [05].

C'est pour cette raison que l'industrie s'est orientée vers l'utilisation des machines à courant alternatif afin d'écartier cet inconvénient.

Parmi les machines à courant alternatif sont recommandés dans le monde industriel, la machine synchrone à aimants permanents (MSAP) qui présente un certain nombre d'avantages, à savoir [06],[07],[08],[09]:

- Les pertes au rotor sont nulles
- une grande capacité de surcharge
- une inertie très faible
- son couple massique élevé comparé aux machines asynchrone et synchrone à rotor bobiné
- De plus, elle a des inductances relativement faibles, ce qui entraîne des réponses rapides des courants et donc du couple.

Ces avantages lui donne la supériorité aux autres types de machines et elle a aussi connu un grand développement grâce à l'amélioration des caractéristiques des aimants ; ce qui lui a permis de s'imposer dans les applications nécessitant des performances dynamiques et statiques très élevées plus particulièrement dans les domaines d'application tels que la robotique, l'aéronautique spatial et la traction électrique [10],[11].

Cependant, le modèle du moteur synchrone à aimants permanents est un système multi variable et fortement couplé, c'est pour cette raison que sa commande est plus complexe que celle d'une MCC.

Dans ce cadre, Il existe nombreux principes de commande des machines synchrones à aimants permanents (MSAP) parmi lesquelles la méthode du flux orienté (ou pilotage vectoriel).

La commande vectorielle appelée aussi commande par orientation de flux (Field Oriented Control) a été proposée par Blaschke en 1972 [28]. Cette commande permet l'élimination du couplage entre l'inducteur et l'induit de la machine synchrone à aimants permanents, donc elle permet d'obtenir un fonctionnement comparable à celui de la machine à courant continu.

## Introduction générale

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur la technique de commande optimale appliquée au contrôle de la vitesse d'un moteur synchrone à aimant permanent piloté par la commande vectorielle.

Le but est la mise en œuvre d'une loi de commande robuste de la machine citée précédemment, avec comme objectif d'assurer la stabilité face aux incertitudes paramétriques et aux perturbations tout en essayant d'améliorer la dynamique du système.

Ce mémoire est donc organisé en trois parties de la façon suivante :

Le premier chapitre comporte deux parties. La première partie, est consacré à la modélisation détaillée de la machine synchrone à aimant permanent dans le repère (a,b,c) puis à l'aide de la transformation de Park on obtient le modèle dans le repère (d,q) , cette étape est primordiale car elle permet non seulement une meilleure connaissance de la machine mais aussi prépare efficacement le terrain à l'application des lois de commande qu'on souhaite mettre en place et elle permet l'observation et l'analyse des différentes évolutions de ses grandeurs électriques. La deuxième partie est consacrée à la modélisation de l'onduleur de tension et de sa commande MLI. Ce chapitre se termine par la simulation et les résultats de simulation obtenus.

Le deuxième chapitre fera l'objet au principe de la commande vectorielle (FOC) et son application à la MSAP. La théorie de cette commande permet d'assimiler la machine synchrone à aimant permanent à une machine à courant continu à excitation séparée. Afin de valider les résultats analytiques obtenus, on effectue en fin plusieurs tests par simulation.

Dans le troisième chapitre on énonce le problème de la commande des systèmes linéaires sous l'hypothèse d'un vecteur d'état complètement mesuré dans un contexte déterministe, ce qui conduit à la synthèse d'un correcteur dynamique fondé sur la minimisation d'un critère quadratique sous contraintes linéaires (**Linear Quadratic "LQ"**). Le problème d'estimation du vecteur d'état dans un contexte stochastique sera traité au sein du chapitre 3. Dans la suite du chapitre 3 l'observateur de Kalman sera présenté. On s'intéressera finalement dans ce chapitre à la commande linéaire quadratique gaussienne qui permet de synthétiser un correcteur dynamique par minimisation d'une fonctionnelle sous contrainte dans un contexte stochastique pour un système dont l'état n'est pas mesuré mais estimé. Puis on donnera les résultats de simulation de la commande (LQG) appliquée sur une machine synchrone à aimant permanent à flux rotorique orienté.

Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats auxquels on a abouti.



## **I.1. Introduction**

L'étude de la commande d'un système est un travail qui nécessite une bonne connaissance de son modèle dynamique afin de bien prédire son comportement dans les différents modes de fonctionnements envisagés.

La modélisation d'une machine électrique est une phase primordiale de son développement. Les progrès de l'information et de génie des logiciels permettent de réaliser des modélisations performantes et d'envisager l'optimisation des machines électriques.

Ainsi, l'élaboration du modèle mathématique sous forme dynamique de la machine électrique est indispensable pour observer et analyser les différentes évolutions de ses grandeurs électromécaniques d'une part et d'autre part de prévoir le contrôle nécessaire s'il y a lieu pour palier aux différents effets contraignants qui peuvent accompagner généralement les opérations de démarrage, de freinage, de variation de charge, etc...[12].

Dans ce chapitre, la modélisation de la machine synchrone à aimants permanents sera présentée à cet effet, le modèle triphasé ainsi que le modèle obtenu à l'aide de la transformation de Park seront abordés, la validation du modèle ainsi obtenu sera effectuée par simulation.

## **I.2. Constitution de la machine synchrone à aimant permanent (MSAP)**

La machine synchrone à aimant permanent se compose d'un stator triphasé et un rotor monté avec des aimants permanents qui fournissent le flux de champ (figure I.1). Cette machine n'a pas besoin d'un approvisionnement extérieur pour exciter le rotor. L'absence du bobinage d'excitation réduit le coût et élimine les pertes de puissance liées à cet enroulement. Le moteur synchrone à aimant permanent réduit l'espace occupé par le bobinage d'excitation pour une même taille donnée. Il est caractérisé par un faible moment d'inertie, une puissance massive élevée, un fonctionnement souple en vitesse variable et une commande simplifiée. Il est préférable pour certaines applications de hautes performances comme dans les machines- outils la robotique, l'aéronautique, etc...[13].



**Fig. I.1:**Moteur industriel à aimant permanent

### I.2.1. Le stator

La partie fixe de la machine (figure I.1) destinée à produire le champ tournant, comporte le circuit magnétique ferromagnétique constitué d'un empilage de tôles en acier au silicium de 0.35 à 0.5mm, qui accueille dans ces encoches les enroulements statoriques triphasés (bobine en fil de cuivre isolé). Les trois bobines sont disposées de telle façon qu'elles constituent un ensemble triphasé coupler soit en étoile ou en triangle.[14]

### I.2.2. Le rotor

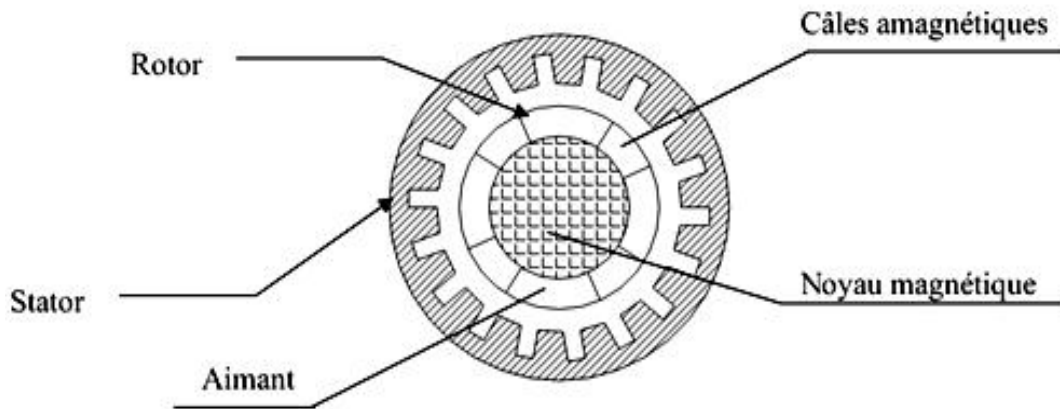
Représente la partie mobile de la machine formée d'un assemblage de tôles et d'aimants créant le flux inducteur. Le rotor d'un moteur synchrone à aimant permanent a une conception spéciale pour donner les caractéristiques exigées. Il existe deux structures de la MSAP selon la disposition des aimants, l'une avec pièce polaires et l'autre sans pièces polaire.

La différence entre les deux structures réside dans le fait que les inductances synchrones ont des valeurs sensiblement moins élevées et les ondulations du couple sont moins importantes pour des machines sans pièces polaires que celle avec pièces polaires.[15]

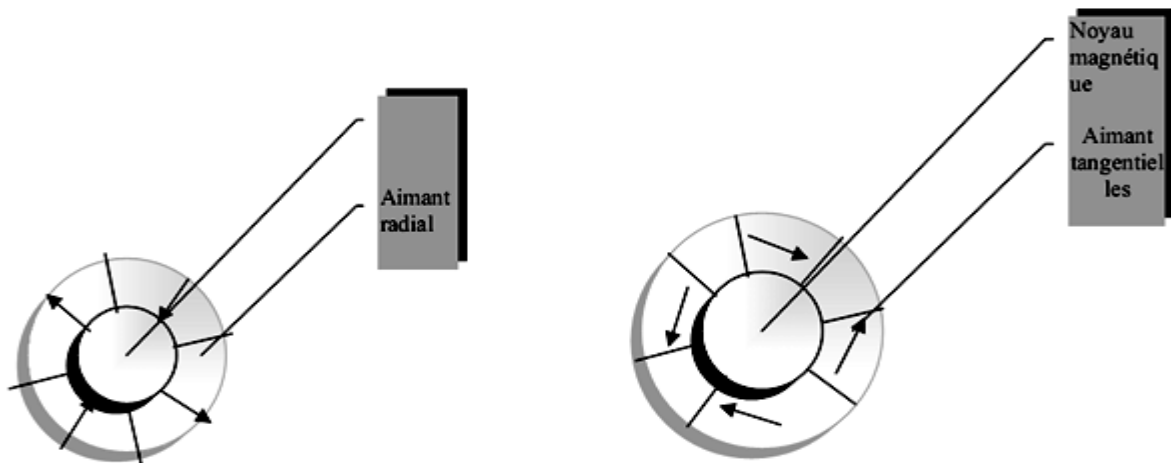
#### a- Structures sans pièces polaires « Pôles lisses »

Les aimants, en forme de tuile ou en barreaux élémentaires juxtaposés, sont directement fixés sur la surface du rotor grâce à des frettes (**figure I.2**). Le sens d'aimantation peut être radial (**figure I.2.a**), tangentiel (**figure I.2.b**) ou mixte (**figure I.2.c**). Les structures à pôles lisses sont caractérisées par un entrefer magnétique assez large accentué par l'épaisseur des aimants et par celle de la frette de maintien. De ce fait, l'inductance statorique est plus faible que celle d'une machine classique à rotor bobiné à pôles lisses. Il est alors difficile d'obtenir un couple massique important.[16]

Ainsi, la réaction d'induit est plus réduite, ce qui favorise une commande plus simple. De plus, pour une amélioration des performances des machines à aimants, l'utilisation des terres rares est plus recommandée pour cette structure.

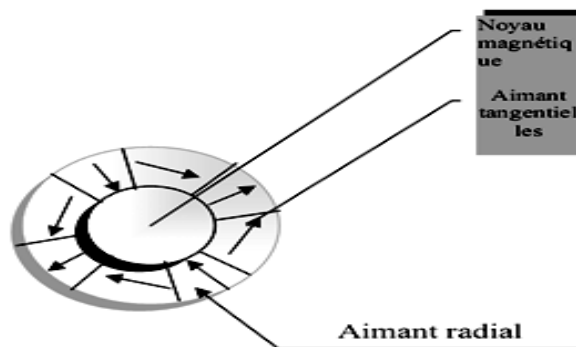


**Fig. I.2 :** structure d'une machine à aimants permanents sans pièces polaires



**Fig. I.2.a :** aimantation radiale

**Fig. I.2.b :** aimantation tangentielle



**Fig. I.2.c :** aimantation mixte

### b- Structures avec pièces polaires« Pôles saillants »

Comme dans les machines synchrones classiques à pôles saillants, la saillance a pour effet de produire une anisotropie au niveau du rotor dont la conséquence est de produire un couple réactant qui vient s'ajouter au couple d'interaction. A ce principal rôle que doivent assurer les pôles saillants dans les machines à aimants, un autre rôle peut leur être confié, c'est celui de la concentration de flux [17],[18].

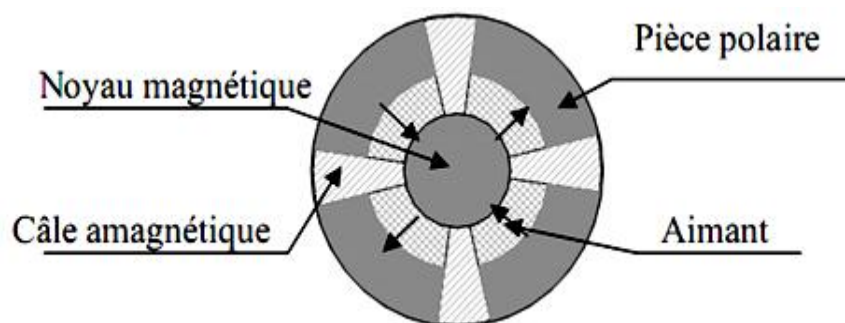
Les pièces polaires permettant également de fixer les aimants sans avoir à utiliser des frettes et de réduire de façon significative l'épaisseur équivalente de l'entrefer ainsi que le volume des aimants par rapport aux structures sans pièces polaires. Les aimants ferrites et à terres rares peuvent être utilisés.

Cependant, dans ce type d'inducteurs, la réaction d'induit est relativement plus importante.

### c- Structure avec pièces polaires sans concentration de flux

Généralement les aimants sont à aimantation radiale et placés sous des pièces polaires (**figure I.3**), afin de diminuer l'entrefer magnétique dans le but d'améliorer les performances de la machine.

Par contre la réaction d'induit sera plus importante, et il faut en tenir compte lors du choix du type d'alimentation [17],[18].

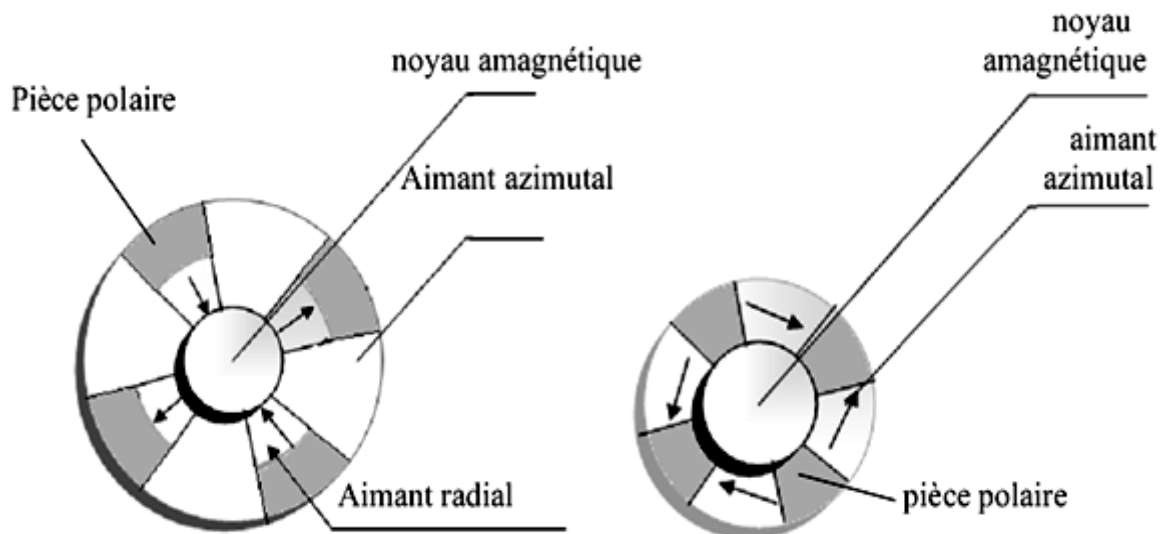


**Fig. I.3:** Structure de rotor avec pièces polaires sans concentration de flux

### d- Structure avec pièces polaires et concentration de flux

Elles permettent d'améliorer, le niveau de l'induction dans l'entrefer, donc le flux à vide et par conséquent le couple, grâce aux pièces polaires surtout pour les moteurs constitués d'aimants présentant une faible induction rémanente 'ferrite'.

Ils existent plusieurs catégories que l'on peut les distinguer par l'existence des pièces polaires et la disposition des aimants à l'intérieur du rotor (**figure 1.4.a**) et (**figure 1.4.b**).



**Fig. I.4.a :** Structure a aimantation mixte

**Fig. I.4.b:** Structure a aimantation azimuthale

#### e- Les matériaux utilisés pour la MSAP

La propriété de l'aimant permanent et le choix des matériaux convenables sont cruciaux dans la conception de la machine à aimant permanent. Le choix des aimants permanents est essentiel puisqu'ils interviennent beaucoup dans le couple massique qu'on peut attendre de l'actionneur. Leurs performances sont similaires avec leur prix de revient.

- ✓ Les ferrites : sont des composés d'oxyde de fer de baryum. Ces aimants Possèdent des performances modestes mais se sont imposés dans de très nombreuses applications en raison de leur faible prix de revient et de leur rigidité magnétique élevée. En raison De leurs faibles valeurs d'aimantation rémanente (environ 0.4T), les ferrites sont utilisées plutôt dans des machines à aimants de faible puissance à faible coût.
- ✓ Le samarium cobalt ( $\text{SmCo}_5$ ,  $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$ ) : est beaucoup plus performant en terme de densité volumique d'énergie que les autres types d'aimant ( $140$  à  $200[\text{KJ}/\text{m}^3]$  pour le  $\text{SmCo}_5$  et de  $180$  à  $240[\text{kJ}/\text{m}^3]$  pour le  $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$ ) et autorise une température de fonctionnement élevée (jusqu'à  $350^\circ\text{C}$ ); mais il est très coûteux en raison notamment de la présence du cobalt dans leur composition.

| Type d'aimants                | Densité d'énergie :<br>(BH) max (k J / m ) | Induction rémanente<br>Br (T) à 25°C | Champ coercitif<br>-Hc (kA/m) | Température<br>Tmax (°C) | Prix<br>(€ / Kg) |
|-------------------------------|--|--------------------------------------|-------------------------------|--------------------------|------------------|
| <b>NdFeB</b>                  | 200-380                                    | 1,2-1,5                              | 900-2000                      | 140 -220                 | 80-150           |
| <b>Sm Co5</b>                 | 140-200                                    | 1                                    | 2000                          | 280                      | 220              |
| <b>Sm2 Co17</b>               | 180-240                                    | 1,05                                 | 2000                          | 350-550                  | 300              |
| <b>Alnico</b>                 | 50-85                                      | 1,1-1,3                              | 130                           | 550                      | 45               |
| <b>Ferrites<br/>Strontium</b> | 27-35                                      | 0,3-0,4                              | 250                           | 250                      | 6                |
| <b>Ferrites<br/>Baryum</b>    | 8-30                                       | 0,2-0,4                              | 170                           | 100-240                  | 4,5              |

**Tableau 1.1** : Exemples de propriétés magnétiques des aimants.

### I.3. Domaines d'applications

Le moteur synchrone à aimants permanents est utilisé dans une large gamme de puissance, allant d'une centaine de Watts (servomoteurs) à plusieurs méga Watts (systèmes de propulsion des navires), dans des applications aussi diverses que le positionnement, la synchronisation l'entraînement à vitesses variable, et la traction.

- ✓ Il fonctionne comme compensateur synchrone.
- ✓ Il est utilisé pour les entraînements qui nécessitent une vitesse de rotation constante, tels que les grands ventilateurs, les compresseurs et les pompes centrifuges.

### I.4. Démarrage des machines synchrones à aimants permanents

#### I.4.1. Démarrage par un dispositif extérieur

Le démarrage de la machine synchrone n'est pas autonome, dans la pratique, pour mettre la machine en fonctionnement, alors qu'elle n'est pas raccordée au réseau, on la lance par une autre machine (moteur électrique ou turbine) à une vitesse très proche de la vitesse de synchronisme  $\Omega = \omega_0/p$ .

#### **I.4.2. Démarrage à fréquence progressive**

Dans le cas d'un moteur alimenté par un onduleur (dispositif électronique de puissance) on peut démarrer le moteur à partir d'une fréquence très faible que l'on augmente progressivement. Il faut réduire la tension lorsque la fréquence est faible car il n'y a pas beaucoup de force contre-électromotrice.

Certains moteurs synchrones destinés à être connectés au réseau disposent cependant d'une alimentation à fréquence variable (électronique ou autre) qui ne sert qu'au moment du démarrage.

#### **I.5. Avantages des Machines Synchrones à Aimants Permanents**

Les avantages associés à l'utilisation des machines à courant alternatif asynchrone et synchrone à aimants permanents ne sont pas à démontrer en termes de robustesse et de fiabilité. Aujourd'hui, avec le progrès actuel des aimants permanents, le moteur synchrone est de plus en plus utilisé dans les systèmes d'entraînement à vitesse variable. Son choix dans ce domaine est devenu attractif et concurrent aux moteurs à courant continu et les moteurs asynchrones et cela est dû principalement:

- Au facteur de puissance et au rendement élevé par rapport à ceux des moteurs asynchrones
- A la robustesse incontestée par rapport au moteur à courant continu
- A la puissance massique élevée et précision de sa commande
- Au développement de la technologie des composants de l'électronique de puissance, et à l'apparition des processeurs numériques à fréquence élevée et à la puissance de calcul, surmontant ainsi le problème de l'implantation d'algorithmes de commande de l'onduleur assurant l'auto-pilotage du MASP

#### **I.6. Inconvénients des Machines Synchrones à Aimant Permanent [17], [18],[19]**

Le principal inconvénient de la machine à aimants est que son flux inducteur est difficile à régler de ce fait la commande du moteur est effectuée par action extérieure en particulier dans le cas d'inducteur à pôle saillants. Il y'a aussi d'autre inconvénients tels que:

- Difficultés de démarrage ;
- condition de synchronisme délicate ;
- risques de décrochage.

## I.7. Modélisation de la machine synchrone à aimant permanent

La modélisation est une méthode mathématique utilisée pour réduire la Machine électrique en un simple système d'équations. L'élaboration du modèle mathématique des machines est une étape nécessaire en vue de la commande et de la simulation de leurs différents régimes de fonctionnement.

### I.7.1. Hypothèses simplificatrices [20]

Le modèle mathématique de la machine synchrone à aimant permanent obéit à l'hypothèse simplificatrice suivante :

- ✓ La répartition des forces magnétomotrice est sinusoïdale.
- ✓ L'effet de la température est négligé.
- ✓ Le circuit magnétique de la machine n'est pas saturé.
- ✓ L'effet d'amortissement au rotor est négligé.
- ✓ Les irrégularités de l'entrefer dues aux encoches statoriques sont ignorées.
- ✓ Les phénomènes d'hystérésis et les courants de Foucault sont négligés.
- ✓ Les couplages capacitifs entre les enroulements sont négligés.

### I.7.2. Représentation de la MSAP dans le système d'axe triphasés a, b, c

Le modèle mathématique du MSAP est similaire à celui de la machine synchrone classique en considérant les conditions simplificatrices citées précédemment [21].

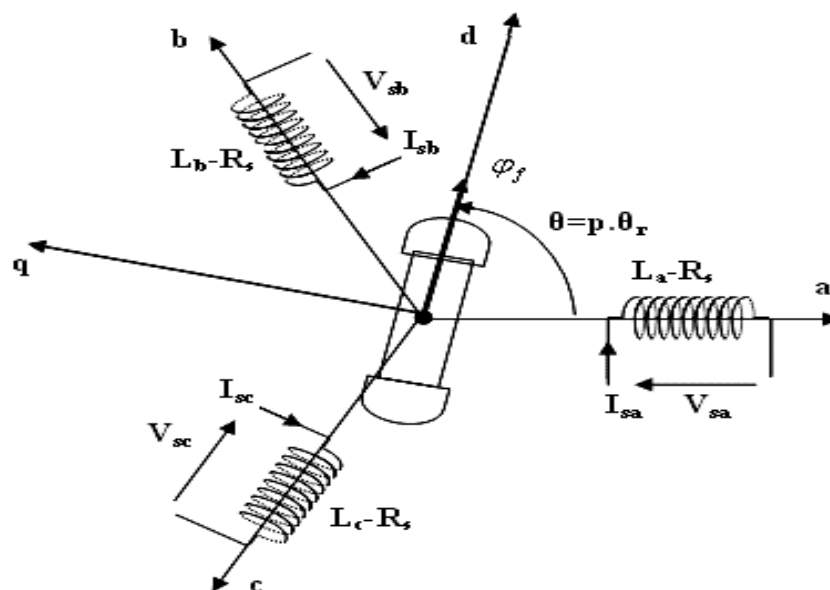


Fig. I.5: Représentation schématisée de la MSAP



## 1) Équations électriques

### a) Au stator

$$[V_s] = [R_s][I_s] + \frac{d}{dt}[\phi_s] \quad (I.01)$$

On définit  $[V_s]$ ,  $[I_s]$ ,  $[\phi_s]$  comme tensions, courants et flux triphasés du stator de la machine.

### b) Au rotor

$$[V_f] = [R_f][I_f] + \frac{d}{dt}[\phi_f] \quad (I.02)$$

$[V_f]$ ,  $[I_f]$ ,  $[\phi_f]$  tension, courant et flux de la machine.

## 2. Équations magnétiques

### a) Flux statorique

$$[\phi_s] = [L_{ss}][I_s] + [M_{sf}][I_f] \quad (I.03)$$

### b) Flux rotorique

$$[\phi_f] = [L_f][I_f] + [M_{fs}][I_s] \quad (I.04)$$

La matrice  $[L_{ss}]$  est carrée d'ordre 3. Elle contient des termes constants regroupés dans  $[L_{s0}]$  et des termes variables dépendent de  $\theta$  regroupé dans  $[L_{s2}(\theta)]$ . On pose :

$$[L_{ss}] = [L_{s0}] + [L_{s2}] \quad (I.05)$$

Avec :

$$[L_{s0}] = \begin{bmatrix} L_{s0} & M_{s0} & M_{s0} \\ M_{s0} & L_{s0} & M_{s0} \\ M_{s0} & M_{s0} & L_{s0} \end{bmatrix}$$

et

$$[L_{s2}] = L_{s2} \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos 2(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos 2(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos(2\theta) \\ \cos 2(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos(2\theta) & \cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

$[M_{fs}]$  : est la matrice inductance qui correspond au couplage entre le rotor et le stator

$$[\mathbf{M}_{fs}] = \mathbf{M}_f \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

Les équations électriques deviennent :

$$[\mathbf{V}_s] = [\mathbf{R}_s][\mathbf{I}_s] + \frac{d}{dt}([\mathbf{L}_{ss}][\mathbf{I}_s] + [\mathbf{M}_{sf}][\mathbf{I}_f]) \quad (\text{I.06})$$

$$[\mathbf{V}_f] = [\mathbf{R}_f][\mathbf{I}_f] + \frac{d}{dt}([\mathbf{M}_{fs}][\mathbf{I}_s] + [\mathbf{L}_f][\mathbf{I}_f]) \quad (\text{I.07})$$

### I.7.3. Représentation de la MSAP dans le système d'axe d, q

Pour supprimer le non linéarité du système d'équations différentielles, on fait des changements de variables qui réduisent la complexité de ce système. Dans les machines électriques triphasées, ce changement de variable consiste à transformer les trois enroulements relatifs aux trois phases à des enroulements orthogonaux (d,q), tournant à une vitesse  $\omega_r$ .

#### 1) Model de Park

L'équation qui traduit le passage du système triphasé au système biphasé (d, q) est donnée par :

$$[\mathbf{X}_{dq0}] = [\mathbf{P}_\theta] * [\mathbf{X}_{abc}] \quad (\text{I.07})$$

Où  $[\mathbf{X}]$  représente la valeur courant, tension ou flux et  $\theta$  représente la position du rotor. Les termes  $X_d$ ,  $X_q$  représentent les composantes longitudinale et transversale des variables statoriques (tensions, courants, flux).

La matrice de transformation est donnée par:

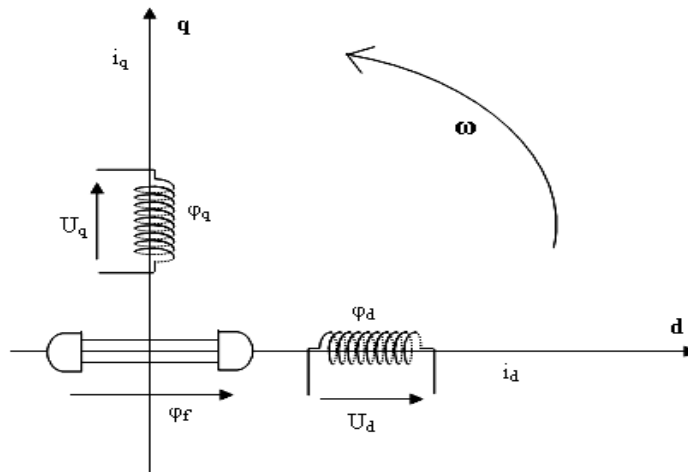
$$[\mathbf{P}_\theta] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{I.08})$$

Le facteur  $\frac{2}{3}$  est choisit de façon à ce que la matrice  $[P_\theta]$  soit orthogonale ce qui facilite le calcul de la matrice inverse. Alors  $[P_\theta]^{-1}$  devient comme suit :

$$[P_\theta]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{4\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.09})$$

L'angle  $\theta$  est définit comme suit :

$$\theta(t) = \int_{\lambda}^t \omega(t) dt \quad (\text{I.10})$$



**Fig. I.6:** Modèle biphasé de la MSAP

On choisi le référentiel de Park. (d, q) lié au rotor.

2) **Équations électriques** : Les composantes de la tension statorique sont données par.

$$\begin{cases} U_d = R_s i_d + \frac{d\varphi_d}{dt} - \omega \varphi_q \\ U_q = R_s i_q + \frac{d\varphi_q}{dt} + \omega \varphi_d \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

3) **Équations magnétiques** : Les composantes du flux statorique sont données par:

$$\begin{cases} \varphi_d = L_d i_d + \varphi_f \\ \varphi_q = L_q i_q \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Où  $\varphi_f$  est le flux d'excitation constant des aimants permanents

#### 4) Équations de la puissance et du couple électromagnétique

L'expression du couple électromagnétique, est donné par :

$$C_e = \frac{\partial W_e}{\partial \theta_{géo}} = P \frac{\partial W_e}{\partial \theta_{géo}}$$

Dans la théorie du champ des machines électriques, le couple électromagnétique intervenant dans l'équation s'exprime par la dérivée partielle de stockage d'énergie électromagnétique par rapport à l'angle géométrique de rotation du rotor.

Où :

$W_e$  : énergie emmagasinée dans le circuit magnétique.

$\theta_{géo}$  : écart angulaire de la partie mobile (rotor par rapport au stator). Avec  $\theta_{géo} = \frac{\theta_{ele}}{P}$

Selon Park, l'expression de la puissance s'écrit comme suit :

$$p(t) = \frac{3}{2} (V_d I_d + V_q I_q) \quad (I.13)$$

En remplaçant  $V_d$  et  $V_q$  par leur expression, il vient :

$$p(t) = \frac{3}{2} [(R_s (I_d^2 + I_q^2)] + \frac{3}{2} [I_d \frac{d\phi_d}{dt} + I_q \frac{d\phi_q}{dt}] + \frac{3}{2} [\phi_d I_d - \phi_q I_q] \omega \quad (I.14)$$

Où :

- Le 1<sup>er</sup> terme : représente les chutes ohmiques (pertes par effet joule)
- Le 2<sup>ème</sup> terme : représente la variation de l'énergie magnétique emmagasinée
- Le 3<sup>ème</sup> terme : représente la puissance transférée du stator au rotor à travers l'entrefer (puissance électromagnétique).

On peut écrire donc :

$$C_e = \frac{3}{2} p(L_d - L_q) I_d I_q + \frac{3}{2} p(\phi_f I_q) \quad (I.15)$$

5) **Equation du mouvement** : L'équation du mouvement de la machine est donnée par :

$$J \frac{d\Omega_r}{dt} + F\Omega_r = C_e - C_r \quad (I.16)$$

Avec  $J$  : Moment d'inertie des masses tournantes

$F$  : coefficient de frottement visqueux

$\Omega_r$  : vitesse mécanique de rotation ( $\omega = p \Omega_r$ )

$C_e$  : couple électromagnétique ;

## I.8. Mise sous forme d'équation d'état

Considérons les tensions ( $U_d, U_q$ ), et le flux d'excitation ( $\Phi_f$ ) comme grandeurs de commande, les courants statoriques ( $I_d, I_q$ ) comme variable d'état et le couple  $C_r$  comme perturbation. A partir des équations (1.12), on peut écrire le système d'équation suivant :

$$[\dot{X}] = [A][X] + [B][U]$$

$$[Y] = [C][X] + [D][U]$$

Avec :

[A] : La matrice fondamentale qui caractérise le système.

[B] : La matrice d'entrée.

[C] : La matrice de sortie.

[D] : La matrice de transmission direct.

[U] : Le vecteur de commande.

[X] : Le vecteur d'état.

Sous forme matricielle on peut écrire le notre système d'équations (1.12) comme suit :

$$\frac{d}{dt}[X] = [A][X] + [B][U]$$

D'où:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_d \\ \dot{I}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} & \omega \frac{L_q}{L_d} \\ -\omega \frac{L_d}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\Phi_f}{L_q} \end{bmatrix} \omega \quad (I.17)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} & \omega_r \frac{L_q}{L_d} \\ -\omega_r \frac{L_d}{L_q} & -\frac{R_s}{L_d} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} & -\frac{\omega_r}{L_q} \end{bmatrix}$$

$$[C] = [1 \ 1]$$

$$[D] = 0$$

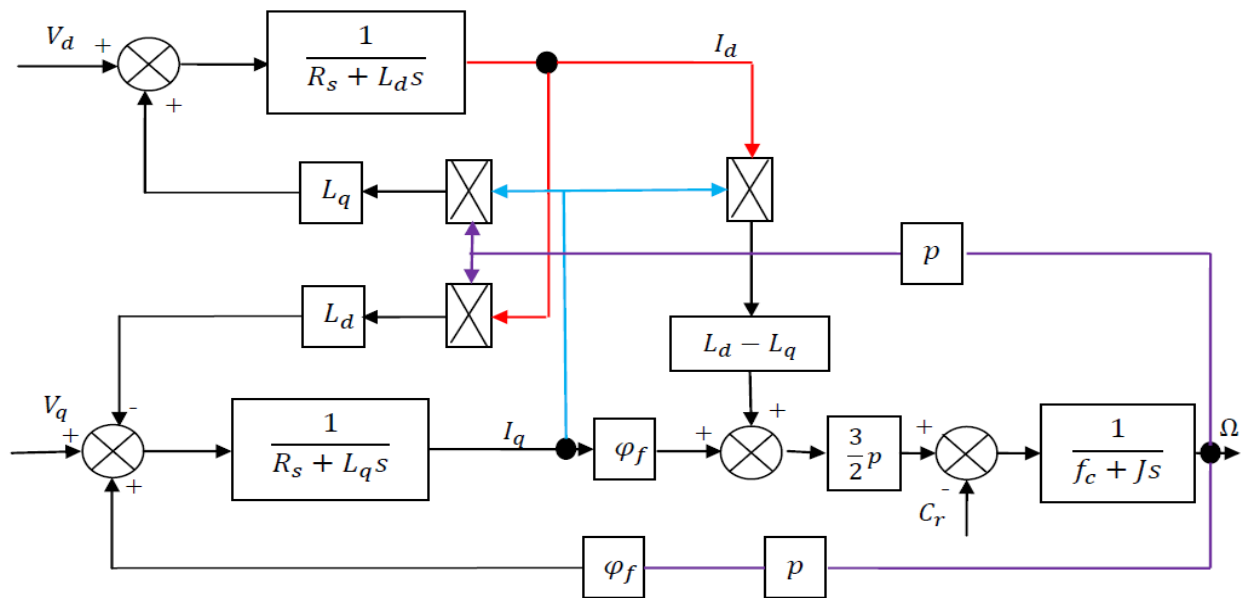


Fig. I.7 : Schéma bloc de MSAP

### I.9. Modélisation de l'association MSAP-Onduleur de tension

Après avoir présenté le modèle de la machine, on présentera le système d'entraînement complet où la machine synchrone est associée à deux convertisseurs en cascade.

Le convertisseur coté réseau est constitué d'un redresseur triphasé à diode et d'un filtre, et le convertisseur coté machine, un onduleur de tension triphasé.

La (Figure I-8) illustre le schéma de principe de cette association.

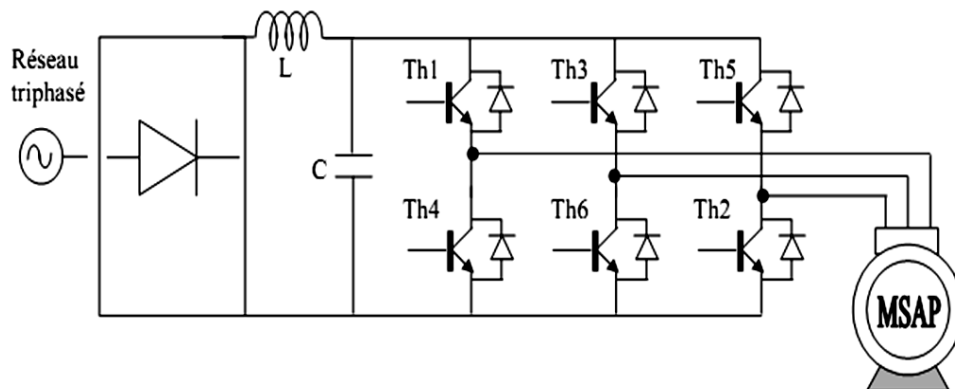


Fig. I.8: Schéma de l'association MSAP – Onduleur de tension

#### I.9.1. Définition de l'onduleur de tension

L'onduleur est un convertisseur statique assurant la conversion continu-alternatif, il permet d'imposer aux bornes de la machine des tensions d'amplitude et de fréquence réglable par la commande.[7] Il est constitué de trois bras, chaque bras est constitué de deux transistors dont la commande est complémentaire. Les transistors sont shuntés par des diodes de récupération. Celui-

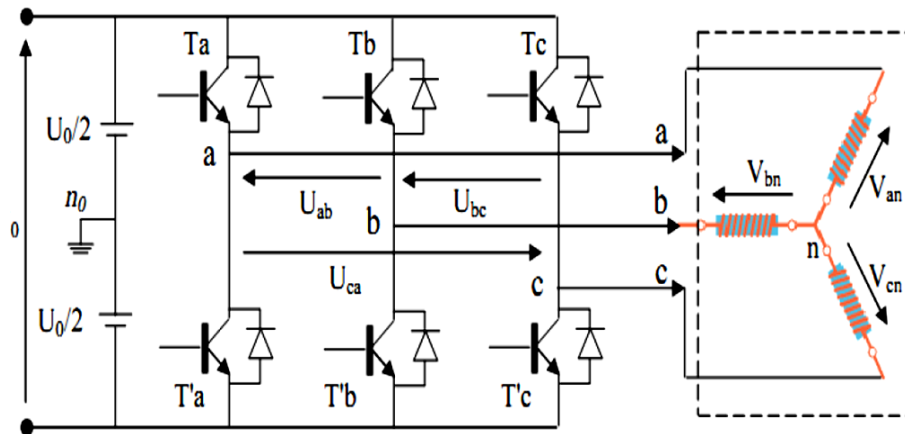
ci est schématisé dans la Figure (I-8). Chaque bras de l'onduleur peut être présenté par un interrupteur à deux positions.

On distingue plusieurs types d'onduleurs :

- ★ Selon la source :
  - onduleurs de tension,
  - onduleurs de courant,
- ★ Selon le nombre de phases (monophasé, triphasé, etc.),
- ★ Selon le nombre de niveaux (2,3, etc.).

**I.9.2. Modélisation de l'onduleur de tension**

Pour modéliser l'onduleur de tension, on considère son alimentation comme une source parfaite, supposée d'être de deux générateurs de F.E.M égale à  $\frac{U_0}{2}$  connectés entre eux par un point noté  $n_0$ . [22],[23]



**Fig. I.9:** Schéma de l'onduleur de tension

La machine a été modélisée à partir des tensions simples qu'on note  $v_{an}$ ,  $v_{bn}$  et  $v_{cn}$  et l'onduleur est commandé à partir des grandeurs logiques  $S_i$ . On appelle  $T_i$  et  $T'_i$  les transistors (supposée des interrupteurs idéaux), on a :

Si  $S_i = 1$  alors  $T_i$  est passant et  $T'_i$  est ouvert

Si  $S_i = 0$  alors  $T_i$  est ouvert et  $T'_i$  est passant

Les tensions  $V_{an}$ ,  $V_{bn}$  et  $V_{cn}$  forment un système de tensions triphasées équilibrées alors :

$$V_{an} = U_0/3(2S_a - S_b - S_c) \tag{I-18}$$

$$V_{bn} = U_0/3(2S_b - S_a - S_c) \tag{I-19}$$

$$V_{cn} = U_0/3(2S_c - S_a - S_b) \tag{I-20}$$

Il reste à déterminer les fonctions  $S_i$ , celles-ci dépendent de la stratégie de commande de l'onduleur.

L'onduleur a pour objectif de générer à sa sortie, des tensions les plus sinusoïdales possibles. A cet effet, différentes stratégies de modulation ont été proposées. Parmi celles-ci, la modulation de largeur d'impulsions MLI triangulo-sinusoidal (en anglais, Pulse Width Modulation PWM).

### I.9.3. Principe de la commande de l'onduleur par la stratégie MLI triangulo-sinusoidal

Le principe général de la commande MLI consiste à convertir une modulante (tension de référence au niveau commande), généralement sinusoïdale, en une tension sous forme de créneaux successifs, générée à la sortie de l'onduleur (niveau puissance).[24]

Cette technique repose sur la comparaison entre deux signaux:

- Le premier, appelé signal de référence, de fréquence  $f$  représente l'image de la sinusoïde qu'on désire à la sortie de l'onduleur. Ce signal est modulable en amplitude et en fréquence.
- Le second, appelé signal de la porteuse, de fréquence  $f_p$  c'est un signal de haute fréquence par rapport au signal de référence

L'intersection de ces signaux donne les instants de commutation des interrupteurs des sorties de l'onduleur. Lorsque le signal de référence est au dessus du signal de la porteuse, l'impulsion de sortie est 1 et lorsqu'il est au dessous de la porteuse, l'impulsion de sortie est égale à 0.

Donc le principe de cette stratégie peut être résumé par l'algorithme suivant :

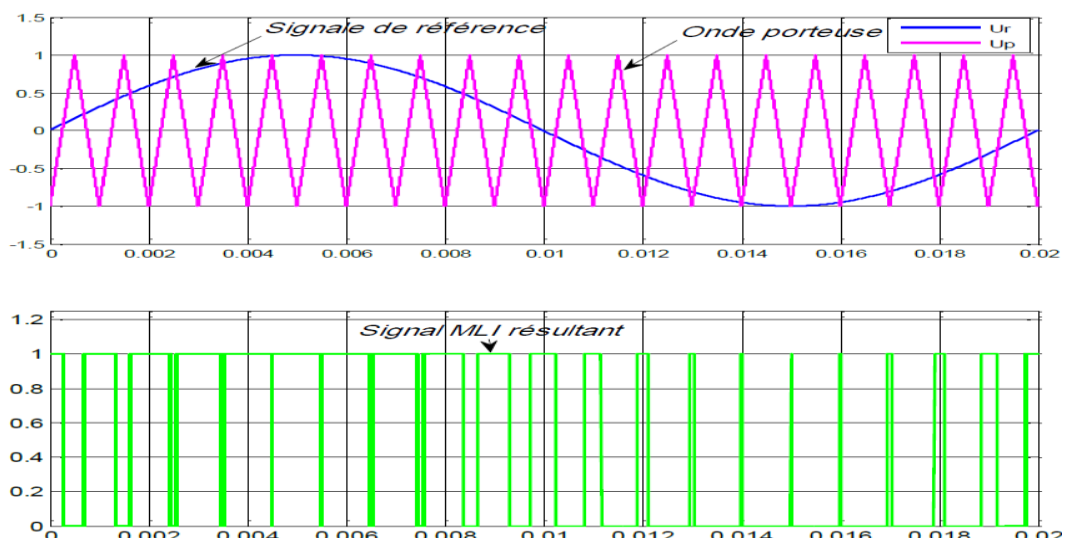
Si  $U_r \geq U_p$  alors  $S(t) = 1$  sinon  $S(t) = 0$

$U_r$  : la tension de référence

$U_p$  : la tension de porteuse

$S(t)$  : est le signal MLI résultant

La (Figure I.10), illustre le principe de cette commande :





**Fig. I-10** : illustration de la MLI triangulo-sinusoïdale

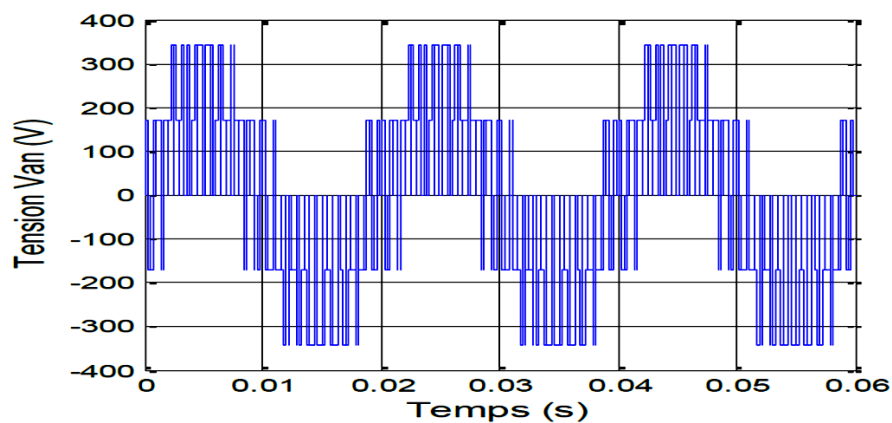
Cette stratégie est caractérisée par deux paramètres : l'indice  $m$  de modulation et le taux de modulation  $r$ . [23],[25],[26]

L'indice de modulation  $m$  qui est défini comme étant le rapport entre la fréquence de la porteuse  $f_p$  et la fréquence du signal de référence  $f$  :

$$m = f_p / f$$

Le taux de la modulation (le coefficient de réglage en tension)  $r$  qui est défini comme étant le rapport entre la des amplitudes de tension de la référence  $U_r$  sur la porteuse  $U_p$ .

La forme de tension de sortie de l'onduleur de tension triphasée pour  $m = 1$  et  $r = 20$  est représentée par la figure suivante:



**Fig. I-11:**Forme de tension de sortie de l'onduleur commandé par la MLI triangulo-sinusoïdale (pour  $m=20$  et  $r=1$ )

## I.10. Résultats de simulation

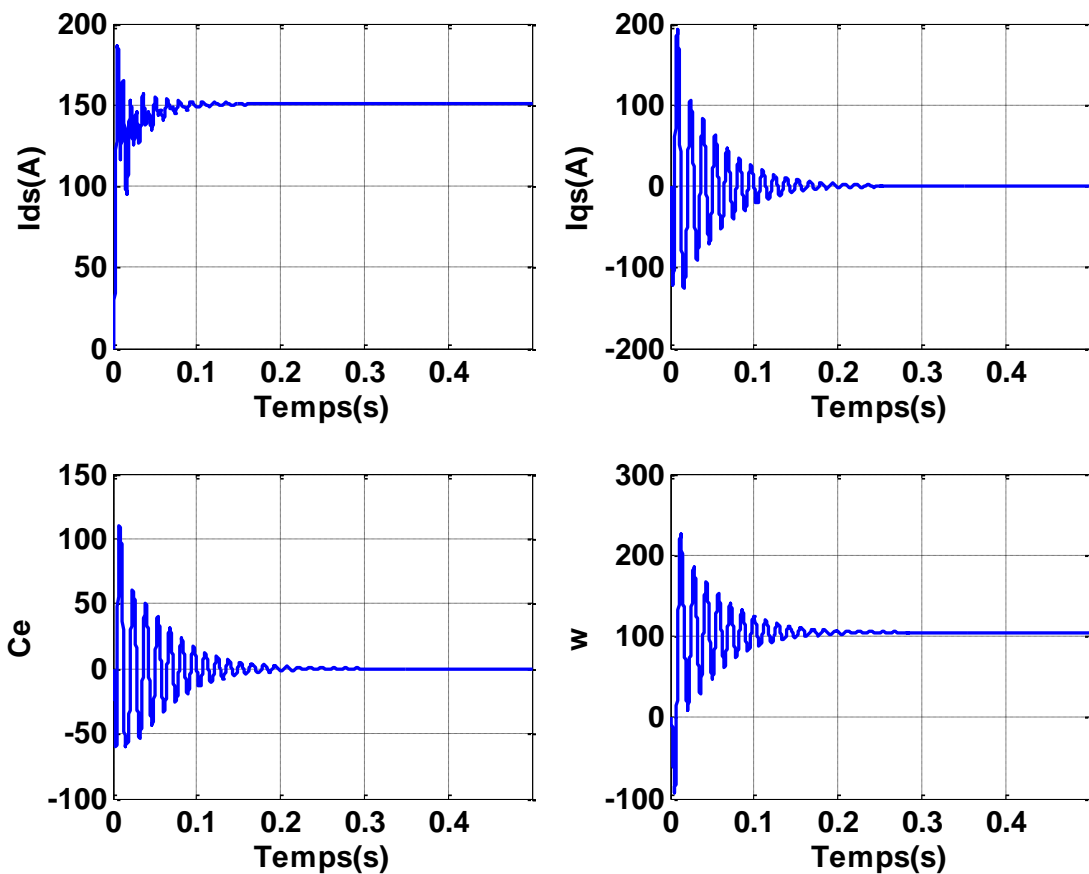
### I.10.1. Alimentation par un réseau triphasé équilibré

Pour compléter l'étude théorique présentée précédemment, la première application, du modèle de la machine synchrone à aimants permanents et sa mise en œuvre dans la simulation numérique d'un démarrage direct sur un réseau (220/380V) triphasé équilibré de fréquence fixe 50Hz.

La simulation a été effectuée sous l'environnement MATLAB/SIMULINK. Les paramètres de la machine sont indiqués au niveau de l'annexe A.

### Résultats de simulation démarrage à vide

En première étape, on a simulé le fonctionnement de la MSAP à vide (sans application du couple de charge). La Figure (I.12) présente les résultats de la simulation



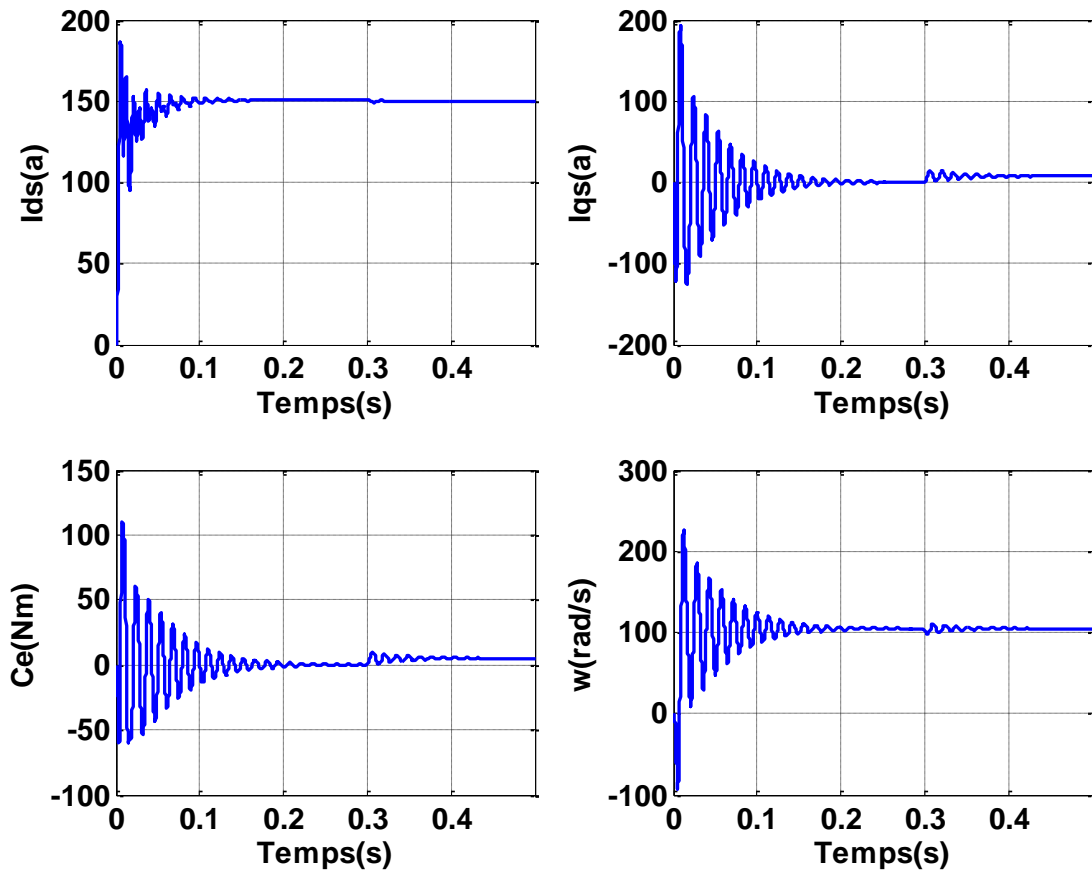
**Fig. I-12 :** Résultats de simulation de la MSAP à vide, alimentée par un réseau triphasé équilibré

On remarque que :

Pendant le régime transitoire, la vitesse est fortement pulsatoire, présentant au premier instant de démarrage des oscillations importantes, et atteint sa valeur 104 rad/sec est égale à la vitesse de synchronisme puisque le moteur possède 3 pôles.

L'allure de la courbe du couple présente aussi au démarrage des oscillations importantes dans un intervalle de temps court, puis se stabilisé à zéro puisque la machine est à vide.

### Résultats de simulation démarrage en charge



**Fig. I-13 :** Résultats de simulation de la MSAP alimentée par un réseau triphasé équilibré en charge

La Figure (I-10) montre l'évolution des grandeurs précédentes avec l'application d'un échelon du couple résistant de ( $C_r=3 N.m$ ) à l'instant ( $t = 1 s$ ).

On remarque que l'application de la charge entraîne une variation de vitesse pendant un bref de temps, puis elle se stabilise à la même valeur qu'avant, alors que le couple électromagnétique augmente pour compenser la charge appliquée et se stabilise finalement à la valeur du couple de charge.

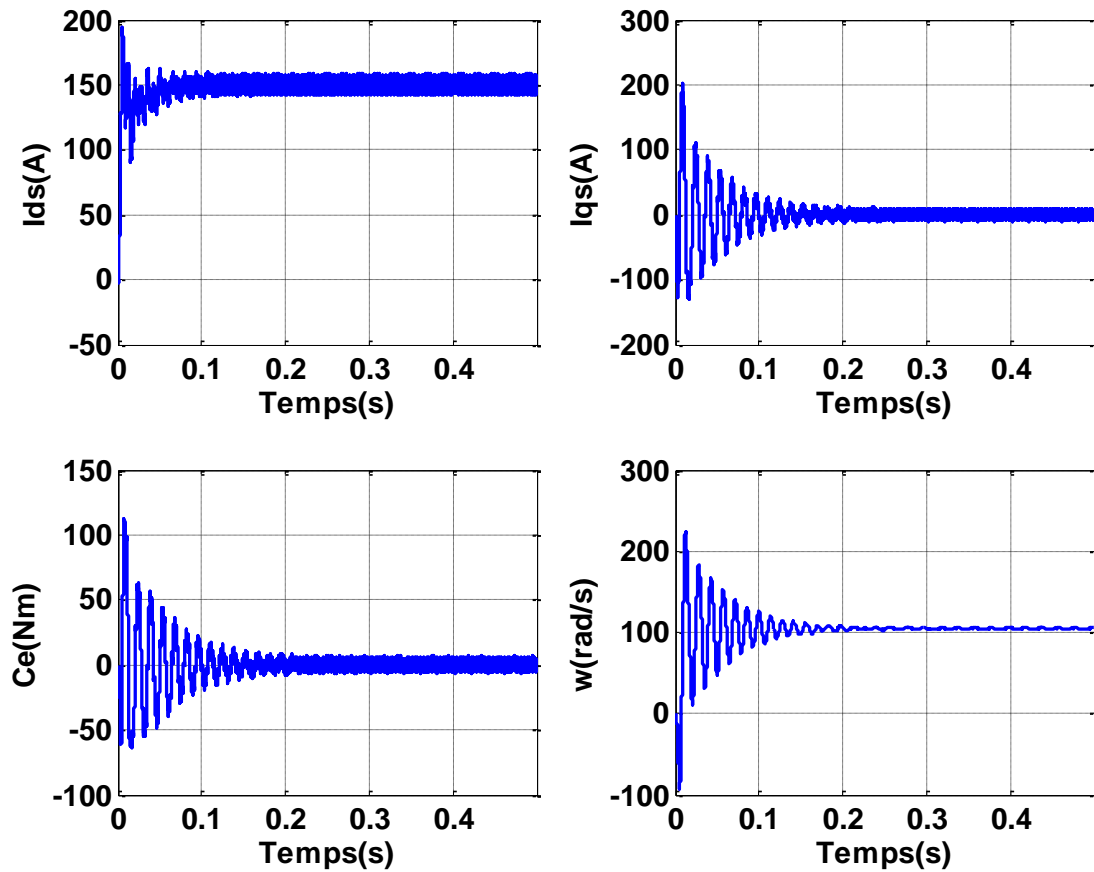
#### I.10.2. Alimentation par un onduleur de tension

On a simulé l'association convertisseur statique-MSAP, pour un fonctionnement à vide puis en charge.

L'onduleur est commandé par la technique de modulation triangulosinusoidale

Si on compare ces résultats (MSAP alimentée par un onduleur) avec ceux obtenus auparavant (MSAP alimentée par un réseau triphasé équilibré), on constate qu'ils sont similaires, sauf que la présence de l'onduleur engendre des ondulations qui affectent le fonctionnement de la machine.

### Résultats de simulation démarrage à vide



**Fig. I-14) :** Résultats de simulation de la MSAP alimentée par un onduleur à vide

### Résultats de simulation démarrage en charge

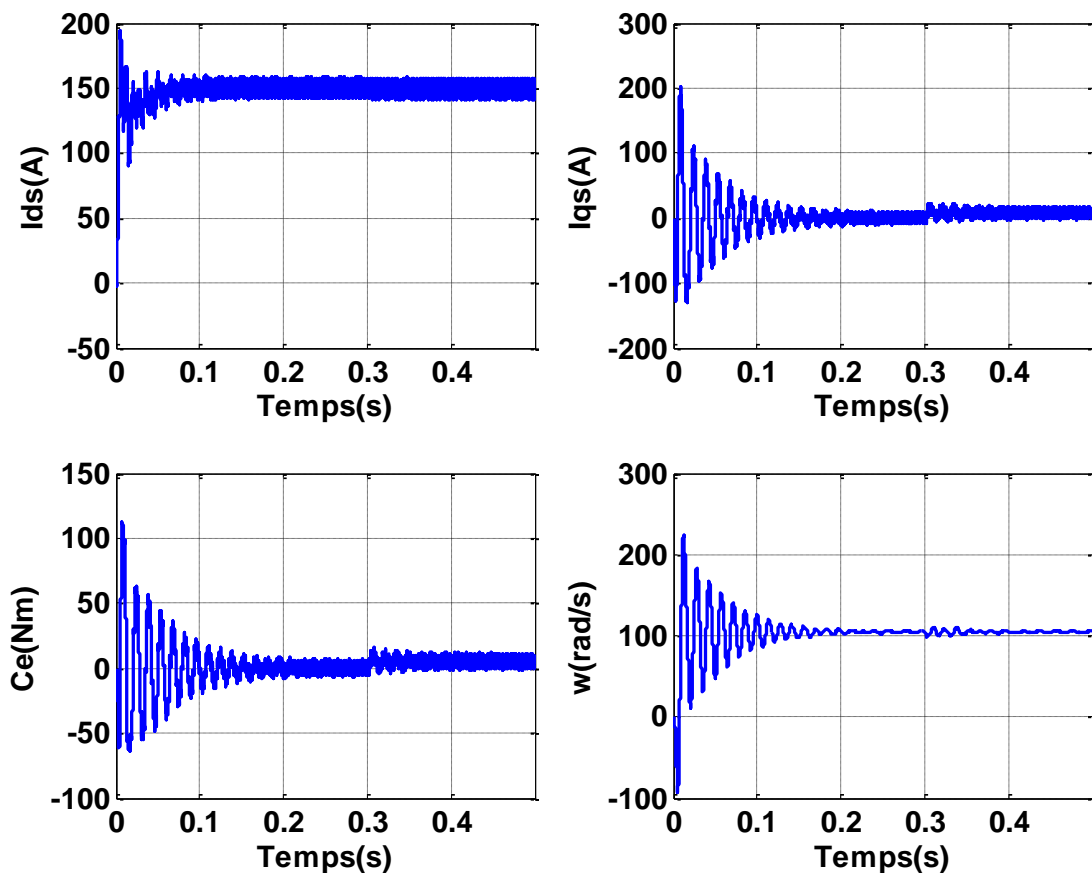


Fig. I-15 : Résultats de simulation de la MSAP en charge alimentée par un onduleur

### I.11.conclusion

Le but de ce chapitre est de valider le modèle de la machine synchrone alimenté par le réseau, ainsi que le modèle de l'onduleur de tension.

Dans ce chapitre, on a modélisé la machine synchrone à aimants permanents en utilisant le modèle de Park, le modèle devient plus simple et les non linéarités sont réduites.

En suite on a modélisé le convertisseur statique et sa commande. Et en dernière partie, on a simulé le modèle de la MSAP alimenté par une source parfaite, puis par le convertisseur statique à vide puis en charge.

Et d'après les résultats de simulation qu'on a pu avoir, les réponses sont très rapides et stables mais on remarque que les performances ne sont pas bonnes surtout au démarrage.

## II.1. Introduction

Comme le modèle de la machine synchrone à aimants permanents qu'on a présenté au chapitre précédent est un système multi variable, non linéaire et en plus il est fortement couplé entre les variables d'entrées (tension, fréquence), les variables de sorties (couple, vitesse) et les variables internes de la machine comme le flux, la commande donc de la machines est difficile.[27]

Pour contrecarrer cette difficulté et pour obtenir une situation équivalente à celle de la machine à courant continu à excitation séparée, Blaschke et Hasse en 1972 [29], qui ont proposé une technique de commande dite commande vectorielle appelée aussi commande par orientation de flux FOC (Field Oriented Control). L'idée fondamentale de cette stratégie est d'assimiler le comportement de la machine synchrone à celui d'une machine à courant continu, c'est-à-dire un modèle linéaire et découplé ce qui permet d'améliorer son comportement dynamique [28], [29].

Cependant, la commande vectorielle elle n'a pu être implantée et utilisée réellement car les régulations, à l'époque, reposaient sur des composant analogiques donc, l'implantation de la commande était difficile [22], [30]. Avec l'évènement des microcontrôleurs et grâce aux progrès de l'électronique numérique et l'apparition des processeurs rapides de traitement numérique du signal comme (DSP), la réalisation de leur commande est devenue de plus en plus simple. Cela a conduit à une explosion des recherches et des applications relatives à la commande vectorielle de la machine synchrone à aimant permanent, qui est l'objectif de ce chapitre.

Ce chapitre donc présente la commande vectorielle appliquée à la MSAP. Les boucles des courants et la boucle de vitesse sont régulées à l'aide de correcteurs classique PI. Des résultats de simulation sont présentés pour montrer les performances de la régulation proposée. L'étude de la robustesse de ce contrôle sera examinée en dernier lieu.

## II.2. Les équations du MSAP en régime quelconque

Pour cette mise en équation, on suppose les mêmes hypothèses simplificatrices prises dans le précédent chapitre. La mise en équation de la MSAP avec les hypothèses qu'on a retenues étant classique, on ne mentionnera que les points qui semblent essentiels et les choix qui sont propres par rapport à ce qui se fait habituellement.

Les équations électriques dans un repère fixe lié au stator sont décrites par :

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (\text{II-1})$$

La somme instantanée des courants statoriques est nulle, de sorte qu'il n'y a pas de courant homopolaire. Par conséquent, s'il existe une composante homopolaire de tension ou de flux, elle n'intervient pas dans le couple. Le comportement de la machine est donc représenté par deux variables indépendantes.

En appliquant la transformation restreinte de Concordia  $T_{32}$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} V\alpha \\ V\beta \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} I\alpha \\ I\beta \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} \quad (\text{II-2})$$

Où :

$$\begin{bmatrix} X\alpha \\ X\beta \end{bmatrix} = T_{32}^t \begin{bmatrix} Xa \\ Xb \\ Xc \end{bmatrix} \text{ avec } T_{32} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -1 & -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{II-3})$$

X peut être V, I, ou  $\Phi$ . En appliquant la transformation de Park au système d'équations (II.1), on peut exprimer tous les vecteurs dans un repère lié au rotor. Si  $\theta$  est l'angle électrique désignant la position du rotor par rapport au stator, on a :

$$\begin{bmatrix} Vd \\ Vq \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} id \\ iq \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} + \mathbf{P}\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} \quad (\text{II-4})$$

Où :

$$\begin{bmatrix} Xd \\ Xq \end{bmatrix} = \mathbf{p}(-\Theta) \begin{bmatrix} X\alpha \\ X\beta \end{bmatrix} \text{ avec } : \mathbf{p}(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \quad (\text{II-5})$$

$V_d$ ,  $V_q$ ,  $i_d$  et  $i_q$  sont les composantes directes et en quadrature de tension et de courant.  $\Phi_d$  et  $\Phi_q$  sont les composantes directes et en quadrature du flux.

Dans les machines synchrones à répartition sinusoïdale des conducteurs,  $\Phi_d$  et  $\Phi_q$  sont fonctions linéaires des courants  $i_d$  et  $i_q$  :

$$\begin{aligned} \Phi_d &= L_d i_d + \Phi \\ \Phi_q &= L_q i_q \end{aligned} \quad (\text{II-6})$$

$L_d$  et  $L_q$  sont les inductances directe et en quadrature et elles sont supposées indépendantes de  $\theta$ .  $\Phi_e$  représente le flux des aimants à travers le circuit équivalent direct. En reportant les expressions des flux dans l'équation (II.4) on aboutit à :

$$\begin{bmatrix} Vd \\ Vq \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} id \\ iq \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} id \\ iq \end{bmatrix} + \omega \mathbf{p}\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} id \\ iq \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_d \\ e_q \end{bmatrix} \quad (\text{II-7})$$

Où  $\omega = p \Omega$ ,  $p$  étant le nombre de paires de pôles et  $\omega$  la vitesse angulaire du rotor.  $e_d$  et  $e_q$  sont les composantes directe et en quadrature de f.e.m.

Dans le cas des machines synchrones à aimants permanents et à rotor lisse, les inductances directe et en quadrature sont identiques ( $L_d=L_q=L$ ). Le système d'équations (II.7) se simplifie alors à :

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + L \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + L\omega_p \left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (\text{II-8})$$

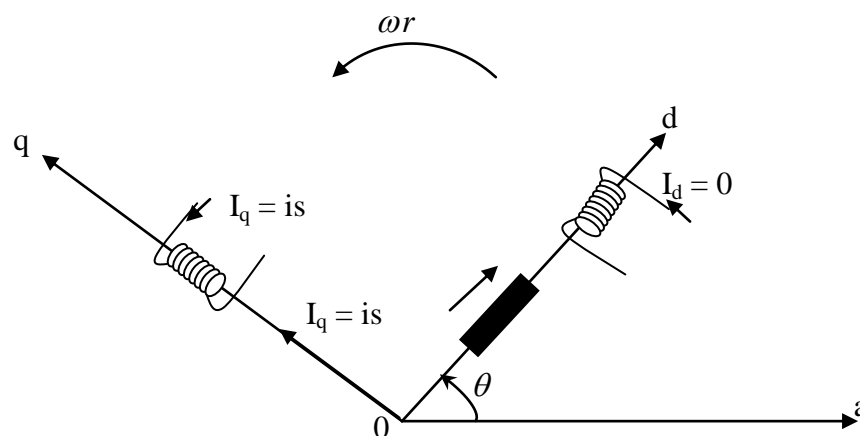
### II.3. Principe de la commande vectorielle

La commande par flux orienté consiste à orienter le courant suivant l'axe « q ». Ainsi, le couple électromagnétique peut être contrôlé par une seule composante du courant, donc il faut maintenir «  $I_d$  » nul, et assurer le contrôle par la composante quadrature «  $I_q$  ». Ceci revient à maintenir le courant statorique en quadrature avec le flux inducteur, ce qui donne un couple maximal, (figure2.1). [07],[26]

Le principal flux de la machine est généré par les aimants du rotor. La plus simple commande pour une machine synchrone à aimant permanents est de maintenir le courant direct «  $I_d$  » nul et de réguler la vitesse par le courant transverse «  $I_q$  » via la tension «  $U_q$  ». Ceci vérifie le principe de la machine à courant continu.

Sachant que l'expression du couple électromagnétique est :

$$C_e = \frac{3}{2} [(L_d - L_q) I_d I_q + \phi_f I_q]$$



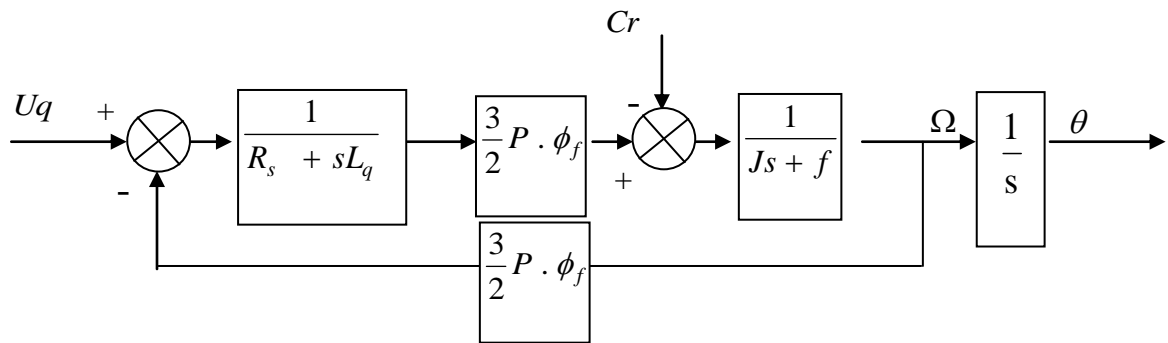
**Fig. II.1** : Principe de la commande vectorielle

En annulant le courant  $I_d$ , l'expression du couple électromagnétique devient comme suit :

$$C_e = \frac{3}{2} P \phi_f I_q \quad (\text{II.9})$$



Lorsque le courant  $I_d$  est nul, le modèle de la M.S.A.P se réduit selon l'axe « q » à celui d'une machine à courant continu à excitation séparée (figure II-2)[31].

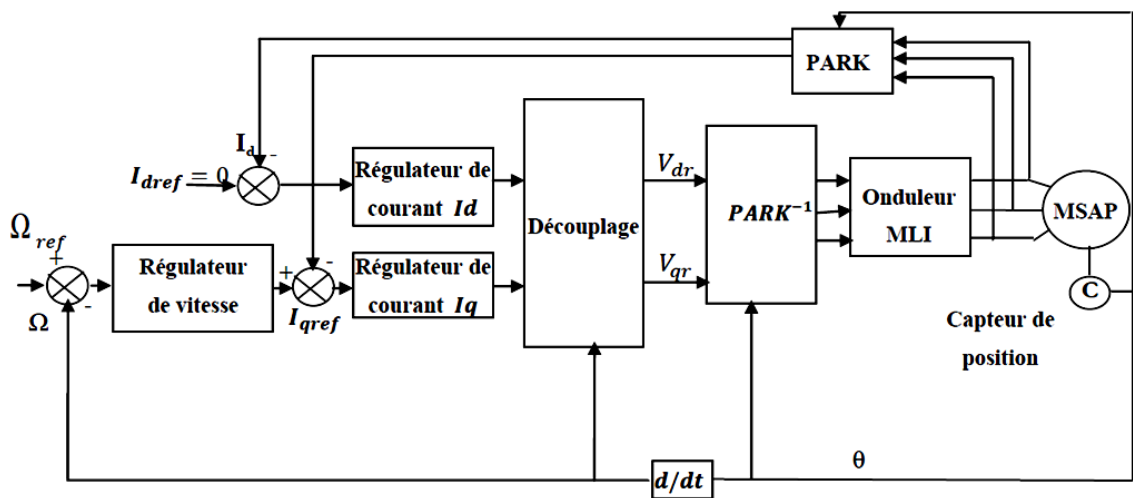


**Fig. II.2:** Modèle de la MSAP lorsque  $I_d = 0$

## II.4. Commande vectorielle de la MSAP alimentée en tension

### II.4.1. Description du système global

Le contrôle de la vitesse de la machine, demande une commande simultanée de deux Variables  $I_d$  et  $I_q$ . La (Figure II.3) [31],[32],[22],[25] représente le schéma bloc d'une régulation de vitesse de la MSAP alimentée en tension et commandée par orientation du flux dans le repère (d, q).



**Fig. II-3 :** Schéma bloc d'une régulation de vitesse de la MSAP, alimentée en tension et commandée par 'orientation du flux'

Comme montre donc la (Figure II.2), la commande vectorielle est constituée de deux principales boucles à savoir la boucle de vitesse, les boucles internes des courants et la transformation directe et inverse de Park.

La vitesse est régulée à travers la boucle externe du bloc, la sortie de son régulateur permet de générer le courant de référence qui est comparé à la valeur du courant issue de la mesure des courants réels et leur erreur appliqué à l'entrée du régulateur du courant. En parallèle avec cette boucle, on trouve une boucle de régulation du courant qui est maintenu à zéro.

Les sorties des régulateurs de courant et sont appliquées à un bloc de découplage qui permet de générer les tensions de référence et par transformation de Park inverse, on obtient les références de tensions, et qui sont les tensions de la commande de l'onduleur à commande MLI.

#### II.4.2 Technique de découplage

Les lois de commande vectorielle des machines alimentées en tension présentent des couplages entre les actions sur les axes « d » et « q ». On a les équations suivantes :

$$\begin{aligned} U_d &= (L_d \frac{dI_d}{dt} + R_s I_d) - \omega L_q I_q \\ U_q &= (L_q \frac{dI_q}{dt} + R_s I_q) + \omega L_q I_d + \omega \phi_f \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

La commande d'un courant est donc sensible à la variation de l'autre. Ce couplage qui constitue l'une des difficultés de la commande vectorielle peut être éliminé par une méthode de compensation classique. Celle-ci consiste à faire réguler les deux courants  $I_d$  et  $I_q$  en négligeant les termes de couplage, ces derniers étant rajoutés à la sortie des correcteurs afin d'obtenir les tensions de commande.[33]

Définissant deux nouvelles variables de commandes «  $V_{d1}$  » et «  $V_{q1}$  » comme suit :

$$\begin{cases} U_d = V_{d1} - ed \\ U_q = V_{q1} + eq \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Avec :

$$\begin{cases} V_{d1} = L_d \frac{dI_d}{dt} + R_s I_d \\ V_{q1} = L_q \frac{dI_q}{dt} + R_s I_q \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Et

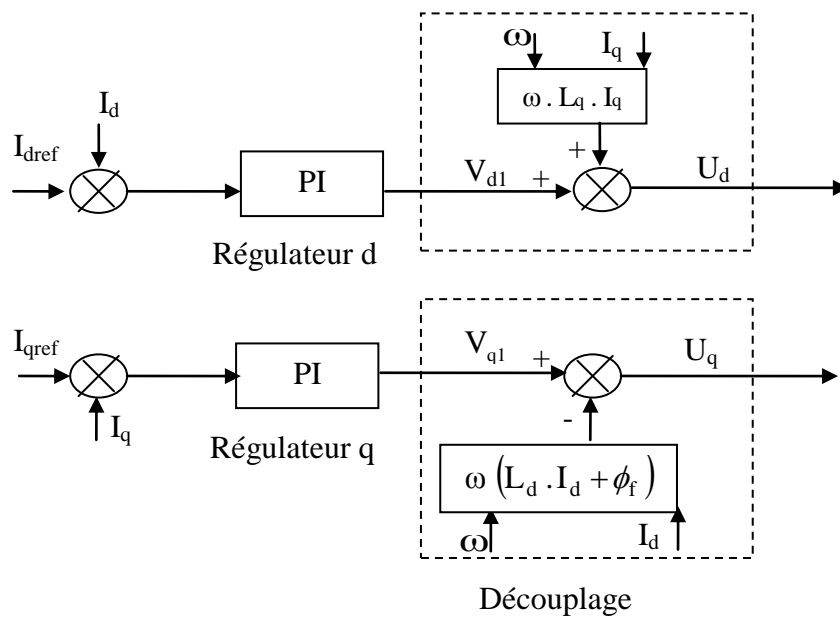
$$\begin{cases} ed = \omega \cdot L_q \cdot I_q \\ eq = \omega (L_d \cdot I_d + \phi_f) \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Où :  $\omega = P \Omega$

Les courants «  $I_d$  » et «  $I_q$  » sont découplés. Le courant  $I_d$  ne dépend que de  $U_d$  et  $I_q$  ne dépend que de  $U_q$ . Leurs expressions s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{cases} I_d = \frac{V_{d1}}{R_s + L_d s} \\ I_q = \frac{V_{q1}}{R_s + L_q s} \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Les tensions  $U_d$  et  $U_q$  sont alors reconstituées à partir des tensions «  $V_{d1}$  » et «  $V_{q1}$  » de la façon suivante :



**Fig. II.4 :** Principe de découplage par compensation

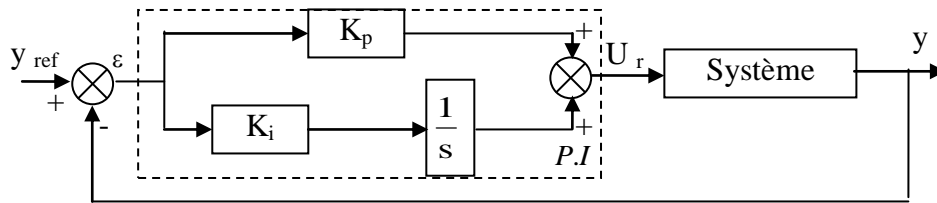
Où :  $V_{d1}$  et  $V_{q1}$  représentent les tensions à la sortie des régulateurs de courants  $I_d$  et  $I_q$ .

### II.4.3. Calcul des régulateurs

On considère que la machine est orientée vectoriellement et complètement découplée. Ceci permet d'écrire les équations de la machine d'une manière simple et de calculer les coefficients des régulateurs.[14],[34]

Pour chacune des boucles de courant, on propose des régulateurs classiques « Proportionnel Intégrateur (P.I) ». Il comporte une action proportionnelle qui sert à régler la

rapidité avec laquelle la régulation doit avoir lieu et une action intégrale qui sert à éliminer l'erreur statique entre la grandeur régulée et la grandeur de consigne (figure II.5) :



**Fig. II.5:** Régulateur P.I

La fonction de transfert du régulateur sera :  $K_p + \frac{K_i}{s}$

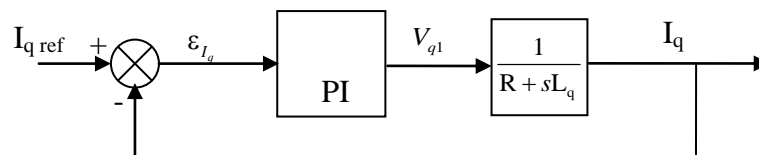
On peut aussi écrire le régulateur sous la forme suivante :  $Kr \frac{\tau_r s + 1}{\tau_r s}$

#### II.4.4. Dimensionnement des régulateurs

La machine étant découplée selon deux axes "d" et "q", la régulation sur l'axe "d" est faite par une seule boucle, par contre la régulation sur l'axe "q" est faite par deux boucles en cascades l'une interne et l'autre externe.

- **Régulateur des courant «  $I_q$  »**

Le contrôle de la vitesse de la MSAP nécessite la commande simultanée des deux variables  $I_d$  et  $I_q$ . Le système est composé d'une boucle de régulation de vitesse qui impose la référence du courant  $I_q$ . Le courant  $I_d$  est maintenu égale à zéro. D'après l'équation (2.7), on obtient le schéma de la figure (II.6) :



**Fig. II.6:** Boucle de régulation du courant  $I_q$

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par l'équation suivante :

$$FTBO = \frac{K_r(1 + \tau_{rq} S)}{\tau_{rq} S (R_s + L_q S)} \quad (II.15)$$

$$FTBO = \frac{K_r(1 + \tau_{rq} S)}{\tau_{rq} S R_s (1 + \frac{L_q}{R_s} S)}$$

En utilisant la méthode de compensation des pôles on aura :

$$FTBO = \frac{K_r}{\tau_{rq} R_s S} \quad (II.16)$$

Tel que :

$$\tau_q = \frac{L_q}{R_s} = \tau_{rq}$$

En boucle fermée la fonction s'écrit :

$$FTBF = \frac{\frac{K_r}{\tau_{rq} R_s S}}{1 + \frac{K_r}{\tau_{rq} R_s S}} = \frac{1}{\tau_{BFq} S + 1} \quad (II.17)$$

On prend généralement le temps d'établissement pratique suivant :

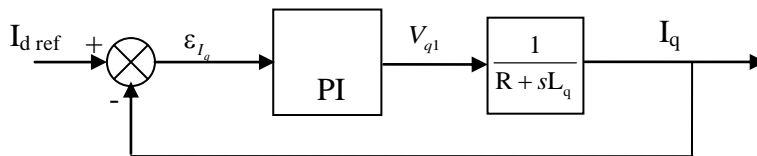
$$\checkmark \quad ts = 3. \tau_q \quad (\text{Critère de } \pm 5 \%) \quad \text{et} \quad \tau_{BFq} = \frac{\tau_q}{N} \quad \Rightarrow \quad K_r = R_s N$$

ts : temps de réponse imposé.

$\tau_q$  : Constante de temps électrique de l'axe "q".

• **Régulation du courant ( $I_d$ )**

Le schéma de cette régulation est représenté par la figure (2.6) :



**Fig.(II.7) :**Boucle de régulation du courant  $I_d$

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par l'équation suivante :

$$FTBO = \frac{K_{rd}(1 + \tau_{rd} S)}{\tau_{rd} S (R_s + L_d S)} \quad (II.18)$$

$$FTBO = \frac{K_{rd}(1 + \tau_{rd} S)}{\tau_{rd} S R_s (1 + \frac{L_d}{R_s} \cdot S)}$$

En utilisant la méthode de compensation des pôles on aura :

$$FTBO = \frac{K_{rd}}{\tau_{rd} R_s S} \quad (II.19)$$

Tel que :  $\tau_d = \frac{L_d}{R_s} = \tau_{rd}$

En boucle fermée la fonction s'écrit :

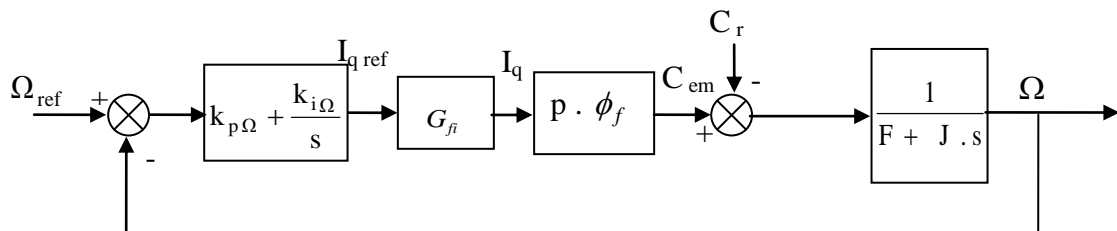
$$FTBF = \frac{\frac{K_{rd}}{\tau_{rd} R_s S}}{1 + \frac{K_{rd}}{\tau_{rd} R_s S}} = \frac{1}{\tau_{BFd} S + 1} \quad (II.20)$$

Lorsque  $ts = 3\tau_d$ , on aura :

$$\tau_{BFd} = \frac{\tau_d}{N} \Rightarrow K_{rd} = R_s N$$

• **Réglage de la vitesse**

Dans cette section, on aborde l'étude de la régulation de vitesse. Le schéma de réglage en cascade retenu nécessite, pour un bon fonctionnement, que la boucle interne soit plus rapide que la boucle externe. Il est clair que le réglage du couple se fera par l'action sur le courant  $I_q$ . Par conséquent, la sortie du régulateur de la boucle externe (vitesse) constitue la référence de la boucle interne (courant  $I_q$ ). La chaîne de régulation de vitesse peut être ainsi représentée par le schéma suivant figure (II.8) [35],[36]



**Fig. II.8 :**Boucle de régulation de vitesse.

$G_{fi} = 1$  : FT de la boucle du courant en régime permanent

Dans le cas de l'utilisation d'un régulateur PI classique, la Fonction de transfert en boucle fermée s'écrit alors :

$$FTBF = \frac{P \phi_f (s K_{p\Omega} + K_{i\Omega})}{J \tau_q s + (J + F \tau_q) s + (P \phi_f K_{p\Omega} + F) s + P \phi_f K_{i\Omega}} \quad (\text{II.21})$$

Si on néglige les quantités «  $J\tau_q$  » et «  $F\tau_q$  » devant  $J$ , le polynôme caractéristique de cette fonction devient comme suit :

$$P(s) = J s + (P \phi_f K_{p\Omega} + f) s + P \phi_f K_{i\Omega} \quad (\text{II.22})$$

Après imposition de deux pôles complexes conjugués  $S_{(1,2)} = \sigma (-1 \pm j)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{2 \cdot J \cdot \sigma^2}{P \cdot \phi_f} \\ K_p &= \frac{2J\sigma - F}{P \cdot \phi_f} \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Avec :  $\sigma = \xi \cdot \omega_n$

## II.5. Résultats de simulation de la commande vectorielle de la MSAP alimentée en tension

Après réalisation du découplage et la synthèse des régulateurs, et afin de tester les performances de la commande vectorielle appliquée à une MSAP, on a simulé le fonctionnement de l'ensemble Onduleur-Machine à l'aide de logiciel **MATLAB**/Simulink.

Cette simulation utilise les modèles de la machine et de l'onduleur élaborés dans le chapitre précédent.

Les paramètres de la machine utilisée pour la simulation sont donnés à l'annexe A. L'onduleur de tension est commandé par MLI. La structure de commande adoptée est celle de la Figure (II-2). Les paramètres des régulateurs de vitesse et des courants sont choisis de manière à avoir des réponses rapides, sans dépassement tout en assurant la stabilité du système.

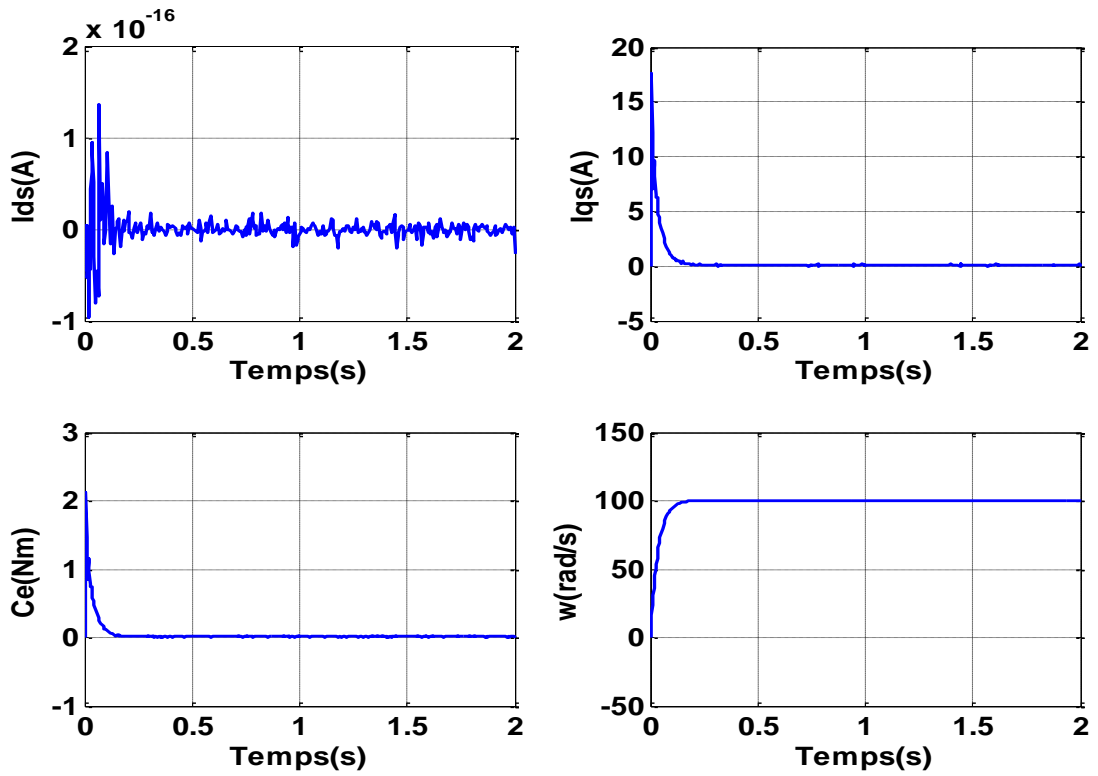
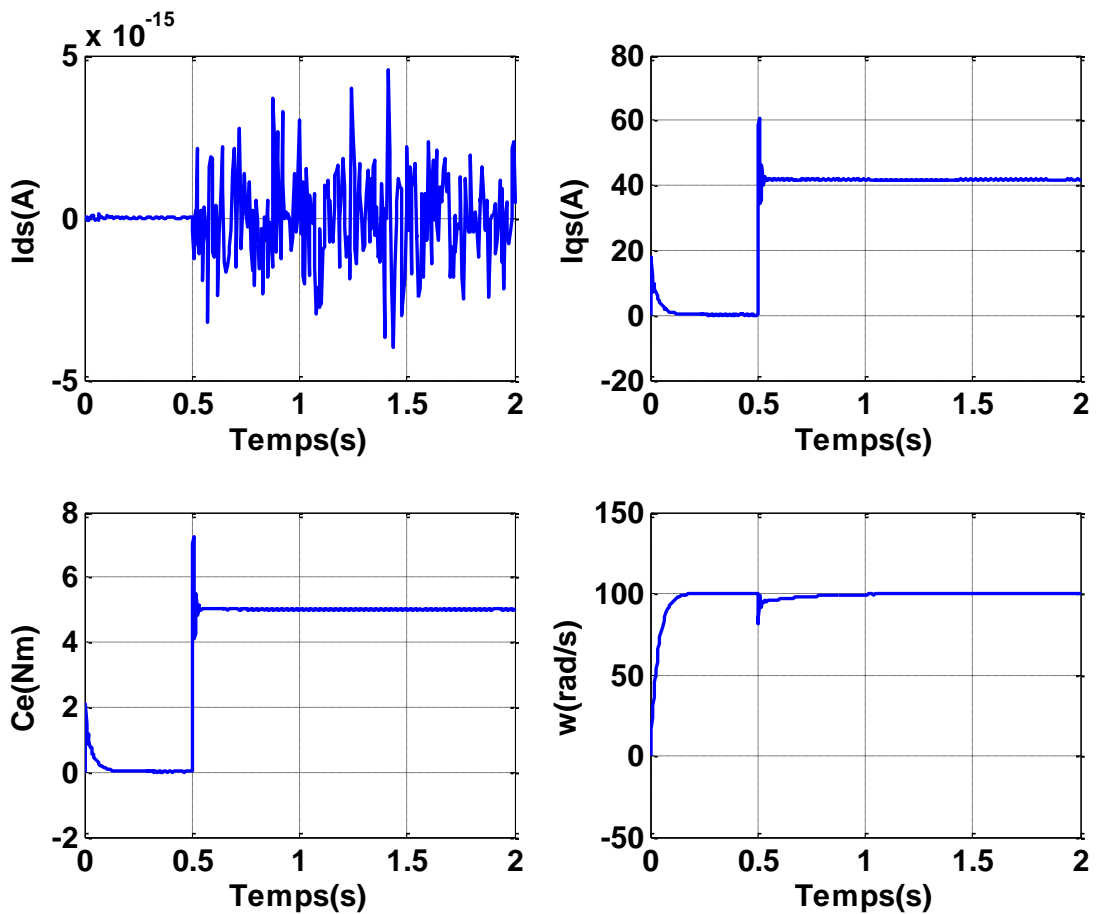
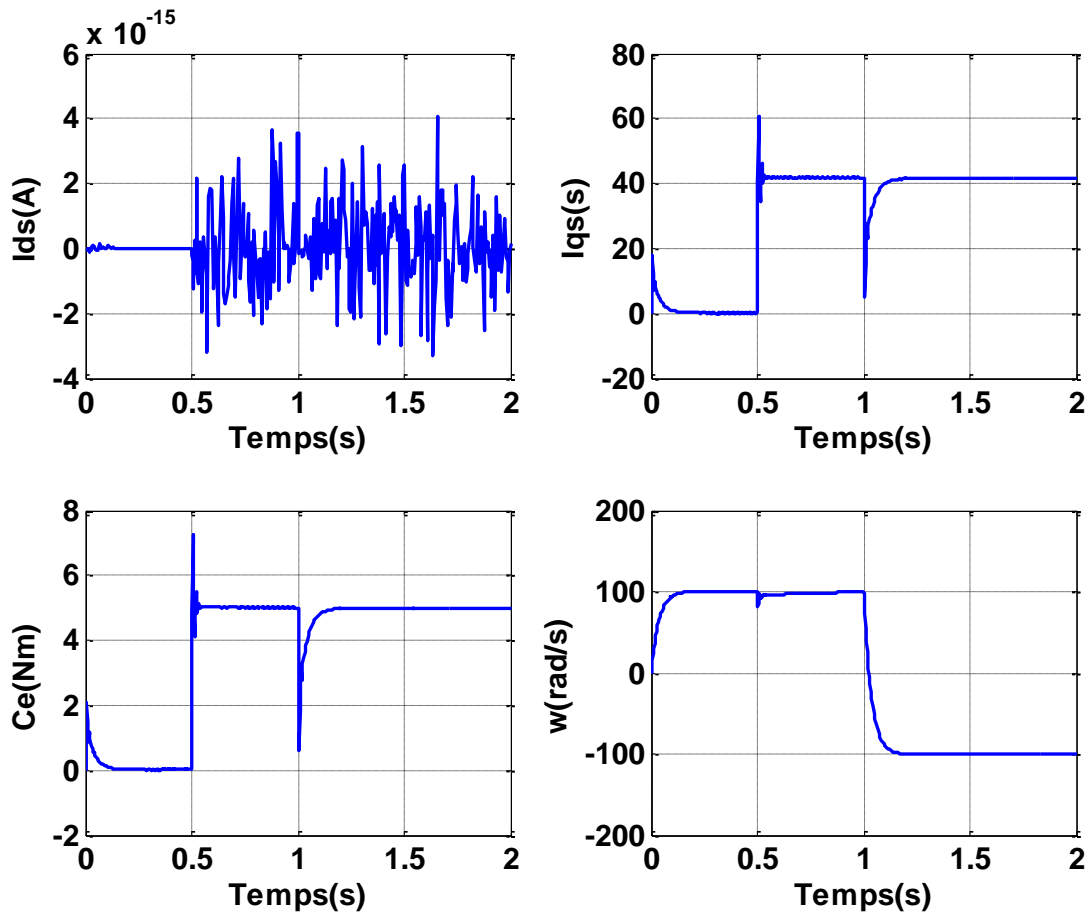


Fig. II-9: Résultats de simulation lors d'un démarrage à vide pour une consigne de 100 rd/s.





**Fig. II-10:** Résultats de simulation lors d'un démarrage à vide suivie d'une perturbation du couple de charge à  $t=0.5s$  pour une consigne de vitesse de 100 rd/s



**Fig. II-11:** Résultats de simulation lors d'une variation de consigne et du couple de charge

D'après la Figure (II.9) qui montre le comportement de la MSAP pour une consigne de 100 rd/s lors d'un démarrage à vide, on remarque :

- ✓ l'allure de la vitesse suit parfaitement sa consigne, sans dépassement avec un temps de réponse court.
- ✓ le couple électromagnétique atteint la valeur (4.5N.m) et se stabilise à une valeur pratiquement nulle en régime permanent.

La réponse des deux composantes du courants statoriques montre bien le découplage introduit par la commande vectorielle de la machine avec le couple électromagnétique qui dépend seulement de la composante  $I_q$

D'après la Figure (II.10) qui montre l'application de la charge  $C_r=3 \text{ N.m}$  à  $t=0.5\text{s}$ , on remarque :

- ✓ l'allure de la vitesse suit parfaitement sa référence qui est atteinte très rapidement avec un temps de réponse acceptable et l'effet de la perturbation de charge entraîne une légère perte sur la vitesse qui est vite rétablie,
- ✓ le couple électromagnétique débute par une valeur de 0 à  $4.8 \text{ N.m}$  et se stabilise à la valeur du couple résistant ( $3\text{N.m}$ ),
- ✓ le courant statorique  $I_q$  est l'image du couple électromagnétique,
- ✓ le courant statorique  $I_d$  est nul ce qui indique que la commande vectorielle est effective.

la Figure (II.11), ces tests montrent :

- ✓ la vitesse suit parfaitement sa référence qui est atteinte rapidement sans dépassement avec une petite perturbation lorsque on applique un couple résistant à  $t = 0.5\text{s}$  et son élimination à  $t = 1\text{s}$ . Le temps de réponse est acceptable environ  $0.2\text{s}$ . grâce à l'action rapide du PI.
- ✓ La réponse des deux composantes du courant montre bien le découplage introduit par la commande vectorielle de la MSAP.

## II.5. Etude de robustesse aux variations paramétriques de la MSAP

Dans la précédente série de tests, on a simulé les performances du régulateur PI pour la poursuite et le rejet de perturbation.

On teste à présent sa robustesse, afin de vérifier son comportement face à des variations paramétriques de la machine car les paramètres de la MSAP sont soumis à des variations qui peuvent être due à l'échauffement, il est donc important d'étudier l'influence de la variation des paramètres caractérisants le modèle.

On applique donc, une variation de la résistance statorique, le flux, l'inductance et le moment d'inertie. Ces tests de robustesse sont représentés par les figures (II.12) à (II.15).

Les simulations sont réalisées pour un démarrage à vide avec l'intervention de la charge à  $t=0.5$  et son élimination à  $t=1\text{s}$  puis une inversion de la consigne de la vitesse à  $t=1.5\text{s}$ .

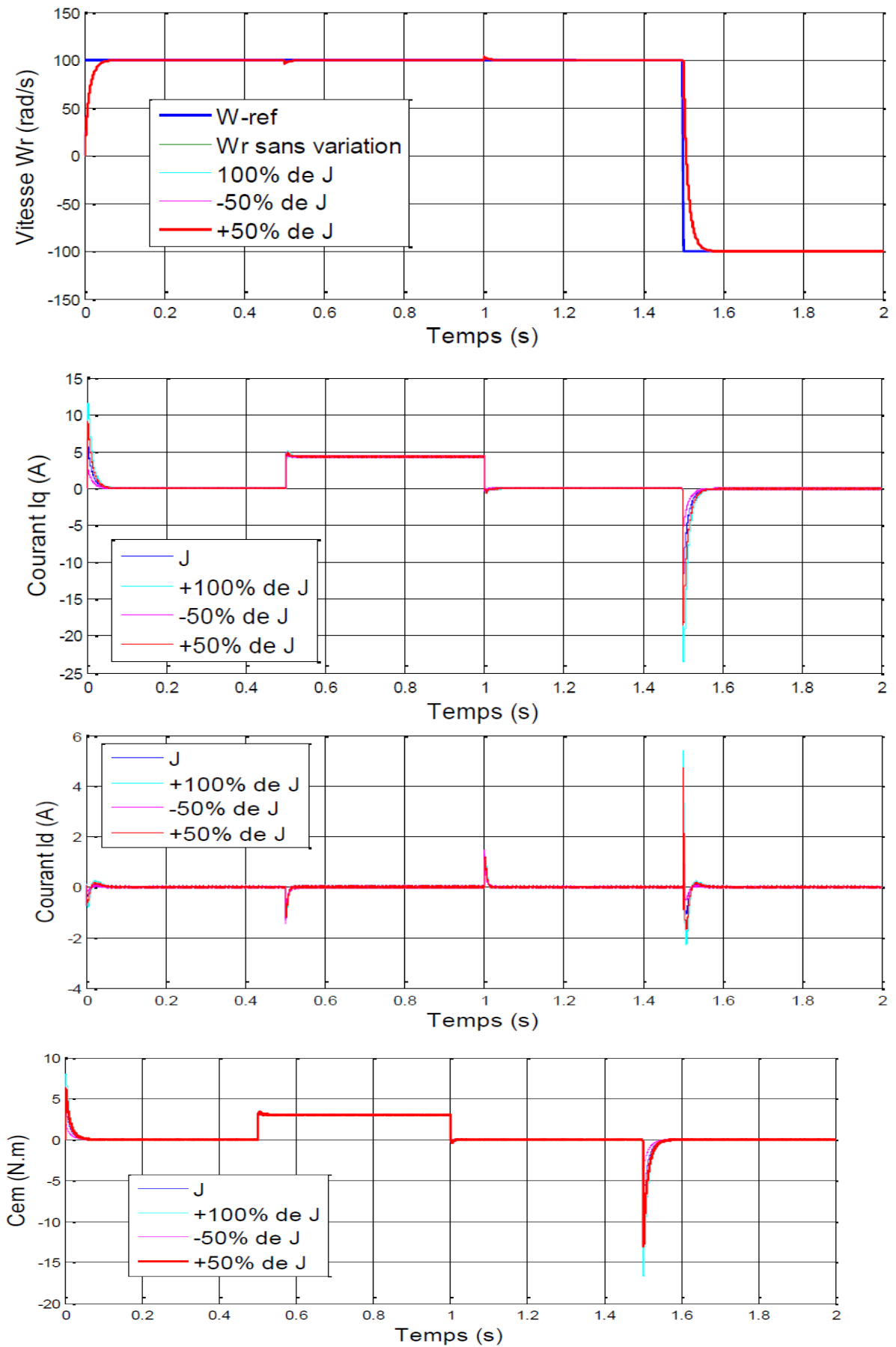


Fig. II-12 : Résultats de simulation lors des variations de l'inertie J

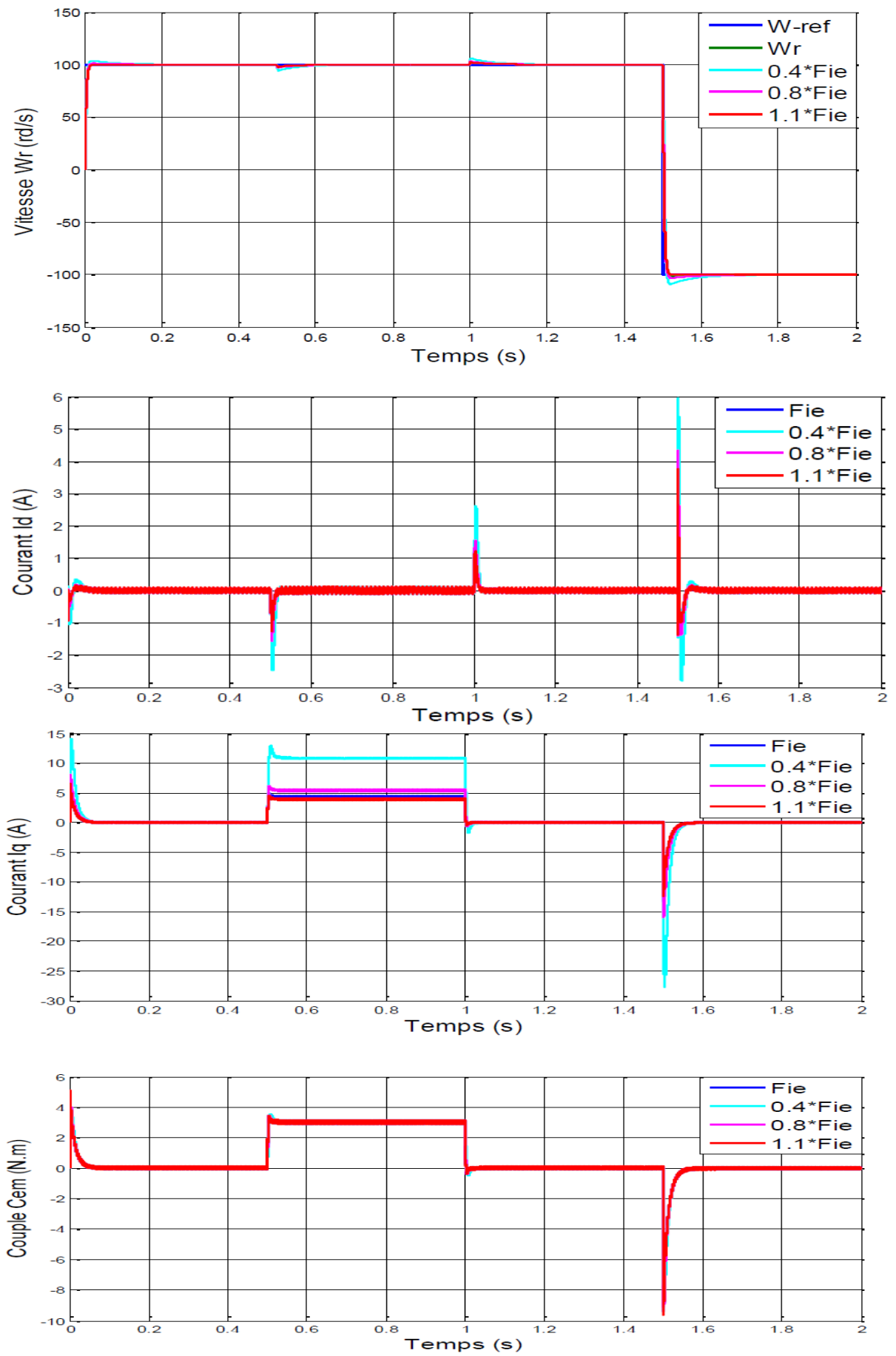


Fig. II-14: Résultats de simulation lors des variations du flux

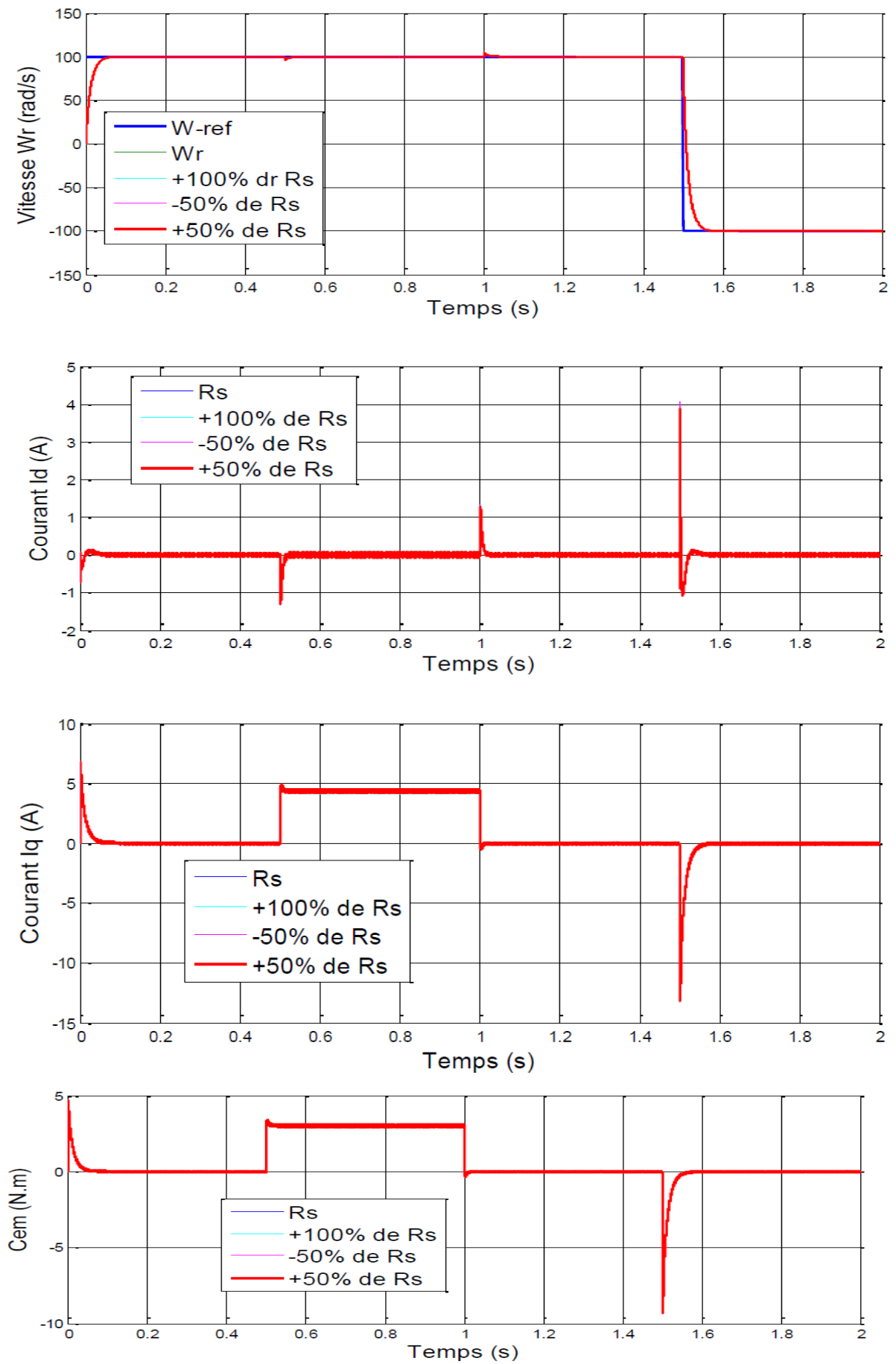


Fig. II-15: Résultats de simulation lors des variations de la résistance  $R_s$

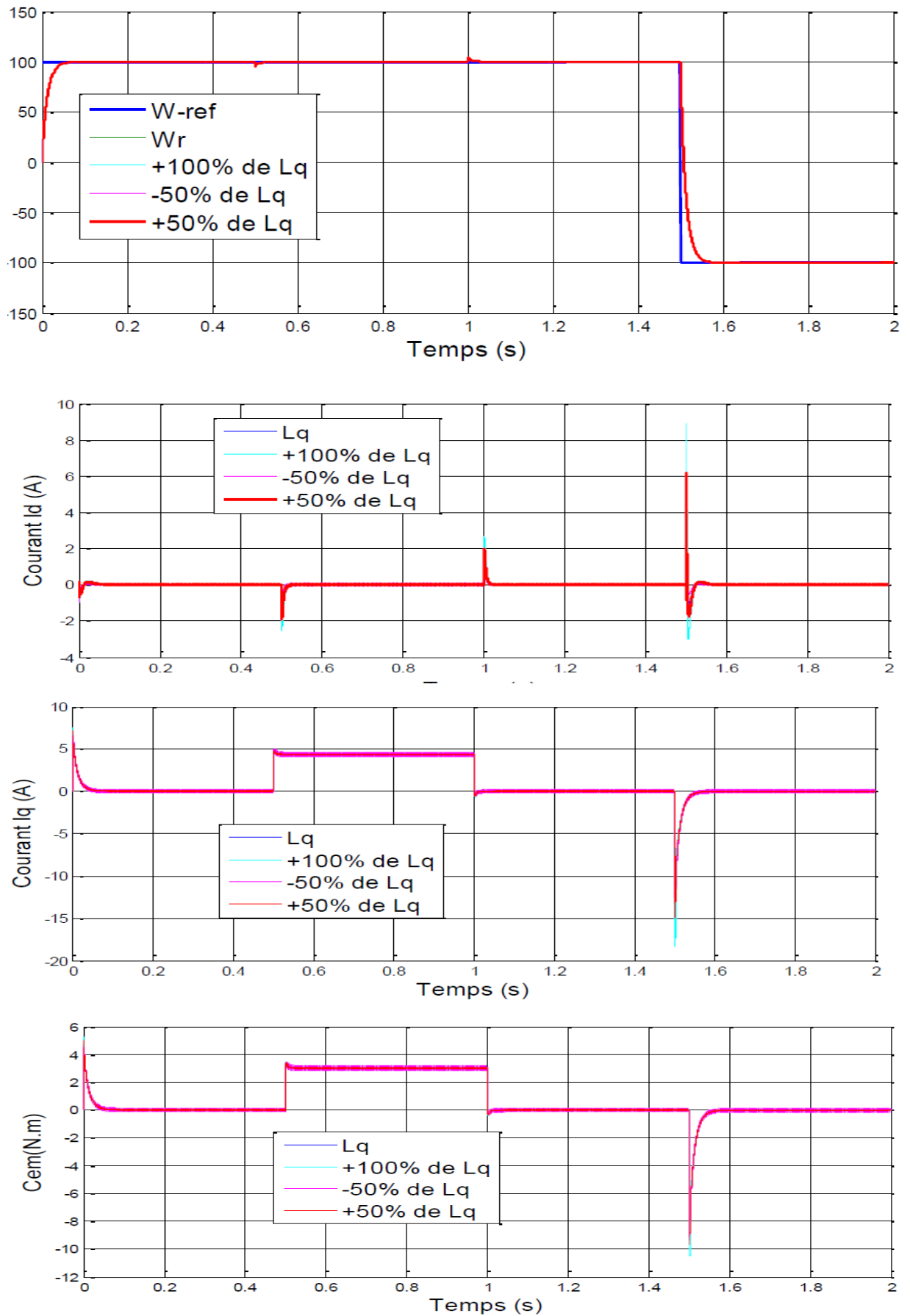


Fig. II-16 : Résultats de simulation lors des variations de l'inductance Lq

La Figure (II.13), montre que:

- les variations de l'inertie n'influent pas sur la dynamique de la vitesse,
- ils existent des petites variations au niveau du couple électromagnétique et les courants  $I_d$ ,  $I_q$  lors de l'application et l'élimination du couple et l'inversion de vitesse

La Figure (II.14), montre que :

- ✓ les variations du flux augmentent les temps de réponse sur la dynamique de la vitesse et l'apparition de petit dépassement en régime transitoire et d'inversion,
- ✓ on observe des variations au niveau de  $I_d$  et  $I_q$  lors de l'application et l'élimination du couple et l'inversion de vitesse

La figure (II.15), montre :

- ★ que les variations de la résistance statorique n'influe pas sur la dynamique de la vitesse ni sur le comportement des autres grandeurs.

La Figure (II.16), montre :

- que les variations de l'inductance n'influent pas sur la dynamique de la vitesse,
- mais on observe des petites variations au niveau du couple électromagnétique,  $I_d$  et  $I_q$ , lors de l'application et l'élimination du couple et l'inversion de vitesse.

Donc, les résultats obtenus montrent une robustesse de la commande vis-à-vis aux variations des paramètres électriques (la résistance et les inductances). Cependant, la commande n'est pas robuste vis-à-vis aux variations du flux magnétique des aimants permanents et peu sensible aux variations du moment d'inertie.

Finalement, les résultats de simulation sont satisfaisants et la robustesse de cette commande est garantie.

## II.6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté la commande vectorielle appliquée à la MSAP, cette stratégie permet le découplage entre le couple et le flux de la machine afin d'assurer une commande souple de sa vitesse.

D'après les résultats obtenus, on constate que la commande vectorielle dans le plan de Park de la MSAP alimentée en tension donne des performances et de robustesse remarquable, caractérisées par des faibles temps de réponse, un rejet de perturbation rapide, une erreur statique nulle en régime permanent et un petit dépassement ou oscillations transitoires.

Le chapitre suivant fera l'objet de la régulation de la vitesse de cette machine qui se fera par un régulateur avancé et plus précisément un régulateur LQG. Ainsi, on s'intéressera à la présentation et à la construction de ce régulateur.

### III.1. Introduction

Les techniques de commande actuelles cherchent de plus en plus à traiter des systèmes complexes modélisés par un ensemble d'équations mathématique. L'objectif de l'ingénieur automatique consiste alors à asservir ce processus c'est-à-dire amener le procédé d'un état à un autre en respectant certaines contraintes et en cherchant des performances évoluées.

Parmi ces techniques de commande ,on trouve la commande LQ (linéaire quadratique) qui est basée sur l'optimisation d'un critère qui traduit le compromis rapidité-énergie de commande dans un processus.

Dans le cas de la commande LQ, la loi de commande est basée sur la représentation d'état du système. La difficulté de mesurer l'état  $x(t)$  et le bruit font que l'on préfère utiliser la commande LQG. Cette dernière est bien adaptée lorsque l'état du système n'est pas directement mesurable ou que les mesures sont affectées par le bruit et la synthèse de cette commande prend en compte les propriétés statistiques de perturbations, sans affecter la stabilité.

Dans le cas où le système n'est pas à état complètement accessible, mais seulement détectable, c'est-à-dire lorsque les pôles non observables sont à partie réelle strictement négative, il est nécessaire, pour implanter, une régulation par retour d'état, d'utiliser un estimateur (observateur, filtre).

L'observateur est un système dynamique, dont les entrées sont constituées de l'entrée et de la sortie du système à commander, et qui a pour fonction de reconstruire, tout au moins asymptotiquement l'état du système.[38]

Dans ce chapitre on présente la théorie de la commande LQG qui réunit un contrôleur LQ. Enfin, on fait l'application de la méthodologie de conception d'un régulateur pour le contrôle de la vitesse de rotation de la MSAP tout en étudiant sa validité dans le rejet des perturbations et sa robustesse vis-à-vis des variations paramétriques.

#### III.2.1 Formulation du problème de commande à retour d'état

Soit le système à régler décrit par le modèle d'état :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{III-1}$$

$x(t)$  : vecteur d'état,  $\dim x(t) = n \times 1$

$u(t)$  : vecteur de commande de dimension :  $l \times 1$ , où  $l$  est le nombre d'actionneurs.



$z(t)$  : vecteur des grandeurs à régler,  $\dim z(t) = m \times 1$

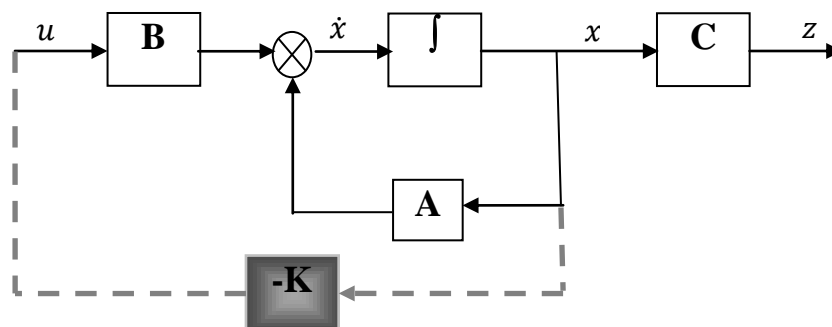
$A$  : matrice d'état du système,  $\dim A = n \times n$

$B$  : matrice de commande,  $\dim B = n \times l$

Le problème est de trouver un retour d'état stabilisant, optimal au sens du compromis rapidité énergie de commande. Il s'agit donc de trouver la matrice de gain du retour d'état  $K$  :

$$u(t) = -K x(t) \quad (\text{III-2})$$

$$\text{Avec : } \dim K = l \times n \quad (\text{III-3})$$



**Fig. III.1** Schéma-bloc de commande à retour d'état

En boucle fermée, l'équation d'état devient, après calcul de  $K$ :

$$\dot{x}_{bf}(t) = [A - BK] x_{bf}(t) \quad (\text{III-4})$$

$$z(t) = C x_{bf}(t)$$

Les conditions initiales sont rejetées d'autant plus rapidement que les valeurs propres de la matrice  $(A - BK)$ , ont une partie réelle très négative. Les « gains » de la matrice  $K$  seront d'autant plus grands que l'on désire accélérer le rejet de perturbation.

### III.2.2 Le critère d'optimalité L.Q

#### II.2.2.a Vitesse de rejet de perturbation

Soient 2 systèmes mono-variables du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) \quad \dot{x}_2(t) = -2x_2(t)$$

$$x_1(0) = 1 \quad x_2(0) = 1$$

Les solutions sont respectivement :

$$x_1(t) = e^{-t}, \forall t \geq 0$$

$$x_2(t) = e^{-2t}, \forall t \geq 0$$

On peut évaluer les rapidités respectives en comparant les aires des courbes  $x_i^2(t)$  :

On constate aisément que  $\int_0^\infty x_1^2 dt > \int_0^\infty x_2^2(t) dt$ , si bien qu'on peut dire qu'un objectif de rapidité de rejet de perturbation est respecté par la minimisation de :

$$\int_0^\infty x^2(t) dt$$

Généralisation à un problème multi-variable.

Soit :

$$J_x = \int_0^\infty x^T(t) Q x(t) dt \quad (\text{III-5})$$

**Q** : est une matrice symétrique définie non négative:  $x^T Q x \geq 0$

C'est une matrice de pondération : **elle donne un poids différent à chaque composante du vecteur d'état dans le critère.**

Exemple :

$$\text{Soit } : x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{Soit } : Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}$$

$$x^T \cdot Q \cdot x = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = q_1 \cdot x_1^2 + q_2 \cdot x_2^2$$

$$\text{si on prend : } q_1 = 1 \quad q_2 = 1000$$

$$\text{il vient : } x^T \cdot Q \cdot x = x_1^2 + 1000x_2^2$$

Le critère s'écrit alors :

$$J_x = \int_0^\infty x^T(t) Q x(t) dt = \int_0^\infty [x_1^2 + 1000x_2^2] dt$$

### III.2.2.b Energie de commande

De la même façon on peut évaluer l'énergie de commande par le critère :

$$J_u = \int_0^\infty u^T(t) R u(t) dt \quad (\text{III-6})$$

**R** : est une matrice symétrique définie positive :  $u^T(t) R u(t) > 0$ , si  $u(t) \neq 0$ . C'est la matrice de pondération de la commande. **On peut ainsi affecter un poids différent à chaque composante du vecteur de commande.**

### III.2.2.c Critère de compromis

$$J_{LQ} = J_x + J_u = \int_0^{\infty} x^T(t) Q x(t) dt + \int_0^{\infty} u^T(t) R u(t) dt \quad (\text{III-7})$$

Dans ce critère, les matrices  $Q$  et  $R$  doivent être spécifiées : *les performances de la commande dépendent fortement des valeurs numériques des coefficients de ces matrices.*

### III.3. Gestion des objectifs et spécification des matrices de pondération

En général, les objectifs de performance portent sur certaines combinaisons linéaires de l'état, qui sont regroupées dans un vecteur de sorties à régler.

La dimension de  $z(t)$  est :  $m \times 1$ , avec :  $m \leq n \implies \dim(C) = m \times n$

Soit  $Q = C^T S C$  ; (pour avoir les grandeurs à régler)

$$J_{LQ} = \int_0^{\infty} x^T(t) C^T S C x(t) dt + \int_0^{\infty} u^T(t) R u(t) dt \quad (\text{III-8})$$

$$\implies z^T(t) S z(t) = x^T C^T S C x(t); z^T(t) = (C \cdot x)^T = x^T \cdot C^T \quad (\text{III-9})$$

Le problème est ramené au choix de la matrice  $S$

Si on choisit cette matrice diagonale, il y a  $m$  coefficients à choisir.

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & s_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & s_i & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_m \end{bmatrix} \quad (\text{III-10})$$

Pour que  $S$  soit non négative, il faut que tous les  $s_i$  soient positifs ou nuls.

La matrice  $R$  est la matrice de pondération des commandes. On pose :  $R = \rho R'$ , où  $\rho$  est un réel positif.

$\rho$  : est un coefficient qui sert à régler le poids relatif de  $R$  par rapport à  $Q$ . On peut alors choisir la matrice  $R'$  diagonale, en posant :

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \hat{r}_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \hat{r}_i & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{r}_m \end{bmatrix} \quad (\text{III-11})$$

On commence par choisir les différents  $r'_i$  qui pondèrent les énergies de commande des différents actionneurs.

$$R = \rho \begin{bmatrix} \hat{r}_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \hat{r}_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \hat{r}_i & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{r}_m \end{bmatrix} \quad (\text{III-12})$$

$$\int_0^{\infty} u^T(t) R u(t) dt = \rho \int_0^{\infty} u^T(t) \hat{R} u(t) dt \quad (\text{III-13})$$

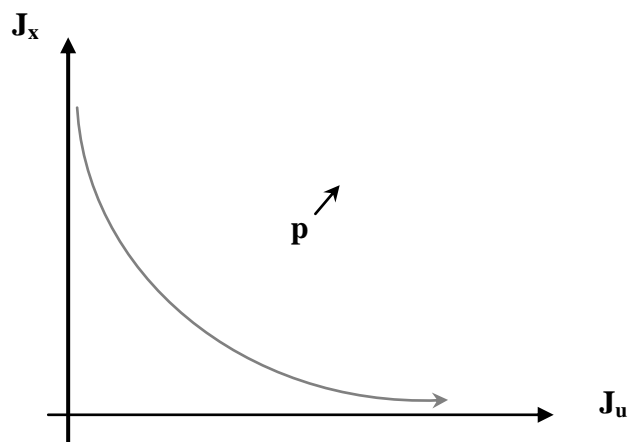
Le critère optimal linéaire quadratique s'écrit finalement :

$$J_{LQ} = \int_0^{\infty} z^T(t) S z(t) dt + \rho \int_0^{\infty} u^T(t) \hat{R} u(t) dt \quad (\text{III-14})$$

Le problème est de choisir  $\rho$ :

- si  $\rho$  croît la part relative du critère  $\rho \int_0^{\infty} u^T(t) \hat{R} u(t) dt$  croît : *l'objectif est d'économiser l'énergie de commande.*
- si  $\rho$  décroît le terme  $\int_0^{\infty} z^T(t) S z(t) dt$  prend plus d'importance : *l'objectif est d'accroître les performances.*

La Figure II- 3 montre la relativité des critères de performance  $J_x$  et d'énergie de commande  $J_u$ , selon la valeur de  $\rho$ .



**Fig.III.2** :Parts relatives des critères de performance  $J_x$  et d'énergie de commande  $J_u$ , selon la valeur de  $\rho$ .

### III.4. La solution du problème L.Q stationnaire.

Soit le système linéaire invariant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{III-15})$$

Le problème est de calculer la matrice  $K$  qui permet de déterminer le retour d'état :

$u(t) = -Kx(t)$ , et telle que le critère L.Q:

$$J_{LQ} = \int_0^{\infty} ([x^T(t)Qx(t)] + [u^T(t)Ru(t)])dt \quad (\text{III-16})$$

Soit minimum.  $Q$  est une matrice symétrique définie non négative,  $R$  est une matrice symétrique définie positive.

Soit  $u^0(t)$  : la commande optimale, solution du problème. Toute commande  $u(t)$  peut s'écrire :

$$u(t) = u^0(t) + \varepsilon \tilde{u}(t); \varepsilon \in R \quad (\text{III-17})$$

Le système est linéaire donc il vérifie le théorème de superposition :

$$x(t) = x^0(t) + \varepsilon \tilde{x}(t); \varepsilon \in R \quad (\text{III-18})$$

Où  $x^0(t)$  est la solution optimale du système (*c'est la trajectoire d'état obtenue lorsque l'on applique la commande optimale*).

$$\dot{x}^0(t) = Ax^0(t) + Bu^0(t) \quad (\text{III-19})$$

Ce qui nous permet d'écrire de la même manière :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \quad (\text{III-20})$$

On suppose  $x(0) \neq 0$  (état initial indépendant de  $u(t)$  ;  $t \geq 0$ ), donc  $x(0) = x^0(0)$  et  $\tilde{x}(0) = 0$ .

Pour  $t \geq 0$ , la solution s'écrit :

$$x^0(t) = e^{At}x^0(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu^0(\tau)d\tau \quad (\text{III-21})$$

$$\tilde{x}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\tilde{u}(\tau)d\tau \quad (\text{II-22})$$

**Donc :**

$$J_{LQ} = \int_0^{\infty} [x^0(t) + \varepsilon\tilde{x}(t)]^T Q [x^0(t) + \varepsilon\tilde{x}(t)] dt + \int_0^{\infty} [u^0(t) + \varepsilon\tilde{u}(t)]^T R [u^0(t) + \varepsilon\tilde{u}(t)] dt$$

$$J_{LQ} = \int_0^{\infty} [x^{0T}Qx^0 + u^{0T}Ru^0]dt + 2\varepsilon \int_0^{\infty} [\tilde{x}^T Qx^0 + \tilde{u}^T Ru^0]dt \quad (\text{III-23})$$

$$+ \varepsilon^2 \int_0^{\infty} [\tilde{x}^T Q\tilde{x} + \tilde{u}^T R\tilde{u}]dt$$

Si  $u^0(t)$  est la commande qui minimise  $J_{LQ}$ , toute autre commande conduit à augmenter la valeur de  $J_{LQ}$ .

La commande s'écrivant :  $u(t) = u^0(t) + \varepsilon \tilde{u}(t)$ , le minimum du critère  $J_{LQ}$  se trouve en  $\varepsilon = 0$ .

Il faut donc résoudre :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} J_{LQ} |_{\varepsilon=0} = 0$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} J_{LQ} |_{\varepsilon=0} = 2 \int_0^{\infty} [\tilde{x}^T Q x^0 + \tilde{u}^T R u^0] dt = 0 \quad (\text{III-24})$$

L'équation (III-21) devient

$$\tilde{x}^T(t) = \int_0^t \tilde{u}^T(\tau) B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau$$

Donc :

$$\int_0^{\infty} \left\{ \left[ \int_0^t \tilde{u}^T(\tau) B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau \right] Q x^0(t) + \tilde{u}^T(t) R u^0(t) \right\} dt = 0 \quad (\text{III-25})$$

Après calcul (*permutation d'intégrales*), on obtient :

$$\int_0^{\infty} \tilde{u}^T(t) \{ B^T \int_t^{\infty} e^{A^T(t-\tau)} Q x^0(\tau) d\tau + R u^0(t) \} dt = 0 \quad (\text{III-26})$$

On définit alors :

$$p(t) = \int_t^{\infty} e^{A^T(t-\tau)} Q x^0(\tau) d\tau \quad (\text{III-27})$$

$p(t)$  : est donc un vecteur de dimension :  $n \times 1$ , défini par une intégrale de convolution. Ce vecteur peut donc être considéré comme un vecteur d'état d'un système dynamique dont l'équation d'évolution serait :

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -A^T p(t) - Q x^0(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III-28})$$

L'équation (III-25) devient

$$\int_0^{\infty} \tilde{u}^T(t) \{ B^T p(t) + R u^0(t) \} dt = 0 \quad (\text{III-29})$$

Qui doit être vérifiée quel que soit  $\tilde{u}^T(t)$  à tout instant  $t \geq 0$ , c'est-à-dire :

$$B^T p(t) + R u^0(t) = 0, \forall t > 0 \quad (\text{III-30})$$



Qui a 2 solutions. Une seule de ces 2 solutions permet d'obtenir une boucle fermée stable.

### III.5. La matrice HAMILTONIENNE et la solution de l'équation de RICCATI

$$\Sigma = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad (\text{III-38})$$

$R$  est une matrice symétrique définie positive, donc :  $R > 0$  et  $R^{-1}$  existe.

$Q$  est une matrice symétrique définie non négative, donc :  $Q \geq 0$

Soit  $\lambda$  une valeur propre et  $V$  un vecteur propre associé **à droite** :

$$\Sigma V = \Sigma \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-39})$$

avec  $\dim v_1 = n \times 1$        $\dim v_2 = n \times 1$

Alors le couple  $\{-\lambda; (v_2^T, -v_1^T)\}$  est un couple de valeur propre et vecteur propre **à gauche** associé à la matrice  $\Sigma$ , c'est-à-dire:

$$[v_2^T \ -v_1^T] \Sigma = -\lambda [v_2^T \ -v_1^T] \quad (\text{III-40})$$

*Vérification :*

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-41})$$

c.à.d.

$$Av_1 - BR^{-1}B^T v_2 = \lambda v_1 \quad (\text{III-42})$$

$$-Qv_1 - A^T v_2 = \lambda v_2$$

et :

$$[v_2^T \ -v_1^T] \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} = [v_2^T A + v_1^T Q \quad -v_2^T BR^{-1}B^T + v_1^T A^T] \quad (\text{III-43})$$

$$[v_2^T \ -v_1^T] \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} = [-v_2^T \lambda \quad v_1^T \lambda] \quad (\text{III-44})$$

Les  $2n$  valeurs propres du système  $\Sigma$  sont symétriques 2 à 2 par rapport à l'axe imaginaire (si  $\lambda_1$  est valeur propre, alors  $-\lambda_1$  l'est aussi)

Si aucune des valeurs propres n'est imaginaire pure, il y a  $n$  valeurs propres à partie réelle  $< 0$  et  $n$  valeurs propres à partie réelle  $> 0$ .

Soit  $\Lambda$  la matrice diagonale ( $n \times n$ ) dont les éléments ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ ) sont les valeurs propres à partie réelle négative.



Soit  $X$  une matrice composée des vecteurs propres à **droite** associés à ces  $n$  valeurs propres,  $X$  est une matrice de dimension  $2n \times n$  :

$$\Sigma X = X \Lambda$$

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \Lambda \quad (\text{III-45})$$

Donc

$$\begin{aligned} AX_1 - BR^{-1}B^T X_2 &= X_1 \Lambda \\ -QX_1 - A^T X_2 &= X_2 \Lambda \end{aligned} \quad (\text{III-46})$$

Soit :

$$P = X_2 X_1^{-1}, \text{ alors}$$

$$\begin{aligned} -Q - A^T P &= X_2 (X_1^{-1} X_1) \Lambda X_1^{-1} = (X_2 X_1^{-1}) (X_1 \Lambda) X_1^{-1} \\ &= P (AX_1 - BR^{-1}B^T X_2) X_1^{-1} \end{aligned} \quad (\text{III-47})$$

C'est-à-dire que  $P$  vérifie l'équation de Riccati (III-35):

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

### III.6. Stabilité de la boucle fermée

Le système linéaire de l'équation (III-15), auquel on applique la commande décrite aux équations (III-30) et (III-33), devient le système dynamique homogène :

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^T P)x(t) \quad (\text{III-48})$$

Qui est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de sa matrice d'évolution sont dans le demi-plan complexe gauche.

De l'équation (II-45) on obtient :

$$\begin{aligned} AX_1 - BR^{-1}B^T X_2 &= X_1 \Lambda \\ X_1^{-1}(A - BR^{-1}B^T P)X_1 &= \Lambda \\ A - BR^{-1}B^T P &= X_1 \Lambda X_1^{-1} \end{aligned} \quad (\text{III-49})$$

Les valeurs propres de la matrice d'évolution de la boucle fermée sont donc les coefficients  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$  de la matrice diagonale  $\Lambda$ .

Ces coefficients sont les valeurs propres à partie réelle négative de la matrice hamiltonienne  $\Sigma$  [7] donc le système est stable en boucle fermée.

## II.7. générations de la commande et choix des pondérations

Après avoir défini les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $Q$  et  $R$  dans MATLAB la commande **lqr (A, B, Q, R)** génère le calcul de la matrice  $K$ ; du moment que les performances de la commande dépendent fortement des valeurs numériques des coefficients des matrices de pondération, donc Il est intéressant de remarquer d'abord que la multiplication des pondérations  $Q$  et  $R$  par un même scalaire laisse inchangé le gain  $K$ . En effet, soit  $P$  solution de l'équation (II-40) et soit le nouveau problème basé sur les pondérations  $Q' = \rho Q$  et  $R' = \rho R$ . On vérifie que  $P' = \rho P$  est solution de l'équation de Riccati.

Sans restriction, les pondérations peuvent être choisies symétriques. Elles sont généralement choisies diagonales. Ainsi, on se ramène au choix de  $n$  scalaires pour l'état et de  $l$  scalaires pour la commande. Voici une méthode simple de choix et de modification des pondérations en vue d'aboutir à un correcteur satisfaisant.

- 1. Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identité.**
- 2. Dans une seconde étape, on accélère ou décélère globalement le système en multipliant la matrice  $Q$  par un scalaire  $\rho$  (accélération avec  $\rho > 1$  et décélération avec  $\rho < 1$ ), jusqu'à obtenir une dynamique moyenne adaptée.**
- 3. Dans le cas où certains états auraient des dynamiques trop lentes par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de  $Q$  correspondant aux premiers.**
- 4. Dans le cas où certains actionneurs seraient trop sollicités par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de  $R$  leur correspondant.**

Les étapes 2, 3 et 4 peuvent être répétées dans l'ordre souhaité jusqu'à obtenir un correcteur satisfaisant le cahier des charges.

## III.8. Problème de commande stochastique à retour de sortie

Soit le système de l'équation (III-1), dans lequel on suppose que la sortie et l'état sont perturbés par des bruits (signaux aléatoires gênants). On peut écrire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w_1(t) \quad (\text{III-50})$$

$u(t)$  vecteur de commande de dimension :  $l \times 1$ , où  $l$  est le nombre d'actionneurs.

$z(t)$  : vecteur des grandeurs à régler, avec dimension de  $z(t) = m \times 1$ .

$w_1(t)$  : vecteur de bruits blancs gaussiens centrés, de dimension  $(n \times 1)$ .

$w_2(t)$  : vecteur de bruits d'état blancs gaussiens centrés, avec dimension de  $w_2(t) = m \times 1$ .

$A$  : matrice d'état du système,  $\dim A = n \times n$ .

**B** : matrice de commande,  $\dim B = n \times l$ .

**C**: matrice d'observation,  $\dim C = m \times n$ .

Un bruit  $w(t)$  est un signal aléatoire qui est :

- Blanc lorsque sa fonction d'autocorrélation est de la forme :

$$\Phi_{ww}(t, \tau) = V(t)\delta(t-\tau) \quad (\text{III-51})$$

- Gaussien si  $V(t)$  est une variable aléatoire gaussienne (loi de probabilité normale), centré si l'espérance mathématique  $E(V(t))$  est nulle.

Le critère d'optimalité doit porter sur une grandeur probabiliste : l'espérance mathématique d'un critère quadratique. Par ailleurs la sortie (vecteur des grandeurs à régler, ou des variables mesurées) est soumise à des perturbations : le rejet ou atténuation de ces bruits ne peut pas être obtenu par retour d'état. D'un autre côté, il n'est pas toujours possible (voire jamais) de mesurer l'état dont on a besoin pour le retour d'état.[40]

Le critère LQG s'écrit donc :

$$J_{LQG} = E\left\{\int_0^{\infty} [x^T Q x(t) + u^T R u(t)] dt\right\} \quad (\text{III-52})$$

Où  $Q$  et  $R$  sont symétriques, définies positives.

## III.9. Observateur d'état et principe de séparation

### III.9.1 Observateur d'état

Un observateur d'état (ou reconstituteur) est un filtre dont l'entrée est le vecteur des mesures bruitées de sortie d'un système dynamique, ainsi que le vecteur de ses entrées. La sortie de ce filtre est un vecteur proche du vecteur d'état du système. La connaissance d'un modèle du système dynamique et de ses entrées permet de restituer un état du système à partir des mesures de sortie.[42],[39]

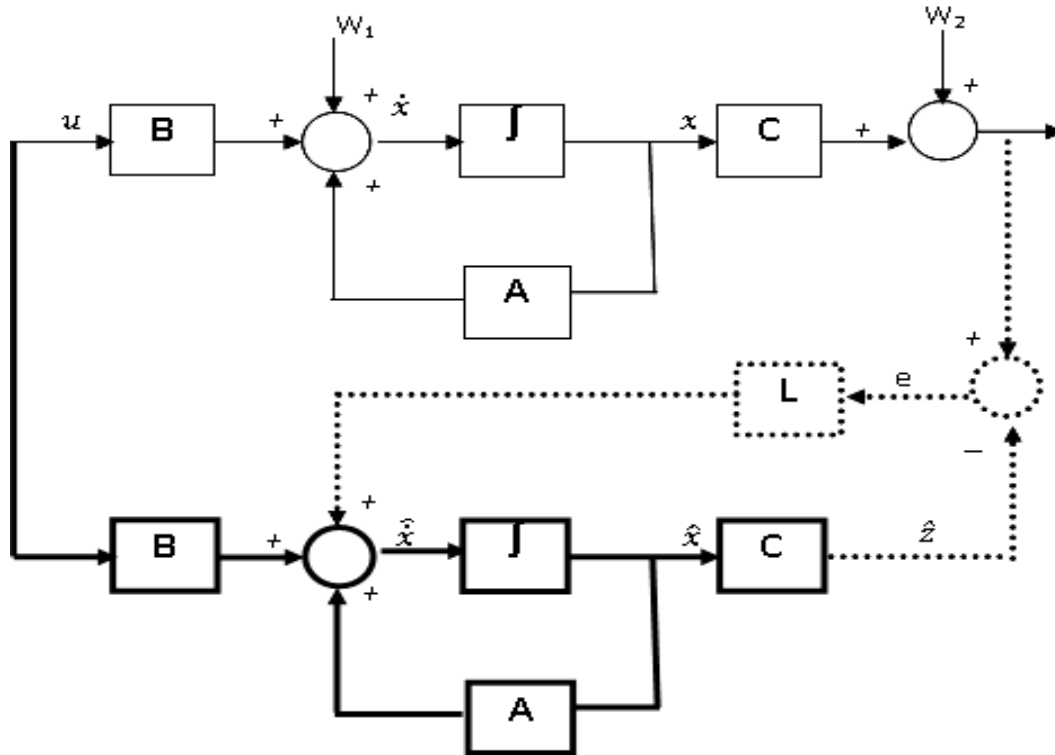


Fig. III.3: Structure d'observateur d'état

Soit le système déterministe (pas de bruit aléatoire) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{III-53})$$

On peut construire un autre système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L e(t) \\ \hat{z}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{III-55})$$

où

$$e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$$

On peut calculer l'écart entre les vecteurs d'état :

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

et

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (\text{III-56})$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= Ax(t) + Bu(t) - [A\hat{x}(t) + Bu(t) + L e(t)] \\ &= A[x(t) - \hat{x}(t)] - L [z(t) - \hat{z}(t)] \\ &= A[x(t) - \hat{x}(t)] - LC [x(t) - \hat{x}(t)] \end{aligned}$$

$$= [A - LC]\varepsilon(t) \quad (\text{III-57})$$

Si les valeurs propres de  $[A - LC]$  sont toutes dans le demi-plan complexe gauche, ce système est asymptotiquement stable et le vecteur d'erreur entre l'état  $x$  et l'état  $\hat{x}$  tend exponentiellement vers zéro. On a construit un observateur : son état  $\hat{x}$  tend exponentiellement vers l'état  $x$  du

système.[45] Pour réaliser une commande à retour de sortie, on peut donc utiliser un observateur d'état, effectuer une commande à retour d'état en utilisant l'état observé (état de l'observateur).

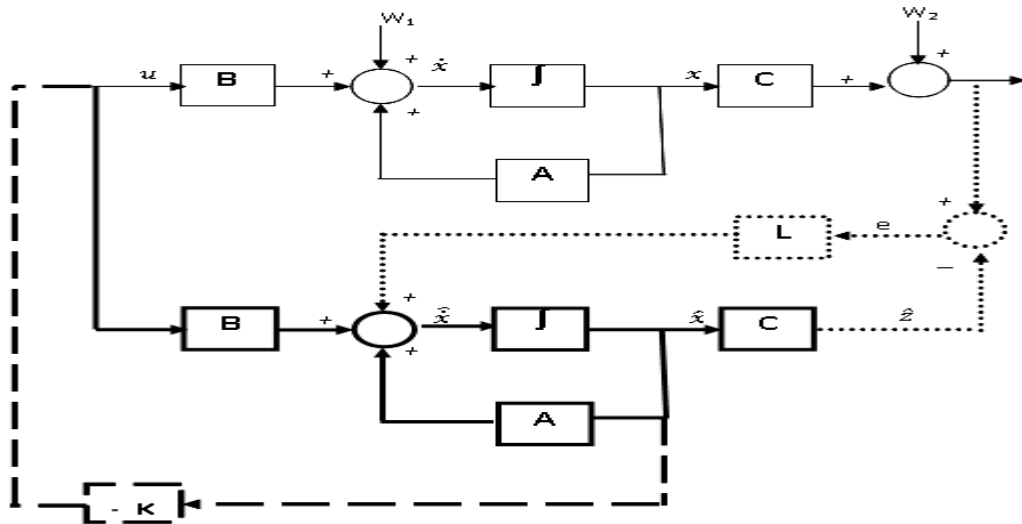


Fig. III. 4 : Structure de commande à retour d'état observé

On peut alors écrire les équations d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) - BK\hat{x}(t) + w_1(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) - BK\hat{x}(t) + L[Cx(t) + w_2(t) - C\hat{x}(t)] \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) - [BK + LC]\hat{x}(t) + Lw_2(t) + LCx(t) \end{aligned} \quad (III-58)$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK[x(t) - \varepsilon(t)] + w_1(t)$$

car

$$\hat{x}(t) = x(t) - \varepsilon(t)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= Ax(t) - BK\hat{x}(t) + w_1(t) - \{A\hat{x}(t) - [BK + LC]\hat{x}(t) + Lw_2(t) + LCx(t)\} \\ \dot{\varepsilon}(t) &= [A - LC]\varepsilon(t) + w_1(t) - Lw_2(t) \end{aligned} \quad (III-59)$$

Ou encore sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{\varepsilon}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{III-60})$$

La matrice d'évolution est bloc-triangulaire. Ses valeurs propres sont les valeurs propres des blocs de la diagonale  $[A-BK]$  et  $[A-LC]$ . Les dynamiques du retour d'état d'une part, et de l'observateur d'autre part, sont séparées : on peut régler les valeurs propres de la commande par la matrice de retour d'état  $K$ , de façon indépendante des valeurs propres de l'observateur que l'on règle par le choix de la matrice  $L$ . C'est le **principe de séparation**. [45],[42]

### III.9.2 Principe de séparation:

La solution de ce problème de commande optimale de processus stochastique est bien connue sous le nom de principe de séparation. Ce principe énonce que la solution du problème est composée de deux parties :

- a. un observateur de Kalman permettant de donner l'estimée  $\hat{x}$  de  $x$  qui est non biaisée et à variance minimale. [42]
- b. la commande par retour d'état  $u = -K\hat{x}$  appliquer à  $\hat{x}$  où  $K$  est calculé en considérant le problème LQ correspondant (en enlevant  $v$  et  $w$  de l'équation d'état dans le critère).

Ce théorème est intéressant dans la mesure où il donne la solution du problème complet comme étant la réunion des solutions de deux problèmes plus simples et déjà résolus : celui de la commande LQ et celui de l'estimation de Kalman. [45]

Le critère LQG de la relation (III -53) s'écrit :

$$J_{LQG} = E \left\{ \int_0^{\infty} [x^T Q x(t) + u^T R u(t)] dt \right\}$$

De l'équation (III-6) on déduit

$$x = \varepsilon + \hat{x}$$

$$J_{LQG} = E \left\{ \int_0^{\infty} [(\hat{x} + \varepsilon)^T Q (\varepsilon + \hat{x}) + u^T R u(t)] dt \right\}$$

$$J_{LQG} = E \left\{ \int_0^{\infty} [\hat{x}^T Q \hat{x} + u^T R u(t)] dt \right\} + 2E \left\{ \int_0^{\infty} [\hat{x}^T Q \varepsilon] dt \right\} + E \left\{ \int_0^{\infty} [\varepsilon^T Q \varepsilon] dt \right\} \quad (\text{III-61})$$

Comme  $\hat{x}$  n'est pas aléatoire, il vient :

$$J_{LQG} = \int_0^{\infty} [\hat{x}^T Q \hat{x} + u^T R u(t)] dt + 2 \int_0^{\infty} [\hat{x}^T Q E(\varepsilon)] dt + E \left\{ \int_0^{\infty} [\varepsilon^T Q \varepsilon] dt \right\} \quad (\text{III-62})$$

donc si  $E(\varepsilon) = 0$  (c'est une variable aléatoire centrée), il vient :

$$J_{LQG} = J_{LQ} + E\left\{\int_0^{\infty} [\varepsilon^T Q \varepsilon] dt\right\} \quad (\text{III-63})$$

Où  $J_{LQ}$  est un critère de type LQ, portant sur l'état  $\hat{x}$  de l'observateur qui devra donc être conçu pour que la quantité  $E\left\{\int_0^{\infty} [\varepsilon^T Q \varepsilon] dt\right\}$  soit la plus petite possible.

Un tel observateur est un observateur de Kalman.

### III.9.3. L'observateur optimal de Kalman

Dans le critère de l'équation (III-53), la matrice  $Q$  est symétrique définie positive, donc la quantité  $\varepsilon^T Q \varepsilon$  est une forme quadratique:

$$\varepsilon^T Q \varepsilon > 0, \quad \forall \varepsilon.$$

Le minimum de  $E\left\{\int_0^{\infty} [\varepsilon^T Q \varepsilon] dt\right\}$  est obtenu pour la matrice  $L$  telle que la variance  $E\{\varepsilon^T \varepsilon\}$  soit minimale. Par ailleurs,  $\varepsilon^T \varepsilon$  est le carré scalaire du vecteur  $\varepsilon$ , c'est donc une norme de la matrice  $\varepsilon \varepsilon^T$ . En effet :

$$\varepsilon^T \varepsilon = \sum \varepsilon_i^2 = \text{tr}(\varepsilon \varepsilon^T).$$

La matrice  $L$  qui minimise la variance de l'erreur d'observation minimise n'importe quelle norme de la matrice  $E\{\varepsilon \varepsilon^T\}$ .

De l'équation (III-1) et (III-2) reproduites ici,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w_1(t)$$

$$z(t) = Cx(t) + w_2(t)$$

$$\Phi_{ww}(t, \tau) = V(t) \delta(t - \tau)$$

On déduit, en utilisant la définition de la fonction d'autocorrélation :

$$\Phi_{ww}(t, \tau) = E\{w(t) w^T(\tau)\} = V(t) \delta(t - \tau)$$

Soit en formant le vecteur  $W(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$  dans lequel on suppose que les bruits  $w_1(t)$  et  $w_2(t)$  sont indépendants et stationnaires, on obtient :

$$E\{w(t) w^T(\tau)\} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} \delta(t - \tau) \quad (\text{III-66})$$

La matrice  $V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$  est une matrice de variance-covariance constante, dans laquelle les matrices  $V_1$  et  $V_2$  sont symétriques définies positives.

Les conditions initiales du système ne sont pas connues :  $x(0)$  est un vecteur aléatoire, que l'on caractérise par :

- ✓ son espérance mathématique  $E\{x(0)\} = \bar{x}_0$
- ✓ sa matrice de variance-covariance  $E\{[x(0) - \bar{x}_0][x(0) - \bar{x}_0]^T\} = Q_0$

De l'équation (III-9) on tire:

$$\dot{\varepsilon}(t) = [A - LC]\varepsilon(t) + [I \quad -L] \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{III-67})$$

avec la condition initiale :

$$\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0).$$

Le vecteur  $\hat{x}(0)$  représente la condition initiale de l'observateur. C'est un vecteur que l'utilisateur doit déterminer pour régler l'observateur. L'erreur d'observation  $\varepsilon(t)$  est un vecteur aléatoire de caractéristiques:

$$\begin{aligned} E\{\varepsilon(t)\} &= \bar{\varepsilon}(t) \\ \varepsilon(t) &= \bar{\varepsilon}(t) + \tilde{\varepsilon}(t) \\ E\{\tilde{\varepsilon}(t)\} &= 0 \\ E\{\tilde{\varepsilon}(t) + \tilde{\varepsilon}^T(t)\} &= \tilde{Q}(t) \\ E\{\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)\} &= \bar{\varepsilon}(t)\bar{\varepsilon}^T(t) + \tilde{Q}(t) \end{aligned}$$

Le minimum d'une norme de cette matrice de covariance est obtenu si les 2 termes (qui sont positifs) sont minimums. Pour le premier, on cherche :

$$\bar{\varepsilon}(t) = 0, \forall t \geq 0 \quad (\text{III-68})$$

Or, puisque les bruits  $w_1$  et  $w_2$  sont centrés :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}}(t) &= [A - LC] \bar{\varepsilon}(t) \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}(t) &= [A - LC] \tilde{\varepsilon}(t) + [I \quad -L] \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III-69})$$

A chaque instant  $t > 0$  :

$$\bar{\varepsilon}(t) = e^{[A - LC]t} \bar{\varepsilon}(0) \quad (\text{III-70})$$

Il faut et il suffit donc que :

$$\bar{\varepsilon}(0) = 0, \text{ soit } \hat{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (\text{III-71})$$

L'état initial de l'observateur doit donc être réglé sur l'espérance mathématique de l'état initial du système. Il reste à trouver la matrice  $L$  qui minimise une norme de  $\tilde{Q}(t) = E\{\tilde{\varepsilon}(t) + \tilde{\varepsilon}^T(t)\}$

Soient:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A - LC \\ \tilde{B} &= [I \quad -L] \\ w(t) &= \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Alors :



$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\varepsilon}} &= \tilde{A} \tilde{\varepsilon} + \tilde{B} w \\ \Rightarrow \dot{\tilde{\varepsilon}}^T &= \tilde{\varepsilon}^T \tilde{A}^T + w^T \tilde{B}^T\end{aligned}\quad (\text{III-72})$$

On peut calculer à chaque instant :

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}(t) &= e^{\tilde{A}t} \tilde{\varepsilon}(0) + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-\tau)} \tilde{B} w(\tau) d\tau \\ \Rightarrow \tilde{\varepsilon}^T(t) &= \tilde{\varepsilon}^T(0) e^{\tilde{A}^T t} + \int_0^t w^T(\tau) \tilde{B}^T e^{\tilde{A}^T(t-\tau)} d\tau\end{aligned}\quad (\text{III-73})$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(t) &= E\left\{ e^{\tilde{A}t} \tilde{\varepsilon}(0) + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-\tau)} \tilde{B} w(\tau) d\tau + \tilde{\varepsilon}^T(0) e^{\tilde{A}^T t} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t w^T(\tau) \tilde{B}^T e^{\tilde{A}^T(t-\tau)} d\tau \right\}\end{aligned}$$

En posant :

$$\Phi(t-\tau) = e^{\tilde{A}(t-\tau)} \quad (\text{III-74})$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(t) &= E\left\{ \phi(t) \tilde{\varepsilon}(0) \tilde{\varepsilon}^T(0) \phi^T(t) \right. \\ &\quad + \phi(t) \tilde{\varepsilon}(0) \int_0^t w^T(\tau) \tilde{B}^T \phi^T(t-\tau) d\tau \\ &\quad + \int_0^t \phi^T(t-\tau) \tilde{B} w(\tau) d\tau \tilde{\varepsilon}^T(0) \phi^T(t) \\ &\quad \left. + \int_0^t \phi(t-\tau) \tilde{B} w(\tau) d\tau \int_0^t w^T(\tau) \tilde{B}^T \phi^T(t-\tau) d\tau \right\}\end{aligned}\quad (\text{III-75})$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(t) &= \phi(t) E\left\{ \tilde{\varepsilon}(0) \tilde{\varepsilon}^T(0) \right\} \phi^T(t) \\ &\quad + \phi(t) \int_0^t E\left\{ \tilde{\varepsilon}(0) w^T(\tau) \right\} \tilde{B}^T \phi^T(t-\tau) d\tau \\ &\quad + \int_0^t \phi^T(t-\tau) \tilde{B} E\left\{ w(\tau) \tilde{\varepsilon}^T(0) \right\} d\tau \phi^T(t) \\ &\quad + E\left\{ \int_0^t \phi(t-\tau) \tilde{B} w(\tau) d\tau \int_0^t w^T(\tau) \tilde{B}^T \phi^T(t-\tau) d\tau \right\}\end{aligned}\quad (\text{III-76})$$

Or, par causalité, l'erreur initiale ne peut être corrélée avec les bruits d'entrée future :

$$\begin{aligned}E\left\{ \tilde{\varepsilon}(0) w^T(\tau) \right\} &= 0 \\ E\left\{ w(\tau) \tilde{\varepsilon}^T(0) \right\} &= 0\end{aligned}\quad (\text{III-77})$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(t) &= \phi(t) \tilde{Q}(0) \phi^T(t) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^t \phi(t-\tau) \tilde{B} E\left\{ w(\tau) w^T(\theta) \right\} \tilde{B}^T \phi^T(t-\theta) d\theta d\tau\end{aligned}\quad (\text{III-78})$$

$$\tilde{Q}(t) = \phi(t) \tilde{Q}(0) \phi^T(t)$$

$$+\int_0^t \int_0^t \phi(t-\tau) \tilde{B} V \delta(\theta-\tau) \tilde{B}^T \phi^T(t-\theta) d\theta d\tau \quad (\text{III-79})$$

$$\tilde{Q}(t) = \phi(t) \tilde{Q}(0) \phi^T(t) + \int_0^t \phi(t-\tau) \tilde{B} V \tilde{B}^T \phi^T(t-\tau) d\tau \quad (\text{III-80})$$

La relation (III-80) exprime la solution du système différentiel :

$$\dot{\tilde{Q}}(t) = \tilde{A} \tilde{Q}(t) + \tilde{Q}(t) \tilde{A}^T + \tilde{B} V \tilde{B}^T \quad (\text{III-81})$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(t) &= [A-LC] \tilde{Q}(t) + \tilde{Q}(t) [A-LC]^T \\ &+ [I \quad -L]^T \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -L^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III-82})$$

$$\dot{\tilde{Q}}(t) = [A-LC] \tilde{Q}(t) + \tilde{Q}(t) [A^T - C^T L^T] + V_1 + L V_2 L^T \quad (\text{III-83})$$

La solution stationnaire exprime que la variance de l'erreur d'observation est indépendante du temps :

$$0 = [A-LC] \tilde{Q} + \tilde{Q} [A^T - C^T L^T] + V_1 + L V_2 L^T \quad (\text{III-84})$$

Si on pose (par analogie avec la commande LQ) on aura :

$$L = \tilde{Q} C^T V_2^{-1} \quad (\text{III-85})$$

On obtient une équation de Riccati algébrique:

$$0 = A \tilde{Q} + \tilde{Q} A^T + V_1 - \tilde{Q} C^T V_2^{-1} C \tilde{Q} \quad (\text{III-86})$$

et la matrice hamiltonienne associée à l'équation de Riccati est:

$$H = \begin{bmatrix} A^T & C^T V_2^{-1} C \\ V_1 & -A \end{bmatrix} \quad (\text{III-87})$$

Un calcul semblable à celui utilisé au chapitre II, permet donc de calculer la matrice L de l'observateur de Kalman.

### III.10. Solution du problème LQG

La commande optimale à retour de sortie du système défini par les relations (III-51) et (III-66)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w_1(t)$$

$$z(t) = Cx(t) + w_2(t)$$

$$E\{w(t)w^T(\tau)\} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} \delta(t-\tau)$$

et le critère LQG de la relation (III-53) :

$$J_{LQG} = E\left\{\int_0^{\infty} [x^T Q x(t) + u^T R u(t)] dt\right\}$$

est définie par la structure observateur/retour d'état, (figure III-2), dans laquelle on calcule les matrices K et L par les relations (III-39), (III-44), (III-36) et (III-37) [41],[45]:

$$\begin{aligned} K &= -R^{-1}B^T P \\ PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P &= 0 \\ L &= \tilde{Q}C^T V_2^{-1} \\ A\tilde{Q} + \tilde{Q}A^T + V_1 - \tilde{Q}C^T V_2^{-1}C\tilde{Q} &= 0 \end{aligned}$$

### III.11. Choix des pondérations

Le réglage du correcteur LQG nécessite la donnée de quatre matrices de pondération : Q et R pour le retour d'état ; V et W pour l'estimateur. La méthode de réglage la plus simple repose sur un réglage séparé. Régler V et W de sorte que l'état soit 'bien' reconstruit et régler Q et R pour avoir un 'bon' retour d'état.

Si les dynamiques de la régulation sont relativement lentes devant celles de l'observation, on peut supposer que l'état est parfaitement connu du point de vue du retour d'état et la commande sera robuste. Si cette hypothèse n'est pas respectée, et ce sera le cas dès-qu'on souhaite obtenir un régulateur avec des dynamiques élevées, la robustesse n'est plus assurée. La méthode de réglage des pondérations Q et R du retour d'état vue au paragraphe précédent reste valable.[40],[45],[39]

#### III.11.1. Réglage de l'estimateur d'état

L'estimateur d'état s'appuie sur la commande  $\mathbf{u}$  et sur la mesure  $\mathbf{z}$  du système pour donner l'estimée de l'état la plus plausible, compte-tenu des incertitudes et bruits affectant le modèle et la mesure.

Une première approche du réglage du filtre concerne le cas où l'hypothèse de départ sur le modèle est respectée; c'est-à-dire que le seul défaut du modèle est d'être affecté par des signaux stochastiques blancs. Dans ce cas, le réglage se fera directement par une évaluation des variances des bruits.

Evaluer le bruit de mesure  $\mathbf{w}_2$  en observant  $\mathbf{z}$  est direct ; ce qui n'est pas le cas du bruit d'état  $\mathbf{w}_1$ . Ce bruit peut être attribué à la commande  $\mathbf{u}$  en choisissant  $V = B V_u B^T$ , avec  $V_u$  la variance du bruit de mesure.

Cependant, la principale source de bruit d'état d'un modèle provient généralement des erreurs de modélisation qui sont déterministes et non stochastiques. Néanmoins ces erreurs de modélisation sont généralement mal connues et il n'est pas aberrant d'en tenir compte globalement

grâce à un terme stochastique. La validation du filtre de Kalman peut alors se faire par simulation en introduisant des erreurs sur le modèle telles que des variations sur ses paramètres.

### III.12. Structure de la commande

La Figure (III.5) représente le schéma de simulation de la commande LQ d'une machine synchrone à aimant permanent alimentée en tension. Les principaux constituants dans ce type de commande sont la boucle de régulation de vitesse, celles des courants  $i_{ds}$  et  $i_{qs}$ , le bloc de calcul de  $\theta_s$  et les transformations directe et inverse.

La vitesse est régulée à travers la boucle externe du bloc. La sortie de son régulateur est le courant de référence  $i_{qs}^*$ . Ce dernier est comparé à la valeur  $i_{qs}$  issue de la mesure des courants réels. L'erreur sollicite l'entrée du régulateur dont la sortie est la tension de référence  $v_{qs}^*$ .

En parallèle à cette boucle interne, on trouve une boucle de régulation de  $i_{ds}$ . La sortie du régulateur de  $i_{ds}$  donne la tension de référence  $v_{ds}^*$ . Les deux tensions de références  $v_{ds}^*$  et  $v_{qs}^*$  sont alors transformées en grandeurs statoriques  $v_{\alpha s}^*$  et  $v_{\beta s}^*$ , à l'aide de la transformation de Park.

L'onduleur à MLI applique des créneaux de tension à la machine dont les valeurs moyennes sur une période de MLI correspondent aux valeurs  $v_A^*$ ,  $v_B^*$  et  $v_C^*$ . Après transformation de Park des courants  $i_A$ ,  $i_B$  et  $i_C$  on obtient les courants  $i_{ds}$  et  $i_{qs}$ , qu'on utilise pour la régulation des courants.

En parallèle, l'angle  $\theta_s$  est calculé à partir d'une mesure de vitesse mécanique  $\Omega$ . C'est cet angle qui sera utilisé dans les transformations directes et inverses.

#### III.12.1. Réglage de deux variables d'état ( $i_{ds}$ , $i_{qs}$ )

##### a) Modèle d'état de la MSAP

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_d \\ \dot{I}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} & \omega \frac{L_q}{L_d} \\ -\omega \frac{L_d}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\phi f}{L_q} \end{bmatrix} \omega$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} & \omega \frac{L_q}{L_d} \\ -\omega \frac{L_d}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \end{bmatrix}$$

##### b) Schéma de simulation

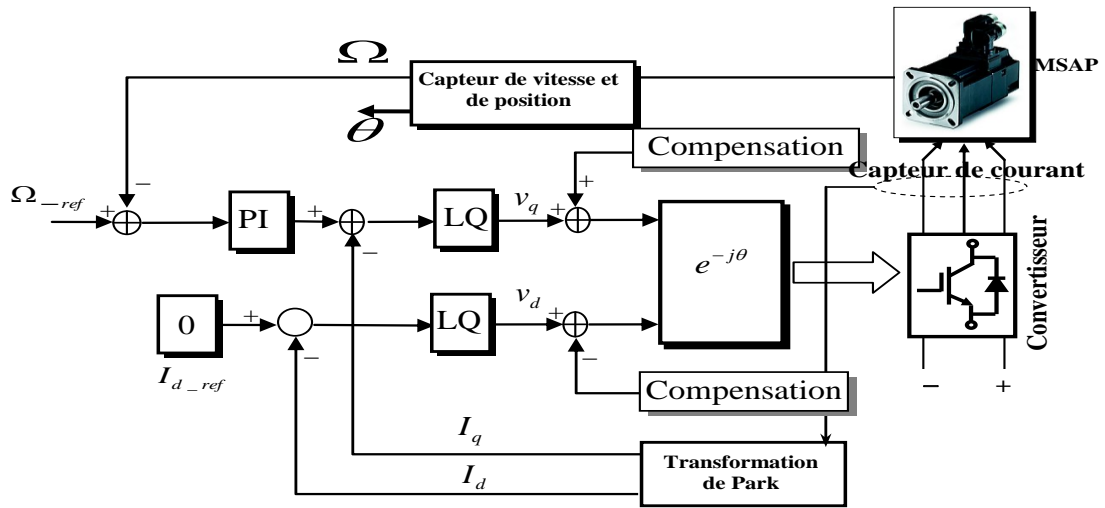


Fig. III.6 : Schéma de simulation de la commande (LQ) des courants ( $i_{ds}, i_{qs}$ )

c) Résultats de simulation

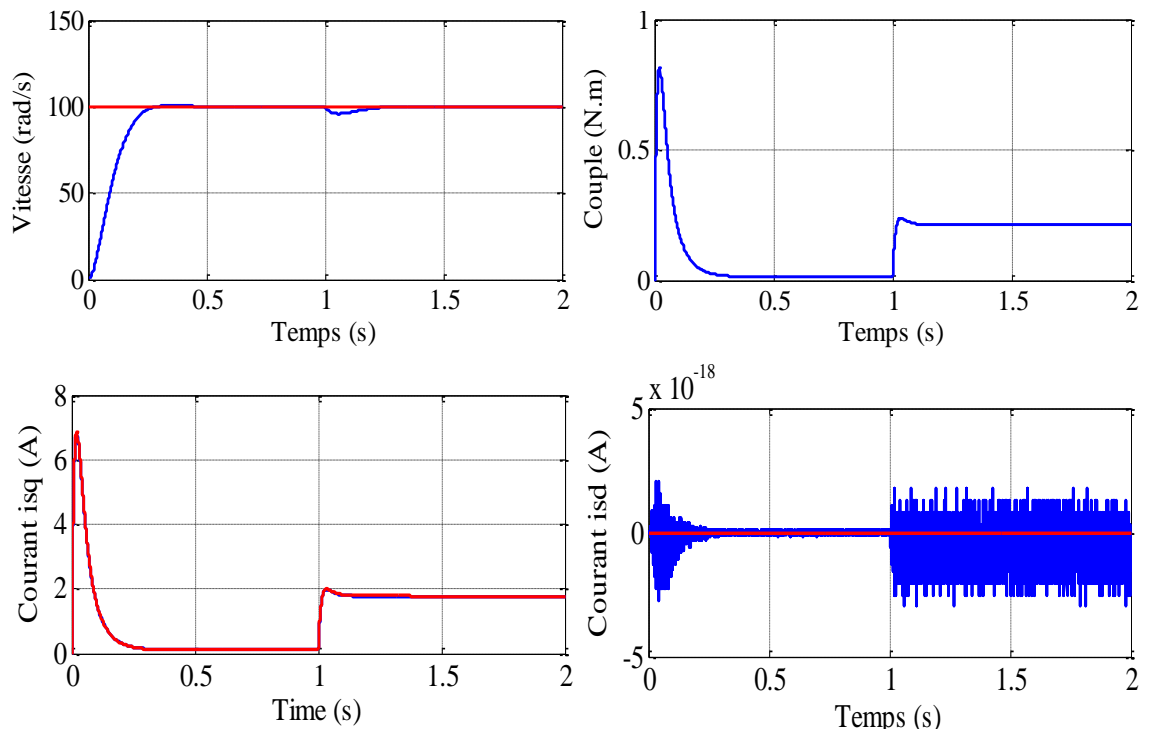
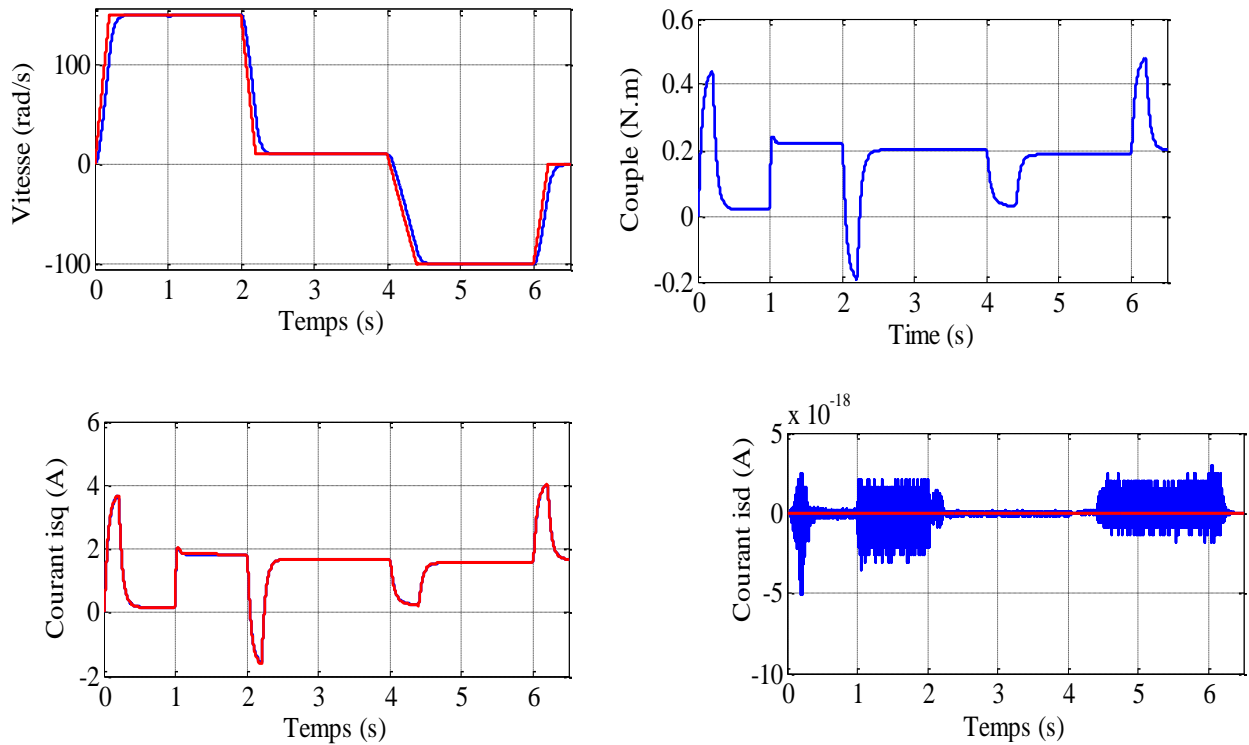


Fig. III-7 : Résultats de simulation lors d'un démarrage à vide suivie d'une perturbation du couple de charge à  $t=1s$  pour une consigne de vitesse de 100rd/s



**Fig. III-8:** Résultats de simulation lors d'une variation de consigne et du couple de charge ( $C_r=0.2$ ) a  $t=1$ s

### III.12.2. Interprétation des résultats

La Figure (III-4) montre les caractéristiques de la MSAP au moment du démarrage à vide pour une consigne de vitesse de 100 rd/s avec un couple de charge.

On remarque que l'allure de vitesse suit bien sa consigne sans dépassement avec un temps de réponse très court, ensuite il se stabilise à une valeur pratiquement nulle en régime permanent.

On remarque aussi que le courant statorique  $I_d$  est nul et le courant statorique  $I_q$  est l'image du couple électromagnétique ce qui indique le découplage introduit par la commande vectorielle de la MSAP.

La Figure (III.5) montre le changement de la consigne de vitesse, La vitesse suit parfaitement sa référence qui est atteinte rapidement sans dépassement avec une légère perturbation.

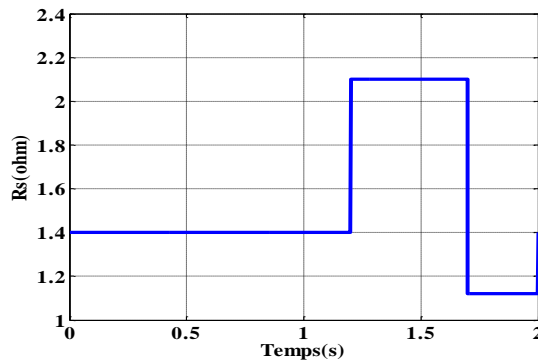
#### d) Vérification de la robustesse

Le problème récurrent dans l'élaboration des lois de commande est l'incertitude sur le modèle. Afin d'obtenir un maximum de garanties pour un système bouclé, il est primordial d'étudier la robustesse de son correcteur.

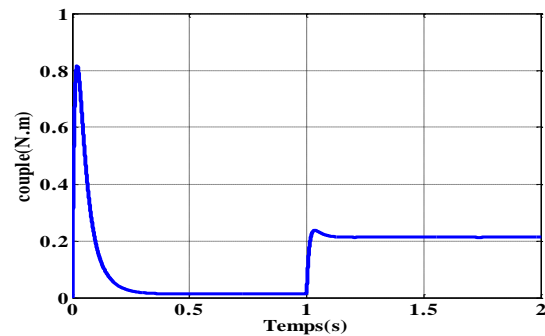
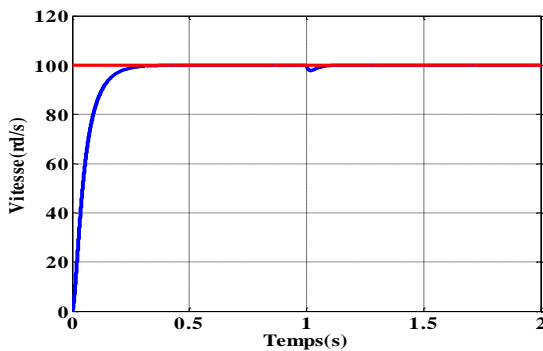
Les incertitudes d'un système commandé sont constituées des perturbations externes, du bruit, ou des variations paramétriques.

L'étude de la robustesse doit alors être associée à la stabilité et à la performance du système, par rapport à une perturbation du système telle que les erreurs de mesure ou les variations de ses paramètres.

Dans ce cas, on a décidé de tester la robustesse du correcteur de vitesse vis à vis des variations paramétriques du moteur les plus susceptibles de varier lors de son fonctionnement à savoir : la résistance statorique, le flux, l'inductance et le moment d'inertie,

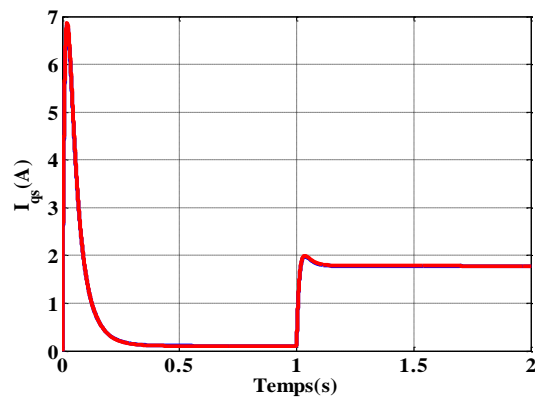
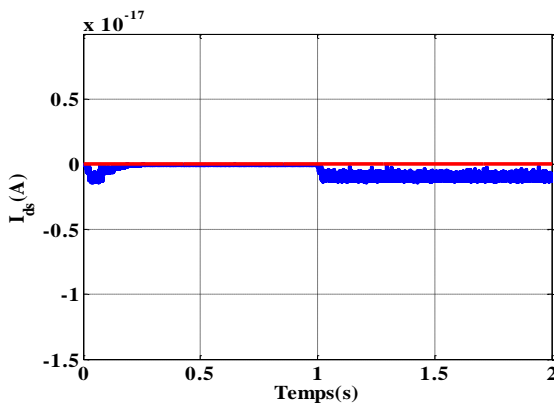


a/ profil de la résistance statorique



b/ l'évaluation de la vitesse en fonction du temps

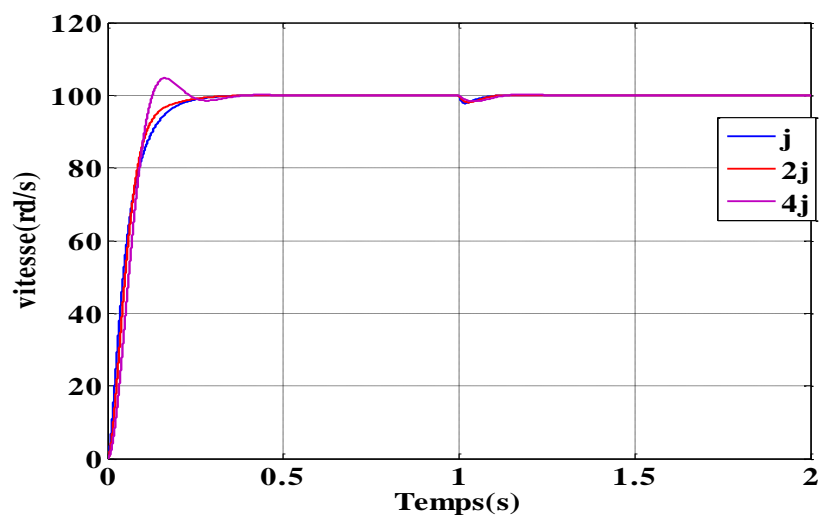
c/ l'évaluation de la couple en fonction du temps



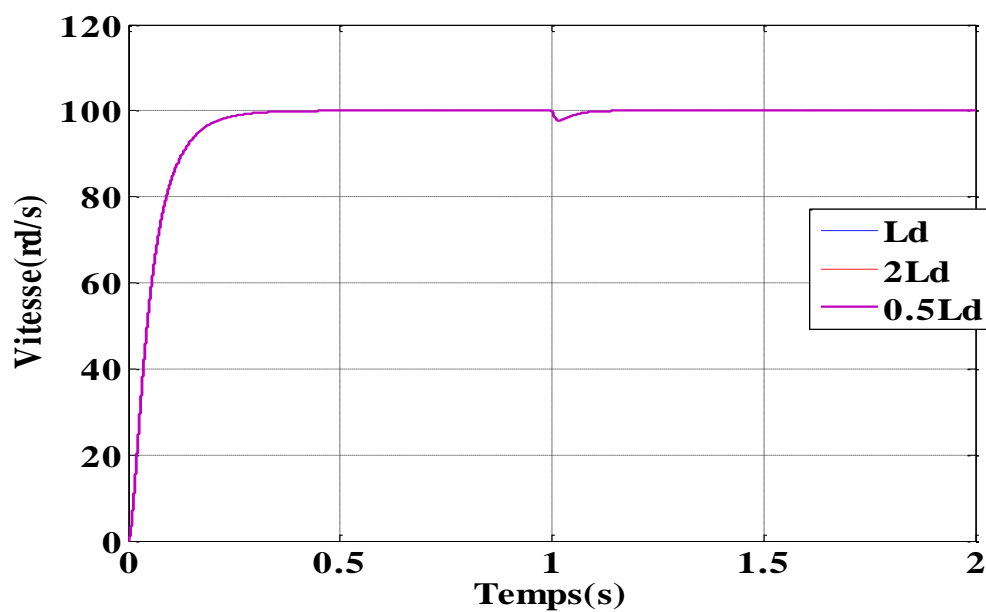
d/ l'évaluation de Ids en fonction du temps

e/ l'évaluation de Iqs en fonction du temps

**Fig.III-9** : Résultats de simulation lors d'une variation de la Rs avec l'application du couple résistant ( $C_r=0.2$ ) à  $t=1s$

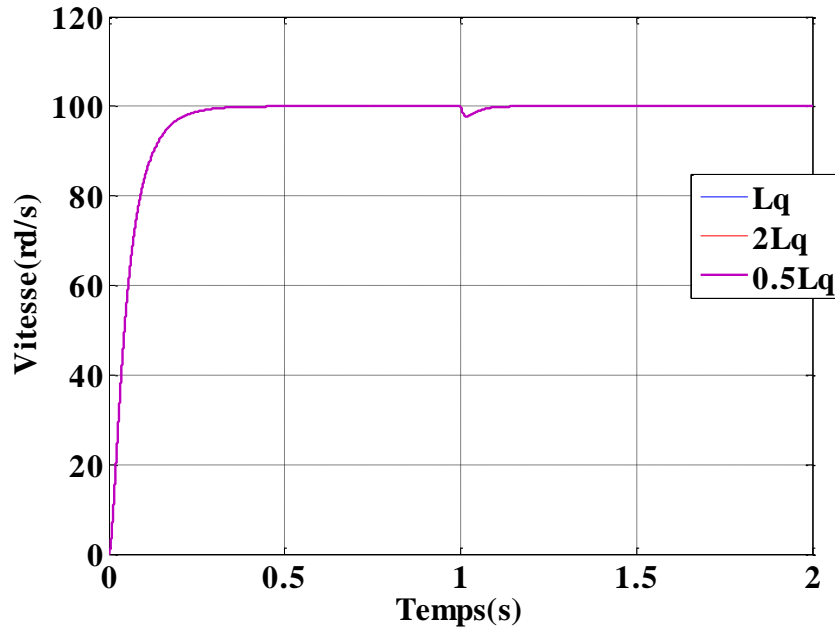


**Fig. III-10 :** Résultats de simulation lors d'une variation de moment d'inertie avec l'application du couple résistant ( $C_r=0.2$ ) à  $t=1s$



**Fig. III-11 :** Résultats de simulation lors d'une variation de  $L_d$  avec l'application du couple résistant ( $C_r=0.2$ ) à  $t=1s$





**Fig. III-12 :** Résultat de simulation lors d’une variation de  $L_q$  avec l’application du couple résistant ( $C_r=0.2$ ) à  $t=1s$

**III.12.3. Interprétation des résultats des testes de robustesse**

Les variations des paramètres électriques (Figures III.6, III.8 et III.9) n’influent pas sur la robustesse, ni sur la dynamique de la vitesse, ni sur le comportement des autres grandeurs. Par contre la variation du moment d’inertie (Figures III.7) montre une légère perturbation au niveau d’allure de la vitesse. Donc les performances du contrôleur de la vitesse de la MSAP sont très satisfaisantes, et le découplage est affecté

**III.12.4. Réglage de trois variables d’état ( $i_{ds}$ ,  $i_{qs}$ ,  $\omega$ )**

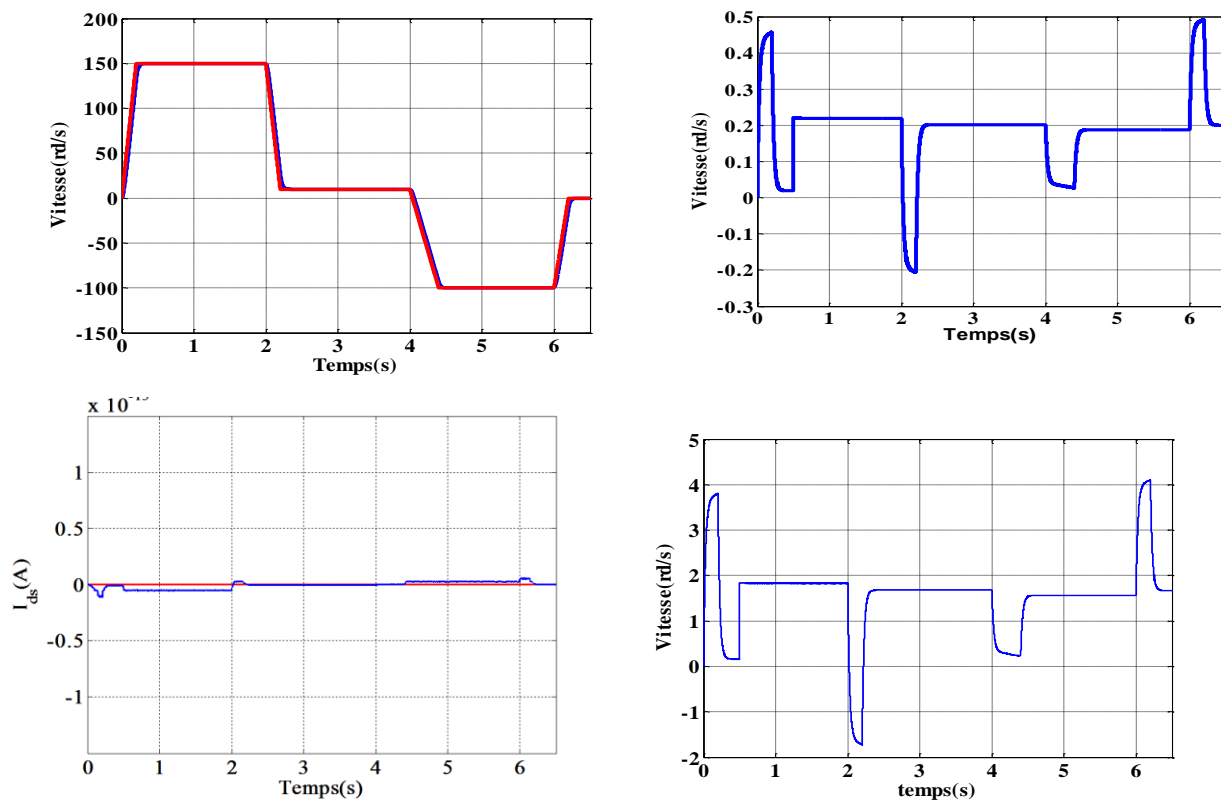
**a) Modèle d’étas de l’MSAP**

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_s}{L_q} & -\frac{\phi f}{L_q} \\ 0 & \frac{3p\phi f}{2j} & -\frac{f}{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_s}{L_q} & -\frac{\phi f}{L_q} \\ 0 & \frac{3p\phi f}{2j} & -\frac{f}{j} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

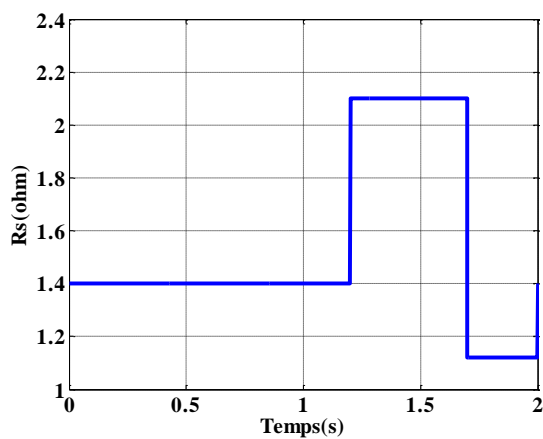
**b) Schéma bloc de simulation**



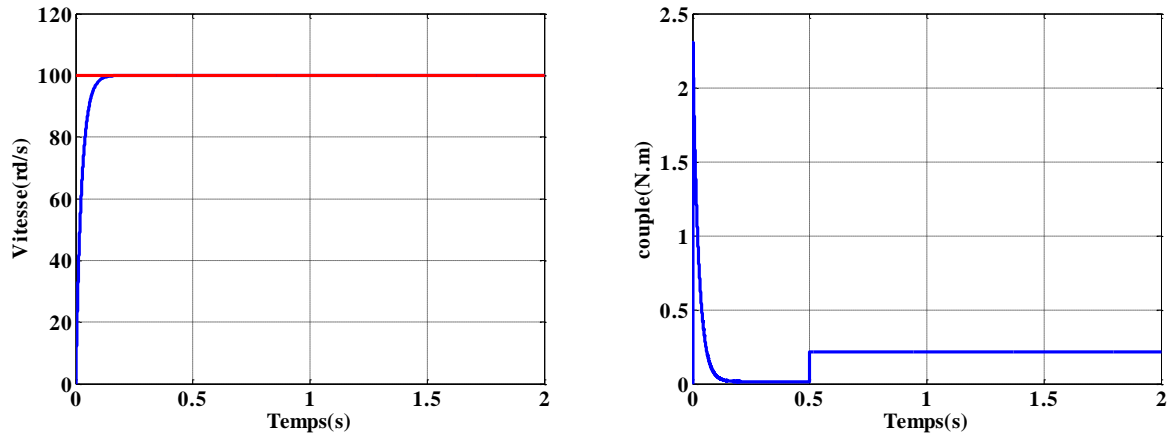


**Fig. III-15 :** Résultats de simulation lors d’une variation de consigne et du couple de charge ( $C_r=0.2$ ) a  $t=0.5$ s

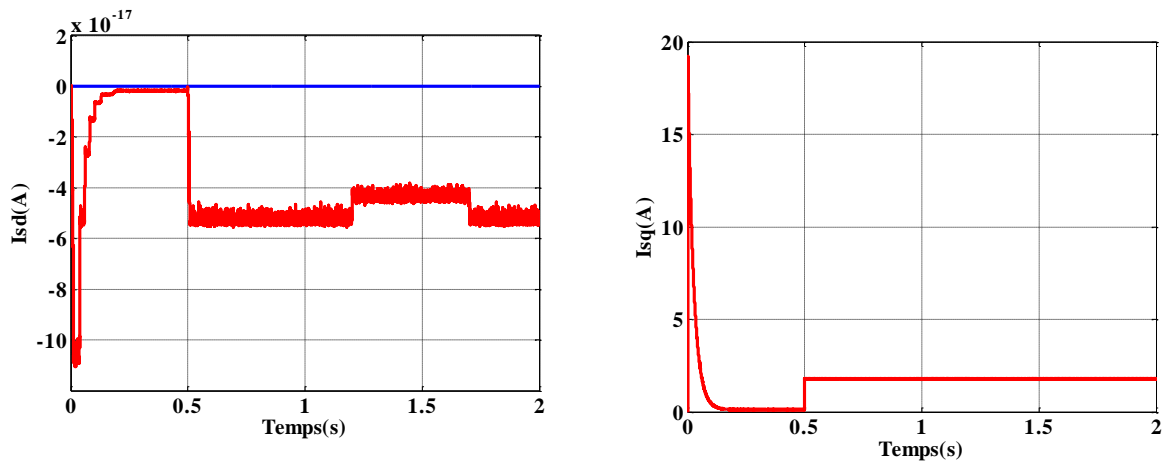
**d) Vérification de la robustesse**



a/ profil de la résistance statorique

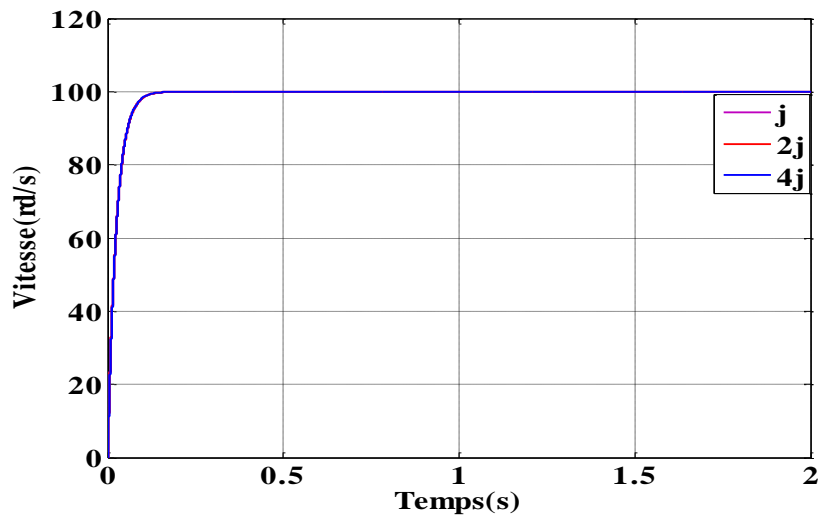


b/ l'évaluation de la vitesse en fonction du temps c/ l'évaluation de la couple en fonction du temps

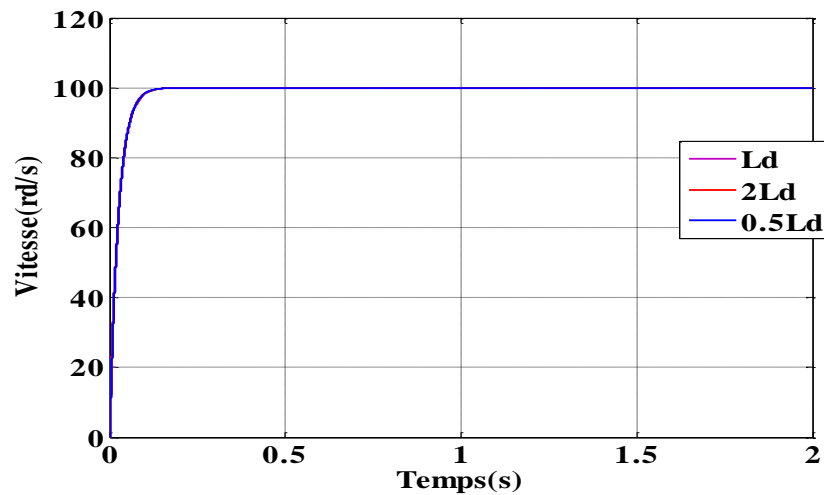


d/ l'évaluation de Ids en fonction du temps c/ l'évaluation de Iqs en fonction du temps

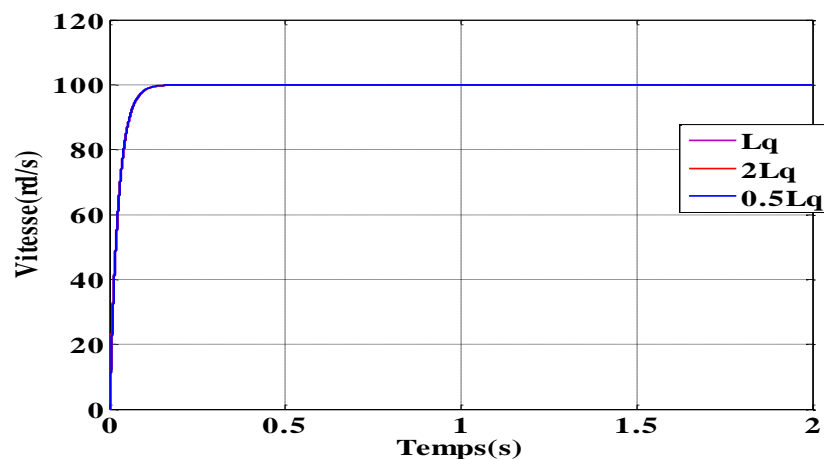
**Fig. III-16 :** Résultats de simulation lors d'une variation de la Rs avec l'application du couple résistant ( $C_r=0.2$ ) a  $t=1s$



**Fig. III-17 :** Résultats de simulation lors d'une variation de moment d'inertie avec l'application du couple résistant ( $C_r=0.2$ ) a  $t=1s$



**Fig. III-18 :** Résultats de simulation lors d'une variation de  $L_d$  avec l'application du couple résistant ( $C_r=0.2$ ) à  $t=1s$



**Fig. III-19 :** Résultats de simulation lors d'une variation de  $L_q$  avec l'application du couple résistant ( $C_r=0.2$ ) à  $t=1s$

### III.12.5. Interprétation des résultats des tests de robustesse

D'après les résultats obtenus dans les Figures (de III.12 à III.15) montrent que les variations des paramètres électriques n'influent pas sur la robustesse (la dynamique de la vitesse et le comportement des autres grandeurs)

### III.13. conclusion

Dans ce chapitre on a présenté le principe de la commande LQG qui réunit un contrôleur LQ et un estimateur de KALMAN qui sert à résoudre le problème de détérioration des performances causé par la sensibilité au bruit de mesure. Après on a présenté la solution du problème LQG en passant par le réglage de l'estimateur

L'approche adoptée dans ce chapitre consiste à remplacer le régulateur conventionnel de vitesse PI par un régulateur LQ .

On peut affirmer dans ce travail, l'efficacité de la commande appliquée à une machine synchrone à aimant permanent alimenté en tension et commander par orientation de flux via les deux types d'essais : changement des paramètres de la MSAP et l'introduction de perturbation. Des résultats intéressants ont été aperçus tant qu'on stabilité qu'en performances et rejet de perturbation ainsi qu'un temps de réponse très court et une erreur statique nulle en régime permanent. On remarque aussi malgré les importantes variations simultanées de tous les paramètres, que les performances du contrôleur LQ par apport au régulateur classique PI donne des performances meilleures non seulement la poursuite de consigne et le rejet de perturbation, mais il est aussi robuste par rapport aux variations des paramètres de la machine.

### Conclusion générale

Le travail réalisé dans le cadre de ce mémoire présente une étude de la commande linéaire quadratique (LQ), et linéaire quadratique gaussienne (LQG) comme étant deux techniques modernes de la commande optimale. On a présenté le principe et la philosophie de ces deux techniques, et on a appliqué la commande (LQ) à une machine synchrone à aimant permanent.

La commande LQ est basée sur un modèle linéaire de la MSAP, ce modèle est assuré par la technique de la commande vectorielle à flux rotorique orienté, grâce à cette dernière, on a pu réaliser le découplage entre les variables de sortie du modèle de la MSAP afin de faciliter le calcul du régulateur LQ.

Après avoir établi le modèle linéaire de la MSAP, la performance de la commande (LQ) dépend fortement des valeurs numériques des coefficients des matrices de pondération (Q, R) et devant l'absence des méthodes analytiques générales menant au bon choix des coefficients de ces matrices on a fait des estimations jusqu' à compatibilité entre l'énergie de la commande qui est gérée par la pondération R, et la rapidité de commande qui est gérée par la pondération Q ; c'est le critère de compromis (rapidité -énergie) de commande.

Dans la première partie du travail, on a présenté la modélisation en vue de la simulation du variateur de vitesse constitué par l'ensemble MSAP-convertisseur statique.

Malgré les hypothèses simplificatrices introduites, le modèle de la MSAP est très complexe (couplé, non linéaire et multivariable). La difficulté majeure, rencontrée dans cet actionneur, réside dans le fait que le couple électromagnétique et le flux sont des variables fortement couplées. L'utilisation de la transformation de Park, a permis d'aboutir à un modèle plus simplifié.

Dans le deuxième chapitre, le principe de la commande vectorielle retenue pour la MSAP a été appliqué au modèle obtenu. L'utilisation de la stratégie à nul a permis de commander le couple électromagnétique par le courant. Cette technique permet d'avoir un modèle semblable à celui de la machine à courant continu à excitation séparée. Dans le schéma de cette commande, les boucles de courants et celle de la vitesse sont assurées par des régulateurs classiques.

On a présenté dans le troisième chapitre la commande LQG qui étudie le problème d'estimation du vecteur d'état dans un contexte stochastique, ensuite on a vu les performances de la commande LQ de la MSAP dans deux phases de simulation :

## Conclusion générale

- ✓ L'une est la commande (LQ) à deux retours d'états ( $i_{ds}, i_{qs}$ ), le réglage de la troisième variable ( $w$ ) est réalisé à l'aide d'un régulateur (PI).
- ✓ L'autre phase est la commande (LQ) à trois retours d'états ( $i_{ds}, i_{qs}$  et  $w$ ).

On peut conclure d'après les résultats obtenus au cours du travail que les performances du système dépendent fortement des choix des valeurs numériques des matrices de pondération  $Q$  et  $R$ .



- [01] K. Meskine, “ Commande robuste floue des systèmes non linéaires incertains ”, Mémoire de Magister, Université de Sétif, 09 juin 2010.
- [02] Y.Piguet, “ Synthèse multimodèle d’un régulateur polynomial robuste ”, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1997.
- [03] R. Boukezzoula, “Commande floue d’une classe de systèmes non linéaires: application au problème de suivi de trajectoire”, Thèse de Doctorat, Université de Savoie, 31 mars 2000.
- [04] A. Lahmer, “Implantation expérimentale de la commande robuste par un contrôleur ”, Mémoire de Magister, Université de Batna, 12 Janvier 2011.
- [05] H. Amrous, “Commandes adaptatives d'une machine synchrone a aimants permanents”, Mémoire de Magister, Ecole Nationale Supérieure Polytechnique, Alger, Juillet 2009.
- [06] A. Kaddouri, “ Étude d’une commande non linéaire adaptative d’une machine synchrone à aimants permanents ”, Thèse de Doctorat, Université Laval, Québec, Novembre 2000.
- [07] B. Nahid Mobarakeh, “ Commande vectorielle sans capteur mécanique des machines synchrones a aimants : méthodes, convergence, robustesse, identification "en ligne" des paramètres”, Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 21 décembre 2001.
- [08] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar & B.A. Francis, “State-space solutions to standard and control problems,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 34, N°8, pp. 831-847, 1989.
- [09] T. Wildi, G. Sybille, “Électrotechnique”, 3em Edition, Institut de Recherche d'Hydro-Québec
- [10] A. Tlemçani, “ Contribution à l’application des commandes adaptatives par les systèmes flous à une machine synchrone à aimants permanents alimentée par un convertisseur multicellulaire série ”, Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 03 Juillet 2007
- [11] A. Boumediene, “ Recherche et développement de nouvelles approches de commandes d’une machine synchrone autopilotée alimentée en tension ”, Thèse de Doctorat d’Etat, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 15 Décembre 2007
- [12] C.F.AMAR, M.HAMADA (commande vectorielle de la MSAP). Thèse d’ingénieure en électrotechnique université de Batna 1999
- [13] G. Guy, et C. Guy, "Actionneurs Electriques, Principes Modèles Commande", Edition Eyrolles, 2000
- [14] W. Leonhard, "Control of AC Drives", Springer, Verlag, Berlin, 1984..
- [15] G. Lacroux, "Actionneurs Electriques pour la Robotique et les Asservissements" , Lavoisier 1995.
- [16] identification et commande vectorielle de la machine synchrone à aimants permanents

PFE, USTHB , 2005.

[17] Commande par les modes glissant non –linéaires de la MSAP alimenté par un onduleur de tension dans le cas générale a N niveaux.

[18] Modélisation et commande des moteurs triphasés, commande vectorielle des moteurs synchrone – commande numérique par contrôleurs DSP .Edition ellipses, 2000.

[19] CHOUCOU A/MADJID (Commande non-linéaire d'une machine synchrone a aimants permanent) Thèse d'ingénieur en électrotechnique université de msila 2006.

[20] Nicolas BERNARD, "Machine synchrone : de la boucle ouverte à l'autopilotage" ,Revue 3EI,n°30 , septembre 2002,pp .24-39.

[21] Romandes, 1994.H. Bühler, "Réglage par Logique Floue", Collection Électricité, Presses Polytechniques et Universitaires

[22] A. Benbrahim, "Commande prédictive généralisée d'une machine synchrone à aimants permanents", Mémoire de Magister, Université de Batna, 18 Juin 2009.

[23] M.S. Merzoug, " Etude comparative des performances d'un DTC et d'un FOC d'une Machine synchrone à aimants permanents ", Mémoire de Magister, Université de Batna, 15 Décembre 2011.

[24] D. Lahouel, "Commande non linéaire adaptative d'une machine synchrone à aimants permanents", Mémoire de Magister, Université de Batna, 01 Juillet 2009.

[25] A. Chibah, " Conception d'un contrôleur d'étage de puissance par FPGA", Mémoire de Magister, Université de Tizi Ouzou

[26] A. Nait Seghir, " Contribution à la commande adaptative et neuronale d'une machine synchrone à aimants permanents ", Thèse de Doctorat d'Etat, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 16 Décembre 2007.

[27] T. Toudja, "Commande non linéaire robuste D'un moteur synchrone à aimant permanent", Mémoire de Magister, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 09 Février 2008.

[28] K. Nabti, " Stratégies de commande et techniques intelligentes appliquées aux machines de type synchrone ", Thèse de Doctorat en sciences, Université de Mentouri de Constantine, 2010.

[29] G.Grellet,G.Clerc, " Actionneur Electriques, Principes, Modèles, commande ", Eyrolles, 1997.

[30] H. Amrous, "Commandes adaptatives d'une machine synchrone a aimants permanents", Mémoire de Magister, Ecole Nationale Supérieure Polytechnique, Alger, Juillet 2009.

[31] H. Abdellaoui, " Etude expérimentale de la position rotorique d'un moteur synchrone à aimants permanents par variables électriques ", Mémoire de Magister, Université de Tizi Ouzou.

- [32] N. Choug, “ Etude de la robustesse des contrôleurs flous d’une machine synchrone à aimants permanents avec pilotage vectoriel ”, Mémoire de Magister, Université de Batna, 2011.
- [33] J. P. Caron, et J. P. Hatier, "Modélisation et Commande de la Machine Asynchrone", Edition Technip, Paris 1995.
- [34] D. Arab Khabouri “Contribution à la commande vectorielle des machines synchrones à aimant permanents sans capteurs mécaniques ” , Thèse de Doctorat de L’INP Lorraine, Nancy, 1998
- [35] C. Carlos, "Modélisation Contrôle Vectoriel et DTC, Commande des Moteurs Asynchrone 1", Edition Hermès Science Europe, 2000.
- [36] A. Kassatkine, "Electrotechnique élémentaire ", Edition Mir, Moscou 1987.
- [37] KWAKERNAAK – SIVAN : *Linear optimal control system*, Wiley, 1972.
- [38] KAILATH : *Linear systems*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1979.
- [39] ASTRÖM – WITTENMARK : *Computer controlled systems*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1984.
- [40] LARMINAT : *Automatique, commande des systèmes linéaires*, Hermès, 1993.
- [41] Maitine Bergounioux. *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires*. Dunod, Paris, France, 2001.
- [42] G. Welsh & G. Bishop. *An introduction to the kalman filter*. UNC-Chapel Hill, TR95-041, May 2003
- [43] Denis Matignon. *Commande linéaire des systèmes dynamiques*. Technical report, ENST, Paris, France, 1998
- [44] Desineni Subbaram Naidu. *Optimal Control Systems*. CRC Press, 2003.
- [45] Benoit Bergeon *Commande linéaire des systèmes multivariables*, 2013

## ملخص:

يهدف العمل المقدم في هذه المذكرة إلى الدراسة والتحكم في محرك تزامني بمغناطيس دائم  
قمنا باستعمال تقنية التدفق الموجه بتوجيه تدفق الجزء الساكن للحصول على استقلالية بين  $I_{qs}$  و  $I_{ds}$   
في النهاية درسنا تقنية التحكم ال كى جي من أجل تحسين اداء تقنية التدفق الموجه

## كلمات مفتاحية:

محرك تزامني - ال كى جي - تقنية التدفق الموجه

## Résumé :

Ce travail a pour but l'étude et la commande d'une machine synchrone à aimant permanent

On a étudié la technique de la commande vectorielle par orientation du flux statorique à la MSAP pour assurer un découplage entre  $I_{ds}$  et  $I_{qs}$

Finalement en étude la commande LQG pour améliorer la commande vectorielle

## Mots clés :

machine synchrone à aimant permanent -MSAP -Commande vectorielle- LQG.

## Abstract :

The aim of this work is the study and control of induction moteur (IM) .

We studied the technique of vector control by stator flux orientation of the IM to ensure decoupling between  $I_{ds}$  and  $I_{qs}$

In the end We studied the control LQG for ameliorated of vector control

## Key words:

induction moteur - IM - Control by Field Oriented - LQG

