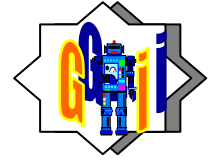




République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITÉ EL-HADJ LAKHDAR BATNA

Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département de Génie Industriel

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ AU

Laboratoire d'Automatique et Productique

En vue de l'obtention du diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Génie Industriel

Par

HAOUES MOHAMMED

Ingénieur en Génie Industriel

Thème :

**L'UTILISATION CONJOINTE DES RÉSEAUX DE PETRI
STOCHASTIQUES ET DES PROCESSUS DE MARKOV POUR LA
MODÉLISATION, L'ANALYSE ET L'ÉVALUATION DES
PERFORMANCES D'UN SYSTÈME DE PRODUCTION : LIGNE
D'EMBOUTISSAGE DE L'ENTREPRISE B.A.G BATNA**

Directeur de mémoire : Dr. K.N.MOUSS

Soutenu le : 14/06/2006, devant le jury composé de :

Dr. L.H. MOUSS	MC	Université de Batna	Président
Dr. K.N. MOUSS	MC	Université de Batna	Rapporteur
Dr. H. SMADI	MC	Université de Batna	Examineur
Dr. F. ABDESSEMED	MC	Université de Batna	Examineur
Dr. A.R. DIB	CC	C.U. Oum-Elbouaghi	Examineur
Mr. A. BELAKHDAR	Ing	Responsable-Bureau de Méthodes-BAG	Invité

Année Universitaire : 2005/2006

Remerciements

Je tenais en premier lieu à remercier le bon dieu, de nous avoir guidé et de nous avoir offert tous ce que nous possédons.

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique et Productique (LAP) à l'université de Batna au sein de l'équipe Gestion Industrielle et Logistique (GIL), sous la direction scientifique du Dr. Nadia Kinza MOUSS. Je tiens à la remercier très vivement pour ses précieux conseils et son soutien dont j'ai bénéficié tout au long de notre travail.

Je tiens également à remercier :

Dr. MOUSS Leila Hayet, Maître de conférence, Directrice du Laboratoire d'Automatique et Productique (LAP) à l'université de Batna, Dr. MOUSS Nadia Kinza, Maître de conférence à l'université de Batna, Dr. SMADI Hacene, Maître de conférence, Chef Département Génie Industriel à l'Université de Batna, Dr. DIB Abderrahmane, Chargé de Cours, Vice Recteur chargé de la Post-Graduation au centre universitaire d'oum-elbouaghi, Dr. ABDESSAMED Fodil, Maître de conférence à l'université de Batna et Mr. BELAKHDAR Ali, Ingénieur Responsable de bureau de méthode de l'entreprise B.A.G. Batna.

Pour l'honneur qu'ils me font en examinant ce travail et en acceptant de participer à mon jury.

Je remercie vivement Dr Daniel RACOCEANU Maître de Conférence à l'Université de FRANCHE-COMTE sur la qualité des documents envoyés et pour leurs conseils.

Ce travail n'aurait pu se faire sans la participation et l'aide sur les différents plans d'un certain nombre de proches, d'amis et de collègues. Ainsi, je suis fier d'exprimer ma gratitude à Dr Kafia OULMI Enseignante à l'université de Batna, Dr BÉNARKET Salah Directeur de la Société des Eaux et Protection de l'Environnement (S.E.P.E), Mr BEDLA Salah Directeur de l'école Mohammed Sbaa, Dr Mohamed Rida MENANI Directeur du Centre de Recherche de l'Université de Batna. Aussi, nos remerciements vont également à Dr DARADJI Enseignant à l'université de Batna, Mr Abdelhamid DEKHINET, Dr Khalifa MESSAOUDI Directeur du Laboratoire des Techniques Mathématiques en vue d'Applications aspect Déterministe et Stochastique (MATHS) pour leurs conseils avisés, à Amine RACHI doctorant à l'Ecole Polytechnique de Marseille en France et Toufik BENTERCIA doctorant au LAP de l'université de Batna pour leurs aides et soutiens illimités, je leur souhaite une bonne continuation et de la réussite dans leurs carrières professionnelles.

J'adresse également une pensée particulière à tous les membres et personnel technique et administratif du centre de recherche de l'université de Batna, à Mr Djamel Benoudjit enseignant à l'université de Constantine et Service Informatique « Lakhdar » pour leurs gentillesse, aide et disponibilité.

Mes pensées vont enfin et surtout vers tous ceux qui m'ont soutenu moralement, et qui ont su accepter mon caractère pas toujours facile à vivre, parfois ma mauvaise humeur pendant certaines périodes un peu difficiles de mon travail. Je tiens donc à adresser notamment un grand merci à ma famille, et à tous mes amis « Khaled, Djahid, Bouzid, Toufik, Mahfoud, Merwan, Mehdi, Fateh, Omar, Hichem, Rafik² et Mébarek... » J'ai sûrement oublié de citer certains d'entre vous qui m'ont grandement aidé dans mon travail, mais au fond de mon cœur je vous remercie chaleureusement.

Dédicace

À $\mathcal{H}_{\rightarrow \infty}$

Table des Matières :

Table des Matières.....	5
Introduction générale.....	10
Chapitre I : L'évaluation de performances et la modélisation dans les systèmes de production.....	12
I.1. Introduction.....	12
I.2. Nature des systèmes étudiés.....	12
I.3. Formulation du problème.....	13
I.4. Démarche et les finalités de la modélisation.....	14
I.4.1. Notion de modèle.....	14
I.4.2. Modèle de connaissance.....	15
I.4.3. Modèle d'action.....	15
I.4.4. Processus de modélisation.....	15
I.5. Analyse qualitative et quantitative.....	16
I.5.1. L'analyse qualitative.....	16
I.5.2. L'analyse quantitative ou évaluation des performances.....	16
I.5.2.1. Qu'est ce que une évaluation de performances ?.....	16
I.5.2.2. Pourquoi une évaluation de performance ?.....	17
I.5.2.3. L'évaluation des performances d'un SdP : <i>Panorama des méthodes</i>	18
I.5.2.3.1. Les méthodes de mesure : <i>détermination de performances par mesures</i>	18
I.5.2.3.2. Les méthode analytique exactes ou approchées.....	19
I.5.2.3.3. La simulation aléatoire.....	19
I.5.2.4. Critères d'évaluation d'un SdP.....	19
I.5.2.4.1. La performance.....	20
I.5.2.4.2. La sûreté de fonctionnement.....	20
I.6. Perturbations.....	21
I.6.1. L'origine des perturbations.....	21
I.6.2. Les types de perturbations.....	21
I.6.2.1. Les perturbations externes.....	21
I.6.2.2. Perturbations internes.....	21
I.7. L'identification des événements.....	21

I.7.1. Événements attendus.....	22
I.7.2. Événements non attendus.....	22
I.8. L'évaluation de performances et l'outil RdP.....	23
I.8.1. Historique.....	23
I.8.2. Notions de Base et définitions.....	23
I.8.3. Les principales propriétés des RdP.....	26
I.8.3.1. Les propriétés structurelles.....	26
I.8.3.2. Les propriétés comportementales.....	26
I.8.4. Les différentes extensions des RdP.....	26
I.8.5. Les RdP : <i>un outil de modélisation des SdP</i>	29
I.8.5.1. Processus de Markov.....	29
I.8.5.2. Réseaux de files d'attente.....	29
I.8.5.3. Réseaux de petri stochastiques.....	30
I.9. Conclusion.....	30
Chapitre II : Réseaux de petri stochastiques et processus de Markov.....	31
II.1. Introduction.....	31
II.2. Les réseaux de petri stochastiques.....	31
II.2.1. Définitions.....	31
II.2.2. Règles d'évolution des RdPS.....	31
II.2.2.1. Algorithme d'interprétation des RdPS.....	32
II.2.3. Etat de l'art.....	32
II.2.3.1. Réseaux de petri stochastiques généralisés.....	33
II.2.3.2. Réseaux de petri déterministes et stochastiques.....	34
II.2.3.3. Réseaux de petri stochastiques étendus.....	34
II.2.3.4. Réseaux de petri stochastiques à haut niveau.....	34
II.2.3.5. Extension des réseaux réguliers.....	34
II.2.3.6. Réseaux de petri stochastiques généralisés et synchronisés.....	34
II.2.3.6.1. Généralités sur les RdPS ² G.....	35
II.2.3.6.2. Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés à Synchronisations Internes	35
II.2.3.6.3. Comparaison entre un RdPS ² G et un RdPSGSyI.....	35
II.2.3.6.4. Autres définitions.....	36
II.2.3.6.5. Règles d'évolution et algorithme d'interprétation.....	36
II.2.3.6.5.1. Cadre de l'étude des RdPSGSyI.....	36

II.2.3.6.5.2. Algorithme d'interprétation des RdPSGSyI.....	39
II.2.3.6.6. Application des RdPS ² G et RdPSGSyI. à la modélisation des SdP	39
II.2.3.6.6.1. Modélisation.....	39
II.3. Processus stochastiques et processus de Markov.....	42
II.3.1. Processus stochastiques.....	42
II.3.2. Processus de Markov.....	42
II.3.2.1. Définition mathématique.....	42
II.3.2.2. Représentation graphique.....	43
II.3.2.3. Graphe des transitions.....	44
II.3.2.4. Vecteur probabilité instantané.....	44
II.4. Etude de comportement stationnaire.....	46
II.5. Méthodes de résolution des problèmes de l'explosion combinatoire.....	50
II.5.1. Méthodes graphiques de simplification des RdPS.....	50
II.5.2 Méthodes de simplification analytiques.....	50
II.6. Liaison entre RdPS et PdM.....	50
II.7. RdPS ² G et processus de Markov.....	51
II.8. Conclusion.....	52

Chapitre III : Une méthode analytique basée sur l'utilisation conjointe des RdPS et des PdM..... 53

III.1. Introduction.....	53
III.2. Démarche.....	53
III.2.1. Eléments.....	53
III.2.1.1. Modèles génériques de références.....	53
III.2.1.1.1. Représentation par boîte noires.....	53
III.2.2. Modélisation du SdP complet.....	54
III.2.3. Décomposition du SdP en cellules élémentaires.....	55
III.2.3.1. Génération des PdM.....	55
III.2.3.1.1. Principe de l'algorithme de DEcomposition-REComposition (DEREC).....	56
III.2.4. Décomposition du SdP en cellules simples.....	62
III.2.4.1. Détermination des processus de Markov pour une cellule simple.....	62
III.2.5. Résolution des PdM.....	63
III.2.5.1. Résolution modulaire des PdM (méthode itérative).....	63
III.2.5.1.1. Principe de la méthode itérative.....	63
III.2.5.1.2. Algorithme de résolution « Propagation AMont AVal »PAMAV	64

III.4. Conclusion.....	69
Chapitre IV : RdPSGSyI-PdM pour la modélisation et l'évaluation de performances de la ligne d'emboutissage de la B.A.G.....	70
IV.1. Introduction.....	70
IV.2. Présentation de l'entreprise BAG-Batna.....	70
IV.3. Présentation des unités de l'entreprise BAG.....	70
IV.3.1. Unité de mécanique.....	70
IV.3.1. Unité de soudage.....	71
IV.3.3. Unité de finition.....	71
IV.4. Présentation de la ligne d'emboutissage étudiée.....	72
IV.5. Modélisation de la ligne d'emboutissage d'emboutis supérieurs	72
IV.5.1. Application de l'algorithme DEREK pour déterminer les modèles RdP de chaque module.....	73
IV.6. Description du modèle.....	76
IV.7. Forme boîte noire de la ligne modélisée.....	78
IV.8. Analyse qualitative.....	79
IV.8.1. Calcul des invariants de marquage.....	79
IV.8.2. Interprétation du modèle RdPSGSyI : <i>application de l'algorithme d'interprétation</i>	79
IV.9. Analyse quantitative : ou évaluation de performances.....	81
IV.9.1. Décomposition de la ligne en cellules élémentaires.....	81
IV.9.2. Application de l'algorithme DEREK pour générer le PdM simplifié pour chaque cellule élémentaire.....	81
IV.9.3. Décomposition de la ligne en cellules simples.....	96
IV.9.4. Détermination du PdM pour une cellule simple.....	97
IV.9.5. Comparaison avec la méthode exacte.....	106
IV.9.6. Application de l'algorithme itérative PAMAV pour la résolution modulaire des PdM.....	110
IV.9.6.1. Données industrielles.....	111
IV.9.6.2. Déroulement de l'algorithme PAMAV.....	114
IV.10. Conclusion.....	122
Chapitre V : Etude de la disponibilité-productivité de la ligne d'emboutissage de la B.A.G.....	123

V.1. Introduction.....	123
V.2. Disponibilité moyenne.....	123
V.2.1. Disponibilité intrinsèque.....	123
V.2.2. Disponibilité opérationnelle.....	125
V.2.3. Disponibilité Propre.....	127
V.2.4. Disponibilité Totale.....	128
V.3. La productivité.....	134
V.3.1. Productivité propre.....	134
V.3.2. La productivité opérationnelle.....	134
V.7. Conclusion.....	137
Conclusion et perspectives.....	138
Références bibliographiques.....	142
Table des illustrations.....	154
Liste des figures.....	154
Liste des tableaux.....	155
Liste d’acronymes et abréviations.....	156
Annexes.....	158
Annexe I.1 : Propriétés structurelles et comportementales des RdP.....	158
Annexe III.1 : Algèbre tensorielle.....	161
Annexe III.2 : Généralisation.....	164
Annexe IV.1 : Calcul des paramètres des machines.....	166
Annexe V.1 : Les attributs de base « Les temps ».....	168

Introduction générale :

La croissance rapide et la complexité des Systèmes de Production (SdP), la nécessité d'une utilisation optimale des ressources de production et la poursuite d'objectifs de production (maximisation de la productivité et la minimisation des ressources), rendent de plus en plus difficile l'analyse et l'évaluation de ces systèmes.

En effet, cette complexité entraîne de nos jours des problèmes critiques de performances, avec par exemple des problèmes de disponibilité et de productivité, une qualité de service non garantie...etc. Pour garantir les performances de ces systèmes, une analyse fine du comportement est nécessaire afin d'identifier les problèmes et de les résoudre.

L'amélioration de performance des SdP, passe impérativement par l'évaluation et l'analyse des performances du système existant. Pour ce faire, le système est modélisé, et son analyse indique les problèmes potentiels qui peuvent survenir.

Il est donc fondamental de disposer de méthodes et d'outils efficaces permettant la modélisation et l'évaluation de performances des SdP complexes.

Or, dans les SdP, la perte de productivité est principalement induite par les arrêts des machines, ces arrêts sont considérés comme des facteurs de dégradation de la productivité des SdP. Optimiser les performances de ces systèmes en termes de disponibilité et de productivité signifie donc minimiser les arrêts des machines que ce soit des arrêts propres, relatif à une machine (dérives dans les caractéristiques d'usinage, manque de fluidité,...) ou induit par d'autres facteurs (attentes diverses dues à l'ordonnancement ou à la disponibilité de réparateur, arrêts programmés,...).

Notre travail s'inscrit dans le cadre des activités du Laboratoire d'Automatique et Productique (LAP) à l'université de Batna (dans l'équipe GIL¹). Ces activités concernent à la fois des études théoriques de certaines propriétés d'outils de modélisation stochastique des systèmes à événements discrets (chaînes de Markov, réseaux de files d'attente « RFA », Réseaux de Petri Stochastiques « RdPS ») et des applications de ces outils dans des domaines divers, notamment l'évaluation de performances ; l'aide au pilotage des flux ; l'amélioration de la sûreté de fonctionnement par l'intégration de différentes techniques de maintenance et de surveillance. Nous cherchons en particulier d'utiliser des méthodes analytiques pour évaluer les performances de différents systèmes de production. Sous certaines hypothèses, ces méthodes analytiques donnent très rapidement les principales performances du système de production, avec une précision souvent suffisante.

Ce mémoire traite de la modélisation et l'évaluation de performances des SdP à événements discrets par des approches analytiques. Ainsi nous nous sommes intéressé au problème de la disponibilité et de la productivité d'un SdP face à un événement non attendu dû à une perturbation interne de type panne-machine. Sur ce plan, l'approche utilisée consiste à l'utilisation conjointe et complémentaire de l'outil RdPS,

¹ Gestion Industrielle et Logistique.

plus précisément les Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés à Synchronisations Internes (RdPSGSyI) et les Processus de Markov (PdM).

Afin d'atteindre cet objectif, nous commençons d'abord par la présentation de la classe des systèmes étudiés et par l'établissement d'un état de l'art sur les approches de modélisation et d'évaluation de performances des systèmes de production. Nous exposons ensuite les bases de l'outil de modélisation choisi à savoir les Réseaux de Petri (RdP) et nous justifions le choix particulier de l'utilisation des réseaux de petri stochastiques. Cette étude fait l'objet du premier chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons succinctement les RdPS, nous présentons également les RdPS²G et leur version RdPSGSyI en détaillant les aspects de modélisation. Ensuite, nous donnons les définitions des PdM, nous indiquons le principe de résolution de ces processus, et enfin nous montrons la relation entre les deux outils.

Le troisième chapitre présente une méthode dédiée à la modélisation et l'évaluation de performances des SdP manufacturiers, cette méthode est constituée de deux parties complémentaires. La première partie aborde la modélisation du système en utilisant un outil qui est les réseaux de petri stochastiques généralisés à synchronisations internes, la seconde partie est centrée sur l'analyse et l'évaluation de performances du système en utilisant les processus de Markov.

Le quatrième chapitre, est consacrée à la modélisation et l'évaluation d'une ligne de production de l'entreprise Bouteille A Gaz (B.A.G). Nous avons choisi la ligne d'emboutissage des embouties supérieurs, comme modèle pour appliquer notre approche de modélisation et d'évaluation basé sur les RdPSGSyI et les PdM.

Le dernier chapitre, traite l'aspect évaluation de performances de la ligne d'emboutissage, il se concentre seulement à l'étude de la disponibilité et de la productivité, en mettant l'accent sur le calcul de quelques types de disponibilité et de productivité.

Pour terminer, nous dressons le bilan des travaux effectués, ainsi que les perspectives des travaux que nous envisageons pour donner suite à ce mémoire.

I.1. Introduction :

Notre intention au cours du premier chapitre est de mettre en vis-à-vis le type de système auquel nous nous intéressons. Nous précisons progressivement les mots clés de la problématique que nous développons (modélisation, analyse, évaluation de performances, perturbation, Réseaux de Pétri) ainsi que nos centres d'intérêt, l'état de l'art en la matière avant d'introduire l'outil de modélisation choisi.

I.2. Nature des systèmes étudiés :

Les caractéristiques et les contenus d'un modèle appelé à décrire le comportement dynamique de systèmes réels varient selon les objectifs de l'étude et le degré de finesse de représentation recherché. La loi d'évolution de l'état d'un système a toujours un caractère continu, mais selon le but de la modélisation et la logique de changement d'état, le modèle développé est de nature différente [DAVID-R.C 93] et [OUNNAR 99] :

- Continus lorsque l'état du système est caractérisé par des paramètres dont la valeur évolue de façon continue dans le temps Figure I.1 (a). La loi d'évolution de ces variables est alors généralement décrite par un système d'équations algébriques ou différentielles.
- Discrets lorsque l'espace d'état est discret (les systèmes évoluent de manière discrète dans le temps), c'est-à-dire qu'il existe une suite strictement croissante de nombres réels positifs $t(i)$, $i=0,1,2,\dots$, nommés instants, telle que durant la quantité $d(i) = t(i+1) - t(i)$ unité (s) de temps, l'état d'un tel système n'évolue pas. L'état d'un système discret n'est modifié que lors de l'occurrence de certains événements (Figure I.1 (b)). Par exemple, la suite croissante des dates de début et de fin d'un ensemble d'opérations réalisées pour usiner une pièce dans un système de production.

Deux modèles sont alors distingués [OUNNAR 99] :

1. Les modèles discrétisés qui permettent l'observation de l'état à des instants réguliers prédéterminés selon une loi parfaitement connue. Ceci correspond à une représentation discrète de systèmes continus,
2. Les modèles à événements discrets sont utilisés lorsque les changements d'état se font lors d'instantes dont la loi d'apparition est apériodique. Un Système à Événements Discrets (SED) évolue conformément à l'arrivée d'événements caractéristiques de changements d'états du système.

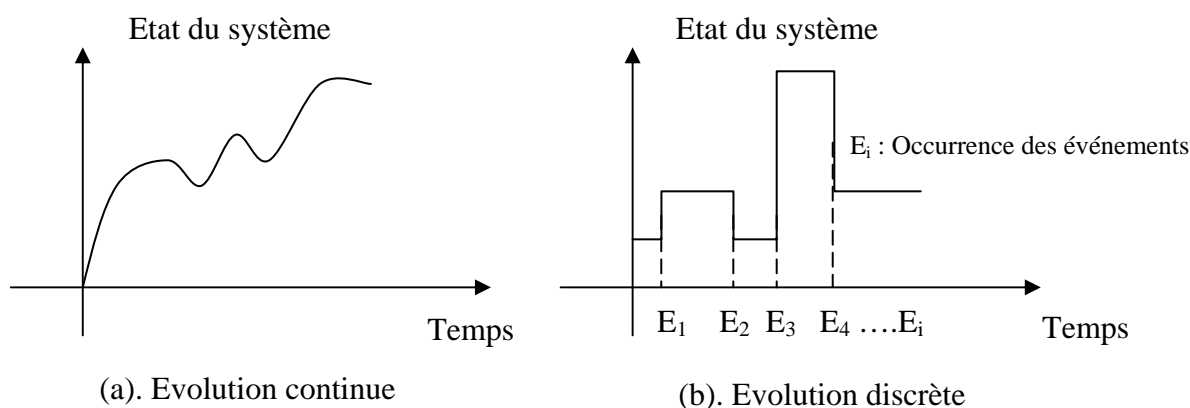


Figure I.1 : Evolution continue ou discrète d'un système.

Notre intérêt porte sur les systèmes à événements discrets, plus particulièrement sur les Systèmes de Production (SdP) à événements discrets (systèmes manufacturiers). « Dans un système manufacturier, les produits fabriqués sont essentiellement composés d'entités discrètes, par exemple pièces fabriquées et/ou assemblées ». A ces systèmes s'opposent les systèmes à production continue qui traitent des flux continus de produits comme les papeteries ou les raffineries, ou des systèmes hybrides pour lesquels les matières premières sont de nature continue (poudre, liquides).

I.3. Formulation du problème :

Le SdP à étudier est un SdP manufacturier composé d'un ensemble de machines séparées par des stocks. Les machines sont caractérisées par des taux² de chargement (ε) et de service (δ) et exécutent une opération à la fois (de capacité unitaire). Chacune des machines puise des produits à usiner dans un stock d'entrée et dépose les produits finis dans un stock de sortie. Les stocks de sortie correspondent aux stocks d'entrée des machines devant réaliser les opérations suivantes sur les produits.

Ainsi, chaque produit doit passer dans un ordre bien défini par différentes machines entre lesquelles elles sont en attente dans les zones de stockages. Une machine ne peut commencer à exécuter une opération que si le produit est présent dans le stock d'entrée et qu'il y a une place disponible pour entreposer le produit une fois usiné dans le stock de sortie.

En fin, nous posons les hypothèses de travail suivantes :

- Le stock d'entrée et le stock de sortie ont des capacités infinies, Cependant les stocks intermédiaires sont supposés initialement de capacité unitaire ;

² Par la suite, on utilise les deux terme suivant : temps moyen et taux moyen. Il faut bien distinguer un temps moyen et un taux moyen.

- Un temps moyen est la moyenne entre plusieurs temps.
- Un taux moyen caractérise une vitesse de variation au cours du temps.

- On suppose que la distribution des temps entre défaillances et la distribution des durées de réparation suit une loi exponentielle de paramètres respectivement taux de panne et taux de réparation constants ;
- Aussi, on suppose que les taux de chargement et de service sont les paramètres de loi de probabilités distribuées exponentiellement.

D'après ces hypothèses on peut dire que :

- On ne s'intéresse qu'à ce qui se passe à l'intérieur du système de production, on ne se préoccupe pas des problèmes liés aux retards d'approvisionnement ou aux commandes non respectées.
- L'utilisation de la loi de probabilité exponentielle, se traduit qu'on se place dans la période de maturité de l'outil de production. C'est-à-dire la notion de vieillissement de certains éléments du système de production est exclue dans notre cas l'étude.

I.4. Démarche et finalités de la modélisation :

I.4.1. Notion de modèle :

L'étude d'un SdP en vue de l'évaluation de ces performances conduit à la notion de modèle et de processus de modélisation Minsky [MINSKY 68] définit un modèle comme suit :

« Pour un observateur A, β est un modèle de B si A peut, à partir de β , apprendre quelque chose d'utile sur le fonctionnement de B » (Figure I.2).

[BENOIT 03] définit aussi un modèle comme suit : « Le modèle est une représentation de la réalité dans un formalisme, c'est une abstraction d'un système réel qui existe déjà ou n'existe pas ». L'utilisation d'un modèle, se fait suivant le schéma cyclique de la Figure I.2. Popper [POPPER 73] suggère trois concepts relatifs à la notion de modèle :

- Un modèle doit avoir un caractère de ressemblance avec le système réel ;
- Un modèle doit constituer une simplification du système réel ;
- Un modèle est une idéalisation du système réel.

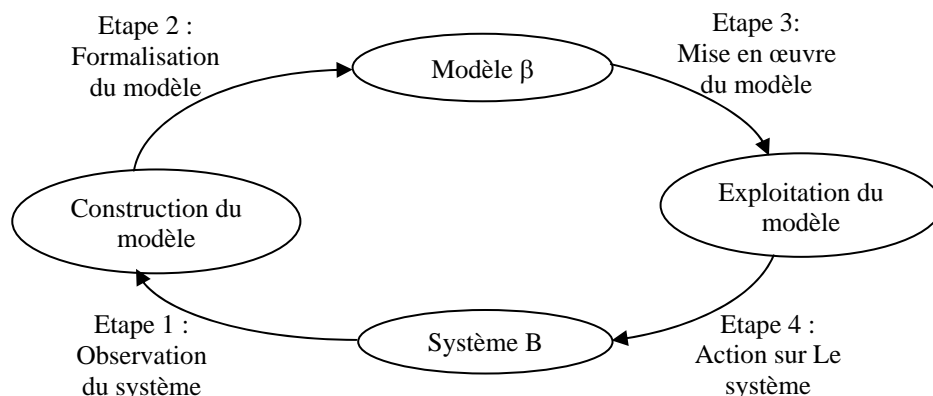


Figure I.2 : Schéma d'utilisation d'un modèle.

En pratique, la construction d'un modèle s'effectue à partir d'observations du système réel à modéliser, mais, elle tient compte également des objectifs que le modèle doit permettre d'atteindre (questions auxquelles on souhaite pouvoir répondre). En effet [DAVID R.C 93] il est ridicule de construire une maquette de formule 1 en plastique au 1/25 ème, si l'on doit tester la résistance d'une formule 1 en cas de choc latéral à 230 Km/h sur un mur. Par contre, si l'on souhaite calculer l'empatement, cette maquette constitue un bon modèle. En conservant le même objectif, une maquette au 1/4 ème se révélerait être un modèle trop coûteux pour la précision requise. Le degré de finesse d'un modèle est donc un critère de qualité économiquement important, entraînant ou non, des surcoûts en temps et en effort de travail.

I.4.2. Modèle de connaissance :

Le modèle de connaissance ou de fonctionnement d'un système est une formalisation dans un langage naturel ou graphique de la structure et du fonctionnement de ce système. Si le système existe, le modèle de connaissance contient l'ensemble des connaissances acquises lors de phases d'observation. Si le système n'existe pas, le modèle de connaissance contient les spécifications de topologie et de fonctionnement des concepteurs.

I.4.3. Modèle d'action :

Le modèle d'action est une traduction du modèle de connaissance dans un :

- Formalisme mathématique : par exemple une méthode analytique qui exploite le Processus de Markov (PdM) comme notre cas d'étude.
- Langage de programmation : Il est directement exploitable sur ordinateur et fournit les performances du système modélisé sans recourir à la mesure directe (par exemple un langage de simulation).

I.4.4. Processus de modélisation :

L'exploitation du modèle de connaissance et du modèle d'action est appelée processus de modélisation. Ce processus est généralement itératif. La Figure I.3 schématise ce processus.

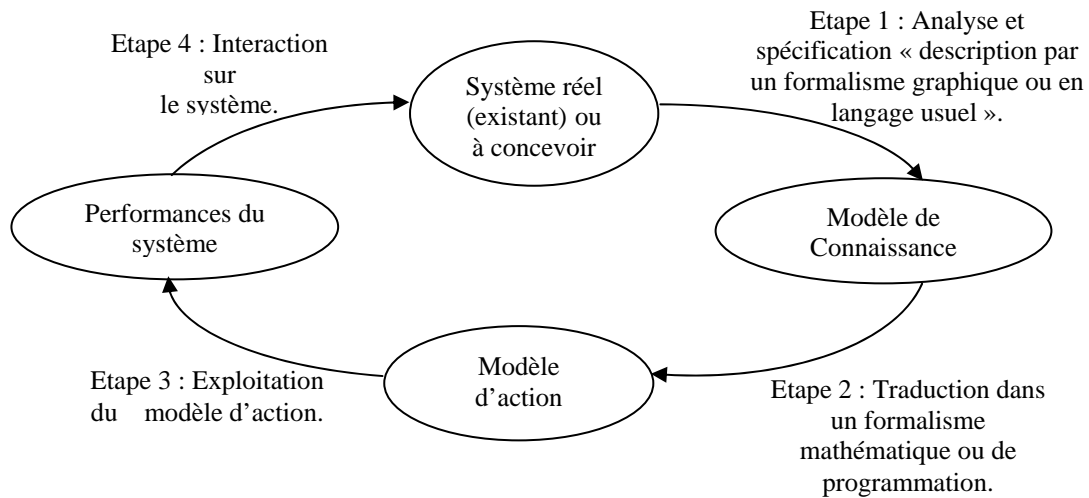


Figure I.3 : Processus de modélisation.

I.5. Analyse qualitative et quantitative :

La phase d'analyse est, une étude des propriétés du modèle pour en déduire des propriétés associées du système initial. Il existe deux types d'analyse [FERHANE 03] : l'analyse qualitative et l'analyse quantitative.

I.5.1. L'analyse qualitative :

A partir de modèles de type événementiel comme les réseaux de petri ou les automates on peut étudier des cas telles que :

- Les possibilités de blocage du modèle, généralement révélatrices d'erreurs de conception dans le système réel ;
- Certaines propriétés d'atteignabilité pour des états donnés du système ;
- La détermination de certains invariants du modèle qui ont généralement des propriétés physiques intéressantes ;
- La bornitude des états du modèle dont l'absence révèle généralement une possibilité d'explosion du nombre de certaines entités dans le système réel ;

I.5.2. L'analyse quantitative ou évaluation des performances³ :

Ce sont des méthodes qui permettent de connaître a priori le comportement d'un système de production pour une configuration donnée. Le comportement est défini par les performances calculées à partir des caractéristiques du système de production.

I.5.2.1. Qu'est ce que une évaluation de performances ?

³ Dans le cadre de notre travail, analyse quantitative signifie évaluation des performances.

Evaluer signifie « déterminer une quantité par le calcul sans recourir à la mesure directe » [DAVID-R.C 93]. L'évaluation est donc toujours effectuée à l'aide d'un modèle.

I.5.2.2. Pourquoi une évaluation de performance ?

- Dans la phase de conception, le problème du dimensionnement (choix du nombre de machines, de la capacité des stocks,...) est un point crucial. En effet, l'atelier a un objectif qui est de réaliser une certaine production.
 - S'il est sous – dimensionné, il ne remplit pas sa fonction.
 - S'il est sur – dimensionné, il y a du gaspillage.

Pour résoudre ce problème de dimensionnement, on passe par la résolution d'un problème plus simple qui est l'évaluation des performances du système pour une configuration donnée. En répétant l'opération sur des configurations différentes du système, on peut espérer trouver celle qui constitue le meilleur compromis entre productivité et investissement.

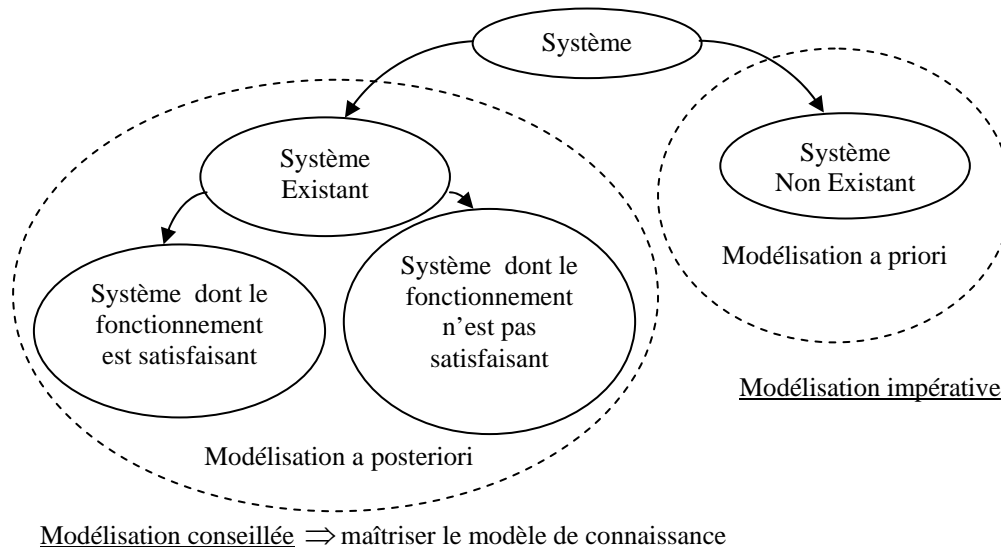
- Dans la phase d'exploitation, il faut en assurer l'exploitation de notre système de production (c'est-à-dire assurer la disponibilité et améliorer les facteurs intervenant dans celle-ci). Là aussi l'évaluation de ses performances est un élément important pour la prise de certaines décisions. Le système aura des performances sensiblement différentes suivant les choix que l'on aura opérés : changement de configuration, introduction d'un nouveau type de pièce, etc...

Dans les deux cas, l'évaluation n'est pas simple et l'intuition est souvent prise en défaut car les phénomènes qui interviennent sont nombreux (une seule machine en panne peut arrêter toute une ligne de production), des blocages dûs à des insuffisances de stocks, etc...

En se basant sur les deux cas précédemment cités on distingue deux approches pour la modélisation des systèmes complexes [GOURGAND 91] :

- La première approche ou *modélisation à priori* est utilisée pour la conception des systèmes qui n'existent pas encore physiquement, afin d'en déterminer les principales caractéristiques.
- La deuxième approche ou *modélisation à posteriori* consiste à améliorer, à adapter ou à modifier les systèmes existants.

La Figure I.4 illustre les différentes approches de modélisation d'un système de production.



Modélisation conseillée \Rightarrow maîtriser le modèle de connaissance

Figure I.4 : Classification des approches possibles pour la modélisation des SdP.

I.5.2.3. L'évaluation des performances d'un SdP : *Panorama des méthodes*

Parmi les outils disponibles, on distingue trois grandes familles [DI MASCOLO 90], [BABES 92], [DAVID-R.C 93], [CAUMOND 01], [FERHANE 03] et [MOUSS 04] :

- Les méthodes de mesure ;
- Les méthodes analytiques exactes ou approchées ;
- La simulation aléatoire.

I.5.2.3. 1. Les méthodes de mesure : *détermination des performances par mesures*

Les méthodes de mesures restent importantes pour le contrôle des systèmes en fonctionnement (réglage, équilibrage de charge, etc...), et la vérification des hypothèses ou l'identification des paramètres qui ont conduit à leur conception.

Si cette technique est une des plus fiables pour déterminer les valeurs des critères de performance (car elle ne dépend pas d'hypothèses simplificatrices faites sur le fonctionnement ou la structure du système), sa mise en œuvre doit être menée avec beaucoup de soin et de rigueur. Il faut :

- S'assurer que le système autorise, de par sa conception, la prise de mesures ;
- Que le système est en fonctionnement nominal ;

La campagne de mesures est souvent longue : l'évaluation dans le temps des SdP est généralement lente (par rapport à l'échelle humaine). Dans ce cas, l'obtention de critères de performance pourra s'avérer d'autant plus longue que le système est

soumis à des perturbations aléatoires et/ou à des fluctuations significatives de sa charge.

I.5.2.3. 2. Les méthodes analytiques exactes ou approchées :

L'avantage des méthodes analytiques réside dans leur faible coût d'exploitation et qu'elles fournissent rapidement des résultats (elles sont environ mille fois plus rapide que la simulation pour traiter un même problème) [DI MASCOLO 90] ; cependant leur hypothèses sont très restrictives, elles nécessitent généralement de simplifier le fonctionnement du système pour leur mise en œuvre.

Leur principe est de modéliser un SdP par un certain nombre d'équations. Les performances du système sont alors calculées en résolvant ce système. Parmi ces méthodes nous pouvons citer : processus de naissance et de mort, forme produit et processus de Markov (PdM)...etc.

I.5.2.3. 3. La simulation aléatoire :

La simulation mesure le comportement d'un modèle du système en simulant son exécution, par exemple par une génération aléatoire d'événements répartis de manière discrète dans le temps. La simulation aléatoire à événements discrets possède quant à elle, un domaine d'application quasi-illimité mais elle reste économiquement très coûteuse (temps humain et machine). La simulation ne repose sur aucune théorie mathématique [DAVID-R.C 93], il convient donc d'être prudent lors de son utilisation (qualité des générateurs de nombres pseudo-aléatoires, validité des noyaux de synchronisation,...) au risque d'obtenir des résultats absurdes.

Cette technique permet donc de simuler le fonctionnement de systèmes existants ou non et ceci pour une charge donnée (études de fonctionnements transitoires, tests de différentes stratégies,...). La simulation à événement discrets (le système évolue de manière discrète dans le temps) est opposée à la simulation continue (le système change continûment d'état).

Pour résumer, on peut dire que les deux derniers outils (simulation et méthodes analytiques) ne sont pas concurrents, mais complémentaires [DI MASCOLO 90]. Ainsi, des études récentes ont porté sur l'évaluation de performances des systèmes de production. Et après une étude bibliographique, il est apparu que l'utilisation de l'un ou de l'autre des deux méthodes est très répondeus. C'est le cas par exemple des [DI MASCOLO 90], [DAVID-R.C 93], [DJE BABARA 93], [DANIEL 94-1], [DANIEL 94-2], [DANIEL 95-1], [DANIEL 95-2], [SIMEU-ABAZI 96], [SIMEU-ABAZI 97], [SASSINE 96-1], [SASSINE 96-2], [SASSINE 97-1], [SASSINE 97-4], [SASSINE 98], [SIMEU-ABAZI 98], [LIMAM 99], [CHABOT 01], [ABBAS-TURKI 01] et [DJE BABARA 01].

I.5.2.4. Critères d'évaluation⁴ d'un SdP :

⁴ Par la suite, lorsque nous parlerons d'évaluation de performances sans préciser davantage, cela signifiera que nous incluons à notre discours les deux critères évoqués ci-dessus. Si non, nous préciserons quel critères et indices il s'agit.

Les SdP devenant de plus en plus complexes suite à de nouveaux impératifs de l'appareil de production, telles que la flexibilité, la réactivité, la productivité et la robustesse. La conception et l'exploitation de ces systèmes

nécessite des techniques d'évaluation se basant sur deux aspects principaux : la performance et la Sûreté de Fonctionnement (SdF).

I.5.2.4. 1. La performance :

Dans le domaine industriel la performance peut être définie comme étant un attribut mesurable et observable par lequel se définit la qualité d'un produit ou la rapidité d'un service [SASSINE 98].

Elle est liée à tout le cycle de vie du système de production,

- A sa productivité ;
- Aux stocks et en-cours ;
- Aux coûts de production ;
- Aux délais de livraison ;
- A la qualité du produits ;
- Etc...

La mesure quantitative de la performance économique reste très souvent l'élément principal qui guide l'évaluation de système de production. D'autre part, la rentabilité ou le rendement d'un processus de fabrication peut s'analyser en terme de formation de résultat et en terme de ratios caractéristiques.

I.5.2.4. 2. La sûreté de fonctionnement :

La SdF permet d'établir le degré de fonctionnement que l'on peut attribuer à un système dans le cadre de la mission qu'il doit assurer [SASSINE 98]. Elle est liée à tout le cycle de vie du système de production,

- A sa disponibilité ;
- A la fiabilité ;
- A la maintenabilité de ces machines ;
- Etc...

Elle consiste à connaître, évaluer, prévoir, mesurer et maîtriser les défaillances des machines [ZWINGELSTAIN 95]. Elle se caractérise par l'étude structurelle (statique) et dynamique des systèmes du point de vue prévisionnel mais aussi opérationnel et expérimental en tenant compte des aspects probabilités et conséquences des défaillances.

Il est important ici de noter qu'une évaluation peut se faire par l'intermédiaire de deux aspects très étroitement liés. Ainsi, l'un des points important de la sûreté de fonctionnement des systèmes de production est la disponibilité de ces machines ou ces lignes de production. L'objet de ce travail est d'avoir une idée sur les performances d'un système de production en termes de disponibilité et de productivité en utilisant les théories des SED et en particulier les réseaux de petri.

I.6. Perturbations :

On peut définir une perturbation comme étant : « toute information qui contredit une prévision faite aussi bien sur le fonctionnement du système opérant que sur l'évaluation des objectifs et la prévision de l'évaluation de l'environnement » [OUNNAR 99].

I.6.1. L'origine des perturbations :

Les perturbations peuvent être d'origine :

- Humaines (augmentation de l'absentéisme, risques de grèves, motivation, capacité de travail, etc.) ;
- Dues aux équipements (problème logiciel, panne des outils informatiques, arrêt des machines, variation de la productivité due à l'utilisation d'un procédé à rendement aléatoire, problème de transport, etc) ;
- Dues à la matière (manque, mauvaise qualité, etc) ;
- Et aux informations (retard et/ou défaut de qualité des ordres reçus, etc).

I.6.2. Les types de perturbations :

Il existe deux types de perturbations :

I.6.2.1. Les perturbations externes :

Tout arrêt d'une opération résultant d'une intervention externe (arrivée d'une commande urgente, annulation d'une commande, modification de l'urgence d'une opération).

I.6.2.2. Perturbations internes :

Tout arrêt d'une opération dû à un dysfonctionnement interne. Les perturbations internes rassemblent tous les problèmes liés au processus de production, elles peuvent être organisationnelles mais aussi concerner directement les moyens de production (dysfonctionnement d'une opération, panne ou occupation d'une ressource...).

Notre intérêt porte sur les perturbations internes au système de production qui constituent une menace pour l'atteinte des objectifs. Parmi ces perturbations, nous prendrons en compte, dans ce travail, les perturbations de type panne-machine.

L'indisponibilité temporaire de certaines ressources provoque le retard de certaines opérations et, par voie de conséquence, dégrade les performances du système.

I.7. L'identification des événements :

A chaque instant, l'état du système de production est constitué des opérations à exécuter (un produit peut être à l'état disponible, en cours, bloqué ...), et des ressources qui doivent les exécuter (une ressource peut être libre, active, en panne).

Les événements sont donc de deux types :

- Les événements attendus, dont on sait qu'ils doivent normalement se produire dès que le système de production est dans un certain état ;
- Les événements non attendus qui correspondent à une perturbation associée à une ressource ou à une opération.

I.7.1. Événements attendus :

Les événements attendus qui déclenchent un processus de prise de décision sont essentiellement les fins d'exécution d'opération, les fins de panne et les fins de blocage d'opération :

- La fin d'exécution d'une opération libère une ou plusieurs ressources et rend disponible l'opération suivante de la gamme.
- Compte tenu de l'état du système de production et des objectifs de production et lorsqu'une ressource est libérée, il faut décider à quelle opération elle doit être affectée.
- Lorsqu'une opération devient disponible, il faut décider avec quelle(s) ressource(s) elle peut être exécutée.
- Lors d'une fin de panne, une ressource peut de nouveau exécuter une opération. Deux cas se présentent, soit :
 - Cette ressource reprend l'exécution de l'opération arrêtée si celle-ci a attendu la fin de panne ;
 - Si aucune opération n'est affectée, une décision d'affectation est à prendre.
- Deux situations sont possibles lors d'une fin de blocage d'opération, soit :
 - L'opération est restée couplée à une ou plusieurs ressources, et dans ce cas l'exécution reprend ;
 - L'opération a été découplée d'une ressource, elle doit donc être réaffectée.

Faisons remarquer que d'autres événements attendus peuvent intervenir dans un système de production, par exemple les fins de transport.

I.7.2. Événements non attendus :

Un système de production est un milieu extrêmement perturbé. Les perturbations ne constituent plus l'exception mais la règle. Ils sont liés aux ressources ou aux opérations.

Plusieurs études [GRABOT 94] et [OUNNAR 99] montrent que les perturbations affectant le plus le fonctionnement des ateliers de fabrication de pièces élémentaires et d'assemblage simple sont les perturbations de type : « rebuts » ; « non-conformité » ; « défaillance machine ».

- Les perturbations de type « rebuts » correspondent à la fabrication de pièces qui ne répondent pas aux spécifications et qui ne peuvent être retouchées pour les rendre conformes.
- Les perturbations de type « non-conformité » correspondent à des pièces qui ne sont pas exactement conformes à la spécification mais qui présentent des anomalies que l'on peut envisager de corriger.
- Les perturbations de type « défaillance machine » se produisent lorsqu'une machine est bloquée en attendant une réparation.

En résumé, nous nous intéressons aux événements non attendus correspondant à une perturbation associée à une ressource (panne technique de la machine). Les perturbations associées à une opération rebuts et/ ou non-conformité, telles qu'elles sont définis ci-dessus, ne sont pas étudiées dans notre travail.

I.8. L'évaluation de performances et l'outil RdP :

La chaîne de production de BAG, qui est un système de production manufacturiers, peut être considérée comme un SED [voir § I.2]. Afin d'effectuer la modélisation et l'évaluation de ce système, des études ont été effectuées au sein de Laboratoire d'Automatique et Productique dans l'équipe GIL et 3S⁵. Ces études ont permis de déterminer que le modèle RdP étant le mieux adapté pour modéliser le SdP que nous intéressent.

I.8.1. Historique :

C'est en 1962 dans le cadre de l'étude de la communication automatisée que Carl Adam Petri a introduit pour la première fois les RdP [PETRI 62]. Ils permettent la modélisation pour l'analyse, et la simulation des processus.

Les RdP n'ont trouvé leur place dans l'étude des SdP que beaucoup plus tard. Et ce n'est que depuis 1983 que les RdP sont utilisés dans ce domaine [DAVID 89], [PROTH 95] et [MONTEIRO 01].

Les RdP sont bien connus comme étant des modèles puissants pour l'expression de phénomènes de concurrence, de causalité et de non-déterminisme. Ils permettent d'associer rigueur mathématique avec expression graphique.

I.8.2. Notions de Base et définitions :

- **Définition mathématique :**

Un RdP $R = (P, T, L)$ est un triplet, défini sur deux ensembles finis et distincts de sommets.

- Les places, $P / P = \{P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n\}$ avec $n = |P|$ qui représente les états du système ;

⁵ Surveillance Supervision Sûreté.

- Les transitions, $T/T = \{T_1, T_2, \dots, T_j, \dots, T_m\}$ avec $m=|T|$ qui représente l'ensemble des événements dont l'apparition modifie l'état du système ;
- Les liens, ou flèches, L satisfont donc $L \subset (P \times T) \cup (T \times P)$ ⁶
 - Pré : $P \times T \mapsto \mathbb{N}$: application d'incidence avant ;
 - Post : $P \times T \mapsto \mathbb{N}$: application d'incidence arrière ;

- **Représentation graphique :**

Un RdP est un graphe orienté biparti comportant deux types de nœuds, illustrant respectivement les places et les transitions.

Traditionnellement, les places sont illustrées par des cercles, et les transitions par des rectangles ou traits (Figure I.5). On suppose qu'il n'y a pas de place ni de transition isolée, c'est-à-dire non liée à aucun autre sommet du RdP. En général, les places représentent des ressources ou des conditions logiques, et les transitions des actions ou des événements du système.

Pour toute transition $T_j \in T$, le Pré (Preset) T_j est l'ensemble de toutes les places connectées à T_j en amont, c'est-à-dire ${}^{\circ}T_j = \{P_i \in P : (P_i, T_j) \in L\}$. Les places du Pré ${}^{\circ}T_j$ (aussi appelées les places d'entrée pour T_j) représentent typiquement les pré-conditions, ou ressources nécessaires, ou bien les données d'entrée pour l'événement de T_j .

Le Post (Postset) T_j° est l'ensemble de place connectées à la transition T_j en aval, c'est-à-dire $T_j^{\circ} = \{P_i \in P : (P_i, T_j) \in L\}$. Les places du post T_j° (appelées aussi les places de sortie pour T_j) expriment en général les post conditions, les ressources créées, ou bien des données de sortie correspondant à l'événement de T_j .

Il est possible de représenter le Pré et Post par des matrices $n \times m$ où Pré (P_i, T_j) (respectivement Post (P_i, T_j)) est un élément de la matrice Pré (respectivement Post).

On appelle matrice d'incidence avant la matrice :

$$W^- = [w_{i,j}^-], \text{ où } w_{i,j}^- = \text{Pré}(P_i, T_j).$$

On appelle matrice d'incidence arrière la matrice :

$$W^+ = [w_{i,j}^+], \text{ où } w_{i,j}^+ = \text{Post}(P_i, T_j).$$

On appelle matrice d'incidence la matrice $W = W^+ - W^- = [w_{i,j}]$.

⁶ En général, un poids est entier est associé avec chaque flèche. Ce poids est unitaire ou nul pour un RdP ordinaire, il peut être un entier positif pour les RdP généralisés.

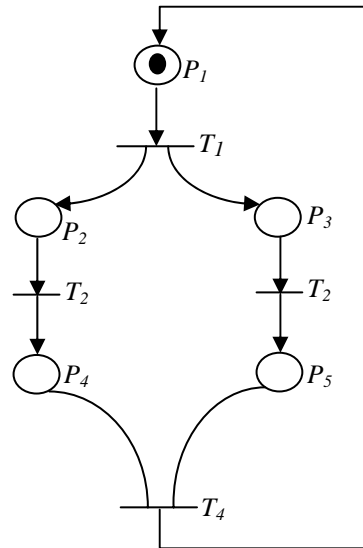


Figure I.5 : Exemple d'un RdP.

Le marquage d'un RdP est une fonction $M : P \mapsto \mathbb{N}$, où \mathbb{N} est l'ensemble des entiers.

Graphiquement, il est présenté par une distribution de jetons dans les places de RdP.

Un marquage initial M_0 peut être associé au RdP $R = (P, T, L)$, on parle alors de RdP marqué, et on le note par (R, M_0) ou bien par (P, T, L, M_0) .

Le marquage représente l'état (global) du système. La dynamique du RdP est exprimée par des franchissements (ou des tirs) de transitions qui changent le marquage.

Pour qu'une transition soit franchie, elle doit être autorisée (ou franchissable) dans le marquage courant : toutes les places de son pré doivent contenir ou moins un jeton.

Une transition autorisée peut être franchie, ou tirée, mais n'y est pas forcée⁷.

On définit le franchissement d'une transition (ou tir) comme le retrait pondéré⁸ des marques des places en amont et l'ajout pondéré des places en aval. Une transition T_j est sensibilisée par un marquage M , si et seulement si la Pré-condition de franchissement suivante est satisfaite :

$$\forall P_i \in P : M(P_i) \geq \text{Pré}(P_i, T_j).$$

⁷ La notion de forçage sera utilisée dans les chapitres suivants (3et4).

⁸ Pour les RdP généralisés.

Le graphe des marquages d'un RdP $R = (P, T, L, M_0)$ est le graphe orienté (K, G) , où l'ensemble des sommets est l'ensemble des marquages accessibles $K = {}^*M_0$, et l'ensemble des flèches $G \subset K \times T \times K$ est défini par $(M, T_j, M') \in G \Leftrightarrow M[T_j \rangle M'$.

Le graphe des marquages représente l'espace d'états du RdP, où les changements d'état correspondent au franchissement de transitions et peuvent être considérés comme des événements d'un SED. Autrement dit, le graphe de marquage est un automate associé au RdP.

Un arbre de couverture est un graphe particulier dans lequel il n'y a pas de boucle ni de circuit.

I.8.3. Les principales propriétés des RdP :

I.8.3.1. Les propriétés structurelles :

Les propriétés dépendent uniquement de la structure du réseau. Il s'agit ici de faire ressortir les propriétés statiques du système étudié. Les différentes propriétés sont indépendantes du marquage. Ainsi, il est possible de faire apparaître, entre autres, les caractéristiques de synchronisation (a) ou de précedence (b) (Figure I.6).



Figure I.6 : Synchronisation et précedence dans un RdP.

Les autres propriétés structurelles seront présentées dans l'annexe I.1.

I.8.3.2. Les propriétés comportementales :

Ces propriétés dépendent à la fois du marquage initial M_0 et de la structure du réseau. Il s'agit ici de faire ressortir les propriétés dynamiques du système étudié. En se ramenant à un système de production, l'étude des propriétés comportementales permet de mettre en avant l'influence de la réparation des ressources (matière première, machine, opérateur) sur son évolution.

Les différentes propriétés comportementales seront présentées dans l'annexe I.1.

I.8.4. Les différentes extensions des RdP :

Nous venons de présenter les RdP initialement développés par Carl Adam Petri que l'on a qualifié d'ordinaires. De nombreuses extensions ont été apportées depuis pour permettre une représentation de certains comportements ou structures. Nous

présentons ici quelques unes de ces extensions. Ces dernières peuvent aussi se combiner pour former une nouvelle classe de RdP.

1) *Le RdP à capacité limitée :*

Dans un RdP ordinaires, la capacité des places n'est pas limitée. Ici, on affecte une capacité, défini par un nombre entier positif associé aux places. Ainsi, le franchissement d'une transition est conditionné par la capacité des places en aval. Cette limitation peut illustrer la capacité d'un stock par exemple.

2) *Le RdP généralisé :*

On affecte un poids, (nombre entier positif associé aux arcs). Ce poids indique le nombre de jetons consommés ou créés lors du franchissement d'une transition. On retrouve ces poids dans la matrice d'incidence. Il s'agit d'une simplification par agrégation d'un RdP ordinaire.

La pondération des arcs permet, entre autres, de mettre en avant le processus de consommation de la matière.

3) *Les arcs inhibiteurs :*

L'arc inhibiteur permet de simplifier la représentation graphique d'un RdP. Il s'agit d'un arc orienté qui part d'une place P_i et arrive à une transition T_j , et telle que la transition T_j est valide seulement si la place P_i est vide.

L'utilisation de cet arc permet de prendre en compte plus aisément des propriétés d'exclusions mutuelles.

4) *Le RdP coloré :*

Dans un RdP coloré, les marques peuvent être différenciées par des couleurs. Si le nombre de couleurs est fini, alors on peut se ramener à un RdP classique.

Le RdP coloré est un quintuplé $R = (P, T, \text{Pré}, \text{Post}, C)$

Où

$C = \{c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_k\}$ = Ensemble des couleurs avec $C_i = \langle C_i, C_i, C_i, \dots, C_i \rangle$.

La coloration des jetons permet de différencier les produits circulant dans un SdP. La couleur peut être soit un attribut unique, soit un n -uplet d'attributs formant ainsi un agrégat.

5) *Le RdP continu :*

Dans un RdP continu [DAVID 92] le marquage des places n'est plus un nombre entier mais un nombre réel positif. Ce type de RdP permet d'analyser des performances en terme de débit. Il est fortement utile lorsque le nombre de marquages dans un RdP classique devient trop important ou pour représenter des processus continus.

Les SdP de type flux (pétrochimie, sidérurgie,...) ou de grand débit (production de masse : visserie,...) demandent une approche par les RdP continus.

6) *Le RdP hybride :*

Ces RdP sont utilisés pour représenter des SdP ayant à la fois des caractéristiques discrètes et continues. Une usine de soda par exemple possède cette double approche par la matière première (fluide continu) et son conditionnement (bouteilles, canettes).

7) Les RdP non autonomes :

- **Le RdP à prédicats :**

Le prédicat permet d'affecter des actions de transformation sur les jetons lors du franchissement d'une transition.

Utilisé avec la coloration, le RdP à prédicat permet de mettre en évidence le processus de production et de transformation de la matière première en produit fini.

- **Le RdP synchronisé :**

On associe en plus des conditions de franchissement d'un RdP ordinaire (présence de marques dans les places en amont) un événement de franchissement. Ces événements sont externes au système du RdP.

- **Le RdP T-temporisé :**

Dans les RdP T-temporisés, une durée de franchissement est affectée aux transitions. A chaque transition T_j est associée une temporisation d_j constante.

Cette particularité permet de décrire des systèmes dont le fonctionnement est dépendant du temps. Ces RdP sont utiles pour l'évaluation de performance.

- **Le RdP P-temporisé :**

L'aspect temporel est ici affecté aux places. Aussi, à chaque place P_i est associé une temporisation d_i constante.

- **Le RdP P-interprété :**

Un RdP interprété est un RdP P-temporisé et synchronisé qui comporte une partie opérative. Ainsi à chaque transition T_j est associé un événement E_j et une condition C_j de franchissement. A chaque place P_i , on associe une temporisation d_i et une opération O_i .

- **Le RdP stochastique :**

Dans un RdPS, la durée affectée n'est plus déterministe mais aléatoire. On peut grâce à cette particularité prendre en compte des événements probabilistes comme la panne d'une machine. On utilise généralement une temporisation suivant une loi exponentielle.

- **Le RdP objet :**

L'introduction de l'approche orientée objet dans les RdP [SIBERTIN-BLANC 89], permet de prendre en compte une grande variété d'informations tout en évitant une explosion combinatoire.

On peut faire ressortir deux grandes tendances, les objets encapsulés dans des RdP⁹ et les RdP encapsulés dans les objets¹⁰ [OUNNAR 99]. Ces RdP appartiennent à la catégorie des « RdP de haut niveau ».

⁹ Object inside petri nets.

Lorsque les objets sont englobés dans le réseau, les jetons sont les objets qui évoluent et les transitions font appel aux méthodes.

Lorsque les RdP sont compris dans un objet, c'est le comportement de celui-ci qui est modélisé par un RdP. Ainsi l'objet illustre les caractéristiques statiques et le RdP le comportement dynamique.

- **Les hypernets :**

Les hypernets [YIM 95] sont des « RdP de haut niveau » auxquels des contraintes sont ajoutées au niveau des places, des transitions et des marques. Ils ont été utilisés pour la modélisation et la simulation de la filière textile [BOSSU 97].

I.8.5. Les RdP : un outil de modélisation des SdP

En se limitant au champ d'application concernant les SdP manufacturiers, deux principales techniques sont bien développées dans la littérature depuis plusieurs années et dédiées à l'évolution des performances [SASSINE 98] et [SIMEU-ABAZI 98]. Il s'agit :

- Des Réseaux de Files d'Attente (RFA).
- Des Réseaux de Petri Stochastiques (RdPS).

Ces deux approches sont associées à des processus de Markov, qui constituent la base de la méthode MEE¹¹ (Méthodes d'Espace et d'Etat) [MOUSS 04].

I.8.5.1. Processus de Markov (PdM) :

L'analyse d'un PdM [RACOCEANU 97], [SASSINE 98] et [SIMEU-ABAZI 98]. S'effectue en trois phases :

Phase 1 : recensement et classification de tous les états du système en états de fonctionnement ou de panne ;

Phase 2 : recensement de toutes les transitions possibles entre ces états et identification de leurs causes (défaillance ou réparation de composants) ;

Phase 3 : détermination des probabilités d'occurrences des différentes états sur un intervalle de temps donné et calcul des indicateurs de performances, à partir des équations d'états.

L'analyse quantitative fait appel à différents algorithmes de calcul selon le type de système étudié ; cette analyse est difficile à appliquer lorsque les taux de transitions ne sont pas constants. D'où notre choix pour des taux constants en ce qui concerne les paramètres (machines) des SdP [§ I.3].

¹⁰ Petri nets inside object.

¹¹ Nous désignons par PdM, la méthode MEE. Cela signifie que les termes MEE et PdM sont équivalents et correspondent à la même méthode.

I.8.5.2. Réseaux de Files d'Attente (RFA) :

La motivation première de ces modèles, était la modélisation et l'évaluation des performances des systèmes informatiques [DI MASCOLO 90]. Ils ont été ensuite adaptés pour les SdP [OUNNAR 99]. Dans ces modèles, les machines et les convoyeurs représentent les guichets et où les pièces sont les clients.

Les méthodes analytiques de résolution sont basées sur la théorie des PdM. La résolution des PdM obtenus à partir des modèles RFA permet d'évaluer les performances d'un système de production (productivité, disponibilité, etc....)

Afin de remédier au problème de l'explosion combinatoire des états, des méthodes d'approximation et d'agrégation, basées sur des transformations de matrices, ont été développées [MARIE 79], [DALLERY 92] et [BAYNAT 93]. D'autre part, la modélisation de la synchronisation ne repose pas sur une approche unifiée du comportement qualitatif sous-jacent. Cette lacune se traduit dans la classification de Kendall (A/B/C/K) [KOBAYASHI 78] où n'apparaissent, en tant que caractéristiques de synchronisation, que les notions de nombre de clients potentiels, de capacité de la file d'attente et de la discipline de service.

Toutefois, la description d'un RFA sans synchronisation est très simple et il existe de puissants résultats analytiques pour la résoudre.

I.8.5.3. Réseaux de Petri Stochastiques (RdPS) :

Les RdPS semblent les plus adaptés à notre étude puisque cet outil permet aussi d'obtenir de façon autorisée le graphe de Markov d'un système complexe, offrent ainsi une solution systématique au problème de la construction de l'espace d'état discret d'un processus aléatoire.

L'association d'un outil de modélisation, les RdPS et d'un outil de calcul, les PdM, forme un moyen puissant d'analyse et d'évaluation des systèmes manufacturiers.

La complexité croissante des SdP est telle que l'utilisation classique des RdPS présente certaines limites. En effet, les PdM obtenus pour ces systèmes présentent un nombre d'états importants qui rend l'analyse très longue, voir impossibles !

[DANIEL 95-1], [SASSINE 98] et [SIMEU-ABAZI 98]. Pour contourner ce problème, des nouvelles extensions des RdPS ont été proposées.

I.9. Conclusion :

Dans ce chapitre, on a effectuées un état de l'art sur la modélisation et l'évaluation de performances et l'outil RdPS. Nous avons expliqué les différents mots clés à savoir la modélisation, l'analyse, l'évaluation de performances, perturbation, RdP, nous avons justifié le choix de ce dernier pour la modélisation de notre SdP.

Le chapitre suivant est consacré à la présentation d'une part de l'extention des RdPS retenu comme outil de modélisation et d'autre part à l'outil PdM comme outil de calcul et d'analyse.

II.1. Introduction :

Après un court rappel sur :

- Les RdPS d'une manière général et les Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés et Synchronisés (RdPS²G) d'une manière particulière l'outil de notre modélisation ;
- Le principe de résolution des PdM ;

Enfin, nous explicitons la liaison entre RdPS²G et PdM.

II.2. Les réseaux de petri stochastiques :

L'introduction explicite du temps dans les réseaux de petri est nécessaire pour modéliser des phénomènes où le temps joue un rôle majeur (systèmes à temps réel industriel à titre d'exemple), et/ou si l'on veut obtenir des mesures de performance du système étudié. On effectue ainsi une analyse quantitative du système, complément de l'analyse qualitative. Notre travail s'inscrivant dans le cadre de l'évaluation de performances des systèmes fondée sur des modèles probabilistes, nous n'aborderons ici que cette famille de modèles.

II.2.1. Définitions :

Les RdPS ont été définis pour répondre à certains problèmes d'évaluation quantitative de systèmes informatiques industriels. Il s'agit par exemple des calculs de SdF ou de performances de protocoles de communication qui doivent faire l'objet d'une évaluation prévisionnelle.

Les RdPS se définissent formellement comme étant un quintuplet (P, T, A, M_0, F) où (P, T, A, M_0) est un réseau de petri et F (fonction de franchissement) : $R[M_0]^{12} \times T \rightarrow R$. Pour chaque marquage M , F associe à chaque transition $T_j \in T$ une variable aléatoire continue, le temps de franchissement. Ces dernières sont indépendamment distribuées.

Grâce aux RdPS, il est possible de réunir en un même modèle des RdP et des modèles probabilistes. Par ailleurs les RdPS offrent l'avantage (par rapport aux chaînes de Markov) de permettre à des personnes non familiarisées avec les phénomènes stochastiques d'étudier le comportement du système auquel ils s'intéressent puisque ces calculs leurs sont transparents, néanmoins, le problème de dépassement de capacité demeure posé.

II.2.2. Règles d'évolution des RdPS :

Avec les hypothèses¹³ données dans [DANIEL 95-1], l'évolution d'un RdPS peut être résumée par l'algorithme suivant :

¹² $R[M_0]$: graphe des marquages du RdP.

¹³ Une marque n'est jamais réservée par une transition et qu'on adopte un mode de fonctionnement au plus tôt, traduit par l'hypothèse du modèle concurrentiel. En effet, on suppose que pour un marquage donné les phénomènes actifs agissent de manière indépendante. Les processus en cours se déroulent en parallélisme réel. Dans ce cadre il est bien naturel de considérer que c'est la première opération arrivant à son terme qui va provoquer le changement d'état du système.

II.2.2.1. Algorithme d'interprétation des RdPS (ALIN.RdPS) :

Étape 1 : Initialisation.

Étape 2 : Soit $X = \{T_1, T_2, \dots, T_j, \dots, T_r\}$ l'ensemble des transitions validées pour le marquage courant.

Étape 3 : Pour chaque transition $T_j \in X$, on effectue un tirage aléatoire de sa durée de franchissement d_j . On calcule donc $\{d_1, d_2, \dots, d_j, \dots, d_r\}$ en tenant compte des transitions qui sont n -validées.

Étape 4 : si t est l'instant présent et si $d_j = \min \{d_1, d_2, \dots, d_j, \dots, d_r\}$ alors la prochaine évolution du RdPS se fera à l'instant $t = t + d_j$ par le franchissement de T_j .

Étape 5 : On franchit T_j à l'instant t et on retourne à l'étape 2.

Le RdPS de la Figure II.1 (a) est accompagné du chronogramme de l'évolution de son marquage (Figure II.1 (b)).

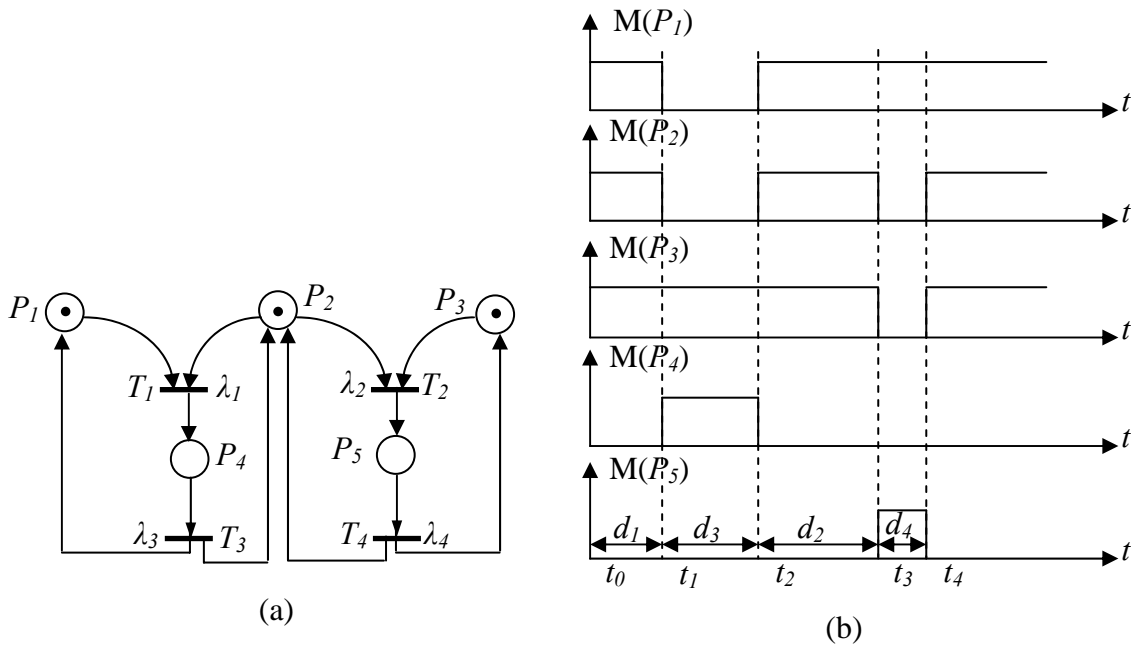


Figure II.1 : (a) Exemple de RdPS, (b) Chronogramme de l'évolution de son marquage.

Or, nous faisons l'hypothèse de non-simultanéité, c'est-à-dire que deux événements indépendants ne peuvent se produire simultanément. On voit donc que le fait de modéliser les durées de franchissement par des variables aléatoires indépendantes lève tous les problèmes de conflit.

II.2.3. Etat de l'art :

On a dit précédemment [§ II.2] Qu'une analyse quantitative du système, est un travail complémentaire à l'analyse qualitative.

L'ajout d'une dimension quantitative au modèle RdP doit répondre à deux objectifs contradictoires [MOREAUX 96] :

- enrichir suffisamment le modèle pour avoir des résultats quantitatifs précis ;

- ne pas modifier trop fortement la sémantique des réseaux de petri pour conserver le plus d'outils d'analyse qualitative possible (invariants, etc....).

Témoins de ce problème, de nombreux modèles de RdPS ont été proposés par la communauté scientifique. Une récapitulation des principaux types existant dans la littérature [LIMAM 98] permet de distinguer :

II.2.3.1. Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG) :

L'ensemble des transitions T est subdivisé en T_I (transitions Immédiates) et T_E (transitions Exponentielles). A chaque transition $T_j \in T_E$ ($j \in \mathbb{N}$) est rattaché à un temps de franchissement. Le temps est distribué exponentiellement avec une vitesse $F(M, T_j)$ dépendant du marquage $M \in R[M_0]$ considéré. Les transitions immédiates sont prioritaires sur les transitions exponentielles.

Comme les RdPSG possèdent deux types de transitions ils génèrent deux types de marquages :

- Les marquages instables pour lesquels au moins une transition immédiate est validée.
- Les marquages stables ne validant que des transitions temporisées.

Les règles d'évolution des RdPSG sont les suivantes :

1. **Les marquages stables** : On applique l'algorithme d'évolution des RdPS. Comme pour les RdPS classiques, le temps de séjour dans chaque marquage M est une variable aléatoire distribuée exponentiellement, de moyenne :

$$\frac{1}{\sum_{j \in X} \lambda_j} \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} X = \{ \text{transitions que valide } M \} \\ \lambda_j = \{ \text{taux de la transition } T_j \in X \} \end{array} \right\}$$

et la probabilité pour que la transition T_i soit franchie est : $\frac{\lambda_i}{\sum_{j \in X} \lambda_j}$

2. **Les marquages instables** : Deux cas de figures se présentent selon qu'il y a ou non plusieurs transitions immédiates validées.

S'il y en a qu'une, il n'y a pas de conflit et la transition est franchie immédiatement en un temps nul.

S'il y en a plusieurs, il y a un conflit et on peut résoudre le problème en accordant un niveau de priorité ou une probabilité à chacune d'entre elles.

Ces probabilités associées à chacune des transitions sont appelées *distributions de commutation*. Pour chaque distribution de commutation la

somme des probabilités de franchissement des transitions en conflit est égale à 1.

II.2.3.2. Réseaux de Petri Déterministes et Stochastiques (RdPDS) :

Les RdPDS ont été proposés comme un outil de modélisation qui combine des délais aléatoires et des délais constants. Dans un RdPDS, la transition peut être probabiliste (associée à un délai aléatoire), déterministe (associée à un délai constant) ou instantanée (comme dans les RdPSG).

Dans ce réseau les places et transitions¹⁴ sont représentées de la façon suivante [CIARDO 93] et [SASSINE 98].

- Une place : un cercle comportant le nombre de jetons correspondant ;
- Si la durée de franchissement de la transition est nulle ($d_j = 0$), la transition est dite immédiate et représentée par un trait ;
- Si cette durée est « fixe », la transition est dite déterministe et représentée par un rectangle vide ;
- Enfin si cette durée est aléatoire, la transition est dite stochastique et représentée par un rectangle plein.

II.2.3.3. Réseaux de Petri Stochastiques Etendus (RdPSE) :

Dans les différents types de réseaux présentés ci-dessus, la fonction de distribution associée aux temporisations des transitions a toujours été considérée comme exponentielle. Les RdPSE autorisent le franchissement de transitions avec des fonctions de distributions arbitraires.

II.2.3.4. Réseaux de Petri Stochastiques à Haut Niveau (RdPSHN) :

C-lin et D-C Marinescu [LIN 88], proposent une nouvelle classe RdPSHN dans le but de produire des modèles plus simples, plus intuitifs et de réduire le nombre d'états. Ils s'appliquent surtout aux multiprocesseurs.

II.2.3.5. Extension des réseaux réguliers :

C. Dutheil et S.Haddad [DUTHEILLET 90], proposent une extension des réseaux réguliers aux modèles stochastiques. C'est un réseau de Petri coloré avec des fonctions de franchissement particulières.

II.2.3.6. Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés et Synchronisés (RdPS²G) :

O.Daniel [DANIEL 95-1] et [DANIEL 95-2], présente une extension RdPSG, les Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés et Synchronisés (RdPS²G).

¹⁴ On associe une temporisation aléatoire d_j à chaque transition T_j , cette temporisation représente la durée de franchissement de la transition.

Nous utiliserons dans le présent travail le modèle RdPS²G largement répandu dans la communauté scientifique et qui présente un certain « équilibrage » entre les deux pôles mentionnés précédemment [§ II.2.4] .

II.2.3.6.1. Généralités sur les RdPS²G :

On définit un RdPS²G (R) par un septuplé $\langle P, T, [W], M_0, temp, !Sy, ?Sy \rangle$ tel que :

$P = \{P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n\}$ est un ensemble fini et non vide de places de R ;

$T = \{T_1, T_2, \dots, T_j, \dots, T_m\}$ est un ensemble fini et non vide de transition de R ;

$[W] = P \times T \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ est l'application d'incidence de R ;

$M_0 = \{M_0(P_1), M_0(P_2), \dots, M_0(P_i), M_0(P_n)\}$ est l'ensemble du marquage initial des places ;

$temp = \{d_1, d_2, \dots, d_j, \dots, d_m\}$ est l'ensemble des temporisations associées aux transitions ;

$!Sy$ = ensemble des signaux de synchronisation émis par les places de R ;

$?Sy$ = ensemble des signaux de synchronisation reçus par les transitions de R ;

II.2.3.6.2. Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés à Synchronisations Internes (RdPSGSyI) :

Soit $R = \{R_1, R_2, \dots, R_t\}$ ensemble de RdPSG.

R est un RdPSGSyI si $\forall i \in \{1, 2, \dots, t\}$ alors :

$R_i = \langle P_i, T_i, [W_i], M_{0i}, temp_i, !Sy_i, ?Sy_i \rangle$ est un RdPS²G.

II.2.3.6.3. Comparaison entre un RdPS²G et un RdPSGSyI :

Le tableau II.1 résume les différentes caractéristiques d'un RdPS²G et d'un RdPSGSyI :

RdPS ² G « R_i »	RdPSGSyI « R »
<ul style="list-style-type: none"> • un seul réseau (R_i) ; • les synchronisations correspondent à l'occurrence des événements uniquement extérieurs. 	<ul style="list-style-type: none"> • (R) un ensemble de plusieurs (R_i) ; • utilise à la fois des signaux internes (échangés entre ses différents réseaux (R_i)) ; • et des signaux externes provenant du monde extérieur aux réseaux R_i.

Tableau II.1 : Comparaison entre RdPS²G et RdPSGSyI.

II.2.3.6.4. Autres définitions :**Définition II.1 :**

Une transition est *validée* si chacune de ses places amont contient au moins une marque.

Définition II.2 :

Une transition synchronisée est *autorisée* si son signal de synchronisation attendu est présent.

Définition II.3 :

Une transition *non synchronisées* est franchissable si elle est validée

Définition II.4 :

Une transition *synchronisée* est franchissable si elle est à la fois validée et autorisée.

Définition II.5 :

On appelle *place émettrice* toute place dont l'occupation par au moins une marque provoque l'émission d'un signal de synchronisation « place P_4 du réseau R_2 (Figure II.3) ».

Définition II.6 :

On appelle *transition réceptrice* (ou transition synchronisée) toute transition dont le franchissement est conditionné par la présence d'un signal de synchronisation « transition T_1 du réseau R_1 (Figure II.3) (ou synchronisée) ».

Définition II.7 :

On appelle *signal interne* (ou intérieur) tout signal émis depuis une place d'un réseau R_i constituant un module du réseau global R .

Définition II.8 :

On appelle signal externe (ou extérieur) tout signal non émis depuis une place d'un des réseaux constituant R , mais reçus par une transition d'un réseau R_i

On note:

? S_{y_I} : l'ensemble des signaux internes;

? S_{y_E} : l'ensemble des signaux externes.

II.2.3.6.5. Règles d'évolution et algorithme d'interprétation :

Avant de donner les règles d'évolution et l'algorithme d'interprétation, il convient de préciser le cadre de l'étude des RdPSGSyI.

II.2.3.6.5.1. Cadre de l'étude des RdPSGSyI :

Les problèmes liés à la modélisation par RdPSGSyI sont principalement rencontrés lors de l'interprétation des conflits. Pour les RdPSG classique, le seul cas de figure qui pose des problèmes est celui pour lequel plusieurs transitions immédiates sont validées en même temps. Il en est de même pour les RdPSGSyI à une nuance près.

- Si dans le conflit, n'entrent en jeu que des transitions immédiates non synchronisées, cela signifie qu'elles appartiennent forcément au même réseau (on parlera de conflit interne). Le conflit peut donc être résolu de manière classique par l'ajout de priorités ou de distributions de commutations.
- Si dans le conflit entrent en jeu des transitions immédiates synchronisées, deux alternatives se présentent :
 - Soit le conflit n'intéresse que des transitions du même réseau et nous sommes alors ramenés au cas du conflit interne.
 - Soit le conflit intéresse des transitions de plusieurs réseaux et on parlera alors de conflit étendu.

Pour résoudre un conflit étendu, nous utilisons l'interprétation Vecteur de Franchissement Parallèle (VFP) proposée dans [JACOT 92] et [JACOT 94]. Cette interprétation consiste à faire le bilan des marques produites et consommées lors du franchissement des transitions en conflit. Si ce bilan est positif ou nul alors on franchit toutes les transitions en même temps. Cette interprétation est particulièrement adaptée au cas d'arcs de lecture de donnée car le bilan en marques d'un tel processus est nul. Ainsi, si deux transitions dont une de lecture sont en conflit, l'interprétation VFP autorise leur franchissement simultané (Figure II.2).

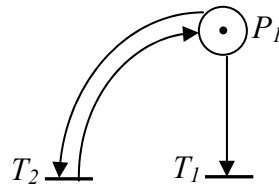


Figure II.2 : Exemple de conflit nécessitant l'utilisation de l'interprétation VFP.

Dans la Figure II.2, les transitions T_1 et T_2 sont en conflit. T_2 prend un jeton dans P_1 et le remet en place aussitôt (bilan 0). T_1 consomme une marque de P_1 (bilan -1). Le bilan global des jetons consommées est : $0-1 = -1$. Or, il y a un jeton dans la place P_1 , c'est-à-dire autant que le nombre consommé par le franchissement de T_1 et T_2 , on peut donc les franchir simultanément.

On s'intéresse maintenant à l'apport de l'interprétation VFP sur les RdPSGSyIs.

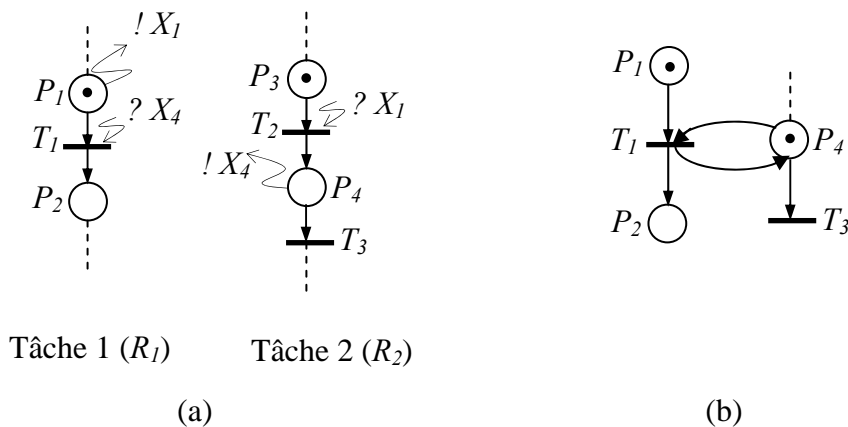


Figure II.3 : (a). Conflit étendu intéressant deux réseaux. (b). Autre écriture.

Soit le système (Figure II.3 (a)) constitué par deux RdPSG (R_1 et R_2) synchronisés par un lien de type envoi de message avec accusé de réception.

Supposons qu'une marque est déposée dans la place P_3 . La transition T_2 est alors validée mais non autorisée car elle est verrouillée par le signal de synchronisation X_1 , et celui-ci est absent. Si un jeton est alors déposé en P_1 , le signal X_1 est alors émis et la transition est autorisée. On franchit donc T_2 et le marquage atteint est P_1P_4 . Le conflit apparaît ici. En effet, T_3 et T_1 sont toutes les deux franchissables mais, le franchissement de T_3 fera cesser l'émission du signal X_4 , enlevant ainsi l'autorisation de franchissement de T_1 . Par contre, le franchissement de T_1 n'interdira pas le franchissement ultérieur de T_3 .

Ce conflit peut être représenté par le modèle de la Figure II.3 (b). En effet, le signal de synchronisation X_4 n'est autre qu'une lecture du contenu de P_4 par la transition T_1 . Forts de l'interprétation VFP, nous franchissons donc simultanément les transitions T_1 et T_3 . D'autres cas de conflit seront trouvés dans [DANIEL 95-1].

Ce cadre étant maintenant défini, nous allons aborder les règles d'évolution des RdPSGSyI.

Pour un marquage M_i on observe deux types de signaux émis selon que M_i est un marquage stable ou instable :

a) Si M_i est un marquage instable, le système ne fait qu'y passer (en un temps nul) sans jamais s'y arrêter. Les signaux émis par les places émettrices d'un tel marquage sont de type impulsif¹⁵.

b) Si M_i est un marquage stable, les signaux émis par ses places émettrices sont des créneaux qui durent aussi longtemps que ces places sont marquées.

L'évolution des RdPSGSyI s'effectue grâce aux trois règles suivantes :

- **Règle 1 :** Si M ne valide que des transitions temporisées, on adopte un mode de fonctionnement concurrentiel, c'est-à-dire au plus tôt (comme les RdPS classiques).
 - **Règle 2 :** Si M ne valide que des transitions immédiates, on opère un franchissement simultané après levée des conflits internes et étendus.
 - **Règle 3 :** Si M valide à la fois des transitions temporisées et immédiates, on ne s'occupe que des transitions immédiates. L'évolution se fait alors par l'application de la règle 2.
- *Un signal reçu par une transition peut être une expression booléenne d'un ou de plusieurs signaux émis par les places émettrices d'autres réseaux.*

¹⁵ La réception d'un signal impulsif par une transition n'autorise le passage que d'un seul jeton.

II.2.3.6.5.2. Algorithme d'interprétation des RdPSGSyI (ALIN. RdPSGSyI) :

Étape 1 : Construire la liste L_1 des transitions $\in \{T_{in} \cup T_m\}$ validées pour M (donc franchissables).

Étape 2 : Construire la liste L_2 des transitions $\in \{T_{is} \cup T_{ts}\}$ et validées par M.

Étape 3 : Construire la liste L_3 des transitions $\in \{T_{is} \cup T_{ts}\}$ et autorisées par M.

Étape 4 : Construire $L_4 = L_2 \cap L_3$, la liste des transitions $\in \{T_{is} \cup T_{ts}\}$ à la fois validées et autorisées par M (donc franchissables).

Étape 5 : Construire $L_5 = L_1 \cap L_4$, la liste de toutes les transitions franchissables pour M.

Étape 6 : Si L_5 contient à la fois des transitions immédiates et temporisées, on applique la règle 3 et on obtient, $L_6 = L_5 - \{T_i / T_i \in \{T_m \cup T_{ts}\}\}$

Étape 7 : Levée des conflits internes et étendus, on obtient $L_7 = \{\text{transitions à franchir}\}$.

Étape 8 : Franchissement selon les règles d'évolution exposées ci-dessus. Obtention d'un nouveau marquage.

Étape 9 : Retour à l'étape 1.

II.2.3.6.6. Application des RdPS²G et RdPSGSyI à la modélisation des SdP :

Lorsqu'on parle de simplicité, de lisibilité, une idée s'impose : la décomposition, en effet, pourquoi ne pas remplacer un gros modèle complexe et lourd par un ensemble de petits modèles plus simples à analyser ? Ainsi, RdPSGSyI ne cherche pas à générer des systèmes décomposables mais directement des systèmes décomposés [DANIEL 95-1].

L'application de cet outil sur les systèmes de production permet alors une décomposition non pas structurelle mais fonctionnelle.

II.2.3.6.6.1. Modélisation :

Un système de production est représenté par une alternance de machines et de stocks.

La connexion entre les différents modules se fait par le conditionnement d'une transition par l'occurrence d'un événement extérieur ou intérieur RdPSy.

- extérieur : dans le sens où il est envoyé depuis le monde extérieur (direction de la production, capteurs, horloges, etc ...) ;
- intérieur : s'il est issu des autres modules à l'intérieur du même système de production.

Nous proposons donc une modélisation selon les hypothèses que nous avons posée [§ I.3] c'est-à-dire « le mode de fonctionnement de type blocage avant service »¹⁶ qui est à notre connaissance le plus usité.

- Le modèle d'un stock est représenté par la Figure II.4.
-

¹⁶ Voir [§ I.4].

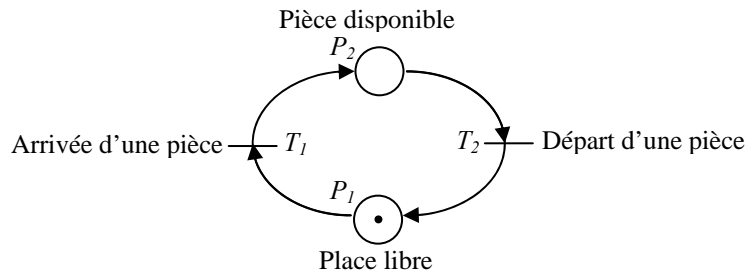


Figure II.4 : Modélisation d'un stock par un RdP.

Considérons une machine à trois états : repos, marche et panne. La Figure II.5 donne le modèle RdPSG correspondant.

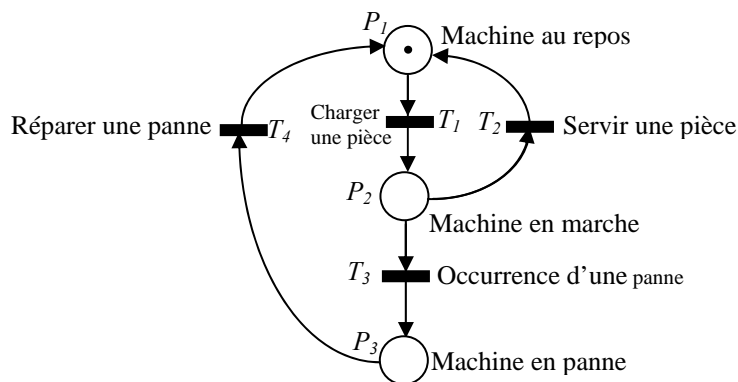
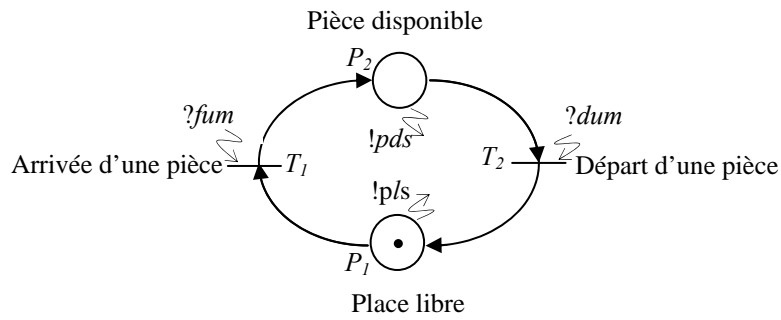
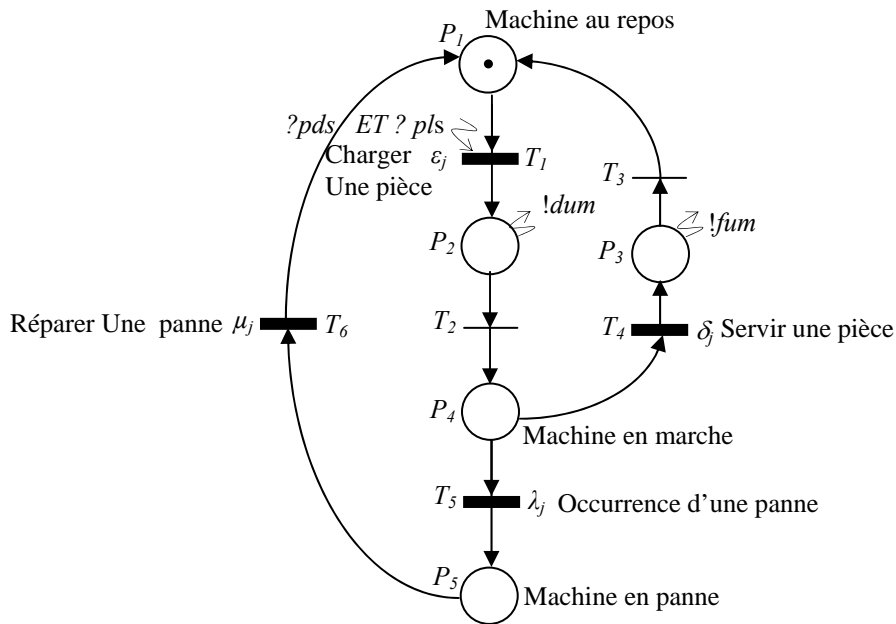


Figure II.5 : Modélisation d'une machine à 3états par RdPSG.

Les modèles RdP du stock (Figure II.4) ou de la machine (Figure II.5) étant directement transformable en modèle RdPS²G, et cela en ajoutant les contraintes sur chaque modèle afin de mettre en évidence les influences mutuelles, c'est à dire les synchronisations. Ceci nous donne les modèles génériques de la Figure II.6 (a) et (b).



(a). Modèle RdP générique de référence du module stock (R_1).



(b). Modèle RdP générique de référence du module machine (R_2).

Figure II.6 : Synchronisation entre deux RdPSG.

Tel que :

- dum : début d'usinage sur la machine ;
- fum : fin d'usinage sur la machine ;
- pds : pièce disponible dans le stock ;
- pls : place libre dans le stock.

L'ensemble des deux réseaux de la Figure II.6 est donc un RdPSGSyI. Tel que $R = \{R_1, R_2\}$ Où :

- R_1 : est le RdPS²G modélisant le stock ;
- R_2 : est le RdPS²G modélisant la machine.

II.3. Processus stochastiques et processus de Markov :

II.3.1. Processus stochastiques :

Définition II.9 : un processus stochastique X est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in T}$, la forme prise par ce processus lors d'une expérimentation du phénomène aléatoire en question est appelée *réalisation* ou *trajectoire* de ce processus. Ces réalisations appartiennent à un même espace de probabilités donnée et indexé par le paramètre t ($t \in T \subseteq \mathbb{R}$), où T est l'espace des temps [CHEMLA 02].

- X est dit à *temps discret* si et seulement si $T = \{1, 2, \dots\}$.
- X est dit à *temps continu* si et seulement si $T = \{t / 0 \leq t \leq +\infty\}$
- on appellera *espace des états* l'ensemble E des valeurs prises par toutes les variables aléatoires d'un processus stochastique. Nous nous limiterons aux processus stochastiques à états discrets ; E sera identifié à un sous ensemble $\{1, 2, \dots\}$
- X est dit à *espace d'états discret* si et seulement si E est dénombrable ; dans ce cas on l'identifie à un sous-ensemble de \mathbb{N} et on note i, j, k, \dots ses éléments. Si E n'est pas dénombrable, il est considéré comme un sous ensemble de \mathbb{R} .
- la variable X_0 est appelée *état initial* du processus.

Voici quelques exemples de phénomènes physiques susceptibles d'être modélisé par des processus stochastiques.

- le nombre d'appels arrivant dans un central téléphonique pendant un intervalle de temps $[0, t]$;
- le nombre de défaillances se produisant par jour dans un système technique ;
- la fortune du joueur après avoir joué n parties ;
- le nombre de clients dans un file d'attente à un instant donné.

Parmi les processus stochastiques, ceux qui vérifient la propriété de Markov jouent un rôle très important.

II.3.2. Processus de Markov :

Andreï Andreïvitch Markov, mathématicien russe, fut amené en 1907 à considérer un type de relations appelé *Processus de Markov*, dans lequel la loi de probabilité dépend, non pas de toute l'évolution antérieure du système, mais d'une valeur prise à un instant déterminé.

II.3.2.1. Définition mathématique :

Un processus stochastique X est un processus de Markov (ou markovien) si et seulement si il vérifie la propriété suivante dite de Markov :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (t_0, t_1, \dots, t_n, t) / t_0 < t_1 < \dots < t_n < t, \forall (x_0, x_1, \dots, x_n, x):$$

$$P_r(X_t \leq x | X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0) = P_r(X_t \leq x | X_{t_n} = x_n)$$

On d'autre terme, si le fait que le système soit passé successivement par les états $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ aux dates respectives $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ n'a aucune influence sur son

comportement futur, l'évolution du processus est entièrement déterminée par son état présent. Ce processus est dit alors *sans mémoire*. Cela signifie qu'à chaque instant, le temps restant à passer dans l'état courant est indépendant du temps déjà passé dans ce même état. Puisqu'une variable aléatoire caractérisée par une loi exponentielle est -par définition- sans mémoire, l'utilisation de la loi de distribution exponentielle est une condition nécessaire pour relier un processus stochastique à espace d'états discret à un PdM à temps continu [SASSINE 98]. Les taux moyens utilisés ayant été définis comme constants [§ I.3]¹⁷, donc invariants dans le temps, le PdM est dit homogène.

- un PdM est dit homogène si et seulement si :

$$P_r(X_t \leq x | X_{t_n} = x_n) = P_r(X_{t-t_n} \leq x | X_0 = x_n) \text{ (Cette probabilité ne dépend que de l'écart } t-t_n)$$

II.3.2.2. Représentation graphique :

Graphiquement, un PdM est représenté par un graphe d'états composé de deux classes d'éléments, les états et les arcs.

- les états sont représentés par des cercles qui modélisent les différentes situations (marquage stables) accessibles par le système.
- Les arcs sont orientés et visualisés par des flèches. Chacun d'entre eux représente une évolution possible d'un état à un autre. Chaque arc est valué par un paramètre de la loi de probabilité exponentielle qui représente son franchissement.

Donc : un PdM est un graphe orienté valué X tel que $X = (E, [V])$ Où :

E = ensemble des états ;

$[V] = E \times E \rightarrow [0, +\infty[$: Ensemble des arcs ainsi que les poids associés.

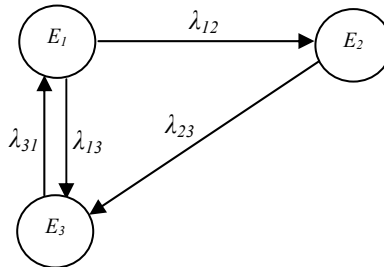


Figure II.7 : Un PdM à 3 états.

Considérons le PdM à trois états représenté par le graphe de la Figure II.7 formellement, on écrit $X = (E, [V])$ avec, $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ et

$$[V] = \begin{matrix} & \begin{matrix} E_1 & E_2 & E_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & 0 & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

¹⁷ Afin de rester homogène avec les hypothèses considérées dans ce paragraphe [§ I.3].

II.3.2.3. Graphe des transitions :

C'est un graphe formé de points représentant les états du processus et d'arcs correspondant aux transitions possibles, c'est-à-dire pour lesquelles les probabilités sont non nulles. La Figure II.7 représente un graphe des transitions d'un PdM à 3 états.

- si $i = j$, alors $b_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_{ij}$

Tous les termes sont positifs ou nuls et inférieurs ou égaux à 1 (puisqu'elle ne contient que des probabilités). La somme des termes de chaque ligne est 1 (puisqu'il y a toujours un (1) état de destination).

La Figure II.7 donne l'exemple d'un PdM à trois états. Sa matrice des taux de transition est donnée ci-dessous.

$$[B] = \begin{array}{ccc|c} & E_1 & E_2 & E_3 \\ \left[\begin{array}{ccc} -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & -\lambda_{23} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & 0 & -\lambda_{31} \end{array} \right. & E_1 \\ & E_2 \\ & E_3 \end{array}$$

II.3.2.4. Vecteur probabilité instantané :

On peut à chaque instant calculer la probabilité pour que le système occupe tel ou tel état. On peut définir ainsi le vecteur probabilité instantané $P(t)$ tel que :

Le vecteur probabilité instantané est le vecteur $(1 \times n)$ $[P(t)] = [P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)]$

$$\text{tel que } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq P_i(t) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^n P_i(t) = 1 \end{array} \right\} \forall i \in (1 \dots n)$$

où $P_i(t)$ est la probabilité d'être dans l'état i à l'instant t .

Ce vecteur $P(t)$ est intéressant car il donne à chaque instant une image probabiliste de l'état du système. L'évolution de chacune de ses composantes est régie par une équation différentielle. En effet, la fonction de répartition $H(dt)$ donne la probabilité

pour que l'événement régi par la loi exponentielle de paramètre λ se produise dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$:

$$H(t + dt) = H(dt) = 1 - e^{-\lambda dt}$$

En remplaçant $e^{-\lambda dt}$ par son développement limité on obtient :

$$H(dt) = \lambda dt - \frac{(\lambda dt)^2}{2!} + \frac{(\lambda dt)^3}{3!} - \frac{(\lambda dt)^4}{4!} + \dots + \frac{(\lambda dt)^n}{n!}$$

Ainsi :

$$\lim_{dt \rightarrow 0} H(dt) = \lambda dt + 0(dt)$$

Si λ_{ij} est le taux de la loi de probabilité exponentielle associée au passage de l'état i à l'état j alors, la probabilité pour que pour ce passage ait lieu pendant l'intervalle de temps dt est :

$$P_{ij}(dt) = \lambda_{ij} \cdot dt + 0(dt)$$

On voit bien que, pour une distribution exponentielle, la probabilité de passer d'un état i à un état j pendant l'intervalle de temps dt ne dépend que de la longueur de cet intervalle et aussi bien sûr du nombre d'événements $N(dt)$ qui se produiront pendant cet intervalle de temps dt mais on ne peut déterminer les dates d'occurrence de ces $N(dt)$ événements. Tout se passe comme si ces $N(dt)$ événements étaient jetés complètement au hasard dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$

Nous allons maintenant établir les équations différentielles qui régissent l'évolution dans le temps des processus de Markov. Pour cela, nous allons évaluer la probabilité d'être dans l'état i à l'instant $t+dt$.

$$P_i(t+dt) = P_r\{\text{être en } i \text{ à } t\} \cdot P_r\{\text{rester en } i \text{ dans l'intervalle de temps } [t, t + dt]\} + P_r\{\text{être en } j \text{ à } t (j \neq i)\} \cdot P_r\{\text{passer en } i \text{ pendant l'intervalle de temps } [t, t + dt]\}.$$

d'où, en formulant cela de manière mathématique :

$$\begin{aligned} P_i(t+dt) &= P_i(t) \cdot \left(1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_{ij} \cdot dt + 0(dt)) \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_j(t) \cdot (\lambda_{ji} \cdot dt + 0(dt)) \\ &= P_i(t) - P_i(t) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_{ij} \cdot dt + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_j(t) \cdot \lambda_{ji} \cdot dt + 0(dt) \cdot (-P_i(t) + \dots) \end{aligned}$$

En faisant passer $P_i(t)$ dans le premier membre, on obtient :

$$P_i(t+dt) - P_i(t) = -P_i(t) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_{ij} \cdot dt + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_j(t) \cdot \lambda_{ji} \cdot dt + 0(dt) \cdot (-P_i(t) + \dots)$$

puis, en divisant les deux membres par dt il vient :

$$\frac{P_i(t+dt) - P_i(t)}{dt} = -P_i(t) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_j(t) \cdot \lambda_{ji} + \frac{0(dt) \cdot (-P_i(t) + \dots)}{dt}$$

On passe à la limite en supposant d'une part que le processus est homogène (λ_{ij} et λ_{ji} constants) et, d'autre part, que $P_i(t)$ est différentiable. On négligera par ailleurs le terme en $0(dt)$.

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -P_i(t) \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_{ij} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_j(t) \cdot \lambda_{ji}$$

On constate que, comme nous l'avons dit précédemment, la probabilité $P_i(t)$ d'être dans un état i à l'instant t est régie par une équation différentielle. Si l'on établit cette équation différentielle pour chacun des n états du PdM, on obtient alors un système de n équations différentielles à n inconnues.

II.4. Etude de comportement stationnaire :

Comme règle générale, dans l'évaluation des performances d'un système, le comportement en régime permanent joue un rôle prépondérant [ZEMOURI 00]. Pour cela nous nous intéressons seulement à l'étude de ce régime.

Pour cela, on applique la technique des perturbations singulières en continu sur le générateur du PdM, on découple le PdM en deux sous-systèmes dont les évolutions des probabilités sont lentes ou rapides. Toutefois, seul le sous-système lent conserve les propriétés des PdM.

On peut à chaque instant calculer la probabilité pour que le système occupe tel ou tel état.

On peut définir ainsi le vecteur probabilité instantanée $[P_r(t)] = [P_{r_1}(t), P_{r_2}(t), \dots, P_{r_n}(t)]$ tel que $0 \leq P_{r_i}(t) \leq 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ avec $\sum_{i=1}^n P_{r_i}(t) = 1$, où $P_{r_i}(t)$ est la probabilité d'être dans l'état E_i à l'instant t . Ce vecteur $[P_r(t)]$ est intéressant car il donne à chaque instant une *image probabiliste* de l'état du système.

Comme le temps t intervient dans les expressions de $P_i(t)$, une observation du système pendant un temps infini laisse place à un régime dit *stationnaire* (ou permanent). Ce régime permanent correspond à un état d'équilibre atteint par le système. Ce sont ces paramètres en régime stationnaire qui nous intéressent lors de notre étude.

Dans ce cas, le vecteur probabilité instantanée correspond à un vecteur dit de *distribution stationnaire*, noté $[P_r] = [P_{r_1}, P_{r_2}, \dots, P_{r_n}]$. La recherche de ce vecteur se résume : soit à la résolution du système d'équation différentielles d'ordre (n) et en faisant tendre $t \rightarrow \infty$ au niveau des solutions, soit par la résolution d'un système de n équations linéaires de n inconnues.

Le système d'équations différentielles peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\left[\frac{dP(t)}{dt} \right] = [P(t)] \cdot [B]$$

Or, lorsqu'on atteint le régime stationnaire, $\frac{dP(t)}{dt}$ tend vers 0 et $P(t)$ atteint la distribution stationnaire $P = [P_1, \dots, P_n]$ d'où, l'équation ci-dessus devient :

$$[P] \cdot [B] = 0$$

Se résultat se généralise comme suit :

Soit un PdM à n états et dont la matrice des taux de transitions est $[B]$. Soit $P = [P_1, \dots, P_n]$ son vecteur distribution stationnaire. La recherche de ce vecteur se résume à la résolution du système de n équations linéaires à n inconnues suivantes :

$$[P] \cdot [B] = 0 \text{ avec } \sum_{i=1}^n P_i = 1$$

La recherche de la distribution stationnaire pour les chaînes de Markov (temps discret) s'effectue par la résolution de :

$$[P] \cdot [Q] = [P] \text{ avec } \sum_{i=1}^n P_i = 1$$

Où $[Q]$ est la matrice des probabilités de transitions.

Pour un PdM à temps continu $\{X(t), t \geq 0\}$ le temps passé par le système dans chacun de ses états est distribué exponentiellement. Pour un état i , le paramètre de la distribution exponentielle du temps de séjour est donné par : $-\lambda_{ii} = \sum_{i \neq j} \lambda_{ij}$. Si on ne

tient pas compte du temps passé dans chacun des états et si on ne considère que les transitions effectuées par le système, on peut alors définir une nouvelle Chaîne de Markov « CdM » à temps discret appelée « Chaîne de Markov Sous Jacente 'CdMSJ' ». Soit x_n le n -ième état visité par le PdM à temps continu $X(t)$ alors, $\{x_n, n \geq 0\}$ est la CdMSJ au PdM $\{X(t), t \geq 0\}$. Beaucoup des propriétés des PdM peuvent être déduites de celles de leur CdMSJ. Par exemple, on peut dire qu'un PdM est irréductible si et seulement si sa CdMSJ est irréductible. Pour un PdM ergodique

de générateur infinitésimal, si $[Q]$ est la matrice des probabilités de transitions de sa CdMSJ alors, on peut écrire :

$$[Q] = [I] - [diag[B]]^{-1} \cdot [B]$$

Une propriété très forte du couple PdM, CdMSJ est que la distribution stationnaire de l'un est déductible de celle de l'autre.

Soit un PdM de générateur infinitésimal. On peut alors écrire :

$$P = \frac{\phi}{\sum_{j=1}^n \phi_j} \text{ avec } \phi = -\pi \cdot [\text{diag}[B]]^{-1} = [\phi_1, \dots, \phi_n]$$

Avec : $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_n]$ sa distribution stationnaire.

Pour déterminer le vecteur de distribution stationnaire (Figure II.14), il faut résoudre le système d'équations linéaires (la résolution directe) suivant :

$$\begin{cases} [P_{r_1}, P_{r_2}, P_{r_3}] \begin{bmatrix} -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & -\lambda_{23} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & 0 & -\lambda_{31} \end{bmatrix} = 0 \dots (1) \\ P_{r_1} + P_{r_2} + P_{r_3} = 1 \dots (2) \end{cases}$$

La résolution du système d'équations linéaires, nous donne le résultat suivant :

$$[P_r] = [P_{r_1}; P_{r_2}; P_{r_3}] = \left[\frac{\lambda_{23}\lambda_{31}}{\lambda_{31}(\lambda_{23} + \lambda_{12}) + \lambda_{23}(\lambda_{12} + \lambda_{13})}; \frac{\lambda_{12}\lambda_{31}}{\lambda_{31}(\lambda_{23} + \lambda_{12}) + \lambda_{23}(\lambda_{12} + \lambda_{13})}; \frac{\lambda_{23}(\lambda_{12} + \lambda_{13})}{\lambda_{31}(\lambda_{23} + \lambda_{12}) + \lambda_{23}(\lambda_{12} + \lambda_{13})} \right]$$

En passant par la CdMSJ dont la matrice des probabilités de transitions $[Q]$ calculée par l'équation est :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} + \lambda_{13}} & \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12} + \lambda_{13}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et en résolvant $[\pi] \cdot [Q] = [\pi]$ on obtient :

$$\pi = \left[\frac{\lambda_{12} + \lambda_{13}}{3\lambda_{12} + 2\lambda_{13}}; \frac{\lambda_{12}}{3\lambda_{12} + 2\lambda_{13}}; \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13}}{3\lambda_{12} + 2\lambda_{13}} \right]$$

On applique ensuite le résultat de la définition :

$$\begin{aligned} \Phi &= - \left[\frac{\lambda_{12} + \lambda_{13}}{3\lambda_{12} + 2\lambda_{13}}; \frac{\lambda_{12}}{3\lambda_{12} + 2\lambda_{13}}; \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13}}{3\lambda_{12} + 2\lambda_{13}} \right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{\lambda_{12} + \lambda_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\lambda_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\lambda_{31}} \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{1}{3\lambda_{12} + 2\lambda_{13}}; \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}(3\lambda_{12} + 2\lambda_{13})}; \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13}}{\lambda_{31}(3\lambda_{12} + 2\lambda_{13})} \right] \end{aligned}$$

On normalise en divisant par $\sum_{j=1}^3 \Phi_j = \frac{\lambda_{31}(\lambda_{23} + \lambda_{12}) + \lambda_{23}(\lambda_{12} + \lambda_{13})}{\lambda_{23} \cdot \lambda_{31}(3\lambda_{12} + 2\lambda_{13})}$ et on obtient :

$$[P_r] = [P_{r_1}; P_{r_2}; P_{r_3}] = \left[\frac{\lambda_{23}\lambda_{31}}{\lambda_{31}(\lambda_{23} + \lambda_{12}) + \lambda_{23}(\lambda_{12} + \lambda_{13})}; \frac{\lambda_{12}\lambda_{31}}{\lambda_{31}(\lambda_{23} + \lambda_{12}) + \lambda_{23}(\lambda_{12} + \lambda_{13})}; \frac{\lambda_{23}(\lambda_{12} + \lambda_{13})}{\lambda_{31}(\lambda_{23} + \lambda_{12}) + \lambda_{23}(\lambda_{12} + \lambda_{13})} \right]$$

On retrouve bien la même distribution stationnaire par le PdM que par le calcul direct. Cette propriété peut être utilisée pour calculer la distribution stationnaire des RdPSG pour lesquels les taux de transitions et les probabilités de transitions sont mélangés.

Mais un processus peut, à partir d'un même état initial, suivre une infinité de trajectoires différentes. Ceci pose le problème de l'unicité¹⁸ du régime permanent. Les états d'un PdM peuvent être de manière générale repartis en deux classes.

1. les états transitoires dont il est possible de sortir mais vers lesquels il est impossible de retourner ;
2. les états ergodiques dont il n'est plus possible de sortir une fois entrée.

Ainsi, pour résoudre le problème de l'unicité d'une distribution stationnaire, nous utilisons théorème suivant [DANIEL 95-1].

Théorème : un PdM fini admet une distribution stationnaires unique s'il ne possède qu'une seule classe ergodique. On parle alors de PdM ergodique (Figure II.8). Si, de plus cette classe recouvre tous les états du PdM celui-ci est dit irréductible.

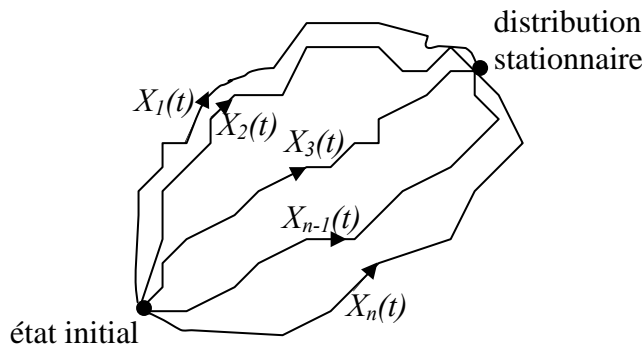


Figure II.8 : Processus ergodique, unicité de la distribution stationnaire.

Il est possible d'envisager la notion d'ergodicité de la manière suivante :

Soit $X(t)$ une variable aléatoire et soit $E[X(t)]$ son espérance mathématique. Soient $X_1(t), X_2(t), X_3(t), \dots, X_n(t), n$ expériences réalisées sur la même variable aléatoire $X(t)$ et à partir du même état initial. Si $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus stochastique ergodique alors l'espérance mathématique et la moyenne arithmétique sont égales, soit : $E[X(t)] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i(t_1)$ avec t_1 fixé.

¹⁸ C'est-à-dire admet une distribution stationnaire unique.

II.5. Méthodes de résolution des problèmes de l'explosion combinatoire :

Avec la complexité croissante des SdP, la taille du graphe des marquages associé augmente très rapidement, la taille du processus de Markov générée devient un obstacle majeur. Des méthodes ont donc été établies pour tenir compte de cette difficulté intrinsèque (phénomène connu sous le nom d'explosion combinatoire). On distingue les méthodes graphiques de simplification des RdPS et les méthodes de simplification analytiques [ZEMOURI 00].

II.5.1. Méthodes graphiques de simplification des RdPS :

Les méthodes de simplification permettent de transformer un RdP en un autre RdP plus simple, en préservant certaines propriétés du réseau initial, comme la vivacité et le marquage borné, mais souvent, il n'est pas possible de donner une interprétation physique à cette réduction ces méthodes sont présentées dans de nombreux ouvrages [BRAMS 83], [MURATA 89], [DAVID 89], [DAVID 92] et [PROTH 95].

II.5.2 Méthodes de simplification analytiques :

Pour les systèmes trop importants pour autoriser une étude exacte, markovienne ou non, plusieurs méthodes ont été mises en place. [MOREAUX 96] à classer ces méthodes en deux catégories.

- les méthodes approchées ont donné lieu à de très nombreux algorithmes et suscitent toujours de nouvelles études. Citons en particulier pour les modèles markoviens : les méthodes d'agrégation / désagrégation itératives ou non, et en particulier celles fondées sur la « quasi-indépendance » de sous ensembles d'états et les méthodes par blocs.
- Une autre approche, consiste à déterminer uniquement des bornes des valeurs recherchées. On résout pour cela des systèmes plus simples qui sont déduits du modèle (réseau de files d'attente ou autres). Un des intérêts de ces techniques est de garantir une estimation de l'erreur commise en utilisant les bornes au lieu et place des indices exacts, pour bien entendu qu'on dispose des majorations et minorations.

Par contre [SALMI 01] à classer ces méthodes en trois catégories :

- 1- Méthodes de transformation des RdPS, de décomposition et d'agrégation des états du RdPS ;
- 2- Méthodes de calcul de solutions en forme produit, s'inspirant des techniques d'analyse des files d'attente ;
- 3- Méthodes de calcul des bornes consistant à chercher des solutions approchées.

II.6. Liaison entre RdPS et PdM :

L'hypothèse la plus couramment utilisée fait appel à une distribution exponentielle des temporisations. Le marquage du RdPS est alors un processus Markovien homogène.

L'analyse d'un RdPS utilise ainsi des méthodes connues à la fois dans le domaine des RdP et dans celui des réseaux de files d'attente.

La méthode employée consiste à construire le graphe des marquages accessibles du RdP et à étiqueter chaque arc par un taux de franchissement (Figure II.9).

Le comportement aléatoire du RdPS est alors identique à celui du PdM, on calcule les probabilités d'états en régime permanent, on peut alors déduire des indices de performances tels que les marquages moyens de chaque place en régime permanent ou les fréquences moyennes de franchissement. Les notions de base ainsi que les principales propriétés se trouvent dans de nombreux travaux.

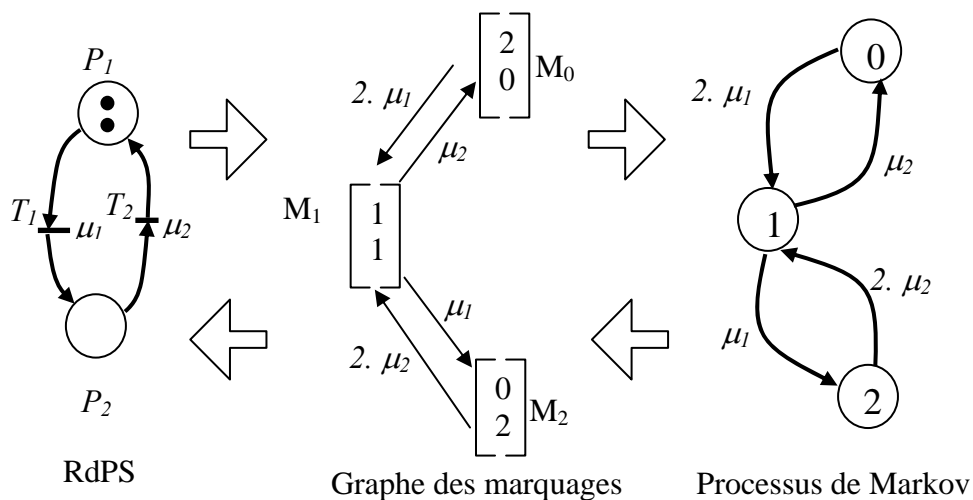


Figure II.9 : Liaison entre réseau de RdPS et PdM.

II.7. RdPS²G et processus de Markov :

Nous abordons l'aspect « combinaison RdPS²G/PdM ». L'utilisation conjointe des RdPS²G et des PdM pour la modélisation et l'évaluation de performances des SdP est de combiner les avantages des deux outils complémentaires.

En effet, combiner les RdPSG et PdM permet de surmonter le manque d'une évaluation quantitative et analytique dans les RdPS, et une limitation de l'explosion de la taille du modèle « explosion combinatoire » causé par les chaînes de Markov. D'où la modélisation modulaire par RdPS²G. Ceci se traduit par des modèles plus concis, et permet de modéliser différents éléments du système.

La force de cette démarche réside dans l'isomorphisme reliant les RdPS et les PdM, les RdPS sont isomorphes aux PdM [MOLLOY 81] (c'est-à-dire que les RdPS et les PdM appliqués à des éléments correspondants donnent pour produits des éléments correspondants) et ceci grâce à la propriété sans mémoire [§ II.3.2.1] des distributions de probabilités exponentielles associées aux durées de franchissement des transitions. A partir de PdM on peut calculer les probabilités d'états en temps continu, puis on

calcul des paramètres comme le taux moyen de franchissement d'une transition, le marquage moyen d'une place, le temps de séjour moyen d'une marque dans une place, etc.

On dispose en fait d'un outil de modélisation ayant un très fort pouvoir descriptif (RdPS) et en même temps, par une simple transformation, d'une représentation très adaptée au calcul (PdM).

Les RdPSG contiennent à la fois des transitions immédiates et des transitions temporisées. Ceci ne pose pas de problème car les transitions immédiates engendrent des marquages instables qui n'apparaissent ni au niveau du graphe des marquages, ni au niveau du PdM. Le graphe de marquages ne contenant que des états stables, le PdM associé sera analysable de manière classique.

Les complications se produisent lorsque l'on utilise des distributions de commutation. En effet, la matrice de transition obtenue contient, à la fois des taux de franchissement et des probabilités (de franchissement des transitions immédiates en conflit).

Pour résoudre les systèmes que nous obtenons alors, les RdPSG considérés doivent vérifier les quatre propriétés suivantes [DANIEL 95-1] et [ABBAS-TURKI 01] :

- 1- le graphe des marquages accessibles doit être borné ;
- 2- les taux de franchissement des transitions ne doivent pas dépendre du temps (constants). « homogénéité » ;
- 3- le graphe de marquage doit être vivant ;
- 4- les réseaux sont purs.

Dans les modèles génériques de référence que nous avons proposée [§ II.2.4.6.5.1], les signaux de synchronisation conditionnent uniquement le franchissement de la transition. Ils n'interviennent en aucun cas sur les taux de franchissement des transitions. Cela signifie que la méthode utilisée pour les RdPSG reste applicable dans le cadre des RdPS²G [SASSINE 98].

II.8. Conclusion :

Après avoir effectuée un état de l'art sur les RdPS²G et les RdM. Nous avons justifié nos préférences pour la modélisation par RdPS²G et dans le but de contourner le problème de l'explosion combinatoire des états nous avons profité de la structure modulaire des systèmes de production pour opérer une décomposition fonctionnelle qui utilise les RdPSGSyI, ainsi l'utilisation des PdM pour l'évaluation quantitative est justifiée.

Puis nous avons montré l'intérêt de l'utilisation conjointe de ces deux outils.

Dans le chapitre suivant nous présentons la démarche de modélisation et d'évaluation de performances, qui est basé sur le couple RdPSGSyI-PdM.

III.1. Introduction :

Nous avons montré dans le chapitre précédent, l'intérêt de l'utilisation conjointe et complémentaire des RdPSGSyIs et des PdM.

Le but de ce chapitre est de présenter la méthodologie choisie, en détaillant les différentes étapes. Cette méthodologie permet de modéliser les SdP manufacturiers on profite de la structure modulaire des SdP tout en utilisant les RdPSGSyI, puis nous effectuons une analyse quantitative par les PdM pour calculer les probabilités d'états des composants. Enfin des indicateurs de performances sont calculés à partir de ces résultats.

III.2. Démarche :

III.2.1. Eléments :

On appelle élément ou module, l'unité élémentaire sur laquelle s'appuie la construction de la structure du SdP. Cet élément peut être une machine ou un stock.

III.2.1.1. Modèles génériques de références :

Un modèle « générique » est d'une très grande importance dans la pratique, vu la spécificité et la complexité des systèmes à étudier, et vu l'aspect très général des méthodes et des modèles utilisés. Ce modèle va permettre au « modélisateur » de construire son modèle final avec un minimum d'effort requis. En effet, la construction d'un modèle générique décharge quasi totalement l'utilisateur du problème de modélisation.

III.2.1.1.1. Représentation par boîte noires :

L'objectif de la reproduction d'un modèle RdPS²G sous forme d'une boîte noire est de mettre en évidence les synchronisations et les paramètres utilisés.

Une boîte noire est alors représentée par un carré portant le nom du modèles. Des flèches entrantes spécifient l'ensemble des signaux reçus ($? S_y$) au niveau des transitions du réseau. Des flèches sortantes montrent l'ensemble des signaux envoyés ($! S_y$) depuis les places du modèle. L'ensemble des taux moyens non nuls (appartenant à *temp*) figurent à l'intérieur du carré. De cette façon, la Figure III.1 groupe les différents modèles boîtes noires utilisés.

Pour distinguer un signal interne d'un signal externe, nous représentons ce dernier par une flèche brisée.

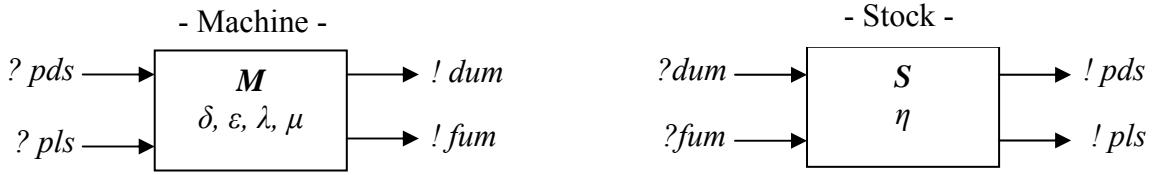


Figure III.1 : Modèles boîte noires des modules stocks et machine.

III.2.2. Modélisation du SdP complet :

Un SdP est un graphe biparti, c'est-à-dire qu'il y a une alternance des machines (représentées par des carrés) et des stocks (représentées par des cercles) sur un chemin formé d'arc consécutifs et tout arc doit obligatoirement avoir un composant à chacune de ses extrémités. La Figure III.2 représente un système de production comportant 5 machines, 7 stocks et 11 arcs orientés.

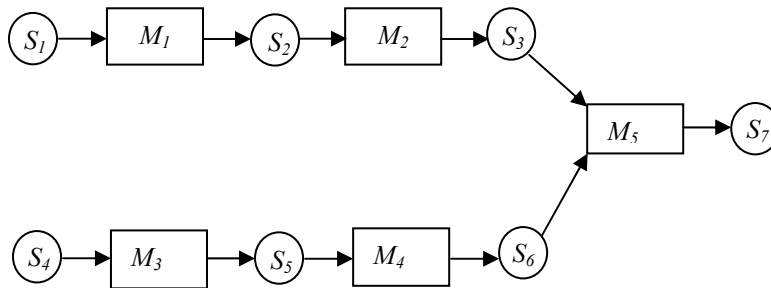


Figure III.2 : Un exemple de SdP.

On dira que la machine M_i est en amont ou est une entrée du stock S_j s'il y a un arc orienté de M_i vers S_j . On dira que la machine M_i est en aval ou est une sortie du stock S_j s'il y a un arc orienté de S_j vers M_i . De façon similaire, on dira qu'un stock est en amont (entrée) ou en aval (sortie) d'une machine. Ainsi on note :

- ${}^{\circ}M_i$: Ensemble des stocks en amont de la machine M_i ;
- M_i° : Ensemble des stocks en aval de la machine M_i ;
- ${}^{\circ}S_j$: Ensemble des machines en amont du stock S_j ;
- S_j° : Ensemble des machines en aval du stock S_j ;

Une machine doit obligatoirement avoir un stock amont et un stock aval. Cela signifie que les extrémités d'un SdP doivent être inévitablement des stocks.

Formellement, un système de production est un triplé $S = \langle M, S, [A] \rangle$ tel que :

- $M = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ est un ensemble finie et non vide de machines ;
- $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ est un ensemble finie et non vide de stocks ;
- $[A] : M \times S \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ est l'application d'agencement des machines et stocks.
- $A [M_i, S_j]$ est le poids de l'arc $M_i \rightarrow S_j$. Ce poids est :

- à (1) si l'arc est sortant de la machine ;
- à (-1) s'il est entrant vers la machine ($S_j \rightarrow M_i$) et ;
- à (0) si aucun arc relie M_i et S_j .

Pour l'exemple de la Figure III.2, on a $A [M_3, S_5] = 1$, $A [M_3, S_6] = 0$ et $A [M_3, S_4] = -1$.

$$[A] = \begin{matrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \\ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

III.2.3. Décomposition du SdP en cellules élémentaires :

On appelle cellule élémentaire un groupement de deux entités distinctes en une seule entité. En d'autres termes, une cellule élémentaire est un groupement d'une machine avec un stock.

L'élément principal d'un système de production étant la machine, on distingue :

- Une cellule élémentaire amont où le stock est en amont de la machine.

On note : SM_i : cellule élémentaire amont = $M_i \cup S_j$ avec j tel que :
 $S_j \in {}^{\circ}M_i$ ou $M_i \in S_j^{\circ}$.

- Une cellule élémentaire aval où le stock est en aval de la machine.

On note : MS_i : cellule élémentaire aval = $M_i \cup S_j$ avec j tel que :
 $S_j \in M_i^{\circ}$ ou $M_i \in {}^{\circ}S_j$.

Généralisation :

Dans le cas général où le nombre de stock en amont ou en aval d'une machine est supérieur à 1. On appelle alors cellule élémentaire d'ordre m . et, on note :

SM_i^m : Cellule élémentaire amont d'ordre $m = M_i \cup {}^{\circ}M_i$.

MS_i^p : Cellule élémentaire aval d'ordre $m = M_i \cup M_i^{\circ}$.

Où :

m : nombre des stocks amonts ;

p : nombre des stocks avals.

III.2.3.1. Génération des PdM :

La génération d'un PdM (ou la matrice de transitions associée au graphe de marquages accessibles) du système de production tout entier doit alors s'effectuer en considérant les modules deux par deux (ou cellule élémentaire), et en étudiant les influences mutuelles entre eux.

III.2.3.1.1. Principe de l'algorithme de DEcomposition-REComposition (DEREC) :

Pour générer le processus de Markov d'un RdPSGSyI, noté R , associé à deux RdPSG (R_a et R_b) synchronisés entre eux. Nous utilisons l'algorithme de DEcomposition-REComposition baptisée DEREC, cet algorithme possède quatre étapes [SASSINE 98] :

Etape I : Détermination des modèles RdP de chaque module à part (R_a et R_b) à partir des modèles génériques de références de la Figure II.6 [§ II.2.4.6.6.1] ;

Etape II : Génération des matrices de transitions ($[G_a]$ et $[G_b]$) de chaque module considéré à part ;

Etape III : Détermination de la matrice de transition du système complet $[F_S]$ (ensemble de tous les modules synchronisés) ;

Etape IV : Simplification de la matrice obtenu à l'étape précédente en respectant les règles (détaillé plus loin) la matrice finale obtenue $[G_R]$ représente le processus de Markov d'un système complet (sous formes matricielle et graphique).

Selon les hypothèses posées [§ I.3] et la modélisation proposée dans [§ II.2.4.6.5.1] : dans un SdP, nous distinguons deux modules différents : machine (M) et stock(S).

Puisque l'algorithme DEREC considère les modules deux par deux, deux cas se présentent alors :

Cas1 : le stock est en amont de la machine, on le désigne par le cas SM ;

Cas2 : le stock est en aval de la machine, on le désigne par le cas MS .

○ La DEcomposition :

Elle fait l'objet des deux étapes (1 et 2) décrites, pour chaque cas (SM et MS :

Etape I : Détermination des modules RdP isolés

Dans cette étape, quand on parle de suppression de place ou transition, cela signifie que la place ou transition est effacé avec ses arcs entrants et sortants.

Cas1 : SM ($R_a = R_{stock}$, $R_b = R_{machine}$).

Pour R_{stock} :

- **Pas I.1-1.1 :** puisque aucune machine en amont n'est présente, on supprime les signaux $?fum$ et $!pls$;
On obtient alors R_a .

Pour $R_{machine}$:

- **Pas I.1-1.2 :** comme le stock en aval est absent, on supprime les signaux $!fum$ et $?pls$. On supprime également la place P_3 et la transition T_3 , on relie ensuite T_4 à P_1 ;
On obtient alors R_b .

Cas2 : MS ($R_a = R_{machine}$, $R_b = R_{stock}$).

Pour $R_{machine}$:

- **Pas I.2-2.2** : comme le stock en amont est absent, on supprime les signaux $! dum$ et $? pds$. On supprime également la place P_2 et la transition T_2 , on relie ensuite T_1 à P_4 ;
On obtient alors R_a .

Pour R_{stock} :

- **Pas I.1-2.1** : puisque aucune machine en aval n'est présente, on supprime les signaux $? dum$ et $! pds$;
On obtient alors R_b .

Etape II : Génération des matrices de transitions des modules isolés

Cette étape est identique pour les deux cas (SM et MS). On note $[G_a]$ la matrice de transition de R_a et $[G_b]$ celle de R_b .

- **Pas II.1** : identifier les places émettrices de R_a et R_b . C'est-à-dire créer les deux ensembles E_a et E_b , tel que :
 $E_a = \{\text{places émettrices de } R_a\}$ et $E_b = \{\text{places émettrices de } R_b\}$;
- **Pas II.2** : supprimer les signaux internes. R_a et R_b sont maintenant isolés ;
- **Pas II.3** : construire les graphes de marquages accessibles de R_a et R_b en isolation à partir de leur marquage initial et des états des signaux externes. La représentation de ces graphes sous forme matricielle permet de déduire les matrices de transitions $[G_a]$ et $[G_b]$;
- **Pas II.4** : répartir les états des matrices de transitions en classes d'états $C_{a,k}$ et $C_{b,k}$, tel que :
 $k =$ le nombre de classes d'états du réseau R_a ;
 $C_{a,k} =$ le nombre de différents marquages accessibles par les places émettrices de R_a (c'est à dire les places appartenant à E_a).

$[G_a]$ et $[G_b]$ peuvent donc être décomposés respectivement en k^2 blocs notés $G_{a_i,j}$ et l^2 blocs notés $G_{b_i,j}$;

Dans l'étape précédente (II) nous avons supprimé les signaux internes, puisque nous nous intéressons à la génération des matrices de transitions des modules isolés.

Maintenant et pour l'étape qui suit nous allons introduire les signaux de synchronisation afin d'étudier les influences mutuelles entre les deux réseaux.

o La REComposition :

Les deux étapes suivantes sont identiques pour les deux cas (SM ou MS).

Etape III : Détermination de la matrice de transition du système complet $[F_s]$

Nous nous intéressons à l'influence, des places émettrices de chacun des deux réseaux R_a et R_b , sur le fonctionnement l'un de l'autre.

Pas III.1 :

Pour R_a :

Construire un nouveau graphe des marquages accessibles (ou nouvelle matrice de transition notée $[G'_a]$ qui tient compte dans son évolution de l'état des places émettrices de R_b . Et inversement, pour R_b on le note $[G'_b]$.

Pas III.2 :

Calculer les deux nouvelles matrices $[F_a]$ et $[F_b]$ tel que :

$[F_a] = [G_a] \odot [G'_b]$, où \odot est le produit tensoriel¹⁹ de deux matrices.

Le calcul des nouvelles matrices du système complet se fait de la manière suivante en respectant les trois points suivants [DANIEL 95-1] et [SASSINE 98] :

1. deux cas se présente :

- Si ($i \neq j$) (blocs non diagonaux) alors

L'élément $F_{a_{i,j}}$ de la matrice des taux de transitions $[F_a]$ est calculé comme suit :

$$F_{a_{i,j}} = G_{a_{i,j}} \otimes G'_{b_{i,j}}$$

- Sinon ($i = j$) (blocs diagonaux)

L'élément $F_{a_{i,i}}$ de la matrice des taux de transitions $[F_a]$ est calculé comme suit :

$$F_{a_{i,i}} = G_{a_{i,i}} \oplus G'_{b_{i,i}}$$

Fin si

Où \otimes et \oplus sont les produits et sommes de Kronecker²⁰.

De même pour $[F_b]$:

$$[F_b] = [G'_a] \odot [G_b]$$

- Si ($i \neq j$) alors

$$F_{b_{i,j}} = G'_{a_{i,j}} \otimes G_{b_{i,j}}$$

- Sinon ($i = j$) alors

$$F_{b_{i,i}} = G'_{a_{i,i}} \oplus G_{b_{i,i}}$$

Fin si

2. lorsque nous effectuons le produit de Kronecker entre deux paramètres associés à des lois de probabilités exponentielles identiques par exemple δ et δ le résultat est l'élément lui-même (ou en remplace un des deux par l'entier 1) donc δ .

¹⁹ Par la suite, lorsque nous parlerons de produit tensoriel sans préciser davantage, cela signifiera que nous incluons à notre discours les deux types évoqués ci-dessus « produit et somme de Kronecker ». Si non, nous précisons quel type il s'agit. Pour plus de détail de ces calculs nous renvoyons le lecteur à l'annexe III.1.

²⁰ Pour plus de détail de ces calculs nous renvoyons le lecteur à l'annexe III.1.

3. lorsqu'on a effectué le produit de Kronecker entre deux paramètres associés à des lois de probabilités exponentielles différentes à titre d'exemple ε et $\tau_{i,j,k}$ on en remplace le taux $\tau_{i,j,k}$ (la durée de franchissement moyenne ou taux de dépôt ou de retrait moyen).

$[F_a]$ (respectivement $[F_b]$) représente l'évolution du marquage du système complet lorsque seules les dépendances de R_b envers R_a (respectivement R_a envers R_b) sont prises en compte ;

Pas III.3 : réorganiser les matrices $[F_a]$ et $[F_b]$ en fonction des classes d'états $C_{a,k}$ ou $C_{b,l}$. si la réorganisation se fait par rapport à $C_{a,k}$ alors $[F_a]$ reste inchangée et $[F_b]$ devient $[H_b]$. Et inversement par rapport à $C_{b,l}$ ($[F_b]$ reste inchangée et $[F_a]$ devient $[H_a]$;

Pas III.4 : faire l'intersection de $[F_a]$ et $[H_b]$ ou $[H_a]$ et $[F_b]$ pour trouver la matrices des transitions du système complet $[F_S]$;

Etape IV : Simplification de la matrice des transitions du système complet

Cette étape consiste à appliquer trois règles de simplification afin de réduire $[F_S]$ à sa forme minimale. La matrice finale des transitions sera notée $[G_R]$;

Pas IV.1 : (Règle 1 : simplification des états inaccessibles)

Un état est dit inaccessible :

- a) *forme matricielle* : apparition d'une colonne vide ;
- b) *graphiquement* : si cette état ne possède aucune transition d'entrée ;

Sa simplification se fait comme suit :

- a) *forme matricielle* : supprimer la colonne et la ligne correspondante à cet état ;
- b) *graphiquement* : supprimer l'état avec ses arcs sortants ;

Pas IV.2 : (Règle 2 : simplification des états instables)

Un état est dit instable :

- a) *forme matricielle* : s'il existe au moins une transition immédiate comme élément dans une ligne, sauf les transitions (immédiate) qui ne doivent pas être simplifier (c'est-à-dire qui décrivent le lien avec d'autre sous-systèmes en amont ou en aval).
- b) *graphiquement* : s'il possède au moins une transition de sortie immédiate (T_i) sauf les transitions qui ne doivent pas être simplifier (c'est-à-dire qui décrit le lien avec d'autre sous-systèmes en amont ou en aval).

Soit a cet état « état instable », et si on franchit T_i on arrive à b .

Généralisation :

Dans le cas où on a plus d'une transition immédiate on choisit de simplifier l'état qui a le minimum d'arcs entrant (nombre d'arcs entrant = nombre d'éléments non nuls dans une colonne (état)).

Sa simplification se fait comme suit :

- a) *forme matricielle* :
 - fusionner la colonne de a avec celle de b (c'est-à-dire, les éléments non nuls de la colonne de a seront placés dans la colonne de b) ;
 - supprimer la colonne et la ligne de a ;
- b) *graphiquement* : supprimer l'état a avec tous ses arcs sortants. Par contre, ses arcs entrants seront des arcs entrants à b ;

Pas IV.3 : (Règle 3 : simplification des états équivalents)

Deux états a et b sont dits équivalents :

- a) *forme matricielle* : non repérable ;
- b) *graphiquement* : même fonctionnement physique du système. En d'autres termes ces deux états doivent avoir les mêmes places marquées (avec le même nombre de marques) dans le modèle RdP.

Sa simplification se fait comme suit :

- a) *forme matricielle* :
 - fusionner la ligne de b avec celle de a ;
 - supprimer la ligne et la colonne de b ;
- b) *graphiquement* : supprimer seulement l'état a . par contre, ses arcs entrants (respectivement (sortants)) seront des arcs entrants (respectivement (sortants)) de b .

La Figure III.3 donne l'organigramme de la procédure de simplification.

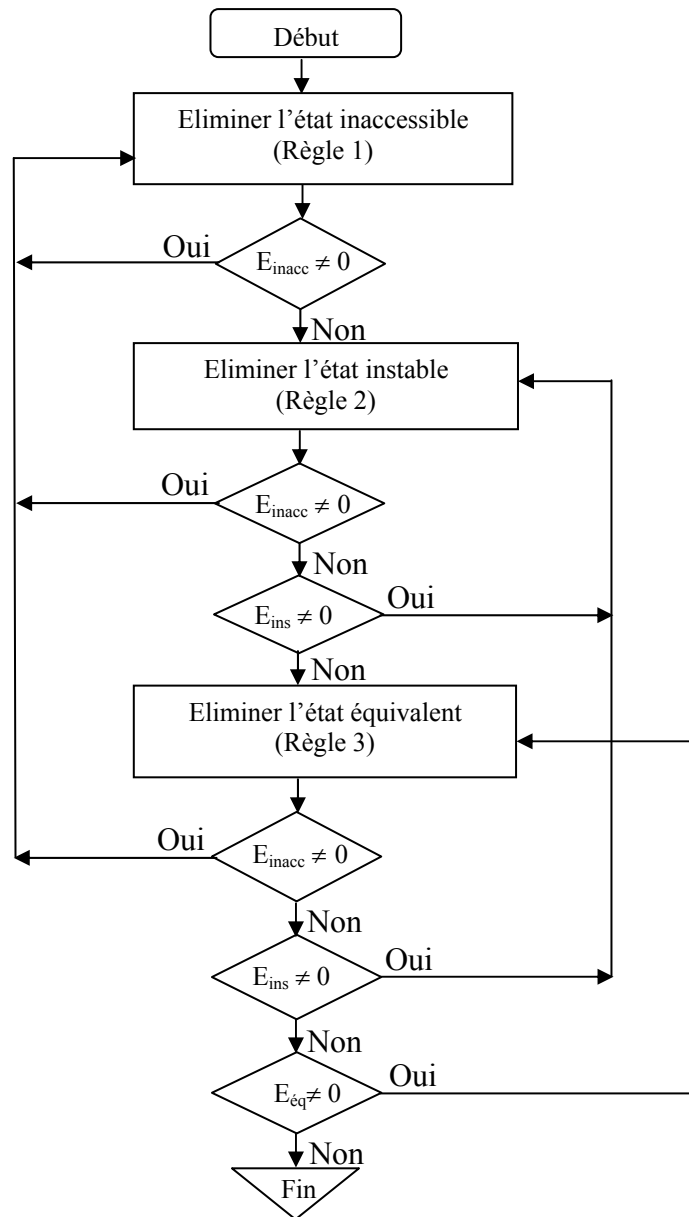


Figure III.3 : Organigramme de la procédure de simplification.

Pas IV.4 : réorganisation de la matrice obtenu selon les états de la machine.

Trois états pour la machine :

1. R = Repos ;
2. M = Marche ;
3. P = panne.

Deux états pour le stock :

1. (0) quand il ne contient pas de pièces ;
2. (1) s'il contient une pièce.

Pas IV.5 : tracer le PdM (ou le graphe des transitions) à partir de la matrice des transitions ;

Généralisation :

Dans notre cas d'étude les machines possèdent un seul stock d'entrée et de sortie, ces stocks sont de capacité égale à 1.

Dans le cas générale, où ses stocks avaient une capacité finie >1 , deux cas se présente. On pourra trouver le détail de ces PdM et matrices de transitions en annexes III.2. Concernant le cas où la machine à plusieurs stocks d'entrée et de sortie le lecteur peut se référer aux modèles proposés par [SASSINE 98].

III.2.4. Décomposition du SdP en cellules simples :

On définit une cellule simple et on note C_i le groupement d'une seule machine M_i avec le stock amont et aval. En d'autre termes, c'est le groupement de la cellule élémentaire amont (SM_i) et la cellule élémentaire aval (MS_i) pour une même machine M_i .

Formellement, on écrit : $C_i = SM_i \cup MS_i$ et, $card^{21} (C_i) = |C_i| = 1 + 1 + 1 = 3$.

Généralisation :

Dans le cas générale où le nombre de stocks en amont et en aval d'une machine est supérieur à 1. La cellule simple C_i est définie par un triplé $\langle {}^{\circ}M_i, M_i, M_i^{\circ} \rangle$. Elle est notée $C_i^{m,p}$ ou encore ${}^mSMS_i^p$ où :

i : est le numéro de la machine ;

m : nombre de stocks amont ;

p : nombre ses stocks avals.

Formellement, on écrit : $C_i = SM_i^m \cup MS_i^p$ et $card (C_i) = |C_i| = m + 1 + p$.

III.2.4.1. Détermination des PdM pour une cellule simple :

Pour déterminer le PdM d'une cellule simple toute entière, il s'agit de combiner les PdM des différentes cellules élémentaires qui le constitue.

L'intersection des différentes cellules élémentaires (SM ou MS) et une machine. Cela veut dire que, pour pouvoir combiner les PdM (matrices de transitions) des différentes cellules élémentaires, nous devons impérativement les réorganiser selon les états de la machine.

Autrement dit, la décomposition en blocs de la matrice de transitions de chacune des cellules élémentaires doit se faire selon les états de la machine pour le rendent homogènes. Pour obtenir la matrice finale représentant l'ensemble de ces matrices, il s'agit d'effectuer le produit des différentes matrices.

²¹ $card$: signifie le cardinal.

Le PdM (ou matrices de transitions) simplifié contiennent à la fois :

- Des valeurs numériques ($\lambda, \mu, \varepsilon$, etc.) et ;
- Des paramètres formels (inconnues) c'est-à-dire $T_1^{(s)}, T_2^{(s)}$, etc.

Ils faut associer des temporisations (des durées de franchissement moyennes) aux paramètres formels (ou aux transitions ($T_1^{(s)}, T_2^{(s)}$, etc.) puisque le calcul des distributions stationnaires des PdM nécessite que les matrices des transitions associées ne contiennent que des valeurs numériques.

La temporisation associée à chacune de ces transitions simulent la présence du reste du système (en amont ou en aval) doit être d'une loi de probabilité de distribution exponentielle.

III.2.5. Résolution des PdM :

III.2.5.1. Résolution modulaire des PdM (méthode itérative) :

Le calcul de la distribution stationnaire du modèle markovien se fait pour :

- Un mode de fonctionnement fixé (régime stationnaire) ;
- Une structure d'atelier cellulaire.

III.2.5.1.1. Principe de la méthode itérative :

La forme cellulaire obtenue après décomposition est telle que chaque cellule (C_i) interagit fortement avec celles qui la précèdent (C_{i-1}) ainsi qu'avec celles qui la suivent (C_{i+1}) les unes parce qu'elles alimentent en pièces ses stocks d'entrée, les autres parce qu'elles puisent des pièces dans ses stocks de sortie. Cette forte interaction impose que la méthode de résolution soit de type itérative car ces méthodes sont capables, au cours des passages successifs, de véhiculer les informations sans contraintes d'une cellule à une autre. Nous utilisons la méthode proposée par [DANIEL 95-1].

Si la (ou les) machine(s) de la cellule (C_i) s'arrête(nt) de fonctionner, les cellules qui suivent et qui précèdent ne tarderont pas à s'arrêter, également, les unes par famine les autres par blocage. Ainsi, il apparaît que les paramètres à propager vers les cellules en aval de la cellule C_i seront les fréquences moyennes de franchissement des transitions de fin d'usinage des machines de C_i , et les paramètres à propager vers les cellules en amont de la cellule C_i seront les fréquences moyennes de franchissement des transitions de chargement des machines de C_i .

Le modèle markovien de chaque cellule est alors résolu séparément, les résultats sont ensuite propagés vers les cellules suivantes lors des itérations vers l'aval du système et jusqu'aux cellules précédentes lors des itérations vers l'amont.

Principe de la propagation :

Pour propager les informations d'une cellule à une autre, nous utilisons la propriété du régime permanent des PdM et le fait que deux cellules adjacentes partagent au moins

qui sont déposées par une cellule dans ses stocks de sortie sont nécessairement consommées par les cellules suivantes.

La caractérisation de l'influence de la cellule C_i sur la cellule C_j et l'influence de la cellule C_j sur la cellule C_i se fait par l'utilisation de taux de dépôt moyen $\tau_{i,j,k}$ d'une pièce dans le stock S_k appartenant à l'intersection entre C_i et C_j et le taux de retrait moyen $\tau_{j,i,k}$ d'une pièce du même stock S_k .

Les taux moyens $\tau_{i,j,k}$ et $\tau_{j,i,k}$ sont les inconnues que le calcul itératif doit permettre d'identifier. Il apparaît que les taux moyens de dépôt et les taux moyens de retrait s'assemblent tous par paires, pour chaque stock.

Le taux $\tau_{i,j,k}$ (respectivement $\tau_{j,i,k}$) : est le paramètre de la distribution de probabilité exponentielle associée à la durée de franchissement de la transition d'entrée (respectivement de sortie) du stock auquel il est lié.

III.2.5.1.2. Algorithme de résolution «Propagation AMont Aval» PAMAV :

Cet algorithme possède quatre étapes :

Etape I : initialisation des paramètres à propager dans le système.

Etape II : Propagation des taux de retrait moyens vers l'amont.

Etape III : Propagation des taux de dépôt moyens vers l'aval.

Etape IV : condition d'arrêt de la propagation.

Un SdP est un doublé $\mathbf{S} = \langle C, [L] \rangle$ tel que :

$C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ est un ensemble fini et non vide de cellules simples ;

$[L] : C \times C \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ est l'application des liens entre les cellules.

$L [C_i, C_j]$ est le poids de l'arc $C_i \rightarrow C_j$. ce poids égale à 1 si l'arc existe, à 0 sinon et, a -1 s'il existe mais dans l'autre sens ($C_j \rightarrow C_i$).

Pour un SdP complet, nous définissons des stocks et machines d'entrée / sortie.

- S_j est un stock d'entrée d'un SdP : si et seulement si S_j ne possède aucune machine en amont. $S_j \in {}^{\circ}\mathbf{S}$ si et seulement si ${}^{\circ}S_j = \emptyset / {}^{\circ}\mathbf{S}$: ensemble des stocks d'entrée d'un SdP.
- S_j est un stock de sortie d'un SdP : si et seulement si S_j ne possède aucune machine en aval. $S_j \in \mathbf{S}^{\circ}$ si et seulement si $S_j^{\circ} = \emptyset / \mathbf{S}^{\circ}$: ensemble des stocks de sortie d'un SdP.
- M_i est une machine d'entrée d'un SdP : si et seulement si tous ses stocks amonts sont des stocks d'entrée au même SdP. $M_i \in {}^{\square}\mathbf{S}$ si et seulement si $M_i^{\circ} \subset {}^{\circ}\mathbf{S} / {}^{\square}\mathbf{S}$: ensemble des machines d'entrée d'un SdP.

- M_i est une machine de sortie d'un SdP : si et seulement si tous ses stocks avals sont des stocks de sortie du même SdP. $M_i \in \mathbf{S}^\square$ si et seulement si $M_i^\circ \subset \mathbf{S}^\circ / \mathbf{S}^\square$: ensemble des machines d'entrée d'un SdP.
- On appelle successeur d'une cellule C_i et on note $\text{Succ}(C_i)$, l'ensemble des cellules C_j (avec $j = \{1, 2, \dots, n\}$ telles que $L[i,j] = 1$.
Se sont les cellules correspondantes aux cases égales à 1 sur la même ligne i de la matrice $[L]$.
- On appelle prédécesseur d'une cellule C_i et on note $\text{Pred}(C_i)$, l'ensemble des cellules C_j (avec $j = \{1, 2, \dots, n\}$ et $j \neq i$) telles que $L[i,j] = -1$.
Se sont les cellules correspondantes aux cases égales à -1 sur le même ligne de la matrice $[L]$.
- Les transitions T_1 et T_2 du stock sont remplacées respectivement par le taux de dépôt et de retrait moyen de ce stock ($\tau_{i,j,k}$ et $\tau_{j,i,k}$).

Etape I : Initialisation des paramètres à propager

Dans le but d'accélérer la convergence nous introduisons des valeurs initiales calculées. Ces valeurs initiales correspondent au débit à vide²² de chaque machine, pour plus de détail (voir [SASSINE 98]).

Pas I.1 : déterminer l'ensemble ($S_{i,j}$) des stocks du SdP qui ne sont ni à son entrée ni à son sortie²³, c'est-à-dire $S_k / S_k \notin (\mathbf{S}^\circ \cup \mathbf{S}^\circ)$.

Pas I.2 : pour chaque $S_k \in S_{i,j}$, on calcule $\tau_{i,j,k}^{(0)}$

$$\tau_{i,j,k}^{(0)} = \sum_{M_q \in \mathbf{S}_k} D_{\text{vide}}(M_q)$$

$$\text{tel que : } D_{\text{vide}}(M_i) = \text{Pr}_{M_i} \times \delta_i = \frac{\mu_i \varepsilon_i \delta_i}{\mu_i (\delta_i + \lambda_i) + \varepsilon_i (\lambda_i + \mu_i)}$$

Etape II : Propagation des taux de retrait moyens ($\tau_{j,i,k}$) vers l'amont

Dans cette étape on calcule les taux de retrait ($\tau_{j,i,k}$), puis on les propage d'une cellule C_j vers ses prédécesseurs.

Pour $j = n$ à 1 et (Si $\text{Pred}(C_j) = \emptyset$) Faire

Pas II.1 : Calculer le vecteur de distribution stationnaire $[\text{Pr}]_j$ de la cellule C_j .

Pas II.2 : Déterminer l'ensemble $\text{Pred}(C_j)$ des prédécesseurs de la cellule C_j .

Pour toute cellule C_i telle que $C_i \in \text{Pred}(C_j)$ Faire

²² Le débit à vide de la machine isolée est le nombre de pièces servies (c'est-à-dire qui sortent de la machine), bien évidemment quand celle-ci est en marche (en isolation). Ceci se traduit par le produit de la probabilité que la machine soit en marche (Pr_M) avec le taux de service moyen de la machine (δ).

²³ Le taux de dépôt moyen des pièces dans le stock d'entrée du SdP et le taux de retrait moyen des pièces de ce stock de sortie sont connus. De plus, sont considérées de capacités infinies.

Pas II.3 : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules C_i et C_j .

$$\text{Soit } S_{i,j} = (S^\circ(C_i) \cap {}^\circ S(C_j))$$

Pour chaque stock $S_k \in S_{i,j}$ **Faire**

Pas II.4 : Déterminer l'ensemble des machines en aval de ce stock, S_k°

Pour toute machine M_q telle que $M_q \in S_k^\circ$ **Faire**

Pas II.5 : Calculer la fréquence moyenne de franchissement de la transition de démarrage $T_1^{(M)}$ de M_q :

$$F_{dum}(M_q) = Pr_R \times \varepsilon_q$$

Fin Pour M_q ;

Pas II.6 : Effectuer la somme de ces fréquences pour toutes les machines M_q :

$$F_{dum} = \sum_{M_q} F_{dum}(M_q)$$

Pas II.7 : Calculer $Pr_{pds}(S_k)$, la probabilité qu'il y ait au moins une pièce disponible dans le stock S_k .

Pas II.8 : Dédire le taux moyen de retrait d'une pièce du stock S_k .

$$\tau_{j,i,k} = \frac{F_{dum}}{Pr_{pds}(S_k)}^{24}$$

Fin pour S_k ;

Fin pour C_i ;

Fin pour j ;

À l'itération r , on notera : $\tau_{j,i,k}^{(r)}$

Etape III : Propagation des taux de dépôt moyens ($\tau_{i,j,k}$) vers l'aval

Dans cette étape on calcule les taux de dépôt ($\tau_{i,j,k}$), puis on les propagent d'une cellule C_i vers ses successeurs.

Pour $i = 1$ à n et (Si $Succ(C_i) \neq \emptyset$) **Faire**

Pas III.1 : Calculer le vecteur de distribution stationnaire $[Pr]_i$ de la cellule C_i .

Pas III.2 : Déterminer l'ensemble $Succ(C_i)$ des successeurs de la cellule C_i .

Pour toute cellule C_j telle que $C_j \in Succ(C_i)$ **Faire**

Pas III.3 : Déterminer l'ensemble des stocks communs entre les cellules C_i et C_j .

$$\text{Soit } S_{i,j} = (S^\circ(C_i) \cap {}^\circ S(C_j))$$

Pour chaque stock $S_k \in S_{i,j}$ **Faire**

Pas III.4 : Déterminer l'ensemble des machines en amont de ce stock, ${}^\circ S_k$

²⁴ La fréquence de démarrage d'une machine (fréquence d'envoi du signal *dum*) est égale à la probabilité qu'il y ait une pièce disponible dans chacun de ses stocks amonts multipliée par le taux de retrait de la pièce.

Pour toute machine M_q telle que $M_q \in \circ S_k$ **Faire**

Pas III.5 : Calculer la fréquence moyenne de franchissement de la transition de fin d'usinage $T_4^{(M)}$ de M_q :

$$F_{fum} (M_q) = Pr_M \times \delta_q$$

Fin pour M_q ;

Pas III.6 : Effectuer la somme de ces fréquences pour toutes les machines M_q :

$$F_{fum} = \sum_{M_q} F_{fum} (M_q)$$

Pas III.7 : Calculer $Pr_{pls} (S_k)$, la probabilité qu'il y ait au moins une place libre dans le stock S_k .

Pas III.8 : Dédire le taux moyen de dépôt d'une pièce dans le stock S_k .

$$\tau_{i,j,k} = \frac{F_{fum}}{Pr_{pls} (S_k)} \quad 25$$

Fin pour S_k ;

Fin pour C_j ;

Fin pour i ;

À l'itération r , on notera : $\tau_{i,j,k}^{(r)}$

Etape IV : Condition d'arrêt de la propagation

Tout algorithme itératif doit posséder une condition d'arrêt et un test permettant de vérifier si cette condition est vérifiée ou non.

On appelle $\tau_{i,j,k}^{(r)}$ et $\tau_{j,i,k}^{(r)}$ les valeurs des taux moyen de dépôt, respectivement de retrait après la n -ième itération. Sachant que la preuve formelle de l'algorithme est irréalisable, l'algorithme opte pour un critère d'arrêt assez sévère qui est le critère quadratique. Ainsi, pour chaque taux de dépôt $\tau_{i,j,k}^{(r)}$ et chaque taux de retrait $\tau_{j,i,k}^{(r)}$, on calcule l'écart par rapport à la valeur trouvée à la précédente itération :

$$\Delta_{i,j,k}^2 = \left[\tau_{i,j,k}^{(r)} - \tau_{i,j,k}^{(r-1)} \right]^2 \quad \text{et} \quad \Delta_{j,i,k}^2 = \left[\tau_{j,i,k}^{(r)} - \tau_{j,i,k}^{(r-1)} \right]^2$$

²⁵ La fréquence de fin d'usinage d'une machine (fréquence d'envoi du signal *fum*) est égale à la probabilité qu'il y ait une place libre dans chacun de ses stocks avals multipliée par le taux de dépôt de la pièce.

L'algorithme s'arrêtera si : $\sqrt{\sum_{i,j,k} (\Delta^2_{i,j,k} + \Delta^2_{j,i,k})} \leq \alpha$

La Figure III.4 donne l'organigramme de l'algorithme de résolution itérative PAMAV.

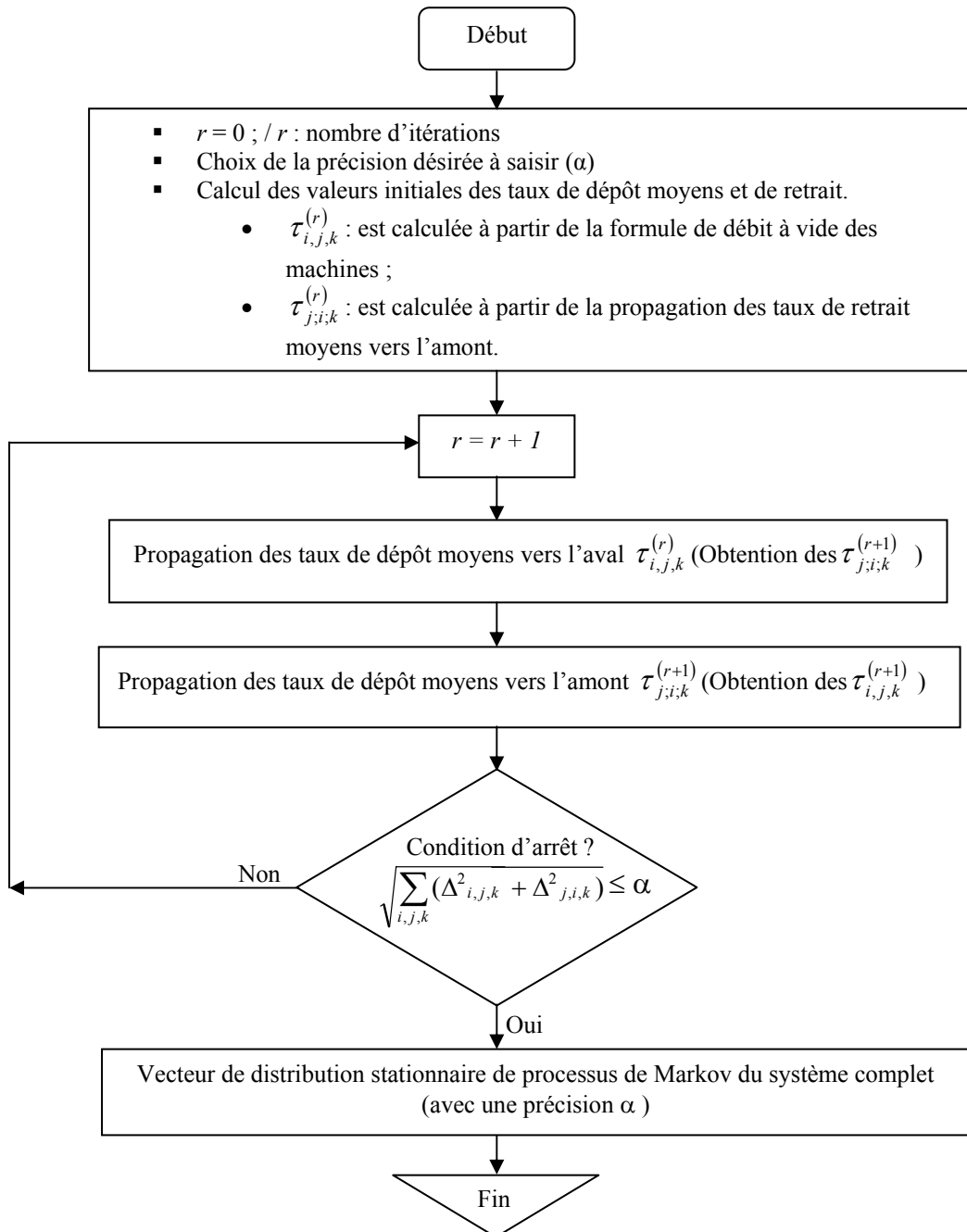


Figure III.4 : Organigramme de l'algorithme de résolution itérative PAMAV

III.4. Conclusion :

La méthodologie RdPSGSyI-PdM, est une méthodologie basé sur l'utilisation conjointe et complémentaire des RdPSGSyI et des PdM, le premier pour une modélisation modulaire permettant au second un calcul des probabilités d'états des composants.

A partir de ses résultats on calcul les principaux indicateurs de performances, qui constituent ainsi une aide précieuse pour suivre les performances de l'outil de production, et mettre en évidence ses problèmes. Une aide à la décision pour l'amélioration est alors possible.

IV.1. Introduction :

Dans le chapitre précédent, une méthodologie de modélisation et d'évaluation des performances a été présentée. Comme application, ce chapitre propose le cas d'une ligne d'emboutissage de l'entreprise Bouteille A Gaz (BAG) Batna.

La modélisation et l'évaluation de performances de cette ligne est réalisée à l'aide des concepts définis dans les chapitres précédents (modèles génériques, modélisation modulaire, PdM, DEREK, PAMAV,...etc).

IV.2. Présentation de l'entreprise BAG-Batna :

L'entreprise nationale des emballages métalliques (EN E.M.B) appartient au secteur de l'industrie enveloppant plusieurs entreprises implantées sur le territoire national, parmi elles l'entreprise BAG.

L'entreprise est destinée à la production des bouteilles à gaz ordinaire (11/13 Kg, 11 Kg) pour satisfaire le besoin national et plus particulièrement celui de l'est algérien.

L'entreprise est entrée en production en juin 1979, avec une capacité installée de 800.000 bouteilles par an. Le régime de production est un régime de (2 × 8), avec un effectif de 341 personnes. Actuellement après son extension sa production est passée à 1.000.000 bouteilles par an avec un effectif de 525 personnes

IV.3. Présentation des unités de l'entreprise BAG :

Trois unités principales composent le processus de production de cette unité (Figure IV.1), unité de mécanique, soudage et finition.

IV.3.1. Unité de mécanique : elle regroupe les lignes de production des emboutis et des pieds ;

1. Ligne découpe flancs : regroupe les machines suivantes :

- Chariot porte coil ;
- Dérouleuse ;
- Redresseur ;
- Avance bande ;
- Presse découpe flancs ;
- Cisaille.

Dans cette ligne la tôle est transportée dans les chariots porte coil à la dérouleuse pour être déroulée et dressée et enfin découpée en flancs.

2. Ligne d'emboutissage : deux sous-ligne constituent cette ligne ; la ligne de fabrication des emboutis inférieurs et celle des emboutis supérieurs. Elle est constituée des machines suivantes :

- Presse de marquage ;
- Graisseuse flancs ;
- Presse d'emboutissage ;

- Soyeuse rogneuse ;
- Poinçonneuse.

Dans cette ligne, les flancs ainsi découpés constituent les emboutis inférieurs et supérieurs de la bouteille à gaz. Les flancs de l'emboutis inférieurs passent d'abord par le système de graissage puis par la presse à emboutir et enfin par la machine rogneuse, quand à l'emboutis supérieur il sera marqué, graissé, emboutis rogné, soyé puis poinçonné.

3. Ligne pieds : cette ligne est destinée à la fabrication des pieds des bouteilles à gaz, elle regroupe les machines suivantes :

- Dérouleuse ;
- Redresseur ;
- Avance bande ;
- Découpeuse ;
- Ceintreuse ;
- Soudeuse ;
- Compreuse.

Dans cette ligne, le rouleau de tôle sera déroulé, redressé puis découpé. Les pieds ainsi découpés passent à la ceintreuse, puis à la soudeuse et enfin à la compreuse.

4. Ligne chapeaux : la fonction de la ligne est la production des chapeaux des bouteilles à gaz qui ont une forme cylindrique taraudés à leurs extrémités. Les machines réalisant cette fonction sont :

- Tronçonneuse ;
- Chanfreineuse ;
- Calibrage et évasement ;
- Poinçonnage trou de bras ;
- Chambrage cotés latéraux;
- Taraudeuse.

Les quatre lignes de l'unité mécanique aboutissent à la dégraisseuse. Elle assure la fonction de lavage.

IV.3.2. Unité de soudage : cette unité fait l'objet de l'assemblage des différentes parties constituant la bouteille.

Cette unité comprend trois types de soudeuses :

- a) Soudeuse pieds : destinée à souder les pieds avec les emboutis inférieurs ;
- b) Soudeuse collerette : permet de souder les collerettes avec les emboutis supérieurs ;
- c) Soudeuse circulaire : sert à souder l'emboutis supérieur et inférieur de la bouteille.

IV.3.3. Unité de finition : plusieurs opérations sont effectuées dans cette unité, afin de réaliser le produit fini [KAANIT 06].

1. Traitement thermique ;
2. Essais ;
3. Essai d'éclatement ;
4. Revêtement : Grenailage, métallisation et Peinture.

IV.4. Présentation de la ligne d'emboutissage étudiée :

La ligne d'emboutissage a une structure linéaire, constituée de machines en série. Ces machines sont reliées entre elles par des stocks (Figure IV.1).

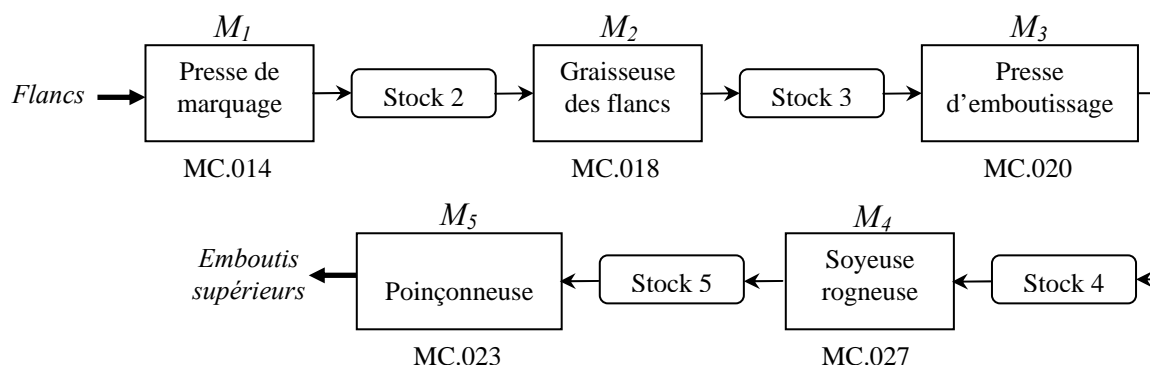


Figure IV.1 : Structure physiques de la ligne d'emboutissage des emboutis supérieurs de BAG.

La ligne fonctionne en semi-automatique, chaque machine est alimentée par un opérateur, à l'exception de quelque équipement où la spécification précise qu'ils fonctionnent en automatique. Chaque équipement peut être réglé manuellement.

Pour plus de détail sur le fonctionnement des machines composant cette ligne, le lecteur peut se référer à [KAANIT 06].

IV.5. Modélisation de la ligne d'emboutissage des emboutis supérieurs :

La ligne est composée de cinq machines (M_1 , M_2 , M_3 , M_4 et M_5) séparées par quatre stocks (S_2 , S_3 , S_4 et S_5). Les stocks S_1 et S_6 sont de capacité infinie [§ I.4]. Le schéma fondamental de cette ligne est donné par la Figure IV.2.

Pour S_1 (Cas 1 : SM)

Si on revient aux modèles génériques de référence (Figure II.6), cela signifie que le signal $?pds$ est toujours autorisé. Pour cela, la suppression de ce signal n'a aucune importance.

Pour S_6 (Cas 2 : MS)

Le signal $?pls$ est toujours autorisé. La suppression de ce signal n'a aucune importance. Donc, le PdM dans ces deux cas est identique à celui de la machine toute seule.

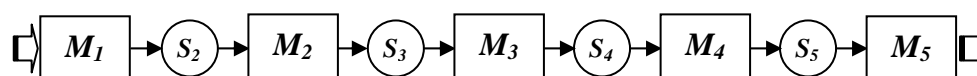


Figure IV.2 : Schéma structurel de la ligne d'emboutissage des emboutis supérieurs de BAG.

IV.5.1. Application de l'algorithme DEREK pour déterminer les modèles RdP de chaque module :

Cas1 : SM ($R_a = R_{stock}$, $R_b = R_{machine}$).

Etape I : Détermination des modèles RdP de chaque module.

A partir des modèles génériques de références de la Figure II.6, nous obtenons le modèle *SM*.

Pour R_{stock} :

- **Pas I.1-1.1** : puisque aucune machine en amont n'est présente, on supprime les signaux *?fum* et *!pls* ; on obtient alors R_a .

Pour $R_{machine}$:

- **Pas I.1-1.2** : comme le stock en aval est absent, on supprime les signaux *!fum* et *?pls*. On supprime également la place P_3 et la transition T_3 , on relie ensuite T_4 à P_1 ; on obtient alors R_b .

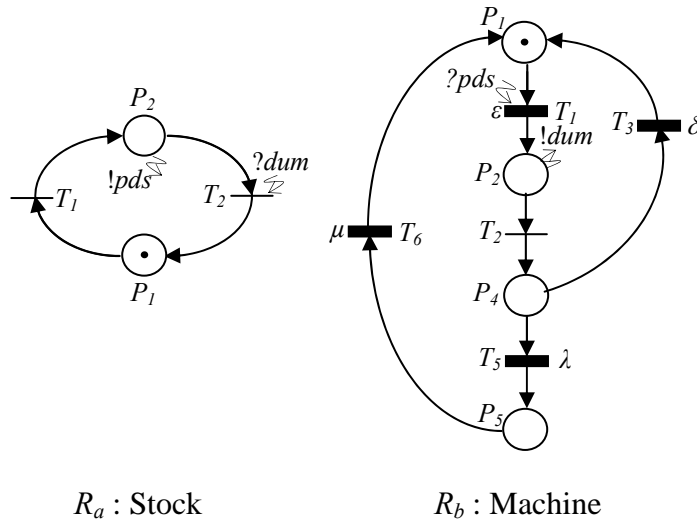


Figure IV.3 : Modèle RdPS²G du cas *SM*.

Cas2 : MS ($R_a = R_{machine}$, $R_b = R_{stock}$).

Etape I : Détermination des modèles RdP de chaque module.

A partir des modèles génériques de références de la Figure II.6, nous obtenons le modèle *MS*.

Pour $R_{machine}$:

- **Pas I.2-2.2** : comme le stock en amont est absent, on supprime les signaux *!dum* et *?pds*. On supprime également la place P_2 et la transition T_2 , on relie ensuite T_1 à P_4 ; on obtient alors R_a .

Pour R_{stock} :

- **Pas I.1-2.1** : puisque aucune machine en aval n'est présente, on supprime les signaux *?dum* et *!pds* ; on obtient alors R_b .

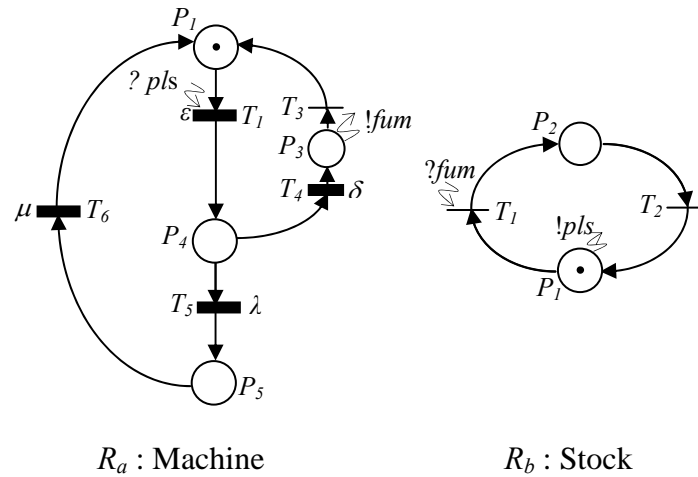


Figure IV.4 : Modèle RdPS²G du cas MS.

Chaque élément de cette ligne est représenté par un RdPSG où les liens de synchronisation entre machine-stock sont réalisés par des émissions et réceptions de signaux. On obtient ainsi le RdPSGSyI correspondant à la ligne (Figure IV.5).

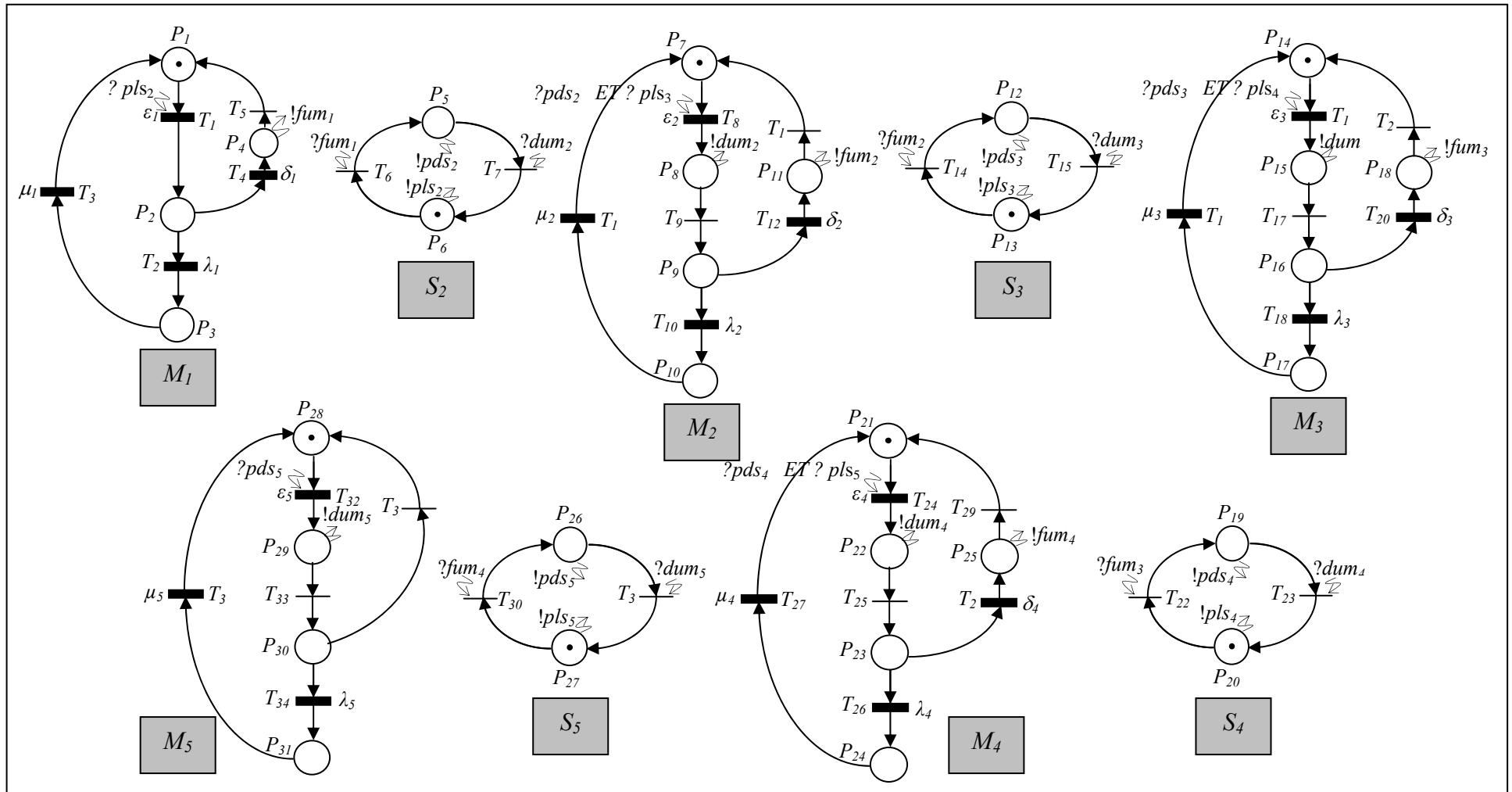


Figure IV.5 : RdPSGSyI de la ligne d'emboutissage des emboutis supérieurs de BAG.

IV.6. Description du modèle :

On reconnaîtra sur ce RdPSGSyI les éléments suivants :

- La machine M_1 : places P_1, P_2, P_3, P_4 et transitions T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5 .
- La machine M_2 : places $P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}$ et transitions $T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{12}$ et T_{13} .
- La machine M_3 : places $P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{17}, P_{18}$ et transitions $T_{16}, T_{17}, T_{18}, T_{19}, T_{20}$ et T_{21} .
- La machine M_4 : places $P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{24}, P_{25}$ et transitions $T_{24}, T_{25}, T_{26}, T_{27}, T_{28}$ et T_{29} .
- La machine M_5 : places $P_{28}, P_{29}, P_{30}, P_{31}$ et transitions $T_{32}, T_{33}, T_{34}, T_{35}$ et T_{36} .
- Le stock S_2 : places P_5, P_6 et transitions T_6 et T_7 .
- Le stock S_3 : places P_{12}, P_{13} et transitions T_{14} et T_{15} .
- Le stock S_4 : places P_{19}, P_{20} et transitions T_{22} et T_{23} .
- Le stock S_5 : places P_{26}, P_{27} et transitions T_{30} et T_{31} .

Le modèle de la machine M_1 est sensiblement différent des autres modèles de machines. Il ne comporte que quatre places :

- place P_1 : machine M_1 au repos.
- place P_2 : machine M_1 en marche.
- place P_3 : machine M_1 en panne/réparation.
- place P_4 : place émettrice envoyant un signal de fin d'activité à destination du stock S_2 . Le franchissement de la transition de sortie de cette place se fait en un temps nul. Le signal émis ($!fum_1$) sera donc de type impulsionnel.

La transition T_1 représente le chargement d'une pièce et le démarrage de la machine M_1 . Elle est assujettie à la présence du message $?pls_2$, signifient la présence d'au moins un emplacement libre dans le stock S_2 . ε_1 est le taux de chargement. La transition T_2 représente le passage à l'état de panne de la machine M_1 , avec un taux de panne λ_1 . La transition T_4 représente la fin de l'activité de M_1 , temporisée par taux de service δ_1 . La transition T_3 représente la fin de la réparation de M_1 , avec un taux de réparation μ_1 .

Les modèles des machines M_2, M_3 et M_4 ont des fonctionnements identiques. Ils comportent cinq places dont les significations sont les suivantes :

- place P_7 (respectivement P_{14} et P_{21}) : machine M_2 (respectivement M_3 et M_4) au repos.
- place P_{10} (respectivement P_{17} et P_{24}) : machine M_2 (respectivement M_3 et M_4) en panne/réparation.
- place (P_8, P_9) [respectivement (P_{15}, P_{16}) et (P_{22}, P_{23})] : machine M_2 (respectivement M_3 et M_4) en marche. P_8 (respectivement P_{15} et P_{22}) est une place émettrice envoyant un signal de début d'activité au stock S_2 (respectivement S_3 et S_4). La transition de sortie de la place P_8 (respectivement P_{15} et P_{22}) [(T_9) (respectivement (T_{17}) et (T_{25}))] est immédiate et sera franchie

en un temps nul. Les signaux émis ($!dum_2$, $!dum_3$, $!dum_4$) seront de type impulsif.

- place P_{11} (respectivement P_{18} et P_{25}) : place émettrice envoyant un signal de fin d'activité à destination du stock S_3 (respectivement S_4 et S_5). Les transitions de sortie de ces places sont immédiates et seront franchies en un temps nul. Les signaux émis ($!fum_2$, $!fum_3$, $!fum_4$) seront de type impulsif.

Les places P_{11} , P_{18} , P_{25} sont des places pour lesquelles les machines M_2 , M_3 et M_4 sont au repos.

Le principe de fonctionnement des modèles des machines M_2 , M_3 et M_4 est le même que pour M_1 avec :

ε_i : taux de chargement de la machine i ;

λ_i : taux de panne de la machine i ;

δ_i : taux de service de la machine i ;

μ_i : taux de réparation de la machine i ;

Le modèle de la machine M_5 est aussi sensiblement différent des autres modèles de machines. Il comporte également quatre places dont les significations sont les suivantes :

- place P_{28} : machine M_5 au repos.
- places P_{29} , P_{30} : machine M_5 en marche. P_{29} est une place émettrice envoyant un signal de début d'activité au stock S_5 . La transition de sortie de cette place (T_{33}) est immédiate et sera franchie en un temps nul. Le signal émis ($?dum_5$) sera donc de type impulsif.
- place P_{31} : machine M_5 en panne/réparation.

Les modèles des stocks S_2 , S_3 , S_4 et S_5 sont totalement identiques. Chacun de ces modèles possède deux places et deux transitions dont les significations sont données ci-après :

- place P_5 (respectivement P_{12} , P_{19} et P_{26}) : nombre de pièces dans le stock S_2 (respectivement S_3 , S_4 et S_5). Si il y a au moins une pièce, le signal de synchronisation $!pds_2$ (respectivement $!pds_3$, $!pds_4$ et $!pds_5$) est émis.
- place P_6 (respectivement P_{13} , P_{20} et P_{27}) : nombre d'emplacements libres dans le stock S_2 (respectivement S_3 , S_4 et S_5). Si il y a au moins un emplacement libre, le signal de synchronisation $!pls_2$ (respectivement $!pls_3$, $!pls_4$ et $!pls_5$) est émis.

Les transitions T_6 , T_{14} , T_{22} et T_{30} représentent le dépôt d'une pièce dans les stocks S_2 , S_3 , S_4 et S_5 . Elles sont synchronisées par les messages de fin d'activité des machines M_1 , M_2 , M_3 et M_4 ($?fum_1$, $?fum_2$, $?fum_3$ et $?fum_4$).

Les transitions T_7 , T_{15} , T_{23} et T_{31} représentent le retrait d'une pièce dans les stocks S_2 , S_3 , S_4 et S_5 . Elles sont synchronisées par les messages de début d'activité des machines M_2 , M_3 , M_4 et M_5 ($?dum_2$, $?dum_3$, $?dum_4$ et $?dum_5$).

IV.7. Forme boîte noire de la ligne modélisée :

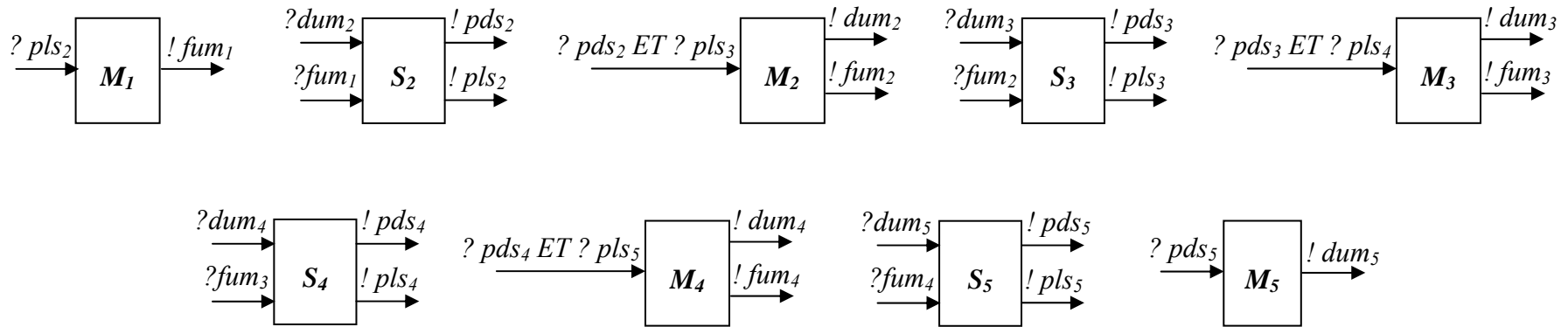


Figure IV.6 : Forme boîte noire de la ligne d'emboutissage des emboutis supérieurs de la BAG.

IV.8. Analyse qualitative :

IV.8.1. Calcul des invariants de marquage :

Si on effectue le calcul des invariants de marquage [§ II.2.4.6.6], on obtient neuf invariants minimaux qui sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} M(P_1) + M(P_2) + M(P_3) + M(P_4) = 1 \\ M(P_5) + M(P_6) = 1 \\ M(P_7) + M(P_8) + M(P_9) + M(P_{10}) + M(P_{11}) = 1 \\ M(P_{12}) + M(P_{13}) = 1 \\ M(P_{14}) + M(P_{15}) + M(P_{16}) + M(P_{17}) + M(P_{18}) = 1 \\ M(P_{19}) + M(P_{20}) = 1 \\ M(P_{21}) + M(P_{22}) + M(P_{23}) + M(P_{24}) + M(P_{25}) = 1 \\ M(P_{26}) + M(P_{27}) = 1 \\ M(P_{28}) + M(P_{29}) + M(P_{30}) + M(P_{31}) = 1 \end{array} \right.$$

Cela signifie que les machines seront soit au repos, soit en marche, soit en panne et que si on ajoute le nombre d'emplacements libres et le nombre de pièces présentes pour chacun des stocks, on aura toujours une pièce. Ces résultats sont bien conformes à ce que l'on pouvait espérer au vu du modèle.

Outre ces vérifications, on peut de plus affirmer que le RdPSGSyI de la Figure IV.5 est borné.

IV.8.2. Interprétation du modèle RdPSGSyI : application de l'algorithme d'interprétation

Nous allons détailler sur quelques itérations de l'algorithme ALIN-RdPSGSyI l'évolution du modèle de la Figure IV.3. L'instant initial et le marquage initial sont respectivement t_0 et $M_0 = P_1P_6P_7P_{13}P_{14}P_{20}P_{21}P_{27}P_{28}$.

Itération 1 :

- étape 1 : $L_1 = \{\emptyset\}$
- étape 2 : $L_2 = \{T_1, T_6, T_8, T_{14}, T_{16}, T_{22}, T_{24}, T_{30}, T_{32}\}$
- étape 3 : $L_3 = \{T_1\}$
- étape 4 : $L_4 = L_2 \cap L_3 = \{T_1\}$
- étape 5 : $L_5 = L_1 \cup L_4 = \{T_1\}$
- étape 6 : La transition de L_5 (T_1) est une transition immédiate, d'où $L_6 = L_5 = \{T_1\}$
- étape 7 : Il n'y a pas de conflit, d'où $L_7 = L_6 = \{T_1\}$
- étape 8 : On franchit T_1 à l'instant $t_1 = t_0 + d_1$. On atteint le marquage $M_1 = P_2P_6P_7P_{13}P_{14}P_{20}P_{21}P_{27}P_{28}$.

Itération 2 :

- étape 1 : $L_1 = \{T_2, T_4\}$
- étape 2 : $L_2 = \{T_6, T_8, T_{14}, T_{16}, T_{22}, T_{24}, T_{30}, T_{32}\}$
- étape 3 : $L_3 = \{\emptyset\}$

- étape 4 : $L_4 = L_2 \cap L_3 = \{\emptyset\}$
- étape 5 : $L_5 = L_1 \cup L_4 = \{T_2, T_4\}$
- étape 6 : Tout les transitions de L_5 sont des transitions temporisées, d'où $L_6 = L_5 = \{T_2, T_4\}$
- étape 7 : Il n'y a pas de conflit, d'où $L_7 = L_6 = \{T_2, T_4\}$
- étape 8 : On adopte un mode de fonctionnement concurrentiel, c'est-à-dire au plus tôt. On effectue un tirage aléatoire des durées d_2 et d_4 associées aux transitions T_2 et T_4 . On suppose que $d_4 < d_2$. On franchit T_4 à l'instant $t_2 = t_1 + d_4$. On atteint le marquage $M_2 = P_4P_6P_7P_{13}P_{14}P_{20}P_{21}P_{27}P_{28}$.

Itération 3 :

- étape 1 : $L_1 = \{T_5\}$
- étape 2 : $L_2 = \{T_6, T_8, T_{14}, T_{16}, T_{22}, T_{24}, T_{30}, T_{32}\}$
- étape 3 : $L_3 = \{T_6\}$
- étape 4 : $L_4 = L_2 \cap L_3 = \{T_6\}$
- étape 5 : $L_5 = L_1 \cup L_4 = \{T_5, T_6\}$
- étape 6 : Tout les transitions de L_5 sont des transitions immédiates, d'où $L_6 = L_5 = \{T_5, T_6\}$
- étape 7 : Il y a un conflit entre T_5 et T_6 que l'interprétation VFP permet de lever. On obtient $L_7 = L_6 = \{T_5, T_6\}$
- étape 8 : On franchit T_5 et T_6 en parallèle et en un temps nul. On atteint le marquage $M_3 = P_1P_5P_7P_{13}P_{14}P_{20}P_{21}P_{27}P_{28}$.

Itération 4 :

- étape 1 : $L_1 = \{\emptyset\}$
- étape 2 : $L_2 = \{T_1, T_7, T_8, T_{14}, T_{16}, T_{22}, T_{24}, T_{30}, T_{32}\}$
- étape 3 : $L_3 = \{T_8\}$
- étape 4 : $L_4 = L_2 \cap L_3 = \{T_8\}$
- étape 5 : $L_5 = L_1 \cup L_4 = \{T_8\}$
- étape 6 : La transition de L_5 (T_8) est une transition immédiate, d'où $L_6 = L_5 = \{T_8\}$
- étape 7 : Il n'y a pas de conflit, d'où $L_7 = L_6 = \{T_8\}$
- étape 8 : On franchit T_8 à l'instant $t_3 = t_2 + d_8$. On atteint le marquage $M_4 = P_1P_5P_8P_{13}P_{14}P_{20}P_{21}P_{27}P_{28}$.

Itération 5 :

- étape 1 : $L_1 = \{T_9\}$
- étape 2 : $L_2 = \{T_1, T_7, T_{14}, T_{16}, T_{22}, T_{24}, T_{30}, T_{32}\}$
- étape 3 : $L_3 = \{T_7\}$
- étape 4 : $L_4 = L_2 \cap L_3 = \{T_7\}$
- étape 5 : $L_5 = L_1 \cup L_4 = \{T_7, T_9\}$
- étape 6 : Tout les transitions de L_5 sont des transitions immédiates, d'où $L_6 = L_5 = \{T_7, T_9\}$
- étape 7 : Il y a un conflit entre T_7 et T_9 que l'interprétation VFP permet de lever. On obtient $L_7 = L_6 = \{T_7, T_9\}$

- étape 8 : On franchit T_7 et T_9 en parallèle et en un temps nul. On atteint le marquage $M_5 = P_1P_6P_9P_{13}P_{14}P_{20}P_{21}P_{27}P_{28}$.
etc.

Remarquons que les marquages M_2 et M_4 sont instables. Par conséquent, le système ne s'y arrêtera jamais, et ils n'apparaîtront pas dans le processus de Markov isomorphe ou des marquages accessibles.

IV.9. Analyse quantitative : ou évaluation de performances

IV.9.1. Décomposition de la ligne en cellules élémentaires :

L'élément principal d'un SdP étant la machine, on distingue :

- une cellule élémentaire amont où le stock est en amont de la machine, pour la Figure IV.2. On a : C_{e2}, C_{e4}, C_{e6} et C_{e8} .
- une cellule élémentaire aval où le stock est en aval de la machine, pour la Figure IV.2. On a : C_{e1}, C_{e3}, C_{e5} et C_{e7} .

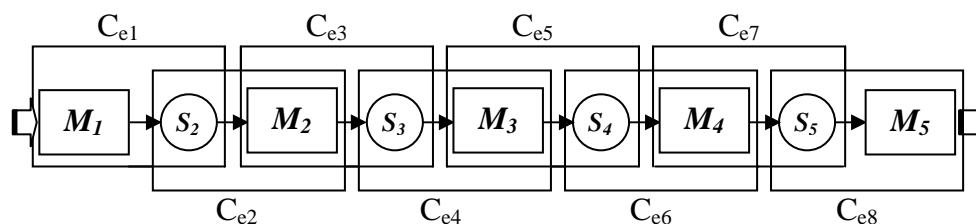


Figure IV.7 : Représentation schématique du groupement en cellules élémentaires.

IV.9.2. Application de l'algorithme DEREK pour générer le PdM simplifié pour chaque cellule élémentaire :

La génération d'un PdM de la ligne toute entière s'effectue en considérant les modules deux par deux, et en étudiant les influences mutuelles entre eux.

Etape II : Génération des matrices de transition des modules isolés.

Pas II.1 : Déterminer les places émettrices de R_a et R_b .

$$E_a = \{\text{places émettrices de } R_a\} = \{P_2\};$$

$$E_b = \{\text{places émettrices de } R_b\} = \{P_2\};$$

Pas II.2 : Enlever les signaux internes de synchronisation entre R_a et R_b , il s'agit ici de signaux *dum* (?*dum* et !*dum*) et *pls* (?*pls* et !*pls*).

Pas II.3 : Construire les graphes des marquages accessibles de R_a et R_b isolés (Figure IV.8).

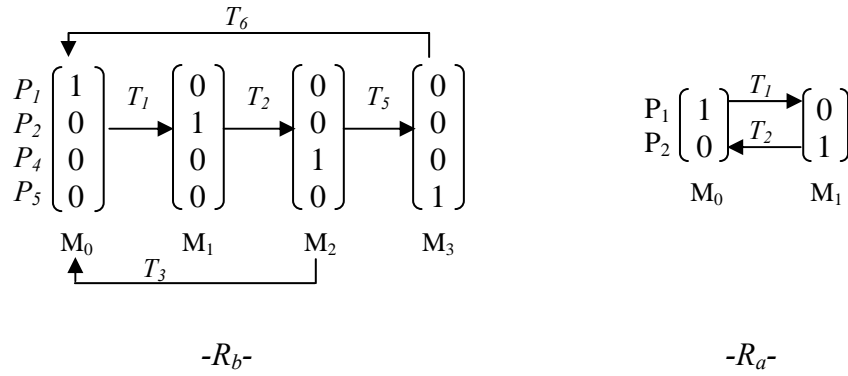


Figure IV.8 : Graphes des marquages accessibles de R_a et R_b .

La Figure IV.9 nous donne la représentation du PdM de chaque module.

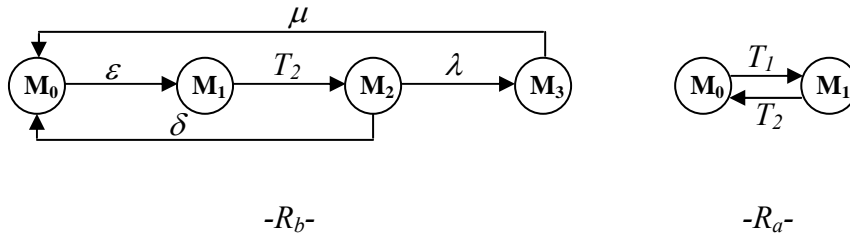


Figure IV.9 : PdM de R_a et R_b isolés.

Sous forme matricielle, ils peuvent être représentés par :

$$R_b : [G_b] = \begin{matrix} & \begin{matrix} M_0 & M_1 & M_2 & M_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_2 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & \lambda \\ \mu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad R_a : [G_a] = \begin{matrix} & \begin{matrix} M_0 & M_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_0 \\ M_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & T_1 \\ T_2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Pas II.4 : Déterminer les classes d'états

Deux classes d'états ($l = 2$) sont possibles pour R_a :

$$C_{a,1} = \{\text{marquages où } M(P_2) = 0\} = \{M_0\} ;$$

$$C_{a,2} = \{\text{marquages où } M(P_2) = 1\} = \{M_1\} ;$$

Deux classes d'états ($k = 2$) sont possibles pour R_b :

$$C_{b,1} = \{\text{marquages où } M(P_2) = 0\} = \{M_0, M_2, M_3\} ;$$

$$C_{b,2} = \{\text{marquages où } M(P_2) = 1\} = \{M_1\} ;$$

Ainsi, la décomposition en blocs de $[G_a]$ et $[G_b]$ selon ces classes est la suivante :

$$[G_b] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{b,1} \\ M_0 \\ M_2 \\ M_3 \\ C_{b,2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{b,1} \\ M_0 \quad M_2 \quad M_3 \\ C_{b,2} \\ M_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \delta & 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} P_1 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_2 \end{array} \end{array} \quad [G_a] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ M_0 \\ C_{a,2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ M_0 \\ C_{a,2} \end{array} \\ \begin{array}{c} M_0 \\ M_1 \\ T_2 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} 0 & T_1 \\ T_2 & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array} \end{array}$$

Les blocs gris représentent $G_{a,1}$ et $G_{b,1}$

Etape III : Détermination de la matrice de transitions des modules synchronisés.

Pas III.1 : Prise en compte des synchronisations mutuelles entre R_a et R_b .

L'influence de R_b sur R_a se traduit par l'émission du signal (!dum) de la place P_2 de R_b vers la transition T_2 de R_a . Pour la classe $C_{b,1}$ le marquage de P_2 est nul. Le signal !dum n'est pas émis (ou autorisé). La transition T_2 n'est pas franchissable. Par contre, pour la classe $C_{b,2}$, le marquage de P_2 étant égal à 1, le signal !dum est émis et donc T_2 est franchissable. L'évolution du marquage $[G_a]$ du réseau R_a , en considérant cette influence est donnée par le tableau IV.1 :

Marquage initial	Transition tirée	Marquage final
$M_0 = C_{b,1}, P_1$	T_1 F	$M_1 = C_{b,1}, P_2$ $M_2 = C_{b,2}, P_1$
$M_1 = C_{b,1}, P_2$	F	$M_3 = C_{b,2}, P_2$
$M_2 = C_{b,2}, P_1$	T_1 F	M_3 M_0
$M_3 = C_{b,2}, P_2$	T_2 F	M_2 M_1

Tableau IV.1: Evolution du marquage de R_a (influence de R_b sur R_a).

Pour remplir ce tableau, on part du marquage initial M_0 « correspondant à une marque dans la place P_1 » du réseau R_a et pour la classe $C_{b,1}$ ($C_{b,1}$, puisque le M_0 du réseau $R_b \in C_{b,1}$). Donc à partir de M_0 , T_1 est franchissable et quand on la franchit, la marque arrive à la place P_2 tout en restant dans la même classe $C_{b,1}$. On obtient alors le marquage M_1 . Puis si on effectue un forçage²⁶ (F), on change de classe et on obtient le marquage M_2 .

Si on prend le marquage $M_1 = (C_{b,1}, P_2)$ qui représente pour le réseau R_a : une marque dans P_2 et pour le réseau R_b : la classe $C_{b,1}$. A partir de ce marquage, si on reste dans la classe $C_{b,1}$, on ne peut évoluer puisque la transition T_2 est conditionnée par le

²⁶ Par conséquent, la lettre « F » (ou Forçage) doit être présente au niveau de chaque marquage (c'est-à-dire chaque ligne du tableau IV.1 et IV.2).

signal ?*dum*. Pour cela, nous effectuons un forçage vers la classe $C_{b,2}$. On obtient un nouveau marquage M_3 qui diffère de M_1 par la classe à laquelle il appartient.

Pour remplir la matrice correspondante, il s'agit de grouper les marquages par classe :

$$[G'_a] = \begin{array}{c|cc|cc} & \begin{array}{c} C_{b,1} \\ P_1 \quad P_2 \\ M_0 \quad M_1 \end{array} & \begin{array}{c} C_{b,2} \\ P_1 \quad P_2 \\ M_2 \quad M_3 \end{array} & & \\ \begin{array}{c} C_{b,1} \\ M_0 \\ M_1 \\ C_{b,2} \\ M_2 \\ M_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & T_1 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F \\ F & 0 & 0 & T_1 \\ 0 & F & T_2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{array} & & \end{array}$$

D'autre part, l'influence de R_a sur R_b se traduit par l'émission du signal (!*pds*) de la place P_2 de R_a vers la transition T_1 de R_b . Pour la classe $C_{a,2}$ le marquage de P_2 est égal à 1, Le signal !*pds* est émis (ou autorisé). La transition T_1 est franchissable. Par contre, pour la classe $C_{a,1}$, le marquage de P_2 est nul, le signal !*pds* n'est pas émis et donc T_1 n'est pas franchissable. L'évolution du marquage $[G'_b]$ du réseau R_b , en considérant cette influence est donnée par le tableau IV.2 :

Marquage initial	Transition tirée	Marquage final
$M_0 = C_{a,1}, P_1$	F	$M_1 = C_{a,2}, P_1$
$M_1 = C_{a,2}, P_1$	ε F	$M_2 = C_{a,2}, P_2$ M_0
$M_2 = C_{a,2}, P_2$	T_2 F	$M_3 = C_{a,2}, P_4$ $M_4 = C_{a,1}, P_2$
$M_3 = C_{a,2}, P_4$	δ λ F	M_1 $M_5 = C_{a,2}, P_5$ $M_6 = C_{a,1}, P_4$
$M_4 = C_{a,1}, P_2$	T_2 F	M_6 M_2
$M_5 = C_{a,2}, P_5$	μ F	M_1 $M_7 = C_{a,1}, P_5$
$M_6 = C_{a,1}, P_4$	δ λ F	M_0 M_7 M_3
$M_7 = C_{a,1}, P_5$	μ F	M_0 M_5

Tableau IV.2 : Evolution du marquage de R_b (influence de R_a sur R_b).

$$[F_a] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ \vdots \\ C_{a,2} \end{array} \begin{array}{c} P_1P_1 \\ P_1P_2 \\ P_1P_4 \\ P_1P_5 \\ P_2P_1 \\ P_2P_2 \\ P_2P_4 \\ P_2P_5 \end{array} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ \vdots \\ C_{a,2} \end{array} \begin{array}{c} P_1P_1 \\ P_1P_2 \\ P_1P_4 \\ P_1P_5 \\ P_2P_1 \\ P_2P_2 \\ P_2P_4 \\ P_2P_5 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ \vdots \\ C_{a,2} \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1P_1 \\ P_1P_2 \\ P_1P_4 \\ P_1P_5 \\ P_2P_1 \\ P_2P_2 \\ P_2P_4 \\ P_2P_5 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \delta \\ \mu \\ T_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ T_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_2 \end{array} \begin{array}{c} T_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ T_1 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ T_1 \\ 0 \\ 0 \\ T_2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_1 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \end{array} \end{array}$$

$$[F_b] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{b,1} \\ \vdots \\ C_{b,2} \end{array} \begin{array}{c} P_1P_1 \\ P_1P_4 \\ P_1P_5 \\ P_2P_1 \\ P_2P_4 \\ P_2P_5 \\ P_1P_2 \\ P_2P_2 \end{array} \begin{array}{c} C_{b,1} \\ \vdots \\ C_{b,2} \end{array} \begin{array}{c} P_1P_1 \\ P_1P_4 \\ P_1P_5 \\ P_2P_1 \\ P_2P_4 \\ P_2P_5 \\ P_1P_2 \\ P_2P_2 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{b,1} \\ \vdots \\ C_{b,2} \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1P_1 \\ P_1P_4 \\ P_1P_5 \\ P_2P_1 \\ P_2P_4 \\ P_2P_5 \\ P_1P_2 \\ P_2P_2 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \delta \\ \mu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} T_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \\ \mu \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ T_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_2 \end{array} \begin{array}{c} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_2 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ T_1 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Pas III.3 : Réorganisation des matrices $[F_a]$ et $[F_b]$.

La décomposition en blocs de $[F_a]$ présentant une symétrie, on choisit de classer $[F_b]$ selon $C_{a,1}$ et $C_{a,2}$. $[F_a]$ reste donc inchangée. La réorganisation de $[F_b]$ selon les classes de R_a donne la matrice $[H_b]$. Une réorganisation consiste à rassembler les marques (ou états) appartenant à la même classe. Ici, les états P_aP_b de la matrice $[F_b]$ qui étaient groupés selon les classes $C_{b,k}$, sont regroupés dans la nouvelle matrice $[H_b]$ suivant les classes $C_{a,l}$.

$$[H_b] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ \vdots \\ C_{a,2} \end{array} \begin{array}{c} P_1P_1 \\ P_1P_2 \\ P_1P_4 \\ P_1P_5 \\ P_2P_1 \\ P_2P_2 \\ P_2P_4 \\ P_2P_5 \end{array} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ \vdots \\ C_{a,2} \end{array} \begin{array}{c} P_1P_1 \\ P_1P_2 \\ P_1P_4 \\ P_1P_5 \\ P_2P_1 \\ P_2P_2 \\ P_2P_4 \\ P_2P_5 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ \vdots \\ C_{a,2} \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1P_1 \\ P_1P_2 \\ P_1P_4 \\ P_1P_5 \\ P_2P_1 \\ P_2P_2 \\ P_2P_4 \\ P_2P_5 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \delta \\ \mu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ T_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} T_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta \\ \mu \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ T_1 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ T_1 \\ 0 \\ 0 \\ T_2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_1 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Pas III.4 : Détermination de la matrice de transitions $[F_s]$ du système complet. Puisqu'au pas précédent (Pas III.3) on a réorganisé $[F_b]$ ($[F_a]$ déjà organisée) selon les classes de R_a , la matrice $[F_s]$ se déduit alors par une simple intersection entre $[H_b]$ et $[F_a]$.

Algorithme d'intersection AL.INTER :

L'intersection s'effectue terme à terme, c'est-à-dire entre l'élément de $[H_a]$ situé à la (ligne i , colonne j) et celui de $[F_a]$ à la même position (i,j) . Si au moins un des éléments est nul, le résultat de l'intersection est bien évidemment nul. Par contre, si les deux éléments sont différents de 0, deux cas se présentent : si les deux éléments sont identiques le résultat est l'élément lui-même (intersection logique de x avec x est égale à x), sinon le résultat de l'intersection est le produit de ces deux éléments ($x \times y$).

Soit $F_{S_{i,j}} = H_{b_{i,j}} \cap F_{a_{i,j}}$

Si $(H_{b_{i,j}} \neq 0 \text{ et } F_{a_{i,j}} \neq 0)$ alors

Si $(H_{b_{i,j}} = F_{a_{i,j}})$ alors

$$F_{S_{i,j}} = H_{b_{i,j}};$$

Sinon $(H_{b_{i,j}} \neq F_{a_{i,j}})$

$$F_{S_{i,j}} = H_{b_{i,j}} \times F_{a_{i,j}};$$

Fin si

Sinon

Si $(H_{b_{i,j}} = 0 \text{ et } F_{a_{i,j}} \neq 0)$ alors

$$F_{S_{i,j}} = 0;$$

Sinon $(H_{b_{i,j}} \neq 0 \text{ et } F_{a_{i,j}} = 0)$

$$F_{S_{i,j}} = 0;$$

Fin si

Fin si

$$[F_s] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ P_1P_1 \\ P_1P_2 \\ P_1P_4 \\ P_1P_5 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ P_1P_1 \\ P_1P_2 \\ P_1P_4 \\ P_1P_5 \end{array} & \begin{array}{c} C_{a,2} \\ P_2P_1 \\ P_2P_2 \\ P_2P_4 \\ P_2P_5 \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & T_1^{(a)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_2^{(b)} & 0 & 0 & T_1^{(a)} & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & T_1^{(a)} & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_1^{(a)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & T_2^{(a)} & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2^{(b)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Etape IV : Simplification de la matrice de transition obtenue à l'étape précédente.

La simplification est délicate et on fonction du cas considéré. Pour notre cas il s'agit d'un système de type *SM* (stock en amont de la machine). Cela signifie que la transition $T_1^{(a)}$ du stock (réseau R_a) représente l'arrivée des pièces dans le stock, et décrit le lien avec le sous-système en amont de ce stock (si on considère que *SM* fait partie d'un SdP comme notre cas pratique). Cette transition ne doit pas être simplifiée ; son taux de franchissement est *non nul*. Les simplifications des autres transitions immédiates (dans l'ordre) sont donc les suivantes :

Pas IV.2 : Règle 2

L'état « P_1P_2 » est instable puisqu'il a une transition immédiate $T_2^{(b)}$ amenant vers un état « P_1P_4 ». Sa simplification consiste à fusionner les colonnes 2 et 3 (dans la colonne 2), puis supprimer la ligne 2 et la colonne 2 de la matrice.

Pas IV.2 : Règle 2

L'état « P_2P_2 » est instable : il a deux transitions immédiates $T_2^{(a)}$ amenant vers l'état P_1P_4 et $T_2^{(b)}$ vers l'état « P_2P_4 ». Laquelle faut-il simplifier en premier ? Comme l'état « P_1P_4 » n'a qu'un seul arc entrant, nous simplifions $T_2^{(a)}$, et donc nous fusionnons les colonnes 3 et 6 (dans la colonne 6) puis supprimons la ligne 6 et la colonne 6. ($T_2^{(a)}$ à 1 seul arc entrant ; $T_2^{(b)}$ à deux arcs entrants) donc on choisi $T_2^{(a)}$.

	P_1P_1	P_1P_2	P_1P_4	P_1P_5	P_2P_1	P_2P_2	P_2P_4	P_2P_5
P_1P_1	0	0	0	0	$T_1^{(a)}$	0	0	0
$(a_1)C_{a,1}$ P_1P_2	0	0	$T_2^{(b)}$	0	0	$T_1^{(a)}$	0	0
$*(b_2)$ (b_1) P_1P_4	δ	0	0	λ	0	0	$T_1^{(a)}$	0
P_1P_5	μ	0	0	0	0	0	0	$T_1^{(a)}$
P_2P_1	0	0	ε	0	0	ε	0	0
(a_2) P_2P_2	0	$T_2^{(a)}$	$T_2^{(a)}$	0	0	0	$T_2^{(b)}$	0
$(b_2)'C_{a,2}$ P_2P_4	0	0	0	0	δ	0	0	λ
P_2P_5	0	0	0	0	λ	0	0	0

Après simplification et réorganisation selon les états de marche, nous obtenons la matrice suivante :

	R0	R1	M0	M1	P0	P1	
R0	0	$T_1^{(s)}$	0	0	0	0	P_1P_1
R1	0	0	ε	0	0	0	P_2P_1
M0	δ	0	0	$T_1^{(s)}$	λ	0	P_1P_4
M1	0	δ	0	0	0	λ	P_2P_4
P0	μ	0	0	0	0	$T_1^{(s)}$	P_1P_5
P1	0	μ	0	0	0	0	P_2P_5

Trois états pour la machine :

- R : Repos ;
- M : Marche ;
- P : Panne.

Deux états pour le stock :

- 0 : il ne contient pas de pièces ;
- 1 : il contient une pièce.

$T_1^{(s)}$ indique la transition T_1 du réseau correspondant au modèle stock.

Graphiquement, cette matrice peut être représentée par le graphe de la Figure IV.10 :

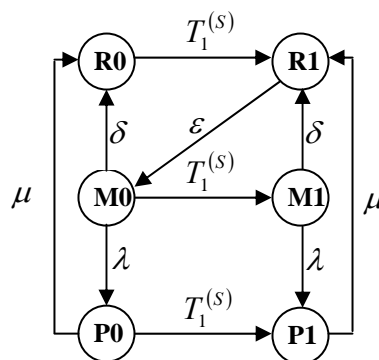


Figure IV.10 : PdM du cas SM.

Etape II : Génération des matrices de transition des modules isolés.

Pas II.1 : Déterminer les places émettrices de R_a et R_b .

$$E_a = \{\text{places émettrices de } R_a\} = \{P_3\} ;$$

$$E_b = \{\text{places émettrices de } R_b\} = \{P_1\} ;$$

Pas II.2 : Enlever les signaux internes de synchronisation entre R_a et R_b , il s'agit ici de signaux *fum* (*?fum* et *!fum*) et *pls* (*?pls* et *!pls*).

Pas II.3 : Construire les graphes des marquages accessibles de R_a et R_b isolés (Figure IV.11).

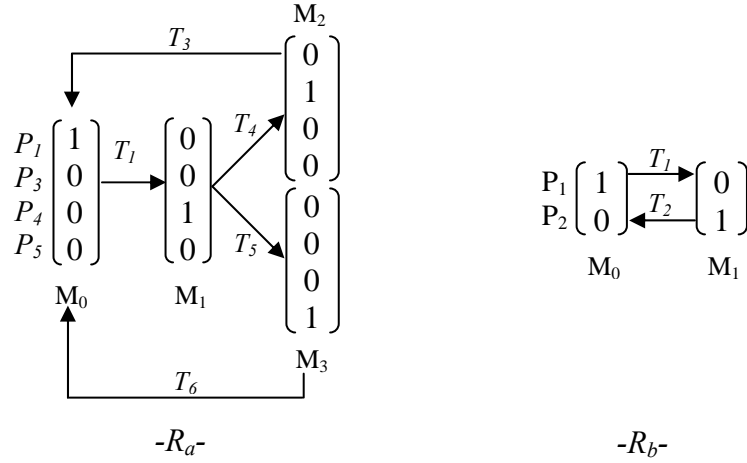


Figure IV.11 : Graphes des marquages accessibles de R_a et R_b .

La Figure IV.12 nous donne la représentation du PdM de chaque module.

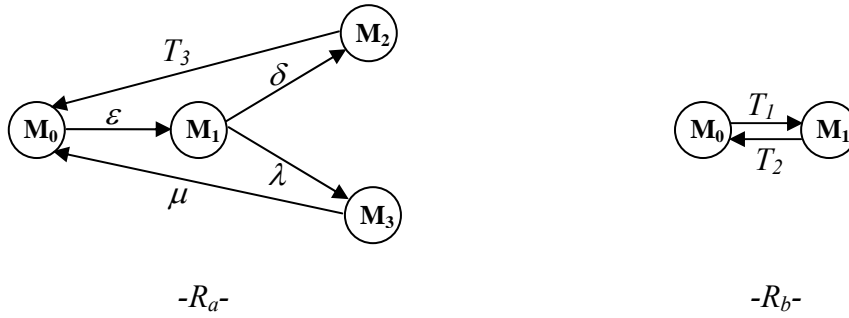


Figure IV.12 : PdM de R_a et R_b isolés.

Sous forme matricielle, ils peuvent être représentés par :

$$R_a : [G_a] = \begin{matrix} & \begin{matrix} M_0 & M_1 & M_2 & M_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \lambda \\ T_3 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad R_b : [G_b] = \begin{matrix} & \begin{matrix} M_0 & M_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_0 \\ M_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & T_1 \\ T_2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Pas II.4 : Déterminer les classes d'états

Deux classes d'états ($k = 2$) sont possibles pour R_a :

$$C_{a,1} = \{\text{marquages où } M(P_3) = 0\} = \{M_0, M_1, M_3\} ;$$

$$C_{a,2} = \{\text{marquages où } M(P_3) = 1\} = \{M_2\} ;$$

Deux classes d'états ($l = 2$) sont possibles pour R_b :

$$C_{b,1} = \{\text{marquages où } M(P_1) = 1\} = \{M_0\} ;$$

$$C_{b,2} = \{\text{marquages où } M(P_1) = 0\} = \{M_1\} ;$$

Ainsi, la décomposition en blocs de $[G_a]$ et $[G_b]$ selon ces classes est la suivante : Les blocs gris représentent $G_{a,1}$ et $G_{b,1}$

$$[G_a] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ C_{a,2} \end{array} \begin{array}{c} M_0 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ C_{a,2} \end{array} \\ \begin{array}{c} M_0 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ C_{a,2} \end{array} \\ \begin{array}{c} M_0 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_1 \end{array} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} P_1 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_3 \end{array} \end{array} \quad [G_b] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{b,1} \\ C_{b,2} \end{array} \begin{array}{c} M_0 \\ M_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{b,1} \\ C_{b,2} \end{array} \\ \begin{array}{c} M_0 \\ M_1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array} \end{array}$$

Etape III : Détermination de la matrice de transitions des modules synchronisés.

Pas III.1 : Prise en compte des synchronisations mutuelles entre R_a et R_b

L'influence de R_b sur R_a se traduit par l'émission du signal (!fum) de la place P_3 de R_a vers la transition T_1 de R_b . L'évolution du marquage $[G'_b]$ du réseau R_b , en considérant cette influence est donnée par le tableau IV.3 :

Marquage initial	Transition tirée	Marquage final
$M_0 = C_{a,1}, P_1$	F	$M_1 = C_{a,2}, P_1$
$M_1 = C_{a,2}, P_1$	T_1 F	$M_2 = C_{a,2}, P_2$ M_0
$M_2 = C_{a,2}, P_2$	T_2 F	M_1 $M_3 = C_{a,1}, P_2$
$M_3 = C_{a,1}, P_2$	T_2 F	M_0 M_2

Tableau IV.3 : Evolution du marquage de R_b (influence de R_a sur R_b).

Pour remplir la matrice correspondante, il s'agit de grouper les marquages par classes :

$$[G'_b] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ C_{a,2} \end{array} \begin{array}{c} M_0 \\ M_3 \\ M_1 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ C_{a,2} \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{array} \end{array} \end{array}$$

D'autre part, l'influence de R_b sur R_a se traduit par l'émission du signal (!pls) de la place P_1 de R_b vers la transition T_1 de R_a . Le tableau IV.4 donne l'évolution du marquage $[G'_a]$ du réseau R_a , en considérant cette influence.

$$[F_a] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ P_1P_1 \\ P_1P_4 \\ P_1P_5 \\ P_2P_1 \\ P_2P_4 \\ P_2P_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_{a,2} \\ P_1P_3 \\ P_2P_3 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{a,1} \\ P_1P_1 \quad P_1P_4 \quad P_1P_5 \quad P_2P_1 \quad P_2P_4 \quad P_2P_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_{a,2} \\ P_1P_3 \quad P_2P_3 \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_2 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \delta \\ 0 & 0 & T_2 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_1 \\ 0 & 0 & 0 & T_3 & 0 & 0 & T_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[F_b] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{b,1} \\ P_1P_1 \\ P_1P_4 \\ P_1P_3 \\ P_1P_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_{b,2} \\ P_2P_1 \\ P_2P_4 \\ P_2P_3 \\ P_2P_5 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{b,1} \\ P_1P_1 \quad P_1P_4 \quad P_1P_3 \quad P_1P_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_{b,2} \\ P_2P_1 \quad P_2P_4 \quad P_2P_3 \quad P_2P_5 \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \lambda & 0 & T_1 & 0 & 0 \\ T_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_1 \\ T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & \lambda \\ 0 & 0 & T_2 & 0 & T_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_2 & \mu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pas III.3 : Réorganisation des matrices $[F_a]$ et $[F_b]$.

La décomposition en blocs de $[F_b]$ présentant une symétrie, on choisit de classer $[F_a]$ selon $C_{b,1}$ et $C_{b,2}$. $[F_b]$ reste donc inchangée et $[H_a]$ ci-dessous est la matrice obtenue après réorganisation de $[F_a]$ selon les classes de R_b .

$$[H_a] = \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{b,1} \\ P_1P_1 \\ P_1P_4 \\ P_1P_3 \\ P_1P_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_{b,2} \\ P_2P_1 \\ P_2P_4 \\ P_2P_3 \\ P_2P_5 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} C_{b,1} \\ P_1P_1 \quad P_1P_4 \quad P_1P_3 \quad P_1P_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_{b,2} \\ P_2P_1 \quad P_2P_4 \quad P_2P_3 \quad P_2P_5 \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_1 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & \lambda \\ 0 & 0 & T_2 & 0 & T_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_2 & \mu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pas III.4 : Détermination de la matrice de transitions $[F_s]$ du système complet. La matrice $[F_s]$ se déduit par une simple intersection entre $[H_a]$ et $[F_b]$.

Deux états pour le stock :

0 : il ne contient pas de pièces ;

1 : il contient une pièce.

$T_2^{(s)}$ indique la transition T_2 du réseau correspondant au modèle stock.

Graphiquement, cette matrice peut être représentée par le graphe de la Figure IV.13 :

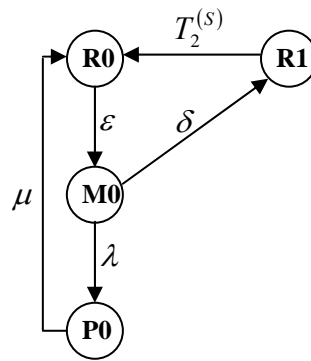


Figure VI.13 : PdM du cas MS.

Pour calculer le graphe des marquages accessibles de la cellule C_1 demi-série aval, tout s'est passé comme si nous avions regroupé les deux modules (M_1 et S_2) en un seul réseau de petri stochastique généralisé. La même constatation peut être faite en ce qui concerne les autres cellules. La Figure IV.14 donne une illustration de ce point.

Lors de la décomposition-recomposition, les marquages pour lesquels les places émettrices P_4 , P_8 , P_{15} , P_{22} et P_{29} contenaient un nombre positif de jetons étaient instables et ont été supprimés. Les places P_4 , P_8 , P_{15} , P_{22} et P_{29} n'apparaissent donc pas sur les modèles de la Figure IV.14. Nous avons néanmoins conservé les signaux de synchronisation $?dum_2$ sur T_7 , $?fum_1$ sur T_6 , $?dum_3$ sur T_{15} , $?fum_2$ sur T_{14} , $?dum_4$ sur T_{23} , $?fum_3$ sur T_{22} , $?dum_5$ sur T_{31} et $?fum_4$ sur T_{30} d'une part pour mieux visualiser la basse sur laquelle va s'appuyer le calcul et, d'autre part, car ceux-ci sont émis de manière implicite à chaque franchissement des transitions T_4 , T_8 , T_{12} , T_{16} , T_{20} , T_{24} , T_{28} et T_{32} (voir Figure IV.5).

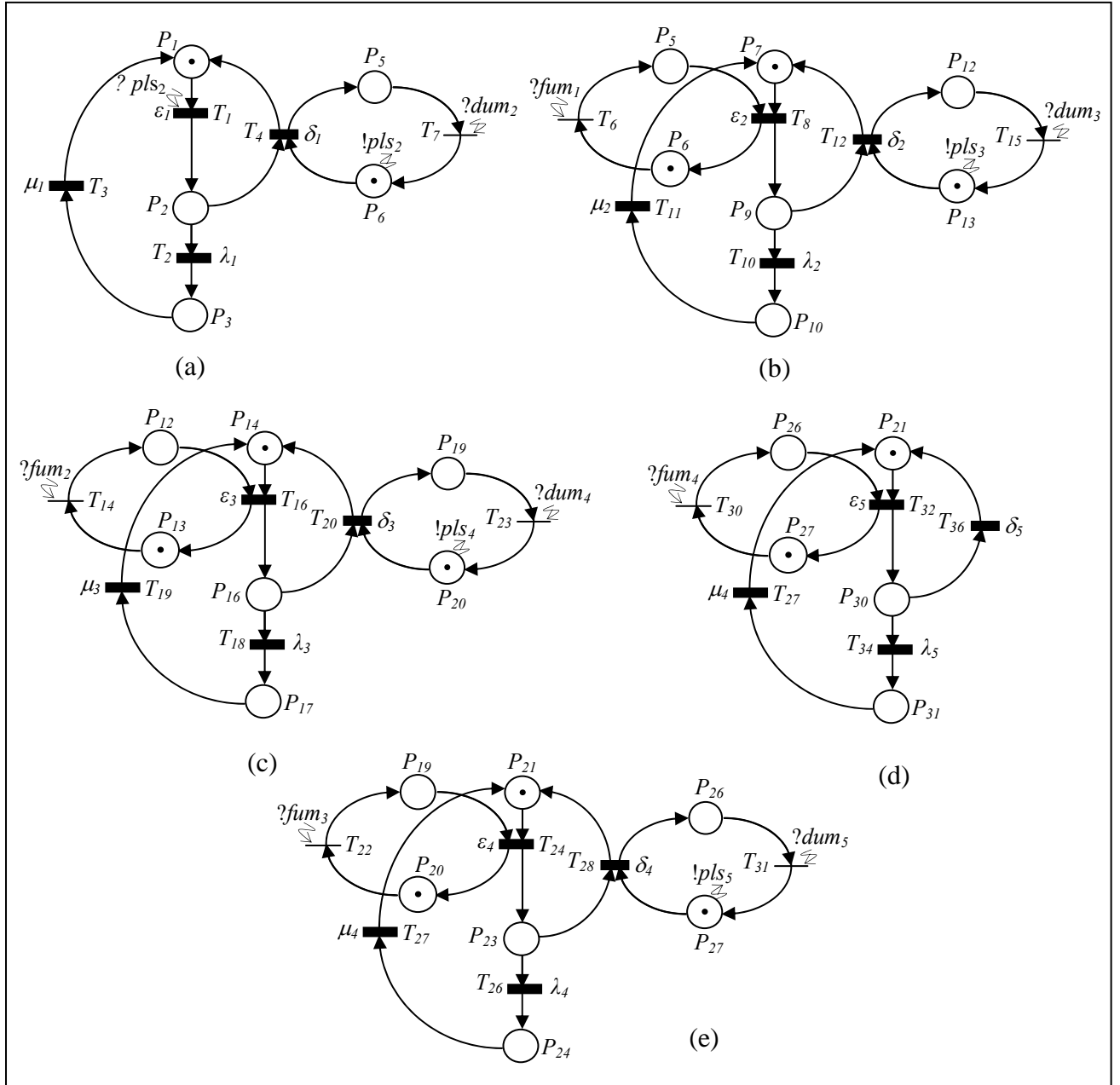


Figure IV.14 : (a) : Cellule C₁, (b) : Cellule C₂, (c) : Cellule C₃, (e). Cellule C₄, (d). Cellule C₅.

IV.9.3. Décomposition de la ligne en cellules simples :

La décomposition cellulaire de la ligne se fait par rapport aux machines. Tout le système peut être décomposé en autant de cellules qu'il y a de machines.

La ligne de la Figure IV.2 peut être décomposée en cinq cellules (C₁, C₂, C₃, C₄ et C₅) qui sont réparties comme suit :

- Une demi-série aval : $C_1 \Rightarrow (M_1-S_2)$;
- Une demi-série amont : $C_5 \Rightarrow (S_5-M_5)$;
- Trois séries : $C_2 \Rightarrow (S_2-M_2-S_3)$, $C_3 \Rightarrow (S_3-M_3-S_4)$ et $C_4 \Rightarrow (S_4-M_4-S_5)$.

Notons que les liens entre ces cellules respectivement C_1 - C_2 , C_2 - C_3 , C_3 - C_4 et C_4 - C_5 se fait respectivement par les stocks S_2 , S_3 , S_4 et S_5 .

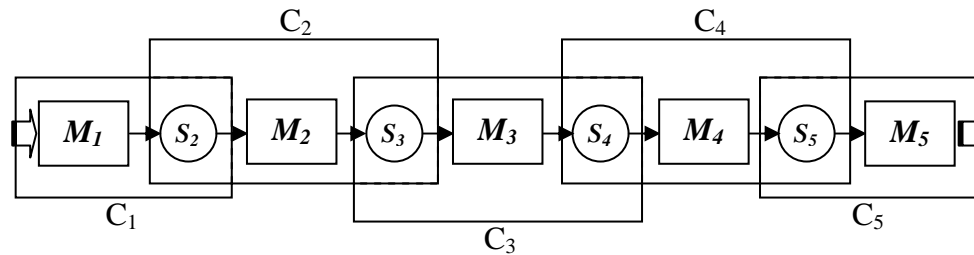


Figure IV.15 : Représentation schématique du groupement en cellules simples.

IV.9.4. Détermination du PdM pour une cellule simple :

La matrice $[G_R]_{MS}$ est la matrice de transition de la cellule élémentaire MS ;

La matrice $[G_R]_{SM}$ est la matrice de transition de la cellule élémentaire SM ;

Pour déterminer le PdM des cellules simples C_2 , C_3 et C_4 toutes entières, il s'agit de combiner les PdM des différentes cellules élémentaires qui le constitue.

L'intersection des cellules élémentaires SM ou MS est une machine. Cela veut dire que, pour pouvoir combiner les PdM des différentes cellules élémentaires, nous devons impérativement les réorganiser selon les états de la machine (voir les matrices $[G_R]_{MS}$ et $[G_R]_{SM}$).

Autrement dit, la décomposition en blocs de la matrice de transitions de chacune des cellules élémentaires doit se faire selon les états de la machine pour les rendre homogène.

Pour obtenir la matrice finale représentant l'ensemble de ces machines, il s'agit d'effectuer le produit tensoriel des différentes matrices.

$$\text{Pour notre cas : } [G_R]_{SMS} = [G_R]_{SM} \odot [G_R]_{MS}$$

Donc la matrice $[G_R]_{SMS}$ est déduite d'un produit tensoriel entre la matrice de la cellule élémentaire MS et celle de la cellule élémentaire SM .

$$[G_R]_{SMS} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cc|cc} & \text{OR0} & \text{OR1} & \text{1R0} & \text{1R1} & \text{0M0} & \text{1M0} & \text{0P0} & \text{1P0} \\ \text{OR0} & 0 & 0 & T_1^{(s)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{OR1} & T_2^{(s)} & 0 & 0 & T_1^{(s)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{1R0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \text{1R1} & 0 & 0 & T_2^{(s)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \text{0M0} & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & T_1^{(s)} & \lambda & 0 \\ \text{1M0} & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ \hline \text{0P0} & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_1^{(s)} \\ \text{1P0} & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

Nous allons maintenant, déterminer le vecteur de distribution stationnaire des trois cellules SM , MS et SMS .

$$[B]_{M_iS} = \begin{array}{c} \begin{array}{c|ccc|cc} & \text{R}_i0 & \text{R}_i1 & & \text{M}_i0 & \text{P}_i0 \\ \text{E}_1^{(i)} & \text{R}_i0 & \begin{bmatrix} -\varepsilon_i & 0 \\ T_2^{(s)} & -T_2^{(s)} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} \varepsilon_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{E}_2^{(i)} & \text{R}_i1 & & & & \\ \hline \text{E}_3^{(i)} & \text{M}_i0 & \begin{bmatrix} 0 & \delta_i \\ \mu_i & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} -(\delta_i + \lambda_i) & \lambda_i \\ 0_i & -\mu_i \end{bmatrix} \\ \text{E}_4^{(i)} & \text{P}_i0 & & & & \end{array} \end{array}$$

$$[B]_{SM_i} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} R_i0 & R_i1 & M_i0 & M_i1 & P_i0 & P_i1 \\ \hline E_1^{(i)} R_i0 & -T_1^{(s)} & T_1^{(s)} & 0 & 0 & 0 \\ E_2^{(i)} R_i1 & 0 & -\varepsilon_i & \varepsilon_i & 0 & 0 \\ \hline E_3^{(i)} M_i0 & \delta_i & 0 & -(\delta_i + T_1^{(s)} + \lambda_i) & T_1^{(s)} & \lambda_i \\ E_4^{(i)} M_i1 & 0 & \lambda_i & 0 & -(\lambda_i + \mu_i) & 0 \\ \hline E_5^{(i)} P_i0 & \mu_i & 0 & 0 & 0 & -(\mu_i + T_1^{(s)}) \\ E_6^{(i)} P_i1 & 0 & \mu_i & 0 & 0 & T_1^{(s)} \\ & & & & & -\mu_i \end{array} \right]$$

$$[B]_{SM_iS} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc|cc} 0R_i0 & 0R_i1 & 1R_i0 & 1R_i1 & 0M_i0 & 1M_i0 & 0P_i0 & 1P_i0 \\ \hline E_1^{(i)} 0R_i0 & -T_1^{(s)} & 0 & T_1^{(s)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_2^{(i)} 0R_i1 & T_2^{(s)} & -(T_1^{(s)} + T_2^{(s)}) & 0 & T_1^{(s)} & 0 & 0 & 0 \\ E_3^{(i)} 1R_i0 & 0 & 0 & -\varepsilon_i & 0 & \varepsilon_i & 0 & 0 \\ E_4^{(i)} 1R_i1 & 0 & 0 & T_2^{(s)} & -T_2^{(s)} & 0 & 0 & 0 \\ \hline E_5^{(i)} 0M_i0 & 0 & \delta_i & 0 & 0 & -(\delta_i + T_1^{(s)} + \lambda_i) & T_1^{(s)} & \lambda_i \\ E_6^{(i)} 1M_i0 & 0 & 0 & 0 & \delta_i & 0 & -(\delta_i + \lambda_i) & 0 \\ \hline E_7^{(i)} 0P_i0 & \mu_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_i + T_1^{(s)}) \\ E_8^{(i)} 1P_i0 & 0 & 0 & \mu_i & 0 & 0 & 0 & T_1^{(s)} \\ & & & & & & & -\mu_i \end{array} \right]$$

Pour déterminer le vecteur de distribution stationnaire de chaque cellule, il faut résoudre le système formé de l'équation matricielle :

$$[B] \cdot [P] = 0 \dots (1) \quad \text{Avec } [P] = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$$

Ce système est homogène, il dispose donc une infinité de solutions ou une solution triviale. Pour le résoudre on lui associe la relation suivante (*théorème des probabilités totales*) [DJEBA BRA 93] :

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

La relation (1) prend alors la forme suivante :

$$[P] = [B]_{\pi}^{-1} \cdot P_{\pi}(0)$$

Où $[B]_{\pi}$ est la matrice déduite de $[B]$ en remplaçant la j-ème ligne par une ligne de 1 et $P_{\pi}(0)$ est le vecteur dont tous les éléments sont nuls à l'exception du j-ème élément qui est égal à 1.

Les trois matrices précédemment présentées ($[G_R]_{SM}$, $[G_R]_{MS}$ et $[G_R]_{SMS}$) permettent de déterminer les matrices de transitions suivantes représentant ces cellules :

$$[G_R]_{C_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} R_{10} & R_{11} \\ R_{11} & T_2^{(s_2)} \\ M_{10} & 0 \\ P_{10} & \mu_1 \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

$$[G_R]_{C_2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0R_{20} & 0R_{21} & 1R_{20} & 1R_{21} \\ 0R_{21} & 1R_{20} & 0M_{20} & 1M_{20} \\ 1R_{20} & 1R_{21} & 0P_{20} & 1P_{20} \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cc|cc} 0 & 0 & T_1^{(s_2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_2^{(s_3)} & 0 & 0 & T_1^{(s_2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_2^{(s_3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 & T_1^{(s_2)} & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_1^{(s_2)} \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

$$[G_R]_{C_3} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cc|cc} & 0R_30 & 0R_31 & 1R_30 & 1R_31 & 0M_30 & 1M_30 & 0P_30 & 1P_30 \\ \hline 0R_30 & 0 & 0 & T_1^{(S_3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0R_31 & T_2^{(S_4)} & 0 & 0 & T_1^{(S_3)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1R_30 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 & 0 \\ 1R_31 & 0 & 0 & T_2^{(S_4)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0M_30 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & 0 & T_1^{(S_3)} & \lambda_3 & 0 \\ 1M_30 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ \hline 0P_30 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_1^{(S_3)} \\ 1P_30 & 0 & 0 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$[G_R]_{C_4} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cc|cc} & 0R_40 & 0R_41 & 1R_40 & 1R_41 & 0M_40 & 1M_40 & 0P_40 & 1P_40 \\ \hline 0R_40 & 0 & 0 & T_1^{(S_4)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0R_41 & T_2^{(S_5)} & 0 & 0 & T_1^{(S_4)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1R_40 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 & 0 & 0 & 0 \\ 1R_41 & 0 & 0 & T_2^{(S_5)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0M_40 & 0 & \delta_4 & 0 & 0 & 0 & T_1^{(S_4)} & \lambda_4 & 0 \\ 1M_40 & 0 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ \hline 0P_40 & \mu_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_1^{(S_4)} \\ 1P_40 & 0 & 0 & \mu_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$[G_R]_{C_5} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc|cc} & R_50 & R_51 & M_50 & M_51 & P_50 & P_51 \\ \hline R_50 & 0 & T_1^{(S_5)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_51 & 0 & 0 & \varepsilon_5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline M_50 & \delta_5 & 0 & 0 & T_1^{(S_5)} & \lambda_5 & 0 \\ M_51 & 0 & \delta_5 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \\ \hline P_50 & \mu_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_1^{(S_5)} \\ P_51 & 0 & \mu_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

Nous remarquons la présence des transitions T_1 et T_2 du stock $S_k / k = 2, 3, 4, 5$ dans les cinq matrices. La première représente le taux moyen de dépôt d'une pièce dans le stock S_k et la seconde le taux de retrait moyen d'une pièce du stock S_k .

Après remplacement des transitions par les taux, les matrices des taux de transitions correspondantes sont les suivantes :

$$[G_R]_{C_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} & R_10 & R_11 & M_10 & P_10 \\ \hline R_10 & 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ R_11 & \tau_{2,1,2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline M_10 & 0 & \delta_1 & 0 & \lambda_1 \\ \hline P_10 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$[G_R]_{C_2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cccc} & 0R_20 & 0R_21 & 1R_20 & 1R_21 & 0M_20 & 1M_20 & 0P_20 & 1P_20 \\ 0R_20 & 0 & 0 & \tau_{1,2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0R_21 & \tau_{3,2,3} & 0 & 0 & \tau_{1,2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1R_20 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1R_21 & 0 & 0 & \tau_{3,2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0M_20 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 & \tau_{1,2,2} & \lambda_2 & 0 \\ 1M_20 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ \hline 0P_20 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{1,2,2} \\ 1P_20 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$[G_R]_{C_3} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cccc} & 0R_30 & 0R_31 & 1R_30 & 1R_31 & 0M_30 & 1M_30 & 0P_30 & 1P_30 \\ 0R_30 & 0 & 0 & \tau_{2,3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0R_31 & \tau_{4,3,4} & 0 & 0 & \tau_{2,3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1R_30 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 & 0 \\ 1R_31 & 0 & 0 & \tau_{4,3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0M_30 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & 0 & \tau_{2,3,3} & \lambda_3 & 0 \\ 1M_30 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ \hline 0P_30 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{2,3,3} \\ 1P_30 & 0 & 0 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$[G_R]_{C_4} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cccc} & 0R_40 & 0R_41 & 1R_40 & 1R_41 & 0M_40 & 1M_40 & 0P_40 & 1P_40 \\ 0R_40 & 0 & 0 & \tau_{3,4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0R_41 & \tau_{5,4,5} & 0 & 0 & \tau_{3,4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1R_40 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 & 0 & 0 & 0 \\ 1R_41 & 0 & 0 & \tau_{5,4,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0M_40 & 0 & \delta_4 & 0 & 0 & 0 & \tau_{3,4,4} & \lambda_4 & 0 \\ 1M_40 & 0 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ \hline 0P_40 & \mu_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{3,4,4} \\ 1P_40 & 0 & 0 & \mu_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$[G_R]_{C_5} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc|cc} & R_50 & R_51 & M_50 & M_51 & P_50 & P_51 \\ R_50 & 0 & \tau_{4,5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_51 & 0 & 0 & \varepsilon_5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline M_50 & \delta_5 & 0 & 0 & \tau_{4,5,5} & \lambda_5 & 0 \\ M_51 & 0 & \delta_5 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \\ \hline P_50 & \mu_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{4,5,5} \\ P_51 & 0 & \mu_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$[B]_{C_1} = \begin{array}{c} E_1^{(1)} \\ E_2^{(1)} \\ E_3^{(1)} \\ E_4^{(1)} \end{array} \begin{array}{c} \text{R0} \\ \text{R1} \\ \text{M0} \\ \text{P0} \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} \text{R0} & \text{R1} & \text{M0} & \text{P0} \\ \hline -\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ \tau_{2,1,2} & -\tau_{2,1,2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \delta_1 & -(\delta_1 + \lambda_1) & \lambda_1 \\ \hline \mu_1 & 0 & 0 & -\mu_1 \end{array} \right]$$

$$[B]_{C_2} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} E_1^{(2)} \text{ 0R}_2\text{0} \\ E_2^{(2)} \text{ 0R}_2\text{1} \\ E_3^{(2)} \text{ 1R}_2\text{0} \\ E_4^{(2)} \text{ 1R}_2\text{1} \\ E_5^{(2)} \text{ 0M}_2\text{0} \\ E_6^{(2)} \text{ 1M}_2\text{0} \\ E_7^{(2)} \text{ 0P}_2\text{0} \\ E_8^{(2)} \text{ 1P}_2\text{0} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc|cc} \text{0R}_2\text{0} & \text{0R}_2\text{1} & \text{1R}_2\text{0} & \text{1R}_2\text{1} & \text{0M}_2\text{0} & \text{1M}_2\text{0} & \text{0P}_2\text{0} & \text{1P}_2\text{0} \\ -\tau_{1,2,2} & 0 & \tau_{1,2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_{3,2,3} & -(\tau_{3,2,3} + \tau_{1,2,2}) & 0 & \tau_{1,2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{3,2,3} & -\tau_{3,2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 & -(\delta_2 + \tau_{1,2,2} + \lambda_2) & \tau_{1,2,2} & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & -(\delta_2 + \lambda_2) & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_2 + \tau_{1,2,2}) & \tau_{1,2,2} \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{array} \right] \end{array}$$

$$[B]_{C_3} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} E_1^{(3)} \text{ 0R}_3\text{0} \\ E_2^{(3)} \text{ 0R}_3\text{1} \\ E_3^{(3)} \text{ 1R}_3\text{0} \\ E_4^{(3)} \text{ 1R}_3\text{1} \\ E_5^{(3)} \text{ 0M}_3\text{0} \\ E_6^{(3)} \text{ 1M}_3\text{0} \\ E_7^{(3)} \text{ 0P}_3\text{0} \\ E_8^{(3)} \text{ 1P}_3\text{0} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc|cc} \text{0R}_3\text{0} & \text{0R}_3\text{1} & \text{1R}_3\text{0} & \text{1R}_3\text{1} & \text{0M}_3\text{0} & \text{1M}_3\text{0} & \text{0P}_3\text{0} & \text{1P}_3\text{0} \\ -\tau_{2,3,3} & 0 & \tau_{2,3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_{4,3,4} & -(\tau_{4,3,4} + \tau_{2,3,3}) & 0 & \tau_{2,3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{4,3,4} & -\tau_{4,3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_3 & 0 & 0 & -(\delta_3 + \tau_{2,3,3} + \lambda_3) & \tau_{2,3,3} & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & -(\delta_3 + \lambda_3) & 0 & \lambda_3 \\ \mu_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_3 + \tau_{2,3,3}) & \tau_{2,3,3} \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_3 \end{array} \right] \end{array}$$

$$[B]_{C_4} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0R_40 & 0R_41 & 1R_40 & 1R_41 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1^{(4)} \ 0R_40 \\ E_2^{(4)} \ 0R_41 \\ E_3^{(4)} \ 1R_40 \\ E_4^{(4)} \ 1R_41 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc|cccc} -\tau_{3,4,4} & 0 & \tau_{3,4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_{5,4,5} & -(\tau_{5,4,5} + \tau_{3,4,4}) & 0 & \tau_{3,4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_4 & 0 & \varepsilon_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{5,4,5} & -\tau_{5,4,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \delta_4 & 0 & 0 & -(\delta_4 + \tau_{3,4,4} + \lambda_4) & \tau_{3,4,4} & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 & -(\delta_4 + \lambda_4) & 0 & \lambda_4 \\ \hline \mu_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_4 + \tau_{3,4,4}) & \tau_{3,4,4} \\ 0 & 0 & \mu_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_4 \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

$$[B]_{C_5} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} R_50 & R_51 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1^{(5)} \ R_50 \\ E_2^{(5)} \ R_51 \\ E_3^{(5)} \ M_50 \\ E_4^{(5)} \ M_51 \\ E_5^{(5)} \ P_50 \\ E_6^{(5)} \ P_51 \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -\tau_{4,5,5} & \tau_{4,5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_5 & \varepsilon_5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \delta_5 & 0 & -(\delta_5 + \tau_{4,5,5} + \lambda_5) & \tau_{4,5,5} & \lambda_5 & 0 \\ 0 & \delta_5 & 0 & -(\delta_5 + \mu_5) & 0 & \lambda_5 \\ \hline \mu_5 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_5 + \tau_{4,5,5}) & \tau_{4,5,5} \\ 0 & \mu_5 & 0 & 0 & 0 & -\mu_5 \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

Les $E_i^{(e)}$ désignent les états affectés à chaque ligne de la matrice. Par exemple, $E_4^{(1)}$ est l'état du système où la machine M_1 est en panne (P_1), (1) signifie la cellule C_1 , et le stock S_2 ne contient aucune pièce (0).

IV.9.5. Comparaison avec la méthode exacte :

La résolution exacte consiste à générer une seule matrice des taux de transitions qui représente le système tout entier, puis la résoudre. Comme les stocks S_2 , S_3 , S_4 et S_5 représente respectivement l'intersection entre les cellules (C_1 et C_2), (C_2 et C_3), (C_3 et C_4) et (C_4 et C_5), les cinq matrices $[G_R]_{C_1}$, $[G_R]_{C_2}$, $[G_R]_{C_3}$, $[G_R]_{C_4}$ et $[G_R]_{C_5}$ doivent être réorganisées selon les états du stock : 0 pièce et 1 pièce.

La matrice $[G_R]_{C_{1,2}}$ est déduite d'un produit tensoriel entre la matrice de la cellule élémentaire $MS([G_R]_{C_1})$ et celle de la cellule simple $SMS([G_R]_{C_2})$, en réorganisant les matrices selon les états du stock S_2 .

$$[G_R]_{C_1}^{(S_2)} = \begin{array}{c|cccc} & R_10 & M_10 & P_10 & R_11 \\ \hline R_10 & 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ M_10 & 0 & 0 & \lambda_1 & \delta_1 \\ P_10 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline R_11 & \tau_{2,1,2} & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$[G_R]_{C_2}^{(S_2)} = \begin{array}{c|cccc|cccc} & 0R_20 & 0R_21 & 0M_20 & 0P_20 & 1R_20 & 1R_21 & 1M_20 & 1P_20 \\ \hline 0R_20 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{1,2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0R_21 & \tau_{3,2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{1,2,2} & 0 & 0 \\ 0M_20 & 0 & \delta_2 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \tau_{1,2,2} & 0 \\ 0P_20 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{1,2,2} \\ \hline 1R_20 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1R_21 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{3,2,3} & 0 & 0 & 0 \\ 1M_20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & 0 & \lambda_2 \\ 1P_20 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$[G_R]_{C_{1,2}} = [G_R]_{C_1}^{(S_2)} \odot [G_R]_{C_2}^{(S_2)}$$

$$[G_R]_{C_{1,2}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} R_1OR_20 & R_1OR_21 & R_1OM_20 & R_1OP_20 & M_1OR_20 & M_1OR_21 & M_1OM_20 & M_1OP_20 & P_1OR_20 & P_1OR_21 & P_1OM_20 & P_1OP_20 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc|cccc} \begin{array}{l} R_1OR_20 \\ R_1OR_21 \\ R_1OM_20 \\ R_1OP_20 \\ M_1OR_20 \\ M_1OR_21 \\ M_1OM_20 \\ M_1OP_20 \\ P_1OR_20 \\ P_1OR_21 \\ P_1OM_20 \\ P_1OP_20 \\ \hline R_1R_20 \\ R_1R_21 \\ R_1M_20 \\ R_1P_20 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ \tau_{3,2,3} \\ 0 \\ \mu_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \delta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_1 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ \varepsilon_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{3,2,3} \\ \delta_2 \\ 0 \\ \mu_2 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_2 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ \tau_{3,2,3} \\ 0 \\ \mu_2 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \delta_2 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \right]$$

La matrice $[G_R]_{C_{1,2,3}}$ est déduite d'un produit tensoriel entre la matrice de la cellule $C_{1,2}$ ($[G_R]_{C_{1,2}}$) et celle de la cellule simple $SMS([G_R]_{C_3})$, en réorganisant les matrices selon les états du stock S_3 .

$$[G_R]_{C_3}^{(S_3)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cccc} & 0R_30 & 0R_31 & 0M_30 & 0P_30 & 1R_30 & 1R_31 & 1M_30 & 1P_30 \\ \begin{array}{l} 0R_30 \\ 0R_31 \\ 0M_30 \\ 0P_30 \\ \hline 1R_30 \\ 1R_31 \\ 1M_30 \\ 1P_30 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{2,3,3} & 0 & 0 & 0 \\ \tau_{4,3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{2,3,3} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_3 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & \tau_{2,3,3} & 0 \\ \mu_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{2,3,3} \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{4,3,4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

$$[G_R]_{C_{1,2}}^{(S_3)} =$$

	R ₁ OR ₂ 0	R ₁ OM ₂ 0	R ₁ OP ₂ 0	M ₁ OR ₂ 0	M ₁ OM ₂ 0	M ₁ OP ₂ 0	P ₁ OR ₂ 0	P ₁ OM ₂ 0	P ₁ OP ₂ 0	R ₁ 1R ₂ 0	R ₁ 1M ₂ 0	R ₁ 1P ₂ 0	R ₁ OR ₂ 1	M ₁ OR ₂ 1	P ₁ OR ₂ 1	R ₁ 1R ₂ 1
R ₁ OR ₂ 0	0	0	0	ε_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R ₁ OM ₂ 0	0	0	λ_2	0	ε_1	0	0	0	0	0	0	0	δ_2	0	0	0
R ₁ OP ₂ 0	μ_2	0	0	0	0	ε_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M ₁ OR ₂ 0	0	0	0	0	0	0	λ_1	0	0	δ_1	0	0	0	0	0	0
M ₁ OM ₂ 0	0	0	0	0	0	λ_2	0	λ_1	0	0	δ_1	0	0	δ_2	0	0
M ₁ OP ₂ 0	0	0	0	μ_2	0	0	0	0	λ_1	0	0	δ_1	0	0	0	0
P ₁ OR ₂ 0	μ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P ₁ OM ₂ 0	0	μ_1	0	0	0	0	0	0	λ_2	0	0	0	0	0	δ_2	0
P ₁ OP ₂ 0	0	0	μ_1	0	0	0	μ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R ₁ 1R ₂ 0	0	ε_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R ₁ 1M ₂ 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	λ_2	0	0	0	δ_2
R ₁ 1P ₂ 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	μ_2	0	0	0	0	0	0
R ₁ OR ₂ 1	$\tau_{3,2,3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ε_1	0	0
M ₁ OR ₂ 1	0	0	0	$\tau_{3,2,3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	λ_1	δ_1
P ₁ OR ₂ 1	0	0	0	0	0	0	$\tau_{3,2,3}$	0	0	0	0	0	μ_1	0	0	0
R ₁ 1R ₂ 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\tau_{3,2,3}$	0	0	0	0	0	0

$$[G_R]_{C_{1,2,3}} = [G_R]_{C_{1,2}}^{(S_3)} \odot [G_R]_{C_3}^{(S_3)}$$

et ainsi de suite jusqu'au produit tensoriel entre la matrice de la cellule $C_{1,2,3,4}$ et celle de la cellule SMS ($[G_R]_{C_5}$), en réorganisant les matrices selon les états du stock S_5 .

Sachant que :

$$[G_R]_{C_4}^{(S_4)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cccc} & 0R_40 & 0R_41 & 0M_40 & 0P_40 & 1R_40 & 1R_41 & 1M_40 & 1P_40 \\ \begin{array}{l} 0R_40 \\ 0R_41 \\ 0M_40 \\ 0P_40 \\ 1R_40 \\ 1R_41 \\ 1M_40 \\ 1P_40 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{3,4,4} & 0 & 0 & 0 \\ \tau_{5,4,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{3,4,4} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_4 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & \tau_{3,4,4} & 0 \\ \mu_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{3,4,4} \\ 0 & 0 & \varepsilon_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{5,4,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_4 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

$$[G_R]_{C_5}^{(S_5)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} & R_50 & M_50 & P_50 & R_51 & M_51 & P_51 \\ \begin{array}{l} R_50 \\ M_50 \\ P_50 \\ R_51 \\ M_51 \\ P_51 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \tau_{4,5,5} & 0 & 0 \\ \delta_5 & 0 & \lambda_5 & 0 & \tau_{4,5,5} & 0 \\ \mu_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_{4,5,5} \\ 0 & \varepsilon_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_5 & 0 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

Donc la matrice finale obtenue est la matrice $[G_R]_{C_{1,2,3,4,5}}$:

$[G_R]_{C_{1,2,3,4,5}} = [G_R]_{C_{1,2,3,4}}^{(S_5)} \odot [G_R]_{C_5}^{(S_5)}$ de dimension 768×768 . La résolution de la matrice des taux de transitions associée au PdM $[G_R]_{C_{1,2,3,4,5}}$ nous donne les probabilités d'états recherchées, chaque état représentant une ligne (ou colonne) de la matrice. A partir de ces probabilités, nous déduisons les probabilités d'états des machines et stocks.

Concernant l'algorithme DEREK, on a fait appel à des sous-routines existantes dans le MATLAB pour résoudre certaine charge de calculs.

IV.9.6. Application de l'algorithme itérative PAMAV pour la résolution modulaire des PdM :

La ligne de la Figure IV.2 représente une ligne série de type $5M4S$, c'est-à-dire cinq machines placées en série et séparées par des stocks de capacité finie égale à un (1).

Cette ligne comporte cinq cellules qui sont réparties comme suit :

- Une demi-série aval : $C_1 \Rightarrow (M_1-S_2)$;

- Une demi-série amont : $C_5 \Rightarrow (S_5-M_5)$;
- Trois séries : $C_2 \Rightarrow (S_2-M_2-S_3)$, $C_3 \Rightarrow (S_3-M_3-S_4)$ et $C_4 \Rightarrow (S_4-M_4-S_5)$.

Pour cette ligne, il faut définir les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \circ S(C_1) &= \{\emptyset\}; & S^\circ(C_1) &= \{S_2\}; & \text{pred}(C_1) &= \{\emptyset\}; & \text{succ}(C_1) &= \{C_2\}; \\ \circ S(C_2) &= \{S_2\}; & S^\circ(C_2) &= \{S_3\}; & \text{pred}(C_2) &= \{C_1\}; & \text{succ}(C_2) &= \{C_3\}; \\ \circ S(C_3) &= \{S_3\}; & S^\circ(C_3) &= \{S_4\}; & \text{pred}(C_3) &= \{C_2\}; & \text{succ}(C_3) &= \{C_4\}; \\ \circ S(C_4) &= \{S_4\}; & S^\circ(C_4) &= \{S_5\}; & \text{pred}(C_4) &= \{C_3\}; & \text{succ}(C_4) &= \{C_5\}; \\ \circ S(C_5) &= \{S_5\}; & S^\circ(C_5) &= \{\emptyset\}; & \text{pred}(C_5) &= \{C_4\}; & \text{succ}(C_5) &= \{\emptyset\}; \end{aligned}$$

IV.9.6.1. Données industrielles :

On peut ainsi étudier plus judicieusement les performances de la ligne, nous prenons comme paramètres les valeurs numériques présentées dans le tableau IV.10.

Ces valeurs sont déterminées à l'aide d'une étude statistique au sein de l'entreprise BAG dans le cadre de notre stage d'application.

Les informations contenues dans l'historique des pannes et des réparations des machines au niveau du service de maintenance, nous permet de déterminer :

- le taux moyen de panne de chaque machine M_i ;
- le taux moyen de réparation (et de remise en service) de chaque machine M_i .

Pour le taux moyen de chargement d'une pièce dans la machine M_i , et le taux moyen d'usinage d'une pièce par la machine M_i on a effectué une campagne de mesure sur le terrain pour trouver celles-ci.

Pour plus de détail sur la méthodologie de calcul de ces paramètres. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe IV.1.

M_1 : Presse de marquage (MC-14)			
Mois	N ^{bre} de pannes	Temps de pannes [heures]	Temps de réparation [heures]
Janvier	1	6	10
février	2	2	4
Mars	3	5	9
Avril	2	9	16
Mai	3	25.5	46
Juin	0	0	0
Juillet	0	0	0
Out	0	0	0
Septembre	6	45	64
Octobre	0	0	0

Tableau IV.5 : N^{bre} de pannes, temps d'arrêts et de réparations de la machine M_1 .

M_2 : Graisseuse des flancs (MC-18)			
Mois	N ^{bre} de pannes	Temps de pannes [heures]	Temps de réparation [heures]
Janvier	0	0	0
février	0	0	0
Mars	0	0	0
Avril	1	2	2
Mais	0	0	0
Juin	0	0	0
Juillet	0	0	0
Out	0	0	0
Septembre	0	0	0
Octobre	0	0	0

Tableau IV.6 : N^{bre} de pannes, temps d'arrêts et de réparations de la machine M_2 .

M_3 : Presse d'emboutissage (MC-20)			
Mois	N ^{bre} de pannes	Temps de pannes [heures]	Temps de réparation [heures]
Janvier	10	35	49
février	3	5	8
Mars	2	3	5
Avril	0	0	0
Mais	0	0	0
Juin	6	15	19
Juillet	0	0	0
Out	1	2	2
Septembre	8	18	27.5
Octobre	2	4	7

Tableau IV.7 : N^{bre} de pannes, temps d'arrêts et de réparations de la machine M_3 .

M_4 : Poinçonneuse (MC-23)			
Mois	N ^{bre} de pannes	Temps de pannes [heures]	Temps de réparation [heures]
Janvier	2	12	19
février	0	0	0
Mars	1	1	1
Avril	0	0	0
Mais	0	0	0
Juin	0	0	0
Juillet	0	0	0
Out	1	2	6
Septembre	0	0	0
Octobre	1	1.5	1.5

Tableau IV.8 : N^{bre} de pannes, temps d'arrêts et de réparations de la machine M_4 .

M_5 : Soyeuse rogneuse (MC-27)			
Mois	N ^{bre} de pannes	Temps de pannes [heures]	Temps de réparation [heures]
Janvier	3	7	12
février	1	3	3
Mars	4	7	11
Avril	4	8	10.5
Mai	5	21	32
Juin	6	19	33
Juillet	0	0	0
Out	1	3	3
Septembre	2	4	4
Octobre	1	0.75	1.5

Tableau IV.9 : N^{bre} de pannes, temps d'arrêts et de réparations de la machine M_5 .

Paramètres Machines	Taux de chargement (ϵ)	Taux de service (δ)	Taux de panne (λ)	Taux de réparation (μ)
	Pièces/heure	Pièces/heure	Défaillances/heure	Réparations/heure
M_1	302	300	0.0058	0.1146
M_2	281	281	0.00033	0.5000
M_3	272	270	0.0113	0.4513
M_4	241	243	0.0016	0.1886
M_5	253	255	0.0092	0.2454

Tableau IV.10 : Paramètres de chaque machine de la ligne étudiée.

Il apparaît clairement, lorsque l'on regarde la Figure IV.16, que les taux moyens de dépôt et les taux moyens de retrait s'assemblent tous par paires et ainsi, à chaque $\tau_{i,j,k}$ correspond un $\tau_{j,i,k}$. De plus, deux cellules adjacentes possèdent systématiquement au moins un stock auquel (ou auxquels) chaque couple $(\tau_{i,j,k}, \tau_{j,i,k})$ est relié.

Le tableau IV.11 donne, pour chaque couple $(\tau_{i,j,k}, \tau_{j,i,k})$ de la ligne de la Figure IV.16 le nom du stock auquel il est lié :

Couple	Stock
$(\tau_{1,2,2}, \tau_{2,1,2})$	S_2
$(\tau_{2,3,3}, \tau_{3,2,3})$	S_3
$(\tau_{3,4,4}, \tau_{4,3,4})$	S_4
$(\tau_{4,5,5}, \tau_{5,4,5})$	S_5

Tableau IV.11 : Couple et stocks associés pour l'exemple de la Figure IV.2.

Les $\tau_{i,j,k}$ et les $\tau_{j,i,k}$ sont les inconnues que le calcul itératif doit permettre d'identifier, c'est-à-dire ils représentent les informations à propager vers l'amont et vers l'aval.

La Figure IV.16 représente les cellules de manière très schématique et en y mentionnant les taux de dépôt et les taux de retrait. Nous avons ajouté des flèches pour matérialiser l'enchaînement des cellules.

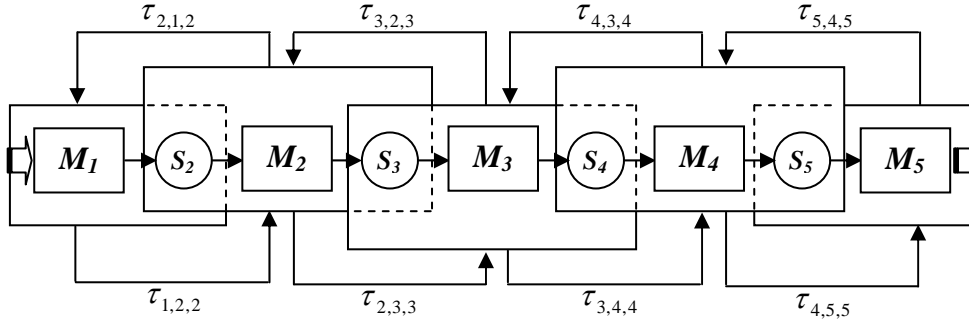


Figure IV.16 : Représentation des cellules et des taux de dépôt et de retrait.

Chaque $\tau_{i,j,k}$ est le paramètre de la distribution de probabilité exponentielle associée à la durée de franchissement de la transition d'entrée du stock auquel il est lié. De la même manière, Chaque $\tau_{j,i,k}$ est le paramètre de la distribution de probabilité exponentielle associée à la durée de franchissement de la transition de sortie du stock auquel il est lié.

Avant de poursuivre, nous définissons pour chaque stock S_k les ensembles $^{\circ}M(S_k)$ et $M^{\circ}(S_k)$ des machines qui se trouvent respectivement à son entrée ou à sa sortie

IV.9.6.2. Déroulement de l'algorithme PAMAV :

Maintenant que le problème est bien défini, la décomposition de la ligne d'une manière formelle effectuée et très lisible, et les matrices des taux de transitions déterminées pour chaque cellule, nous allons dérouler l'algorithme PAMAV dans le but de résoudre le PdM de la ligne entière en effectuant une analyse par parties avec une précision désirée fixée à $\alpha = 10^{-4}$.

Etape I : Initialisation des paramètres à propager

Pas I.1 : $S_{i,j} = \{S_2, S_3, S_4, S_5\}$ c'est-à-dire l'ensemble des stocks du ligne qui ne sont ni à son entrée ni à son sortie ;

Pas I.2 : La formule pour le calcul du débit à vide d'une machine énoncée précédemment est applicable ici pour les cinq machines.

Pour S_2 :

$$\tau_{1,2,2}^{(0)} = D_{vide}(M_1) = Pr_{M_1} \times \delta_1 = \frac{\mu_1 \varepsilon_1 \delta_1}{\mu_1(\delta_1 + \lambda_1) + \varepsilon_1(\lambda_1 + \mu_1)} = 146.7705 ;$$

Pour S_3 :

$$\tau_{2,3,3}^{(0)} = D_{vide}(M_2) = Pr_{M_2} \times \delta_2 = \frac{\mu_2 \varepsilon_2 \delta_2}{\mu_2(\delta_2 + \lambda_2) + \varepsilon_2(\lambda_2 + \mu_2)} = 140.4536 ;$$

Pour S_4 :

$$\tau_{3,4,4}^{(0)} = D_{vide}(M_3) = \Pr_{M_3} \times \delta_3 = \frac{\mu_3 \varepsilon_3 \delta_3}{\mu_3(\delta_3 + \lambda_3) + \varepsilon_3(\lambda_3 + \mu_3)} = 133.8139 ;$$

Pour S_5 :

$$\tau_{4,5,5}^{(0)} = D_{vide}(M_4) = \Pr_{M_4} \times \delta_4 = \frac{\mu_4 \varepsilon_4 \delta_4}{\mu_4(\delta_4 + \lambda_4) + \varepsilon_4(\lambda_4 + \mu_4)} = 120.4886 ;$$

Ensuite, nous calculons les taux de retrait $\tau_{i,j,k}$ afin de les propager vers l'amont.

Etape II : Propagation des taux de retrait moyens ($\tau_{j,i,k}$) vers l'amont

On a $n = 5$ machines, donc 5 cellules ;

Pour $j = 5$ et (Si $\text{Pred}(C_5) = \{C_4\} \neq \emptyset$) Faire

Pas II.1 : $[\text{Pr}]_5 = [0.4127, 0.2894, 0.1950, 0.0921, 0.0000, 0.0108]$;

Pas II.2 : $\text{Pred}(C_5) = \{C_4\}$;

Pour $C_4 / C_4 \in \text{Pred}(C_5)$ Faire

Pas II.3 : $S_{ij} = S_5$;

Pour $S_5 \in S_{ij}$ Faire

Pas II.4 : $S_5^\circ = \{M_5\}$;

Pour $M_5 / M_5 \in S_5^\circ$ Faire

Pas II.5 :

$F_{dum}(M_5) = \Pr_{E_2^{(5)}} \times \varepsilon_5 = 0.2894 \times 253 = 73.2182$ ($\Pr_{E_2^{(5)}}$ est le seul état où M_5 est au repos, et au moins une pièce disponible dans S_5) ;

Fin Pour M_5 ;

Pas II.6 : $F_{dum}(M_5) = 73.2182$

Pas II.7 : $\Pr_{pds}(S_5) = \Pr_{E_2^{(5)}} + \Pr_{E_4^{(5)}} + \Pr_{E_6^{(5)}} = 0.2894 + 0.0921 + 0.0108 = 0.3923$

($\Pr_{E_2^{(5)}}$, $\Pr_{E_4^{(5)}}$ et $\Pr_{E_6^{(5)}}$ sont les états où S_5 contient au moins une pièce) ;

Pas II.8 :

$$\tau_{5,4,5} = \frac{F_{dum}(M_5)}{\Pr_{pds}(S_5)} = 186.6383$$

Fin pour S_5 ;

Fin pour C_4 ;

Fin pour j ;

Pour $j = 4$ et (Si $\text{Pred}(C_4) = \{C_3\} \neq \emptyset$) Faire

Pas II.1 : $[\text{Pr}]_4 = [0.1705, 0.1222, 0.2520, 0.2032, 0.1612, 0.888, 0.0000, 0.0021]$;

Pas II.2 : $\text{Pred}(C_4) = \{C_3\}$;

Pour $C_3 / C_3 \in \text{Pred}(C_4)$ Faire

Pas II.3 : $S_{ij} = S_4$;

Pour $S_4 \in S_{ij}$ Faire

Pas II.4 : $S_4^\circ = \{M_4\}$;

Pour $M_4 / M_4 \in S_4^\circ$ Faire

Pas II.5 :

$F_{dum}(M_4) = (\Pr_{E_3^{(4)}} + \Pr_{E_4^{(4)}}) \times \varepsilon_4 = (0.2520 + 0.2032) \times 241 = 109.7032$

($\Pr_{E_3^{(4)}}$ et $\Pr_{E_4^{(4)}}$) sont les états où M_4 est au repos, et au moins une pièce disponible dans S_4 ;

Fin Pour M_4 ;

Pas II.6 : $F_{dum}(M_4) = 109.7032$

Pas II.7 : $\Pr_{pds}(S_4) = \Pr_{E_3^{(4)}} + \Pr_{E_4^{(4)}} + \Pr_{E_6^{(4)}} + \Pr_{E_8^{(4)}} = 0.2520 + 0.2032 + 0.0888 + 0.0021 = 0.5461$ ($\Pr_{E_3^{(4)}}$, $\Pr_{E_4^{(4)}}$, $\Pr_{E_6^{(4)}}$ et $\Pr_{E_8^{(4)}}$ sont les états où S_4 contient au moins une pièce) ;

Pas II.8 :

$$\tau_{4,3,4} = \frac{F_{dum}(M_4)}{\Pr_{pds}(S_4)} = 200.8848$$

Fin pour S_4 ;

Fin pour C_3 ;

Fin pour j ;

Pour j = 3 et (Si Pred (C_3) = $\{C_2\} \neq \emptyset$) Faire

Pas II.1 : $[\Pr]_3 = [0.1813, 0.1267, 0.2418, 0.2006, 0.1602, 0.0833, 0.0000, 0.0061]$;

Pas II.2 : Pred (C_3) = $\{C_2\}$;

Pour $C_2 / C_2 \in$ Pred (C_3) Faire

Pas II.3 : $S_{ij} = S_3$;

Pour $S_3 \in S_{ij}$ Faire

Pas II.4 : $S_3^\circ = \{M_3\}$;

Pour $M_3 / M_3 \in S_3^\circ$ Faire

Pas II.5 :

$$F_{dum}(M_3) = (\Pr_{E_3^{(3)}} + \Pr_{E_4^{(3)}}) \times \varepsilon_3 = (0.2418 + 0.2006) \times 272 = 120.3328$$

($\Pr_{E_3^{(3)}}$ et $\Pr_{E_4^{(3)}}$) sont les états où M_3 est au repos, et au moins une pièce disponible dans S_3 ;

Fin Pour M_3 ;

Pas II.6 : $F_{dum}(M_3) = 120.3328$

Pas II.7 : $\Pr_{pds}(S_3) = \Pr_{E_3^{(3)}} + \Pr_{E_4^{(3)}} + \Pr_{E_6^{(3)}} + \Pr_{E_8^{(3)}} = 0.2418 + 0.2006 + 0.0833 + 0.0061 = 0.5318$ ($\Pr_{E_3^{(3)}}$, $\Pr_{E_4^{(3)}}$, $\Pr_{E_6^{(3)}}$ et $\Pr_{E_8^{(3)}}$ sont les états où S_3 contient au moins une pièce) ;

Pas II.8 :

$$\tau_{3,2,3} = \frac{F_{dum}(M_3)}{\Pr_{pds}(S_3)} = 226.2745$$

Fin pour S_3 ;

Fin pour C_2 ;

Fin pour j ;

Pour j = 2 et (Si Pred (C_2) = $\{C_1\} \neq \emptyset$) Faire

Pas II.1 : $[\Pr]_2 = [0.1905, 0.1235, 0.2497, 0.1865, 0.1640, 0.857, 0.0000, 0.0001]$;

Pas II.2 : Pred (C_2) = $\{C_1\}$;

Pour $C_1 / C_1 \in$ Pred (C_2) Faire

Pas II.3 : $S_{ij} = S_2$;

Pour $S_2 \in S_{ij}$ Faire

Pas II.4 : $S_2^\circ = \{M_2\}$;

Pour $M_2 / M_2 \in S_2^\circ$ **Faire**

Pas II.5 :

$$F_{dum}(M_2) = (\Pr_{E_3^{(2)}} + \Pr_{E_4^{(2)}}) \times \varepsilon_2 = (0.2497 + 0.1865) \times 281 = 122.5722$$

($\Pr_{E_3^{(2)}}$ et $\Pr_{E_4^{(2)}}$) sont les états où M_2 est au repos, et au moins une pièce disponible dans S_2);

Fin Pour M_2 ;

Pas II.6 : $F_{dum}(M_2) = 122.5722$

Pas II.7 : $\Pr_{pds}(S_2) = \Pr_{E_3^{(2)}} + \Pr_{E_4^{(2)}} + \Pr_{E_6^{(2)}} + \Pr_{E_8^{(2)}} = 0.2497 + 0.1865 + 0.0857 + 0.0001 = 0.5220$ ($\Pr_{E_3^{(2)}}$, $\Pr_{E_4^{(2)}}$, $\Pr_{E_6^{(2)}}$ et $\Pr_{E_8^{(2)}}$ sont les états où S_4 contient au moins une pièce) ;

Pas II.8 :

$$\tau_{2,1,2} = \frac{F_{dum}(M_2)}{\Pr_{pds}(S_2)} = 234.8126$$

Fin pour S_2 ;

Fin pour C_1 ;

Fin pour j ;

En conclusion, ($\tau_{5,4,5}^{(0)}$, $\tau_{4,3,4}^{(0)}$, $\tau_{3,2,3}^{(0)}$ et $\tau_{2,1,2}^{(0)}$) est les valeurs des taux moyens de retrait à propager vers l'amont, plus exactement vers les cellules respectivement C_4 , C_3 , C_2 et C_1 .

Etape III : Propagation des taux de dépôt moyens ($\tau_{i,j,k}$) vers l'aval

Pour $i = 1$ et (Si $\text{Succ}(C_1) = \{C_2\} \neq \emptyset$) **Faire**

Pas III.1 : $[\Pr]_1 = [0.2978, 0.3830, 0.2998, 0.0194]$.

Pas III.2 : $\text{Succ}(C_1) = \{C_2\}$

Pour $C_2 / C_2 \in \text{Succ}(C_1)$ **Faire**

Pas III.3 : $S_{i,j} = \{S_2\}$

Pour $S_2 \in S_{i,j}$ **Faire**

Pas III.4 : $^\circ S_2 = \{M_1\}$

Pour $M_1 / M_1 \in ^\circ S_2$ **Faire**

Pas III.5 :

$$F_{fum}(M_1) = \Pr_{E_3^{(1)}} \times \delta_1 = 0.2998 \times 300 = 89.9400$$
 ($\Pr_{E_3^{(1)}}$ est la seul état où M_1

est en marche, et au moins une place libre dans le stock S_2) ;

Fin pour M_1 ;

Pas III.6 : $F_{fum} = 89.9400$

Pas III.7 : $\Pr_{pls}(S_2) = \Pr_{E_1^{(1)}} + \Pr_{E_3^{(1)}} + \Pr_{E_4^{(1)}} = 0.2978 + 0.2998 + 0.0194 = 0.6170$

($\Pr_{E_1^{(1)}}$, $\Pr_{E_3^{(1)}}$, $\Pr_{E_4^{(1)}}$) sont les états où S_2 contient au moins une pièce) ;

Pas III.8 :

$$\tau_{1,2,2}^{(1)} = \frac{F_{fum}}{\Pr_{pls}(S_2)} = 145.7699$$

Fin pour S_2 ;

Fin pour C_2 ;

Fin pour i ;

Pour $i = 2$ et (Si Succ (C_2) = $\{C_3\} \neq \emptyset$) **Faire**

Pas III.1 : $[\Pr]_2 = [0.1923, 0.1239, 0.2491, 0.1855, 0.1640, 0.0851, 0.0001]$.

Pas III.2 : Succ (C_2) = $\{C_3\}$

Pour $C_3 / C_3 \in$ Succ (C_2) **Faire**

Pas III.3 : $S_{i,j} = \{S_3\}$

Pour $S_3 \in S_{i,j}$ **Faire**

Pas III.4 : ${}^\circ S_3 = \{M_2\}$

Pour $M_2 / M_2 \in {}^\circ S_3$ **Faire**

Pas III.5 :

$$F_{fum}(M_2) = (\Pr_{E_5^{(2)}} + \Pr_{E_6^{(2)}}) \times \delta_2 = (0.1640 + 0.0851) \times 281 = 69.9971$$

($\Pr_{E_5^{(2)}}$ et $\Pr_{E_6^{(2)}}$ sont les états où M_2 est en marche, et au moins une place libre dans le stock S_3) ;

Fin pour M_2 ;

Pas III.6 : $F_{fum} = 69.9971$

Pas III.7 : $\Pr_{pls}(S_3) = \Pr_{E_1^{(2)}} + \Pr_{E_3^{(2)}} + \Pr_{E_5^{(2)}} + \Pr_{E_6^{(2)}} + \Pr_{E_7^{(2)}} + \Pr_{E_8^{(2)}} = 0.1923 + 0.2491 + 0.1640 + 0.0851 + 0.0000 + 0.0001 = 0.6906$,

($\Pr_{E_1^{(2)}}$, $\Pr_{E_3^{(2)}}$, $\Pr_{E_5^{(2)}}$, $\Pr_{E_6^{(2)}}$, $\Pr_{E_7^{(2)}}$ et $\Pr_{E_8^{(2)}}$ sont les états où S_3 contient au moins une pièce) ;

Pas III.8 :

$$\tau_{2,3,3}^{(1)} = \frac{F_{fum}}{\Pr_{pls}(S_3)} = 101.3569$$

Fin pour S_3 ;

Fin pour C_3 ;

Fin pour i ;

Pour $i = 3$ et (Si Succ (C_3) = $\{C_4\} \neq \emptyset$) **Faire**

Pas III.1 : $[\Pr]_3 = [0.2769, 0.1397, 0.2135, 0.1494, 0.1564, 0.0587, 0.0000, 0.0054]$.

Pas III.2 : Succ (C_3) = $\{C_4\}$

Pour $C_4 / C_4 \in$ Succ (C_3) **Faire**

Pas III.3 : $S_{i,j} = \{S_4\}$

Pour $S_4 \in S_{i,j}$ **Faire**

Pas III.4 : ${}^\circ S_4 = \{M_3\}$

Pour $M_3 / M_3 \in {}^\circ S_4$ **Faire**

Pas III.5 :

$$F_{fum}(M_3) = (\Pr_{E_5^{(3)}} + \Pr_{E_6^{(3)}}) \times \delta_3 = (0.1564 + 0.0587) \times 270 = 58.0770$$

($\Pr_{E_5^{(3)}}$ et $\Pr_{E_6^{(3)}}$ sont les états où M_3 est en marche, et au moins une place libre dans le stock S_4) ;

Fin pour M_3 ;

Pas III.6 : $F_{fum} = 58.0770$

Pas III.7 : $\Pr_{pls}(S_4) = \Pr_{E_1^{(3)}} + \Pr_{E_3^{(3)}} + \Pr_{E_5^{(3)}} + \Pr_{E_6^{(3)}} + \Pr_{E_7^{(3)}} + \Pr_{E_8^{(3)}} = 0.2769 + 0.2135 + 0.1564 + 0.0587 + 0.0000 + 0.0054 = 0.7109$
 ($\Pr_{E_1^{(3)}}, \Pr_{E_3^{(3)}}, \Pr_{E_5^{(3)}}, \Pr_{E_6^{(3)}}, \Pr_{E_7^{(3)}}$ et $\Pr_{E_8^{(3)}}$ sont les états où S_4 contient au moins une pièce) ;

Pas III.8 :

$$\tau_{3,4,4}^{(1)} = \frac{F_{fum}}{\Pr_{pls}(S_4)} = 81.6950$$

Fin pour S_4 ;

Fin pour C_4 ;

Fin pour i ;

Pour i = 4 et (Si Succ (C_4) = $\{C_5\} \neq \emptyset$) Faire

Pas III.1 : $[\Pr]_4 = [0.3182, 0.1392, 0.2072, 0.1282, 0.1538, 0.0517, 0.0000, 0.0017]$.

Pas III.2 : Succ (C_4) = $\{C_5\}$

Pour $C_5 / C_5 \in$ Succ (C_4) Faire

Pas III.3 : $S_{ij} = \{S_5\}$

Pour $S_5 \in S_{ij}$ Faire

Pas III.4 : ${}^\circ S_5 = \{M_4\}$

Pour $M_4 / M_4 \in {}^\circ S_5$ Faire

Pas III.5 :

$$F_{fum}(M_4) = (\Pr_{E_5^{(4)}} + \Pr_{E_6^{(4)}}) \times \delta_4 = (0.1538 + 0.0517) \times 243 = 49.9365$$

($\Pr_{E_5^{(4)}}$ et $\Pr_{E_6^{(4)}}$ sont les états où M_4 est en marche, et au moins une place libre dans le stock S_5) ;

Fin pour M_4 ;

Pas III.6 : $F_{fum} = 49.9365$

Pas III.7 : $\Pr_{pls}(S_5) = \Pr_{E_1^{(4)}} + \Pr_{E_3^{(4)}} + \Pr_{E_5^{(4)}} + \Pr_{E_6^{(4)}} + \Pr_{E_7^{(4)}} + \Pr_{E_8^{(4)}} = 0.3182 + 0.2072 + 0.1538 + 0.0517 + 0.0000 + 0.0017 = 0.7325$
 ($\Pr_{E_1^{(4)}}, \Pr_{E_3^{(4)}}, \Pr_{E_5^{(4)}}, \Pr_{E_6^{(4)}}, \Pr_{E_7^{(4)}}$ et $\Pr_{E_8^{(4)}}$ sont les états où S_5 contient au moins une pièce) ;

Pas III.8 :

$$\tau_{4,5,5}^{(1)} = \frac{F_{fum}}{\Pr_{pls}(S_5)} = 67.6024$$

Fin pour S_5 ;

Fin pour C_5 ;

Fin pour i et Succ (C_5) = \emptyset ; Stop

En conclusion, $(\tau_{1,2,2}^{(1)}, \tau_{2,3,3}^{(1)}, \tau_{3,4,4}^{(1)}$ et $\tau_{4,5,5}^{(1)})$ est les valeurs des taux moyens de dépôt à propager vers l'aval, plus exactement vers les cellules respectivement C_1, C_2, C_3 et C_4 .

Etape IV : Condition d'arrêt

Pour bien illustrer les itérations et la convergence de l'algorithme, nous allons les valeurs des taux pour chaque itération jusqu'au moment où le critère d'arrêt est vérifié ; la précision à été fixée à 10^{-4} .

Itération n°	$\tau_{1,2,2}$	$\tau_{2,1,2}$	$\tau_{2,3,3}$	$\tau_{3,2,3}$	$\tau_{3,4,4}$	$\tau_{4,3,4}$	$\tau_{4,5,5}$	$\tau_{5,4,5}$	Critère d'arrêt
0	146.770 5	234.812 6	140.453 6	226.274 5	133.813 9	200.884 8	120.488 6	186.638 3	-
1	145.769 9	234.483 3	101.356 9	230.667 3	81.6950	207.725 3	67.6024	202.983 7	85.811 3
2	145.762 8	234.519 0	101.134 9	230.681 7	81.2803	207.736 5	67.1912	203.379 0	0.7405
3	145.762 8	234.519 0	101.133 6	230.681 9	81.2772	207.736 6	67.1734	203.386 1	0.0200
4	145.762 8	234.519 0	101.133 5	230.681 9	81.2772	207.736 5	67.1731	203.386 2	0.0000 < 10^{-4} ⇒ Stop

Tableau IV.12 : Convergence de l'algorithme itérative PAMAV.

Une fois la condition d'arrêt est atteinte, nous obtenons les résultats du tableau IV.12.

Ces résultats ont été déterminés à l'aide d'un programme implémenté sous MATLAB, pour la résolution des systèmes d'équations linéaires nous avons utilisé les expressions expliquée dans [§ IV.9.4] ou une méthode de type élimination de Gauss. Nous avons saisi d'abord les différents paramètres de chaque machine en précisant les taux à calculer et à propager.

Nous avons exécuté ensuite le programme. Ce dernier fournit des probabilités d'état, chaque état représentant une ligne (ou colonne) des matrices en question. Nous donnons les résultats finaux des vecteurs de distribution stationnaire de chaque cellule.

Cellule C₁ : $[\text{Pr}_{R_1,0}, \text{Pr}_{R_1,1}, \text{Pr}_{M_1,0}, \text{Pr}_{P_1,0}] = [0.2977, 0.3833, 0.2996, 0.0194]$

Cellule C₂ :
 $[\text{Pr}_{0R_2,0}, \text{Pr}_{0R_2,1}, \text{Pr}_{1R_2,0}, \text{Pr}_{1R_2,1}, \text{Pr}_{0M_2,0}, \text{Pr}_{1M_2,0}, \text{Pr}_{0P_2,0}, \text{Pr}_{1P_2,0}] =$
 $[0.1946, 0.1230, 0.2502, 0.1818, 0.1648, 0.0855, 0.0000, 0.0001]$

Cellule C₃ :
 $[\text{Pr}_{0R_3,0}, \text{Pr}_{0R_3,1}, \text{Pr}_{1R_3,0}, \text{Pr}_{1R_3,1}, \text{Pr}_{0M_3,0}, \text{Pr}_{1M_3,0}, \text{Pr}_{0P_3,0}, \text{Pr}_{1P_3,0}] =$
 $[0.2818, 0.1379, 0.2145, 0.1443, 0.1572, 0.0589, 0.0000, 0.0054]$

Cellule C₄ :
 $[\text{Pr}_{0R_4,0}, \text{Pr}_{0R_4,1}, \text{Pr}_{1R_4,0}, \text{Pr}_{1R_4,1}, \text{Pr}_{0M_4,0}, \text{Pr}_{1M_4,0}, \text{Pr}_{0P_4,0}, \text{Pr}_{1P_4,0}] =$
 $[0.3326, 0.1329, 0.2095, 0.1153, 0.1557, 0.0521, 0.0000, 0.0019]$

Cellule C₅ :

$$[\text{Pr}_{R_5 0}, \text{Pr}_{R_5 1}, \text{Pr}_{M_5 0}, \text{Pr}_{M_5 1}, \text{Pr}_{P_5 0}, \text{Pr}_{P_5 1}] = [0.5950, 0.1996, 0.1567, 0.0413, 0.0000, 0.0074, 0.0098]$$

A partir de ces probabilités, nous déduisons les probabilités d'états des machines et stocks (Tableau IV.13 et IV.14).

Machines P.E.M ²⁷	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅
Pr_repos	0.6810	0.7496	0.7785	0.7903	0.7946
Pr_marche	0.2996	0.2503	0.2161	0.2078	0.1980
Pr_panne	0.0194	0.0001	0.0054	0.0019	0.0074

Tableau IV.13 : Calcul itératif pour un stock de une (1) pièce
« Probabilité d'Etat de la Machine ».

Stock P.E.S ²⁸	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅
Pr_pds ²⁹	0.3833	0.3048	0.2822	0.2483
Pr_pls ³⁰	0.6167	0.6952	0.7178	0.7517

Tableau IV.14 : Calcul itératif pour un stock de une (1) pièce
« Probabilité d'Etat de Stock ».

Les résultats des tableaux précédents (Tableau IV.13 et IV.14) ont été obtenus au bout de quatre (4) itérations. Au cours de chaque itération on a résolu quatre fois un (4 × 1) un système (4 × 4) et cinq fois un (5 × 1) un système (6 × 6) et (8 × 8) (à cause du calcul des $\tau_{j,i,k}^{(0)}$). Si on considère que la complexité d'un algorithme de résolution d'un système de n équations à n inconnues est en n^2 alors, on peut évaluer la complexité du calcul précédent à : $4 \times 4^2 + 5 \times 6^2 + 5 \times 8^2 = 4 \times 16 + 5 (36) + 5 \times (64) = 64 + 180 + 320 = 564$.

La matrice de transition du système complet (une seule grande matrice des taux de transitions représentant la ligne entière) possède 768 états (matrice de dimension 768 × 768) et la complexité du calcul de sa distribution stationnaire est évalué à $768^2 = 589824$.

Pour de petits systèmes, la démarche itérative demande plus d'effort de calcul que la méthode directe [DANIEL 95]. Cette situation s'inverse très rapidement au fur et à mesure que la taille des systèmes croît et la méthode itérative prend alors très largement le dessus sur la méthode exacte qui devient très difficile à appliquer.

Aussi le calcul itératif présente un écart relatif par rapport au calcul exact, ne dépassant pas 1% pour des exemples assez simple (2MIS). Cependant, il peut

²⁷ P.E.M : Probabilité d'Etat de la Machine.

²⁸ P.E.S : Probabilité d'Etat de Stock.

²⁹ La probabilité qu'au moins une pièce est disponible dans le stock.

³⁰ La probabilité qu'au moins une place est libre dans le stock.

atteindre parfois de 5% à 10% pour des exemples très complexes. Les résultats restent malgré cela très raisonnables.

L'erreur sur les paramètres des machines les plus rapides diminue de manière permanente au fur et à mesure que la capacité du stock augmente. La méthode que

nous avons utilisé étant dédiée au systèmes complexes, ce fait est intéressant au plus haut point puisqu'il semble impliquer que plus le nombre de pièces augmente, plus les valeurs obtenues par les deux méthodes se rapprochent.

Pour vérifier si la précision des calculs est en rapport avec la position de la machine sur la ligne, [DANIEL 95] étudie une ligne de deux machines séparé par un stock et fait le calcul dans les deux cas de figure possible à savoir la machine la plus rapide en tête et la plus lente en sortie et l'inverse les résultats obtenus démontre que l'importance des erreurs n'est pas lié à la position de la machine mais plutôt à la machine elle-même. Les erreurs les plus importantes correspondent aux machines les plus lentes.

IV.10. Conclusion :

A partir d'une ligne d'emboutissage de l'entreprise BAG, un exemple a été proposé, permettant d'appliquer la méthodologie définie dans le troisième chapitre. L'exemple a suivi les différentes étapes menant à la modélisation et l'évaluation de performances analytique (probabilités d'états).

Il s'agit maintenant d'interpréter ces probabilités et de les analyser dans le but d'évaluer les performances de la ligne. La complexité de cette interprétation, le rapprochement du monde industriel (qui rarement analyse des probabilités!) ; et la nécessité d'avoir des quantités permettant d'évaluer l'amélioration des performances et de la sûreté de fonctionnement (et non pas des probabilités, mais à travers les probabilités), nous motive à définir des indicateurs (avec leurs modes de calcul). Nous nous intéressons dans ce travail à deux indicateurs très étudiés dans la littérature, la disponibilité et la productivité. Le chapitre suivant sera consacré à l'étude de ces indicateurs.

V.1. Introduction :

Le chapitre précédent, présente une modélisation d'une ligne d'emboutissage à l'aide des RdPSGSyIs, une évaluation analytique à l'aide des PdM est présentée. Cette dernière permet de calculer les probabilités d'états des éléments qui composent cette ligne.

Il s'agit de traduire ces probabilités en termes d'indicateurs significatifs, l'évaluation et l'analyse de ces indicateurs nous aident à prendre des décisions en ce qui concerne les actions de maintenance,... dans le but d'améliorer les performances et le niveau de la sûreté de fonctionnement de la ligne.

Ce chapitre, concerne l'étude du rapport disponibilité/productivité. Nous y donnons, d'une part, un certain type de disponibilités et de productivités et, d'autre part, le moyen de les extraire des résultats que nous obtenons grâce aux méthodes de résolution présentées au chapitre précédent, l'interprétation de ces indicateurs est alors présentée.

V.2. Disponibilité moyenne :

La disponibilité moyenne sur un intervalle de temps donné peut être évaluée par les rapports suivants:

$$Do = \frac{\text{temps de disponibilité}}{\text{temps de disponibilité} + \text{temps d'indisponibilité}}$$

$$\text{Ou } Do = \frac{TCBF}{TCBF + TCI}$$

Avec: *TCBF*: Temps Cumulé de Bon Fonctionnement ;
TCI : Temps Cumulé d'Immobilisation³¹.

V.2.1. Disponibilité intrinsèque :

Tous d'abord, il convient de différencier les disponibilités théoriques³² (instantanées et asymptotiques) de la disponibilité pratique.

Certaines études [MONCHY 91], [DANIEL-B 87] et [ZEMOURI 00] fait cette distinction. D'ailleurs, les deux approches peuvent se regrouper sous le terme de disponibilité "*opérationnelle*" utilisées en gestion de la maintenance, modélisées suivant les données saisies et l'objectif de gestion recherché.

Cette disponibilité (*intrinsèque*) est évaluée en prenant en compte les moyennes de bon fonctionnement et les moyennes de réparation.

³¹ Le temps cumulé d'immobilisation comprend les temps d'intervention et les temps logistiques [DANIEL-B 87].

³² Les disponibilités théoriques sont modélisées par des lois probabilistes [DANIEL-B 87].

- Calcul à partir des indicateurs "fiabilité"

On entend par disponibilité théorique la quantité :

- Dispositifs réparables³³ et non réparables³⁴ :

$$D_{th} = \frac{MUT}{MUT + MDT} = \frac{MUT}{MTBF}$$

Dans le cas où on répare hors du temps d'ouverture:

$$D_{prat} = \frac{MUT}{MUT + MDT(ouverture)}$$

$MDT(ouverture) = MDT - \text{temps réparation hors ouverture.}$

- Dispositifs réparables :

Dans le cas où $MTTR \ll MTBF$ et que l'on ne connaît pas le MDT il est possible d'estimer la disponibilité par la formule approchée suivante:

$$D_{th} \approx \frac{MTBF}{MTBF + MTTR}$$

Avec:

MUT : la durée moyenne de bon fonctionnement après réparation.

MDT : la durée moyenne de défaillance.

$MTBF$: Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement, traduction de "Mean Time Between Failares"

$MTTR$: Moyenne des Temps Techniques de Réparation

: moyenne des temps d'immobilisation pour intervention de maintenance

: traduction de "Mean Time To Repair"

On constate ainsi que pour augmenter la disponibilité pratique, il faut réparer hors du temps "ouverture".

Il n'est pas toujours possible de travailler hors du temps "ouverture". De plus, le coût horaire est en général plus élevé. Cependant, ne négligeons pas cette solution. Dans certains cas, elle peut être économiquement justifiée.

³³ Ce dispositif est caractérisé par la possibilité de remplacer un ou plusieurs constituants défectueux par d'autres neufs et de même type, sans échange de ceux non défectueux. Ceci implique que le nombre de constituants échangés doit être inférieur au total de sa nomenclature [DANIEL-B 87].

³⁴ Ce dispositif est représenté par un constituant ou un composant généralement mécanique ou électronique ou un ensemble de pièces dont la défaillance de l'une entraîne le remplacement de toutes, donc de l'ensemble [DANIEL-B 87].

Cette disponibilité correspond à des conditions idéales, c'est-à-dire avec un support logistique parfait.

Relation: $MTBF$ et $TCBF$ d'une part et $MTTR$ et TCI d'autre part

$$MTBF = \frac{TCBF}{Nc} ; MTTR = \frac{TCI}{Nc}$$

Avec: Nc : nombre d'interventions de maintenance avec immobilisation

V.2.2. Disponibilité opérationnelle (D_{op}) :

C'est l'aptitude de la machine à accomplir (sans aucun arrêt pour cause de défaillance, "famine", ou "burrage") sa tâche pendant toute la durée de fonctionnement du système. Pour cette mesure, sont pris en compte les temps logistiques ce qui donne :

$$D_{op} = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR + MTL} = \frac{TBF(M_i)}{TRQ(M_i)} = Pr_{M_i} \quad (\text{sans unité})$$

$$D_{op}(M_1) = Pr_{M_1} = 0.2996$$

$$D_{op}(M_2) = Pr_{M_2} = 0.2503$$

$$D_{op}(M_3) = Pr_{M_3} = 0.2161$$

$$D_{op}(M_4) = Pr_{M_4} = 0.2078$$

$$D_{op}(M_5) = Pr_{M_5} = 0.1980$$

Avec:

MTL : moyenne des temps logistiques, "Mean Time Logistic".

$TBF(M_i)$ = Temps de bon fonctionnement de la machine $M_i = Pr_{M_i} \times TRQ(M_i)$.

$TRQ(M_i)$ = Temps requis de la machine $M_i = TRQ(S)$ = donnée connue.

Les résultats de calcul de la disponibilité opérationnelle³⁵ de chaque machine de la ligne sont présentés par L'histogramme de la Figure V.1 :

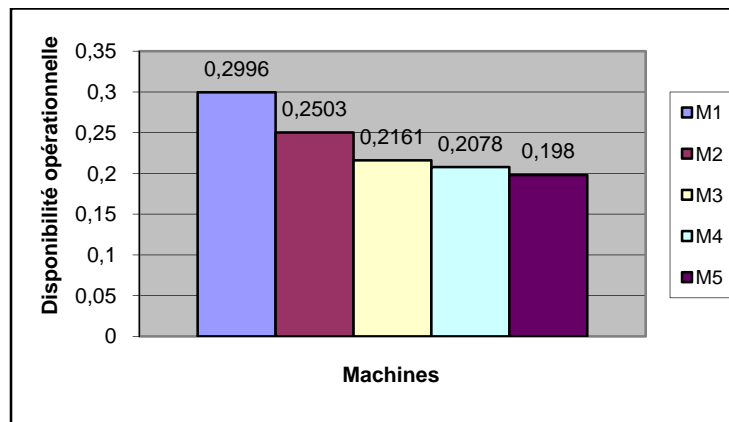


Figure V.1: La disponibilité opérationnelle de chaque machine de la ligne (illustration).

La disponibilité opérationnelle pour le système de production global est la plus petite D_{op} de toutes ses machines de sortie, c'est-à-dire M_i telles que $M_i \in \mathbf{S}^{\square}$.

$$D_{op}(\mathbf{S}) = \underset{M_i}{\text{Min}}(D_{op}(M_i)) \quad (\text{sans unité})$$

$$= 19.80$$

Notons que ces calculs sont effectués en utilisant, les expressions universelles de la disponibilité opérationnelle d'une machine M_i , ainsi que pour la ligne complète.

Remarquons, les valeurs de la disponibilité opérationnelle (si on multiplie cet indicateur par 100, on obtient le pourcentage du temps de bon fonctionnement de chaque machine par rapport au temps requis) varient entre 20.78% pour la machine M_4 et 29.96% pour la machine M_1 , et à partir de sa définition, ces faibles valeurs permettent de dire que : il n'est pas souhaitable dans la production moderne (au plus juste) que cette disponibilité soit proche de 1 (ou 100%), ce qui indiquerait que la est saturé et qu'il n'y a plus aucune marge pour réagir³⁶, notamment à des commandes

³⁵ La disponibilité opérationnelle est parfois appelée taux de rendement global (TRG) de la machine [SASSINE 98].

³⁶ Une exigence importante du client est de recevoir sa livraison dans les délais impartis et ce quel que soit le carnet de commande (variable). Satisfaire une telle exigence impose au système de production d'être réactif [DRAGHICI 98], c'est-à-dire :

- capable de répondre rapidement et économiquement à un changement (fabrication multi-produit, introduction d'une commande urgente, modification d'une norme etc.) ;
- à un aléa : ces aléas peuvent pouvoir soit
 - du système de production (défauts d'alimentation, défauts de réalisations d'une tâche, pannes des machines, rebuts)
 - de son environnement (approvisionnement des matières premières).

La réactivité d'un système de production est définie comme l'aptitude à répondre (réagir) dans un temps requis aux changements de son environnement interne ou externe (aléas, situation nouvelle, perturbation, sollicitation, ...) par rapport au régime (fonctionnement) permanent (stable) [DRAGHICI 98].

urgentes ou à une augmentation de volume de production. A l'inverse, une disponibilité opérationnelle faible ne signifie pas forcément que la machine soit disponible et que la réactivité soit élevée.

V.2.3. Disponibilité Propre (D_{pr}) :

C'est l'aptitude de la machine à accomplir sa tâche uniquement pendant le temps de son engagement propre à fonctionner. C'est-à-dire on ne prend pas en compte les temps d'attente (ou arrêt induits) pour causes externes ("famine" ou "bourrage").

$$D_{pr}(M_i) = \frac{TBF(M_i)}{TEP(M_i)} = \frac{Pr_{M_i}}{1 - Pr_{R_i}} \quad (\text{sans unité})$$

$$D_{pr}(M_1) = \frac{Pr_{M_1}}{1 - Pr_{R_1}} = \frac{0.2996}{1 - 0.6810} = 0.9392$$

$$D_{pr}(M_2) = \frac{Pr_{M_2}}{1 - Pr_{R_2}} = \frac{0.2503}{1 - 0.7496} = 0.9996$$

$$D_{pr}(M_3) = \frac{Pr_{M_3}}{1 - Pr_{R_3}} = \frac{0.2161}{1 - 0.7785} = 0.9756$$

$$D_{pr}(M_4) = \frac{Pr_{M_4}}{1 - Pr_{R_4}} = \frac{0.2078}{1 - 0.7903} = 0.9909$$

$$D_{pr}(M_5) = \frac{Pr_{M_5}}{1 - Pr_{R_5}} = \frac{0.1980}{1 - 0.7946} = 0.9640$$

Les résultats de calcul de la disponibilité propre pour chaque machine de la ligne sont récapitulés par l'histogramme de la Figure V.2 :

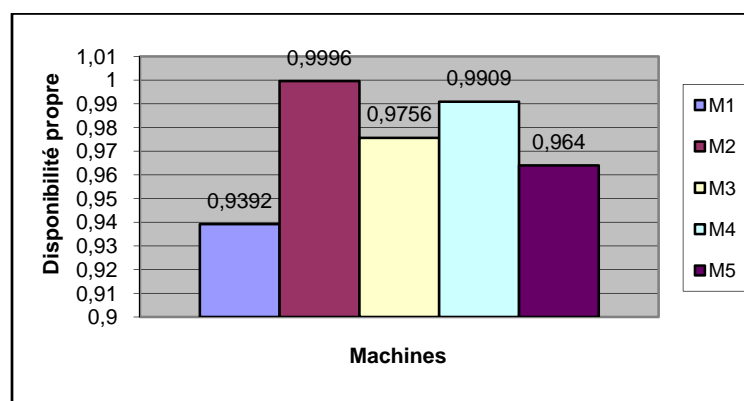


Figure V.2 : La disponibilité propre de chaque machine de la ligne (illustration).

Avec :

TEP : temps d'engagement propre = $TBF + TAP$;

tel que TAP : temps d'arrêt propre

$$= TP = Pr_{P_i} \times TRQ$$

TP = temps de panne.

Notons que ces calculs sont effectués en utilisant, les expressions universelles de la disponibilité propre d'une machine M_i . On pourrait définir cette disponibilité pour la ligne complète, mais il faudrait alors tenir compte des problèmes qui peuvent se poser à son entrée ou à sa sortie, ce qui n'est pas possible avec les hypothèses de stocks d'entrée et stocks de sortie « capacité infinis » que nous avons prises.

Remarquons, les valeurs de la disponibilité propre (si on multiplie cet indicateur par 100, on obtient le pourcentage du temps de bon fonctionnement par rapport au temps d'engagement propre) de chaque machine de la ligne.

On constate que les valeurs de la disponibilité propre de chaque machine de la ligne est très élevée, à savoir la machine M_2 à une disponibilité de 99.92% car cette machine ne tombe en panne qu'un seul fois par an (un seul arrêt au mois d'avril, le temps d'arrêt est de deux heures, ainsi que le temps de réparation est de deux heures. Aussi la machine M_4 à une disponibilité de 99.13% car cette machine ne tombe en panne que cinq fois par an, le temps d'arrêt total est de 17 heures et 30 minutes. Si on compare la disponibilité de la machine M_1 avec celui de la machine M_2 on trouve que la machine M_1 tombe en panne 17 fois par an avec un temps d'arrêt de 92 heures et 30 minutes et 149 heures de réparations, et la machine M_2 ne tombe en panne qu'une seule fois par an. Remarquons aussi, que l'indisponibilité des machines est représentée par le temps de panne plus celui des arrêts pour la maintenance...etc.

V.2.4. Disponibilité Totale (D_{it}) :

C'est l'aptitude de la machine à s'engager totalement pour accomplir sa tâche pendant toute la durée de fonctionnement du système.

$$D_{it} = \frac{TEP(M_i)}{TRQ(M_i)} = 1 - Pr_{R_i} \quad (\text{sans unité})$$

$$D_{it}(M_1) = 1 - Pr_{R_1} = 1 - 0.6810 = 0.3190$$

$$D_{it}(M_2) = 1 - Pr_{R_2} = 1 - 0.7496 = 0.2506$$

$$D_{it}(M_3) = 1 - Pr_{R_3} = 1 - 0.7785 = 0.2215$$

$$D_{it}(M_4) = 1 - Pr_{R_4} = 1 - 0.7903 = 0.2097$$

$$D_{it}(M_5) = 1 - Pr_{R_5} = 1 - 0.7946 = 0.2054$$

Notons que ces calculs sont effectués en utilisant, les expressions universelles de la disponibilité totale d'une machine M_i .

L'histogramme de la Figure V.3, représente les résultats de la disponibilité totale des différentes machines de la ligne étudiée.

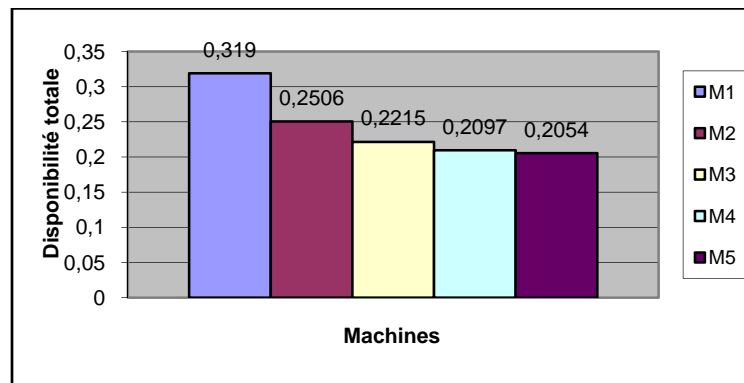


Figure V.3 : La disponibilité totale de chaque machine de la ligne (illustration).

Nous continuerons par les notions d'indisponibilité (qui sont en fait les compléments aux notions de disponibilité) représentés par les indicateurs suivants :

Indisponibilité opérationnelle (I_{op}), Propre (I_{pr}), et totale (T_{il}):

$$I_{op}(M_i) = 1 - D_{op}(M_i) = 1 - Pr_{M_i} \quad (\text{sans unité})$$

$$I_{op}(M_1) = 1 - D_{op}(M_1) = 1 - Pr_{M_1} = 1 - 0.2996 = 0.7004$$

$$I_{op}(M_2) = 1 - D_{op}(M_2) = 1 - Pr_{M_2} = 1 - 0.2503 = 0.7497$$

$$I_{op}(M_3) = 1 - D_{op}(M_3) = 1 - Pr_{M_3} = 1 - 0.2161 = 0.7839$$

$$I_{op}(M_4) = 1 - D_{op}(M_4) = 1 - Pr_{M_4} = 1 - 0.2078 = 0.7922$$

$$I_{op}(M_5) = 1 - D_{op}(M_5) = 1 - Pr_{M_5} = 1 - 0.1980 = 0.8020$$

Les résultats de calcul de l'indisponibilité opérationnelle de chaque machine de la ligne étudiée sont présentés par l'histogramme de la Figure V.4.

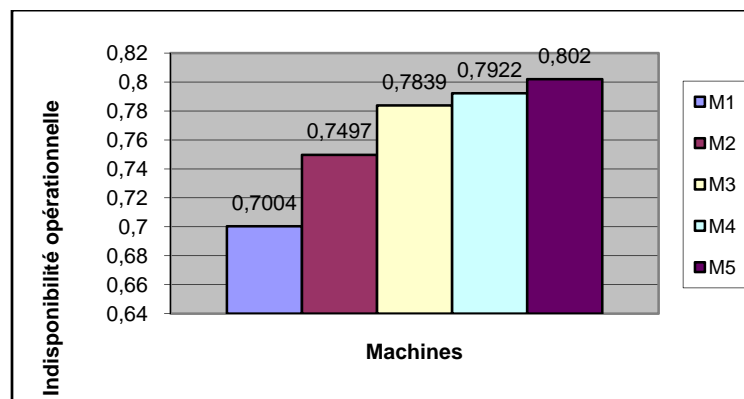


Figure V.4 : L'indisponibilité opérationnelle de chaque machine de la ligne (illustration).

$$I_{op}(\mathbf{S}) = 1 - D_{op}(\mathbf{S}) = 1 - \text{Min}_i(D_{op}(M_i)) \quad \text{avec } M_i \text{ en sortie de } \mathbf{S}$$

$$= 1 - 0.1980 = 0.8020$$

$$I_{pr}(M_i) = 1 - D_{pr}(M_i) = 1 - \frac{\text{Pr}_{M_i}}{\text{Pr}_{M_i} + \text{Pr}_{P_i}} = \frac{\text{Pr}_{P_i}}{\text{Pr}_{M_i} + \text{Pr}_{P_i}} \quad (\text{sans unité})$$

$$I_{pr}(M_1) = 1 - D_{pr}(M_1) = 1 - 0.3992 = 0.0608$$

$$I_{pr}(M_2) = 1 - D_{pr}(M_2) = 1 - 0.9996 = 0.0004$$

$$I_{pr}(M_3) = 1 - D_{pr}(M_3) = 1 - 0.9756 = 0.0244$$

$$I_{pr}(M_4) = 1 - D_{pr}(M_4) = 1 - 0.9909 = 0.0091$$

$$I_{pr}(M_5) = 1 - D_{pr}(M_5) = 1 - 0.9640 = 0.0360$$

L'indisponibilité propre pour chaque machine de la ligne est illustrée par l'histogramme de la Figure V.5.

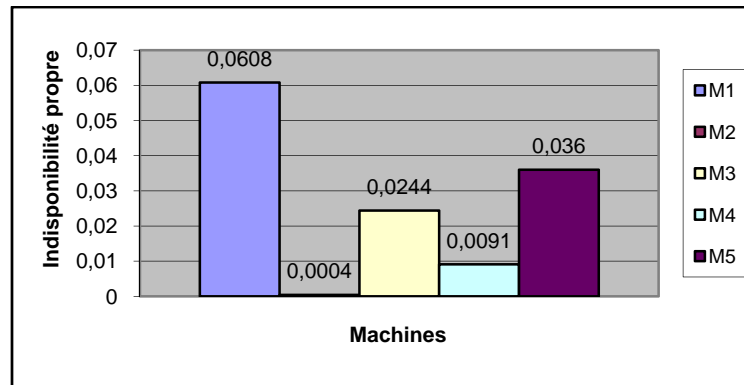


Figure V.5 : L'indisponibilité propre de chaque machine de la ligne (illustration).

$$I_{tl}(M_i) = 1 - D_{tl}(M_i) \quad (\text{sans unité})$$

$$I_{tl}(M_1) = 1 - D_{tl}(M_1) = 1 - 0.3190 = 0.6810$$

$$I_{tl}(M_2) = 1 - D_{tl}(M_2) = 1 - 0.2506 = 0.7494$$

$$I_{tl}(M_3) = 1 - D_{tl}(M_3) = 1 - 0.2215 = 0.7785$$

$$I_{tl}(M_4) = 1 - D_{tl}(M_4) = 1 - 0.2097 = 0.7903$$

$$I_{tl}(M_5) = 1 - D_{tl}(M_5) = 1 - 0.2054 = 0.7946$$

La Figure V.6 représente l'indisponibilité totale des différentes machines par un histogramme.

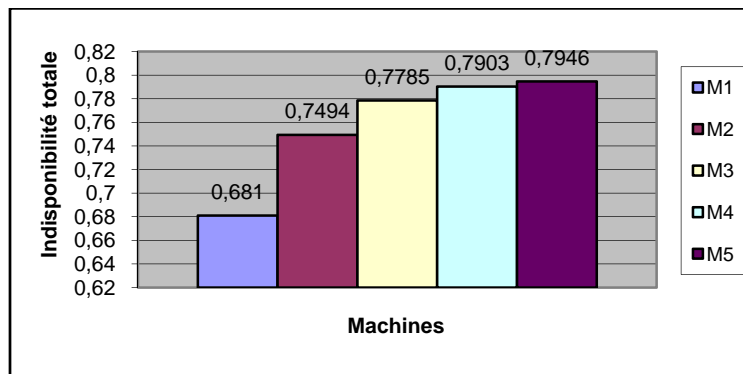


Figure V.6 : L'indisponibilité totale de chaque machine de la ligne (illustration).

Pour plus de détail sur les temps précédemment cité, on pourra consulter l'annexe V.1.

Remarquons aussi, que l'indisponibilité des machines dépend également des conditions de leur utilisation. En effet, l'utilisation des machines avec leur régime maximum augmente la fréquence d'apparition de pannes au niveau des machines.

Pour illustrer cet effet, nous varions la capacité du stock pour ($\eta = 2$ puis $\eta = 3$), c'est-à-dire on augmente la cadence de production des machines. On constate que lorsque la capacité du stock augmente, la probabilité de repos des machines diminue et la probabilité de marche et panne augmente.

Machines P.E.M	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
Pr_repos	0.5713	0.6927	0.7203	0.7544	0.7721
Pr_marche	0.4082	0.3051	0.2729	0.2433	0.2200
Pr_panne	0.0205	0.0022	0.0068	0.0023	0.0079

Tableau V.1: Calcul itératif pour un stock de deux (2) pièces
« Probabilité d'Etat de la Machine ».

Stock P.E.S	S_2	S_3	S_4	S_5
Pr_0 pièce	0.5567	0.6275	0.6613	0.6910
Pr_1 pièce	0.3418	0.2781	0.2476	0.2102
Pr_2 pièces	0.1015	0.0944	0.0911	0.0988

Tableau V.2 : Calcul itératif pour un stock de deux (2) pièces
« Probabilité d'Etat de Stock ».

Machines P.E.M	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
Pr_repos	0.5273	0.6597	0.6883	0.7147	0.7493
Pr_marche	0.4489	0.3361	0.3011	0.2809	0.2384
Pr_panne	0.0238	0.0042	0.0106	0.0044	0.0123

Tableau V.3 : Calcul itératif pour un stock de trois (3) pièces
« Probabilité d'Etat de la Machine ».

Stock P.E.S	S_2	S_3	S_4	S_5
Pr_0 pièce	0.5297	0.5826	0.6174	0.6496
Pr_1 pièce	0.3145	0.2552	0.2261	0.1947
Pr_2 pièces	0.0957	0.0902	0.0895	0.0937
Pr_3 pièces	0.0601	0.0720	0.0670	0.0620

Tableau V.4 : Calcul itératif pour un stock de trois (3) pièces
« Probabilité d'Etat de Stock ».

La disponibilité opérationnelle augmente, ainsi (si le volume de production augmente donc la marge de réactivité diminue, la machine est saturée « $D_{op} \rightarrow 100\%$ »).

Les résultats de variation de la disponibilité opérationnelle de chaque machine de la ligne étudiée sont présentés dans le tableau V.5.

Machines (M_i)	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
$D_{op}(M_i) / \eta = 2$	40.82	30.51	27.29	24.33	22.00
$D_{op}(M_i) / \eta = 3$	44.89	33.61	30.11	28.09	23.84

Tableau V.5 : Variation de la disponibilité opérationnelle en fonction de la capacité de stock.

La Figure V.7, illustre cette variation de disponibilité pour chaque machine de la ligne.

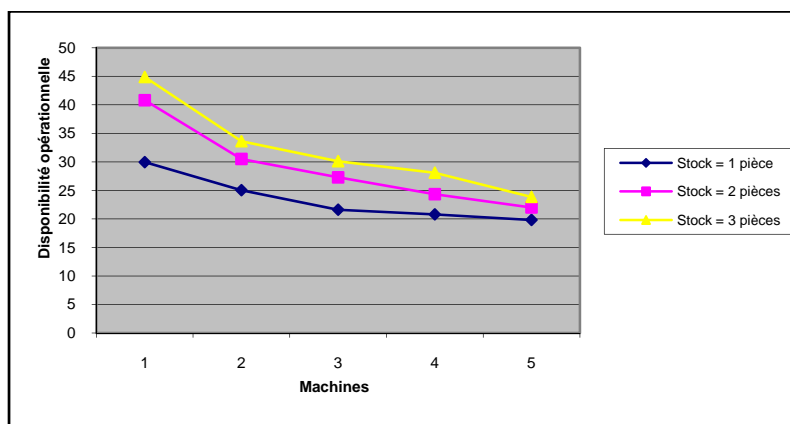


Figure V.7 : Variation de la disponibilité opérationnelle de chaque machine de la ligne en fonction de la capacité de stock (illustration).

Les tableaux V.6 et V.7 récapitulent respectivement les résultats de variation de la disponibilité propre et totale pour chaque machine de la ligne en fonction de la capacité de stock.

Machines (M_i)	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
$D_{pr}(M_i) / \eta = 2$	95.22	99.28	97.57	99.06	96.53
$D_{pr}(M_i) / \eta = 3$	94.97	98.77	96.60	98.46	95.09

Tableau V.6 : Variation de la disponibilité propre en fonction de la capacité de stock.

Machines (M_i)	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
$D_{tl}(M_i) / \eta = 2$	42.87	30.73	27.97	24.56	22.79
$D_{tl}(M_i) / \eta = 3$	47.27	34.03	31.17	28.53	25.07

Tableau V.7 : Variation de disponibilité totale en fonction de la capacité de stock.

Graphiquement nous obtenons les histogrammes de la Figure V.8 et V.9.

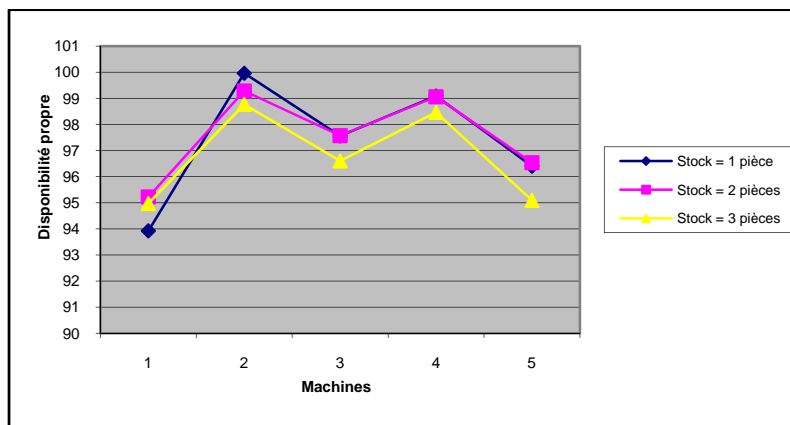


Figure V.8 : Variation de la disponibilité propre de chaque machine de la ligne en fonction de la capacité de stock (illustration).

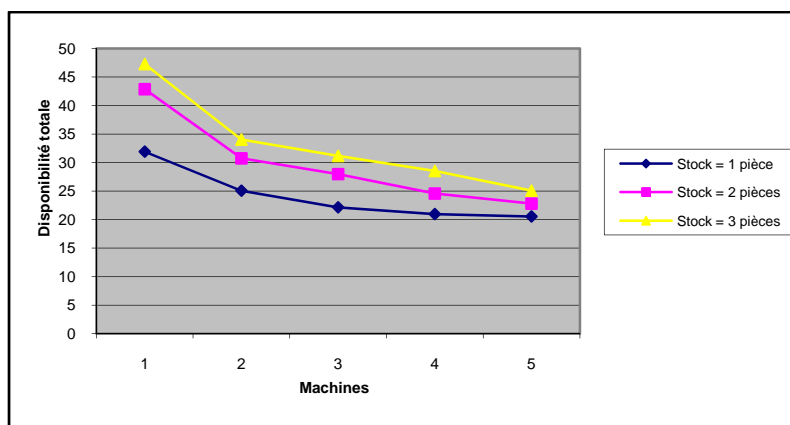


Figure V.9 : Variation de la disponibilité totale de chaque machine de la ligne en fonction de la capacité de stock (illustration).

V.3. La productivité :

L'atteinte de la « meilleure » productivité d'un système de production est en général le principal objectif de tout système de production. Nous définissons la productivité d'une machine puis celle du système.

V.3.1. Productivité propre (PR_{pr}):

La productivité propre (ou effective) d'une machine est la quantité de pièces que peut usiner la machine lorsqu'elle est engagée à produire.

$$PR_{pr}(M_i) = \frac{\Pr_{M_i} \times \delta_i}{1 - \Pr_{R_i}} \quad (\text{Pièces/heure})$$

$$PR_{pr}(M_1) = \frac{\Pr_{M_1} \times \delta_1}{1 - \Pr_{R_1}} = \frac{0.2996 \times 300}{1 - 0.6810} = 281.7555 \text{ Pièces/heure.}$$

$$PR_{pr}(M_2) = \frac{\Pr_{M_2} \times \delta_2}{1 - \Pr_{R_2}} = \frac{0.2503 \times 281}{1 - 0.7496} = 280.8878 \text{ Pièces/heure.}$$

$$PR_{pr}(M_3) = \frac{\Pr_{M_3} \times \delta_3}{1 - \Pr_{R_3}} = \frac{0.2161 \times 270}{1 - 0.7785} = 263.4176 \text{ Pièces/heure.}$$

$$PR_{pr}(M_4) = \frac{\Pr_{M_4} \times \delta_4}{1 - \Pr_{R_4}} = \frac{0.2078 \times 243}{1 - 0.7903} = 240.7983 \text{ Pièces/heure.}$$

$$PR_{pr}(M_5) = \frac{\Pr_{M_5} \times \delta_5}{1 - \Pr_{R_5}} = \frac{0.1980 \times 255}{1 - 0.7946} = 245.8130 \text{ Pièces/heure.}$$

Les résultats de calcul de la productivité propre de chaque machine de la ligne étudiée sont présentés dans l'histogramme de la Figure V.10.

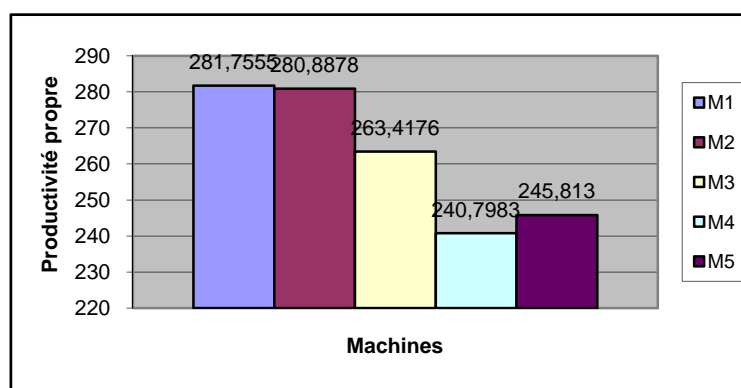


Figure V.10 : La productivité propre de chaque machine de la ligne (illustration).

V.3.2. La productivité opérationnelle (PR_{op}) :

C'est la quantité de pièces que peut usiner une machine pendant toute la durée de fonctionnement du système de production, y compris les arrêts induits.

$$PR_{op}(M_i) = Pr_{M_i} \times \delta_i \quad (\text{Pièces/heure})$$

$$PR_{op}(M_1) = Pr_{M_1} \times \delta_1 = 0.2996 \times 300 = 89.8800 \text{ Pièces/heure.}$$

$$PR_{op}(M_2) = Pr_{M_2} \times \delta_2 = 0.2503 \times 281 = 70.3343 \text{ Pièces/heure.}$$

$$PR_{op}(M_3) = Pr_{M_3} \times \delta_3 = 0.2161 \times 270 = 58.3470 \text{ Pièces/heure.}$$

$$PR_{op}(M_4) = Pr_{M_4} \times \delta_4 = 0.2078 \times 243 = 50.4954 \text{ Pièces/heure.}$$

$$PR_{op}(M_5) = Pr_{M_5} \times \delta_5 = 0.1980 \times 255 = 50.4900 \text{ Pièces/heure.}$$

Les résultats de calcul de la productivité opérationnelle de chaque machine de la ligne étudiée sont présentés dans l'histogramme de la Figure V.11.

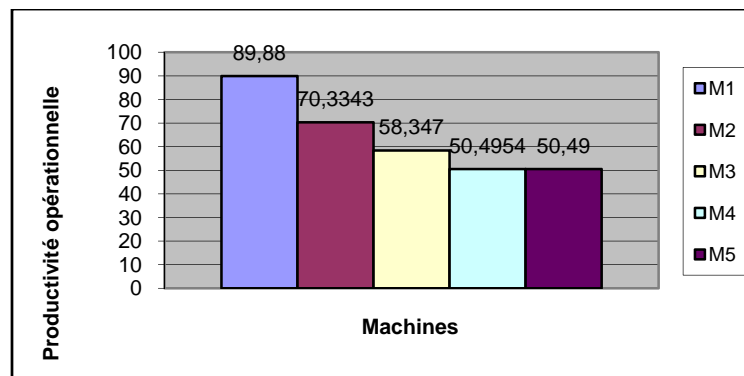


Figure V.11 : La productivité opérationnelle de chaque machine de la ligne (illustration).

Pour tout le système de production, on ne prend en compte que les machines à sa sortie, c'est-à-dire M_i telles que $M_i \in S^{\square}$.

$$\begin{aligned} PR_{op}(S) &= \sum_{M_i} PR(M_i) = \sum_{M_i} Pr_{M_i} \times \delta_i \quad (\text{Pièces/heure}) \\ &= PR_{op}(M_1) + PR_{op}(M_2) + PR_{op}(M_3) + PR_{op}(M_4) + PR_{op}(M_5) \\ &= 89.8800 + 70.3343 + 58.3470 + 50.4954 + 50.4900 \\ &= 319.5467 \text{ pièces/heure.} \end{aligned}$$

Les résultats de variation de la productivité propre de chaque machine de la ligne en fonction de la capacité de stock sont présentés dans le tableau V.8.

Machines (M_i)	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
$PR_{pr}(M_i)$ [p/h]/ $\eta = 2$	285.6543	278.9883	263.4358	240.7243	246.1606
$PR_{pr}(M_i)$ [p/h]/ $\eta = 3$	284.8953	277.5319	260.8181	239.2524	242.4890

Tableau V.8 : Variation de la productivité propre en fonction de la capacité de stock.

La Figure V.12, illustre cette variation de productivité pour chaque machine de la ligne.

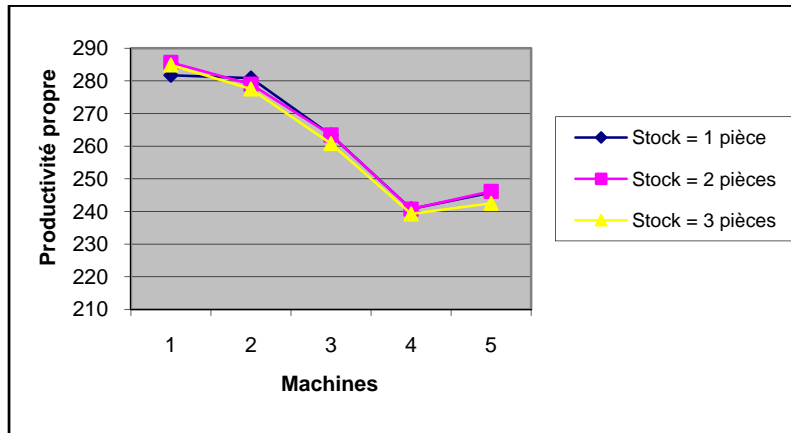


Figure V.12 : Variation de la productivité propre de chaque machine de la ligne en fonction de la capacité de stock (illustration).

Les résultats de variation de la productivité opérationnelle de chaque machine de la ligne en fonction de la capacité de stock sont présentés dans le tableau V.9.

Machines (M_i)	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
$PR_{op}(M_i)$ [p/h]/ $\eta = 2$	122.4600	85.7331	73.6830	59.1219	56.1000
$PR_{op}(M_i)$ [p/h]/ $\eta = 3$	134.6700	94.4441	81.2970	68.2587	60.7920

Tableau V.9 : Variation de la productivité opérationnelle en fonction de la capacité de stock.

La Figure V.13, illustre cette variation de productivité pour chaque machine de la ligne.

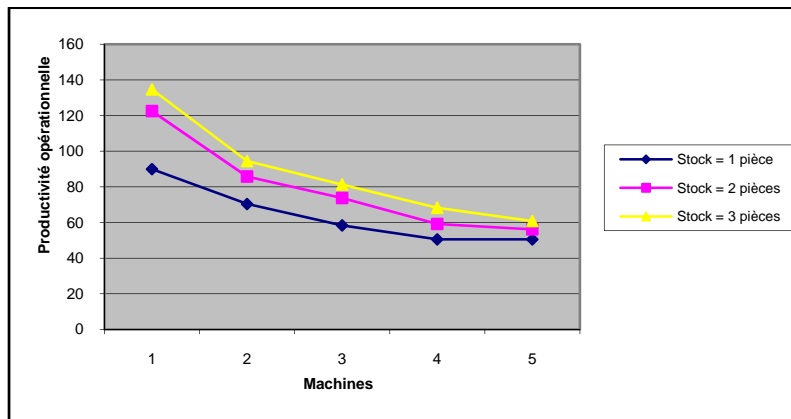


Figure V.13 : Variation de la productivité opérationnelle de chaque machine de la ligne en fonction de la capacité stock (illustration).

Le but de ce travail est d'avoir une idée sur les performances de la lignes en termes de disponibilité et de productivité et en fonction des résultats obtenus, l'analyste peut procéder à des améliorations de la productivité.

D'une manière générale, ces améliorations³⁷ portent sur les machines constitutives de la ligne (qualité des machines, l'aménagement en cellule de production, politique de maintenance associée, ...). En effet, l'intégration d'une politique de maintenance adéquate est un facteur d'amélioration des machines car il permet d'améliorer la disponibilité des machines.

L'objectif d'intégration de la maintenance est de choisir la meilleur politique de maintenance à intégrer en fonction des données technico-économiques. Un travail complémentaire est en cours de finalisation sur le choix des politiques de maintenances selon une analyse multicritère.

V.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, une étude de la disponibilité et de la productivité d'une ligne de production à été présenté. Notre travail a débuté par l'exposition de certains types de disponibilités et de productivités, ainsi que les moyens de les extraire des résultats que nous avons obtenu au chapitre précédent. Nous avons terminé le chapitre par un calcul de ces indicateurs, et enfin nous avons présentés des interprétations pour ces indicateurs.

³⁷ Le choix entre ces différentes possibilités s'effectue sur la base d'une approche multicritère intégrant des critères technico-économiques permettant d'en déduire des solutions optimales [SASSINE 98] et [DJEBA BRA 01].

Conclusion et perspectives :

Nous dressons dans une première section un bilan des travaux effectués dans de ce mémoire, en rappelant les principaux résultats et les moyens mis en œuvre pour les obtenir. Nous évoquons ensuite les nombreuses perspectives ouvertes par ces travaux.

I. Conclusion :

Les travaux présentés dans ce mémoire traitent de la modélisation et l'évaluation de performance des SdP à événements discrets par une approche analytique, basé sur l'utilisation conjointe des RdPS et des PdM dans le but d'étudier la disponibilité et la productivité face à un événement non-attendu dû à une perturbation interne de type panne-machine.

La complexité croissante des systèmes de production est telle que l'application classique des RdPS présente certaines limites. En effet, la taille du graphe des marquages associée pour ces systèmes augmente très rapidement, la taille du PdM générée devient donc un obstacle majeur (explosion combinatoire) qui rend l'analyse très longue, voire impossible !. Ceci constitue une limite pratique à l'utilisation de ce modèle. Des méthodes et des outils ont été établies pour tenir compte de cette difficulté intrinsèque.

O.Daniel [DANIEL 95], présente une extension des RdPS : les RdPSGSyI. Ce formalisme, pallie cet inconvénient, et de plus permet la modélisation structurée de systèmes à grand espace d'états, en représentant le système sous la forme d'un ensemble de composants indépendants qui interagissent. Plus particulièrement on profite de la structure modulaire des SdP (module machine, module stock,...) pour opérer une décomposition fonctionnelle. Chaque composant ou fonctionnalité du système est alors décrit par un RdPSG. auquel on ajoute des mécanismes de synchronisation (émissions /réceptions de signaux). Notre intérêt s'est alors tourné vers cet outil.

Dans le but de pouvoir analyser les performances de systèmes à grand espace d'états, les indices de performances qui nous intéressent sont obtenus à partir du vecteur des probabilités stationnaires, où l'espace d'états du système markovien étudié.

Il a également été nécessaire de travailler sur les techniques de résolution pour traiter des systèmes complexes. Certaines méthodes numériques, et notamment les méthodes itératives, sont particulièrement bien adaptées à l'étude de systèmes à grand espace d'états.

Dans le but de résoudre le processus de Markov du système complet « système à grand espace d'états » en effectuant une analyse par parties, nous avons utilisé un algorithme dit PAMAV. Ainsi la forme cellulaire après décomposition et la forte interaction entre les différentes cellules impose que la méthode de résolution soit de type itérative. Le modèle markovien de chaque cellule est alors résolu séparément, les résultats sont ensuite propagés vers les cellules suivantes lors des itérations vers l'aval du système et jusqu'aux cellules précédents lors des itérations vers l'amont.

II. Perspectives :

De nombreuses perspectives sont ouvertes suite à ces travaux. La suite de ce mémoire peut être vue en trois volets : les perspectives à court, moyen et long terme.

II.1. Perspectives à court terme :

Les perspectives à court terme concernent les travaux de développement d'un logiciel pour rendre l'utilisation des formalismes et outils plus conviviales pour les utilisateurs, ce logiciel reste comme une maquette qui nous permet de valider des concepts mais en aucun cas une application destinée à usage professionnel.

II.2. Perspectives à moyen terme :

Les perspectives à moyen terme concernent :

1. les travaux d'amélioration des modèles génériques et d'améliorer la souplesse des algorithmes à toutes structures d'ateliers, c'est-à-dire la possibilité d'avoir des bouclages entre composants et des routages des différents pièces.
2. Indépendamment de la contrainte induite par l'explosion combinatoire du nombre des états à prendre en compte lors du passage aux processus de Markov, qui est résolu par une décomposition fonctionnelle (modélisation modulaire par RdPSGSyI), l'utilisation de cette outil est limité par le fait que les lois régissant les transitions entre états doivent être du type exponentiel (taux de défaillance et de réparation constants). Or, pour prendre en compte le vieillissement et l'état d'usure des équipements, les durées de fonctionnement avant défaillance et les durées de réparation des machines ne suivent pas une loi exponentielle. Mais exhibe des lois de Weibull, des lois uniformes et des lois de Dirac...etc [CHABOT 01].

On peut donc conclure que l'approche markovienne ne peut contribuer à la résolution du problème posé. Dès lors, seuls sont envisageables des modèles alliant une grande pouvoir de modélisation et la souplesse d'utilisation des techniques de simulation Monte-carlo qu'on sait, par ailleurs, relativement insensibles aux dimensions du problème à traiter. Le couplage RdP-MC « les réseaux de petri associés à une méthode de simulation de Monte-carlo » satisfont au double critère précédent. Les RdP-MC ont le grand avantage de pouvoir modéliser et traiter non seulement des processus non-markoviens, mais encore des processus concourants et indépendants.

3. Si les stocks d'entrée/sortie du système de production avaient une capacité finie (et non plus infinie). Donc on s'intéresse à ce qui se passe à l'intérieur et l'extérieur du système de production, on se préoccupe des problèmes liés aux retards d'approvisionnement et aux commandes non respectées « annulation d'une commande », c'est-à-dire on prend en considération les perturbations externes [§ I.6.2.1].

4. Si dans certains cas pratiques, le dépôt (ou retrait) simultané de pièces dans un même stock est possible, l'idée c'est de franchir plusieurs jetons simultanément, mais le problème réside dans les signaux de synchronisations qui sont de type pulsionnel, c'est-à-dire qui nous permet de franchir un seul jeton à la fois...etc.
5. Dans le but d'améliorer les modèles proposés, il serait intéressant de pouvoir prendre en compte les événements attendus [§ I.6.3.1]. Aussi on peut proposer d'autres modèles si le fonctionnement des machines n'était pas de type blocage avant services.

II.3. Perspectives à long terme :

- Les perspectives à long terme concernent les travaux de comparaison avec d'autres formalismes.

Nous avons dans ce mémoire utilisé des méthodes et algorithmes basés sur le formalisme des réseaux de petri stochastiques.

De nombreux travaux similaires existent. La plupart sont basés sur des formalismes voisins des RdPSs, pour lesquels des techniques sont développées pour évaluer les performances de systèmes à grand espace d'états.

Une des perspectives ouvertes par ces travaux consiste donc à comparer d'une part la puissance de modélisation des RdPSs par rapport à d'autres formalismes tels les réseaux de files d'attente, l'algèbres de graphes « algèbres $(\max,+)$ » et réseaux d'automates stochastiques, et d'autre part à comparer les méthodes et algorithmes sur des modèles identiques.

Pour comparer les différents formalismes, il faut mettre un programme d'échange d'exemples, et nous traduisons ainsi des modèles de réseau de Petri en modèles réseaux d'automates stochastiques. L'idée est d'arriver à systématiser le passage d'un modèle RdP à un modèle RAS ou l'inverse, de manière à pouvoir utiliser l'un ou l'autre formalisme, suivant le modèle et les techniques de résolution dont on dispose.

Ce travail de comparaison nécessite du temps et une grande maîtrise de toutes les techniques les plus récentes. Aucune étude comparative sérieuse n'a pu être menée à notre connaissance, par manque d'échange entre les différentes communautés. L'intérêt d'une telle étude est énorme, elle permettra en effet de mettre en évidence les problèmes liés à chaque approche, et de tirer profit de l'analyse de ces problèmes pour améliorer chaque méthode.

- Un travail complémentaire sur un autre facteur d'amélioration de la disponibilité et de la productivité des systèmes de production peut être effectué. C'est-à-dire d'une part combiner une décomposition structurelle et une décomposition fonctionnelle³⁸ du système de production manufacturière de manière à bénéficier des avantages apportés par chacune.

³⁸ La décomposition fonctionnelle comme nous avons vu dans notre travail de mémoire.

La décomposition structurelle peut être se faire à travers l'aménagement en cellule³⁹ de production permettant d'améliorer la performance des systèmes manufacturiers, on considère une politique de transfert intercellulaire en cas de panne pour améliorer la disponibilité des cellules.

Quelques travaux ont été fait sur l'apport des cellules manufacturières par rapport à l'aménagement traditionnel fonctionnel et les contraintes opératoires sous lesquelles les avantages des systèmes de production cellulaires sont réalisés [BLACK 83], [BURBIDGE 92] et [SHAFER 84].

³⁹ Le système de production cellulaire est une application de la technologie de groupe. Cette dernière est une philosophie manufacturière dont l'idée principale est la capitalisation sur les activités similaires et répétitives.

Références bibliographiques :

[ABBAS-TURKI 01]. Abdeljalil ABBAS-TURKI, Olivier GRUNDER et Abdellah ELMOUDNI, Modélisation et évaluation d'une correspondance élémentaire d'un système de transport en commun par réseaux de petri stochastiques, 3^{ème} Conférence francophone de MODélisation et SIMulation MOSIM'01 Troyes-France, Avril 2001, 6 pages.

[ABBOU 03]. Rosa ABBOU, Zineb SIMEU-ABAZI, Maria DI MASCOLO, Les réseaux de files d'attente pour l'évaluation des performances d'un atelier de maintenance, LAG 2003, 18 pages.

[AGHASARYAN 98]. Armen AGHASARYAN, Formalisme HMM pour les réseaux de Petri partiellement stochastiques: Application au diagnostic de pannes dans les systèmes répartis, Thèse présentée devant l'Université de Rennes 1 pour obtenir le grade de : Docteur de l'Université de Rennes 1 Mention: Traitement du Signal et Télécommunications, 21/12/1998, 232 pages.

[ALEONARD 94]. Claude ALEONARD, Eric DINDELEUX et René SOENEN, Conduite des systèmes de production, Article, Techniques de l'ingénieur, Traités Généralités et Mesures et Contrôle, A 8260-R7598-1994, 14 pages.

[ALLOUI 05]. Fethi ALLOUI, LOGICIEL MATLAB : Calcul Scientifique, Manuel, Université de Nantes, 113 pages.

[AMODEO 99]. M. AMODEO, Contribution à la simplification et à la commande des réseaux de Petri stochastiques : Application aux systèmes de production, Thèse de doctorat présentée à l'Université Technologique de Belfort Montbéliard, 1999.

[AUDRY 95]. Nathalie AUDRY, Modélisation et simulation des systèmes de production à haute cadence avec convoyage : réseaux de petri lots commandés génériques, Thèse de doctorat en Génie Informatiques, Automatique et traitement du signal présentée à l'université Montpellier II, 21/09/1995, 154 pages.

[BABES 92]. Malika BABES, Statistiques, files d'attente et simulation, Livre de l'Office des Publications Universitaires à Alger, Edition Novembre 1992, 143 pages.

[BAKMAMTCHIKAM 03]. Innocent BAKMAMTCHIKAM, Des systèmes Multi-agents aux réseaux de petri pour la gestion des ressources naturelles : Le cas de al faune à l'Est-cameroun, Thèse de doctorat présentée à l'université de Yaoundé I, département d'informatique, 28/03/2003, 139 pages.

[BAYNAT 93]. Bruno BAYNAT et Yves DALLERY, A unified view of product from approximation techniques for general closed queueing networks, Rapport MASI 90-48, Institut Balaise Pascal, Paris (France), Octobre 1993.

[BENOIT 03]. Anne BENOIT, Méthodes et algorithmes pour l'évaluation des performances des systèmes informatiques à grand espace d'états, Thèse de doctorat

présentée à l'INPG, Spécialité : "Informatique : Systèmes et Communications", 18/06/2003, 168 pages.

[BIRAN 04]. Adrian BIRAN, Moshe BREINER et Nicolas LARROUSSE, MATLAB pour l'ingénieur, Chapitre 2, Calculs et représentations graphiques, 2004 - Pearson Education France, pages 89-145.

[BLACK 83]. J. BLACK, Cellular Manufacturing Systems Reduce Setup Time, Make Small Lot Production Economical, Industrial Engineering, Vol.25, 1983, pages 36-48.

[BOLLON 01]. Jean-Marc BOLLON, Etude de différentes politiques de pilotage de systèmes de production, Thèse de doctorat en automatique-t productique présentée à l'INPG, 11/05/2001, 214 pages.

[BOSSU 97]. F. BOUSSU, B. RABENASOLO, M. HAPPIETTE et C. VASSEUR, Simulation de la filière textile, Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA), Vol.31, N°4, 1997.

[BRAMS 83]. G. BRAMS, réseaux de petri : théorie et pratique Tome 1 : théorie et analyse Tome 2 : modélisation et applications, Edition, Masson, 1983.

[BREWER 78]. J.W BREWER, Kronecker products and matrix calculus in system theory, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 09/1978, Vol.25, n° 9, pages 772-781.

[BURBIDGE 92]. J.L. BURBIDGE, Change to Group Technology : Process Organisation is Obsolete, International Journal of Production Research, Vol.25, n° 5, 1992, pages 1209-1219.

[CAUMOND 01]. Anthony CAUMOND, Nikolay TCHERNEV, Modèles de simulation orientés objets pour l'évaluation des performances des systèmes flexibles de production avec un chariot filoguidé, 3^{ème} Conférence francophone de MODélisation et SIMulation MOSIM'01 Troyes-France, Avril 2001, 8 pages.

[CAVORY 01]. Cuillaume CAVORY, Rémy DUPAS et Gilles CONCALVES, Une approche basée sur la simulation pour résoudre le problème du job shop périodique à contraintes linéaires, 3^{ème} Conférence francophone de MODélisation et SIMulation MOSIM'01 Troyes-France, Avril 2001, 4 pages.

[CHABOT 01]. Jean-Luc CHABOT, Yves DUTUIT, Antoine RAUZY, De l'usage de la simulation de Monte-carlo couplée aux réseaux de petri en sûreté de fonctionnement, 3^{ème} Conférence francophone de MODélisation et SIMulation MOSIM'01 Troyes-France, Avril 2001, 6 pages.

[CHANCELIER 03]. Jean-Philippe CHANCELIER et Agnès SULEM, Méthodes numériques en contrôle stochastique (version 12/2002) Chapitres 1 et 2, INRIA-Chesnay Cedex et l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées Marne La vallée cedex 02 25/02/2003, 146 pages.

[CHEMLA 02]. J.P CHEMLA, Modélisation et analyse des systèmes de production, Support de cours, Polytech'Tours département Productique 2ème année, Processus déterministes pages 1-15, Processus stochastiques, pages 16-36, 2002.

[CHOI 93]. H. CHOI, V.G KULKARNI, and K.S TRIVEDI, Transient Analysis of Deterministic and Stochastic Petri nets, Lecture Notes in Computer Science N° 691. Proceedings of the 14th International Conference, Chicago, Illinois, USA, June 1993.

[CHRETIENNE 85]. Philippe CHRETIENNE, Analyse des régimes transitoire et asymptotique d'un graphe d'événements temporisé, Technique et Science Informatiques AFCET Gauthier-Villars, Vol.4, n° 1, 1985, pages 127-142.

[CIARDO 93]. G. CIARDO and C. LINDEMANN, Analysis of Deterministic and Stochastic Petri Nets, 5th International Workshop on Petri Nets and Performance Models, Toulouse, France, Octobre 19-22, 1993.

[COHEU 95]. Juy COHEU, Cours Théorie algébrique des systèmes à événements discrets, Centre Automatique et systèmes Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau et INRIA, Rocquencourt, 1995, 58 pages.

[DALLERY 92]. Yves DALLERY et Stanley.B GERSHWIN, Manufacturing flow line systems : a review of models and analytical results, Queueing Systems, 1992, Volume 12, pages 3-94.

[DANIEL 94-1]. Olivier DANIEL, Zineb SIMEU-ABAZI et Bernard DESCOTES-GENON, Evaluation de la sûreté de fonctionnement des systèmes de production par la méthode itérative, Qualité et sûreté de fonctionnement, Compiègne, 17-18/11/1994.

[DANIEL 94-2]. Olivier DANIEL, Zineb SIMEU-ABAZI et Bernard DESCOTES-GENON, Méthode analytique d'évaluation des attributs de la sûreté de fonctionnement des systèmes de production, $\lambda\mu$ 9 ESREL'9, 9^{ème} Colloque International de Fiabilité et Maintenabilité, 30/05-03-06/1994, La Baule, France.

[DANIEL 95-1]. Olivier DANIEL, Les réseaux de petri stochastiques pour l'évaluation des attributs de la sûreté de fonctionnement des systèmes manufacturiers, Thèse de doctorat en automatique et productique présentée à l'INPG, 26/01/1995, 182 pages.

[DANIEL 95-2]. Olivier DANIEL, Zineb SIMEU-ABAZI et Bernard DESCOTES-GENON, Anew tool: The Generalised and Synchronised Stochastic Petri Nets, Integrated Manufacturing Systems Engineering, Chapman & Hall 1995, pages 191-205.

[DANIEL-B 87]. Boitel DANIEL et Claude HAZARD, Guide de la maintenance, Edition Nathan, 1987, 287 pages.

[DAVID 89]. René DAVID et Hassane ALLA, Du Grafcet aux réseaux de petri, Traité des nouvelles technologies, Série Automatique, Editions HERMES, Paris 1989, 424 pages.

[DAVID 92]. René DAVID et Hassane Lotfi ALLA, Du Grafset aux réseaux de petri, Traité des nouvelles technologies, Série Automatique, Edition Hermès, Paris 1992.

[DAVID-R.C 93]. DAVID R.C Hill, Analyse orientée objets et modélisation par simulation, Edition addison-Wesley France, juillet 1993, 362 pages.

[DECOTIGNIE 04]. J.-D. DECOTIGNIE et Jaquet-DROZ, GRAFCET et réseaux de Petri, Support de cours du module « Informatique du temps réel », CSEM Centre Suisse d'Electronique et de Microtechnique, © J.-D. Decotignie, 2004, 35 pages

[DELEBARRE 00]. Delebarre, Sûreté de fonctionnement des systèmes informatiques, Support de cours, Université Montpellier I, 1 Octobre 2000, 283 pages.

[DI MASCOLO 90]. Maria DI MASCOLO, Modélisation et évaluation de performances de systèmes de production gérés en kanban, Thèse de doctorat en automatique présentée à l'INPG, 06/02/1990, 164 pages.

[DJEBABRA 93]. Mébarek DJEBABRA, Contribution à la modélisation, à la simulation et à l'analyse des dysfonctionnements des systèmes techniques, Thèse de doctorat en Automatique « option : sûreté de fonctionnement » présentée à l'université Bordeaux I, 02/02/1993, 114 pages.

[DJEBABRA 01]. Mébarek DJEBABRA, Larbi BENDADA et Nassima BENNOUI, Capacité des réseaux de petri pour l'analyse et la modélisation des systèmes de production, Conférence International de Productique CPI'01 à Maroc, 2001, 13 pages.

[DRAGHICI 98]. George DRAGHICI, Nicolae BRINZEI et Ioana FILIPAS, La modélisation et la simulation en vue de la conduite des systèmes de production, Les Cahiers des Enseignements Francophones en Roumanie, Universitatea Politehnica Din Timisoara, pages 110-130, 1998.

[DUPAS 04]. Rémy DUPAS, Amélioration de performance des systèmes de production : apport des algorithmes évolutionnistes aux problèmes d'ordonnancement cycliques et flexibles, Mémoire de HDR présentée à l'université d'Artois, 10/12/ 2004, 131 pages.

[DUTHEILLET 90]. C. DUTHEILLET and S. HADDAD, Regular Stochastic Petri nets, G. Rosenberg (ed.): advances in Petri Nets 1990. Lecture Notes in Computer Sciences. Vol. 483. Springer, Berlin Heidelberg. New York, pages 186-210, 1990.

[ELLEUCH 01]. Mounir ELLEUCH, Faouzi MASMOUDI et Habib BEN BACHA, Amélioration de la disponibilité des cellules de production, Conférence International de Productique CPI'01 à Maroc, 2001, 16 pages.

[ERHEL 04]. Jocelyne ERHEL, Nabil NASSIF et Bernard PHILIPPE, Calcul matriciel et systèmes linéaires, Cours de DEA Informatique et modélisation, Beyrouth, Liban, 2004, 83 pages.

[ERIKSEN 03]. Jan H. ERIKSEN et NONA Vice-amiral Directeur de l'AON, Guide pour la rédaction des documents OTAN relatifs aux exigences de fiabilité et de maintenabilité, ARMP-4 (Edition 3), JUIN 2003, 58 pages.

[FERHANE 03]. Samia FERHANE, Myriam NOUREDDINE, Méthodes de modélisation et d'analyse des systèmes flexibles de production, 2^{ème} Conférence International sur la Productique CIP'03 à Alger, 2003, 7 pages.

[FERNANDES 98]. Paulo Henrique Lemelle FERNANDES, Méthodes Numériques pour la Solution de Systèmes Markoviens à Grand Espace d'États, Thèse de doctorat présentée à l'INPG, Spécialité : Informatique, février 1998, 242 pages.

[FERRIER 04]. Jean-Louis FERRIER et Jean-Louis BOIMOND, Systèmes dynamiques à événements discrets : Du modèle à la commande, Rapport de l'équipe Modèles et Systèmes, juin 2004, 25 pages.

[FLORIN 78]. Gérard FLORIN et Stéphane NATKIN, Evaluation des performances d'un protocole de communication à l'aide des réseaux de Petri et des processus stochastiques, Journées AFCET multi-ordinateurs, multiprocesseurs en temps réel. CNRS, Paris, Mai 1978.

[FLORIN 85]. Gérard FLORIN et Stéphane NATKIN, Les réseaux de petri stochastiques, Technique et Science Informatiques, 1985, Volume 4, n° 1, pages 143-160.

[GAUDOIN 02]. Olivier GAUDOIN, Modèles stochastiques et méthodes statistiques pour la fiabilité des systèmes, Présentation du mémoire de HDR présentée à l'INPG, Spécialité Mathématiques Appliquées, 7/06/2002, 45 pages.

[GILLI 03]. Manfred GILLI, Méthodes numériques Recueil d'exercices (avec corrigés), Département d'économétrie, Université de Genève, Décembre 2003, 54 pages.

[GOURGAND 91]. M. GOURGAND et P. KELLERT, Conception d'un environnement de modélisation des systèmes de production, 3^{ème} Congrès International de Génie Industriel, Tours, 03/1991.

[GRABOT 94]. GRABOT, Un système expert gérant les informations vagues et un certaines pour l'aide à la décision en pilotage d'atelier, Revue des systèmes de décision, Vol.3/n°2.

[GRASSMANN 00]. Winfried GRASSMANN, Modelling Markovian Queues and Similar Processes, CORS - SCRO 2000 Annual Conference, Energy, Natural Resources, and the Environment, MAY 29-31, 2000, EDMONTON, ALBERTA, 7 pages.

[HAMAIDI 97]. Lyes HAMAIDI et François VERNADAT, Modélisation du flux de production dans les procédés BATCH, Congrès International de Génie Industriel « le génie industriel dans un monde sans frontières » Albi-3-5-Septembre 1997, 23 pages.

[HUDON 04]. Nicolas HUDON, Initiation à Matlab, URCPC, Ecole Polytechnique de Montréal, 22/01/2004, 49 pages.

[INCERADIEGUEZ 01]. José Alberto INCERADIEGUEZ, Contributions à la modélisation et à la simulation accélérée de réseaux de communication, Thèse de doctorat en Informatique présentée à l'université de Rennes 1, 09/03/2001, 174 pages.

[JACOT 92]. L. JACOT, Les règles de fonctionnement des réseaux de petri revisités et généralisés, LAG, Note interne n° 92-231, Mai 1992 révisée en Juillet 1992.

[JACOT 94]. L. JACOT, Contribution à l'étude des Systèmes à Evénements Discrets et des Systèmes Hybrides-théorie, et mise en œuvre des machines de petri, Thèse de doctorat présentée à l'INPG, 11/1994.

[JAMALI 01]. Mohamed anouar JAMALI, Daoud AIT-KADI et Abdelhakim ARTIBA, Maintenance : Concepts et stratégie de mise en œuvre, Conférence International de Productique CPI'01 à Maroc, 2001, 17 pages.

[JAMOULI 03]. Hicham JAMOULI, Génération de résidus directionnels pour le diagnostic des systèmes linéaires stochastiques et la commande tolérante aux défauts, Thèse de doctorat présentée à l'université Henri Poincaré, Nancy 1, Spécialité Automatique, 19/12/2003, 118 pages.

[JUVIN 02]. Didier JUVIN, Méthodes et outils pour maîtriser la complexité et la sûreté des systèmes, La recherche Technologique en CEA/LIST, 11/2002, 22 pages.

[KAANIT 05]. Omar KANIT, Aide multicritère à la décision pour le choix des politiques de maintenance dans les systèmes de production manufacturiers Cas pratiques : Entreprise Bouteille A Gaz Batna, Mémoire de magister en génie industriel , 2005.

[KAFFEL 01]. Hédi KAFFEL, La maintenance distribuée : Concepts, évaluation et mise en œuvre, Thèse présentée à la faculté des études supérieures de l'Université Laval pour l'obtention du grade de Philosophie Docteur (Ph.D), Département de génie mécanique, faculté des sciences et de génie Université Laval Québec, 10/2001, 167 pages.

[KANFONANN 75]. A. KANFONANN, D.GROUCHKO et R.CRUON, Modèles mathématiques pour l'étude de la fiabilité des systèmes, Editions MASSON et C^{IE}, Paris 1975, 207 pages.

[KHANSA 97]. Wael KHANSA, Réseaux de petri P-Temporels : contribution à l'étude des systèmes à événements discrets, Thèse de doctorat en Électronique-Électrotechnique -Automatique présentée à l'université de Savoie, 07/03/1997.

[KOBAYASHI 78]. Hisashi KOBAYASHI, Modeling and analysis : an introduction to system performance evaluation methodology, Editions Addison Wesley, 1978.

[KORBAA 03]. Ouajdi KORBAA, Contribution à la conception et l'optimisation des systèmes de transport et de production, Mémoire de HDR présentée à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, Discipline : Sciences Physiques, 18/12/2003, 108 pages.

[KUMAR 89]. Vinod KUMAR et K.K. AGGARWAL, A petri net approach to determine all spanning trees for overall reliability analysis of general networks, Reliability Engineering and System Safety, 1989 Elsevier Science Publishers Ltd, England, pages 283-291.

[LADET 89]. Pierre LADET, Outils de modélisation des automatismes séquentiels : Les réseaux de petri, Techniques de l'ingénieur, Traités Mesures et Contrôle, R 7252-1989, 16 pages.

[L'ANTON 97]. Anne L'ANTON et Pièrre GASTANGA, Modélisation orienté objets d'un système de production, Congrèe International de Génie Industriel « le génie industriel dans un monde sans frontières » Albi-3-5-Septembre 1997, 8 pages.

[LIMAM 98]. Selma. LIMAM, Les réseaux de Petri et le représentation des données incertaines des systèmes de production à événements discrets : Définition d'un modèle générique, Note interne LAG, Février 1998.

[LIMAM 99]. Selma LIMAM, Contribution à la modélisation et à la simulation des systèmes de production de services : Proposition d'une méthode basée processus, UML et réseaux de petri objets, Thèse de doctorat en Génie Industriel présentée à l'INPG, 20/12/1999, 220 pages.

[LIN 88]. C. LIN and D.C. MARINESCU, Stochastic high Level Petri nets and applications, IEEE transactions on Computers 37, 7, pages 815-825, 1988.

[MANUEL 04]. Alfred.A MANUEL, Eléments de MATLAB, Atelier d'outils informatiques pour la physique (InfoPhys), Département de la Physique de la Matière Condensée, université de genève, 15/10/2004, 50 pages.

[MARIE 79]. Raymond MARIE, An approximate analytical method for general queuing networks, IEEE Transactions on Software Engineering, September 1979, Volume 5, pages 530-538.

[MINSKY 68]. M.L MINSKY, Matter, minds and models, MIT Press .U.S.A, 1968.

[MOCANU 04]. Stéphane MOCANU, « Modélisation et évaluation des performances » Partie 2 : Modèles fluides « Evaluation de performances des protocoles sans contrôle de flux », LAG Département Télécom, 2003-2004, Chapitre 2 : Protocoles sans contrôle de flux, Notes de Cours, 23 pages.

[MOLLY 81]. M.K MOLLY, On the integration of delay and throughput measures in processing models, Ph.D Thesis, University of California : Los Angeles, USA, 1981.

[MONCHY 91]. François MONCHY, La fonction maintenance, Formation à la gestion de la maintenance industrielle, Collection Technologies de l'Université à l'Industrie, Editions Masson, Paris 1991.

[MONTEIRO 01]. Thibaud MONTEIRO, Conduite distribuée d'une coopération entre entreprises : Le cas de la relation donneurs d'ordres-fournisseurs, Thèse de doctorat en Génie Industriel présentée à l'INPG, 11/10/2001, 184 pages.

[MOREAUX 96]. Patrice MOREAUX, Structuration des Chaînes de Markov des Réseaux de Petri Stochastiques : Décomposition tensorielle et agrégation, Thèse de doctorat présentée à l'Université Paris Dauphine, Spécialité : Informatique, 11/12/1996, 178 pages.

[MOREAUX 03]. Patrice MOREAUX, Structuration des modèles et analyse de performances des systèmes à événements discrets, Présentation de soutenance du mémoire de HDR à l'université Paris Dauphine, 19/12/2003, 44 pages.

[MOUSS 04]. Leila Hayet MOUSS, Support de cours « Sûreté de fonctionnement » pour DEA en génie industriel, Université de Batna, 2004.

[MUGARZA 01]. J.C. MUGARZA, B.PRADIM-CHEGALVIEL, R.VALETTE et M.SILVA, Réductions fondées sur la logique linéaire pour l'ordonnancement des réseaux de petri, 3^{ème} Conférence francophone de MODélisation et SIMulation MOSIM'01 Troyes-France, Avril 2001, 7 pages.

[MURATA 89]. T. MURATA, petri nets properties, analysis and applications, IEE, 77(4), 1989.

[NIKOLSKAIA 00]. Maria NIKOLSKAIA, Binary Decision Diagrams and Applications to Reliability Analysis, Thèse de doctorat présentée à l'université Bordeaux I, Spécialité Informatique, 20/01/2000, 200 pages.

[NOYES 87]. Daniel NOYES, Approches méthodologiques pour l'aide à la conduite des systèmes de production, Thèse de doctorat présentée à l'université de Toulouse « LAAS-France », 11/1987.

[NOYES 90]. Daniel NOYES, Les réseaux de petri et la modélisation modulaire des systèmes de production, Revue APII (Automatique-Productique-Informatique Industrielle), 1990, n° 24, pages 511-528.

[OUABIBA 01]. M.OUABIBA, M.MEBARKI et P.GASTAGNA, Couplage entre des méthodes d'optimisation interactives et des modèles de simulation à événements discrets, 3^{ème} Conférence francophone de MODélisation et SIMulation MOSIM'01 Troyes-France, Avril 2001, 7 pages.

[OUNNAR 99]. Fouzia OUNNAR, Prise en compte des aspects décision dans la modélisation par réseaux de petri des systèmes flexibles de production, Thèse de doctorat en automatique-productique présentée à l'INPG, 9/12/1999, 175 pages.

[PAN-YU 97]. Yiyan PAN-YU, Spèctres de Processus de Markov, Thèse de doctorat présentée à l'université Joseph Fourier-Grenoble 1, Spécialité Mathématiques Appliquées, 18/06/1997, 177 pages.

[PETRI 62]. Carl.Adam PETRI, Kommunikation nit automaten, Thèse de doctorat, faculté de Darmstadt, Bonn, 1962.

[POPPER 73]. J. POPPER, La dynamique des systèmes, principes et applications, Editions d'organisations. Paris, 1973.

[PROTH 95]. Jean-Marie PROTH et Xiadan XIE, Les réseaux de petri pour la conception des systèmes de production, Editions MASSON 1995, Manuels informatiques Masson, 292 pages.

[QUERE 97]. Annick QUERE, Moussa BELKHITER et Michel GOURGAND, Modélisation Multi-agets et ordonnancement dynamique d'un convoyeur à entrées/sorties multiples, Congrèe International de Génie Industriel « le génie industriel dans un monde sans frontières » Albi-3-5-Septembre 1997, 12 pages.

[RACOCEANU 97]. Daniel RACOCEANU, Contribution à la modélisation et l'analyse des chaînes de Markov à échelles de temps et échelles de pondération multiples. Application à la gestion d'un système hydro-énergétique, Thèse de doctorat présentée à l'U.F.R. des Sciences et Techniques de l'Université de FRANCHE-COMTE Spécialité : Automatique et Informatique, 10/01/1997.

[RICHARD 98]. Pascal RICHARD et Christophe HARO, Application des réseaux de petri, Techniques de l'ingénieur, Traités Informatique Industrielle, S 7 254, 12 pages.

[SALMI 01]. Nabila SALMI et Malika IOUALALEN, Méthode conjointe de décomposition et de calcul des bornes pour l'évaluation des performances d'un réseau de petri stochastique non borné, 3^{ème} Conférence francophone de MODélisation et SIMulation MOSIM'01 Troyes-France, Avril 2001, 8 pages.

[SASSINE 96-1]. Chadi SASSINE, Zineb SIMEU-ABAZI et Bernard DESCOTES-GENON, Modelling of Maintenance Policies by Petri Nets : Application to Series Production Line, CESA'96 IMACS Multiconference, Symposium on Discrete Events and Manufacturing Systems, Lille (France), 9-12 July 1996, Pages 752-757.

[SASSINE 96-2]. Chadi SASSINE et Zineb SIMEU-ABAZI, Modélisation et évaluation de la maintenance par RdP stochastiques et chaînes de Markov : Application aux ateliers de production, 6^{ème} Atelier d'Evaluation de Performances, Versailles (France), 25-28/11/1996

[SASSINE 97-1]. Chadi SASSINE et Zineb SIMEU-ABAZI, Prise en compte de la maintenance dans l'évaluation de la sûreté de fonctionnement des systèmes de production, 2^{ème} Congrès Pluridisciplinaire en Qualité et Sûreté de Fonctionnement, Angers (France), 20-21/03/1997, pages 73-80.

[SASSINE 97-2]. Chadi SASSINE et Zineb SIMEU-ABAZI, ALOSURF for maintenance integration in manufacturing systems, Second LAAS International Conference on Computer Simulation (ICCS'97), Beirut (LEBANON), 1-4/09/1997, pages 411-418.

[SASSINE 97-3]. Chadi SASSINE et Zineb SIMEU-ABAZI, Choice criteria for maintenance policies : Application to manufacturing systems, Conference on Management and Control of Production and Logistics (MCPL'97), Campinas (Brazil), 31/08/-03/09/1997, Volume 2, pages 691-696.

[SASSINE 97-4]. Chadi SASSINE et Zineb SIMEU-ABAZI, Prise en compte de la maintenance par décomposition des systèmes de production, Colloque de recherche doctorale en Automatique-Génie informatique-Image-Signal (AGIS'97), Angers (France), 09-11/12/1997, pages 411-418.

[SASSINE 98]. Chadi SASSINE, Intégration des politiques de maintenance dans les systèmes de production manufacturiers, Thèse de doctorat en automatique et productique présentée à l'INPG, 02/07/1998, 233 pages.

[SENECHAL 04]. Olivier SENECHAL, Pilotage des systèmes de production vers la performance globale, Mémoire de HDR, Spécialité : Automatique et Informatique des Systèmes Industriels et Humains, présentée à l'université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis, 02/09/2004, 110 pages.

[SHAFER 84]. S.M SHAFER et J.M CHARMES, Cellular versus Functional Layouts Under a Variety of Shop Operating Conditions, Decisions Sciences, Vol.24, n° 3, 1984, pages 665-682.

[SIBERTIN-BLANC 89]. C.SIBERTIN-BLANC, Le prototypage des applications interactives à l'aide des réseaux de petri, journées internationales : le génie logiciel et ses applications, Toulouse, 1989.

[SIBONY 88-1]. Moïse SIBONY et Jean-Claude MARDON, Analyse numérique I « Systèmes linéaires et non linéaires », Hermann éditeurs des sciences et des arts.

[SIBONY 88-2]. Moïse SIBONY et Jean-Claude MARDON, Analyse numérique II « Approximations et équations différentielles », Hermann éditeurs des sciences et des arts.

[SIGNORET 98]. Jean-Pierre SIGNORET, Modeling the behavior of complex industrial systems with stochastic petri nets, French Institute for dependability and safety (ISDF) and ELF AQUITAINE, 1998, 9 pages.

[SIGNORET 04]. Jean-Pierre SIGNORET, High Integrity System (HIPS), Overcoming SIL Calculation difficulties, Regularity Management, 25 pages.

[SIMEU-ABAZI 96]. Zineb SIMEU-ABAZI et Olivier DANIEL, Méthode itérative pour l'évaluation de la sûreté de fonctionnement des systèmes de production, Colloque National de Fiabilité et Maintenabilité $\lambda\mu$ 10, 10/1996, pages 296-306.

[SIMEU-ABAZI 97]. Zineb SIMEU-ABAZI, Olivier DANIEL et Bernard DESCOTES-GENON, Analytical method to evaluate the dependability of the manufacturing systems, Journal on Reliability Engineering of System Safety, Elsevier Science, Vol.55 n° 2, 02/1997, pages 125-130.

[SIMEU-ABAZI 98]. Zineb SIMEU-ABAZI, Sur la sûreté de fonctionnement des systèmes de production, Mémoire de HDR présentée à l'INPG, 1998, 102 pages.

[SOUKHAL 01]. A.SOUKHAL et P.MARTINEAU, Modélisation et résolution d'un problème d'ordonnancement dans une cellule de production, 3^{ème} Conférence francophone de MOdélisation et SIMulation MOSIM'01 Troyes-France, Avril 2001, 7 pages.

[TCHERNEV 99]. Nikolay TCHERNEV, Processus de modélisation des systèmes complexes à partage de ressources, Présentation ppt, LIMOS de l'université Clermont Ferrand « groupe MMS-clais », 24/09/1999, 11 pages.

[TOUDIC 82]. J.M.TOUDIC, Algorithmes d'algèbre linéaire pour l'analyse structurelle des réseaux de petri, Revue technique Thomson – CSF, Vol.14, n° 1, 03/1982.

[TRENTESAUX 96]. Damien TRENTESAUX, Conception d'un système de pilotage distribué, supervisé et multicritère pour les systèmes automatisés de production, Thèse de doctorat présentée l'INPG Spécialité : Automatique- Productique, 24/01/1996, 213 pages.

[TRENTESAUX 02]. Damien TRENTESAUX, Pilotage hétérarchique des systèmes de production, Mémoire de HDR Présentée à L'université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis (UVHC), Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique Industrielles et Humaines (LAMIH), Dans la spécialité Automatique et Informatique des Systèmes Industriels et Humains, 19/12/2002, 122 pages.

[VALENTIN-ROUBINET 98]. Claire VALENTIN-ROUBINET, Modélisation des systèmes hybrides : EAD supervisées par réseaux de petri : L'exemple d'un stockage de GAZ, ADPM98, Reims, France, 19-20 march 1998, 3rd International Conference on Automation of Mixed Processes, pages 142-149.

[VIOT 03]. Pascal VIOT, Méthodes d'analyse numérique « Modélisation Dynamique et Statistique des Systèmes Complexes », Cours de DEA, Laboratoire de Physique Théorique des Liquides, Paris Cedex 05, 17/01/2003, 108 pages.

[YIM 95]. P.YIM, A.LEFORT et A.HEBRARD, Les hypernets, rapport interne LAIL, école centrale ; Lille, 1995.

[ZASTROW 95]. Kai frederik ZASTROW, Mémoire de fin d'études (Diplomarbeit) dans le domaine « conception des automatismes », Spécification d'un modèle de référence pour l'aide au diagnostic des systèmes automatisés de production (SAP), Technische Universität Berlin, institut für Werkzeugmaschinen Und fertigungstechnik, Berlin, 07/04/1995, 92 pages.

[ZEMOURI 00]. Ryad ZEMOURI, Modélisation et simplification des processus stochastiques : application à l'optimisation de la maintenance chez PSA, Mémoire de DEA en informatique, automatique et productique présentée dans l'UFR des sciences et techniques de l'université de Franche-Comté, 28/09/2000, 95 pages.

[ZEMOURI 01]. Ryad ZEMOURI, Daniel RACOCEANU et Nouredine ZERHOUNI, A Petri Nets Graphic Method of Reduction Using Birth-Death Processes, Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics & Automation Seoul, Korea, May 21-26, 2001, 46-51 pages.

[ZEMOURI 02]. Ryad ZEMOURI, Daniel RACOCEANU, Nouredine ZERHOUNI et S. DURAND, Une approche hybride pour l'évaluation et l'amélioration des performances d'un service de maintenance, basée sur les modèles analytiques et la simulation, 2002, 12 pages.

[ZEMOURI 03]. Mohamed Ryad ZEMOURI, Contribution à la surveillance des systèmes de production à l'aide des réseaux de neurones dynamiques : Application à la e-maintenance, Thèse de doctorat présentée à L'UFR des Sciences et Techniques de l'Université de Franche-Comté en Automatique et Informatique, 28/11/ 2003, 264 pages.

[ZWINGELSTEIN 95]. Gilles ZWINGELSTEIN, Diagnostic des défaillances : théorie et pratique pour les systèmes industriels, Traité des Nouvelles Technologies, Série Diagnostic et Maintenance, Edition Hermès, Paris 1995.

Table des illustrations

Title: The combined use of stochastic Petri nets and Markov's process for the modelling, analysis and assessment of a production system performances : stamping line of Batna BAG Company.

Abstract :

One of the most important points in production system reliability and productivity field, consists in the availability of machines or production lines. The essential aim of this work is to found a framework for the study of manufacturing system performances in terms of availability and productivity by using discret event systems theories.

This study focuses on problems related to the availability and productivity of a stamping line affected by an unexpected event resulted from internal perturbations like machine failures type. Using stochastic Petri nets (SPN) and Markov process (MP) has many benefits such as combining a graphical modelling tool and a calculus tool both have a wide reputation. The main disadvantage of this technique is the necessity of graphs generation, which results for complex systems high costs for time and memory (The phenomenon is also known as the combinatory explosion phenomenon). To remedy to the presented difficulty we have proposed an approach based on stochastic generalized petri nets with internal synchronizations (SGPNISy) to elaborate a modular modelling of the production system in the sens that we adopt a functional decomposition (and not the common structural decomposition), this formalism is integrated with a calculus tool: Markov process in order to obtain an efficient mean for the analysis and assessment. During this study some simple case examples are presented in addition to stationary results.

Key words : Complex Production Systems, internal perturbation, machine's failure, DES, SPN, SGPNISy, MP, reliability, availability-productivity, modular modelling, combinatory explosion, performances evaluation.

Titre : L'utilisation conjointe des réseaux de Petri stochastiques et des processus de Markov pour la modélisation, l'analyse et l'évaluation des performances d'un système de production : ligne d'emboutissage de l'entreprise BAG Batna.

Résumé :

L'un des points important de la sûreté de fonctionnement (SdF) des systèmes de production (SdP), est la disponibilité de ces machines ou ces lignes de production. L'objectif de ce travail, est d'avoir une idée sur les performances d'un SdP manufacturier en termes de disponibilité et de productivité en utilisant les théories des systèmes à événement discrets.

L'étude s'intéresse au problème de la disponibilité et de la productivité d'une ligne d'emboutissage face à un événement non attendu dû à une perturbation interne de type panne-machine. L'utilisation des réseaux de petri stochastiques (RdPS) et des processus de Markov (PdM) présente l'avantage de combiner un outil de modélisation graphique et un outil de calcul tous deux très puissants dans leur domaine. Le principal inconvénient de cette technique est qu'elle nécessite la génération du graphe des marquages accessibles par les RdPS qui, pour des systèmes complexes, peut être d'une part très longue et, d'autre part, conduire à des PdM contenant un nombre d'états trop élevé pour être analysés directement (phénomène connu sous le nom d'explosion combinatoire). Pour palier à ce handicap nous avons utilisée une approche basée sur les réseaux de petri stochastiques généralisés à synchronisations internes (RdPSGSyI) pour établir une modélisation modulaire du SdP c'est-à-dire opérer une décomposition fonctionnelle (et non pas structurelle comme d'habitude) du SdP et de lui associer un outil de calcul, les PdM, forme un moyen puissant d'analyse et d'évaluation. Ceci implique en particulier l'utilisation de modèles simples et l'obtention de résultats stationnaires.

Mots clés : SdP complexe, perturbation interne, panne-machine, SED, RdPS, RdPSGSyI, PdM, SdF, diponibilité-productivité, modélisation modulaire, explosion combinatoire, évaluation de performances.

Propriétés structurelles et comportementales des RdP :

Parmi les propriétés structurelles nous pouvons citer :

- **Les conflits** dans un RdP (Figure I.1.1 (a) et (b)) ; lorsque une place se trouve en amont de plusieurs transitions. On note le conflit de la place $P_i : K = (P_i, \{T_1, T_2, \dots\})$; Où T_1, T_2, \dots Sont les transitions en concurrence.

On parle de *conflit structurel* car cela ne dépend pas du marquage. Dans certains cas, le franchissement de l'une des transitions peut empêcher le franchissement de l'autre. Voir (Figure I.1.1 (a)).

Le conflit devient *conflit effectif* quand il y a effectivement conflit, cela dépend du marquage. Voir Figure I.1.1 (b).

- **Le choix libre** dans un RdP (Figure I.1.1 (c)) ; lorsque pour tout conflit $K = (P_i, \{T_1, T_2, \dots\})$ Aucune des transitions ne possède d'autres places d'entrée que P_i .

- RdP **simple** (Figure I.1.1 (d)) ; lorsque chaque transition n'est concernée que par un conflit au plus.

- RdP **pur** (Figure I.1.1 (e)) ; lorsqu'il n'existe pas de place amont d'une transition qui soit aussi une place aval.

- Un RdP est un **graphe d'état** (Figure I.1.1 (f)) ; lorsque toute transition de cet RdP a une place d'entrée et place de sortie.

- Un RdP est un **graphe d'événement** (Figure I.1.1 (g)) ; lorsque toute place de cet RdP a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie.

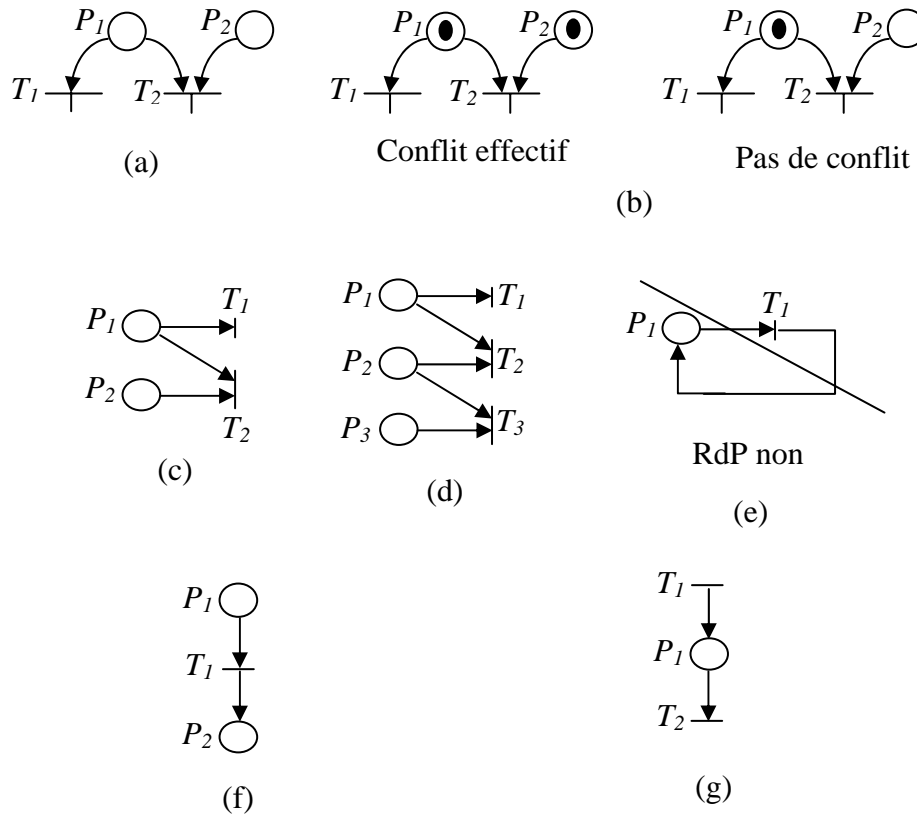


Figure I.1.1 : Les propriétés structurelles d'un RdP.

Parmi les propriétés comportementales nous pouvons citer :

- **L'accessibilité** ; un marquage M_i est dit accessible à partir du marquage M_0 , s'il existe (au moins) une séquence exécutable S qui mène de M_0 à M_i , c'est-à-dire $M_0[S \rangle M_i$, l'ensemble de marquages accessibles à partir de M_0 est noté par $*M_0$.

Les règles de franchissement définissent un graphe sur l'ensemble de marquages accessibles.

Une séquence S exécutable (ou une exécution de RdP) à partir du marquage M_0 est une séquence de franchissements de transitions $S = T_1 \dots T_m$ telle que $M_0[T_1 \rangle M_1 \dots M_{m-1}[T_m \rangle M_m$, et cela est noté par $M_0[S \rangle M_m$. Une séquence est exécutable si et seulement s'il existe un marquage initial M_0 à partir duquel elle est exécutable.

- **Le blocage** ; lorsqu'un marquage ne valide aucune transition. Le RdP ne peut plus évoluer. On parle alors d'état puit ou de blocage mortel.

- **La persistance** (Figure I.1.2) lorsque le choix de l'ordre de franchissement de transitions en cas de conflit est sans incidence sur les possibilités de franchissement en aval.

- Le RdP **borné** ; lorsque le nombre d'états accessibles par le marquage initial M_0 est fini.
- Le RdP **sauf** ; lorsque pour tout marquages les places contiennent au plus un jeton.
- Le RdP **conservatif** ; lorsque le nombre de jetons reste inchangé quel que soit le marquage.
- Le RdP **vivant** ; lorsque toutes les transitions sont franchissables par une séquence de tirs à partir de n'importe quel marquage atteignable par le marquage initial M_0 .
- Un RdP a un **état d'accueil** M_a ; lorsque pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible $M_i \in {}^*M_0$, il existe S_i tel que $M_i [S_i \rangle M_a$.
- Le RdP **quasi-vivant** ; lorsque toutes les transitions sont franchissables par une séquence de tir à partir du marquage initial M_0 .
- Le RdP **réinitialisable** ; lorsque pour tout marquage M_i atteignable par le marquage initial M_0 , il existe au moins une séquence de tir permettant de revenir au marquage initial M_0 .

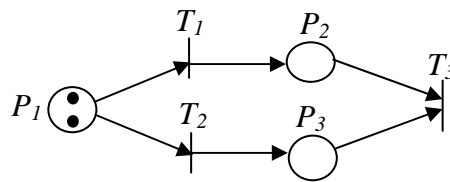


Figure I.1.2 : Exemple de RdP persistant.

Algèbre tensorielle :

Nous présentons succinctement dans cette annexe l'algèbre tensorielle classique⁴⁰. L'algèbre tensorielle est définie par deux opérateurs matriciels : les *produits tensoriels* (aussi appelés produits de Kronecker) et les *sommes tensorielles*. Nous définissons maintenant ces deux opérateurs.

Produit tensoriel classique :

Le produit tensoriel de deux matrices A et B , de dimensions $(p \times q)$ et $(m \times n)$ respectivement, est une matrice de dimensions $((p \times m) \times (q \times n))$. Cette matrice peut être vue comme une matrice avec $p \times q$ blocs, chacun avec dimension $m \times n$. La définition de chacun des éléments de la matrice résultante est faite en déterminant à quel bloc l'élément appartient et sa position interne dans le bloc.

Soit

A la matrice nommée A ;

$A \otimes B$ le produit tensoriel des matrices A et B ;

$A \times B$ le produit (traditionnel) des matrices A et B ;

$a_{i,j}$ l'élément dans la ligne i et la colonne j de la matrice A ;

$a_{[i,k],[j,l]}$ l'élément dans la ligne k du i -ème bloc horizontal et la colonne l du j -ème bloc vertical de la matrice A .

Prenons par exemple deux matrices A et B :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \end{bmatrix}$$

Le produit tensoriel défini par $C = A \otimes B$ est égal à

$$C = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B \end{bmatrix}$$

⁴⁰ On a ajouté le mot classique, pour ne pas confondre entre, l'algèbre tensorielle classique et un autre extension de l'algèbre tensorielle qui est l'algèbre tensorielle généralisée.

La différence fondamentale apportée par cette extension est l'introduction du concept d'*éléments fonctionnels*. Une matrice peut désormais être composée d'éléments constants (appartenant à \mathbb{R}) ou d'éléments fonctionnels. Un élément fonctionnel est une fonction à valeur dans \mathbb{R} , prenant comme arguments les indices de ligne d'une ou de plusieurs matrices. Nous nous présentons qu'à l'algèbre tensorielle classique.

$$C = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} & a_{1,1}b_{1,3} & a_{1,1}b_{1,4} & a_{1,2}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} & a_{1,2}b_{1,3} & a_{1,2}b_{1,4} \\ a_{1,1}b_{2,1} & a_{1,1}b_{2,2} & a_{1,1}b_{2,3} & a_{1,1}b_{2,4} & a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,2}b_{2,2} & a_{1,2}b_{2,3} & a_{1,2}b_{2,4} \\ a_{1,1}b_{3,1} & a_{1,1}b_{3,2} & a_{1,1}b_{3,3} & a_{1,1}b_{3,4} & a_{1,2}b_{3,1} & a_{1,2}b_{3,2} & a_{1,2}b_{3,3} & a_{1,2}b_{3,4} \\ \hline a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,1}b_{1,2} & a_{2,1}b_{1,3} & a_{2,1}b_{1,4} & a_{2,2}b_{1,1} & a_{2,2}b_{1,2} & a_{2,2}b_{1,3} & a_{2,2}b_{1,4} \\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,1}b_{2,2} & a_{2,1}b_{2,3} & a_{2,1}b_{2,4} & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} & a_{2,2}b_{2,3} & a_{2,2}b_{2,4} \\ a_{2,1}b_{3,1} & a_{2,1}b_{3,2} & a_{2,1}b_{3,3} & a_{2,1}b_{3,4} & a_{2,2}b_{3,1} & a_{2,2}b_{3,2} & a_{2,2}b_{3,3} & a_{2,2}b_{3,4} \end{bmatrix}$$

Dans cet exemple l'élément $C_{4,7} (= a_{2,2}b_{1,3})$ est dans le bloc (2,2) et sa position interne dans ce bloc est (1,3). Le produit tensoriel $C = A \otimes B$ est défini algébriquement par l'affectation de la valeur $a_{i,j}b_{k,l}$ à l'élément dans la position (k,l) du bloc (i,j) , c'est-à-dire :

$$c_{[i,k],[j,l]} = a_{i,j}b_{k,l}$$

avec $i \in [1 \dots p]$, $j \in [1 \dots q]$, $k \in [1 \dots m]$ et $l \in [1 \dots n]$

Cette représentation des éléments d'une matrice correspondant à un produit tensoriel induit un ordre sur les éléments $c_{[i,k],[j,l]}$ qui est l'ordre lexicographique sur les doublets d'indice.

Somme tensorielle classique :

Soit

$A \oplus B$ la somme tensorielle des matrices carrées⁴¹ A et B ;

$A + B$ la somme (traditionnelle) des matrices A et B ;

n_A la dimension (nombre de lignes et de colonnes) de la matrice carrée A ;

I_n la matrice identité de dimension n .

La somme tensorielle de deux matrices carrées A et B est définie comme la somme de facteurs normaux de chacune des matrices selon la formule :

$$A \oplus B = (A \otimes I_{n_B}) + (I_{n_A} \otimes B)$$

Prenons par exemple les matrices A et B définies par :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix}$$

⁴¹ Bien que le produit tensoriel soit défini pour des matrices non carrées, la somme tensorielle est définie exclusivement pour les matrices carrées.

La somme tensorielle définie par $C = A \oplus B$ est égale à

$$C = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & a_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{1,1} & 0 & 0 & a_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{1,1} & 0 & 0 & a_{1,2} \\ \hline a_{2,1} & 0 & 0 & a_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,1} & 0 & 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,1} & 0 & 0 & a_{2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 & b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & a_{1,2} & 0 & 0 \\ b_{2,1} & a_{1,1} + b_{2,2} & b_{2,3} & 0 & a_{1,2} & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & a_{1,1} + b_{3,3} & 0 & 0 & a_{1,2} \\ \hline a_{2,1} & 0 & 0 & a_{2,2} + b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ 0 & a_{2,1} & 0 & b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{2,1} & b_{3,1} & b_{3,2} & a_{2,2} + b_{3,3} \end{bmatrix}$$

La somme tensorielle $C = A \oplus B$ est définie algébriquement par l'affectation de la valeur $a_{i,j}\delta_{k,l} + \delta_{i,j}b_{k,l}$ à l'élément dans la position (k,l) du bloc (i,j) , c'est-à-dire :

$$c_{[i,k],[j,l]} = a_{i,j}\delta_{k,l} + \delta_{i,j}b_{k,l}$$

avec $i, j \in [1 \dots n_A]$ et $k, l \in [1 \dots n_B]$.

Le produit tensoriel (noté \odot) de deux matrices $[A]$ et $[B]$ de dimensions respectives $(p \times q)$ et $(m \times n)$ est défini par :

$$[C] = [A] \odot [B]$$

tel que :

$$[C_{i,i}] = [A_{i,i}] \oplus [B_{i,i}] \text{ si } i = j \text{ (blocs diagonaux)}$$

et

$$[C_{i,j}] = [A_{i,j}] \otimes [B_{i,j}] \text{ si } i \neq j \text{ (blocs **non** diagonaux)}$$

Généralisation :

Nous reprenons les deux cas *SM* et *MS*. Graphiquement, les modèles PdM générique pour un stock de capacité η_j peut se déduire du modèle PdM trouvé pour une capacité égale à 1 (Figure IV.9 et Figure IV.13) de la manière suivante :

Les deux graphes sont à deux dimensions (2D) :

- l'abscisse représente le nombre de pièces dans le stock S_j qui varie de 0 (aucune pièce) jusqu'à η_j (capacité maximale).
- l'ordonnée représente les états de la machine (R : Repos, M : Marche et P : Panne).

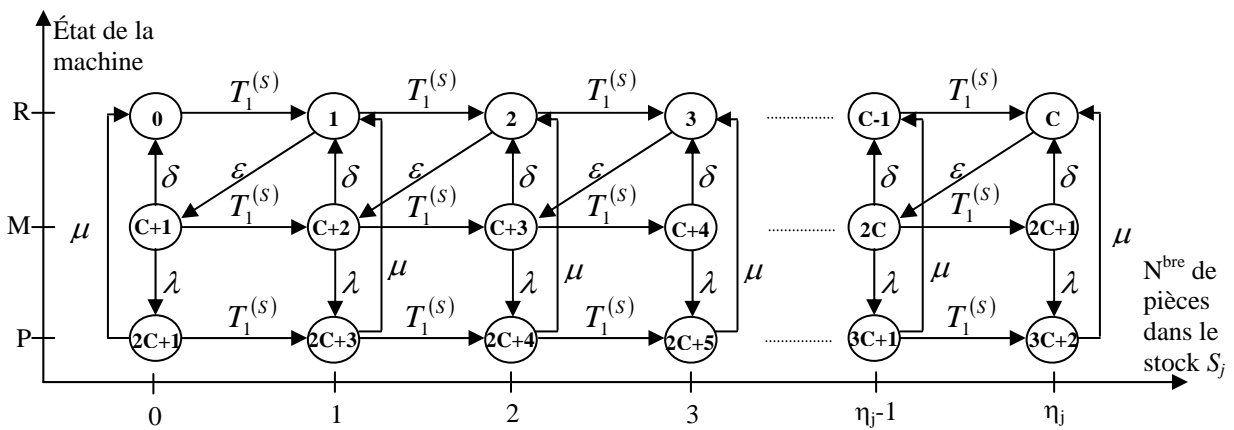


Figure III.2.1 : Modèle markovien générique pour la cellule *SM* « demi-série amont » avec un stock de capacité finie η_j .

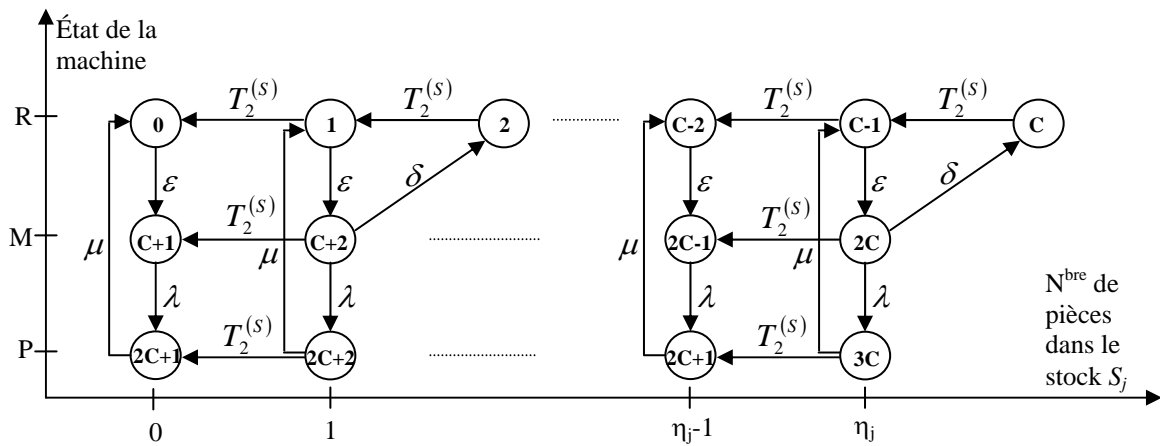


Figure III.2.2: Modèle markovien générique pour la cellule *MS* « demi-série aval » avec un stock de capacité finie η_j .

Sous forme matricielle, cela revient à une matrice $[G_R]$ de rang $3 \times (\eta_j + 1)$, le chiffre « 3 » représente les trois états de la machine, et le « +1 » décrit les états où aucune pièce n'est présente dans les stocks.

Par contre, pour le cas *MS*, par comparaison à ceux du cas *SM* détermine une différence uniquement pour les états où la capacité est maximale (égale à η_j). Par conséquent, le cas *MS* aura une matrice de rang $3 \times (\eta_j) + 1$.

Pour le cas *SM*, la matrice est la suivante :

$$[G_R]_{SM} =$$

	R0	R1	...	R η_j	M0	M1	...	M η_j	P0	P1	...	P η_j
R0	0	$T_1^{(s)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R1	0	0	$T_1^{(s)}$	0	ε	0	0	0	0	0	0	0
...	0	0	0	$T_1^{(s)}$	0	ε	0	0	0	0	0	0
R η_j	0	0	0	0	0	0	ε	0	0	0	0	0
M0	δ	0	0	0	0	$T_1^{(s)}$	0	0	λ	0	0	0
M1	0	δ	0	0	0	0	$T_1^{(s)}$	0	0	λ	0	0
...	0	0	δ	0	0	0	0	$T_1^{(s)}$	0	0	λ	0
M η_j	0	0	0	δ	0	0	0	0	0	0	0	λ
P0	μ	0	0	0	0	0	0	0	0	$T_1^{(s)}$	0	0
P1	0	μ	0	0	0	0	0	0	0	0	$T_1^{(s)}$	0
...	0	0	μ	0	0	0	0	0	0	0	0	$T_1^{(s)}$
P η_j	0	0	0	μ	0	0	0	0	0	0	0	0

Pour le cas *MS*, la matrice est la suivante :

$$[G_R]_{MS} =$$

	R0	R1	...	R η_j	M0	M1	...	M (η_j-1)	P0	P1	...	P (η_j-1)
R0	0	0	0	0	ε	0	0	0	0	0	0	0
R1	$T_2^{(s)}$	0	0	0	0	ε	0	0	0	0	0	0
...	0	$T_2^{(s)}$	0	0	0	0	ε	0	0	0	0	0
R η_j	0	0	$T_2^{(s)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M0	0	δ	0	0	0	0	0	0	λ	0	0	0
M1	0	0	δ	0	0	0	0	0	0	λ	0	0
...	0	0	0	δ	0	0	0	0	0	0	λ	0
M (η_j-1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	λ
P0	μ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P1	0	μ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
...	0	0	μ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P (η_j-1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Calcul des paramètres des machines :

Le taux moyen de chargement (ε_i) :

Le taux moyen de chargement (ε_i) caractérise la vitesse de la mise en route et du chargement d'une pièce dans la machine. Considérons une machine qui passe un temps moyen de 10 secondes pour charger 1 pièce. En prenant l'heure comme unité de temps, ce taux (ε_i) est donc égal à :

$$\varepsilon_i = \frac{1 \text{ pièce}}{10 \text{ secondes}} = \frac{1 \text{ pièce}}{\left(\frac{10}{3600}\right) \text{ heures}} = 360 \text{ pièces / heure.}$$

Le taux moyen de service (δ_i) :

De la même manière, si les tâches à effectuer par le produit brut se déroulent sans aucun incident, la machine M_i met un certain temps pour fabriquer le produit fini. Ce temps opératoire est caractérisé par un taux moyen de service (δ_i) (d'usinage ou de fabrication, etc.) d'une pièce par la machine M_i . En d'autres termes, c'est la cadence de sortie d'une pièce usinée (ou finie) depuis la machine M_i (par exemple, $\delta_i = 20$ pièces par heure). Après l'étude statistique que nous avons effectuée dans l'entreprise BAG une machine quelconque, des valeurs précises bien que, pouvant, dans certains cas, varier légèrement. Les taux ε_i et δ_i sont donc supposés constants.

Le taux moyen de défaillance (λ_i) :

Pour caractériser la fréquence d'occurrence des défaillances, un taux moyen de défaillance (λ_i) ou d'avarie est introduit. Il caractérise le nombre total de défaillances pendant la durée du service, c'est-à-dire la durée totale de fonctionnement de la machine M_i moins la durée des défaillances. Par exemple, une machine M_i ayant fonctionné pendant 8000 heures en service continu avec 5 défaillances dont les durées respectives sont 7 ; 22 ; 8.5 ; 3.5 et 9 heures :

$$\lambda_i = \frac{5 \text{ défaillances}}{[8000 - (7 + 22 + 8.5 + 3.5 + 9)] \text{ heures}} = 6.289 \cdot 10^{-4} \text{ défaillances / heure.}$$

Soit environ 0.0007 défaillances par heure ou 0.7 défaillances pour 1000 heures ou encore, 7 défaillances toutes les 10000 heures.

Le taux moyen de réparation (μ_i) :

Pour caractériser la vitesse des réparations, un taux moyen de réparation (μ_i) est introduit. Il caractérise le nombre total de réparations effectuées dans un ensemble groupant tous les temps de réparation. Reprenons le même exemple précédent, une machine M_i ayant fonctionné pendant 8000 heures en service continu avec 5 défaillances dont les durées respectives sont 7 ; 22 ; 8.5 ; 3.5 et 9 heures. Ces durées représentent les temps de remise en service donc de réparation (ou maintenance) et le

nombre de défaillances sont identique à celui des réparations. Par suite, le taux moyen de réparation est égal à :

$$\mu_i = \frac{5 \text{ réparations}}{(7 + 22 + 8.5 + 3.5 + 9) \text{ heures}} = 0.1 \text{ réparation / heure.}$$

Les attributs de base : *Les temps*

Nous définissons ici un certain nombre de temps d'état du système. Afin d'homogénéiser les définitions. Nous choisissons comme unité de temps de référence « l'heure ». On appelle Pr_{R_i} , Pr_{M_i} et Pr_{P_i} les probabilités de Repos, Marche et Panne de la machine M_i fournies par la résolution itérative.

Temps Total (TT) :

C'est le temps de référence couvrant toute la durée de fonctionnement du système de production manufacturier.

Certains auteurs [DANIEL-B 87] considèrent un temps total comme l'ensemble d'un temps requis et d'un temps non requis. Ce dernier représente le temps pendant lequel le système n'est pas mis en route pour servir et fabriquer des pièces. Il n'est pas très intéressant pour l'évaluation des performances et de la sûreté de fonctionnement des systèmes de production manufacturiers. Nous confondons alors temps total et temps requis [SASSINE 98].

Temps Requis (TRQ) :

C'est la durée pendant laquelle le système de production ou l'élément est effectivement engagé avec la volonté de produire.

Les modèles que nous avons utilisés n'intègrent pas les différentes politiques de maintenance, donc ne prennent pas en compte les arrêts du système autres que ceux induits par des défaillances. Il va de soi que, dans ce cas, le temps requis sera équivalent au temps total. En d'autres termes, étant donné que nous n'avons pas pris en compte la possibilité de mettre volontairement hors production nos machines « le temps non requis est nul et les machines sont toujours engagées à produire »

$$TT = TRQ$$

Temps de Bon Fonctionnement (TBF) :

C'est le temps pendant lequel le système produire des pièces sans anomalies tant au niveau de son fonctionnement propre que au niveau de la qualité des pièces produites. On appelle $TBF(M_i)$, le temps de bon fonctionnement de la machine M_i . On calcule ce temps, à partir des résultats de l'analyse markovienne par :

$$TBF(M_i) = Pr_{M_i} \times TRQ(M_i)$$

Pour chaque machine nous définissons également les deux durées suivantes :

Temps d'Arrêt Propre (TAP) :

Ce temps concerne les arrêts d'une machine qui sont dus d'une part à ses propres défaillances et, d'autre part, aux périodes d'arrêt pour maintenance⁴². Alors :

$$TAP = TP$$

⁴² Comme nos modèles ne prennent pas encore en compte les aspects maintenance, Temps d'Arrêt Propre et Temps de Panne sont identiques.

Avec les résultats issus de notre analyse markovienne, on calcule TAP par :

$$TAP = TP = Pr_{R_i} \times TT$$

Temps d'Arrêt Induit (TAI) :

Ce temps concerne les arrêts d'une machine qui sont dus, soit à une famine, soit à un bourrage, et qui sont donc la conséquence des défaillances d'autres éléments. Pour connaître ce temps, il faut d'abord calculer la probabilité Pr_{A_i} que la machine M_i soit en arrêt induit. Cette probabilité se calcule facilement en faisant la différence de la probabilité que la machine en isolation soit au repos et de la différence de la probabilité que la machine en isolation soit au repos et de la probabilité qu'elle soit au repos en ligne. La probabilité que la machine en isolation soit au repos est calculée très simplement en recherchant la distribution stationnaire du processus de Markov de la Figure. Cette probabilité vaut :

$$Pr_{R_i}^V = \frac{\mu_i(\delta_i + \lambda_i)}{\mu_i(\delta_i + \lambda_i) + \varepsilon_i(\lambda_i + \mu_i)}$$

On a alors, $Pr_{A_i} = Pr_{R_i} - Pr_{R_i}^V$

Le temps d'arrêt induit se calcule alors simplement par : $TAI = Pr_{A_i} \times TT$

Temps d'Engagement Propre (TEP) :

Ce temps prend en compte l'ensemble des temps effectifs où la machine s'est engagée à produire, y compris ses temps d'arrêts propres. Les temps d'arrêts induits qui sont considérés comme des temps d'attente pour cause de « famine » ou « bourrage » ne sont pas pris en compte.

$$TEP(M_i) = TBF(M_i) + TAP(M_i)$$