

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique



**Université Hadj Lakhdar Batna**  
**Faculté de Technologie**  
**Département d'Electronique**



## **Mémoire**

**Présenté pour l'obtention du diplôme de  
MAGISTER en Électronique**

**OPTION**

**Contrôle**

**Par**

**BENAZIZA Walid**

**Thème**

---

**Commande par modes glissants du suivi de  
trajectoires pour un robot mobile**

---

Soutenu devant le jury composé de :

Dr. ARAR Djemai	Prof.	Université de Batna	Président
Dr. SLIMANE Nouredine	M.C.A.	Université de Batna	Rapporteur
Dr. BOUKABOU Abdelkrim	Prof.	Université de Jijel	Examineur
Dr. ABDESSEMED Yassine	M.C.A.	Université de Batna	Examineur

# REMERCIEMENTS

Je tiens à assurer de ma sincère et totale gratitude et de ma profonde reconnaissance mon directeur de thèse, Monsieur Pr. **Noureddine SLIMANE** qui par sa confiance, ses conseils et ses explications pertinentes a contribué de manière essentielle à la finalisation de ce modeste travail. Il m'a aidé à me structurer et à travailler en toute quiétude. Sa bonne humeur communicative et ses conseils judicieux en théorie de la commande par mode de glissement m'ont permis d'atteindre ces résultats.

Je suis très honoré que monsieur **Djemai ARAR** professeur à l'université de Batna ait accepté de présider le jury délibération de ce mémoire, je le remercie aussi pour ses encouragements et sa bienveillance.

J'exprime ma profonde reconnaissance aux membres du jury qui ont accepté de juger ce mémoire et m'ont permis d'améliorer son contenu par leurs remarques pertinentes :

**Dr. Yassine ABDESSEMED**, Maître de conférences à l'université de Batna et **Dr. Abdelkrim BOUKABOU**, Maître de conférences à l'université de Jijel pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant d'examiner ce mémoire de magistère.

Je n'oublie pas d'adresser mes vifs remerciements à tous mes collègues de département d'Electronique qui m'ont encouragé de près ou de loin dans l'accomplissement de ce travail.

Je remercie tous les membres de ma famille en particulier mon cher frère Nadhir que dieu l'accueille dans son vaste paradis qui m'a accompagné moralement tout au long de ce parcours.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants ainsi qu'à tous les responsables de notre département qui ont veillé au bon déroulement de notre formation.

# SOMMAIRE

Introduction générale .....	1
<b>Chapitre 1 : Modélisation cinématique des robots mobiles</b>	
1.1 Hypothèses .....	5
1.2 Mise en place des repères .....	6
1.3 Roulement sans glissement et contraintes non holonomes.....	7
1.4 Classes et modèles des robots mobiles à roues .....	10
1.4.1 Classification des types de roues .....	10
1.4.2 Robots mobiles de type unicycle .....	11
1.4.2.1 Définitions.....	11
1.4.2.2 Modélisation.....	13
1.4.3 Robots mobiles de type tricycle et de type voiture.....	16
1.4.3.1 Définitions .....	16
1.4.3.2 Modélisation.....	17
1.4.4 Robots mobiles omnidirectionnels.....	19
1.4.4.1 Description.....	19
1.4.4.2 Modélisation.....	20
1.5 Propriétés du modèle cinématique d'un robot.....	21
1.5.1 Représentation d'état .....	21
1.5.2 Commandabilité des robots mobiles à roues.....	21
<b>Chapitre 2 : Systèmes à structure variable et commande par modes glissants</b>	
2.1 Introduction .....	22
2.2 Formalisation classique du régime glissant .....	22
2.3 Etude de la commande par structure variable en régime glissant .....	25

2.3.1	Equation d'état exprimée à partir du gradient et du produit scalaire.....	25
2.3.2	Commande équivalente et équation d'état du régime glissant idéal .....	28
2.4	Formalisation par la géométrie différentielle pour l'analyse et la synthèse des régimes glissants.....	29
2.4.1	Mode de glissement .....	29
2.4.2	Commande équivalente et condition de glissement .....	31
2.4.3	Condition d'existence et d'unicité de la commande équivalente .....	32
2.4.4	Dépendance et indépendance du régime glissant idéal vis-à-vis des champs de vecteurs $f(x)$ et $g(x)$ .....	33
2.4.5	Invariance des régimes glissants par rapport aux perturbations.....	34
2.5	Etude de la commande par mode de glissement .....	35
2.5.1	Principe de la commande par modes de glissement.....	36
2.5.2	Conception de la commande par mode glissant.....	37
2.5.3	Choix de la surface de glissement.....	37
2.5.4	Principe d'invariance.....	39
2.5.5	Conditions de convergence et d'existence.....	39
2.5.5.1	La fonction discrète de commutation.....	39
2.5.5.2	La fonction de LYAPUNOV.....	40
2.5.6	Synthèse de la commande .....	40
2.5.6.1	Méthode de PHILIPPOV .....	41
2.5.6.2	Méthode de la commande équivalente d'UTKIN.....	41
2.5.7	Les nouveaux concepts de la commande par mode de glissement.....	42
2.5.7.1	Commande basée sur l'approche de la loi d'arrivée.....	42
2.5.7.2	Commande continue par Bande de surface.....	44
2.5.7.3	La commande robuste (Fast Terminal Sliding Mode Control).....	47
2.6	Conclusion .....	47

### **Chapitre 3 : Suivi de trajectoires pour un robot mobile**

3.1 Introduction .....	48
3.2 Poursuite de trajectoire .....	50
3.3 Formulation du problème .....	51
3.4 Stabilisation par un retour d'état non stationnaire continu.....	53
3.4.1 Commande en boucle ouverte et fermée.....	53
3.4.2 Commande du robot sous forme chaînée .....	54
3.4.3 Approche par fonction transverse.....	56
3.4.4 Stabilisation par un retour d'état discontinu .....	56
3.4.5 Commande non linéaire non stationnaire .....	59
3.4.5.1 Application de la commande sur un robot mobile de type unicycle.....	59
3.4.5.2 L'analyse de stabilité par la méthode de Lyapunov .....	61
3.4.5.3 Résultats de simulation .....	62
3.5 Commande par un contrôleur classique (PID) .....	67
3.5.1 Définition.....	67
3.5.2 Application de la commande PID sur un robot mobile .....	68
3.5.3 Résultats de simulation .....	70
3.6 Conclusion .....	75

### **Chapitre 4 : Application d'une commande robuste de type FTSM**

4.1 Introduction .....	76
4.2 La commande robuste par mode de glissement (FTSM) .....	78
4.2.1 Méthodes de conception de la surface de glissement .....	78
4.2.1.1 La méthode traditionnelle (FTSM).....	78
4.2.1.2 La méthode globale (GFTSM).....	79
4.3 Application de la commande sur un robot mobile.....	80
4.3.1 Conception de la loi de commande.....	81

4.3.1.1 Choix de la fonction de commutation .....	81
4.3.1.2 Loi de commande.....	81
4.3.1.3 Choix de la fonction de Lyapunov.....	82
4.4 Travaux de simulation et résultats .....	83
4.5 Conclusion.....	95
Conclusion générale .....	96
Bibliographie.....	98

## INTRODUCTION

Dans le vaste domaine de la robotique mobile, l'étude du déplacement a une grande importance. De nombreuses approches concernant ce déplacement existent en utilisant différents types de capteurs. Les robots mobiles, connaissant leur position, se déplacent d'un point à un autre sur diverses contraintes. Les modèles utilisés dans ce contexte sont non linéaires et la propriété de non holonomie qui caractérise un certain nombre de ces robots mobiles conduit à l'utilisation de techniques de commande non linéaire, notamment la commande par mode de glissement. La problématique générale se réduit dans la plupart des cas à faire déplacer le robot dans un environnement connu ou inconnu. Il en découle qu'il faut pouvoir définir une stratégie de mouvement, puis exécuter le déplacement prescrit. L'objectif de ce mémoire trouve son intérêt dans l'exécution d'un mouvement planifié et concerne le développement de lois de commande pour le suivi de trajectoires des robots mobiles non holonomes. Nous nous intéressons seulement aux robots mobiles de type unicycle correspondant à notre application. Ils disposent d'une motorisation électrique et d'un faible encombrement. Par conséquent, un asservissement en vitesse est suffisant pour les commander. Les modèles utilisés pour démontrer les lois de commandes dans ce mémoire sont basés sur le modèle cinématique du robot mobile de type unicycle.

L'idée principale dans le domaine de la robotique mobile est de faire un déplacement selon une courbe définie. Dans ce cas Il existe différents problèmes de commande pour le robot mobile :

- le suivi de chemin où l'objectif est qu'un point lié au robot suive une courbe prédéterminée en imposant au robot une vitesse donnée.
- la stabilisation de trajectoires consistant à prendre en compte la dimension temporelle : la trajectoire de référence dépend du temps et la vitesse du robot n'est plus fixée à l'avance.
- la stabilisation de configurations fixes : il s'agit de stabiliser asymptotiquement le système dans une position d'équilibre donnée.

Plusieurs techniques existent pour la stabilisation ou le suivi de trajectoire; le problème de la stabilisation est délicat du fait que la condition de Brockett [1] n'est pas vérifiée et il ne peut pas donc exister de retour d'état stabilisant de type continu et stationnaire. De nombreux auteurs proposent alors une solution partielle en assurant un suivi de trajectoire à validité locale et ne prenant pas en compte les éventuels retards sur les mesures.

Les approches classiques de type linéaire notamment de type PID, a vite montré ses limites. En effet, celle-ci sont soumis à la loi de Bode qui veut que les effets d'amplitude et les effets de phase soient couplés et antagonistes. Les recherches se sont alors orientées vers des techniques non linéaires, telles que les méthodes adaptatives ou de stabilité absolue, mais également la technique des modes glissants.

Les techniques non linéaire ont prouvé leur efficacité notamment les techniques des modes glissants qui sont de par leur nature une commandes à structure variable robustes. Elles se présentent comme des commandes adaptatives passives sous leur forme la plus simple. Elles deviennent actives quand les paramètres de l'algorithme de commande sont une fonction de l'état du processus. Cette approche est basée sur la commutation de fonctions de variables d'état, utilisées pour créer une variété ou hyper surface (dimension supérieure à trois), dont le but est de forcer la dynamique du système à correspondre avec celle définie par l'équation de la variété. Quant l'état est maintenu sur cette variété, le système est dit en régime glissant et sa dynamique devient insensible aux variations des paramètres du processus, aux erreurs de modélisation et à certaines perturbations tant que les conditions du régime glissant sont assurées.

Notre travail consiste au développement d'algorithmes de commande par modes de glissement appliquée aux systèmes non linéaires et plus précisément la commande par modes glissants du suivi de trajectoires pour un robot mobile. Ce type de commande a suscité un grand intérêt parmi les chercheurs durant ces dernières années à cause de la simplicité de sa mise en œuvre et de sa robustesse vis-à-vis des incertitudes de modélisation et des perturbations sur le système à commander. Cette technique est basée sur la détermination d'une loi de commande de façon que le point de fonctionnement du système s'approche d'une certaine surface de glissement. La loi de commande est conçue en deux étapes, la première est une étape d'approche de la surface de commutation et la deuxième, une étape de glissement sur celle-ci vers le point d'équilibre.



Différentes techniques ont été étudiées pour démontrer ces lois d'approches en particulier la commande discontinue proposée par Utkin [2], Young et Utkin [3] qui ne peut prendre que deux valeurs suivant le signe de la surface de glissement  $S(x)$ . La caractéristique principale de cette technique est sa structure variable avec la commutation autour de la surface choisie, engendrant du coup des fréquences de commutation élevées des organes de commande qui peuvent provoquer une détérioration anticipée de l'organe de commande ou exciter des dynamiques hautes fréquences non considérées dans la modélisation du système. Ceci crée un phénomène de broutement (chattering en anglais) autour de la surface de glissement qui peut endommager les actionneurs de commande dans la mesure où la commande va osciller entre deux valeurs suivants le signe de  $S(x)$  d'une part et ne permet généralement pas de glissement sur la surface d'autre part.

Dans le but de résoudre le phénomène de réticence (chattering) et de l'éliminer complètement, des méthodes ont été étudiées par Slotine [4], Sastry et Slotine [5], Asada et Slotine [6], Hung et al [7], Habbi et al [8], Harashima et al [9], et Levant [10] en agissant sur la dynamique d'approche de la surface de glissement.

L'objectif principal de notre travail est la mise en œuvre d'une commande robuste pour le suivi de trajectoires. Pour cela notre mémoire sera structuré en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la modélisation des différents types de robots mobiles et à leur étude cinématique. De plus, nous proposons une étude détaillée de leur commandabilité ou contrôlabilité.

Dans le deuxième chapitre, de nature théorique, nous exposons les bases mathématiques de la commande à structure variable et de la commande par modes de glissement. Nous développons les différentes formalisations mathématiques de cette commande.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à la poursuite de trajectoires d'un robot mobile non holonome où plusieurs travaux sont présentés. Ensuite, nous présentons deux approches de poursuite de trajectoire d'un robot mobile de type unicycle, la première consiste en une commande classique de type PID et la deuxième en une approche par retour d'état d'une loi de commande non linéaire basée sur un contrôleur de type backstepping, avec quelques travaux de simulation.

Le dernier chapitre consiste a la détermination d'une loi de commande robuste par mode de glissement de type GFTSM(global fast terminal sliding mode) qui va résoudre le problème de suivi de trajectoires pour un robot mobile non holonome et garantir la stabilité du système en utilisant l'approche de Lyapunov. Nous présentons également tous les résultats obtenus lors de nos différents travaux de simulation et nous mettons en évidence l'avantage de la méthode utilisée.

On termine notre travail par une conclusion générale.

# CHAPITRE 1

## Modélisation cinématique des robots mobiles

L'objectif de ce premier chapitre est de donner une représentation des robots mobiles selon leur modèles et structures. Nous ne présentons ici que les deux classes de modèles les plus fréquemment rencontrés, les robots de type unicycle et ceux de type voiture et on développe leurs modèles cinématiques sous forme d'équations. Ceci va nous servir notamment dans les parties suivantes pour les tests des commandes à synthétiser.

### 1.1 Hypothèses

Généralement pour la commande des robots mobiles, un modèle de commande en vitesse est utilisé plutôt qu'un modèle de commande en couple. Les principales raisons de ce choix sont les suivantes :

- Le calcul de la commande est plus simple pour un modèle cinématique que pour un modèle dynamique.
- Il n'y a pas de paramètres géométriques ou inertiels compliqués à identifier pour un modèle cinématique.

Pour ces raisons, nous ne considérons par la suite que des modèles cinématiques en prenant en compte les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Le robot mobile est considéré comme un véhicule rigide évoluant sur un plan horizontal.
- Les roues conventionnelles sont supposées indéformables et de rayon  $r$ .
- Chaque contact roue/sol est réduit à un point.
- Les roues roulent sans glisser sur le sol.

### 1.2 Mise en place des repères

On note  $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère fixe, dont l'axe  $\vec{z}$  est vertical et  $R' = (O', \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$  un repère mobile lié au robot. On choisit généralement pour  $O'$  un

point remarquable de la plate-forme du robot, typiquement le centre de l'axe des roues motrices s'il existe, comme illustré sur la figure (1.1).

Par analogie avec la manipulation, on appelle situation, ou souvent posture [12], du robot, le vecteur :

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

où  $x$  et  $y$  sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point  $O'$  dans  $R$  et  $\theta$  l'angle  $(\vec{x}, \vec{x}')$

La situation du robot est donc définie sur un espace  $M$  de dimension  $m = 3$ .

La configuration d'un robot mobile est connue quand la position de tous ses points dans un repère donné est connue, on définira la configuration du robot mobile par un vecteur :

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

de  $n$  coordonnées appelées coordonnées généralisées. La configuration est ainsi définie sur un espace  $N$  de dimension  $n$ , appelé espace des configurations.

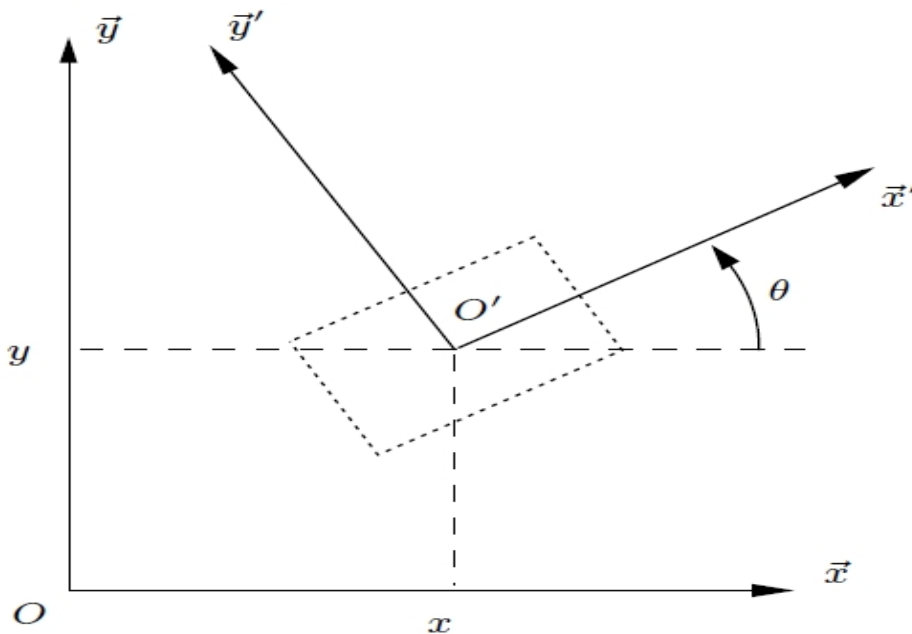


Figure 1.1 : Repérage d'un robot mobile

### 1.3 Roulement sans glissement et contraintes non holonomes

La locomotion se fait grâce aux frottements entre la roue du véhicule et le sol et l'efficacité du mouvement dépend notamment du type de sol. Pour que l'hypothèse du roulement sans glissement soit validée, il faut théoriquement que le contact roue/sol ne se fasse qu'en un point, que le sol soit parfaitement plat et que le rayon de la roue soit parfaitement constant sur toute sa périphérie. C'est-à-dire que la vitesse relative de la roue par rapport au sol au point de contact est nulle. Théoriquement, pour vérifier cette condition, il faut réunir les hypothèses suivantes :

- Chaque roue est supposée indéformable et la zone de contact roue/sol est supposée ponctuelle.
- La vitesse linéaire du point de contact d'une roue avec le sol est nulle.

Mais pratiquement le contact se fait sur une surface, ce qui engendre de légers glissements. De même, l'hypothèse de dire que des roues pleines sont indéformables est largement fautive, surtout lorsque les roues sont équipées de pneus.

Mathématiquement, on peut traduire la condition de r.s.g. pour une roue. Soit  $P$  le centre de la roue,  $Q$  le point de contact de la roue avec le sol,  $\varphi$  l'angle de rotation propre de la roue et  $\theta$  l'angle entre le plan de la roue et le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  comme indiqué à la figure (1.2).

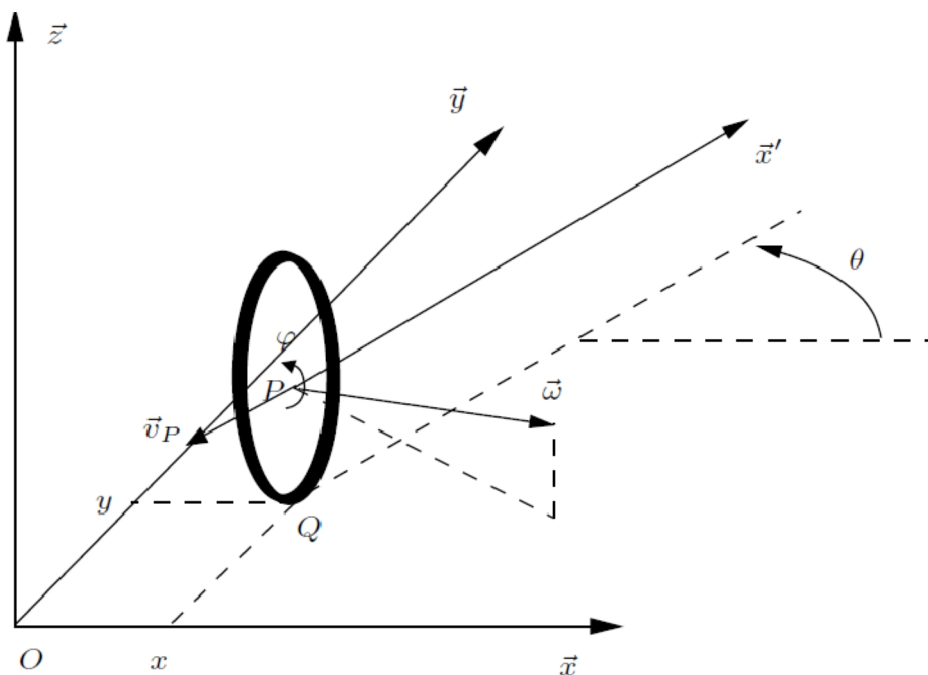


Figure 1.2 : Roulement sans glissement

La nullité de la vitesse relative roue/sol  $\vec{v}_Q$  au point de contact permet d'obtenir une relation vectorielle entre la vitesse  $\vec{u}_P$  du centre  $P$  de la roue et le vecteur vitesse de rotation  $\vec{\omega}$  de la roue :

$$\vec{v}_Q = \vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge \overline{PQ} = \vec{0} \quad (1.3)$$

Les points  $P$  et  $Q$  ont pour coordonnées respectives  $(x, y, r)^T$  et  $(x, y, 0)^T$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned} \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + (\dot{\theta}\vec{z} + \dot{\phi}(\sin\theta\vec{x} - \cos\theta\vec{y})) \wedge (-r\vec{z}) &= \vec{0} \\ (\dot{x} + r\dot{\phi}\cos\theta)\vec{x} + (\dot{y} + r\dot{\phi}\sin\theta)\vec{y} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ceci nous donne le système de contraintes scalaires :

$$\dot{x} + r\dot{\phi}\cos\theta = 0 \quad (1.5)$$

$$\dot{y} + r\dot{\phi}\sin\theta = 0 \quad (1.6)$$

que l'on peut transformer pour faire apparaître les composantes de vitesse dans le plan de la roue d'une part et perpendiculairement à la roue d'autre part :

$$-\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta = 0 \quad (1.7)$$

$$\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta = -r\dot{\phi} \quad (1.8)$$

Les équations précédentes, caractérisant le roulement sans glissement d'une roue sur le sol, sont les contraintes non holonomes.

Soit un système de configuration  $q$  soumis à des contraintes indépendantes sur les vitesses, regroupées sous la forme  $A^T(q)\dot{q} = 0$ . S'il n'est pas possible d'intégrer l'une de ces contraintes, elle est dite non intégrable ou non holonome. De manière concrète l'existence de contraintes non holonomes implique que le système ne peut pas effectuer certains mouvements instantanément. Par exemple, dans le cas de la roue, il ne peut y avoir de translation instantanée parallèlement à l'axe de la roue.

Il n'est pas évident de dire a priori si une contrainte est intégrable ou non. Pour cela, on a recours à l'application du théorème de Frobenius [13]. Seule la connaissance du crochet de Lie est nécessaire à notre étude. Pour deux vecteurs  $b_i(q)$  et  $b_j(q)$ , cet opérateur est défini par :

$$[b_i(q), b_j(q)] = \frac{\partial b_j}{\partial q} b_i - \frac{\partial b_i}{\partial q} b_j \quad (1.9)$$

**Hypothèse :** Soit un système de configuration  $q$ , de dimension  $n$ , soumis à un ensemble de contraintes indépendantes s'écrivant sous la forme  $A^T(q)\dot{q} = 0$ .

Soit  $B(q) = (b_1(q) \ b_2(q) \ \dots \ b_m(q))$  une matrice de rang plein  $m$ , orthogonale à  $A(q)$  sur tout l'espace des configurations. Soit enfin l'algèbre de **Lie** de dimension  $p$ , avec  $m \leq p \leq n$  engendrée par l'ensemble des colonnes de  $B(q)$ , auxquelles s'ajoutent les crochets de **Lie** successifs formés à partir de ces colonnes, à condition qu'ils augmentent la dimension de l'algèbre. Alors, parmi les contraintes auxquelles est soumis le système,  $n - p$  sont intégrables.

Prenons l'exemple de la roue dont on a écrit le modèle précédemment. Sa configuration est entièrement définie par sa configuration  $q = (x, y, \theta, \varphi)^T$ . D'après (1.7) et (1.8) on peut déterminer :

$$A(q) = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

et en déduire :

$$B(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Matrice formée par les colonnes indépendantes  $b_1(q) = \left( \cos \theta \ \sin \theta \ 0 \ -\frac{1}{r} \right)^T$  et  $b_2(q) = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$  et qui vérifie bien  $A^T(q)B(q) = 0$  pour tout  $q$ . On calcule alors les crochets de **Lie** successifs à partir de  $b_1(q)$  et  $b_2(q)$  :

$$[b_1(q), b_2(q)] = (\sin \theta \ -\cos \theta \ 0 \ 0)^T \quad (1.12)$$

$$[b_1(q), [b_1(q), b_2(q)]] = 0$$

$$[b_2(q), [b_1(q), b_2(q)]] = (\cos \theta \ \sin \theta \ 0 \ 0)^T \quad (1.13)$$

On constate que  $b_1(q)$ ,  $b_2(q)$ ,  $[b_1(q), b_2(q)]$  et  $[b_2(q), [b_1(q), b_2(q)]]$  engendrent une algèbre de **Lie** de dimension 4, égale à celle de  $q$ . On arrête donc le calcul des crochets et on peut conclure qu'il n'existe pas de contrainte intégrable. Les contraintes (1.7) et (1.8) sont donc des contraintes non holonomes.

## 1.4 Classes et modèles des robots mobiles à roues

### 1.4.1 Classification des types de roues

La mobilité d'un robot mobile dépend grandement du type de roues utilisées. Dans [14], Campion présente une classification des différents types de roues et configurations rencontrées en robotique mobile. Les différents types de roues que l'on rencontre sont :

- La roue fixe : cette roue n'autorise qu'un déplacement dans la direction de son plan médian, l'orientation n'est pas modifiable.
- La roue centrée orientable : elle possède un axe d'orientation en plus de l'axe de rotation et cet axe d'orientation passe par le centre de la roue.
- La roue décentrée orientable ou roue folle : son axe d'orientation ne passe pas par le centre de la roue (c'est le cas par exemple des roues des chaises de bureau).

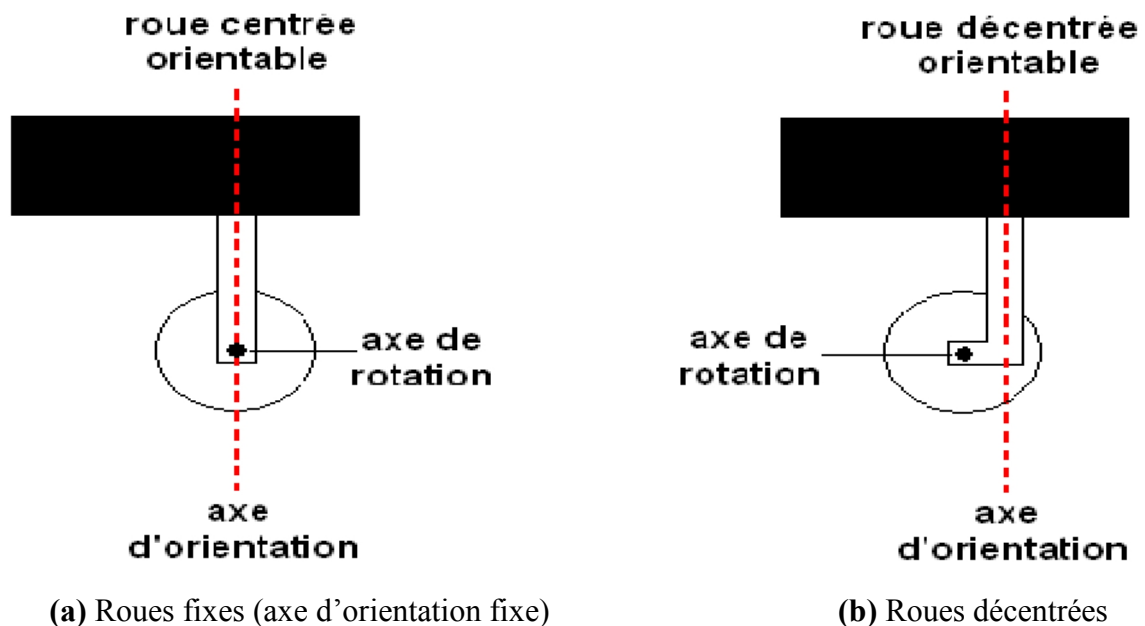


Figure 1.3 : Roue centrée et roue décentrée

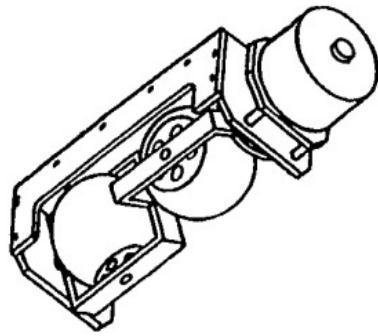
En plus de ces roues classiques, d'autres roues ont été développées pour accroître la mobilité du robot. Elles permettent d'augmenter les capacités de déplacement dans toutes les directions du plan (figure 1.4). Cependant, elles ne sont commandables que dans certaines de ces directions. Dans cette catégorie nous trouvons notamment :

- Les roues suédoises : elles autorisent les glissements latéraux grâce à un système de galets remplaçant la bande de roulement classique, montés en inclinaison par rapport au plan de la roue. La combinaison de la rotation de la roue avec la rotation libre du galet en contact avec le sol permet le déplacement sans glissement sur le



sol dans toutes les directions. Cependant le couple moteur que l'on peut transmettre à ces roues est très limité, ce qui réduit son utilisation en pratique.

- Les roues troncosphériques: cette structure utilisant deux roues libres en quadrature présente l'avantage de pouvoir transmettre un couple intéressant par rapport aux roues suédoises, mais souffre de petits problèmes de sauts au moment de la transition d'une roue support à l'autre.



roue troncosphérique



roue suédoise

Figure 1.4 : Roue troncosphérique et roue suédoise

## 1.4.2 Robots mobiles de type unicycle

### 1.4.2.1 Définitions

Un robot de type unicycle est actionné par deux roues indépendantes, il possède éventuellement des roues folles pour assurer sa stabilité. Son centre de rotation est situé sur l'axe reliant les deux roues motrices. C'est un robot non-holonome, en effet il est impossible de le déplacer dans une direction perpendiculaire aux roues de locomotion.

Sa commande peut être très simple, il est en effet assez facile de le déplacer d'un point à un autre par une suite de rotations simples et de lignes droites. Le schéma d'un robot de type unicycle est donné à la figure (1.5).

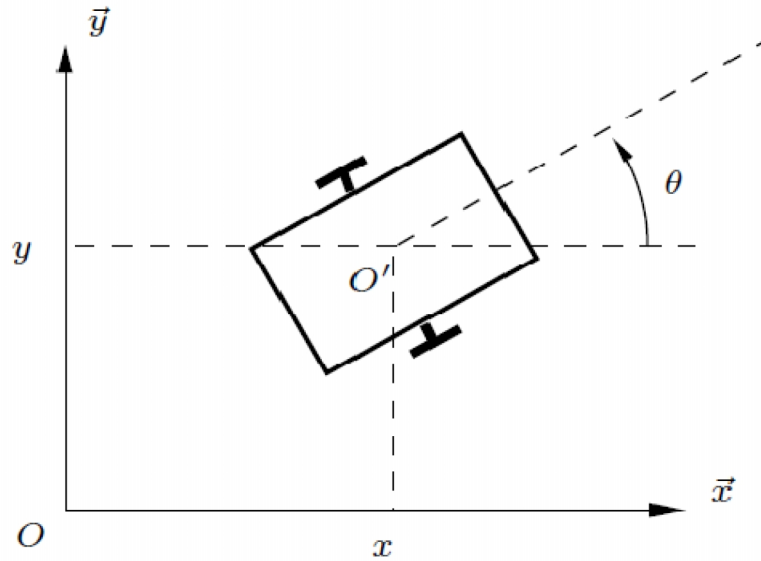


Figure 1.5 : Robot mobile de type unicycle

La figure (1.6) présente différents robots de type unicycle:



**Pioneer P3-DX**, Active Media Robotics, 2004

[ActivMedia 04]

Entraînement : batteries 252Wh, 2 moteurs DC avec codeurs incrémentaux

Calculateur : microcontrôleur Hitachi HS-8, I/O Bus, 2 ports série

Capteurs : odométrie, 8 capteurs US en façade + options (bumpers, télémètre laser, gyroscope)

Autonomie : 24 - 30 h

Vitesse : maximum 1.6 m/s



**Khepera II**, K-team, EPFL, Lausanne, 2002 [KTE02],

Entraînement : adaptateur secteur ou accus NiMH, 2 moteurs DC avec codeurs incrémentaux

Calculateur : processeur Motorola 68331 @25 MHz, 512 Ko RAM, 512 Ko mémoire Flash

Programmable par le port série, communication par port série jusqu'à 115 Kbauds (limitée à 9600 bauds en liaison radio), 3 entrées analogiques 0 à 4.3 V, 8 bits

Capteurs : 8 capteurs infrarouges de luminosité et de proximité (100 mm de portée) et un détecteur de batteries faibles

Figure 1.6 : Evolution des robots mobiles de type unicycle

### 1.4.2.2 Modélisation

On considère le robot mobile de type unicycle schématisé sur la figure (1.7). Ce robot est équipé de deux roues fixes motrices commandées indépendamment et de roues folles assurant sa stabilité. Les roues motrices ont le même axe de rotation et le centre instantané de rotation (CIR) du robot est un point de cet axe. Soit  $\rho$  le rayon de courbure de la trajectoire du robot,  $L$  l'entraxe et  $\omega$  la vitesse de rotation du robot autour du CIR. Les vitesses des roues droite et gauche, notées  $v_d$  et  $v_g$  et définies à la figure (1.7) vérifient :

$$v_d = -r\dot{\phi}_d = (\rho + L)\omega \quad (1.14)$$

$$v_g = r\dot{\phi}_g = (\rho - L)\omega \quad (1.15)$$

Ce qui permet de définir  $\rho$  et  $\omega$  à partir des vitesses des roues :

$$\rho = L \frac{\dot{\phi}_d - \dot{\phi}_g}{\dot{\phi}_d + \dot{\phi}_g} \quad (1.16)$$

$$\omega = -r \frac{\dot{\phi}_d + \dot{\phi}_g}{2L} \quad (1.17)$$

L'équation (1.16) permet de situer le CIR sur l'axe des roues.

En ce qui concerne la commande, si l'on se contente de traiter le cas cinématique, on peut considérer que celle-ci est donnée, au plus bas niveau, par les vitesses de rotation des roues. Ceci étant, on préfère généralement exprimer cette commande par la vitesse longitudinale du robot, notée  $v$  (en  $O'$ ) et sa vitesse de rotation  $\dot{\theta}$  (autour de  $O'$ ). Il y'a en effet une équivalence entre les deux représentations. D'une part, on a :

$$v = \frac{v_d + v_g}{2} = r \frac{\dot{\phi}_g - \dot{\phi}_d}{2} \quad (1.18)$$

avec  $v$  la vitesse linéaire du robot.

La vitesse de rotation du robot est égale à la vitesse de rotation autour du CIR [15] :

$$\omega = \dot{\theta} = -r \frac{\dot{\phi}_d + \dot{\phi}_g}{2L} \quad (1.19)$$

avec  $\omega$  la vitesse angulaire.



$$\dot{x} - L\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\varphi}_g \cos \theta = 0$$

$$\dot{y} - L\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\varphi}_g \sin \theta = 0$$

En choisissant  $q = (x, y, \theta, \varphi_d, \varphi_g)^T$  comme vecteur de configuration, ces contraintes se regroupent sous la forme matricielle  $A^T(q)\dot{q} = 0$ , avec :

$$A^T(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L \cos \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 & L \sin \theta & r \sin \theta & 0 \\ 1 & 0 & -L \cos \theta & 0 & -r \cos \theta \\ 0 & 1 & -L \sin \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

On constate que  $A(q)$  n'est pas de rang plein. On peut donc, sans perte d'information, supprimer la dernière ligne et réécrire les contraintes avec :

$$A^T(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L \cos \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 & L \sin \theta & r \sin \theta & 0 \\ 1 & 0 & -L \cos \theta & 0 & -r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Par ailleurs il résulte des relations (1.17) et (1.19) la contrainte :  $\dot{\theta} = -r \frac{\dot{\varphi}_d + \dot{\varphi}_g}{2L}$  qui

s'intègre en :

$$\theta = -r \frac{\varphi_d + \varphi_g}{2L} + \theta_0 \quad (1.25)$$

où  $\theta_0$  est la valeur de  $\theta$  à l'initialisation (les angles des roues, généralement mesurés par des codeurs incrémentaux, étant alors choisis nuls). Cette contrainte intégrable est donc en fait une contrainte holonome. On peut donc éliminer une des quatre variables constituant le vecteur  $q$  choisi initialement, qui n'était donc pas constitué de grandeurs indépendantes (et n'était donc pas un vecteur de configuration au sens strict).

En prenant maintenant  $q = (x, y, \theta, \varphi_d)^T$  on trouve :

$$A^T(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L \cos \theta & r \cos \theta \\ 0 & 1 & L \sin \theta & r \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{r} & -\frac{L}{r} \end{pmatrix}$$

En remarquant, d'après ce qui précède, que :

$$\dot{x} = v \cdot \cos \theta$$

$$\dot{y} = v \cdot \sin \theta$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\varphi}_d = -\frac{v}{r} - L \frac{\omega}{r}$$

On constate que, sous forme vectorielle, la dérivée du vecteur de configuration s'écrit :

$$\dot{q} = B(q)U \quad (1.26)$$

avec pour vecteur de commande cinématique  $U = (v, \omega)^T$ . La matrice  $B(q)$  représente donc le modèle cinématique (en configuration) du robot mobile, ce résultat pouvant se généraliser [16]. On notera que la connaissance de ce modèle n'est pas toujours utile du point de vue pratique. Dans le cas de l'unicycle, étant donné que l'on cherche essentiellement à contrôler la posture du robot et que la variable  $\varphi_d$  n'apparaît pas dans les équations régissant la dérivée de la posture, on se contentera généralement du modèle simplifié :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cdot \cos \theta \\ \dot{y} = v \cdot \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (1.27)$$

On remarque que dans ce cas précis, le modèle simplifié est le modèle cinématique en posture. Ce n'est cependant pas le cas pour tous les robots mobiles.

### 1.4.3 Robots mobiles de type tricycle et de type voiture

#### 1.4.3.1 Définitions

Considérons tout d'abord le cas du tricycle, représenté à la figure (1.8). Ce robot est constitué de deux roues fixes de même axe et d'une roue centrée orientable placée sur l'axe longitudinal du robot. Le mouvement est conféré au robot par deux actions : la vitesse longitudinale et l'orientation de la roue orientable. De ce point de vue, il est donc très proche d'une voiture. C'est d'ailleurs pour cela que l'on étudie le tricycle, l'intérêt pratique de ce type de robot (peu stable) restant limité.

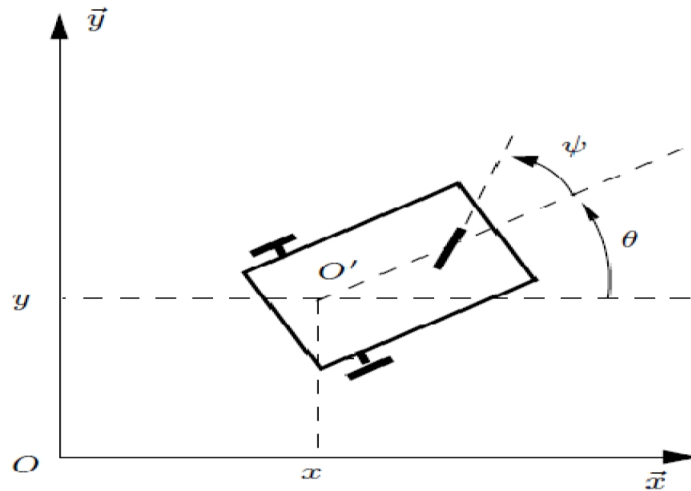


Figure 1.8 : Robot mobile de type tricycle

### 1.4.3.2 Modélisation

Considérons tout d'abord le tricycle. Le CIR du robot se situe à la rencontre des axes des roues fixes et de la roue orientable, comme cela est représenté à la figure (1.9). On peut déterminer  $\rho$  de manière géométrique à partir de l'angle d'orientation de la roue avant et  $\omega$  à partir de la vitesse linéaire  $v$  du véhicule (vitesse en  $O'$ ) et de  $\rho$  :

$$\rho = \frac{D}{\tan \varphi} \tag{1.28}$$

$$\omega = \frac{v}{D} \tan \varphi \tag{1.29}$$

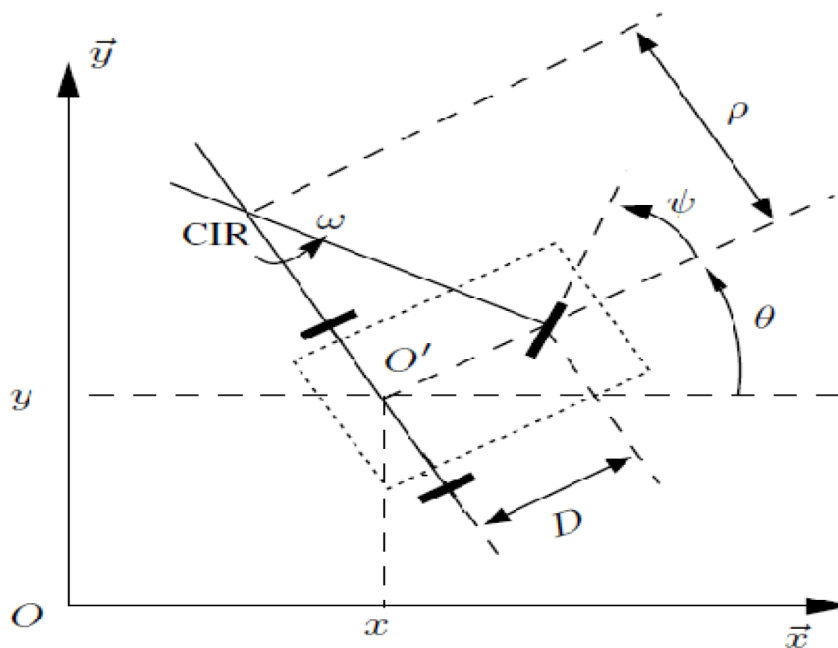


Figure 1.9 : Robot mobile de type tricycle

Ce type de robot peut se diriger en ligne droite pour  $\varphi = 0$  et théoriquement tourner autour du point  $O'$  pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Néanmoins, le rayon de braquage de la roue orientable, généralement limité, impose le plus souvent des valeurs de  $\varphi$  telles que :

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \text{ interdisant cette rotation du robot sur lui même.}$$

L'écriture des contraintes sur chacune des roues et un raisonnement similaire à celui suivi dans le cas de l'unicycle permettent de déterminer les modèles cinématiques des robots de type tricycle. Toutefois, par un simple raisonnement géométrique, on établit les équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cdot \cos \theta \\ \dot{y} = v \cdot \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{v}{D} \tan \varphi \\ \dot{\varphi} = \eta \end{cases} \quad (1.30)$$

où  $U = (v, \eta)^T$  est le vecteur de commande cinématique,  $\eta$  représentant la vitesse d'orientation imposée à la roue orientable. Ces équations sont celles du modèle cinématique en configuration simplifiée, la configuration associée  $q = (x, y, \theta, \varphi)^T$  ne décrivant pas les rotations propres des différentes roues.

Comme on l'a vu précédemment, l'existence d'un CIR unique impose que les axes des roues du robot soient concourants. Dans le cas du robot de type voiture, cela impose aux roues du train avant de n'avoir pas la même orientation, comme illustré à la figure (2.10). Ainsi, les roues avant d'un robot de type voiture (et à fortiori d'une voiture) ne sont pas parallèles. Le roulement idéal, assurant que le CIR est bien unique, est réalisé sur une voiture par un système de braquage différentiel (dit d'Ackerman). Par ailleurs, les trajectoires des roues n'ayant pas le même rayon de courbure, leurs vitesses sont également différentes (et liées évidemment).

L'équivalence entre tricycle et voiture est facile à montrer. Il suffit pour cela de figurer une roue virtuelle qui transformerait un robot de type voiture en tricycle en plaçant la roue orientable du tricycle au centre de l'axe des roues avant de la voiture, orientée de sorte que le CIR reste inchangé, conformément à la figure (1.10).



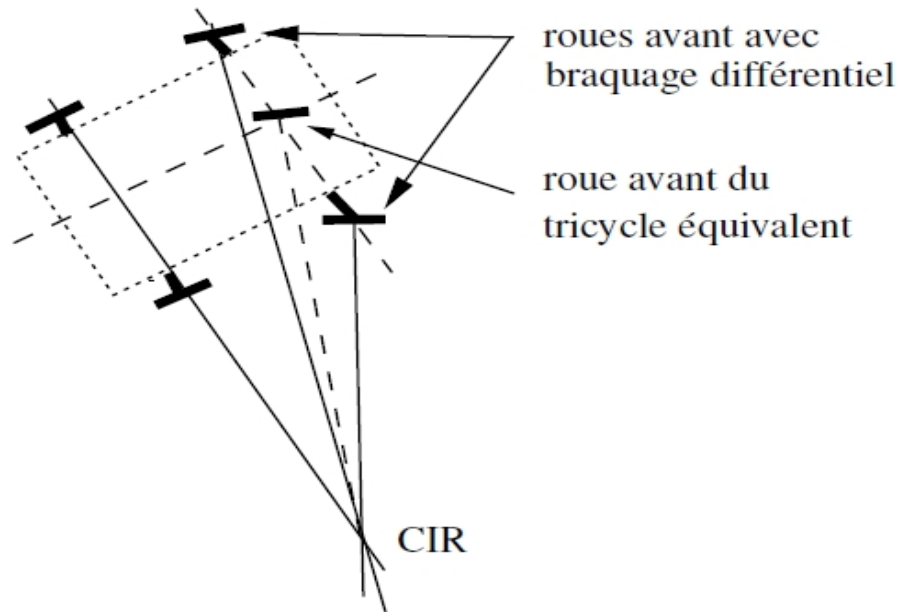


Figure 1.10 : Robot mobile de type voiture et son CIR

### 1.4.4 Robots mobiles omnidirectionnels

#### 1.4.4.1 Description

Un robot omnidirectionnel est un robot qui peut se déplacer librement dans toutes les directions. Il est en général constitué de trois roues décentrées orientables placées en triangle équilatéral. L'énorme avantage du robot omnidirectionnel est qu'il est holonome puisqu'il peut se déplacer dans toutes les directions. Mais ceci se fait au dépend d'une complexité mécanique bien plus grande.

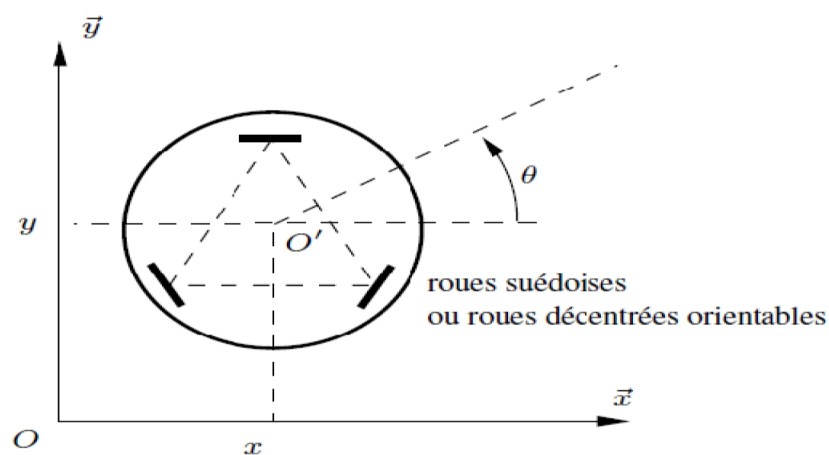


Figure 1.11 : Représentation d'un robot mobile omnidirectionnel

Un robot mobile est dit omnidirectionnel si l'on peut agir indépendamment sur les vitesses : vitesse de translation selon les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  et vitesse de rotation autour de  $\vec{z}$ .

D'un point de vue cinématique on montre que cela n'est pas possible avec des roues fixes ou des roues centrées orientables. On peut en revanche réaliser un robot omnidirectionnel en ayant recours à un ensemble de trois roues décentrées orientables ou de trois roues suédoises disposées aux sommets d'un triangle équilatéral (figure 1.11). Du point de vue de la transmission du mouvement, ceci ne va pas sans poser de problème.

#### 1.4.4.2 Modélisation

Dans ce cas on peut considérer qu'il est possible de commander directement la posture et le modèle cinématique est donc :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_1 \\ \dot{y} &= v_2 \\ \dot{\theta} &= v_3\end{aligned}\tag{1.31}$$

où  $u = (v_1 \ v_2 \ v_3)^T$  représente le vecteur de commande. On choisit ainsi généralement ce type de robot pour se dispenser des problèmes de planification et de commande liés à la non-holonomie. L'avantage d'une cinématique extrêmement simple est cependant à mettre en balance avec les inconvénients liés à une localisation odométrique déficiente et à une plus grande complexité mécanique, généralement responsable d'un surcoût. On citera pour mémoire le cas du XR4000 Nomadic représenté à la figure (1.12).



Figure 1.12 : Robot mobile omnidirectionnel Nomadic XR4000

## 1.5 Propriétés du modèle cinématique d'un robot

### 1.5.1 Représentation d'état

De la modélisation que nous avons exposée tout au cours de ce chapitre il résulte, dans tous les cas, un modèle dynamique (au sens de l'automatique) sous la forme (1.26). Si l'on considère que la configuration (réduite)  $q$  fait office de variable d'état du système on a :

$$\dot{x} = B(x)u \quad (1.32)$$

Avec  $B(x)$  de dimension  $n \times m$ . Il s'agit d'une représentation non linéaire sans terme de dérivé, en comparaison avec la représentation d'état classique d'un système linéaire invariant  $\dot{x} = Ax + Bu$ .

C'est le cas des robots mobiles de type unicycle ou voiture, qui par ailleurs font partie d'une classe de système non linéaires particuliers dits systèmes chaînés.

### 1.5.2 Commandabilité des robots mobiles à roues

Pour qu'un robot mobile soit utile (ou utilisable) il faut en premier lieu s'assurer de sa commandabilité. Cette propriété signifie qu'il existe toujours une loi de commande  $u(t)$  amenant le robot d'un état initial à un état final quelconque.

Pour caractériser la commandabilité d'un système non linéaire, on peut tout d'abord se demander si son linéarisé autour de tout point d'équilibre est commandable. En  $x_0$  quelconque, le modèle linéarisé issu de (1.32) s'écrit :  $\dot{x} = B(x_0)u$  avec  $B(x_0) \in R^{n \times m}$ . Pour les robots de type unicycle et voiture, la non holonomie va de pair avec une forme de sous-actionnement qui se traduit par le fait que  $m < n$ . Appliquée à un tel système, la condition de rang (critère de commandabilité de Kalman) :  $Rang(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$  se résume à :  $Rang B(x_0) = n$ . Cette condition n'est jamais remplie puisque  $m < n$ . Le modèle linéarisé du système n'est donc pas commandable autour d'un point d'équilibre quelconque.

**Théorème :** Commandabilité d'un robot mobile non holonome

On note  $B(x) = (b_1(x) b_2(x) \dots b_m(x))$  la matrice du modèle cinématique (1.32), de dimension  $n \times m$ .

Un robot mobile est commandable si les colonnes de  $B(x)$  et leurs crochets de Lie successifs forment un ensemble de  $n$  colonnes indépendantes.

## **CHAPITRE 2**

### **Systèmes à structure variable et commande par modes glissants**

#### **2.1 Introduction**

Dans les années soixante, de nombreux travaux ont été publiés par l'équipe du professeur S.V.Emelyanov [17] sur une classe particulière de systèmes de commande dits à structure variable; cette commande consiste à amener la trajectoire d'état du système bouclé vers une surface de glissement et à la faire commuter à l'aide d'une logique de commutation autour de la surface jusqu'au point d'équilibre. Ce sont les travaux effectués par Philippov [18] sur les équations à second membre discontinu qui amènent à l'idée de systèmes à structure variable.

Dans ce deuxième chapitre, nous donnons une définition du concept de systèmes de commande à structure variable et nous exprimons les caractéristiques essentielles de cette loi de commande à partir de différents outils théoriques de l'automatique linéaire et non linéaire. Les systèmes dits à structure variable peuvent être définis comme des systèmes où les paramètres du régulateur peuvent prendre deux valeurs, la commutation d'une valeur à une autre s'effectue à la traversée d'une hyper surface de l'espace de phase du système de façon à contraindre le point représentatif du mouvement du système à rester sur cette hyper surface, d'où le nom de régime glissant.

Dans une première étape nous présentons les concepts classiques utilisés pour la commande en régime glissant idéal du système linéaire et non linéaire, dans un environnement déterministe. Nous rappelons tout d'abord les propriétés mathématiques des équations différentielles à second membre discontinu ainsi que la théorie classique du régime glissant.

#### **2.2 Formalisation classique du régime glissant**

Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{dx_i}{dt} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.1)$$

où les seconds membres  $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  sont des fonctions continues par morceaux présentant des discontinuités sur une hyper surface  $S$ , d'équation :

$$S(x) = 0, \text{ avec } x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$$

Les fonctions  $f_i$  sont supposées définies dans un domaine  $G$  de l'espace des variables  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ ; On pose  $f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)^T$ .

La surface  $S$  sépare l'espace d'état en deux parties  $G^+ (S > 0)$  et  $G^- (S < 0)$ , ce qui nous donne au voisinage de la surface  $S$  deux valeurs de  $f$  soit  $f^+$  et  $f^-$  sur la normale à la surface  $S$ , la normale étant orientée de  $G^-$  vers  $G^+$  comme représenté sur la figure (2.1).

Le théorème suivant, dû à Philippov, permet de préciser les conditions d'existence et d'unicité d'une solution  $x(t)$  de (2.1).

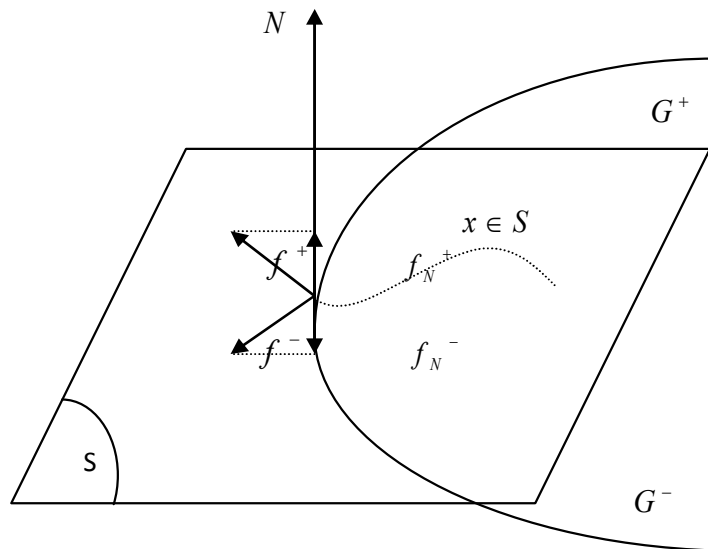


Figure 2.1 : Espace d'état de dimension 3 et surface de glissement de dimension 2

**Théorème :** Soit le système différentiel écrit sous la forme (2.1) satisfaisant la condition :

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq K \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$K$  étant une constante arbitraire indépendante de  $t$  et de  $x$ , ces inégalités étant vérifiées pour tout  $t$  dans le domaine  $G = (G^- \cup G^+)$ . Soit la surface  $S$  deux fois différentiable, chacune

des fonctions  $f_N^+$  et  $f_N^-$  étant continue sur  $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  appartenant à  $S$  et le vecteur  $h = f^+ - f^-$  étant continument différentiable. Si en chaque point de la surface  $S$  une inégalité de type  $f_N^- > 0$  ou  $f_N^+ > 0$  est vérifiée (pas obligatoirement la même en tout point de  $S$ ), il existe alors, dans le domaine  $G$ , une solution  $x(t)$  pour (2.1) et les propriétés d'unicité et de dépendance continue de cette solution par rapport aux conditions initiales sont vérifiées. Ce théorème nous amène naturellement à penser que si l'on vérifie à la fois les conditions  $f_N^- > 0$  et  $f_N^+ > 0$ , la surface  $S$  sera attractive au moins dans un petit voisinage de  $S$ , pour toute solution  $x(t)$  de (2.1), puisque de chaque côté de  $S$ , le vecteur vitesse est dirigé vers  $S$ . Il y a donc un régime glissant limite sur la surface  $S$ .

Supposons que le second membre de ce système possède une discontinuité qui se produise sur la surface  $S$  définie par :

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \tag{2.2}$$

En dérivant (2.2) par rapport à  $t$ , on aura :

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \cdot f_i(t; x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{2.3}$$

Le second membre de cette expression n'est autre que le produit scalaire de la normale orientée à la surface  $S$  et du vecteur  $f$ .

Si les conditions du théorème précédent sont vérifiées, on déduit :

$$\begin{aligned} f_N^+ > 0 &\Rightarrow S > 0 \text{ et } \dot{S} < 0 \\ f_N^- < 0 &\Rightarrow S < 0 \text{ et } \dot{S} > 0 \end{aligned}$$

D'où

$$f_N^+ > 0 \text{ et } f_N^- < 0 \Rightarrow S \cdot \dot{S} < 0 \tag{2.4}$$

L'implication inverse est évidente et nous pouvons donc dire que les conditions  $(f_N^+ > 0$  et  $f_N^- > 0)$  et  $(S \cdot \dot{S})$  sont équivalentes.

La condition (2.4) qui assure que la surface  $S$  est attractive pour la trajectoire de phase est l'inégalité fondamentale utilisée pour résoudre le problème de la synthèse (calcul des commandes) d'un système à structure variable commandé en régime glissant; sous certaines conditions le point représentatif de l'évolution du système dans l'espace de phase peut être maintenu sur une surface qui est choisie a priori. L'état du système bouclé est alors plongé dans l'état du système réduit de dimension inférieure et libre. Dans ce cas, les propriétés dynamiques du système bouclé ne dépendent plus des coefficients de la surface de glissement  $S$ , ce qui explique l'invariance de la structure variable par rapport aux perturbations ainsi que son applicabilité aux systèmes linéaires et non linéaires.

### 2.3 Etude de la commande par structure variable en régime glissant

Les résultats sur les équations différentielles à second membre discontinu ont été exploités par Emelyanov et Utkin pour la mise en œuvre d'une commande à structure variable de système non linéaire. Nous donnons ci-dessous deux expressions équivalentes pour l'équation d'évolution de la solution  $x(t)$ , trajectoire d'état du système en mode de glissement.

#### 2.3.1 Equation d'état exprimée à partir du gradient et du produit scalaire

Cette méthode est basée sur les résultats de Philippov qui est l'une des premières méthodes qui a montré l'existence et l'unicité de la solution des systèmes dynamiques à second membre discontinu en régime glissant. Philippov a défini un champ de vecteurs moyen décrivant la trajectoire d'état en mode de glissement idéal. Ce champ de vecteurs moyen est obtenu par la moyenne géométrique ou par une combinaison convexe des champs de vecteurs définis de chaque côté de  $S$  (figure 2.2). Ce champ de vecteurs moyen est tangentiel à la surface de glissement où le mode de glissement existe. Soit le système non linéaire dont le fonctionnement est régi par un système différentiel de type (2.1), dans lequel la variable indépendante  $U$  désigne la commande :

$$\frac{dx}{dt} = f(U, x, t) \quad (2.5)$$

Considérons une commande non linéaire de type discontinu :

$$U = \begin{cases} U^+(x, t) & \text{si } S(x, t) > 0 \\ U^-(x, t) & \text{si } S(x, t) < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Supposons que la partie droite de l'équation (2.5) présente une discontinuité à la traversée de la surface  $S(x,t)$  (figure 2.2).

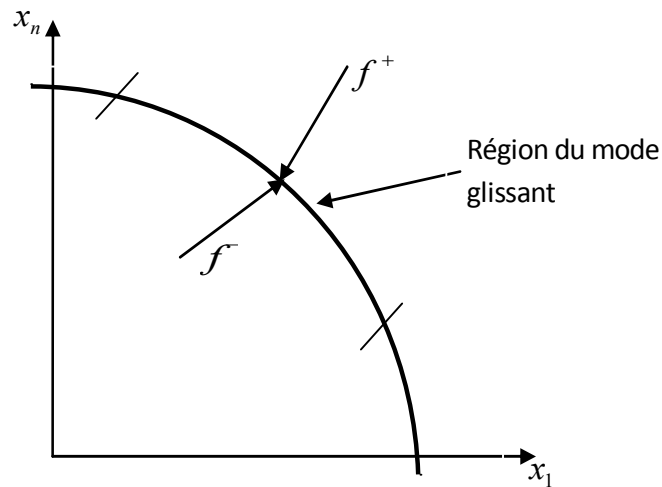


Figure 2.2 : Région du mode de glissement et champ de vecteurs associé selon une coupe de l'espace d'état.

Considérons le cas général d'une surface de glissement  $S(x,t) = 0$ ; la trajectoire d'état du système (2.5) piloté avec la loi de commande (2.6) est solution de l'équation suivante :

$$\frac{dx}{dt} = \mu f^+ + (1 - \mu) \cdot f^- = f^0 \tag{2.7}$$

Avec  $0 \leq \mu \leq 1$  et  $f^0 = (f_1^0 \dots \dots \dots f_n^0)$

$f^0$  est appelée vitesse d'état moyenne (c'est un champ de vecteurs moyen) sur la trajectoire d'état en mode de glissement idéal. Ce champ de vecteurs moyen est tangentiel à la surface de glissement, il est obtenu par la moyenne géométrique ou par une combinaison convexe des champs de vecteurs définis de chaque côté de  $S$  (figure 2.3).



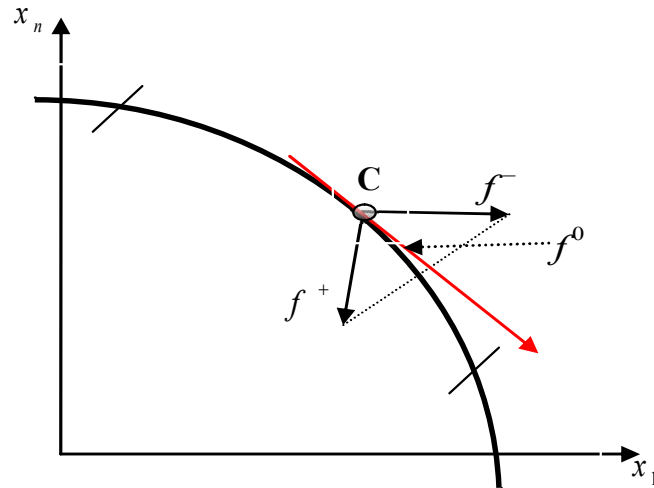


Figure 2.3 : Construction du champ de vecteurs moyen  $f^0$  dans l'espace d'état  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Soit  $S$  le gradient de  $S(x,t)$  et  $\langle \dots, \dots \rangle$  le produit scalaire de deux vecteurs. En dérivant  $S(x,t) = 0$  par rapport à  $t$ , on aura :

$$\frac{dS(x,t)}{dt} = \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \cdot f^0 + \frac{\partial S}{\partial t} = \langle \nabla S, f^0 \rangle + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (2.8)$$

En tenant compte de (2.7) et (2.8) on aura :

$$\mu = \frac{\langle \nabla S, f^- \rangle + \frac{\partial S}{\partial t}}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \quad (2.9)$$

En portant l'expression de  $\mu$  dans (2.7), l'équation d'état décrivant le système bouclé en régime glissant est :

$$\mu = \left[ \frac{\langle \nabla S, f^- \rangle + \frac{\partial S}{\partial t}}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \right] \cdot f^+ - \left[ \frac{\langle \nabla S, f^- \rangle + \frac{\partial S}{\partial t}}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \right] \cdot f^- = f^0 \quad (2.10)$$

Cette équation donne lieu à une détermination de la trajectoire d'état  $x(t)$  en mode de glissement. Nous ferons deux remarques : si  $t$  n'est pas explicite alors on a  $x(t)$  fournie par

l'équation (2.10) dans laquelle  $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$  ; en plus, la commande  $U$  qui n'est pas explicite dans l'équation (2.10) intervient dans la solution puisque  $f^-$  et  $f^+$  sont fonction de  $U$ .

### 2.3.2 Commande équivalente et équation d'état du régime glissant idéal

Soit le système dynamique monovariante décrit par l'équation d'état suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + g(x,t)U \quad (2.11)$$

Un vecteur de commande équivalente  $U_{eq}$  est défini pour obtenir les équations du régime glissant idéal (sans retard, sans seuil et sans hystérésis). Ce régime ayant lieu sur la surface  $S(x,t) = 0$ , on exprime que :

$$\frac{dS(x,t)}{dt} = 0$$

Cette équation est utilisée pour déterminer  $U_{eq}$

$$\frac{dS(x,t)}{dt} = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^T \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial t} = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^T \cdot [f(x,t) + g(x,t)U_{eq}] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

d'où

$$U_{eq}(x,t) = - \left[ \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^T \cdot g(x,t) \right]^{-1} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^T \cdot f(x,t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right\} \quad (2.12)$$

avec la condition d'existence

$$\left[ \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^T \cdot g(x,t) \right] \neq 0 \quad (2.13)$$

En portant l'expression de  $U_{eq}(x,t)$  dans l'équation (2.12), la trajectoire de l'état  $x(t)$  décrivant le système en régime glissant est solution de :

$$\frac{dx}{dt} = \left\{ I - g(x,t) \cdot \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) \cdot g(x,t) \right]^{-1} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \right\} \cdot f(x,t) - g(x,t) \cdot \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot g(x,t) \right]^{-1} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \quad (2.14)$$

L'équation (2.14) est équivalente à (2.10). Le vecteur  $U_{eq}$  a un sens physique que l'on peut déduire des équations (2.11):

$$U_{\min} = \text{MIN} \{U^+(x), U^-(x)\} < U_{eq}(x) < \text{MAX} \{U^+(x), U^-(x)\} = U_{\max}$$

On peut interpréter  $U_{eq}$  comme la valeur moyenne de  $U(t)$  lors de la commutation rapide entre  $U_{\max}$  et  $U_{\min}$  comme représenté sur la figure (2.4).

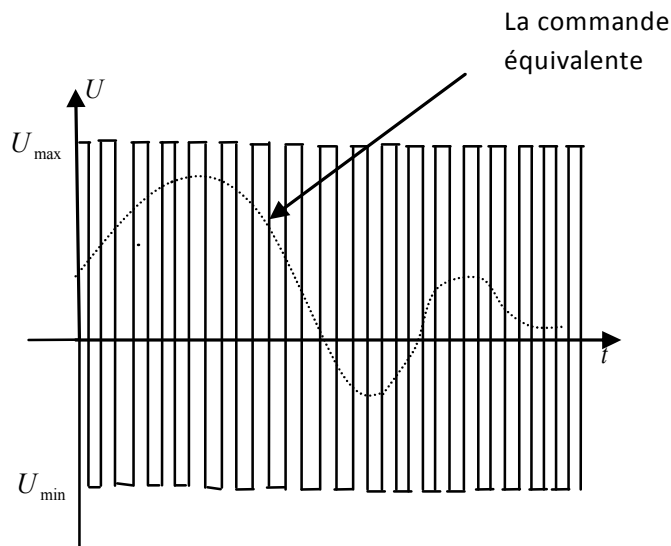


Figure 2.4 : Grandeur de commande équivalente  $U_{eq}$

## 2.4 Formalisation par la géométrie différentielle pour l'analyse et la synthèse des régimes glissants

Dans cette seconde formalisation nous utilisons des outils de base de la géométrie différentielle pour la synthèse des régimes glissants.

### 2.4.1 Mode de glissement

Soit le système dynamique non linéaire décrit par l'équation (2.15) dans lequel le temps ne figure pas explicitement :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + g(x, t).U \tag{2.15}$$

où  $x \in X$  un ouvert de  $R^n$ ,  $f(x)$  et  $g(x)$  des champs de vecteurs définis sur  $R$  avec  $g(x) \neq 0; \forall x \in X, f(x) = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T, g(x) = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T$

La fonction de commande  $U$  définie dans  $R, U : R^n \rightarrow R$ . Supposons que la fonction commande subisse une discontinuité de premier ordre sur une surface définie par une fonction continue  $S : X \rightarrow R$ , dont le gradient est non nul sur  $X$ . L'ensemble suivant noté  $S$  sera défini ainsi :

$$S = \{x \in R^n : S(x) = 0\} \tag{2.16}$$

Nous avons vu au paragraphe (2.3.1) que dans un système à structure variable, la condition de régime glissant entraînait l'introduction dans le régulateur d'une commutation de la commande entre deux valeurs différentes suivant le signe de  $S(x)$  :

$$U = \begin{cases} U^+(x, t) & \text{si } S(x, t) > 0 \\ U^-(x, t) & \text{si } S(x, t) < 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

La commande  $U$  prend ainsi la valeur de deux fonctions continues en  $x$  et possède une discontinuité (avec  $(U^+(x) > U^-(x))$ ) sur la variété formée par la surface de glissement dans l'espace d'état.

Nous désignons par  $L_{h\sigma}$  comme spécifié par [19], la dérivée directionnelle de la fonction scalaire  $\sigma$  suivant le champ de vecteurs  $h$ . A l'aide de la commande  $U$  définie en (2.17), la commutation d'une valeur à l'autre s'effectue à la traversée d'une hyper surface de l'espace des phases du système de façon à contraindre le point représentatif du mouvement du système à rester sur cette hyper surface. On dit alors que le système est en régime glissant sur  $S$  chaque fois que :

$$\lim(L_{f+g.U^+} . S < 0) \text{ et } \lim(L_{f+g.U^-} . S > 0) \tag{2.18}$$

Puisque  $\nabla S$  désigne le gradient de  $S(x)$  et  $\cdot$  désigne le produit scalaire de deux vecteurs la condition précédente (2.18) s'écrit sous la forme :

$$\lim (\langle \nabla S, f + g.U^+ \rangle < 0) \text{ et } \lim (\langle \nabla S, f + g.U^- \rangle > 0) \quad (2.19)$$

Cette condition est équivalente à la condition classique (1.4) et traduit le résultat suivant : La surface  $S$  sépare  $G$  (domaine de l'espace des variables  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ) en deux parties  $G^+$  ( $S > 0$ ) et  $G^-$  ( $S < 0$ ); si dans un petit voisinage les projections  $f+g.U^+$  et  $f+g.U^-$  sur le vecteur gradient de  $S$  sont de signes contraires, alors la surface  $S$  sera attractive et les champs commandés se dirigent vers cette surface de commutation.

La figure (2.5) suivante est à rapprocher de la figure (2.2).

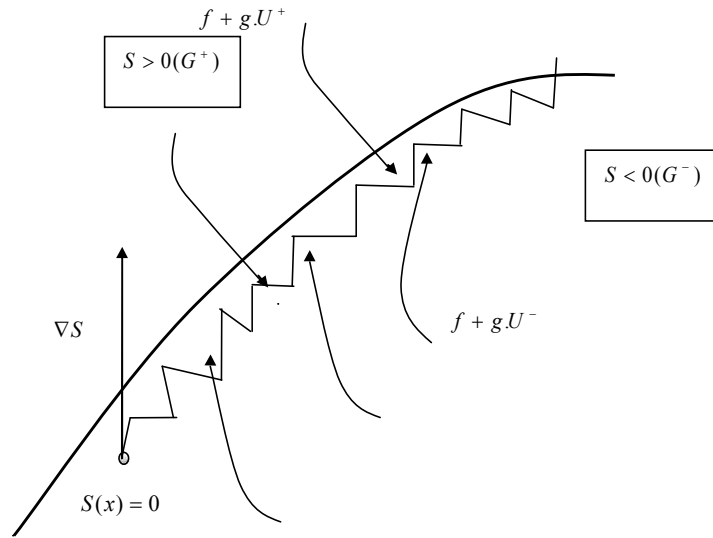


Figure 2.5 : Commutation de champs de vecteurs sur la variété  $S$

### 2.4.2 Commande équivalente et condition de glissement

Le vecteur des commandes équivalentes  $U_{eq}$  est défini pour obtenir les équations du régime glissant idéal, dans ce cas la commutation se traduit par une oscillation de fréquence infinie et d'amplitude nulle. Le point représentatif du mouvement du système glisse alors parfaitement sur la surface de commutation. Ceci est expliqué par le fait que la surface de glissement porte dans ce cas la trajectoire du système dans l'espace des phases. Le mouvement glissant idéal est décrit en utilisant les conditions d'invariances suivantes :  $S(x,t) = 0$  et

$$L_{f+g.U_{eq}}.S = \langle \nabla S, f + g.U_{eq} \rangle = 0 \quad (2.20)$$

où  $U_{eq}$  est une loi de commande pour laquelle  $S$  est une variété locale invariante.

De l'équation (2.20), on déduit la commande équivalente :

$$U_{eq} = -\frac{\langle \nabla S, f \rangle}{\langle \nabla S, g \rangle} = -\frac{L_f.S}{L_g.S} \quad (2.21)$$

Cette expression pour la commande équivalente est en effet égale à l'expression de l'équation (2.12)

Notons par  $T_x X$  l'espace tangent à  $X$  en  $x$  et soit  $\Delta_S(x)$  un sous espace de  $T_x X$  tel que  $\langle \nabla S, \Delta_S(x) \rangle = 0$ , c'est-à-dire  $\Delta_S(x) = \ker \nabla S$

où  $\Delta_S(x)$  est appelée distribution glissante associée à  $S$  et  $\ker$  représente le noyau de  $S$ .

Les conditions d'invariance (2.20) conduisent à :

$$f + g.U_{eq} \Big|_{S=0} \in \ker \nabla S = \Delta_S(x) \quad (2.22)$$

L'équation (2.22) est équivalente à l'équation (2.12) dans le formalisme classique.

La dynamique du système commandé en mode de glissement idéal est alors décrite par :

$$\frac{dx}{dt} = f + g.U_{eq}$$

Cette dynamique ne dépend que des coefficients de  $S = 0$ , hyper surface sur laquelle se trouve la trajectoire  $x(t)$  de solution (2.15).

### 2.4.3 Condition d'existence et d'unicité de la commande équivalente

**Lemme 1 :** Une condition nécessaire et suffisante pour définir une commande équivalente est que la condition de transversalité :

$$\langle \nabla S, g \neq 0 \rangle \quad (2.23)$$

soit localement satisfaite sur  $S$ .

**Lemme 2 :** Si le régime glissant existe localement sur  $S$  alors :

$$L_g S = \langle \nabla S, g \rangle < 0 \quad (2.24)$$

**Théorème 1** : Une condition nécessaire et suffisante d'existence locale des régimes glissants sur  $S$  est que localement dans  $X$  :

$$U^-(x) < U_{eq}(x) < U^+(x) \quad (2.25)$$

2.4.4 Dépendance et indépendance du régime glissant idéal vis-à-vis des champs de vecteurs  $f(x)$  et  $g(x)$ .

A partir de l'expression de la commande équivalente, donnée par (2.12) et (2.21) le mouvement du système sur  $S$ , dû à la commande équivalente est donné par :

$$\dot{x} = f(x) + g(x).U_{eq}(x) = \left[ I - g(x)(\langle \nabla S, g(x) \rangle)^{-1}(\nabla S) \right] f(x) \quad (2.26)$$

Cette dernière équation caractérise le système en mode de glissement idéal.

La condition d'invariance de la variété donnée en (2.22) sera de la forme :

$$\dot{x} = f(x) + g(x).U_{eq}(x) = F.f(x) \in \ker \nabla S(x) = \Delta_s(x) \quad (2.27)$$

où :

$$F = \left[ I - g(x)(\langle \nabla S, g(x) \rangle)^{-1}(\nabla S) \right]$$

Représente l'opérateur de projection sur l'espace  $T_x X$ .

Le long de la distribution  $\Delta_s(x)$ , seules les composantes du champ de vecteurs  $f$  définissent la nature du mode de glissement idéal. Montrons en effet que le champ de vecteurs  $g$  n'a aucune influence dans le mode de glissement idéal.

Pour cela, considérons la distribution  $G : x \rightarrow \text{span} \{g(x)\}$ , avec  $\text{span} \{g(x)\}$  l'espace engendré par la base  $g(x)$ . Soit une distribution de champ de vecteurs  $\Delta G \in \text{span} (g(x))$  c'est-à-dire des vecteurs de la forme  $g(x).U(x)$ .

Considérons l'expression donnée par  $F.g(x).U(x)$ , on aura :

$$\begin{aligned} \left[ I - g(x)(\langle \nabla S, g(x) \rangle)^{-1}(\nabla S) \right] g(x).U(x) = \\ \left[ I - g(x)(\langle \nabla S, g(x) \rangle)^{-1}(\nabla S, g(x)) \right] U(x) = 0.U = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ainsi, le champ de vecteurs  $g(x)$  n'intervient pas dans le mode de glissement idéal défini par (2.27).

#### 2.4.5 Invariance des régimes glissants par rapport aux perturbations

Considérons le système dynamique perturbé suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + g(x,t).U(x) + \zeta \quad (2.29)$$

Avec :  $\zeta = \partial f(x)$ ,

$\zeta$  Représente les perturbations paramétriques du champ de vecteurs nominal  $f$ . On dit que le régime glissant possède une propriété d'invariance forte vis-à-vis du vecteur perturbateur  $\zeta$ , chaque fois que  $\zeta$  satisfait la définition suivante :

**Définition :** Le régime glissant idéal jouit de propriété d'invariance forte par rapport au signal de perturbation  $\zeta$  chaque fois que la dynamique du système en mode de glissement idéal est indépendante du signal de perturbation  $\zeta$ .

**Théorème 2 :** Le régime glissant sur la variété  $S$  du système perturbé (2.29) satisfait les propriétés d'invariance vis-à-vis de  $\zeta$  si et seulement si le vecteur de perturbations satisfait la condition suivante :  $\zeta \in \text{span} \{g(x)\}$ , où  $\text{span}$  représente l'espace engendré par la base  $g(x)$ .

**Preuve :** Pour le système dynamique perturbé (2.29), le régime glissant idéal est gouverné par :

$$\frac{dx}{dt} = F(f + \partial f)$$

Avec  $F$  l'opérateur de projection et  $\partial f \equiv \zeta$ .

La condition nécessaire vient du fait que si :

$$F.\zeta = [I - g(x)(\langle \nabla S, g(x) \rangle)^{-1}(\nabla S)]\zeta = 0$$

Alors on déduit :

$$\zeta = \{g(x).(\langle \nabla S, g(x) \rangle)^{-1}(\nabla S)\}\zeta = g(x).\mu(x)$$

C'est-à-dire  $\zeta \in \text{span} \{g(x)\}$  pour toute fonction scalaire continue  $\mu(x)$ .

La condition suffisante vient du fait que si  $\zeta \in \text{span} \{g(x)\}$ , soit  $\zeta = g(x).\mathcal{G}(x)$  pour toute fonction scalaire continue  $\mathcal{G}(x)$ , alors tenant compte de (2.28) l'opérateur de projection  $F$  annule l'influence de  $\zeta \in \text{span} \{g(x)\}$  sur la dynamique équivalente.

**Théorème 3 :** Soit  $\zeta \in \text{span} \{g(x)\}$  et  $U_{eq}(x)$  la commande équivalente correspondante au régime sur  $S$  du système non perturbé (2.15). Soient  $U^+(x)$  et  $U^-(x)$  les bornes fixes de la loi de commande à structure variable, avec  $U^+(x) > U^-(x)$  localement dans  $X$ . Si le régime glissant existe pour le système perturbé (1.34) alors, nécessairement, le vecteur perturbateur s'écrit  $\zeta = g(x).\mathcal{G}(x)$

Avec  $\mathcal{G}(x)$  une fonction scalaire continue bornée.



$$U_{eq}^-(x) - U^-(x) > \mathcal{G}(x) > U_{eq}^+(x) - U^+(x) \quad (2.30)$$

## 2.5 Étude de la commande par mode de glissement

La commande par mode de glissement est une commande à structure variable (VSS variable structure system) qui est basée essentiellement sur la résolution des équations différentielles à seconds membres discontinus, initiée par le mathématicien soviétique Philippov. Le véritable essor de l'utilisation de cette technique date de la parution de livres d'Itkis. Cette technique de commande a reçu un intérêt sans cesse croissant en raison de sa simplicité d'élaboration et de son application dans divers domaines de l'automatique et de l'électronique de puissance.

Le principe de la commande est de contraindre le système à atteindre une surface prédéfinie et d'y rester par la suite malgré d'éventuelles perturbations. La surface choisie (représentant un ensemble de relations, statique et entre les variables d'état) est alors désignée comme étant la surface de glissement ou de commutation. Le comportement dynamique résultant appelé régime glissant est complètement déterminé par les paramètres de cette surface. Un des avantages de la commande par modes de glissements est notamment la robustesse par rapport aux perturbations intervenant de façon colinéaire avec l'entrée (conditions de recouvrement).

Dans la pratique, l'utilisation de la commande a été longtemps limitée par des oscillations liées aux commutations de la commande : des oscillations hautes fréquences apparaissant dans un voisinage de la surface, connues sous le nom de réticence ou broutement. Ce phénomène peut en outre exciter des dynamiques non modélisées conduisant à des situations d'instabilité. Ceci a conduit certains chercheurs à donner des solutions pour supprimer ou du moins réduire ce phénomène indésirable.

La commande à structure variable (par modes de glissement) est une commande non linéaire, elle est caractérisée par la discontinuité de la commande aux passages d'une surface de commutation appelée surface de glissement. Dans cette étude, nous donnons une définition du concept de système à structure variable et nous exprimons les caractéristiques essentielles de cette loi de commande à partir de différents outils théoriques de l'automatique linéaire et non linéaire.

### 2.5.1 Principe de la commande par modes de glissement

Le principe de la commande par modes de glissement est de contraindre le système à atteindre la surface donnée appelée surface de glissement, en fonction des objectifs de la commande fixant la dynamique en boucle fermée : c'est le mode de convergence. Puis par

la synthèse d'une commande discontinue qui permet aux trajectoires du système à atteindre et rester sur cette surface : c'est la surface de glissement et le mouvement qui se produit le long de celle-ci est appelé mouvement de glissement.

La trajectoire dans le plan de phase est constituée de trois parties distinctes [20] :

- 1- Le mode de convergence « MC » : C'est le mode durant lequel l'état du système se déplace à partir de n'importe quel point initial dans le plan de phase et tend vers la surface de commutation  $s(x)=0$ . Ce mode est caractérisé par la loi de commande et le critère de convergence.
- 2- Le mode de glissement « MG » : C'est le mode durant lequel la variable d'état a atteint la surface de glissement et tend vers l'origine du plan de phase. La dynamique de ce mode est caractérisée par le choix de la surface de glissement  $s(x)=0$ .
- 3- Le mode du régime permanent « MRP » : Ce mode est ajouté pour l'étude de la réponse du système autour de son point d'équilibre (origine du plan de phase), il est caractérisé par la qualité et les performances de la commande.

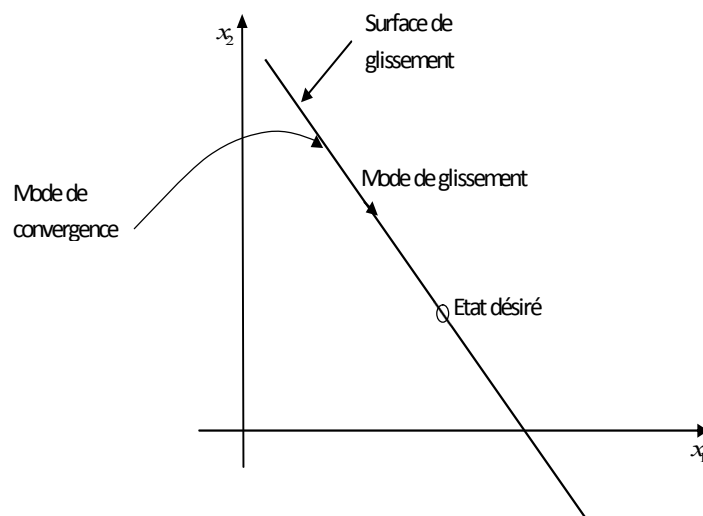


Figure 2.6 : Différents modes de convergence pour la trajectoire d'état

### 2.5.2 Conception de la commande par mode glissant

Les avantages de la commande par mode glissant sont importants et multiples, entre autres, la haute précision, la bonne stabilité, la simplicité, l'invariance, la robustesse...etc. Ceci lui permet d'être particulièrement adaptée pour les systèmes ayant des modèles imprécis [21].

La conception de la commande peut être effectuée en trois étapes principales très dépendantes l'une de l'autre :

- Choix de la surface.
- Etablissement des conditions d'existence.
- Détermination de la loi de commande.

### 2.5.3 Choix de la surface de glissement

La surface de glissement peut être linéaire ou non linéaire, elle est construite de telle sorte que le système ait toujours une dynamique désirée et est généralement choisie avec un degré relatif égal à un (i.e. la dérivée de la surface  $S(x)$  par rapport au temps fait apparaître explicitement la commande  $U$ ). Pour les systèmes d'ordre entier, plusieurs formes d'écriture sont proposées dans [22].

Considérons une classe de systèmes non linéaires (2.32), le vecteur de surface a la même dimension que le vecteur de commande  $u$ .

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)u \quad (2.31)$$

où :  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$  appartient à  $X$  est le vecteur d'état de système

$u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_m)^T$  : Vecteur de commande.

$f, g$  Sont des champs du vecteur suffisamment différentiables définis sur  $X$

La surface est donnée par :

$$S_j(x) = \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot e_i \quad (2.32)$$

où :  $s_i(x) = 0$  est la fonction de commutation, elle sépare l'espace d'état en deux parties disjointes  $s(x,t) < 0$  et  $s(x,t) > 0$ .

$S(x) = [S_1(x), S_2(x), \dots, S_m(x)]$  : Vecteur de la surface de glissements.

$x_{ref_i} = [x_{ref_1}, x_{ref_2}, \dots, x_{ref_n}]^T$  : Vecteur de référence (l'état désiré).

$e_i = x_i - x_{ref_i}$  : L'erreur entre la variable à commander et sa référence.

$e_i = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$  : Vecteur de l'écart.

$c_{ij}$  : Paramètres de la surface de glissement.

$C$  : Matrice d'éléments de  $m \times n$  paramètres de la surface (matrice de pente de la droite de surface).

Le choix des paramètres de la surface se fait de façon satisfaisant les performances désirées. Slotine propose une forme d'équation générale pour déterminer la surface de glissement qui assure la convergence d'une variable vers sa valeur désirée.

$$S(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right)^{r-1} .e(x) \quad (2.33)$$

Avec :  $e_i = x_i - x_{ref_i}$

$\lambda$  : Une constante positive

$r$  : degré relatif, égal au nombre de fois qu'il faut dériver la sortie pour faire apparaître la commande.

$s(x) = 0$  est une équation différentielle linéaire dont l'unique solution est :  $e(x) = 0$ , ceci implique que l'état du système est égal à l'état désiré.

### 2.5.4 Principe d'invariance

Cette propriété nécessite toutefois que certaines hypothèses appelées (*matching conditions*) soient vérifiées par les perturbations[23].

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A).x(t) + B.u(t) + f(t) \quad (2.34)$$

Où :  $\Delta A$  et  $f(t)$  sont respectivement le terme d'erreurs de modélisation et une perturbation externe.

Définition: *matching conditions*

$\Delta A$  et  $f(t)$  vérifient l'hypothèse des matching conditions s'il existe  $\tilde{\Delta A} \in R^{n \times m}$  et

$\tilde{\Delta f} \in R^{n \times m}$  telles que :

$$\Delta A = B.\tilde{\Delta A} \text{ et } \Delta f = B..\tilde{\Delta f}$$

La signification physique de cette hypothèse est que l'on considère des incertitudes de modélisation ou une perturbation attaquant le système par la matrice d'entrée.

### 2.5.5 Conditions de convergence et d'existence

Les conditions d'existence et de convergence sont les critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et d'y rester, indépendamment de la perturbation. Il existe deux considérations pour assurer le mode de convergence.

#### 2.5.5.1 La fonction discrète de commutation

Cette approche est la plus ancienne. Elle est proposée par Emelyanov et Utkin. Il s'agit de donner à la surface une dynamique convergente vers zéro. Elle est donnée par:

$$U = \begin{cases} \dot{S}(x) > 0 \dots \text{si} \dots S(x, t) < 0 \\ \dot{S}(x) < 0 \dots \text{si} \dots S(x, t) > 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Cette condition peut être formulée comme suit:

$$\dot{S}(x) \cdot S(x) < 0 \quad (2.36)$$

Elle est globale mais ne garantit pas en revanche un temps d'accès fini. Cette condition est toutefois difficile à utiliser pour faire la synthèse de la loi de commande.

#### 2.5.5.2 La fonction de Lyapunov

La fonction de Lyapunov est une fonction scalaire positive  $V(x) > 0$  pour les variables d'état du système. La loi de commande doit faire décroître cette fonction  $\dot{V}(x) < 0$ . L'idée est de choisir une fonction scalaire  $S(x)$  pour garantir l'attraction de la variable à contrôler vers sa valeur de référence et de concevoir une commande  $u$  telle que le carré de la surface correspond à une fonction de Lyapunov.

Nous définissons la fonction de Lyapunov comme suit:

$$V(x) = \frac{1}{2} S^T(x) S(x) \quad (2.37)$$

La dérivée de cette fonction est:

$$\dot{V}(x) = S(x)\dot{S}(x) \quad (2.38)$$

Pour que la fonction puisse décroître  $V(x) > 0$ , il suffit d'assurer que sa dérivée soit négative. Ceci n'est vérifiée que si la condition (2.37) est vérifiée.

### 2.5.6 Synthèse de la commande

Une fois la surface de glissement choisie, ainsi que le critère de convergence, il reste à déterminer la condition nécessaire pour ramener la variable à contrôler vers la surface et ensuite vers son point d'équilibre en maintenant le mode de glissement.

#### 2.5.6.1 Méthode de Philippov

L'une des premières approches est la méthode de Philippov. Cette approche est basée sur les résultats des travaux effectués par ce dernier sur les équations différentielles à second membre discontinu. Il propose une loi de commande qui prend deux valeurs suivant le signe de la surface de glissement :

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } S(x,t) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } S(x,t) < 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

$u^-$ ,  $u^+$  sont des fonctions continues, avec  $u^+ \neq u^-$ .

Cette commande  $u$  de nature discontinue va contraindre la trajectoire du système à atteindre la surface de glissement et de rester au voisinage de celle-ci malgré la présence de perturbations.

#### 2.5.6.2 Méthode de la commande équivalente d'Utkin

Cette méthode décrit la dynamique du système sur la surface de glissement. Elle permet de garder la variable contrôlée sur cette surface en imposant la valeur désirée en régime permanent de la grandeur d'entrée. Pour un système contrôlé donné, la première étape pour la réalisation d'une structure de régulation par ajout de la commande équivalente consiste à trouver un vecteur d'entrée équivalent  $u_{eq}$  de sorte que la trajectoire d'état du système à contrôler reste sur la surface de glissement prédéfinie.

Lorsque le système est en régime glissant, la trajectoire restera sur la surface de commutation. Cela peut être exprimé par

$$S(x,t) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{S}(x,t) = 0 \quad (2.40)$$

La commande équivalente est une fonction continue qui sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement.

La condition (2.40) est appelée la condition de l'invariance de la surface de glissement.

Nous prenons  $S(x,t) = S(x(t)) = S(x)$

$$\dot{S} = 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial x} (f(x) + g(x)u_{eq}) = 0$$

$u_{eq}$  appelée commande équivalente est associée au système nominale. Elle est déterminée

d'une façon unique par la condition de l'invariance (2.40). En supposant que  $\frac{\partial S}{\partial x} g(x) \neq 0$

la commande équivalente est donnée par le scalaire :

$$u_{eq} = -\left(\frac{\partial S}{\partial x} g(x)\right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} f(x) \quad (2.41)$$

Physiquement, la commande équivalente représente la valeur moyenne de  $u$  qui maintient l'état du système sur la surface de glissement  $S(x) = 0$ . L'équation du régime glissant idéal est obtenue en portant l'expression de  $u_{eq}$  dans (2.31) :

$$\dot{x} = f(x) - g(x)\left(\frac{\partial S}{\partial x} g(x)\right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} f(x) \quad (2.42)$$

$\frac{\partial S}{\partial x}$  étant non nul sur  $X$ , ceci implique  $m$  états en fonction de  $(m-n)$  autres. Ainsi, en régime glissant, la dynamique du système évoluant sur l'espace d'état est réduite de dimensions  $(m-n)$ . On aura alors  $m$  valeurs propres nulles et  $(m-n)$  valeurs propres non nulles.

### 2.5.7 Les nouveaux concepts de la commande par mode de glissement

Il y'a plusieurs nouveaux concepts de la commande par le glissement des VSS, telle que l'approche développée par Gao et Hung et les approches basées sur la géométrie différentielle ainsi que l'algèbre différentielle [24]. Nous allons présenter les différentes approches définies.

#### 2.5.7.1 Commande basée sur l'approche de la loi d'arrivée

Dans cet approche la loi d'arrivée est directement une équation différentielle spécifiant la dynamique de la fonction de commutation, cette équation asymptotiquement stable est la même que la condition de glissement,

La forme générale de la loi d'arrivée est :

$$\dot{S}(x) = -Q \cdot \text{sign}(s(x)) - K \cdot S(x) \tag{2.43}$$

où

$$Q : \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_m], q_i > 0$$

$$\text{sign}(S) = [\text{sign}(S_1), \text{sign}(S_2), \dots, \text{sign}(S_m)]^T$$

$$K : \text{diag}[k_1, k_2, \dots, k_m]^T, k_i > 0$$

Trois cas spéciaux pratiques de (2.43) sont donnés ci-dessous et développés dans [24]

**A. Loi d'arrivée avec une vitesse constante**

La loi d'arrivée dans ce cas est donnée par :

$$\dot{S}(x) = -Q \cdot \text{sign}(s(x)) \tag{2.44}$$

Cette loi force la trajectoire d'état à atteindre la surface de glissement à vitesse constante qui dépend de la valeur de  $Q$ . Cette loi force la fonction de commutation  $S(x)$  à atteindre l'hyperplan de commutation  $S$  à une vitesse de commutation. Le choix  $Q$  dans ce cas doit éviter à la fois un temps d'attractivité long et la production de grandes oscillations connues sous le nom de réticence, figure (2.7)

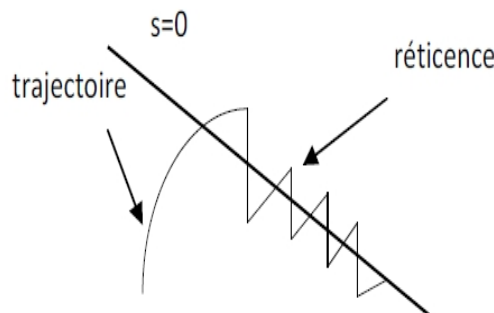


Figure 2.7 : Phénomène de broutement



### B. Loi d'arrivée avec une vitesse constante et à action proportionnelle

L'addition du terme proportionnel ( $-K.S(x)$ ) fait que la trajectoire d'état est forcée de s'approcher de la surface de glissement plus vite lorsque  $S(x)$  est grande. Plus  $K$  est grand, plus le temps d'attractivité est rapide; tandis que une petite valeur de  $Q$  réduit les oscillations. La loi d'arrivée dans ce cas est :

$$\dot{S}(x) = -Q \cdot \text{sign}(s(x)) - K \cdot S(x) \quad (2.45)$$

Le temps d'arrivée pour que  $x$  se déplace de l'état initial  $x_0$  vers l'hyperplan est fini et il donné par :

$$T_i = \frac{1}{k_i} \ln \frac{k_i |S_i| + q_i}{q_i} \quad (2.46)$$

### C. Loi d'arrivée avec une puissante vitesse

La loi dans ce cas est :

$$\dot{S} = -k_i |S_i|^\alpha \text{sign}(S_i), \text{ avec } 0 < \alpha < 1, i = 1 \dots m \quad (2.47)$$

Cette loi d'arrivée augmente la vitesse quand l'état du système est loin de l'hyperplan de commutation, et la réduit lorsque l'état est près.

Le temps d'arrivée sera :

$$T_i = \frac{1}{(1-\alpha)k_i} \cdot S_{i0} (1-\alpha) \quad i = 1 \dots m \quad (2.48)$$

#### 2.5.7.2 Commande continue par Bande de surface

Deux solutions analytiques sont proposées.

##### A. Première Forme continue de saturation (quasi- sliding mode)

Elle consiste à approximer la commande discontinue par la loi continue au voisinage de la surface. Le problème principal des régimes glissants est que la commande est discontinue sur la surface de glissement et par conséquent, elle va commuter régulièrement (chattering). Pour résoudre ce problème, la fonction discontinue est remplacée par une fonction continue ceci au voisinage de la surface de glissement et l'on procédera à un

lissage de la commande. Ainsi, on définira une "condition d'équilibre", qui doit remplacer toutes les fonctions discontinues apparaissant au voisinage de cette surface de glissement.

Le "chattering" étant indésirable, on peut remédier à cette situation en lissant la discontinuité de la commande dans une étroite bande limite avoisinant la surface de glissement (de commutation), ainsi cette bande limite sera définie par :

$$B(t) = \{X; S(x,t) \leq \phi\} \text{ et } \phi > 0 \quad (2.49)$$

Avec

$\phi$  est l'épaisseur de la bande, variant en fonction de  $t$ .

$\varepsilon = \frac{\phi}{\lambda^{n-1}}$  est la largeur de la bande

Ce lissage sera réalisé, en choisissant en dehors de la bande  $B(t)$  une loi de commande comme auparavant satisfaisant la condition de glissement qui garantira l'attraction vers la bande et donc l'invariance positive : c'est-à-dire que toutes les trajectoires commençant dans  $B(t=0)$  restent à l'intérieur de  $B(t)$ .

Cette nouvelle loi de commande est établie en remplaçant dans l'expression de la commande  $u(t)$ , le terme  $\text{sign}(S)$  par la fonction  $S/\Phi$ , ceci à l'intérieur de la bande  $B(t)$ , comme illustré sur la figure (2.8).

L'épaisseur de la bande  $\phi$  sera variable dans le temps et variera de façon à exploiter toujours la largeur de la bande maximale de la commande.

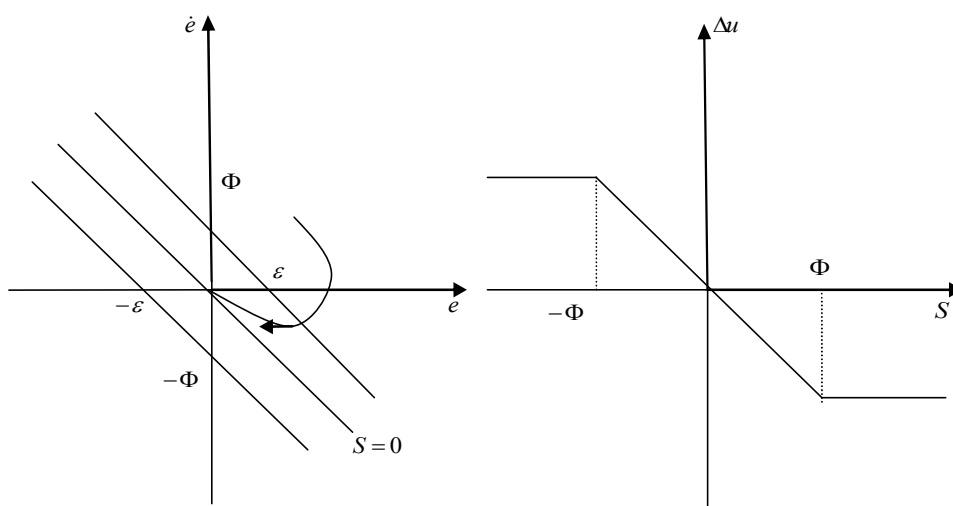


Figure 2.8 : Plan de phase et fonction de commutation de la commande par régime glissant à bande limite

Dans cette approche Slotine a proposé de remplacer la fonction signe  $u = -K.sign(S)$  (dans le voisinage de la surface de commutation) de la loi de commande par la fonction «  $sat(S)$  », figure (2.19).

Donc la commande discontinue devient alors :

$$u = -K.sat(S) \text{ où}$$

$$sat(S) = \begin{cases} \frac{S}{\phi} & \dots si \dots |S| < \phi \\ sign(s) & \dots si \dots |S| > \phi \end{cases} \quad (2.50)$$

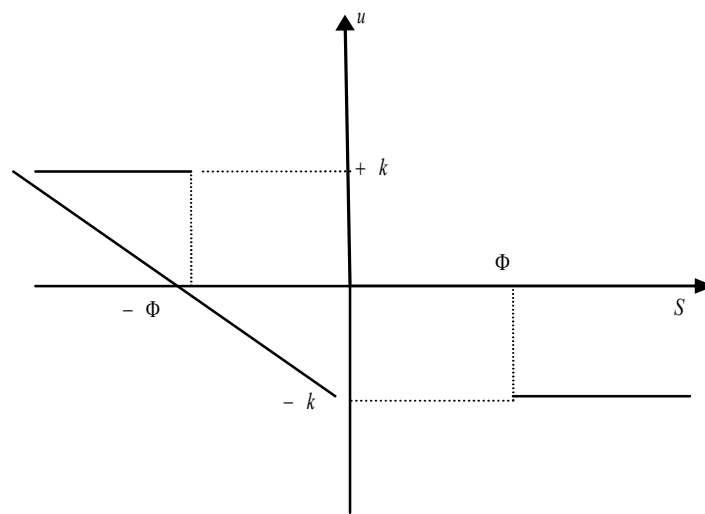


Figure 2.9 : Loi de commande par bande continue au voisinage de la surface de glissement

### B. Deuxième forme continue (quasi-sliding mode)

Une autre solution pour lisser la commande au voisinage des surfaces de commutation  $S_i = 0$  est proposée dans [25], elle consiste à remplacer dans la bande  $|S_i| < \Phi_i$  les fonctions discontinues  $sign(S_i)$  par des fonctions continues de la forme  $\theta(S)$  et la commande discontinue sera alors :  $\Delta u = -K.\theta(S)$  où

$$\theta = \begin{cases} \frac{S}{|S| + \delta} & \dots si \dots |S| \leq \phi \\ sign(S) & \dots si \dots |S| > \phi \end{cases} \quad (2.51)$$

Ceci est illustré sur la figure (2.10).

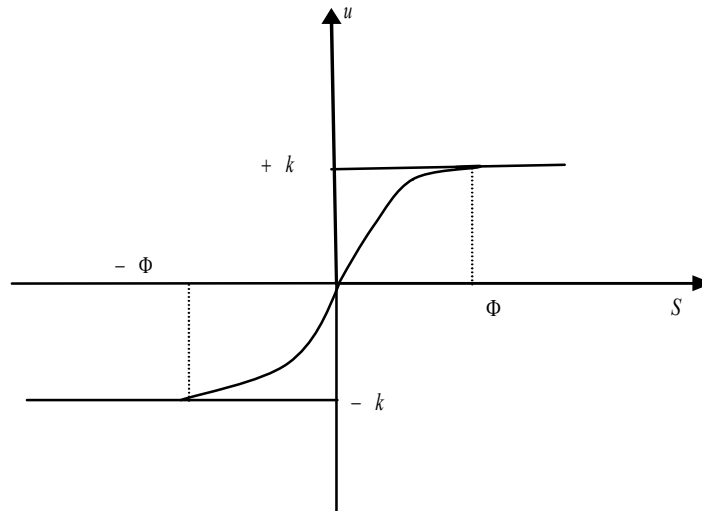


Figure 2.10 : Loi de commutation au voisinage de la surface de glissement

Cette loi de commutation a par conséquent un grand avantage dans la réduction du phénomène de broutement, mais les chercheurs n'ont pas cessé de proposer des approches pour éviter d'une manière complète ce phénomène. Dans la suite nous exprimons une nouvelle approche qui a été proposée par Park et al et qui a un rôle très important pour l'évitement de ce phénomène.

### 2.5.7.3 Commande robuste (Fast Terminal Sliding Mode Control)

Cette nouvelle approche peut converger l'état du système vers zéro dans un temps fini, elle ne possède pas de fonction discontinue *sign* et permet d'éviter d'une façon complète le phénomène de broutement. La surface de glissement proposée par Park et al est non linéaire, construite de telle sorte que le système converge dans un temps fini et sa forme peut être donnée comme suit :

$$S = \dot{x} + \beta \cdot x^p = 0 \quad (2.52)$$

Avec  $x \in R$ ,  $\beta > 0$ ,  $p, q, (p > q)$  des paramètres positifs.

A partir de cette dernière équation on peut écrire :

$$\left(\frac{dx}{dt} = \beta \cdot x^p\right) \text{ D'où } (dt = -\beta \cdot x^p dx) \text{ et on a :}$$

$$t_s = \frac{p}{\beta \cdot (p - q)} |x(0)|^{\frac{p-q}{p}} \quad (2.53)$$

La vitesse de convergence est augmentée par le terme non linéaire  $\beta \cdot x^{\frac{q}{p}}$ , cependant le temps d'arrivée à la surface de glissement est très court. Par conséquent, cette loi augmente la vitesse d'approche à la surface de glissement lorsque l'état est loin et le résultat obtenu est plus rapide et il y a absence du phénomène de broutement.

## 2.6 Conclusion

La commande par mode de glissement est par nature une commande non linéaire. La caractéristique principale de cette commande est que sa loi de commande change d'une manière discontinue selon une logique déterminée. Les commutations de la commande s'effectuent en fonction des variables d'état utilisées pour créer une variété ou hyper surface dite de glissement dont le but est de forcer la dynamique du système à correspondre avec celle définie par l'équation de l'hyper surface. Au niveau de ce deuxième chapitre nous nous sommes efforcés de montrer les différentes formes de lois de commande et nous remarquons que cette loi est constituée de deux composantes : la commande équivalente qui maintient la trajectoire d'état du système à contrôler sur la surface de glissement et la commande attractive qui représente la transition de la trajectoire d'état à partir d'un point initial jusqu'au début de la phase du mode de glissement.

Dans le chapitre suivant, nous exposons d'autres commandes du suivi de trajectoires qui sont adaptées à la commande des systèmes non linéaires.

## **CHAPITRE 3**

### **Suivi de trajectoires pour un robot mobile**

#### **3.1 Introduction**

Le suivi de trajectoires est une tâche primordiale pour les robots autonomes, simple et facile à implémenter. Les modèles cinématiques sont les plus utilisés dans la littérature; cette solution est satisfaisante pour les robots ayant des caractéristiques mécaniques simples et des vitesses d'évolution relativement réduites. On peut citer ici l'exemple du robot unicycle, son modèle cinématique garde une grande performance et robustesse.

Les performances de ce type de solution se dégradent remarquablement quand la dynamique du véhicule et les glissements deviennent importants notamment pour les robots rapides. Pour faire face à l'incertitude du modèle ainsi que les perturbations venant du sol, une approche utilisant la commande par mode glissant est avancée dans [26]. Cette commande est souvent citée pour sa robustesse vis-à-vis des perturbations non modélisées. Mais malgré sa robustesse d'un point de vue théorique, elle présente un inconvénient lors de son implémentation.

Cette loi de commande relie deux configurations (plan de glissement et point d'équilibre) [27] et elle est oscillante autour de la position d'équilibre, ce qui montre les limites de cette approche dans le plan pratique. Afin de profiter de la boîte à outils de l'automatique linéaire, plusieurs travaux proposent une linéarisation exacte du modèle cinématique du suivi de trajectoires et une conversion sous une forme dite chaînée pour la partie qui n'est pas linéarisable du modèle [28].

Ces modèles développés pour des robots type unicycle ou type voiture restent les plus utilisés dans le cas où les glissements et la dynamique latérale sont négligeables. Dans le cas contraire, le glissement est supposé comme une perturbation externe sous l'hypothèse de roulement sans glissement [29], [30] et [31]. Dans ce cas la robustesse de la commande et sa capacité du rejet des perturbations font toute la différence.

Notre approche s'inspire de la technique de la commande par modes glissants; ce choix est guidé par le fait que cette méthode a déjà fait ses preuves dans le cadre de la commande des robots mobiles notamment dans [32] et qu'elle ouvre des pistes de recherches intéressantes pour la synthèse de commandes robustes, facilement implémentables et présentant un bon compromis entre robustesse et performance.

Dans ce chapitre nous allons présenter deux approches de suivi d'une trajectoire; la première est une commande classique de type PID et la seconde consiste en une approche par retour d'état d'une loi de commande non linéaire basée sur un contrôleur de type backstepping avec des travaux de simulation.

### 3.2 Poursuite de trajectoires

Dans les deux dernières décennies, il y a eu beaucoup d'attention accordée à la commande de mouvement, en particulier dans le domaine de la robotique mobile. Le problème de la commande de mouvement peut être classé en trois principaux groupes : (i) le point de stabilisation (ii) le suivi de chemins (iii) le suivi de trajectoires (figure 3.1).

Il est important de comprendre la différence entre le suivi de chemins et le suivi de trajectoires. Dans [33], les auteurs mettent en évidence la différence fondamentale entre le suivi d'un chemin et le suivi d'une trajectoire. Dans le cas du suivi d'un chemin, l'objectif de contrôle est de suivre un chemin géométrique sans une loi de distribution qui lui est attribuée; le suivi peut être même utilisé quand le système a une dynamique de zéro instable. Mais dans le cas de suivi d'une trajectoire, c'est qu'une fois que la trajectoire du robot est déterminée, dans le contexte de l'évitement d'obstacles ou non, qu'il faut pouvoir la suivre.

Le problème de suivi d'une trajectoire de référence pour un robot mobile non-holonome est apparu comme un problème de premier ordre pour la communauté roboticienne durant ces dernières années. En effet, la forte utilisation des robots mobiles dans les domaines où l'être humain ne peut pas s'aventurer, notamment dans les sites nucléaires à haut risque ou dans le cas de l'exploration spatiale, nécessite la mise en œuvre de lois de commande autonomes et performantes pour assurer les tâches assignées aux robots. Plusieurs travaux concernant la poursuite de trajectoires ont été présentés dans ce contexte. Après une rapide formalisation de ce problème, une liste non exhaustive des différentes commandes disponibles dans la littérature est présentée.

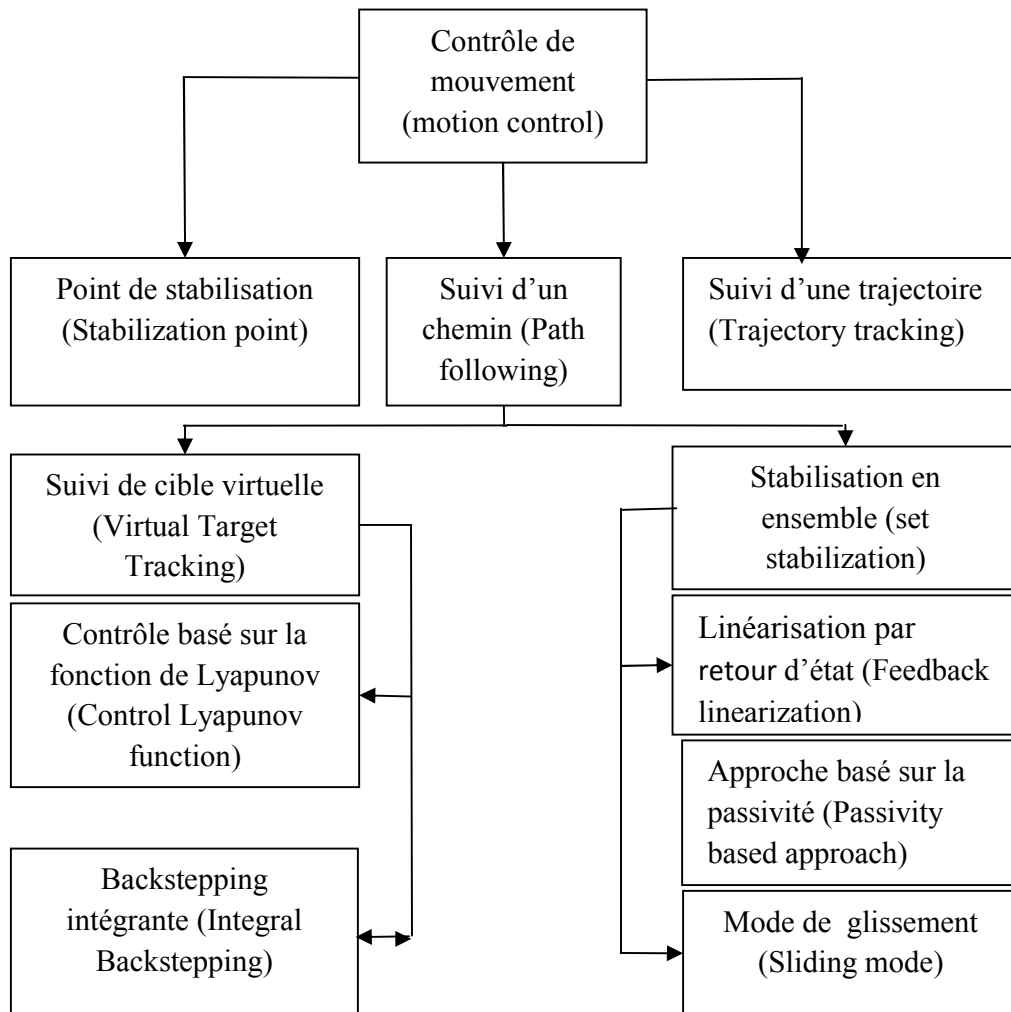


Figure 3.1 : Organigramme du contrôle de mouvement d'un robot mobile

### 3.3 Formulation du problème

Considérons un robot mobile représenté par un modèle non linéaire de la forme :

$$\dot{q} = f(q, u) \tag{3.1}$$

où  $q \in R^n$  est l'état du système et  $u \in R^n$  la commande du système et

$f: R^m \times R^n \rightarrow R^n$  est une application infiniment différentiable.



Etant donnée une trajectoire de référence admissible  $q_r$ , l'objectif de la poursuite de trajectoire est de trouver la commande  $u$  du système (3.1) en fonction de  $q$ ,  $q_r$  et du temps telle que l'erreur de poursuite  $q_e = q - q_r$  converge asymptotiquement vers zéro. Dans le cadre d'un robot mobile non holonome de type unicycle, le principe de la poursuite de trajectoire est illustré sur la figure (3.2).

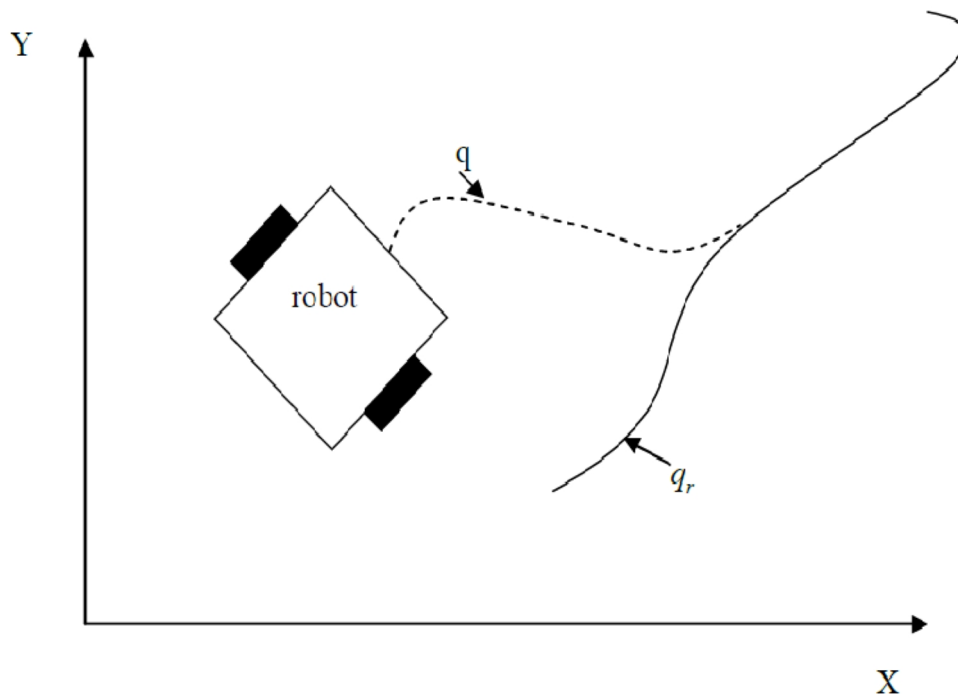


Figure 3.2 : Poursuite de trajectoires admissibles[34].

Une propriété des modèles de robots mobiles non-holonomes (de type voiture ou unicycle) est qu'ils ne sont pas stabilisables par un retour d'état continu et stationnaire, ce corollaire est le résultat des travaux de Brockett.

**Théorème :** Considérons le système non linéaire (3.1) où  $f$  est suffisamment différentiable et  $f(0,0) = 0$ , une condition nécessaire pour qu'il existe un retour d'état  $u(q)$  continu qui rende l'origine du système bouclé localement stable est que l'image par  $f$  de tout voisinage de l'origine de  $R^{n \times m}$  soit un voisinage de 0 dans  $R^n$ . La condition nécessaire énoncée dans ce théorème n'est pas satisfaite dans le cas des robots mobiles de type unicycle ou voiture.

Dans la littérature, plusieurs travaux ont été développés pour résoudre ce problème en proposant des commandes avec un retour d'état non stationnaire continu [35-37] ou discontinu [38-42].

### 3.4 Stabilisation par un retour d'état non stationnaire continu

Pour contourner le problème évoqué précédemment, des commandes non stationnaires continues ont été développées et font l'objet de cette section.

#### 3.4.1 Commande en boucles ouverte et fermée

Une première famille de stratégies de commande permettant de réaliser le suivi de trajectoires est basée sur l'application directe de commandes issues de la platitude [43].

**Définition** : Le système (3.1) est dit plat s'il existe une fonction  $s$  dépendant de l'état  $q$ , de l'entrée  $u$  et d'un nombre fini de ses dérivées successives tel que, inversement, l'état  $q$  et sa commande  $u$  s'expriment en fonction de  $s$  et d'un nombre fini de ses dérivées successives. Dans ce cas,  $s$  est appelée une sortie plate.

Le modèle cinématique d'un robot mobile non holonome de type unicycle (3.1) est un système plat en considérant la sortie plate  $S = [x, y]^T$ . Les vitesses linéaires  $v$  et angulaire  $w$  ainsi que la direction angulaire  $\theta$  du robot mobile sont données par les formules suivantes :

$$\begin{cases} v = \varepsilon \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ w = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \theta = a \tan 2(\dot{x}, \dot{y}) \end{cases} \quad (3.2)$$

Avec  $\varepsilon = \pm 1$  selon le sens de la marche (avant ou arrière), on remarque l'existence d'une singularité en  $v = 0$ . Cette commande appliquée en l'état avec le principe de la platitude est une commande en boucle ouverte mais elle peut être ramenée à une commande en boucle fermée en faisant un changement de variables sur le modèle classique.

#### 3.4.2 Commande du robot de type unicycle sous forme chaînée

Dans le plan, on considère une courbe  $C$  et trois repères :  $\Gamma_0 = \{o, i, j\}$  un repère fixe,  $\Gamma_m = \{p_m, i_m, j_m\}$  un repère attaché au robot et  $\Gamma_s = \{p_s, i_s, j_s\}$  un repère attaché à l'abscisse curviligne ' $s$ ' de la courbe  $C$  (figure 3. 3), on définit :

- ' $s$ ' l'abscisse curviligne au point  $P_s$  obtenu par la projection du point  $P_m$  (barycentre du robot) orthogonalement sur la courbe  $C$ .
- ' $d$ ' l'ordonnée du point  $P_m$  dans le repère  $\Gamma_s$  et elle est aussi la distance entre le point  $P_m$  et la courbe  $C$ .
- $\theta_e = \theta - \theta_s$  l'orientation du robot, selon le repère  $\Gamma_s$

Sachant que  $c(s) = \frac{\partial \theta_s}{\partial s}$  est la courbure de  $C$  au point  $P_s$  et en prenant en compte les définitions ci-dessus, le modèle du robot mobile de type unicycle dans le repère de [44] est donné par la formule suivante :

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{v}{1 - dc(s)} \cos(\theta_e) \\ \dot{d} = v \cos(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e = w - \dot{s}c(s) \end{cases} \quad (3.3)$$

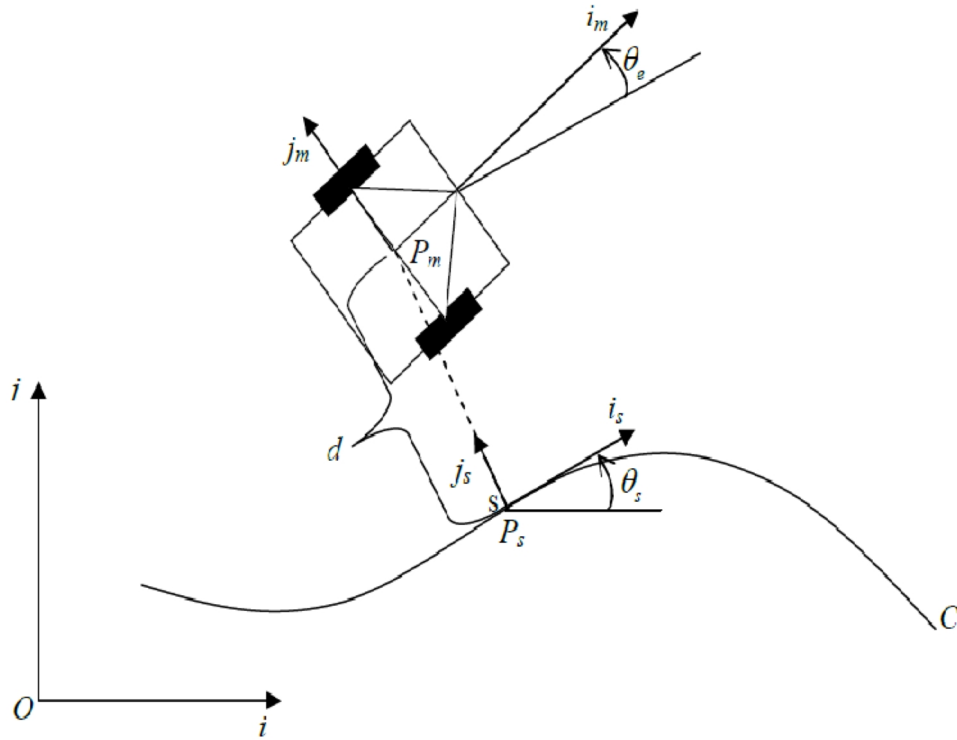


Figure 3.3 : Représentation du robot de type unicycle dans le repère de Frénet[34].

Pour l'existence et l'unicité du 'Ps', il faut que le point Pm soit toujours à une distance de C, inférieure à son rayon de courbure  $\rho(s)$  en 'Ps', C'est-à-dire que  $|d| < |\rho(s)|, \forall s \in [0 \ 1]$  ou  $|dc(s)| < 1, \forall s \in [0 \ 1]$ .

En faisant un changement de variables  $(s, d, \theta_e, v, w) \rightarrow (z_1, z_2, z_3, u_1, u_2)$  le modèle (3.3) peut être représenté sous forme d'un système chaîné comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= u_1 \\ \dot{z}_2 &= u_1 z_3 \\ \dot{z}_3 &= u_2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Avec :

$$u_1 = \dot{s} = \frac{v}{1 - dc(s)} \cos(\theta_e) \quad \text{et} \quad z_3 = (1 - dc(s)) \tan(\theta_e) \tag{3.5}$$

En utilisant le retour d'état proportionnel :

$$u_1 = \dot{z} = -u_1 k_2 z_2 - |u_1| k_3 z_3$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont deux constantes strictement positives, alors le système chaîné (3.3) est stable en  $k_1 = k_2 = 0$  donc en  $d = \theta_e = 0$ .

### 3.4.3 Approche par fonction transverse

La commande par fonction transverse assure une poursuite de trajectoires quelconques, y compris des trajectoires non admissibles, c'est-à-dire des trajectoires ne respectant pas la contrainte de non holonomie du robot. C'est une technique qui garantit la stabilisation pratique des erreurs de suivi (i.e. stabilisation d'un voisinage du point d'équilibre [45]). L'approche proposée se fait en deux étapes, la première consiste en la détermination de la fonction transverse qui caractérise la dynamique souhaitée, cette fonction dépend de paramètres qui fixent la taille du voisinage, alors que dans la seconde étape, la loi de commande est calculée afin de garantir que le système suive la dynamique issue de la fonction transverse. L'intérêt de cette loi de commande est sa continuité et sa robustesse par rapport aux erreurs de modélisation. D'autres améliorations pour cette méthode ont été introduites dans [46], notamment l'ajout de paramètres supplémentaires dans la fonction transverse.

### 3.4.4 Stabilisation par un retour d'état discontinu

Une autre manière de s'affranchir du fait que le modèle de robot mobile ne puisse pas être stabilisé par un retour d'état continu et stationnaire est d'utiliser des lois de commande discontinues. A ce titre, dans cette partie, nous abordons la commande à mode glissant pour le suivi de trajectoires. Ce type de commande est approprié pour les systèmes qui ont des incertitudes fortement non linéaires, ainsi que des perturbations bornées [47] et [48]. Plusieurs travaux ont été réalisés pour la stabilisation du modèle du robot mobile non holonome [49-50] mais la plupart d'entre eux ne considère pas de perturbations. Plus récemment, l'utilisation du principe de la commande par modes glissants avec action intégrale [51] a été introduite par [52], pour la poursuite de trajectoires d'un robot mobile non holonome en présence de perturbations. Dans la suite, nous détaillons le principe de ces derniers travaux.

Considérons le modèle du robot mobile non holonome donné sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + p(q, t) \quad (3.6)$$

Tel que  $p(q, t)$  est une perturbation due aux erreurs de modélisation, de mesure ou encore, à des variations paramétriques et  $q = [x(t) \ y(t) \ \theta(t)]^T$ .

**Hypothèses :** La perturbation  $p(q, t)$  vérifie la condition de recouvrement, c-à-d  $p(q, t)$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$p(q, t) = \sigma_v(q, t) [\cos(t) \ \sin(t) \ 0]^T + \sigma_w(q, t) [0 \ 0 \ 1]^T$$

Avec  $\sigma_v(q, t), \sigma_w(q, t) \in \mathcal{X}$ .

Les fonctions  $\sigma_v(q, t), \sigma_w(q, t)$  sont supposées bornées par des fonctions positives connues, respectivement  $a_v(q)$  et  $a_w(q)$ .

Les vitesses linéaire et angulaire de la trajectoire de référence  $v_r$  et  $w_r$  sont bornées et différentes de zéro pour tout  $t \geq 0$ .

En considérant l'erreur de position du robot  $[e_x, e_y, e_\theta] = [x - x_r, y - y_r, \theta - \theta_r]$  et le changement de coordonnées:

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Alors, la dynamique de l'erreur de poursuite peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{e} = g_1(e, t) + g_2(e, t)(u + \sigma(q, t)) \quad (3.8)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} e = [e_1, e_2, e_3] \\ g_1(e, t) = [v_r \cos(e_3), v_r \sin(e_3), w_r]^T \\ g_2(e, t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ e_2 & -e_1 & -1 \end{bmatrix}^T \\ \sigma(q, t) = [\sigma_v(q, t), \sigma_w(q, t)]^T \\ u = [v, w]^T \end{array} \right. \quad (3.9)$$

**Théorème** : Supposons que les hypothèses citées ci-dessus sont vérifiées, alors la solution nulle du système (3.9) est globalement asymptotiquement stable par la commande discontinue suivante :

$$u = u_{nom}(e) + u_{disc}(e, e_{aux}) \quad (3.10)$$

Tel que :

$$u_{nom} = \begin{bmatrix} v_{nom} \\ w_{nom} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cos(e_3) + \mu \tanh e_1 \\ w_r + \frac{\mu_1 v_r e_2}{1 + e_1^2 + e_2^2} \frac{\sin(e_3)}{e_3} + \mu_2 \tanh e_3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

et

$$u_{disc}(e, e_{aux}) = \begin{bmatrix} -G_1(e) \text{sign}(\sigma_1) \\ -G_2(e) \text{sign}(-e_1 \sigma_1 + \sigma_2) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

avec la variable de glissement  $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2]^T$  définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma_0(e) + e_{aux} \\ \sigma_0(e) = [-e_1, -e_3] \\ \dot{e}_{aux} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} (g_1(e, t) + g_2(e) u_{nom}(e)) \\ e_{aux}(0) = [e_1(0), e_3(0)]^T \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Les coefficients  $\mu_i (i = 1, 2, 3)$  sont des constantes réelles positives choisies de manière à assurer une certaine robustesse vis-à-vis des perturbations. Les fonctions  $g_1$  et  $g_2$ , quant à elles, vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} g_1(e) &\geq a_v(q) + \eta \\ g_2(e) &\geq a_m(q) + \eta \end{aligned} \tag{3.14}$$

Avec  $\mu \geq 0$ .

### 3.4.5 Commande non linéaire et non stationnaire

#### 3.4.5.1 Application de la commande sur un robot mobile

Le contrôleur backstepping est d'abord proposé en 1991 par Kanayama et appliqué sur le modèle cinématique d'un robot mobile non holonome; il a été utilisé par de nombreux autres chercheurs dans ce domaine. Une règle de contrôle de suivi d'une trajectoire stable pour un robot mobile non holonome figure (3.4) qui néglige la dynamique du véhicule et qui est basée sur le système de pilotage. Dans ce système de commande, deux postures pour le robot vont être utilisées : la posture de référence  $p_r = [x_r \ y_r \ \theta_r]^T$  et une posture actuelle  $p = [x \ y \ \theta]^T$ . La posture de référence est la posture de but et la posture actuelle est la posture réelle. Le schéma de principe de ce dispositif de contrôle est représenté sur la Figure (3.4).

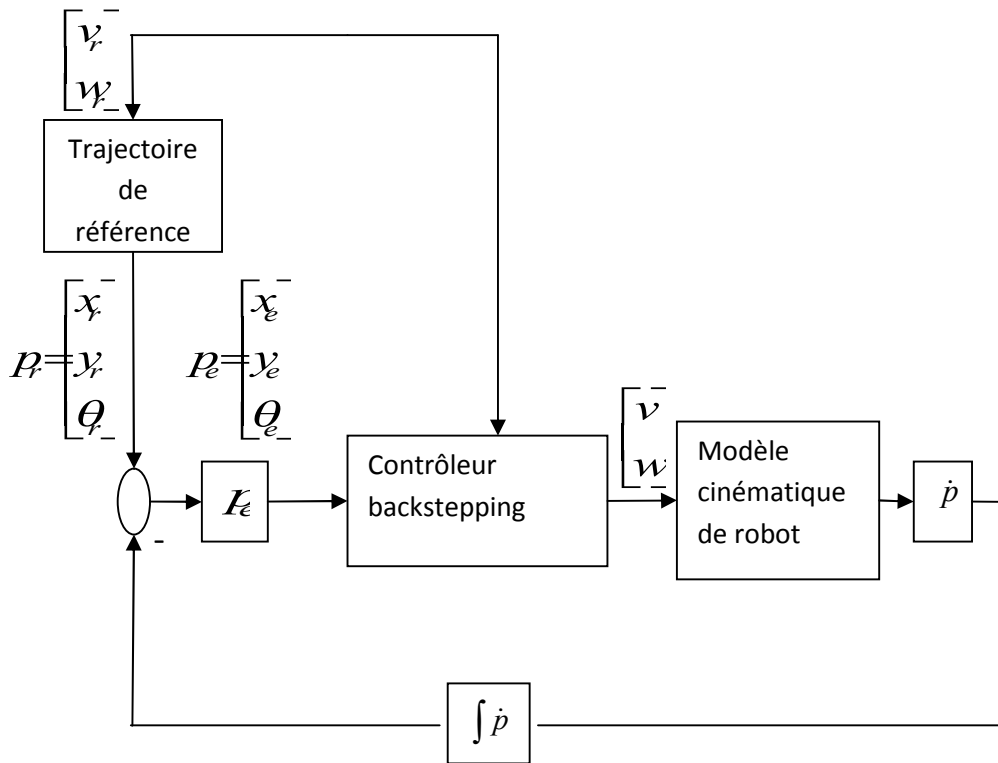


Figure 3.4 : Architecture de la commande non linéaire et non stationnaire



On définit une position d'erreur ou l'erreur de suivi d'une trajectoire  $p_e$  dans la base du cadre lié à la plate-forme mobile de la façon suivante:

$$p_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = T_e(p_r - p) \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Le problème de contrôle dans ce cas sera de calculer une règle de contrôle du véhicule, pour calculer les vitesses cibles  $v = f(p_e, v_r, K)$ , qui rend le système asymptotiquement stable. La règle de contrôle proposée est la suivante:

$$v = \begin{bmatrix} v_r \cos\theta_e + K_x x_e \\ \omega_r + K_y v_r y_e + K_\theta v_r \sin\theta_e \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$v = f(p_e, v_r, K) \quad (3.18)$$

$$K = (K_x, K_y, K_\theta) \quad (3.19)$$

où  $K_x, K_y, K_\theta$  sont des constantes positives. La stabilité de la règle de contrôle ci-dessus sera démontrée en utilisant la méthode de stabilité de Lyapunov dans la section suivante.

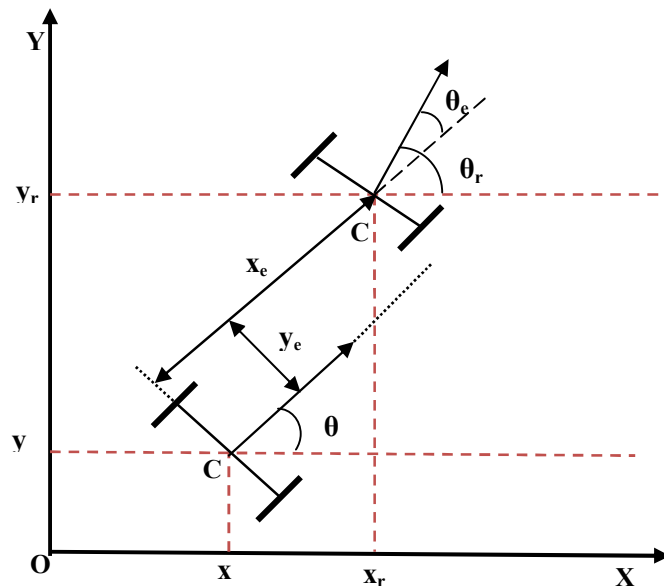


Figure 3.4 : Erreur de posture du robot unicycle

### 3.4.5.2 L'analyse de stabilité par la méthode de Lyapunov

La méthode de Lyapunov analyse la stabilité de la règle de contrôle dans l'équation (3.15) est décrit comme suit:

**Lemme 1:** D'après l'équation (3.16), nous avons:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \dot{p}_e = f(t, p_e) = \begin{bmatrix} \omega(p_e, p_r)y_e - v(p_e, p_r) + v_r \cos \theta_e \\ -\omega(p_e, p_r)x_e + v_r \sin \theta_e \\ \omega_r - \omega(p_e, p_r) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

L'utilisation des équations cinématiques (1.7) et (1.8) du robot et l'équation d'erreur de suivi d'une trajectoire (3.16) on a:

$$p_e = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Si on dérive la posture d'erreur, on obtient la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_e \omega - v + v_r \cos \theta_e \\ -x_e \omega + v_r \sin \theta_e \\ \omega_r - \omega \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= (\dot{x}_r - \dot{x}) \cos \theta + (\dot{y}_r - \dot{y}) \sin \theta - (x_r - x) \dot{\theta} \sin \theta + (y_r - y) \dot{\theta} \cos \theta \\ &= \dot{y}_e \omega - v + \dot{x}_r \cos(\theta_r - \theta) + \dot{y}_r \sin(\theta_r - \theta) \end{aligned}$$

$$= y_e \omega - v + v_r \cos \theta_e$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_e &= -(\dot{x}_r - \dot{x}) \sin \theta + (\dot{y}_r - \dot{y}) \cos \theta - (x_r - x) \dot{\theta} \cos \theta - (y_r - y) \dot{\theta} \sin \theta \\ &= -x_e \omega - \dot{x}_r \sin(\theta_r - \theta) + \dot{y}_r \cos(\theta_r - \theta) \end{aligned}$$

$$= -x_e \omega + v_r \sin \theta_e$$

$$\dot{\theta}_e = \dot{\theta}_r - \dot{\theta} = \omega_r - \omega$$

En remplaçant  $v$  et  $\omega$  par  $v(p_e, p_r)$  et  $\omega(p_e, p_r)$ , on obtient le lemme.

**Proposition 1 :** Si nous utilisons la règle de contrôle dans l'équation (3.17),  $p_e = 0$  est un point d'équilibre stable si la vitesse de référence  $v_r > 0$ .

**Lemme 2 :** Nous proposons une fonction scalaire  $V$  en tant que candidate de la fonction de Lyapunov pour le système ci-dessus:

$$V = \frac{1}{2}(x_e^2 + y_e^2) \frac{(1 - \cos(y_e))}{K_y} \quad (3.23)$$

Il est clair que  $V \geq 0$  et  $V = 0$  si  $p_e = 0$ , donc la fonction  $V$  ci-dessus est une fonction définie positive.

En outre, en utilisant le lemme 2 on a:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}_e x_e + \dot{y}_e y_e + \frac{\dot{\theta}_e \sin(\theta_e)}{K_y} \\ &= \left| \left( \omega_r + v_r (K_y y_e + K_\theta \sin(\theta_e)) \right) y_e - K_x x_e \right| x_e \\ &\quad + \left| - \left( \omega_r + v_r (K_y y_e + K_\theta \sin(\theta_e)) \right) x_e + v_r \sin(\theta_e) \right| y_e \\ &\quad + \frac{[-v_r (K_y y_e + K_\theta \sin(\theta_e))] \sin(\theta_e)}{K_y} = -K_x x_e^2 - \frac{v_r K_\theta \sin^2 \theta_e}{K_y} \leq 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, la dérivée de la fonction de Lyapunov  $V$  proposée est une fonction définie négative qui démontre que le point  $p_e = 0$ , le système est asymptotiquement stable.

Nous avons démontré que le système est stable pendant toute combinaison de  $K_x, K_y, K_\theta$  mais la réponse du robot n'est pas trop lente, nous devons trouver des paramètres optimaux pour ce contrôleur.

### 3.4.5.3 Résultats de simulation

Les simulations sont à présent faites pour évaluer l'effectivité de la méthode d'étude proposée; le robot de type unicycle est illustré à la figure (3.3). Le robot est utilisé pour suivre une trajectoire circulaire et sinusoïdale.

#### Simulations sur une trajectoire circulaire

Nous choisissons :

- $v_r = 1 \frac{m}{s}$ ,  $w_r = 1 \frac{rad}{s}$       $r = \frac{v_r}{w_r}$

- La configuration de référence:

$$p_r = (x_r, y_r, \theta_r)^T = \begin{cases} x_r = r \cdot \cos(\omega_r t) = \cos(t) \\ y_r = r \cdot \sin(\omega_r t) = \sin(t) \\ \theta_r = \omega_r t = t \end{cases}$$

- Les gains du contrôleur :

$$k_x = 5, k_y = 2, k_\theta = 5$$

- l'erreur de poursuite :  $p_e = (x_e, y_e, \theta_e)^T = (0.5, -0.5, \pi/4)$

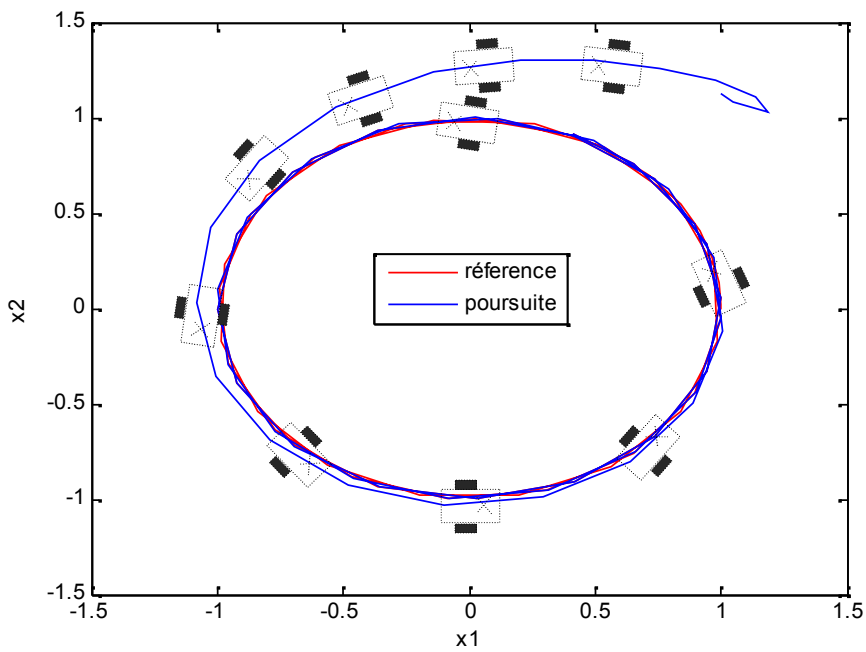


Figure 3.5 : Poursuite d'une trajectoire circulaire

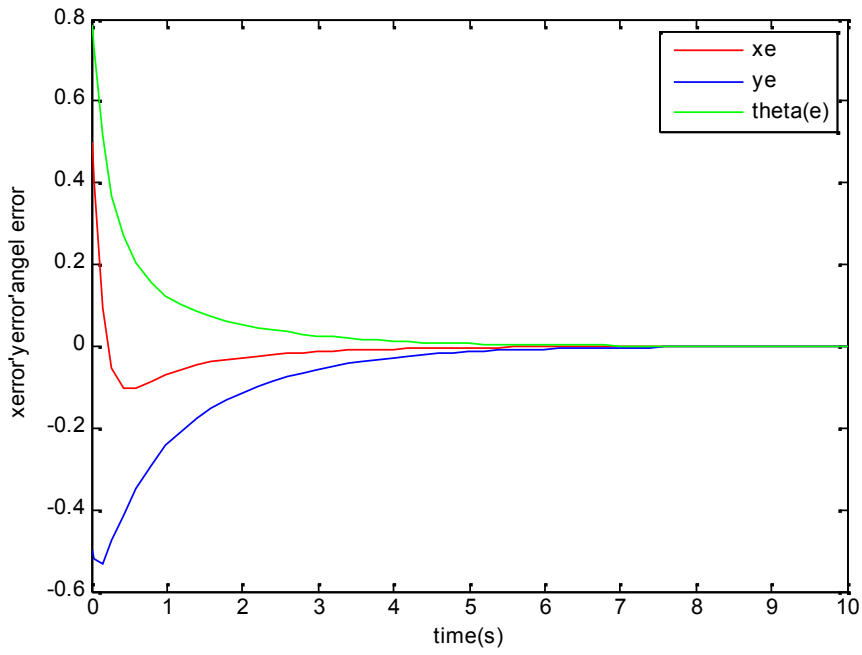


Figure 3.6 : Erreurs de poursuite d'une trajectoire circulaire

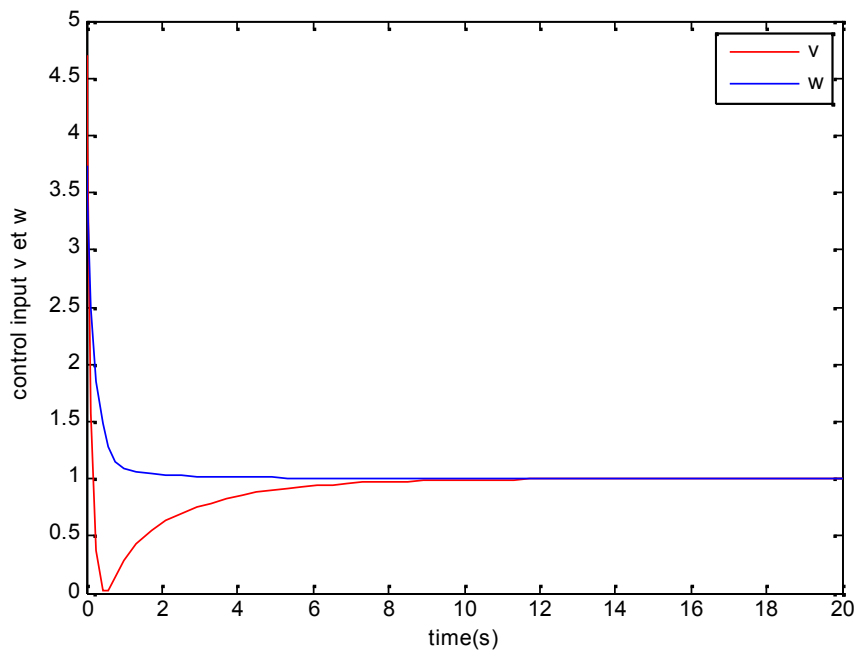


Figure 3.7 : Vitesses de contrôle  $v$  et  $\omega$

**Simulation sur une trajectoire sinusoïdale :**

Nous choisissons :

- $v_r = 1 \frac{m}{s}, w_r = 1 \frac{rad}{s}$

- La configuration de référence :

$$p_r = (x_r, y_r, \theta_r)^T = \begin{cases} x_r = t \\ y_r = \sin(\omega_r t) \\ \theta_r = \omega_r t = t \end{cases}$$

- les paramètres du contrôleur :

$$k_x = 5, k_y = 2, k_\theta = 5$$

- l'erreur de poursuite :

$$p_e = (x_e, y_e, \theta_e)^T = (0.2, -0.5, \frac{\pi}{6})$$

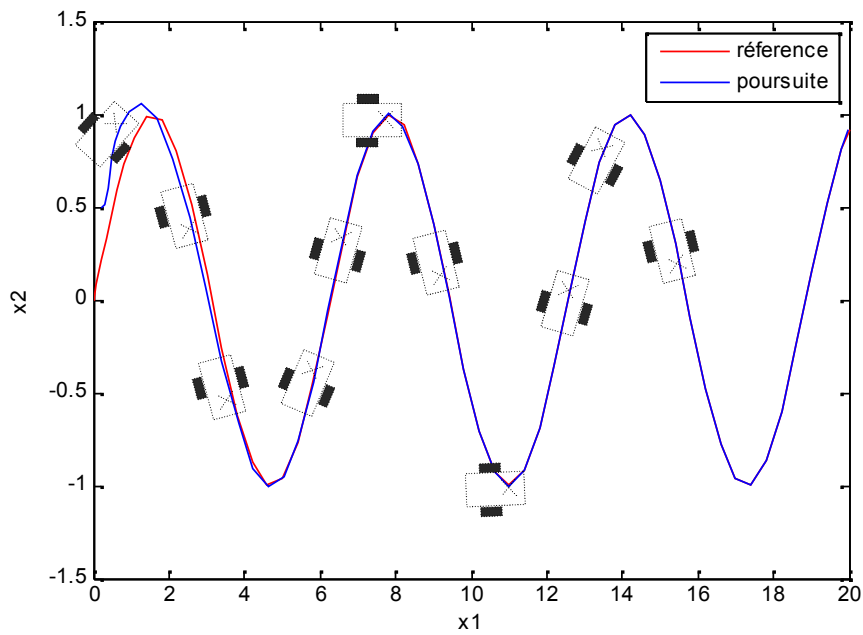


Figure 3.8 : Poursuite d'une trajectoire sinusoïdale

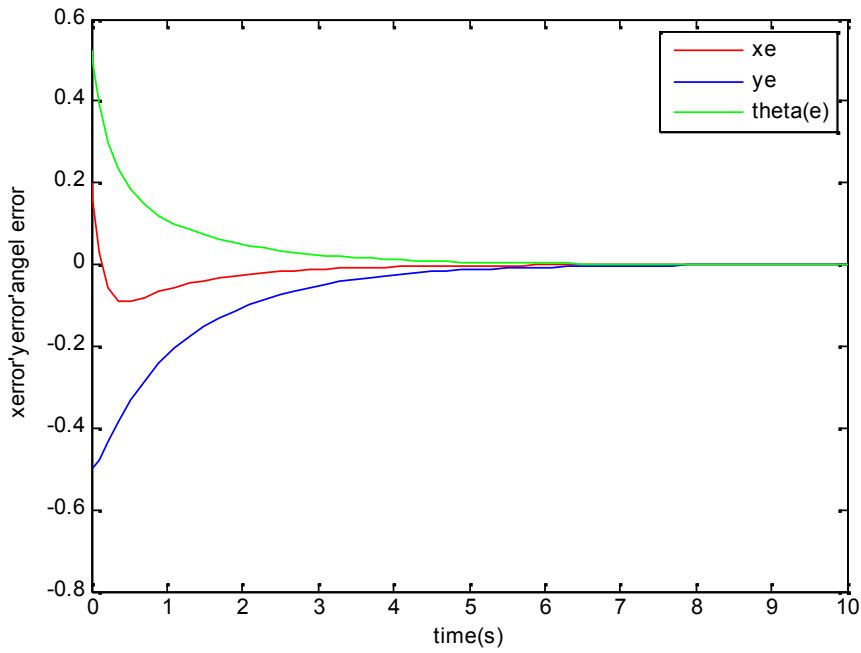


Figure 3.9 : Erreurs de Poursuite d'une trajectoire sinusoïdale

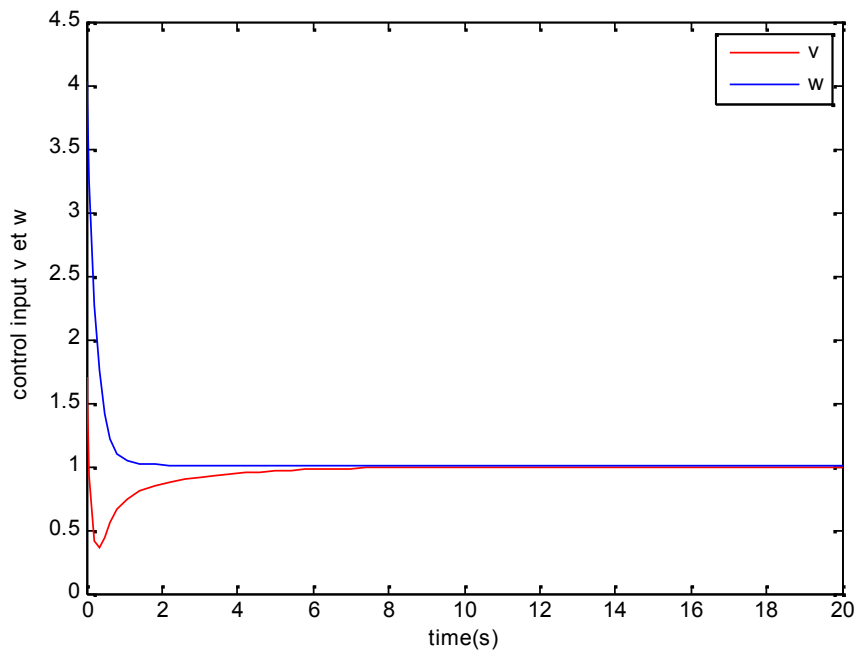


Figure 3.10 : Vitesses de contrôle  $v$  et  $\omega$

On peut voir qu'un suivi parfait est atteint, le robot est capable de suivre la trajectoire désirée. La figure (3.10) montre la vitesse du robot qui atteint la valeur désirée de 1 m/s au

temps  $t = 2$  secondes. La figure (3.9) montre l'erreur de poursuite d'une trajectoire; toutes convergent vers zéros après un temps  $t=7$  secondes.

Cette approche est proposée pour désigner une commande de traction de trajectoire pour un robot mobile à deux roues, elle combine la méthode d'étude de la commande backstepping non-linéaire et celle de la méthode de Newton-Raphson.

### 3.5 Commande par un contrôleur classique (PID)

#### 3.5.1 Définition

Les contrôleurs **P**, **PD**, **PI** et **PID** sont des contrôleurs classiques utilisés pour la commande d'un robot. Ces contrôleurs sont composés des contributions proportionnelle, dérivative et intégrale de l'erreur sur la position [53].

Voici les expressions des différentes contributions :

Contribution proportionnelle :  $u_p = k_p \cdot e$

Contribution dérivative :  $u_d = k_d \cdot \frac{de}{dt}$

Contribution intégrale :  $u_i = k_i \cdot \int e(t) dt$

**Le contrôleur P** : inclus uniquement une contribution proportionnelle,

**Le contrôleur PD** : inclus les contributions proportionnelle et dérivative et s'écrit comme suit :

$$u_{PD} = u_p + u_d = k_p \cdot e + k_d \cdot \frac{de}{dt} \quad (3.24)$$

Autre écriture :

$$u_{PD} = k_p \cdot \left( e + T_D \cdot \frac{de}{dt} \right) \quad (3.25)$$

**Le contrôleur PI** : inclus les contributions proportionnelle et intégrale et s'écrit comme suit :

$$u_{PD} = u_p + u_i = k_p \cdot e + k_i \cdot \int e(t) dt \quad (3.26)$$



Autre écriture :

$$u_{PI} = k_p \cdot \left( e + \frac{1}{T_i} \cdot \frac{de}{dt} \right)$$

**Le contrôleur PID** : inclus toutes les contributions proportionnelle, dérivative et intégrale et s'écrit comme suit :

$$u_{PID} = u_p + u_d + u_i = k_p \cdot e + k_d \cdot \frac{de}{dt} + k_i \cdot \int e(t) dt \quad (3.27)$$

Autre écriture :

$$u_{PID} = k_p \cdot \left( e + T_D \cdot \frac{de}{dt} + \frac{1}{T_i} \cdot \int e(t) dt \right)$$

### 3.5.2 Application de la commande PID sur un robot unicycle

Le schéma de principe de ce dispositif de contrôle est représenté sur la figure (3.9).

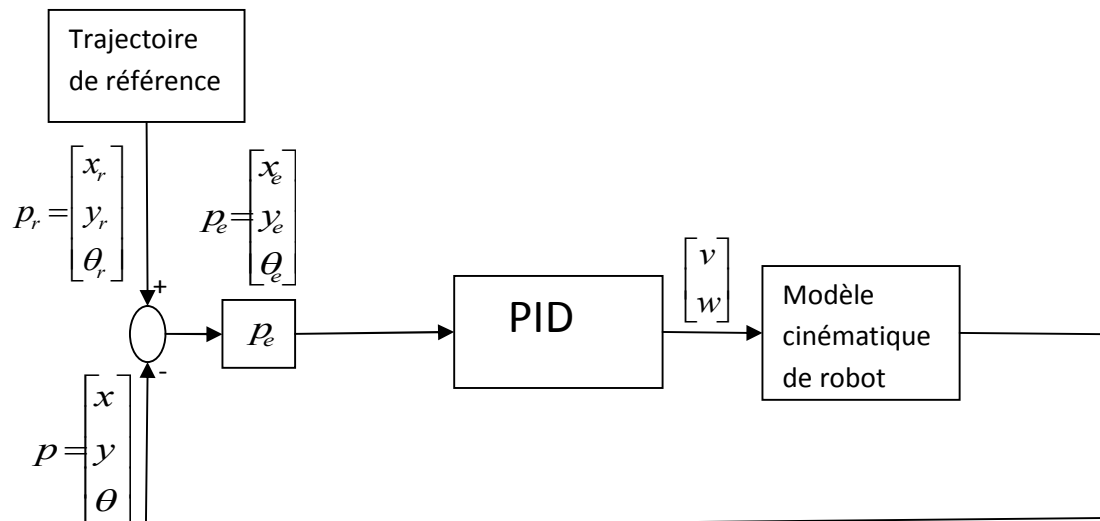


Figure 3.9 : Architecture de la commande PID

Le modèle cinématique d'un robot mobile non holonome unicycle dans le plan X-Y (figure 3.4) est présenté par la formule suivante :

$$p = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} q \quad (3.28)$$

Avec

$p = (x, y, \theta)^T$  : Vecteur représentant la posture du robot.

$q = (v, \omega)^T$  : Vecteur représentant les commandes du robot mobile, respectivement la vitesse linéaire et angulaire.

On définit une position d'erreur ou l'erreur de suivi d'une trajectoire  $p_e$  de la manière suivante:

$$p_e = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{pmatrix} = T_e(p_r - p) \quad (3.29)$$

$$\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Le problème de contrôle dans ce cas sera de calculer une règle de contrôle du véhicule, pour calculer les vitesses cibles  $v$  et  $w$  rend le système asymptotiquement stable. La règle de contrôle proposée est la suivante:

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_p \cdot p_e + k_d \cdot \frac{dp_e}{dt} + k_i \cdot \int p_e(t) dt \\ k_p \cdot p_e + k_d \cdot \frac{dp_e}{dt} + k_i \cdot \int p_e(t) dt \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

### 3.5.3 Résultats de simulation

Les simulations sont à présent faites sur le robot de type unicycle (figure 3.3), le robot est utilisé pour suivre une trajectoire circulaire.

#### Simulations sur une trajectoire circulaire :

Nous choisissons :

$$v_r(k) = 1 \frac{m}{s}, w_r(k) = 1 \frac{rad}{s}, r = \frac{v_r}{w_r}$$

- La configuration de référence:

$$p_r = (x_r, y_r, \theta_r)^T = \begin{cases} x_r(k) = r \cdot \cos(\omega_r(k) \cdot ts \cdot \pi i) \\ y_r(k) = r \cdot \sin(\omega_r(k) \cdot ts \cdot \pi i) \\ \theta_r(k) = \omega_r(k) \cdot ts \cdot \pi i + \pi/2 \end{cases}$$

- Les gains du contrôleur :

- $k_p = \begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 100 \end{bmatrix}$ ,  $k_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $k_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Position initiale :  $p = (x, y, \theta)^T (0.5, -0.5, \frac{\pi}{6})$

- le temps d'échantillonnage  $ts=0.001$  ;

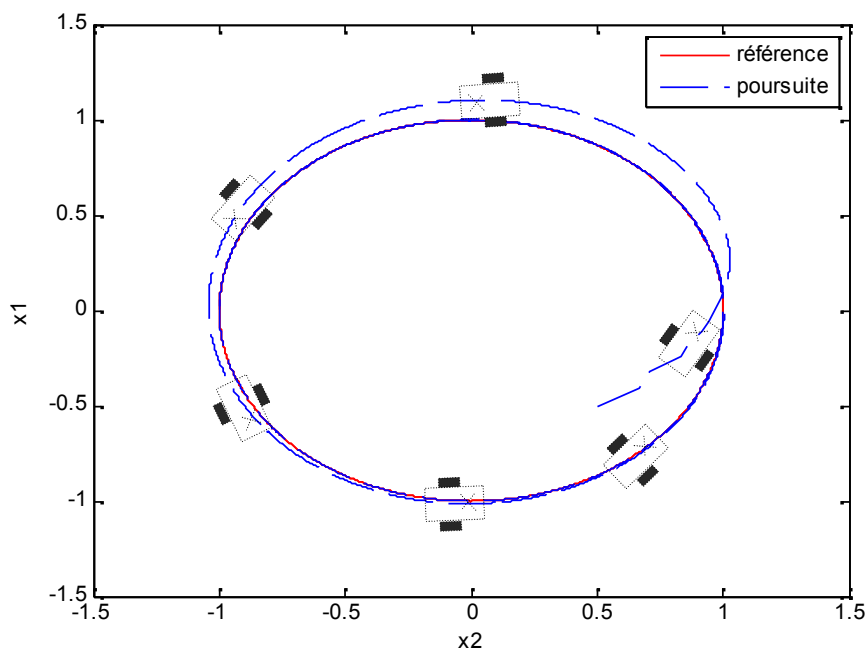


Figure 3.11 : Poursuite d'une trajectoire circulaire

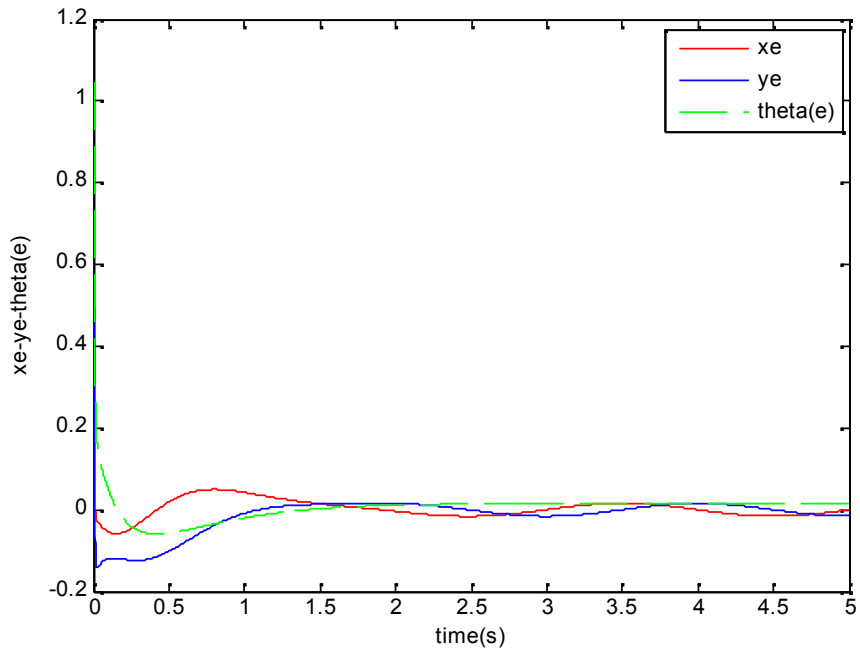


Figure 3.12 : Erreurs de poursuite d'une trajectoire circulaire

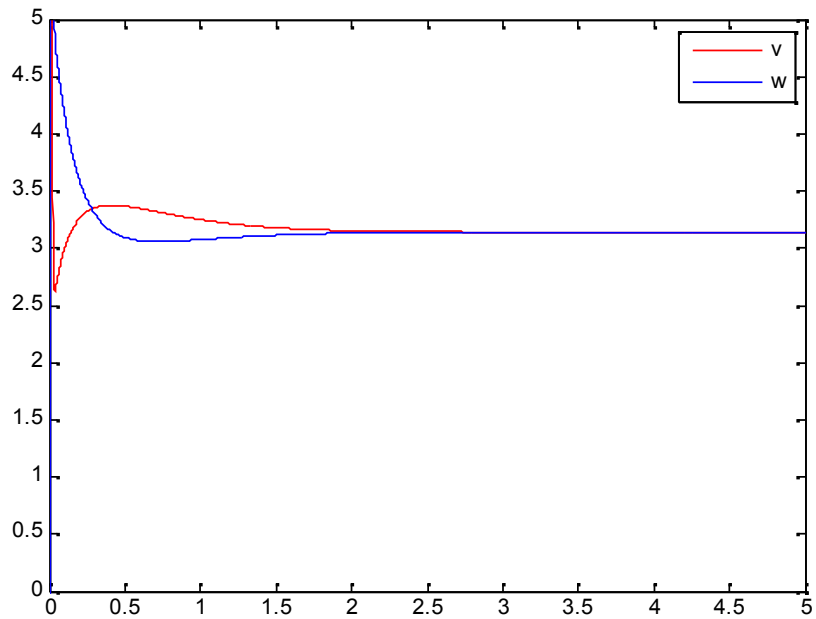


Figure 3.13 : Vitesses de contrôle  $v$  et  $w$

Si nous choisissons une autre position initiale au robot avec d'autres valeurs des paramètres de contrôleur:

$$p = (x, y, \theta)^T = (1, 0.5, \pi/4)$$

• Les gains du contrôleur

$$k_p = \begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 100 \end{bmatrix}, k_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, k_i = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

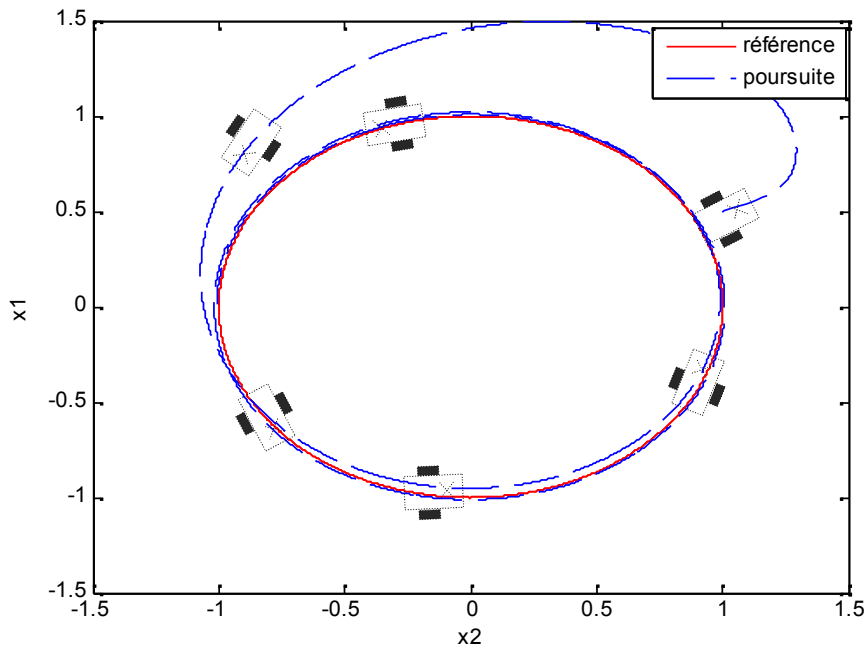


Figure 3.14 : Poursuite d'une trajectoire circulaire

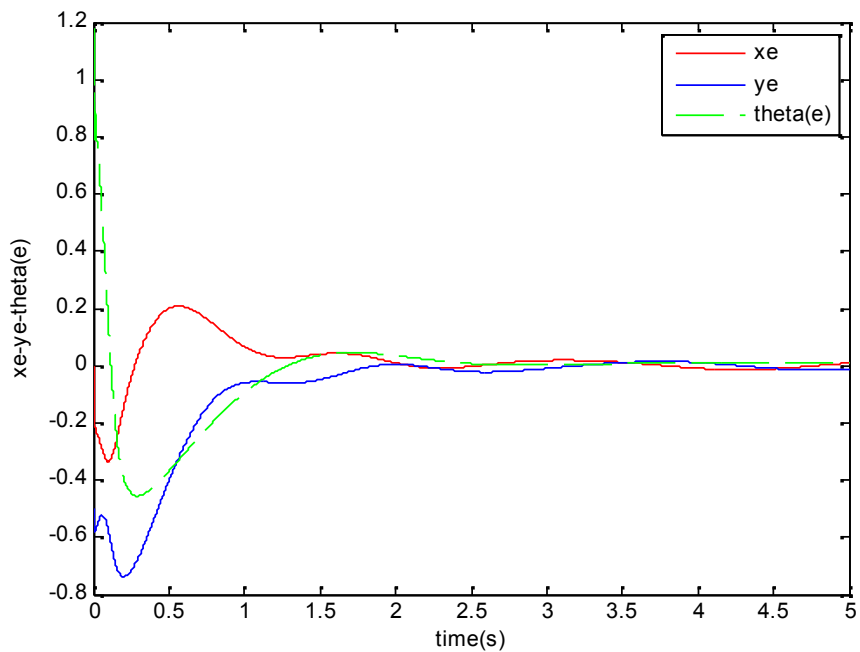


Figure 3.15 : Erreurs de poursuite d'une trajectoire circulaire

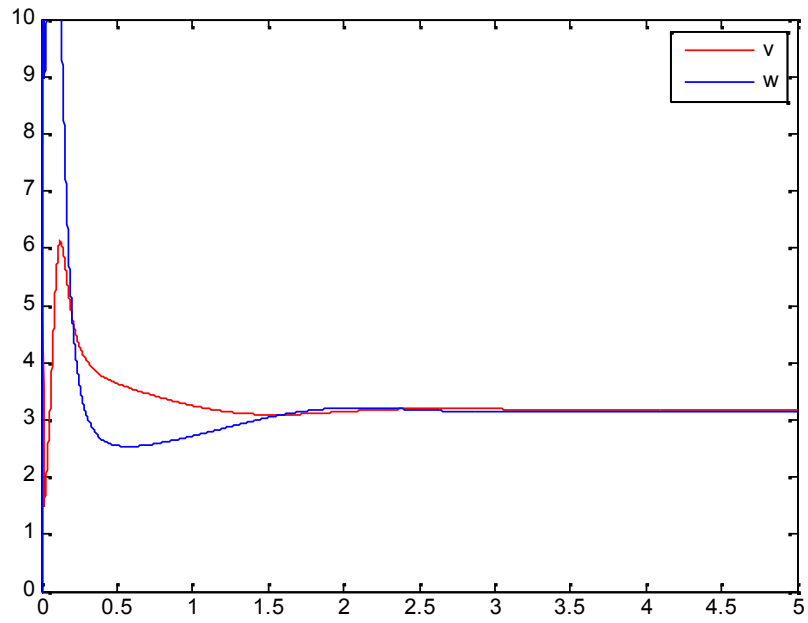


Figure 3.16 : Vitesses de contrôle  $v$  et  $w$

Si nous choisissons une autre position initiale au robot avec les mêmes valeurs des paramètres du contrôleur:  $p = (x, y, \theta)^T = (1, 1.5, \frac{\pi}{2})$

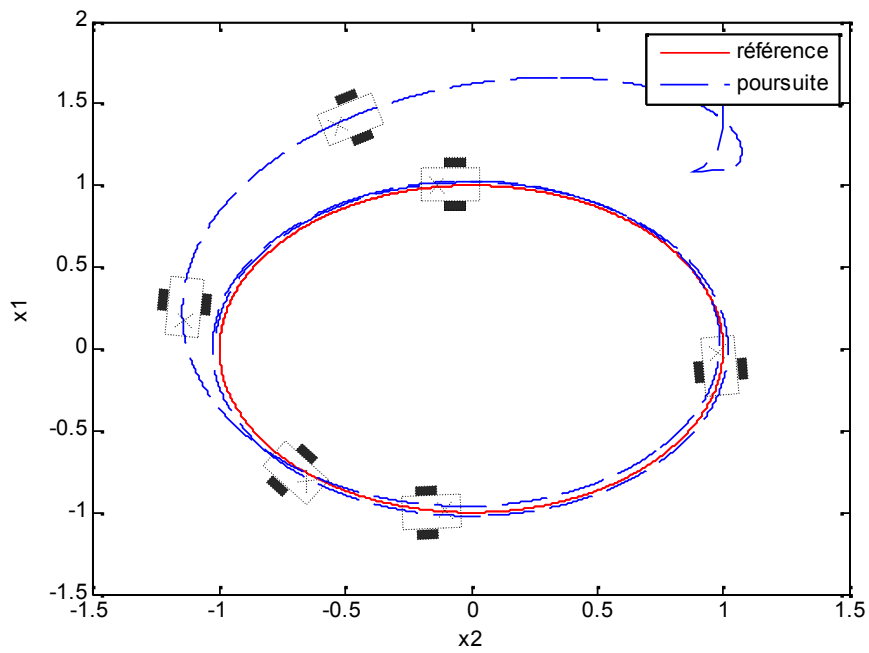


Figure 3.17 : Poursuite d'une trajectoire circulaire

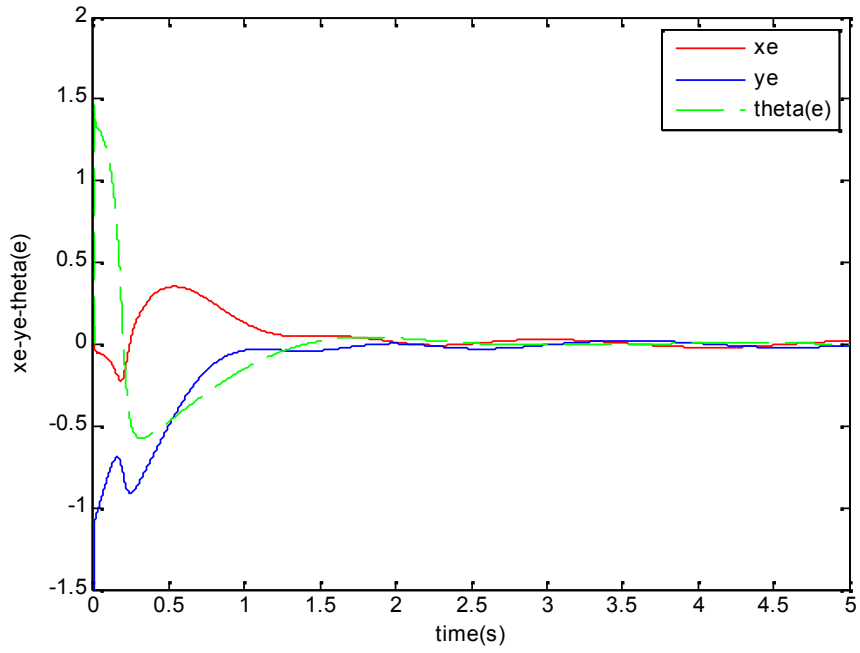


Figure 3.18 : Erreurs de poursuite d'une trajectoire circulaire

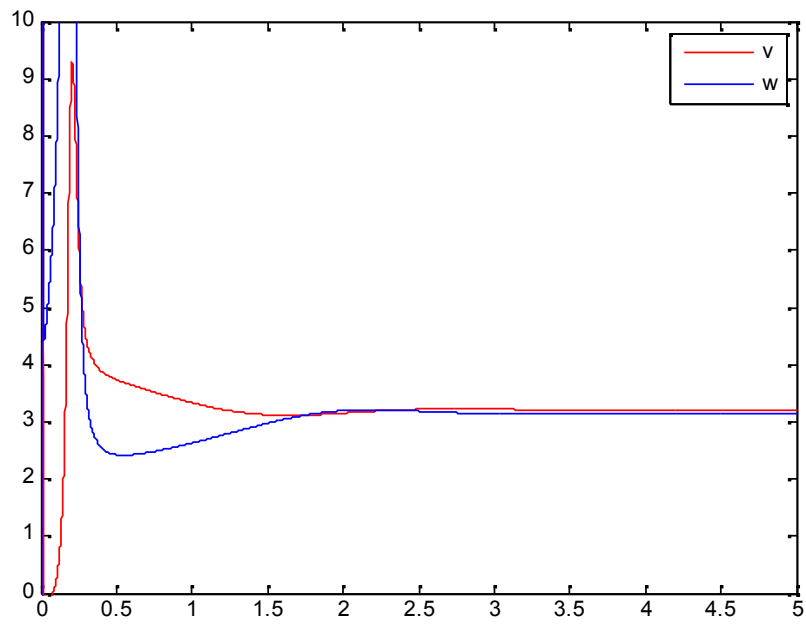


Figure 3.19 : Vitesses de contrôle  $v$  et  $\omega$

Les résultats obtenus montrent que le suivi n'est pas parfait à cause de la non prise en compte de plusieurs facteurs dans le calcul de la commande.

L'erreur de posture du robot ne converge pas complètement vers zéro et les vitesses réelles du robot ne convergent pas non plus vers les vitesses de références choisies. D'après les simulations réalisées, nous retenons les remarques suivantes :

- I. Plus  $k_d$  est élevé, plus la poursuite de la trajectoire de référence devient très lente; l'opération de dérivation amplifie le bruit, une attention particulière doit être donnée au comportement statique.
- II. Un  $k_d$  élevé risque de provoquer un broutement du comportement à cause de la quantification des vitesses de contrôle  $v$  et  $w$ .
- III. Plus  $k_p$  est élevé, plus le système en boucle fermé risque d'osciller à cause du risque de la saturation des grandeurs de commande  $v$  et  $w$  qui implique que le système fonctionne en boucle ouverte durant la saturation; inversement, plus  $k_p$  est faible, plus le système est mou.
- IV. un compromis doit être trouvé afin d'assurer le meilleur comportement pour les trois paramètres de contrôleur ( $k_p, k_i, k_d$ ).

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, différentes approches de suivi d'une trajectoire ont été présentées afin de prendre en considération deux approches, une commande par un contrôleur classique PID et une commande par un retour d'état basé sur le contrôleur de backstepping avec des travaux de simulation. Nous avons montré que les deux approches n'assurent pas de bons résultats de suivi, quelque soit la forme de trajectoire à suivre ainsi que les deux approches n'assurent pas d'une manière générale, une bonne stabilité du robot mobile.

Dans le prochain chapitre nous proposons une nouvelle approche basée sur les théories des modes de glissement modernes (GFTSM); cette approche fait preuve de robustesse et de performance lors de son implémentation pour les suivis des trajectoires des robots mobiles, notamment de types unicycle et assure une meilleure stabilité et nous avons illustré l'avantage de la technique de la commande robuste avec travaux de simulations qui font ressortir la robustesse de la commande proposée.



## **CHAPITRE 4**

### **APPLICATION D'UNE COMMANDE ROBUSTE DE TYPE FTSM**

#### **4.1 Introduction**

La commande de mouvement des robots mobiles a trouvé une attention considérable durant ces dernières années. La plupart des travaux entrepris sont concentrés sur les problèmes de génération de trajectoires du point de vue de la cinématique, c'est-à-dire considérer le système des vitesses comme grandeurs de commande et ignorer la dynamique du système mécanique. Il existe peu de travaux qui ont été publiés sur la commande avec la présence d'incertitudes dans le modèle dynamique.

En effet, Il y a trois tâches possibles pour un robot mobile qui sont : la stabilisation point à point, le suivi d'un chemin et le suivi d'une trajectoire. La stabilisation point à point nécessite que le robot se déplace d'un point A à un point B sans conditions sur son déplacement entre ces deux points. Le suivi d'un chemin nécessite que le robot doive se déplacer le long d'un chemin géométrique. Le suivi d'une trajectoire est le même que le suivi d'un chemin sauf que le robot évolue avec une vitesse donnée.

Dans ce chapitre, on va présenter une étude théorique de la commande robuste par mode de glissement et puis son application sur un robot non holonome afin que ce dernier puisse suivre une trajectoire de référence. Différentes trajectoires de références sont prises en considération, premièrement une droite, puis une trajectoire circulaire et enfin une trajectoire sinusoïdale.

## 4.2 La commande robuste par mode de glissement (FTSM)

Cette commande robuste (Fast Terminal Sliding Mode) a pour objectif d'ajouter des fonctions non linéaires dans la conception de la surface de glissement ainsi que d'accélérer l'état du système afin de rejoindre la surface dans un temps fini tout en éliminant le phénomène de broutement.

L'objectif de notre commande est la minimisation de l'erreur de suivi de la trajectoire dans le but de renforcer davantage la stabilité du robot tout en se basant sur la théorie de Lyapunov.

### 4.2.1 Conception de la surface de glissement par la méthode de FTSM

#### 4.2.1.1 la méthode traditionnelle de FTSM :

Un type d'une surface de glissement a été proposé pour la conception de la surface de glissement et sa forme peut être donnée comme suit :

$$s = \dot{x} + \beta x^{q/p} = 0 \quad (4.1)$$

Avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta > 0$ ,  $p, q (p > q)$  des paramètres positifs.

L'équation (4.1) peut s'écrire :

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x^{q/p}$$

D'où  $dt = -\frac{1}{\beta} x^{-q/p} dx$  et on aura :

$$t_s = \frac{p}{\beta(p-q)} |x(0)|^{\frac{p-q}{p}} \quad (4.2)$$

Le point d'équilibre  $x = 0$  s'appelle aussi attracteur terminal.

La vitesse de convergence s'améliore par le terme de non linéarité  $\beta x^{q/p}$ , cependant le temps de convergence du FTSM n'est pas optimal à cause de la vitesse de convergence de l'équation (4.2) lorsque ( $p = q$ ) et quand l'état du système s'approche de l'équilibre.

En effet une nouvelle approche de la même méthode a été présentée par Park et al. et qui s'appelle GFTSM (global fast terminal sliding mode).

#### 4.2.1.2 la méthode globale (GFTSM)

Cette nouvelle conception de la surface de glissement, proposée par Park est donnée comme suit :

$$s = \dot{x} + \alpha x + \beta x^{q/p} = 0 \quad (4.3)$$

où  $x \in R^n$  et  $\alpha, \beta > 0, p, q (p > q)$  des paramètres positifs.

D'après l'équation (4.3), Nous avons:

$$\dot{x} = -\alpha x - \beta x^{q/p} \quad (4.4)$$

Si nous divisons l'équation (4.4) par  $x^{q/p}$  nous obtenons:

$$x^{-q/p} \frac{dx}{dt} + \alpha x^{1-q/p} = -\beta \quad (4.5)$$

En posant  $y = x^{1-q/p}$ , on obtient:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p-q}{p} x^{-q/p} \frac{dx}{dt} \quad (4.6)$$

En se basant sur l'équation différentielle du premier ordre:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = \varphi(x)$$

Nous avons:

$$y = \exp\left(\int p(x)dx\right) \left( \int \varphi(x) \exp\left(-\int p(x)dx\right) dx + c \right)$$

Lorsque  $t = 0$  et  $c = y(0)$  nous obtenons la solution de l'équation (4.5) comme suit:

$$y = \frac{-\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \exp\left(\frac{-p-q}{p} \alpha t\right) + y(0) \exp\left(\frac{-p-q}{p} \alpha t\right) \quad (4.7)$$

Lorsque  $c = 0, y = 0$  et  $t = t_s$  l'équation (4.7) devient:

$$\frac{\beta + \alpha y(0)}{\beta} = \exp\left(\frac{p-q}{p} \alpha t_s\right) \quad (4.8)$$

D'après l'équation (4.8), nous déterminons le temps d'arrivée (reaching time) :

$$t_s = \frac{p}{\alpha(p-q)} \ln \frac{\alpha x(0)^{\frac{p-q}{p}} + \beta}{\beta} \quad (4.9)$$

Par un choix des valeurs des paramètres  $\alpha, \beta, p, q$  le système peut atteindre la surface dans un temps d'arrivée  $t_s$ . D'après l'équation (4.4). nous avons :

$$\dot{x} = -\alpha x - \beta x^{\frac{q}{p}}$$

Lorsque l'état du système est loin de l'origine, alors le temps de convergence est décidé par l'attracteur terminal ( $\dot{x} = \beta x^{\frac{q}{p}}$ ) et quand l'état du système est proche de l'origine  $x=0$ , le temps de convergence est décidé par l'équation ( $\dot{x} = -\alpha x$ ) . Exponentiellement  $x$  converge vers zéro, cependant l'attracteur terminal est implémenté dans la surface de glissement et fait converger l'état du système dans un temps fini.

### 4.3 Application de la commande sur le robot mobile

L'application de la loi de commande par modes glissants sur le robot peut être schématisée par la figure (4.1).

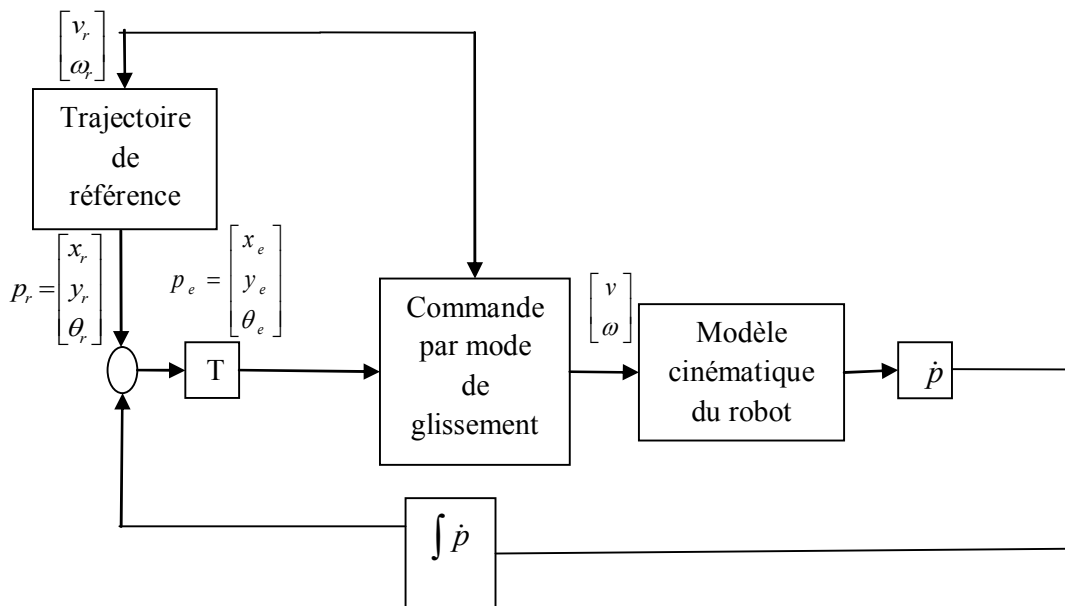


Figure 4.1 : Architecture de la commande par mode glissant

### 4.3.1 Conception de la loi de commande

Le processus de commande par mode de glissement peut être divisé en deux étapes:

- Choix d'une surface de glissement ou d'une fonction de commutation appropriée.
- Détermination d'une loi de commande discontinue sur la surface de glissement.

#### 4.3.1.1 Choix de la fonction de commutation

Le modèle cinématique du robot représente deux entrées non linéaires, cependant la fonction de commutation est difficile à choisir, alors pour simplifier le problème tout en se basant sur l'équation (4.4), nous prenons  $\theta_e$  comme la première surface de glissement alors :

$$\dot{\theta}_e = -\alpha\theta_e - \beta\theta_e^{\frac{q}{p}} \quad (4.10)$$

Lorsque  $\theta_e$  converge vers zéro le modèle (3.21) devient :

$$\dot{x}_e = \omega_r y_e - v + v_r \quad (4.11)$$

$$\dot{y}_e = -\omega_r x_e \quad (4.12)$$

La fonction de commutation peut être représentée comme suit :

$$s = x_e - y_e \quad (4.13)$$

Dans le but de faire converger  $s$  vers zéro,  $x_e$  converge vers  $y_e$  et tous les deux convergent vers zéro.

Les surfaces de glissements peuvent être mises sous la forme suivante :

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_e + \alpha\theta_e + \beta\theta_e^{\frac{q}{p}} \\ x_e - y_e \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

#### 4.3.1.2 Loi de commande

D'après l'équation (4.4), nous avons :

$$\dot{\theta}_e = -\alpha\theta_e - \beta\theta_e^{\frac{q}{p}} \quad (4.15)$$

Alors la loi de contrôle appliquée sur la vitesse angulaire du robot est comme suit :

$$\omega = \omega_r + \alpha\theta_e + \beta\theta_e^{\frac{q}{p}} \quad (4.16)$$

La loi de commande par mode de glissement basée sur l'approche de la loi d'arrivée avec une puissante vitesse d'arrivée est appliquée sur la vitesse linéaire du robot.

Cette loi d'arrivée avec une puissante vitesse d'arrivée est donnée comme suit :

$$\dot{s} = -K|s|^\delta \text{sgn}(s) \quad (4.17)$$

avec  $K > 0$  et  $0 < \delta < 1$

Cette loi d'arrivée augmente la vitesse de convergence lorsque l'état du système est loin de l'origine et la diminue lorsque l'état est proche de l'équilibre, le résultat est plus rapide et le phénomène de broutement est négligeable.

En utilisant l'équation (4.17) et en dérivant l'équation (4.13), nous obtenons:

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 &= -k|s_2|^\delta \text{sgn}(s_2) \\ &= \omega_r y_e - v + v_r + \omega_r x_e \end{aligned} \quad (4.18)$$

La loi de contrôle est donnée par :

$$v = \omega_r y_e + v_r + \omega_r x_e + k|s_2|^\delta \text{sgn}(s_2) \quad (4.19)$$

La loi de commande appliquée sur le robot est donnée comme suit:

$$q = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_r y_e + v_r + \omega_r x_e + k|s_2|^\delta \text{sgn}(s_2) \\ \omega_r + \alpha\theta_e + \beta\theta_e^{\frac{q}{p}} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

#### 4.3.1.3 Choix de la fonction de Lyapunov

Le choix de fonction de Lyapunov est donné comme suit :

$$v = \frac{1}{2}\theta_e^2 \quad (4.21)$$

La dérivée de cette fonction est donnée par:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \theta_e \dot{\theta}_e = \theta_e (-\alpha \theta_e - \beta \theta_e^{\frac{q}{p}}) \\ &= -\alpha \theta_e^2 - \beta \theta_e^{\frac{q}{p}+1}\end{aligned}$$

où  $p, q$  sont des paramètres positives et  $p > q$  alors

$$-\alpha \theta_e^2 - \beta \theta_e^{\frac{q}{p}+1} < 0$$

L'utilisation de la loi commande (4.20) peut rendre le système asymptotiquement stable et l'erreur de posture du robot  $p_e = (x_e, y_e, \theta_e)^T$  converge vers zéro dans un temps fini.

Un autre choix de la fonction de Lyapunov peut également rendre le système asymptotiquement stable.

$$v_S = \frac{1}{2} S_2^2 \quad (4.22)$$

La dérivée de cette fonction est donnée par:

$$\begin{aligned}\dot{v}_S &= S_2 \dot{S}_2 = S_2 (-k |S_2|^\delta \text{sgn}(S_2)) \\ &= -k |S_2|^{\delta+1} < 0\end{aligned} \quad (4.23)$$

#### 4.4 Travaux de simulation et résultats

Nous disposons pour cela d'un chemin de référence, sous une forme d'une séquence de configuration d'état du robot c'est-à-dire à chaque instant, on a :

- La configuration de référence  $p_r = (x_r, y_r, \theta_r)^T$
- Vitesse de référence :  $q_r = (v_r, \omega_r)^T$

En complément à ce chemin, nous disposons d'informations courantes, correspondant aux caractéristiques réelles du véhicule, comme :

- La configuration Courante :  $p = (x, y, \theta)^T$
- La vitesse courante :  $q = (v, \omega)^T$

### A-Simulations pour une trajectoire rectiligne

Nous choisissons :

- $v_r = 1 \frac{m}{s}, \omega_r = 1 \frac{rad}{s}$

- La configuration de référence:

$$p_r = (x_r, y_r, \theta_r)^T = \begin{cases} x_r = a \cdot t \\ y_r = t \end{cases}, \text{ avec } a = 8/15.$$

- les paramètres de la commande :

$$k = 5, \beta = 6, \delta = 0.5,$$

$$p = 11, q = 9, \alpha = 12.$$

- l'erreur de poursuite :

$$p_e = (x_e, y_e, \theta_e)^T = (1, -0.5, \frac{\pi}{6})$$

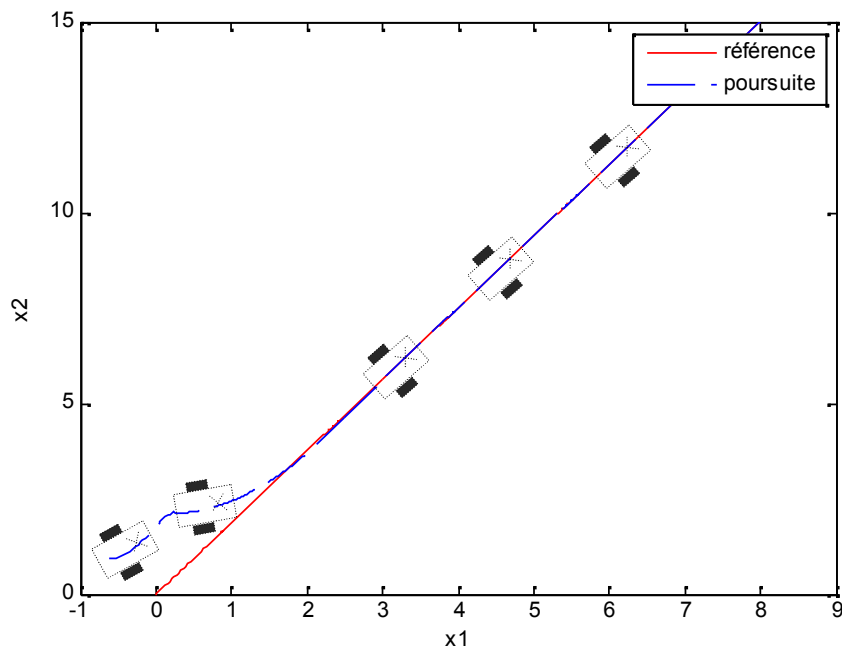


Figure 4.4 : Poursuite d'une trajectoire rectiligne



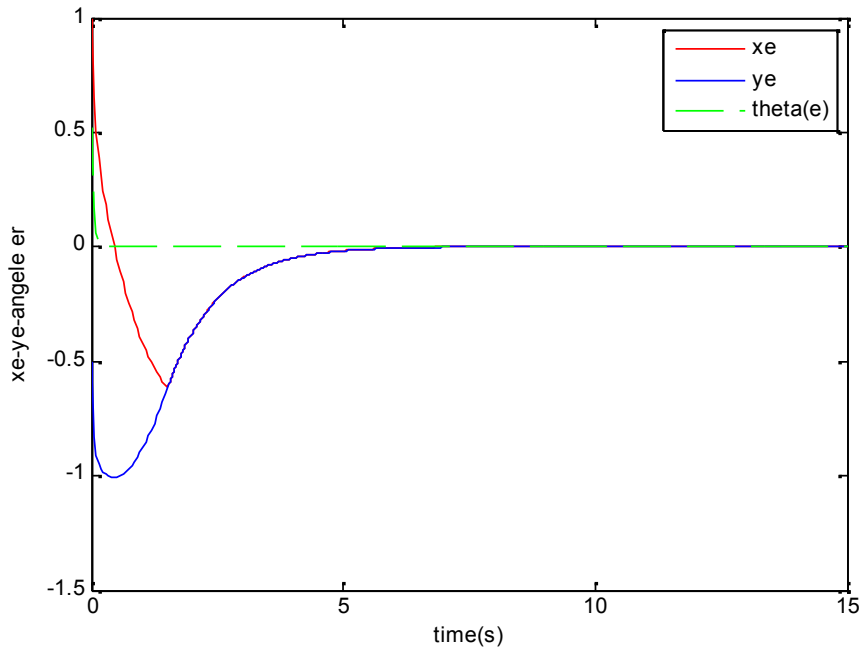


Figure 4.5 : Erreurs de Poursuite

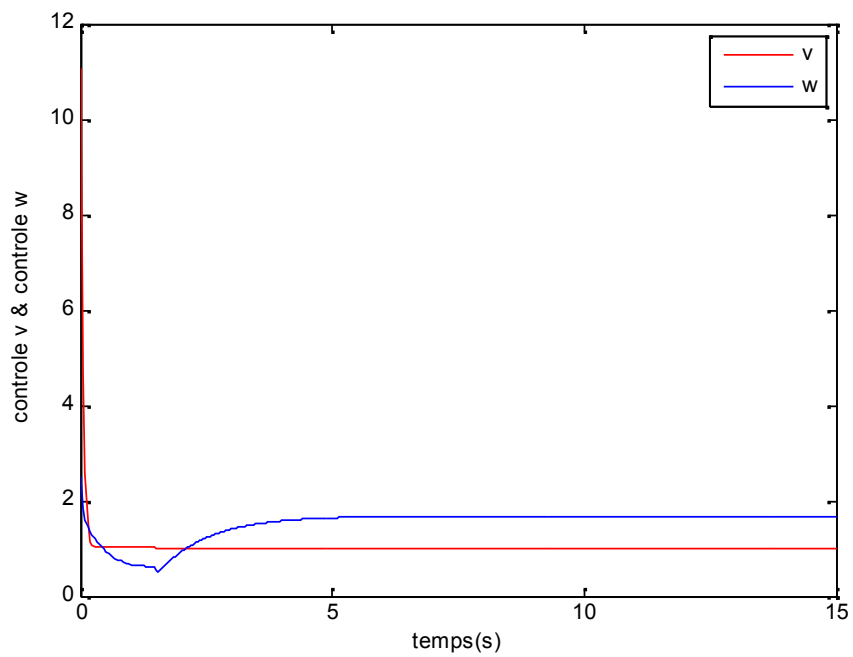


Figure 4.6 : Vitesses de commande  $v$  et  $\omega$

Nous choisissons un second cas avec  $p_e = (x_e, y_e, \theta_e)^T = (0.5, 0.5, \frac{\pi}{4})$

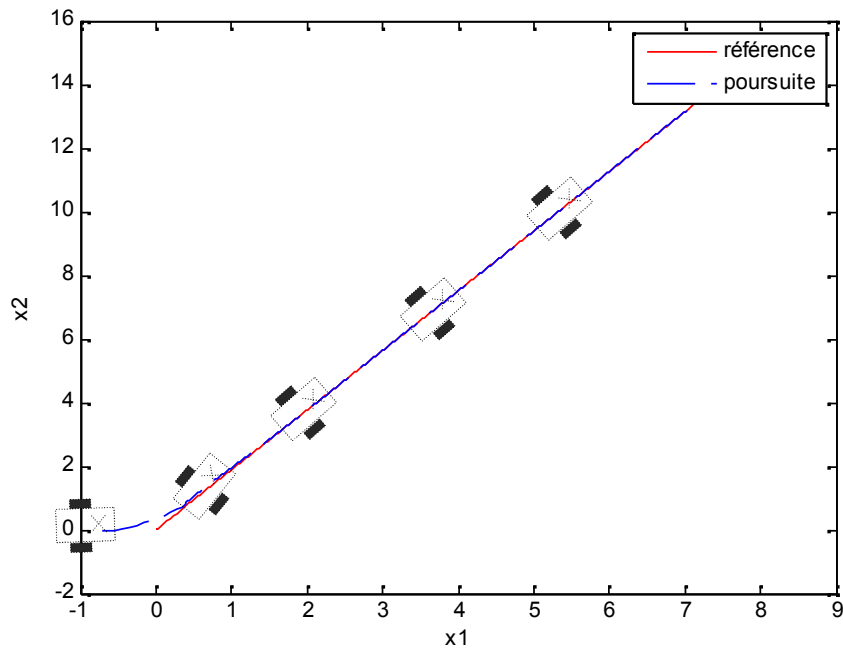


Figure 4.7 : Pursuite d'une trajectoire rectiligne

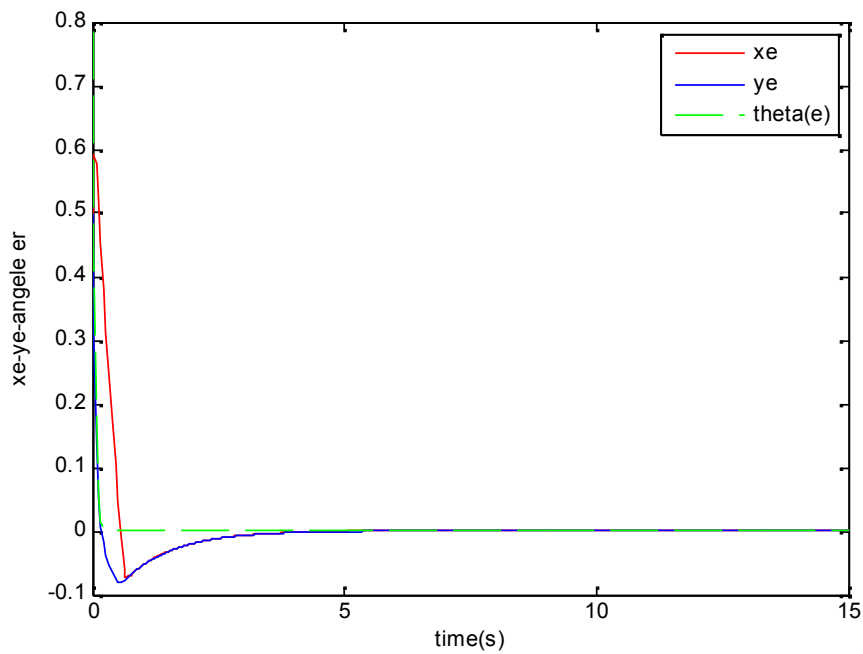
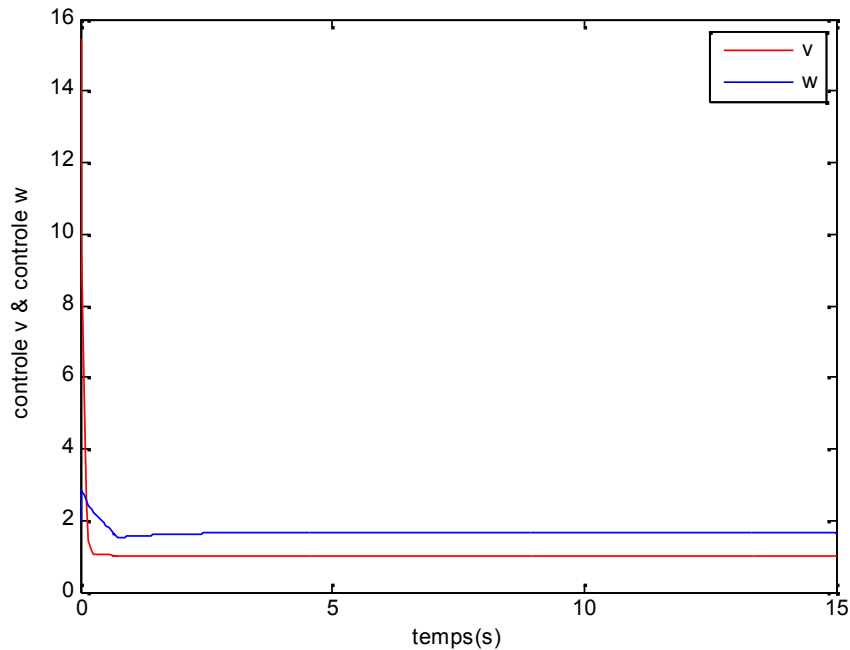


Figure 4.8 : Erreurs de poursuite

Figure 4.9 : Vitesses de commande  $v$  et  $\omega$ 

Les figures (4.5) et (4.8) montrent une convergence de l'erreur de position du robot mobile vers zéro; dans la figure (4.5), le temps de convergence est presque de 5 secondes et de 4 secondes dans la figure (4.8).

Les figures (4.6) et (4.9) montrent le suivi des vitesses linéaire et angulaire par rapport aux vitesses de références.

## B-Simulations pour une trajectoire circulaire

Nous choisissons :

- $v_r = 1 \frac{m}{s}$ ,  $w_r = 1 \frac{rad}{s}$       $r = \frac{v_r}{w_r}$
- La configuration de référence:

$$p_r = (x_r, y_r, \theta_r)^T = \begin{cases} x_r = r \cdot \cos(\omega_r t) = \cos(t) \\ y_r = r \cdot \sin(\omega_r t) = \sin(t) \\ \theta_r = \omega_r t = t \end{cases}$$

- les paramètres de la commande :

$$k = 5, \beta = 6, \delta = 0.5,$$

$$p = 11, q = 9, \alpha = 12.$$

- l'erreur de poursuite :

$$p_e = (x_e, y_e, \theta_e)^T = (0.5, -0.5, \frac{\pi}{4})$$

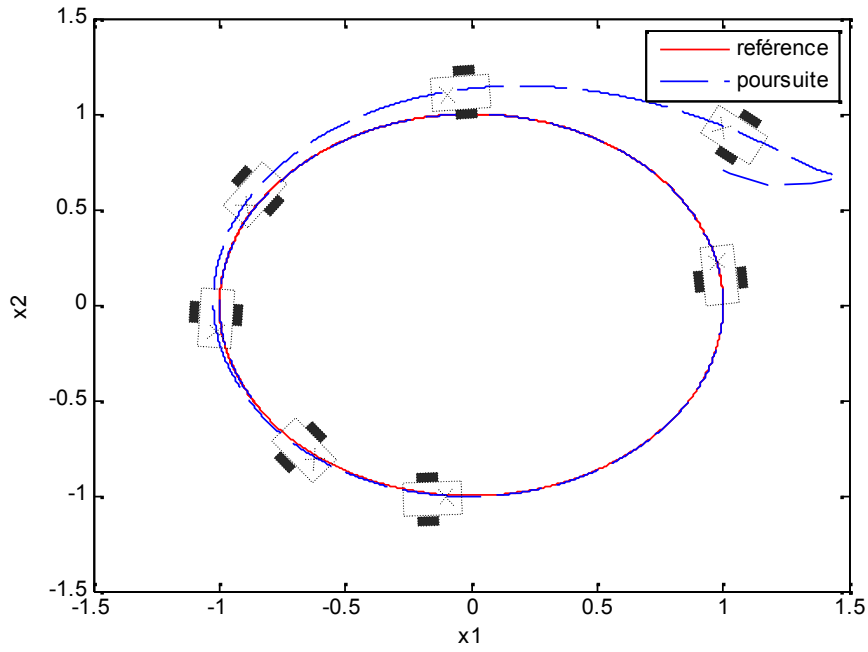


Figure 4.10 : Poursuite d'une trajectoire circulaire

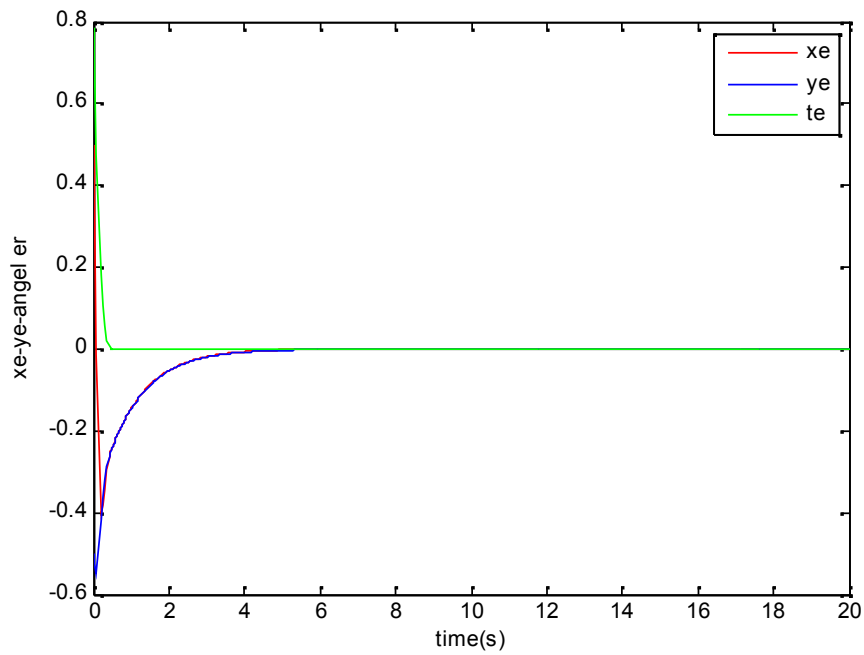
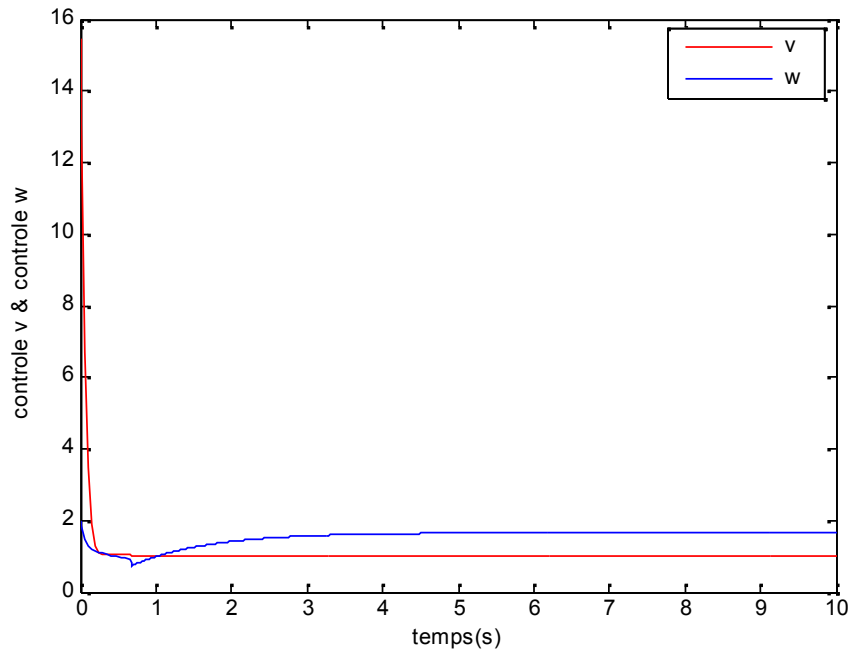


Figure 4.11 : Erreurs de poursuite

Figure 4.12: Vitesses de commande  $v$  et  $\omega$ 

Nous choisissons dans ce deuxième cas les valeurs suivantes:

- $v_r = 1 \frac{m}{s} \omega_r = 1 \frac{rad}{s} \quad r = \frac{v_r}{\omega_r}$
- La configuration de référence :

$$p_r = (x_r, y_r, \theta_r)^T = \begin{cases} x_r = r \cdot \cos(\omega_r t) = \cos(t) \\ y_r = r \cdot \sin(\omega_r t) = \sin(t) \\ \theta_r = \omega_r t = t \end{cases}$$

- les paramètres de la commande :  
 $k = 5, \beta = 6, \delta = 0.5, p = 7, q = 5, \alpha = 12.$
- l'erreur de poursuite

$$p_e = (x_e, y_e, \theta_e)^T (0.5, 0.5, \frac{\pi}{4})$$

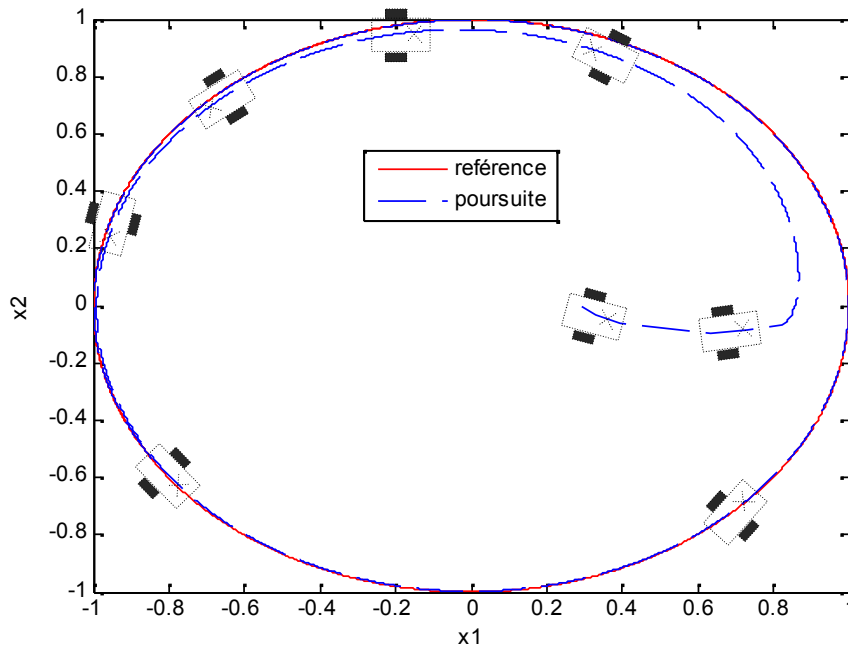


Figure 4.13 : Pursuite d'une trajectoire circulaire

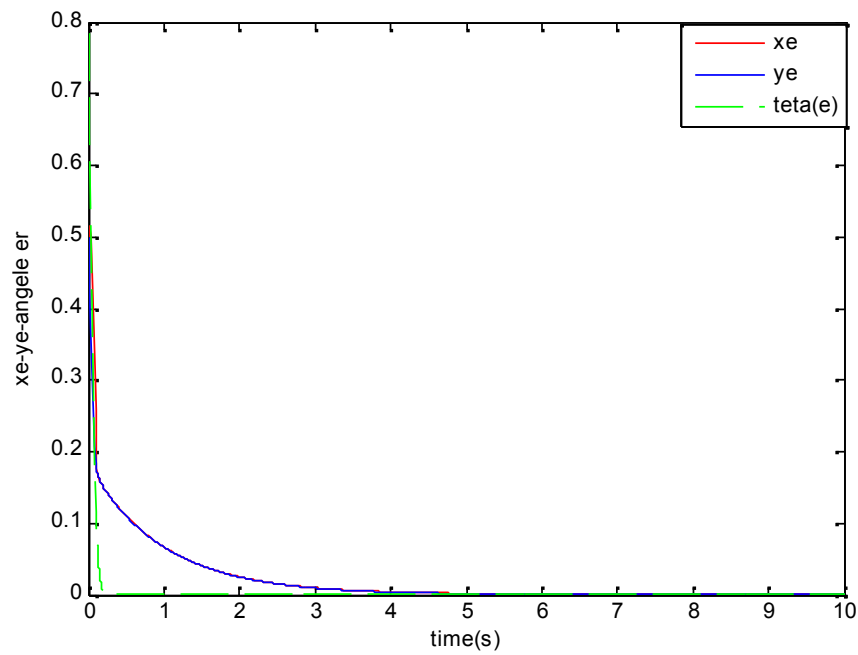
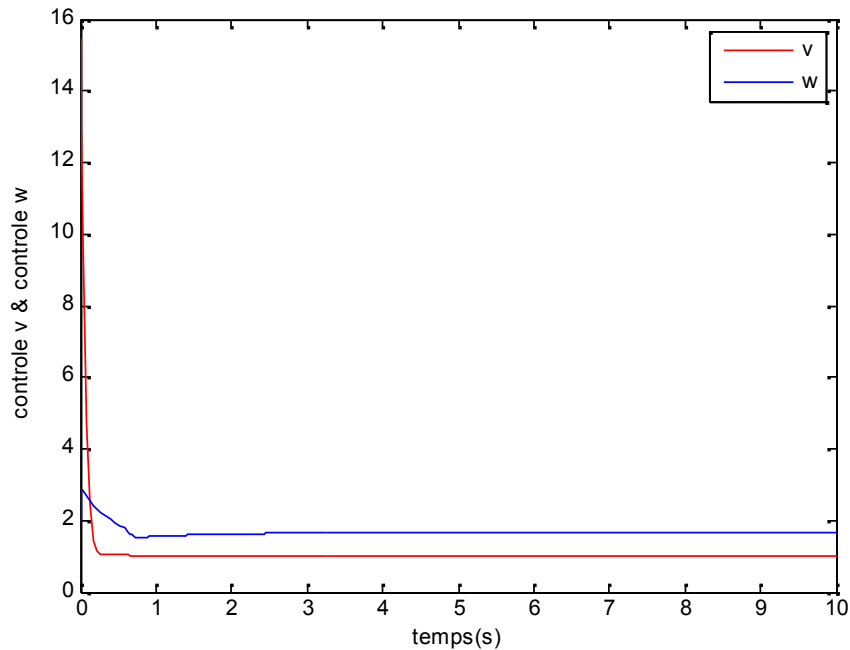


Figure 4.14 : Erreurs de poursuite

Figure 4.15 : Vitesses de commande  $v$  et  $\omega$ 

Les figures (4.11) et (4.14) illustrent la convergence de l'erreur de position du robot vers zéro; sur la figure (4.11) on remarque que le temps de convergence est de presque 5 secondes et il est de 3 secondes sur la figure (4.14).

Les vitesses linéaire et angulaire réelles du robot convergent bien vers les vitesses de références comme on peut le constater sur les figures (4.12) et (4.15).

### C- Simulation pour une trajectoire sinusoïdale

Nous choisissons :

- $v_r = 1 \frac{m}{s}$ ,  $\omega_r = 1 \frac{rad}{s}$
- La configuration de référence :

$$p_r = (x_r, y_r, \theta_r)^T = \begin{cases} x_r = t \\ y_r = \sin(\omega_r t) \\ \theta_r = \omega_r t = t \end{cases}$$

- les paramètres de la commande :  
 $k = 5$ ,  $\beta = 6$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $p = 11$ ,  $q = 9$ ,  $\alpha = 12$ .
- l'erreur de poursuite

$$p_e = (x_e, y_e, \theta_e)^T (0.5, -0.5, \frac{\pi}{4})$$

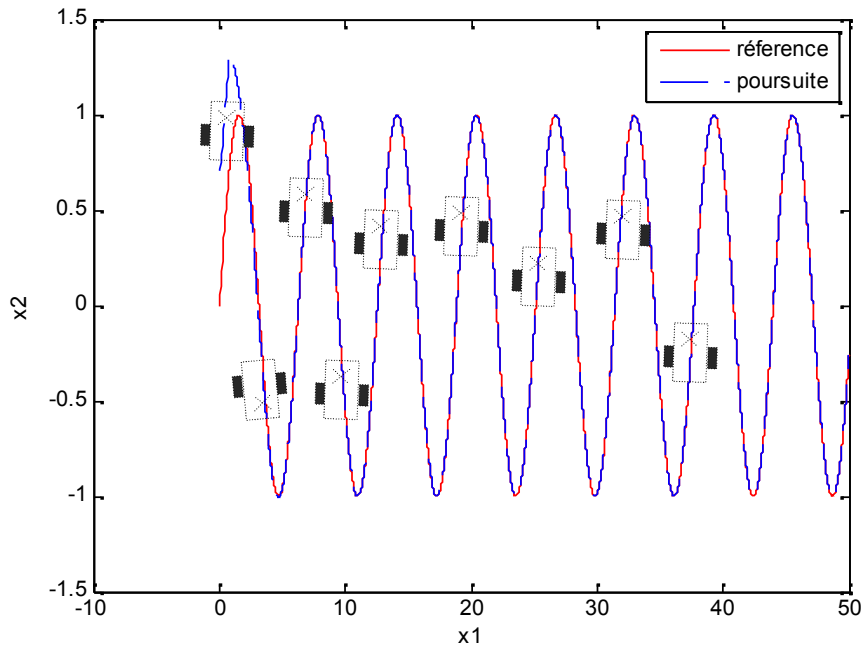


Figure 4.16 : Pursuite d'une trajectoire sinusoïdale

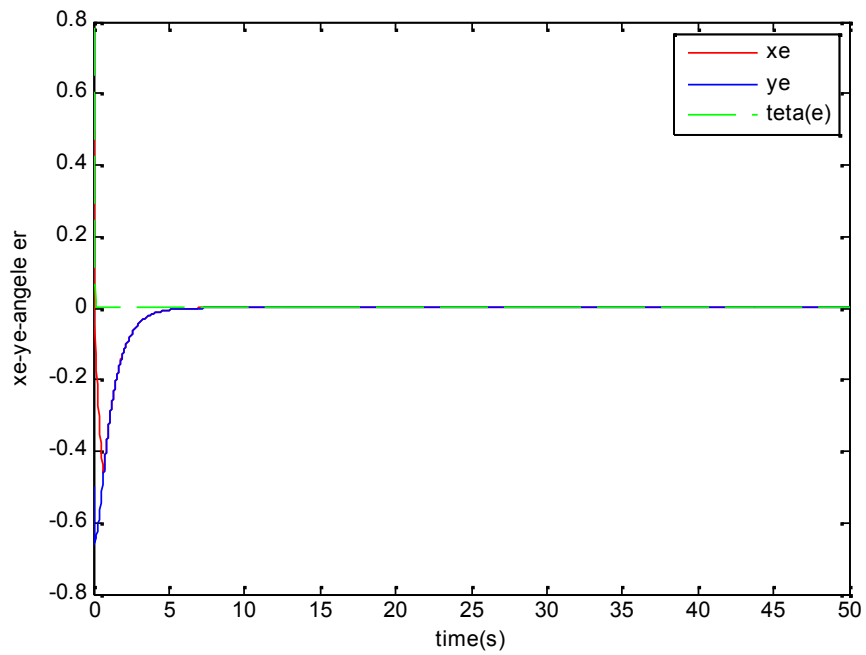
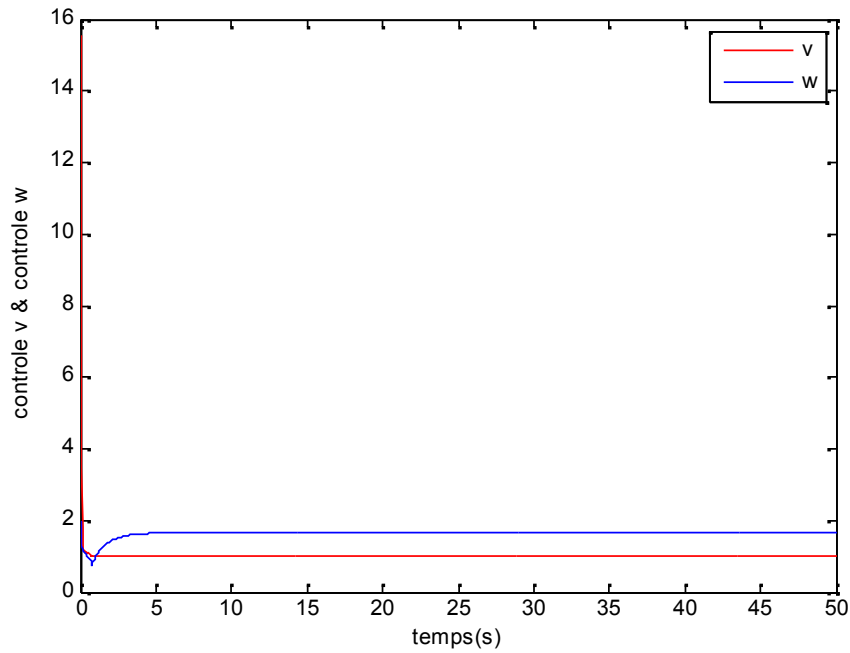


Figure 4.17 : Erreurs de poursuite



Figure 4.18 : Vitesses de commande  $v$  et  $\omega$ 

Et si Nous choisissons :

- $v_r = 1 \frac{m}{s}$ ,  $\omega_r = 1 \frac{rad}{s}$
- La configuration de référence:

$$p_r = (x_r, y_r, \theta_r)^T = \begin{cases} x_r = t \\ y_r = \sin(\omega_r t) \\ \theta_r = \omega_r t = t \end{cases}$$

- les paramètres de la commande :

$$k = 5, \beta = 6, \delta = 0.5, p = 7, q = 5, \alpha = 12$$

- l'erreur de poursuite

$$p_e = (x_e, y_e, \theta_e)^T (0.5, 0.5, \frac{\pi}{4})$$

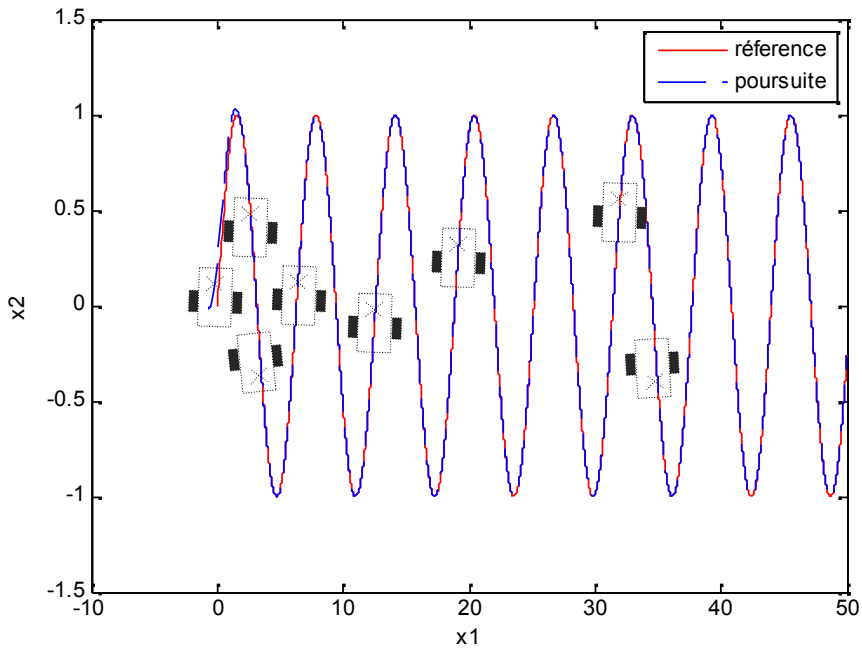


Figure 4.19 : Pursuite d'une trajectoire sinusoïdale

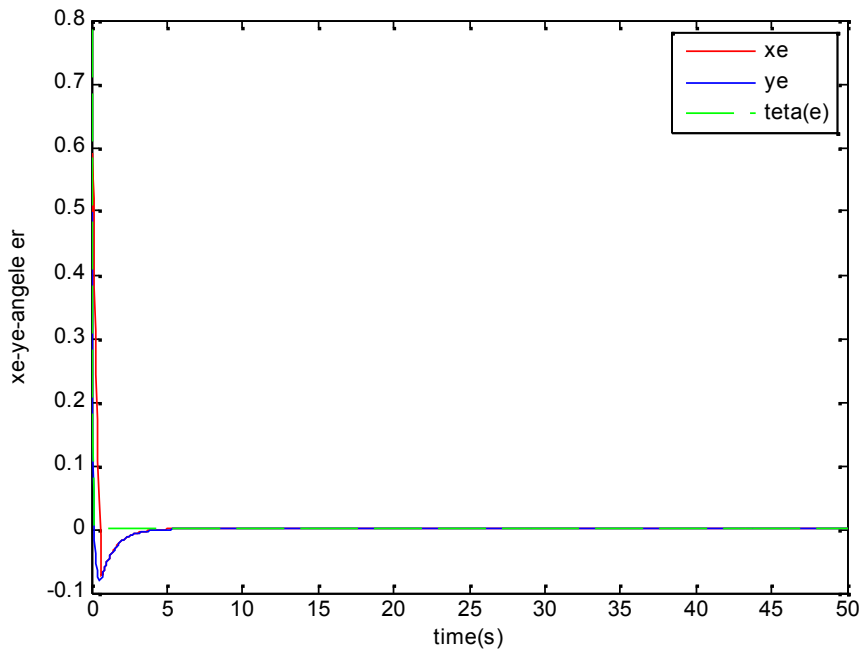


Figure 4.20 : Erreurs de Pursuite

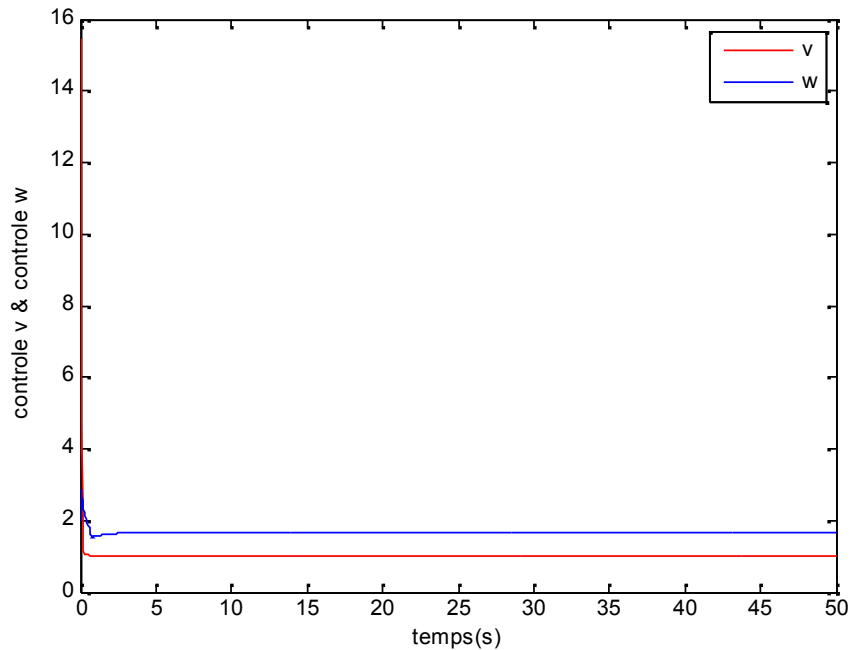


Figure 4.21: Vitesses de commande  $v$  et  $\omega$

La commande proposée assure bien la convergence de l'erreur de position du robot vers zéro; sur les figures (4.17) et (4.20) on constate que le temps de convergence est de presque 3 secondes pour les deux cas de figures de l'erreur de posture initiale.

Les figures (4.18) et (4.21) montrent la convergence des vitesses linéaire et angulaire du robot vers les vitesses de références dans un temps très court, de l'ordre d'une seconde.

La commande proposée montre sa robustesse dans les trois formes de trajectoires de références considérées, que ce soit une trajectoire rectiligne, circulaire ou sinusoïdale. L'erreur de posture du robot converge vers zéro dans de courtes durées quelque soient les valeurs initiales de l'erreur de posture considérées, la commande proposée fait converger l'état courant du robot mobile vers sa référence.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle approche pour le suivi de trajectoires pour un robot mobile non-holonyme a été développée. Cette méthode est basée sur la théorie de la commande par mode de glissement, l'avantage principal de cette technique par rapport à la plupart des approches existantes dans la littérature est de permettre au robot de pouvoir suivre des trajectoires de références, tout en considérant la fonction de Lyapunov dans le

domaine de l'espace d'état dans le but de permettre au système d'être asymptotiquement stable .

L'approche proposée du mode glissant est composée d'une loi de commande basée sur la fonction de commutation pour la deuxième surface de glissement choisie qui est en fonction de  $x_e$  et  $y_e$  ainsi que la première surface de glissement qui en fonction de  $\theta_e$ . Cette dernière est choisie par une fonction non linéaire proposée par Park dans le but de faire accélérer l'état du système pour rejoindre la surface dans un temps fini.

Cette commande proposée démontre une bonne performance de suivi en dépit de la grande erreur initiale. La posture du robot converge vers la trajectoire souhaitée en des temps très courts et cette commande permet d'obtenir de bons résultats en termes de poursuite de trajectoires.

Les résultats des simulations entreprises ont démontré la robustesse de l'approche proposée et permettent non seulement de garantir la précision élevée des suivis, mais aussi de garder une grande stabilité du robot mobile.

## **CONCLUSION GENERALE**

Les travaux présentés dans ce mémoire portent sur le suivi de trajectoires d'un robot mobile non holonome de type unicycle.

Notre travail est essentiellement axé sur les lois de commande classiques et améliorées étudiées par Utkin, Gao et al, Park et al, Liu et Wang et enfin Hung. On a pensé qu'il est intéressant de retrouver ces lois de commande sous le contexte de la géométrie différentielle ou dans les approches de la commande par modes glissants, basée sur la loi d'arrivée, avec une vitesse d'arrivée constante ou avec une puissante vitesse d'arrivée.

Ce travail se base sur les systèmes de commande à structure variable qui sont des systèmes de commande dans lesquels les paramètres du régulateur peuvent varier par à coups et prendre ainsi deux valeurs possibles suivant le signe d'une fonction dépendante des coordonnées du système dans l'espace de phase.

On a commencé notre travail de recherche par une modélisation des différents types de robots mobiles et à leur étude cinématique. Ensuite, nous avons développé les différents formalismes mathématiques des systèmes à structure variables et nous avons fait une étude sur les différentes lois de commandes par mode de glissement qui sont convenablement exploitées. Nous avons proposé une commande robuste par mode de glissement adéquate de type GFTSM qui contient des fonctions non linéaires dans la conception de la surface de glissement et qui accélère l'état du système pour la rejoindre dans un temps fini tout en éliminant le phénomène de broutement (chattering).

Différentes méthodes de poursuite de trajectoires ont été présentées tout en se basant, dans notre travail, à la comparaison entre les résultats de simulation des deux approches de commande classique proposées. La première est une commande classique de type PID et la seconde consiste en une approche par retour d'état d'une loi de commande non linéaire, basée sur le contrôle par backstepping avec des travaux de simulation.

Dans la phase finale, on a développé et implémenté un algorithme permettant la stabilisation asymptotique des erreurs de suivi de trajectoires. Il est intéressant de synthétiser une loi de commande robuste garantissant la stabilisation en temps fini des erreurs de suivi. Les résultats de la simulation développée ont montré clairement l'efficacité de la commande par mode glissant de type GFTSM et que les erreurs de poursuite convergent vers zéro en un temps fini, tout en garantissant la stabilité du système à l'aide d'une fonction de Lyapunov. Les résultats des diverses applications entreprises pour une poursuite de trajectoires et présentées dans ce travail montrent la fidélité de la réponse de ce type de commande.

En ce qui concerne les perspectives, nous envisageons, dans nos prochains travaux, de nous focaliser sur les directives suivantes:

- recourir vers les outils de l'intelligence artificielle dans le but d'Optimisations des paramètres de système de commande.
- Application de la commande sur un modèle dynamique en tenant compte des perturbations et des retards sur les mesures.
- réaliser le suivi de trajectoire par l'utilisation d'une commande avec un observateur mode glissant.
- Appliquer l'approche proposée sur des robots manipulateurs mobiles.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] Brockett R., "Asymptotic stability and feedback stabilization", *Differential geometric control theory*, pp 181-195, Boston, 1983.
- [2] V. I. Utkin, "V.S.S. with sliding modes", *IEEE transactions on automatic control*, volume AC-22, n°2, pp. 212-222, 1977.
- [3] K.K.D. Young and V.I. Utkin, "Methods for constructing discontinuity planes in multidimensional variable structure systems", *Automatic Remote Control*, volume 39, n°10, pp. 1466-1470, 1978.
- [4] J.J.E Slotine, "Sliding controller design for nonlinear systems", *International Journal of Control*, volume 40, n°2, pp. 421-434, 1984.
- [5] S.S. Sastry and J.J.E Slotine, "Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators", *International Journal of Control*, volume 38, n°2, pp.465- 492, 1983.
- [6] H. Asada and J.J.E. Slotine, "Robot analysis and control", John Wiley and sons, ISBN-10: 0471830291, April 25 1986.
- [7] J.Y. Hung, W.B. Gao and J.C. Hung, "Variable structure control: A survey", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, volume 40, n°1, pp. 2-21, 1993.
- [8] H. Habbi, M. Zelmat and B, Ould Bouamama, "A dynamic fuzzy model for a drum-boiler-turbine system", *Automatica*, volume 39, pp. 1213-1219, 2003.
- [9] H. Harashima, H. Hashimoto and K. Maruyama, "Practical robust control of robot arm using variable structure system", *Proceedings of IEEE Conference*, pp: 532-539.
- [10] A. Levant, "Principles of 2-Sliding mode design", *Automatica*, volume 43, pp. 576-586, 2007.

- [11] Park K.B., Tsuiji T., “Terminal sliding mode control of second-order nonlinear uncertain systems”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, volume 9, n°11, pp. 769-780, 1999.
- [12] F. W. Warner, “Foundations of differentiable manifolds and lie groups”, *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, 1983.
- [13] G. Campion, G. Bastin and B. Andréa-Novel, “Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, volume 12, n°1, pp. 47–62, 1996.
- [14] Pin, F.G. and Killough, M.S., “A New Family of Omnidirectional and Holonomic Wheeled Platforms for Mobile Robots”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, volume 10, n°4, August 1994.
- [15] P. Morin and C. Samson, “Commande par retour d'état de systèmes non-linéaires sans dérive. L'approche par fonctions transverses”, In CIFA, Conférence Internationale Francophone d'Automatique, juillet 2002.
- [16] P. Morin et C. Samson. “Introduction à la commande par retour d'état des systèmes non-holonomes, Ecole des Mines de Paris, 2003.
- [17] S.V. Emelyanov and V.A. Taran, “Sur une classe de systèmes de régulation automatique à structure variable”, *Journal de l'Académie des Sciences d'URSS, Énergétique et Automatique* n°3, 1962.
- [18] A.F. Philippov, “Differential equations with discontinuous right-hand side”, *Annals of Mathematics*, sect. trans., volume 42, sect.2, pp. 199-231, 1964.
- [19] H. Sira-Ramirez, “Differential Geometric Methods in Variable Structure Control”, *International Journal of Control*, Vol.48, N°4, pp. 1359-1380, 1988.
- [20] R.B. Fernandez, J.K. Hedrick, “Control of multivariable nonlinear systems by sliding mode control”, *International Journal of Control*, volume 46, n°3, pp. 1019-1040, 1987.
- [21] J.J.E. Slotine and W. Li, “Applied Non linear control”, Englewood cliffs, New jersey, Prentice Hill, 1991.



- [22] R.A. Decarlo, S.H. Zak and G.P. Matthews, "Variable Structure Control of nonlinear multivariable systems: A tutorial", IEEE, volume 76, n°3, pp. 212-232, 1988.
- [23] Abdelmalik Bachtarzi. "Commande des systèmes a structure variable applications à un générateur de vapeur". Thèse de doctorat. Université de Constantine, Algérie. 3 juillet 2011 .
- [24] M. Fliess, "Automatique et corps différentiels", Forum Math., volume 1, pp.227-238, 1989.
- [25] J.X. Xu, H. Hashimoto and F. Harashima, "On the Design of a VSS Observer for Nonlinear Systems", *Transactions of the SICE*, volume 25, n°2, pp. 211-217, 1989.
- [26] J. Guldner and V.I. Utkin, "Stabilization of non-holonomic mobile robots using Lyapunov functions for navigation and sliding mode control", In Decision and Control, Proceedings of the 33rd IEEE, pp. 2967-2972, Florid, December 1994.
- [27] Y.T. Tian and S. Li., "Exponential stabilization of nonholonomic dynamic systems by smooth time-varying control", *Automatica*, vol. 38, no. 7, pp. 1139-1146, 2002.
- [28] C. Samson. "Control of chained systems application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots", *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 40, n°1, pp. 64-77, January 1995.
- [29] L. Caracciolo, A. de Luca and S. Iannitti, "Trajectory tracking control of a four-wheel deferentially driven mobile robot", In Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, volume 4, pp. 2632-2638, 1999.
- [30] Z.P. Wang, C.Y. Su, T.H. Lee and S.S. Ge, "Robust adaptive control of a wheeled mobile robot violating the pure nonholonomic constraint", In Control, Automation, Robotics and Vision Conference, ICARCV, volume 2, pp. 987-992, December 2004.
- [31] R. Lenain, "Contribution à la modélisation et à la commande de robots mobiles en présence de glissement", PhD. Thesis, Université Blaise Pascal-Clermont II, 14 November 2005.

- [32] Floquet, T., Barbot, J-P. and Perruquetti, W., “Higher-order sliding mode stabilization for a class of nonholonomic perturbed systems”, *Automatica*, volume 39, n°6, pp. 1077-1083, 2003.
- [33] A. P. Aguilar, J. P. Hespanha, and P. V. Kokotovic, “Performance limitations in reference tracking and path following for nonlinear systems”. *Automatica*, volume 44, n°3, pp. 598–610, 2008.
- [34] El-hadi Guechi. “Suivi de trajectoires d’un robot mobile nonholonome : approche par modèle flou de takagi-sugeno et prise en compte des retards”. thèse de doctorat, université de valenciennes et du hainaut cambrésis, France. 28 juin 2010
- [35] Oriolo G., De Luca A. and Vendittelli M., “WMR control via dynamic feedback linearization: design, implementation, and experimental validation”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, volume 10, n°6, pp. 835-852, 2002.
- [36] Samson C., “Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart”, In *Advanced Robot Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, volume 126, pp. 125-151, 1991.
- [37] Bloch, A.M, Reyhanoglu, M. and Mc Clamroch, N., “Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37, pp. 1746-1757, 1992.
- [38] Bloch, A.M. and Drakunov, S.V., “Stabilization and tracking in the nonholonomic integrator via sliding modes”. *Systems and Control Letters*, volume 29, pp. 91-99, 1996.
- [39] Canudas De Wit C. and Sørдалen O.J., “Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 37, n°11, pp. 1791- 1797, 1992.
- [40] Perruquetti W. and Barbot, J-P., “Sliding mode control engineering”, Control Engineering Series, Marcel Dekker, New York, 29 January 2002. Hardback | 432 pages, ISBN 13: 978082470671

- [41] Defoort M., Floquet T., Kokosy, A., Perruquetti W., “Sliding mode formation control for cooperative autonomous mobile robots”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, volume 5, n°11, pp. 3944-3953, 2008.
- [42] Fliess M., Levine J., Martin Ph. and Rouchon P., “Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples”, *International Journal of Control*, volume 61, n°6, pp. 1327-1361, 1995.
- [43] Morin P. and Samson C., “Motion control of wheeled mobile robots”, Chapter 34 of *Handbook of Robotics*, Springer, pp 799-826, 2008.
- [44] Morin P. and Samson C., “Practical stabilization of driftless systems on Lie groups: the transverse function approach”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 49, n°9, pp. 1496-1508, 2003.
- [45] Sontag, E., “Stability and stabilization: discontinuities and the effect of disturbances”, In *Nonlinear Analysis, Differential Equations, and Control*, F.H Clarke and R.J Stern, Editors, Proceeding of NATO Advanced Study Institute, Montreal, pp. 551-598, 1999.
- [46] Arturs, G., “Application de l’approche par fonctions de transverses à la commande de véhicules non holonomes manoeuvrants”, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris – SOPHIA ANTIPOLIS, France, 2005.
- [47] Young K., “A variable structure model following control design for robotics applications”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 33, pp. 556-561, 1998.
- [48] Canudas De Wit, C. and Slotine J. J.E., “Sliding observers in robot manipulators”, *Automatica*, volume 27, n°5, pp 859-864, 1991.
- [49] Khennouf, H and Canudas De Wit, C., “On the construction of stabilizing discontinuous controllers for nonholonomic systems”, *IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium*, Tahoe city, California, June 1995.
- [50] Utkin V.I. and Shi J., “Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions”, *IEEE International Conference on Decision and Control*, pp. 4591–4596, Kobe, Japan, 1996.

- [51] Defoort, M., Floquet, T., Kokosy, A and Perruquetti, W., “Integral sliding mode control for trajectory tracking of a unicycle type mobile robot”, *Integrated Computer Aided Engineering*, volume 13, n°3, pp. 277-288, 2006.
- [52] Defoort, M., “Contributions à la planification et la commande pour les robots mobiles coopératifs”, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille, France, 2007.
- [53] Julio E. Normey-Rico, Ismael Alcalá, Juan Gómez-Ortega and Eduardo F. Camacho “Mobile robot path tracking using a robust PID controller”, Original Research Article *Control Engineering Practice*, volume 9, Issue 11, pp. 1209-1214, November 2001.