



# T H E S E

Présentée à

L'Université de Batna

En vue de l'obtention du diplôme de

## DOCTORAT EN SCIENCES EN ELECTROTECHNIQUE

Option: Machines Electriques

Présentée par

**BENNECIB NEDJOUA**

*Maitre assistante classe A à l'Université de Constantine*  
*Magister en électrotechnique de l'université de Batna*  
*Ingénieur d'état en électrotechnique de l'université de Batna*



## CONTRIBUTION A L'ETUDE D'UNE MACHINE MHD A CONDUCTION EN VUE DE SON EXPLOITATION SUR UN RESEAU ELECTRIQUE



Thèse soutenue le : 13/01/2010 devant le jury :

Mohamed E. H. LATRECHE	Président	Professeur	Univ. Constantine
Rachid ABDESSEMED	Rapporteur	Professeur	Univ. Batna
Fatima Zohra KADID	Co Rapporteur	Maître de Conférences	Univ. Batna
Abdelhamid BENAKCHA	Examineur	Maître de Conférences	Univ. Biskra
Djallel KERDOUN	Examineur	Maître de Conférences	Univ. Constantine

Said DRID

Examineur

Maître de Conférences Univ. Batna

*Respectfully dedicated to  
The loving memory of my father  
Bennecib Hamid*

*A Mohammed Lazhar*

## **REMERCIEMENTS**

Mes premiers remerciements vont au Professeur ABDESSEMED qui a dirigé mon travail en m'accordant toute sa confiance. J'ai la chance d'avoir été encadré par une personne toujours disponible, qui m'a fait partager sa curiosité et sa rigueur scientifique. J'ai bénéficié de son soutien même dans les moments difficiles. Pour tout cela, je tiens à lui exprimer ma sincère reconnaissance.

J'adresse mes remerciements au Docteur DRID pour son apport précieux à ce travail et pour l'aide efficace qu'il m'a apportée dans le domaine de la modélisation.

Je tiens à remercier très sincèrement mon maître de stage, Monsieur MATAGNE, pour son bon accueil à LEI et de m'avoir donné, durant mon stage, ses conseils pédagogiques et apporté son aide scientifique indispensable à son excellent déroulement. Je le remercie aussi pour la grande confiance et autonomie qu'il a bien voulu me laisser dans la conduite de mes recherches et l'exécution de mes travaux.

J'adresse également tous mes remerciements au Professeur DEHEZ pour m'avoir suivie, permis de devenir opérationnelle sur l'outil COMSOL multiphysics et pour le temps qu'il m'a consacré.

Je suis reconnaissante aux membres de jury d'avoir accepté la participation à la soutenance de thèse malgré les répercussions sur l'emploi du temps de certains.

Et enfin le dernier remerciement ira à ma très chère mère qui a cru en moi, mes sœurs et mes frères plus particulièrement *MUSTAPHA* et *AMEL* qui m'ont soutenu et aidé durant de si longues années et sans qui ni moi ni

cette étude ne serions ce que nous sommes, mes beaux frères, mes belles sœurs, mes neveux et mes nièces ainsi que tous mes ami(e)s particulièrement *Boubakeur Leila* et *Rouabah Zineb*.

## TABLE DES MATIERES

<b>Introduction générale</b> .....	8
<b>Chapitre 1 Etat de l'art de la magnétohydrodynamique</b> .....	<b>11</b>
1.1 Principe de la propulsion MHD .....	13
1.2 La propulsion navale .....	15
1.3 Les applications à la métallurgie.....	17
a- Magnétohydrodynamique des fours à induction .....	17
b- Mesure de débit de coulées de métaux en fusion .....	18
c- Pompage des métaux liquides .....	19
1- Les pompes à conduction .....	19
2- Les pompes à induction .....	19
d- Automatisation des coulées .....	20
e- Brassage électromagnétique .....	20
1.4 Les générateurs MHD .....	20
1.4-a Les générateurs à conduction .....	21
1.4-b Les générateurs à induction .....	22
1.4.1 Les générateurs MHD thermo acoustique .....	23
1.5 La cogénération .....	25
1.6 Application biomédicale (micro pompe) .....	26
1.7 Application astrophysique et géophysique .....	27
1.8 Etude comparative entre le moteur à courant continu et la pompe MHD à conduction .....	29
1.9 Réactions électrochimiques .....	29
1.10 Conclusion .....	32
Bibliographie .....	33

<b>Chapitre 2 Formulation mathématique des phénomènes</b>	<b>36</b>
<b>Electromagnétique et hydrodynamique</b>	
2.1 Notions fondamentales en électromagnétique	36
2.1.1 Equations de Maxwell	36
a- Equation de Maxwell Gauss	37
b- Equation de Maxwell- Faraday	37
c- Equation de conservation du flux magnétique	38
d- Equation de Maxwell Ampère	38
2.1.2 Hypothèses simplificatrices	40
2.1.3 Formulation électromagnétique	40
a – Modèle magnétodynamique	40
2.2 Equations de l’hydrodynamique	42
2.2.1 Formulation vectorielle	42
a – Equation de Navier stokes	43
b – Equation de continuité	43
2.3 Modèle cylindrique axisymétrique en électromagnétisme et en hydrodynamique	44
2.3.1 Problème électromagnétique	44
2.3.2 Problème hydrodynamique	45
2.3.3 Méthode de résolution $\psi - \xi$	46
2.3.4 Le terme de couplage	48
2.4 Conclusion	49
Bibliographie	50
<b>Chapitre 3 Modélisation 2D des phénomènes électromagnétique et hydrodynamique</b>	<b>51</b>

3.1 Différentes techniques de résolution des équations aux dérivées partielles.....	55
3.1.1 Principe de la méthode des volumes finis .....	59
3.2 Etude des modèles électromagnétique et hydrodynamique .....	60
3.2.1 Discrétisation du modèle électromagnétique .....	60
3.2.2 Discrétisation du modèle hydrodynamique .....	61
3.2.3 Algorithme de couplage des deux modèles .....	62
3.3 Conclusion .....	66
Bibliographie .....	67
<b>Chapitre 4 Résultats et interprétation .....</b>	<b>70</b>
4.1 Description générale du prototype MHD à conduction .....	70
4.2 L'influence de la longueur de l'électrode sur les performances de la pompe .....	72
4.2.1 La représentation du potentiel vecteur magnétique .....	72
4.2.2 Représentation de la force MHD .....	74
4.3 Influence du rayon du canal sur les performances de la pompe .....	77
4.3.1 Représentation de la force MHD .....	77
4.4 La géométrie finale de la pompe MHD à conduction .....	79
4.5 Distribution du potentiel vecteur magnétique .....	80
4.6 Représentation de la vitesse pour les 3 longueurs d'électrode L1, L2 et L3 .....	82
4.7 Représentation de la vitesse pour la pompe MHD à conduction .....	84
4.8 Distribution de la vitesse et de la vorticité pour la pompe MHD .....	87
4.9 Distribution de la pression pour la pompe MHD .....	88
4.10 La relation entre la force MHD et la vitesse d'écoulement .....	89

4.11 Conclusion .....	91
Bibliographie .....	92
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>94</b>
<b>Annexes .....</b>	<b>96</b>



## NOMENCLATURE

Symbole latin	Unité	Description
A	A/m	Potentiel magnétique
$\bar{a}$	m/s <sup>2</sup>	L'accélération
B	Tesla	Densité du flux magnétique
D	C/m <sup>2</sup>	Induction électrique (déplacement électrique)
E	V/m	Champ électrique
F <sub>i</sub>	Newton (N)	Forces exercées sur l'objet
F <sub>z</sub> , F <sub>MHD</sub>	N/m <sup>3</sup>	Force volumique de Lorentz
H	Amp/m	Intensité du champ magnétique
I	Amp	Courant électrique
L	m	Longueur du canal
L <sub>a</sub> (L1, L2, L3)	m	Longueurs de l'électrode
r	m	Rayon du canal
M <sub>a</sub>	-	Le nombre de Mach
T	Sec	Temps
u <sub>r</sub>	m/sec	La composante de la vitesse suivant (Or)
V, v	m/sec	La vitesse de l'écoulement
v <sub>z</sub>	m/sec	La composante de la vitesse suivant (Oz)

U	Volts	Le potentiel scalaire électrique
$U_r = u_r$	m/s	Composante cylindrique radiale de la vitesse V
$U_z = v_z$	m/s	Composante cylindrique axiale de la vitesse V
$\vec{J}_i$	A/m <sup>2</sup>	La densité des courants induits
$\vec{J}_a$	A/m <sup>2</sup>	La densité des courants injectés par les électrodes
$\vec{J}_{ex}$	A/m <sup>2</sup>	La densité des courants d'excitation (source)
$\vec{J}_c$	A/m <sup>2</sup>	La densité de courant de conduction électrique

Symbole latin	Unité	Description
$\mu$	Pa-sec	Viscosité du fluide
$\sigma$	Amp/volt/m	Conductivité électrique
$\rho$	Kg/m <sup>3</sup>	Densité
$\mu_0$	N/A <sup>2</sup>	Perméabilité du vide, $4\pi \cdot 10^{-7}$
$\mu_r$	-	Perméabilité relative
$\omega$	1/s	La composante du vecteur tourbillon suivant le vecteur unitaire $\vec{k}$

		0
$\varepsilon$	F/m	Permittivité électrique
$\varepsilon_0$	F/m	Permittivité électrique du vide
$\varepsilon_r$	F/m	Permittivité relative
$\nu$	m <sup>2</sup> /s	Viscosité cinématique du fluide
$\varphi$		L'angle du système de coordonnées cylindriques
$\xi$		Le terme vorticité
$\psi$		Fonction de courant
$\vec{\Omega}$		Vecteur tourbillon
$\beta_i$		Base de fonctions de projection

Abréviation	Description
MHD	Magnétohydrodynamique
DC	Courant continu
MATLAB	'Matrix laboratory' : langage de programmation
P.D.E	'partial differential equations'
FLUENT/UNS	Logiciel de modélisation en mécanique des fluides intégré dans le logiciel ANSYS
DCPMHD	Pompe magnétohydrodynamique à conduction

## **INTRODUCTION GENERALE**

Partant du constat de l'accroissement de la demande d'électricité, de la hausse des prix pétroliers et des incidents survenus dans certaines centrales, ainsi que l'orientation de la direction de la recherche vers la miniaturisation et l'automatisation plus poussées, les chercheurs font recours à d'autres technologies telle que la magnétohydrodynamique (MHD) pour répondre à ces besoins de plus en plus croissants.

Pour la production d'électricité par des générateurs MHD qui a été l'activité la plus importante dans ce domaine. Les chercheurs ont largement participé à ce mouvement au cours des années 60 avant d'abandonner ce secteur pour cause de fortes températures mis en jeu (à cette époque, aucun métal ne pourrait supporter une telle chaleur).

L'intérêt de ce procédé réside essentiellement dans le rendement qui a priori est très élevé, car le principe MHD supprime deux étapes intermédiaires pleines d'irrécusabilités et croqueuses de rendement : la production de vapeur d'eau et la mise en rotation de turbines.

Un générateur MHD d'électricité est connectable à un réacteur nucléaire à fission, en pompant le liquide de refroidissement du réacteur à travers le convertisseur MHD et avant un échangeur de chaleur, peut atteindre un rendement estimé à 60 %.

En plus, les températures de combustion élevées permettent de diminuer les résidus polluants de 90 %. L'accroissement de la conductibilité du fluide par un ensemencement au potassium permet alternativement de lier chimiquement cette substance avec les sulfures du charbon, réduisant les

émissions de dioxyde de soufre de 99 %, et rendant l'utilisation de filtre superflu. La restriction d'oxygène dans le brûleur permet en outre de réduire les oxydes d'azote, alors que ces derniers sont finalement décomposés par la forte chute de température lors de la conversion MHD entre l'entrée et la sortie de la tuyère. Enfin, l'azote généré en quantité peut être récupéré pour servir à la fabrication de fertilisants agricole.

Depuis que le problème de matériaux et alliages a été résolu, la MHD s'est développée et diversifiée, la poursuite des recherches a permis l'intégration de la MHD dans plusieurs domaines tels que la métallurgie. Parmi les méthodes de brassage utilisées dans l'industrie, on peut citer le brassage par injection de gaz, le brassage mécanique et le brassage électromagnétique. Les deux premières techniques d'agitations sont intrusives comparées au brassage électromagnétique qui lui, permet d'agir à distance sur la charge sans contact matériel.

Les pompes électromagnétiques et les valves de commande basées sur des principes de la magnétohydrodynamique ont montré une fiabilité très intéressante dans la métallurgie et la micro fluidique (micro pompe) pour transférer le fluide électriquement conducteur.

Par ailleurs, la MHD a permis de développer une technique nouvelle permettant de bouger des composants ioniques en présence à la fois de champs magnétique et électrique tout en contrôlant les petits volumes avec une grande précision qui représente une importance cruciale pour la micro fluidique.

Ces pompes MHD sont conçues dans le but de n'avoir aucune partie mobile et sont ainsi exemptes de problèmes d'usure et de fatigue provoqués par la basse pression à travers les pièces mécaniques.

Comparées à d'autres types de pompes non mécaniques, les pompes magnétohydrodynamiques montrent plusieurs avantages ; à savoir la simplicité de fabrication, des forces continues de pompage.

Dans le domaine militaire, on voit apparaître à partir des années 80 des travaux touchant à la perfection des sous marins à l'aide de la MHD qui permet la suppression de l'hélice et de toutes les pièces mécaniques associées en rotation. De cette absence, résulte la disparition de vibrations dues aux moteurs de propulsion, aux lignes d'arbres d'hélice et de la cavitation entraînée par les hélices afin d'éviter le repérage par les sonars. Les calculs menés ont montré que ce type de propulsion permet des vitesses élevées et des rendements comparables à ceux des modes de propulsion conventionnels.

Le travail exposé dans ce mémoire s'articule autour de 4 chapitres principaux. Dans le premier chapitre, nous présentons l'état de l'art de la magnétohydrodynamique.

Des bases théoriques nécessaires à la compréhension des phénomènes électromagnétique et hydrodynamique intervenant dans le cadre de notre étude sont l'objet du deuxième chapitre.

Une analyse des modèles magnétohydrodynamique et hydrodynamique (2D) de la pompe MHD à conduction est aussi abordée.

Le chapitre trois est consacré à la modélisation des phénomènes électromagnétiques et hydrodynamiques. Il s'agit de développer le modèle 2D par la méthode des volumes finis.

Le quatrième chapitre qui est l'objet de prédiction des caractéristiques électromagnétiques et hydrodynamiques et leurs interprétations.

Le travail présenté dans ce mémoire vise à caractériser la nouvelle configuration de la pompe MHD à conduction proposée.

La conclusion générale présentée à la fin de cette thèse fait le bilan du travail effectué tout en mettant en évidence les points cruciaux, ainsi que les perspectives envisagées.

# **CHAPITRE 1**

## **CHAPITRE 1**

### **ETAT DE L'ART DE LA MAGNETOHYDRODYNAMIQUE (MHD)**

Il y a aujourd'hui un peu plus de cent quatre-vingt ans, le danois Christian Oersted découvrait l'existence du champ magnétique créé par un courant électrique.

Peu après, l'anglais Michael Faraday mettait en évidence le phénomène réciproque : une variation de champ magnétique induit un courant dans un conducteur.

Or, le magnétisme se caractérise essentiellement par des forces d'attraction ou de répulsion, donc, en fait, par des mouvements. Du coup, le courant électrique, se trouvant associé au champ magnétique, devenait lui aussi capable de créer des forces et des déplacements : l'invention des moteurs électriques et des dispositifs électromécaniques allait suivre les découvertes d'Oersted et de Faraday. Réciproquement, la dynamo due à Gramme permettait de transformer le mouvement en courant électrique.

La (MHD) constitue l'exemple le plus spectaculaire et le plus récent de fluides conducteurs, c'est l'étude du mouvement d'un fluide conducteur en présence d'un champ magnétique.

La MHD telle qu'elle est enseignée est une discipline, au même titre que la thermodynamique, c'est-à-dire un ensemble d'équations et de modèles.

Le physicien suédois Hannes Alfvén fut le premier à employer le terme magnétohydrodynamique en 1942. Il reçut le prix Nobel de physique en 1970 pour ses travaux sur le sujet.

La question qui se pose : pourquoi la MHD ? Parce que c'est à partir de celle-ci qu'on peut définir et identifier les notions de base sur les systèmes de propulsion originaux. Le principe de propulsion est donc très simple.



Les premières études sur la propulsion MHD en milieu océanique datent de la fin des années 1950 aux Etats-Unis. En 1958 l'ingénieur Stewart Way, du département R&D de Westinghouse à Pittsburgh, publie un premier rapport officiel sur le sujet. En 1961, Warren A. Rice dépose le premier brevet [1], en parallèle aux travaux des américains James B. Friauf et O. M. Philips [2], [3]. Un second rapport de Stewart Way est publié en 1964 par l'ASME (American Society of Mechanical Engineers). En 1966, S. Way teste avec succès le premier modèle réduit de sous-marin à propulsion MHD muni de deux électrodes, long de 3 mètres et pesant 400 kilos, dans la baie de Santa Barbara en Californie. Ces recherches sont stoppées durant la décennie suivante, à cause de l'impossibilité de fabriquer les bobines produisant de très forts champs magnétiques nécessaires à un rendement MHD correct. Les Soviétiques continuent cependant les recherches militaires sur la propulsion MHD des sous-marins, afin de rendre ceux-ci silencieux et donc furtifs.

La disponibilité d'électroaimants supraconducteurs, capables de produire les champs magnétiques nécessaires (plusieurs teslas), relance ensuite ces études. Aux USA, celles-ci sont destinées en priorité aux sous-marins de l'US Navy. Dans les années 1990, l'Université de Pennsylvanie mène des expériences au FBNML (*Francis Bitter National Magnet Laboratory*) du MIT (Massachusetts Institute of Technology) en circuit fermé une configuration hélicoïdale, et obtient des vitesses d'écoulement de 3,7 mètres par seconde et un rendement de 10 % avec un champ magnétique de 8 teslas. En parallèle à ces recherches universitaires, l'US Navy ne commente pas les éventuelles réalisations effectives, mais publie à la même époque plusieurs brevets décrivant des sous-marins à propulsion MHD et à diminution de la traînée par contrôle de la couche limite en poupe.

Les Japonais mènent des recherches civiles sur la propulsion MHD depuis les années 1970. L'université de la marine marchande de Kobé réalise en 1976, sous la direction du physicien Yoshiro Saji, une première maquette

suivie d'une seconde de 3,6 mètres de long pesant 700 kilos en 1979, et envisage à cette époque la future construction d'un brise-glace sans hélices propulsé par MHD [4]. Le premier véritable navire à propulsion MHD, le Yamato 1 (utilisant 12 accélérateurs linéaires de Faraday) navigue pour la première fois en 1992.

La Chine teste également à la fin des années 1990 un prototype de bateau à propulseur MHD hélicoïdal muni d'un électroaimant de 5 teslas, le *HEMS-1*, et entreprend un partenariat avec le Japon pour tester la propulsion MHD en laboratoire avec des champs magnétiques de grande intensité (15 teslas).

En France, le physicien Jean-Pierre Petit du CNRS réalise, à l'IMFM (*Institut de Mécanique des Fluides de Marseille*) en 1976, l'annihilation de la vague d'étrave et de la turbulence de sillage autour d'un profil cylindrique, immergé dans un courant d'eau acidulée dans un champ magnétique de 4 teslas, par les forces de Lorentz en écoulement externe. Dans les années 1990, la Marine nationale passe un contrat avec l'Université Grenoble-1, afin d'effectuer au LEGI (Laboratoire des écoulements géophysiques et industriels) une veille technologique sur la propulsion MHD.

### **1.1 PRINCIPE DE LA PROPULSION MHD**

Une expérience simple à réaliser, une petite barre mobile et un aimant en **U** nous permet de comprendre le phénomène. On peut générer une force « F » (dite de Laplace) à l'aide d'un champ magnétique « B » perpendiculaire à celle-ci ainsi qu'un courant d'intensité « L » lui aussi perpendiculaire aux deux autres vecteurs « F » et « B ». (fig1.1)

Si on inverse le sens du vecteur B, la force F s'inverse aussi.

Ce principe obéit à la règle dite « règle des trois doigts » Ici : « I » représente l'intensité du courant qui traverse le fluide entre les deux électrodes. « B » représente l'intensité du champ magnétique « F » représente la force de Laplace (voir fig.1.2) où le liquide traverse le canal à une longueur 'L', largeur 'l' et une hauteur 'e'

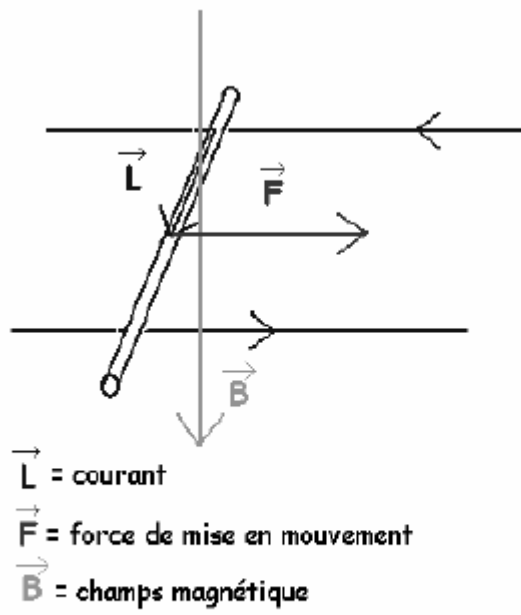


Figure 1.1 Barre mobile sur deux rails parallèles

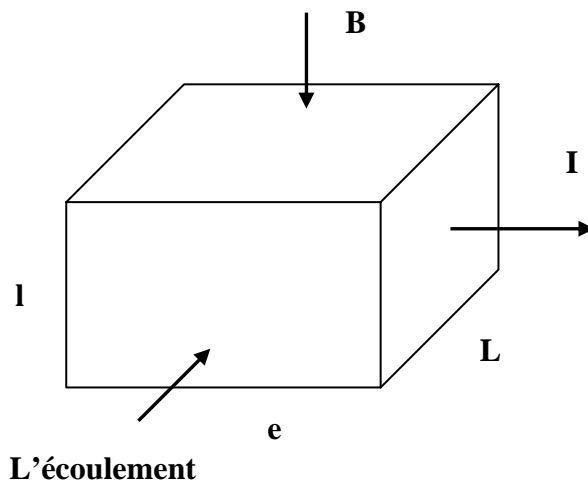


Figure 1.2 Schéma idéal d'une pompe électromagnétique à conduction [5]

Les propriétés MHD peuvent être utilisées soit pour produire de l'énergie électrique ou magnétique soit pour la convertir en énergie cinétique.

Dans le cas de la propulsion MHD par exemple, la force « F » générée est proportionnelle à l'intensité du champ magnétique ainsi qu'à l'intensité du courant circulant dans le fluide.

La propulsion MHD nécessite d'être utilisée à travers un fluide suffisamment conducteur de courant .Elle peut être donc utilisée dans l'eau de mer (qui conduit le courant grâce au sel dissous qu'elle contient) mais aussi dans l'air atmosphérique.

Malgré que l'air soit un isolant, pour le rendre conducteur il suffirait de l'ioniser grâce à de hautes températures ou à l'action de micro – ondes qui le rendrait suffisamment conducteur pour ce système de propulsion. [6]

Actuellement, on la rencontre en astrophysique ainsi que dans quelques applications industrielles comme les pompes qui assurent la circulation du sodium liquide dans les réacteurs nucléaires de type surgénération. [7]

## **1.2 LA PROPULSION NAVALE**

La magnétohydrodynamique (MHD) permet une propulsion directe des navires par réaction en supprimant l'hélice et toute pièce mécanique mobile d'entraînement. L'action combinée dans l'eau de mer, d'un champ magnétique et d'un champ électrique développe un champ de forces électromagnétiques volumiques (force de Laplace Lorentz) que l'on appellera force MHD.

Le **Yamato 1** est un démonstrateur technologique civil japonais de navire à propulsion électromagnétique (utilisant les principes de la magnétohydrodynamique) conçu à partir de 1985 et réalisé au début des années 1990. Il se déplace silencieusement jusqu'à une vitesse de 8 nœuds

(15 Km/h) par réaction et sans hélice, grâce à un accélérateur MHD aspirant à l'avant l'eau de mer, naturellement conductrice de l'électricité, et la rejetant à l'arrière. [8] (fig. 1.3)



Figure 1.3 Le yamato1 dans la baie de KÖBE [8]

Au delà de ces qualités qui en font un concurrent sérieux de l'hélice, ce procédé permettrait d'atteindre de grande vitesse, à condition bien sur que la puissance embarquée soient suffisantes. En fin, une des grandes qualités demandées aux sous-marins modernes est la discrétion. Il est clair que la suppression des pièces mécaniques mobiles est un gage indiscutable de grands progrès dans ce domaine. [9]

Une autre application de l'électromagnétique et de la MHD en hydrodynamique navale, est le contrôle électromagnétique d'écoulement (CEM) qui s'envisage dans le contexte de l'hydrodynamique navale en utilisant les propriétés de conductivité électrique apparente de l'eau de mer (électrolyte). En effet, au cœur d'une solution saline, le courant électrique résulte de la migration des ions. Le forçage électromagnétique d'écoulement repose alors sur l'utilisation d'aimants permanents affleurant à la paroi, qui créent un champ magnétique, et d'électrodes de paroi, qui sont source de

courants électriques. L'interaction, dans le fluide conducteur en mouvement, du champ magnétique et des courants électriques crée des forces électromagnétiques volumiques locales (forces de Lorentz-Laplace, notées FEM). L'ensemble formé d'une paire d'électrodes et d'une paire d'aimants permanents de polarités opposées constitue un **actionneur électromagnétique**. Typiquement les forces développées au sein de l'écoulement sont localisées à proximité de l'actionneur.

Suivant la géométrie relative des électrodes et des aimants, deux familles d'actionneurs EM se distinguent selon l'orientation des électrodes par rapport aux aimants.

Dans le cas où ceux-ci sont parallèles, respectivement perpendiculaires, entres eux, l'actionneur est dit **parallèle** ou **normal**. Cela dit, quelque soit la géométrie étudiée, les lois régissant les forces EM et l'écoulement découlent à la fois des équations de l'électromagnétisme (équations de Maxwell notamment) ainsi que des équations de la mécanique des fluides (équations de Navier-Stokes et conservations). [10]

### **1.3 LES APPLICATIONS A LA METALLURGIE**

#### ***a- Magnétohydrodynamique des fours à induction***

Les fours à induction se composent essentiellement d'une bobine inductrice refroidie par circulation d'eau, entourant un creuset dans lequel se trouve la masse métallique à fondre et à traiter [11].

L'utilisation des champs magnétiques alternatifs dans les fours à induction s'est considérablement développée ces dernières années dans les domaines de l'élaboration et le traitement des métaux. En effet ce type de champ magnétique offre la possibilité d'agir à distance et de façon contrôlée sur un fluide électro conducteur. [12]

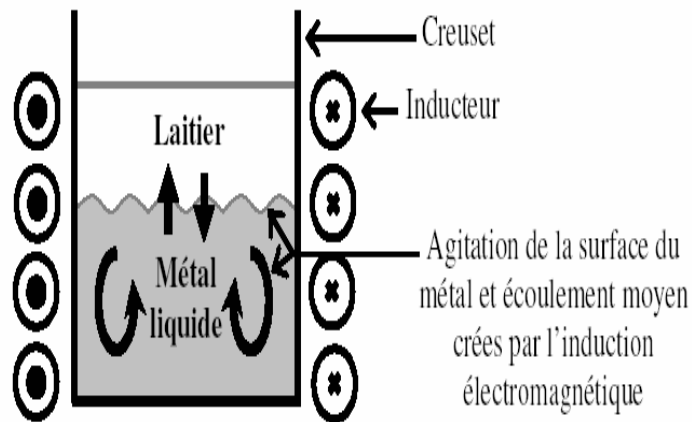


Figure 1.4 : Schéma de principe du procédé électromagnétique utilisant un champ magnétique alternatif [11]

#### b- **Mesure de débit de coulées de métaux en fusion**

La méthode de mesure avec électrode consiste à placer des électrodes dans une direction perpendiculaire au plan défini par le champ magnétique appliqué orthogonalement à la vitesse du fluide et celle-ci, et à mesurer la différence de potentiel qui est liée à la vitesse.

Les expériences faites en laboratoire ainsi que les mesures effectuées montrent que les méthodes utilisées sont tout à fait valable à titre d'exemple celle où la pompe MHD a été enfoncée dans des échangeurs de chaleur pour mesurer la différence de pression hydrostatique  $\Delta h$ . Ils ont utilisé le gallium (Ga) comme fluide fonctionnel parce que sa température de fusion est basse (de l'ordre de 29.8 °C) et il est non toxique. fig.1.5 [13]

Les méthodes de mesure sans électrodes sont basées sur l'entraînement par le fluide en mouvement d'un courant appliqué qui provoque une réaction magnétique mesurable.

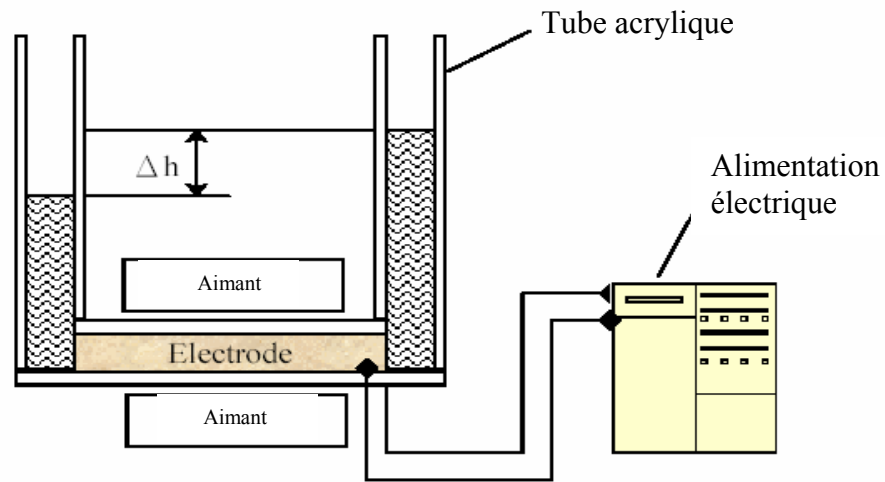


Figure1.5 Schéma d'une structure de base pour mesurer la différence de pression hydrostatique utilisant la pompe MHD à conduction [13]

### ***c- Pompage des métaux liquides***

On distingue actuellement deux types de pompes :

- 1- les pompes à conduction dont le principe sont l'accélération du fluide par les forces de Laplace produites par action d'un champ magnétique généralement uniforme sur un courant injecté dans le métal. Les avantages principaux de ces pompes sont leur capacité et leur habilité à supporter les hautes températures sans refroidissement, grâce à des bobinages en argent ;
- 2- les pompes à induction : le courant qui traverse le fluide est ici induit par un champ magnétique variable dans le temps (selon la loi de Lenz), sans électrode. L'aluminium et le sodium qui ont une conductivité électrique élevée sont les plus aptes à ce genre de pompage qui est utilisé dans le réacteur surgénérateur et dans la métallurgie de ces métaux [14]. Le rendement de ces machines est de l'ordre de 20% à 40%.



#### **d- Automatisation des coulées**

La MHD permet d'automatiser les coulées du métal fondu en agissant sur les paramètres magnétiques et ainsi autoriser en continu la surveillance du débit, de la vitesse, de la forme des jets de métal, etc., en fonction des impératifs de la production. [11]

#### **e- Brassage électromagnétique**

Les brasseurs électromagnétiques, tout comme les pompes électromagnétiques, ont la particularité de ne pas posséder de partie mobile. Par brassage, ils entraînent l'élimination de bulles, de saletés et aussi du mélange (par turbulence) lors de réactions métallurgiques (fabrication d'alliages).

Cette méthode permet d'obtenir une amélioration importante de la finesse de grain des produits obtenus.

### **1.4 LES GENERATEURS MHD**

La conversion d'énergie thermique en énergie mécanique étant réalisée, l'accélération du fluide par la détente d'un gaz, on s'intéresse à la conversion d'énergie mécanique en énergie électrique, c'est le principe magnétohydrodynamique appliqué dans la partie génératrice.

Donc, la production d'électricité par la magnétohydrodynamique est un processus où l'énergie thermique est directement convertie en énergie électrique.

Autrement dit, le remplacement du fluide conducteur (l'eau de mer) par un gaz conducteur à très grande vitesse dans un champ magnétique intense a transformé rapidement l'idée de FARADAY en générateur électrique dans lequel les pièces tournantes sont remplacées par un fluide conducteur et pour lequel les prévisions théoriques de rendement sont très élevées (= 60%), le générateur peut être de deux types, à conduction ou à induction.

On distingue deux grandes classes de générateurs MHD :

### **a. les générateurs à conduction**

Un générateur MHD (magnétohydrodynamique) est un convertisseur MHD qui transforme l'énergie cinétique d'un fluide conducteur directement en électricité.

Le principe de base est fondamentalement le même que pour n'importe quel générateur électrique classique. Il nécessite la présence d'électrodes au contact du fluide et le courant continu est alors délivré à basse tension et forte intensité.

Les deux types de générateur utilisent un inducteur (électroaimant ou aimant permanent) générant un champ magnétique dans un induit ou canal. [15], [16]

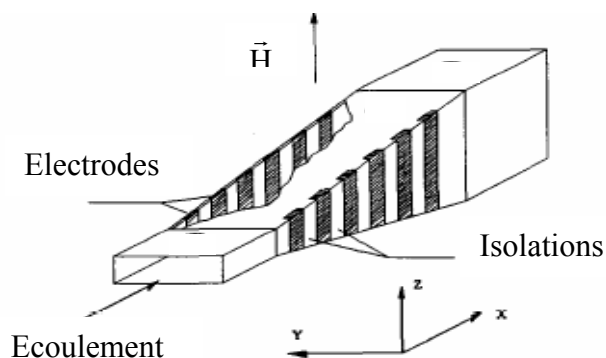


Figure 1.6. Croquis de base d'un générateur MHD à conduction [16]

Actuellement, les japonais ont pu concevoir une nouvelle génératrice magnétohydrodynamique à l'eau de mer avec un aimant supraconducteur de 7 T, (fig.1.7) [17]

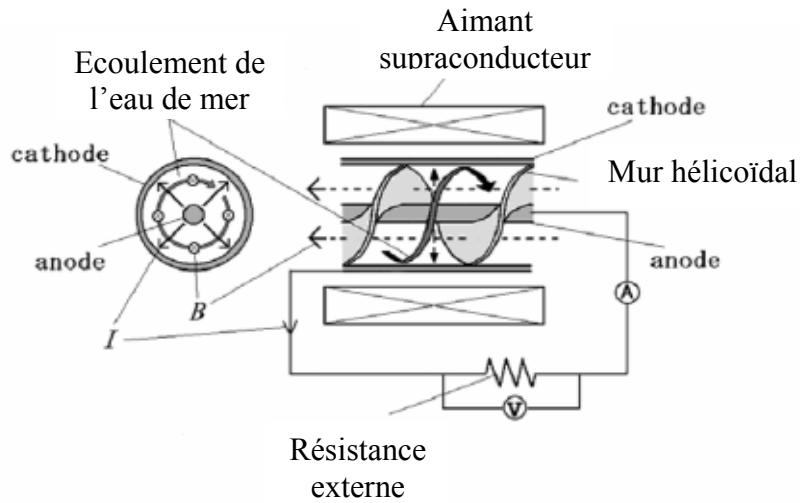


Figure 1.7 Principe d'un générateur MHD à l'eau de mer type hélicoïdal [17]

### b. *les générateurs à induction*

Ce générateur MHD fonctionne sans électrode, avec des champs magnétiques variables.

Le courant électrique est généré à distance par induction sous forme alternative. La tension de sortie peut alors être ajustée à un niveau suffisamment élevé pour pouvoir être utilisée après un minimum de transformations. Le concept est basé sur l'utilisation d'un inducteur à champ magnétique glissant nécessitent un bobinage triphasé analogue à celui des moteurs asynchrones ou linéaires. (Fig.1.8)

Le fonctionnement de la machine est le suivant : si la vitesse de l'écoulement est supérieure à celle du champ glissant, alors les courants induits qui se développent dans le canal créent leur propre champ magnétique déphasé de  $\pi/2$  par rapport au champ inducteur. En balayant les spires du bobinage inducteur, ce champ induit engendre des forces électromotrices susceptibles d'alimenter une charge. Moyennant une

alimentation en puissance réactive obtenue par des capacités, le dispositif délivre de la puissance active. [18]

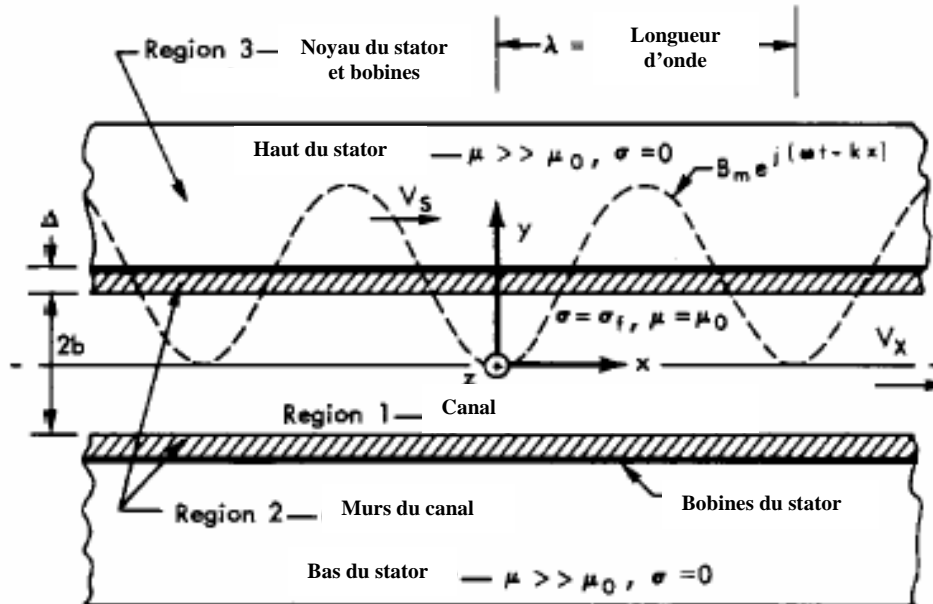


Figure 1.8 Configuration du générateur MHD à induction [18]

Le système décrit ci-dessus est attrayant sur le plan énergétique, il présente aussi un intérêt relatif à sa puissance spécifique (puissance par unité de poids) qui est le véritable critère de choix pour les systèmes spatiaux. Cependant il révèle une certaine complexité de fonctionnement avec une double boucle fluide et un écoulement diphasique qui pourrait être difficile à contrôler. Le système basé sur l'effet thermo acoustique qui est un procédé quasi statique paraît beaucoup plus simple et offre donc a priori une fiabilité plus importante.

#### 1.4.1 **GENERATEURS MHD THERMO ACOUSTIQUES**

Le fondement de ce procédé est basé sur la mise à profit d'onde de compression dans un tube fermé aux extrémités. Ces ondes génèrent un écoulement pulsant de haute fréquence résultant de la compressibilité du

fluide, elles ont donc une amplitude plus importante dans le cas des gaz comparés à la situation des liquides. Ces ondes peuvent être entretenues ou amplifiées par un gradient thermique imposé à l'intérieur du tube. Le rôle du gradient thermique peut être schématiquement compris de la manière suivante : lorsque l'onde atteint en compression la zone haute température le fluide est chauffé, il a tendance à se dilater mais comme il est contenu dans un milieu confiné cet échauffement se traduit par une augmentation de la pression. De même, lorsque l'onde se trouve en dépression dans la partie basse température du système, elle est refroidie ce qui amplifie la dépression. Ainsi un mouvement résultant de la compression/dépression entretenue par un gradient constant de température peut être générée dans une enceinte fermée aux deux extrémités. Ce type de machine est dénommé quelques fois résonateur. ces mouvements qui résultent de la conversion d'énergie thermique en énergie mécanique peuvent être mis à profit pour générer du courant électrique par interaction avec le champ magnétique délivré par un inducteur.

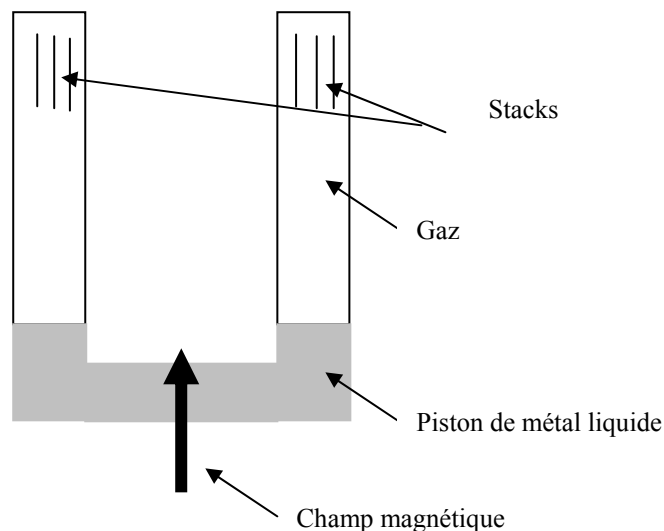


Figure 1.9 : Schéma d'une option possible pour le système thermo acoustique [19]

Le fluide thermodynamique est un gaz qui fournit un mouvement oscillant à un piston de métal liquide dans le système MHD

Sur ces principes généraux plusieurs options peuvent être définies :  
 Par exemple la machine peut être constituée de deux résonateurs fonctionnant avec un gaz et délivrant un mouvement oscillant à un piston constitué par un métal liquide qui convertit le mouvement en énergie électrique (Fig.1.9). Ce type de machine peut être considéré sous certains aspects comme un générateur de Faraday à métal gaz. [19]

### 1.5 LA COGENERATION

Elle consiste à produire, à partir d'une énergie primaire combustible, deux énergies secondaires utilisables : une énergie mécanique ou électrique et une énergie thermique.

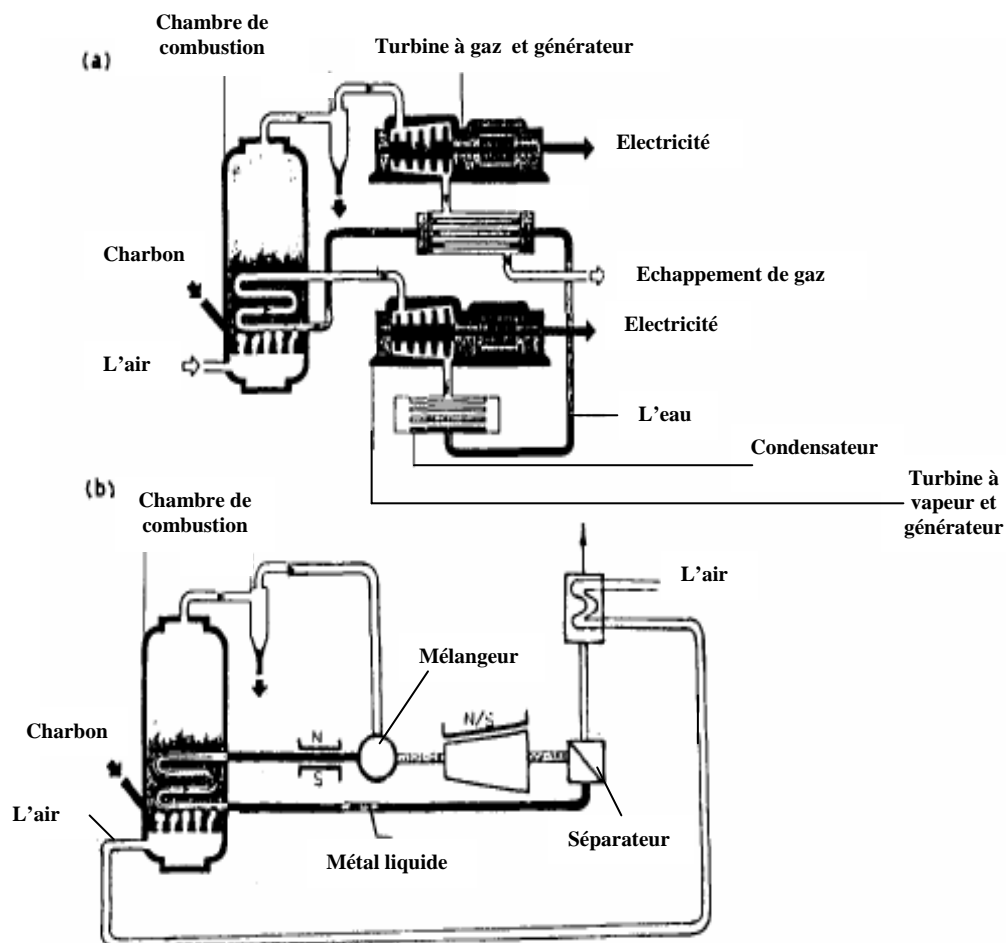


Figure 1.9. Schéma d'une centrale combinée de PFBC-LMMHD comportant un cycle ouvert et utilisant des fumées comme un fluide fonctionnel en thermodynamique (b) en comparaison d'un PFBC conventionnel (a) [7]

Cette cogénération semble être une application intéressante de la technologie du générateur MHD ; elle permet de concevoir des systèmes relativement simples de la conversion d'énergie (EC). Cette simplicité est caractérisée par l'utilisation d'un générateur MHD à métal liquide (LM MHD) et un nombre relativement moins d'étapes d'expansion de vapeur (les centrales à MHD sont susceptibles de bénéficier de l'incorporation d'une turbine à vapeur basse pression) [7]

### 1.6 APPLICATION BIO MEDICAL (MICRO POMPE)

La MHD a permis de développer une technique nouvelle permettant de bouger des espèces ioniques en présence à la fois de champs magnétique et électrique. Les micros pompes MHD contrôlent le flux à l'intérieur du système micro fluïdique en générant une différence de pression le long du micro canal, proportionnelle à l'intensité du courant électrique et au champ magnétique. Pomper des solutions électrolytiques avec la MHD implique la génération de courants continus (DC) dans tels environnements.

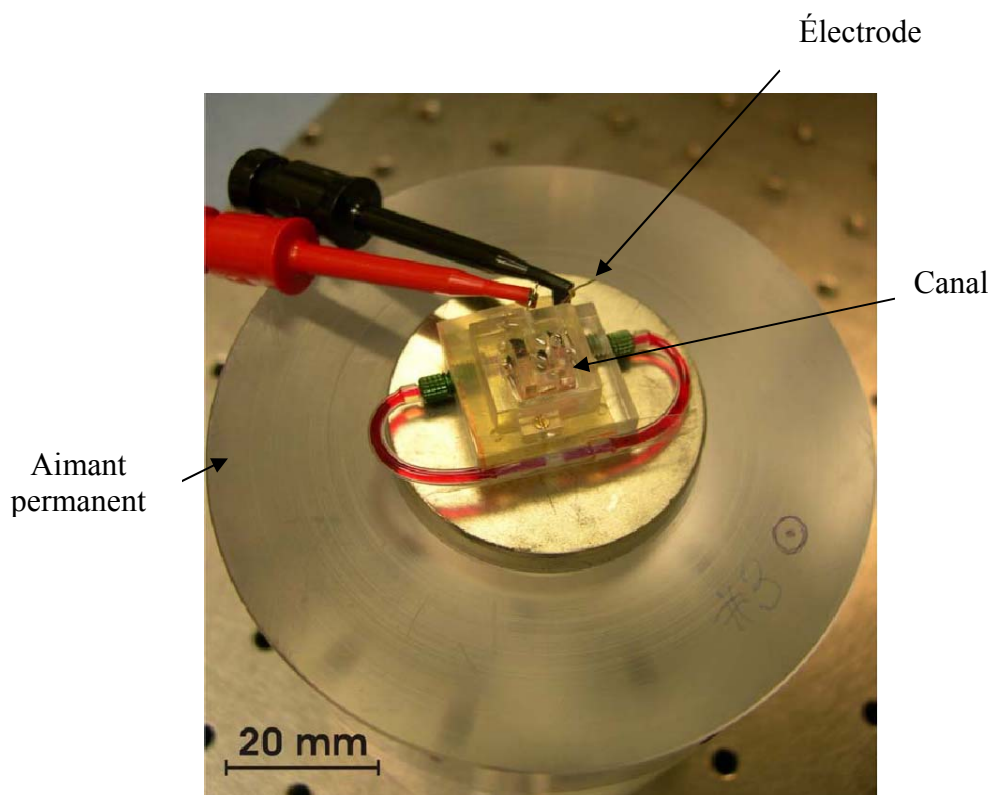


Figure 1.10 Vue en dessus d'une micro pompe à conduction (à aimant permanent de NdFeB de 40 mm de diamètre [20])

Un nouveau système micro fluidique compatible avec la détection RMN (résonance magnétique nucléaire) a été développé par le groupe de design de microsystèmes (IMM-LMIS3) à l'EPFL (suisse) [20].

Autre application plus possible serait les appareils médicaux tels que les pompes d'infusion ou le coeur artificiel. Dans ce contexte, une nouvelle structure du MFLP (magnetic fluid linear pump) a été conçue pour séparer le liquide du fluide magnétique lors du pompage, ainsi il est possible de pomper les matériaux non magnétiques et non conducteurs. [21], [22]

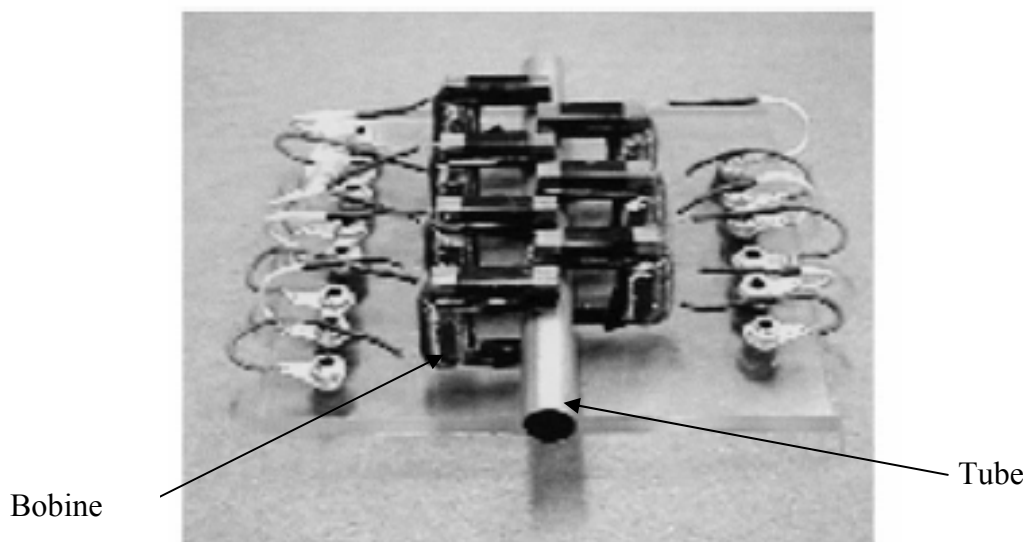


Figure 1.10 MFLP fabriqué [21]

### **1.7 APPLICATION ASTROPHYSIQUE ET GEOPHYSIQUE**

La circulation induite par des mouvements convectifs radiaux créés dans le noyau est à l'origine du magnétisme terrestre ; on a en effet couplage entre le champ magnétique créé par le mouvement du fluide conducteur et l'entraînement de ce fluide par lui-même (effet dynamo).



Depuis que cela a été vérifié, le mécanisme d'une instabilité dynamo dite "l'effet dynamo fluide" est couramment admis pour expliquer la présence de champ magnétique sur Terre. [23] Donc l'étude des mouvements du plasma magnétisé de la couronne solaire est assurée par la MHD.

Certains phénomènes propres à l'intersection de l'électromagnétisme et de la mécanique des fluides peuvent être reproduits à l'échelle du laboratoire. C'est le cas par exemple de l'effet dynamo.

L'effet dynamo dont les mécanismes de base peuvent être décrits au moins d'une manière qualitative étaient jusqu'à ces dernières années cantonné à des études théoriques plus au moins complexes basées pour la plupart sur des modèles cinématiques supposant le champ de vitesse imposé et introduit dans l'équation de l'induction pour déterminer au moins le seuil d'auto-excitation. Depuis peu, de grands programmes expérimentaux se font jour, notamment en France, en Allemagne, aux USA, en Russie et en Lettonie dont l'objectif est de reproduire le phénomène dynamo par des installations basées sur l'utilisation du sodium liquide. Le sodium est en effet un excellent candidat pour de telles expérimentations du fait de son excellente conductivité électrique, de sa faible masse volumique et de son point de fusion relativement bas. De plus sa technologie a fait d'énormes progrès sous l'impulsion des programmes nucléaires, notamment français, liés aux réacteurs à neutrons rapides. Ainsi les Lettons (Institut de physique de l'Université de Lettonie, IPUL) ont été les premiers au monde, en novembre 1999, à atteindre les conditions critiques sur une expérience reproduisant en premier abord la dynamo de Ponomarenko. Un mois plus tard, sur le concept de dynamo de Roberts, les allemands de Karlsruhe atteignaient également le seuil critique. Ces deux installations souffrent néanmoins de handicap d'être quasiment conçues sur le concept des modèles cinématiques, c'est-à-dire que l'écoulement est imposé et ne peut être modifié par le champ magnétique. Un programme plus ambitieux de dynamo de deuxième génération permettant de reproduire les interactions non linéaires entre champ magnétique et hydrodynamique est en gestation dans une géométrie plus proche de la dynamo terrestre prenant notamment en

compte la force de Coriolis. Ce programme est regroupé sous le nom du grand physicien français, AMPERE.

### **1.8 ETUDE COMPARATIVE ENTRE LE MOTEUR A COURANT CONTINU ET LA POMPE MHD A CONDUCTION**

Le principe de base de la pompe MHD à conduction est le même que celui d'un moteur électrique. Tous deux possèdent un inducteur (électroaimant) générant un champ magnétique dans l'induit.

Dans le cas d'un moteur conventionnel, l'induit est solide (c'est une bobine constituée d'un enroulement de fil métallique).

Dans le cas d'une pompe MHD à conduction, cet induit est fluide (liquide conducteur : eau salée, métal liquide).

La pompe MHD à conduction n'utilise donc pas de pièce mécanique mobile, contrairement aux moteurs électriques traditionnels, et elle convertit directement l'énergie électromagnétique en énergie cinétique. Le fluide est mis en mouvement dans le champ magnétique par un champ électrique débitant un courant électrique aux bornes d'électrodes immergées dans le fluide.

### **1.9 REACTIONS ELECTROCHIMIQUES**

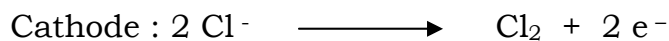
Dans le cas de la conduction, la pompe MHD est le lieu d'une électrolyse de l'eau de mer. Cette électrolyse se traduit par des pertes électriques dues à la tension d'électrolyse et par un dégagement gazeux.

Les équations d'électrolyses possibles (du fait des concentrations des éléments constitutifs de l'eau de mer, voir tableau 1) aux anodes et aux cathodes sont les suivantes :

<b>Composant</b>	<b>Concentration (g/kg)</b>
Cl	19.353
Na	10.76
SO <sub>4</sub>	2.712

Mg	1.294
Ca	0.413
K	0.387
HCO <sub>3</sub>	0.142
Br	0.067
Sr	0.008
B	0.004
F	0.001

Tableau 1. Sels minéraux contenus dans l'eau de mer



Alors qu'aux cathodes, seul le dégagement d'hydrogène est possible, aux anodes, il peut y avoir émission d'oxygène ou de chlore. Etant donné que la pompe MHD fonctionne à de fortes densités de courant, la réaction prépondérante sera celle conduisant au dégagement de chlore.

Lors de l'électrolyse de l'eau de mer, il y a formation de dépôts sur les électrodes. Ces dépôts ont pour action de rendre le bouclage de la DDP imposée au fluide plus difficile et ainsi de diminuer le rendement de la pompe MHD, mais aussi de diminuer la durée de vie des électrodes. L'un des enjeux techniques de la pompe MHD par conduction est donc de concevoir des électrodes générant le moins de dépôts possible.

Les études ont montré que les meilleurs résultats étaient obtenus pour des anodes en DSE<sub>O2</sub> et des cathodes en Pt/Ti. Nous noterons également que les dépôts sont les plus faibles lorsque la densité de courant parcourant le fluide se situe dans la tranche de 1000 à 2000 A/m<sup>2</sup>, [24].

La chute totale de tension due à l'électrolyse est de l'ordre de 4 à 5 volts (pour un propulseur). Les pertes électriques correspondant sont le produit

de cette chute de tension par le courant total circulant à l'intérieur de la pompe MHD. Nous voyons ici que l'optimisation de la pompe MHD passe par une minimalisation des courants électriques.

Lors de toute réaction d'électrolyse, il y a émission de bulles, selon la loi de Faraday, la quantité de gaz émise par électrolyse est proportionnelle au courant total.

Des calculs ont été menés sur cette base et montrent que pour une pression de l'océan et un débit d'eau de mer passant dans un propulseur, les rapports gaz/liquide sont de l'ordre de

$10^{-4}$  à  $10^{-5}$ . De ce fait il n'y aura pas de diminution de rendement propulsif.

De plus, une modélisation fondée sur l'analyse d'une bulle d'électrolyse isolée se déplaçant dans l'océan au repos montre que les bulles devraient se dissoudre rapidement. Du fait de la faible concentration de ces bulles dans le sillage du navire, il ne devrait donc y avoir ni onde sonore se propageant ni vibration.

## **1.10 CONCLUSION**

Le présent chapitre est dédié à l'état de l'art de la magnétohydrodynamique (MHD) dont l'objectif est de proposer et d'étudier une pompe MHD à conduction destinée à la traction des fluides, entre autres l'eau de mer.

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] W.A.Rice, U.S. patent 2997013, August 12, 1961
- [2] J.B.Friauf, « Electromagnetic ship propulsion » J. of Amer.Soc. Of Naval engrs, Feb. 1960, pp 139-142
- [3] O.M.Phillips, “The prospects for magneto hydrodynamic ship propulsion”, J. of Ship Research, March.1962, pp 43-51
- [4] E.Tada, Y.Saji, K.Kuroshi and T. Fujimaga, “Fundamental Design of a superconducting EMT Icebreaker”, Trans.Imare ©, vol.97, conf.3, paper 6, pp49-57, 1984
- [5] Setsuo Takezawa, Hiroshi Tamam, “Operation of the thruster for superconducting electro-magneto hydrodynamic propulsion ship (YAMATO 1)” Bulletin of the M.E.S.J., Vol.23, No.1, March 1995
- [6] S.L.L. Verardi, A.Passaro, J.M.Machado, Y.Shiyon, “A FEM approach to the equations of Magneto-aero dynamics”, Proceedings of the 6<sup>th</sup> international conference on Advances in power system control, operation and management, APSCOM2003, Hong Kong, November 2003
- [7] H. Branover, A.El boher, E.Greenspan and A.Barak, “Promissing Applications of the Liquid Metal MHD Energy conversion Technology”, Proceedings of the 24<sup>th</sup>Intersociety Energy conversion Engineering, Conf.Washington, D.C, Aug.6-11 1989, pp.1051-1058
- [8] S.Motora, K. Imaichi, M.Nakato, S.Takesawa, “An outline of the R&D project on Superconducting MHD ship propulsion in Japan” MHDs91, Int.Synp. On Superconducting magneto hydrodynamic ship propulsion, Proceedings, pp.53-68, Japan, Oct.1991
- [9] J.P. Thibault, “Seawater magneto hydrodynamic thrusters”, L’onde électrique, 1995
- [10] François Bouillon « Simulations numériques directes du contrôle électromagnétique, étude De l’impact d’un forçage électromagnétique sur un écoulement turbulent en canal Plan » Thèse de doctorat, université Joseph Fourier.Grenoble1,2004
- [11] Bachir Saadi, « Contrôle électromagnétique des transferts de masse aux interfaces liquide/ liquide » Thèse de doctorat, Inst.Nati.Poly. Grenoble, 2006

- [12] Damien Perrier, « Mise en œuvre et caractérisation d'un nouveau procédé électromagnétique destiné à favoriser les transferts de masse aux interfaces entre un métal Liquide et un sel fondu », Thèse de Doctorat, Inst.Nat.Poly. Grenoble, 2002
- [13] Chia-Yuan Chang, « Analysis of Meso-scale Heat Exchangers with magneto-hydrodynamic pumps », thèse de doctorat, National Tsing Hua University, 2004
- [14] Tsutomu Ando, Kazuguki Ueno, Shoji Taniguchi and Toshiyuki Takagi « Induction pump For high-temperature Molten Metals using rotating twisted magnetic field: Molten gallium experiment » IEEE Trans.on Magnetism, vol.40, N°.4, July 2004
- [15] Nedjoudja Bennecib, « Contribution à l'étude des phénomènes d'écoulement dans les générateurs MHD », Thèse de Magister, Université de Batna, 2001
- [16] Alberto Geri, Alessandro Salvini and Giuseppe Maria Veca, «MHD linear generator Modelling», IEEE Trans. On Applied Superconductivity, Vol.5, N°.2, June 1995
- [17] Minoru Takeda, Yasuaki Okuji, Teruhiko Akazawa, Xiaojun Liu and Tsukasa Kiyoshi, «Fundamental studies of Helical- type seawater MHD generation system» IEEE Trans on Applied Superconductivity, vol.15, N°.2, June 2005
- [18] S.J.Dudzinsky, T.C. Wang, «MHD Induction Generator», proceedings of the IEEE, vol.56, N°.9, September 1968
- [19] C.Vogin « Etude d'un générateur thermoacoustique MHD pour une application spatiale » Thèse de doctorat, l'INPG, Décembre 2004
- [20] Alexandra Homisy, « Design, micro fabrication and characterization of MHD pumps and their applications in NMR environments », Thèse de doctorat, Faculté des sciences de l'université de Neuchâtel, Suisse, 2006
- [21] Gwan Soo Park, Kang Seo, «A study on the pumping forces of the magnetic fluid linear Pump», IEEE Trans. On magnetism, vol.39, N°.3, May 2003

- [22] Gwan Soo Park, Kang Seo “New design of the Magnetic fluid linear pump to reduce the Discontinuities of the pumping forces” IEEE Trans. On Magnetics, vol.40, N°.2, March 2004
- [23] M. François Petrèlis, “ Effet Dynamo: Etude des mécanismes d’instabilité et de saturation du champ magnétique », Thèse de doctorat de l’université de Paris 6, 2002
- [24] P.Boissonneau, J.P.Thibault « Experimental analysis of couplings between electrolysis and hydrodynamics in the context of MHD in seawater” J.Phys.D:Appl.phys.32 (1999) 2387-2398. printed in the UK



## **CHAPITRE 2**

## **CHAPITRE 2**

### **FORMULATION MATHÉMATIQUE DES PHÉNOMÈNES ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET HYDRODYNAMIQUE**

Dans ce chapitre, le contenu est principalement consacré à l'analyse du mouvement des liquides électriquement conducteurs en présence des champs électrique et magnétique. La section 2.1 décrit les théories électromagnétiques de base du mécanisme de pompage magnétohydrodynamique, pour cela, on utilise les équations de Maxwell et les lois constitutives du milieu, en déterminant les paramètres électromagnétiques relatifs à chaque problème. La section 2.2 analyse l'écoulement bidimensionnel dans le canal de la pompe MHD à conduction basé sur l'état laminaire du fluide, dans ce contexte, ce sont les équations de Navier Stokes associées aux propriétés du fluide (densité de charge et viscosité dynamique) qui permettent de trouver la variation de la vitesse d'écoulement et de la pression.

Le couplage entre ces deux phénomènes est réalisé par un terme source qui régit par les forces magnétohydrodynamiques.

#### **2.1 NOTIONS FONDAMENTALES EN ÉLECTROMAGNÉTIQUE**

##### **2.1.1 ÉQUATIONS DE MAXWELL**

Afin d'expliquer le principe opérationnel de base des pompes magnétohydrodynamique, la structure schématique de la pompe proposée est montrée dans la figure 2.1.

Elle est constituée d'un circuit magnétique sous forme de tore, deux bobines, quatre électrodes et un canal où circule un fluide supposé incompressible.

Dans la pompe les forces de pompage proviennent des forces de Lorentz induites par l'intermédiaire entre un champ magnétique appliqué et des courants électriques.

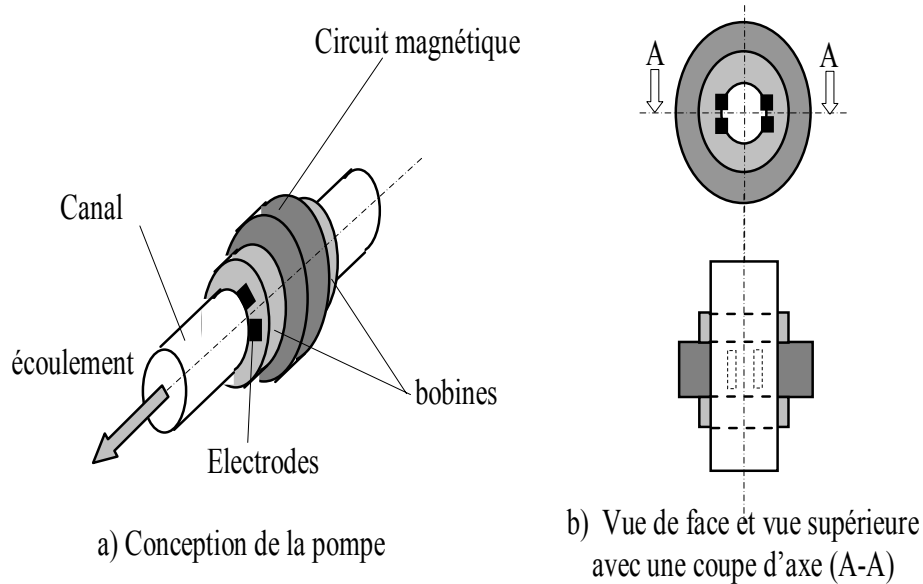


Fig.2.1 Configuration proposée de pompe MHD à conduction [1], [2], [3]

Dans le domaine des machines électriques, les équations de Maxwell ont été intégrées de manière très simplifiée. Sous forme différentielle elles peuvent être décrites comme suit [4], [5], [6] :

**a-EQUATION DE MAXWELL-GAUSS**

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (2.1)$$

Une charge électrique est source d'un champ électrique ; autrement dit, les lignes de champs électriques commencent et se terminent autour des charges électriques [6]

**b-EQUATION DE MAXWELL-FARADAY [3]**

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

Cette équation exprime le couplage électrique- magnétique en régime dynamique et où la variation temporelle de  $\vec{B}$  détermine le  $\text{rot } \vec{E}$ , mais ceci ne suffit pas pour déterminer complètement  $\vec{E}$ .

#### c- **EQUATION DE CONSERVATION DU FLUX MAGNETIQUE**

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

Cette relation traduit mathématiquement le fait que les seules sources de champ magnétique sont les courants électriques, et il n'existe pas de charge magnétique ; c'est pourquoi les lignes du champ sont toujours fermées sur elles-mêmes. Elles forment des boucles. Ces boucles n'ont ni point de départ, ni point d'arrivée, ni point de convergence, d'où la nomination d'induction conservative (champ conservatif). [5]

#### d- **EQUATION DE MAXWELL-AMPERE**

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Cette équation exprime la dépendance du champ magnétique de la densité de courant total (conduction + déplacement). Cette relation peut être interprétée comme étant le taux de la variation spatiale du champ en fonction du taux de mouvement de charges. [4]

Où :

$\vec{D}$  : Vecteur induction électrique (déplacement électrique) [C/m<sup>2</sup>],

$\rho$  : Densité de charge volumique [C/m<sup>3</sup>],

$\vec{E}$  : Vecteur champ électrique [V/m],

$\vec{B}$  : Induction magnétique [T],

$\vec{H}$  : Vecteur champ magnétique [A/m],

$\vec{J}_c$  : Densité de courant de conduction électrique [A/m<sup>2</sup>].

Le terme  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  exprime la densité de courant de déplacement négligeable [A/m<sup>2</sup>].

Pour définir complètement les phénomènes électromagnétiques à l'intérieur d'un milieu, on rajoute les lois de comportement des milieux ainsi que la loi d'ohm généralisée : [4], [5], [6]

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.5)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (2.6)$$

$$\vec{J}_i = \sigma \vec{E} \quad (2.7)$$

Où

$\sigma$  : Conductivité électrique [ $(\Omega.m)^{-1}$ ],

$\mu$  : Perméabilité magnétique [H/m], ( $\mu = \mu_o \cdot \mu_r$ )

$\vec{J}_i$  : Densité des courants induits [A/m<sup>2</sup>],

$\varepsilon$  : Permittivité électrique [F/m]. ( $\varepsilon = \varepsilon_o \cdot \varepsilon_r$ )

A ces équations, doit être associée la loi d'Ohm généralisée :

$$\vec{J}_c = \vec{J}_{ex} + \sigma \vec{E} + \sigma(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (2.8)$$

Où :

$\vec{v}$  : Vecteur vitesse du fluide [m/s],

$\vec{J}_{ex}$  : Densité du courant d'excitation (source) [A/m<sup>2</sup>],

$\sigma \vec{E}$  : Densité des courants induits par variation du champ électrique E [A/m<sup>2</sup>],

$\sigma(\vec{v} \wedge \vec{B})$  : Densité des courants induits par mouvement [A/m<sup>2</sup>].

La loi d'ohm généralisée régit la densité du courant électrique dans un milieu en mouvement soumis à un champ électromagnétique.

D'après les équations de Maxwell et la loi d'Ohm généralisée, il apparaît que le champ magnétique  $\vec{B}$  est une grandeur électromagnétique fondamentale, puisque les autres grandeurs comme  $\vec{E}$  et  $\vec{J}$  s'en déduisent simplement.

Il est possible d'exprimer avec une seule équation, l'évolution du champ magnétique en prenant en compte le champ électrique et la densité du courant.

### **2.1.2 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES**

Pour déterminer le modèle mathématique qui régit les phénomènes électromagnétiques dans la pompe MHD à conduction, certaines hypothèses simplificatrices sont à proposer :

- Les matériaux à utiliser sont à propriétés isotropes donc  $D$  est lié à  $E$ ,  $B$  est lié à  $H$  et la source de courant  $J$  est liée à  $E$  avec la direction du champ dans chaque paire est aligné. [4], [5]
- Les courants de déplacement  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  sont négligés devant  $\vec{J}_c$  et  $r\vec{ot}\vec{H}$  dans le cadre de l'approximation quasi-statique ;
- La densité volumique de charge est considérée nulle

Avec ces simplifications, les équations de Maxwell se réduisent alors au système suivant : [4]

$$\text{div}\vec{D} = 0 \quad (2.9)$$

$$r\vec{ot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.10)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (2.11)$$

$$r\vec{ot}\vec{H} = \vec{J}_c \quad (2.12)$$

$$\vec{J}_i = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (2.13)$$

### **2.1.3 FORMULATION ELECTROMAGNETIQUE**

#### **a - Modèle magnétodynamique**

L'utilisation de ce modèle est très répandue dans l'étude des machines électriques.

Pour le calcul numérique, il existe plusieurs formulations telles que : formulation en  $\vec{B}$  , formulation en  $\vec{A}$  et formulation en  $A^*$  .

Par ailleurs, dans le cadre de la pompe MHD à conduction, on a opté pour la formulation en  $\vec{A}$  dont les avantages présentés par ce type de formulation sont nombreux :

- c'est la plus utilisée et elle réduit le nombre d'inconnues ;
- elle permet d'imposer des sources électriques par les bobines ;
- la connaissance de toute autre grandeur physique peut être déduite.

En se basant sur les équations de Maxwell, on peut formuler l'équation qui décrit l'évolution spatiale temporelle des phénomènes électromagnétiques.

Nous avons :

$$r\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \vec{B} = r\vec{\text{rot}}\vec{A} \quad \text{on} \quad \text{obtient}$$

$$r\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(r\vec{\text{rot}}\vec{A}) = -r\vec{\text{rot}}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \Rightarrow r\vec{\text{rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$  est un champ conservatif, donc il dérive d'un potentiel scalaire électrique  $U$  , tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -gr\vec{ad}U \Rightarrow \vec{E} = -\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + gr\vec{ad}U\right)$$

A partir de l'équation (2.5) et de l'équation (2.12) nous avons  $r\vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu}\vec{B}\right) = \vec{J}_c$

A partir de l'équation (2.8),  $\vec{B} = r\vec{\text{rot}}\vec{A}$  et  $\vec{E} = -\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + gr\vec{ad}U\right)$  nous avons :

$$\begin{aligned} r\vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu}r\vec{\text{rot}}\vec{A}\right) &= \vec{J}_{ex} + \sigma\vec{E} + \sigma(\vec{v} \wedge r\vec{\text{rot}}\vec{A}) \\ r\vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu}r\vec{\text{rot}}\vec{A}\right) + \sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \sigma gr\vec{ad}U - \sigma(\vec{v} \wedge r\vec{\text{rot}}\vec{A}) &= \vec{J}_{ex} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Les termes  $-\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$  et  $\sigma(\vec{v} \wedge r\vec{\text{rot}}\vec{A})$  représentent les densités des courants induits. Ils traduisent le caractère dynamique dans le temps et dans l'espace

des phénomènes électromagnétiques ; pour la pompe MHD à conduction proposée, le champ magnétique imposé est constant ; donc le premier terme s'annule, tandis que le terme  $(-\sigma \text{grad}U)$  décrit la densité du courant imposée à travers les électrodes.  $U$  représente le potentiel scalaire électrique en Volts (n'est pas nul).

Dans notre configuration bidimensionnelle (2D), la condition de Jauge de Coulomb est naturellement vérifiée. Le modèle électromagnétique de la pompe sera comme suit :

$$\begin{aligned} \text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\vec{A}\right) - \sigma(\vec{v} \wedge \text{rot}\vec{A}) &= \vec{J}_{ex} - \sigma \text{grad}U \\ \text{div}\vec{A} &= 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

## 2.2 EQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE

L'écoulement d'un fluide est dit **incompressible** lorsque l'on peut négliger ses variations de masse volumique au cours du temps [7]. Cette hypothèse est vérifiée lorsque le nombre de Mach  $M_a$  est faible. En général, on considère l'écoulement incompressible lorsque  $M_a < 0.3$  [8].

### 2.2.1 Formulation vectorielle

Les équations qui régissent le mouvement d'écoulement du fluide incompressible pour un écoulement à propriétés constantes sont l'équation de conservation de la quantité de mouvement (équation de Navier stokes) [8], qui est l'équivalent de la relation fondamentale de la dynamique  $\sum \vec{F}_i = m \vec{a}$ , et l'équation de conservation de la masse (équation de continuité) [7].

Ces deux équations forment un système qu'on appelle équation d'écoulement définie comme suit [8], [9] :



### **a- Equation de Navier Stokes**

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} \bar{P} + \nu \Delta \vec{V} + \vec{F} \quad (2.16)$$

Le terme  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$  correspond à la dérivée partielle de la vitesse (accélération locale) et le terme  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{V}$  qui est le terme advectif (suivant l'approche eulérienne qui consiste à se placer en une position fixe) [10] ;

Le terme  $-\frac{1}{\rho} \text{grad} \bar{P}$  représente les forces de pression, spécifique de la mécanique des fluides ;

Le terme  $\nu \Delta \vec{V}$  correspond aux forces de viscosité ;

Le terme dernier des forces représente pour notre étude les forces électromagnétiques ( $\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B}$ ). Ce terme est responsable du pompage de l'eau salée dans le canal.

### **b- Equation de continuité [9]**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.17)$$

Dans le cas des fluides incompressibles, cette équation devient :

$$\text{div} \vec{V} = 0 \quad (2.18)$$

Avec :

$\vec{v}$  : Vitesse du fluide (m/s) ;

P : Pression du fluide (Pa) ;

$\nu$  : Viscosité cinématique du fluide (m<sup>2</sup>/s) ;

$\vec{F}$  : Force électromagnétique (N/m<sup>3</sup>) ;

$\rho$  : Densité du fluide (kg/m<sup>3</sup>).

On considère certaines hypothèses simplificatrices pour le cas hydrodynamique : [8], [9]

- L'écoulement est supposé non stationnaire ;
- On suppose que l'écoulement est laminaire à vitesse constante ;
- Le fluide considéré est incompressible.

### **2.3 MODELE CYLINDRIQUE AXISYMETRIQUE EN ELECTROMAGNETISME ET EN HYDRODYNAMIQUE**

Une grande partie des problèmes magnétiques peut être traité en bidimensionnel, ce qui est le cas pour notre problème ; l'existence des deux types de systèmes bidimensionnels : ceux infiniment longs alimentés suivant une direction (oz) et ceux à symétrie de révolution alimentés selon la direction (o $\varphi$ ). C'est le deuxième cas qui nous intéresse, suivant notre dispositif, les courants  $\vec{J}_{ex}$  sont dirigés suivant l'angle  $\varphi$  du système de coordonnées cylindriques (r,  $\varphi$ , z). Le champ magnétique possède alors deux composantes, l'une suivant la direction (or) et l'autre suivant la direction (oz), imposant ainsi pour le potentiel une seule composante  $A_\varphi$ .

#### **2.3.1 Problème électromagnétique**

Rappelons l'équation magnétodynamique (2.15) dans le cas où le terme  $-\sigma \text{grad}U$  est remplacé par la densité de courants injectée par les électrodes

$\vec{J}_a$

$$r\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}r\text{rot}\vec{A}\right) - \sigma(\vec{v} \wedge r\text{rot}\vec{A}) = \vec{J}_{ex} + \vec{J}_a \quad (2.19)$$

$$\text{div}\vec{A} = 0$$

Après développements en coordonnées cylindriques, l'équation devient :

$$-\left[ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) \right] + \frac{\sigma}{r} v_z \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial z} = J_{ex} + J_a \quad (2.20)$$

En introduisant la transformation :

$$A = r A_\varphi \quad (2.21)$$

L'équation (2.20) devient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \frac{\sigma}{r} v_z \frac{\partial A}{\partial z} = -J_{ex} - J_a \quad (2.22)$$

C'est une équation aux dérivées partielles, décrivant le comportement d'un dispositif cylindrique axisymétrique. Sous l'hypothèse que les matériaux sont linéaires et que les sources d'alimentation sont constantes.

### **2.3.2 Problème hydrodynamique**

Le développement de l'équation d'écoulement en coordonnées cylindriques donne :

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{F_z}{\rho} \quad (2.23)$$

$$V = v_z(r)$$

où

$v_z$  : La composante suivant  $z$  de la vitesse  $\vec{V}$  ;

$F_z$  : La composante de la force de pompage suivant  $z$ .

Les équations régissant l'écoulement (visqueux) laminaire incompressible sont données par (2.23). Cependant, pour un écoulement bidimensionnel, il est intéressant de considérer une formulation alternative en termes de vorticité  $\xi$  et fonction de courant  $\psi$  [8], [11].

### 2.3.3 Méthode de résolution $\psi - \xi$

Dans le cas d'un écoulement plan, l'équation (2.18), qui traduit la conservation de la masse, implique qu'il existe une fonction  $\psi(r, \theta, z, t)$ , dite *fonction de courant*, et définie par [8] :

$$\begin{aligned} U_r &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ U_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Où  $U_r$  et  $U_z$  sont les composantes cylindriques de la vitesse  $\vec{V}$ .

D'autre part, on appelle vecteur tourbillon le vecteur [8]

$$\vec{\Omega} = \vec{\xi} = r\vec{\omega} \vec{e}_\theta \quad (2.25)$$

Ce vecteur tourbillon n'a qu'une composante  $\omega$  sur le vecteur  $\vec{k}$  unitaire directement perpendiculaire au plan  $\vec{\omega} = \left( \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta$ .

Cette composante et l'expression (2.24) décrivent l'évolution d'un écoulement incompressible vortical bidimensionnel, elles sont cinématiques et montrent comment la vitesse est déterminée par la vorticité. [12]

Par élimination de la pression et en utilisant cette nouvelle formulation, la combinaison des deux équations de Navier Stokes et de continuité donne l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \nu \Delta \omega &= \frac{\partial \omega}{\partial t} + U_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} U_\theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{U_r}{r} \omega + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial r} \\ &= \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Cette relation est l'équation fondamentale d'évolution de la vorticité et joue pour  $\omega(r, t)$  un rôle similaire à l'équation de Navier Stokes pour  $V(r, t)$ .

Notons que cette équation (2.26) de transport de la vorticité s'applique à tous les écoulements qu'ils soient laminaires ou turbulents. La description d'un écoulement à partir du champ de vorticité est toujours une alternative possible à la description par l'intermédiaire du champ de vitesse.

En substituant (2.24) dans l'expression du vecteur tourbillon, on obtient l'équation liant les deux variables  $\omega$  et  $\psi$  :

$$\omega = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) \quad (2.27)$$

Notons que cette équation est linéaire tandis que (2.26) est non linéaire, à cause des termes  $U_r \frac{\partial \omega}{\partial r}$ ,  $\frac{1}{r} U_\theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta}$  et  $U_z \frac{\partial \omega}{\partial z}$  termes dits « de convection ».

Le mécanisme général de l'écoulement est que la vorticité est transportée par la vitesse alors que la distribution résultante de la vorticité détermine la vitesse suivant l'équation (2.27) [12].

Une fois le système (2.26) et (2.27) résolu, il convient d'en déduire la pression.

Pour cela, on prend la divergence de l'équation de la dynamique (2.16) ; compte tenu de (2.18), on obtient :

$$\text{div}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) = -\frac{1}{\rho} \Delta P \quad (2.28)$$

En utilisant l'expression suivante  $\text{div}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = 2 \frac{\partial U_z}{\partial r} \cdot \frac{\partial U_r}{\partial z}$  et (2.24), cette équation (2.28) peut être réécrite en termes de la fonction de courant :

$$\Delta P = \frac{2\rho}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \quad (2.29)$$

C'est une équation de Poisson, permettant de déterminer la pression.

### **2.3.4 Le terme de couplage**

La principale variable à déterminer lors de la modélisation de la pompe MHD à conduction, où les équations électromagnétiques et hydrodynamiques soient couplées, est la force de pompage (force de Lorentz), qui est réalisée par les équations de Laplace qui se développent au sein du fluide conducteur (l'eau de mer). L'écoulement d'un fluide est influencé par les phénomènes électromagnétiques via les forces de Laplace. Ces dernières expriment l'interaction magnétique et des courants électriques appliqués et induits [4].

$$\vec{F} = \vec{J}_i \wedge \vec{B} \quad (2.30)$$

Avec :

$$\vec{J}_i = \vec{J}_a + \sigma(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (2.31)$$

## 2.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, partant des lois de base caractérisant les phénomènes électromagnétiques et hydrodynamiques présents dans la pompe MHD à conduction, des modèles mathématiques ont été établis dans leurs formes générales.

En liaison avec le type d'application à traiter, le cas cylindriques axisymétrique considéré comme un cas particulier, a été détaillé. Une fois ces modèles mathématiques établies, nous proposons ainsi de décrire dans le prochain chapitre, les modèles numériques adaptés pour la résolution des équations mathématiques finales décrivant l'évolution spatiales et temporelles des phénomènes physiques présents dans le dispositif proposé.

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] J.Pothwell, Michael J. Cloud, « Electromagnetic », 2001 by CRC Press LLC
- [2] David.K.Cheng, “Field and wave electromagnetics”, Addison Wesley series in Electrical Engineering, 1983
- [3] Kong, J.A. “Electromagnetic fields” Ed.Richard C.Dorf, Boca Raton, CRC Press LLC
- [4] John J.Bloomer, Marcel Dekker, “Practical fluid mechanics for engineering application” Inc. New York 2000
- [5] C.AJ. Fletcher, “Computational techniques for fluid dynamics 2”, Springer series in Computational dynamics, 2006
- [6] Pijush.K.Kundu, Ira.M.Cohen, “Fluid mechanics”, 2<sup>nd</sup> Edition 2002, Elsevier Science (USA)
- [7] M. Fermigier, “ Hydrodynamic physique” problèmes résolus avec rappel de cours Collection sciences sup. physique, Edition Dunod, 1999
- [8] C.Pozrikidis « Fluid dynamics theory, computation and numerical simulation » Kluwer Academic Publishers, 2001
- [9] Javier Jiménez, « Turbulence and vortex dynamics », Ed.2001.Impr.de l'école polytechnique, France



# **CHAPITRE 3**

## CHAPITRE 3

### MODELISATION 2D DES PHENOMENES ELECTROMAGNETIQUE ET HYDRODYNAMIQUE

Comme pour tout problème physique, il existe une approche alternative des équations différentielles partielles classiques à la discrétisation des problèmes physiques (électromagnétisme, conduction thermique, dynamique des fluides et la mécanique des solides). Cette alternative est basée sur une reformulation préliminaire du modèle mathématique sous une forme partiellement discrète, qui préserve autant que possible la teneur physique et géométrique du problème original. (Voir fig3.1)

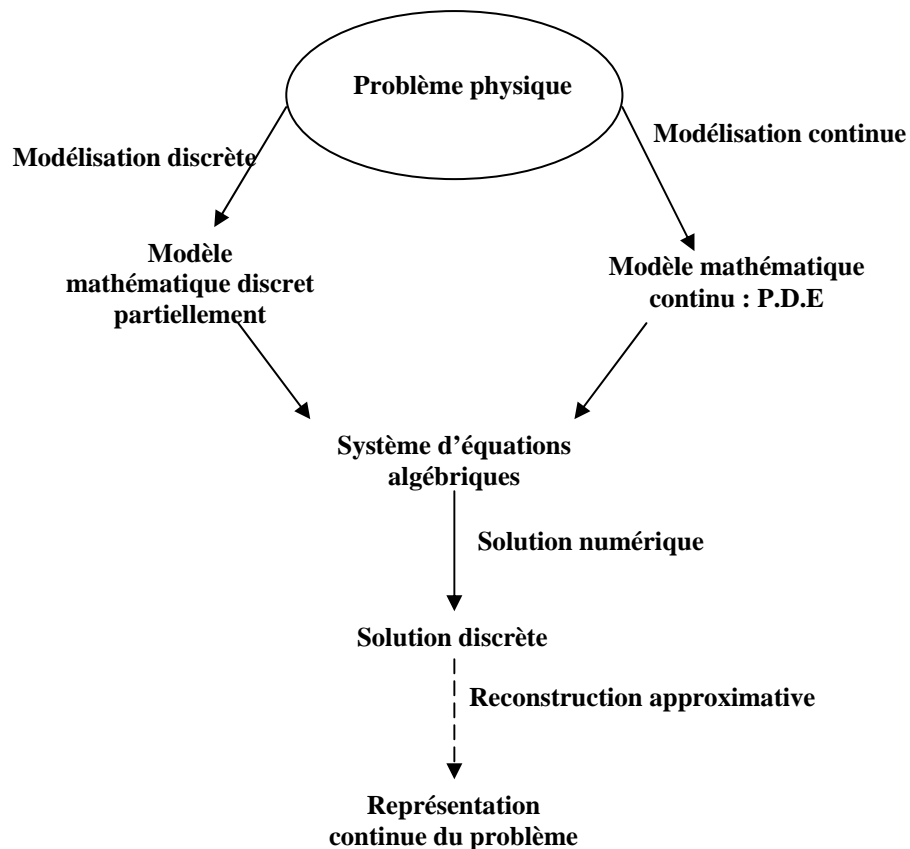


Fig.3.1 les chemins alternatifs menant à partir d'un problème physique à un système d'équations algébriques PDE, équation partielle [1]

Le but est de se concentrer sur le problème physique, dans les deux étapes d'étude modélisation et discrétisation, et non sur sa forme mathématique

particulière (exp. équation différentielle partielle) dans la quelle le problème physique original sera justement interprété. [1]

Ce chapitre traite la modélisation des phénomènes électromagnétiques et hydrodynamiques. Pour cela deux manières de résoudre ce système couplé sont possibles : la première consiste en une résolution analytique ; la deuxième consiste à adopter un programme numérique de calcul ; c.à.d. méthodes numériques telles que volumes finis, élément finis....). Chacune de ces voies a des avantages et des inconvénients.

Mais généralement, quand les problèmes sont complexes, les solutions analytiques sont difficiles à trouver et dans ce cas une solution numérique est nécessaire.

L'étude de ces phénomènes est assurée par la méthode des volumes finis. Le choix de cette méthode repose sur sa simplicité à développer et moins coûteuse que les autres méthodes telle que la méthode des éléments finis, de ce fait à chaque phénomène on assure la méthode des volumes finis.

### ***Analyse théorique de la MHD à conduction***

Dans les sections précédentes, on a conclu que les pompes électromagnétiques et les valves de commande basées sur les principes de la magnétohydrodynamique qui sont des dispositifs importants dans l'industrie pour transférer le fluide électriquement conducteur. Afin d'obtenir les caractéristiques thermique- hydraulique des mouvements découlement MHD, des appareils expérimentaux doivent être établis pour étudier le comportement liquide ; cependant, il est très cher pour construire des appareils expérimentaux, particulièrement avec des tailles pratiques d'opération. Donc, des simulations théoriques sont souvent nécessaires pour obtenir des détails de conception avant que la recherche expérimentale puisse être menée.

En général, les conditions d'écoulement dans le canal MHD sont très complexes et encombrant parce que les équations d'écoulement impliquent

souvent l'interaction des deux équations de Navier stokes et de maxwell pour l'électromagnétisme.

Pour une bonne compréhension de principes fondamentaux sur l'étude des mouvements d'écoulement dans le canal MHD, des littératures sur les calculs théoriques ont été publiés.

D'abord, les problèmes MHD qui concerne l'état équilibre d'écoulement d'un fluide électriquement conducteur et visqueux entre deux plans parallèles non conducteurs avec une longueur infinie, où un champ magnétique transversal est appliqué, s'appelle généralement le problème d'écoulement de Hartmann.

Au courant, des analyses numériques théoriques ont été reportées dans les littératures, qui concernent principalement les écoulements MHD aux nombres de Hartmann et paramètres d'interaction élevés. Le nombre de Hartmann et le paramètre d'interaction sont des paramètres adimensionnels utilisés dans la plupart des problèmes d'écoulement MHD.

Les deux nombres ont été définis par la représentation du rapport de la force de Lorentz à la force visqueuse d'écoulement et le rapport de la force de Lorentz à la force d'inertie d'écoulement, respectivement.

"Pour les problèmes d'écoulement MHD à un nombre de Hartmann et un paramètre d'interaction élevés, les termes visqueux et inertiel dans les équations de Navier stokes sont négligeables puisque les forces de Lorentz sont dominantes dans la région active.

Basé sur l'hypothèse ci-dessus, Hunt et Ludford (1968), Walker, (1971,1972) ont analysé des écoulements dans des canaux rectangulaires à section constante et variable. [2], [3], [4] En outre, Holroyd et Walker (1978) ont traité les problèmes d'écoulement MHD permanent dans des conduits circulaires avec un champ magnétique appliqué non uniforme à un nombre de Hartmann et paramètre d'interaction élevées. Ils ont illustré qu'une paire de tourbillon sont formés près de la ligne centrale de la conduite où le champ magnétique appliqué est le plus faible. [5]

Pour un nombre de Hartmann et paramètre d'interaction modérés, les problèmes d'écoulement MHD impliquent toujours des équations régissantes

plus compliquées et cela exige ainsi l'application des techniques numériques pour des solutions approximatives.

Par conséquent, les méthodes des éléments finis ou différence finis ont été utilisées pour étudier les écoulements bidimensionnels dans le canal de la MHD sous des champs électromagnétiques uniforme et non uniforme.

Ramos et Winowich (1986) ont présenté des simulations numériques pour un écoulement d'un fluide incompressible et visqueux en régime permanent en utilisant la méthode des différences finies implicites. Les résultats de simulation ont montré que les profils de la vitesse axiale redistribueraient dans la M-Forme due au champ magnétique appliqué quand le fluide approche et passe à travers les électrodes [6].

Ramos et Winowich (1990) ont utilisé plus tard la méthode des éléments finis avec un arrangement-Galerkine comme fonctions de nombre de Reynolds et de la longueur d'électrode. Les résultats de simulation ont été similaires à ceux de 1986 ; les simulations ont également indiqué que la méthode des éléments finis a prédit une grande augmentation de pression le long de l'électrode et de la vitesse axiale dans la ligne centrale du canal [7].

Les deux méthodes donnent des résultats de simulation presque semblables, la différence entre ces deux méthodes a été attribuée aux grilles différentes adoptées dans les calculs qui est peut être également liée aux fonctions d'interpolations employées pour évaluer le champ de pression.

Hughes et Pericleous ,1994 ont étudié trois écoulements MHD intéressants, à savoir, un écoulement à couche limite avec un champ magnétique transversal imposé, un écoulement de Hartmann et un écoulement Couette magnétique. Les résultats numériques étaient bien conformes aux solutions analytiques [8].

En 1995, ils ont résolu simultanément les équations de Navier stokes et les équations de Maxwell en utilisant un attachement du Fortran auto développé au code de calcul PHOENICS

Utilisant la méthode des différences finies implicite (avec une approximation hybride). Les résultats numériques ont montré un accord quantitatif proche à ceux rapportés par Ramos et Winowich (1990) [9].

A.Pothérat (2005) a présenté un modèle 2D, résolu sous le code FLUENT /UNS (méthode des volumes finis) par Pothérat (2000), avec un nouveau code implémenté pour une simulation numérique toujours qui a été comparée avec des résultats expérimentaux. Cette comparaison montre que ce nouveau modèle donne une meilleure précision [10], [11].

Bahadir et Abbasov (2005) ont montré aussi que la méthode des différences finies est la plus adaptée pour la solution des problèmes magnétohydrodynamique [12].

On peut conclure que les champs d'écoulement MHD sont très complexes particulièrement dans les cas où les deux problèmes hydrodynamique et électromagnétique sont fortement couplés.

### **3.1 DIFFERENTES TECHNIQUES DE RESOLUTION DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES**

Les méthodes numériques de discrétisation utilisables pour la résolution des équations mathématiques établies, consistent à ramener la résolution des équations aux dérivées partielles dans le domaine d'étude, compte tenu des conditions aux limites, à celle d'un système d'équations algébriques dont la solution conduit à la distribution des champs (électromagnétisme : potentiel vecteur magnétique, mécanique des fluides : vitesse, pression,...).

La plus ancienne méthode numérique, c'est celle aux différences finies (MDF), elle consiste à discrétiser les équations continues aux nœuds d'un maillage prédéfini en calculant chaque dérivée partielle à l'aide de séries de Taylor pour obtenir des équations linéaires reliant la valeur des inconnues aux nœuds voisins [13], [14].

La méthode aux différences finies permet d'obtenir des résultats satisfaisants dans de nombreux problèmes puisqu'elle possède la simplicité de la formation numérique, mais elle reste limitée aux configurations à géométrie régulière, donc relativement trop simple ; elle est particulièrement préférable pour des équations hyperboliques, particulièrement les quasi-

linéaires ce qui admet les solutions discontinues. Les défauts principaux de la méthode de différence sont :

- 1- L'erreur géométrique considérable de l'approximation des domaines incurvés par des grilles rectangulaires ;
- 2- Le manque d'une approche unie et efficace à traiter des conditions de frontières normales et internes;
- 3- La difficulté pour construire des arrangements de différence avec une exactitude élevée, à moins que nous permettions à l'équation de différence de relier des points plus nodaux (ce qui augmente à leur tour la difficulté ultérieurement en faisant face aux états de frontière) [15].

Par contre la méthode des éléments finis est très puissante pour la résolution des équations aux dérivées partielles surtout dans des géométries complexes et quelques soient les conditions physiques de fonctionnement. La technique des éléments finis discrétise l'espace à l'aide d'éléments géométriques simples (triangles ou quadrangles en général), ensuite la forme forte des équations est remplacée par la forme faible dans laquelle les inconnues sont approximées par une combinaison linéaire de fonctions de base dont le support est l'un des éléments [16]. L'inconvénient de cette méthode reste dans la mise en œuvre délicate. (Voir annexe 3)

Quant à la méthode intégrale aux frontières (MIF), son principe, comme l'indique son nom, est de transformer les équations aux dérivées partielles à résoudre dans tout le domaine de calcul en équations intégrales définies uniquement sur les frontières du domaine. L'intérêt premier de la MIF est donc de ne pas être pénalisé par des frontières qui se déforment au cours du temps. Ce report du problème sur les frontières implique aussi une forte diminution de la taille de la matrice à résoudre. Ceci est le second intérêt de la MIF qui nécessite beaucoup moins de ressources (mémoire et temps de calcul) que les méthodes classiques à précision équivalente.

Il est vrai, cependant, que le passage d'équations en volume à des équations aux frontières ne peut s'effectuer de manière *directe* que pour les seules

équations linéaires de problèmes physiques tels les problèmes à écoulements irrotationnels, d'électrostatique et de conduction thermique.

Il existe plusieurs types de méthodes intégrales. Chacun est dédié à un problème physique particulier. Ce manque de généralité de la méthode explique en partie l'indisponibilité de codes MIF commerciaux (version boîte noire) jusqu'à l'heure actuelle. Les Méthodes Intégrales concernent classiquement les problèmes dont la modélisation mathématique fait intervenir des opérateurs elliptiques (qui se caractérisent par le fait que pour connaître l'information en un point, il est nécessaire et suffisant de la connaître sur une sphère qui entoure ce point). Bien que les problèmes qui font intervenir des opérateurs non linéaires et/ou des termes source (ou puits) ne soient pas le terrain de prédilection de la MIF, comme pour les autres méthodes numériques, il est toujours possible d'utiliser des méthodes itératives pour surmonter cette difficulté. Néanmoins, l'avantage de réduire la dimension du problème d'une unité de cette méthode est, dans ce cas, nécessairement émoussé, dans une proportion dépendant de chaque cas [17]. L'électrohydrodynamique, est gérée par des équations elliptiques qui sont particulièrement appropriées au traitement par la MIF, ce qui n'est pas le cas pour la magnétohydrodynamique.

Une nouvelle technique qui est prometteuse, ce sont les méthodes meshless qui ont tout d'abord été développées pour palier les difficultés des méthodes Éléments Finis, Volumes Finis et Différences Finies à traiter les problèmes contenant des discontinuités (si celles-ci ne sont pas situées sur les lignes du maillage).

Ces méthodes nécessitent des remaillages périodiques si les lignes de discontinuité sont mobiles, d'où une certaine lourdeur, ainsi que des difficultés de gestion de programme.

L'objectif des méthodes meshless est d'éliminer le maillage lors de ces calculs. (Voir annexe4)



De toutes ces méthodes, celle des volumes finis est la plus simple et la plus précise donc la plus utilisée et les logiciels s'appuyant sur cette méthode sont les plus répandus surtout en mécanique des fluides [18], [19].

Citons quelques avantages de la méthode des volumes finis [20] :

- 1- Flexibilité tout en respectant la géométrie du domaine  $\Omega$  (comme dans la méthode des éléments finis).
- 2- Admissibilité des grilles non structurées (comme dans la méthode des éléments finis, important pour des méthodes adaptatives).
- 3- Assemblage simple.
- 4- Conservation de certaines lois valides pour le problème continu (par exemple, lois de conservation ou principes de maximum). Cette propriété est importante dans la solution numérique des équations différentielles avec des coefficients discontinus.
- 5- Linéarisation facile des problèmes non linéaires (plus simples que dans la méthode des éléments finis (la méthode de Newton)).
- 6- Discrétisation simple de conditions aux frontières (comme dans la méthode des éléments finis, particulièrement un traitement "normal" de Neumann ou conditions aux frontières mélangée).

Dans le cadre de notre travail, une tentative a été prise pour une application de cette dernière pour le problème électromagnétique.

Pour le problème hydrodynamique, la discrétisation des équations aux dérivées partielles s'opère à partir d'une forme conservative pour chaque volume de contrôle par une technique qui ressemble à la méthode des différences finies [14]. Donc le principe de conservation est imposé au niveau de chaque volume de contrôle.

Des méthodes itératives telles que la méthode de Gauss Seidel ou Jacobi [18] peuvent être appliquées pour la résolution du système d'équations. Comme la méthode de Gauss Seidel converge rapidement et elle n'est pas complexe par rapport à la méthode de Jacobi [21], on l'utilise comme méthode itérative pour les deux problèmes. La structure du maillage conduit après discrétisation à une matrice de type bande.

### 3.1.1 Principe de la méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis peut être vue comme une variante de la méthode de collocation par sous domaines [22]. Le domaine d'étude est divisé en un nombre d'éléments (Fig. 3.2).

Chaque élément contient quatre nœuds du maillage. Un volume fini entoure chaque nœud du maillage (Fig. 4).

Dans cette méthode, chaque nœud principal «P» (le centre du volume de contrôle) est entouré par quatre nœuds N, S, E et W qui sont les centres des volumes de contrôle adjacents situés respectivement au Nord, Sud, Est et Ouest de celui contenant «P» [20] (fig.3.3)

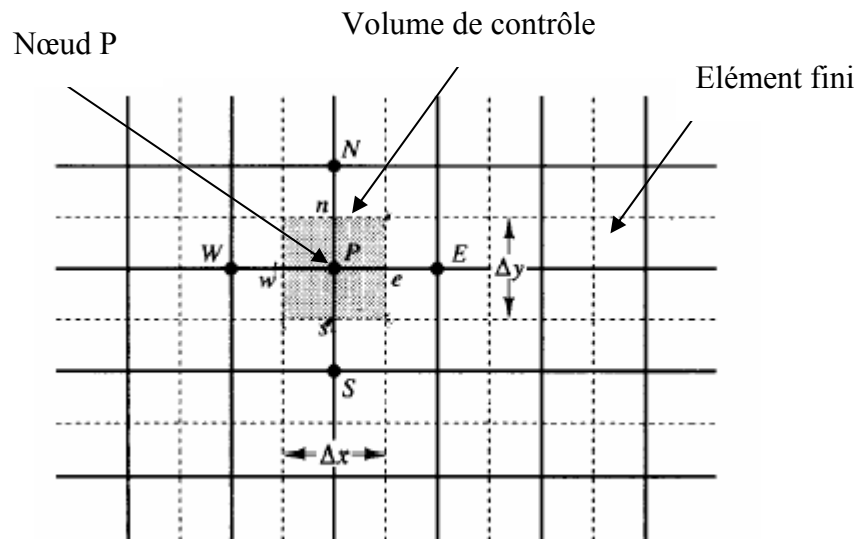


Fig.3.2 Maillage bidimensionnel du domaine d'étude [23]

Pour calculer l'intégrale sur ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, exponentielle) entre deux nœuds consécutifs. Ensuite la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude [23].

Grâce à un libre choix de la fonction de liaison entre nœuds consécutifs, la procédure conduit à une solution plus précise que celle fournie par la MDF.

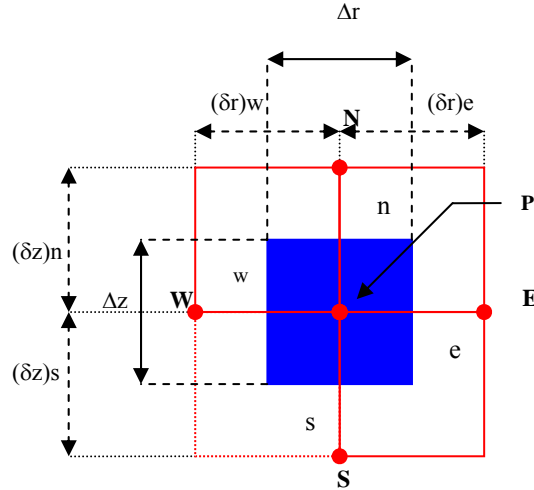


Fig.3.3 description d'un volume finis pour la discrétisation

### 3.2 ETUDE DES MODELES ELECTROMAGNETIQUE ET HYDRODYNAMIQUE

La méthode des volumes finis intègre les équations de Maxwell (2.22) et Navier stokes (2.26) sur un ensemble discret de volume finis jointifs couvrant le domaine à étudier. Le résultat de la discrétisation en un point est une équation algébrique liant la valeur d'une variable aux valeurs des variables des points voisins. Pour le problème hydrodynamique, cette méthode garantit la conservation de masse et de la quantité de mouvement dans chaque volume, et donc dans tout le domaine de calcul [18].

#### 3.2.1 *Discrétisation du modèle électromagnétique*

Pour discrétiser l'équation (2.22), le domaine d'étude est subdivisé en un nombre finis de nœuds. Ce domaine est ensuite divisé en mailles rectangulaires dont chacun contient un nœud, comme il est indiqué sur la figure ci-dessus.

Par projection de l'équation différentielle (2.22) sur une base de fonctions de projection  $\beta_i$ , et par intégration de cette même équation sur le volume de contrôle, correspondant au nœud « P », on obtient :

$$\iint \beta_i \left[ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \frac{\sigma}{r} v_z \frac{\partial A}{\partial z} \right] r dr dz = \iint \beta_i (-J_{ex} - J_a) r dr dz \quad (3.1)$$

Pour  $\beta_i = 1/r$ , et après intégration, l'équation algébrique finale sera de la forme :

$$a_p A P = a_e A E + a_w A W + a_n A_N + a_s A S - \left( a_n' A - a_s' A_s \right) v_z + d_0 \quad (3.2)$$

Si on discrétise le domaine à N nœuds, on est amené à étudier un système de N équations à N inconnues. La forme matricielle de ce système d'équations s'écrit sous la forme :

$$[M + \nu L] \{A\} = \{F\} \quad (3.3)$$

Où :

$[M + \nu L]$  : Matrice coefficients,

$\{A\}$  : Vecteur inconnu,

$\{F\}$  : Vecteur source.

Le système (3.3) étant linéaire, la résolution se fait selon un processus itératif (méthode de Gauss Seidel) [18], [21] en tenant compte des conditions aux limites dont les plus courantes sont la condition de Dirichlet ( $A=A_0$ ) donnée sur les frontières du domaine à étudier ; pour le problème traité l'équation électromagnétique est résolue en posant  $A = 0$  sur les frontières du domaine de résolution et l'axe de symétrie. [13]

Une fois le problème électromagnétique est résolu, on passe à la résolution du problème hydrodynamique.

### **3.2.2 Discrétisation du modèle hydrodynamique**

Nous présentons maintenant les étapes de résolution de l'équation d'écoulement avec toujours la même méthode (FVM), le maillage reste le même, une fois que les nœuds sont localisés, on introduit le terme source qui permet le couplage entre les deux équations électromagnétique hydrodynamique.

Par l'intégration de l'équation (2.26) sur le volume de contrôle correspondant au nœud « P » :

$$\iint_{\Omega} v \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \right) dr dz = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + U_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} U_\theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{U_r}{r} \omega + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) dr dz \quad (3.4)$$

Nous obtenons

$$a_p W_p = \sum a_{nc} W_{nc} + a_b \quad (3.5)$$

Où :

Le terme  $a_p$  sont les coefficients attractifs sur W,  $nc$  implique la sommation des nœuds voisins au-dessus de "P" pour le calcul bidimensionnel et  $a_b$  est le terme source.

Avec la condition de Dirichlet  $V=0$ ,  $\frac{\partial V}{\partial n}=0$  et  $\frac{\partial V}{\partial n}=0$  sur l'axe de symétrie comme conditions aux limites [24], le système (3.5) est résolu itérativement par la même méthode Gauss Seidel [18], [21].

### **3.2.3 Algorithme de couplage des deux modèles**

Après avoir présenté la résolution des deux modèles électromagnétique et hydrodynamique, on donne maintenant le principe de l'algorithme de couplage qui est représenté par la figure 3.4.

D'après les deux systèmes d'équations électromagnétique et hydrodynamique qui ne sont pas indépendants, ils sont liés par les forces magnétohydrodynamiques. Donc les équations caractérisant l'évolution temporelle-spatiale des phénomènes magnétohydrodynamiques nécessitent un modèle couplé. La résolution des systèmes couplés a été réalisée en particulier à l'aide de deux méthodes : l'une dite de couplage direct dit fort, l'autre dite de couplage alterné dit faible. Dans le modèle de couplage fort, le problème est considéré dans sa globalité : l'ensemble des équations est résolu dans un même et unique système d'équations, où le couplage apparaît sous forme de termes croisés dans la matrice issue de la formulation numérique.

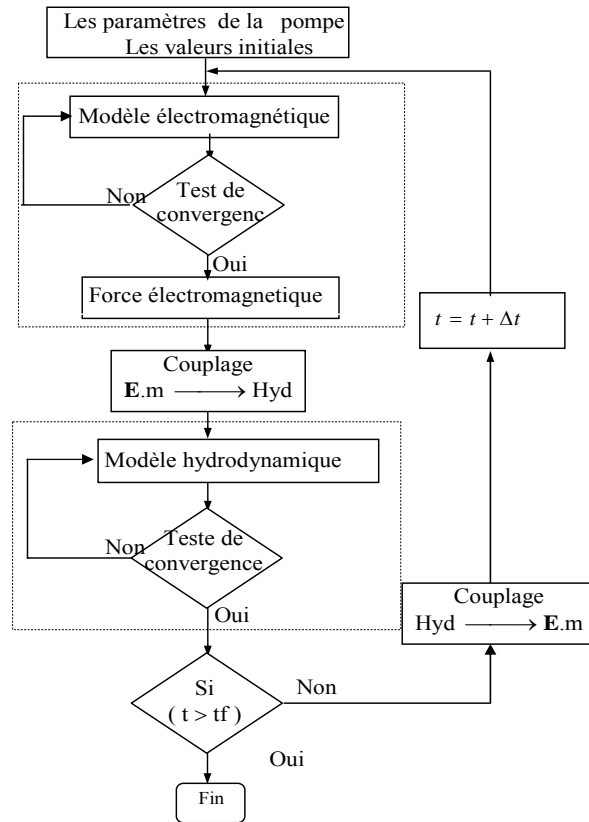


Fig.3.4 L'algorithme du couplage Hydrodynamique-Electromagnétique

Cette technique présente l'avantage de ne pas nécessiter de transfert de données ni d'interpolation, donc moins d'erreurs et une grande précision sur les résultats. Mais, le temps de calcul est long et ça exige un espace mémoire important puisque les matrices seront de tailles très importantes.

Pour le modèle de couplage alterné, qui est utilisé pour notre cas, permet de résoudre séparément les problèmes électromagnétique et hydrodynamique. Le couplage se fait alors par le transfert des données de l'un des problèmes vers l'autre. Cependant l'inconvénient major de ce modèle est lié au transfert des informations d'un problème à un autre, ce qui provoque des pertes au niveau de la précision, pour surmonter ce problème, nous devons diminuer considérablement le pas de calcul.

L'algorithme de couplage MHD se présente sous la forme suivante :

- 1- un profil de conditions aux limites initial et des données de la pompe MHD à conduction sont données ;
- 2- le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  et l'induction magnétique  $\vec{B}$  sont calculés dans le domaine électromagnétique après résolution par la méthode des volumes finis ;
- 3- le calcul des courants induits et les forces de Laplace dans le canal ;
- 4- les forces de Laplace sont interpolées sur le maillage de la partie fluide, à travers les équations de Navier stokes en tant que source de forces volumiques ;
- 5- le calcul de la vitesse par la résolution des équations de Navier stokes ;
- 6- test, si le temps est inférieur ou égal au temps final, passe à l'étape 7,  
si le temps est supérieur ou égal au temps final, passe à l'étape 2 ;
- 7- Fin

Une fois la variation de la vitesse (qui est déterminée par la vortacité) en fonction du temps est calculée en n'importe quel point du canal, il est plus facile de déterminer également la pression (qui est aussi déterminée par la vortacité) en tout point désiré du canal en résolvant l'équation de Poisson relative à la pression (par la MVF toujours).

Ceci est possible puisque le développement de l'équation de Poisson se fait de la même manière que pour l'équation d'écoulement.

Comme critère de convergence,  $\|e\| = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_i - v_i^{-1})^2}$ ,  $N$  est le nombre total des nœuds utilisés par la MVF dans le domaine d'étude ( en raison de la symétrie géométrique, la moitié du domaine d'étude a été résolu),  $v_i^{-1}$  est la solution ancienne de chaque nœud et  $v_i$  est la solution actuelle. Le nombre de nœuds utilisé pour le calcul est de 3000.

La question de précision et de stabilité des méthodes numériques est extrêmement importante, si notre solution est sûre et utile, la précision doit faire proximité de la solution approximative pour avoir des solutions exactes (supposant qu'elles existent).

La stabilité est une condition que le maillage n'augmente pas la grandeur de la solution avec l'augmentation dans le temps, cela implique que la condition  $\frac{v \cdot \Delta t}{\Delta r^2} \leq 1$  soit satisfaite. [13]



### **3.3 CONCLUSION**

Ce chapitre a consisté essentiellement en l'élaboration d'un nouveau code DCPMHD de calcul numérique sous environnement MATLAB, des équations de Maxwell dans le domaine temporel et spatial avec des équations de Navier stokes en utilisant la méthode des volumes finis. Son application est nouvelle en électromagnétisme par contre elle est largement utilisée en mécanique des fluides ; de plus ce type de transfert de connaissance de la mécanique des fluides vers l'électromagnétisme bien que largement développée aux Etats-Unis, n'est encore que peu exploiter en Europe.

Nous tenterons à travers cette étude de montrer que cette méthode est bien adaptée à la modélisation de phénomènes électromagnétisme dans une pompe MHD à conduction.

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] Claudio Mattiussi, « A reference discretization strategy for the numerical solution of physical field problems», *Advances in imaging and electron physics*, vol.121
- [2] Hunt,J.C.R, Ludford,G.S.S, “Three-dimensional MHD duct flows with strong transverse magnetic fields.Part 1. Obstacles in a constant area channel” *Journal of fluid mechanics*, vol.33, pp.693-714, 1968
- [3] Walker,J.S, Ludford, G.S.S and Hunt, J.C.R, “ Three dimensional MHD duct flows with strong transverse magnetic fields. Part 2. Variable-area rectangular ducts with conducting sides”, *Journal of fluid mechanics*, Vol.46, pp.657-684, 1971
- [4] Walker, J.S, Ludford, G.S.S, and Hunt, J.C.R “Three dimensional duct flows with strong transverse magnetic fields. Part 3. Variable area rectangular ducts with insulating walls”, *Journal of fluid mechanics*, Vol.56, pp.121-141, 1972
- [5] Holroyd, R.J. and Walker, J.S, “ A theoretical study of the effects of wall conductivity, non uniform magnetic fields and variable area ducts on liquid metal flows at high Hartmann number”, *Journal of fluid mechanics*, vol.84,pp.471-495,1978
- [6] Ramos, J.I. and Winowich, N.S, “Magneto hydrodynamic channel flow study”, *Physics of fluids*, Vol.29 (4), April 1986, pp.992-997
- [7] Ramos, J.I and Winowich, N.S., “Finite difference and finite element methods for MHD channel flows”, *Int.Jour, for Numerical methods in fluids*, Vol.11, pp.907-934, 1986
- [8] Hughes, M., Pericleous, K.A and Cross, M, “The CFD analysis of simple parabolic and elliptic MHD flows” *Applied Mathematical Modelling*, Vol.19, pp.150-155, 1994
- [9] Hughes, M, Pericleous, K.A and Cross, M, “The numerical modelling of DC electromagnetic pump and brake flow”, *Applied mathematical modelling*, Vol.19, Dec.1995, pp.713-723.
- [10] A.Pothera, J. Sommeria and R.Moreau, “Numerical simulation of an effective 2D model for flows with a transverse magnetic field”, *Journal of Fluid mechanics*, Vol.534, July 2005, pp.115-143.

- [11] A.Pothera, J. Sommeria and R.Moreau, “An effective two dimensional model for MHD flows with transverse magnetic field” *Journal of Fluid mechanics*, Vol.424, pp.75-100, 2000
- [12] A.R. Bahadir and T.Abbasov, “A numerical investigation of the liquid flow velocity over an infinity plate which is taking place in a magnetic field”, *international Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, Vol.21, pp.1-10, 2005.
- [13] Matthew N.O.Sadiku, “Numerical techniques in electromagnetics” 2<sup>nd</sup> Ed., 2001 by CRC Press LLC
- [14] C. Pozrikidis, “Fluid dynamics theory, computation and numerical simulation”, Kluwer Academic Publishers, 2001
- [15] Ronghua Li, Zhongying Chen, “Generalized difference methods for differential Equations numerical analysis of finite volume methods”, Marcel Dekker, Inc.New York 2000
- [16] O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor,“The finite Element Method”,fifth edition published by Butterworth-Heinemann 2000
- [17] Adel Mustapha Bendelama, “ Modélisation numérique du comportement d’une particule sous champ électrique dans les microsystèmes : de la déformation au déplacement”, thèse de doctorat préparé au laboratoire d’électrostatique et de matériaux diélectrique, UJF-CNRS de Grenoble, 2005.
- [18] Pieter Wessling, “Principles of computational fluid dynamics”, Springer Verlag Berlin Heidelberg 2001
- [19] Hrvoje Jasak, “Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows” thesis submitted for the degree of doctor of philosophy of the University of London, June 1996
- [20] Peter Knabner, Lutz Angermann, “Numerical methods for elliptic and parabolic partial differential equations”, Springer- Verlag, New York, Inc.2003
- [21] R.Wait, “The numerical solution of Algebraic equations”, A Wiley- Interscience Publication 1979
- [22] S.V.Patankar, “Numerical heat transfer and fluid flow”, Hemisphere Pub., 1980

- [23] H.K.Versteeg and W.Malalasekera, "An introduction to computational fluid Dynamics: the finite volume method", Addison-Wesley, 1996
- [24] C.T.Shaw, "Using computational fluid dynamics", Prentice Halls, 1992.

# **CHAPITRE 4**

## CHAPITRE 4

### RESULTATS ET INTERPRETATION

Dans le chapitre 3, nous avons développé le modèle magnétohydrodynamique 2D où sa résolution analytique est impossible donc le calcul numérique est inévitable. La méthode des volumes finis est satisfaisante pour déterminer les performances de notre pompe MHD à conduction, puis l'optimiser.

Cependant, la connaissance de la répartition des champs dans l'induit est importante tout particulièrement lorsque l'induit est de l'eau de mer. La connaissance exacte des forces volumiques, des courants induits et la vitesse rentre alors dans des modèles plus complets, faisant appel à la mécanique des fluides et à l'électromagnétisme.

Il est important de signaler que le champ magnétique qui agit sur la pompe doit être un dipôle et que certains paramètres doivent être optimaux tels que le rayon du canal, la longueur de l'électrode et son emplacement, la valeur des deux paramètres du champ magnétique ainsi que le courant induit.

Le problème électromagnétique dans le cas de la pompe MHD à conduction peut se limiter au calcul de la distribution du potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  [1], [2], [3].

En utilisant le code de calcul précédent, on peut étudier les phénomènes magnétohydrodynamiques dans la pompe MHD à conduction, ainsi que l'influence de certains paramètres sur les performances.

#### 4.1 DESCRIPTION GENERALE DU PROTOTYPE MHD A CONDUCTION

La pompe MHD à conduction proposée est représentée sur la figure (4.1). Elle est constituée d'un circuit magnétique sous forme de tore, deux bobines, quatre électrodes et un canal où circule un fluide supposé incompressible. En raison de la symétrie géométrique, seulement le demi-domaine a été pris en compte pour le calcul numérique [2], [3].

Le principe de fonctionnement est basé sur l'imposition d'un champ magnétique constant, qui est permanent (produit par un enroulement magnétisant à excitation séparée du champ électrique ou à excitation série), est croisé par un courant continu qui est amené dans le fluide par des électrodes pour créer une force de Lorentz qui déplace le fluide.

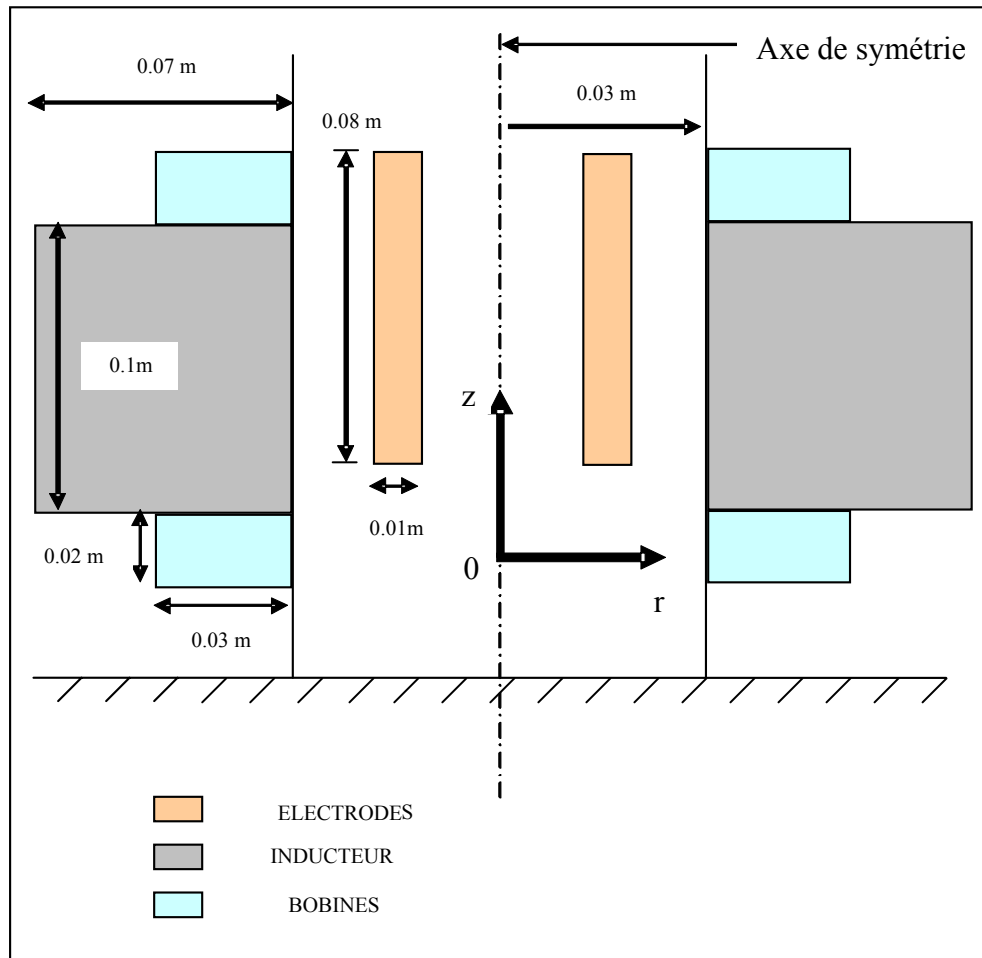


Fig 4.1 Schéma de la pompe MHD à conduction proposée en coupe verticale suivant l'axe de symétrie

Les dimensions préliminaires sont : [2], [3]

- la longueur du canal est de 0.14 m,
- le rayon du canal est de 0.03m,
- la largeur de l'électrode est de 0.01m,
- la longueur du l'inducteur est de 0.1m,

- la largeur du l'inducteur est de 0.07m,
- la longueur de la bobine est de 0.02m,
- la largeur de la bobine est de 0.03m,
- nombre d'électrodes : 4,
- nombre de bobines : 2,
- la densité du courant d'excitation  $J_{ex} = 0,2 \cdot 10^7$  A/m<sup>2</sup>,
- la densité du courant injectée par les électrodes  $J_a = 0,25 \cdot 10^7$  A/m<sup>2</sup>.

#### Les propriétés de l'eau de mer

1- Densité,  $\rho = 10^3$  Kg/m<sup>3</sup>

2- Conductivité,  $\sigma = 50$  S/m

3- Viscosité,  $\mu = 6 \cdot 10^{-4}$  SI

4- Perméabilité relative 1

## **4.2 L'INFLUENCE DE LA LONGUEUR DE L'ELECTRODE SUR LES PERFORMANCES DE LA POMPE [3]**

L'amélioration apportée par cette étude réside dans le choix de la longueur de l'électrode, en effet l'influence de la longueur de l'électrode  $L_{el}$  sur la densité du courant électrique injectée  $J_a$  est dominante et par la suite sur les forces électromagnétiques volumiques calculées par (2.30) et (2.31).

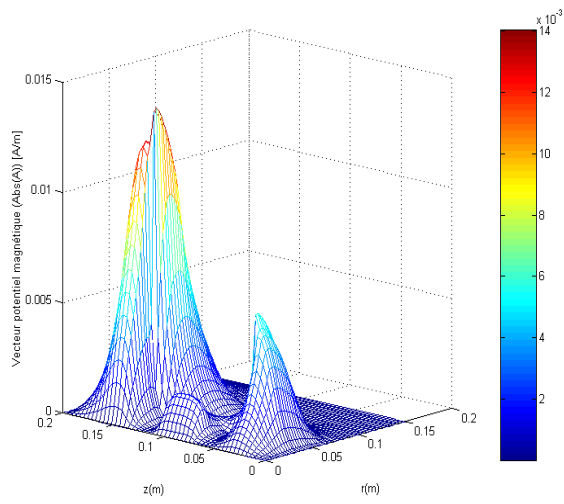
### **4.2.1 La représentation du potentiel vecteur magnétique [3]**

Une analyse a été faite pour trois longueurs d'électrode différentes  $L1=0.04$  m (petites électrodes),  $L2=0.1$ m (moyenne électrode) et  $L3=0.14$ m (grande électrode) (en gardant la valeur de la densité du courant injectée par les électrodes constante).

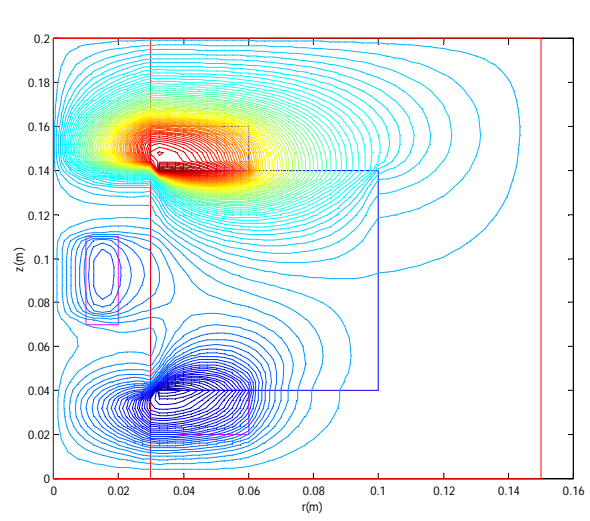
Les figures (4.1.a-b), (4.2.a-b) et (4.3.a-b) montrent le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  et sa distribution pour les trois longueurs respectivement.

Ces figures montrent le potentiel vecteur magnétique et ces contours dans le canal et au niveau de chaque bobine. La valeur absolue du potentiel vecteur magnétique est moins significative à l'entrée de l'électrode qu'à la sortie de l'électrode et trop faible le long de l'électrode pour les trois longueurs (Figs. (4.2a), (4.3.a), (4.4.a)).



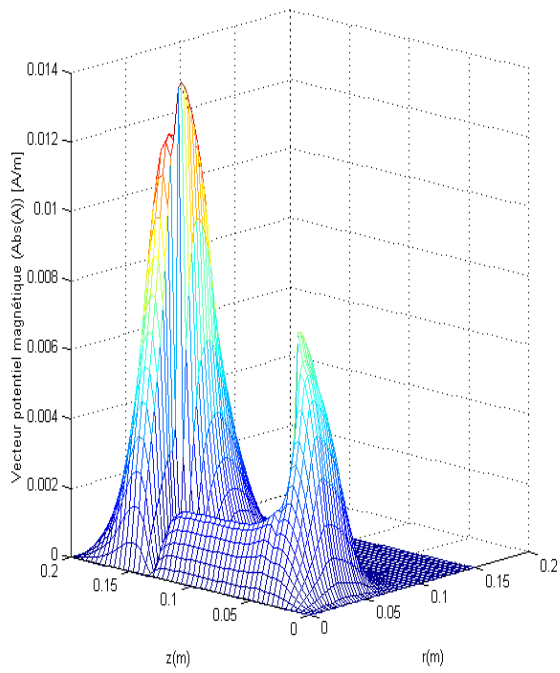


(a)

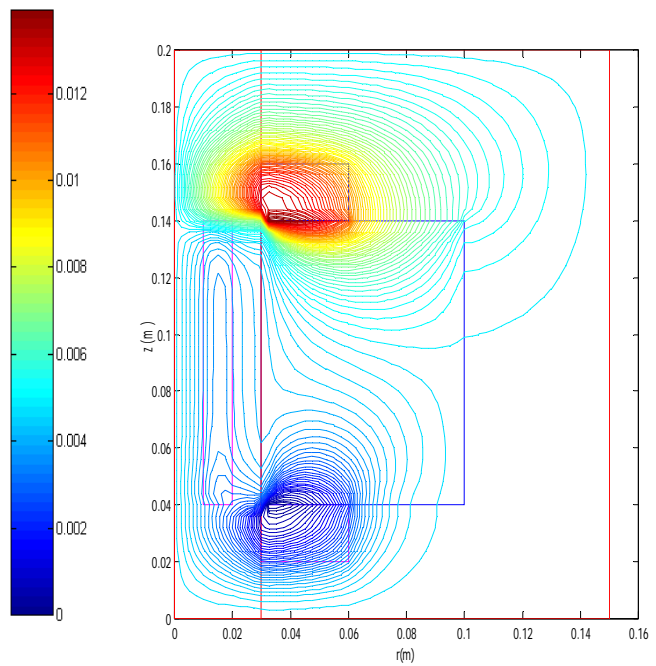


(b)

Fig.4.2 : (a) Le potentiel vecteur magnétique  
(b) La distribution du potentiel vecteur magnétique pour L1



(a)



(b)

Fig.4.3 (a) Le potentiel vecteur magnétique  
(b) La distribution du potentiel vecteur magnétique pour L2

Cela s'explique par les équipotentiels qui se concentrent tout près de la sortie de l'électrode. (Figs. (4.2b), (4.3.b), (4.4.b)) ; c.à.d. pour la bobine d'entrée, les lignes de champs créés par l'électrode et cette dernière se retranchent par contre les lignes de champs créés par l'électrode et la bobine de sortie s'additionnent.

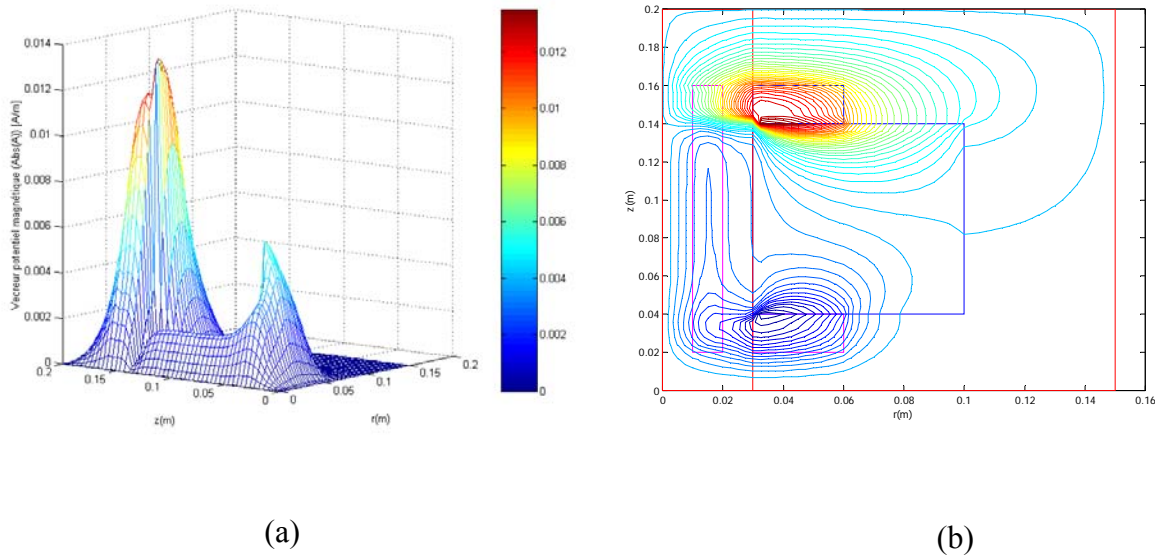


Fig.4.4 (a) Le potentiel vecteur magnétique  
(b) La distribution du potentiel vecteur magnétique pour L3

#### 4.2.2 Représentation de la force MHD [4]

Par conséquent, les figures (4.5), (4.6) et (4.7) montrent l'influence de la longueur de l'électrode sur la distribution de la force électromagnétique volumique  $F_z$  axiale.

Ces illustrations indiquent clairement une force négative pour  $L_1$  et  $L_3$  qui cause la traînée d'autre part une absence totale de cette force négative pour  $L_2$ . Ces résultats nous conduisent à choisir la valeur moyenne de la longueur de l'électrode. La valeur maximale de la force axiale se manifeste juste en dessous et au fond de l'électrode et plus précisément près de la bobine de sortie.

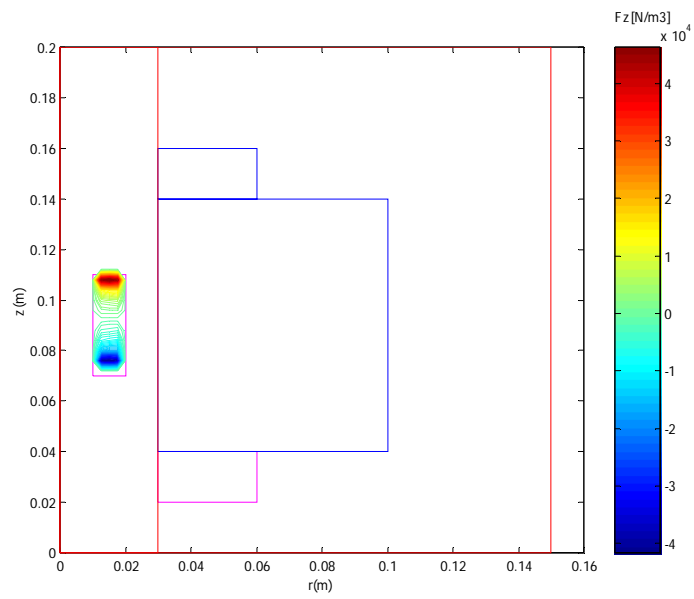


Figure 4.5 Représentation de la force électromagnétique volumique axiale pour L1

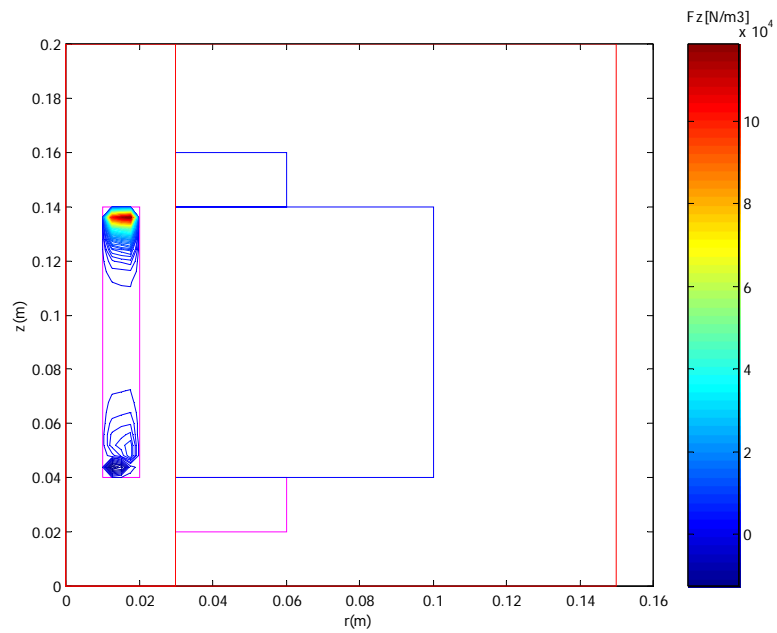


Figure 4.6 Représentation de la force électromagnétique volumique axiale pour L2

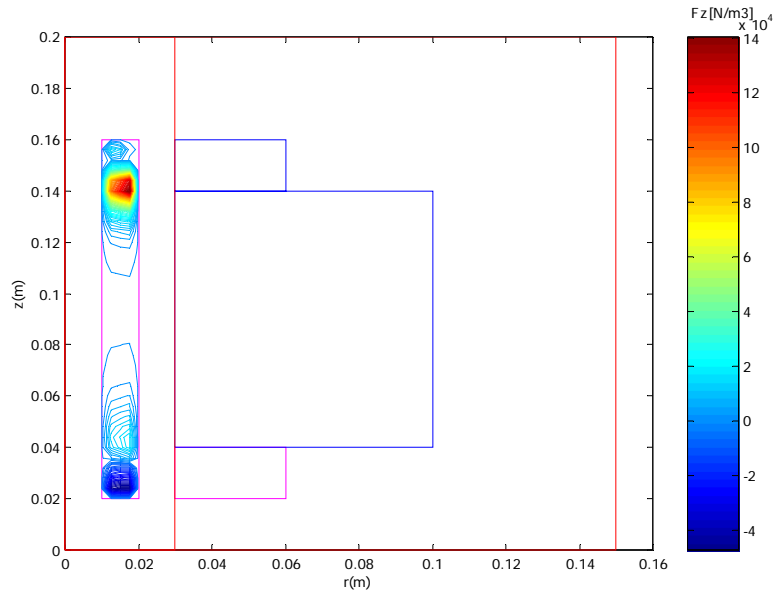


Figure 4.7 Représentation de la force électromagnétique volumique axiale pour L3

Pour cela, nous déplaçons l'électrode vers la bobine de sortie à cause bien sur de l'existence d'une valeur assez importante de champ magnétique B.

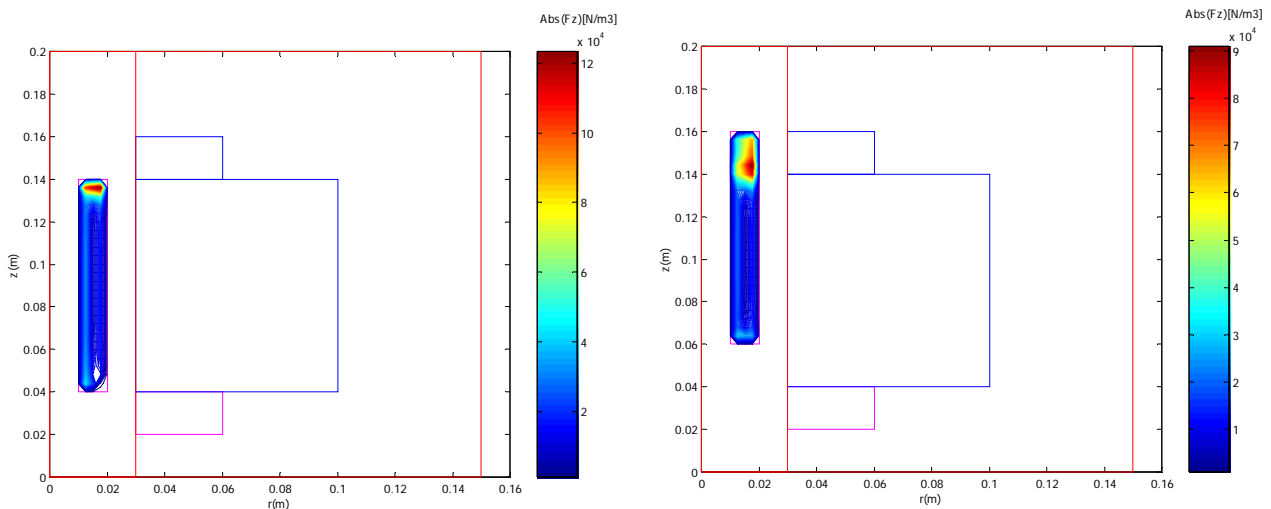


Figure (4.8) Représentation de la valeur absolue de la force axiale pour les deux dispositions de l'électrode

La fig. (4.8) montre qu'une force MHD est importante pour la deuxième disposition que celle de la première (concernant zone d'application).

On propose maintenant de diminuer la longueur de l'électrode en restant dans la marge de la deuxième longueur avant d'entamer à choisir le rayon du canal de la pompe.

### 4.3 INFLUENCE DU RAYON DU CANAL SUR LES PERFORMANCES DE LA POMPE [3]

Les calculs de performances dans ce cas ont été basés sur trois pompes MHD à conduction, la première avec un diamètre du canal dont le rayon est de 0.02m et la seconde avec un rayon de 0.03m et la troisième avec un rayon de 0.04m ; la longueur de l'électrode choisie est de 0.08m pour les trois pompes et toujours sa disposition décalée vers la bobine supérieure.

En gardant la même structure de la pompe MHD à conduction (les mêmes valeurs de  $J_{ex}$  et  $J_a$ )

#### 4.3.1 Représentation de la force MHD [3]

Les figures (4.9), (4.10) et (4.11) montrent la valeur absolue de la force électromagnétique volumique axiale pour les trois rayons (0.02m, 0.03m et 0.04m).

On constate que la valeur maximale de la force MHD volumique ( $F_{MHD} = 11 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$ ) est atteinte pour la première pompe (avec  $r = 0.02\text{m}$ ), pour la deuxième pompe ( $r=0.03$ )  $F_{MHD} = 9 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$  et pour la troisième pompe ( $r=0.04\text{m}$ )  $F_{MHD} = 7 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$ .

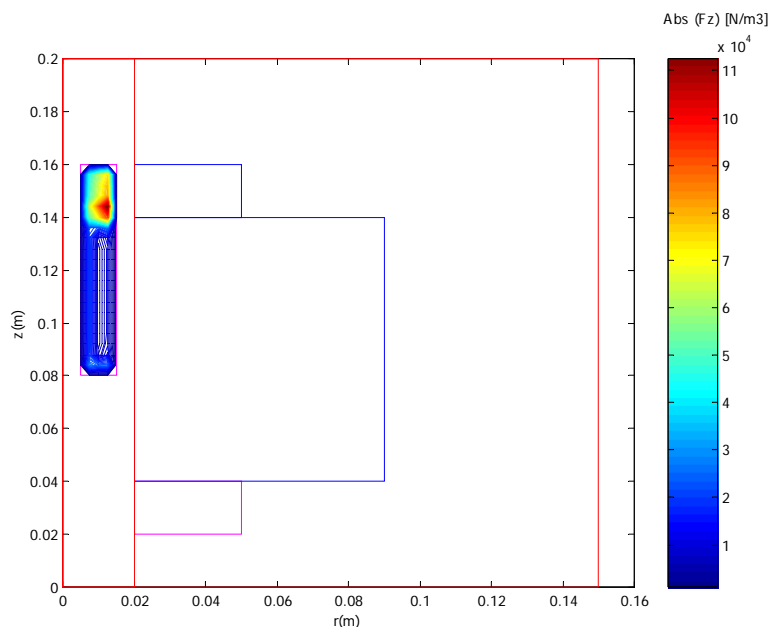


Figure 4.9 La distribution de la valeur absolue de la force MHD axiale pour  $r=0.02\text{m}$

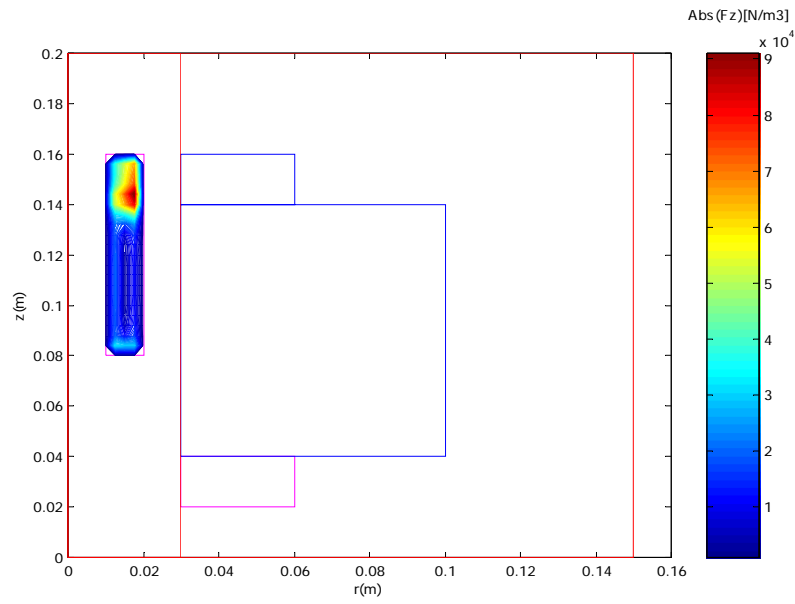


Figure 4.10 La distribution de la valeur absolue de la force MHD axiale pour  $r=0.03m$

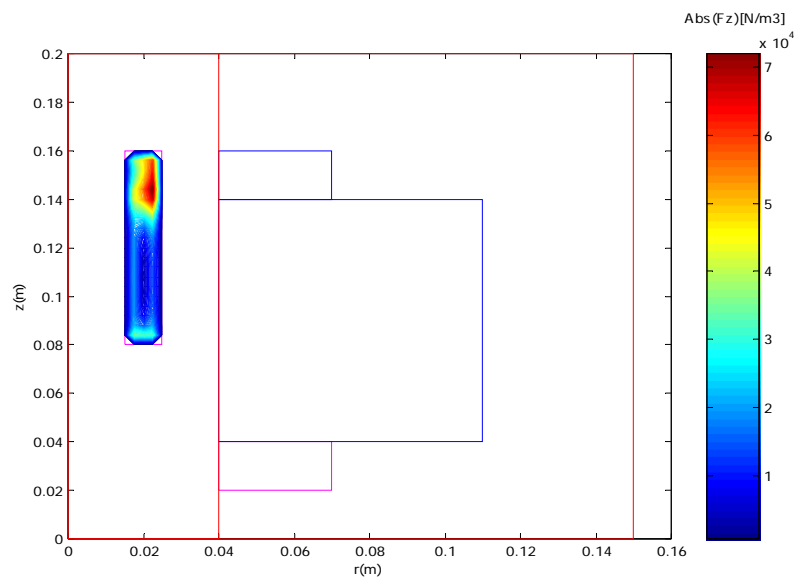


Figure 4.11 La distribution de la valeur absolue de la force MHD axiale pour  $r=0.04m$

On s'aperçoit que plus le rayon (et donc le volume) de la pompe est grande plus la densité de courant circulant dans l'eau de mer est faible, cette remarque est également valable pour la valeur du champ électrique et donc de la DDP appliquée aux électrodes, cette diminution provoque une diminution de la force MHD.

Pour choisir le rayon du canal, on doit faire intervenir un autre phénomène qui entre en jeu, qui est les pertes énergétiques dissipées dans l'eau de mer. Ces dernières seront limitées en diminution de la densité du courant circulant dans l'eau de mer (augmentation du rayon).

Donc, pour avoir une force MHD assez importante en diminuant les pertes Joule, on choisit la valeur du rayon du canal  $r_2 = 0.03m$ .

**4.4 LA GEOMETRIE FINALE DE LA POMPE MHD A CONDUCTION [5], [6], [7], [8]**

Comme il a été présenté ci-dessous, la géométrie finale de la pompe MHD à conduction est représentée par la fig. (4.12)

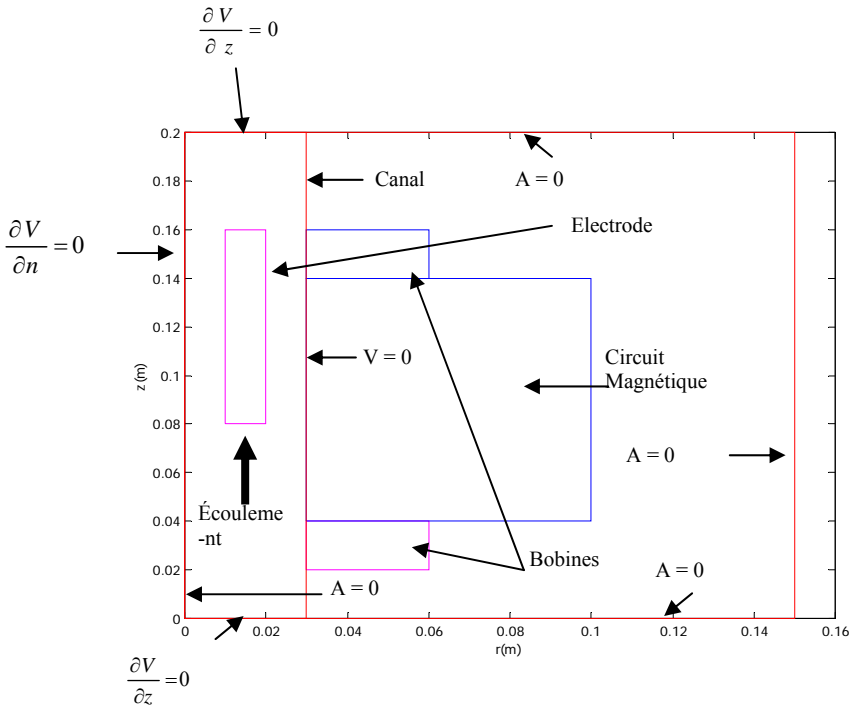


Figure 4.12 La configuration finale de la pompe MHD à conduction

#### 4.5 DISTRIBUTION DU POTENTIEL VECTEUR [5], [6], [7], [8], [9]

Les figures (4.13) et (4.14) représentent la valeur absolue du potentiel vecteur magnétique et ses contours au niveau de chaque bobine et le long de l'électrode.

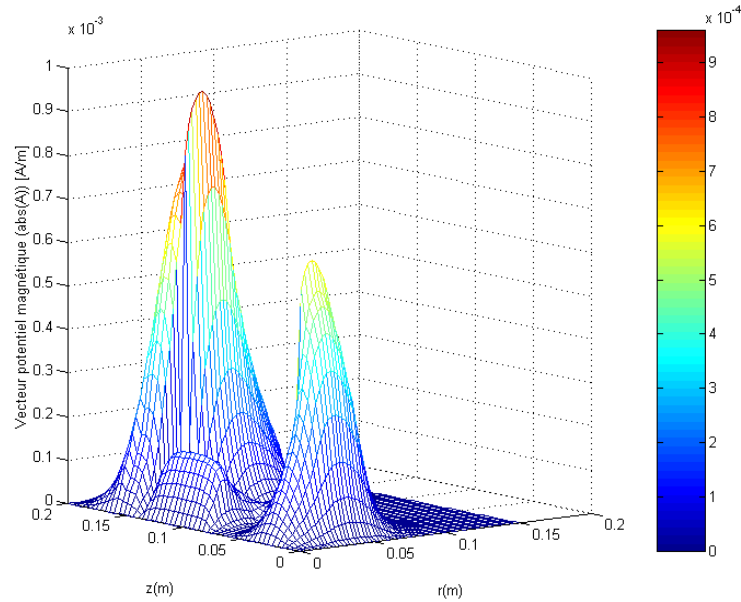


Figure 4.13 Valeur absolue du potentiel vecteur magnétique

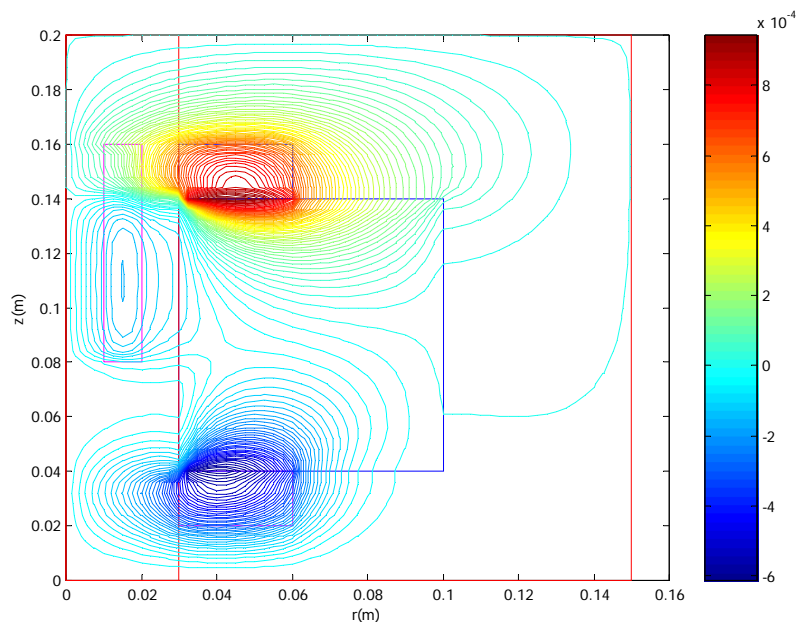


Figure 4.14 Distribution du potentiel vecteur magnétique



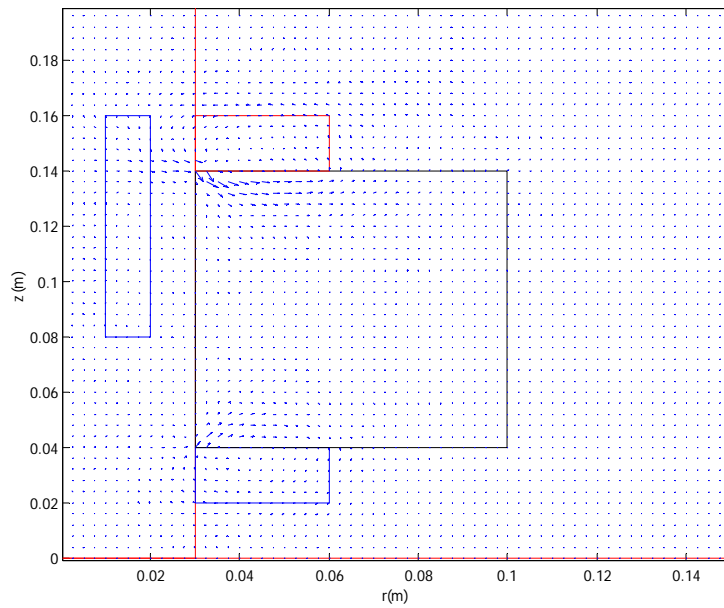


Figure 4.15 Lignes de champ dans la pompe

Les lignes de champ sont représentées par la figure (4.15), elles sont plus significatives à la sortie de l'électrode qu'à l'entrée.

La figure (4.16) montre l'évolution du champ magnétique induit dans notre dispositif.

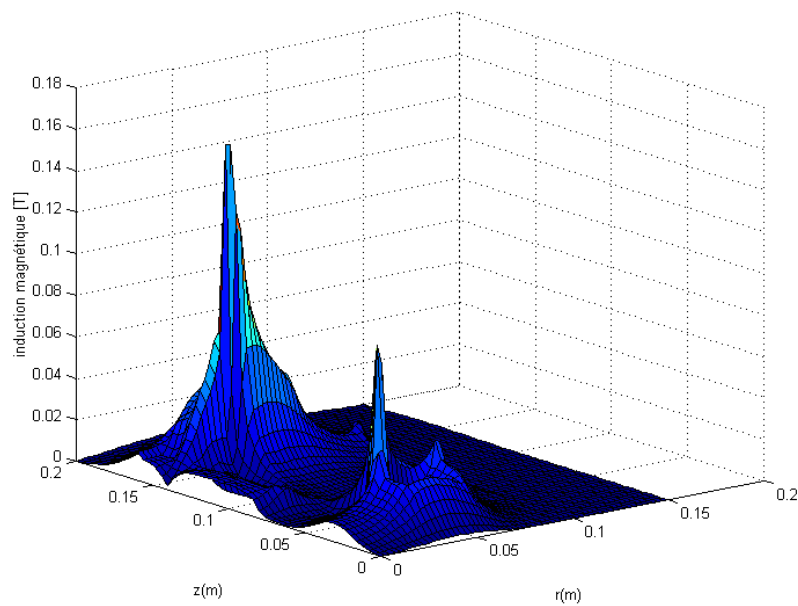


Figure 4.16 Valeur absolue de l'induction magnétique dans la pompe

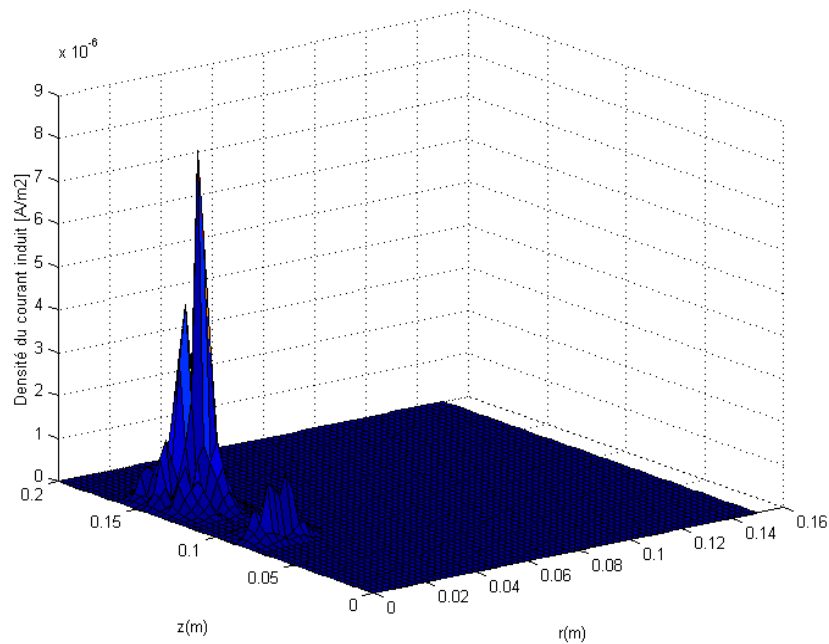


Figure 4.17 Valeur absolue de la densité du courant induit dans la pompe [9]

Quant à la valeur absolue de la densité du courant induit dans la pompe, elle est trop faible ( $7 \cdot 10^{-6} \text{ A/m}^2$ ) par rapport à la valeur de la densité du courant injectée par l'électrode  $J_a = 0,25 \cdot 10^7 \text{ A/m}^2$ . (Voir fig.4.17).

Pour cette raison, on néglige ce courant induit pour le calcul de la force électromagnétique volumique. [9]

#### **4.6 REPRESENTATION DE LA VITESSE POUR LES 3 LONGUEURS D'ELECTRODE L1, L2 ET L3 [4]**

Les figures (4.18), (4.19) et (4.20) représentent la vitesse instantanée à la sortie de l'électrode pour les trois longueurs d'électrode L1, L2 et L3, on remarque que la vitesse atteint une valeur de l'ordre de 1,84 mm/s pour L1 et 15 mm/s pour L2 et 3 mm/s pour L3.

Ces résultats hydrodynamiques sont bien conformes aux résultats électromagnétiques pour le choix de la longueur de l'électrode (L2 estimée)

On remarque aussi que pour les trois longueurs un régime transitoire puis la vitesse se stabilise.

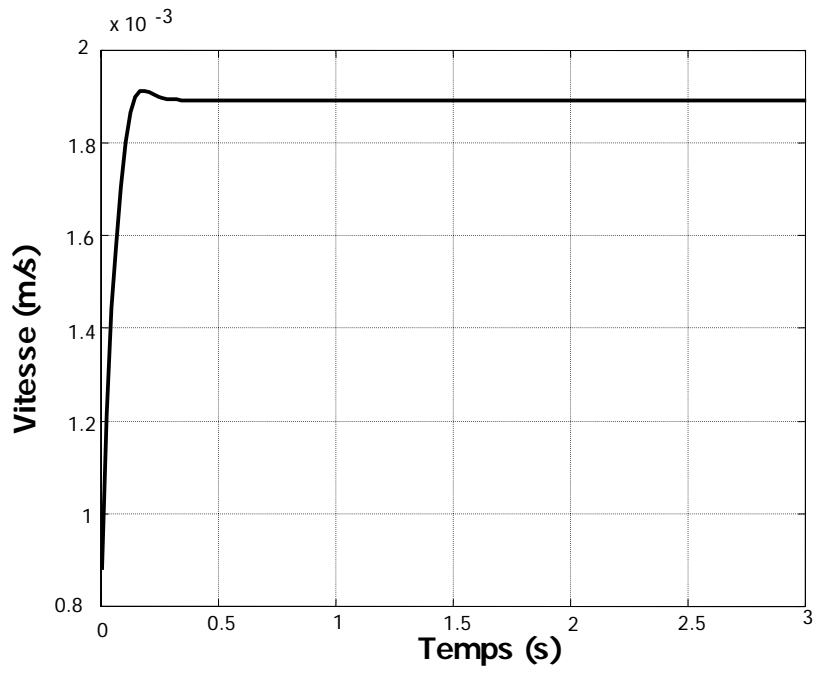


Fig4.18 La vitesse instantanée à la sortie du canal pour L1

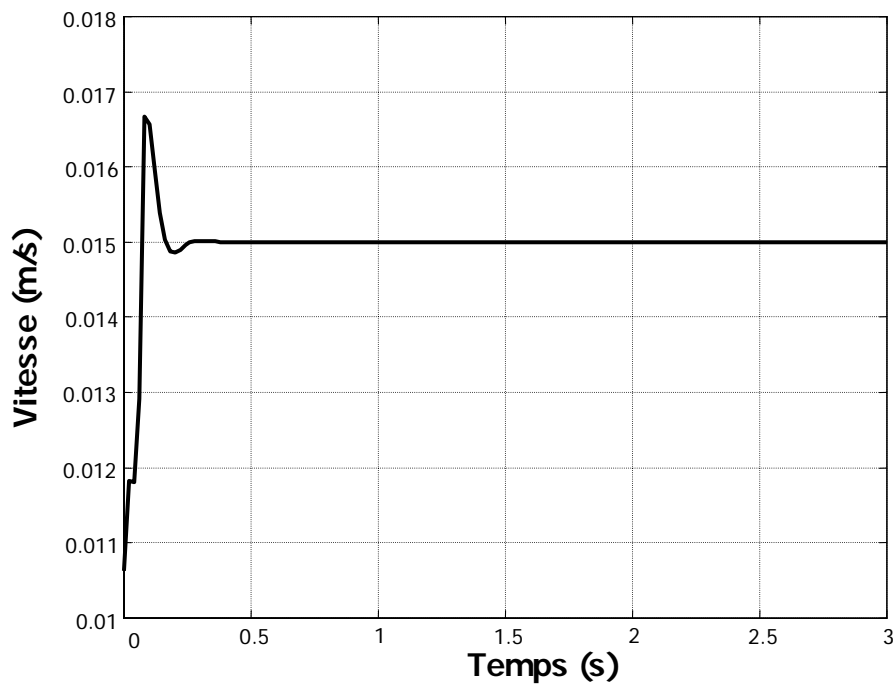


Fig4.19 La vitesse instantanée à la sortie du canal pour L2

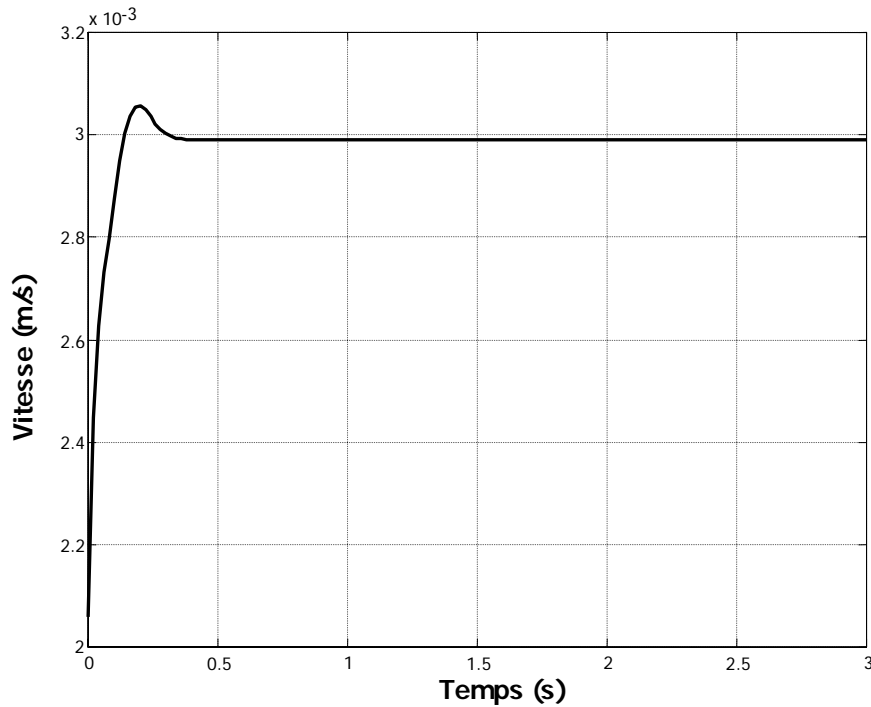


Fig. 4.20 La vitesse instantanée à la sortie du canal pour L3

#### 4.7 REPRESENTATION DE LA VITESSE POUR LA POMPE MHD A CONDUCTION [5], [6], [7], [8], [9]

Les figures (4.21), (4.22) et (4.23) représentent également les vitesses instantanées pour la pompe MHD à conduction à l'entrée du canal, près du bout et sous l'électrode et à la sortie du canal, respectivement et elles montrent que le développement d'écoulement est plus rapide.

Les valeurs maximales pour les trois positions du canal sont respectivement  $1,5 \cdot 10^{-8}$  mm/s (la valeur la plus faible), 40 mm/s (la plus importante) et 12,7mm/s ceci est parce que les forces d'entraînement sont concentrées au fond et sous l'électrode.

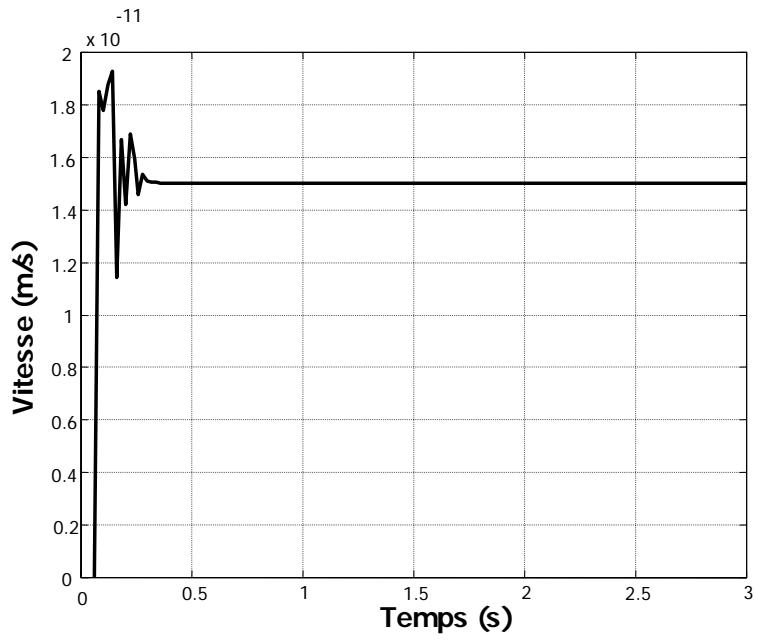


Fig4.21 La vitesse instantanée à l'entrée du canal

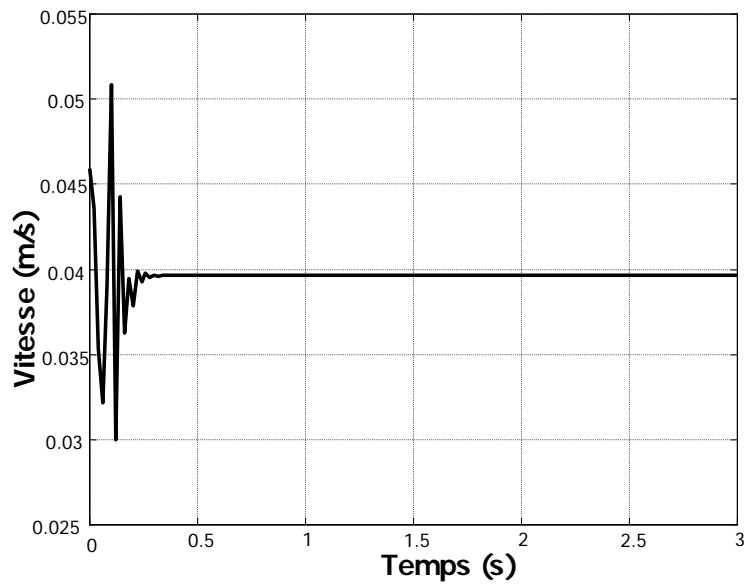


Fig4.22 la vitesse instantanée près du bout et sous l'électrode

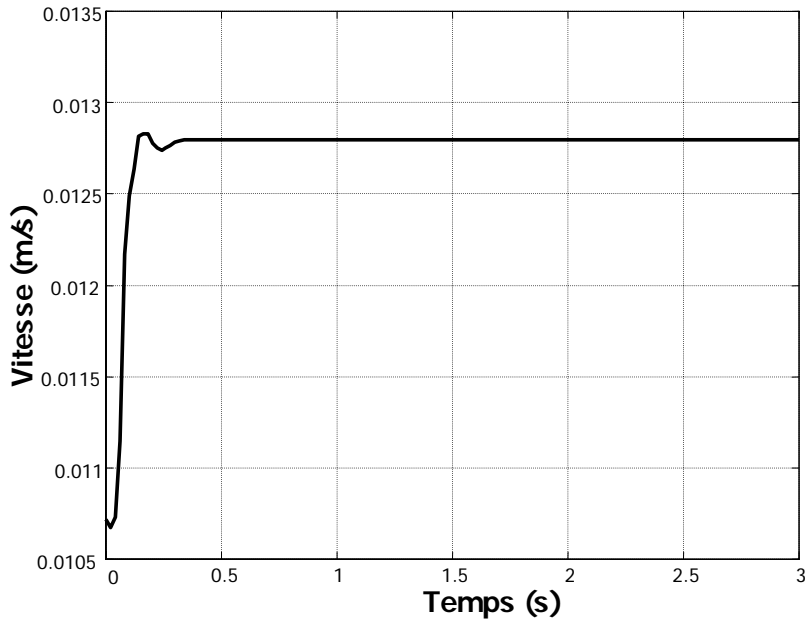


Fig4.23 La vitesse instantanée à la sortie du canal

La figure (4.24) représente la vitesse moyenne le long du canal pour la pompe MHD, on remarque un régime transitoire pour un temps court puis la vitesse se stabilise.

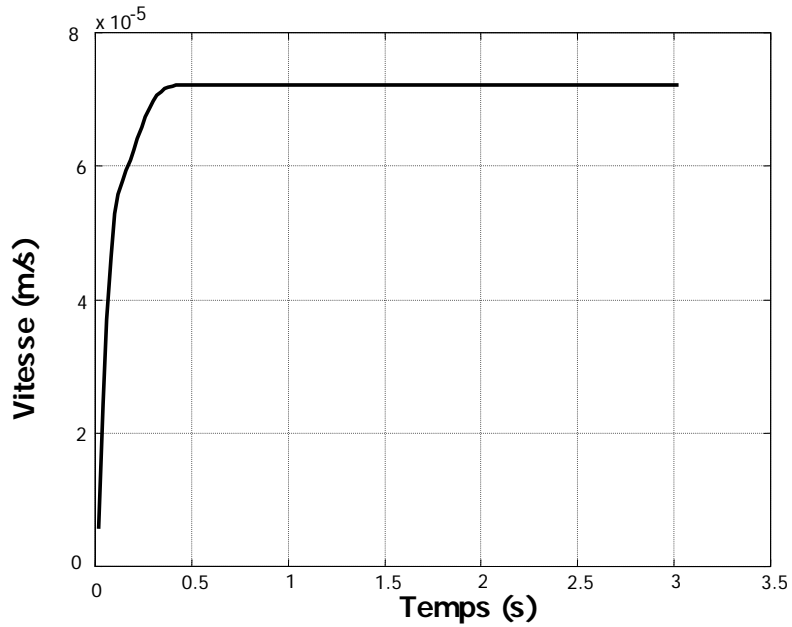


Fig.4.24 Vitesse moyenne d'écoulement le long du canal

#### 4.8 DISTRIBUTION DE LA VITESSE ET DE LA VORTICITE POUR LA POMPE MHD [9]

La figure (4.25) représente la distribution de la vitesse d'écoulement dans le canal de la pompe MHD à conduction.

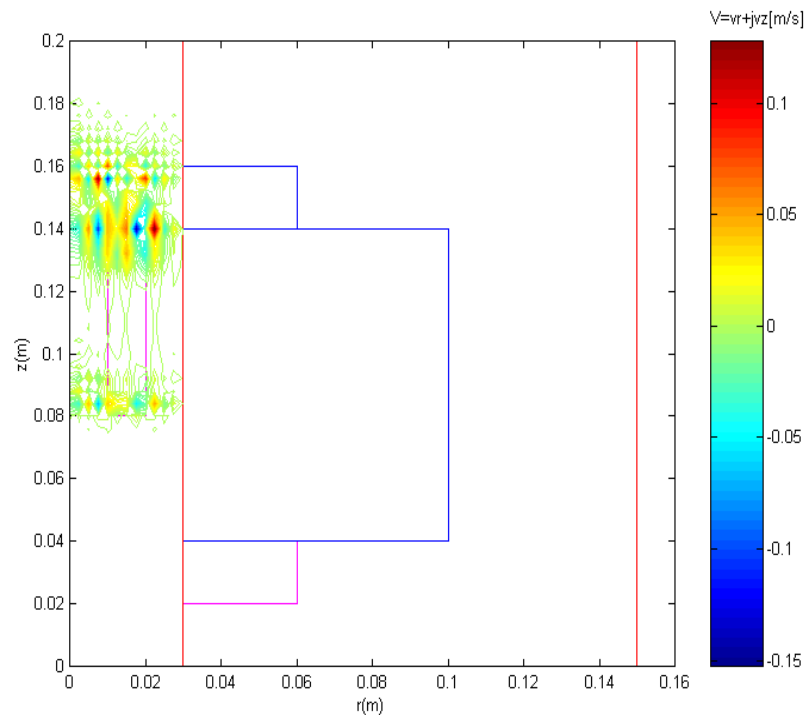


Fig. 4.25 Distribution de la vitesse d'écoulement [4]

La figure (4.26) montre la vorticité qui décrit les mouvements de rotation locale à l'intérieur d'un fluide, cette rotation du fluide s'effectue alors autour d'un cœur à l'intérieur duquel est localisée la vorticité, qui est moins concentrée à l'entrée de l'électrode, dans cette zone, le différentiel ou gradient de vitesse dans le fluide provoque la vorticité.

Par contre, à la sortie de l'électrode, et puisque le fluide le plus proche de la bobine sera soumis à un champ magnétique plus grand, la vorticité est dominante et elle diffuse le long des lignes de champ magnétique.

Donc, dans cette zone de la pompe, la vorticité est créée par des forces magnétohydrodynamiques.

Nous remarquons aussi des valeurs négatives de la vorticité, puisque le fluide est soumis à une force magnétohydrodynamique plus grande que celui qui lui est plus éloigné, là, l'effet du différentiel de cette force tendant à

faire tourner le fluide dans le sens opposé à celui des lignes de champ.

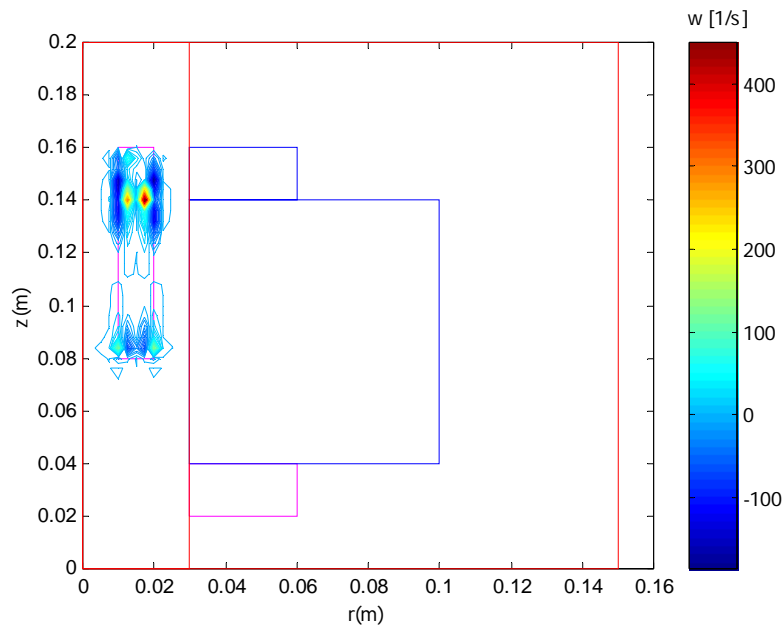


Fig. 4.26 Distribution de la vorticité [9]

#### 4.9 DISTRIBUTION DE LA PRESSION POUR LA POMPE MHD

La pression est représentée par la figure (4.27), alors suite à l'expression de la pression qui dépend de la force MHD, on constate que son allure est identique à celle de la force MHD. Donc, les forces MHD vont créer un gradient de pression entre l'entrée et la sortie de l'électrode, celui-ci est positif : d'après la figure (4.25), la pression augmente de l'entrée vers la sortie de l'électrode menant à pousser l'eau de mer.



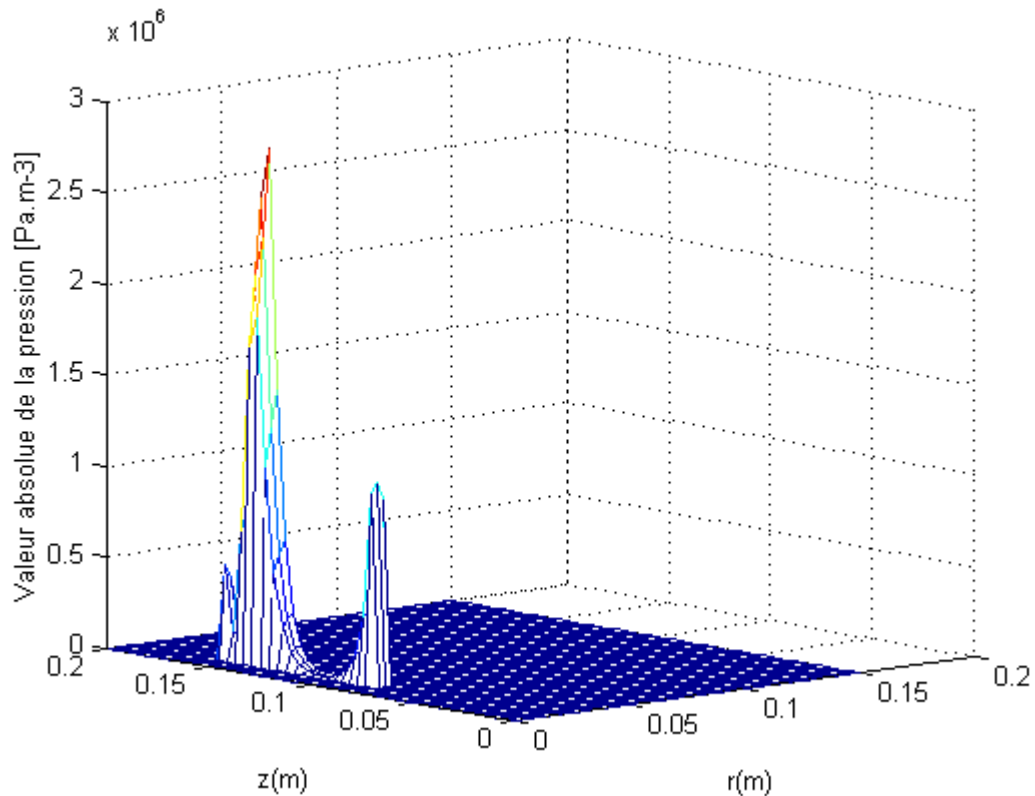


Fig.4.27 Représentation de la pression volumique dans le canal de la pompe MHD à conduction

#### 4.10 LA RELATION ENTRE LA FORCE MHD ET LA VITESSE D'ÉCOULEMENT [5], [6], [7], [8], [9]

Pour montrer l'influence de la force MHD sur la vitesse d'écoulement, la figure (4.28) montre qu'une vitesse négative se produira pour une force MHD négative dans un endroit précis, à  $r = 0,13\text{m}$  et  $z = 0,15\text{m}$ , du canal de la pompe MHD à conduction.

Ce changement de signe de vitesse agit sur le système de pompage en tant qu'une traînée et comme la valeur de cette vitesse est trop faible par rapport à celle de pompage, on peut conclure que la pompe n'est pas influencée par la traînée.

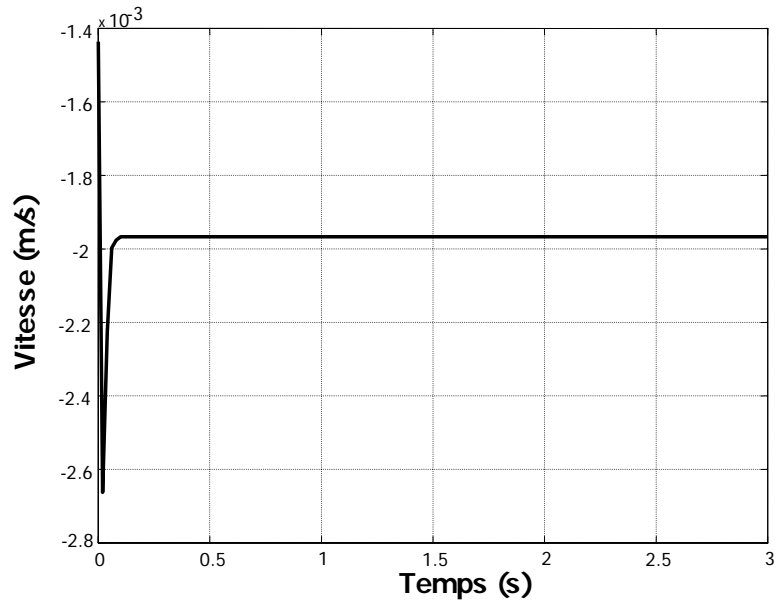


Fig.4.28 Vitesse instantanée pour  $r=0,13$  et  $z = 0,15$ m

#### **4.11 CONCLUSION**

Ce chapitre présente et commente les principales caractéristiques de la nouvelle configuration de la pompe MHD à conduction proposée. Obtenues par simulation.

Les résultats obtenus sont en parfait accord avec les considérations théoriques et les résultats pratiques publiés par différents auteurs [10], [11].

Les conclusions suivantes sont obtenues à partir des résultats de simulation :

- 1- la relation entre la poussée MHD et la vitesse d'écoulement est confirmée,
- 2- la vorticité est transportée par la vitesse.

La configuration proposée de la pompe MHD à conduction simplifie en grande partie les considérations concernant les pompes électromagnétiques. En particulier, il est intéressant de noter que la nouvelle conception peut être utilisée dans d'autres applications telles que les propulseurs MHD.

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] N.Bennecib, R.Abdessemed, S.Drid, “ Calcul électromagnétique d’une pompe annulaire MHD à conduction (2D)” Séminaire International sur les systèmes électromécaniques S.I.S.E.M (2005), université d’Annaba (Algérie)
- [2] N.Bennecib, R.Abdessemed, S.Drid, “ Caractérisation (2D) d’une pompe annulaire MHD à conduction” International Conference on Electrical engineering and its applications ICEEA’06, Mai 22-23 (2006), Université Djillali Liabes, Sidi-Bel-Abbès (Algérie)
- [3] N.Bennecib, R.Abdessemed, S.Drid, “Optimisation of an annular DC pump MHD for seawater”  
4<sup>th</sup> International Conference on Electrical engineering CEE’06, Université de Batna, 07-08 November 2006
- [4] N.Bennecib, R.Abdessemed, S.Drid, “Design and flow simulation for a new DC pump MHD for seawater” Asian Journal of Information Technology 6(2):164-169 2007
- [5] N.Bennecib, R.Abdessemed, S.Drid, “Computation of Magnetic and Hydrodynamic coupling for DC MHD of seawater pumping” Fourth International multi-conference on systems, signals and devices SSD’07, Hammamet, Tunisia Mars 19-22, 2007
- [6] N.Bennecib, R.Abdessemed, S.Drid, “ On the numerical analysis of a new seawater DC pump MHD” Al-Azhar University Engineering Journal JAUES, Vol.2, N°.4, Apr. 2007
- [7] N.Bennecib, R.Abdessemed, S.Drid, “ A finite volume computation of electromagnetic-laminar flow coupled for DC pump MHD” 2<sup>nd</sup> International conference on electrical engineering CEE’07, 26-28 November 2007, Coimbra, Portugal
- [8] N.Bennecib, R.Abdessemed, S.Drid, “ Electric-hydrodynamic characteristics of seawater DC pump MHD for pumping” International conference on electrical engineering design and technologies ICEEDT, November 4-6, 2007, Hammamet, Tunisia

- [9] N.Bennecib, S.Drid, R.Abdessemed, "Numerical simulation of seawater flow produced by conduction MHD pump" International Review of Electrical engineering (I.R.E.E)
- [10]M.Hughes, K.A. Pericleous, M. Cross, "The numerical modelling of DC electromagnetic pump and brake flow", *Appl.Math.Modelling*, vol.19, 1995.
- [11]P.Wang, C.Chang, M.Chang, "Simulation of two-dimensional fully developed laminar flow for a magneto-hydrodynamic (MHD) pump", *Biosensors and bioelectronics20 Elsevier*, pp.115-121, 2004

## **CONCLUSION GENERALE**

La magnétohydrodynamique (MHD) est un domaine très vaste de la physique qui concerne l'interaction entre un champ électromagnétique et un fluide conducteur de l'électricité. Ainsi, on conçoit aisément que, suivant le type d'interaction, on peut trouver la MHD liée aux problèmes apparemment disjoints de la couronne solaire, de la magnétosphère, de la conversion d'énergie fossile en énergie électrique, de la fusion thermonucléaire de la propulsion ou encore aux techniques industrielles de la métallurgie.

Le but de ce tour d'horizon de la MHD est de rappeler la grande diversité des domaines d'intérêts de la MHD, tout en reliant leurs progrès dans certaines applications, et enfin, de se pencher sur la pompe MHD à conduction et son application qui est l'objet de notre étude.

La modélisation numérique de la propulsion MHD linéaire à induction à métaux liquides reste peu abordée et concerne essentiellement les systèmes à conduction utilisant généralement comme fluide des gaz ionisés (plasmas).

Ces techniques ont fait l'objet de plusieurs travaux cités au chapitre trois. Ce domaine a beaucoup évolué, non seulement, avec le développement des matériaux supraconducteurs pouvant supporter des inductions magnétiques importantes, mais aussi par l'apport de méthodes numériques de calcul et leurs couplages en utilisant le couplage des méthodes élément finis – volumes finis (logiciels : flux expert pour la méthode des éléments finis et Cephise pour la méthode des volumes finis).

Le travail de thèse a porté sur l'étude numérique d'un nouveau prototype de pompe MHD à conduction dont le fluide considéré est l'eau de mer.

Dans un premier temps, un dimensionnement de la pompe MHD à conduction a été réalisé, où les paramètres tels que le diamètre, la longueur de l'électrode et son emplacement par rapport aux bobines ont été définis.

Dans ce travail, l'apport personnel de recherche concerne la mise en évidence des principaux paramètres électromagnétiques et hydrodynamiques qui traduisent les capacités et les performances de la pompe MHD à conduction proposée par l'application de la méthode des volumes finis sur un modèle 2D.

Suite à la spécificité de la pompe, il a été impératif de procéder à une étude détaillée sur la mécanique des fluides, la conversion d'énergie dans les pompes magnétohydrodynamiques, ainsi que la mise en équation de la force et de la vitesse d'écoulement.

A travers la simulation du modèle, il a été possible de prédire le comportement électromagnétique et hydrodynamique du prototype proposé avec l'eau de mer comme fluide conducteur.

De façon générale, l'ensemble du calcul numérique réalisé a démontré la faisabilité du prototype proposé.

Il serait intéressant de poursuivre cette étude par :

- le passage à l'étude de distribution de la température dans le canal de la pompe, analytiquement et numériquement ;
- la modélisation spécifique par les circuits de la pompe afin de quantifier l'effet de l'écoulement électrocinétique transversal ;
- la résolution d'un prototype expérimental. (annexe 5)

## **ANNEXES**

- Annexe1 : Equations en coordonnées cylindriques
- Annexe2 : Equations de Navier-Stokes en incompressible
- Annexe3 : La méthode des éléments finis
- Annexe4 : Les méthodes de Meshless
- Annexe5 : Description du nouveau prototype de la MHD à conduction



## Annexe 1

### Coordonnées cylindriques

$$B = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$$

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z$$

### Gradient :

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z$$
$$\text{grad } \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

### Divergence :

$$\text{div } \vec{v} = \text{tr}(\text{grad } \vec{v}) = \frac{\partial(v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

### Laplacien :

$$\Delta p = \text{div}(\text{grad } p) = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

### Rotationnel :

$$\text{rot } \vec{v} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

## Annexe 2

### Continuité :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

### Navier-Stokes (quantité de mouvement) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \vec{v}) \vec{v} = \frac{1}{\rho} \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{v} \quad , \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

### En coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right]$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - \frac{v_r v_\theta}{r} = \frac{1}{\rho} f_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right]$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]$$

## Annexe 3

### La Méthode des Eléments Finis

La plupart des problèmes de physique peuvent se formuler ainsi : trouver un champ (scalaire, vectoriel et tensoriel)  $u(x,t)$ , satisfaisant à un ensemble d'équations aux dérivées partielles et d'équations ordinaires en tout point  $x$  d'un domaine  $\Omega$  à tout instant  $t$ ,

$$P(u(x,t)) = 0 \quad , \quad x \in \Omega$$

et respectant des conditions aux limites (éventuellement fonction du temps) sur la frontière  $\partial\Omega$  de ce domaine par exemple du type  $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$  :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_{\partial\Omega_D} \quad , \quad x \in \partial\Omega_D \\ \frac{\partial}{\partial n} u(x,t) &= q_{\partial\Omega_N} \quad , \quad x \in \partial\Omega_N \end{aligned}$$

La MEF consiste à rechercher une solution approchée de la solution exacte sous la forme d'un champ  $\tilde{u}(x,t)$  défini par morceaux sur des sous-domaines de  $\Omega$ . Les  $n$  sous-domaines  $\Omega_i$  doivent être tels que :

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^n \Omega_i &= \Omega \\ \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2 : (i \neq j) &\Rightarrow (\hat{\Omega}_i \neq \hat{\Omega}_j) \end{aligned}$$

Où  $\hat{\Omega}_i$  désigne l'intérieur de  $\Omega_i$ . Autrement dit, les  $\Omega_i$  sont une partition de  $\Omega$  comme illustré par la figure A.3.

Les champs  $\tilde{u}_i(x,t)$ , définis dans chaque sous-domaine, sont des champs choisis parmi une famille arbitraire de champs (généralement polynomiaux). La famille de champs locaux est appelée espace des fonctions d'interpolation de l'élément.

La famille de champs globaux  $\tilde{u}(x,t)$ , obtenus par sommation des champs locaux, est appelée espace des fonctions d'interpolation du domaine  $\Omega$

Le champ dans chaque sous-domaine  $\Omega_i$  est déterminé par un nombre fini de valeurs de ce champ (ou valeurs de ses dérivées) en des points choisis arbitrairement dans le sous-domaine appelés nœuds. Le champ local est une interpolation entre les valeurs aux nœuds. Le sous-domaine muni de son interpolation est appelé *élément*.

La recherche de solution par Eléments Finis consiste donc à déterminer quel champ local on attribue à chaque sous-domaine pour que le champ global  $\tilde{u}(x,t)$ , obtenu par sommation de ces champs locaux, soit *proche* de la solution exacte du problème.

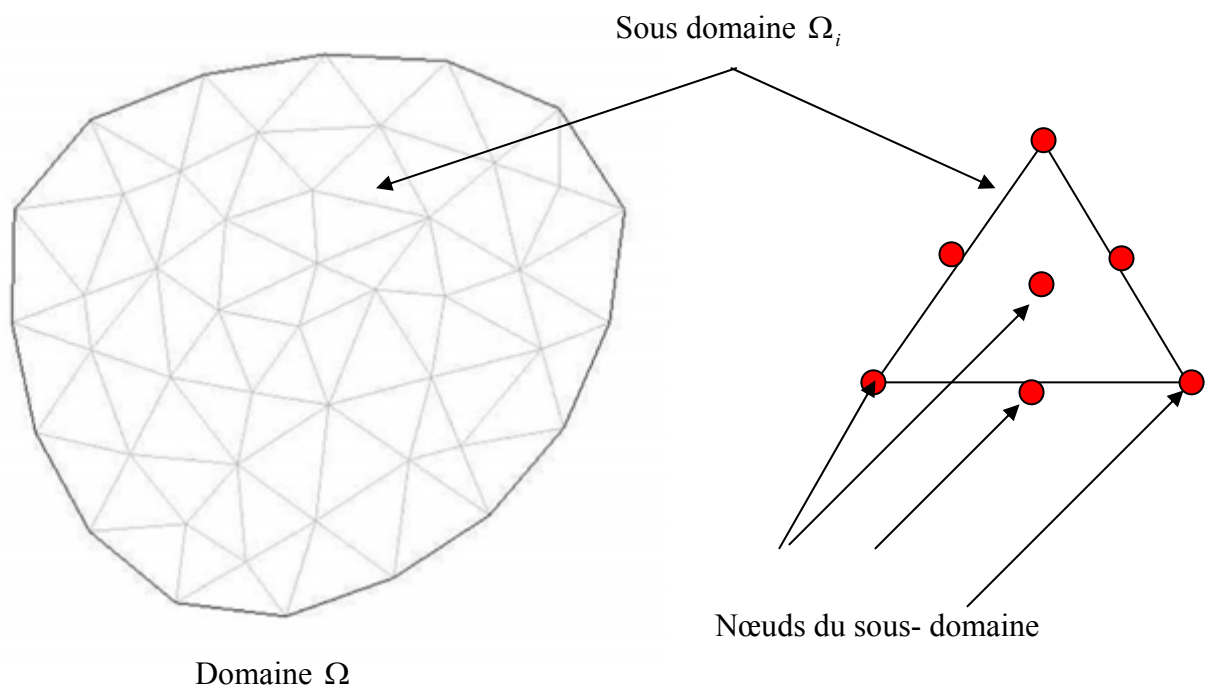


Figure A.3 .Représentation du domaine discrétisé  $\Omega$  et d'un de ses sous-domaines.

La qualité de la solution approchée (proximité de la solution exacte) dépend de la division en sous-domaines (nombre et dimensions des sous domaines), du choix de la famille de champs locaux dans chaque sous-domaine et des conditions de continuité qu'on impose aux frontières des sous-domaines. Une fois ces choix faits, il reste à chercher une combinaison de champs locaux qui satisfait *au mieux* les équations.

Pour résoudre un problème par la MEF, on procède par étapes successives :

1. On se pose un problème physique sous la forme d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles à satisfaire en tout point d'un domaine  $\Omega$  , avec des conditions aux limites sur la frontière  $\partial\Omega$  ;
2. On construit une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : c'est la formulation variationnelle du problème ;
3. On divise  $\Omega$  en sous-domaines : c'est le maillage. Les sous-domaines sont appelés mailles ;
4. On choisit la famille de champs locaux, c'est-à-dire à la fois la position des nœuds dans les sous-domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds (et éventuellement des dérivées). La maille complétée par ces informations est alors appelée élément ;
5. On ramène le problème à un problème discret. La solution approchée est entièrement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments. Le problème fondamental de la MEF peut se résumer en deux questions :
  - a. comment choisir le problème discret dont la solution est proche de la solution *exacte* ?
  - b. quelle signification donner au terme *exact* ?
6. on résout le problème discret : c'est la résolution ;

7. on peut alors construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et en déduire d'autres grandeurs : c'est le post-traitement ;

8. on exploite la solution pour juger de sa qualité numérique.

Les étapes de 1 à 5 sont souvent rassemblées sous le nom de prétraitement.

Actuellement, le travail de ces différentes étapes est assisté par un grand nombre de logiciels. Il reste que pour maîtriser leur utilisation, il est indispensable de comprendre les fondements de la méthode, notamment les étapes 3 et 4, ne serait-ce que pour choisir en toute connaissance de cause parmi les options que ces logiciels proposent.

## **Annexe 4**

### **LA METHODE MESHLESS**

Les méthodes sans maillage sont pourtant apparues il y a 25 ans, mais les recherches poussées à leur sujet n'ont démarré il y a très peu de temps (années 90). C'est en 1977 que Lucy introduit la méthode SPH (Smooth Particle Hydrodynamics) afin de modéliser les phénomènes astrophysiques. Cependant, cette méthode posait des problèmes d'instabilités. Ce n'est qu'en 1995 que Swegle, Hicks et Attaway proposèrent une méthode de stabilisation.

Parallèlement, en 1994, Belytschko, Lu et Gu adaptèrent la méthode d'approximation des moindres carrés pondérés de Nayroles au meshless. Ils la nommèrent EFG (Element-Free Galerkin). Cette méthode est plus stable que la SPH, mais aussi plus coûteuse.

Récemment, une avancée a été accomplie dans la compréhension de ces méthodes. En effet, Babuska et Melenk (1995), puis Duarte et Oden (1996) reconnurent que ces méthodes étaient en fait des cas particuliers de la partition de l'unité (Partition Unity ou PU), permettant de formidables extensions de ces méthodes.

Le développement de la generalized finite difference method, ainsi que les particle-in-cell methods (Sulsky et Schreyer) ont aussi ouvert d'autres directions de recherche.

### ***Aspects Théoriques***

#### **1 Cas d'un espace à une dimension**

On introduit la fonction  $g(x)$  définie sur le domaine  $\Omega$ , dans l'espace de coordonnées  $X$ . Dans le cas d'un espace à une dimension,  $X$  signifie  $x$  ;  $(x, y)$  dans un espace à 2 Dimensions et  $(x, y, z)$  en 3D.

Dans un premier temps, il faut choisir une base de fonctions qui servira à construire l'interpolation. Cette base est constituée de monômes définis dans l'espace X. **on note cette base P(X)**. On note m la dimension de cette base.

Voici, dans des espaces à 1 ou 2 dimensions des exemples de bases :

- Base linéaire 1D, m=2 :  $\{P(x)^T\} = \{1, x\}$
- Base trigonométrique 1D, m=2 :  $\{P(x)^T\} = \{1, \cos(x)\}$
- Base quadratique 1D, m=3 :  $\{P(x)^T\} = \{1, x, x^2\}$
- Base linéaire 2D, m=3 :  $\{P(x)\}^T = \{1, x, y\}$
- Base trigonométrique 2D, m=3 :  $\{P(x)\}^T = \{1, \cos(x), \cos(y)\}$
- Base quadratique 2D, m=6 :  $\{P(x)\}^T = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$

Construisons alors l'interpolation d'une fonction g(x) en dimension 1 :

Supposons connues les valeurs nodales  $g_I = g(x_I)$

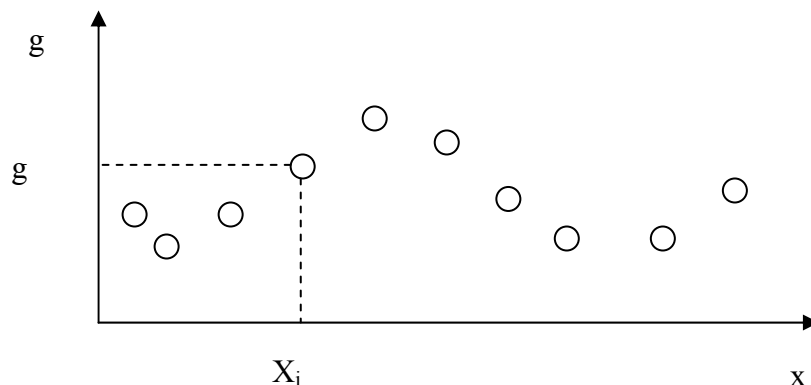


Figure A.4. Les N valeurs nodales de la fonction

On définit ensuite pour chacun de ces nœuds un domaine d'influence caractérisé par son diamètre d'influence  $d_{inf,I}$ . On introduit aussi à chaque nœud une fonction de poids,  $w_I(X) = w_I(X - X_I)$  qui est positive sur le domaine d'influence du nœud, vaut 1 en  $X = X_I$ , et est nulle en dehors du domaine.

Déterminons l'approximation de la fonction g en un point  $X^*$ . Pour cela, on calcule en ce point les valeurs des fonctions de poids des n points qui



influencent  $X^*$ . (Ce sont tous les nœuds contenant  $X^*$  dans leur domaine d'influence.) ( $n \leq N$ ).

L'approximation des moindres carrés pondérés au voisinage de  $X^*$  peut s'écrire:

$$(L^{X^*})(X) = \{p(X)\}^T \{a^*\}$$

1) On détermine les coefficients  $a^*$  en minimisant l'expression suivante par rapport aux composantes  $a_i$  de  $a^*$ :

$$\min_{\{a^*\}} \sum_{i=1}^n w_i(X^*) (\{p(X_i)\}^T \{a^*\} - g_i)^2$$

On remarque que la spécificité de l'interpolation par moindres carrés pondérés est que le poids (donc l'influence d'un nœud) augmente si celui-ci est proche de  $X^*$ .

On obtient donc une courbe (dont l'ordre dépend de la base) qui ajuste au mieux les  $n$  nœuds influençant  $X^*$ .

Le cas suivant est obtenu avec une base linéaire:

On peut ensuite réitérer cette approximation en un point  $X^{**}$  quelconque:

Si on appelle  $g^h(X^*) = (L^{X^*})(X^*)$ , on peut écrire cette fonction de  $X^*$  comme une fonction de  $X$ , et donc:

$$g^h(X) = \{p(X)\}^T \{a(X)\}$$

$\{a(X)\}$  est évalué pour tout  $X$  en minimisant la norme  $L^2$  pondérée discrète suivante:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n(X)} w_i(X^*) (\{p(X_i)\}^T \{a(X)\} - g_i)^2$$

Avec  $n(X) \in N$ , le nombre de nœuds influençant le point de coordonnées  $X$ .

Il faut remarquer que les coefficients de  $\{a(X)\}$  sont variables. L'interpolation  $g^h(X)$  est donc une fonction non rationnelle et non polynomiale même si sa base l'est. Dans le cas présenté, la fonction interpolée est l'enveloppe de la famille de droites définies en tout point  $X$ .

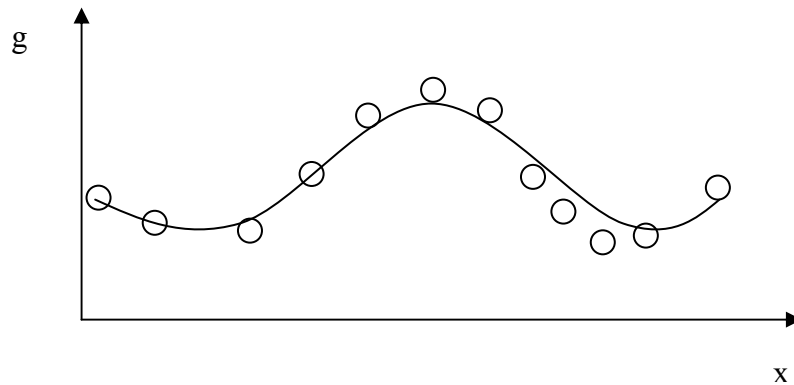


Figure A.4.a Résultat d'une interpolation par moindres carrés pondérés à coefficients variables.

2. **Détermination du vecteur  $\{a(X)\}$**  Pour déterminer les coefficients  $a_k$  de  $\{a(X)\}$  (coefficients d'interpolation), il faut minimiser la norme  $J$  définie plus tôt. Cette minimisation s'écrit:

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = 0 \quad \forall k = 1 \dots m$$

En développant cette expression sous forme matricielle, on trouve:

$$\{a(X)\} = [A(X)]^{-1} \cdot [C(X)] \cdot \{g\}$$

Avec:  $[A(X)]$ , matrice de  $(m \times m)$

$$[A(X)] = \sum_{i=1}^n \left[ w_i(X) \cdot \{p(X_i)\} \cdot \{p(X_i)\}^T \right]$$

Et  $[C(X)]$ , matrice de  $(m \times m)$ :

$$[C(X)] = [w_1(X) \cdot \{p(X_1)\}, \dots, w_n(X) \cdot \{p(X_n)\}]$$

### 3. **Expression des fonctions de forme**

Connaissant  $\{a(X)\}$ , on peut maintenant obtenir  $g^h(X)$  en fonction des valeurs à interpoler  $\{g\}$ :

$$g^h(X) = \{p(X)\}^T \cdot [A(X)] \cdot [C(X)] \cdot \{g\}$$

On peut donc définir les fonctions de forme par le vecteur:

$$\{N_1(X), \dots, N_n(X)\} = \{p(X)\}^T \cdot [A(X)] \cdot [C(X)]$$

Donc:

$$N_i(X) = \{\{p(X)\}^T \cdot [A(X)]^{-1} \cdot [C(X)]\}_i$$

La fonction interpolée en X peut donc s'écrire classiquement sous la forme:

$$g^h(X) = \sum_{i=1}^n N_i(X) \cdot g_i$$

On peut montrer que cette interpolation est consistante. La consistance quantifie la capacité d'une interpolation à représenter exactement toute fonction engendrée par l'espace  $\{p(X)\}$ .

De plus, il faut noter que  $N_i(x_j) = \delta_{ij}$ .

On ne peut donc pas simplement forcer un déplacement, comme en éléments finis. C'est pour quoi on a introduit les multiplicateurs de Lagrange dans la formulation du problème.

#### **4. Passage en 2D**

On peut ensuite facilement passer de l'exemple 1D à l'exemple 2D, en procédant de la même façon qu'en EF pour passer d'une modélisation poutre à une modélisation 2D. Cette fois-ci, le domaine d'influence est un cercle (ce n'est pas obligatoire. En effet, tout polygone convexe comme les carrés, les rectangles peut être utilisé pour délimiter les domaines d'influence).

## Annexe 5

### DESCRIPTION DU PROTOTYPE DE LA POMPE MHD PROPOSE AU LEI

Suite à ce schéma idéal d'une pompe électromagnétique (fig. 1.2) et au prototype qui fait l'objet de la thèse (voir fig.2.1), on a pu concevoir un nouveau prototype tout en prenant en considération le système d'isolation dans l'électrode de polarité alternée avec une intensité de champ magnétique extérieur constant tout au long du canal. Donc pour notre pompe on a quatre électrodes de polarité alterné.

A travers l'étude analytique on a pu présenter quelques caractéristiques telles que :

- l'expression du débit volumique en fonction de pertes de pression ;
- l'expression de la vitesse d'écoulement ;
- l'expression du rendement.

Pour la simulation par COMSOL, on introduit la configuration à étudier qui est la pompe MHD à conduction en 2D avec indication de type de problème physique, on va traiter deux problèmes électromagnétiques et hydrodynamiques donc deux équations à résoudre l'équation de Maxwell et Navier-stokes.

Quelques résultats réalisés par le logiciel mais pour une pompe à 6 électrodes de polarité alternée:

**1) La distribution de la densité du flux magnétique B et les lignes de la force de Lorentz** ; (fig. A5.1)

**2) La distribution du potentiel magnétique ( $A_\phi$ )** ; (fig. A5.2)

**3) Représentation de la composante axiale du champ magnétique** ; (fig. A5.3)

**4) La représentation du champ magnétique radial  $H_r$**  ; (fig. A5.4)

**5) La représentation de la force de Lorentz axiale  $F_z$**  ; (fig. A5.5)

**6) La distribution de la force de Lorentz radiale  $F_r$**  ; (fig. A5.6)

**7) La distribution de la vitesse d'écoulement radiale  $v_r = u$  ; (figA5.7)**

**8) Distribution de la vitesse d'écoulement axiale  $v_z = v$  ; (figA5.8)**

**9) Distribution de la pression ; (figA5.9)**

**10) Distribution de la vorticité le long du canal ; (figA5.9)**

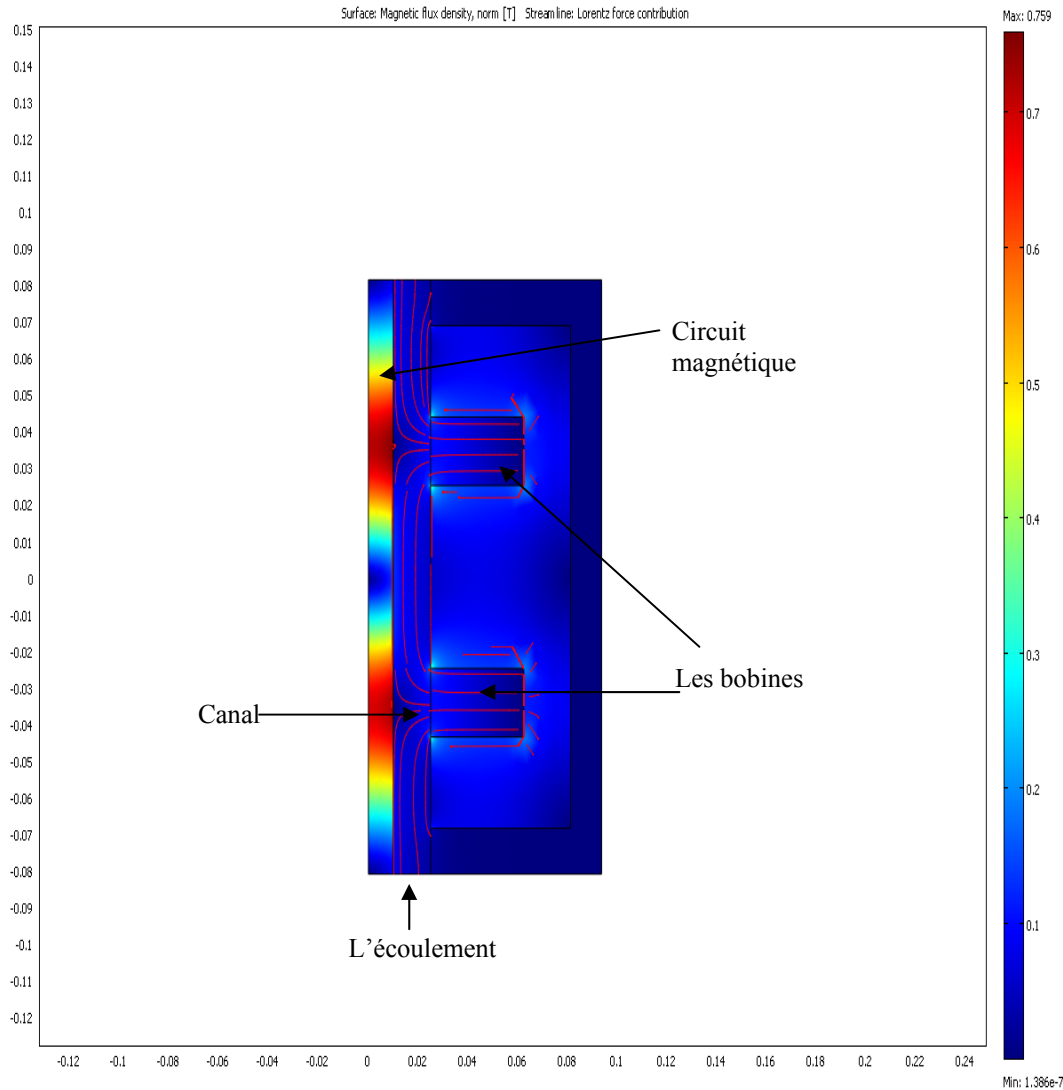


Figure A5.1 Distribution de la densité du flux magnétique B et les lignes de la force de Lorentz pour un 1/6  me de la pompe MHD à conduction proposée en coupe verticale

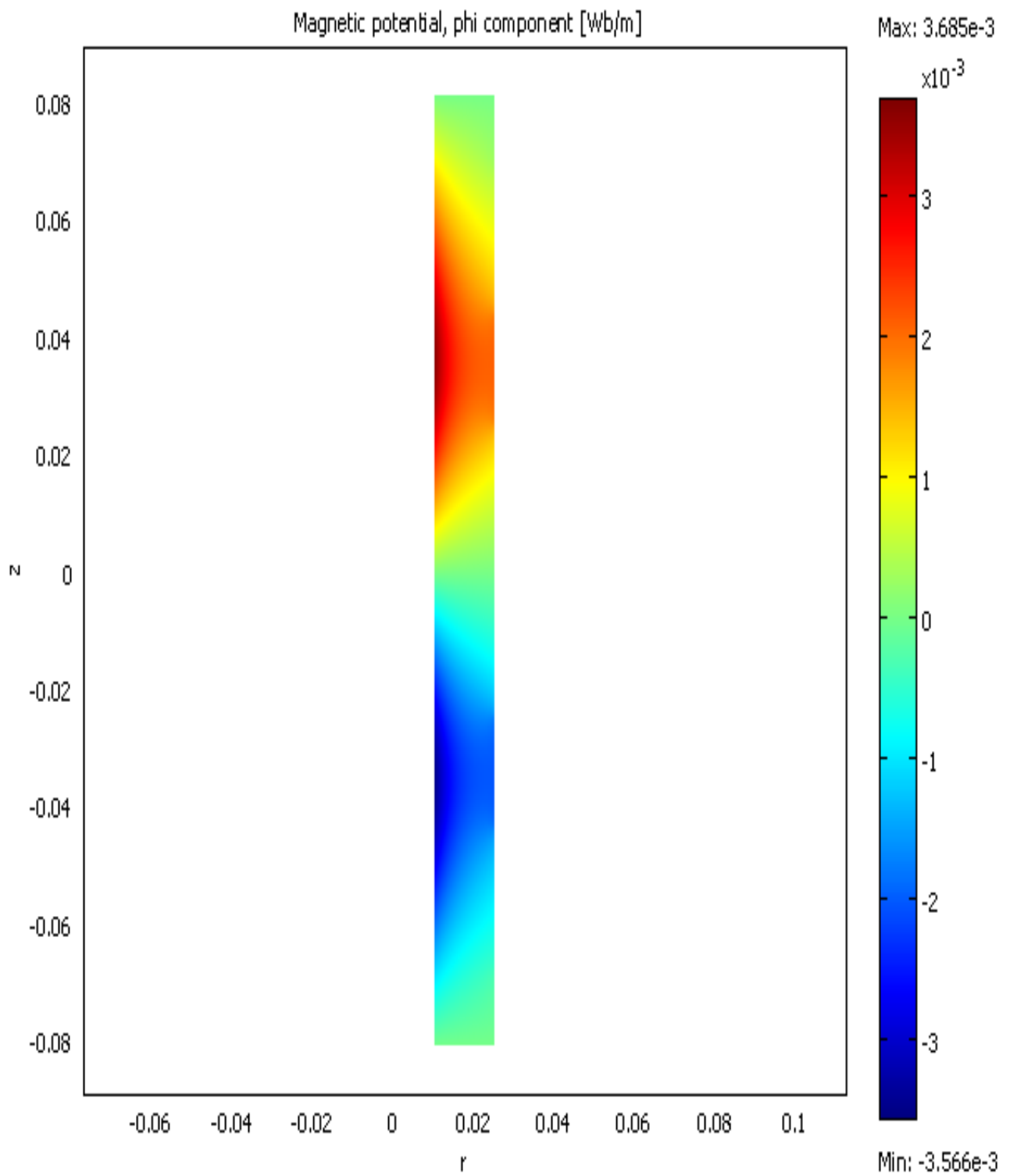


Figure A5. 2 Distribution du potentiel magnétique

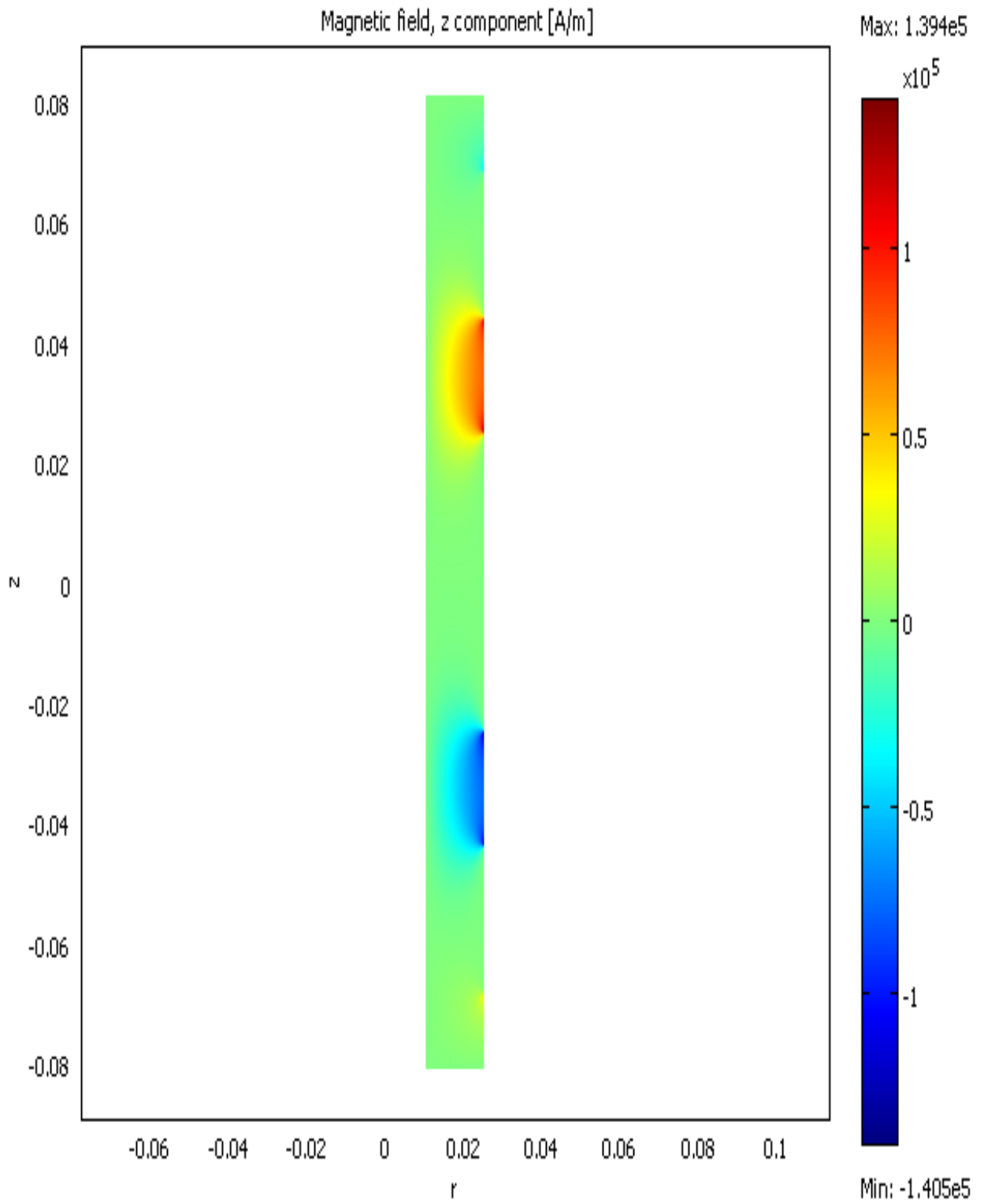


Figure A5.3 Distribution du champ magnétique axiale le long du canal

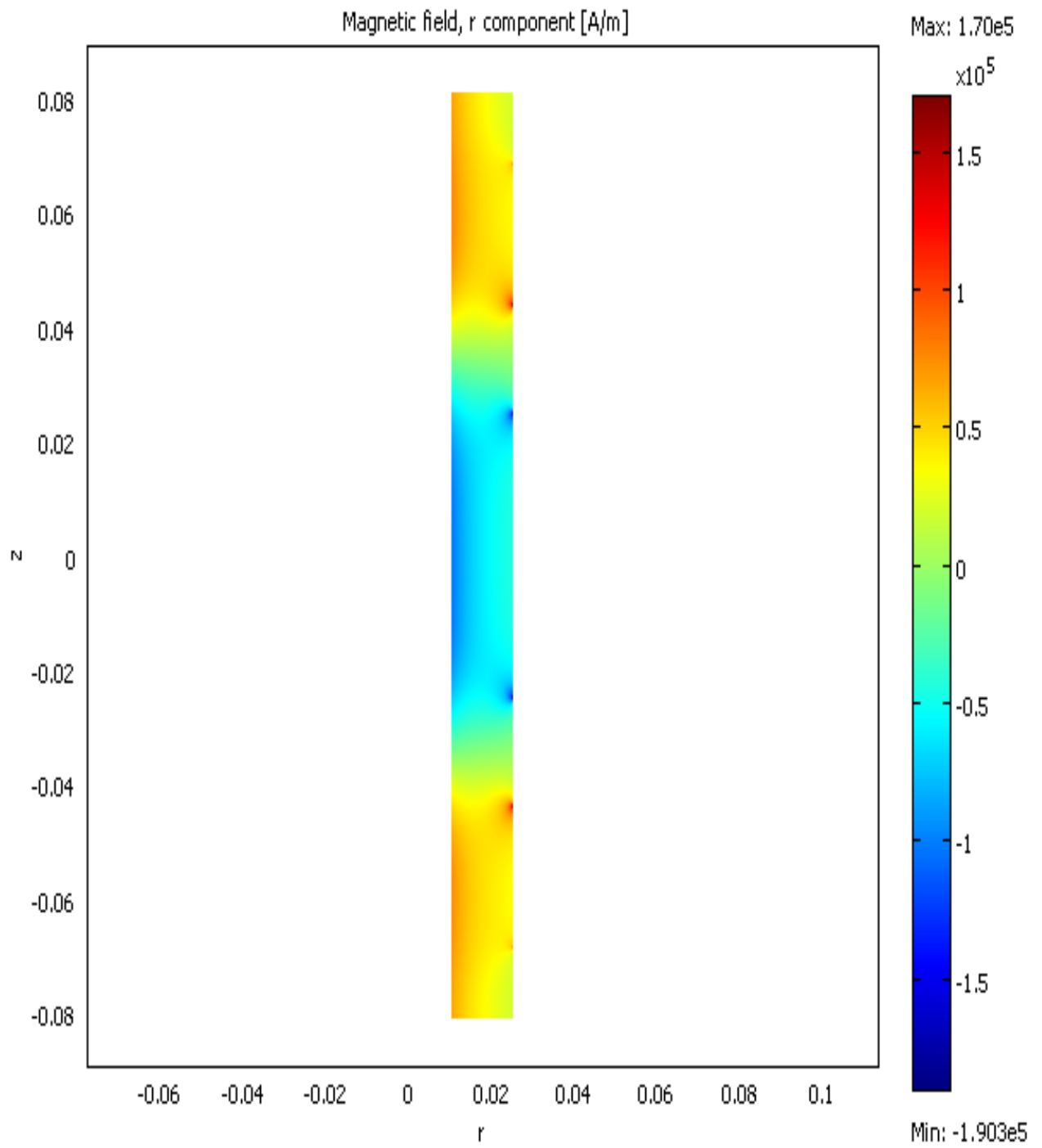


Figure A5.4 Distribution du champ magnétique radial le long du canal.



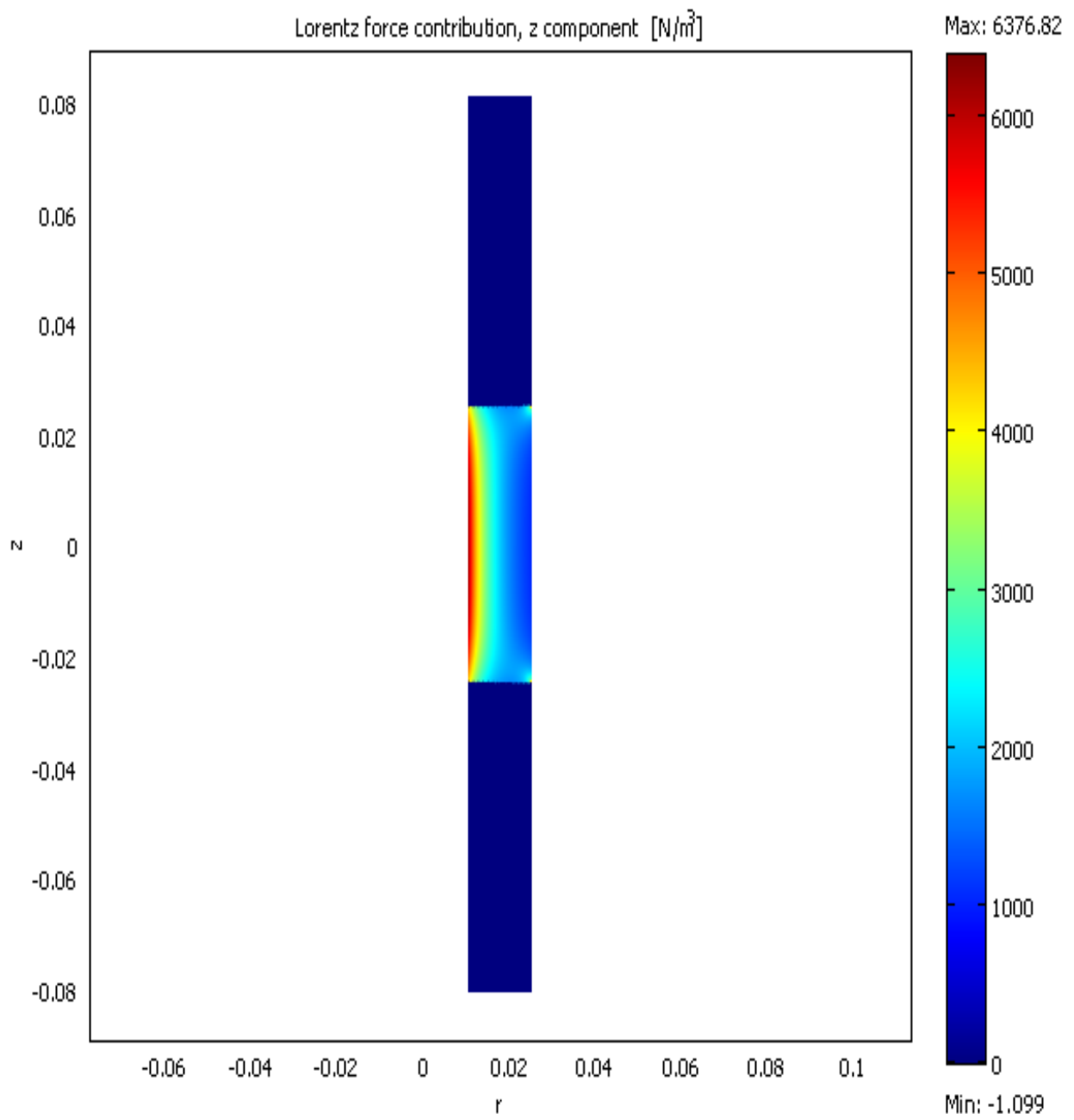


Figure A5. 5 Distribution de la force de Lorentz axiale le long du canal.

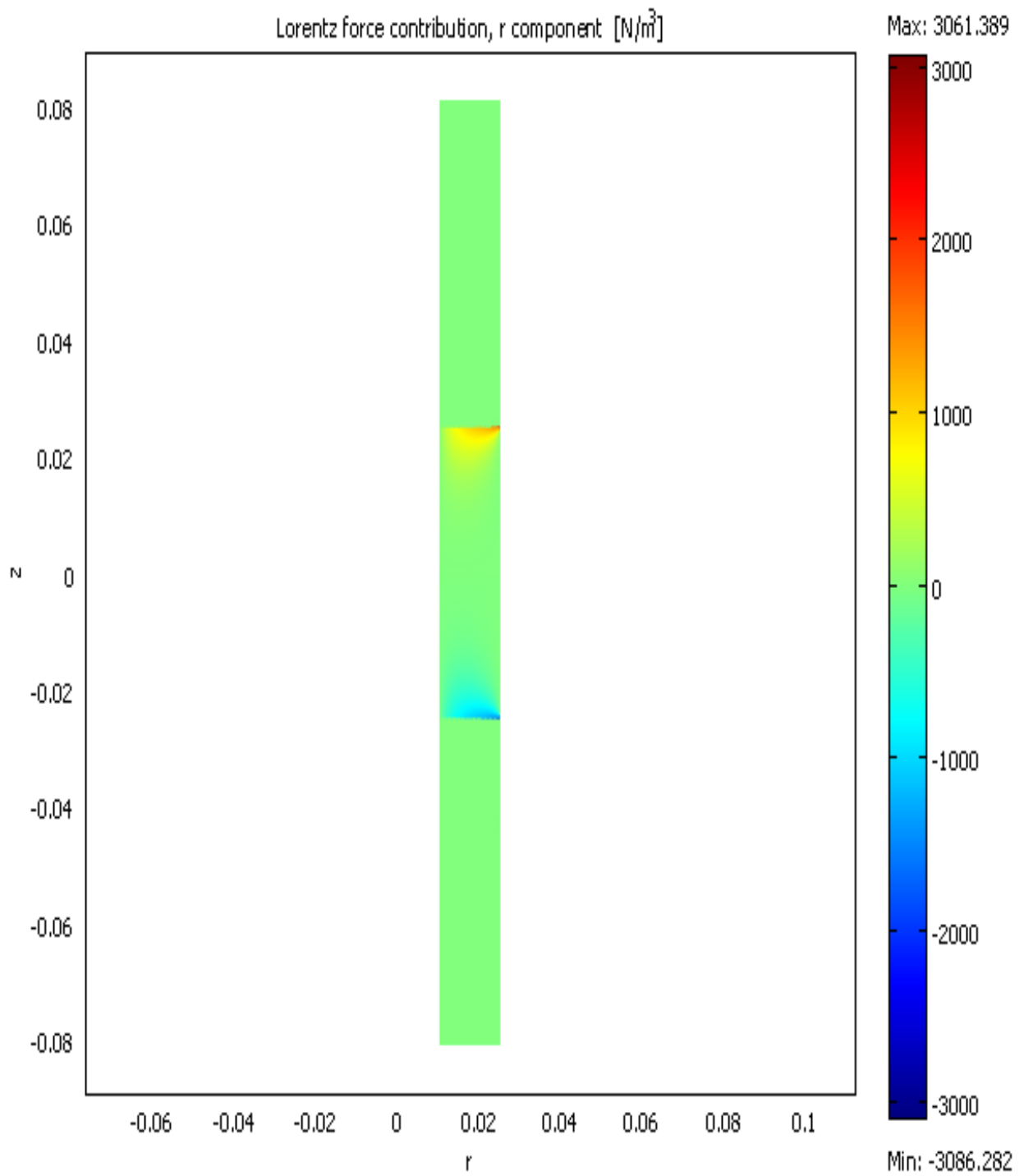


Figure A5.6 Distribution de la force de Lorentz radiale le long du canal.

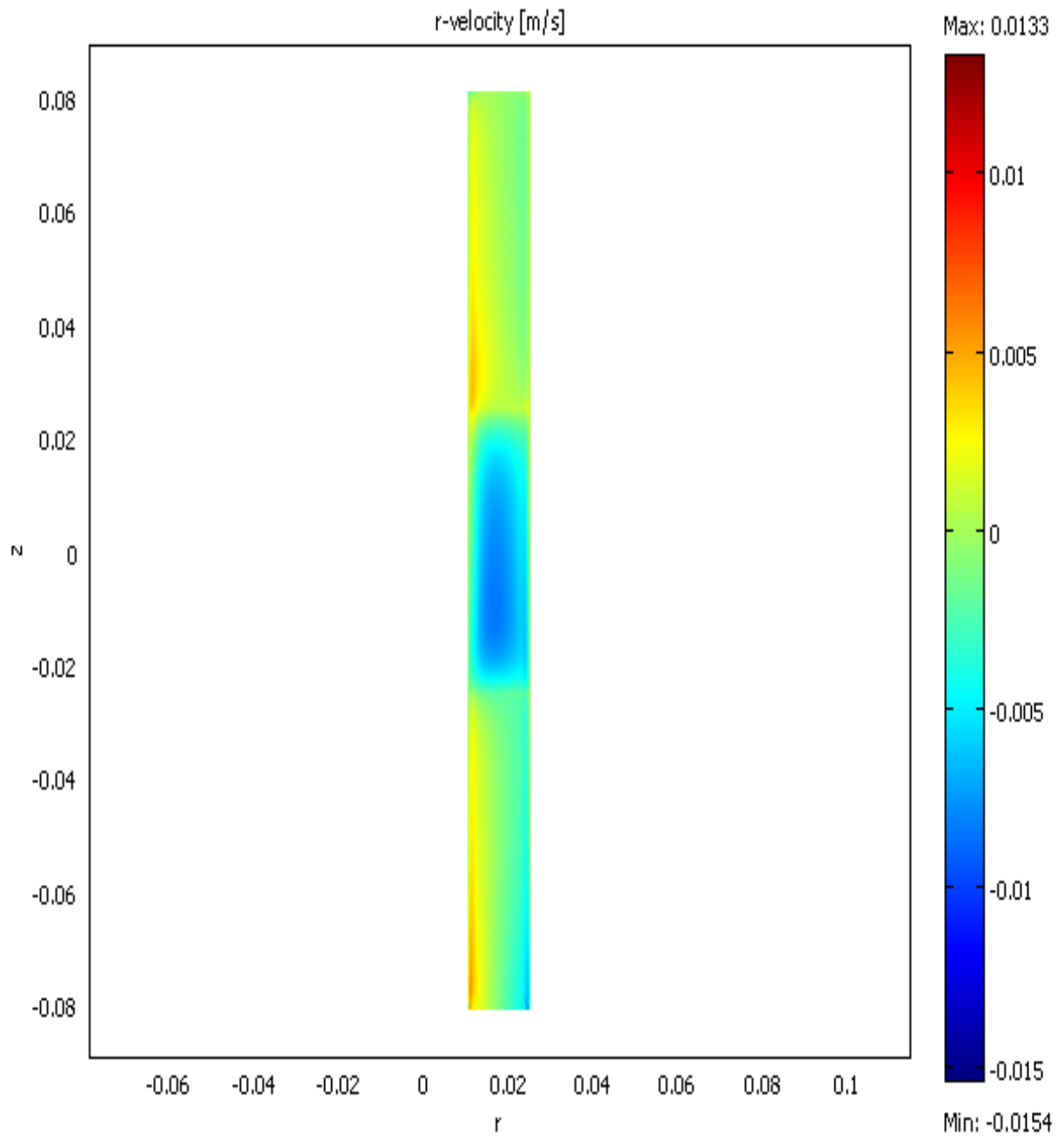


Figure A5.7 Distribution de la vitesse radiale le long du canal.

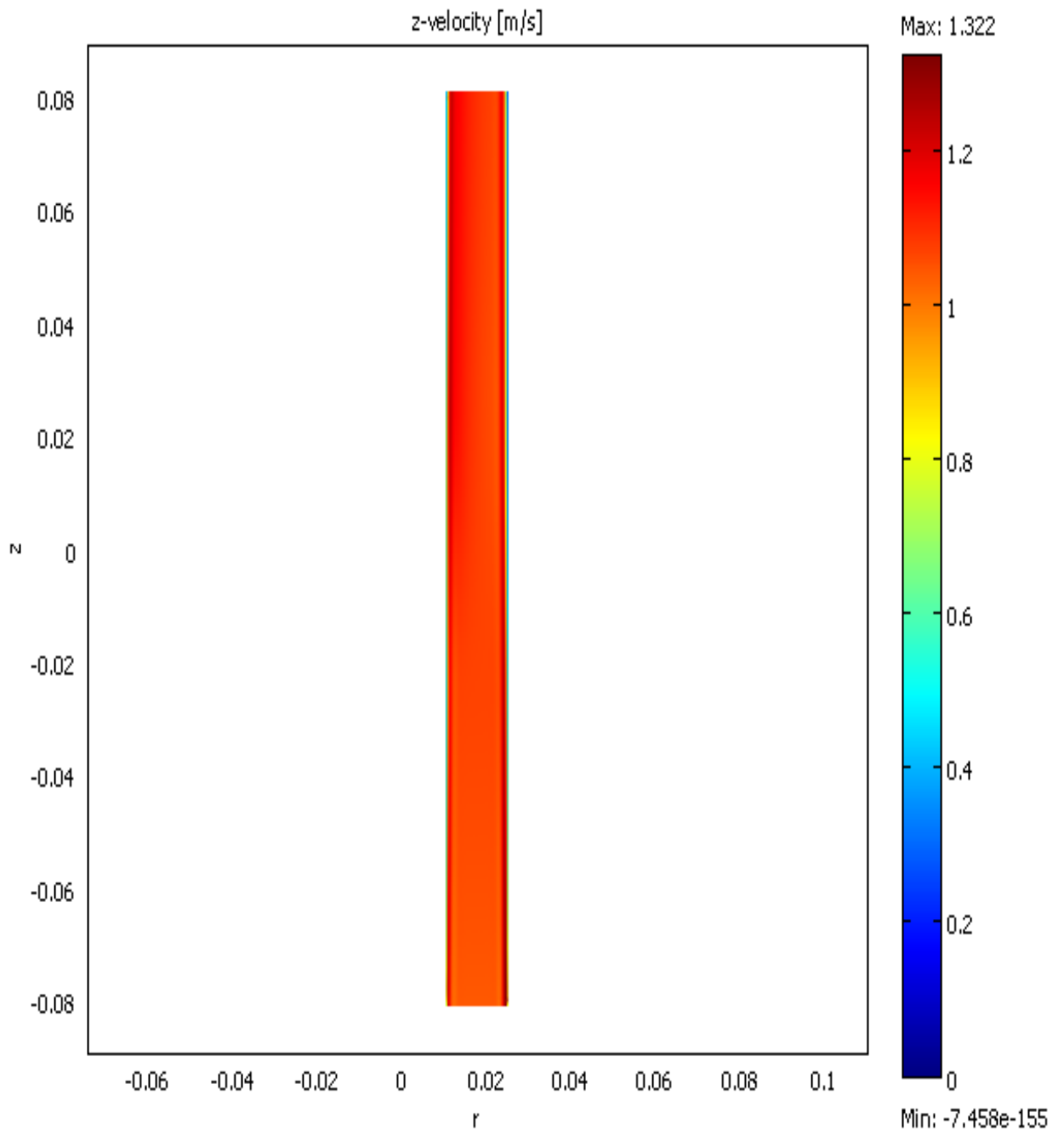


Figure A5.8 Distribution de la vitesse axiale le long du canal.

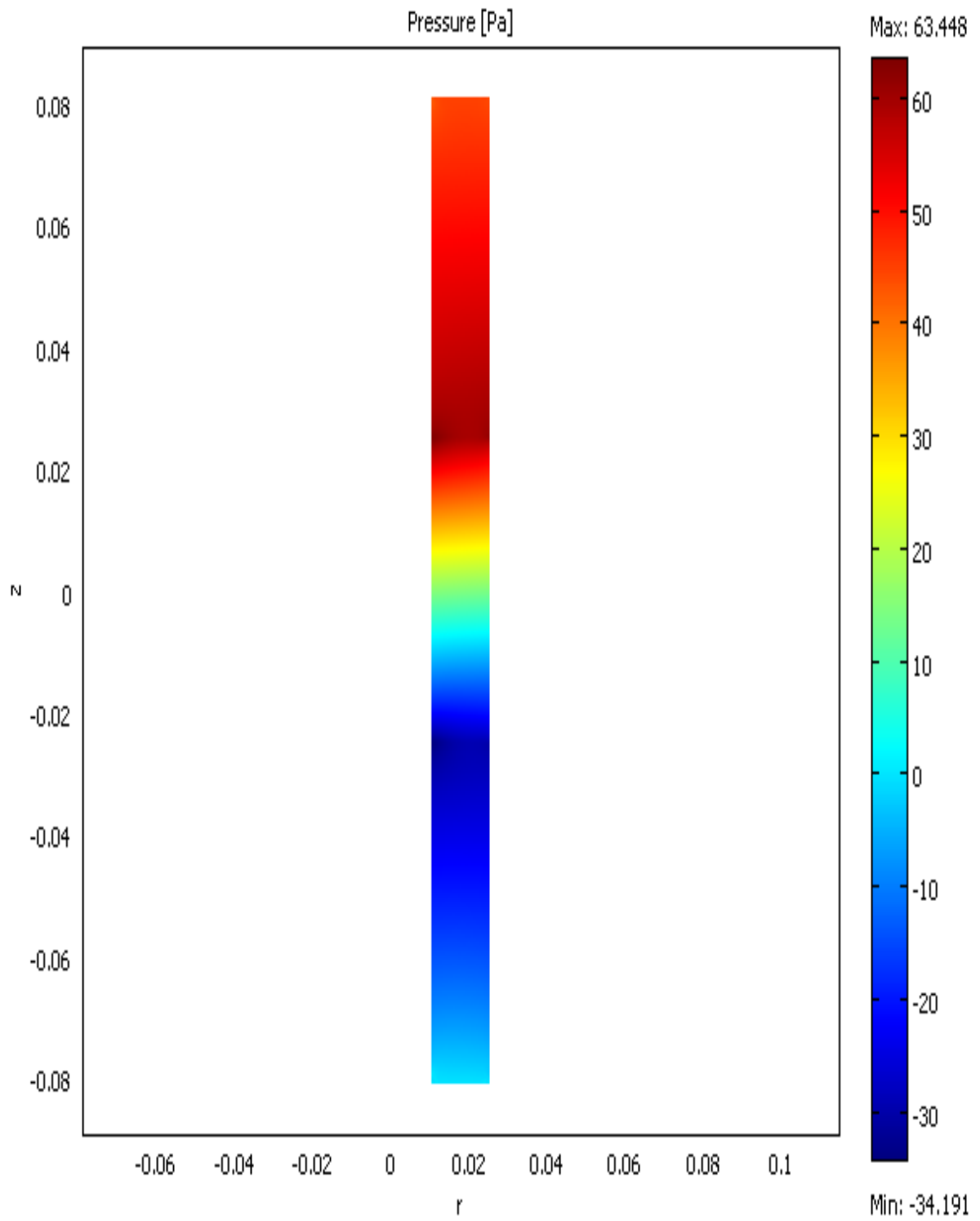


Figure A5.9 Distribution de la pression le long du canal.

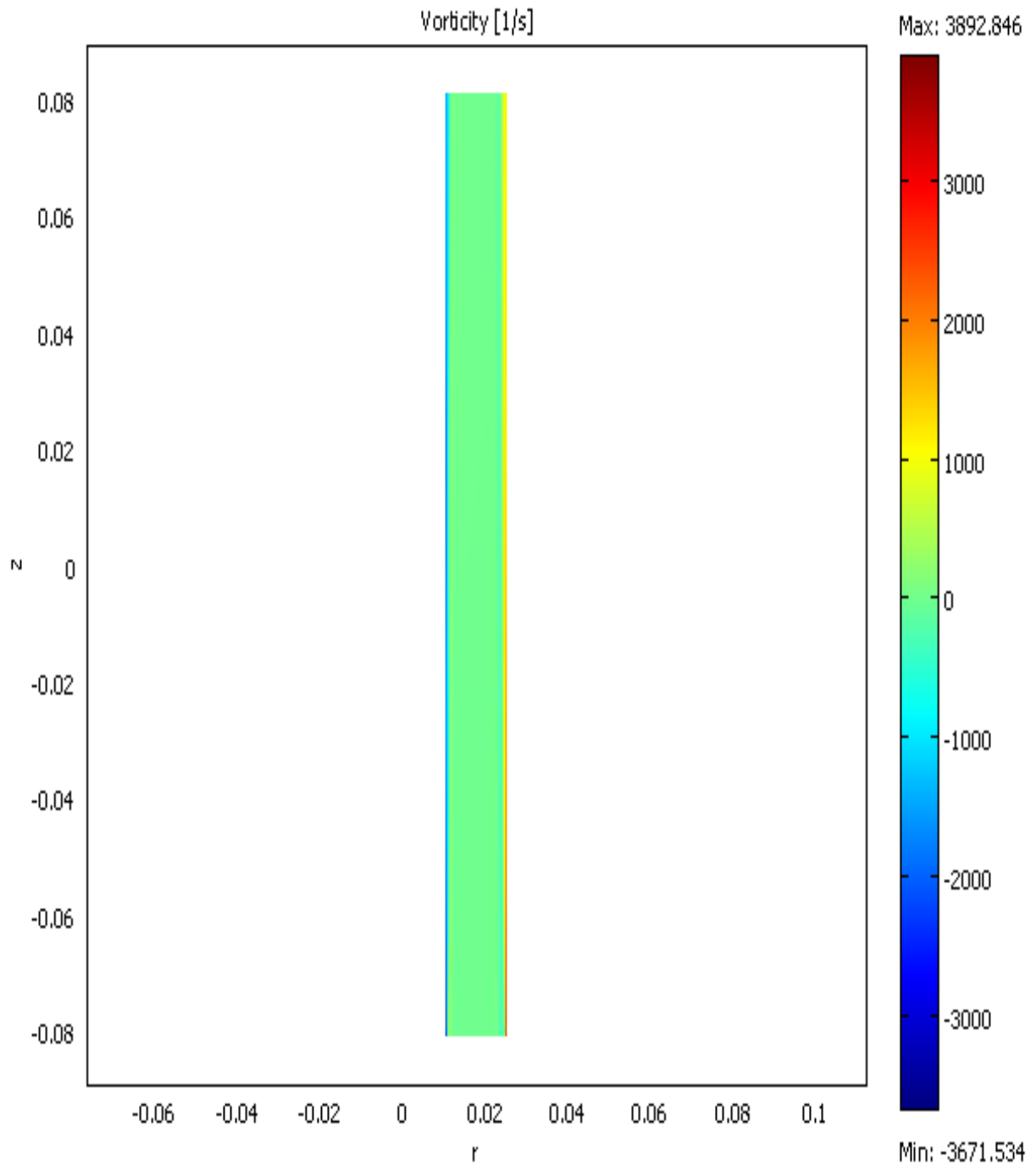


Figure A5.10 Distribution de la vorticité le long du canal.

Les perspectives sont nombreuses à ce stade et à ces premiers résultats et travaux concernant l'application COMSOL multiphysics au dispositif proposé au LEI.